



## Модифицированный осциллятор ФитцХью–Нагумо со спайковой активностью, зависящей от длительности внешнего импульсного воздействия

Д. М. Ежов<sup>1</sup>, А. В. Курбако<sup>1,2</sup>, В. И. Пономаренко<sup>1,2</sup>✉, М. Д. Прохоров<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

<sup>2</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

E-mail: ezhovdmityi@yandex.ru, kurbako.sasha@mail.ru, ✉ponomarenkovi@gmail.com, mdfprokhorov@yandex.ru

Поступила в редакцию 3.06.2025, принята к публикации 2.09.2025,

опубликована онлайн 12.09.2025, опубликована 28.11.2025

**Аннотация.** Цель работы — разработка и исследование модифицированного осциллятора ФитцХью–Нагумо, спайковая активность которого определяется не только амплитудой, но и длительностью внешнего импульсного сигнала, поступающего на вход осциллятора. **Методы.** В систему известных уравнений, описывающих динамику осциллятора ФитцХью–Нагумо с постоянным значением порогового параметра, добавлено уравнение, которое описывает изменение порогового параметра во времени под действием внешних импульсных сигналов. При различных значениях параметров внешних импульсов проведено численное исследование динамики предложенного осциллятора, находящегося в состоянии равновесия в отсутствие внешнего воздействия. **Результаты.** Показано, что в отличие от классического осциллятора ФитцХью–Нагумо модифицированный осциллятор способен демонстрировать последовательность из нескольких спайков в ответ на одиночное внешнее импульсное воздействие, причем динамика осциллятора зависит как от амплитуды, так и от длительности внешних импульсов. Кроме того, предложенный осциллятор может возбуждаться последовательностью импульсов, имеющих амплитуду ниже пороговой. **Заключение.** Предложенный модифицированный осциллятор ФитцХью–Нагумо может быть использован для построения спайковых нейронных сетей. Обучение таких сетей можно реализовать с помощью изменения синаптических связей за счет настройки весов синапсов, соответствующих длительности внешних импульсных сигналов. Предложенная модификация осциллятора ФитцХью–Нагумо может быть достаточно просто реализована в радиофизическом эксперименте с использованием аналоговых электронных элементов и цифровых схем, регулирующих длительности входных импульсов.

**Ключевые слова:** нейроподобный осциллятор, модель ФитцХью–Нагумо, синаптическая связь, импульсное воздействие.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-12-00103, <https://rscf.ru/project/23-12-00103/>.

**Для цитирования:** Ежов Д. М., Курбако А. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Модифицированный осциллятор ФитцХью–Нагумо со спайковой активностью, зависящей от длительности внешнего импульсного воздействия // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 6. С. 917–928. DOI: 10.18500/0869-6632-003193. EDN: IJPPGU

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Modified FitzHugh–Nagumo oscillator with spiking activity dependent on the duration of external impulse action

D. M. Ezhov<sup>1</sup>, A. V. Kurbako<sup>1,2</sup>, V. I. Ponomarenko<sup>1,2</sup>✉, M. D. Prokhorov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, Russia

<sup>2</sup>Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioelectronics and Electronics of the Russian Academy of Sciences, Russia

E-mail: ezhovdmityi@yandex.ru, kurbako.sasha@mail.ru, ✉ponomarenko@gmail.com, mdprokhorov@yandex.ru

Received 3.06.2025, accepted 2.09.2025, available online 12.09.2025, published 28.11.2025

**Abstract.** The purpose of the study is to develop and investigate a modified FitzHugh–Nagumo oscillator, the spiking activity of which is determined not only by the amplitude, but also by the duration of the external impulse signal applied to the input of the oscillator. *Methods.* We have added an equation to the system of known equations describing the dynamics of the FitzHugh–Nagumo oscillator with a constant threshold parameter value. This additional equation describes the change in the threshold parameter over time under the influence of external impulse signals. For various values of the parameters of external impulses, a numerical study of the dynamics of the proposed oscillator, which is in a state of equilibrium in the absence of external influence, is carried out. *Results.* It is shown that, unlike the classical FitzHugh–Nagumo oscillator, the modified oscillator is capable of demonstrating a sequence of several spikes in response to a single external impulse action, and the oscillator dynamics depends on both the amplitude and the duration of external impulses. In addition, the proposed oscillator can be excited by a sequence of impulses with an amplitude below the threshold. *Conclusion.* The proposed modified FitzHugh–Nagumo oscillator can be used to construct spiking neural networks. Learning of such networks can be implemented by changing synaptic connections by adjusting the synapse weights corresponding to the duration of external impulse signals. The proposed modification of the FitzHugh–Nagumo oscillator can be implemented quite simply in a radio physical experiment using analog electronic elements and digital circuits regulating the duration of input impulses.

**Keywords:** neuron-like oscillator, FitzHugh–Nagumo model, synaptic connection, impulse action.

**Acknowledgements.** This study was supported by the Russian Science Foundation, Grant No. 23-12-00103, <https://rscf.ru/project/23-12-00103/>.

**For citation:** Ezhov DM, Kurbako AV, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Modified FitzHugh–Nagumo oscillator with spiking activity dependent on the duration of external impulse action. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(6):917–928. DOI: 10.18500/0869-6632-003193

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Исследование спайковых нейронных сетей привлекает большое внимание специалистов в разных научных областях [1]. Такие сети используют в качестве узлов биологически реалистичные модели нейронов и способны демонстрировать присущую реальным нейронам активность, в том числе генерировать спайки (импульсы) [2]. Наиболее известными моделями нейронов являются модель типа «накопление – сброс» [3], модели Ходжкина–Хаксли [4, 5], Моррис–Лекара [6], Хиндмарша–Роуза [7, 8], ФитцХью–Нагумо [9–11], Ижикевича [12], Рулькова [13] и Курбажа–Некоркина [14].

Классические модели нейронной активности, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, такие как модели Ходжкина–Хаксли, Моррис–Лекара и ФитцХью–Нагумо, способны воспроизвести генерацию нейронами только спайков в отличие от другой классической модели – модели Хиндмарша–Роуза, способной генерировать бёрсты (группы двух или более спайков, идущих подряд друг за другом и перемежаемых периодами отсутствия активности). Для моделирования присущих реальным нейронам спайк–бёрстовых колебаний были предложены модели генерации спайков и бёрстов в непрерывном времени на основе системы фазовой

автоподстройки частоты [15–17] и осциллятора ФитцХью–Нагумо с нелинейностью на основе двух мемристивных устройств, имитирующих ионные каналы нейрона [18].

Динамика спайковых нейронных сетей зависит от выбора не только узловых элементов сети, но и от типа и структуры связей между нейронами. Обмен информацией между нейронами осуществляется с помощью входящих и исходящих сигналов, в передаче которых важную роль играют синапсы, которые бывают электрическими и химическими [2, 19]. Химические синапсы, в свою очередь, бывают как возбуждающими, так и подавляющими (тормозными) [2]. Для моделирования присущей реальным нейронам пластичности синаптических связей используют различные подходы, например, используют мемристивную связь между нейронами сети [20–24] или вводят пластичность, зависящую от времени прихода спайков [25–28].

В последние годы спайковые нейронные сети активно применяются для решения задач классификации сигналов [29], распознавания изображений [30, 31], управления движением мобильных роботов [32], моделирования различных видов нейронной активности головного мозга [33–35] и др. [1]. При этом большое внимание уделяется возможности радиотехнической реализации как самих модельных нейронов, так и способов их связи между собой. Одним из наиболее простых с точки зрения реализации в радиофизическом эксперименте является нейроподобный генератор ФитцХью–Нагумо. Однако нейронные сети, построенные из классических модельных осцилляторов ФитцХью–Нагумо, плохо поддаются обучению. Таким образом, возникает потребность в такой модификации осциллятора ФитцХью–Нагумо, которая позволяла бы проводить обучение построенных из таких осцилляторов спайковых нейронных сетей и которую можно было бы легко реализовать в физическом эксперименте.

В данной работе мы предлагаем модифицированную модель ФитцХью–Нагумо, в которой спайковая активность нейрона определяется не только амплитудой, но и длительностью внешнего импульса, поступающего на вход нейрона. Такая модель демонстрирует более богатую динамику, чем классическая нейронная модель ФитцХью–Нагумо. В частности, она может генерировать несколько спайков подряд в ответ на одиночный внешний стимул. Кроме того, предлагаемая модифицированная модель может быть достаточно просто реализована в радиофизическом эксперименте с использованием аналоговых электронных элементов и цифровых схем, регулирующих длительности входных импульсов.

## 1. Исследуемая система

Нейроподобный осциллятор ФитцХью–Нагумо является классической моделью возбудимой динамики нейронов. Такой осциллятор описывается двумя дифференциальными уравнениями [2, 10], содержащими пороговый параметр  $a$ , величина которого в отсутствие внешнего воздействия определяет, находится ли осциллятор в состоянии равновесия или совершает периодические автоколебания. Если на осциллятор ФитцХью–Нагумо, находящийся в состоянии равновесия, подействовать внешним сигналом, то при амплитуде этого сигнала, превышающей некоторое пороговое значение, осциллятор начинает генерировать спайки.

Предлагаемая нами модификация осциллятора ФитцХью–Нагумо заключается во введении дополнительного третьего уравнения, которое отвечает за изменение параметра  $a$  во времени:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u}(t) &= u(t) - u^3(t)/3 - v(t), \\ \dot{v}(t) &= u(t) + a(t), \\ \tau \dot{a}(t) &= a_{\text{test}} - a(t) + I_e(t) - I_i(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $u(t)$  описывает динамику мембранныго потенциала нейрона,  $v(t)$  отвечает за восстановление потенциала покоя мембранны,  $\varepsilon$  — параметр соотношения временных масштабов,  $\tau$  — постоянная времени,  $a_{\text{rest}}$  — величина порогового параметра в состоянии равновесия,  $I_e(t)$  и  $I_i(t)$  — внешние токи, которые представляют собой прямоугольные импульсы с амплитудами  $A_e$  и  $A_i$  соответственно и длительностями  $w_e$  и  $w_i$  соответственно. Будем рассматривать только случай  $a_{\text{rest}} > 1$ , при котором генерация спайков отсутствует без внешних воздействий.

В момент прихода спайка от пресинаптического нейрона на возбуждающий синапс возникает одиничный импульс  $I_e(t)$  (рис. 1), который, воздействуя на постсинаптический нейрон (1), приводит к уменьшению значения порогового параметра  $a(t)$  при  $A_e < 0$ . Если  $a(t)$  станет меньше 1, то осциллятор (1) сгенерирует спайк. В момент прихода спайка на подавляющий синапс возникает одиничный импульс  $I_i(t)$  (см. рис. 1), который приводит к увеличению значения  $a(t)$  при  $A_i < 0$ , что препятствует генерации спайка осциллятором (1).

Результат воздействия импульсов  $I_e(t)$  и  $I_i(t)$  на нейроподобный осциллятор (1) зависит не только от их амплитуды, но и от их длительности. Это означает, что пластичность синаптических связей можно реализовать, меняя при фиксированной амплитуде длительности импульсов  $w_e$  и  $w_i$ , поступающих на нейрон через возбуждающий и подавляющий синапсы соответственно. То есть в нейронной сети, построенной из нейронов вида (1), изменение коэффициентов связи между нейронами можно моделировать изменением длительности импульсов  $w_e$  и  $w_i$ , которые можно интерпретировать как веса синапсов. Обучение такой нейронной сети происходит за счет изменения весов синапсов  $w_e$  и  $w_i$ . Поскольку веса в подобных сетях можно рассматривать как некоторый набор параметров, а процесс обучения — процедурой поиска оптимальных (в некотором смысле) значений данных параметров, то решение задачи может быть рассмотрено, например, с позиции адаптивной идентификации параметров динамических систем [36].

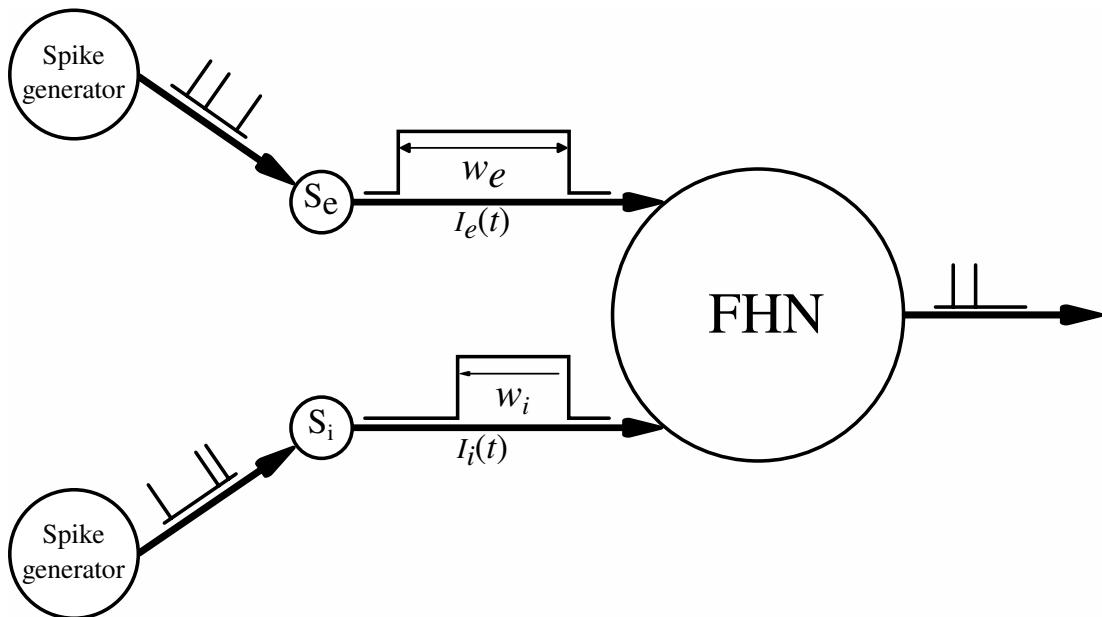


Рис. 1. Схематическое изображение нейроподобного осциллятора ФитцХью–Нагумо (FHN) под действием внешних импульсов  $I_e(t)$  и  $I_i(t)$ .  $S_e$  и  $S_i$  — возбуждающий и подавляющий синапсы соответственно

Fig. 1. Schematic representation of the FitzHugh–Nagumo (FHN) neuron-like oscillator under the action of external impulses  $I_e(t)$  and  $I_i(t)$ .  $S_e$  and  $S_i$  are the excitatory and inhibitory synapses, respectively

## 2. Результаты численного моделирования

Мы провели численное моделирование системы (1) при различных значениях параметров. Для численного решения уравнений (1) мы использовали метод Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом интегрирования  $h = 0.0075$ . На рис. 2, *a* разными цветами показано, какое количество спайков  $N$  за время  $t = 100$  демонстрирует модифицированный осциллятор ФитцХью–Нагумо в зависимости от амплитуды и длительности одиночного импульсного воздействия  $I_e(t)$ . Рис. 2, *a* построен при изменении амплитуды  $A_e$  импульсного сигнала с шагом 0.002 и изменении длительности  $w_e$  импульса с шагом 0.6 при параметрах осциллятора:  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_{\text{rest}} = 1.1$ ,  $\tau = 10$ . Начальные условия одинаковы для каждой точки на плоскости параметров  $(w_e, A_e)$ . Из рис. 2, *a* видно, что число спайков растет как с увеличением  $A_e$  по модулю, так и с увеличением  $w_e$ , то есть в ответ на внешний стимул модифицированный осциллятор ФитцХью–Нагумо может демонстрировать серию из двух или более спайков, идущих подряд друг за другом. Классический осциллятор ФитцХью–Нагумо [2, 10] способен генерировать лишь один спайк в ответ на одиночное импульсное воздействие и не демонстрирует серии из нескольких последовательных спайков.

На рис. 2, *b* показаны временные реализации сигналов  $u(t)$ ,  $a(t)$ ,  $I_e(t)$  для точки на рис. 2, *a* с координатами  $w_e = 10$ ,  $A_e = -0.4$ . Для наглядности момент времени  $t = 10$ , соответствующий началу импульсного сигнала  $I_e(t)$ , показан вертикальной штриховой линией. Под действием сигнала  $I_e(t)$  пороговый параметр  $a(t)$  становится меньше 1, и переменная  $u(t)$  демонстрирует пять спайков подряд, после чего осциллятор возвращается в состояние равновесия.

Если одиночный стимул оказался слабым и сигнал  $I_e(t)$  не вызвал генерацию спайка, он все равно изменил параметр  $a(t)$ , приблизив его к пороговому значению. После окончания импульсного воздействия параметр  $a(t)$  экспоненциально стремится к значению  $a_{\text{rest}}$ . Значит, если вскоре после слабого стимула (пока  $a(t)$  немного больше 1) подать на осциллятор (1) еще один точно такой же слабый стимул, осциллятор может генерировать спайки. На рис. 3, *a* построена зависимость количества спайков, генерируемых осциллятором (1) в ответ на два одинаковых импульсных сигнала  $I_e(t)$  с  $A_e = -0.3$  и  $w_e = 5$ , от интервала времени  $\Delta t$  между началом первого и началом второго импульса. При  $\Delta t > 24.6$  нейроподобный осциллятор (1)

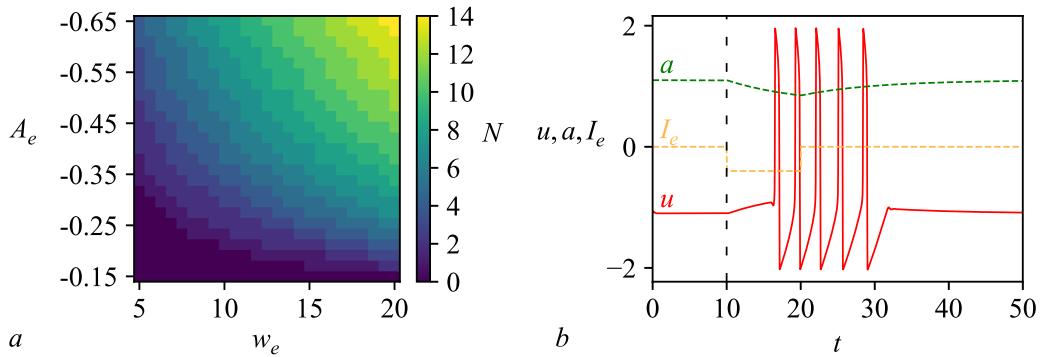


Рис. 2. *a* – Количество спайков  $N$ , генерируемых осциллятором (1) при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_{\text{rest}} = 1.1$ ,  $\tau = 10$  в зависимости от длительности и амплитуды импульсного воздействия  $I_e(t)$ . *b* – Временные реализации переменной  $u(t)$ , порогового параметра  $a(t)$  и импульсного сигнала  $I_e(t)$  при  $A_e = -0.4$ ,  $w_e = 10$  (цвет онлайн)

Fig. 2. *a* – Number  $N$  of spikes generated by oscillator (1) at  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_{\text{rest}} = 1.1$ , and  $\tau = 10$  depending on the duration and amplitude of the impulse action  $I_e(t)$ . *b* – Temporal realizations of the variable  $u(t)$ , threshold parameter  $a(t)$ , and impulse signal  $I_e(t)$  at  $A_e = -0.4$  and  $w_e = 10$  (color online)

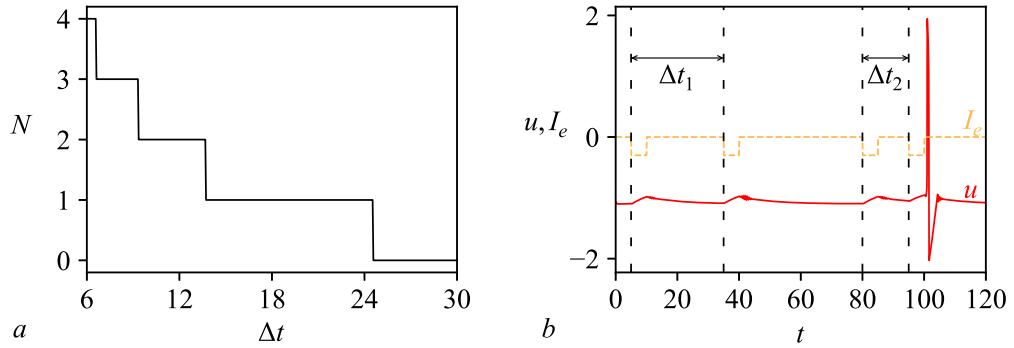


Рис. 3. *a* — Количество спайков  $N$ , генерируемых осциллятором (1) при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_{\text{rest}} = 1.1$ ,  $\tau = 10$  в зависимости от интервала времени  $\Delta t$  между двумя одинаковыми импульсами  $I_e(t)$  при  $A_e = -0.3$ ,  $w_e = 5$ . *b* — Временные реализации переменной  $u(t)$  и импульсного сигнала  $I_e(t)$  при  $\Delta t_1 = 30$  и  $\Delta t_2 = 15$ . Вертикальными штриховыми линиями показаны моменты времени, соответствующие началу импульса

Fig. 3. *a* — Number  $N$  of spikes generated by oscillator (1) at  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_{\text{rest}} = 1.1$ , and  $\tau = 10$  depending on the time interval  $\Delta t$  between two identical impulses  $I_e(t)$  at  $A_e = -0.3$  and  $w_e = 5$ . *b* — Temporal realizations of the variable  $u(t)$  and impulse signal  $I_e(t)$  at  $\Delta t_1 = 30$  and  $\Delta t_2 = 15$ . The vertical dashed lines show the moments of time corresponding to the beginning of the impulse

не демонстрирует спайков. При меньших значениях  $\Delta t$  два последовательных импульса  $I_e(t)$  возбуждают осциллятор, при этом одного импульса  $I_e(t)$  недостаточно для генерации спайка.

На рис. 3, *b* показаны временные реализации  $u(t)$  и  $I_e(t)$  для случаев  $\Delta t_1 = 30$  и  $\Delta t_2 = 15$ . В первом из этих случаев спайковая активность отсутствует, а во втором случае осциллятор генерирует один спайк. В отличие от модифицированного осциллятора ФитцХью–Нагумо классический осциллятор ФитцХью–Нагумо не возбуждается последовательностью импульсов, если их амплитуда ниже пороговой.

На рис. 4 построена зависимость количества спайков  $N$ , генерируемых осциллятором (1), от величины постоянной времени  $\tau$  при фиксированных значениях других параметров в случае одиночного импульсного воздействия  $I_e(t)$ . Выбор значений параметра  $\tau$  зависит от амплитуды  $A_e$  и длительности  $w_e$  импульсного сигнала  $I_e(t)$ , а также целей использования модели. В случае

использования предложенного нейроподобного осциллятора в качестве узла спайковой нейронной сети логично будет выбрать такое значение  $\tau$ , чтобы при максимально допустимом значении коэффициента синаптической связи (то есть при зафиксированном максимальном значении  $w_e$ ) один импульс пресинаптического осциллятора вызывал один импульс постсинаптического осциллятора. Для случая, изображенного на рис. 4, интервал оптимальных значений параметра  $\tau$  лежит примерно в интервале 8...11, на котором  $N = 1$ .

Рассмотрим совокупное влияние импульсных сигналов  $I_e(t)$  и  $I_i(t)$  на динамику осциллятора (1). Воздействие импульсом  $I_e(t)$  является возбуждающим и приводит к генерации спайка, рис. 5, *a*. Однако, если следом

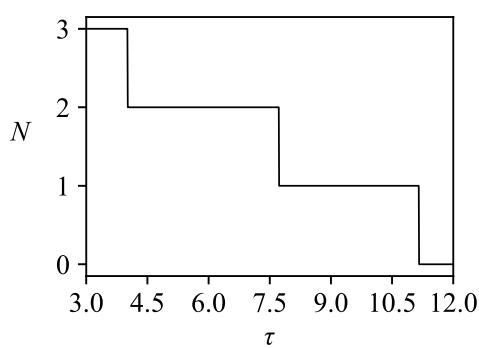


Рис. 4. Количество спайков  $N$ , генерируемых осциллятором (1) при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_{\text{rest}} = 1.1$ ,  $A_e = -0.35$ ,  $w_e = 5$  в зависимости от постоянной времени  $\tau$

Fig. 4. Number  $N$  of spikes generated by oscillator (1) at  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_{\text{rest}} = 1.1$ ,  $A_e = -0.35$ , and  $w_e = 5$  depending on the time constant  $\tau$

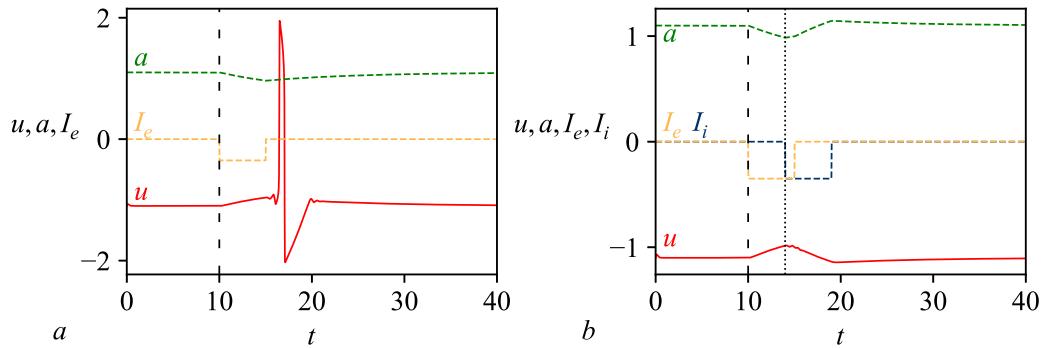


Рис. 5. Временные реализации переменной  $u(t)$ , порогового параметра  $a(t)$  и импульсных сигналов  $I_e(t)$  и  $I_i(t)$  при  $A_e = -0.35$ ,  $w_e = 5$ ,  $I_i(t) = 0$  (а) и  $A_e = A_i = -0.35$ ,  $w_e = w_i = 5$  (б). Штриховой и точечной линиями показаны моменты времени, соответствующие началу импульсов  $I_e(t)$  и  $I_i(t)$  соответственно (цвет онлайн)

Fig. 5. Temporal realizations of the variable  $u(t)$ , threshold parameter  $a(t)$ , and impulse signals  $I_e(t)$  and  $I_i(t)$  at  $A_e = -0.35$ ,  $w_e = 5$ , and  $I_i(t) = 0$  (a) and  $A_e = A_i = -0.35$ , and  $w_e = w_i = 5$  (b). The dashed and dotted lines show the moments of time corresponding to the beginning of the impulses  $I_e(t)$  and  $I_i(t)$ , respectively (color online)

за сигналом  $I_e(t)$  подать на осциллятор сигнал  $I_i(t)$  с такой же амплитудой и длительностью, как у  $I_e(t)$ , генерации спайка не происходит, рис. 5, б. Таким образом, сигнал  $I_i(t)$  препятствует спайковой активности.

### Заключение

Нами предложена модифицированная модель нейроподобного осциллятора ФитцХью–Нагумо, в которой величина порогового параметра зависит от времени и может меняться под действием внешних импульсных сигналов. В отличие от классического осциллятора ФитцХью–Нагумо спайковая активность модифицированного осциллятора зависит от длительности внешнего импульсного сигнала, модифицированный осциллятор способен демонстрировать серию из нескольких спайков в ответ на одиночное внешнее импульсное воздействие, а также может возбуждаться последовательностью импульсов, имеющих амплитуду ниже пороговой. Предложенную нами модель можно интерпретировать как модель бёрстового нейрона с двумя медленными переменными, в которой третье уравнение описывает динамику медленной модулирующей переменной аналогично уравнению Хиндмарша–Роуза. Однако отсутствие периодического внешнего воздействия не позволяет наблюдать в нашей модели типичную бёрстовую динамику.

Предложенная модификация осциллятора ФитцХью–Нагумо может быть достаточно просто реализована в радиофизическом эксперименте с помощью аналого-цифровой установки. При этом нейроподобный осциллятор ФитцХью–Нагумо реализуется в аналоговом виде с использованием аналоговых электронных элементов, а цифровая схема регулирует длительность входных импульсов.

В дальнейшем планируется использовать предложенную модель для построения спайковых нейронных сетей. Обучение таких спайковых нейронных сетей может быть проведено с помощью изменения синаптических связей за счет настройки весов синапсов  $w_e$  и  $w_i$ , соответствующих длительности внешних импульсных сигналов.

### Список литературы

1. Yamazaki K., Vo-Ho V.-K., Bulsara D., Le N. Spiking neural networks and their applications: A review // Brain Sci. 2022. Vol. 12, iss. 7. P. 863. DOI: 10.3390/brainsci12070863.

2. Дмитричев А. С., Касаткин Д. В., Клинишов В. В., Кириллов С. Ю., Масленников О. В., Щапин Д. С., Некоркин В. И. Нелинейные динамические модели нейронов: Обзор // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 4. С. 5–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
3. Lazar A. A. Time encoding with an integrate-and-fire neuron with a refractory period // Neurocomputing. 2004. Vol. 58–60. P. 53–58. DOI: 10.1016/j.neucom.2004.01.022.
4. Hodgkin A. L., Huxley A. F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J. Physiol. 1952. Vol. 117, iss. 4. P. 500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
5. Kumar J., Gupta P. D., Ghosh S. The role of nonlinear axonal membrane capacitance in modulating ion channel cooperativity in action potential dynamics: Studies on Hodgkin-Huxley's model // Biophys. Chem. 2025. Vol. 319. P. 107391. DOI: 10.1016/j.bpc.2025.107391.
6. Morris C., Lecar H. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber // Biophys. J. 1981. Vol. 35, iss. 1. P. 193–213. DOI: 10.1016/S0006-3495(81)84782-0.
7. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // Proc. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci. 1984. Vol. 221, iss. 1222. P. 87–102. DOI: 10.1098/rspb.1984.0024.
8. Storace M., Linaro D., Lange E. The Hindmarsh-Rose neuron model: bifurcation analysis and piecewise-linear approximations // Chaos. 2008. Vol. 18, iss. 3. P. 033128. DOI: 10.1063/1.2975967.
9. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes // Biophys. J. 1961. Vol. 1. P. 445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
10. Dahlem M. A., Hiller G., Panchuk A., Schöll E. Dynamics of delay-coupled excitable neural systems // Int. J. Bifurc. Chaos. 2009. Vol. 19, iss. 2. P. 745–753. DOI: 10.1142/S0218127409023111.
11. Навроцкая Е. В., Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Оценка параметров импульсного воздействия с помощью сети нейроподобных осцилляторов // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 4. С. 495–512. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-495-512.
12. Izhikevich E. M. Simple model of spiking neurons // IEEE Trans. Neural Netw. 2003. Vol. 14, iss. 6. P. 1569–1572. DOI: 10.1109/TNN.2003.820440.
13. Rulkov N. F. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65, iss. 4. P. 041922. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041922.
14. Courbage M., Nekorkin V. I., Vdovin L. V. Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity // Chaos. 2007. Vol. 17, iss. 4. P. 043109. DOI: 10.1063/1.2795435.
15. Мищенко М. А., Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нейроподобная динамика в системе фазовой синхронизации // Известия вузов. ПНД. 2012. Т. 20, № 4. С. 122–130. DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-4-122-130.
16. Matrosov V. V., Mishchenko M. A., Shalfeev V. D. Neuron-like dynamics of a phase-locked loop // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2013. Vol. 222. P. 2399–2405. DOI: 10.1140/epjst/e2013-02024-9.
17. Сысоев И. В., Сысоева М. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Нейроподобная динамика в системе фазовой автоподстройки частоты с запаздывающей обратной связью // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46, № 14. С. 36–38. DOI: 10.21883/PJTF.2020.14.49665.18267.
18. Kipelkin I. M., Gerasimova S. A., Belov A. I., Guseinov D. V., Kruglov A. V., Serov D. A., Talanov M. O., Mikhaylov A. N., Kazantsev V. B. Memristor-based model of neuronal excitability and synaptic potentiation // Front. Neurosci. 2024. Vol. 18. P. 1456386. DOI: 10.3389/fnins.2024.1456386.
19. Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Новый подход к математическому моделированию химических синапсов // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 3. С. 376–393. DOI: 10.18500/0869-6632-003099.
20. Xu Y., Jia Y., Ma J., Alsaedi A., Ahmad B. Synchronization between neurons coupled by

- memristor // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2017. Vol. 104. P. 435–442. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.09.002.
21. Герасимова С. А., Михайлов А. Н., Белов А. И., Королев Д. С., Горшков О. Н., Казанцев В. Б. Имитация синаптической связи нейроноподобных генераторов с помощью мемристивного устройства // *ЖТФ*. 2017. Т. 87, № 8. С. 1248–1254. DOI: 10.21883/JTF.2017.08.44735.2033.
  22. Korneev I. A., Semenov V. V., Slepnev A. V., Vadivasova T. E. The impact of memristive coupling initial states on travelling waves in an ensemble of the FitzHugh-Nagumo oscillators // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2021. Vol. 147. P. 110923. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110923.
  23. Stasenko S. V., Mikhaylov A. N., Fedotov A. A., Smirnov V. A., Kazantsev V. B. Astrocyte control bursting mode of spiking neuron network with memristor-implemented plasticity // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2024. Vol. 181. P. 114648. DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114648.
  24. Навроцкая Е. В., Курбако А. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Синхронизация ансамбля мемристивно связанных неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо // *Известия вузов. ПНД*. 2024. Т. 32, № 1. С. 96–110. DOI: 10.18500/0869-6632-003085.
  25. Markram H., Gerstner W., Sjöström P. J. Spike-timing-dependent plasticity: A comprehensive overview // *Front. Synaptic Neurosci.* 2012. Vol. 4. P. 2. DOI: 10.3389/fnsyn.2012.00002.
  26. Lobov S. A., Chernyshov A. V., Krilova N. P., Shamshin M. O., Kazantsev V. B. Competitive learning in a spiking neural network: Towards an intelligent pattern classifier // *Sensors*. 2020. Vol. 20, iss. 2. P. 500. DOI: 10.3390/s20020500.
  27. Dong Y., Zhao D., Li Y., Zeng Y. An unsupervised STDP-based spiking neural network inspired by biologically plausible learning rules and connections // *Neural Netw.* 2023. Vol. 165. P. 799–808. DOI: 10.1016/j.neunet.2023.06.019.
  28. Rahman N. A., Yusoff N. Modulated spike-time dependent plasticity (STDP)-based learning for spiking neural network (SNN): A review // *Neurocomputing*. 2025. Vol. 618. P. 129170. DOI: 10.1016/j.neucom.2024.129170.
  29. Shboev A., Vlasov D., Rybka R., Serenko A. Solving a classification task by spiking neurons with STDP and temporal coding // *Procedia Computer Science*. 2018. Vol. 123. P. 494–500. DOI: 10.1016/j.procs.2018.01.075.
  30. Diehl P. U., Cook M. Unsupervised learning of digit recognition using spike-timing-dependent plasticity // *Front. Comput. Neurosci.* 2015. Vol. 9. P. 99. DOI: 10.3389/fncom.2015.00099.
  31. Kurbako A. V., Ezhov D. M., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Spike-timing dependent plasticity learning of small spiking neural network for image recognition // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2025. Vol. 234. P. 3659–3668. DOI: 10.1140/epjs/s11734-025-01512-3.
  32. Lobov S. A., Mikhaylov A. N., Shamshin M., Makarov V. A., Kazantsev V. B. Spatial properties of STDP in a self-learning spiking neural network enable controlling a mobile robot // *Front. Neurosci.* 2020. Vol. 14. P. 88. DOI: 10.3389/fnins.2020.00088.
  33. Егоров Н. М., Пономаренко В. И., Сысоев И. В., Сысоева М. В. Имитационное моделирование эпилептиформной активности сетью нейроподобных радиотехнических осцилляторов // *ЖТФ*. 2021. Т. 91, № 3. С. 519–528. DOI: 10.21883/JTF.2021.03.50532.237-20.
  34. Egorov N. M., Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Sysoev I. V., Sysoeva M. V. Transient dynamics in electronic neuron-like circuits in application to modeling epileptic seizures // *Nonlinear Dynamics*. 2022. Vol. 108. P. 4231–4242. DOI: 10.1007/s11071-022-07379-6.
  35. Егоров Н. М., Сысоева М. В., Пономаренко В. И., Корнилов М. В., Сысоев И. В. Кольцевой генератор нейроподобной активности с перестраиваемой частотой // *Известия вузов. ПНД*. 2023. Т. 31, № 1. С. 103–120. DOI: 10.18500/0869-6632-003025.
  36. Annaswamy A. M., Fradkov A. L. A historical perspective of adaptive control and learning // *Annu. Rev. Contr.* 2021. Vol. 52. P. 18–41. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2021.10.014.

## References

1. Yamazaki K, Vo-Ho V-K, Bulsara D, Le N. Spiking neural networks and their applications: A review. *Brain Sciences*. 2022;12(7):863. DOI: 10.3390/brainsci12070863.
2. Dmitrichev AS, Kasatkin DV, Klinshov VV, Kirillov SYu, Maslennikov OV, Shchapin DS, Nekorkin VI. Nonlinear dynamical models of neurons. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;26(4):5–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
3. Lazar AA. Time encoding with an integrate-and-fire neuron with a refractory period. *Neurocomputing*. 2004;58–60:53–58. DOI: 10.1016/j.neucom.2004.01.022.
4. Hodgkin AL, Huxley AF. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* 1952;117(4):500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
5. Kumar J, Gupta PD, Ghosh S. The role of nonlinear axonal membrane capacitance in modulating ion channel cooperativity in action potential dynamics: Studies on Hodgkin-Huxley's model. *Biophys. Chem.* 2025;319:107391. DOI: 10.1016/j.bpc.2025.107391.
6. Morris C, Lecar H. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophys. J.* 2025;319:107391. DOI: 10.1016/S0006-3495(81)84782-0.
7. Hindmarsh JL, Rose RM. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci.* 1984;221(1222):87–102. DOI: 10.1098/rspb.1984.0024.
8. Storace M, Linaro D, Lange E. The Hindmarsh-Rose neuron model: bifurcation analysis and piecewise-linear approximations. *Chaos*. 2008;18(3):033128 DOI: 10.1063/1.2975967.
9. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes. *Biophys. J.* 1961;1:445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
10. Dahlem MA, Hiller G, Panchuk A, Schöll E. Dynamics of delay-coupled excitable neural systems. *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2009;19(2):745–753. DOI: 10.1142/S0218127409023111.
11. Navrotskaya EV, Kulminskiy DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Estimation of impulse action parameters using a network of neuronlike oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(4):495–512. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-495-512.
12. Izhikevich EM. Simple model of spiking neurons. *IEEE Trans. Neural Netw.* 2003;14(6):1569–1572. DOI: 10.1109/TNN.2003.820440.
13. Rulkov NF. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. *Phys. Rev. E*. 2002;65(4):041922. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041922.
14. Courbage M, Nekorkin VI, Vdovin LV. Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity. *Chaos*. 2007;17(4):043109. DOI: 10.1063/1.2795435.
15. Mischenko MA, Shalfeev VD, Matrosov VV. Neuron-like dynamics in phase-locked loop. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2012;20(4):122–130 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-4-122-130.
16. Matrosov VV, Mishchenko MA, Shalfeev VD. Neuron-like dynamics of a phase-locked loop. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2013;222:2399–2405. DOI: 10.1140/epjst/e2013-02024-9.
17. Sysoev IV, Sysoeva MV, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Neural-like dynamics in a phase-locked loop system with delayed feedback. *Tech. Phys. Lett.* 2020;46(7):710–712. DOI: 10.1134/S1063785020070287.
18. Kipelkin IM, Gerasimova SA, Belov AI, Guseinov DV, Kruglov AV, Serov DA, Talanov MO, Mikhaylov AN, Kazantsev VB. Memristor-based model of neuronal excitability and synaptic potentiation. *Front. Neurosci.* 2024;18:1456386. DOI: 10.3389/fnins.2024.1456386.
19. Glyzin DS, Glyzin SD, Kolesov AYu. A new approach to mathematical modeling of chemical synapses. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(3):376–393 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-003099.
20. Xu Y, Jia Y, Ma J, Alsaedi A, Ahmad B. Synchronization between neurons coupled by memristor.

- Chaos, Solitons and Fractals. 2017;104:435–442. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.09.002.
21. Gerasimova SA, Mikhaylov AN, Belov AI, Korolev DS, Gorshkov ON, Kazantsev VB. Simulation of synaptic coupling of neuron-like generators via a memristive device. *Tech. Phys.* 2017;62:1259–1265. DOI: 10.1134/S1063784217080102.
  22. Korneev IA, Semenov VV, Slepnev AV, Vadivasova TE. The impact of memristive coupling initial states on travelling waves in an ensemble of the FitzHugh-Nagumo oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals.* 2021;147:110923. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110923.
  23. Stasenko SV, Mikhaylov AN, Fedotov AA, Smirnov VA, Kazantsev VB. Astrocyte control bursting mode of spiking neuron network with memristor-implemented plasticity. *Chaos, Solitons and Fractals.* 2024;181:114648. DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114648.
  24. Navrotskaya EV, Kurbako AV, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Synchronisation of the ensemble of nonidentical FitzHugh-Nagumo oscillators with memristive couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(1):96–110. DOI: 10.18500/0869-6632-003085.
  25. Markram H, Gerstner W, Sjöström PJ. Spike-timing-dependent plasticity: A comprehensive overview. *Front. Synaptic Neurosci.* 2012;4:2. DOI: 10.3389/fnsyn.2012.00002.
  26. Lobov SA, Chernyshov AV, Krilova NP, Shamshin MO, Kazantsev VB. Competitive learning in a spiking neural network: Towards an intelligent pattern classifier. *Sensors.* 2020;20(2):500. DOI: 10.3390/s20020500.
  27. Dong Y, Zhao D, Li Y, Zeng Y. An unsupervised STDP-based spiking neural network inspired by biologically plausible learning rules and connections. *Neural Netw.* 2023;165:799–808. DOI: 10.1016/j.neunet.2023.06.019.
  28. Rahman NA, Yusoff N. Modulated spike-time dependent plasticity (STDP)-based learning for spiking neural network (SNN): A review. *Neurocomputing.* 2025;618:129170. DOI: 10.1016/j.neucom.2024.129170.
  29. Sboev A, Vlasov D, Rybka R, Serenko A. Solving a classification task by spiking neu-rons with STDP and temporal coding. *Procedia Computer Science.* 2018;123:494–500. DOI: 10.1016/j.procs.2018.01.075.
  30. Diehl PU, Cook M. Unsupervised learning of digit recognition using spike-timing-dependent plasticity. *Front. Comput. Neurosci.* 2015;9:99. DOI: 10.3389/fncom.2015.00099.
  31. Kurbako AV, Ezhov DM, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Spike-timing dependent plasticity learning of small spiking neural network for image recognition. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2025;234:3659–3668. DOI: 10.1140/epjs/s11734-025-01512-3.
  32. Lobov SA, Mikhaylov AN, Shamshin M, Makarov VA, Kazantsev VB. Spatial properties of STDP in a self-learning spiking neural network enable controlling a mobile robot. *Front. Neurosci.* 2020;14:88. DOI: 10.3389/fnins.2020.00088.
  33. Egorov NM, Ponomarenko VI, Sysoev IV, Sysoeva MV. Simulation of epileptiform activity using network of neuron-like radio technical oscillators. *Tech. Phys.* 2021;66:505–514. DOI: 10.1134/S1063784221030063.
  34. Egorov NM, Kulminskiy DD, Ponomarenko VI, Sysoev IV, Sysoeva MV. Transient dynamics in electronic neuron-like circuits in application to modeling epileptic seizures. *Nonlinear Dynamics.* 2022;108:4231–4242. DOI: 10.1007/s11071-022-07379-6.
  35. Egorov NM, Sysoeva MV, Ponomarenko VI, Kornilov MV, Sysoev IV. Ring generator of neuron-like activity with tunable frequency. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(1):103–120. DOI: 10.18500/0869-6632-003025.
  36. Annaswamy AM, Fradkov AL. A historical perspective of adaptive control and learning. *Annu. Rev. Contr.* 2021;52:18–41. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2021.10.014.



*Ежов Дмитрий Максимович* — родился в Саратове (1999). Окончил Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского по направлению «Биотехнические системы и технологии» (2023). В настоящее время — ассистент кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Научные интересы сосредоточены в области моделей нейронов и спайковых нейронных сетей.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: ezhovdmitryi@yandex.ru  
ORCID: 0000-0003-4994-6959  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1252910



*Курбако Александр Васильевич* — родился в Знаменске (1997). Окончил бакалавриат (2019) и магистратуру (2021) Саратовского государственного университета по направлению «Биотехнические системы и технологии». Обучается в аспирантуре СГУ имени Н. Г. Чернышевского. Работает ассистентом на кафедре динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ и младшим научным сотрудником СФ ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов — анализ временных рядов.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН  
E-mail: kurbako.sasha@mail.ru  
ORCID: 0000-0002-3479-4609  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1055278



*Пономаренко Владимир Иванович* — родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (СГУ, 1982). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Область научных интересов — статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-1579-6465  
AuthorID (eLibrary.Ru): 39986



*Прохоров Михаил Дмитриевич* — родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) и доктора физико-математических наук (2008). Заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru  
ORCID: 0000-0003-4069-9410  
AuthorID (eLibrary.Ru): 39985