

Нейронная сеть как индикатор связанности в ансамбле хаотических систем

А. В. Шабунин¹✉

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени
Н.Г. Чернышевского, Россия

E-mail: ✉shabuninav@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 12.12.2025, принята к публикации 04.01.2026,
опубликована онлайн 27.01.2026

Аннотация. Цель – разработка и исследование алгоритма определения структуры связей ансамбля хаотических систем в условиях внешнего шума. Метод основан на определении причинности по Грэнджеру и использовании искусственных нейронных сетей прямого распространения, обучаемых с регуляризацией. Результаты. Разработан метод выявления структуры связей в сети хаотических отображений, использующий принцип причинности по Грэнджеру и аппарат искусственных нейронных сетей. Метод является модификацией ранее предложенного алгоритма и позволяет выявлять структуру связей ансамбля в целом за один проход обучения сети. Алгоритм показал свою эффективность на примере небольших ансамблей неидентичных одномерных отображений с линейными функциональными связями. При наличии внешнего шума, маскирующего сигнал, точность метода ухудшается, однако, при небольших интенсивностях шума он остается работоспособным. Обсуждение. Метод показал свою эффективность для простых математических моделей, в том числе и при наличии шума. Однако, возможность его использования при высоком уровне зашумленности требует дополнительных исследований, касающихся использования методов статистической обработки полученных данных. Интересно также рассмотреть, насколько метод сохранит работоспособность при других типах связей.

Ключевые слова: динамический хаос, искусственные нейронные сети, ансамбли отображений, определение структуры связей

Для цитирования: Шабунин А. В. Нейронная сеть как индикатор связанности в ансамбле хаотических систем // Известия вузов. ПНД. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003210. EDN: TRPSXT

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Neural network as an indicator of connectivity in an ensemble of chaotic systems

A. V. Shabunin¹✉

¹Saratov State University, Russia

E-mail: ✉shabuninav@info.sgu.ru

Received 12.12.2025, accepted 04.01.2026, available online 27.01.2026

Abstract. The *purpose* of this work is development and research of an algorithm for determining the structure of coupling of an ensemble of chaotic systems under conditions of external noise. *The method* is based on the Granger causality approach and the use of artificial direct propagation neural networks trained with regularization. *Results.* We have developed a method to identify the structure of couplings of a network of chaotic maps, which is based on the Granger causality principle and artificial neural networks. It represents a modification of the previously proposed algorithm and allows us to find the connectivity of the ensemble as a whole by a single pass of the network training. The algorithm has shown its effectiveness for an example of a small ensemble of non-identical maps with linear couplings. It keeps to work at presences of weak external noise, though the accuracy of the method deteriorates with the noise intensity. *Discussion.* The method has demonstrated its effectiveness for simple mathematical models, including in the presence of noise. However, its effectiveness at larger noise intensity requires additional statistical processing methods. It is also interesting to consider how it works for other types of couplings.

Keywords: dynamical chaos, artificial neural networks, ensembles of maps, couplings structure identification

For citation: Shabunin AV. Neural network as an indicator of connectivity in an ensemble of chaotic systems. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003210

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В работах [1, 2] был рассмотрен алгоритм определения структуры связей в ансамбле хаотических отображений, основанный на использовании искусственной нейронной сети (ИНС), обучаемой с учителем. Такую задачу называют *определением связанности*. Для ее решения используются различные методы анализа сигналов, генерируемых составляющими ансамбль подсистемами, одним из которых является расчет *причинности по Грэнджеру (ПГ)* [3, 4]. Последний основан на предположении, что если система A влияет на систему B , то учет состояния A должен улучшать прогноз поведения B . Это улучшение отражается на уменьшении среднеквадратичной погрешности ошибок предсказания $\varepsilon = \sqrt{\langle |\bar{B} - B|^2 \rangle}$, где \bar{B} – предсказанное значение. Соответственно, степень влияния A на B можно оценить по уменьшению ε за счет учета информации об A : $PI = (\varepsilon^2 - \varepsilon_A^2) / \varepsilon^2$ [5].

Использование ПГ требует построения соответствующего фильтра - предсказателя¹, что само по себе является непростой и неоднозначной задачей. Поэтому, существует множество методов определения связанности, применяющимся к различным природным [6–12] и модельным [13–15] системам. Разнообразие используемых подходов свидетельствует об отсутствии единого эффективного алгоритма определения связанности, поэтому задача его разработки остается актуальной.

¹Фильтром-предсказателем называется $N \times M$ многополином, который по N предыдущим отсчетам сигнала предсказывает M последующих.

Одним из инструментов для прогноза поведения систем по генерируемым ими временным рядам является искусственная нейронная сеть прямого распространения [16, 17]. Способность ИНС к решению подобных задач хорошо известна [18–21]. Кроме того, ИНС обладает собственной сетевой структурой, которая, меняясь в ходе обучения, может, при определенных условиях, подстраиваться под структуру связей ансамбля и тем самым выявлять последнюю. Для обеспечения такой подстройки необходимо использовать процедуру обучения с регуляризацией [22]. Метод регуляризации был впервые предложен А.Н. Тихоновым [23] и получил широкое применение в задачах оптимизации. Суть его заключается во введении т.н. “штрафа за сложность” сети, который обеспечивает “обнуление” ненужных синаптических коэффициентов. Тем самым удаляются “лишние” связи и остаются лишь те, что необходимы для правильного предсказания.

В работе [1] было предложено использовать процедуру обучения с регуляризацией для выявления диффузионных связей между N идентичными одномерными хаотическими отображениями. Для этого ИНС последовательно обучалась предсказанию динамики каждого из N отображений в отдельности, используя в качестве входных данных сигналы от всех узлов сети. По результатам обучения определялось с какими узлами ансамбля связано то отображение, чья динамика предсказывается. Соответственно, для определения всей структуры связей ансамбля требовалось провести N отдельных процедур обучения. Как оказалось, такой метод является избыточным. В настоящей работе мы предлагаем модифицированный алгоритм, позволяющий выявить полную картину связей в ансамбле в результате обучения ИНС к предсказанию его динамики в целом. Кроме того, мы отошли от ранее используемых ограничений на идентичность подсистем и на диффузионный тип связей между элементами ансамбля.

1. Постановка задачи

Рассмотрим сеть из N одномерных хаотических подсистем с дискретным временем, связанных между собой индивидуальными связями:

$$x_i(n+1) = f_i(x_i(n)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \gamma_{ij}(g_{ij}x_j(n)), \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

Здесь $x_i(n)$ — вещественная динамическая переменная, описывающая состояние i -ой подсистемы в момент времени n , f_i — функция, задающая ее индивидуальную динамику, γ_{ij} — функция связи, описывающая воздействие j -го узла на i -й, g_{ij} — соответствующий коэффициент связи.

Будем полагать что все связи являются пассивными, то есть не содержат собственных источников сигналов. Поэтому все $\gamma_{ij}(0) = 0$. Кроме того, предположим, что функции γ_{ij} не принимают в нуле экстремальных или стационарных значений, а динамика ансамбля (1) является финитной. Тогда, при слабых связях (т.е. при $g_{ij} \ll 1/a_j$, где $a_j = \max |x_j|$) их можно линеаризовать в окрестности нуля: $\gamma_{ij}(x) \simeq g_{ij}x$. При условии структурной устойчивости системы (1) такое огрубление не должно существенно сказаться на установившихся колебательных режимах ансамбля и, соответственно, на работе метода определения его связанности. Поэтому, в дальнейшем мы сочли возможным ограничиться рассмотрением только линейных связей.

В данном исследовании в качестве подсистем будем использовать логистические отображения: $f_i = \alpha_i x_i(1 - x_i)$, находящиеся в режиме развитого хаоса; последнее обеспечи-

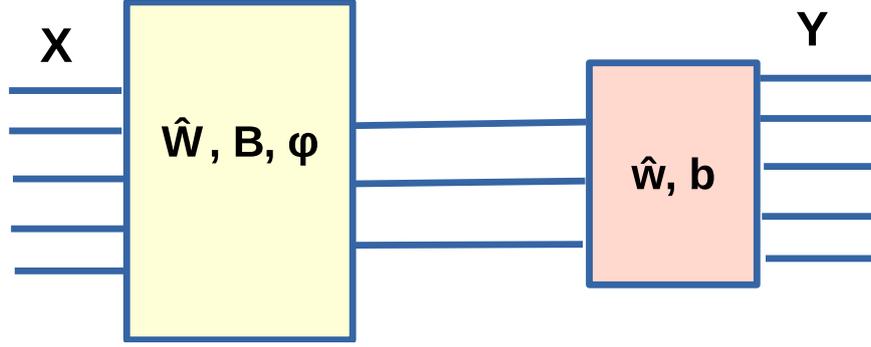


Рис. 1. Схема двухслойной нейронной сети: \mathbf{X} и \mathbf{Y} — вектора входного и выходного сигналов, \hat{W} и \hat{w} — матрицы синаптических коэффициентов нейронов первого и второго слоев, соответственно, вектора \mathbf{B} и \mathbf{b} — значения их смещений, $\varphi(x) = \text{th}(x)$ — функция активации нейронов первого слоя; второй слой является линейным

Fig. 1. The scheme of a two-layer neural network: \mathbf{X} and \mathbf{Y} are vectors of input and output signals, \hat{W} and \hat{w} are matrices of synaptic coefficients of neurons of the first and the second layers, respectively, while vectors \mathbf{B} and \mathbf{b} represent the values of their offsets, $\varphi(x) = \text{th}(x)$ is the activation function of the neurons of the first layer; the second layer is linear

ваются соответствующим выбором параметров α_i . Функции связей между отображениями полагаются линейными: $\gamma_{ij} = g_{ij}x_j$. С учетом вышесказанного система (1) принимает вид:

$$x_i(n+1) = \alpha_i x_i(n) (1 - x_i(n)) + \sum_{j=1}^N g_{ij} x_j(n), \quad i = 1, \dots, N \quad (2)$$

где все $g_{ii} = 0$. Ее удобно переписать в матрично-векторной форме:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n)) + \hat{G}\mathbf{x}(n), \quad (3)$$

где $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ — вектор-столбец переменных (индекс T означает транспонирование), \hat{G} — матрица связей ансамбля ($G_{ij} = g_{ij}$), $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_N(x_N)]^T$ — вектор-функция отображений. Оценка \hat{G} по наблюдаемому сигналу $\mathbf{x}(n)$ и представляет собой решение задачи об определении связанности ансамбля (2).

Алгоритм определения структуры связей основан на использовании ИНС прямого распространения, обучаемой с учителем [16]. Такие нейронные сети успешно выполняют задачи предсказания будущей динамики системы по ее предыдущим данным. Для этого в процессе обучения ИНС перестраивает связи между нейронами. В настоящей работе мы попытаемся организовать этот процесс таким образом, чтобы адаптировать связи нейронной сети под структуру связей ансамбля (2).

Для решения этой задачи используем двухслойную ИНС, структура которой показана на рис. 1. Уравнение такой сети имеет вид:

$$\mathbf{Y} = \hat{w}\varphi(\hat{W}\mathbf{X} + \mathbf{B}) + \mathbf{b}, \quad (4)$$

где \mathbf{X} и \mathbf{Y} — N -мерные вектора входного и выходного сигналов, соответственно. В качестве \mathbf{X} используются значения всех N отображений в текущий момент времени: $\mathbf{X}(n) =$

$[\tilde{x}_1(n), \tilde{x}_2(n), \dots, \tilde{x}_N(n)]^T$. Для исключения влияния таких факторов, как амплитуда и смещение сигналов, они предварительно центрируются и нормируются по амплитуде: $x_i \rightarrow \tilde{x}_i$. Размерность скрытого слоя (m) не связана напрямую с размерностью ансамбля, но определяется сложностью задачи. Рекомендации по выбору этого параметра перечисляются в [16]. В данном исследовании используется $m = 10$. В качестве функции активации $\varphi(x)$ выбран гиперболический тангенс, поскольку он обращается в ноль при нулевом аргументе, и, кроме того, является стандартным выбором для ИНС прямого распространения.

2. Алгоритм обучения ИНС для оценки связанности

2.1. Общее описание В ходе обучения с учителем сеть (4) меняет значения синаптических коэффициентов и векторов смещений, так, чтобы аппроксимировать правые части уравнений (2) с заданной точностью. Возможность этого, при достаточном количестве обучающих данных и нейронов скрытого слоя, гарантирована теоремой Колмогорова-Арнольда [24, 25]. Рассмотрим, как полученные значения коэффициентов матриц \hat{W} и \hat{w} связаны со структурой уравнений ансамбля (3), а именно — с матрицей связей \hat{G} . Для этого запишем связь l -ной компоненты выходного сигнала ИНС (т.е. $Y_l(n)$) со всеми N текущими значениями $\tilde{x}_i(n)$ ($i = 1, \dots, N$):

$$Y_l(n) = b_l + \sum_{k=1}^m w_{lk} \text{th} \left(B_k + \sum_{i=1}^N W_{ki} \tilde{x}_i(n) \right) \quad (5)$$

Если значение аргумента гиперболического тангенса не очень большое, его можно приблизительно заменить линейной функцией:

$$Y_l(n) \simeq b_l + \sum_{k=1}^m w_{lk} B_k + \sum_{k=1}^m w_{lk} \sum_{i=1}^N W_{ki} \tilde{x}_i(n) \quad (6)$$

Заменив порядок суммирования в последнем слагаемом, перепишем это выражение в виде:

$$Y_l(n) \simeq b_l + \sum_{k=1}^m w_{lk} B_k + \sum_{i=1}^N C_{li} \tilde{x}_i(n) \quad (7)$$

где $C_{li} = \sum_k w_{lk} W_{ki}$ — матричный коэффициент произведения $\hat{w} \hat{W}$. Как видно из формулы (7), этот коэффициент характеризует влияние i -го отображения на l -ный выход нейронной сети, то есть указывает на связь между ними. Последний представляет собой предсказание значения $\tilde{x}_l(n+1)$. Таким образом, $N \times N$ матрица $\hat{C} = \hat{w} \hat{W}$ может служить для диагностирования матрицы связей \hat{G} .

Как правило, для обучения ИНС предсказанию временных рядов в качестве целевой функции выбирается средний квадрат ошибок предсказания:

$$\Phi = \frac{1}{KN} \sum_{n=0}^{K-1} \sum_{l=1}^N (Y_l(n) - D_l(n))^2 \quad (8)$$

где K — число обучающих векторов, $D_l(n)$ — предсказываемое значения l -го отображения; в нашем случае им является следующее по времени: $D_l(n) = \tilde{x}_l(n+1)$. Целью обучения является достижение Φ точки глобального минимума. Будет ли значение коэффициентов ИНС

в точке минимума Φ соответствовать структуре связей того ансамбля, чья динамика предсказывается? Очевидно, такое соответствие не обязательно: минимум Φ может достигаться и при избыточных величинах связей между нейронами, поскольку в формуле (8) последние никак не лимитируются. Чтобы побудить ИНС “экономить” связи в ходе обучения, в работе [22] было предложено использовать процедуру регуляризации, заключающуюся во введении “платы” за величины синаптических коэффициентов:

$$P = r \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N W_{ij}^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m w_{ij}^2 \right) \quad (9)$$

которая представляет собой r -ую часть общей суммы от их квадратов. Параметр $r \geq 0$ называют *коэффициентом регуляризации* (КР). В результате, модифицированная целевая функция приобретает вид:

$$\Psi = \Phi + P \quad (10)$$

Данный вид целевой функции характеризует способность предсказывать динамику ансамбля отображений при минимальных связях между нейронами ИНС. При этом, ненужные для успешного предсказания связи подавляются. После их “обнуления” полученные значения коэффициентов C_{ij} позволят диагностировать структуру связей между узлами исследуемого ансамбля.

Таким образом, величины недиагональных коэффициентов матрицы \hat{C} , полученные по завершении процедуры обучения с регуляризацией, используются для диагностирования матрицы \hat{G} . Для этой цели мы применим также процедуру их нормирования на диагональные коэффициенты: $S_{ij} = C_{ij}/C_{ii}$. Значение S_{ij} будем называть *коэффициентом влияния* j -го узла на i -ый, а составленную из них матрицу \hat{S} — *матрицей влияния*. Последняя служит для определения качественного вида матрицы связей \hat{G} .

Таким образом, предлагаемый метод диагностирования связанности ансамбля отображений заключается в следующем:

1. Создается ИНС, структура которой изображена на рис. 1, со входной и выходной размерностями, равными числу элементов ансамбля N и числом нейронов скрытого слоя $m = 10$.
2. Коэффициенты сети инициализируются случайными значениями.
3. Для обучения ИНС формируется обучающее множество из $K = 1000$ векторов $\{\mathbf{X}(n)\}_{n=0}^{K-1}$, каждый из которых представляет собой отображение всего ансамбля в n -ый момент времени: $\mathbf{X}(n) = \tilde{\mathbf{x}}(n)$, а также множество целевых значений $\{\mathbf{D}(n)\}_{n=0}^{K-1}$, в качестве которых берутся последующие значения тех же величин: $\mathbf{D}(n) = \tilde{\mathbf{x}}(n+1)$;
4. Проводится обучение сети, основанное на целевой функции (10). Для обучения используется квазиньютонов алгоритм, относящийся к методам второго порядка и обладающий более быстрой сходимостью по сравнению с градиентными методами. Длительность обучения выбрана в 1000 эпох.
5. Для идентификации связей рассчитывается матрица влияния \hat{S} .

Заметим, что, поскольку метод обучения базируется на случайных начальных значениях коэффициентов ИНС, а функция Ψ имеет множество локальных минимумов, процесс обучения будет давать случайные результаты², обработка которых требует использование статистических методов.

²Поэтому подобные методы называются *стохастическим обучением*

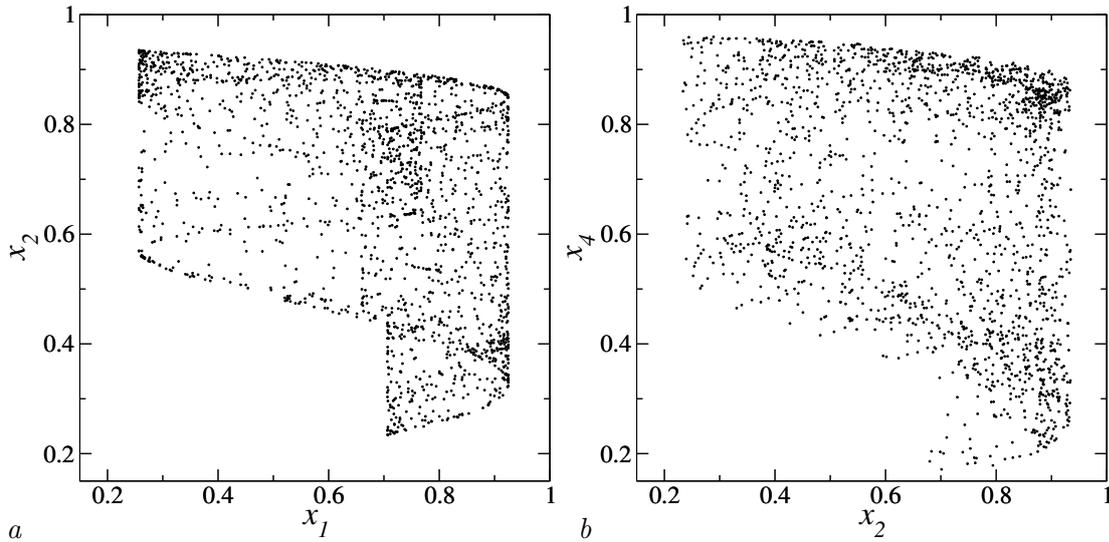


Рис. 2. Проекция фазовых портретов системы (2) на плоскости $x_1 - x_2$ (a) и $x_2 - x_4$ (b) при выбранных параметрах

Fig. 2. Projections of phase portraits of system (2) on $x_1 - x_2$ (a) and $x_2 - x_4$ (b) planes at the chosen parameters

2.2. Численные исследования алгоритма Для проверки алгоритма выберем ансамбль (2) из четырех отображений с параметрами: $\alpha = [3.7, 3, 2.6, 3.1]$ и матрицей связей:

$$G = 0.2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Как видно из (11), между элементами ансамбля действуют одинаковые по величине, однонаправленные связи. При этом, первый узел полностью автономен, на второй действует сигнал от первого узла, на третий — сигналы первого и второго, а на четвертый — только второго. Данная структура связей была выбрана произвольно. Выбранные значения параметров не являются бифуркационными и их малое изменение почти не меняет динамику ансамбля, что свидетельствует о грубости системы. Они соответствуют режиму развитого несинхронного хаоса во всех узлах, что можно увидеть по проекциям фазовых портретов, представленным на рис. 2.

Применим описанную в разделе (2) методику для определения связанности в рассматриваемом ансамбле. Для этого проведем серию повторяющихся попыток обучения ИНС, стартующих с разных начальных значений синаптических коэффициентов, и рассчитаем по результатам каждой из них коэффициенты матрицы \hat{S} . В качестве иллюстрирующих примеров будем использовать значения коэффициентов S_{12} , соответствующее “нулевому” коэффициенту связи и S_{21} , соответствующее величине связи 0.2.

Сначала проведем обучение ИНС без регуляризации ($r = 0$). Обучение проходит успешно, о чем свидетельствует малая величина среднего квадрата ошибок предсказания составляющая $\sim 10^{-4}$ и менее. Однако, получаемые в результате коэффициенты матрицы \hat{S} не обладают какой-либо повторяемостью, о чем свидетельствуют графики, отображающих значения $|S_{12}|$ (см. рис. 3а) и $|S_{21}|$ (см. рис. 3б), рассчитанные по итогам каждой попытки обучения³. Видно, что обе величины демонстрируют случайные флуктуации большой

³Сами коэффициенты могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, однако

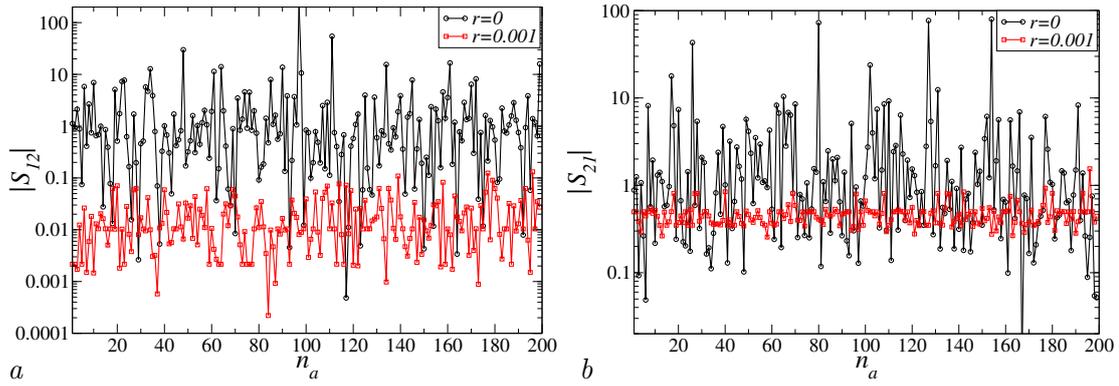


Рис. 3. Зависимость модулей коэффициентов влияния $|S_{12}|$ (a) и $|S_{21}|$ (b) от номера попытки обучения n_a при разных значениях параметра регуляризации r

Fig. 3. The dependence of the modules of influence coefficients $|S_{12}|$ (a) and $|S_{21}|$ (b) on the number of training attempts n_a for different values of regularization parameter r

амплитуды, так что их среднеквадратичные отклонения составляют: $\sigma_{12} \simeq 18$ и $\sigma_{21} \simeq 10$, соответственно. Последние существенно превышают средние величины коэффициентов влияния, что не позволяет сделать на их основе достоверное заключение о соответствующих коэффициентах матрицы \hat{G} . Аналогично ведут себя и остальные коэффициенты S_{ij} . При этом, величина среднего квадрата ошибок предсказания, характеризующая качество обучения, остается достаточно малой: для большинства случаев она менее 10^{-4} и лишь в отдельных точках демонстрирует выбросы до $\Phi \sim 0.001$.

Теперь применим ту же методику при ненулевых значениях параметра регуляризации. Выберем для примера достаточно малое значение: $r = 0.001$. Полученные по результатам попыток обучения значения $|S_{12}|$ и $|S_{21}|$ отображены на тех же рисунках 3a и 3b. Как видно из графиков, регуляризация приводит к существенной стабилизации значений рассчитываемых коэффициентов, уменьшая среднеквадратичные отклонения до $\sigma_{12} \simeq 0.03$ и $\sigma_{21} \simeq 0.15$, соответственно. Одновременно, происходит смещение среднего значения “нулевого” коэффициента $|S_{12}|$ до величины ~ 0.02 .

Таким образом, значение параметра регуляризации существенно влияет на результаты измерений матрицы \hat{S} , делая их более предсказуемыми. Для анализа этого влияния проведем измерения при разных значениях r и построим графики зависимости средних значений коэффициентов (рис. 4a) и их среднеквадратичных отклонений (рис. 4b) от параметра регуляризации. Как видно из рис. 4a, средняя величина “нулевого” коэффициента S_{12} быстро уменьшается до $|\langle S_{12} \rangle| \sim 0.01$ с ростом r от нуля до $r \simeq 0.0075$, после чего она незначительно меняется в окрестности этой величины. Подобным образом ведут себя и остальные “нулевые” коэффициенты. Чтобы не загромождать рисунок большим числом схожих между собой кривых, мы привели график значений, усредненных по всем “нулевым” коэффициентам, который отображен пунктирной линией. Он демонстрирует качественно сходное поведение с $|\langle S_{12} \rangle|$. Что касается среднего значения коэффициента S_{21} , как и других “ненулевых” коэффициентов, оно слабо зависит от r , демонстрируя небольшие осцилляции в окрестности $|\langle S_{12} \rangle| \simeq 0.5$.

Повторяемость результатов измерений S_{ij} может быть охарактеризована значениями их среднеквадратичных отклонений σ_{ij} . Зависимости σ_{12} и σ_{21} от r приведены на рис. 4b. Здесь мы видим быстрое падение на начальном этапе: $r \in [0, 0.001]$, после чего их величины

поскольку графики построены в логарифмическом масштабе, на них отображаются их модули

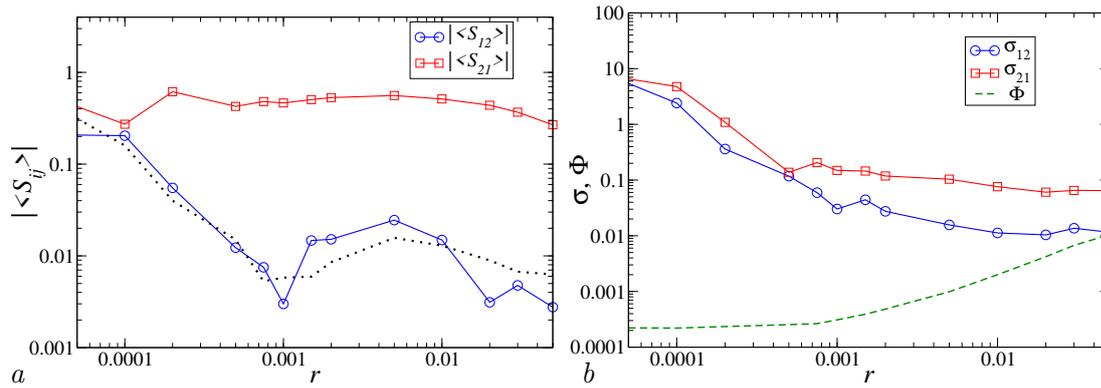


Рис. 4. Зависимость модулей средних значений $|\langle S_{12} \rangle|$ и $|\langle S_{21} \rangle|$ (a), и среднеквадратичных отклонений σ_{12} и σ_{21} (b) от r ; на рисунке (b) штриховой линией приведен также график $\Phi(r)$

Fig. 4. The dependence of $|\langle S_{12} \rangle|$ and $|\langle S_{21} \rangle|$ (a), and the standard deviations σ_{12} and σ_{21} (b) from r ; dashed line in subfigure (b) plots the graph of $\Phi(r)$

стабилизируются. Аналогично ведут себя и остальные коэффициенты σ_{ij} .

Рассмотрим также влияние r на предсказательную способность обученной нейронной сети. Поскольку “штраф” уменьшает роль среднеквадратичной ошибки предсказания в оценке эффективности ИНС, с ростом r величина Φ должна увеличиваться. Данное предположение подтверждается результатами численных экспериментов, график которых отображен на рис. 4b штриховой линией. Последняя представляет собой монотонно возрастающую функцию $\Phi(r)$. При этом, на начальном этапе, при $r < 0.001$, рост среднеквадратичной ошибки предсказания остается незначительным, и лишь при $r > 0.001$ он существенно ускоряется.

Таким образом, для получения устойчивых результатов коэффициентов матрицы влияния, при сохранении способности ИНС к предсказанию динамики ансамбля, необходимо использовать значения коэффициента регуляризации порядка ~ 0.001 . Дальнейшее увеличение r нецелесообразно, поскольку оно слабо влияет на величину и устойчивость рассчитываемых данных, существенно ухудшая работу ИНС как фильтра-предсказателя.

3. Расчет связанности элементов ансамбля

В соответствии с рекомендациями, полученными в предыдущем разделе, выберем значение $r = 0.001$, которое будем использовать в дальнейших вычислениях. Рассмотрим работу алгоритма определения связанности в ходе повторяющихся попыток обучения сети на основе одних и тех же данных, но с разных начальных условий самой сети. В ходе численного моделирования было проведена 1000 таких попыток, для каждой из которых рассчитывались свои значения \hat{S} . По полученным результатам находились функции плотностей вероятности $p_{ij} = p(S_{ij})$; графики для некоторых из них представлены на рис.5. Для визуального отображения были выбраны два коэффициента: S_{12} и S_{41} из разряда “нулевых”, и два: S_{21} и S_{32} из разряда “ненулевых”. Для первых плотность вероятности представляет собой почти симметричную функцию, с резким максимумом вблизи нуля и формой, напоминающей гауссову кривую. При удалении от нуля, значение плотности вероятности быстро уменьшается. Остальные представленные на рисунке графики относятся к действующим связям. Для них плотности вероятности характеризуются сложной формой с несколькими максимумами и значительным разбросом. Поэтому по ним трудно определить

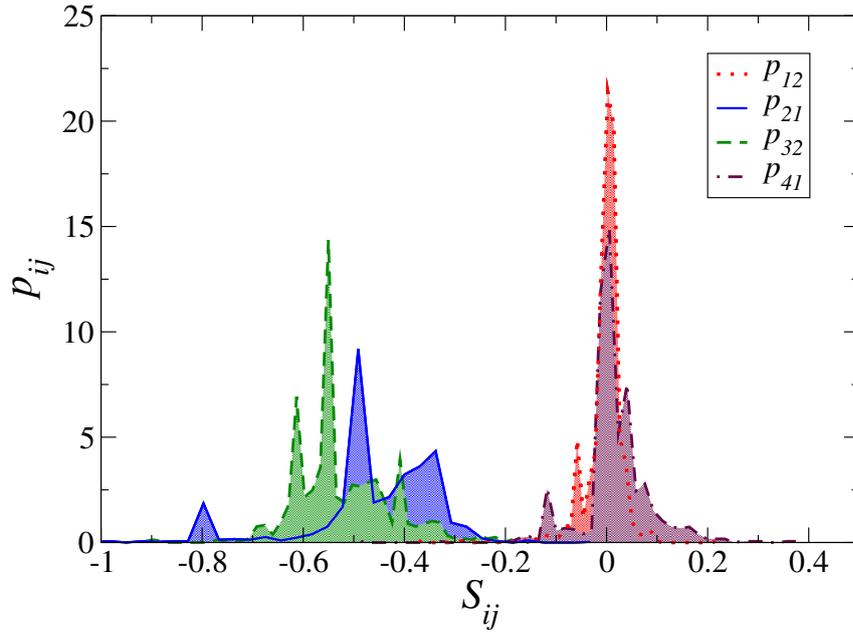


Рис. 5. Плотность вероятности для коэффициентов S_{12} , S_{21} , S_{32} и S_{41} , рассчитанные по результатам серии из тысячи попыток обучения с регуляризацией; $r = 0.001$

Fig. 5. Probability density of coefficients S_{12} , S_{21} , S_{32} and S_{41} , calculated from a series of 1000 training passes with regularization; $r = 0.001$

1	0.002	-0.004	-0.0004
-0.49	1	0.009	0.004
-0.6	-0.55	1	0.016
0.006	-0.55	0.0006	1

Таблица 1 Оценка матрицы \hat{S} по максимумам функций распределения
Tab. 1. Estimation of matrix \hat{S} by maxima of distribution functions

количественно интенсивность связи, можно лишь заключить о ее существовании.

Для получения оценки коэффициентов матрицы влияния будем использовать два способа оценки: наиболее вероятные значения коэффициентов $\tilde{S}_{ij} = \arg(\max(p_{ij}))$ и средние $\langle S_{ij} \rangle$. Оценка, полученная по наиболее вероятным значениям, представлена в таблице 1. Сравнение ее недиагональных коэффициентов с таковыми матрицы \hat{G} демонстрирует их соответствие: значениям “нулевых” коэффициентов матрицы связи соответствуют значения матрицы \hat{S} , порядка одного процента и менее, а остальные коэффициенты находятся в окрестности 0.5. Подсчитанные по тому же набору значений средние от S_{ij} приведены в таблице 2. Сравнение обеих таблиц указывает на их сходство. Поэтому, для оценки связанности можно использовать любой из двух методов статистической обработки результатов, как с помощью расчетов плотностей вероятностей, так и просто с помощью расчетов средних. Разброс получаемых коэффициентов влияния можно оценить по значениям их среднеквадратичных отклонений σ_{ij} . Последние также приведены для недиагональных элементов в таблице 2.

1	-0.004 ± 0.04	-0.004 ± 0.015	-0.0002 ± 0.007
-0.47 ± 0.15	1	0.002 ± 0.03	0.009 ± 0.01
-0.53 ± 0.13	-0.52 ± 0.1	1	0.011 ± 0.02
0.015 ± 0.07	-0.52 ± 0.12	-0.002 ± 0.02	1

Таблица 2 Средние значения коэффициентов матрицы \hat{S} и их среднеквадратичные отклонения
 Tab. 2. The average values of the coefficients of matrix \hat{S} and their standard deviations

4. Измерение связанности в условиях шума

Полученные в разделе (3) результаты относятся к чисто детерминированной системе с хаотической динамикой. Насколько они изменяться при наличии шума, искажающего сигналы подсистем? Данный вопрос принципиально важен для использования алгоритма на практике, поскольку там обычно трудно отделить сигналы от шума. В работе [2] было рассмотрено влияние внутреннего шума (т.е. такого, который создается самими подсистемами ансамбля) и показано, что он почти не препятствует диагностированию связанности ансамбля при помощи ИНС. Здесь мы рассмотрим влияние внешнего шума, который создается сторонними источниками и добавляется к генерируемым сигналам, маскируя их от нейронной сети.

Проведем расчеты S_{ij} при тех же параметрах, что и в предыдущих разделах, но в качестве наблюдаемых данных будем использовать “зашумленные” переменные: $u_i(n) = x_i(n) + \nu_i \xi_i(n)$, где ξ_i — источники белого гауссового шума единичной дисперсии, ν_i — их интенсивности. Далее будем рассматривать одинаковые источники: $\nu_i = \nu$ для всех i . Переменные u_i используются при вычислениях так же, как ранее использовались x_i .

Применим ту же методику для определения коэффициентов связанности, что и в предыдущем разделе, постепенно увеличивая интенсивность шума с $\nu = 0$ до $\nu = 0.05$. Будем отслеживать значения среднеквадратичных отклонений σ_{12} и σ_{21} , среднего квадрата ошибки обучения Φ , а также $|\langle S_{12} \rangle|$ и $|\langle S_{21} \rangle|$. Графики полученных зависимостей представлены на рис. 6а и рис. 6б.

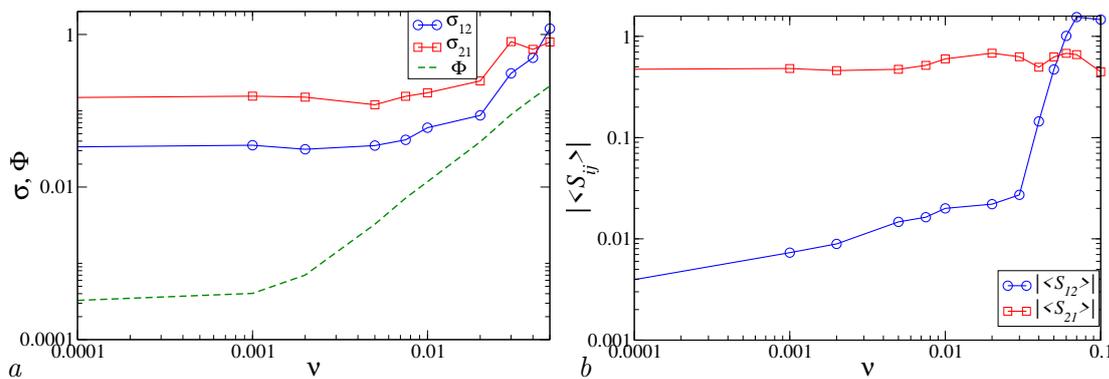


Рис. 6: Зависимость среднеквадратичных отклонений (а) и модулей средних (б) для коэффициентов S_{12} и S_{21} от интенсивности внешнего шума ν ; на рисунке (а) штриховой линией приведен также график $\Phi(\nu)$

Fig. 6. Dependence of the standard deviations (a) and the modulus of averages (b) for the coefficients S_{12} and S_{21} on the intensity of the external noise ν ; the dashed line in figure (a) plots graph $\Phi(\nu)$

Обратим внимание, прежде всего, на влияние маскирующего шума на способность ИНС к предсказанию динамики ансамбля. Как и следовало ожидать (см. график $\Phi(\nu)$ на рис. 6а), с ростом шума предсказательная способность сети ухудшается. Однако, вплоть до $\nu \simeq 0.001$ средняя ошибка предсказания остается небольшой, демонстрируя быстрый рост лишь после $\nu \simeq 0.002$.

Ухудшение работы ИНС в качестве фильтра-предсказателя сказывается и на способности распознавания связанности ансамбля, что выражается как в ухудшении предсказуемости рассчитываемых коэффициентов влияния, так и в смещении их средних значений. Анализ зависимостей средне-квадратичных отклонений показывает (см. рис.6а), что последние остаются небольшими вплоть до $\nu = 0.005$, демонстрируя быстрый рост после $\nu \simeq 0.01$. Что касается самих средних, то значения от ненулевых коэффициентов, взятых по модулю, остается примерно тем же, что и в отсутствие шума. Однако, этого нельзя сказать про нулевые коэффициенты. Как следует из рис. 6b, здесь напротив наблюдается монотонный рост с увеличением интенсивности шума. При этом, до $\nu \simeq 0.02$ скорость роста почти постоянна и остается относительно небольшой, а при $\nu > 0.02$ наблюдается быстрое увеличение до значений, сопоставимых с $|\langle S_{21} \rangle|$. В результате, вплоть до $\nu \simeq 0.002$ величина $|\langle S_{12} \rangle|$ остается в пределах одного процента, а при $0.002 < \nu < 0.02$ – нескольких процентов.

Таким образом, как и следовало ожидать, маскирующий внешний шум ухудшает работу алгоритма. Для рассматриваемой системы алгоритм можно полагать надежно работающим вплоть до $\nu \simeq 0.002$ и работающим до $\nu \simeq 0.02$; при большем шуме его уже невозможно использовать. Поскольку средне-квадратичное отклонение для самих генерируемых отображениями сигналов составляет $\sigma_x \simeq 0.2$, то максимально допустимый уровень внешнего шума составляет десятую, а удовлетворительный — сотую долю от величины сигнала.

Заключение

В статье рассмотрен метод выявления структуры связей в сети неидентичных хаотических отображений посредством ИНС. Он является модификацией предложенного в работе [1] алгоритма и базируется на обучении ИНС прямого распространения с использованием процедуры регуляризации. В отличие от предыдущей версии, новый алгоритм позволяет определить структуру связей всего ансамбля сразу, вместо последовательного выявления связей каждого из отображений в отдельности.

Исследования показали, что метод эффективно работает для неидентичных одномерных хаотических систем при линейном характере связей и произвольно выбранной топологии. Предположительно, он должен остаться работоспособным и для многомерных систем при нелинейных связях, однако, этот вопрос требует дополнительного рассмотрения.

Поскольку предлагаемый метод основан на стохастическом обучении ИНС, его результаты носят вероятностный характер, так что коэффициенты связей, полученные по итогам каждой отдельной попытки обучения, могут отличаться друг от друга. Тем не менее, рассчитанные коэффициенты “недействующих” связей всегда остаются существенно меньшими “действующих” и составляют, как правило, порядка одного процента. Для улучшения достоверности результатов необходимо использовать их статистическую обработку. Последняя заключается как в расчете средних по ансамблю результирующих значений, так и в вычислении максимальных значений функций распределения. Оба подхода дают схожие результаты.

Исследования измерения связанности в условиях внешнего аддитивного белого гауссова шума показало, что результаты существенно зависят от его интенсивности. Слабый

шум (при $SNR > 40$ dB) почти не влияет на достоверность обнаружения связей. Шум средней интенсивности, до $SNR \sim 20$ dB, ухудшает достоверность предсказания, но все же позволяет отличать действующие связи от недействующих. При $SNR < 14$ dB отличия между связями нивелируются, и метод полностью теряет работоспособность.

Список литературы

1. Шабунин А.В. Определение структуры связей в ансамбле хаотических отображений при помощи нейронной сети // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32. С. 636–653. DOI: 10.18500/0869-6632-003111.
2. Шабунин А.В. Определение структуры связей в хаотических и стохастических системах // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 277–287. DOI: 10.18500/1817-3020-2025-25-3-277-287.
3. Granger C.W.J. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods // Econometrica. 1969. Vol. 37, no 3. P. 424. DOI: 10.1017/S009780511753978.002.
4. Granger C.W.J. Testing for causality. A personal viewpoint // J. Economic Dynamics and Control. 1980. Vol. 2. P. 329–352. DOI: 10.1016/0165-1889(80)90069-X.
5. Сысоев И.В. Диагностика связанности по хаотическим сигналам нелинейных систем: решение обратных задач. Саратов: КУБиК. 2019. 46 С.
6. Hesse R., Molle E., Arnold M., Schack B. The use of time-variant EEG Granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies // Journal of Neuroscience Methods. 2003. Vol. 124. P. 27–44. DOI: 10.1016/S0165-0270(02)00366-7.
7. Безручко Б. П., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Смирнов Д. А., Тасс П. А. Моделирование и диагностика взаимодействия нелинейных колебательных систем по хаотическим временным рядам (приложения в нейрофизиологии) // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. С. 323–329. DOI: 10.3367/UFNr.0178.200803h.0323.
8. Мохов И.И., Смирнов Д.А. Диагностика причинно - следственной связи солнечной активности и глобальной приповерхностной температуры Земли // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2008. Т. 44, № 3. С. 283 – 293. DOI: 10.1134/S0001433808030018.
9. Мохов И. И., Смирнов Д. А. Эмпирические оценки воздействия естественных антропогенных факторов на глобальную приповерхностную температуру // Докл. АН. 2009. Т. 426, no 5. С. 679. DOI: 10.1134/S1028334X09050201.
10. Сысоев И. В., Караваев А. С., Наконечный П. И. Роль нелинейности модели в диагностике связей при патологическом треморе методом грейнджерской причинности // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, No 4. С. 81–90. DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-4-81-90.
11. Сысоева М. В., Сысоев И. В. Математическое моделирование динамики энцефалограммы во время эпилептического припадка // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38, No 3. С. 103–110.
12. Sysoev I. V., Sysoeva M. V. Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2015. Vol. 309. P. 9–19. DOI: 10.1016/j.physd.2015.07.005.
13. Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M. Analyzing Multiple Nonlinear Time Series with Extended Granger Causality // Physics Letters A. 2004. Vol. 324, no. 1. P. 26–35. — DOI: DOI: 10.1016/j.physleta.2004.02.032.
14. Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S. Nonlinear parametric model for Granger causality of time series // Physical Review E. 2006. Vol. 73. P. 066216. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.066216.
15. Корнилов М. , Сысоев И. Реконструкция архитектуры связей в цепочке из трех односторонне связанных систем методом причинности по Грейнджеру // Письма в

ЖТФ. 2018. Т. 44, No 10. С. 86–95. DOI: 10.21883/PJTF.2018.10.46103.17201.

16. Хайкин С. Нейронные сети. М: Вильямс. 2006. 1104 с.
17. Галушкин А.И. Нейронные сети. Основы теории. Телеком. 2012. 496 С.
18. Kulkarni D.R., Parikh J.C., Pandya A.S. Dynamic predictions from time series data — an artificial neural network approach // International Journal of Modern Physics C. 1997. Vol. 8. P. 1345–1360. DOI: 10.1142/S0129183197001193.
19. de Oliveira K.A., Vannucci A., Da Silva E.C. Using artificial neural networks to forecast chaotic time series // Physica A. 2000. Vol. 284. P. 393–404. DOI: 10.1016/S0378-4371(00)00215-6.
20. Антимова О.И., Неганов В.А. Прогнозирование и фрактальный анализ хаотических процессов дискретно-нелинейных систем с помощью нейронных сетей // Доклады Академии наук. 2011. Т. 436, № 1. С. 34–37. DOI: 10.1134/S1028335811010034.
21. Шабунин А.В. Нейронная сеть как предсказатель динамики дискретного отображения // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, No. 5. С. 28–72. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-5-58-72.
22. Tank A., Covert I., Foti N., Shojaie A., Fox E. Neural granger causality for nonlinear time Series // arXiv preprint arXiv:1802.05842. 2018.
23. Тихонов А.Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Доклады Академии наук СССР. 1965. Т. 163, № 3. С. 591–594.
24. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // Доклады АН СССР. 1956. Т. 108. С. 179–182.
25. Арнольд В.И. О функции трёх переменных // Доклады АН СССР. 1957. Т. 114. С. 679–681.

References

1. Shabunin AV. Searching the structure of couplings in a chaotic maps ensemble by means of neural networks. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024 ;32(5):636–653. DOI: 10.18500/0869-6632-003111.
2. Shabunin AV. Determining the structure of couplings in chaotic and stochastic systems using a neural network. *Izvestiya of Saratov University. Physics*. 2025; 25(3):277–287 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2025-25-3-277-287.
3. Granger CWJ. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*. 1969; 37(3):424. DOI: 10.1017/CBO9780511753978.002.
4. Granger CWJ. Testing for causality. A personal viewpoint. *J. Economic Dynamics and Control*. 1980; 2:329–352. DOI: 10.1016/0165-1889(80)90069-X.
5. Sysoev IV. Diagnostics of connectivity by chaotic signals of nonlinear systems: solving reverse problems. Saratov: Kubik; 2019. 46 p. (In Russian).
6. Hesse R, Molle E, Arnold M, Schack B. The use of time-variant EEG Granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies. *Journal of Neuroscience Methods*. 2003; 124:27–44. DOI: 10.1016/S0165-0270(02)00366-7.
7. Bezruchko BP, Ponomarenko VI, Prohorov MD, Smirnov DA, Tass PA. Modeling nonlinear oscillatory systems and diagnostics of coupling between them using chaotic time series analysis: applications in neurophysiology. *Phys. Usp*. 2008; 51:304–310. DOI: 10.3367/UFNr0178.200803h0323.
8. Mokhov II, Smirnov DA. Diagnostics of a cause-effect relation between solar activity and the Earth’s global surface temperature. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2008; 44(3):263–272. DOI: 10.1134/S0001433808030018.

9. Mokhov II, Smirnov DA. Empirical estimates of the influence of natural and anthropogenic factors on the global surface temperature. *Doklady Earth Sciences*. 2009; 427(1):798-803. DOI: 10.1134/S1028334X09050201.
10. Sysoev IV, Karavaev AS, Nakonechny PI. Role of model nonlinearity for Granger causality based coupling estimation for pathological tremor. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2010; 18(4):81–90. DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-4-81-90.
11. Sysoeva MV, Sysoev IV. Mathematical modeling of encephalogram dynamics during epileptic seizure. *Technical Physics Letters*. 2012; 38(2):151–154. DOI: 10.1134/S1063785012020137.
12. Sysoev IV, Sysoeva MV. Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2015; 309:9–19. DOI: 10.1016/j.physd.2015.07.005.
13. Chen Y, Rangarajan G, Feng J, Ding M. Analyzing Multiple Nonlinear Time Series with Extended Granger Causality. *Physics Letters A*. 2004; 324(1):26–35. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.02.032.
14. Marinazzo D, Pellicoro M, Stramaglia S. Nonlinear parametric model for Granger causality of time series. *Phys. Rev. E*. 2006; 73:066216. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.066216.
15. Kornilov M, Sysoev I. Recovering the Architecture of Links in a Chain of Three Unidirectionally Coupled Systems Using the Granger-Causality Test. *Technical Physics Letters*. 2018; 44(5):445–449. DOI: 10.21883/PJTF.2018.10.46103.17201.
16. Haykin S. *Neural Networks. New Jersey: Prentice Hall*. 2006.
17. Galushkin AI. *Neural Networks. The theory basics. Telekom*. 2012. 496 p. (In Russian).
18. Kulkarni DR, Parikh JC, Pandya AS. Dynamic predictions from time series data — an artificial neural network approach // *International Journal of Modern Physics C*. 1997; 8(6):1345–1360. DOI: 10.1142/S0129183197001193.
19. de Oliveira KA, Vannucci A, Da Silva EC. Using artificial neural networks to forecast chaotic time series. *Physica A*. 2000; 284(1–4):393–404. DOI: 10.1016/S0378-4371(00)00215-6.
20. Antipov OI, Neganov VA. Neural network prediction and fractal analysis of the chaotic processes in discrete nonlinear systems. *Doklady Physics*. 2011; 56(1):7–9. DOI: 10.1134/S1028335811010034.
21. Shabunin AV. Neural network as a predictor of discrete map dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2014; 22(5):28–72. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-5-58-72.
22. Tank A, Covert I, Foti N, Shojaie A, Fox E. Neural granger causality for nonlinear time Series. *arXiv preprint arXiv:1802.05842*. 2018.
23. Tihonov AN. On incorrect linear algebra problems and a stable solution method. *Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1965; 163(3):591–594.
24. Kolmogorov AN. On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of a smaller number of variables. *Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1956; 108:179–182.
25. Arnold VI. On function of three variables. *Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1957; 114:679–681.