

Устойчивость многомашинной энергосети с общей нагрузкой к подключению и отключению генераторов

B. A. Храменков¹, A. С. Дмитричев¹✉, B. И. Некоркин^{1,2}

¹Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН,
Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46, 603950, Россия

²Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, 603022, Россия

E-mail: hramenkov.vlad@ipfran.ru, ✉admitry@ipfran.ru, vnekorkin@ipfran.ru

Поступила в редакцию 21.07.2025, принята к публикации 05.09.2025,
опубликована онлайн 12.09.2025

Аннотация. Цель настоящего исследования — изучение устойчивости энергосети из произвольного числа синхронных генераторов, работающих на общую пассивную линейную нагрузку, к их отключению и подключению. **Методы.** В данной работе применяется численное моделирование работы энергосети и второй метод Ляпунова. **Результаты.** Получены условия безопасного отключения и подключения генераторов, при которых в измененной энергосети устанавливается синхронный режим. **Заключение.** Рассмотрена энергосеть из произвольного числа синхронных генераторов, работающих на общую пассивную линейную нагрузку. С помощью подхода, базирующегося на втором методе Ляпунова, найдены условия на параметры, обеспечивающие безопасное отключение генераторов, включающих, если таковой имеется, и генератор, входящий в “неоднородный” путь питания нагрузки, который отличается от остальных током и передаваемой мощностью. Полученные оценки подтверждены численно для энергосетей различного размера. Также численно прослежена эволюция области, отвечающей безопасному подключению генератора к энергосети из пяти генераторов.

Ключевые слова: энергосети, синхронные машины, синхронные режимы, устойчивость, мультистабильность, отключение и подключение генераторов

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-12-00245

Для цитирования: Храменков В. А., Дмитричев А. С., Некоркин В. И. Устойчивость многомашинной энергосети с общей нагрузкой к подключению и отключению генераторов // Известия вузов. ПНД. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003195. EDN: JGCTLP

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Stability of multi-machine power grid with a common load to connecting and disconnecting of generators

V. A. Khramenkov¹, A. S. Dmitrichev¹✉, V. I. Nekorkin²

¹A.V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia

²National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: hramenkov.vlad@ipfran.ru, ✉admitry@ipfran.ru, vnekorkin@ipfran.ru

Received 21.07.2025, accepted 05.09.2025, available online 12.09.2025

Abstract. The purpose of this work is studying the stability of the power grid, consisting of an arbitrary number of synchronous generators supplying a common passive linear load, to disconnection and connection of generators. *Methods.* In this paper, numerical modeling of the power grid operation and the second Lyapunov method are used. *Results.* Conditions for safe disconnection and connection of generators have been revealed, under which a synchronous mode is established in the disturbed power grid. *Conclusion.* The power grid consisting of an arbitrary number of synchronous generators supplying a common passive linear load is considered. Using the approach based on the second Lyapunov method, conditions on parameters are found that ensure safe disconnection of generators, including, if any, a generator involving in the “inhomogeneous” load supply path, that differs from the others in current and transmitted power. The obtained estimates are confirmed numerically for power grids of various sizes. The evolution of the area corresponding to the safe connection of a generator to the power grid of five generators is also numerically traced.

Keywords: power grids, synchronous machines, synchronous modes, multistability, disconnection and connection of generators

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation, project No. 24-12-00245.

For citation: Khramenkov VA, Dmitrichev AS, Nekorkin VI. Stability of multi-machine power grid with a common load to connecting and disconnecting of generators. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003195

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В настоящее время наблюдается непрерывный рост энергосетей, который сопровождается созданием крупных энергообъединений, состоящих из большого числа генераторов, узлов нагрузки – потребителей, внутрисистемных и межсистемных связей – линий (электро)передачи. Эксплуатация таких систем – очень тяжелая комплексная задача, для решения которой применяются различные по своей сложности и полноте описания подходы и методы [1–9].

При своей работе энергосети постоянно подвергаются воздействию различных возмущений, таких как колебания генерируемой и потребляемой мощности, короткие замыкания, срабатывания устройств релейной защиты и отключения линий передачи и генераторов и т.д. Возникающие при этом переходные процессы могут сопровождаться значительными колебаниями токов и напряжений. Последние из-за дальнейшего срабатывания устройств релейной защиты способны приводить как к единичным и кратковременным сбоям в энергоснабжении, затрагивающим относительно небольшие части системы, так и к каскадным сбоям [10, 11] с серьезными и масштабными отключениями энергоснабжения [12–16]. Таким образом, исследование устойчивости энергосетей к различным видам возмущений является одной из важных задач как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения.

Ранее изучались эффекты, возникающие при коммутации линий электропередачи [17–19], генераторов и потребителей [20], а также при однократных скачкообразных (импульсных) [21–28] и длительных шумовых [28–33] возмущениях генерируемой и потребляемой мощностей.

В наших предыдущих работах [28, 34] была рассмотрена энергосеть из синхронных генераторов, работающих на общую пассивную линейную нагрузку. Мы показали, что в случае, когда один из генераторов находится “ближе” к нагрузке (из-за более короткой линии передачи и/или продольной компенсации индуктивного сопротивления), для описания динамики такой энергосети может быть использована модель редуцированной эффективной сети в виде ансамбля с хаб-топологией (топологией “звезды”). Обнаружено, что в сети могут устанавливаться два разных типа синхронных режимов: однородный и неоднородный. Первый характеризуется равными мощностями и токами, текущими через все пути питания нагрузки, кроме одного. Второй имеет еще один дополнительный путь, отличающийся от остальных током и передаваемой мощностью. Причем токи, текущие по одному и тому же пути, но в разных режимах, различаются. Показана возможность существования однородного и неоднородных синхронных режимов, а также квазисинхронных и асинхронных режимов, выделены соответствующие области в пространстве параметров энергосети.

В настоящей статье мы продолжим исследование данной энергосети и рассмотрим ее устойчивость к отключению и подключению генераторов. С применением численного моделирования и подхода, базирующейся на втором методе Ляпунова, будут установлены условия безопасного отключения и подключения генераторов, при которых в измененной энергосети устанавливается синхронный режим. Заметим, что отключение генераторов, например, может быть связано со срабатыванием релейных (токовых) защит линий передачи из-за возникновения коротких замыканий или же с плановой остановкой генераторов на ремонт. В свою очередь подключение генераторов может происходить, например, при резком увеличении нагрузки. В этом случае посредством устройств АВР (автоматического включения резерва) действуются генераторы, реализующие так называемый резерв мощности [35].

В разделе 1 приводится архитектура энергосети и применяемая для ее описания динамическая модель. В разделе 2 обсуждаются общие вопросы устойчивости энергосети к изменению числа, входящих в нее генераторов. В разделе 3 анализируется устойчивость энергосети к отключению генераторов, а в разделе 4 – к их подключению. В заключении представлено краткое обсуждение результатов.

1. Архитектура энергосети и ее модель

Рассмотрим многомашинную энергосеть, принципиальная схема которой показана на рис. 1, a, а схема замещения типичного ее участка на рис. 1, b. В этой сети группа синхронных генераторов G_i ($i = \overline{1, n}$, $n \geq 3$) посредством передающих систем, включающих входные трансформаторы T_i^{in} (замещаются импедансами $Z_{i,T}^{in}$), выходные трансформаторы T_i^{out} (замещаются импедансами $Z_{i,T}^{out}$) и линии передачи (замещаются стандартной Т-образной схемой с импедансами Z_i^{line} и проводимостями Y_i^{sh}), питает одну общую пассивную линейную нагрузку (*load*), характеризуемую импедансом Z_{load} . Каждый генератор характеризуется амплитудой $|E_i|$ и углом (фазой) δ_i , создаваемой им электродвижущей силы (ЭДС) $E_i = |E_i|exp(i\delta_i)$; внутренним импедансом $Z_i^{int} = r_i^{int} + ix_i^{int}$, $x_i^{int} > 0$; постоянной инерции C_i своей врачающейся части (турбина и ротор); демпферным коэффициентом D_i , суммирующим влияние как механических (трение), так и электрических (появление асинхронной

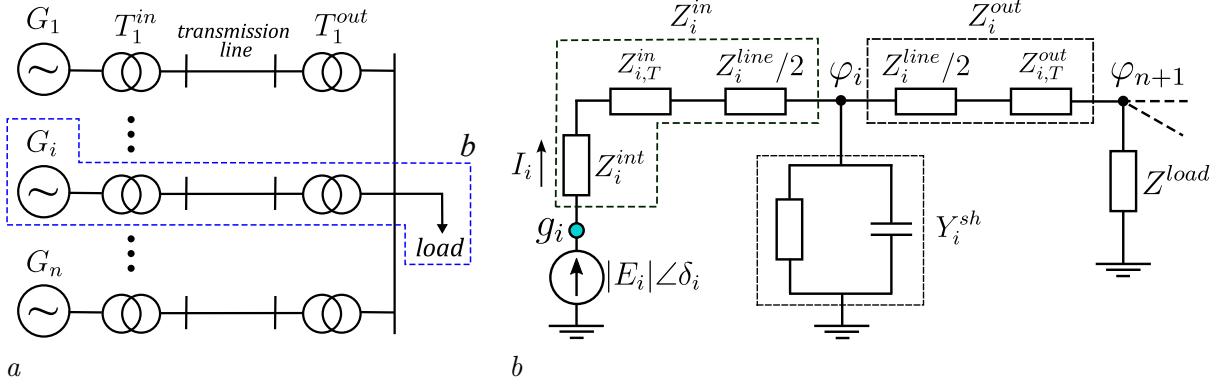


Рис. 1. Архитектура энергосети: *a* — принципиальная схема энергосети; *b* — схема замещения *i*-ого участка сети, содержащего *i*-ый генератор и нагрузку

Fig. 1. Architecture of power grid: *a* — schematic diagram; *b* — equivalent circuit of the *i*-th grid's part, containing the *i*-th generator and a load

мощности) факторов демпфирования; а также механической мощностью турбины $P_{T,i}$.

Предположим, что первый генератор G_1 , находится значительно ближе к нагрузке, чем остальные генераторы G_2, G_3, \dots, G_n , и/или на линии передачи этого генератора выполнена продольная компенсация индуктивности. Для определенности будем считать, что постоянные инерции и демпферные коэффициенты у всех генераторов одинаковы, т.е. $C_i \equiv C, D_i \equiv D (i = \overline{1, n})$, и все генераторы, кроме первого, а также их передающие системы имеют одинаковые параметры, т.е.

$$P_{T,k} = P_{T,2}, |E_k| = |E_2|, Z_k^{in} = Z_2^{in}, Z_k^{out} = Z_2^{out}, Y_k^{sh} = Y_2^{sh} (k = \overline{2, n}).$$

Это фактически означает, что генераторы имеют одинаковую конструкцию и одинаково связаны с нагрузкой, за исключением передающей системы 1-го генератора. В работе [34] было показано, что динамика такой энергосети может быть описана в рамках модели редуцированной эффективной сети следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_i = y_i, \\ \dot{y}_i = \Delta - \mu y_i - \sin(\varphi_i + \alpha) - \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \alpha), \\ i = \overline{1, N}, N = n - 1. \end{cases} \quad (1)$$

В безразмерной системе (1), определенной в цилиндрическом фазовом пространстве $G = S^N \times R^N$, переменные $\varphi_i = \delta_1 - \delta_{i+1}$ определяют относительные углы ЭДС (роторов) генераторов, переменные $y_i = \dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_{i+1}$ — мгновенные частоты изменения относительных углов, точкой обозначено дифференцирование по времени $\tau = \sqrt{K/C} t$. Параметр Δ пропорционален разности мощностей турбин первого и $(i+1)$ -го генераторов; параметр μ представляет собой нормированный демпферный коэффициент, а параметр α характеризует пассивную часть схемы замещения. Эти параметры выражаются через величины, характеризующие схему замещения, следующим образом

$$\Delta = \frac{A_1 - A_2}{K}, \mu = \frac{D}{\sqrt{CK}}, \alpha = \pi/2 - \arg(Y_{1,2}^{-1}),$$

где

$$K = |E_1 E_2 Y_{1,2}|, A_k = P_{T,k} - |E_k|^2 |Y_{k,k}| \sin(\alpha_{k,k}), \alpha_{k,k} = \pi/2 - \arg(Y_{k,k}^{-1}),$$

и

$$\begin{aligned} Y_{1,1} &= \frac{1}{Z_1^{in}} \left[1 - \frac{Z_1^{out}}{R_1} \left(1 + \frac{Z_1^{in}}{C_R R_1 Z_1^{out}} \right) \right], \\ \begin{cases} Y_{i,i} = \frac{1}{Z_2^{in}} \left[1 - \frac{Z_2^{out}}{R_2} \left(1 + \frac{Z_2^{in}}{C_R R_2 Z_2^{out}} \right) \right], & Y_{1,j} = \frac{1}{C_R R_1 R_2}, \\ Y_{i,j} = \frac{1}{C_R R_2^2}, & j \neq i, \\ i, j = \overline{2, n}, & \end{cases} \\ C_R &= \frac{1}{Z_{load}} + \frac{1}{R_1} (1 + Y_1^{sh} Z_1^{in}) + \frac{n-1}{R_2} (1 + Y_2^{sh} Z_2^{in}), \\ R_k &= Z_k^{in} + Z_k^{out} + Y_k^{sh} Z_k^{in} Z_k^{out}, \quad Z_k^{in} = Z_k^{line}/2 + Z_{k,T}^{in} + Z_k^{int}, \\ Z_k^{out} &= Z_k^{line}/2 + Z_{k,T}^{out}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $Y_{i,i}$ и $Y_{i,j}$ это так называемые собственные и взаимные комплексные проводимости ветвей генераторов. Более подробные сведения о выражениях, связывающих параметры системы (1) с параметрами схемы замещения можно найти в [34].

Система (1) имеет поглощающую область

$$G^+ = \{\phi_i \in S^1, y_i \in [y^-, y^+], i = \overline{1, N}\}, \quad (3)$$

где $y^\pm = \frac{1}{\mu} [\Delta \pm (2|\cos(\alpha)| + N - 1)]$, которая притягивает все траектории, с начальными условиями вне этой области, и содержит все аттракторы системы.

Система (1) симметрична относительно перестановки любой пары элементов. При этом получаемые всевозможными такими перестановками решения будут иметь один и тот же тип, т.е. если одно решение устойчиво, то и все остальные решения также будут устойчивыми.

Исследование системы (1) показало, что при параметрах из области

$$S_N^{hom,st} = \{\alpha, \Delta, \mu \mid 0 \leq \alpha \leq \pi/2, -f(N, \alpha) < \Delta < f_1(N, \alpha), \mu > 0\} \quad (4)$$

существует устойчивое однородное состояние равновесия

$$O_1^{hom}(\varphi_i = \varphi^{hom}; y_i = 0), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} f(N, \alpha) &= \sqrt{N^2 + 2N \cos(2\alpha) + 1}, \quad f_1(N, \alpha) = 1 + N \cos(2\alpha), \\ \varphi^{hom} &= \beta^{hom} + \arcsin\left(\frac{\Delta}{f(N, \alpha)}\right), \quad \sin \beta^{hom} = \frac{(N-1) \sin \alpha}{f(N, \alpha)}, \quad \cos \beta^{hom} = \frac{(N+1) \cos \alpha}{f(N, \alpha)}, \end{aligned} \quad (6)$$

которому соответствует однородный синхронный режим энергосети, характеризующемуся равными мощностями и токами, текущими через все пути питания нагрузки, кроме первого.

В свою очередь, при параметрах из области

$$S_N^{inh,st} = \{\alpha, \Delta, \mu \mid \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, -g(N, 1, \alpha) < \Delta < g_1(N, \alpha, \mu), \mu > 0\} \quad (7)$$

существуют N устойчивых неоднородных состояний равновесия

$$O_j^{inh,1}(\varphi_j = -\alpha + \pi - \Phi_1^{(1)}, \varphi_{i \neq j} = -\alpha + \Phi_1^{(1)}; y_i = 0), \quad j = \overline{1, N}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 g(N, 1, \alpha) &= \sqrt{(1 + N \cos 2\alpha)^2 + (N - 2)^2 \sin^2 2\alpha}, \quad g_1(N, \alpha, \mu) = \left\{ \Delta : \frac{\sqrt{4\kappa_c - \kappa_b^2}}{-\kappa_b \mu^2} = 1 \right\}, \\
 \kappa_b &= a' + d' + (N - 2)c', \quad \kappa_c = a'd' + (N - 2)c'd' - (N - 1)c'b', \\
 a' &= -2 \cos(\alpha) \cos(\Phi_1^{(1)} - \alpha), \quad b' = \cos(\Phi_1^{(1)} + 2\alpha), \quad c' = -\cos(\Phi_1^{(1)} - 2\alpha), \\
 d' &= 2 \cos(\alpha) \cos(\Phi_1^{(1)} + \alpha), \quad \Phi_1^{(1)} = \pi - \Omega_1^{inh} + \beta_1^{inh}, \quad \Omega_1^{inh} = \arcsin\left(\frac{\Delta}{g(N, 1, \alpha)}\right), \\
 \sin \beta_1^{inh} &= \frac{(N - 2) \sin 2\alpha}{g(N, 1, \alpha)}, \quad \cos \beta_1^{inh} = \frac{N \cos 2\alpha + 1}{g(N, 1, \alpha)},
 \end{aligned} \tag{9}$$

каждому из которых соответствует неоднородный синхронный режим энергосети, в котором, помимо первого, есть еще один “неоднородный” $(j + 1)$ -ый путь питания нагрузки, отличающийся от остальных током и передаваемой мощностью.

Кроме того, показана возможность существования однородного и неоднородных синхронных режимов, а также квазисинхронных и асинхронных режимов.

Далее исследуем поведение энергосети, изначально работающей в одном из синхронных режимов, при отключении и подключении генераторов.

2. О безопасном отключении и подключении генераторов

Будем считать, что отключение (подключение) генераторов происходят быстро по сравнению с характерными временами эволюции измененной энергосети. В этом случае ее начальное состояние будет полностью (при отключении) или частично (при подключении) определяться синхронным режимом исходной энергосети, т.е. координатами соответствующего состояния равновесия системы (1). Предположим также, что возможно отключение любых генераторов, кроме первого, а параметры подключаемых генераторов и их передающих систем такие же как и у большинства генераторов исходной энергосети. В этом случае динамика измененной энергосети будет по-прежнему описываться системой вида (1) с учетом ее нового размера и соответствующим образом переопределенных параметров α, Δ и μ (см. выражение для C_R в (2)). Найдем условиях, при которых можно пренебречь изменением параметров α, Δ и μ при переходе от исходной к измененной энергосети. Для этого рассмотрим упрощенную схему замещения линии передачи, состоящую из последовательно соединенных активного и реактивного сопротивлений. Тогда передающая система i -го генератора может быть замещена импедансом $Z_i = r_i + ix_i$, поэтому формулы для $Y_{i,i}$ и $Y_{i,j}$ (см. (2)) примут вид

$$\begin{cases} Y_{1,1} = [1 - Z_2 Y^*] / Z_1, \\ Y_{i,i} = [1 - Z_1 Y^*] / Z_2, \quad Y_{1,j} = Y^*, \\ Y_{i,j} = [Y^* Z_1] / Z_2, \quad j \neq i, \\ i, j = \overline{2, n}, \end{cases}$$

где $Y^* = Z_{load} / [Z_1 Z_2 + Z_{load} Z_2 + N Z_{load} Z_1]$. Заметим, что $Y_{i,i}$ и $Y_{i,j}$ зависят от числа генераторов только посредством Y^* . Следовательно, все различия между параметрами α, Δ и μ исходной и измененной энергосетей обусловлены именно Y^* . Предположим, что линия передачи первого генератора имеет лишь активное сопротивление, т.е. $Z_1 \approx r_1$, что характерно, например, для кабельной линии [3]. Тогда

$$Z^* = (Y^*)^{-1} = r_2 \left(1 + \frac{r_1}{r_{load}} \right) + N r_1 + ix_2 \left(1 + \frac{r_1}{r_{load}} \right).$$

Нетрудно видеть, что при изменении N меняется только реальная часть Z^* . Таким образом, при отключении ($Z^* \rightarrow Z_-^*; N \rightarrow N - m; N - m > 1$) или подключении ($Z^* \rightarrow Z_+^*; N \rightarrow N + m; N > 1$) генераторов имеем

$$Re(Z_{\mp}^*) = r_2 \left(1 + \frac{r_1}{r_{load}} \right) + Nr_1 \mp mr_1 > (r_2 + Nr_1) \mp mr_1,$$

где m – число отключаемых (подключаемых) генераторов. Отсюда видно, что при

$$mr_1 / [r_2 + Nr_1] \ll 1, \quad (10)$$

$$Re(Z_{\mp}^*) \approx Re(Z^*).$$

Условие (10) выполняется, когда число отключаемых (подключаемых) генераторов относительно мало по сравнению с числом исходных генераторов ($m \ll N$), а также если $r_1 \ll r_2$. Последнее имеет место при выполнении условий перехода к редуцированной эффективной сети, т.е. в рассматриваемом нами здесь случае. Тогда при отключении или подключении генераторов величины Z^* и Y^* остаются почти неизменными и, следовательно, параметры α, Δ и μ тоже не претерпевают значительных изменений.

Заметим, что подключение и отключение генераторов может быть безопасным только в том случае, если в измененной энергосети, как и в исходной, существует устойчивый синхронный режим. Поэтому, прежде всего, необходимо наличие непустой области пересечения областей существования устойчивых состояний равновесия систем (1), отвечающих исходной и измененной энергосетям. Нетрудно показать, что такая область (обозначим ее через a) существует при любых соотношениях размеров исходной и измененной энергосетей, параметры которых удовлетворяют условию (10). В общем случае область a состоит из трех подобластей $a_i, i = 1, 2, 3$, отвечающих различным сочетаниям устойчивых состояний равновесия исходной и измененной систем (1). Возможные сочетания приведены в таблице (1), где через N_- и N_+ обозначены соответственно размеры наименьшей и наибольшей из энергосетей, т.е. при отключении (подключении) размер исходной энергосети равен N_+ (N_-), а измененной – $N_- = N_+ - m$ ($N_+ = N_- + m$).

$\begin{array}{c} N \\ \diagdown \\ a_i \end{array}$	$N_- > 1$	$N_+ > 2$
a_1	O_1^{hom}	O_1^{hom}
a_2	O_1^{hom}	O_1^{hom} и $O_j^{inh,1}, j = 1, 2, \dots, N_+$
a_3	O_1^{hom} и $O_j^{inh,1}, j = 1, 2, \dots, N_-$	O_1^{hom}

Таблица 1 Сочетания устойчивых состояний равновесия исходной и измененной систем (1).

Если параметры исходной и измененной энергосетей принадлежат области a_1 , то в них существуют лишь однородные синхронные режимы, отвечающие состояниям равновесия O_1^{hom} (см. (5)) соответствующих систем (1). Если же параметры принадлежат области a_2 , то в исходной энергосети в случае отключения генераторов ($N = N_+$) имеются как однородный, так и неоднородные синхронные режимы, отвечающие состояниям равновесия O_1^{hom} и $O_j^{inh,1}$ (см. (8)) соответствующей системы (1), а в случае подключения генераторов ($N = N_-$) имеется лишь однородный синхронный режим, отвечающий состоянию равновесия O_1^{hom} . У измененной энергосети в случае отключения генераторов ($N = N_-$) имеется лишь однородный синхронный режим, а в случае подключения генераторов ($N = N_+$) имеются как однородный, так и неоднородные синхронные режимы. Наконец, в области

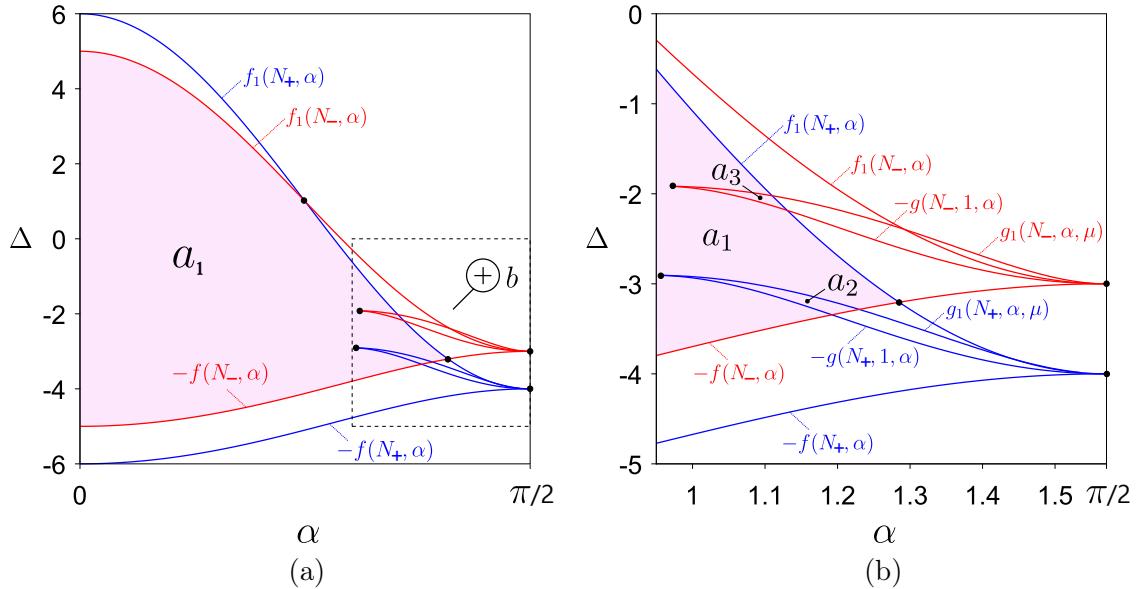


Рис. 2. Разбиение плоскости параметров (α, Δ) – a и ее увеличенные фрагменты – b на подобласти $a_i \in a$, отвечающие различным сочетаниям устойчивых состояний равновесия исходной и измененной систем (1), описывающих энергосети до и после отключения/подключения генераторов. Значения параметров $N_- = 4$, $N_+ = 5$, $\mu = 3$.

Fig. 2. Partition of the (α, Δ) -parameter plane – a and its enlarged fragment – b into the subregions $a_i \in a$, corresponding to various combinations of stable steady states of the initial and changed systems (1), describing the power grids before and after disconnecting/connecting generators. The parameter values: $N_- = 4$, $N_+ = 5$, $\mu = 3$.

a_3 – сочетание синхронных режимов исходной и измененной энергосетей полностью противоположно a_2 . Таким образом, безопасное отключение генераторов всегда ассоциировано с установлением однородного синхронного режима в измененной энергосети, в то время как безопасное подключение генераторов может быть ассоциировано с установлением в ней как однородного, так и неоднородного синхронного режима.

На рис. 2 приведено разбиение плоскости параметров (α, Δ) на подобласти a_i для случая отключения генератора от системы из 6 генераторов (или соответственно подключения генератора к системе из 5 генераторов). Отметим, что из-за специфики кривых g и g_1 , области a_2 и a_3 с уменьшением параметра μ сокращаются и при некоторых значениях этого параметра исчезают. Также каждая из областей a_i , $i = 1, 2, 3$, сокращается при увеличении числа одновременно отключаемых/подключаемых генераторов. При этом, существуют пороговые значения числа таких генераторов, зависящие от параметра μ , при которых области a_2 и a_3 полностью исчезают.

3. Условия безопасного отключения генераторов

Рассмотрим теперь более детально отключение генераторов от энергосети. В общем случае, возможно три различных сценария отключения. Во-первых, исходная энергосеть перед отключением может работать в однородном синхронном режиме (области a_1 – a_3 при $N = N_+$), отвечающем состоянию равновесия $O_1^{hom}(N_+)$. Тогда измененная энергосеть ($N = N_-$) сразу после отключения будет находиться в следующем однородном состоянии

$$\vec{v}^1 = \left\{ \varphi_i = \varphi^{hom}(N_+), y_i = 0, i = \overline{1, N_-} \right\}, \quad (11)$$

Во-вторых, энергосеть изначально может работать в одном из неоднородных синхронных режимов (область a_2 при $N = N_+$). Допустим, что перед отключением энергосеть находилась в синхронном режиме, отвечающем состоянию равновесия $O_j^{inh,1}(N_+)$. Как отмечалось в разделе 1, в данном режиме энергосети есть еще один “неоднородный” ($j + 1$)-ый путь питания нагрузки, включающий ($j + 1$)-ый генератор, который также, как и первый, отличается от остальных током и передаваемой мощностью. Поэтому состояние энергосети после отключения будет зависеть от набора отключаемых генераторов. Если отключается в том числе ($j + 1$)-ый генератор, входящий в дополнительный “неоднородный” путь питания нагрузки, то после отключения энергосеть будет находиться в следующем однородном состоянии

$$\vec{v}^2 = \left\{ \varphi_i = -\alpha + \Phi_1^{(1)}(N_+), y_i = 0, i = \overline{1, N_-} \right\}. \quad (12)$$

Если же ($j + 1$)-ый генератор не входит в число отключаемых, то после отключения энергосеть будет находиться в одном из следующих неоднородных состояний

$$\begin{aligned} \vec{v}_k^3 = & \left\{ \varphi_k = -\alpha + \pi - \Phi_1^{(1)}(N_+), y_k = 0, \right. \\ & \left. \varphi_i = -\alpha + \Phi_1^{(1)}(N_+), y_i = 0, i = \overline{1, N_-}, i \neq k \right\}, \\ k = & \overline{1, N_- - 1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, однако, что в силу перестановочной симметрии системы (1), режимы, устанавливаемые в измененной энергосети с любого из этих состояний, будут иметь идентичные характеристики устойчивости. Поэтому достаточно проанализировать поведение энергосети, используя только одно из состояний \vec{v}_k^3 в качестве начального.

Найдем последовательно условия на параметры, при которых с каждого из начальных состояний $\vec{v}^1 - \vec{v}^3$ в измененной энергосети устанавливается синхронный режим, т.е. условия безопасного отключения генераторов в соответствующей исходной энергосети.

Заметим, что в случае однородных начальных состояний \vec{v}^1 и \vec{v}^2 можно получить аналитическую оценку области установления синхронного режима. Действительно, из-за наличия у системы (1) перестановочной симметрии любое ее решение для однородных начальных условий должно иметь вид

$$\varphi_i(t) = \varphi(t), y_i(t) = y(t), i = \overline{1, N_-}. \quad (14)$$

где функции $\varphi(t)$ и $y(t)$ подчиняются следующей системе

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y, \\ \dot{y} = \Delta - \mu y - f(N_-, \alpha) \sin(\varphi - \beta^{hom}(N_-, \alpha)), \end{cases} \quad (15)$$

После преобразований

$$\tau_{new} = f_{1/2}\tau, \varphi_{new} = \varphi - \beta^{hom}(N_-, \alpha), y_{new} = y/f_{1/2}, \gamma = \Delta/f_{1/2}^2, \lambda = \mu/f_{1/2},$$

где $f_{1/2} = \sqrt{f(N_-, \alpha)}$, получим систему на цилиндре ($G = S^1 \times R^1$) вида

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{new} = y_{new}, \\ \dot{y}_{new} = \gamma - \lambda y_{new} - \sin \varphi_{new}, \end{cases} \quad (16)$$

где точной обозначена производная по τ_{new} . Система (16) описывает, в частности, динамику маятника в вязкой среде (λ), находящегося под действием постоянного внешнего момента

(γ) , и динамику точечного сверхпроводящего джозефсоновского контакта. Динамика системы (16) подробно изучена и широко представлена в литературе (см., например, [36–38]).

Из определения области $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ следует, что $|\Delta| < f(N_-, \alpha)$, поэтому рассмотрим систему (16) при $|\gamma| < 1$. Известно, что система в этом случае имеет два состояния равновесия:

$$O_1(\varphi_{new} = \varphi_1, y_{new} = 0) \text{ и } O_2(\varphi_{new} = \varphi_2, y_{new} = 0),$$

где $\varphi_1 = \arcsin \gamma$, $\varphi_2 = \pi - \arcsin \gamma$. Состояние равновесия O_1 является устойчивым узлом (или фокусом) и отвечает однородному синхронному режиму измененной энергосети, а O_2 – седлом.

Если при этом

$$\lambda > \lambda^* \approx 1.22 \left[\text{т.е. } \mu > \lambda^* \sqrt{f(N_-, \alpha)} \right], \quad (17)$$

или

$$\lambda \leq \lambda^* \text{ и } |\gamma| < \gamma^T(\lambda) \left[\text{т.е. } \mu \leq \lambda^* \sqrt{f(N_-, \alpha)} \text{ и } |\Delta| < f(N_-, \alpha) \gamma^T \left(\mu / \sqrt{f(N_-, \alpha)} \right) \right], \quad (18)$$

где $\gamma^T(\lambda)$ – кривая Трикоми, то состояние равновесия O_1 является глобально асимптотически устойчивым и устанавливается в системе (16) с любых начальных условий, в том числе отвечающих состояниям \vec{v}^1 и \vec{v}^2 . Следовательно, отключение генераторов в этом случае является безопасным, вне зависимости от синхронного режима изначально установленного в исходной энергосети.

Если же ни одно из условий (17) и (18) не выполняется, то на фазовом цилиндре системы (16), наряду с состоянием равновесия O_1 , существует вращательный предельный цикл, отвечающий асинхронному режиму измененной энергосети. В этом случае состояние равновесия O_1 устанавливается в системе лишь с части начальных условий и поэтому отключение генераторов может быть небезопасным. Известно, что функция

$$V(\varphi_{new}, y_{new}) = \frac{y_{new}^2}{2} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_{new}} (\sin \xi - \gamma) d\xi \quad (19)$$

является для системы (16) функцией Ляпунова [39]. Известно, что вдоль траекторий системы (16), т.е. при увеличении времени τ_{new} , линии уровня $V(\varphi_{new}, y_{new}) = C = \text{const}$ убывают. Воспользуемся этим фактом и оценим область притяжения O_1 . На рис. 3, a представлены некоторые линии уровня $V(\varphi_{new}, y_{new})$, а стрелками показана ориентация векторного поля (16) на них. Можно видеть, что на фазовой плоскости системы (16) существует область Ω^+ , которая содержит состояние равновесия O_1 и внутри которой все линии уровня являются замкнутыми. Следовательно, все траектории системы (16) с начальными условиями из области Ω^+ стремятся в состояние равновесия O_1 . Заметим, что граница области Ω^+ определяется частью заключенной между точками φ_0 и φ_2 линии уровня $V(\varphi_{new}, y_{new}) = V(\varphi_2^*, 0)$, проходящей через седло O_2 (см. рис. 3, a), а именно

$$\Gamma_{\Omega^+} = \left\{ \varphi_{new}, y_{new} \mid \phi_0 \leq \varphi_{new} \leq \phi_2, \frac{y_{new}^2}{2} - \cos \phi_{new} - \gamma \phi_{new} = -\cos \phi_2 - \gamma \phi_2 \right\},$$

где φ_0 – наименьший корень уравнения $\cos \varphi + \gamma \varphi = \cos \varphi_2 + \gamma \varphi_2$. Таким образом, для того, чтобы в энергосети, находящейся после отключения генераторов в состоянии \vec{v}^1 ($\varphi_v =$

$\varphi^{hom}(N_+)$, см. рис. 3, a) или \bar{v}^2 ($\varphi_v = -\alpha + \Phi_1^{(1)}(N_+)$), устанавливается синхронный режим необходимо соответственно выполнение условий

$$\varphi_0(N_-) < \varphi^{hom}(N^+) < \varphi_2(N_-) \quad (20)$$

и

$$\varphi_0(N_-) < -\alpha + \Phi_1^{(1)}(N_+) < \varphi_2(N_-). \quad (21)$$

На рис. 3, b,c приведены полученные из условий (20) и (21) оценки областей (a_{syn}^{est}) безопасного отключения одного генератора от энергосети из 4 генераторов ($N_+ = 4$, $N_- = 3$), находящейся изначально соответственно в однородном и неоднородном синхронных режимах. Заметим, что условия (20) и (21) не зависят от параметра μ . Следовательно, в приведенных областях отключение генератора будет безопасным при любых $\mu > 0$.

Области безопасного отключения одного генератора, сопряженного с установлением в измененной энергосети однородных начальных состояний \bar{v}^1 и \bar{v}^2 , были также найдены численно при различных значениях параметра μ для исходных энергосетей из $N_+ = 43, 54$ и 65 генераторов. Для этого при фиксированных значениях параметров и начальном состоянии интегрировалась соответствующая система (1) при $N = N_- = N_+ - 1$ и определялось, стремится ли ее траектория к состоянию равновесия, отвечающему синхронному режиму, или же к какому-либо аттрактору, отвечающему асинхронному режиму. Установлено, что при $\mu \geq 1.5$ во всех рассмотренных энергосетях отключение генератора является безопасным при любых значениях параметров α и Δ из соответствующих областей a и a_2 , т.е. областей одновременного существования синхронных режимов в исходной и измененной энергосетях. При уменьшении параметра μ появляются подобласти, в которых в измененной энергосети устанавливается асинхронный режим, т.е. отключение генератора становится небезопасным. На рис. 3, d приведено разбиение плоскости параметров (α, Δ) при $\mu = 0.5$ на области, отвечающие установлению синхронного (a_{syn} , выделена зеленым цветом) и асинхронного режимов (a_{asyn} , выделена красным цветом), для $N_+ = 4$, $N_- = 3$ и изначального состояния \bar{v}^1 . Аналогичное разбиение для изначального состояния \bar{v}^2 не приведено ввиду малости соответствующей подобласти асинхронного поведения (опасного отключения). При дальнейшем уменьшении μ подобласти небезопасного отключения увеличиваются, сокращая области безопасного отключения до аналитически оцененных областей a_{syn}^{est} (см. рис. 3, b,c).

Случай неоднородных начальных состояний \bar{v}^3 измененной энергосети был проанализирован численно. Установлено, что для каждого фиксированного значения μ существует два критических значения размера исходной энергосети. Если энергосеть меньше минимального критического размера, то при любых значениях параметров α и Δ из соответствующих областей a_3 в измененной энергосети устанавливается синхронный режим, т.е. отключение генераторов в ней всегда будет безопасным. Напротив, если размер энергосети больше максимального критического, то при любых значениях параметров из a_3 в измененной энергосети устанавливается асинхронный режим, т.е. отключение генераторов в ней всегда будет опасным. Если же энергосеть имеет некоторый промежуточный размер, то соответствующая ей область a_3 разбивается на две подобласти, отвечающие соответственно безопасному и опасному отключению генераторов. На рис. 4, a-c приведено разбиение плоскости параметров (α, Δ) при $\mu = 1.5$ на области, отвечающие безопасному и опасному отключению одного генератора в энергосети из 4, 5 и 6 генераторов.

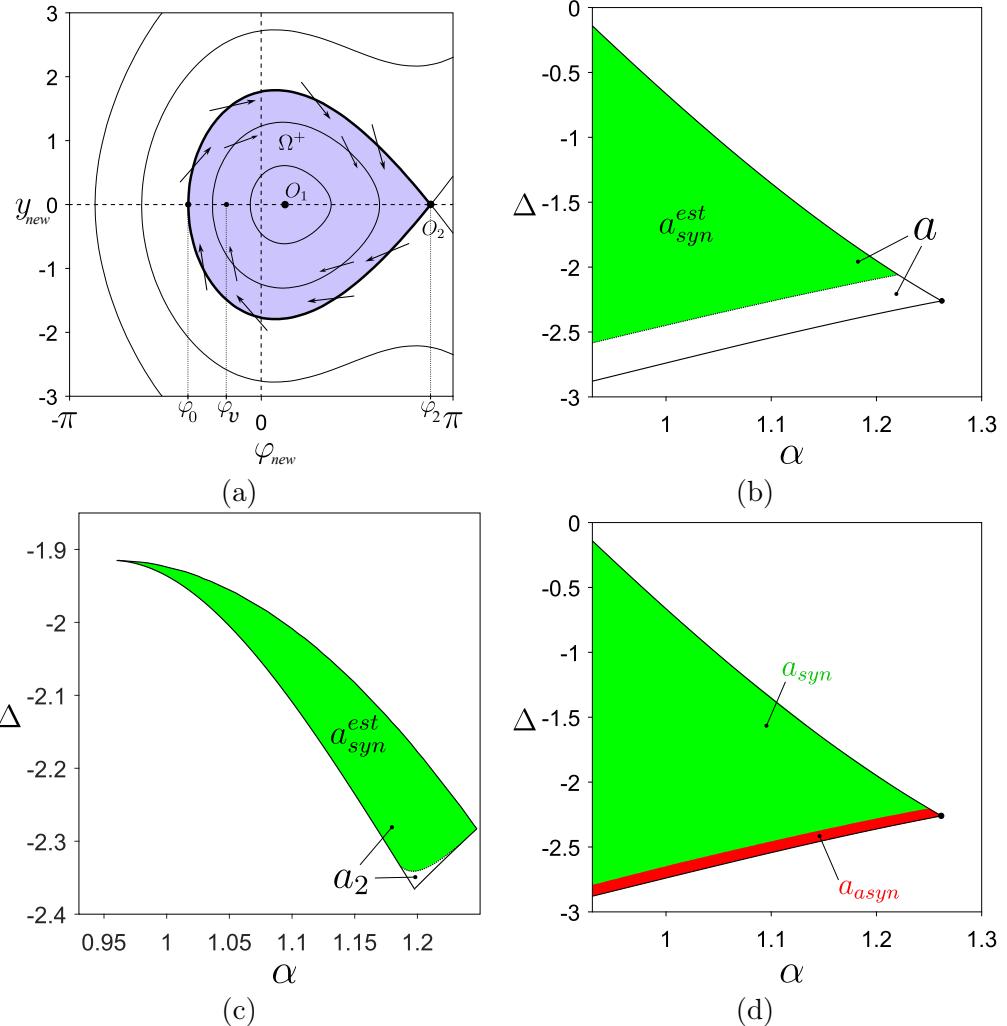


Рис. 3. Отключение генераторов, сопряженное с установлением в измененной энергосети однородных состояний: a — качественный вид функции Ляпунова для измененной энергосети; b и c — аналитические оценки областей установления синхронных режимов (a_{syn}^{est} , выделены зеленым цветом) с состояний \vec{v}^1 и \vec{v}^2 соответственно; d — численно найденные области, отвечающие установлению синхронного (a_{syn} , выделена зеленым цветом) и асинхронного режимов (a_{asyn} , выделена красным цветом) с состояния \vec{v}^1 при $\mu = 0.5$. Для соотнесения подобластей a_{syn}^{est} и a_2 последняя на (c) построена при $\mu = 3.0$. Значения параметров $N_+ = 4$, $N_- = 3$.

Fig. 3. Disconnecting of generators associated with the establishment of homogeneous states in the changed power grid: a — qualitative form of the Lyapunov function for the changed power grid; b and c — analytical estimates of the regions of establishment of synchronous modes (a_{syn}^{est} , highlighted in green) from states \vec{v}^1 and \vec{v}^2 , respectively; d — numerically found regions corresponding to the establishment of synchronous (a_{syn} , highlighted in green) and asynchronous modes (a_{asyn} , highlighted in red) from state \vec{v}^1 for $\mu = 0.5$. To compare the subregions a_{syn}^{est} and a_2 , the latter in (c) is depicted for $\mu = 3.0$. The parameter values: $N_+ = 4$, $N_- = 3$.

4. Условия безопасного подключения генераторов

Рассмотрим теперь подключение генераторов к энергосети. Будем предполагать, что роторы подключаемых генераторов предварительно разогнаны до частоты вращения, близкой к опорной частоте энергосети. В общем случае, возможно два различных сценария подключения. Во-первых, исходная энергосеть перед подключением может работать в од-

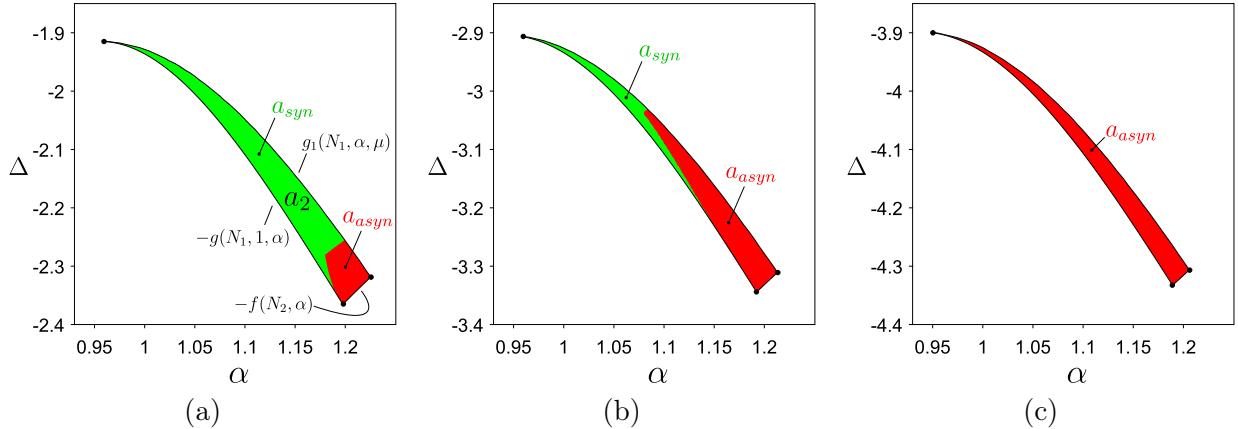


Рис. 4. Отключение генераторов, сопряженное с установлением в измененной энергосети одного из неоднородных состояний $\vec{v}_k^3, k = \overline{1, N_- - 1}$: a - c — численно найденные области, соответствующие установлению синхронного (a_{syn} , выделена зеленым цветом) и асинхронного режимов (a_{asyn} , выделена красным цветом) для $N_+ = 4, N_- = 3, N_+ = 5, N_- = 4$ и $N_+ = 6, N_- = 5$ соответственно. Значения параметров $\mu = 1.5$.

Fig. 4. Disconnecting of generators associated with the establishment of one of the inhomogeneous states $\vec{v}_k^3, k = \overline{1, N_- - 1}$, in the changed power grid: a - c — numerically found regions corresponding to the establishment of synchronous (a_{syn} , highlighted in green) and asynchronous modes (a_{asyn} , highlighted in red) for $N_+ = 4, N_- = 3, N_+ = 5, N_- = 4$, and $N_+ = 6, N_- = 5$, respectively. The parameter values: $\mu = 1.5$.

нородном синхронном режиме (области $a_1 - a_3$ при $N = N_-$), отвечающем состоянию равновесия $O_1^{hom}(N_-)$. Тогда измененная энергосеть ($N = N_+$) сразу после подключения будет находиться в состоянии вида

$$\vec{v}^4 = \left\{ \varphi_i = \varphi^{hom}(N_-), y_i = 0, i = \overline{1, N_-}; \varphi_k = \varphi_k^0, y_k = y_k^0, k = \overline{N_- + 1, N_+} \right\}, \quad (22)$$

где координаты $\varphi_k^0 = \delta_1(0) - \delta_k^0$ и $y_k^0 = \dot{\delta}_1(0) - \dot{\delta}_k^0$ определяются состояниями как подключаемых генераторов, так и исходного первого генератора. Так как ротор подключаемых генераторов был предварительно разогнан, будем считать что эти координаты имеют случайные значения из интервалов $\varphi_k^0 \in [-\pi, \pi]$ и $y_k^0 = [y^-, y^+]$, где y^\pm вычислены по формуле (3) для $N = N_+$.

Если же исходная энергосеть работает в одном из неоднородных синхронных режимов (область a_3 при $N = N_-$), то в силу симметрии системы (1) при составлении вектора начального состояния можно использовать координаты любого из них, например, отвечающего состоянию равновесия $O_j^{inh,1}(N_-)$. В этом случае измененная энергосеть ($N = N_+$) сразу после подключения будет находиться в состоянии вида

$$\begin{aligned} \vec{v}^5 = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_j = -\alpha + \pi - \Phi_1^{(1)}(N_-), \quad y_j = 0, \\ \varphi_i = -\alpha + \Phi_1^{(1)}(N_-), \quad y_i = 0, \quad i = \overline{1, N_- - 1}, \quad i \neq j, \\ \varphi_k = \varphi_k^0, \quad y_k = y_k^0, \quad k = \overline{N_- + 1, N_+} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для нахождения областей безопасного подключения мы использовали следующую процедуру. При фиксированных значениях параметров на основе (22) и (23), посредством случайного выбора значений координат φ_k^0 и y_k^0 , создавались соответствующие наборы начальных состояний измененной энергосети. Элементы наборов использовались в качестве начальных условий при интегрировании системы (1) для $N = N_+$ и нахождения соответствующего поведения измененной энергосети. Далее подсчитывалась доля траекторий,

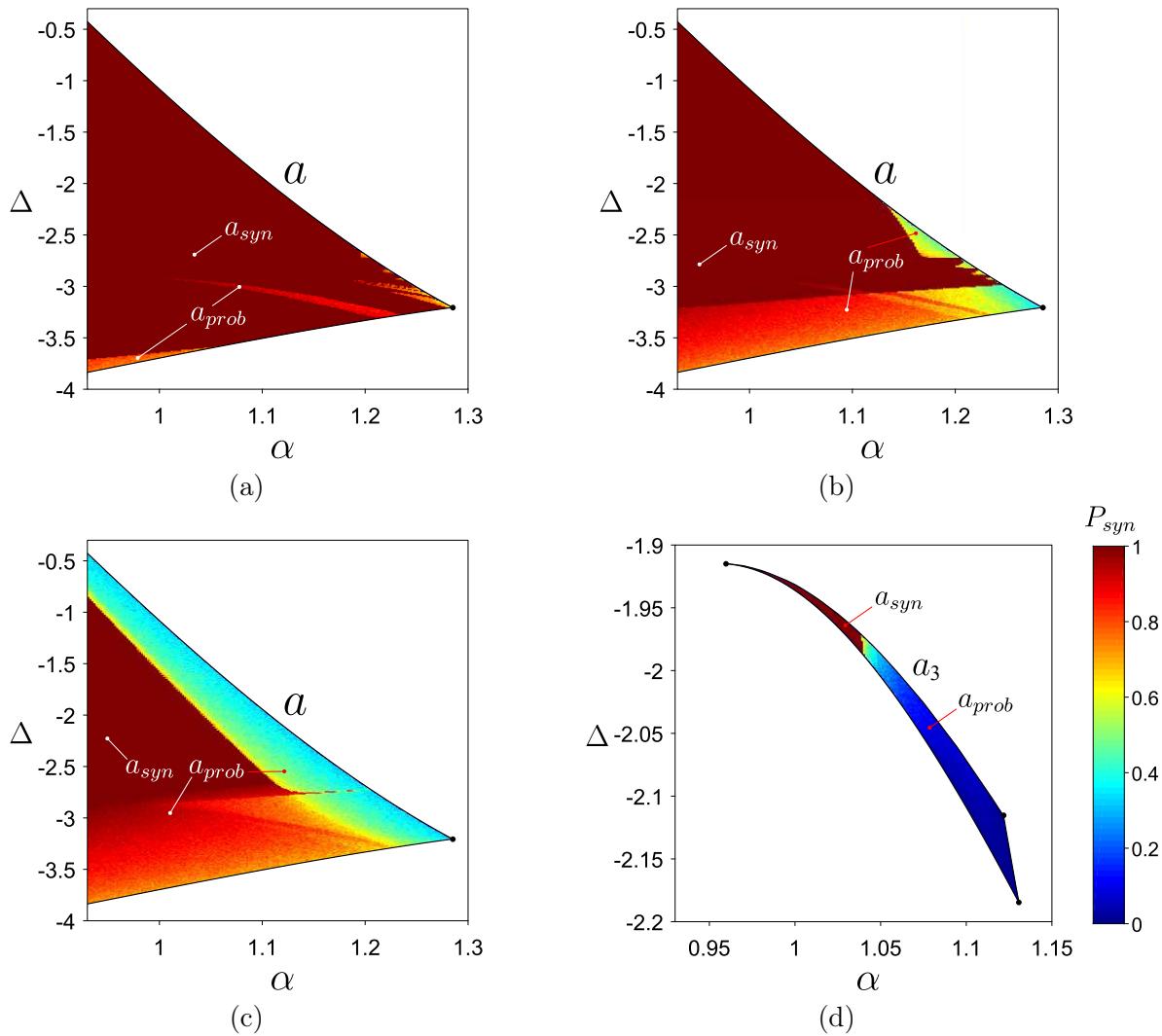


Рис. 5. Подключение генераторов: *a-c* — вероятность P_{syn} установления синхронного режима в измененной энергосети с однородного состояния исходной энергосети при $\mu = 1.50$, $\mu = 1.25$ и $\mu = 1.00$ соответственно; *d* — вероятность установления синхронного режима с неоднородного состояния исходной энергосети при $\mu = 1.00$. Значения параметров $N_- = 4$, $N_+ = 5$.

Fig. 5. Connecting of generators: *a-c* — probability P_{syn} of establishing a synchronous mode in the changed power grid from a homogeneous state of the initial power grid for $\mu = 1.50$, $\mu = 1.25$ and $\mu = 1.00$, respectively; *d* — probability of establishing a synchronous mode from an inhomogeneous state of the initial power grid for $\mu = 1.00$. The parameter values: $N_- = 4$, $N_+ = 5$.

стремящихся в устойчивые состояния равновесия, то есть оценивалась вероятность установления в измененной энергосети синхронного режима (обозначим ее P_{syn}). В зависимости от значения P_{syn} можно выделить два характерных типа подобластей параметров. К первому типу относятся подобласти, в которых $P_{syn} = 1$, которые обозначим a_{syn} . При параметрах из этих подобластей подключение генератора является безопасным, так как в измененной энергосети гарантируется установление синхронного режима. Ко второму типу относятся подобласти, где $0 < P_{syn} < 1$, которые обозначим a_{prob} . Для параметров из этих подобластей установление синхронного режима носит вероятностный характер, поэтому подключение генератора является небезопасным.

На рис. 5 приведены результаты для случая, когда к энергосети, содержащей пять генераторов ($N_- = 4$), подключается еще один ($N_+ = 5$). Установлено, что для начальных состояний \vec{v}^4 и значений параметра $\mu > 2.00$ подобласть a_{syn} полностью совпадает с a , что гарантирует безопасное подключение генератора к исходной энергосети. В противном же случае существуют оба типа подобластей a_{syn} и a_{prob} . Взаимное расположение этих подобластей при $\mu = 1.50$, 1.25 и 1.00 приведено на рис. 5, a-c. При уменьшении параметра μ размер подобласти a_{syn} уменьшается. Суммарный размер подобласти a_{prob} при этом растет и уменьшаются максимальные вероятности P_{syn} в данных подобластих. В свою очередь, для начальных состояний \vec{v}^5 и значений параметра $\mu \geq 1.25$ подобласть a_{syn} полностью совпадает с a_3 , что гарантирует безопасное подключение генератора к исходной энергосети. Если $\mu < 1.25$ (см. рис. 5, d), то наряду с подобластью a_{syn} существует подобласть a_{prob} , т.е. подключение генератора становится небезопасным. При этом, обнаружено, что для параметров из подобластей a_{syn} в измененной энергосети всегда устанавливается однородный синхронный режим. В частях подобластей a_{prob} , где в измененной энергосети возможно установление неоднородных режимов, вероятность их установления не превышает 0.13.

Заключение

В данной работе рассмотрена энергосеть из произвольного числа генераторов, работающих на общую пассивную линейную нагрузку, в случае, когда один из генераторов находится “электрически” ближе к нагрузке (из-за более короткой линии передачи и/или продольной компенсации индуктивного сопротивления). Для описания динамики данной сети применяется модель редуцированной эффективной сети в виде ансамбля с хаб-топологией (топологией “звезда”). Изучена задача об устойчивости энергосети, изначально находящейся в одном из синхронных режимов, к отключению и подключению генераторов. С помощью подхода, базирующегося на втором методе Ляпунова, найдены условия на параметры, обеспечивающие безопасное отключение генераторов, включающих, если таковой имеется, и генератор, входящий в “неоднородный” путь питания нагрузки, который отличается от остальных током и передаваемой мощностью. Полученные оценки подтверждены численным нахождением соответствующих областей для энергосетей различного размера. Также численно прослежена эволюция области, отвечающей безопасному подключению генератора к энергосети из пяти генераторов.

Список литературы

1. Жданов П. С. Вопросы устойчивости электрических систем. М.: Энергия, 1979. 456 с.
2. Беников В. А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.: Высшая школа, 1985. 536 с.
3. Идельчик В. И. Электрические системы и сети. М.: Энергоатомиздат, 1989. 592 с.
4. Kundur P., Balu N. J., Lauby M. G. Power System Stability and Control. New York: McGraw-Hill Education, 1994. 1176 p.
5. Sauer P., Pai A. Power System Dynamics and Stability. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1998. 357 p.
6. Anderson P. M., Fouad A. A. Power System Control and Stability. NJ: IEEE, Piscataway, 2003. 672 p.
7. Horowitz S. H., Phadke A. G., Henville C. F. Power System Relaying. New York: John Wiley & Sons, 2008. 528 p.
8. Machowski J., Bialek J., Bumby D. Power System Dynamics: Stability and Control. New York: John Wiley & Sons, 2008. 629 p.
9. Grainger J. J., Stevenson W. D. Power System Analysis. New York: McGraw-Hill Education, 2016. 787 p.
10. Dobson I., Carreras B. A., Lynch V. E., Newman D. E. Complex systems analysis of series of blackouts: Cascading failure, critical points, and self-organization. // Chaos. 2007. Vol. 17, no. 2. P. 026103.
11. Schafer B., Witthaut D., Timme M., Latora V. Dynamically induced cascading failures in power grids. // Nat. Commun. 2018. Vol. 9, no.1. P. 1975.
12. Bialek J. W. Why has it happened again? Comparison between the UCTE blackout in 2006 and the blackouts of 2003. // IEEE Lausanne Power Tech, Lausanne, Switzerland. 2007. P. 51–56.
13. Li C., Sun Y., Chen X. Analysis of the blackout in Europe on November 4, 2006. // In 2007 International Power Engineering Conference (IPEC 2007). 2007. P. 939–944.
14. Vleuten E., Lagendijk V. Interpreting transnational infrastructure vulnerability: European blackout and the historical dynamics of transnational electricity governance. // Energy Policy. 2010. Vol. 38, no. 4. P. 2053–2062.
15. Veloza O. P., Santamaria F. Analysis of major blackouts from 2003 to 2015: classification of incidents and review of main causes. // Electr. J. 2016. Vol. 29, no. 7. P. 42–49.
16. Shao Y., Tang T., Yi J., Wang A. Analysis and lessons of blackout in Turkey power grid on March 31. // AEPS. 2016. Vol. 40, no. 9.
17. Coletta T., Jacquod P. Linear stability and the Braess paradox in coupled-oscillator networks and electric power grids // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 93, no. 3. P. 032222-1-8.
18. Khramenkov V. A., Dmitrichev A. S., Nekorkin V. I. A new scenario for braess's paradox in power grids // Chaos. 2023. Vol. 32. P. 113116.
19. Schafer B., Pesch T., Manik D., Gollenstede J., Lin G., Beck H. P., Witthaut D., Timme M. Understanding Braess' paradox in power grids // Nat. Commun. 2022. Vol.13. P. 5396.
20. Sangjoon P., Kim C. H., Kahng B. Optimal location of reinforced inertia to stabilize power grids // Chaos, Solitons and Fractals. 2025. Vol. 199, no. 2. P 116768.
21. Klinshov V. V., Nekorkin V. I., Kurths J. Stability threshold approach for complex dynamical systems // New Journal of Physics. 2015. Vol. 18. P. 013004.
22. Mitra C., Kittel T., Choudhary A., Kurths J., Donner R. V. Recovery time after localized perturbations in complex dynamical networks // New Journal of Physics. 2017. Vol. 19. P. 103004.
23. Mitra C., Kittel T., Choudhary A., Sinha S., Kurths J., Donner R. V. Multiple-node basin

- stability in complex dynamical networks // Phys. Rev. E. 2017. Vol. 95, no. 3. P. 032317-1-9.
24. Wolff M. F., Lind P. G., Maass P. Power grid stability under perturbation of single nodes: Effects of heterogeneity and internal nodes // Chaos. 2018. Vol. 28, no. 10. P 103120.
 25. Klinshov V. V., Kirillov S., Kurths J., Nekorkin V. I. Interval stability for complex systems // New Journal of Physics. 2018. Vol. 20. P. 043040.
 26. Halekotte L., Feudel U. Minimal fatal shocks in multistable complex networks // Sci. Rep. 2020. Vol. 10. P. 11783.
 27. Halekotte L., Vanselow A., Feudel U. Transient chaos enforces uncertainty in the british power grid // J. Phys. Complex. 2021. Vol. 2. P. 035015.
 28. Khramenkov V. A., Dmitriev A. S., Nekorkin V. I. Bistability of operating modes and their switching in a three-machine power grid // Chaos. 2023. Vol. 33, no. 10. P 103129.
 29. Gambuzza L. V., Buscarino A., Fortuna L., Porfiri M., Frasca M. Analysis of dynamical robustness to noise in power grids // IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems. 2017. Vol. 7. P. 413–421.
 30. Schmietendorf K., Peinke J., Kamps O. The impact of turbulent renewable energy production on power grid stability and quality // Eur. Phys. J. B. 2017. Vol. 90. P. 222-1-6.
 31. Tumash L., Olmi S., Scholl E. Effect of disorder and noise in shaping the dynamics of power grids // EPL (Europhysics Letters). 2018. Vol. 123. P. 20001.
 32. Haehne H., Schmietendorf K., Peinke J., Kettemann S., Tamrakar S. Propagation of wind-power-induced fluctuations in power grids // Phys. Rev. E. 2019. Vol. 99. P. 050301.
 33. Аринушкин П. А., Куприянов В. Д., Вадивасова Т. Е. Влияние гауссовского шума и шума Леви на фазовую динамику ансамбля Курамото-подобных осцилляторов // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, вып. 3. С. 289–306.
 34. Храменков В. А., Дмитриев А. С., Некоркин В. И. Мультистабильность синхронных режимов в многомашинной энергосети с общей нагрузкой и их устойчивость в целом и в большом // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, вып. 1. С. 38–68.
 35. Калентионок Е. В. Устойчивость электроэнергетических систем. Минск: Техноперспектива, 2008. 375 с.
 36. Tricomi F. Integrazione di un' equazione differenziale presentata in elettrotecnica. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Ser. 2, 1933. Vol. 2, no. 1. P. 1–20.
 37. Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E. Theory of Oscillators. Pergamon: Adiwes International Series in Physics, 1966.
 38. Некоркин В. И. Введение в нелинейную динамику колебаний и волн. М.: Физматлит, 2024. 352 с.
 39. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. Москва: Наука, 1979.

Список литературы

1. Zhdanov PS. Stability Issues for Electrical Systems. M.: Energy; 1979. 456 p. (in Russian).
2. Venikov VA. Transient electromechanical processes in electrical systems. M.: Vysshaya shkola; 1985. 536 p. (in Russian).
3. Idelchik VI. Electrical systems and networks. M.: Energoatomizdat; 1989. 592 p. (in Russian).
4. Kundur P, Balu NJ, Lauby MG. Power System Stability and Control. New York: McGraw-Hill Education; 1994. 1176 p.
5. Sauer P, Pai A. Power System Dynamics and Stability. Prentice-Hall: Englewood Cliffs; 1998. 357 p.
6. Anderson PM, Fouad AA. Power System Control and Stability. NJ: IEEE, Piscataway; 2003. 672 p.
7. Horowitz SH, Phadke AG, Henville CF. Power System Relaying. New York: John Wiley & Sons; 2008. 528 p.
8. Machowski J, Bialek J, Bumby D. Power System Dynamics: Stability and Control. New York: John Wiley & Sons; 2008. 629 p.
9. Grainger JJ., Stevenson WD. Power System Analysis. New York: McGraw-Hill Education; 2016. 787 p.
10. Dobson I, Carreras B. A., Lynch V. E., Newman D. E. Complex systems analysis of series of blackouts: Cascading failure, critical points, and self-organization. // Chaos. 2007. Vol. 17, no. 2. P. 026103.
11. Schafer B., Witthaut D., Timme M., Latora V. Dynamically induced cascading failures in power grids. // Nat. Commun. 2018. Vol. 9, no.1. P. 1975.
12. Bialek J. W. Why has it happened again? Comparison between the UCTE blackout in 2006 and the blackouts of 2003. // IEEE Lausanne Power Tech, Lausanne, Switzerland. 2007. P. 51–56.
13. Li C., Sun Y., Chen X. Analysis of the blackout in Europe on November 4, 2006. // In 2007 International Power Engineering Conference (IPEC 2007). 2007. P. 939–944.
14. Vleuten E., Lagendijk V. Interpreting transnational infrastructure vulnerability: European blackout and the historical dynamics of transnational electricity governance. // Energy Policy. 2010. Vol. 38, no. 4. P. 2053–2062.
15. Veloza O. P., Santamaria F. Analysis of major blackouts from 2003 to 2015: classification of incidents and review of main causes. // Electr. J. 2016. Vol. 29, no. 7. P. 42–49.
16. Shao Y., Tang T., Yi J., Wang A. Analysis and lessons of blackout in Turkey power grid on March 31. // AEPS. 2016. Vol. 40, no. 9.
17. Coletta T., Jacquod P. Linear stability and the Braess paradox in coupled-oscillator networks and electric power grids // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 93, no. 3. P. 032222-1-8.
18. Khramenkov V. A., Dmitrichev A. S., Nekorkin V. I. A new scenario for braess's paradox in power grids // Chaos. 2023. Vol. 32. P. 113116.
19. Schafer B., Pesch T., Manik D., Gollenstede J., Lin G., Beck H. P., Witthaut D., Timme M. Understanding Braess' paradox in power grids // Nat. Commun. 2022. Vol.13. P. 5396.
20. Sangjoon P., Kim C. H., Kahng B. Optimal location of reinforced inertia to stabilize power grids // Chaos, Solitons and Fractals. 2025. Vol. 199, no. 2. P 116768.
21. Klinshov V. V., Nekorkin V. I., Kurths J. Stability threshold approach for complex dynamical systems // New Journal of Physics. 2015. Vol. 18. P. 013004.
22. Mitra C., Kittel T., Choudhary A., Kurths J., Donner R. V. Recovery time after localized perturbations in complex dynamical networks // New Journal of Physics. 2017. Vol. 19. P. 103004.
23. Mitra C., Kittel T., Choudhary A., Sinha S., Kurths J., Donner R. V. Multiple-node basin

- stability in complex dynamical networks // Phys. Rev. E. 2017. Vol. 95, no. 3. P. 032317-1-9.
24. Wolff M. F., Lind P. G., Maass P. Power grid stability under perturbation of single nodes: Effects of heterogeneity and internal nodes // Chaos. 2018. Vol. 28, no. 10. P 103120.
 25. Klinshov V. V., Kirillov S., Kurths J., Nekorkin V. I. Interval stability for complex systems // New Journal of Physics. 2018. Vol. 20. P. 043040.
 26. Halekotte L., Feudel U. Minimal fatal shocks in multistable complex networks // Sci. Rep. 2020. Vol. 10. P. 11783.
 27. Halekotte L., Vanselow A., Feudel U. Transient chaos enforces uncertainty in the british power grid // J. Phys. Complex. 2021. Vol. 2. P. 035015.
 28. Khramenkov V. A., Dmitriev A. S., Nekorkin V. I. Bistability of operating modes and their switching in a three-machine power grid // Chaos. 2023. Vol. 33, no. 10. P 103129.
 29. Gambuzza L. V., Buscarino A., Fortuna L., Porfiri M., Frasca M. Analysis of dynamical robustness to noise in power grids // IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems. 2017. Vol. 7. P. 413–421.
 30. Schmietendorf K., Peinke J., Kamps O. The impact of turbulent renewable energy production on power grid stability and quality // Eur. Phys. J. B. 2017. Vol. 90. P. 222-1-6.
 31. Tumash L., Olmi S., Scholl E. Effect of disorder and noise in shaping the dynamics of power grids // EPL (Europhysics Letters). 2018. Vol. 123. P. 20001.
 32. Haehne H., Schmietendorf K., Peinke J., Kettemann S., Tamrakar S. Propagation of wind-power-induced fluctuations in power grids // Phys. Rev. E. 2019. Vol. 99. P. 050301.
 33. Arinushkin P. A., Kupriyanov V. D., Vadivasova T. E. Influence of Gaussian noise and Levy noise on the phase dynamics of the ensemble of Kuramoto-like oscillators of first and second order // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025. Vol. 33, no. 3. P. 289–306.
 34. Khramenkov V. A., Dmitriev A. S., Nekorkin V. I. Multistability of synchronous modes in a multimachine power grid with a common load and their global and non-local stability // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025. Vol. 33, no. 1. P. 38–68.
 35. Kalentionok EV. Electric power systems stability. Minsk: Technopresspectiva; 2008. 375 p. (in Russian).
 36. Tricomi F. Integrazione di un' equazione differenziale presentata in elettrotecnica. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Ser. 2, 1933. Vol. 2, no. 1. P. 1–20.
 37. Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E. Theory of Oscillators. Pergamon: Adiwes International Series in Physics; 1966.
 38. Nekorkin V. I. Introduction to Nonlinear Dynamics of Oscillations and Waves. M.: Fizmatlit; 2024. 352 p. (in Russian).
 39. Barbashin E. A. Lyapunov functions. Moscow: Nauka; 1979. (in Russian).