

Исследование устойчивости колебательной π -моды в возмущенной цепочке Тоды

А. А. Кедров^{1,2}✉, С. А. Щербинин^{1,3}

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

²Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

³Научно-исследовательский университет «Высшая школа экономики», Санкт-Петербург, Россия

E-mail: ✉alexandrkedrov@outlook.com

Поступила в редакцию 18.09.2025, принята к публикации 19.11.2025,
опубликована онлайн 19.11.2025

Аннотация. Цель настоящей работы — исследовать устойчивость периодического режима, соответствующего моде с наименьшей длиной волны (так называемой π -моды) в цепочке Тоды с кубическим возмущением в потенциале межчастичного взаимодействия. **Методы.** Исследование устойчивости проводилось на основе стандартного метода Флоке. Возникающая при этом вариационная система расщепляется на независимые двумерные подсистемы, что позволяет делать выводы об устойчивости π -моды для цепочки из произвольного числа частиц. Расщепление осуществлялось как с помощью общего теоретико-группового метода, так и с помощью предложенного в настоящей работе метода, основанного на использовании дискретного преобразования Фурье. **Результаты.** Получены диаграммы устойчивости исследуемого режима, позволяющие сделать вывод о его устойчивости в зависимости от амплитуды колебаний и числа частиц цепочки. Установлено соответствие между диаграммами устойчивости «возмущенной» цепочки Тоды при сильном возмущении потенциала и цепочки Ферми–Паста–Улама–Цингу- α . Для классической цепочки Тоды обнаружено, что её интегралы движения оказываются функционально зависимыми в окрестности рассматриваемого режима. Это нарушает условия теоремы Пуанкаре о тождественном равенстве единице соответствующих мультипликаторов Флоке. Несмотря на это, режим оказывается устойчивым при любой длине цепочки для рассмотренного диапазона амплитуд колебаний π -моды в классической цепочке Тоды. **Заключение.** Была исследована устойчивость π -моды в цепочке Тоды с кубическим возмущением в потенциале межчастичного взаимодействия. Исследование было проведено для произвольного числа частиц в цепочке. Это стало возможным благодаря расщеплению вариационной системы на независимые двумерные подсистемы, которое осуществлялось с помощью известного общего теоретико-группового метода. Кроме того, был предложен новый аналогичный метод расщепления на основе использования дискретного преобразования Фурье. Предложенный подход может в дальнейшем быть применён для исследования устойчивости любых нелинейных режимов, обладающих временной и пространственной периодичностью.

Ключевые слова: нелинейная динамика, цепочка Тоды, модуляционная неустойчивость, π -мода, теоретико-групповые методы

Благодарности. В данной работе представлены результаты проекта «FR-2025-75», выполненного в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2025 году.

Для цитирования: Кедров А. А., Щербинин С. А. Исследование устойчивости колебательной π -моды в возмущенной цепочке Тоды // Известия вузов. ПНД. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003202. EDN: NRWWDG

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Investigation of the stability of the oscillatory zone boundary mode in the perturbed one-dimensional Toda lattice

A. A. Kedrov^{1,2}✉, S. A. Shcherbinin^{1,3}

¹Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

²Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Russia

³National Research University Higher School of Economics, St. Petersburg, Russia

E-mail: ✉alexandrkedrov@outlook.com

Received 18.09.2025, accepted 19.11.2025, available online 19.11.2025

Abstract. The goal of this paper is to investigate the stability of a dynamical regime corresponding to the vibrational mode with the shortest wavelength (known as the π -mode) in the Toda lattice with a cubic perturbation of the original potential. **Methods.** The study is based on the standard Floquet method. The variational system for the corresponding dynamical regime is decomposed into a set of independent two-dimensional subsystems. This allows us to determine the π -mode stability for a chain with an arbitrary number of particles. The decomposition is carried out both by a general group-theoretic approach and by a new method proposed in this work, which is based on the discrete Fourier transform. **Results.** The resulting stability diagrams provide information about the stability of the regime for various oscillation amplitudes and numbers of particles. A correspondence between the perturbed Toda lattice and the Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou model is established for large magnitude of the perturbation. For the original (unperturbed) Toda lattice, it is observed that its integrals of motion are functionally dependent in the vicinity of the considered dynamical regime. Therefore, the observed trajectory does not satisfy the conditions of Poincaré's theorem, which states that the Floquet multipliers of fully integrable systems are equal to one. Despite this fact, the considered regime in the original Toda lattice is shown to be stable for any number of particles and any oscillational amplitude.

Keywords: nonlinear dynamics, Toda lattice, stability, zone boundary mode, group-theoretics methods

Acknowledgements. The results of the project "FR-2025-75 carried out within the framework of the Basic Research Program at HSE University in 2025, are presented in this work.

For citation: Kedrov AA, Shcherbinin SA Investigation of the stability of the oscillatory zone boundary mode in the perturbed one-dimensional Toda lattice. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003202

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Нелинейные колебательные режимы в дискретных системах различной физической природы традиционно привлекают внимание исследователей [1–10]. Среди таких режимов можно выделить два класса: локализованные и делокализованные. Локализованные режимы (дискретные бризеры) могут вносить вклад в процессы энергопереноса [6, 8, 11], влиять на макроскопические свойства кристаллов [6, 12–14], а также изменять структуру дефектов [6, 15–17]. Делокализованные режимы, помимо того, что также могут влиять на макроскопические параметры кристаллов [18, 19], тесно связаны с локализованными. Так, начальные профили дискретных бризеров можно получить из картин атомных смещений делокализованных режимов посредством наложения пространственной локализующей функции [20–22]. Кроме того, модуляционная неустойчивость делокализованных нелинейных режимов может приводить к образованию так называемых хаотических бризеров [4, 10, 23, 24]. Образование бризеров в результате модуляционной неустойчивости было

Кедров А. А., Щербинин С. А.
Известия вузов. ПНД, 2026

впервые обнаружено [23] для π -моды, которая представляет собой самую коротковолновую моду в моноатомной цепочке. В этом режиме смещения соседних частиц из положения равновесия в каждый момент времени имеют противоположный знак. Эта колебательная мода является в определенном смысле антиподом моды, для которой в цепочке Ферми-Пасты-Улама-Цингоу (ФПУЦ) наблюдалось знаменитое явление возврата [1], поэтому исследование временной эволюции π -моды можно назвать проблемой «анти-ФПУ» [4].

Исследованию π -моды в моноатомных цепочках типа ФПУЦ посвящено значительное число работ [4, 25–28]. С другой стороны, широко известна такая моноатомная нелинейная система как цепочка Тоды, которая является одной из немногих известных многочастичных полностью интегрируемых в смысле Лиувилля гамильтоновых систем. Она была предложена М. Тодой [29] как пример системы, имеющей, в отличие от ФПУЦ, аналитические решения. Как следствие полной интегрируемости, цепочка Тоды является эргодичной системой, а значит, в ней не может происходить процесса термализации, т.е. равномерного перераспределения энергии по модам системы с течением времени (подробнее см., например, [29]). При этом в приближении малых амплитуд динамика цепочки Тоды будет близка к динамике цепочки α -ФПУЦ.

Поэтому естественным образом возникает вопрос: каким образом на устойчивость периодических режимов, в частности π -моды, влияет полная интегрируемость системы и что происходит с устойчивостью, когда эта интегрируемость нарушается. Пролить свет на этот вопрос призвана настоящая работа, которая посвящена исследованию устойчивости π -моды в цепочке Тоды с внесенным возмущением в потенциал системы.

Поведение такой «возмущенной» цепочки Тоды численно исследовалось в работе [30], где потенциал взаимодействия между частицами задавался в форме:

$$V = V_T(\varepsilon) + \theta_n \varepsilon^n, \quad n \geq 3. \quad (1)$$

Здесь ε — безразмерное отклонение расстояния между соседними частицами от равновесного положения, V_T — потенциал взаимодействия в классической цепочке Тоды, определяемый

$$V_T = \exp(-\varepsilon) + \varepsilon - 1.$$

Авторами работы [30] было показано, что в «возмущенной» цепочке Тоды происходит термализация энергии, причем без явления возврата, наблюдаемого в решетках ФПУЦ [1].

В настоящей работе мы вносили возмущение вида (1) при $n = 3$, сила которого регулировалась величиной коэффициента θ_3 . Это позволило проследить, как меняется устойчивость исследуемого режима в широком диапазоне амплитуд в зависимости от величины вносимого возмущения.

Для исследования устойчивости периодических режимов существует универсальный метод Флоке, однако при использовании этого метода для цепочки из N частиц требуется построение матрицы монодромии размером $2N \times 2N$. Ясно, что для $N \gg 1$ исследование устойчивости периодического режима данным методом оказывается предельно затруднительным.

С другой стороны, в работах [3, 31] был предложен универсальный метод на основе теории представлений групп симметрии, позволяющий исследовать устойчивость периодических режимов путем вычисления матрицы монодромии конечного размера, независимого от числа частиц в системе N . Данный метод был использован для исследования устойчивости периодических режимов в цепочках ФПУЦ [3] и так называемой ЛС-цепочки [32, 33].

Этот метод был использован и в настоящей работе для исследования устойчивости π -моды в классической и «возмущенной» цепочке Тоды. Кроме того, был предложен аналогичный подход на основе дискретного преобразования Фурье.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 описан аналитический вид решения, соответствующий π -моду в рассматриваемой системе. В разделе 2 описан метод исследования устойчивости. В разделе 3 представлены результаты исследования устойчивости классической цепочки Тоды, а в разделе 4 – возмущенной. В Заключении подведены итоги настоящей работы.

1. Колебательная π -мода в возмущённой цепочке Тоды

Рассматривается нелинейная однородная цепочка попарно взаимодействующих частиц, описываемая следующими динамическими уравнениями:

$$\ddot{u}_n(\tau) = \exp(u_{n-1} - u_n) - \exp(u_n - u_{n+1}) + \alpha \left((u_{n+1} - u_n)^2 - (u_{n-1} - u_n)^2 \right). \quad (2)$$

Здесь u_n – безразмерное смещение частицы под номером n из её положения равновесия, τ – безразмерное время, точкой обозначается производная по времени и α – коэффициент, позволяющий контролировать кубическую компоненту потенциала взаимодействия между частицами, $n \in \{1 \dots N\}$ и N – количество частиц в цепочке. При α равном нулю система (2) принимает вид, соответствующий классической цепочке Тоды. Далее систему с ненулевым коэффициентом α будем называть возмущенной цепочкой Тоды. Граничные условия полагаются периодическими, то есть $u_{N+i} = u_i$.

В настоящей работе исследуется устойчивость колебательной π -моды, которая имеет вид:

$$u_n(\tau) = (-1)^n U(\tau). \quad (3)$$

Подстановка (3) в (2) сводит систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка к одному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $U(\tau)$:

$$\ddot{U} = -2 \sinh(2U). \quad (4)$$

Для этого уравнения можно найти точное решение следующего вида:

$$U(\tau) = \operatorname{arctanh} \left(\frac{\operatorname{sn} \left(\tau \sqrt{v_0^2 + 4} \middle| \frac{1}{1+4/v_0^2} \right)}{\sqrt{1+4/v_0^2}} \right), \quad U(0) = 0, \quad \dot{U} = v_0. \quad (5)$$

Здесь $\operatorname{arctanh}$ – гиперболический арктангенс, а sn – эллиптический синус Якоби. Решение (5) является периодическим:

$$U(\tau + T) = U(\tau), \quad T = \frac{4K \left(\frac{v_0^2}{4+v_0^2} \right)}{\sqrt{4+v_0^2}}, \quad (6)$$

где K – полный эллиптический интеграл 1-го рода. Вывод решения (5) описан в приложении А. Отметим, что после подстановки анзаца (3) в (2), результирующее уравнение (4) и его решение (5) не зависят от коэффициента α . Таким образом, внесение кубической добавки в потенциал цепочки Тоды не влияет на вид решения, соответствующего колебательной π -моду. Однако, как будет показано далее, величина α влияет на устойчивость этого периодического режима.

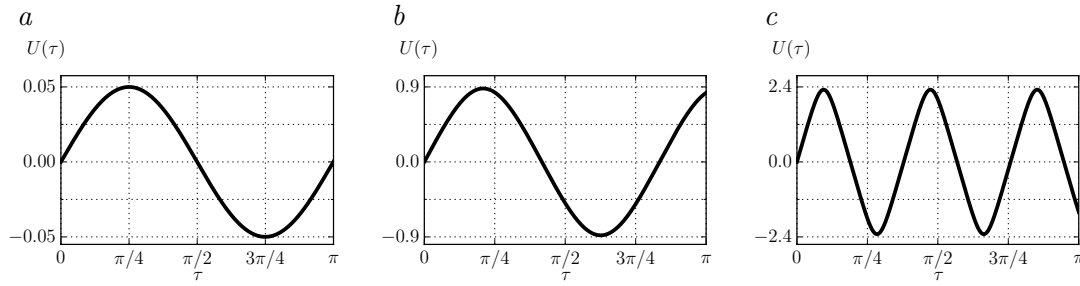


Рис. 1. Графики решений (5) для различных значений v_0 . (a) $v_0 = 0.1$; (b) $v_0 = 2$; (c) $v_0 = 10$.

2. Исследование устойчивости колебательной π -моды

2.1. Вариационная система и мультипликаторы Флоке Классический метод для определения устойчивости нелинейного периодического режимов заключается в исследовании устойчивости нулевого решения соответствующей вариационной системы линейных уравнений, получающейся в результате линеаризации исходной системы в окрестности рассматриваемого колебательного режима. Если $u_n^0, n \in \{1 \dots N\}$ является решением системы $\ddot{u}_n = F_n(u_1, u_2 \dots u_N), n \in \{1 \dots N\}$, то соответствующая вариационная система уравнений, линеаризованных вблизи этого режима, будет определяться следующими уравнениями:

$$u_n = u_n^0 + \epsilon_n, \quad A_{nm}(\tau) = \left. \frac{\partial}{\partial u_m} F_n(u_1, u_2 \dots u_l) \right|_{u_i = u_i^0(\tau), i=1 \dots N}, \quad (7)$$

$$\ddot{\epsilon}_n = \sum_m A_{nm}(\tau) \epsilon_m, \quad n \in \{1 \dots N\},$$

где $\epsilon_n = \epsilon_n(\tau)$ представляют собой малые по сравнению с u_n^0 величины, зависящие от времени.

Устойчивость нулевого решения такой вариационной системы определяется с помощью вычисления мультипликаторов Флоке μ — собственных значений матрицы монодромии [34] этой системы. Для устойчивости решения u_n^0 необходимо, чтобы все мультипликаторы Флоке были по модулю не больше единицы: $|\mu| \leq 1$ (для автономных гамильтоновых систем в случае устойчивости возможно только $|\mu| = 1$). Более подробную информацию о матрице монодромии и мультипликаторах Флоке можно найти в [34, 35].

2.2. Вариационная система для возмущенной цепочки Тоды Вариационная система, полученная линеаризацией (2) вблизи решения 3, имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{\epsilon}_{2n} = c\epsilon_{2n-1} - (c + c^{-1})\epsilon_{2n} + c^{-1}\epsilon_{2n+1} + 4ab(\epsilon_{2n-1} - \epsilon_{2n+1}), \\ \ddot{\epsilon}_{2n+1} = c^{-1}\epsilon_{2n} - (c + c^{-1})\epsilon_{2n+1} + c\epsilon_{2n+2} - 4ab(\epsilon_{2n} - \epsilon_{2n+2}), \end{cases} \quad (8)$$

$$c = \exp(2U(\tau)), \quad b = U(\tau), \quad n \in \{1 \dots N\}.$$

Отметим, что правая часть полученной системы (8) содержит, кроме неизвестных ϵ_{2n} и ϵ_{2n+1} , еще и слагаемые, пропорциональные ϵ_{2n-1} и ϵ_{2n+2} , т.е. это система связанных дифференциальных уравнений. Для определения устойчивости π -моды в цепочке из N частиц требуется построение матрицы монодромии $2N \times 2N$. Ясно, что для цепочек с большим количеством частиц применение данного метода оказывается затруднительным.

Рассмотрим способ приведения вариационной системы (8) к такому виду, чтобы исследование устойчивости ее нулевого решения было возможно для любого, сколь угодно

большого, числа частиц N . Пусть

$$\epsilon = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_N]^T, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где A_{nm} — коэффициенты линейной системы, определяемые (7). В настоящей работе используются такие унитарные преобразования $\tilde{\epsilon} = \mathbf{S}\epsilon$, которые приводят матрицу $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{SAS}^H$ рассматриваемой системы к блочно-диагональному виду. Тогда преобразованная вариационная система

$$\ddot{\tilde{\epsilon}}_n = \sum_m \tilde{A}_{nm}(\tau) \epsilon_m \quad (10)$$

состоит из независимых подсистем, устойчивость нулевого решения каждой из которых может быть исследована отдельно от других.

2.3. Расщепление вариационной системы с помощью общего теоретико-группового метода Один из способов получения требуемого унитарного преобразования основан на использовании аппарата неприводимых представлений групп симметрии. Этот метод был предложен в работе Г.М. Чечина и К.Г. Жукова [31]. Для использования этого метода необходимо знание пространственной группы G симметрии исследуемого режима, то есть такой группы пространственных преобразований, что для любого элемента $a \in G$ справедливо:

$$au_n^0 = u_n^0, \quad n = 1 \dots N, \quad \forall a \in G. \quad (11)$$

Иными словами, действие всех элементов G переводит рассматриваемый режим сам в себя.

В работе [31] доказано, что вариационную систему, соответствующую некоторому периодическому режиму, можно расщепить на независимые подсистемы конечного размера с помощью унитарного преобразования, матрица \mathbf{S} которого составлена из базисных векторов неприводимых представлений пространственной группы симметрии G этого режима.

В настоящей работе в качестве группы симметрии π -моды использовалась группа $G = \langle as \rangle$, состоящая из всех возможных степеней оператора as , где действие операторов a и s определено следующим образом:

$$au_n = u_{n+1}, \quad su_n = -u_n. \quad (12)$$

В работах [3, 31, 33] подробно описана процедура нахождения базисных векторов неприводимых представлений и построения матрицы \mathbf{S} . В том числе, в работе [33] эта процедура описана для той же группы симметрии, которая использована в настоящей работе. На основе этой процедуры можно получить следующую расщепленную вариационную систему:

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{\epsilon}}_{2q} = -2 \left(c + \frac{1}{c} \right) \sin^2 k \cdot \tilde{\epsilon}_{2n} + i \left(c - \frac{1}{c} - 8\alpha b \right) \sin 2k \cdot \tilde{\epsilon}_{2n+1}, \\ \ddot{\tilde{\epsilon}}_{2q+1} = -i \left(c - \frac{1}{c} - 8\alpha b \right) \sin 2k \cdot \tilde{\epsilon}_{2n} - 2 \left(c + \frac{1}{c} \right) \cos^2 k \cdot \tilde{\epsilon}_{2n+1}, \end{cases} \quad (13)$$

где $k = \frac{2\pi q}{N/2}$, q — индекс, принимающий значения $q \in \{1 \dots N/2\}$. Отметим, что для каждого значения индекса q выражение (13) представляет замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно переменных $\tilde{\epsilon}_{2q}$ и $\tilde{\epsilon}_{2q+1}$. Устойчивость системы (13) для различных значений параметров k , v_0 и α будет исследована в разделах 3 и 4 путем анализа вычисленных значений мультипликаторов Флоке (см. 2.1).

2.4. Расщепление вариационной системы с помощью дискретного преобразования Фурье Другой способ приведения вариационной системы (8) к блочно-диагональному виду основан на использовании дискретного преобразования Фурье. Переобозначим переменные следующим образом:

$$\psi_n = \epsilon_{2n}, \quad \phi_n = \epsilon_{2n+1}. \quad (14)$$

Тогда система уравнений (8) принимает вид:

$$\begin{cases} \ddot{\psi}_n = c\phi_{n-1} - (c + c^{-1})\psi_n + c^{-1}\phi_n + 4\alpha b(\phi_{n-1} - \phi_n), \\ \ddot{\phi}_n = c\psi_{n+1} - (c + c^{-1})\phi_n + c^{-1}\psi_n - 4\alpha b(\psi_n - \psi_{n+1}). \end{cases} \quad (15)$$

Выполним дискретное преобразование Фурье для переменных ψ_n, ϕ_n независимо друг от друга:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N/2} \exp(-ikn) \psi_n, \\ \hat{\phi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N/2} \exp(-ikn) \phi_n, \end{aligned} \quad (16)$$

где $k = \frac{2\pi q}{N/2}$, $q \in \{1 \dots N/2\}$. Отметим, что преобразование переменных (16) является линейным и унитарным. Вариационная система после преобразования Фурье примет вид:

$$\begin{cases} \ddot{\hat{\psi}} = -(c + c^{-1})\hat{\psi} + (4\alpha b(1 - \exp(-ik)) + c \exp(-ik) + c^{-1})\hat{\phi}, \\ \ddot{\hat{\phi}} = (4\alpha b(1 - \exp(ik)) + c \exp(ik) + c^{-1})\hat{\psi} - (c + c^{-1})\hat{\phi}. \end{cases} \quad (17)$$

Система (17) является замкнутой относительно переменных $\hat{\psi}$ и $\hat{\phi}$. Как и для системы (13), ее нулевое решение несложно исследовать на устойчивость при любом значении q с помощью стандартного метода Флоке.

2.5. Метод численного исследования Мультипликаторы Флоке для вариационных систем (13) и (17) находились численно. Для конкретных значений параметров α, v_0 и k процедура вычисления производилась в 2 этапа:

1. Численное построение матрицы монодромии. Для вариационных систем (13) и (17) матрица монодромии имеет размер 4×4 , где каждый столбец составлен из решения задачи Коши x_n в момент времени T (см. формулу (6)) с начальными условиями $x_n(0) = \delta_{nm}$, где x_n — переменная состояния рассматриваемой вариационной системы $n \in \{1 \dots 4\}$, m — номер столбца матрицы монодромии, а δ_{nm} — символ Кронекера. Задача Коши решалась численным методом с адаптивным шагом интегрирования Dormand-Prince [36]. Размер относительной ошибки составлял не более 10^{-10} (т.е. точность до 10 значащих знаков).
2. Вычисление мультипликаторов Флоке, т. е. собственных значений матрицы монодромии, полученной на предыдущем шаге, производилось численно с использованием библиотеки LAPACK [37].

Нулевое решение вариационной системы для конкретных значений α, v_0 и k считалось устойчивым, если каждый из 4-х вычисленных мультипликаторов Флоке отклонялся от единичной окружности не более чем на 10^{-7} :

$$||\mu_i| - 1| < 10^{-7}. \quad (18)$$

Исследуемая π -мода считалась устойчивой при каких-то конкретных α и v_0 , если нулевое решение соответствующей вариационной системы оказывалось устойчивым при любом значении $k = \frac{2\pi q}{N/2}$, где $q \in \{1 \dots N/2\}$. В расчётах использовалось значение $N = 2000$.

В процессе исследования устойчивости было установлено, что расщеплённые вариационные системы (13) и (17) приводят к одинаковым результатам для одинаковых значений α и v_0 .

3. Устойчивость π -моды в классической цепочке Тоды

Известно, что невозмущенная цепочка Тоды (т.е. при $\alpha = 0$), является полностью интегрируемой Гамильтоновой системой (см. например, [29]). В работе Пуанкаре [38] (см. также [39]) установлена взаимосвязь между количеством интегралов движения и значениями мультипликаторов Флоке. В доказанной в [38] теореме утверждается, что если вблизи траектории периодического режима существует M функционально независимых интегралов движения $F(q_1, p_1 \dots q_N, p_N) = \text{const}$, то, как минимум, $2M$ мультипликаторов Флоке для данного периодического режима будут тождественно равны единице:

$$\mu_i = 1, \quad i \in \{1 \dots 2M\}. \quad (19)$$

Отметим, что полная интегрируемость подразумевает существование N интегралов движения, значит, в соответствии с теоремой, все мультипликаторы Флоке для некоторого периодического режима должны быть равны единице в случае, если эти интегралы окажутся функционально независимыми в окрестности такого периодического режима. Это утверждение сильнее, чем необходимое условие неасимптотической устойчивости периодического режима $|\mu_i| = 1$.

В ходе настоящего исследования было обнаружено, что в невозмущенной цепочке Тоды для числа частиц $N \geq 4$ интегралы движения системы (явные выражения для которых приведены в работе [40]) являются функционально зависимыми вблизи рассматриваемого периодического режима (5). В частности, для $N = 4$ только 2 интеграла движения из 4-х оказываются функционально независимыми (это можно проверить путём определения ранга матрицы Якобиана, составленного из интегралов движения), что подтверждается вычисленными значениями мультипликаторов Флоке μ_i :

$$\begin{aligned} \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 &\approx 1, \\ \mu_5 = \mu_6 = \mu_7^* = \mu_8^* &\approx 0.47 + 0.88i. \end{aligned} \quad (20)$$

А именно, в соответствии с теоремой Пуанкаре при 2-х функционально независимых интегралах движения гарантируется существование только 4-х мультипликаторов Флоке, равных единице $\mu_i = 1$, что соответствует полученным результатам (20).

Отметим, что при увеличении числа частиц N число функционально независимых интегралов движения, по-видимому, остается равным 2. Это было проверено прямым расчётом мультипликаторов Флоке для матрицы монодромии полной системы вариационной системы при $N = 10, 100, 500$. При всех этих значениях N только четыре мультипликатора Флоке оказывались равными единице.

Таким образом, несмотря на полную интегрируемость невозмущенной цепочки Тоды, устойчивость π -моды в ней не следует из упомянутой выше теоремы Пуанкаре. Однако эту устойчивость можно определить с помощью вычисления мультипликаторов Флоке для систем (13) и (17), что и было сделано в настоящей работе.

Исследование устойчивости π -моды в невозмущенной цепочке Тоды проводилось для всех значений k из диапазона $k = \frac{2\pi q}{N/2}$ ($q \in \{1 \dots N/2\}$, $N = 2000$) и значений $v_0 \in [0, 20]$. Шаг между различными значениями v_0 составлял 0.02. Максимальное расстояние от единичной окружности среди всех мультипликаторов Флоке составило 2.6×10^{-9} , что соответствует численной точности интегрирования уравнений (13). Итого, можно заключить, что π -мода в классической цепочке Тоды (т.е. при $\alpha = 0$) является устойчивой, по-видимому, для любых значений v_0 .

4. Устойчивость π -моды в возмущенной цепочке Тоды

В данном разделе представлены результаты исследования устойчивости π -моды в «возмущенной» цепочки Тоды (т.е. при $\alpha \neq 0$). Вообще говоря, при различных значениях коэффициента α мультипликаторы Флоке для каждой пары значений v_0 и k различны. По этой причине интерес представляет как исследование устойчивости для различных значений v_0 и k при фиксированном значении α , так и исследование устойчивости системы для пар значений v_0 и α при произвольном значении k . Критерии и методика определения устойчивости описаны в подразделе 2.5.

Результаты исследования устойчивости π -моды для разных значений k , v_0 и α представлены на Рис. 2. На этом рисунке приведены диаграммы устойчивости, на которых белому цвету соответствует устойчивость нулевого решения соответствующих систем (13) и (17), а черному – неустойчивость. На каждой из диаграмм приведены результаты расчётов для всех значений k из диапазона $k = \frac{2\pi q}{N/2}$, где $q \in \{1 \dots N/2\}$ и $N = 2000$ и значений $v_0 \in [0, 20]$, взятых с шагом 0.02. Отметим, что при $\alpha = 2.9$ на диаграмме устойчивости цепочки Тоды можно видеть область значений k и v_0 , которая по форме совпадает с диаграммой устойчивости π -моды в цепочке ФПУЦ- α , полученной в работе [3].

Результаты исследования устойчивости π -мода для различных значений параметра α и начальных значений v_0 приведены на Рис. 3. Как уже отмечалось в подразделе 2.5, исследуемый режим считался устойчивым при каких-то конкретных α и v_0 , если нулевое решение соответствующей вариационной системы оказывалось устойчивым при любом значении k . Как и на предыдущем рисунке, белый цвет соответствует устойчивости, а черный – неустойчивости. Из рисунка видно, что даже при больших значениях амплитуды колебаний и при больших положительных значениях α в исследуемой цепочке возможны устойчивые колебания, соответствующие π -моду. Для отрицательных же значений α исследуемая нелинейная мода сохраняет устойчивость лишь при достаточно малых значениях амплитуды колебаний.

5. Заключение

В настоящей работе исследована устойчивость π -моды в цепочке Тоды и её возмущённой версии с добавкой кубического слагаемого к потенциалу. Исследование проводилось посредством расщепления исходной вариационной системы произвольной размерности на подсистемы из двух уравнений. Расщепление осуществлялось как с использованием общего теоретико-группового метода, основанного на аппарате неприводимых представлений групп симметрии, так и предложенного альтернативного подхода с использованием дискретного преобразования Фурье. Предложенный подход может быть применен для исследования модуляционной неустойчивости других нелинейных мод.

В являющейся полностью интегрируемой классической цепочке Тоды π -мода оказа-

лась устойчива при всех рассмотренных амплитудах для любого числа частиц в системе. При внесении же кубического возмущения в потенциал устойчивость исследуемой нелинейной моды, вообще говоря, нарушается: появляются интервалы неустойчивости, зависящие от амплитуды и величины коэффициента возмущения. Однако даже для возмущённой цепочки Тоды есть такие значения амплитуд, при которых π -мода устойчива для любого числа частиц в цепочке.

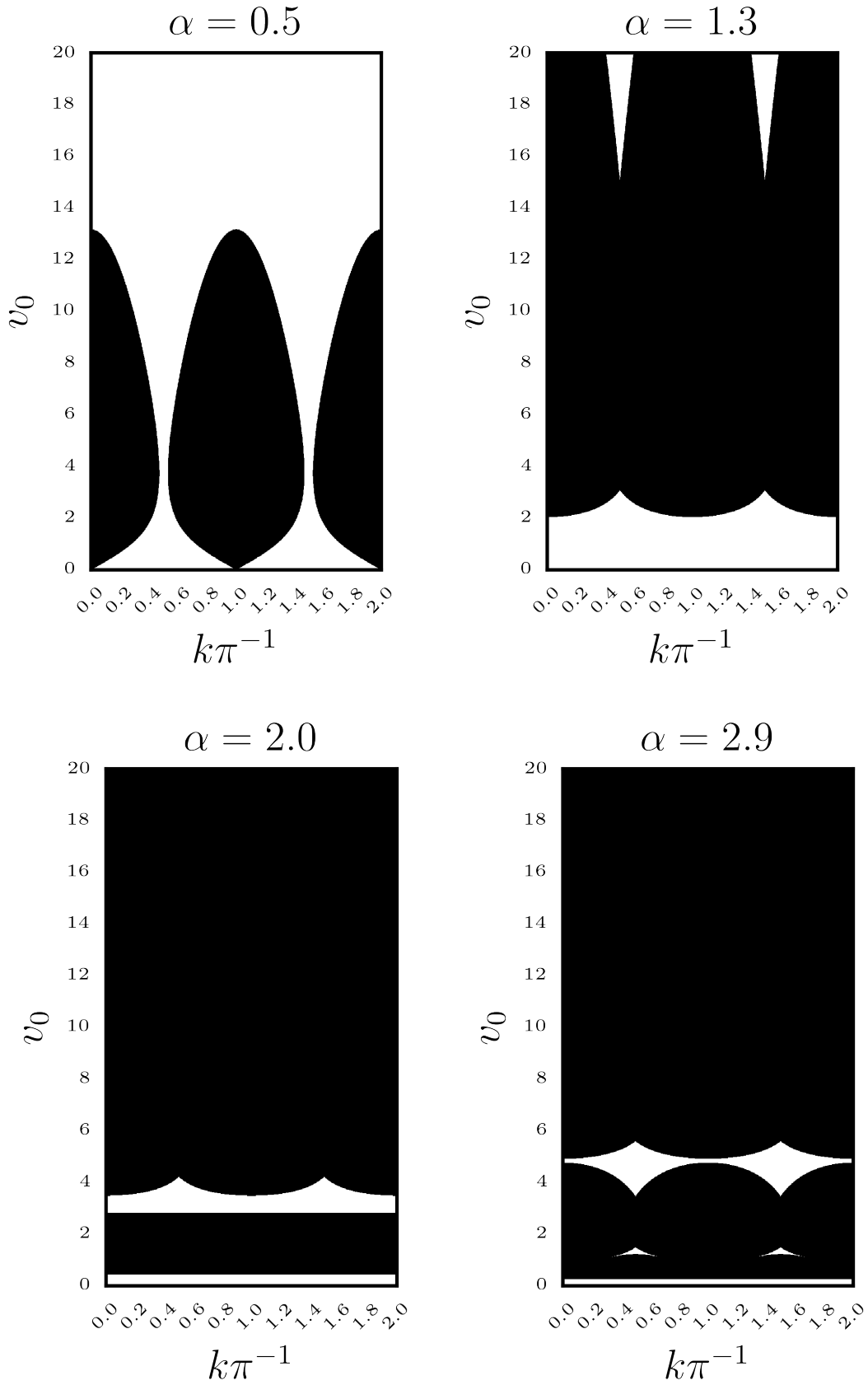


Рис. 2. Диаграммы устойчивости π -моды для разных значений k , v_0 и α . Белому цвету соответствуют значения параметров, при которых исследуемая нелинейная мода устойчива, черному — неустойчива.

Кедров А. А., Щербинин С. А.

Известия вузов. ПНД, 2026

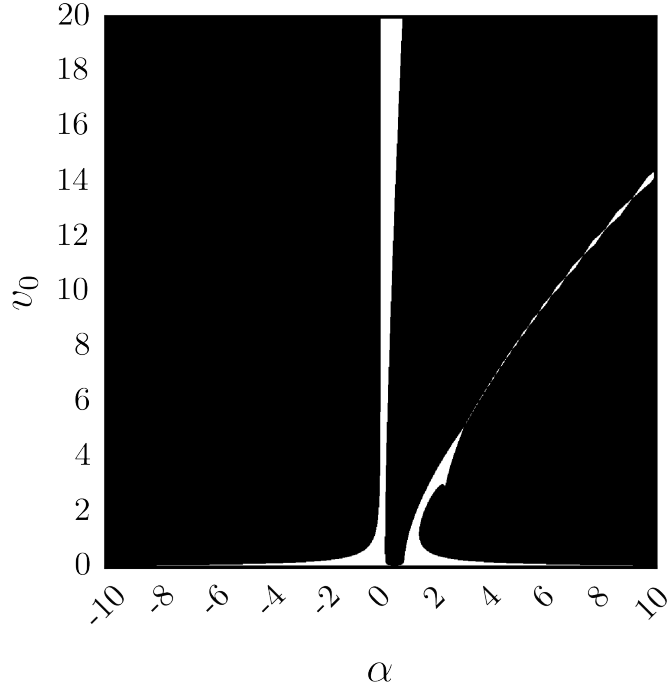


Рис. 3. Диаграмма устойчивости π -моды для разных значений коэффициента α и начальной скорости v_0 . Белому цвету соответствуют значения параметров, при которых исследуемая нелинейная мода устойчива для любого значения k , черному — неустойчива хотя бы для одного значения k .

А. Приложение

А.1. Получение точного решения, соответствующего π -моду В данном приложении изложен способ решения уравнения 4. Замена переменных $V = \dot{U}$ позволяет представить \ddot{y} в следующей форме:

$$\ddot{U} = \frac{d}{d\tau} V = \frac{dU}{d\tau} \frac{dV}{dy} = V \frac{dV}{dy}. \quad (21)$$

Тогда уравнение 4 становится разделяемым относительно переменных V и U :

$$\begin{aligned} V dV &= -2 \sinh(2U) dU, \\ \int V dV &= -2 \int \sinh(2U) dU, \\ V^2 &= C - 2 \cosh(2U), \\ V &= \pm \sqrt{C - 2 \cosh(2U)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь C — константа интегрирования. Из вида полученного выражения следует, что для начальных условий $\dot{U}(0) = V(0) = v_0$:

$$C = v_0^2 + 2. \quad (23)$$

Делая обратную замену $\dot{U} = V$, получаем итоговое выражение:

$$\begin{aligned} d\tau &= \text{sign}(v_0) \frac{dU}{\sqrt{v_0^2 + 2 - 2 \cosh(2U)}}, \\ \tau &= D + \text{sign}(v_0) \int_0^U \frac{dU}{\sqrt{v_0^2 - 4 \sinh^2(U)}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для начального условия $U(0) = 0$ очевидно $D = 0$, тогда полученное выражение можно свести к эллиптическим функциям:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{v_0} \int_0^U \frac{dU}{\sqrt{1 + \frac{4}{v_0^2} \sin^2(iU)}}, \\ i\tau v_0 &= \int_0^{iU} \frac{d(iU)}{\sqrt{1 + \frac{4}{v_0^2} \sin^2(iU)}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Последнее выражение может быть записано через функцию амплитуды Якоби $\text{am}(u|m)$ [41, п. 16.1.3-4]:

$$iU = \text{am} \left(i\tau v_0 \left| -\frac{4}{v_0^2} \right. \right). \quad (26)$$

А.2. Численное представление решения Решение (26) зависит от комплексных аргументов, а значение параметра m отрицательно. Большинство программных пакетов позволяют вычислять эллиптические функции только для вещественных аргументов и параметра $m \in [0, 1]$. По этой причине полученное решение приводится к форме без комплексных аргументов и $m \in [0, 1]$.

Перепишем (5) в следующем виде:

$$U = -i \arctan \left(\frac{\text{sn}(iw| - k)}{\text{cn}(iw| - k)} \right), \quad w = i\tau v_0, \quad k = \frac{4}{v_0^2}, \quad (27)$$

где sn , cn — функции эллиптического синуса и косинуса, определяемые следующими выражениями:

$$\text{sn}(u|m) = \sin(\text{am}(u|m)), \quad \text{cn}(u|m) = \cos(\text{am}(u|m)). \quad (28)$$

Сначала перейдем от отрицательного параметра $m = -k$ к $\mu = \frac{k}{1+k}$, $\mu \in [0, 1]$ [41, п. 16.10]:

$$\text{sn}(u| - k) = \mu_1^{\frac{1}{2}} \text{sd} \left(u\mu_1^{-\frac{1}{2}} \middle| \mu \right), \quad \text{cn}(u| - k) = \text{cd} \left(u\mu_1^{-\frac{1}{2}} \middle| \mu \right), \quad (29)$$

где $\mu_1 = \frac{1}{1+k}$. Также из определения функций sd , cd (см. [41, п. 16.3]) следует, что:

$$\frac{\text{sd}(u|m)}{\text{cd}(u|m)} = \frac{\text{sn}(u|m)}{\text{cn}(u|m)}. \quad (30)$$

Подставляя (29), (30) в (27) получаем следующее выражение:

$$U = -i \arctan \left(\mu_1^{\frac{1}{2}} \frac{\text{sn} \left(iw\mu_1^{-\frac{1}{2}} \middle| \mu \right)}{\text{cn} \left(iw\mu_1^{-\frac{1}{2}} \middle| \mu \right)} \right), \quad (31)$$

Переход от мнимого аргумента осуществляется следующим преобразованием [41, п. 16.20]:

$$\operatorname{sn}(iw|\mu) = i \frac{\operatorname{sn}(w|\mu_1)}{\operatorname{cn}(w|\mu_1)}, \quad \operatorname{cn}(iw|\mu) = \frac{1}{\operatorname{cn}(w|\mu_1)}, \quad (32)$$

где $\mu_1 = \sqrt{1 - \mu^2}$. Итого:

$$U = \operatorname{arctanh} \left(\mu_1^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn} \left(w \mu_1^{-\frac{1}{2}} \middle| \mu \right) \right). \quad (33)$$

Переходя к исходным переменным τ, v_0 , получим:

$$U = \operatorname{arctanh} \left(\frac{\operatorname{sn} \left(\tau \sqrt{v_0^2 + 4} \middle| \frac{1}{1+4/v_0^2} \right)}{\sqrt{1 + 4/v_0^2}} \right). \quad (34)$$

Именно выражение (34) использовалось в работе для вычисления значений U .

Список литературы

1. *Fermi E., Pasta P., Ulam S., Tsingou M.* Studies of the nonlinear problems. May 1955. DOI: 10.2172/4376203.
2. *Chechin G. M., Novikova N. V., Abramenko A. A.* Bushes of vibrational modes for Fermi–Pasta–Ulam chains // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2002. Vol. 166, no. 3. P. 208–238. DOI: 10.1016/S0167-2789(02)00430-X.
3. *Chechin G. M., Ryabov D. S., Zhukov K. G.* Stability of low-dimensional bushes of vibrational modes in the fermi–pasta–ulam chains // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2005. Vol. 203, no. 3. P. 121–166. DOI: 10.1016/j.physd.2005.03.009.
4. *Dauxois Th., Khomeriki R., Piazza F., Ruffo S.* The anti-fpu problem // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2005. Vol. 15, no. 1. DOI: 10.1063/1.1854273.
5. *Flach S., Gorbach A. V.* Discrete breathers — advances in theory and applications // *Physics Reports*. 2008. Vol. 467, no. 1. P. 1–116. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.05.002.
6. *Dmitriev S. V., Korznikova E. A., Baimova Yu. A., Velarde M. G.* Discrete breathers in crystals // *Physics-Uspekhi*. 2016. Vol. 59, no. 5. P. 446. DOI: 10.3367/UFNe.2016.02.037729.
7. *Gómez-Rojas A., Halevi P.* Discrete breathers in an electric lattice with an impurity: Birth, interaction, and death // *Phys. Rev. E*. 2018. Vol. 97. P. 022225. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.022225.
8. *Saadatmand D., Xiong D., Kuzkin V. A., Krivtsov A. M., Savin A. V., Dmitriev S. V.* Discrete breathers assist energy transfer to ac-driven nonlinear chains // *Phys. Rev. E*. 2018. Vol. 97. P. 022217. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.022217.
9. *Kolesnikov I. D., Shcherbinin S. A., Bebikhov Yu. V., Korznikova E. A., Shepelev I. A., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V.* Chaotic discrete breathers in bcc lattice // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2024. Vol. 178. P. 114339. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.114339.
10. *Bachurin D. V., Murzaev R. T., Abdullina D. U., Semenova M. N., Bebikhov Yu. V., Dmitriev S. V.* Chaotic discrete breathers in bcc lattice: Effect of the first- and second-neighbor interactions // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2024. Vol. 470. P. 134344. DOI: 10.1016/j.physd.2024.134344.
11. *Xiong D., Zhang J.* Discrete breathers: possible effects on heat transport // *Letters on Materials*. 2016. Vol. 6, no. 1. P. 27–30. DOI: 10.22226/2410-3535-2016-1-27-30.
12. *Manley M. E.* Impact of intrinsic localized modes of atomic motion on materials properties // *Acta Materialia*. 2010. Vol. 58, no. 8. P. 2926–2935. DOI: 10.1016/j.actamat.2010.01.021.

13. Singh M., Morkina A. Y., Korznikova E. A., Dubinko V. I., Terentiev D. A., Xiong D., Naimark O. B., Gani V. A., Dmitriev S. V. Effect of discrete breathers on the specific heat of a nonlinear chain // J. Nonlinear Sci. 2021. Vol. 31. P. 12. DOI: 10.1007/s00332-020-09663-4.
14. Korznikova E. A., Morkina A. Y., Singh M., Krivtsov A. M., Kuzkin V. A., Gani V. A., Bebikhov Yu. V., Dmitriev S. V. Effect of discrete breathers on macroscopic properties of the Fermi-Pasta-Ulam chain // European Physical Journal B. 2020. Vol. 93, no. 7. DOI: 10.1140/epjb/e2020-10173-7.
15. Archilla J. F. R., Coelho S. M. M., Aurret F. D., Dubinko V. I., Hizhnyakov V. Long range annealing of defects in germanium by low energy plasma ions // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2015. Vol. 297. P. 56–61. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.2015.01.001>.
16. Dubinko V. I., Dubinko A. V. Reaction-rate theory with account of the crystal anharmonicity // Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B. 2013. Vol. 303. P. 133.
17. Terentyev D. A., Dubinko A. V., Dubinko V. I., Dmitriev S. V., Zhurkin E. E., Sorokin M. V. Interaction of discrete breathers with primary lattice defects in bcc fe // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. 2015. Vol. 23, no. 8. P. 085007. DOI: 10.1088/0965-0393/23/8/085007.
18. Korznikova E. A., Shcherbinin S. A., Ryabov D. S., Chechin G. M., Ekomasov E. G., Barani E., Zhou K., Dmitriev S. V. Delocalized nonlinear vibrational modes in graphene: Second harmonic generation and negative pressure // physica status solidi (b). 2019. Vol. 256, no. 1. P. 1800061.
19. Bachurina O. V., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V., Bachurin D. V. Impact of delocalized nonlinear vibrational modes on the properties of niti // Physics Letters A. 2025. Vol. 555. P. 130769. DOI: 10.1016/j.physleta.2025.130769.
20. Korznikova E. A., Fomin S. Yu., Soboleva E. G., Dmitriev S. V. Highly symmetric discrete breather in a two-dimensional morse crystal // JETP Letters. 2016. Vol. 103, no. 4. P. 277–281. DOI: 10.1134/S0021364016040081.
21. Shcherbinin S. A., Kazakov A. M., Bebikhov Yu. V., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V. Delocalized nonlinear vibrational modes and discrete breathers in β -fput simple cubic lattice // Phys. Rev. E. 2024. Vol. 109. P. 014215. DOI: 10.1103/PhysRevE.109.014215.
22. Abdullina D. U., Kosarev I. V., Evarestov R. A., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V. Phonon spectrum and gap quasi-breathers in b2 (cscl) structure // Chaos, Solitons & Fractals. 2025. Vol. 199. P. 116724. DOI: 10.1016/j.chaos.2025.116724.
23. Burlakov V. M., Kiselev S. A., Rupasov V. I. Localized vibrations of homogeneous anharmonic chains // Phys. Lett. A. 1990. Vol. 147, no. 2. P. 130–134. DOI: 10.1016/0375-9601(90)90880-W.
24. Korznikova E. A., Bachurin D. V., Fomin S. Yu., Chetverikov A. P., Dmitriev S. V. Instability of vibrational modes in hexagonal lattice // The European Physical Journal B. 2017. Vol. 90, no. 2. P. 23. DOI: 10.1140/epjb/e2016-70595-2.
25. Poggi P., Ruffo S. Exact solutions in the fpu oscillator chain // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1997. Vol. 103, no. 1. P. 251–272. DOI: 10.1016/S0167-2789(96)00262-X.
26. Yoshimura K. Modulational instability of zone boundary mode in nonlinear lattices: Rigorous results // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70, no. 1. P. 016611. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.016611.
27. Kosevich Yu. A., Lepri S. Modulational instability and energy localization in anharmonic lattices at finite energy density // Phys. Rev. B. 2000. Vol. 61. P. 299–307. DOI: 10.1103/PhysRevB.61.299.
28. Chechin G. M., Ryabov D. S. Stability of nonlinear normal modes in the fermi-pasta-ulam β chain in the thermodynamic limit // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. P. 056601.

- DOI: 10.1103/PhysRevE.85.056601.
29. *Toda M.* Studies of a non-linear lattice // *Physics Reports*. 1975. Vol. 18, no. 1. P. 1–123. DOI: 10.1016/0370-1573(75)90018-6.
 30. *Fu W., Zhang Y., Zhao H.* Universal law of thermalization for one-dimensional perturbed toda lattices // *New Journal of Physics*. 2019. Vol. 21, no. 4. P. 043009. DOI: 10.1088/1367-2630/ab115a.
 31. *Chechin G. M., Zhukov K. G.* Stability analysis of dynamical regimes in nonlinear systems with discrete symmetries // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 73. P. 036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.036216.
 32. *Chechin G. M., Shcherbinin S. A.* Delocalized periodic vibrations in nonlinear lc and lcr electrical chains // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015. Vol. 22, no. 1. P. 244–262. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.09.028.
 33. *Щербинин С. А., Гончаров П. П., Чечин Г. М.* Исследование устойчивости нелинейных нормальных мод в электрических цепях // *Известия вузов. ПНД*. 2013. Т. 21, № 2. С. 34–51. DOI: 10.18500/0869-6632-2013-21-2-34-51
 34. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. Москва, Наука, 1972.
 35. *Perko L.* Differential Equations and Dynamical Systems. Vol. 7 of Texts in Applied Mathematics. 3rd ed. Springer, New York, NY, 2001. 557 p. ISBN 978-1-4613-0003-8. DOI: 10.1007/978-1-4613-0003-8.
 36. *Dormand J. R., Prince P. J.* A family of embedded runge-kutta formulae // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1980. Vol. 6, no. 1. P. 19–26. DOI: 10.1016/0771-050X(80)90013-3.
 37. *Anderson E., Bai Z., Bischof C., Blackford S., Demmel J., Dongarra J., Du Croz J., Greenbaum A., Hammarling S., McKenney A., Sorensen D.* LAPACK Users' Guide. 3rd ed. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999. 407 p. ISBN 0-89871-447-8.
 38. *Poincaré H.* Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Vol. I. Paris: Gauthier-Villars, 1892.
 39. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*. ВИНТИ, 1985. 292 с.
 40. *Hénon M.* Integrals of the toda lattice // *Phys. Rev. B*. 1974. Vol. 9. P. 1921–1923. DOI: 10.1103/PhysRevB.9.1921.
 41. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. 9th Dover printing, 10th GPO printing. New York City: Dover, 1964. 1046 p.

References

1. *Fermi E., Pasta P., Ulam S., Tsingou M.* Studies of the nonlinear problems. May 1955. DOI: 10.2172/4376203.
2. *Chechin G. M., Novikova N. V., Abramenko A. A.* Bushes of vibrational modes for Fermi–Pasta–Ulam chains // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2002. Vol. 166, no. 3. P. 208–238. DOI: 10.1016/S0167-2789(02)00430-X.
3. *Chechin G. M., Ryabov D. S., Zhukov K. G.* Stability of low-dimensional bushes of vibrational modes in the fermi–pasta–ulam chains // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2005. Vol. 203, no. 3. P. 121–166. DOI: 10.1016/j.physd.2005.03.009.

Кедров А. А., Щербинин С. А.
Известия вузов. ПНД, 2026

4. Dauxois Th., Khomeriki R., Piazza F., Ruffo S. The anti-fpu problem // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2005. Vol. 15, no. 1. DOI: 10.1063/1.1854273.
5. Flach S., Gorbach A.V. Discrete breathers — advances in theory and applications // *Physics Reports*. 2008. Vol. 467, no. 1. P. 1–116. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.05.002.
6. Dmitriev S.V., Korznikova E.A., Baimova Yu.A., Velarde M.G. Discrete breathers in crystals // *Physics-Uspekhi*. 2016. Vol. 59, no. 5. P. 446. DOI: 10.3367/UFNe.2016.02.037729.
7. Gómez-Rojas A., Halevi P. Discrete breathers in an electric lattice with an impurity: Birth, interaction, and death // *Phys. Rev. E*. 2018. Vol. 97. P. 022225. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.022225.
8. Saadatmand D., Xiong D., Kuzkin V.A., Krivtsov A.M., Savin A.V., Dmitriev S.V. Discrete breathers assist energy transfer to ac-driven nonlinear chains // *Phys. Rev. E*. 2018. Vol. 97. P. 022217. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.022217.
9. Kolesnikov I.D., Shcherbinin S.A., Bebikhov Yu.V., Korznikova E.A., Shepelev I.A., Kudreyko A.A., Dmitriev S.V. Chaotic discrete breathers in bcc lattice // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2024. Vol. 178. P. 114339. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.114339.
10. Bachurin D.V., Murzaev R.T., Abdullina D.U., Semenova M.N., Bebikhov Yu.V., Dmitriev S.V. Chaotic discrete breathers in bcc lattice: Effect of the first- and second-neighbor interactions // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2024. Vol. 470. P. 134344. DOI: 10.1016/j.physd.2024.134344.
11. Xiong D., Zhang J. Discrete breathers: possible effects on heat transport // *Letters on Materials*. 2016. Vol. 6, no. 1. P. 27–30. DOI: 10.22226/2410-3535-2016-1-27-30.
12. Manley M.E. Impact of intrinsic localized modes of atomic motion on materials properties // *Acta Materialia*. 2010. Vol. 58, no. 8. P. 2926–2935. DOI: 10.1016/j.actamat.2010.01.021.
13. Singh M., Morkina A.Y., Korznikova E.A., Dubinko V.I., Terentiev D.A., Xiong D., Naimark O.B., Gani V.A., Dmitriev S.V. Effect of discrete breathers on the specific heat of a nonlinear chain // *J. Nonlinear Sci.* 2021. Vol. 31. P. 12. DOI: 10.1007/s00332-020-09663-4.
14. Korznikova E.A., Morkina A.Y., Singh M., Krivtsov A.M., Kuzkin V.A., Gani V.A., Bebikhov Yu.V., Dmitriev S.V. Effect of discrete breathers on macroscopic properties of the Fermi-Pasta-Ulam chain // *European Physical Journal B*. 2020. Vol. 93, no. 7. DOI: 10.1140/epjb/e2020-10173-7.
15. Archilla J.F.R., Coelho S.M.M., Aurret F.D., Dubinko V.I., Hizhnyakov V. Long range annealing of defects in germanium by low energy plasma ions // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2015. Vol. 297. P. 56–61. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.2015.01.001>.
16. Dubinko V.I., Dubinko A.V. Reaction-rate theory with account of the crystal anharmonicity // *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B*. 2013. Vol. 303. P. 133.
17. Terentyev D.A., Dubinko A.V., Dubinko V.I., Dmitriev S.V., Zhurkin E.E., Sorokin M.V. Interaction of discrete breathers with primary lattice defects in bcc fe // *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. 2015. Vol. 23, no. 8. P. 085007. DOI: 10.1088/0965-0393/23/8/085007.
18. Korznikova E.A., Shcherbinin S.A., Ryabov D.S., Chechin G.M., Ekomasov E.G., Barani E., Zhou K., Dmitriev S.V. Delocalized nonlinear vibrational modes in graphene: Second harmonic generation and negative pressure // *physica status solidi (b)*. 2019. Vol. 256, no. 1. P. 1800061.
19. Bachurina O.V., Kudreyko A.A., Dmitriev S.V., Bachurin D.V. Impact of delocalized nonlinear vibrational modes on the properties of niti // *Physics Letters A*. 2025. Vol. 555. P. 130769. DOI: 10.1016/j.physleta.2025.130769.
20. Korznikova E.A., Fomin S.Yu., Soboleva E.G., Dmitriev S.V. Highly symmetric discrete

- breather in a two-dimensional morse crystal // JETP Letters. 2016. Vol. 103, no. 4. P. 277–281. DOI: 10.1134/S0021364016040081.
21. Shcherbinin S. A., Kazakov A. M., Bebikhov Yu. V., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V. Delocalized nonlinear vibrational modes and discrete breathers in β -fpu simple cubic lattice // Phys. Rev. E. 2024. Vol. 109. P. 014215. DOI: 10.1103/PhysRevE.109.014215.
 22. Abdullina D. U., Kosarev I. V., Evarestov R. A., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V. Phonon spectrum and gap quasi-breathers in b2 (cscl) structure // Chaos, Solitons & Fractals. 2025. Vol. 199. P. 116724. DOI: 10.1016/j.chaos.2025.116724.
 23. Burlakov V. M., Kiselev S. A., Rupasov V. I. Localized vibrations of homogeneous anharmonic chains // Phys. Lett. A. 1990. Vol. 147, no. 2. P. 130–134. DOI: 10.1016/0375-9601(90)90880-W.
 24. Korznikova E. A., Bachurin D. V., Fomin S. Yu., Chetverikov A. P., Dmitriev S. V. Instability of vibrational modes in hexagonal lattice // The European Physical Journal B. 2017. Vol. 90, no. 2. P. 23. DOI: 10.1140/epjb/e2016-70595-2.
 25. Poggi P., Ruffo S. Exact solutions in the fpu oscillator chain // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1997. Vol. 103, no. 1. P. 251–272. DOI: 10.1016/S0167-2789(96)00262-X.
 26. Yoshimura K. Modulational instability of zone boundary mode in nonlinear lattices: Rigorous results // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70, no. 1. P. 016611. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.016611.
 27. Kosevich Yu. A., Lepri S. Modulational instability and energy localization in anharmonic lattices at finite energy density // Phys. Rev. B. 2000. Vol. 61. P. 299–307. DOI: 10.1103/PhysRevB.61.299.
 28. Chechin G. M., Ryabov D. S. Stability of nonlinear normal modes in the fermi-pasta-ulam β chain in the thermodynamic limit // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. P. 056601. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.056601.
 29. Toda M. Studies of a non-linear lattice // Physics Reports. 1975. Vol. 18, no. 1. P. 1–123. DOI: 10.1016/0370-1573(75)90018-6.
 30. Fu W., Zhang Y., Zhao H. Universal law of thermalization for one-dimensional perturbed toda lattices // New Journal of Physics. 2019. Vol. 21, no. 4. P. 043009. DOI: 10.1088/1367-2630/ab115a.
 31. Chechin G. M., Zhukov K. G. Stability analysis of dynamical regimes in nonlinear systems with discrete symmetries // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. P. 036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.036216.
 32. Chechin G. M., Shcherbinin S. A. Delocalized periodic vibrations in nonlinear lc and lcr electrical chains // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol. 22, no. 1. P. 244–262. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.09.028.
 33. Shcherbinin S. A., Goncharov P. P., Chechin G. M. Investigation of the stability of nonlinear normal modes in electrical circuits. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2013;21(2):34–51 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2013-21-2-34-51
 34. Yakubovich V. A., Starzhinskii V. M. Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Their Applications. Moscow, Nauka, 1972.
 35. Perko L. Differential Equations and Dynamical Systems. Vol. 7 of Texts in Applied Mathematics. 3rd ed. Springer, New York, NY, 2001. DOI: 10.1007/978-1-4613-0003-8.
 36. Dormand J. R., Prince P. J. A family of embedded runge-kutta formulae // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1980. Vol. 6, no. 1. P. 19–26. DOI: 10.1016/0771-050X(80)90013-3.
 37. Anderson E., Bai Z., Bischof C., Blackford S., Demmel J., Dongarra J., Du Croz J., Greenbaum A., Hammarling S., McKenney A., Sorensen D. LAPACK Users' Guide. 3rd ed. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.

38. Poincaré H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Vol. I. Paris: Gauthier-Villars, 1892.
39. Arnold V. I., Kozlov V. V., Neishtadt A. I. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics // Advances in Science and Technology. Contemporary Problems of Mathematics. Fundamental Directions. Moscow, VINITI, 1985.
40. Hénon M. Integrals of the toda lattice // Phys. Rev. B. 1974. Vol. 9. P. 1921–1923. DOI: 10.1103/PhysRevB.9.1921.
41. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. 9th Dover printing, 10th GPO printing. New York City: Dover, 1964.