

## Устойчивость движения и дрейф твердого тела в неконтактном индукционном электромагнитном подвесе

П. П. Удалов<sup>1</sup>✉, А. В. Лукин<sup>1</sup>, И. А. Попов<sup>1</sup>, Л. В. Штукин<sup>1</sup>, К. В. Полеткин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ФГАОУ ВО "Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия

<sup>2</sup>Технологический университет Хэфэя, Китай

E-mail: ✉udalov\_pp@spbstu.ru, lukin\_av@spbstu.ru, popov\_ia@spbstu.ru, shtukin\_lv@spbstu.ru,  
022810003@hfut.edu.cn

Поступила в редакцию 04.06.2025, принята к публикации 27.11.2025,  
опубликована онлайн 27.11.2025

**Аннотация.** Цель настоящей работы - исследование нелинейной динамики и устойчивости движения проводящего тонкого кольца в электромагнитном поле двух круговых катушек индуктивности. **Методы.** Анализ выполняется с применением асимптотических методов нелинейной механики. С помощью численных методов теории бифуркаций исследуется среднее по периоду быстро осциллирующего поля положение левитирующего тела в пространстве ключевых параметров подвеса. **Результаты.** В предположении о медленной эволюции среднего положения левитирующего тела определены условия на возникновение и параметры дрейфа. В уточненной асимптотической постановке исследована устойчивость режима левитации. **Заключение.** Показано, что учет возможности медленной эволюции среднего положения левитирующего тела приводит к формулировке условия на устойчивость, связанного с соотношением между диссипацией механической и электрической природы.

**Ключевые слова:** Индукционный подвес, электромагнитный подвес, электромагнитная индукция, левитация, нелинейная динамика, устойчивость колебаний, метод многих масштабов.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 25-21-00402, <https://rscf.ru/project/25-21-00402/>

**Для цитирования:** Удалов П. П., Лукин А. В., Попов И. А., Штукин Л. В., Полеткин К. В. Устойчивость движения и дрейф твердого тела в неконтактном индукционном электромагнитном подвесе // Известия вузов. ПНД. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003203. EDN: OEJBDW

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Stability of motion and drift of a rigid body in a non-contact inductive electromagnetic suspension

P. P. Udalov<sup>1</sup>✉, A. V. Lukin<sup>1</sup>, I. A. Popov<sup>1</sup>, L. V. Shtukin<sup>1</sup>, K. V. Poletkin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University ,Russia

<sup>2</sup>Hefei University of Technology, China

E-mail: ✉udalov\_pp@spbstu.ru, lukin\_av@spbstu.ru, popov\_ia@spbstu.ru, shtukin\_lv@spbstu.ru,  
022810003@hfut.edu.cn

Received 04.06.2025, accepted 27.11.2025, available online 27.11.2025

### Abstract.

*Objective* of this work is to study the nonlinear dynamics and stability of the motion of a conducting thin ring in the electromagnetic field of two circular inductors. *Methods*. The analysis is performed using asymptotic methods of nonlinear mechanics. Numerical methods of bifurcation theory are used to study the average position of a levitating body in the space of key suspension parameters over the period of a rapidly oscillating field. *Results*. Assuming a slow evolution of the average position of a levitating body, the conditions for the occurrence and parameters of drift are determined. The stability of the levitation regime is investigated in a refined asymptotic formulation. *Conclusion*. It is shown that taking into account the possibility of slow evolution of the average position of a levitating body leads to the formulation of a stability condition related to the relationship between the dissipation of mechanical and electrical nature.

**Keywords:** Induction suspension, electromagnetic suspension, electromagnetic induction, levitation, nonlinear dynamics, stability of oscillations, method of multiple scales.

**Acknowledgements.** The work was supported by the Russian Science Foundation, grant no. 25-21-00402, <https://rscf.ru/project/25-21-00402/>

**For citation:** Udalov P. P., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V., Poletkin K. V.. Stability of motion and drift of a rigid body in a non-contact inductive electromagnetic suspension. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003203

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Введение

Электромагнитный подвес - элемент навигационных, транспортных и электрических систем [1], работающий на основе принципа электромагнитной левитации (ЭЛ) и уравновешивающий силу тяжести проводящего твердого тела (ТТ) пондеромоторными силами [2]-[6]. Схема работы устройств, основанных на принципе ЭЛ, позволяет достигать высокой надежности [7], стабильности [8], увеличенного срока безотказной работы [9], [10]. Устройства на основе принципа ЭЛ нашли применение в навигационном приборостроении (микромеханические акселерометры [11], гироскопы [12] - [15], гравиметры/сейсмические датчики [16]), микро-оптоэлектромеханических системах (сканирующие микрозеркала) [11], [17], [18], сортировочных манипуляторах [19], поездах на магнитной подушке [20], [21], автомобильных подвесках [22], системах беспроводной передачи энергии [23], устройствах для измерения магнитных характеристик жидкостей [24] и т.д.

При разработке неконтактного подвеса как элемента микромеханических инерциальных сенсоров левитирующее ТТ, как правило, выполняется в форме простейшего геометрического объекта (диск [7], кольцо [25], прямоугольная пластина [26], сфера [27]) и изготавливается из проводящего материала. Переменное электромагнитное поле, создаваемое

системой катушек [28], [29], приводит к наведению в ТТ вихревых токов. Взаимодействие индукционных токов с токами катушек может при определенных условиях приводить к режиму устойчивой левитации ТТ [3]. В работе [12] показывается, что для обеспечения устойчивости состояния левитации по отношению к пространственным возмущениям необходимо вводить в конструкцию устройства дополнительную катушку индуктивности, запитываемую током в противофазе по отношению к току основной катушки меньшего радиуса.

Аналитическому, численному и экспериментальному исследованиям режимов работы и характеристик электромагнитного подвеса посвящено множество работ. В [7], [11], [13], [14], [30] обсуждаются вопросы разработки инерциального датчика с чувствительным элементом в форме диска на основе электромагнитного подвеса. В [31], [32] рассматривается экспериментальный прототип электромагнитного подвеса с объемными катушками индуктивности (соленоиды, спиральные катушки).

В работах [33], [34] исследуются аналитические модели акселерометра и гироскопа соответственно, основанных на принципе ЭЛ. В [35] исследуется линеаризованная модель колебаний левитирующего ТТ. В [7], [36] обсуждаются вопросы выбора оптимальных радиусов катушек индуктивности и ТТ в форме диска.

В [37], [38] выполнены аналитические расчеты собственных и взаимных индуктивностей проводов и контуров. В [39], [40] приводятся оценки сил и жесткостей чувствительного элемента индукционного подвеса. В [41] исследуются вопросы устойчивости индукционного подвеса. Работы [42], [43] посвящены экспериментальному и аналитическому исследованию эффекта схлопывания, заключающегося в прилипании ТТ электромагнитного подвеса к обкладкам конденсаторов при достижении на них критической величины напряжения как для дискообразной, так и для прямоугольной в плане инерционных масс. Численные исследования режимов работы и силовых характеристик устройства электромагнитного подвеса на основе метода конечных элементов приведены в [44] - [48].

Аналитические подходы к исследованию динамики электромагнитного подвеса ТТ [33], [34], [42], [43] основаны на ключевом предположении о постоянстве высоты левитации. Данное допущение позволяет линеаризовать систему в окрестности положения равновесия и получить условия устойчивости для консервативной модели. Однако, как показывает численный анализ полной нелинейной модели, это предположение является ограниченно применимым, существует область неустойчивости подвеса для малых высот левитации. С целью учета существенной особенности движения тела в подвесе (в реальности осредненная по быстро-осциллирующему полю высота левитации является медленной функцией времени) в настоящей работе развивается подход с явным моделированием зависимости высоты левитации от медленного времени, что и составляет основную научную новизну исследования.

Основная цель настоящей работы заключается в аналитическом исследовании динамики ТТ, выполненного в форме кольца, в поле двух круговых катушек индуктивности в предположении о том, что высота левитации является медленно меняющейся функцией времени, т.е. дрейфующей вблизи своего среднего положения.

Работа построена следующим образом: в п.1 приводится построение аналитической модели вертикальных колебаний ТТ, в п.2 проводится асимптотический анализ динамики исходной системы с применением метода многих масштабов, в п.3 приведены результаты исследования, в п.4 даны общие выводы по работе.

## 1. Математическая модель

Рассматривается модель вертикальных движений ТТ неконтактного индукционного подвеса, выполненного в форме тонкого недеформируемого кольца прямоугольного сечения и находящегося в переменном электромагнитном поле двух круговых катушек индуктивности. Схематическое изображение рассматриваемого устройства представлено на рис. 1. Трехмерная модель возможной конструкции электромагнитного подвеса приведена рис. 2.

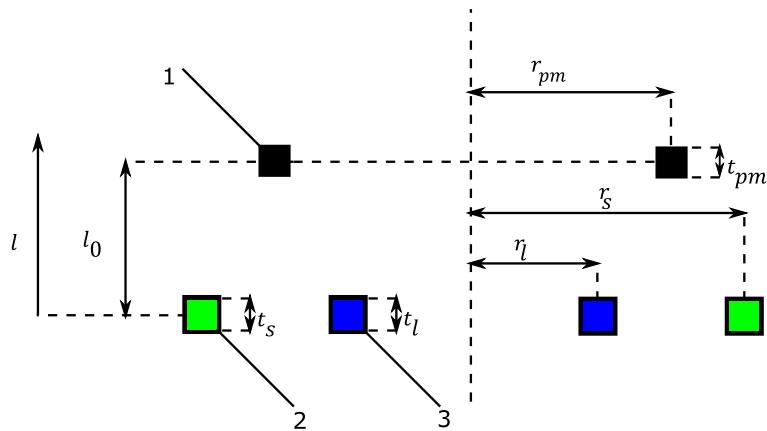


Рис. 1. Схематическое изображение индукционного бесконтактного подвеса; 1 - ТТ, 2 и 3 - стабилизирующая и левитационная катушка соответственно

Fig. 1. Schematic view of inductive noncontact suspension; 1 - rigid body (RB), 2 and 3 - stabilizing and levitation coils, respectively.

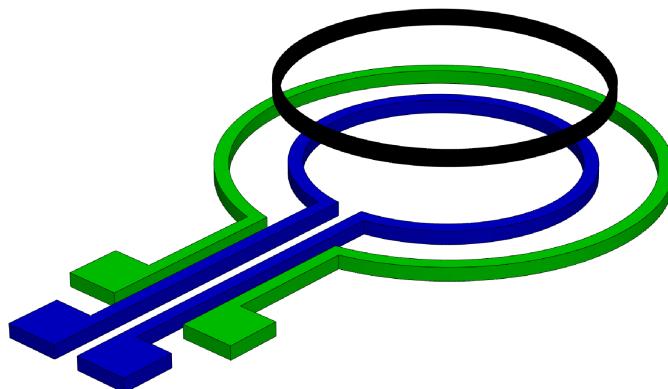


Рис. 2. Трехмерная модель индукционного бесконтактного подвеса

Fig. 2. Three-dimensional model of inductive noncontact suspension.

При подаче переменного тока  $i_l = I_l \sin \omega t$  ( $I_l$  и  $\omega$  - амплитуда и частота тока  $i_l$ ) на левитационную катушку индуктивности среднего радиуса  $r_l$  толщины  $t_l$  (на рис. 1 она обозначена под номером 3) возникает переменное электромагнитное поле, взаимодействующее с полем вихревых токов в объеме ТТ, выполненного в форме кольца квадратного сечения среднего радиуса  $r_{pm}$  и толщиной  $t_{pm}$  (на рис. 1 оно обозначено под номером 1). Сила Ампера между током  $i_l$  и индуцированным током  $i_{pm}$  может при определенных условиях приводить к левитации ТТ (компенсировать силу тяжести и обеспечивать устойчивость движения). Стабилизирующая катушка, по которой течет ток  $i_s = I_s \sin \omega t$  ( $I_s$  и  $\omega$  - амплитуда

и частота тока  $i_s$ ), обозначенная на рис. 1 под номером 2, препятствует боковым и угловым смещениям ТТ и обеспечивает пространственную устойчивость. Результирующее электромагнитное поле представляет собой суперпозицию электромагнитных полей левитационной и стабилизирующей катушек. Параметр  $I_s$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения:  $I_s/I_l = 1$  отвечает случаю синфазности токов  $i_l$  и  $i_s$ ,  $I_s/I_l = -1$  - противофазности,  $I_s/I_l = 0$  - отсутствие тока в стабилизирующей катушке. Изменение величины  $I_s$  обозначает собой изменение как амплитуды, так и направления тока  $i_s$ .

Система уравнений колебаний ТТ в безразмерном виде запишется следующим образом [49]:

$$\xi_l'' + \varepsilon^2 \lambda \xi_l' = \varepsilon^2 \left( \alpha m^{\xi_l} j_{pm} \sin \tau - 1 \right), \quad j_{pm}' + r j_{pm} = -m \cos \tau - m^{\xi_l} \xi_l' \sin \tau, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_l &= \frac{l}{r_l}, \xi_{l0} = \frac{l_0}{r_l}, j_s = \frac{I_s}{I_l}, j_{pm} = \frac{i_{pm}}{I_l}, \tau = \omega t, \varepsilon^2 = \frac{g}{\omega^2 r_l}, \alpha = \frac{L_{pm} I_l^2}{\hat{m} g r_l}, r = \frac{R_{pm}}{L_{pm} \omega}, \\ \lambda &= \frac{\lambda_l}{\hat{m} \omega}, \quad b_l = \frac{r_{pm}}{r_l}, \quad b_s = \frac{r_{pm}}{r_s}, \quad \hat{\kappa}_l^2 = \frac{4b_l}{(1+b_l)^2 + \xi_l^2}, \quad \hat{\kappa}_s^2 = \frac{4b_s}{(1+b_s)^2 + (\frac{b_s}{b_l})^2 \xi_l^2}, \\ m_{l,s|pm} &= \frac{M_{l,s|pm}}{L_{pm}} = \frac{w_{l,s}}{\hat{L}} \frac{\Phi(\hat{\kappa}_{l,s})}{\sqrt{b_{l,s}}}, \quad \Phi(\hat{\kappa}_{l,s}) = \left( \frac{2}{\hat{\kappa}_{l,s}} - \hat{\kappa}_{l,s} \right) K(\hat{\kappa}_{l,s}^2) - \frac{2}{\hat{\kappa}_{l,s}} E(\hat{\kappa}_{l,s}^2), \quad (2) \\ m &= m_{l|pm} + j_s m_{s|pm}, \quad \hat{L} = \ln\left(\frac{8r_{pm}}{S_{pm}}\right) - 2, \\ S_{pm} &= \exp\left(\ln t_{pm} + \frac{1}{3}(\ln 2 + \pi) - \frac{25}{12}\right) \approx 0.44705 t_{pm}, \end{aligned}$$

$t$  - время,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\hat{m}$  - масса ТТ,  $R_{pm}$  - электрическое сопротивление ТТ,  $\lambda_l$  - коэффициент вязкой диссипации энергии в окружающую среду,  $L_{pm} = \mu_0 r_{pm} \hat{L}$  - собственная индуктивность ТТ,  $M_{l|pm}$  - величина взаимной индуктивности между левитационной катушкой и ТТ,  $M_{s|pm}$  - между стабилизирующей катушкой и ТТ,  $\hat{\kappa}_{l,s}$  - эллиптические модули;  $K(\hat{\kappa}_{l,s}^2)$ ,  $E(\hat{\kappa}_{l,s}^2)$  - полные эллиптические интегралы первого и второго родов соответственно,  $\hat{\kappa}_{l,s}$  - эллиптические модули,  $(\ )' = \frac{\partial}{\partial \tau}$ ,  $(\ )^{\xi_l} = \frac{\partial}{\partial \xi_l}$ ,  $l$  - вертикальные перемещения ТТ,  $l_0$  - характерный масштаб вертикального перемещения, в дальнейшем принятый равным координате среднего положения ТТ;  $w_{l,s}$  - количество витков в левитационной и стабилизирующей катушках;  $S_{pm}$  - среднее геометрическое сечение ТТ [37], [38].

Отметим, что правые части системы (1) нелинейно зависят от искомых переменных  $\xi_l$  и  $j_{pm}$  вследствие наличия в них членов, содержащих взаимную индуктивность и её производные.

При выборе рабочего режима подвеса стараются обеспечить разделение быстрых электрических и медленных механических движений, тогда параметр  $\varepsilon$ , выражющий отношение квадратов характерных частот механической и электрической природы, оказывается малым. Эта особенность основной системы уравнений позволяет применять для построения приближенного решения и анализа устойчивости асимптотические методы нелинейной механики.

## 2. Построение асимптотического решения

Для нахождения равномерно пригодного решения системы (1) применим метод многих масштабов [50]. Для этого представим искомые функции в виде следующих разложений по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
j_{pm}(\varepsilon, T_0, T_1, T_2) &= j_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon j_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 j_2(T_0, T_1, T_2), \\
\xi_l(\varepsilon, T_0, T_1, T_2) &= \xi_{l0}(T_1, T_2) + \varepsilon \xi_{l1}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \xi_{l2}(T_0, T_1, T_2), \\
m(\varepsilon, T_0, T_1, T_2) &= m_0 + m_l(\xi_l - \xi_{l0}) + \frac{1}{2} m_{ll}(\xi_l - \xi_{l0})^2,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2, \quad \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2),$$

где  $T_n = \varepsilon^n \tau$ ,  $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ ,  $m_0 = m(\xi_{l0})$ ,  $m_l = m^{\xi_l}(\xi_{l0})$ ,  $m_{ll} = m^{\xi_l \xi_l}(\xi_{l0})$ .

Подставляя (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим

$\varepsilon^0$

$$D_0 j_0 + r j_0 = -m_l D_0 \xi_{l0} \sin T_0 - m_0 \cos T_0, \quad D_0^2 \xi_{l0} = 0, \tag{4}$$

$\varepsilon^1$

$$\begin{aligned}
D_0 j_1 + r j_1 &= -D_1 j_0 - \xi_{l1} m_l \cos T_0 - (m_l (D_0 \xi_{l1} + D_1 \xi_{l0}) + m_{ll} \xi_{l1} D_0 \xi_{l0}) \sin T_0, \\
D_0^2 \xi_{l1} &= -2D_0 D_1 \xi_{l0},
\end{aligned} \tag{5}$$

$\varepsilon^2$

$$\begin{aligned}
D_0 j_2 + r j_2 &= -D_1 j_1 - D_2 j_0 - \left( m_l \xi_{l2} + \frac{m_{ll} \xi_{l1}^2}{2} \right) \cos T_0 - \\
&- ((D_0 \xi_{l2} + D_1 \xi_{l1} + D_2 \xi_{l0}) m_l + (\xi_{l2} D_0 \xi_{l0} + (D_0 \xi_{l1} + D_1 \xi_{l0}) \xi_{l1}) m_{ll}) \sin T_0, \\
D_0^2 \xi_{l2} &= -2D_0 D_1 \xi_{l1} - 2D_0 D_2 \xi_{l0} - D_1^2 \xi_{l0} - \lambda D_0 \xi_{l0} + \alpha m_l j_0 \sin T_0 - 1,
\end{aligned} \tag{6}$$

$\varepsilon^3$

$$\begin{aligned}
D_0 j_3 + r j_3 &= -D_1 j_2 - D_2 j_1 - (m_l (D_2 \xi_{l1} + D_1 \xi_{l2} + D_0 \xi_{l3}) + \\
&+ m_{ll} \xi_{l1} (D_2 \xi_{l0} + D_1 \xi_{l1} + D_0 \xi_{l2}) + D_0 \xi_{l0} m_{ll} \xi_{l3} + \\
&+ m_{ll} \xi_{l2} (D_1 \xi_{l0} + D_0 \xi_{l1})) \sin T_0 - (m_l \xi_{l3} + m_{ll} \xi_{l1} \xi_{l2}) \cos T_0, \\
D_0^2 \xi_{l3} &= -2D_0 D_1 \xi_{l2} - 2D_0 D_2 \xi_{l1} - D_1^2 \xi_{l1} - 2D_1 D_2 \xi_{l0} - \\
&- \lambda (D_0 \xi_{l1} + D_1 \xi_{l0}) - \alpha (m_l j_1 + m_{ll} \xi_{l1} j_0) \sin T_0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Частное решение уравнения (4) может быть представлено как

$$\xi_{l0} = \xi_{l0}(T_1, T_2), \quad j_0 = -m_0 \cos \gamma \sin(T_0 + \gamma), \tag{8}$$

где  $\tan \gamma = r$ .

Отметим, что в выражение для  $\xi_{l0}$  не включен линейно растущий, заведомо секулярный член общего решения однородного уравнения; в выражение для тока  $j_0$  также не включено апериодическое переходное слагаемое в решении.

Решение системы (5) запишется как

$$\xi_{l1} = 0, \quad j_1 = \frac{1 - \cos 4\gamma}{4} m_l D_1 \xi_{l0} \cos T_0 + \frac{\sin 4\gamma}{4} m_l D_1 \xi_{l0} \sin T_0. \tag{9}$$

С учетом (9) второе уравнение в (6) запишется как

$$D_0^2 \xi_{l2} = -D_1^2 \xi_{l0} - \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{2} m_0 m_l - 1 + \frac{\alpha \cos \gamma}{2} m_0 m_l \cos(2T_0 + \gamma). \tag{10}$$

Для того, чтобы избавиться от секулярных слагаемых в уравнении для  $\xi_{l2}$ , положим

$$D_1^2 \xi_{l0} = -\frac{\alpha \cos^2 \gamma}{2} m_0(\xi_{l0}) m_l(\xi_{l0}) - 1, \tag{11}$$

откуда

$$\xi_{l2} = -\frac{\alpha \cos \gamma}{8} m_0 m_l \cos(2T_0 + \gamma). \quad (12)$$

Уравнение (11) определяет медленную эволюцию высоты левитации  $\xi_{l0}$ .

Умножим (11) на величину  $d\xi_{l0}$ , проинтегрируем перемещения  $\xi_{l0}$  в диапазоне  $[\xi_{st} \dots \xi_{l0}]$  и получим

$$dT_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\xi_{l0}}{\sqrt{h(T_2) + h_0 - \xi_{l0} - \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{4} m_0^2}}, \quad (13)$$

где  $h_0 = \xi_{st} + \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{4} m_0^2(\xi_{st})$ ,  $h(T_2)$  - константа интегрирования,  $\xi_{st}$  - положение равновесия динамической системы, определяемое из равенства нулю правой части равенства (11):

$$\frac{\alpha \cos^2 \gamma}{2} m_0(\xi_{st}) m_l(\xi_{st}) + 1 = 0. \quad (14)$$

Устойчивость положения равновесия  $\xi_{st}$  определяется из

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{l0}} \left( m_0(\xi_{st}) m_l(\xi_{st}) + \frac{2}{\alpha \cos^2 \gamma} \right) > 0 \Rightarrow m_l^2(\xi_{st}) + m_0(\xi_{st}) m_{ll}(\xi_{st}) > 0, \quad (15)$$

что совпадает с результатами, полученными при изучении малых колебаний электромагнитного подвеса вблизи среднего положения ТТ  $\xi_{st}$  [35].

В предположении о том, что ТТ колеблется вблизи своего среднего положения  $\xi_{st}$  разложим радикал в ряд Тейлора и перепишем (13) как

$$dT_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dy}{\sqrt{h(T_2) - by^2}}, \quad (16)$$

где  $y = \xi_{l0} - \xi_{st}$ ,  $b = \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{4} (m_0(\xi_{st}) m_{ll}(\xi_{st}) + m_l^2(\xi_{st}))$ .

Уравнение (16) дает решение в квадратурах для колебаний эквивалентного линейного осциллятора. После интегрирования левой и правой частей (16) получим

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin \sqrt{\frac{b}{h(T_2)}} (\xi_{l0} - \xi_{st}), \quad (17)$$

откуда

$$\xi_{l0} = \xi_{st} + \sqrt{\frac{h(T_2)}{b}} \sin \sqrt{2b} T_1. \quad (18)$$

Решение (18) указывает на факт медленных осцилляций (дрейфа) высоты левитации  $\xi_{l0}$  вблизи положения равновесия  $\xi_{st}$  с амплитудой  $\sqrt{\frac{h}{b}}$  и частотой  $\sqrt{2b}$ .

Подставляя (8), (9), (12) во второе уравнение в (7), получим

$$D_0^2 \xi_{l3} = -2D_1 D_2 \xi_{l0} - \left( \lambda - \frac{\alpha \sin 4\gamma}{8} m_l^2 \right) D_1 \xi_{l0} + \text{н.с.ч.}, \quad (19)$$

где н.с.ч. - несекулярные члены [50].

Условие на отсутствие секулярных членов в (19) приводит к соотношению

$$D_1 D_2 \xi_{l0} = -\frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{\alpha \sin 4\gamma}{8} m_l^2 \right) D_1 \xi_{l0}. \quad (20)$$

После подстановки (18) в (19) получим

$$D_2\sqrt{h} = -\frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{\alpha \sin 4\gamma}{8} m_l^2 \right) \sqrt{h}. \quad (21)$$

Уравнение (21) описывает медленное изменение полной механической энергии нелинейного осциллятора (11), отсчитываемой от минимума его потенциальной энергии

Равновесное состояние  $h^*$  (21) определяется из равенства нулю его правой части:

$$h^* = 0, \quad (22)$$

чему соответствует  $\xi_{l0} = \xi_{st}$ .

Устойчивость состояния равновесия  $h^*$  определяется из

$$\lambda - \frac{\alpha \sin 4\gamma}{8} m_l^2(\xi_{st}) > 0 \quad (23)$$

или с учетом (14)

$$\lambda + \cos 2\gamma \tan \gamma \frac{m_l(\xi_{st})}{m_0(\xi_{st})} > 0. \quad (24)$$

Неравенство (24) определяет области в пространстве параметров системы, при которых полная механическая энергия (21)  $h$  не возрастает во времени. Можно видеть, что условие (24) выражает соотношение между механической  $\lambda$  и электрической  $\cos 2\gamma \tan \gamma \frac{m_l(\xi_{st})}{m_0(\xi_{st})}$  диссипации, знак которого определяет устойчивость движений левитирующего ТТ.

Таким образом, асимптотическое приближение решения исходной задачи (1) имеет вид

$$\xi_l = \xi_{st} + \sqrt{\frac{h(\varepsilon^2 \tau)}{b}} \sin \sqrt{2b\varepsilon} \tau + \frac{\varepsilon^2}{4 \cos \gamma} \cos(2\tau + \gamma), \quad j_{pm} = -m_0 \cos \gamma \sin(\tau + \gamma), \quad (25)$$

где  $h(\varepsilon^2 \tau)$  определяется из решения (21).

Установившееся решение при выполнении условия (24) отсутствия дрейфа среднего положения ТТ имеет вид

$$\xi_l = \xi_{st} + \frac{\varepsilon^2}{4 \cos \gamma} \cos(2\tau + \gamma), \quad j_{pm} = -m_0(\xi_{st}) \cos \gamma \sin(\tau + \gamma), \quad (26)$$

где учтена связь  $\alpha$  и  $\xi_{st}$  согласно (14). Устойчивость  $\xi_{st}$  определяется из (15).

### 3. Результаты

Далее приведено сравнение аналитических результатов согласно (26) с данными численного расчета, проведенного в программном комплексе Matlab (система (1) интегрировалась с использованием встроенной функции ode45 при заданных начальных условиях  $[\xi_l, \dot{\xi}_l, j_{pm}]_{\tau=0} = [0.4, 0, 0]$  [51]). Используемые для расчета параметры приведены в таблице 1.

На рис. 3 приведены графики сравнения колебаний ТТ и наведенного тока в случае численного расчета и аналитических выражений (26).

Из рис. 3 видно, что аналитическое решение (26) в случае установившихся колебаний ТТ с достаточной степенью точности совпадает с численными результатами.

Параметр	$\lambda$	$\varepsilon$	$b_l$	$\alpha$	$\gamma$	$w_l$	$w_s$	$r_l$	$r_s$	$t_{pm}$	$j_s$
Значение	10	0.01	1.2	0.2534	0.61	14	12	1 мм	1.9 мм	0.1 мм	-0.5

Таблица 1. Параметры системы

Table 1. System's parameters

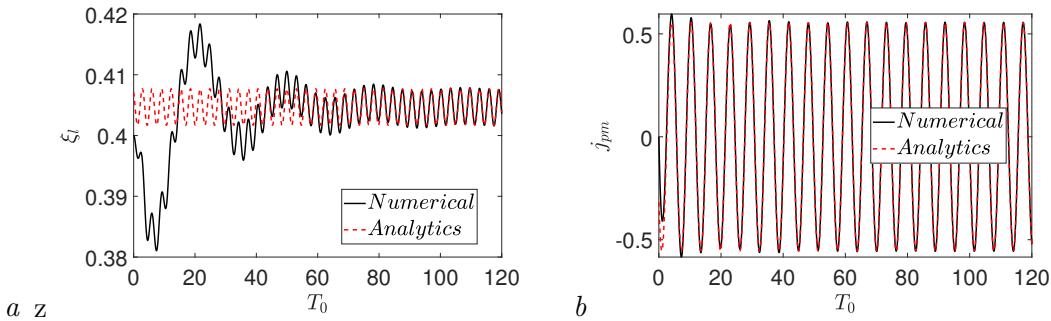


Рис. 3. График сравнения безразмерной величины (a) высоты левитации ТТ, (b) наведенного тока от безразмерного времени  $T_0$  в случае прямого численного счета (черные сплошные линии) и аналитических формул (26) (пунктирная красная линия)

Fig. 3. Graph comparing dimensionless value of (a) RB displacement, (b) induced current from dimensionless time  $T_0$  in case of direct numerical calculation (black solid lines) and analytical equations (26).

Для исследования бифуркаций состояний равновесия динамической системы (11) в зависимости от параметров системы применяется программный комплекс численных алгоритмов теории бифуркаций MatCont [52]. На рис. 4(а) - 6(а) приведены зависимости среднего положения ТТ  $\xi_{l0}$  от параметров  $\alpha$ ,  $j_s$ ,  $\gamma$ . Сплошными линиями далее обозначены устойчивые положения равновесия, пунктирными - неустойчивые. Розовые кружки обозначают точки бифуркации, которые разделяют в пространстве параметров системы область отсутствия равновесных состояний и область существования двух (одного при бифуркации) нетривиальных положений равновесия. Вычисленные и осредненные значения высоты левитации системы (1) с использованием функции ode45 обозначены квадратными символами. На рис. 4(б) - 6(б) приведены характерные зоны, в которых существует (II)/ не существует (I) положение равновесия в зависимости от параметров системы.

На рис. 4(а),(б) показана зависимость среднего положения ТТ  $\xi_{l0}$  от параметра  $\alpha$ , прямо пропорционального квадрату амплитуды тока левитационной катушки  $I_l$ , при варьировании параметра  $j_s$ . Видно, что существуют "критические" значения параметра  $\alpha = \alpha_{crit}$  (минимальная величина амплитуды тока левитационной катушки  $I_l$ ) и соответствующие им "критические" значения параметра  $\xi_{l0} = \xi_{crit}$ , обозначающие случай слияния (с последующим исчезновением) состояний равновесия типа седло и центр. При увеличении параметра  $j_s$  величина  $\alpha_{crit}$  уменьшается, а  $\xi_{crit}$  - увеличивается. Граница, разделяющая зоны устойчивых и неустойчивых ветвей равновесия, изображена розовой линией (LP). Розовыми ромбами обозначаются граничные значения варьирования параметра  $j_s$  в диапазоне  $[-1; 1]$ .

На рис. 5(а),(б) изображена зависимость среднего положения ТТ  $\xi_{l0}$  от параметра  $j_s$ , обозначающего собой отношение амплитуд токов левитационной и стабилизирующей катушек, для различных значений параметра  $\alpha$ . При увеличении амплитуды стабилизирующего тока, противофазного току левитационной катушки наблюдается исчезновение положения равновесия. Это объясняется тем, что при увеличении амплитуды тока стабилизирующей катушки стабилизирующая и левитационная катушки компенсируют магнитный поток через ТТ, что приводит к падению индуцированного тока, что приводит к исчезновению сред-

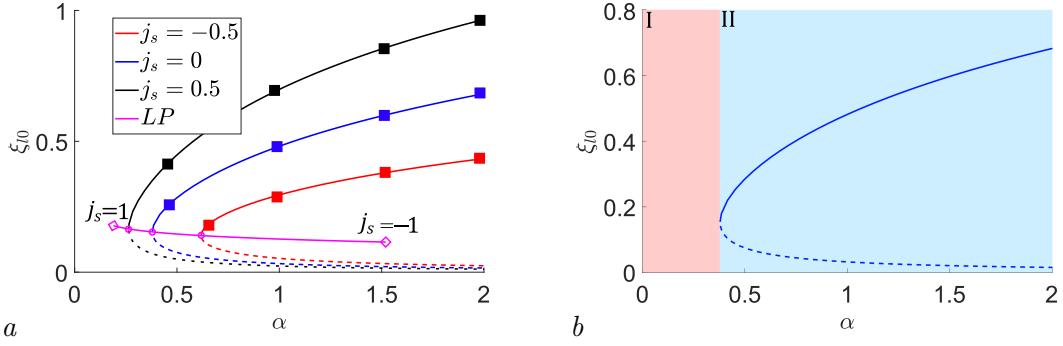


Рис. 4. (а) Зависимость среднего положения ТТ  $\xi_{l0}$  от параметра  $\alpha$  при  $j_s = -0.5, 0, 0.5$  (красная, синяя, черная линии соответственно); розовая линия (LP) обозначает зону разделения устойчивых (сплошные линии) и неустойчивых (пунктирные линии) ветвей при варьировании параметра  $j_s = [-1; 1]$ ; (б) изображение характерных зон существования и несуществования положений равновесия при  $j_s=0$ ,  $\varepsilon = 0.001$ ,  $r_l = 1$  мм,  $r_s = 1.9$  мм,  $t_{pm} = 0.1$  мм,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda=10$ ,  $\gamma = 0$

Fig. 4 (a) Dependence of the average position of RB  $\xi_{l0}$  on the parameter  $\alpha$  at  $j_s = -0.5, 0, 0.5$  (red, blue, black lines, respectively); the pink line (LP) indicates the zone of separation of stable (solid lines) and unstable (dashed lines) branches when varying the parameter  $j_s = [-1; 1]$ ; (b) depiction of characteristic zones of existence and nonexistence of equilibrium positions at  $j_s=0$ ,  $\varepsilon = 0.001$ ,  $r_l = 1$  mm,  $r_s = 1.9$  mm,  $t_{pm} = 0.1$  mm,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda=10$ ,  $\gamma = 0$

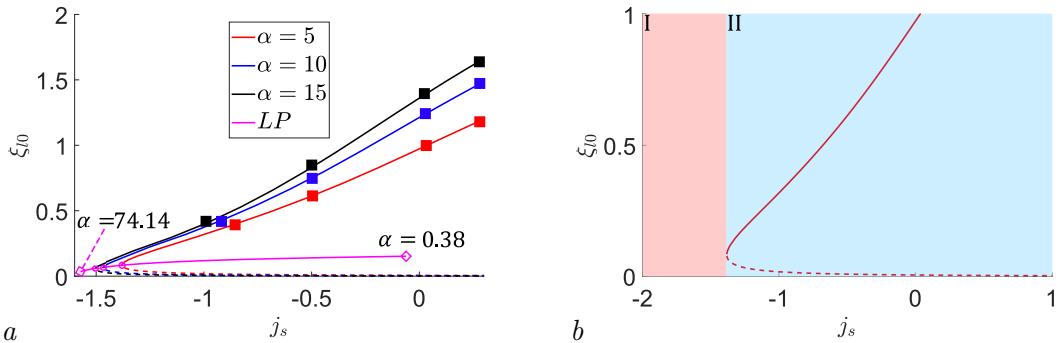


Рис. 5. (а) Зависимость среднего положения ТТ  $\xi_{l0}$  от параметра  $j_s$  при  $\alpha = 5, 10, 15$  (красная, синяя, черная линии соответственно); розовая линия (LP) обозначает зону разделения устойчивых (сплошные линии) и неустойчивых (пунктирные линии) ветвей при варьировании параметра  $\alpha = [0.38; 74.14]$ ; (б) изображение характерных зон существования и несуществования положений равновесия при  $\alpha=5$ ,  $\varepsilon = 0.001$ ,  $r_l = 1$  мм,  $r_s = 1.9$  мм,  $t_{pm} = 0.1$  мм,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda=10$ ,  $\gamma = 0$

Fig. 5 (a) Dependence of the average position of RB  $\xi_{l0}$  on the parameter  $j_s$  at  $\alpha = 5, 10, 15$  (red, blue, black lines, respectively); the pink line (LP) indicates the zone of separation of stable (solid lines) and unstable (dashed lines) branches when varying the parameter  $\alpha = [0.38; 74.14]$ ; (b) depiction of characteristic zones of existence and nonexistence of equilibrium positions at  $\alpha=5$ ,  $\varepsilon = 0.001$ ,  $r_l = 1$  mm,  $r_s = 1.9$  mm,  $t_{pm} = 0.1$  mm,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda=10$ ,  $\gamma = 0$ .

него положения ТТ. Это приводит к притяжению ТТ к катушкам. Линия раздела устойчивых/ неустойчивых положений равновесия представлена при варьировании параметра  $\alpha$  в диапазоне  $[0.38; 74.14]$ .

На рис. 6(а),(б) изображена зависимость высоты левитации  $\xi_{l0}$  от параметра  $\gamma$ , обозначающего собой разность фаз между токами  $i_l$ ,  $i_s$  и  $i_{pm}$ . Видно, что  $\xi_{l0}$  убывает и при приближении к "критическому" значению  $\gamma = \gamma_{crit}$  режим левитации исчезает. Это следует из того, что при увеличении разности фаз между токами  $i_l$ ,  $i_s$  и  $i_{pm}$  до величины  $\gamma_{crit}$

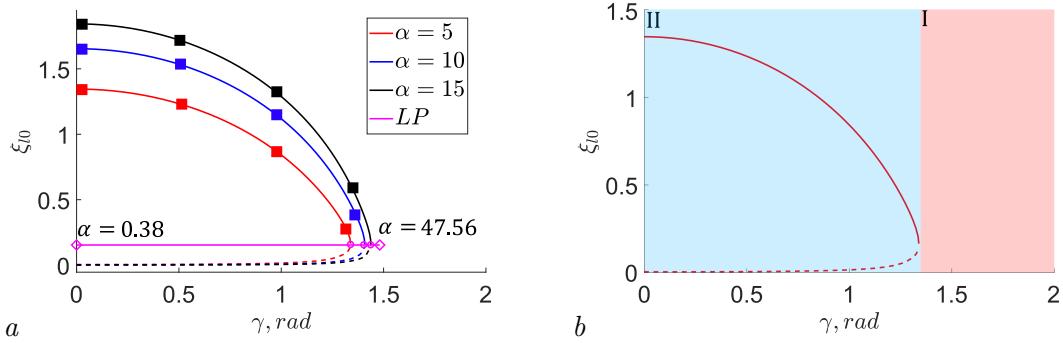


Рис. 6. Зависимость среднего положения ТТ  $\xi_{l0}$  от параметра  $\gamma$  при  $\alpha = 5, 10, 15$  (красная, синяя, черная линии соответственно); розовая линия (LP) обозначает зону разделения устойчивых (сплошные линии) и неустойчивых (пунктирные линии) ветвей при варьировании параметра  $\alpha = [0.38; 47.56]$ ; (b) изображение характерных зон существования и несуществования положений равновесия при  $\alpha=5, \varepsilon = 0.001, r_l = 1$  мм,  $r_s = 1.9$  мм,  $t_{pm} = 0.1$  мм,  $w_l = 14, w_s = 12, \lambda=10, j_s=0$

Fig. 6 Dependence of the average position of RB  $\xi_{l0}$  on the parameter  $\gamma$  at  $\alpha = 5, 10, 15$  (red, blue, black lines, respectively); the pink line (LP) indicates the zone of separation of stable (solid lines) and unstable (dashed lines) branches when varying the parameter  $\alpha = [0.38; 47.56]$ ; (b) depiction of characteristic zones of existence and nonexistence of equilibrium positions at  $\alpha=5, \varepsilon = 0.001, r_l = 1$  mm,  $r_s = 1.9$  mm,  $t_{pm} = 0.1$  mm,  $w_l = 14, w_s = 12, \lambda=10, j_s=0$ .

они могут начать притягиваться, что приводит к нарушению функционирования устройства. При  $j_s = 1$ , то есть если на левитирующую и стабилизационную катушки подаются синфазные токи, видно, что при  $\gamma_{crit} \approx \frac{\pi}{2}$  левитация не наблюдается.

Из рис. 4 - 6 видно, что бифуркация "седло-центр" соответствует граничному значению варьируемого параметра и определяет область параметров, при которых положение равновесия ТТ существует. Дальнейший этап исследования бифуркации, которой соответствуют одна из пар набора параметров  $(\alpha^*, \gamma^*, j_s^*)$ , заключается в продолжении рассмотрения положения равновесия  $\xi_{crit}$  по одному из активных параметров  $(\alpha, \gamma$  или  $j_s)$  [52]. Для определения области существования положения равновесия на плоскостях параметров  $(\alpha, j_s), (\gamma, j_s), (\alpha, \gamma)$  осуществим продолжение по параметру точки бифуркации. Для продолжения выбирается точка слияния устойчивого и неустойчивого равновесий. Именно эта точка продолжается над исследуемыми плоскостями и дает границу области существования среднего положения ТТ. На рис. 7(a) изображено продолжение точки бифуркации (розовая линия), рис. 7 (b)-(d) обозначают зоны отсутствия (I) и наличия двух равновесных состояний (II) в пространстве параметров исследуемой системы.

На рис. 8 (a)-(d) изображены области устойчивости (серая область) среднего положения ТТ  $\xi_{l0}$  согласно (15) (черные линии), (24) (красные линии) при  $\gamma=0.2, \lambda=0.4$ . Синими крестиками обозначены результаты прямого интегрирования системы (1).

Из рис. 8 видны области устойчивости среднего положения ТТ.

На рис. 9 (a)-(c) изображены графики сравнения колебаний ТТ в случае численного расчета для различных параметров системы  $(\xi_{l0}, b_l)$ , соответствующих случаям (a) устойчивых колебаний (серая область на рис . 8), (b) неустойчивых колебаний согласно нарушения условия (15), (c) неустойчивых колебаний в предположении о нарушении условия (24) .

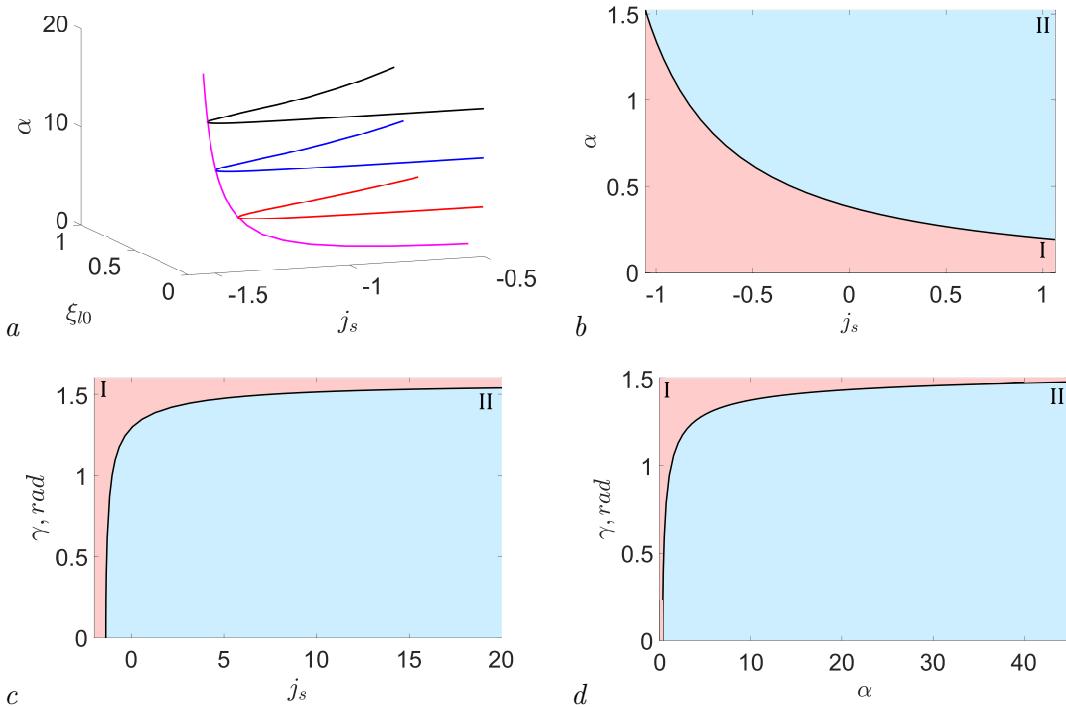


Рис. 7. (а) Зависимость  $\xi_{l0}$  в точке бифуркации "седло-центр" от параметров  $\alpha, j_s$  (розовая линия); красная, синяя, черная линии - многообразие решений  $\xi_{l0}$  при варьировании параметров  $\alpha, j_s$  соответственно; (б)-(д) изображение зон в пространстве параметров системы, отвечающим условиям отсутствия и наличия состояний равновесия

Fig. 7 (a) Dependence of  $\xi_{l0}$  at the saddle-center bifurcation point on parameters  $\alpha, j_s$  (pink line); red, blue, black lines - manifold of solutions of  $\xi_{l0}$  at varying parameters  $\alpha, j_s$  respectively; (b)-(d) image of zones in the parameter space of the system corresponding to the conditions of the absence and presence of equilibrium states.

Из рис. 9 (а)-(с) видно, что в случае выполнения всех неравенств в (15), (24) колебания ТТ являются установившимися; при невыполнении хотя бы одного из неравенств (15), (24) движения ТТ являются расходящимися.

На рис. 10 представлена зависимость высоты левитации ТТ от времени  $T_0$ , полученная в результате численного расчёта при нарушении условия (24) в интервале  $T_0 = [1200; 1250]$ . Чёрной линией (1) обозначено численное решение, красной (2) — аналитическая оценка дрейфа среднего положения  $\sin \sqrt{2b\varepsilon}\tau$ , соответствующая выражению (25).

В качестве числового примера оценим собственную частоту и жесткость ТТ, выполненного в форме тонкого кольца. Физические параметры, взятые из [53] и принятые для аналитической оценки, приведены в таблице 2.

Параметр	$r_l$	$r_s$	$r_{pm}$	$t_{pm}$	$w_l$	$w_s$	$\rho$	$\rho_{el}$
Значение	1000 мкм	1900 мкм	1600 мкм	25 мкм	20	12	2700 кг/м <sup>3</sup>	0.026 мкОмм
Параметр	$\omega$	$I_l$	$I_s$	$\hat{m}$	$R_{pm}$	$g$	$\mu_0$	$L_{pm}$
Значение	12 МГц	0.11 А	-0.106 А	$5.4 \times 10^{-7}$ кг	0.42 Ом	9.8 м/с <sup>2</sup>	$4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м	10.14 нГн

Таблица 2. Физические и геометрические параметры подвесы

Table 2. Physical and geometric parameters of the suspension

Здесь  $\rho, \rho_{el}$  - плотность и удельное электрическое сопротивление материала ТТ.

В [35] нами была аналитически получена оценка для безразмерной величины соб-

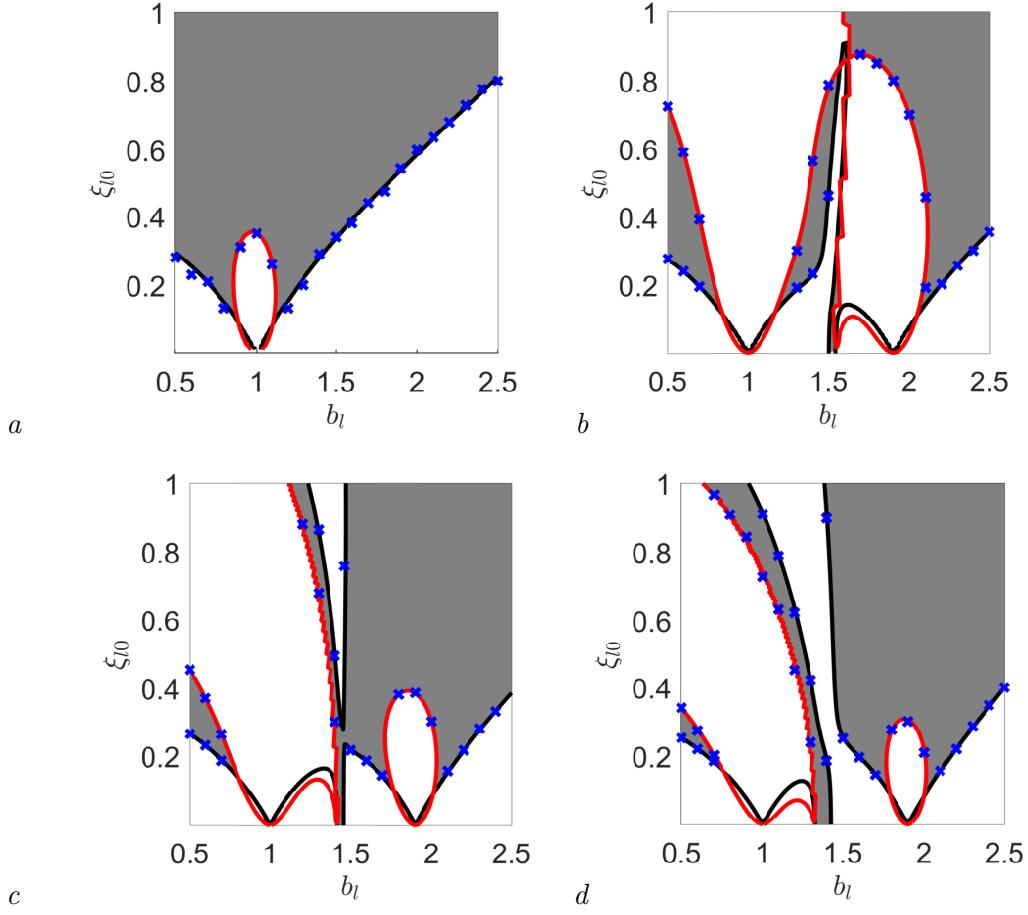


Рис. 8. Эволюция области устойчивости (серые области) среднего положения ТТ  $\xi_{l0}$  при (а)  $j_s = 0$ , (б)  $j_s = -0.5$ , (в)  $j_s = -0.75$ , (г)  $j_s = -1$ ,  $r_l = 1$  мм,  $r_s = 1.9$  мм,  $t_{pm} = 0.1$  мм,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda=0.4$ ,  $\gamma=0.2$ ,  $b_s = \frac{r_l}{r_s} b_l$  согласно формулам (15) (черные линии), (24) (красные линии); синие крестики - результаты прямого интегрирования системы (1)

Fig. 8. Evolution of the stability region (gray areas) of the average position of RB  $\xi_{l0}$  at (a)  $j_s = 0$ , (b)  $j_s = -0.5$ , (c)  $j_s = -0.75$ , (d)  $j_s = -1$ ,  $r_l = 1$  mm,  $r_s = 1.9$  mm,  $t_{pm} = 0.1$  mm,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda=0.4$ ,  $\gamma=0.2$ ,  $b_s = \frac{r_l}{r_s} b_l$  according to the formulas (15) (black lines), (24) (red lines); blue crosses - results of direct integration of the system (1).

ственной частоты  $\omega_l$ :

$$\hat{\omega}_l = \varepsilon \sqrt{-\frac{m_l^2 + m_0 m_l}{m_0 m_l}}, \quad (27)$$

откуда размерные собственная частота  $\omega_l$  и жесткость  $c_l$  вычисляются как

$$\omega_l = \omega \hat{\omega}_l, \quad c_l = \hat{m} \omega_l^2. \quad (28)$$

Как видно из рис. 10, нарушение условия (24) приводит к дрейфу среднего положения  $\xi_{l0}$ , на который накладываются колебания с безразмерной частотой, равной двум. На рис. 11 изображена зависимость жесткости системы  $c_l$  от высоты левитации ТТ  $l$  (25).

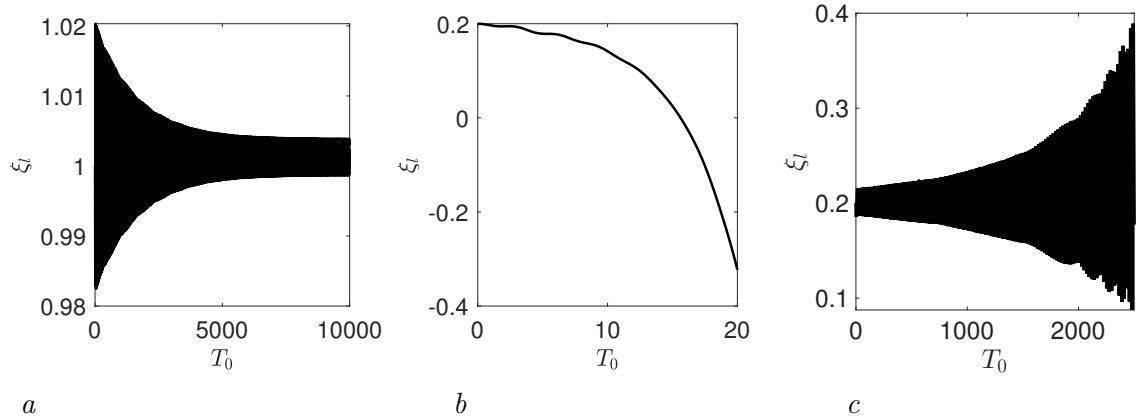


Рис. 9. Графики зависимости безразмерной величины перемещения ТТ от безразмерного времени  $T_0$  в случае прямого численного счета для (a)  $(b_l, \xi_{l0}) = (1, 1)$ , (b)  $(2, 0.2)$ , (c)  $(1, 0.2)$ ;  $j_s = 0$ ,  $r_l = 1$  мм,  $r_s = 1.9$  мм,  $t_{pm} = 0.1$ ,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda = 0.4$ ,  $\gamma = 0.2$

Fig. 9. Graphs of dependence of dimensionless RB displacement on dimensionless time  $T_0$  in the case of direct numerical calculation for (a)  $(b_l, \xi_{l0}) = (1, 1)$ , (b)  $(2, 0.2)$ , (c)  $(1, 0.2)$ ;  $j_s = 0$ ,  $r_l = 1$  mm,  $r_s = 1.9$  mm,  $t_{pm} = 0.1$  mm,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda = 0.4$ ,  $\gamma = 0.2$ .

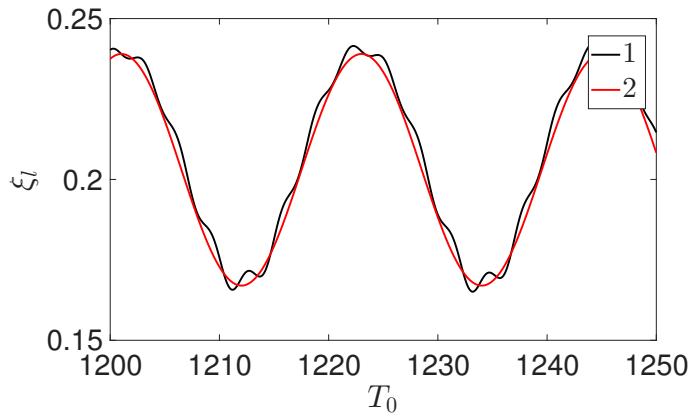


Рис. 10. График зависимости безразмерной величины перемещения ТТ от безразмерного времени  $T_0$  в случае прямого численного счета для  $(b_l, \xi_{l0}) = (1, 0.2)$ ;  $j_s = 0$ ,  $r_l = 1$  мм,  $r_s = 1.9$  мм,  $t_{pm} = 0.1$  мм,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda = 0.4$ ,  $\gamma = 0.2$ . Диапазон  $T_0 = [1250, 1240]$

Fig. 10. Graph of the dependence of the dimensionless displacement of the RB on the dimensionless time  $T_0$  in the case of direct numerical calculation for  $(b_l, \xi_{l0}) = (1, 0.2)$ ;  $j_s = 0$ ,  $r_l = 1$  mm,  $r_s = 1.9$  mm,  $t_{pm} = 0.1$  mm,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda = 0.4$ ,  $\gamma = 0.2$ . Range  $T_0 = [1250, 1240]$ .

Из рис. 11 видно, что существуют три характерные зоны зависимости жесткости  $c_l$  от высоты левитации  $l$ . В зоне малых величин  $l$  (красная область (I)) величина  $c_l$  принимает отрицательные значения (они не приведены на рис. 11). В фиолетовой области (II) наблюдается монотонное возрастание  $c_l$  вплоть до достижения максимума  $c_l = c_l^{max}$ , в зеленой области (III) с увеличением  $l$  величина  $c_l$  убывает.

Суммируя вышеизложенное, подчеркнем ключевые особенности режима левитации ТТ в индукционном подвесе, выявленные в ходе проведенного исследования:

Исходная модель (1) не имеет положения равновесия, только «быстро» колебательное решение, которое может быть устойчивым или неустойчивым. Колебание имеет «среднее положение», определяемое как результат усреднения координаты на масштабе времени, который значительно больше периода колебаний, но значительно меньше других («медлен-

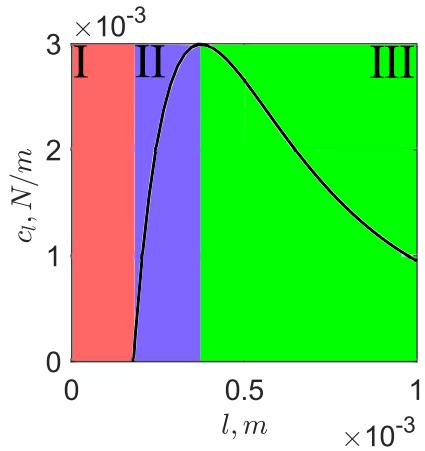


Рис. 11. График зависимости жесткости  $c_l$  системы от высоты левитации  $l$

Fig. 11. Graph of dependence of stiffness  $c_l$  of the system on the levitation height  $l$ .

ных») временных масштабов динамики системы.

Динамика в медленном времени  $T_1$ , описываемая уравнением консервативного нелинейного осциллятора (11), может иметь (или не иметь) одно или более положений равновесия  $\xi_{st}$ , каждое из которых может быть устойчивым или нет, в зависимости от выполнения условия устойчивости (15). Если положение равновесия  $\xi_{st}$  устойчиво, то система (11) имеет «медленное» колебательное решение (18) в его окрестности; это колебательное решение является аппроксимацией медленного движения («дрейфа») «среднего положения» исходной модели.

Динамика амплитуды  $A = \sqrt{h(T_2)/b}$  колебательного решения (18) в ещё более медленном времени  $T_2$  описывается уравнением 1-го порядка (21), имеющим состояние равновесия  $h = 0$ . Устойчивость этого состояния, в свою очередь, определяется условием (24). Если условие (24) выполнено, то медленные колебания («дрейф среднего положения») затухают (тогда суммарное асимптотическое решение устойчиво), в противном случае — нарастают (тогда суммарное решение неустойчиво).

### Заключение

В настоящей работе построена аналитическая модель одномерных нелинейных колебаний чувствительного элемента электромагнитного подвеса, выполненного в форме тонкого кольца из токопроводящего материала. Приближенное решение задачи динамики найдено с применением асимптотических методов нелинейной механики. В предположении о медленной эволюции среднего положения ТТ определены условия на возникновение и параметры дрейфа левитирующего твердого тела. В уточненной асимптотической постановке исследована устойчивость режима стационарной левитации. Показано, что учет возможности медленной эволюции средней высоты левитации приводит к формулировке условия на устойчивость, связанного с соотношением между диссипацией механической и электрической природы.

## Список литературы

1. Мартиценко Ю.Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.- 368 с.
2. Скубов Д.Ю., Ходжасаев К.Ш. Нелинейная электромеханика.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2003.- 360 с.
3. Han H. S., Kim D. S. Magnetic levitation: Maglev Technology and Applications. Dordrecht: Springer Dordrecht, 2016. 247 p. DOI: 10.1007/978-94-017-7524-3.
4. Poletkin K. Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators. Cham: Springer Cham, 2021. 174 p. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0.
5. Poletkin K. Levitating micro-actuators: A review // Actuators, 2018. Vol. 7, no. 2. P. 17. DOI: 10.3390/act7020017.
6. Liu K., Zhang W., Chen W., Li K., Dai F., Cui F., Wu X., Ma G., Xiao Q. The development of micro-gyroscope technology // Journal of Micromechanics and Microengineering, 2009. Vol. 19, no. 11. P. 113001. DOI: 10.1088/0960-1317/19/11/113001.
7. Shearwood C., Ho K. Y., Williams C. B., Gong H. Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope // Sensors and actuators A: physical, 2000. Vol. 83, no. 1-3. P. 85-92. DOI: 10.1016/S0924-4247(00)00292-2.
8. Poletkin K. Thermal Noise in Levitation Micro-Gyroscopes //Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators. London: Springer Nature, 2021. P. 135 - 154. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0\_7.
9. Mustafa M. N. M. Comprehensive review and analysis of the electromagnetic levitation systems (modeling, controllers, nonlinearity sources) // E3S Web of Conferences, 2023. Vol. 371, P. 04027.DOI: 10.1051/e3sconf/202337104027.
10. Poletkin K. V., Lu Z., Moazzenzadeh A., Mariappan S. G., Korvink J. G., Wallrabe U., Badilita V. Energy-aware 3D micro-machined inductive suspensions with polymer magnetic composite core // Journal of Physics: Conference Series, 2018. Vol. 1052, no. 1. P. 012048. DOI: 10.1088/1742-6596/1052/1/012048.
11. Shearwood C., Williams C. B., Mellor P. H., Chang K. Y., Woodhead J. Electro-magnetically levitated micro-discs. Proceedings of the IEE Colloquium on Microengineering Applications in Optoelectronics. London, IET. P. 6/1-6/3. 1996 DOI: 10.1049/ic:19960241.
12. Williams C. B., Shearwood C., Mellor P. H., Yates R. B. Modelling and testing of a frictionless levitated micromotor // Sensors and Actuators A: Physical, 1997. Vol. 61, no. 1-3. P. 469-473. DOI: 10.1016/S0924-4247(97)80307-X.
13. Shearwood C., Williams C. B., Mellor P. H., Yates R. B., Gibbs M. R. J., Mattingley A. D. Levitation of a micromachined rotor for application in a rotating gyroscope // Electronics Letters, 1995. V. 31. no. 21. P. 1845-1846. DOI: 10.1049/el:19951232.
14. Williams C. B., Shearwood C., Mellor P. H., Mattingley A. D., Gibbs M. R. J., Yates R. B. Initial fabrication of a micro-induction gyroscope //Microelectronic Engineering, 1996. V. 30. no. 1-4. P. 531-534. DOI: 10.1016/0167-9317(95)00302-9.
15. Wu X. S., Chen W. Y., Zhao X. L., Zhang W. P. Micromotor with electromagnetically levitated rotor using separated coils // Electronics Letters, 2004. V. 40, no. 16. P. 996-997. DOI: 10.1049/el:20040601.
16. Tsai N. C., Huang W. M., Chiang C. W. Magnetic actuator design for single-axis micro-gyroscopes //Microsystem technologies, 2009. V. 15. P. 493-503. DOI: 10.1007/s00542-008-0769-y.
17. Luan B. et al. High precision magnetic levitation actuator for micro-EDM //Actuators. – MDPI, 2022. – V. 11. – №. 12. – P. 361.
18. Xiao Q. et al. Design and experiment of an electromagnetic levitation system for a micro

- mirror //Microsystem Technologies. – 2019. – Т. 25. – С. 3119-3128.
19. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Korvink J., Badilita V.* Stable dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions //International Journal of Mechanical Sciences, 2017. V. 131. P. 753-766. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.08.016.
  20. *Jayawant B. V.* Electromagnetic suspension and levitation //Reports on Progress in Physics, 1981. V. 44. no. 4. P 411. DOI: 10.1088/0034-4885/44/4/002.
  21. *Kim N. H., Ge L.* Dynamic modeling of electromagnetic suspension system //Journal of Vibration and Control, 2013. V. 19. no. 5. P. 729-741. DOI: 10.1177/107754631243860.
  22. *Gysen B. L., Janssen J. L., Paulides J. J., Lomonova E. A.* Design aspects of an active electromagnetic suspension system for automotive applications //IEEE transactions on industry applications, 2009. V. 45. no. 5. P. 1589-1597. DOI: 10.1109/TIAS.2008.181.
  23. *Chu S. Y., Cui X., Zan X., Avestruz A. T.* Transfer-power measurement using a non-contact method for fair and accurate metering of wireless power transfer in electric vehicles //IEEE Transactions on Power Electronics, 2021. V. 37. no. 2. P. 1244-1271. DOI: 10.1109/TPEL.2021.3105689.
  24. *Löhöfer G.* High-resolution inductive measurement of electrical resistivity and density of electromagnetically levitated liquid metal droplets //Review of Scientific Instruments, 2018. V. 89. no. 12. P. 124709 DOI: 10.1063/1.5065482.
  25. *Udalov P., Lukin A., Popov I., Skubov D.* Analysis of the Equilibrium of a Magnetic Contactless Suspension / Proceedings of the Conference on Microactuators and Micromechanisms. New York City, Springer International Publishing. P. 183-190. 2022. DOI: 10.1007/978-3-031-20353-4.
  26. *Mamleyev E. R., Lee C. H., Korvink J. G., Kohl M., Poletkin K. V., Badilita V.* Experimental Study and Simulation of Pull-In Behavior in Hybrid Levitation Microactuator for Square-Shaped Proof Masses // Actuators, 2023. V. 12, no. 2. P. 48. DOI: 10.3390/act12020048.
  27. *Okress E. C., Wroughton D. M., Comenetz G., Brace P. H., Kelly J. C. R.* Electromagnetic levitation of solid and molten metals //Journal of applied physics, 1952. V. 23. no. 5. P. 545-552. DOI: 10.1063/1.1702249.
  28. *Poletkin K., Chernomorsky A. I., Shearwood C., Wallrabe U.* A qualitative analysis of designs of micromachined electromagnetic inductive contactless suspension // International Journal of Mechanical Sciences, 2014. V. 82. P. 110-121. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.03.013.
  29. *Poletkin K. V., Lu Z., Wallrabe U., Korvink J. G., Badilita V.* A qualitative technique to study stability and dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions. Proceedings of the 19th International Conference on Solid State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS), New York City, IEE, 2017. DOI: 10.1109/TRANSDUCERS.2017.7994102.
  30. *Shearwood C., Ho K. Y., Williams C. B., Gong H.* Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope //sensors and actuators A: physical, 2000. V. 83. no. 1-3. P. 85-92. DOI: 10.1016/S0924-4247(00)00292-2.
  31. *Poletkin K. et al.* Hybrid electromagnetic and electrostatic micromachined suspension with adjustable dynamics //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2015. – Т. 660. – №. 1. – С. 012005. DOI: 10.1088/1742-6596/660/1/012005.
  32. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Badilita V.* A new hybrid micromachined contactless suspension with linear and angular positioning and adjustable dynamics //Journal of Microelectromechanical Systems, 2015. V. 24. no. 5. P. 1248-1250. DOI: 10.1109/JMEMS.2015.2469211.
  33. *Poletkin K. V., Chernomorsky A. I., Shearwood C., Wallrabe U.* An analytical model of micromachined electromagnetic inductive contactless suspension //ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, 2013. V. 56390. DOI: 10.1115/IMECE2013-66010.

34. *Xia D., Yu C., Kong L.* A micro dynamically tuned gyroscope with adjustable static capacitance //Sensors, 2013. V. 13, no.2. P. 2176-2195. DOI: 10.3390/s130202176.
35. *Udalov P.P., Popov I.A., Lukin A.V., Shtukin L.V., Poletkin K.V.* Parametric Stability of Microscale Contactless Inductive Suspension with an Electrostatic Control Loop of Stiffness // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2024. V. 53. no. 1. P. 25-34.
36. *Poletkin K., Lu Z., en Hartogh B., Wallrabe U., Badilita V.* Stability and spring constant investigation for micromachined inductivesusensions: Theoretical analysis vs. experimental results // Journal of Physics: Conference Series, 2014. V. 557, no.1. P. 012133. DOI: 10.1088/1742-6596/557/1/012133.
37. *Калантаров П. Л., Цейтлин Л. А.* Расчет индуктивностей: Справочная книга. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986, 488 с.
38. *Rosa E. B., Grover F. W.* Formulas and tables for the calculation of mutual and self-inductance. Washington, DC: US Government Printing Office, 1948, V. 169. 237 p.
39. *Poletkin K. V.* Calculation of magnetic force and torque between two arbitrarily oriented circular filaments using Kalantarov-Zeitlin's method // International Journal of Mechanical Sciences, 2022. V. 220. P. 107159. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2022.107159.
40. *Babic S., Akyel C.* Magnetic force between inclined circular loops (Lorentz approach) //Progress In Electromagnetics Research B, 2012. V. 38. P. 333-349. DOI: 10.2528/PIERB12011501.
41. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Korvink J., Badilita V.* Stable dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions //International Journal of Mechanical Sciences, 2017. V. 131. P. 753-766. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.08.016.
42. *Mamleyev E. R., Lee C. H., Korvink J. G., Kohl M., Poletkin K. V.* Experimental Study and Simulation of Pull-In Behavior in Hybrid Levitation Microactuator for Square-Shaped Proof Masses //Actuators, 2023. V.12. no. 2. P.48. DOI: 10.3390/act12020048.
43. *Poletkin K.* On the static pull-in of tilting actuation in electromagnetically levitating hybrid micro-actuator: Theory and experiment //Actuators, 2021. V.10. no. 10. P. 256. DOI: 10.3390/act10100256.
44. *Liu K., Zhang W., Liu W., Chen W., Li K., Cui F., Li S.* An innovative micro-diamagnetic levitation system with coils applied in micro-gyroscope //Microsystem technologies, 2010. V.16. P.431-439. DOI: 10.1007/s00542-009-0935-x.
45. *Liu W., Zhang W., Chen W.* Simulation analysis and experimental study of the diamagnetically levitated electrostatic micromotor //Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 2019. V. 492. P. 165634. DOI: 10.1016/j.jmmm.2019.165634.
46. *Xia D., Yu C., Kong L.* A micro dynamically tuned gyroscope with adjustable static capacitance //Sensors, 2013. V.13. no. 2. P. 2176-2195. DOI: 10.3390/s130202176.
47. *Poletkin K.* Quasi-finite Element Modelling //Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators. 2021. P. 45-58. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0\_4.
48. *Lu Z., Jia F., Korvink J., Wallrabe U., Badilita V.* Design optimization of an electromagnetic microlevitation system based on copper wirebonded coils. Proceedings of the 2012 Power MEMS, Atlanta, GA, 2012. DOI: 10.13140/2.1.4460.9284.
49. *Скубов Д.Ю., Индейцев Д.А., Удалов П.П., Попов И.А., Лукин А.В., Полеткин К.В.* Нелинейная динамика микромеханического неконтактного индукционного подвеса // Изв. РАН. МТТ, 2023, no 6. С. 98-112. DOI: 10.31857/S0572329922600864.
50. *Nayfeh A. H.* Perturbation methods. New-York: John Wiley & Sons, 2008. 425 p.
51. *Gatzke E.* Introduction to MATLAB. In Introduction to Modeling and Numerical Methods for Biomedical and Chemical Engineers. Cham: Springer International Publishing, 2021. P. 99-121. DOI: 10.1007/978-3-030-76449-4.
52. *Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Y. A., Meijer H. G. E., Sautois B.* New features of

- the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems //Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, 2008. V.14. no. 2. P. 147-175.
53. *Lu Z. et al.* 3D micro-machined inductive contactless suspension: Testing and modeling //Sensors and Actuators A: Physical, 2014. V. 220. P. 134-143.

## References

1. *Martynenko Yu. G.* Motion of a Rigid Body in Electric and Magnetic Fields. Nauka, Moscow, 1988. 368 p. [In Russian]
2. *Skubov D., Khodzhaev K.S.* Non-linear electromechanics. Luxemboug: Springer Science & Business Media, 2008. 471 p.
3. *Han H. S., Kim D. S.* Magnetic levitation: Maglev Technology and Applications. Dordrecht: Springer Dordrecht, 2016. 247 p. DOI: 10.1007/978-94-017-7524-3.
4. *Poletkin K.* Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators. Cham: Springer Cham, 2021. 174 p. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0.
5. *Poletkin K.* Levitating micro-actuators: A review // Actuators, 2018. Vol. 7, no. 2. P. 17. DOI: 10.3390/act7020017.
6. *Liu K., Zhang W., Chen W., Li K., Dai F., Cui F., Wu X., Ma G., Xiao Q.* The development of micro-gyroscope technology // Journal of Micromechanics and Microengineering, 2009. Vol. 19, no. 11. P. 113001. DOI: 10.1088/0960-1317/19/11/113001.
7. *Shearwood C., Ho K. Y., Williams C. B., Gong H.* Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope // Sensors and actuators A: physical, 2000. Vol. 83, no. 1-3. P. 85-92. DOI: 10.1016/S0924-4247(00)00292-2.
8. *Poletkin K.* Thermal Noise in Levitation Micro-Gyroscopes //Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators. London: Springer Nature, 2021. P. 135 - 154. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0 \_ 7.
9. *Mustafa M. N. M.* Comprehensive review and analysis of the electromagnetic levitation systems (modeling, controllers, nonlinearity sources) // E3S Web of Conferences, 2023. Vol. 371, P. 04027.DOI: 10.1051/e3sconf/202337104027.
10. *Poletkin K. V., Lu Z., Moazenzadeh A., Mariappan S. G., Korvink J. G., Wallrabe U., Badilita V.* Energy-aware 3D micro-machined inductive suspensions with polymer magnetic composite core // Journal of Physics: Conference Series, 2018. Vol. 1052, no. 1. P. 012048. DOI: 10.1088/1742-6596/1052/1/012048.
11. *Shearwood C., Williams C. B., Mellor P. H., Chang K. Y., Woodhead J.* Electro-magnetically levitated micro-discs. Proceedings of the IEE Colloquium on Microengineering Applications in Optoelectronics. London, IET. P. 6/1-6/3. 1996 DOI: 10.1049/ic:19960241.
12. *Williams C. B., Shearwood C., Mellor P. H., Yates R. B.* Modelling and testing of a frictionless levitated micromotor // Sensors and Actuators A: Physical, 1997. Vol. 61, no. 1-3. P. 469-473. DOI: 10.1016/S0924-4247(97)80307-X.
13. *Shearwood C., Williams C. B., Mellor P. H., Yates R. B., Gibbs M. R. J., Mattingley A. D.* Levitation of a micromachined rotor for application in a rotating gyroscope // Electronics Letters, 1995. V. 31. no. 21. P. 1845-1846. DOI: 10.1049/el:19951232.
14. *Williams C. B., Shearwood C., Mellor P. H., Mattingley A. D., Gibbs M. R. J., Yates R. B.* Initial fabrication of a micro-induction gyroscope //Microelectronic Engineering, 1996. V. 30. no. 1-4. P. 531-534. DOI: 10.1016/0167-9317(95)00302-9.
15. *Wu X. S., Chen W. Y., Zhao X. L., Zhang W. P.* Micromotor with electromagnetically levitated rotor using separated coils // Electronics Letters, 2004. V. 40, no. 16. P. 996-997. DOI: 10.1049/el:20040601.

16. Tsai N. C., Huang W. M., Chiang C. W. Magnetic actuator design for single-axis micro-gyroscopes //Microsystem technologies, 2009. V. 15. P. 493-503. DOI: 10.1007/s00542-008-0769-y.
17. Luan B. et al. High precision magnetic levitation actuator for micro-EDM //Actuators. – MDPI, 2022. – №. 11. – №. 12. – P. 361.
18. Xiao Q. et al. Design and experiment of an electromagnetic levitation system for a micro mirror //Microsystem Technologies. – 2019. – T. 25. – C. 3119-3128.
19. Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Korvink J., Badilita V. Stable dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions //International Journal of Mechanical Sciences, 2017. V. 131. P. 753-766. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.08.016.
20. Jayawant B. V. Electromagnetic suspension and levitation //Reports on Progress in Physics, 1981. V. 44. no. 4. P 411. DOI: 10.1088/0034-4885/44/4/002.
21. Kim N. H., Ge L. Dynamic modeling of electromagnetic suspension system //Journal of Vibration and Control, 2013. V. 19. no. 5. P. 729-741. DOI: 10.1177/107754631243860.
22. Gysen B. L., Janssen J. L., Paulides J. J., Lomonova E. A. Design aspects of an active electromagnetic suspension system for automotive applications //IEEE transactions on industry applications, 2009. V. 45. no. 5. P. 1589-1597. DOI: 10.1109/TIAS.2008.181.
23. Chu S. Y., Cui X., Zan X., Avestruz A. T. Transfer-power measurement using a non-contact method for fair and accurate metering of wireless power transfer in electric vehicles //IEEE Transactions on Power Electronics, 2021. V. 37. no. 2. P. 1244-1271. DOI: 10.1109/TPEL.2021.3105689.
24. Lohöfer G. High-resolution inductive measurement of electrical resistivity and density of electromagnetically levitated liquid metal droplets //Review of Scientific Instruments, 2018. V. 89. no. 12. P. 124709 DOI: 10.1063/1.5065482.
25. Udalov P., Lukin A., Popov I., Skubov D. Analysis of the Equilibrium of a Magnetic Contactless Suspension / Proceedings of the Conference on Microactuators and Micromechanisms. New York City, Springer International Publishing. P. 183-190. 2022. DOI: 10.1007/978-3-031-20353-4.
26. Mamleyev E. R., Lee C. H., Korvink J. G., Kohl M., Poletkin K. V., Badilita V. Experimental Study and Simulation of Pull-In Behavior in Hybrid Levitation Microactuator for Square-Shaped Proof Masses // Actuators, 2023. V. 12, no. 2. P. 48. DOI: 10.3390/act12020048.
27. Okress E. C., Wroughton D. M., Comenetz G., Brace P. H., Kelly J. C. R. Electromagnetic levitation of solid and molten metals //Journal of applied physics, 1952. V. 23. no. 5. P. 545-552. DOI: 10.1063/1.1702249.
28. Poletkin K., Chernomorsky A. I., Shearwood C., Wallrabe U. A qualitative analysis of designs of micromachined electromagnetic inductive contactless suspension // International Journal of Mechanical Sciences, 2014. V. 82. P. 110-121. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.03.013.
29. Poletkin K. V., Lu Z., Wallrabe U., Korvink J. G., Badilita V. A qualitative technique to study stability and dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions. Proceedings of the 19th International Conference on Solid State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS), New York City, IEE, 2017. DOI: 10.1109/TRANSDUCERS.2017.7994102.
30. Shearwood C., Ho K. Y., Williams C. B., Gong H. Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope //sensors and actuators A: physical, 2000. V. 83. no. 1-3. P. 85-92. DOI: 10.1016/S0924-4247(00)00292-2.
31. Poletkin K. et al. Hybrid electromagnetic and electrostatic micromachined suspension with adjustable dynamics //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2015. – T. 660. – №. 1. – C. 012005. DOI: 10.1088/1742-6596/660/1/012005.
32. Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Badilita V. A new hybrid micromachined contactless

- suspension with linear and angular positioning and adjustable dynamics //Journal of Microelectromechanical Systems, 2015. V. 24. no. 5. P. 1248-1250. DOI: 10.1109/JMEMS.2015.2469211.
33. *Poletkin K. V., Chernomorsky A. I., Shearwood C., Wallrabe U.* An analytical model of micromachined electromagnetic inductive contactless suspension //ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, 2013. V. 56390. DOI: 10.1115/IMECE2013-66010.
  34. *Xia D., Yu C., Kong L.* A micro dynamically tuned gyroscope with adjustable static capacitance //Sensors, 2013. V. 13, no.2. P. 2176-2195. 10.3390/s130202176.
  35. *Udalov P.P., Popov I.A., Lukin A.V., Shtukin L.V., Poletkin K.V.* Parametric Stability of Microscale Contactless Inductive Suspension with an Electrostatic Control Loop of Stiffness // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2024. V. 53. no. 1. P. 25-34.
  36. *Poletkin K., Lu Z., en Hartogh B., Wallrabe U., Badilita V.* Stability and spring constant investigation for micromachined inductivesusensions: Theoretical analysis vs. experimental results // Journal of Physics: Conference Series, 2014. V. 557, no.1. P. 012133. DOI: 10.1088/1742-6596/557/1/012133.
  37. *Kalantarov P. L., Cejtin L. A.* Raschet induktivnostej: Spravochnaya kniga. L.: Energoatomizdat. Leningr. otd-nie, 1986, 488 p. (in Russian)
  38. *Rosa E. B., Grover F. W.* Formulas and tables for the calculation of mutual and self-inductance. Washington, DC: US Government Printing Office, 1948, V. 169. 237 p.
  39. *Poletkin K. V.* Calculation of magnetic force and torque between two arbitrarily oriented circular filaments using Kalantarov–Zeitlin’s method // International Journal of Mechanical Sciences, 2022. V. 220. P. 107159. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2022.107159.
  40. *Babic S., Akyel C.* Magnetic force between inclined circular loops (Lorentz approach) //Progress In Electromagnetics Research B, 2012. V. 38. P. 333-349. DOI: 10.2528/PIERB12011501.
  41. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Korvink J., Badilita V.* Stable dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions //International Journal of Mechanical Sciences, 2017. V. 131. P. 753-766. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.08.016.
  42. *Mamleyev E. R., Lee C. H., Korvink J. G., Kohl M., Poletkin K. V.* Experimental Study and Simulation of Pull-In Behavior in Hybrid Levitation Microactuator for Square-Shaped Proof Masses //Actuators, 2023. V.12. no. 2. P.48. DOI: 10.3390/act12020048.
  43. *Poletkin K.* On the static pull-in of tilting actuation in electromagnetically levitating hybrid micro-actuator: Theory and experiment //Actuators, 2021. V.10. no. 10. P. 256. DOI: 10.3390/act10100256.
  44. *Liu K., Zhang W., Liu W., Chen W., Li K., Cui F., Li S.* An innovative micro-diamagnetic levitation system with coils applied in micro-gyroscope //Microsystem technologies, 2010. V.16. P.431-439. DOI: 10.1007/s00542-009-0935-x.
  45. *Liu W., Zhang W., Chen W.* Simulation analysis and experimental study of the diamagnetically levitated electrostatic micromotor //Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 2019. V. 492. P. 165634. DOI: 10.1016/j.jmmm.2019.165634.
  46. *Xia D., Yu C., Kong L.* A micro dynamically tuned gyroscope with adjustable static capacitance //Sensors, 2013. V.13. no. 2. P. 2176-2195. DOI: 10.3390/s130202176.
  47. *Poletkin K.* Quasi-finite Element Modelling //Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators. 2021. P. 45-58. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0\_4.
  48. *Lu Z., Jia F., Korvink J., Wallrabe U., Badilita V.* Design optimization of an electromagnetic microlevitation system based on copper wirebonded coils. Proceedings of the 2012 Power MEMS, Atlanta, GA, 2012. DOI: 10.13140/2.1.4460.9284.
  49. *Skubov D.Yu., Indeitsev D.A., Udalov P.P., Popov I.A., Lukin A.V., Poletkin K.V.* Nonlinear Dynamics of a Micromechanical Non-Contact Induction Suspension // Mech. Solids, 2023.

- V. 58. no 6. p. 2011-2023. DOI: 10.3103/S0025654423600307.
- 50. *Nayfeh A. H.* Perturbation methods. New-York: John Wiley & Sons, 2008. 425 p.
  - 51. *Gatzke E.* Introduction to MATLAB. In Introduction to Modeling and Numerical Methods for Biomedical and Chemical Engineers. Cham: Springer International Publishing, 2021. P. 99-121. DOI: 10.1007/978-3-030-76449-4.
  - 52. *Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Y. A., Meijer H. G. E., Sautois B.* New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems //Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, 2008. V.14. no. 2. P. 147-175.
  - 53. *Lu Z. et al.* 3D micro-machined inductive contactless suspension: Testing and modeling //Sensors and Actuators A: Physical, 2014. V. 220. P. 134-143.