Нелинейные волны.
Солитоны. Автоволны. Самоорганизация

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(6)

Научная статья
УДК 530.182, 517.912, 517.929

DOI: 10.18500/0869-6632-003180
EDN: XEHQXM

Обращение степенных рядов и точные решения уравнений нелинейной математической физики

А. И. Землянухин✉*, Н. А. Артамонов, А. В. Бочкарев, В. И. Безлюдный*

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., Россия
E-mail: ✉azemlyanukhin@mail.ru, twostvoll@bk.ru, ab2009sar@list.ru, bezlyudnyivi@mail.ru
Поступила в редакцию 22.04.2025, принята к публикации 22.05.2025,
опубликована онлайн 19.06.2025, опубликована 28.11.2025

Аннотация. *Цель*. Разработка нового метода нахождения точных решений уравнений нелинейной математической физики. *Методы*. Частичная сумма ряда метода возмущений, записанная для исходного нелинейного уравнения, представляется в форме степенного ряда по степеням экспоненциальной функции, являющейся решением линеаризованного уравнения. Рациональная производящая функция последовательности коэффициентов степенного ряда представляет собой точное решение исходного уравнения. Метод основан на использовании свойства, состоящего в том, что обращенные степенные ряды для солитоноподобных решений обрываются, начиная со степени, не менее чем на единицу превосходящей порядок полюса решения. *Результаты*. Эффективность метода продемонстрирована при построении точных локализованных решений неинтегрируемого уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса, а также нелинейных интегрируемых дифференциально-разностных уравнений. *Заключение*. Предложенный метод применим для решения интегрируемых и неинтегрируемых дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а также интегрируемых дифференциально-разностных уравнений.

Ключевые слова: обращение степенного ряда, производящая функция, нелинейные дифференциальные уравнения, дифференциально-разностные уравнения, точные решения.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-29-00071).

Для цитирования: *Землянухин А. И., Артамонов Н. А., Бочкарев А. В., Безлюдный В. И.* Обращение степенных рядов и точные решения уравнений нелинейной математической физики // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 6. С. 929–942. DOI: 10.18500/0869-6632-003180. EDN: XEHQXM

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003180

Power series reversion and exact solutions of nonlinear mathematical physics equations

A. I. Zemlyanukhin✉, *N. A. Artamonov, A. V. Bochkarev, V. I. Bezlyudnyi*

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia
E-mail: ✉azemlyanukhin@mail.ru, twostvoll@bk.ru, ab2009sar@list.ru, bezlyudnyivi@mail.ru
Received 22.04.2025, accepted 22.05.2025, available online 19.06.2025, published 28.11.2025

Abstract. *Purpose*. Develop a new method for finding exact solutions to equations of nonlinear mathematical physics. *Methods*. The partial sum of a perturbation series, written for the original nonlinear equation, is represented as a power series in powers of the exponential function, which is the solution of the linearized equation. The rational generating function of the sequence of coefficients of the power series represents the exact solution of the original equation. The method is based on the property that inverted power series for soliton-like solutions terminates at powers at least one greater than the order of the pole of the solution. *Results*. The effectiveness of the method is demonstrated in constructing exact localized solutions of the nonintegrable Korteweg–de Vries–Burgers equation, as well as nonlinear integrable differential-difference equations. *Conclusion*. The proposed method is applicable to solving integrable and non-integrable differential equations with constant coefficients, as well as integrable differential-difference equations.

Keywords: power series reversion, generating function, nonlinear differential equations, differential-difference equations, exact solutions.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 24-29-00071).

For citation: Zemlyanukhin AI, Artamonov NA, Bochkarev AV, Bezlyudnyi VI. Power series reversion and exact solutions of nonlinear mathematical physics equations. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(6):929–942. DOI: 10.18500/0869-6632-003180

Введение

Проблему разработки методов построения точных частных решений, возникающих в приложениях нелинейных уравнений математической физики, актуальную на протяжении нескольких последних десятилетий, в значительной степени можно считать решенной. В настоящее время в распоряжении исследователей имеется обширный список эффективных подходов, позволяющих получать физически состоятельные точные решения, по крайней мере, в непрерывном случае [1–3]. В нелинейных дискретных системах, описываемых разностными и дифференциально-разностными уравнениями, ситуация до сих пор менее обнадёживающая. Имеющие физический смысл точные решения удается построить только для модельных интегрируемых уравнений, и список методов здесь значительно скромнее. Интегрируемость многоточечных решеточных уравнений чаще всего доказывается с использованием громоздких процедур построения пар Лакса и иерархий законов сохранения [4]. В этом случае получение явного вида точных решений остается открытой технически сложной проблемой. Одним из традиционных подходов к анализу нелинейных цепочек является переход к соответствующим континуальным длинноволновым пределам [5]. Однако даже интегрируемость непрерывного аналога с известными многосолитонными решениями не может обеспечить существования точного решения исходной дискретной модели. Цепочка Ферми–Паста–Улама прекрасно подтверждает это утверждение. По нашему мнению, остается весьма актуальной проблема разработки методов, позволяющих строить точные частные решения как в непрерывных, так и в дискретных нелинейных системах. В данной статье авторы ставят своей целью предложить простой, легко программируемый и вычислительно экономный метод для решения указанной проблемы в некоторых случаях. Статья организована следующим образом. В первом параграфе излагается основная идея метода и иллюстрируется его использование для нахождения производящей функции известной числовой последовательности. Во втором параграфе строится точное решение неинтегрируемого нелинейного эволюционного уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса. В третьем и четвертом параграфах метод применяется для построения точных решений нелинейных трехточечного и пятиточечного интегрируемых дифференциально-разностных уравнений. В заключении обсуждаются преимущества и ограничения предложенного подхода.

1. Идея метода

На первом этапе предлагаемого подхода необходимо получить ряд по степеням экспонент, являющихся решениями последовательности линейных задач, из исходного непрерывного или дискретного уравнения. Такой ряд возникает при использовании метода возмущений, когда экспонента выступает в качестве решения линеаризованного уравнения. Известно [6, 7], что ряды метода возмущений могут сходиться медленно и даже расходиться, так что возникает проблема возможности и законности суммирования для получения точного решения. Дальнейшие рассуждения основаны на представлениях Леонарда Эйлера о суммировании расходящихся рядов [8]: «...мы скажем, что сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд». Другими словами, Эйлер принимает за сумму степенного ряда, вне зависимости от того, сходится он или расходится, выражение для производящей функции последовательности его коэффициентов. Это выражение, построенное для ряда метода возмущений, является искомым точным решением исходного уравнения, что проверяется подстановкой. В [5, 9] отмечалось, что «коэффициенты ряда Тейлора в совокупности несут гораздо большую информацию о значениях функции, чем его частичные суммы. Надо только уметь ее извлекать, и один из способов сделать это заключается в построении паде-аппроксимант». Использование диагональных аппроксимант Паде (АП) лежит в основе предложенного недавно метода геометрического ряда [10, 11]. Этот метод может применяться для непрерывных и дискретных уравнений, однако возможны вычислительные трудности, связанные с необходимостью факторизации разностей последовательных диагональных АП высоких порядков. Будем исходить из того, что искомая производящая функция рациональна. В общем случае рациональность суммы степенного ряда доказывается в терминах квазимногочленов [12] или с использованием критерия, связанного с обращением в ноль последовательности ганкелевых определителей, начиная с некоторого порядка [13]. Все известные нам физически реализуемые точные локализованные решения нелинейных уравнений представляют собой или выражаются через рациональные дроби по степеням экспоненциальных функций [10]. При этом степень знаменателя, не меньшая порядка полюса искомого решения, превосходит степень числителя дроби. Более того, после выделения из дроби постоянного слагаемого, числитель остатка, как правило, включает единственное слагаемое. Это означает, что обратная остатку дробь представляется многочленом невысокого порядка (возникающие в приложениях уравнения практически никогда не имеют решений с порядком полюса, большим четырех). Таким образом, при обращении ряда метода возмущений происходит обнуление коэффициентов, начиная со степеней, превосходящих порядок полюса решения, и ряд превращается в многочлен. Если соответствующие коэффициенты не обнуляются безусловно, то требование их обнуления доставляет дополнительные условия на коэффициенты уравнения и параметры искомого решения.

Прежде чем применять процедуру обращения степенного ряда к решению нелинейных уравнений, покажем, как её можно использовать для нахождения производящей функции числовой последовательности Пелля, определяемой рекуррентным соотношением [14]

$$p_n = 2ap_{n-1} + (b - a^2)p_{n-2}. \tag{1}$$

Вычислим коэффициенты производящей функции $P = \sum\limits_{n=1} p_n x^n$, полагая первые два коэффициента p_1 и p_2 произвольными:

$$\begin{aligned}
&p_1 = p_1,\\
&p_2 = p_2,\\
&p_3 = -(a^2-b)p_1 + 2ap_2,\\
&p_4 = -2a(a^2-b)p_1 + (3a^2+b)p_2,\\
&p_5 = -(a^2-b)(3a^2+b)p_1 + 4a(a^2+b)p_2,\\
&p_6 = -4a(a^2-b)(a^2+b)p_1 + (5a^4+10a^2b+b^2)p_2,\\
&p_7 = -(a^2-b)(5a^4+10a^2b+b^2)p_1 + 2a(3a^2+b)(a^2+3b)p_2, \ldots
\end{aligned} \tag{2}$$

По определению степенной ряд $P^{-1} = \sum a_n x^n$ называется обратным для ряда $P = \sum\limits_{n=1} p_n x^n$, если

$$PP^{-1} = 1. \tag{3}$$

Чтобы произведение PP^{-1} не зависело от x, индекс в сумме $\sum a_n x^n$ должен начинаться с -1. Найдём последовательно несколько первых коэффициентов a_n, используя равенство (3).

$$\begin{aligned}
&a_{-1} = \frac{1}{p_1},\\
&a_0 = -\frac{p_2}{p_1^2}.\\
&a_1 = \frac{(a^2-b)p_1^2 - 2ap_1p_2 + p_2^2}{p_1^3},\\
&a_2 = \frac{(2ap_1-p_2)(a^2p_1^2 - 2ap_1p_2 - bp_1^2 + p_2^2)}{p_1^4},\\
&a_3 = \frac{(2ap_1-p_2)^2(a^2p_1^2 - 2ap_1p_2 - bp_1^2 + p_2^2)}{p_1^5},\\
&a_4 = \frac{(2ap_1-p_2)^3(a^2p_1^2 - 2ap_1p_2 - bp_1^2 + p_2^2)}{p_1^6}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Обратим внимание, что числители коэффициентов с a_2 по a_4 включают два одинаковых множителя

$$\begin{aligned}
&C_1 = 2ap_1 - p_2,\\
&C_2 = a^2p_1^2 - 2ap_1p_2 - bp_1^2 + p_2^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Предположим, что старшие коэффициенты также содержат эти множители.

Положив $C_1 = 0$, получим

$$p_2 = 2ap_1, \tag{6}$$

$$P^{-1} = \sum_{n=-1} a_n x^n = \frac{1}{p_1 x} - \frac{2a}{p_1} + \frac{(a^2-b)x}{p_1} = \frac{1 - 2ax + (a^2-b)x^2}{p_1 x}. \tag{7}$$

Обратный ряд обрывается на первых трех членах, и последняя дробь является его суммой. Следовательно, обращенная дробь играет роль суммы исходного ряда

$$P = \sum_{n=1} p_n x^n = \frac{p_1 x}{1 - 2ax + (a^2-b)x^2}. \tag{8}$$

Выражение (8) является производящей функцией для последовательности коэффициентов (2) и определяет в замкнутой форме первую ветвь точного частного решения разностного уравнения (1). Чтобы убедиться в последнем, достаточно разложить (8) в степенной ряд и проверить, что его коэффициенты совпадают с соответствующими коэффициентами системы (2) при условии (6):

$$\begin{aligned}
&p_1 = p_1,\\
&p_2 = 2ap_1,\\
&p_3 = p_1(3a^2+b),\\
&p_4 = 4ap_1(a^2+b),\\
&p_5 = p_1(5a^4+10a^2b+b^2),\\
&p_6 = 2ap_1(3a^2+b)(a^2+3b), \ldots
\end{aligned} \tag{9}$$

Если положить $C_2 = 0$, получим

$$p_2 = (a \pm \sqrt{b})p_1, \tag{10}$$

$$P^{-1} = \sum_{n=-1} a_n x^n = \frac{1}{p_1 x} - \frac{a \pm \sqrt{b}}{p_1} = \frac{1-(a\pm\sqrt{b})x}{p_1 x}, \tag{11}$$

и производящая функция второй ветви частного решения принимает вид

$$P = \frac{p_1 x}{1-(a\pm\sqrt{b})x}. \tag{12}$$

2. Уравнение Кортевега–де Вриза–Бюргерса

Известно [1], что уравнение Кортевега–де Вриза–Бюргерса (КдВБ) не относится к классу точно решаемых уравнений, и решение задачи Коши для него не находится методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [15]. Это уравнение обладает некоторыми точными частными решениями в переменных бегущей волны. На рубеже 90-х годов 20 века бурно развивались методы построения точных решений неинтегрируемых МОЗР уравнений, и уравнение КдВБ является в этом отношении показательным. Дело в том, что в 1990 году вышла в свет монография [16], в которой был решен широкий круг задач волновой динамики газо- и парожидкостных сред. Относительно уравнения КдВБ на стр. 77 монографии сказано, что это уравнение «не имеет аналитических решений, и основным инструментом его исследования являются численные методы». На самом деле, уже в 1988 году точные частные решения обобщенных уравнений КдВБ были получены Н. А. Кудряшовым [17]. Построим точное частное решение неинтегрируемого уравнения КдВБ в форме

$$u_t + uu_x - Cu_{xx} + u_{xxx} = 0 \tag{13}$$

с параметром C перед диссипативным членом, используя процедуру обращения ряда.

Переходя в (13) к переменной бегущей волны $z = kx - \omega t$, после почленного интегрирования по переменной z получим

$$-\omega u + \frac{k}{2}u^2 - Ck^2 u_z + k^3 u_{zz} = 0. \tag{14}$$

Будем искать решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (14) в форме ряда с неизвестными коэффициентами по степеням показательной функции

$$u = \sum_{n=0} b_n (e^z)^n. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14), группируя слагаемые по степеням e^z и приравнивая их нулю, в главном (нулевом) порядке получим

$$-\omega b_0 + \frac{1}{2} k b_0^2 = 0, \tag{16}$$

откуда

$$b_0 = \frac{2\omega}{k}. \tag{17}$$

В первом порядке по e^z имеем

$$(k^3 - Ck^2 + \omega) b_1 = 0, \tag{18}$$

откуда, считая $b_1 \neq 0$, получаем линейное дисперсионное соотношение

$$\omega = k^2 (C - k). \tag{19}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $(e^z)^2,\ (e^z)^3,\ (e^z)^4, \ldots$, получим

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{b_1^2}{2k(C-3k)}, \\
b_3 &= \frac{b_1^3}{4k^2(C-3k)(C-4k)}, \\
b_4 &= \frac{b_1^4(3C-10k)}{24k^3(C-3k)^2(C-4k)(C-5k)}, \\
b_5 &= \frac{b_1^5(6C-25k)}{96k^4(C-3k)^2(C-4k)(C-5k)(C-6k)}, \ldots
\end{aligned} \tag{20}$$

После замены $e^z = x$ выражение (15) становится степенным рядом вида $P = \sum\limits_{n=0} b_n x^n$, обратный ряд для которого также должен начинаться с постоянного члена: $P^{-1} = \sum\limits_{n=0} a_n x^n$ Используя соотношение (3), получаем:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2k(C-k)}, \\
a_1 &= -\frac{b_1}{4k^2(C-k)^2}, \\
a_2 &= -\frac{b_1^2}{4k^2(C-k)^3(C-3k)}, \\
a_3 &= -\frac{b_1^3(5k+C)}{16k^3(C-k)^4(C-3k)(C-4k)}, \\
a_4 &= -\frac{b_1^4(5k+C)(C^2+Ck-14k^2)}{48k^4(C-k)^5(C-3k)^2(C-4k)(C-5k)}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Замечая, что коэффициенты обратного ряда, начиная с a_3, содержат общий множитель $(5k + C)$, потребуем

$$k = -\frac{C}{5}. \tag{22}$$

При выполнении условия (22) обратный ряд обрывается на 3-м слагаемом

$$P^{-1} = -\frac{25}{12C^2} - \frac{625 b_1 x}{144 C^4} - \frac{15625 b_1^2 x^2}{6912 C^6} = -\frac{25}{6912} \frac{(24C^2 + 25 b_1 x)^2}{C^6}, \tag{23}$$

и его сумма (23) после обратной замены $x = \mathrm{e}^z$ определяет искомое точное решение

$$u = -\frac{6912}{25} \frac{C^6}{(24C^2 + 25b_1 e^z)^2}. \tag{24}$$

Выражение (24) является точным частным решением уравнения КдВБ (14), записанного для переменной бегущей волны $z = kx - \omega t$, при выполнении условий (19), (22) и содержит две произвольные постоянные — параметр уравнения C и постоянную сдвига b_1, всегда возникающую в решениях автономных уравнений. График решения при $b_1 > 0$ имеет форму кинка (рис. 1). В работах Н. А. Кудряшова [1, 17] для уравнения КдВБ с двумя произвольными коэффициентами найдено общее решение в переменной бегущей волны в терминах функции Вейерштрасса, которое в частном случае сводится к вещественному уединенно-волновому решению, также приведенному в [1, 17]. Точное локализованное решение (24), найденное нами для уравнения КдВб (13) с одним произвольным коэффициентом, совпадает с упомянутым уединенно-волновым решением при соответствующем выборе коэффициентов.

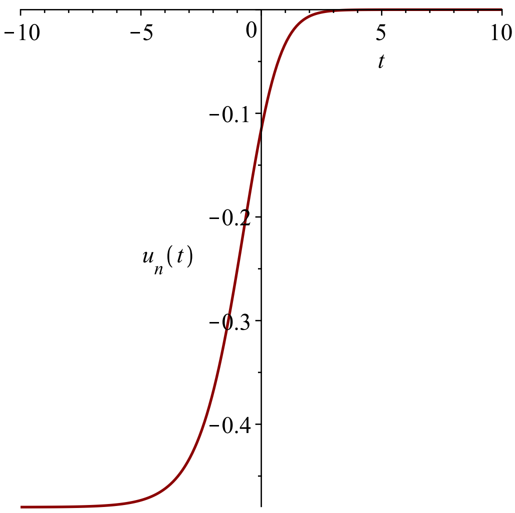


Рис. 1. График решения (24) при $C = b_1 = 1$

Fig. 1. Graph of solution (24) at $C = b_1 = 1$

Отметим, что точное решение (24) имеет полюс второго порядка, а коэффициенты обращенного ряда обнуляются, начиная с третьей степени при выполнении условия (22). Проведенные нами вычисления позволяют утверждать, что данное свойство является общим при построении локализованных решений. В случае интегрируемых эволюционных уравнений обращенные ряды обрываются безусловно, начиная со степени, на единицу превосходящей порядок полюса решения. Для неинтегрируемых уравнений, как в рассмотренном здесь примере, коэффициенты обращенного ряда обнуляются при выполнении дополнительных условий типа (22), связывающих коэффициенты уравнений с параметрами решений. Как и выше, обратный ряд обрывается, начиная со степени, по крайней мере, на единицу превосходящей порядок полюса решения.

3. Интегрируемое трехточечное дифференциально-разностное уравнение

Рассмотрим интегрируемое трехточечное дифференциально-разностное уравнение из семейства Вольтерра [4]

$$\frac{du_n}{dt} = (\alpha u_n^4 + \beta u_n^3 + \gamma u_n^2 + \lambda u_n + \mu)\left(\frac{1}{u_{n+1} - u_n} + \frac{1}{u_n - u_{n-1}}\right) \tag{25}$$

с пятью произвольными постоянными в правой части. Приведем (25) к виду

$$\begin{aligned}(u_{n+1} - u_n)(u_n - u_{n-1})\frac{du_n}{dt} -& \\ - (\alpha u_n^4 + \beta u_n^3 + \gamma u_n^2 + \lambda u_n + \mu)&(u_{n+1} - u_{n-1}) = 0\end{aligned} \tag{26}$$

и перейдем от системы двух переменных — непрерывной t и дискретной n — к единой переменной $z = dn + kt$. Тогда, если искать решение уравнения (26) в форме ряда

$$u_n = \sum_{n=0} b_n (e^z)^n, \tag{27}$$

то для остальных функций, входящих в (26), следует использовать подстановки

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{dt} &= k \sum_{n=0} b_n n (e^z)^n, \\ u_{n+1} &= \sum_{n=0} b_n \delta^n (e^z)^n, \\ u_{n-1} &= \sum_{n=0} b_n \delta^{-n} (e^z)^n, \end{aligned} \tag{28}$$

где $\delta = \mathrm{e}^d$. Подставляя (27), (28) в (26) и последовательно приравнивая нулю коэффициенты при e^z, $(\mathrm{e}^z)^2$, $(\mathrm{e}^z)^3$, ..., найдем

$$\begin{aligned} \mu &= -b_0(\alpha b_0^3 + \beta b_0^2 + \gamma b_0 + \lambda), \\ \lambda &= -b_0(4\alpha b_0^2 + 3\beta b_0 + 2\gamma), \\ k &= \frac{(\delta + 1)(6\alpha b_0^2 + 3\beta b_0 + \gamma)}{\delta - 1}, \\ b_2 &= \frac{b_1^2(4\alpha b_0 + \beta)}{2(6\alpha b_0^2 + 3\beta b_0 + \gamma)}, \\ b_3 &= \frac{b_1^3}{36(\delta+1)^2(2\alpha b_0^2 + \beta b_0 + \gamma/3)^2} \left(16\left(\delta + \frac{1}{2}\right)(\delta+2)\alpha^2 b_0^2 + \right. \\ &\qquad \left. + 8\beta\left(\delta + \frac{1}{2}\right)(\delta + 2)\alpha b_0 + 4\alpha\delta\gamma + \beta^2(\delta^2 + \delta + 1)\right), \ldots \end{aligned} \tag{29}$$

Заменяя $x = \mathrm{e}^z$, найдем обратный ряд $P^{-1} = \sum\limits_{n=-1} a_n x^n$ для ряда $P = \sum\limits_{n=0} b_n x^n - b_0$, не содержащего постоянного слагаемого:

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{b_1}, \\ a_0 &= -\frac{4\alpha b_0 + \beta}{12\alpha b_0^2 + 6\beta b_0 + 2\gamma}, \\ a_1 &= -\frac{b_1\delta(8\alpha^2 b_0^2 + 4\alpha\beta b_0 + 4\alpha\gamma - \beta^2)}{36(\delta+1)^2(2\alpha b_0^2 + \beta b_0 + \frac{\gamma}{3})^2}, \\ a_2 &= 0, \\ a_3 &= 0, \ldots \end{aligned} \tag{30}$$

Коэффициенты обратного ряда, начиная с a_2, обращаются в ноль безусловно:

$$P^{-1} = \frac{a_{-1}}{x} + a_0 + a_1 x, \tag{31}$$

следовательно, выражение

$$u(n,t) = b_0 + \frac{1}{\frac{a_{-1}}{\delta^n e^{kt}} + a_0 + a_1 \delta^n e^{kt}}, \tag{32}$$

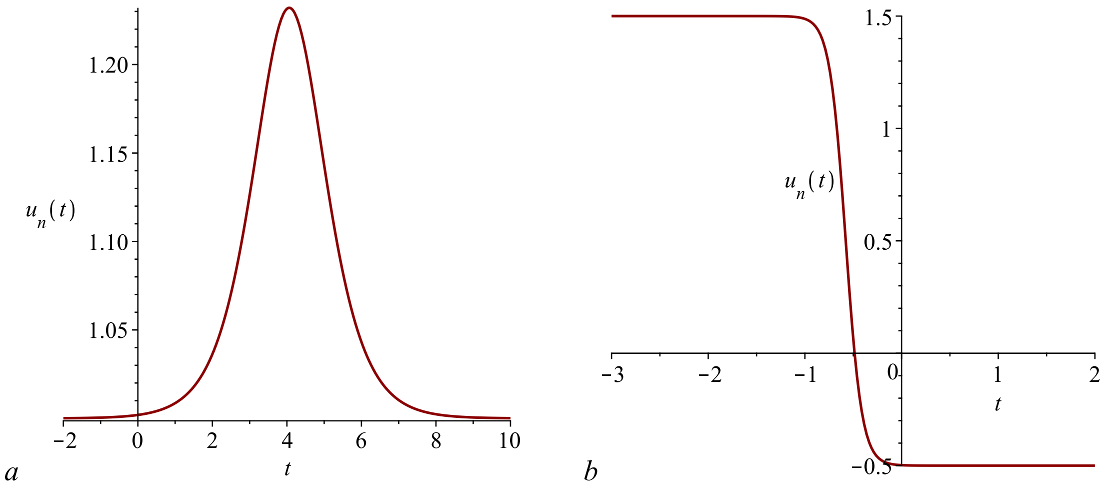


Рис. 2. График решения ([32](#)) при $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1/2$, $n = -10$, $b_1 = 2$, $\delta = 2$: *a* — $b_0 = 1$, *b* — $b_0 = -1/2$

Fig. 2. Graph of solution (32) at $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1/2$, $n = -10$, $b_1 = 2$, $\delta = 2$: *a* — $b_0 = 1$, *b* — $b_0 = -1/2$

где коэффициенты a_{-1}, a_0, a_1 вычисляются в соответствии с (30), а множитель k, согласно (29), является точным решением уравнения (26) при условии, что два коэффициента уравнения, μ и λ, подчиняются условиям (29). Решение (32) представляется ограниченной функцией, если корни трехчлена $a_1 x^2 + a_0 x + a_{-1}$ являются отрицательными или комплексными. В частности, второму случаю отвечает неравенство

$$8b_0\alpha(2b_0\alpha + \beta)(\delta^2 + 4\delta + 1) + 16\alpha\delta\gamma + \beta^2(\delta - 1)^2 < 0,$$

при котором дискриминант отрицателен. При $a_1 \neq 0$ ограниченное решение представляется солитоном на пьедестале b_0 (рис. 2, *a*), в противном случае решение имеет форму кинка, соединяющего два стационарных уровня b_0 и $b_0 + 1/a_0$ (рис. 2, *b*). Решение (32), по всей видимости, найдено впервые и в доступной авторам литературе не встречалось.

4. Интегрируемое пятиточечное дифференциально-разностное уравнение

Рассмотрим нелинейное пятиточечное дифференциально-разностное уравнение, приведенное в [18]

$$\frac{du_n}{dt} = (u_n + 1)\left(\frac{u_{n+2}u_n(u_{n+1}+1)^2}{u_{n+1}} - \frac{u_{n-2}u_n(u_{n-1}+1)^2}{u_{n-1}} + (2u_n+1)(u_{n+1} - u_{n-1})\right). \quad (33)$$

Это уравнение имеет два различных континуальных предела, являющихся интегрируемыми уравнениями Савады–Котеры и Каупа–Купершмидта. При помощи построенных пары Лакса и иерархии законов сохранения в [18] доказана интегрируемость решеточного уравнения (33). С известными интегрируемыми уравнениями подобного типа оно связано при помощи сложных соотношений, представляющих собой композиции двух преобразований типа Миуры. Отмечается [18], что использование таких соотношений для построения точных решений весьма затруднительно, поскольку задача сводится к решению дискретных уравнений типа Риккати. Покажем, что и в данном случае процедура обращения построенного ряда по степеням экспонент позволяет получить точное локализованное решение дифференциально-разностного уравнения (33).

Избавляясь, как и в случае, рассмотренном в предыдущем параграфе, от дробей в правой части уравнения, приводим (33) к виду

$$u_{n+1}u_{n-1}\frac{du_n}{dt} = (u_n+1)\big(u_{n+2}u_nu_{n-1}(u_{n+1}+1)^2 - u_{n-2}u_nu_{n+1}(u_{n-1}+1)^2 + \\ +(2u_n+1)(u_{n+1}-u_{n-1})u_{n+1}u_{n-1}\big). \tag{34}$$

Переходя к единственной переменной $z = dn + kt$, произведем в (34) замены

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{n=0} b_n (e^z)^n, \\ \frac{du_n}{dt} &= k\sum_{n=0} b_n n (e^z)^n, \\ u_{n\pm p} &= \sum_{n=0} b_n \delta^{\pm pn}(e^z)^n, \end{aligned} \tag{35}$$

где $\delta = \mathrm{e}^d$, после чего сгруппируем слагаемые в левой части уравнения по степеням и будем последовательно приравнивать нулю коэффициенты при $\mathrm{e}^z,\ (\mathrm{e}^z)^2,\ (\mathrm{e}^z)^3, \ldots$

$$\begin{aligned} k &= \big((b_0+1)^2(\delta^2+1)+(b_0+2)a_0\delta\big)(1-\delta^{-2})(b_0+1), \\ b_2 &= -\frac{b_1^2\delta((b_0^2-1)\delta^2+(b_0^2+4b_0+2)\delta+b_0^2-1)}{b_0((b_0+1)(\delta^2+1)+(b_0+2)\delta)(\delta-1)^2(b_0+1)}, \\ b_3 &= \frac{b_1^3\delta^2((b_0^2-b_0-2)(\delta^4+1)+(2b_0^2+2b_0-1)(\delta^3+\delta)+(3b_0^2+10b_0+6)\delta^2)}{b_0(b_0+1)^2(\delta+1)^2(\delta-1)^4((b_0+1)(\delta^2+1)+(b_0+2)\delta)}, \ldots \end{aligned} \tag{36}$$

при этом коэффициенты b_0 и b_1 остаются свободными. Как и ранее, после замены $x = \mathrm{e}^z$ вычислим для ряда $P = \sum\limits_{n=0} b_n x^n - b_0$ коэффициенты обратного ряда $P^{-1} = \sum\limits_{n=-1} a_n x^n$, используя условие (3):

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{b_1}, \\ a_0 &= \frac{\delta((b_0^2-1)(\delta^2+1)+(b_0^2+4b_0+2)\delta)}{b_0(b_0+1)(\delta-1)^2((b_0+1)(\delta^2+1)+(b_0+2)\delta)}, \\ a_1 &= \frac{b_1\delta^2}{b_0^2(b_0+1)^2(\delta+1)^2(\delta-1)^4((b_0+1)(\delta^2+1)+(b_0+2)\delta)}\big((b_0+1)^2(\delta^6+1)+ \\ &\quad +(b_0+2)(b_0-1)(b_0+1)^2(\delta^5+\delta)+(2b_0^4+5b_0^3+2b_0^2-2b_0-1)(\delta^4+\delta^2)+ \\ &\quad +(3b_0^4+8b_0^3+8b_0^2+6b_0+4)\delta^3\big), \ldots \end{aligned} \tag{37}$$

Коэффициенты $a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$, не выписанные из-за громоздкости, содержат одинаковый множитель

$$(b_0+1)^2(\delta^2+1)+(b_0^2-2)\delta, \tag{38}$$

обращающийся в нуль при двух значениях коэффициента b_0:

$$b_0 = -\frac{\delta^2 \pm (\delta+1)\sqrt{\delta}+1}{\delta^2+\delta+1}. \tag{39}$$

Каждое из этих значений определяет одну из ветвей точного решения уравнения (33) в форме

$$u_n = b_0 + \frac{1}{a_{-1}/\delta^n e^{kt} + a_0 + a_1 \delta^n e^{kt}}, \tag{40}$$

где $a_{-1} = 1/b_1$, и при выборе в (39) знака «−» следует принять

$$\begin{aligned} k &= \frac{2((\delta+1)\sqrt{\delta}+\delta)^2(\delta^2-1)}{\delta(\delta^2+\delta+1)^2}, \\ a_0 &= \frac{2\delta(\delta^2+\delta+1)}{(\delta^2-(\delta+1)\sqrt{\delta}+1)((\delta+1)\sqrt{\delta}+2\delta)}, \\ a_1 &= \frac{b_1\delta^3(\delta^2+\delta+1)^2(\delta^2+3\delta+2(\delta+1)\sqrt{\delta}+1)}{((\delta+1)\sqrt{\delta}+2\delta)^2(\delta^2-(\delta+1)\sqrt{\delta}+1)^2((\delta+1)\sqrt{\delta}+\delta)^2}, \end{aligned} \tag{41}$$

а при выборе знака «+»:

$$\begin{aligned} k &= \frac{2((\delta+1)\sqrt{\delta}-\delta)^2(\delta^2-1)}{\delta(\delta^2+\delta+1)^2}, \\ a_0 &= -\frac{2\delta(\delta^2+\delta+1)}{(\delta^2+(\delta+1)\sqrt{\delta}+1)((\delta+1)\sqrt{\delta}-2\delta)}, \\ a_1 &= \frac{b_1\delta^3(\delta^2+\delta+1)^2(\delta^2+3\delta-2(\delta+1)\sqrt{\delta}+1)}{((\delta+1)\sqrt{\delta}-2\delta)^2(\delta^2+(\delta+1)\sqrt{\delta}+1)^2((\delta+1)\sqrt{\delta}-\delta)^2}. \end{aligned} \tag{42}$$

Решение (40) содержит два произвольных параметра b_1 и δ ($\delta > 0,\ \delta \neq 1$), и, в отличие от аналогичного по структуре выражения (32), в ограниченном случае всегда представляется солитоном на пьедестале, так как $a_1 \neq 0$ при допустимых значениях δ: $\delta > 0, \delta \neq 1$. Дискриминант трехчлена $a_1x^2 + a_0x + a_{-1}$, соответствующего знаменателю в (40), всегда равен нулю, и решение (40) является ограниченным, когда знак b_1 выбирается противоположным знаку в (39) (рис. 3). Заметим, что явное выражение (40) точного решения уравнения (33) получено и приведено впервые.

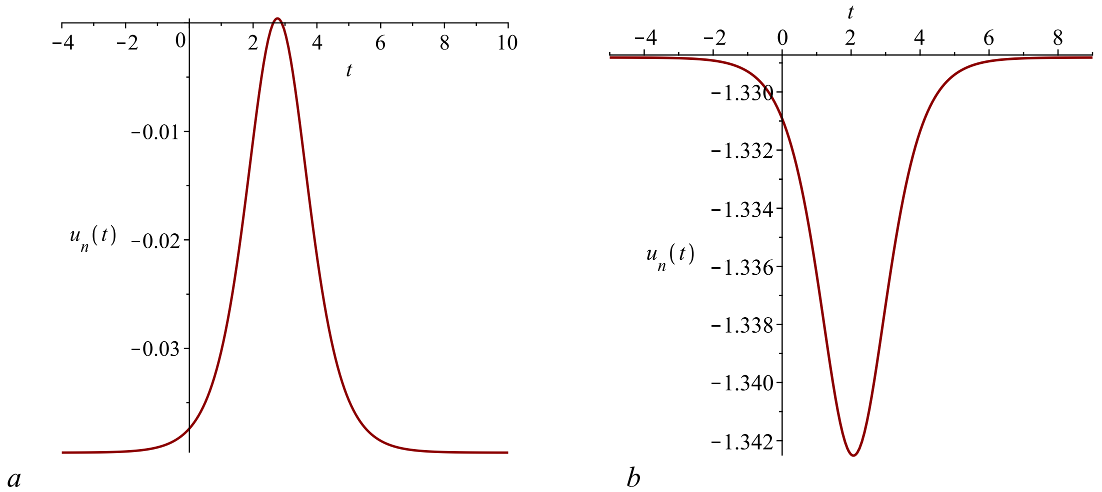


Рис. 3. График решения (40): *a* — $\delta = 3/2$, $b_1 = 1$, знак «−» в (39); *b* — $\delta = 3/2$, $b_1 = -1$, знак «+» в (39)

Fig. 3. Graph of solution (40): *a* — $\delta = 3/2$, $b_1 = 1$, sign "−" in formula (39); *b* — $\delta = 3/2$, $b_1 = -1$, sign "+" in formula (39)

Заключение

Процедура обращения асимптотического ряда иногда применяется при использовании методов возмущений для улучшения сходимости [5]. Так, априорная информация об особенности решения в ряде случаев позволяет устранить её из ряда теории возмущений и улучшить его сходимость [19]. Например, если особенность лежит на положительной действительной полуоси, то это может свидетельствовать о многозначности функции, характеризуемой построенным степенным рядом. При этом обратная функция может быть однозначной [5, 19]. В данной статье обращение степенного ряда предлагается использовать для нахождения замкнутого выражения производящей функции последовательности его коэффициентов. Это выражение, которое по терминологии Эйлера можно называть суммой степенного ряда, представляет собой точное решение исходного нелинейного дифференциального или дифференциально-разностного уравнения. Основное наблюдение здесь состоит в том, что для локализованных решений обращенные ряды обрываются, начиная со степени, по крайней мере, на единицу превосходящей полюс искомого решения. В случае неинтегрируемых эволюционных уравнений (в статье рассмотрено уравнение КдВБ) удовлетворение требованию обнуления соответствующих коэффициентов обращенного ряда приводит к дополнительным условиям, связывающим коэффициенты уравнений с параметрами решений. Предложенный метод легко алгоритмизируется и, по нашим наблюдениям, предъявляет минимальные требования к используемой вычислительной технике. Ограничением метода является его неприменимость к уравнениям с переменными коэффициентами, отличными от экспонент. К достоинствам метода относится возможность его эффективного применения к нелинейным дифференциально-разностным уравнениям, для которых наличие точного солитоноподобного решения можно рассматривать в качестве эмпирического критерия интегрируемости.

Список литературы

1. *Кудряшов Н. А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Интеллект, 2010. 368 с.
2. *Конт Р., Мюзетт М.* Метод Пенлеве и его приложения. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, Регулярная и хаотическая динамика, 2011. 315 с.
3. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И.* Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения: учебник и практикум для вузов. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Юрайт, 2025. 256 с.
4. *Yamilov R.* Symmetries as integrability criteria for differential-difference equations // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. Vol. 39. P. 541–623. DOI: 10.1088/0305-4470/39/45/R01.
5. *Андрианов И., Аврейцевич Я.* Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 276 с.
6. *Хирота Р.* Прямые методы в теории солитонов // В кн.: Солитоны. М.: Мир, 1983. С. 175–192.
7. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 296 с.
8. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М.: ГИТТЛ, 1949. 580 с.
9. *Виноградов В. Н., Гай Е. В., Работнов Н. С.* Аналитическая аппроксимация данных в ядерной и нейтронной физике. М.: Энергоатомиздат, 1987. 128 с.
10. *Бочкарев А. В., Землянухин А. И.* Метод геометрического ряда построения точных решений нелинейных эволюционных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57, № 7. С. 1113–1125. DOI: 10.7868/S0044466917070079.
11. *Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Orlova A. A., Ratushny A. V.* Geometric series method and exact solutions of differential-difference equations // In: Abramian A. K., Andrianov I. V.,

Gaiko V. A. (eds) Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Advanced Structured Materials. Vol. 139. Cham: Springer, 2021. P. 239–253. DOI: 10.1007/978-3-030-53006-8_15.
12. *Ландо С. К.* Лекции о производящих функциях: учебное пособие. М.: МЦНМО, 2007. 144 с.
13. *Сафонов К. В.* Об условиях алгебраичности и рациональности суммы степенного ряда // Матем. заметки. 1987. Т. 41, № 3. С. 325–332.
14. *Yagmur T.* New approach to Pell and Pell-Lucas sequences // Kyungpook Math. J. 2019. Vol. 59, no. 1. P. 23–34. DOI: 10.5666/KMJ.2019.59.1.23.
15. *Абловиц М. Д., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 479 с.
16. *Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 246 с.
17. *Кудряшов Н. А.* Преобразования Бэклунда для уравнения в частных производных четвертого порядка с нелинейностью Бюргерса–КдФ // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 2. С. 342–345.
18. *Гарифуллин Р. Н., Ямилов Р. И.* Об интегрируемости решеточных уравнений с двумя континуальными пределами // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 152. С. 159–164.
19. *Hinch E. J.* Perturbation Methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 160 p. DOI: 10.1017/CBO9781139172189.

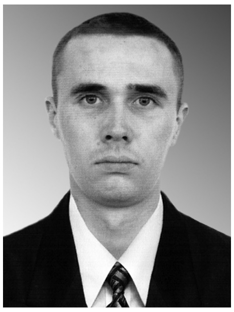
References

1. Kudryashov NA. Methods of Nonlinear Mathematical Physics. Dolgoprudny: Intellect; 2010. 368 p.
2. Conte R, Musette M. The Painlevé Method and Its Applications. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Research, Regular and Chaotic Dynamics; 2011. 315 p.
3. Polyanin AD, Zaitsev VF, Zhurov AI. Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics. Solution Methods: Textbook and Practice for Universities. 2nd ed., revised and expanded. Moscow: Yurait; 2025. 256 p.
4. Yamilov R. Symmetries as integrability criteria for differential-difference equations. J. Phys. A: Math. Gen. 2006;39:541–623. DOI: 10.1088/0305-4470/39/45/R01.
5. Andrianov I, Avreytsevich Y. Methods of Asymptotic Analysis and Synthesis in Nonlinear Dynamics and Mechanics of Deformable Solids. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Research; 2013. 276 p. (in Russian).
6. Hirota R. Direct Methods in Soliton Theory. In: Bullough RK, Caudrey PJ, editors. Solitons. Topics in Current Physics. Vol. 17. Berlin: Springer; 1980. DOI: 10.1007/978-3-642-81448-8_5.
7. Van Dyke M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.: Academic Press; 1964. 229 p.
8. Euler L. Foundations of Differential Calculus. N.Y.: Springer; 2000. 194 p. DOI: 10.1007/b97699.
9. Vinogradov VN, Gai EV, Rabotnov NS. Analytical Approximation of Data in Nuclear and Neutron Physics. Moscow: Energoatomizdat; 1987. 128 p.
10. Bochkarev AV, Zemlyanukhin AI. Geometric series method for finding exact solutions of nonlinear evolution equations. Comput. Math. Math. Phys. 2017;57(7):1111–1123. DOI: 10.1134/S096554 2517070065.
11. Zemlyanukhin AI, Bochkarev AV, Orlova AA, Ratushny AV. Geometric series method and exact solutions of differential-difference equations. In: Abramian AK, Andrianov IV, Gaiko VA, editors. Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Advanced Structured Materials. Vol. 139. Cham: Springer; 2021. P. 239–253. DOI: 10.1007/978-3-030-53006-8_15.
12. Lando SK. Lectures on Generating Functions: Textbook. Moscow: MCCME, 2007. 144 p.
13. Safonov KV. Conditions for the sum of a power series to be algebraic and rational. Math. Notes. 1987;41(3):325–332.

14. Yagmur T. New approach to Pell and Pell-Lucas sequences. Kyungpook Math. J. 2019;59(1):23–34. DOI: 10.5666/KMJ.2019.59.1.23.
15. Ablowitz MJ, Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform. SIAM; 1981. 425 p.
16. Nakoryakov VE, Pokusaev BG, Shreiber IR. Wave Dynamics of Gas and Vapor-Liquid Media. Moscow: Energoatomizdat, 1990. 246 p.
17. Kudryashov NA. Bäcklund transformation for a fourth-order partial differential equation with the Burgers-Korteweg-de Vries nonlinearity. Sov. Phys. Dokl. 1988;33(5):336–338.
18. Garifullin RN, Yamilov RI. On the integrability of lattice equations with two continuum limits. J. Math. Sci. 2021;252:283–289. DOI: 10.1007/s10958-020-05160-x.
19. Hinch EJ. Perturbation Methods. Cambridge: Cambridge University Press; 1991. 160 p. DOI: 10.1017/CBO9781139172189.

Землянухин Александр Исаевич — родился в Саратове (1967). Окончил с отличием механико-математический факультет Саратовского государственного университета (1989). Доктор физико-математических наук (1999) в области динамических задач механики деформируемого твердого тела; профессор. Заведующий кафедрой прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета. Автор монографии «Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны симметрии, эволюция» (1999, в соавторстве с Л. И. Могилевичем). Область научных интересов: нелинейная волновая динамика деформируемых систем, аналитические и численные методы нелинейной математической физики.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
E-mail: azemlyanukhin@mail.ru
ORCID: 0000-0002-4379-8310
ScopusID: 6603169205



Артамонов Николай Александрович — родился в Саратове (1996). Окончил с отличием физико-технический факультет Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А. (2019). Преподаватель кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейная волновая динамика деформируемых систем, аналитические и численные методы нелинейной математической физики.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
E-mail: twostvoll@gmail.com
AuthorID (eLibrary.Ru): 1296661
ScopusID: 59209431700

Бочкарёв Андрей Владимирович — родился в Саратове (1973). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Доктор физико-математических наук (2022). Доцент кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета. Научные интересы: нелинейная волновая динамика деформируемых систем, точные решения нелинейных уравнений в частных производных.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
E-mail: ab2009sar@list.ru
ORCID: 0000-0001-9088-9234
AuthorID (eLibrary.Ru): 10662

Безлюдный Владимир Ильич — родился в Саратове (2001). Окончил институт прикладных информационных технологий и коммуникаций Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А. (2025) с присвоением звания магистра информационных систем и технологий в области искусственного интеллекта. Область научных интересов: моделирование и прогнозирование долговечности несвязных слоёв дорожной одежды и использование искусственного интеллекта.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
E-mail: bezlyudnyivi@mail.ru