

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1)

Научная статья
УДК 534.1

DOI: 10.18500/0869-6632-003200
EDN: MSPDVQ

Нестационарное рассеяние упругих волн на сферическом включении

Б. Ш. Усмонов¹, Р. Т. Мухитдинов¹, Н. Р. Элибоев¹✉, Н. Б. Ахмедов²

¹Ташкентский химико-технологический институт, Узбекистан

²Навоийский государственный горно-технологический университет, Узбекистан

E-mail: botir2468@gmail.com, ramazonmuxitdinov@gmail.com,

✉nurali_e@mail.ru, nasriddinaxmedov@gmail.com

Поступила в редакцию 28.07.2025, принята к публикации 27.10.2025,

опубликована онлайн 13.11.2025, опубликована 30.01.2026

Аннотация. Задачи рассеяния упругих волн на различных типах неоднородностей относятся к числу наиболее сложных и актуальных задач динамики деформируемых тел. С прикладной точки зрения это объясняется тем, что информация о динамическом напряжённо-деформированном состоянии в окрестности этих неоднородностей представляет большой интерес для различных инженерных и физических приложений. *Целью* данной работы является исследование нестационарного рассеяния упругих волн на сферическом включении, расположенном в бесконечном упругом пространстве. *Методы.* Для построения решения используются аналитические методы, включая интегральное преобразование Фурье по времени. *Результаты.* Установлено, что собственные функции исследуемой задачи нельзя рассматривать как векторы в гильбертовом пространстве: они не нормируемы из-за экспоненциального роста с расстоянием, что делает необходимым использование обобщённых функций и специальных методов теории рассеяния.

Ключевые слова: сферическая оболочка, заполнитель, колебания, частотное уравнение, коэффициент демпфирования.

Для цитирования: Усмонов Б. Ш., Мухитдинов Р. Т., Элибоев Н. Р., Ахмедов Н. Б. Нестационарное рассеяние упругих волн на сферическом включении // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 1. С. 84–97. DOI: 10.18500/0869-6632-003200. EDN: MSPDVQ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Nonstationary scattering of elastic waves by a spherical inclusion

*B. Sh. Usmonov*¹, *R. T. Mukhitdinov*¹, *N. R. Eliboyev*¹✉, *N. B. Akhmedov*²

¹Tashkent Institute of Chemical Technology, Uzbekistan

²Navoi State University of Mining and Technologies, Uzbekistan

E-mail: botir2468@gmail.com, ramazonmukhitdinov@gmail.com,

✉nurali_e@mail.ru, nasriddinaxmedov@gmail.com

Received 28.07.2025, accepted 27.10.2025, available online 13.11.2025, published 30.01.2026

Abstract. Problems of elastic wave scattering by various types of inhomogeneities rank among the most complex and relevant topics in the field of deformable solid dynamics. From an applied perspective, this is due to the fact that information about the dynamic stress–strain state in the vicinity of such inhomogeneities is of significant interest for various engineering and physical applications. The *purpose* of this study is to investigate the nonstationary scattering of elastic waves by a spherical inclusion embedded in an infinite elastic medium. *Methods.* The analytical approach to the solution involves the application of Fourier integral transforms with respect to time. *Results.* It is established that the eigenfunctions of the considered problem cannot be treated as vectors in a Hilbert space, since they are not square-integrable due to their exponential growth with distance. This necessitates the use of generalized functions and specialized methods from scattering theory.

Keywords: spherical shell, wave scattering, wave amplitude, eigenfunctions, eigenfrequencies.

For citation: Usmonov BSh, Mukhitdinov RT, Eliboyev NR, Akhmedov NB. Nonstationary scattering of elastic waves by a spherical inclusion. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2026;34(1):84–97. DOI: 10.18500/0869-6632-003200

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Рассеивание плоской волны одним сферическим препятствием часто встречается во многих практических задачах геофизики и сейсмологии [1, 2]. В разведочной геофизике сферические объекты обеспечивают хорошее приближение для реальных объектов [3, 4]. Аналитическая формулировка одной сферы может использоваться для построения более сложных решений. В нефтяной промышленности, если нефть захвачена в полостях, разумно допустить, что сейсмическая энергия может быть захвачена резонансом жидкости. Такие резонансы трудно наблюдать из-за контрастов импеданса между породой и жидкостью [5, 6]. Точные решения для задач рассеяния очень актуальны. Хотя аналитические решения существуют для некоторых типов препятствий (сферы, цилиндра или эллипсоида), полученное понимание имеет важное значение [7, 8]. Задачи дифракции упругих волн на неоднородностях тесно связаны с рассеянными волнами, являются частью классических фундаментальных задач динамики деформируемых тел, и их решение требует сложного математического аппарата [9–11]. Для воздействия на механические и тепловые характеристики материалов довольно часто используют добавление наполнителей [12, 13].

Задача о рассеянии волн на сферической неоднородности была поставлена достаточно давно при решении многочисленных научно-технических проблем, связанных, в частности, с дифракцией электромагнитных [14], звуковых [15] и упругих [16] волн. Данная задача рассматривается обычно в стационарной постановке, когда падающая волна представляет собой бесконечную в пространстве и во времени гармоническую волну вида $\exp[i\omega(t - z/c)]$.

При этом возникает ряд трудностей, связанных с тем, что собственные функции исследуемой задачи нельзя рассматривать как векторы в гильбертовом пространстве: они не нормируемы из-за экспоненциального роста с расстоянием. Этот факт, известный в общей теории рассеяния [17], вытекает из следующего обстоятельства.

Рассеянная бегущая волна, уходящая на бесконечность, ведет себя как $u \sim r^{-1} \times \exp[i\omega^{(k)}(t - r/c)]$, где $\omega^{(k)} = \omega_R^{(k)} + i\omega_I^{(k)}$ — комплексные собственные частоты системы «включение–среда» [18].

Таким образом, $u \sim r^{-1} \exp[-\omega_I^{(k)}(t - r/c)] \exp[i\omega_R^{(k)}(t - r/c)]$, и амплитуда рассеянной волны в фиксированной точке уменьшается с течением времени из-за радиальных потерь. Пространственное же распределение амплитуд в каждый данный момент времени экспоненциально увеличивается с ростом r , так как бесконечно удалённые части волны были возбуждены в более ранние промежутки времени, когда амплитуда колебаний неоднородности была бесконечно большой.

Естественно, факт бесконечного возрастания собственных функций не имеет реального физического смысла, так как, согласно принципу причинности, при $r > ct$ в точке r никакого сигнала быть не может. Поскольку мы пытаемся реальную ситуацию подменить некоторой другой, связанной с введением в бесконечном пространстве стационарного процесса, приходится неизбежно сталкиваться с «экспоненциальной катастрофой».

Для её устранения необходимо учесть, что колебания не могут существовать на протяжении бесконечно большого промежутка времени, и, следовательно, мы приходим к необходимости постановки и решения задачи о дифракции импульса той или иной формы с выраженным передним фронтом.

1. Методика

1.1. Постановка задачи и методики решения. Пусть на центр рассеяния радиуса R , помещённый в начало сферической системы координат (r, θ, φ) , совмещённой обычным образом с декартовой системой координат (x, y, z) , падает плоская волна смещения. Уравнения движения сферического тела ($k = 2$) и окружающей его среды ($k = 1$) имеют следующий вид:

$$\mu_k \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{U} - (\lambda_k + 2\mu_k) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} + \rho_k \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь λ_k, μ_k — коэффициенты Ламе для окружающей среды ($k = 1$) и сферических тел ($k = 2$), ρ_k — плотности материалов, $\vec{U}_k(u_{rk}, u_{\theta k}, u_{\varphi k})$ — вектор перемещений.

На контакте двух тел при $r = R$ выполняется равенство смещений и напряжений (условие жёсткого контакта):

$$u_{r1} = u_{r2}, \quad u_{\theta 1} = u_{\theta 2}, \quad u_{\varphi 1} = u_{\varphi 2}, \quad \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}, \quad \sigma_{r\theta 1} = \sigma_{r\theta 2}, \quad \sigma_{r\varphi 1} = \sigma_{r\varphi 2}. \quad (2)$$

На бесконечности возмущения должны затухать:

$$\vec{U}_1 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty.$$

А также заданы начальные условия:

$$\vec{U}_k|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \vec{U}_k}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Обозначим через c_{pk} и c_{sk} (для $k = 1, 2$) скорости продольных и поперечных волн соответственно. Предположим для определённости, что волна движется в положительном направлении оси Oz . Тогда вектор смещения

$$\vec{U}_1^{(p)} = \vec{e}_1 U_0 \left(\tau_q - \frac{z}{R} - 1 \right) H \left(\tau_q - \frac{z}{R} - 1 \right), \quad (4)$$

где \vec{e}_1 — единичный вектор, задающий поляризацию волны, $\tau_1 = c_1 e / R$ — безразмерное время, $H(x)$ — ступенчатая функция Хэвисайда.

Для решения поставленной задачи воспользуемся интегральным преобразованием Фурье по времени, которое определим следующими формулами:

$$f_k(x_q) = \int_{-\infty}^{\infty} F_k(\tau_1) \exp(-ix_q \tau_1) d\tau_1, \quad F_k(\tau_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x_q) \exp(ix_q \tau_1) dx_q, \quad (5)$$

где x_q — параметр преобразования, имеющий смысл безразмерной частоты:

$$x_q = \frac{\omega R}{c_{p1}} = k_{q1} R.$$

$k_{11} = \omega / c_{p1}$; ω — частота; $c_{p1} = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}}$ — скорость распространения продольных волн в среде.

Уравнение Ламе (1) после применения преобразования (5) принимает следующий вид:

$$\mu_k \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}_k - (\lambda_k + 2\mu_k) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}_k - \rho_k \omega^2 \vec{u}_k = 0. \quad (6)$$

Применяя преобразование Фурье к падающему импульсу, получим

$$u_1^{(p)} = \vec{e}_1 \exp(-ik_{q1} z) \eta(x_q). \quad (7)$$

Здесь

$$\eta(x_q) = \exp(-ix_q) g(x_q), \quad g(x_q) = \int U_0(T_q) \exp(-ix_q T_q) dT_q, \quad T_q = \tau_q - \frac{z}{R} - 1. \quad (8)$$

Решение уравнений (4) ищется, как известно [7], в виде

$$\vec{u}_k = \frac{1}{k_{pk}} \operatorname{grad} \psi_{0k} + \frac{1}{k_{sk}} \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\vec{r} \psi_{1k}) + \operatorname{rot} (\vec{r} \psi_{2k}), \quad (9)$$

причем потенциалы ψ_j удовлетворяют скалярному уравнению Гельмгольца, и решение выражается следующим образом:

$$(\psi_{0k}, \psi_{1k}, \psi_{2k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{mnk}, B_{mnk}, C_{mnk}) b_n(lr) \Phi_n^m(0, \varphi), \quad k = \begin{cases} k_p, & j = 0, \\ k_s, & j = 1, 2. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $\Phi_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi)$, а $b_n(\xi)$ — сферическая функция Бесселя. Для внешней задачи в качестве $b_n(\xi)$ необходимо брать функцию Ханкеля второго рода: $b_n(\xi) = h_n^{(2)}(\xi) \equiv \equiv h_n(\xi)$, выделяющую на бесконечности расходящиеся волны. Для внутренней задачи $b_n(\xi) = j_n(\xi)$, которая удовлетворяет условию ограниченности в нуле. Падающую плоскую волну можно разложить по регулярным векторным собственным функциям \vec{L}_{0mn}^1 , \vec{M}_{0mn}^1 , \vec{N}_{0mn}^1 векторного уравнения Гельмгольца [19]:

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \exp(-ikz) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (-i)^n [M_{c1n}^1 + iN_{c1n}^1], \\ \vec{e}_y \exp(-ikz) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (-i)^n [M_{c1n}^1 - iN_{s1n}^1], \\ \vec{e}_z \exp(-ikz) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n L_{c0n}^1, \end{aligned} \quad (11)$$

где s и c обозначают $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в выражениях для собственных векторов.

Сами векторы $\vec{L}, \vec{M}, \vec{C}$ определяются из условий непрерывности вектора смещений:

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_\varphi \vec{e}_\varphi,$$

а также вектора напряжений:

$$\vec{\sigma}_n = \sigma_{rr} \vec{e}_r + \tau_{r\theta} \vec{e}_\theta + \tau_{r\varphi} \vec{e}_\varphi$$

на границе неоднородности и вмещающей среды.

При $r = R$ должны выполняться следующие соотношения:

$$\vec{u}_1^{(p)} + \vec{u}_1 = \vec{u}_2, \quad \vec{\sigma}_1^{(p)} + \vec{\sigma}_1 = \vec{\sigma}_2. \quad (12)$$

Рассчитав смещения и напряжения из потенциалов ψ_j и подставив полученные выражения в граничные условия (12), а также воспользовавшись ортогональностью сферических волновых функций на поверхности сферы, приходим к системе алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов. Отметим, что в случае рассеяния импульса продольной волны, как следует из (11), наблюдается вырождение по параметру m (при $m = 0$), и, следовательно, зависимость от азимутальной координаты φ в общем решении отсутствует. В случае рассеяния поперечной волны будем для определённости считать, что она поляризована в направлении \vec{e}_z . Рассеянное поле смещений во вмещающей среде выражается следующими формулами (поскольку нас интересует только внешнее поле, индекс 2 здесь и в дальнейшем будем опускать):

$$\begin{aligned} u_{r1} &= \eta(x_q) \cos(m\varphi) \sum_{n=m}^{\infty} \Omega_q \left[d_1(k_p r) \frac{A_{mn}}{k_p r} + n(n+1) h_n(k_s r) \frac{B_{mn}}{k_s r} \right] P_n^m(\cos \theta), \\ u_{\theta 1} &= \eta(x_q) \cos(m\varphi) \sum_{n=m}^{\infty} \Omega_q \left\{ \left[h_n(k_p r) \frac{A_{mn}}{k_p r} + d_2(k_s r) \frac{B_{mn}}{k_s r} \right] \tau_n(\theta) + i h_n(k_s r) \pi_n(\theta) C_{mn} \right\}, \\ u_{\varphi 1} &= -\eta(x_q) \sin(m\varphi) \sum_{n=m}^{\infty} \Omega_q \left\{ \left[h_n(k_p r) \frac{A_{mn}}{k_p r} + d_2(k_s r) \frac{B_{mn}}{k_s r} \right] \tau_n(\theta) + i h_n(k_s r) \pi_n(\theta) C_{mn} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Причём в случае падения продольной волны ($q = p, m = 0$):

$$\Omega_p = (-i)^{n+1} (2n+1), \quad C_{0n} = 0,$$

а в случае падения поперечной волны ($q = s, m = 1$):

$$\Omega_p = (-i)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

В уравнении (13) введены сокращённые обозначения:

$$\begin{aligned} d_1(k_p r) &= n h_n(k_p r) - (k_p r) h_{n+1}(k_p r), \\ d_2(k_s r) &= (n+1) h_n(k_s r) - (k_s r) h_{n+1}(k_s r), \\ \tau_n(\theta) &= \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta}, \quad \pi_n(\theta) = \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Формулы для коэффициентов рассеяния, характеризующих внешнее дифрагированное поле, можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\Delta_n^a(\omega)}{\Delta_n(\omega)} \cdot \frac{\gamma j_n(x_s)}{h_n(x_s)}, & b_n &= \frac{\Delta_n^b(\omega)}{\Delta_n(\omega)} \cdot \frac{j_n(x_s)}{h_n(x_s)}, \\ c_n &= \frac{\Delta_n^c(\omega)}{\delta_n(\omega)} \cdot \frac{j_n(x_s)}{h_n(x_s)}, & A_n &= \frac{\Delta_n^A(\omega)}{\Delta_n(\omega)} \cdot \frac{j_n(x_p)}{h_n(x_p)}, \\ B_n &= \frac{\Delta_n^E(\omega)}{\Delta_n(\omega)} \cdot \frac{j_n(x_p)}{\gamma h_n(x_s)}, & C_n &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\gamma = c_{s2}/c_{p2}$, $a_n = A_{1n}$, $b_n = B_{1n}$, $c_n = C_{1n}$ — коэффициенты рассеяния поперечной волны, $A_n = A_{0n}$, $B_n = B_{0n}$, $C_n = C_{0n}$ — коэффициенты рассеяния продольной волны, $\Delta_n^{a,b,c,A,B}(\omega)$, $\Delta_n(\omega)$, $\delta_n(\omega)$ — некоторые определители, элементы которых зависят от отношений j_{n+1}/j_n (функции Бесселя) или h_{n+1}/h_n (функции Ханкеля). Можно отметить, что уравнения

$$\Delta_n(\omega) = 0, \quad \delta_n(\omega) = 0 \quad (15)$$

определяют соответственно собственные комплексные частоты сфероидальных и крутильных колебаний сферической неоднородности в бесконечной упругой среде [20].

Решение во временной области находится посредством обратного преобразования Фурье:

$$U(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \exp(ix\tau) dx, \quad (16)$$

где $u(x)$ определяется формулами (13).

Выпишем (16) в явном виде в приближении волновой зоны ($r \gg 1$). Пренебрегая членами порядка r^{-2} и воспользовавшись асимптотическим представлением функции Ханкеля:

$$h_n(\xi) \equiv h_n^{(2)}(\xi) \sim \frac{1}{\xi} i^{n+1} e^{-i\xi},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{\cos m\varphi}{2\pi i} \frac{R}{r} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_q) \frac{S_1(0, x_q)}{x_p} \exp(i\tau'_q x_q) dx_q, \\ U_\theta &= \frac{\cos m\varphi}{2\pi i} \frac{R}{r} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_q) \frac{S_2(0, x_q)}{x_s} \exp(i\tau''_q x_q) dx_q, \\ U_\varphi &= \frac{\sin m\varphi}{2\pi i} \frac{R}{r} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_q) \frac{S_3(0, x_q)}{x_s} \exp(i\tau''_q x_q) dx_q, \end{aligned} \quad (17)$$

где амплитудные функции $S_j(0, x_q)$ записываются в виде

$$\begin{aligned} S_1(0, x_q) &= \sum_{n=m}^{\infty} i^{n+1} \Omega_q P_n^m(\cos \theta) A_{nm}, \\ S_2(0, x_q) &= \sum_{n=m}^{\infty} i^{n+1} \Omega_q [\tau_n(\theta) B_{mn} + \pi_n(\theta) C_{mn}], \\ S_3(0, x_q) &= \sum_{n=m}^{\infty} i^{n+1} \Omega_q [\pi_n(\theta) B_{mn} + \tau_n(\theta) C_{mn}]. \end{aligned} \quad (18)$$

В случае рассеяния продольного импульса

$$q = p, \quad m = 0, \quad C_{0n} = 0, \quad \tau'_p = \tau_p - \frac{r}{R} - 1, \quad \tau''_p = \tau_p - \frac{r}{\gamma R} - 1.$$

Для поперечного импульса

$$q = s, \quad m = 1, \quad C_{0n} = 0, \quad \tau'_p = \tau_s - \frac{\gamma r}{R} - 1, \quad \tau''_s = \tau_s - \frac{r}{\gamma R} - 1.$$

Чтобы иметь возможность вычислить интеграл (17) в конечном виде, необходимо конкретизировать вид падающего импульса (4). В качестве зондирующего сигнала выбираем импульс Берлоге, который с достаточной точностью аппроксимирует записи реальных сейсмических возбуждений:

$$U_0(T_s) = T_s e^{-aT_s} \sin(bT_s),$$

где a и b — параметры, определяющие импульс. С помощью (8) получим для спектра сигнала:

$$g(x_s) = \frac{2b(a + ix_s)}{[(a + ix_s)^2 + b^2]^2}.$$

В принципе интегралы (16) и (17) можно вычислять приближённо с помощью компьютера путём непосредственного численного интегрирования. Для получения выражения перемещений и напряжений в оригиналах применяется теория вычетов. Этот метод физически хорошо описывает рассматриваемый процесс. Заменяя интегрирование по x_q интегрированием по замкнутому контуру, состоящему из действительной оси и полуокружности в комплексной полуплоскости, интегралы сводятся к сумме вычетов по полюсам подынтегральной функции. Часть этих полюсов является корнями уравнений (15). Это означает, что разложение идёт по функциям, аргументы которых включают комплексные собственные частоты, т.е. по собственным функциям сферической упругой неоднородности. Выпишем (17) в следующем виде:

$$U_n = f(n, r, \theta, \varphi) \int_{-\infty}^{\infty} g(x_p) \frac{\Delta_n^A(x_p) j_n(x_p)}{x_p \Delta_n(x_p) h_n(x_p)} \exp\left(ix_p \left(\tau_p - \frac{r}{R} - 1\right)\right) dx_p. \quad (19)$$

Выбираем падающий импульс таким образом, что его спектр $g(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Следовательно, выражение в скобках равномерно стремится к нулю.

При этом при условии $\tau_p - r/R - 1 > 0$ условия леммы Жордана [21] выполняются, и интегрированием по бесконечной полуокружности можно пренебречь.

Отметим, что последнее неравенство отражает принцип причинности: сигнал не может прийти в точку $r + R$ раньше момента времени $t = (r + R)/c_p$. Таким образом, используя теорию вычетов для вычисления интеграла (19), получаем:

$$U_n = 2\pi i f(n, r, \theta, \varphi) \sum_{k,m} \operatorname{res} \left\{ \frac{g(z) \Delta_n^A(z) j_n(z)}{z \Delta_n(z) h_n(z)} \right\}_{(k) \substack{z=z_1 \\ z=z_2}} \exp(iz\tau'_p) H(\tau'_p), \quad (20)$$

где $z_1^{(k)}$ — полюсы функций $\Delta_n(z) h_n(z)$, а полюсы функции $g(z)$.

Если сферическая неоднородность мало отличается от окружающей среды, тогда мнимая часть $z_1^{(k)}$ мала, и полюсы лежат близко к действительной оси.

В геофизических приложениях часто встречается ситуация, когда рассматриваемое включение достаточно велико по своим размерам $x = \omega R/c = 2\pi R/\lambda \geq 1$ и не слишком сильно отличается своими упруго-плотностными свойствами от вмещающей среды (на 20–30% по скоростям и на 3–5% по плотности).

В этом случае амплитудные функции S_j можно получить простыми приближенными формулами.

Далее показано в работе [21], что слабо контрастная неоднородность характеризуется следующими равенствами:

$$S_1(\theta, x_p) \approx S_2(\theta, x_s) \approx S_3(\theta, x_s) \approx S(\theta, x_q),$$

и получено выражение для $S(\theta, x_q)$ в виде суммы двух слагаемых:

$$S(\theta, x_q) = S_d(\theta, x_q) + S_\tau(\theta, x_q).$$

Первое слагаемое даёт известную картину дифракции Фраунгофера, а второе обусловлено лучами, прошедшими сквозь включение.

Физически это вполне оправданно, поскольку в силу слабой контрастности неоднородности лучами, претерпевающими отражения внутри сферы, можно пренебречь.

Отметим, однако, что если дифракционное слагаемое

$$S_d(\theta, x_q) = x_q^2 \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \frac{I_1(\theta x_q)}{\theta x_q} \quad (21)$$

вполне удовлетворяет требованиям геофизической точности [22], то второе слагаемое

$$S_\tau(\theta, x_q) = -2ix_q \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \frac{\alpha_q - 1}{4(\alpha_q - 1)^2 + \theta^2} \exp \left[-ix_q \sqrt{4(\alpha_q - 1)^2 + \theta^2} \right], \quad (22)$$

где $\alpha_q = c_{q2}/c_{q1}$, справедливо, вообще говоря, только в малоугловом приближении ($\theta \approx 0$) и имеет весьма приближённый характер.

Используя слабоконтрастное приближение, коэффициенты рассеяния можно представить в следующем виде:

$$A_n \approx b_n \approx c_n \approx \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon_a}} \right), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_q &= x [(\alpha \sin d_1 - \sin d) + (d - d_1) \cos d], \\ \cos d &= \frac{\gamma}{x}, \quad \cos d_1 = \frac{\gamma}{\alpha x}, \quad \left(\gamma = n + \frac{1}{2} \leq x \right). \end{aligned}$$

Подставляя (23) в (22) и заменяя функции Лежандра их асимптотическими представлениями, получим [23]:

$$S(\theta, x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \sum \sqrt{\gamma} \cos \left(\gamma \theta - \frac{\pi}{4} \right) [1 - \exp(-2i\varepsilon_a)]. \quad (24)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках, выражаемое единицей, даёт дифракционную картину Фраунгофера. Для того чтобы оценить второе слагаемое, заменим сумму интегралом, который представим в следующем виде:

$$S_\tau(\theta, x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \frac{1}{2} \left[\int_0^x \sqrt{\gamma} e^{i\varphi_+(\gamma)} d\gamma + \int_0^x \sqrt{\gamma} e^{i\varphi_-(\gamma)} d\gamma \right], \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= 2x [\sin d - \alpha \sin d_1 + (d_1 - d) \cos d] + \left(\gamma \theta - \frac{\pi}{4} \right), \\ \varphi_- &= 2x [\sin d - \alpha \sin d_1 + (d_1 - d) \cos d] - \left(\gamma \theta - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Вычислим интегралы асимптотически по формулам метода стационарной фазы [24]:

$$\int \sqrt{\gamma} e^{i\varphi(\gamma)} d\gamma \approx \sqrt{\frac{2\pi\gamma_0}{|\varphi''(\gamma_0)|}} \exp \left\{ i \left[\varphi(\gamma_0) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \varphi''(\gamma_0) \right] \right\}. \quad (26)$$

Найдя сначала точку γ_0 , в окрестности которой фаза стационарна, имеем для неё условие $\varphi'_{\pm}(\gamma_0) = 0$, то есть $2(d_1 - d) \pm \theta = 0$. Для получения приближенного рассеяния поля используем методику, разработанную Дубровским В. А. и Марочником В. С. [25].

Тогда выражение для рассеянного поля смещений поперечного импульса выражается через вычисленные интегралы следующим образом:

$$\begin{aligned} U_r &\approx 0, \\ U_{\theta} &= \frac{R}{r} \cos \varphi \left[\sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} I_1^s - I_2^s \right], \\ U_{\varphi} &= -\frac{R}{r} \sin \varphi \left[\sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} I_1^s - I_2^s \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь

$$I_1^s = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} x_s g(x_s) \frac{J_1(\theta x_s)}{\theta x_s} \exp(i\tau_s'' x_s) dx_s. \quad (28)$$

В случае $\tau_s'' \geq 0$ его можно вычислить с помощью теории вычетов, так как условия леммы Жордана выполнены. В итоге получим

$$I_1^s = \operatorname{Re} \left\{ e^{i\tau_s'' v} \left[i J_0(\theta v) - \frac{J_1(\theta v)}{\theta v} (\tau_s'' v + i) \right] \right\} \quad (\tau_s'' \geq 0), \quad v = b + ia.$$

Если $\tau_s'' < 0$, то воспользуемся интегральным представлением [24]:

$$\frac{J_1(\theta x)}{\theta x} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \exp(i\theta x w) \sqrt{1 - w^2} dw.$$

Подставив последнюю формулу в (26) и поменяв порядок интегрирования, вычислим внутренний интеграл по теории вычетов:

$$I_1^s = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \exp(-\alpha y) \sqrt{1 - w^2} [(ay - 1) \sin(by) - by \cos(by)] H(y) dw,$$

где $y = \tau_s'' + \theta w$. В случае рассеяния продольного импульса имеем

$$\begin{aligned} U_{\theta} &\approx 0, \\ U_r &\approx \frac{R}{r} \left[-\frac{i}{2\pi} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} g(z_s) z_s \frac{j_1(\theta z_s)}{\theta z_s} e^{i\tau_s'' z_s} dz_s - D_s (\tau_s'' - 2\delta_s) e^{-2\delta_s} \right], \end{aligned} \quad (29)$$

где интегралы вычисляются численно методом Ромберга.

Численные результаты получены на основе комплексного программного обеспечения MATLAB. Корни (полюсы) трансцендентного уравнения находятся с помощью метода Мюллера.

2. Результаты и анализ

При вычислениях приняты следующие значения параметров:

$$\alpha_p = \frac{c_{p1}}{c_{p2}} = 0.91, \quad \alpha_s = \frac{c_{s1}}{c_{s2}} = 0.75, \quad \gamma = \frac{c_{p1}}{c_{s2}} = 0.72, \quad \eta = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 0.94.$$

На рис. 1 показаны результаты расчётов рассеянной радиальной компоненты смещения u_r по разработанным методикам для случая рассеяния импульса продольной волны. Результаты сравнения при $\theta = 10^\circ$ с точными данными [25] совпадают с разностями до 9%.

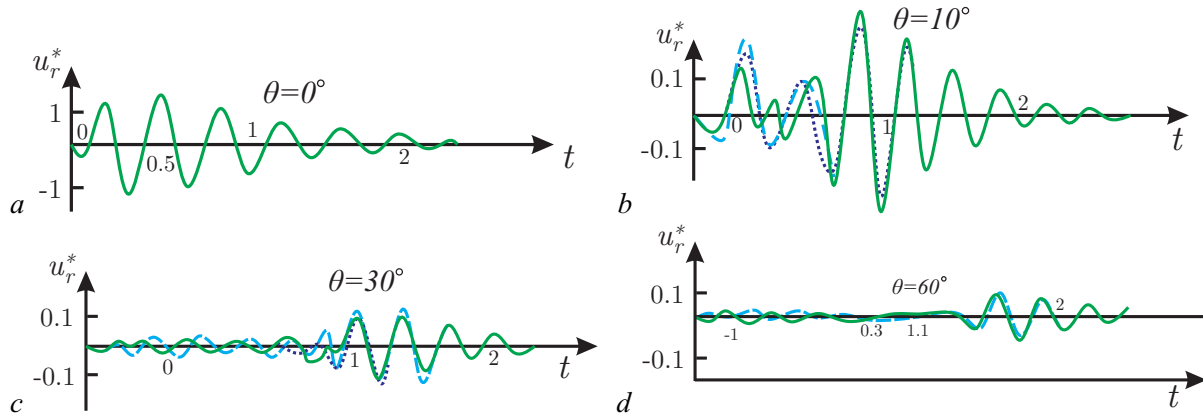


Рис. 1. Зависимость рассеяния радиальной компоненты смещения от времени при падении продольного импульса

Fig. 1. Time dependence of the scattering of the shear component under the incidence of a longitudinal pulse

В соответствии с заданным параметром α_p определено, что приближенными формулами можно пользоваться в диапазоне углов рассеяния

$$0 \leq \theta \leq 68^\circ.$$

Следует, кроме того, указать, что при $\theta = 0^\circ$ момент вступления рассеянной волны оказывается несколько «размытым». Это происходит вследствие эффекта Гиббса и для его устранения необходимо, вообще говоря, сглаживать передний фронт падающего импульса.

Проведённые численные расчёты показали, что для решения задачи нестационарного рассеяния волн на слабоконтрастной неоднородности вполне можно использовать сравнительно простые приближённые формулы.

Заключение

Разработана методика расчёта рассеяния волн в сферическом теле при падении продольных или поперечных волн. Также разработана методика и алгоритм для вычисления специальных функций Бесселя и Ханкеля с комплексным аргументом. Полученные результаты по разработанной методике сравниваются с известными методиками.

Установлено, что предложенными приближенными формулами (Дубровского В. А. и Марочника В. С.) можно пользоваться в диапазоне углов рассеяния $0 \leq \theta \leq 68^\circ$.

Список литературы

1. *Formalev V., Kartashov E., Kolesnik S.* Wave heat transfer in anisotropic half-space under the action of a point exponential-type heat source based on the wave parabolic-type equation // J. Eng. Phys. Thermophys. 2022. Vol. 95. P. 366–373. DOI: 10.1007/s10891-022-02490-2.

2. *Формалев В. Ф., Гарибян Б. А., Колесник С. А.* Математическое моделирование динамики тепловых ударных волн в нелинейных локально-неравновесных средах // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2022. № 4(103). С. 80–94. DOI: 10.18698/1812-3368-2022-4-80-94.
3. *Формалев В. Ф., Колесник С. А.* Волновой теплоперенос в теплозащитных материалах с нелинейной зависимостью теплопроводности от температуры экспоненциального типа // ТВТ. 2022 Т. 60, № 5. С. 797–800. DOI: 10.31857/S0040364422050039.
4. *Tushavina O. V., Kriven G. I., Hein T. Z.* Study of thermophysical properties of polymer materials enhanced by nanosized particles // Int. J. Circuits, Syst. Signal Process. 2021. Vol. 15. P. 1436–1442. DOI: 10.46300/9106.2021.15.155.
5. *Sha M., Utkin Y. A., Tushavina O. V., Pronina P. F.* Experimental studies of heat and mass transfer from tip models made of carbon-carbon composite material (CCCM) under conditions of high-intensity thermal load // Per. Tche Quim. 2020. Vol. 17, no. 35. P. 988–997. DOI: 10.52571/ptq.v17.n35.2020.81_sha_pgs_988_997.pdf.
6. *Garnier B., Boudenne A.* Use of hollow metallic particles for the thermal conductivity enhancement and lightening of filled polymer // Polym. Degrad. Stab. 2016. Vol. 127. P. 113–118. DOI: 10.1016/j.polymdegradstab.2015.11.026.
7. *Mohammad S. M. H., Merkel M., Ochsner A.* Influence of the joint shape on the uniaxial mechanical properties of non-homogeneous bonded perforated hollow sphere structures // Comput. Mater. Sci. 2012. Vol. 58. P. 183–187. DOI: 10.1016/j.commatsci.2012.01.024.
8. *Safarov I. I., Teshayev M. H., Juraev Sh. I., Khomidov F. F.* Vibrations of viscoelastic plates with attached concentrated masses // Lobachevskii J. Math. 2024. Vol. 45. P. 1729–1737. DOI: 10.1134/S1995080224601474.
9. *Усмонов Б. Ш., Сафаров И. И., Тешаев М. Х.* Нелинейный флаттер переходного процесса наследственно-деформируемых систем при сверхзвуковом режиме полета // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2024. № 88. С. 124–137. DOI: 10.17223/19988621/88/10.
10. *Safarov I., Nuriddinov B., Nuriddinov Z.* Propagation of own waves in a viscoelastic cylindrical panel of variable thickness // Lobachevskii J. Math. 2024. Vol. 45. P. 1246–1253. DOI: 10.1134/S1995080224600663.
11. *Safarov I., Teshayev M.* Control of resonant oscillations of viscoelastic systems // Theoretical and Applied Mechanics. 2024. Vol. 51, no. 1. P. 1–12. DOI: 10.2298/TAM220510007S.
12. *Сафаров И. И., Тешаев М. Х.* Нестационарные движения сферических оболочек в вязкоупругой среде // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2023. № 83. С. 166–179. DOI: 10.17223/19988621/83/14.
13. *Teshayev M. K., Safarov I. I., Kuldashov N. U., Ishmamatov M. R., Ruziev T. R.* On the distribution of free waves on the surface of a viscoelastic cylindrical cavity // J. Vib. Eng. Technol. 2020. Vol. 8. P. 579–585. DOI: 10.1007/s42417-019-00160-x.
14. *Сафаров И. И., Тешаев М. Х.* Динамическое гашение колебаний твёрдого тела, установленного на вязкоупругих опорах // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 63–74. DOI: 10.18500/0869-6632-003021.
15. *Адамов А. А., Матвеев В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
16. *Fedorov A. Yu., Matveenko V. P., Shardakov I. N.* Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials // IJCIET. 2018. Vol. 9, no. 8. P. 1062–1075.
17. *Быков А. А., Матвеев В. П., Шардаков И. Н., Шестаков А. П.* Ударно-волновой метод контроля процесса устранения трещин в железобетонных конструкциях // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 4. С. 35–41.

18. Karimov K., Akhmedov A., Karimova A. Development of mathematical model, classification, and structures of controlled friction and vibration mechanisms // AIP Conf. Proc. 2023. Vol. 2612. P. 030014. DOI: 10.1063/5.0116891.
19. Safarov I. I. Numerical modeled static stress-deformed state of parallel pipes in deformable environment // Adv. Sci. Technol. Res. J. 2018. Vol. 12, no. 3. P. 114–125. DOI: 10.12913/22998624/92177.
20. Тешаев М. Х., Каримов И. М., Умаров А. О., Жураев Ш. И. Дифракция гармонических сдвиговых волн на эллиптической полости, находящейся в вязкоупругой среде // Известия высших учебных заведений. Математика. 2023. № 8. С. 64–70. DOI: 10.26907/0021-3446-2023-8-64-70.
21. Popova T. V., Mayer A. E., Khishchenko K. V. Evolution of shock compression pulses in polymethylmethacrylate and aluminum // Journal of Applied Physics. 2018. Vol. 123. P. 235902. DOI: 10.1063/1.5029418.
22. Popova T. V., Mayer A. E., Khishchenko K. V. Numerical investigations of shock wave propagation in polymethylmethacrylate // J. Phys.: Conf. Ser. 2015. Vol. 653. P. 012045. DOI: 10.1088/1742-6596/653/1/012045.
23. Bouak F., Lemay J. Use of the wake of a small cylinder to control unsteady loads on a circular cylinder // J. Visualization. 2001. Vol. 4. P. 61–72. DOI: 10.1007/BF03182456.
24. Bhagyashekar M., Rao K., Rao R. M. V. G. K. Studies on rheological and physical properties of metallic and non-metallic particulate filled epoxy composites // J. Reinforced Plastics and Composites. 2009. Vol. 28, iss. 23. P. 2869–2878. DOI: 10.1177/07316844080939.
25. Дубровский В. А., Морозжик В. С. Рассеяние упругих волн на крупномасштабном слабоконтрастном сферическом включении // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 4. С. 32–41.

References

1. Formalev V, Kartashov E, Kolesnik S. Wave heat transfer in anisotropic half-space under the action of a point exponential-type heat source based on the wave parabolic-type equation. J. Eng. Phys. Thermophys. 2022;95:366–373. DOI: 10.1007/s10891-022-02490-2.
2. Formalev VF, Garibyan BA, Kolesnik SA. Mathematical simulation of thermal shock wave dynamics in nonlinear local non-equilibrium media. Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. 2022;4:80–94 (in Russian). DOI: 10.18698/1812-3368-2022-4-80-94.
3. Formalev VF, Kolesnik SA. Wave heat transfer in heat-shielding materials with an exponential-like nonlinear dependence of thermal conductivity on temperature. High Temp. 2022;60:731–734. DOI: 10.1134/S0018151X22050030.
4. Tushavina OV, Kriven GI, Hein TZ. Study of thermophysical properties of polymer materials enhanced by nanosized particles. Int. J. Circuits, Syst. Signal Process. 2021;15:1436–1442. DOI: 10.46300/9106.2021.15.155.
5. Sha M, Utkin YA, Tushavina OV, Pronina PF. Experimental studies of heat and mass transfer from tip models made of carbon-carbon composite material (CCCM) under conditions of high-intensity thermal load. Per. Tche Quim. 2020;17(35):988–997. DOI: 10.52571/ptq.v17.n35.2020.81_sha_pgs_988_997.pdf.
6. Garnier B, Boudenne A. Use of hollow metallic particles for the thermal conductivity enhancement and lightening of filled polymer. Polym. Degrad. Stab. 2016;127:113–118. DOI: 10.1016/j.polydegradstab.2015.11.026.
7. Mohammad SMH, Merkel M, Ochsner A. Influence of the joint shape on the uniaxial mechanical properties of non-homogeneous bonded perforated hollow sphere structures. Comput. Mater. Sci. 2012;58:183–187. DOI: 10.1016/j.commatsci.2012.01.024.

8. Safarov II, Teshayev MH, Juraev ShI, Khomidov FF. Vibrations of viscoelastic plates with attached concentrated masses. *Lobachevskii J. Math.* 2024;45:1729–1737. DOI: 10.1134/S1995080224601474.
9. Usmonov BSh, Safarov II, Teshayev MKh. Nonlinear flutter of the transient process of hereditarily deformable systems in supersonic flight mode. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2024;(88):124–137 (in Russian). DOI: 10.17223/19988621/88/10.
10. Safarov I, Nuriddinov B, Nuriddinov Z. Propagation of own waves in a viscoelastic cylindrical panel of variable thickness. *Lobachevskii J. Math.* 2024;45:1246–1253. DOI: 10.1134/S1995080224600663.
11. Safarov I, Teshayev M. Control of resonant oscillations of viscoelastic systems. *Theoretical and Applied Mechanics.* 2024;51(1):1–12. DOI: 10.2298/TAM220510007S.
12. Safarov II, Teshayev MKh. Unsteady movements of spherical shells in a viscoelastic medium. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2023;(83):166–179. DOI: 10.17223/19988621/83/14.
13. Teshayev MK, Safarov II, Kuldashov NU, Ishmamatov MR, Ruziev TR. On the distribution of free waves on the surface of a viscoelastic cylindrical cavity. *J. Vib. Eng. Technol.* 2020;8:579–585. DOI: 10.1007/s42417-019-00160-x.
14. Safarov II, Teshayev MK. Dynamic damping of vibrations of a solid body mounted on viscoelastic supports. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(1):63–74 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-003021.
15. Adamov AA, Matveenko VP, Trufanov NA, Shardakov IN. *Methods of Applied Viscoelasticity.* Ekaterinburg: UrO RAN; 2003. 411 p.
16. Fedorov AY, Matveenko VP, Shardakov IN. Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials. *IJCIET.* 2018;9(8):1062–1075.
17. Bykov AA, Matveenko VP, Shardakov IN, Shestakov AP. Shock wave method for monitoring crack repair processes in reinforced concrete structures. *Mech. Solids.* 2017;52:378–383. DOI: 10.3103/S0025654417040033.
18. Karimov K, Akhmedov A, Karimova A. Development of mathematical model, classification, and structures of controlled friction and vibration mechanisms. *AIP Conf. Proc.* 2023;2612:030014. DOI: 10.1063/5.0116891.
19. Safarov II. Numerical modeled static stress-deformed state of parallel pipes in deformable environment. *Adv. Sci. Technol. Res. J.* 2018;12(3):114–125. DOI: 10.12913/22998624/92177.
20. Teshayev MKh, Karimov IM, Umarov AO, Zhuraev SI. Diffraction of harmonic shear waves on an elliptical cavity located in a viscoelastic medium. *Russ Math.* 2023;67:44–48. DOI: 10.3103/S1066369X23080108.
21. Popova TV, Mayer AE, Khishchenko KV. Evolution of shock compression pulses in polymethylmethacrylate and aluminum. *Journal of Applied Physics.* 2018;123:235902. DOI: 10.1063/1.5029418.
22. Popova TV, Mayer AE, Khishchenko KV. Numerical investigations of shock wave propagation in polymethylmethacrylate. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2015;653:012045. DOI: 10.1088/1742-6596/653/1/012045.
23. Bouak F, Lemay J. Use of the wake of a small cylinder to control unsteady loads on a circular cylinder. *J. Visualization.* 2001;4:61–72. DOI: 10.1007/BF03182456.
24. Bhagyashekar M, Rao K, Rao RMVGK. Studies on rheological and physical properties of metallic and non-metallic particulate filled epoxy composites. *J. Reinforced Plastics and Composites.* 2009;28(23):2869–2878. DOI: 10.1177/0731684408093976.
25. Dubrovsky VA, Morozhnik VS. Scattering of elastic waves on a large-scale low-contrast spherical inclusion. *Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Physics of the Solid Earth.* 1986;(4):32–41 (in Russian).



Усмонов Ботир Шукуриллаевич — родился в Самаркандской области (1968). Окончил Казанский технический университет (1985–1993) и магистратуру в Университете Андра (Индия) и Техническом университете Гамбург-Харбург (Германия). Работал в Ташкентском государственном техническом институте, Ташкентском авиационном институте (на руководящих должностях), в Университете Конкук (Южная Корея, в должности профессора), в филиале МГУ в Ташкенте и Аппарате Президента РУз. Сотрудничал с компанией Daimler-Benz в Центральной Азии. Заместитель министра высшего образования (2013–2016), затем проректор ТАТУ. С 2020 года — ректор Ташкентского химико-технологического института.

Узбекистан, 100011 Ташкент, ул. Навои, 32
Ташкентский химико-технологический институт
E-mail: botir2468@gmail.com
ORCID: 0000-0002-4654-9782



Мухитдинов Рамазон Тухтаевич — окончил математический факультет Национального университета Узбекистана по специальности «Математика» (1983). Кандидат физико-математических наук (1995), доцент. С 2022 года работает в должности доцента кафедры высшей математики Ташкентского химико-технологического института. Опубликовано более 20 научных статей в отечественных и зарубежных научных журналах и более 30 статей в сборниках материалов международных и республиканских научных конференций.

Узбекистан, 100011 Ташкент, ул. Навои, 32
Ташкентский химико-технологический институт
E-mail: ramazonmuxitdinov@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4235-140X



Элибоев Нурали Ражабалиевич — родился в Нуротинском районе Навоийской области Узбекистана (1990). Окончил факультет механики и математики Национального университета Узбекистана по направлению «Математика» (2016). С 2016 года работает на кафедре высшей математики Ташкентского химико-технологического института, с 2021 года — в должности старшего преподавателя. Научные интересы — механика деформируемых твёрдых тел. Автор научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, 100011 Ташкент, ул. Навои, 32
Ташкентский химико-технологический институт
E-mail: nurali_e@mail.ru
ORCID: 0009-0009-2429-9514



Ахмедов Насриддин Баходирович — родился в Навоийской области Республики Узбекистан (1984). Окончил факультет физики и математики Навоийского государственного педагогического института по направлению «Математика и информатика» (2007). С 2025 года работает в должности старшего преподавателя Университета Алфрагануса. Научные интересы — механика деформируемых твёрдых тел. Является автором научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, 210100 Навои, просп. Галаба, 76
Навоийский государственный горно-технологический университет
E-mail: nasriddinaxmedov@gmail.com
ORCID: 0009-0003-1780-7476