

Нестационарное рассеяние упругих волн на сферическом включении

Б. Ш. Усмонов¹, Р. Т. Мухиддинов¹, Н. Р. Элибоев¹✉, Н. Б. Ахмедов²

¹Ташкентский химико-технологический институт, Узбекистан

²Навоийский государственный университет горного дела и технологий, Узбекистан

E-mail: botir2468@gmail.com, ramazonmuhitdinov@gmail.com, ✉nurali_e@mail.ru

nasriddinaxmedov@gmail.com

Поступила в редакцию 28.07.2025, принята к публикации 27.10.2025,
опубликована онлайн 13.11.2025

Аннотация. Задачи рассеяния упругих волн на различных типах неоднородностей относятся к числу наиболее сложных и актуальных задач динамики деформируемых тел. С прикладной точки зрения это объясняется тем, что информация о динамическом напряжённо-деформированном состоянии в окрестности этих неоднородностей представляет большой интерес для различных инженерных и физических приложений. Целью данной работы является исследование нестационарного рассеяния упругих волн на сферическом включении, расположенному в бесконечном упругом пространстве. Для построения решения используются аналитические методы, включая интегральное преобразование Фурье по времени. Установлено, что собственные функции исследуемой задачи нельзя рассматривать как векторы в гильбертовом пространстве: они не нормируются из-за экспоненциального роста с расстоянием, что делает необходимым использование обобщённых функций и специальных методов теории рассеяния.

Ключевые слова: сферическая оболочка, заполнитель, колебания, частотное уравнение, коэффициент демпфирования.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке...

Для цитирования: Усмонов Б. Ш., Мухиддинов Р. Т., Элибоев Н. Р., Ахмедов Н. Б. Нестационарное рассеяние упругих волн на сферическом включении // Известия вузов. ПНД. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003200. EDN: MSPDVQ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Nonstationary scattering of elastic waves by a spherical inclusion

B. Sh. Usmonov¹, R. T. Mukhiddinov¹, N. R. Eliboyev¹✉, N. B. Akhamedov²

¹Tashkent Chemical-Technological Institute, Uzbekistan

²Navoi State University of Mining and Technologies, Uzbekistan

E-mail: botir2468@gmail.com, ramazonmuxitdinov@gmail.com, ✉nurali_e@mail.ru, nasriddinaxmedov@gmail.com

Received 28.07.2025, accepted 27.10.2025, available online 13.11.2025

Abstract. Problems of elastic wave scattering by various types of inhomogeneities rank among the most complex and relevant topics in the field of deformable solid dynamics. From an applied perspective, this is due to the fact that information about the dynamic stress-strain state in the vicinity of such inhomogeneities is of significant interest for various engineering and physical applications. The objective of this study is to investigate the nonstationary scattering of elastic waves by a spherical inclusion embedded in an infinite elastic medium. The analytical approach to the solution involves the application of Fourier integral transforms with respect to time. It is established that the eigenfunctions of the considered problem cannot be treated as vectors in a Hilbert space, since they are not square-integrable due to their exponential growth with distance. This necessitates the use of generalized functions and specialized methods from scattering theory.

Keywords: spherical shell, wave scattering, wave amplitude, eigenfunctions, eigenfrequencies.

Acknowledgements. This work was supported by...

For citation: Mirsaidov MM, Safarov II, Teshaev MX, Eliboyev NR. Nonstationary scattering of elastic waves by a spherical inclusion. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003200

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Рассеивание плоской волны одним сферическим препятствием часто встречается во многих практических задачах геофизики и сейсмологии [1, 2]. В разведочной геофизике сферические объекты обеспечивают хорошее приближение для реальных объектов [3, 4]. Аналитическая формулировка одной сферы может использоваться для построения более сложных решений. В нефтяной промышленности, если нефть захвачена в полостях, разумно допустить, что сейсмическая энергия может быть захвачена резонансом жидкости. Такие резонансы трудно наблюдать из-за контрастов импеданса между породой и жидкостью [5, 6]. Точные решения для задач рассеяния очень актуальны. Хотя аналитические решения существуют для некоторых типов препятствий (сфера, цилиндр или эллипсоиды), полученное понимание имеет важное значение [7, 8]. Задачи дифракции упругих волн на неоднородностях тесно связаны с рассеянными волнами, также являются частью классических фундаментальных задач динамики деформируемых тел, и их решение требует сложного математического аппарата [9–11]. Для воздействия на механические и тепловые характеристики материалов довольно часто используют добавление наполнителей [12, 13].

Задача о рассеянии волн на сферической неоднородности была поставлена достаточно давно при решении многочисленных научно-технических проблем, связанных, в частности, с дифракцией электромагнитных [14], звуковых [15] и упругих [16] волн. Данная задача рассматривается обычно в стационарной постановке, когда падающая волна представляет собой бесконечную в пространстве и во времени гармоническую волну вида $\exp[i\omega(t - \frac{z}{c})]$.

При этом возникает ряд трудностей, связанных с тем, что собственные функции исследуемой задачи нельзя рассматривать как векторы в гильбертовом пространстве: они не нормируются из-за экспоненциального роста с расстоянием. Этот факт, известный в общей теории рассеяния [17], вытекает из следующего обстоятельства.

Рассеянная бегущая волна, уходящая на бесконечность, ведет себя как $u \sim r^{-1} \exp [i\omega^{(k)}(t - \frac{r}{c})]$, где $\omega^{(k)} = \omega_R^{(k)} + i\omega_I^{(k)}$ — комплексные собственные частоты системы «включение–среда» [18].

Таким образом, $u \sim r^{-1} \exp \left[-\omega_I^{(k)} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \exp \left[i\omega_R^{(k)} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$, и амплитуда рассеянной волны в фиксированной точке уменьшается с течением времени из-за радиальных потерь. Пространственное же распределение амплитуд в каждый данный момент времени экспоненциально увеличивается с ростом r , так как бесконечно удаленные части волны были возбуждены в более ранние промежутки времени, когда амплитуда колебаний неоднородности была бесконечно большой.

Естественно, факт бесконечного возрастания собственных функций не имеет реального физического смысла, так как, согласно принципу причинности, при $r > ct$ в точке r никакого сигнала быть не может. Поскольку мы пытаемся реальную ситуацию подменить некоторой другой, связанной с введением в бесконечном пространстве стационарного процесса, приходится неизбежно сталкиваться с «экспоненциальной катастрофой».

Для её устранения необходимо учесть, что колебания не могут существовать на протяжении бесконечно большого промежутка времени, и, следовательно, мы приходим к необходимости постановки и решения задачи о дифракции импульса той или иной формы с выраженным передним фронтом.

1. Методика

1.1. Постановка задачи и методики решения. Пусть на центр рассеяния радиуса R , помещённый в начало сферической системы координат (r, θ, φ) , совмещённой обычным образом с декартовой системой координат (x, y, z) , падает плоская волна смещения. Уравнения движения сферического тела ($k = 2$) и окружающей его среды ($k = 1$) имеют следующий вид:

$$\mu_k \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{U} - (\lambda_k + 2\mu_k) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} + \rho_k \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Здесь λ_k, μ_k — коэффициенты Ламе для окружающей среды ($k = 1$) и сферических тел ($k = 2$), ρ_k — плотности материалов, $\vec{U}_k(u_{rk}, u_{\theta k}, u_{zk})$ — вектор перемещений.

На контакте двух тел при $r = R$ выполняется равенство смещений и напряжений (условие жёсткого контакта).

$$u_{r1} = u_{r2}, \quad u_{\theta 1} = u_{\theta 2}, \quad u_{\varphi 1} = u_{\varphi 2}, \quad \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}, \quad \sigma_{r\theta 1} = \sigma_{r\theta 2}, \quad \sigma_{r\varphi 1} = \sigma_{r\varphi 2}. \quad (2)$$

На бесконечности возмущения должны затухать:

$$\vec{U}_1 \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty.$$

А также заданы начальные условия:

$$\vec{U}_k \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \vec{U}_k}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Обозначим через c_{pk} и c_{sk} (для $k = 1, 2$) скорости продольных и поперечных волн соответственно. Предположим для определённости, что волна движется в положительном направлении оси $0z$. Тогда вектор смещения

$$\vec{U}_1^{(p)} = \vec{e}_1 U_0 \left(\tau_q - \frac{z}{R} - 1 \right) H \left(\tau_q - \frac{z}{R} - 1 \right) \quad (4)$$

где \vec{e}_1 — единичный вектор, задающий поляризацию волны, $\tau_1 = c_1 e / R$ — безразмерное время, $H(x)$ — ступенчатая функция Хэвисайда.

Для решения поставленной задачи воспользуемся интегральным преобразованием Фурье по времени, которое определим следующими формулами:

$$f_k(x_q) = \int_{-\infty}^{\infty} F_k(\tau_1) \exp(-ix_q \tau_1) d\tau_1, \quad F_k(\tau_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x_q) \exp(ix_q \tau_1) dx_q \quad (5)$$

где x_q — параметр преобразования, имеющий смысл безразмерной частоты:

$$x_q = \frac{\omega R}{c_{p1}} = k_{q1} R.$$

$k_{11} = \omega / c_{p1}$; ω — частота; $c_{p1} = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}}$ — скорость распространение продольных волн в среде.

Уравнение Ламе (1) после применения преобразования (5) принимает следующий вид:

$$\mu_k \text{rot} \text{rot} \vec{u}_k - (\lambda_k + 2\mu_k) \text{grad} \text{div} \vec{u}_k - \rho_k \omega^2 \vec{u}_k = 0. \quad (6)$$

Принимая преобразование Фурье к падающему импульсу, получим

$$u_1^{(p)} = \vec{e}_1 \exp(-ik_{q1} z) \eta(x_q) \quad (7)$$

Здесь

$$\eta(x_q) = \exp(-ix_q) g(x_q), \quad g(x_q) = \int U_0(T_q) \exp(-ix_q T_q) dT_q, \quad T_q = \tau_q - \frac{z}{R} - 1. \quad (8)$$

Решение уравнений (4) ищется, как известно [7], в виде

$$\vec{u}_k = \frac{1}{k_{pk}} \text{grad} \psi_{0k} + \frac{1}{k_{sk}} \text{rot} \text{rot}(\vec{r} \psi_{1k}) + \text{rot}(\vec{r} \psi_{2k}) \quad (9)$$

причем потенциалы ψ_j удовлетворяют скалярному уравнению Гельмгольца и решение выражаются следующим образом:

$$(\psi_{0k}, \psi_{1k}, \psi_{2k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{mnk}, B_{mnk}, C_{mnk}) b_n(lr) \Phi_n^m(0, \varphi), \quad k = \begin{cases} k_p, & j = 0, \\ k_s, & j = 1, 2. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $\Phi_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi)$, а $b_n(\xi)$ — сферическая функция Бесселя. Для внешней задачи в качестве $b_n(\xi)$ необходимо брать функцию Ханкеля второго рода: $b_n(\xi) = h_n^{(2)}(\xi) \equiv h_n(\xi)$, выделяющую на бесконечности расходящиеся волны. Для внутренней задачи $b_n(\xi) = j_n(\xi)$, которая удовлетворяет условию ограниченности в нуле. Падающую

плоскую волну можно разложить по регулярным векторным собственным функциям $\vec{L}_{\sigma mn}^1$, $\vec{M}_{\sigma mn}^1$, $\vec{N}_{\sigma mn}^1$ векторного уравнения Гельмгольца [19]:

$$\begin{aligned}\vec{e}_x \exp(-ikz) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (-i)^n [M_{c1n}^1 + iN_{c1n}^1], \\ \vec{e}_y \exp(-ikz) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (-i)^n [M_{c1n}^1 - iN_{s1n}^1], \\ \vec{e}_z \exp(-ikz) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n L_{c0n}^1.\end{aligned}\quad (11)$$

где s и c обозначают $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в выражениях для собственных векторов.

Сами векторы $\vec{L}, \vec{M}, \vec{C}$ определяются из условий непрерывности вектора смещений:

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_{\theta} \vec{e}_{\theta} + u_{\varphi} \vec{e}_{\varphi},$$

а также вектора напряжений:

$$\vec{\sigma}_n = \sigma_{rr} \vec{e}_r + \tau_{r\theta} \vec{e}_{\theta} + \tau_{r\varphi} \vec{e}_{\varphi},$$

на границе неоднородности и вмещающей среды.

При $r = R$ должны выполняться следующие соотношения:

$$\vec{u}_1^{(p)} + \vec{u}_1 = \vec{u}_2, \quad \vec{\sigma}_1^{(p)} + \vec{\sigma}_1 = \vec{\sigma}_2 \quad (12)$$

Рассчитав смещения и напряжения из потенциалов ψ_j и подставив полученные выражения в граничные условия (12), а также воспользовавшись ортогональностью сферических волновых функций на поверхности сферы, приходим к системе алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов. Отметим, что в случае рассеяния импульса продольной волны, как следует из (11), наблюдается вырождение по параметру m (при $m = 0$), и, следовательно, зависимость от азимутальной координаты φ в общем решении отсутствует. В случае рассеяния поперечной волны будем для определенности считать, что она поляризована в направлении \vec{e}_z . Рассеянное поле смещений во вмещающей среде выражается следующими формулами (поскольку нас интересует только внешнее поле, индекс 2 здесь и в дальнейшем будем опускать):

$$\begin{aligned}u_{r1} &= \eta(x_q) \cos(m\varphi) \sum_{n=m}^{\infty} \Omega_q \left[d_1(k_p r) \frac{A_{mn}}{k_p r} + n(n+1) h_n(k_s r) \frac{B_{mn}}{k_s r} \right] P_n^m(\cos \theta), \\ u_{\theta 1} &= \eta(x_q) \cos(m\varphi) \sum_{n=m}^{\infty} \Omega_q \left\{ \left[h_n(k_p r) \frac{A_{mn}}{k_p r} + d_2(k_s r) \frac{B_{mn}}{k_s r} \right] \tau_n(\theta) + i h_n(k_s r) \pi_n(\theta) C_{mn} \right\}, \\ u_{\varphi 1} &= -\eta(x_q) \sin(m\varphi) \sum_{n=m}^{\infty} \Omega_q \left\{ \left[h_n(k_p r) \frac{A_{mn}}{k_p r} + d_2(k_s r) \frac{B_{mn}}{k_s r} \right] \tau_n(\theta) + i h_n(k_s r) \pi_n(\theta) C_{mn} \right\}.\end{aligned}\quad (13)$$

Причём в случае падения продольной волны ($q = p$, $m = 0$):

$$\Omega_p = (-i)^{n+1} (2n+1), \quad C_{0n} = 0,$$

а в случае падения поперечной волны ($q = s$, $m = 1$):

$$\Omega_p = (-i)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

В уравнении (13) введены сокращённые обозначения:

$$\begin{aligned} d_1(k_p r) &= nh_n(k_p r) - (k_p r)h_{n+1}(k_p r), \\ d_2(k_s r) &= (n+1)h_n(k_s r) - (k_s r)h_{n+1}(k_s r), \\ \tau_n(\theta) &= \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta}, \quad \pi_n(\theta) = \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Формулы для коэффициентов рассеяния, характеризующих внешнее дифрагированное поле, можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\Delta_n^\alpha(\omega)}{\Delta_n(\omega)} \cdot \frac{\gamma j_n(x_s)}{h_n(x_s)}, & b_n &= \frac{\Delta_n^b(\omega)}{\Delta_n(\omega)} \cdot \frac{j_n(x_s)}{h_n(x_s)}, \\ c_n &= \frac{\Delta_n^c(\omega)}{\delta_n(\omega)} \cdot \frac{j_n(x_s)}{h_n(x_s)}, & A_n &= \frac{\Delta_n^A(\omega)}{\Delta_n(\omega)} \cdot \frac{j_n(x_p)}{h_n(x_p)}, \\ B_n &= \frac{\Delta_n^E(\omega)}{\Delta_n(\omega)} \cdot \frac{j_n(x_p)}{\gamma h_n(x_s)}, & C_n &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\gamma = \frac{c_{s2}}{c_{p2}}$, $a_n = A_{1n}$, $b_n = B_{1n}$, $c_n = C_{1n}$ — коэффициенты рассеяния поперечной волны, $A_n = A_{0n}$, $B_n = B_{0n}$, $C_n = C_{0n}$ — коэффициенты рассеяния продольной волны, $\Delta_n^{a,b,c,A,B}(\omega)$, $\Delta_n(\omega)$, $\delta_n(\omega)$ — некоторые определители, элементы которых зависят от отношений $\frac{j_{n+1}}{j_n}$ (функции Бесселя) или $\frac{h_{n+1}}{h_n}$ (функции Ханкеля). Можно отметить, что уравнения

$$\Delta_n(\omega) = 0, \quad \delta_n(\omega) = 0, \quad (15)$$

определяют соответственно собственные комплексные частоты сфероидальных и крутильных колебаний сферической неоднородности в бесконечной упругой среде [20].

Решение во временной области находится посредством обратного преобразования Фурье:

$$U(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \exp(ix\tau) dx, \quad (16)$$

где $u(x)$ определяется формулами (13).

Выпишем (16) в явном виде в приближении волновой зоны ($r \gg 1$). Пренебрегая членами порядка r^{-2} и воспользовавшись асимптотическим представлением функции Ханкеля:

$$h_n(\xi) \equiv h_n^{(2)}(\xi) \sim \frac{1}{\xi} i^{n+1} e^{-i\xi}.$$

будем иметь

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{\cos m\varphi}{2\pi i} \frac{R}{r} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_q) \frac{S_1(0, x_q)}{x_p} \exp(i\tau'_q x_q) dx_q, \\ U_\theta &= \frac{\cos m\varphi}{2\pi i} \frac{R}{r} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_q) \frac{S_2(0, x_q)}{x_s} \exp(i\tau''_q x_q) dx_q, \\ U_\varphi &= \frac{\sin m\varphi}{2\pi i} \frac{R}{r} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_q) \frac{S_3(0, x_q)}{x_s} \exp(i\tau''_q x_q) dx_q. \end{aligned} \quad (17)$$

где амплитудные функции $S_j(0, x_q)$ записываются в виде

$$\begin{aligned} S_1(0, x_q) &= \sum_{n=m}^{\infty} i^{n+1} \Omega_q P_n^m(\cos \theta) A_{nm}, \\ S_2(0, x_q) &= \sum_{n=m}^{\infty} i^{n+1} \Omega_q [\tau_n(\theta) B_{mn} + \pi_n(\theta) C_{mn}], \\ S_3(0, x_q) &= \sum_{n=m}^{\infty} i^{n+1} \Omega_q [\pi_n(\theta) B_{mn} + \tau_n(\theta) C_{mn}]. \end{aligned} \quad (18)$$

В случае рассеяния продольного импульса

$$q = p, \quad m = 0, \quad C_{0n} = 0, \quad \tau'_p = \tau_p - \frac{r}{R} - 1, \quad \tau''_p = \tau_p - \frac{r}{\gamma R} - 1.$$

Для поперечного импульса

$$q = s, \quad m = 1, \quad C_{0n} = 0, \quad \tau'_p = \tau_s - \frac{\gamma r}{R} - 1, \quad \tau''_s = \tau_s - \frac{r}{\gamma R} - 1.$$

Чтобы иметь возможность вычислить интеграл (17) в конечном виде, необходимо конкретизировать вид падающего импульса (4). В качестве зондирующего сигнала выбираем импульс Берлоге, который с достаточной точностью аппроксимирует записи реальных сейсмических возбуждений:

$$U_0(T_s) = T_s e^{-aT_s} \sin(bT_s),$$

где a и b — параметры, определяющие импульс. С помощью (8) получим для спектра сигнала:

$$g(x_s) = \frac{2b(a + ix_s)}{[(a + ix_s)^2 + b^2]^2}.$$

В принципе, интегралы (16) и (17) можно вычислять приближённо с помощью компьютера путём непосредственного численного интегрирования. Для получения выражения перемещений и напряжений в оригиналах применяется теория вычетов. Этот метод физически хорошо описывает рассматриваемый процесс. Заменяя интегрирование по x_q интегрированием по замкнутому контуру, состоящему из действительной оси и полуокружности в комплексной полуплоскости, интегралы сводятся к сумме вычетов по полюсам подынтегральной функции. Часть этих полюсов является корнями уравнений (15). Это означает, что разложение идёт по функциям, аргументы которых включают комплексные собственные частоты, т.е. по собственным функциям сферической упругой неоднородности. Выпишем (17) в следующем виде:

$$U_n = f(n, r, \theta, \varphi) \int_{-\infty}^{\infty} g(x_p) \frac{\Delta_n^A(x_p) j_n(x_p)}{x_p \Delta_n(x_p) h_n(x_p)} \exp\left(ix_p \left(\tau_p - \frac{r}{R} - 1\right)\right) dx_p. \quad (19)$$

Выбираем падающий импульс таким образом, что его спектр $g(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Следовательно, выражение в скобках равномерно стремится к нулю.

При этом при условии $\tau_p - \frac{r}{R} - 1 > 0$ условия леммы Жордана [21] выполняются, и интегрирование по бесконечной полуокружности можно пренебречь.

Отметим, что последнее неравенство отражает принцип причинности: сигнал не может прийти в точку $r + R$ раньше момента времени $t = \frac{r + R}{c_p}$. Таким образом, используя

теорию вычетов для вычисления интеграла (19), получаем:

$$U_n = 2\pi i f(n, r, \theta, \varphi) \sum_{k,m} \operatorname{res} \left\{ \frac{g(z) \Delta_n^A(z) j_n(z)}{z \Delta_n(z) h_n(z)} \right\}_{\substack{(k)z=z_1 \\ z=z_2}} \exp(iz\tau'_p) H(\tau'_p), \quad (20)$$

где $z_1^{(k)}$ — полюсы функций $\Delta_n(z)h_n(z)$, а полюсы функции $g(z)$.

Если сферическая неоднородность мало отличается от окружающей среды, тогда минимальная часть $z_1^{(k)}$ мала, и полюсы лежат близко к действительной оси.

В геофизических приложениях часто встречается ситуация, когда рассматриваемое включение достаточно велико по своим размерам $x = \frac{\omega R}{c} = \frac{2\pi R}{\lambda} \geq 1$ и не слишком сильно отличается своими упруго-плотностными свойствами от вмещающей среды (на 20–30% по скоростям и на 3–5% по плотности).

В этом случае амплитудные функции S_j можно получить простыми приближенными формулами.

Далее показано в работе [21], что слабо контрастная неоднородность характеризуется следующими равенствами:

$$S_1(\theta, x_p) \approx S_2(\theta, x_s) \approx S_3(\theta, x_s) \approx S(\theta, x_q),$$

и получено выражение для $S(\theta, x_q)$ в виде суммы двух слагаемых:

$$S(\theta, x_q) = S_d(\theta, x_q) + S_\tau(\theta, x_q).$$

Первое слагаемое даёт известную картину дифракции Фраунгофера, а второе обусловлено лучами, прошедшими сквозь включение.

Физически это вполне оправданно, поскольку в силу слабой контрастности неоднородности лучами, претерпевающими отражения внутри сферы, можно пренебречь.

Отметим, однако, что если дифракционное слагаемое

$$S_d(\theta, x_q) = x_q^2 \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \frac{I_1(\theta x_q)}{\theta x_q}, \quad (21)$$

вполне удовлетворяет требованиям геофизической точности [22], то второй слагаемое

$$S_\tau(\theta, x_q) = -2ix_q \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \frac{\alpha_q - 1}{4(\alpha_q - 1)^2 + \theta^2} \exp \left[-ix_q \sqrt{4(\alpha_q - 1)^2 + \theta^2} \right] \quad (22)$$

где $\alpha_q = \frac{c_{q2}}{c_{q1}}$, справедливо, вообще говоря, только в малоугловом приближении ($\theta \approx 0$) и имеет весьма приближённый характер.

Используя слабоконтрастное приближение, коэффициенты рассеяния можно представить в следующем виде:

$$A_n \approx b_n \approx c_n \approx \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon_\alpha}} \right) \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_q &= x [(\alpha \sin d_1 - \sin d) + (d - d_1) \cos d], \\ \cos d &= \frac{\gamma}{x}, \quad \cos d_1 = \frac{\gamma}{\alpha x}, \quad \left(\gamma = n + \frac{1}{2} \leq x \right). \end{aligned}$$

Подставляя (23) в (22) и заменяя функции Лежандра их асимптотическими представлениями, получим [23]:

$$S(\theta, x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \sum \sqrt{\gamma} \cos \left(\gamma \theta - \frac{\pi}{4} \right) [1 - \exp(-2i\varepsilon_\alpha)]. \quad (24)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках, выражаемое единицей, дает дифракционную картину Фраунгофера. Для того чтобы оценить второе слагаемое, заменим сумму интегралом, который представим в следующем виде:

$$S_\tau(\theta, x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \frac{1}{2} \left[\int_0^x \sqrt{\gamma} e^{i\varphi_+(\gamma)} d\gamma + \int_0^x \sqrt{\gamma} e^{i\varphi_-(\gamma)} d\gamma \right], \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= 2x [\sin d - \alpha \sin d_1 + (d_1 - d) \cos d] + \left(\gamma \theta - \frac{\pi}{4} \right), \\ \varphi_- &= 2x [\sin d - \alpha \sin d_1 + (d_1 - d) \cos d] - \left(\gamma \theta - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Вычислим интегралы асимптотически по формулам метода стационарной фазы [24]:

$$\int \sqrt{\gamma} e^{i\varphi(\gamma)} d\gamma \approx \sqrt{\frac{2\pi\gamma_0}{|\varphi''(\gamma_0)|}} \exp \left\{ i \left[\varphi(\gamma_0) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \varphi''(\gamma_0) \right] \right\}, \quad (26)$$

Найдя сначала точку γ_0 , в окрестности которой фаза стационарна, имеем для неё условие $\varphi'_\pm(\gamma_0) = 0$, то есть $2(d_1 - d) \pm \theta = 0$. Для получения приближенного рассеяния поля используем методику, разработанную Дубровским В.А. и Марочником В.С. [25].

Тогда выражение для рассеянного поля смещений поперечного импульса выражается через вычисленные интегралы следующим образом:

$$\begin{aligned} U_r &\approx 0, \\ U_\theta &= \frac{R}{r} \cos \varphi \left[\sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} I_1^s - I_2^s \right], \\ U_\varphi &= -\frac{R}{r} \sin \varphi \left[\sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} I_1^s - I_2^s \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь

$$I_1^s = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} x_s g(x_s) \frac{J_1(\theta x_s)}{\theta x_s} \exp(i\tau_s'' x_s) dx_s. \quad (28)$$

В случае $\tau_s'' \geq 0$ его можно вычислить с помощью теории вычетов, так как условия леммы Жордана выполнены. В итоге получим

$$I_1^s = \operatorname{Re} \left\{ e^{i\tau_s'' \nu} \left[iJ_0(\theta\nu) - \frac{J_1(\theta\nu)}{\theta\nu} (\tau_s'' \nu + i) \right] \right\}, \quad (\tau_s'' \geq 0), \quad \nu = b + ia.$$

Если $\tau_s'' < 0$, то воспользуемся интегральным представлением [24]:

$$\frac{J_1(\theta x)}{\theta x} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \exp(i\theta x w) \sqrt{1 - w^2} dw,$$

Подставив последнюю формулу в (26) и поменяв порядок интегрирования, вычислим внутренний интеграл по теории вычетов:

$$I_1^s = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \exp(-\alpha y) \sqrt{1-w^2} [(ay-1) \sin(by) - by \cos(by)] H(y) dw,$$

где $y = \tau_s'' + \theta w$. В случае рассеяния продольного импульса имеем

$$U_\theta \approx 0,$$

$$U_r \approx \frac{R}{r} \left[-\frac{i}{2\pi} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} g(z_s) z_s \frac{j_1(\theta z_s)}{\theta z_s} e^{i\tau_s'' z_s} dz_s - D_s (\tau_s'' - 2\delta_s) e^{-2\delta_s} \right]. \quad (29)$$

где интегралы вычисляются численно методом Ромберга.

Численные результаты получены на основе комплексного программного обеспечения MATLAB. Корни (полюсы) трансцендентного уравнения находятся с помощью метода Мюллера.

2. Результаты и анализ

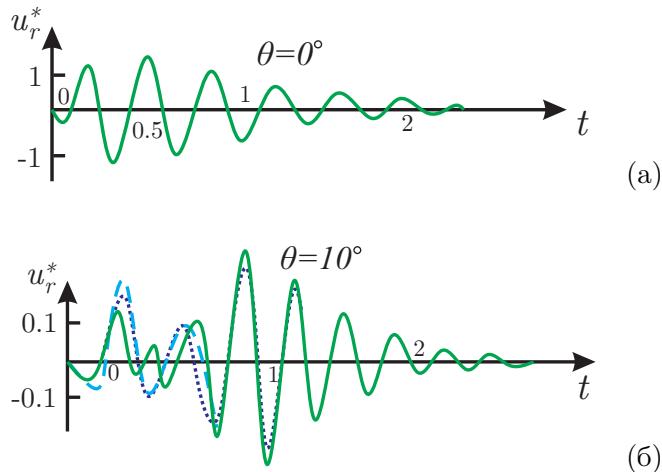
При вычислениях приняты следующие значения параметров:

$$\alpha_p = \frac{c_{p1}}{c_{p2}} = 0.91, \quad \alpha_s = \frac{c_{s1}}{c_{s2}} = 0.75, \quad \gamma = \frac{c_{p1}}{c_{s2}} = 0.72, \quad \eta = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 0.94.$$

На рис. 1 показаны результаты расчётов рассеянной радиальной компоненты смещения u_r по разработанным методикам для случая рассеяния импульса продольной волны. Результаты сравнения при $\theta = 10^\circ$ с точными данными [25] совпадают с разницами до 9%.

В соответствии с заданным параметром α_p определено, что приближенными формулами можно пользоваться в диапазоне углов рассеяния

$$0 \leq \theta \leq 68^\circ.$$



Следует, кроме того, указать, что при $\theta = 0^\circ$ момент вступления рассеянной волны оказывается несколько «размытым». Это происходит вследствие эффекта Гиббса и для его устранения необходимо, вообще говоря, сглаживать передний фронт падающего импульса.

Проведённые численные расчёты показали, что для решения задачи нестационарного рассеяния волн на слабоконтрастной неоднородности вполне можно использовать сравнительно простые приближённые формулы.

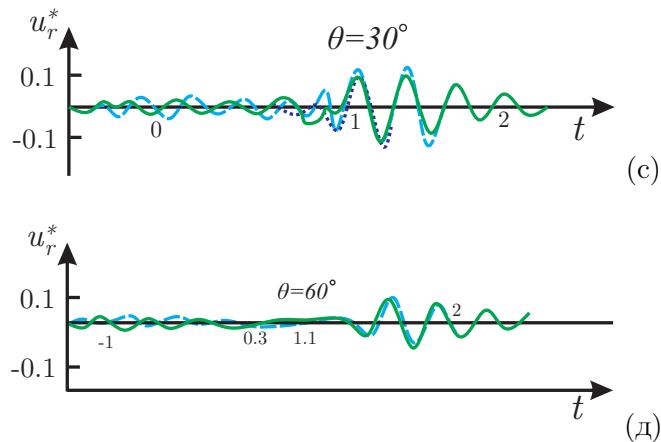


Рис. 1. Зависимость рассеяния спешенной компоненты от времени при падении продольного импульса

Fig. 1. Time dependence of the scattering of the shear component under the incidence of a longitudinal pulse

Заключение

Разработана методика расчёта рассеяния волн в сферическом теле при падении продольных или поперечных волн. Также разработана методика и алгоритм для вычисления специальных функций Бесселя и Ханкеля с комплексным аргументом. Полученные результаты по разработанной методике сравниваются с известными методиками.

Установлено, что предложенными приближенными формулами (Дубровского В.А. и Марочника В.С.) можно пользоваться в диапазоне углов рассеяния $0 \leq \theta \leq 68^\circ$.

Список литературы

1. V. Formalev, E. Kartashov, and S. Kolesnik, “Wave heat transfer in anisotropic half-space under the action of a point exponential-type heat source based on the wave parabolic-type equation,” *J. Eng. Phys. Thermophys.*, vol. 95, pp. 366–373, 2022.
2. V. Formalev, B. Garibyan, and S. Kolesnik, “Mathematical simulation of thermal shock wave dynamics in nonlinear local non-equilibrium media,” *Vestn. Bauman Tekh. Univ., Ser. Estestv. Nauk*, vol. 4, pp. 80–94, 2022.
3. V. Formalev and S. Kolesnik, “Wave heat transfer in heat-shielding materials with an exponential-like nonlinear dependence of thermal conductivity on temperature,” *High Temp.*, vol. 60, pp. 731–734, 2022.
4. O. Tushavina, G. Kriven, and T. Hein, “Study of thermophysical properties of polymer materials enhanced by nanosized particles,” *Int. J. Circuits, Syst. Signal Process.*, vol. 15, pp. 1436–1442, 2021.
5. M. Sha, Y. Utkin, O. Tushavina, and P. Pronina, “Experimental studies of heat and mass transfer from tip models made of carbon-carbon composite material (CCCM) under conditions of high-intensity thermal load,” *Per. Tche Quim.*, vol. 17, no. 35, pp. 988–997, 2020.
6. B. Garnier and A. Boudenne, “Use of hollow metallic particles for the thermal conductivity enhancement and lightening of filled polymer,” *Polym. Degrad. Stab.*, vol. 127, pp. 113–118, 2016.
7. S. Mohammad, M. Merkel, and A. Ochsner, “Influence of the joint shape on the uniaxial mechanical properties of non-homogeneous bonded perforated hollow sphere structures,” *Comput. Mater. Sci.*, vol. 58, pp. 183–187, 2012.

8. I. I. Safarov, M. H. Teshaev, & S. I. Juraev, “Vibrations of viscoelastic plates with attached concentrated masses,” *Lobachevskii J. Math.*, vol. 45, pp. 1729–1737, 2024.
<https://doi.org/10.1134/S1995080224601474>
9. B. Sh. Usmonov, I. I. Safarov, and M. H. Teshaev, “Нелинейный флаттер переходного процесса наследственно-деформируемых систем при сверхзвуковом режиме полета,” *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika*, no. 88, pp. 124–137, 2024. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/koha:001144435>
10. I. Safarov, B. Nuriddinov, and Z. Nuriddinov, “Propagation of own waves in a viscoelastic cylindrical panel of variable thickness,” *Lobachevskii J. Math.*, vol. 45, pp. 1246–1253, 2024.
<https://doi.org/10.1134/S1995080224600663>
11. I. Safarov and M. Teshaev, “Control of resonant oscillations of viscoelastic systems,” *Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 51, no. 1, pp. 1–12, 2024.
12. I. I. Safarov and M. Kh. Teshaev, “Unsteady motions of spherical shells in a viscoelastic medium,” *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika*, 2023, no. 83, pp. 166–179.
13. M. K. Teshaev, I. I. Safarov, N. U. Kuldashev, M. R. Ishmamatov, and T. R. Ruziev, “On the distribution of free waves on the surface of a viscoelastic cylindrical cavity,” *Journal of Vibration Engineering and Technologies*, vol. 8, pp. 579–585, 2020.
14. I. I. Safarov and M. H. Teshaev, “Динамическое гашение колебаний твёрдого тела, установленного на вязкоупругих опорах,” *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika*, vol. 31, no. 1, pp. 63–73, 2023.
15. A. A. Adamov, V. P. Matveenko, N. A. Trufanov, and I. N. Shardakov, “Методы прикладной вязкоупругости,” Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 c.
16. A. Yu. Fedorov, V. P. Matveenko, and I. N. Shardakov, “Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials,” *International Journal of Civil Engineering and Technology*, vol. 9, no. 8, pp. 1062–1075, 2018.
17. A. A. Bykov, V. P. Matveenko, I. N. Shardakov, and A. P. Shestakov, “Shock wave method for monitoring crack repair processes in reinforced concrete structures,” *Mechanics of Solids*, vol. 52, no. 4, pp. 378–383, 2017.
18. K. Karimov, A. Akhmedov, and A. Karimova, “Development of mathematical model, classification, and structures of controlled friction and vibration mechanisms,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 2612, 030014, 2023.
<https://doi.org/10.1063/5.0116891>
19. I. I. Safarov, “Numerical modeled static stress-deformed state of parallel pipes in deformable environment,” *Advances in Science and Technology Research Journal*, vol. 12, no. 3, pp. 114–125. DOI: 10.12913/22998624/92177
20. M. Kh. Teshaev, I. M. Karimov, A. O. Umarov, and S. I. Zhuraev, “Diffraction of harmonic shear waves on an elliptical cavity located in a viscoelastic medium,” *Russian Mathematics*, vol. 67, no. 8, pp. 44–48, 2023.
21. T. V. Popova, A. E. Mayer, and K. V. Khishchenko, “Evolution of shock compression pulses in polymethylmethacrylate and aluminum,” *Journal of Applied Physics*, vol. 123, 235902, 2018.
22. T. V. Popova, A. E. Mayer, and K. V. Khishchenko, “Numerical investigations of shock wave propagation in polymethylmethacrylate,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 653, 012045, 2015.
23. F. Bouak and J. Lemay, “Use of the wake of a small cylinder to control unsteady loads on a circular cylinder,” *J. Visualization*, vol. 4, pp. 61–72, 2001.
<https://doi.org/10.1007/BF03182456>

24. M. Bhagyashkar, K. Rao, and R. Rao, “Studies on rheological and physical properties of metallic and non-metallic particulate filled epoxy composites,” *J. Reinforced Plastics and Composites*, vol. 28, pp. 2869–2878, 2009.
25. V. A. Dubrovsky and V. S. Morozhnik, “Rasseyanie uprugikh voln na krupnomasshtabnom slabokontrastnom sfericheskom vklyuchenii,” *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli*, no. 4, pp. 32–41, 1986.

References

1. V. Formalev, E. Kartashov, and S. Kolesnik, “Wave heat transfer in anisotropic half-space under the action of a point exponential-type heat source based on the wave parabolic-type equation,” *J. Eng. Phys. Thermophys.*, vol. 95, pp. 366–373, 2022.
2. V. Formalev, B. Garibyan, and S. Kolesnik, “Mathematical simulation of thermal shock wave dynamics in nonlinear local non-equilibrium media,” *Vestn. Bauman Tekh. Univ., Ser. Estestv. Nauk*, vol. 4, pp. 80–94, 2022.
3. V. Formalev and S. Kolesnik, “Wave heat transfer in heat-shielding materials with an exponential-like nonlinear dependence of thermal conductivity on temperature,” *High Temp.*, vol. 60, pp. 731–734, 2022.
4. O. Tushavina, G. Kriven, and T. Hein, “Study of thermophysical properties of polymer materials enhanced by nanosized particles,” *Int. J. Circuits, Syst. Signal Process.*, vol. 15, pp. 1436–1442, 2021.
5. M. Sha, Y. Utkin, O. Tushavina, and P. Pronina, “Experimental studies of heat and mass transfer from tip models made of carbon-carbon composite material (CCCM) under conditions of high-intensity thermal load,” *Per. Tche Quim.*, vol. 17, no. 35, pp. 988–997, 2020.
6. B. Garnier and A. Boudenne, “Use of hollow metallic particles for the thermal conductivity enhancement and lightening of filled polymer,” *Polym. Degrad. Stab.*, vol. 127, pp. 113–118, 2016.
7. S. Mohammad, M. Merkel, and A. Ochsner, “Influence of the joint shape on the uniaxial mechanical properties of non-homogeneous bonded perforated hollow sphere structures,” *Comput. Mater. Sci.*, vol. 58, pp. 183–187, 2012.
8. I. I. Safarov, M. H. Teshaev, & S. I. Juraev, “Vibrations of viscoelastic plates with attached concentrated masses,” *Lobachevskii J. Math.*, vol. 45, pp. 1729–1737, 2024. <https://doi.org/10.1134/S1995080224601474>
9. B. Sh. Usmonov, I. I. Safarov, and M. H. Teshaev, “Нелинейный флаттер переходного процесса наследственно-деформируемых систем при сверхзвуковом режиме полета,” *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika*, no. 88, pp. 124–137, 2024. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/koha:001144435>
10. I. Safarov, B. Nuriddinov, and Z. Nuriddinov, “Propagation of own waves in a viscoelastic cylindrical panel of variable thickness,” *Lobachevskii J. Math.*, vol. 45, pp. 1246–1253, 2024. <https://doi.org/10.1134/S1995080224600663>
11. I. Safarov and M. Teshaev, “Control of resonant oscillations of viscoelastic systems,” *Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 51, no. 1, pp. 1–12, 2024.
12. I. I. Safarov and M. Kh. Teshaev, “Unsteady motions of spherical shells in a viscoelastic medium,” *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika*, 2023, no. 83, pp. 166–179.
13. M. K. Teshaev, I. I. Safarov, N. U. Kuldashov, M. R. Ishmamatov, and T. R. Ruziev, “On the distribution of free waves on the surface of a viscoelastic cylindrical cavity,” *Journal of Vibration Engineering and Technologies*, vol. 8, pp. 579–585, 2020.

14. I. I. Safarov and M. H. Teshaev, “Динамическое гашение колебаний твёрдого тела, установленного на вязкоупругих опорах,” *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika*, vol. 31, no. 1, pp. 63–73, 2023.
15. A. A. Adamov, V. P. Matveenko, N. A. Trufanov, and I. N. Shardakov, “Методы прикладной вязкоупругости,” Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
16. A. Yu. Fedorov, V. P. Matveenko, and I. N. Shardakov, “Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials,” *International Journal of Civil Engineering and Technology*, vol. 9, no. 8, pp. 1062–1075, 2018.
17. A. A. Bykov, V. P. Matveenko, I. N. Shardakov, and A. P. Shestakov, “Shock wave method for monitoring crack repair processes in reinforced concrete structures,” *Mechanics of Solids*, vol. 52, no. 4, pp. 378–383, 2017.
18. K. Karimov, A. Akhmedov, and A. Karimova, “Development of mathematical model, classification, and structures of controlled friction and vibration mechanisms,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 2612, 030014, 2023.
<https://doi.org/10.1063/5.0116891>
19. I. I. Safarov, “Numerical modeled static stress-deformed state of parallel pipes in deformable environment,” *Advances in Science and Technology Research Journal*, vol. 12, no. 3, pp. 114–125. DOI: 10.12913/22998624/92177
20. M. Kh. Teshaev, I. M. Karimov, A. O. Umarov, and S. I. Zhuraev, “Diffraction of harmonic shear waves on an elliptical cavity located in a viscoelastic medium,” *Russian Mathematics*, vol. 67, no. 8, pp. 44–48, 2023.
21. T. V. Popova, A. E. Mayer, and K. V. Khishchenko, “Evolution of shock compression pulses in polymethylmethacrylate and aluminum,” *Journal of Applied Physics*, vol. 123, 235902, 2018.
22. T. V. Popova, A. E. Mayer, and K. V. Khishchenko, “Numerical investigations of shock wave propagation in polymethylmethacrylate,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 653, 012045, 2015.
23. F. Bouak and J. Lemay, “Use of the wake of a small cylinder to control unsteady loads on a circular cylinder,” *Journal of Visualization*, vol. 4, pp. 61–72, 2001. <https://doi.org/10.1007/BF03182456>
24. M. Bhagyashekar, K. Rao, and R. Rao, “Studies on rheological and physical properties of metallic and non-metallic particulate filled epoxy composites,” *J. Reinforced Plastics and Composites*, vol. 28, pp. 2869–2878, 2009.
25. V. A. Dubrovsky and V. S. Morozhnik, “Rasseyanie uprugikh voln na krupnomasshtabnom slabokontrastnom sfericheskom vklyuchenii,” *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli*, no. 4, pp. 32–41, 1986.

Ботир Усмонов Шукуриллаевич — родился 24 марта 1968 года в Самаркандской области. Окончил Казанский технический университет (1985-1993). Работал в Ташкентском государственном техническом и авиационном институтах. Проходил магистратуру в Индии (Университет Андра) и Германии (ТУ Гамбург-Харбург). Сотрудничал с компанией Daimler-Benz в Центральной Азии. Занимал руководящие должности и в Ташкентском авиационном институте. Был профессором в университете Конкук (Южная Корея). Работал в филиале МГУ в Ташкенте и Аппарате Президента РУз. Заместитель министра высшего образования (2013–2016), затем —проректор ТАТУ. С 2020 года — ректор Ташкентского химико-технологического института.



Ташкент, Узбекистан, 100011, улица Навои, 32
Ташкентский химико-технологический институт, Узбекистан
E-mail: botir2468@gmail.com
ORCID: 0000-0002-4654-9782

Мухитдинов Рамазон Тухтаевич — кандидат физико-математических наук, доцент. В 1983 году окончил математический факультет Национального университета Узбекистана по специальности «Математика». В 1995 году защитил кандидатскую диссертацию. Р. Т. Мухитдиновым опубликовано более 20 научных статей в отечественных и зарубежных научных журналах, а также более 30 материалов в сборниках международных и республиканских научных конференций. С 2022 года работает в должности доцента кафедры «Высшая математика» Ташкентского химико-технологического института.



Ташкент, Узбекистан, 100011, улица Навои, 32
Ташкентский химико-технологический институт, Узбекистан
E-mail: ramazonmuxitdinov@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4235-140X

Элибоев Нурали Ражабалиевич — родился 25 апреля 1990 года в Нуротинском районе Навоийской области Узбекистана. В 2016 году окончил факультет механики и математики Национального университета Узбекистана по направлению «Математика». С 2016 года был принят на должность ассистента преподавателя кафедры «Высшая математика» Ташкентского химико-технологического института. С 2021 года работает на должности старшего преподавателя. Научные интересы — механика деформируемых твёрдых тел. Является автором научных статей по указанным направлениям.



Ташкент, Узбекистан, 100011, улица Навои, 32
Ташкентский химико-технологический институт, Узбекистан
E-mail: nurali_e@mail.ru
ORCID: 0009-0009-2429-9514



Ахмедов Насридин Баходирович — родился 19 апреля 1984 года в Навоийской области Республики Узбекистан. В 2007 году окончил факультет физики и математики Навоийского государственного педагогического института по направлению «Математика и информатика». С 2025 года работает в должности старшего преподавателя Университета Алфрагануса. Научные интересы — механика деформируемых твёрдых тел. Является автором научных статей по указанным направлениям.

210100, Республика Узбекистан, г. Навои, улица Навбахор, дом 30.
Навоийский государственный университет горного дела и технологий, Узбекистан
E-mail: nasriddinaxmedov@gmail.com
ORCID: 0009-0003-1780-7476