

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(5)

Научная статья
УДК 537.87

DOI: 10.18500/0869-6632-003182
EDN: YIOEBE

Трансформация каустических структур типа катастроф при распространении электромагнитных волн в холодной плазме

А. С. Крюковский, Д. В. Растворяев[✉]

Российский новый университет, Москва, Россия
E-mail: kryukovsky56@yandex.ru, rdv@rosnou.ru

Поступила в редакцию 24.03.2025, принята к публикации 23.05.2025,
опубликована онлайн 19.06.2025, опубликована 30.09.2025

Аннотация. Целью работы является исследование возможностей образования центров топологических каустических особенностей типа катастроф при зондировании электромагнитными волнами унимодального плазменного слоя. Центры каустических особенностей соответствуют областям фокусировок электромагнитных полей различных порядков. Поэтому их исследование является актуальной задачей. **Методы.** В статье разработан метод вычисления положения центров особенностей в расширенном пространстве параметров, к которым, помимо координат, относятся высота плазменного слоя, угол выхода луча, отношение плазменной частоты к рабочей частоте и кубичность. При вычислении лучевых траекторий использован метод бихарактеристик Гамильтона–Лукина. **Результаты.** Выполнено математическое моделирование на примере плоскослоистого плазменного слоя с кубической зависимостью электронной концентрации от высоты. Получены явные выражения для производных эйконала до восьмого порядка включительно, что обеспечивает возможность определения центров основных каспийных катастроф. Построены графики зависимостей координат, высоты отражения траектории от плазменного слоя, расстояния от источника излучения до плазменного слоя, угла выхода луча и отношения плазменной частоты к рабочей частоте от кубичности для катастрофы типа «бабочка». Показано, что высота отражения траектории от плазменного слоя, расстояние от источника излучения до плазменного слоя и высота особенности достигают максимальных значений для параболического слоя. Установлено, что особенность типа «бабочка» возникает даже тогда, когда непрерывной является не только сама функция, описываемая электронную концентрацию, но и её производная. **Заключение.** Разработанный подход позволяет находить центры не только катастрофы типа «бабочка», но и центры других топологических каспийных особенностей: «ключ», «ласточкин хвост», «вигвам», «звезда», что имеет большое практическое значение при изучении распространения радиоволн в ионосферной плазме.

Ключевые слова: каустические структуры, особенности, распространение радиоволн, бихарактеристическая система, волновые катастрофы.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 25-22-00096.

Для цитирования: Крюковский А. С., Растворяев Д. В. Трансформация каустических структур типа катастроф при распространении электромагнитных волн в холодной плазме // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 5. С. 615–628. DOI: 10.18500/0869-6632-003182. EDN: YIOEBE

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Transformation of caustic structures of the catastrophe type during the propagation of electromagnetic waves in cold plasma

A. S. Kryukovsky, D. V. Rastyagaev[✉]

Russian New University, Moscow, Russia

E-mail: kryukovsky56@yandex.ru, rdv@rosnou.ru

Received 24.03.2025, accepted 23.05.2025, available online 19.06.2025, published 30.09.2025

Abstract. The purpose of the work is to investigate the possibilities of formation of centers of topological caustic singularities of the catastrophe type during probing of a unimodal plasma layer by electromagnetic waves. The centers of caustic singularities correspond to the focusing regions of electromagnetic fields of different orders. Therefore, their study is an urgent task. **Methods.** The article develops a method for calculating the position of the centers of singularities in an extended parameter space, which in addition to coordinates include the height of the plasma layer, the angle of the ray exit, the ratio of the plasma frequency to the operating frequency, and cubicity. The Hamilton–Lukin bicharacteristic method is used to calculate the ray trajectories. **Results.** Mathematical modeling is performed using the example of a flat-layered plasma layer with a cubic dependence of the electron concentration on the height. Explicit expressions for the eikonal derivatives up to the eighth order inclusive are obtained, which makes it possible to determine the centers of the main cuspid catastrophes. Graphs are constructed for the dependences of coordinates, the height of the trajectory reflection from the plasma layer, the distance from the radiation source to the plasma layer, the ray exit angle, and the ratio of the plasma frequency to the operating frequency on cubicity for a butterfly-type catastrophe. It is shown that the height of the trajectory reflection from the plasma layer, the distance from the radiation source to the plasma layer, and the height of the singularity reach maximum values for a parabolic layer. It is established that a butterfly-type singularity occurs even when not only the function itself describing the electron concentration is continuous, but also its derivative. **Conclusion.** The developed approach allows us to find the centers of not only the “butterfly” type catastrophe, but also the centers of other topological cuspid singularities: “cusp”, “swallow tail”, “wigwam”, “star”, which is of great practical importance in studying the propagation of radio waves in ionospheric plasma.

Keywords: caustic structures, singularities, radio wave propagation, bicharacteristic system, wave catastrophes.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation (grant No 25-22-00096).

For citation: Kryukovsky AS, Rastyagaev DV. Transformation of caustic structures of the catastrophe type during the propagation of electromagnetic waves in cold plasma. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(5):615–628. DOI: 10.18500/0869-6632-003182

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Задачи исследования особенностей распространения и дифракции электромагнитных и акустических волн относятся к актуальным проблемам радиофизики. Этим вопросам посвящены многочисленные исследования, среди которых необходимо в первую очередь отметить работы Ю. В. Гуляева [1–4], а также работы В. Л. Гинзбурга [5], К. Г. Баддена [6], В. П. Маслова [7], К. Дэвиса и др. [8].

При асимптотическом описании процессов распространения и дифракции волн, когда длина волны много меньше характерных размеров среды распространения, наиболее популярными являются лучевые методы: метод геометрической оптики или геометрическая теория дифракции. В частности, лучевые методы являются линейными и позволяют находить решения в многолучевых областях на основе суперпозиции. Однако принцип суперпозиции нарушается в окрестности огибающих лучевых семейств — каустик и их особенностей, что приводит к нелинейным явлениям и необходимости дополнительных исследований [9–11]. Каустические поверхности являются областями повышенной амплитуды поля (области фокусировки) и разделяют пространство на зоны с разным числом лучей.

Крюковский А. С., Растиагаев Д. В.
Известия вузов. ПНД, 2025, т. 33, № 5

Классификации особенностей каустических структур посвящена теория особенностей дифференцируемых отображений, более известная как теория катастроф [12–15]. В двумерной задаче распространения волн, согласно работам [13, 14, 16], устойчивы только две особенности: сама каустика (катастрофа A_2) и каустическое остирё (катастрофа A_3 — «клюв»). В трёхмерном пространстве к ним добавляются ещё три особенности: «ласточкин хвост» (катастрофа A_4), «эллиптическая омбилика» (катастрофа D_4^-) и «гиперболическая омбилика» (катастрофа D_4^+). Однако на самом деле при наличии дополнительных параметров даже в двумерной задаче возникают сечения каустических особенностей более высоких порядков [17–20]. Оказывается, что при определённых значениях параметров возникают не только сечения особенностей, но и сами центры фокусировок [21]. В настоящей работе на примере неоднородного плазменного слоя (слоя ионосферной или лабораторной плазмы) разработана методика определения центров каустических каспоидных особенностей и выполнено численное моделирование.

1. Постановка задачи

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в плоскослоистой среде на основе лучевого подхода. Пусть диэлектрическая проницаемость среды зависит только от одной из трёх декартовых координат $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — координаты z : $\varepsilon(z, \mathbf{b})$, а вектор \mathbf{b} — это набор дополнительных параметров. Обозначим как $\mu(S, \rho)$ обобщенный эйконал, в котором S — это начальный параметр выхода луча: $S = k_x/k_0$, k_x — горизонтальная компонента волнового вектора k_x , а $k_0 = \omega/c$ — волновое число в пустоте (или вне плазмы), ω — круговая частота, c — скорость света в вакууме. Величина $\rho = (\mathbf{r}, \mathbf{b})$. Уравнения лучей (бихарактеристическая система Гамильтона–Лукина) имеют вид [22, 23]:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{k}} \Big/ \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{r}} \Big/ \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega}, \quad \Gamma = (\mathbf{k}, \mathbf{k}) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \quad (1)$$

$(\mathbf{k}, \mathbf{k}) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon = 0$ — это дисперсионное соотношение. Если среда распространения плоскослоистая и изотропная, то уравнения упрощаются, так как

$$\frac{d k_x}{dt} = \frac{d k_y}{dt} = 0. \quad (2)$$

Следовательно, компоненты волнового вектора k_x и k_y постоянные. В дальнейшем это позволяет рассматривать распространение сигнала в плоскости (x, z) и считать, что $k_z = 0$.

Таким образом, из бихарактеристической системы (1) остаются три уравнения:

$$\frac{d k_z}{dt} = \frac{\omega^2 \varepsilon'_z}{(\omega^2 \varepsilon)'_\omega}, \quad \frac{d z}{dt} = \frac{2 k_z c^2}{(\omega^2 \varepsilon)'_\omega}, \quad \frac{d x}{dt} = \frac{2 k_x c^2}{(\omega^2 \varepsilon)'_\omega}, \quad (3)$$

из которых можно исключить время t :

$$\frac{d k_z}{dx} = \frac{\omega^2 \varepsilon'_z}{2 k_x c^2}, \quad \frac{d z}{dx} = \frac{k_z}{k_x}. \quad (4)$$

Учитывая вид гамильтониана и (2), систему (4) можно представить в виде

$$\frac{dk_z}{dx} = \frac{k_0 \varepsilon'_z}{2 S}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\pm q}{S}, \quad q = \sqrt{\varepsilon - S^2}. \quad (5)$$

Знак «+» соответствует восходящей части лучевой траектории, а знак «–» — нисходящей (рис. 1).

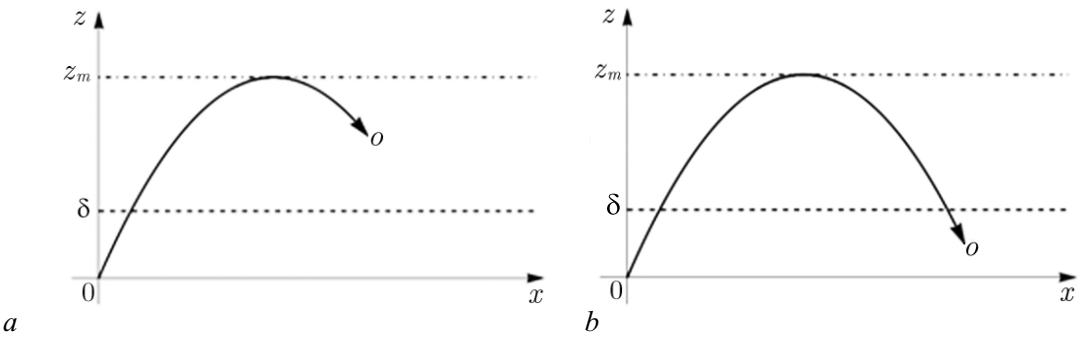


Рис. 1. Траектория луча в плазменном слое, *a* — особая точка внутри слоя, *b* — особая точка вне слоя

Fig. 1. Ray trajectory in the plasma layer, *a* — special point inside the layer, *b* — special point outside the layer

Хотя бихарактеристическая система, дополненная начальными условиями, в соответствии с теоремой Коши имеет единственное решение в фазовом пространстве, то есть в пространстве (\mathbf{r}, \mathbf{k}) , в конфигурационном пространстве (то есть в пространстве координат) лучи могут пересекаться, образуя области интерференции, и иметь огибающие — каустики, которые, в свою очередь, имеют особенности разных порядков, интерпретируемые как зоны фокусировок.

Центр фокусировки в плоскослоистой среде может быть найден как решение системы уравнений [6, 21, 24, 25]:

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \mu_3 = 0, \dots, \mu_n = 0, \mu_{n+1} \neq 0, \quad (6)$$

где $\mu_n = \partial^n \mu / \partial S^n$. Первое уравнение из списка (6) определяет траекторию луча. Если к нему добавить второе уравнение, то их решением является уравнение каустики (согласно теории катастроф — особенность A_2), три первых уравнения позволяют найти положение каутического остряя (особенность A_3), четыре уравнения определяют центр «ласточкиного хвоста» (особенность A_4), пять уравнений — это «бабочка» (A_5), шесть — «вигвам» (A_6), семь — «звезда» (A_7) и т. д. [21, 26–28]. Обращение в нуль первых n уравнений указывает на образование каспоидной катастрофы A_n при условии, что $\mu_{n+1} \neq 0$. Для того чтобы система уравнений имела решение, необходимы, кроме координат, дополнительные параметры, обозначенные в работе как \mathbf{b} , которые и обеспечивают необходимый порядок фокусировки (тип особенности). Подробнее они рассмотрены ниже.

2. Метод определения центров каспоидных катастроф

Если среда распространения — холодная изотропная плазма, то эффективную диэлектрическую проницаемость можно представить в виде

$$\varepsilon = 1 - a^2 N(z). \quad (7)$$

Будем считать, что плазменный слой начинается на высоте $z = \delta$ (см. рис. 1) и имеет максимум на высоте $z = z_M$. До высоты $z = \delta$ траектория луча — прямая линия. Тогда можно считать, что $a = \omega_p / \omega$, где ω_p — значение круговой плазменной частоты в максимуме слоя, а функция $N(z)$ описывает нормированное распределение электронной концентрации. В дальнейшем предположим, что координаты x, z и δ нормированы на полутолщину плазменного слоя $z_\Delta = z_M - \delta$. Луч отражается от ионосферы на высоте $z = z_m$ ($z_m < z_M$) и достигает каустики (или её особенности) в точке o . При этом сама точка o может находиться как внутри слоя (рис. 1, *a*), так и вне его (рис. 1, *b*). Следует отметить, что каустика или её особенность

не оставляет никаких следов на лучевой траектории, поскольку возникновение каустик это не индивидуальное, а групповое свойство лучевых траекторий.

Нормированный эйконал в плоскослоистой среде в случае, когда особая точка находится в слое (рис. 1, a), можно представить в виде [21, 29]:

$$\mu = Sx_o + C\delta + \int_{\delta}^{z_o} qdz + 2 \int_{z_o}^{z_m} qdz \quad (8)$$

или

$$\mu = Sx_o + C\delta + W_1 + 2V_1, \quad (9)$$

где

$$W_1 = \int_{\delta}^{z_o} qdz, \quad V_1 = \int_{z_o}^{z_m} qdz, \quad C = \sqrt{\varepsilon(0) - S^2}. \quad (10)$$

Если особая точка находится под слоем, то

$$\mu = Sx_o + C(\delta - z_o) + 2 \int_{\delta}^{z_m} qdz. \quad (11)$$

Если умножить μ на большой параметр $\Lambda = k_0 z_{\Delta} = \frac{\omega}{c} z_{\Delta}$, то можно получить значение эйконала в радианах.

На рис. 2 приведены сечения особенности каустической и лучевой структур катастрофы A_5 в случае, когда каустическая структура развита и центр фокусировки не лежит в плоскости (x, z) .

Рассмотрим выражение (9). Для того чтобы получить производные эйконала, следует продифференцировать (9) необходимое число раз (n) по параметру S , то есть найти

$$\mu_n = \mu_n^1 + \mu_n^2 + \mu_n^3 + \mu_n^4. \quad (12)$$

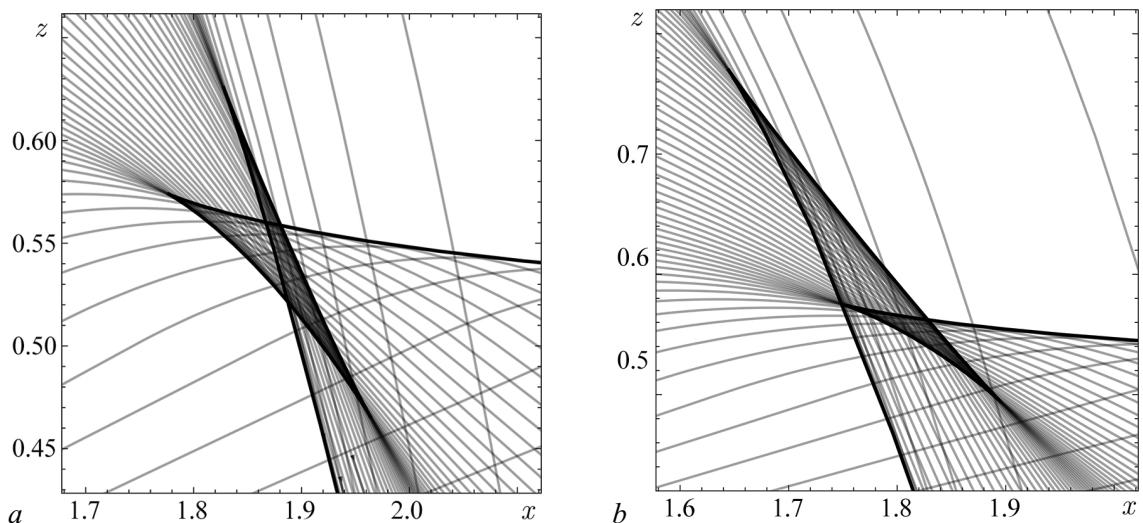


Рис. 2. Сечения особенности каустической и лучевой структур катастрофы A_5

Fig. 2. Sections of the singularities of the caustic and ray structures of the catastrophe A_5

Дифференцирование первых трёх слагаемых не вызывает затруднений. Первое слагаемое имеет только первую производную, отличную от нуля. Поэтому

$$\mu_1^1 = x_o, \quad \mu_n^1 = 0, \quad n > 1. \quad (13)$$

Во втором слагаемом дифференцируется C . Введя обозначения $h = S/C$, $C_n = \partial C / \partial S$, $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$, находим:

$$\begin{aligned} C_1 &= -h, \quad C_2 = -\frac{\varepsilon_0}{C^3}, \quad C_4 = -(1 + 5h^2) \frac{3\varepsilon_0}{C^5}, \quad C_5 = -h(3 + 7h^2) \frac{15\varepsilon_0}{C^6}, \\ C_6 &= -(1 + 14h^2 + 21h^4) \frac{45\varepsilon_0}{C^7}, \quad C_7 = -h(5 + 30h^2 + 33h^4) \frac{315\varepsilon_0}{C^8}, \\ C_8 &= -(5 + 135h^2 + 495h^4 + 429h^6) \frac{315\varepsilon_0}{C^9}. \end{aligned} \quad (14)$$

Поэтому

$$\mu_n^2 = \delta_n. \quad (15)$$

Для дифференцирования третьего слагаемого справедлива рекуррентная формула:

$$\frac{\partial W_n}{\partial S} = (2n - 3)S \cdot W_{n+1}, \quad (16)$$

в которой

$$W_n = \int_{\delta}^{z_o} q^{3-2n} dz. \quad (17)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial S} &= -S \cdot W_2, \quad \frac{\partial^2 W_1}{\partial S^2} = -W_2 - S^2 \cdot W_3, \quad \frac{\partial^3 W_1}{\partial S^3} = -3SW_3 - 3S^3 \cdot W_4, \\ \frac{\partial^4 W_1}{\partial S^4} &= -3(W_3 + 6S^2 \cdot W_4 + 5S^4 \cdot W_5), \quad \frac{\partial^5 W_1}{\partial S^5} = -45SW_4 - 150S^3 \cdot W_5 + 105S^5 \cdot W_6, \\ \frac{\partial^6 W_1}{\partial S^6} &= -45(W_4 + 15S^2 \cdot W_5 + 35S^4 \cdot W_6 + 21S^6 \cdot W_7), \\ \frac{\partial^7 W_1}{\partial S^7} &= -315S(5W_5 + 35S^2 \cdot W_6 + 63S^4 \cdot W_7 + 33S^6 \cdot W_8), \\ \frac{\partial^8 W_1}{\partial S^8} &= -315(5 + 140S^2 \cdot W_6 + 630S^4 \cdot W_7 + 924S^6 \cdot W_8 + 429S^8 \cdot W_9). \end{aligned} \quad (18)$$

Следовательно,

$$\mu_n^3 = \frac{\partial^n W_1}{\partial S^n}. \quad (19)$$

Перейдём теперь к вычислению четвёртого слагаемого. Продифференцируем V_1 по S . Учитывая, что вертикальная точка отражения волны от плазменного слоя определяется из условия

$$q = 0 \sim \varepsilon(z_m) = S^2, \quad (20)$$

находим

$$\frac{\partial V_1}{\partial S} = -S \int_{z_o}^{z_m} \frac{dz}{q}, \quad (21)$$

а это в силу условия (20) — несобственный интеграл. Дальнейшее дифференцирование (21) по S будет увеличивать степень q в знаменателе, и интеграл станет расходящимся. Чтобы избавиться от особенности в знаменателе, следует проинтегрировать (21) по частям. Тогда получаем сходящееся выражение, которое можно дифференцировать в дальнейшем:

$$\frac{\partial V_1}{\partial S} = -\frac{2S}{a^2 N_1} \Big|_{z=z_0} + \frac{2S}{a^2} \int_{z_0}^{z_m} \varphi_2 q dz, \quad \varphi_2 = \frac{N_2}{N_1^2}, \quad N_n = \frac{\partial N(z)}{\partial z^n} \quad (22)$$

Повторяя эту процедуру, получаем рекуррентное выражение:

$$\frac{\partial V_n}{\partial S} = -\frac{2S}{a^2} \left(\frac{\varphi_n q}{N_1} \Big|_{z=z_0} + \int_{z_0}^{z_m} \varphi_{n+1} q dz \right) = -\frac{2S}{a^2} \left(\frac{\varphi_n q}{N_1} \Big|_{z=z_0} + V_{n+1} \right), \quad (23)$$

в котором введено обозначение

$$V_n = \int_{z_0}^{z_m} \varphi_n q dz, \quad (24)$$

причем

$$\varphi_{n+1} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\varphi_n}{N_1} \right), \quad n \geq 2. \quad (25)$$

Пусть

$$E_n = \frac{1}{N_1^n} \frac{\partial^n N(z)}{\partial z^n}, \quad n \geq 2. \quad (26)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1, \\ \varphi_2 &= E_2, \\ \varphi_3 &= E_3 - 3E_2^2, \\ \varphi_4 &= E_4 - 10E_2E_3 + 15E_2^3, \\ \varphi_5 &= E_5 - 10E_3^2 - 15E_2E_4 + 105E_3E_2^2 - 105E_2^4, \\ \varphi_6 &= E_6 - 21E_2E_5 - 35E_3E_4 + 210E_4E_2^2 + 280E_2E_3^2 - 1260E_2^3E_3 + 945E_2^5, \\ \varphi_8 &= E_8 - 36E_2E_7 - 84E_3E_6 - 126E_4E_5 + 630E_6E_2^2 + 2520E_2E_3E_5 + 1575E_2E_4^2 + \\ &\quad + 2100E_3^2E_4 - 34650E_2^2E_3E_4 - 6930E_3^2E_5 - 15400E_2E_3^3 + 138600E_2^3E_3^2 + \\ &\quad + 51975E_4E_2^4 - 270270E_3E_2^5 + 135135E_2^7, \\ \varphi_9 &= E_9 - 45E_2E_8 - 120E_3E_7 - 210E_4E_6 - 126E_5^2 + 990E_2^2E_7 + 4620E_2E_3E_6 + \\ &\quad + 6930E_2E_4E_5 + 4620E_3^2E_5 + 5775E_3E_4^2 - 13860E_2^3E_6 - 83160E_2^2E_3E_5 - \\ &\quad - 138600E_2E_3^2E_4 - 51975E_2^2E_4^2 + 900900E_2^3E_3E_4 - 15400E_3^4 + 135135E_2^4E_5 + \\ &\quad + 600600E_2^2E_3^3 - 3153150E_2^4E_3^2 - 945945E_2^5E_4 + 4729725E_2^6E_3 - 2027025E_2^8. \end{aligned} \quad (27)$$

Дифференцируя четвёртое слагаемое в формуле (9), окончательно находим:

$$\mu_1^4 = -\frac{4S q}{a^2 N_1} + S \tilde{V}_2, \quad N_1 = \frac{\partial N(z_o)}{\partial z}, \quad (28)$$

$$\mu_2^4 = \tilde{V}_2 - \frac{4(q^2 - S^2)}{a^2 q N_1} - \beta_2 S^2 q - S^2 \tilde{V}_3, \quad (29)$$

$$\mu_3^4 = \frac{4(3d + d^3)}{a^2 N_1} + \beta_2 q^2 (d^3 - 3d) + \beta_3 q S^3 - 3S \tilde{V}_3 + S^3 \tilde{V}_4, \quad d = \frac{S}{q}, \quad (30)$$

$$\mu_4^4 = \frac{\beta_1}{q^5} + \beta_2 q (6d^2 - 3 + d^4) + \beta_3 q^3 (6d^2 - d^4) - \beta_4 q S^4 - 3 \tilde{V}_3 + 6S^2 \tilde{V}_4 - S^4 \tilde{V}_5, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mu_5^4 = 5 \frac{d\beta_1}{q^6} + \beta_2 (15d + 10d^3 + 3d^5) + \beta_3 q^2 (15d - 10d^3 - d^5) + \beta_4 q^4 (d^5 - 10d^3) + \\ + \beta_5 S^5 q + 15S \tilde{V}_4 - 10S^3 \tilde{V}_5 + S^5 \tilde{V}_6, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \mu_6^4 = 5 \frac{\beta_1}{q^7} (1 + 7d^2) + 15\beta_2 \frac{\varepsilon^3}{q^7} + 3\beta_3 q (5 - 15d^2 - 5d^4 - d^6) + \\ + \beta_4 q^3 (15d^4 + d^6 - 45d^2) + \beta_5 q^5 (15d^4 - d^6) - \beta_6 S^6 q + \\ + 15 \tilde{V}_4 - 45S^2 \tilde{V}_5 + 15S^4 \tilde{V}_6 - S^6 \tilde{V}_7, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mu_7^4 = 105 \frac{\beta_1}{q^8} (d + 3d^3) + 105\beta_2 S \frac{\varepsilon^3}{q^9} - 3\beta_3 (35d + 35d^3 + 21d^5 + 5d^7) + \\ + \beta_4 q^2 (3d^7 + 21d^5 + 105d^3 - 105d) + \beta_5 q^4 (105d^3 - 21d^5 - d^7) + \\ + \beta_6 q^6 (d^7 - 21d^5) + \beta_7 S^7 q - 105S \tilde{V}_5 + 105S^3 \tilde{V}_6 - 21S^5 \tilde{V}_7 + S^7 \tilde{V}_8, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \mu_8^4 = 105 \frac{\beta_1}{q^9} (1 + 18d^2 + 33d^4) + 105\beta_2 (1 + 9d^2) \frac{\varepsilon^3}{q^9} - 105\beta_3 \frac{\varepsilon^4}{q^9} + \\ + 3\beta_4 q (5d^8 + 28d^6 + 70d^4 + 140d^2 - 35) + \beta_5 q^3 (420d^2 - 210d^4 - 28d^6 - 3d^8) + \\ + \beta_6 q^5 (28d^6 + d^8 - 210d^4) + \beta_7 q^7 (28d^6 - d^8) - \beta_8 d^8 q^9 - 105 \tilde{V}_5 + \\ + 420S^2 \tilde{V}_6 - 210S^4 \tilde{V}_7 + 28S^6 \tilde{V}_8 - S^8 \tilde{V}_9. \end{aligned} \quad (35)$$

В выражениях (28)–(35) все величины вычисляются при $z = z_o$,

$$\tilde{V}_n = \frac{2^n}{a^{2(n-1)}} V_n, \quad \beta_1 = \frac{12\varepsilon^2}{a^2 N_1}, \quad \beta_n = \frac{2^{n+1}}{a^{2n} N_1} \varphi_n, \quad n \geq 2. \quad (36)$$

Перейдём теперь к численным результатам.

3. Численное моделирование

Рассмотрим плазменный слой с кубической зависимостью нормированной электронной концентрации от высоты z :

$$N(z) = \begin{cases} Q (2 + p - (1 + 2p) Q + p Q^2), & Q = z - \delta, \quad z \geq \delta, \\ 0, & z \leq \delta. \end{cases} \quad (37)$$

Если $p = 0$, то $N(z)$ – параболический плазменный слой [22, 23]:

$$N(z) = \begin{cases} Q (2 - Q), & Q = z - \delta, \quad z \geq \delta, \\ 0, & z \leq \delta. \end{cases} \quad (38)$$

Для того чтобы найти центр особенности A_5 («бабочка»), формально устойчивой только в четырёхмерном пространстве [19, 20], необходимо, чтобы в ноль обращались пять первых производных эйконала (6), а шестая была не равна нулю. Это возможно в пространстве пяти параметров: x_o, z_o, δ, S, a . Для этого нам достаточно численно решить четыре уравнения

$$\mu_2 = 0, \mu_3 = 0, \mu_4 = 0, \mu_5 = 0 \quad (39)$$

относительно последних четырёх переменных, поскольку x_o однозначно определяется из уравнения μ_1 . На рис. 3 и 4 представлены графики зависимостей исследуемых параметров в центре топологической особенности (катастрофы) типа «бабочка» (то есть в точке с координатами (x_o, z_o)) при различных значениях параметра p — коэффициента кубичности слоя. На рис. 3, a показана зависимость угла выхода луча θ из источника излучения от кубичности p ($\theta = \arccos S$). Поведение θ качественно различно на правой и левой части рисунка. Если $p < 0.5$, угол резко убывает, а при $p > 0.7$ после максимума ($\sim 49^\circ$) наблюдается медленное спадание.

Зависимости $a(p)$ (рис. 3, b), $\delta(p)$, $z_o(p)$ и $z_m(p)$ (рис. 4) имеют ярко выраженный максимум, правда, при разных значениях p . Функция $a(p)$ имеет максимальное значение при $p = 1$, когда отношение плазменной частоты к рабочей немного превышает 0.96, а зависимости $\delta(p)$, $z_o(p)$ и $z_m(p)$ имеют максимум при $p = 0$, когда плазменный слой становится параболическим. Для зависимости горизонтальной координаты особенности $x_o(p)$ максимум смещается в область отрицательных значений p (рис. 4, b).

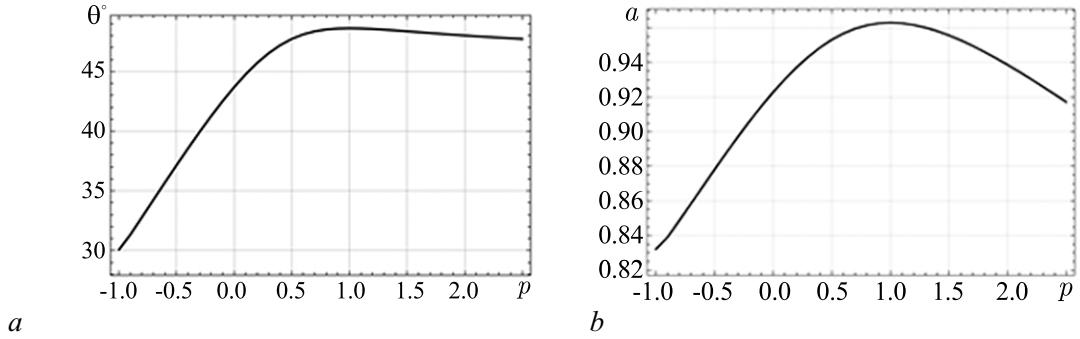


Рис. 3. Зависимость угла θ (a) и отношения частот a (b) от параметра кубичности p

Fig. 3. Dependence of the angle θ (a) and the frequency ratio a (b) on the cubicity parameter p

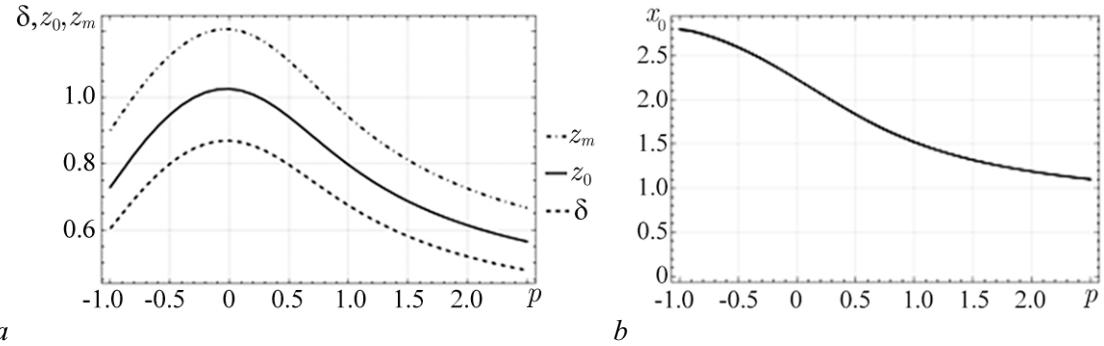


Рис. 4. Зависимость нижней границы слоя δ , положения центра особенности z_o и высоты отражения луча z_m (a) и координаты особенности x_o от кубичности p (b)

Fig. 4. Dependence of the lower boundary of the layer δ , the position of the center of the singularity z_o and the height of the ray reflection z_m (a) and the coordinate of the singularity x_o on the cubicity p (b)

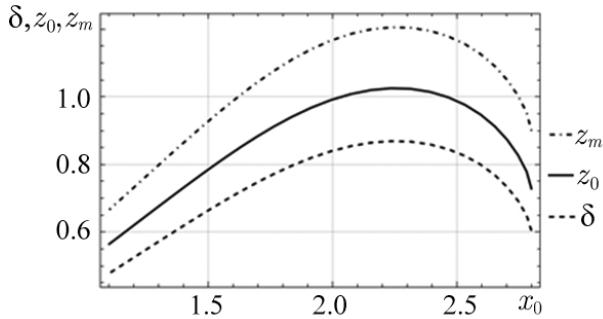


Рис. 5. Зависимость нижней границы слоя δ , положения центра особенности z_o и высоты отражения луча z_m от координаты x_o

Fig. 5. Dependence of the lower boundary of the layer δ , the position of the center of the singularities z_o and the height of the ray reflection z_m on the coordinate x_o

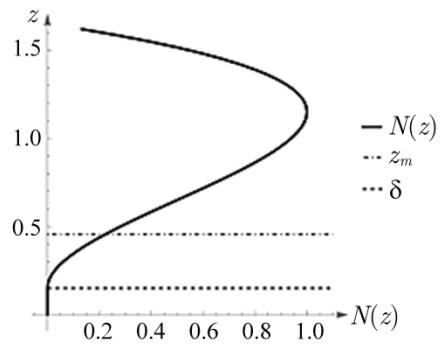


Рис. 6. Пример кубического слоя, у которого непрерывна функция $N(z)$ и её производная

Fig. 6. An example of a cubic layer in which the function $N(z)$ and its derivative are continuous

На рис. 5 показаны зависимости $\delta(x_o)$, $z_o(x_o)$ и $z_m(x_o)$, то есть расстояния до нижней границы слоя, высоты особенности и высоты отражения волны от горизонтальной координаты. Все три кривые имеют максимум, соответствующий (см. рис. 4, б) параболическому слою.

Может показаться, что возникновение особенностей высокого порядка в простом унимодальном слое объясняется наличием резкой границы слоя. Однако это не так. На рис. 6 приведем пример кубического слоя, у которого непрерывна не только сама функция $N(z)$, но и её производная $\partial N(z)/\partial z$:

$$N(z) = \begin{cases} Q^2(3 - 2Q), & Q = z - \delta, \quad z \geq \delta, \\ 0, & z \leq \delta. \end{cases} \quad (40)$$

Тем не менее при значениях параметров

$$a \approx 0.790607472644402, \quad \delta \approx 0.15076111644326395, \quad S \approx 0.9278253057832123 \quad (41)$$

в точке с координатами: $z_o \approx 0.25804076672826454$, $x_o \approx 2.576153757958269$ образуется катастрофа типа «бабочка». При этом угол выхода критического луча составляет $\theta \approx 21.901681711717607^\circ$, а высота отражения равна $z_m \approx 0.45597583256928126$.

Заключение

Таким образом, в работе изучены возможности образования центров топологических каустических особенностей типа катастроф при зондировании электромагнитными волнами плазменного слоя. В окрестности таких особенностей нарушается принцип суперпозиции лучей и возникают фокусировки волновых полей. Разработан метод вычисления положения центров особенностей в расширенном пространстве параметров и выполнено математическое моделирование на примере плазменного слоя с кубической зависимостью электронной концентрации от высоты. Показано, что при вариации отношения плазменной частоты к рабочей, высоты нижней границы плазменного слоя и угла наклона выхода луча при каждом значении кубичности в широком диапазоне возникает центр особенности типа «бабочка» (катастрофа A_5). Эти особенности возникают даже тогда, когда непрерывна не только зависимость электронной концентрации от высоты и её производной.

Список литературы

1. Гуляев Ю. В., Проклов В. В., Шкердин Г. Н. Дифракция света на звуке в твердых телах // Успехи физических наук. 1978. Т. 124, № 1. С. 61–111. DOI: 10.3367/UFNr.0124.197801b.0061.
2. Гуляев Ю. В., Плесский В. П. Распространение поверхностных акустических волн в периодических структурах // Успехи физических наук. 1989. Т. 157, № 1. С. 85–127. DOI: 10.3367/UFNr.0157.198901c.0085.
3. Гуляев Ю. В., Лагарьков А. Н., Никитов С. А. Метаматериалы: фундаментальные исследования и перспективы применения // Вестник Российской академии наук. 2008. Т. 78, № 5. С. 438–449.
4. Арманд Н. А., Гуляев Ю. В., Гаврик А. Л., Ефимов А. И., Матюгов С. С., Павельев А. Г., Савич Н. А., Самознаев Л. Н., Смирнов В. М., Яковлев О. И. Результаты исследований солнечного ветра и ионосфер планет радио физическими методами // Успехи физических наук. 2010. Т. 180, № 5. С. 542–548. DOI: 10.3367/UFNr.0180.201005j.0542.
5. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 685 с.
6. Budden K. G. Radio caustics and cusps in the ionosphere // Proc. R. Soc. Lond. A. 1976. Vol. 350, no. 1661. P. 143–164. DOI: 10.1098/rspa.1976.0100.
7. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: МГУ, 1965. 553 с.
8. Davis K. Ionospheric Radio Waves. Waltham: Blaisdell, 1969. 460 р.
9. Лукин Д. С., Палкин Е. А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982. 159 с.
10. Крюковский А. С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. Монография. М.: РосНОУ, 2013. 368 с.
11. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А., Растягаев Д. В. Теория катастроф в проблемах стационарной и нестационарной дифракции // В сб.: Труды X школы-семинара по дифракции и распространению волн. 7–15 февраля 1993 г., Москва, Россия. М.: МФТИ, 1993. С. 36–111.
12. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Часть I. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982. 304 с.
13. Thom R. Structural Stability and Morphogenesis. Reading: W. A. Benjamin, 1975. 348 р.
14. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 608 с.
15. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А. Равномерные асимптотики и угловые катастрофы // Докл. РАН. 1995. Т. 341, № 4. С. 456–459.
16. Whitney H. On singularities of mappings of Euclidean space 1. Mappings of the plane into the plane // Ann. Math. 1955. Vol. 62, no. 3. P. 374–410. DOI: 10.2307/1970070.
17. Орлов Ю. И. Особенности лучевых и каустических картин в неоднородном параболическом слое // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20, № 11. С. 1669–1675.
18. Крюковский А. С. Топология каустик и волновое поле в плазменном слое с параболическим распределением электронной концентрации // В сб.: Труды МФТИ. Серия «Общая и молекулярная физика». М.: МФТИ, 1979. Т. 11. С. 74–78.
19. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А. К вопросу о построении асимптотических решений в областях перекрытия прикаустических зон // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 11. С. 1375–1376.
20. Крюковский А. С., Растягаев Д. В. Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта // В сб.: Распространение и дифракция электромагнитных волн. М.: МФТИ, 1993. С. 20–37.
21. Крюковский А. С., Лукин Д. С. Определение центров топологических особенностей при фокусировке поля в плоскослоистой среде // В сб.: Труды 7-й конференции молодых ученых Московского физико-технического института. М.: МФТИ, 1982. С. 138–148.

Крюковский А. С., Растягаев Д. В.

Известия вузов. ПНД, 2025, т. 33, № 5

22. Казанцев А. Н., Лукин Д. С., Спиридонос Ю. Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере // Космические исследования. 1967. Т. 5, вып. 4. С. 593–600.
23. Hamilton W. R. On a General Method of Expressing the Paths of Light, and of the Planets, by the Coefficients of a Characteristic Function // Dublin University Review. 1833. Vol 1. P. 795–826.
24. Крюковский А. С., Лукин Д. С. Определение структуры коротковолнового поля в областях одномерной фокусировки в плоско-слоистой среде // В сб.: Труды VI конференции молодых ученых МФТИ. М.: МФТИ, 1981. С. 218–227.
25. Крюковский А. С., Растягаев Д. В. О необходимых и достаточных условиях образования каскодных катастроф // В сб.: Распространение и дифракция волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1989. С. 56–60.
26. Дорохина Т. В., Крюковский А. С., Лукин Д. С. Информационная система «Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике» // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. Т. 12, № 8. С. 71–74.
27. Kryukovskii A. S., Rastyagaev D. V., Lukin D. S. Construction of uniform asymptotic solutions of wave-type differential equations by methods of catastrophe theory // Russ. J. Math. Phys. 2009. Vol. 16, no. 2. P. 251–264. DOI: 10.1134/S1061920809020083.
28. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А., Растягаев Д. В. Теория катастроф и её приложения к описанию фокусировки, дифракции и распространения волновых полей // Труды Московского физико-технического института (национального исследовательского университета). 2009. Т. 1, № 2. С. 54–71.
29. Крюковский А. С., Лукин Д. С. Локальное асимптотическое описание электромагнитного поля в окрестности каустического остряя в плоско-слоистой среде // В сб.: Вопросы дифракции электромагнитных волн. М.: МФТИ, 1982. С. 40–45.

References

1. Gulyaev YV, Proklov VV, Shkerdin GN. Diffraction of light by sound in solids. Sov. Phys. Usp. 1978;21(1):29–57. DOI: 10.1070/PU1978v021n01ABEH005508.
2. Gulyaev YV, Plesskii VP. Propagation of acoustic surface waves in periodic structures. Sov. Phys. Usp. 1989;32(1):51–74. DOI: 10.1070/PU1989v032n01ABEH002676.
3. Gulyaev YV, Lagar'kov AN, Nikitov SA. Metamaterials: basic research and potential applications. Her. Russ. Acad. Sci. 2008;78(3):268–278. DOI: 10.1134/S1019331608030143.
4. Armand NA, Gulyaev YV, Gavrik AL, Efimov AI, Matyugov SS, Pavelyev AG, Savich NA, Samoznaev LN, Smirnov VM, Yakovlev OI. Results of solar wind and planetary ionosphere research using radiophysical methods. Phys. Usp. 2010;53(5):517–523. DOI: 10.3367/UFNe.0180.201005j.0542.
5. Ginzburg VL. Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma. M.: Nauka; 1967. 685 p. (in Russian).
6. Budden KG. Radio caustics and cusps in the ionosphere. Proc. R. Soc. Lond. A. 1976;350(1661): 143–164. DOI: 10.1098/rspa.1976.0100.
7. Maslov VP. Perturbation Theory and Asymptotic Methods. M.: Moscow University Press; 1965. 553 p. (in Russian).
8. Davis K. Ionospheric Radio Waves. Waltham: Blaisdell; 1969. 460 p.
9. Lukin DS, Palkin EA. Numerical Canonical Method in Problems of Diffraction and Propagation of Electromagnetic Waves in Inhomogeneous Media. M.: Moscow Institute of Physics and Technology Publishing; 1982. 159 p. (in Russian).
10. Kryukovsky AS. Uniform Asymptotic Theory of Edge and Corner Wave Catastrophes. Monograph. M.: Russian New University Publishing; 2013. 368 p. (in Russian).

11. Kryukovsky AS, Lukin DS, Palkin EA, Rastyagaev DV. Catastrophe theory in problems of stationary and non-stationary diffraction. In: Proceedings of the 10th School-Seminar on Diffraction and Wave Propagation. M.: Moscow Institute of Physics and Technology Publishing; 1993. P. 36–111 (in Russian).
12. Arnold VI, Varchenko AN, Gusein-Zade SM. Singularities of Differentiable Maps. Volume 1. Classification of Critical Points, Caustics and Wave Fronts. Boston: Birkhäuser; 2012. 282 p. DOI: 10.1007/978-0-8176-8340-5.
13. Thom R. Structural Stability and Morphogenesis. Reading: W. A. Benjamin; 1975. 348 p.
14. Poston T, Stewart I. Catastrophe Theory and Its Applications. New York: Dover Publications; 2013. 512 p.
15. Kryukovsky AS, Lukin DS, Palkin EA. Uniform asymptotics and corner catastrophes. *Doklady Mathematics*. 1995;341(4):456–459 (in Russian).
16. Whitney H. On singularities of mappings of Euclidean space 1. Mappings of the plane into the plane. *Ann. Math.* 1955;62(3):374–410. DOI: 10.2307/1970070.
17. Orlov YuI. Characteristics of ray patterns and caustic patterns in a nonhomogeneous parabolic layer. *Radiophys. Quantum Electron.* 1977;20(11):1148–1153. DOI: 10.1007/BF01037344.
18. Kryukovsky AS. Topology of caustics and wave field in a plasma layer with parabolic distribution of electron concentration. In: Proceedings of MIPT. Series “General and Molecular Physics”. Moscow: Moscow Institute of Physics and Technology Publishing; 1979. Vol. 11. P. 74–78. (in Russian).
19. Kryukovsky AS, Lukin DS, Palkin EA. On the issue of constructing asymptotic solutions in regions of overlapping near-caustic zones. *Radiophys. Quantum Electron.* 1982;25(11):1375–1376 (in Russian).
20. Kryukovsky AS, Rastyagaev DV. Study of stable focusing arising from violation of wave front symmetry. In: Propagation and Diffraction of Electromagnetic Waves. M.: Moscow Institute of Physics and Technology Publishing; 1993. P. 20–37 (in Russian).
21. Kryukovsky AS, Lukin DS. Determination of centers of topological features during field focusing in a plane-layered medium. In: Proceedings of the 7th Conference of Young Scientists of the Moscow Institute of Physics and Technology. M.: Moscow Institute of Physics and Technology Publishing; 1982. P. 138–148 (in Russian).
22. Kazantsev AN, Lukin DS, Spiridonov YuG. Method of studying the propagation of radio waves in an inhomogeneous magnetoactive ionosphere. *Cosmic Research* 1967;5(4):593–600 (in Russian).
23. Hamilton WR. On a general method of expressing the paths of light, and of the planets, by the coefficients of a characteristic function. *Dublin University Review*. 1833;1:795–826.
24. Kryukovsky AS, Lukin DS. Determination of the structure of a short-wave field in regions of one-dimensional focusing in a plane-layered medium. In: Proceedings of the VI Conference of Young Scientists of MIPT. M.: Moscow Institute of Physics and Technology Publishing; 1981. P. 218–227 (in Russian).
25. Kryukovsky AS, Rastyagaev DV. On necessary and sufficient conditions for the formation of cuspid catastrophes. In: Propagation and Diffraction of Waves in Inhomogeneous Media. M.: Moscow Institute of Physics and Technology Publishing; 1989. P. 56–60 (in Russian).
26. Dorokhina TV, Kryukovsky AS, Lukin DS. Information system “Wave catastrophes in radiophysics, acoustics and quantum mechanics”. *Electromagnetic Waves and Electronic Systems*. 2007;12(8): 71–74. (in Russian).
27. Kryukovskii AS, Rastyagaev DV, Lukin DS. Construction of uniform asymptotic solutions of wave-type differential equations by methods of catastrophe theory. *Russ. J. Math. Phys.* 2009;16(2):251–264. DOI: 10.1134/S1061920809020083.
28. Kryukovsky AS, Lukin DS, Palkin EA, Rastyagaev DV. The theory of catastrophes and its

- application to the description of a focusing, diffraction and propagation of wave fields. Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology. 2009;1(2):54–71 (in Russian).
29. Kryukovsky AS, Lukin DS. Local asymptotic description of the electromagnetic field in the vicinity of a caustic tip in a plane-layered medium. In: Questions of Diffraction of Electromagnetic Waves. M.: Moscow Institute of Physics and Technology Publishing; 1982. P. 40–45 (in Russian).



Крюковский Андрей Сергеевич – родился в Москве (1956). Окончил с отличием факультет общей и прикладной физики Московского физико-технического института по специальности «Автоматика и электроника» (1979). Доктор физико-математических наук (1996, МГУ). С 2021 года работает заведующим кафедрой информационных технологий и естественно-научных дисциплин Российского нового университета. Научные интересы – радиофизика, математическое моделирование, волновые катастрофы, дифракция и распространение радиоволн, дистанционное зондирование ионосферы. Опубликовал свыше 400 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 105005 Москва, ул. Радио, 22
Российский новый университет
E-mail: kryukovsky56@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-5670-0354
AuthorID (eLibrary.Ru): 4107



Растягаев Дмитрий Владимирович – родился в Воткинске (1967). Окончил с отличием факультет проблем физики и энергетики Московского физико-технического института по специальности «Прикладная математика и физика» (1991). Кандидат физико-математических наук (1994, МФТИ). С 2012 года работает проректором по информационным технологиям Российского нового университета. Научные интересы – радиофизика, математическое моделирование, волновые катастрофы, распространение радиоволн. Опубликовал свыше 160 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 105005 Москва, ул. Радио, 22
Российский новый университет
E-mail: rdv@rosnou.ru
ORCID: 0000-0001-9465-6040
AuthorID (eLibrary.Ru): 4365