

## Локализованные решения уравнения $\varphi^4$ в модели с тремя одинаковыми точечными примесями.

М. И. Фахретдинов<sup>1</sup>✉, Е. Г. Екомасов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Уфимский университет науки и технологий, Россия  
E-mail: ✉fmi106tf@gmail.com, ekomasoveg@gmail.com

Поступила в редакцию 20.11.2025, принята к публикации 10.02.2026,  
опубликована онлайн 15.02.2026

**Аннотация.** Цель В настоящей работе исследуются коллективные динамические эффекты в неинтегрируемой модели  $\varphi^4$  с тремя идентичными точечными притягивающими примесями. Изучается процесс возбуждения и последующая эволюция долгоживущих локализованных колебаний (примесных мод), инициированных прохождением кинка через систему примесей. Методы. Исследование проводится с использованием комбинированного подхода, сочетающего аналитические методы и прямое численное моделирование. В рамках аналитического рассмотрения, основанного на методе коллективных переменных для малых амплитуд колебаний, выведена система связанных линейных дифференциальных уравнений, описывающая динамику трех осцилляторов. Результаты. Решение этой системы позволило определить спектр коллективных возбуждений, состоящий из трех различных частот нормальных мод. Проанализирована зависимость этих частот от расстояния между примесями, показано их расщепление при малых расстояниях между примесями и асимптотическое слияние в частоту одиночной примеси при увеличении расстояния между примесями. Численное решение исходного нелинейного уравнения в частных производных подтвердило существование трех мод и позволило детально изучить их динамику. Установлено, что в зависимости от начальной скорости кинка и расстояния между примесями могут быть возбуждены различные типы колебаний: первая мода (синфазные колебания), вторая мода (колебания крайних волн в противофазе при неподвижной центральной) и третья мода, характеризующаяся противофазным движением центральной примеси относительно крайних. Обнаружено, что вторая и третья обладают пороговым характером локализации: они вносят вклад в динамику лишь при достижении критического расстояния, когда их частота опускается ниже величины  $\sqrt{2}$ . Сравнение аналитических и численных результатов показало хорошее количественное совпадение для больших расстояний и систематическое расхождение для малых, обусловленное нелинейностью потенциала. Заключение. Результаты работы демонстрируют, что введение третьей примеси приводит к качественному усложнению динамики системы, что открывает возможности для управления нелинейными волнами в средах с несколькими примесями.

**Ключевые слова:** кинк, бризер, уравнение  $\varphi^4$ , примесные моды, численное моделирование.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания, соглашение # 075-03-2024-123/1 от 15.02.2024, тема # 324-21

**Для цитирования:** Фахретдинов М. И., Екомасов Е. Г. Локализованные решения уравнения  $\varphi^4$  в модели с тремя одинаковыми точечными примесями. // Известия вузов. ПНД. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003213. EDN: VJZWZL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Localized solutions of the $\varphi^4$ equation in a model with three identical point impurities.

M. I. Fakhretdinov<sup>1</sup>✉, E. G. Ekomasov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ufa University of Science and Technology, Russia

E-mail: ✉fmi106tf@gmail.com, ekomasoveg@gmail.com

Received 20.11.2025, accepted 10.02.2026, available online 15.02.2026

**Abstract.** *Purpose.* In this paper, we investigate collective dynamic effects in a non-integrable  $\varphi^4$  model with three identical point-like attractive impurities. We study the excitation process and subsequent evolution of long-lived localized oscillations (impurity modes) initiated by the passage of a kink through the impurity system. *Methods.* The study is conducted using a combined approach that integrates analytical methods with direct numerical simulation. Within the analytical framework, based on the method of collective variables for small oscillation amplitudes, a system of coupled linear differential equations is derived to describe the dynamics of three oscillators. *Results.* The solution of this system allowed for the determination of the collective excitation spectrum, consisting of three distinct normal mode frequencies. The dependence of these frequencies on the distance between the impurities is analyzed, demonstrating their splitting at small distances and asymptotic convergence to the single-impurity frequency as the distance increases. Numerical solution of the original nonlinear partial differential equation confirmed the existence of three modes and allowed for a detailed study of their dynamics. It has been established that, depending on the initial kink velocity and the distance between the impurities, various types of oscillations can be excited: the first mode (in-phase oscillations), the second mode (oscillations of the outer waves in anti-phase with a stationary central one), and the third mode, characterized by the anti-phase motion of the central impurity relative to the outer ones. It was found that the second and third modes exhibit a threshold-like localization: they contribute to the dynamics only upon reaching a critical distance, when their frequency drops below  $\sqrt{2}$ . A comparison of analytical and numerical results showed good quantitative agreement for large distances and a systematic discrepancy for small ones, attributed to the nonlinearity of the potential. *Conclusion.* The results of the work demonstrate that the introduction of a third impurity leads to a qualitative increase in the complexity of the system dynamics, which opens up possibilities for controlling nonlinear waves in media with multiple impurities.

**Keywords:** kink, breather,  $\varphi^4$  equation, impurity modes, numerical simulation.

**Acknowledgements.** The authors express gratitude for the financial support rendered to the work on this paper by the State Assignment (Order №075-03-2024-123/1 dated February 15, 2024, topic №324-21).

**For citation:** Fakhretdinov MI, Ekomasov EG. Localized solutions of the  $\varphi^4$  equation in a model with three identical point impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003213

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Нелинейное дифференциальное уравнение  $\varphi^4$ , как имеющее аналитические солитонные решения, интересно с фундаментальной точки зрения [1]. Также оно имеет много приложений в космологии, квантовой теории поля, биофизике, физике конденсированного состояния [1–6]. Для уравнения  $\varphi^4$  есть точное решение в виде кинка, но, в отличие от уравнения синус-Гордона (УСГ) [1, 7] нет локализованных в пространстве решений в виде уединенных солитонов и бризеров. Кинк уравнения  $\varphi^4$  отличается от кинка УСГ наличием внутренней моды колебаний [1]. Было обнаружено долгоживущее нелинейное метастабильное связанное состояние трех кинков, названное «тритон» [8]. Это состояние является продуктом симметричного столкновения двух кинков и антикинка.

Для практических приложений часто, как и УСГ, уравнение  $\varphi^4$  модифицируют, счи-

тая коэффициенты функциями от координат и времени [1, 7, 9–11]. Пространственную модуляцию потенциала часто называют примесью. К настоящему времени подробно исследован случай уравнения  $\varphi^4$  с одной примесью [1, 22]. Было показано, что одиночные точечные примеси способны рассеивать или захватывать кинки, а также генерировать локализованную волну (или примесную моду) [1]. В [12] рассмотрена динамика кинков для модели с одиночными протяженными примесями, имеющими пространственные профили Гаусса или Лоренца. Показано качественное согласие полученных результатов со случаем точечных примесей и существенное количественное влияние профиля примеси на форму локализованной примесной моды и рассеяние кинков на примесях. В [13] исследованы кинк-антикинкковые столкновения в присутствии протяженной примеси гауссовского вида. В [14] рассмотрены решения уравнения  $\varphi^4$  в модели с одиночной примесью, описываемой функцией гиперболического вида, в [15, 16] описываемой функцией прямоугольного вида. Динамика кинка для случая малых возмущений модели  $\varphi^4$  с помощью деформированного потенциала рассмотрена в [17].

Для УСГ в модели с двумя и тремя примесями получено много интересных результатов [18–21]. Для уравнения  $\varphi^4$  динамика локализованных волн была детально изучена для случая одной [22], а также двух примесей, как протяженных [23], так и точечных [24]. В этих работах было установлено, что взаимодействие между примесями приводит к расщеплению частоты одиночной примесной моды на две, соответствующие синфазным и антифазным коллективным колебаниям.

Настоящая работа делает следующий логический шаг и посвящена исследованию локализованных волн в системе с тремя точечными примесями. Этот переход не является тривиальным обобщением, поскольку введение третьей, центральной, примеси качественно изменяет симметрию системы и порождает новые динамические режимы, невозможные в конфигурации из двух примесей. В частности, как будет показано, наряду с модами, аналогичными синфазным и антифазным колебаниям пары, возникает третья мода. Она обладает уникальной структурой: в ней крайние примеси колеблются в фазе друг с другом, но в противофазе к центральной. Фундаментальной особенностью этой моды является пороговый характер её возбуждения. Исследование условий возбуждения этих мод и их роль в динамике системы является основной целью данной работы.

## Основные уравнения и линейный анализ

Рассмотрим модифицированное уравнение  $\varphi^4$ :

$$u_{tt} - u_{xx} + K(x)(u^2 - 1)u = 0, \quad (1)$$

где пространственная неоднородность  $K(x)$  взята в виде трех одинаковых точечных неоднородностей в виде дельта-функций Дирака  $\delta(x)$ ,  $\varepsilon$  - константа,  $d$  — расстояние между примесями:

$$K(x) = 1 - \varepsilon \delta(x) - \varepsilon \delta(x - d) - \varepsilon \delta(x - 2d), \quad (2)$$

Лагранжиан, соответствующий уравнению (1), имеет вид:

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{4} K(x) (u^2 - 1)^2 \right] dx \quad (3)$$

Для решения уравнения (1) с неоднородностью (2) можно использовать как начальное приближение известное точное решение в виде кинка для уравнения  $\varphi^4$  при  $K(x) = 1$  (4).

$$u(x, 0) = \tanh\left(\frac{x - v_0 t}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}}\right). \quad (4)$$

При этом кинк возбуждает локализованные на примесях долгоживущие колебания, также известные как примесные моды. Найдем решение уравнения (1), которое описывает такие колебания. Для этого используем метод коллективных переменных и анзац в виде [1, 22]:

$$u = \pm 1 + a_1(t) \exp(-\varepsilon |x|) + a_2(t) \exp(-\varepsilon |x - d|) + a_3(t) \exp(-\varepsilon |x - 2d|) \quad (5)$$

Подставив анзац (5) в выражение для Лагранжиана (3) и выполнив интегрирование по пространственной переменной, получим эффективный Лагранжиан для коллективных переменных  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $a_3(t)$ . Далее, используя уравнения Лагранжа-Эйлера, получим систему уравнений (6) для  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $a_3(t)$  (заметим, что в нем оставлены только линейные члены по  $a_i(t)$ ). Эта система уравнений эквивалентна системе, полученной в [21] для уравнения синус-Гордона в модели с тремя точечными примесями, однако с иными коэффициентами:

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 + a_1 \omega_1^2 + a_2 k_{12} + a_3 k_{13} = 0, \\ \ddot{a}_2 + a_2 \omega_2^2 + (a_1 + a_3) k_{21} = 0, \\ \ddot{a}_3 + a_3 \omega_1^2 + a_1 k_{13} + a_2 k_{12} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = 2 + \frac{e^{-2d\varepsilon} \varepsilon^2 (-e^{6d\varepsilon} - 2d\varepsilon(1+d\varepsilon) + 2e^{4d\varepsilon}(1+d\varepsilon(3+d\varepsilon)) - e^{2d\varepsilon}(1+4d\varepsilon(1+d\varepsilon(3+d\varepsilon))))}{(-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon)(-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon(1+d\varepsilon))}, \\ \omega_2^2 = \frac{e^{-2d\varepsilon} (-4d\varepsilon^3 - e^{4d\varepsilon}(-2+\varepsilon^2) + e^{2d\varepsilon}(-2+\varepsilon(\varepsilon+2d(-2+3\varepsilon^2+d\varepsilon(-2+\varepsilon^2))))}{-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon(1+d\varepsilon)}, \\ k_{12} = \frac{2e^{-d\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2d^2}{-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon}}, \\ k_{13} = \frac{2e^{-2d\varepsilon} \varepsilon^2 (-1+e^{4d\varepsilon}(-1+d\varepsilon)-3d\varepsilon(1+d\varepsilon)+e^{2d\varepsilon}(2+d\varepsilon(2-d\varepsilon)))}{(-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon)(-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon(1+d\varepsilon))}, \\ k_{21} = -\frac{2e^{-3d\varepsilon} (-1+e^{2d\varepsilon}) \varepsilon^2 (e^{2d\varepsilon} - d\varepsilon)}{-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon(1+d\varepsilon)}. \end{cases} \quad (7)$$

Система (6) имеет решения в виде [21]:

$$\begin{cases} a_1(t) = a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) - a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \\ a_2(t) = \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\ a_3(t) = a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \end{cases} \quad (8)$$

где  $a_{01}$ ,  $a_{02}$ ,  $a_{03}$  — константы, определяемые из начальных условий, а остальные параметры имеют вид:

$$\begin{cases} \Omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + k_{13} \mp \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{2}, \\ \eta_{21} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2 - k_{13} - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{2k_{12}}, \\ \eta_{12} = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13} + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{4k_{21}}, \\ \Omega_3^2 = \omega_1^2 - k_{13}. \end{cases} \quad (9)$$

Частоты примесных мод  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  выражаются через параметры примесей  $\varepsilon$ ,  $d$  следующим

образом:

$$\Omega_1^2 = (2 - \varepsilon^2) + \frac{e^{-2d\varepsilon}\varepsilon^2(-1 + e^{2d\varepsilon}(1 + 2d\varepsilon) - 2d\varepsilon(2 + 3d\varepsilon))}{(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon)(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon(1 + d\varepsilon))} \quad (10)$$

$$- \sqrt{\frac{e^{-4d\varepsilon}\varepsilon^4(1 + 8e^{6d\varepsilon} - 3e^{4d\varepsilon}(5 + 8d\varepsilon) + 2e^{2d\varepsilon}(3 + 4d\varepsilon(3 + 2d\varepsilon)))}{(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon(1 + d\varepsilon))^2}}$$

$$\Omega_2^2 = (2 - \varepsilon^2) + \frac{e^{-2d\varepsilon}\varepsilon^2(-1 + e^{2d\varepsilon}(1 + 2d\varepsilon) - 2d\varepsilon(2 + 3d\varepsilon))}{(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon)(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon(1 + d\varepsilon))} \quad (11)$$

$$+ \sqrt{\frac{e^{-4d\varepsilon}\varepsilon^4(1 + 8e^{6d\varepsilon} - 3e^{4d\varepsilon}(5 + 8d\varepsilon) + 2e^{2d\varepsilon}(3 + 4d\varepsilon(3 + 2d\varepsilon)))}{(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon(1 + d\varepsilon))^2}},$$

$$\Omega_3^2 = (2 - \varepsilon^2) + \frac{2e^{-2d\varepsilon}(-1 + e^{2d\varepsilon})\varepsilon^2}{-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon} \quad (12)$$

Анализ структуры решений (8) позволяет найти три типа возможной зависимости амплитуд  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $a_3(t)$  от времени при возбуждении только одного гармонического колебания, когда все три локализованные волны (или примесные моды) колеблются с одинаковой частотой. Первый тип колебаний является синфазным — все локализованные волны колеблются в одинаковой фазе (рис. 1a). Характерно, что частота  $\Omega_1$  этого типа колебаний при уменьшении параметра  $d$  уменьшается (см. рис. 2). Второй тип колебаний — антифазный — первая и третья примесные моды колеблются антифазно, а вторая между ними покоится (см. рис. 1b). Его частота  $\Omega_3$  при уменьшении расстояния  $d$  увеличивается (см. рис. 2). Третий тип колебаний синфазно-антифазный — первая и третья примесные моды колеблются в фазе, а вторая между ними — в противоположной им (см. рис. 1c). Его частота  $\Omega_2$  при уменьшении  $d$  увеличивается (см. рис. 2). В пределе  $d \rightarrow \infty$  частоты примесных мод стремятся к частоте одиночной примеси  $\sqrt{2 - \varepsilon^2}$  (показана на рис. 2 пунктирной линией):

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \Omega_1 = \lim_{d \rightarrow \infty} \Omega_2 = \lim_{d \rightarrow \infty} \Omega_3 = \sqrt{2 - \varepsilon^2}. \quad (13)$$

Фундаментальное усложнение системы из трех примесей по сравнению с системой из двух примесей проявляется в том, что условия возбуждения локализованной волны для центральной примеси отличаются от условий возбуждения локализованных волн на крайних примесях. При этом, вследствие симметричности задачи амплитуды колебаний локализованных волн на первой и третьей примесях во всех случаях одинаковы.

## 1. Численное исследование

Для численного решения (1) будем использовать метод прямых на интервале  $x \in [-L, L]$ ,  $L = 60$ , шаг по координате  $\Delta x = 0.01$ , а шаг по времени будет адаптивным и определяется решателем системы ОДУ, возникающей в ходе метода прямых. Граничные условия  $u_x(x = -L) = u_x(x = L) = 0$ . В качестве начальных условий используем точное решение в виде кинка (4):

$$u(x, 0) = \tanh\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}}\right), u_t(x, 0) = -\frac{v_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}}\right)}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}}, \quad (14)$$

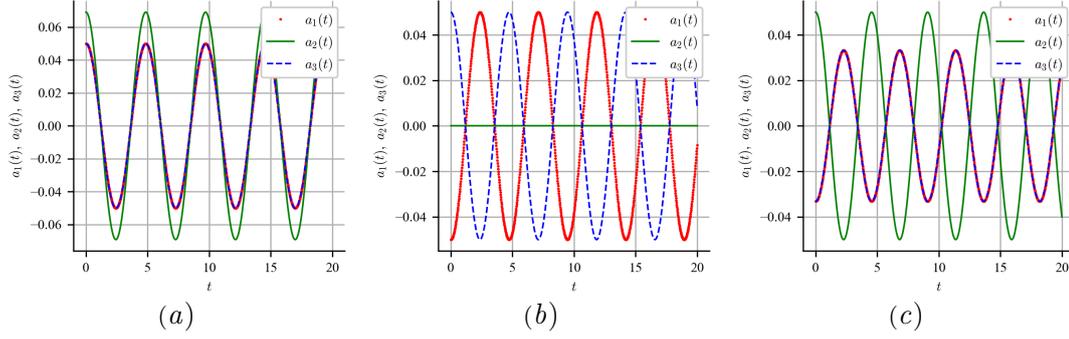


Рис. 1. (а) Первая мода (синфазная); (b) Вторая мода (антифазная); (с) Третья мода (синфазно-антифазная)

где  $x_0 = -10$  — начальная координата кинка,  $0 \leq v_0 < 1$  — начальная скорость кинка. На границах расчетной области использовался метод поглощающего слоя (Sponge Layer) [27]. В уравнение (1) был введен дополнительный диссипативный член вида  $\sigma(x)u_t$ , где функция вязкости  $\sigma(x) = \alpha [e^{\beta(x-L)} + e^{-\beta(x+L)}]$  экспоненциально возрастает при приближении к границам. Параметры  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 0.8$  были подобраны таким образом, чтобы исключить влияние волн, отраженных от границ, на исследуемую динамику, сохраняя при этом пренебрежимо малое значение вязкости в основной области моделирования.

Дельта-функция аппроксимировалась следующей функцией:

$$\delta(x) \approx \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \exp(-\gamma^2 x^2), \quad (15)$$

где  $\gamma = 80$ .

Рассмотрим локализованные на точечных примесях колебания:  $u(x = 0, t)$ ,  $u(x = d, t)$ ,  $u(x = 2d, t)$ . Будем рассматривать только случай полного прохождения кинком всех трех примесей, который зависит от начальной скорости кинка и расстояния между примесями см. точечную диаграмму на рис. 3.

Частоты колебаний найдем с помощью дискретного преобразования Фурье при  $t > 500$ . Зависимость частот  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  от расстояния между примесями  $d$  при  $v_0 = 0.6$  показана на рис. 2 в виде кружочков, треугольников и квадратиков. Важной особенностью, выявленной при численном эксперименте является пороговый характер возбуждения частот  $\Omega_3$  и  $\Omega_2$ . Они возбуждаются лишь при достижении критического расстояния  $d$ , когда величина этих частот становится меньше, чем  $\sqrt{2}$  — частоты, соответствующей простым вакуумным колебаниям уравнения  $\varphi^4$  [1].

Данный вывод полностью подтверждается результатами спектрального анализа. На рис. 4b при  $d = 2.0$  в спектре наблюдаются только два пика ( $\Omega_1$  и  $\Omega_3$ ). Заметим, что  $\Omega_3$  в данном случае меньше  $\sqrt{2}$ . При  $d = 3.0$  (рис. 4a), когда частота  $\Omega_2$  опускается ниже порогового значения, в спектре Фурье начинает проявляться третий пик. Заметим, что вблизи значения  $\sqrt{2}$  амплитуда этой моды остается малой. Она вносит заметный вклад в динамику волны локализованной на центральной примеси лишь при дальнейшем увеличении  $d$ .

При малых расстояниях ( $d \lesssim 0.9$ ) возбуждается одна локализованная волна бризерного типа на всех трех примесях (см. рис. 5). Она совершает колебания с частотой  $\Omega_1$ . Отметим, что в этой области наблюдается наибольшее расхождение между аналитическими и численными результатами (больше, чем для случая двух примесей [24]), что обусловлено сильным нелинейным взаимодействием примесей, которое не в полной мере учитывается линейным приближением.

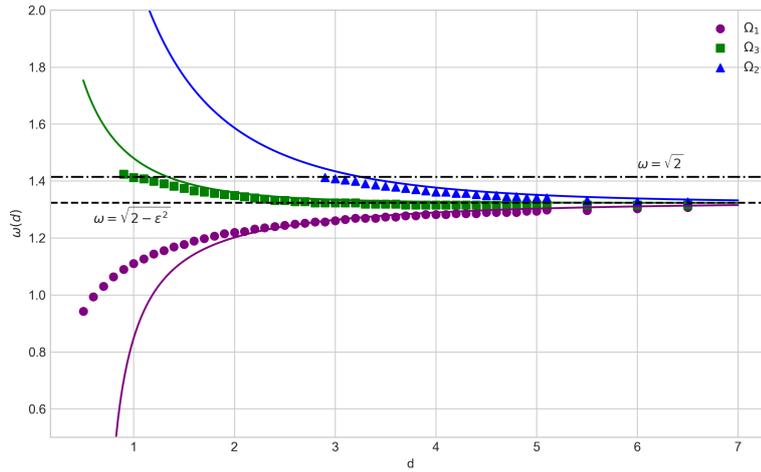


Рис. 2. Зависимость частот  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  от расстояния между примесями  $d$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $v_0 = 0.6$ . Линии — аналитический расчет, маркеры — численные данные. Штрих-пунктирная линия  $\omega = \sqrt{2}$ .

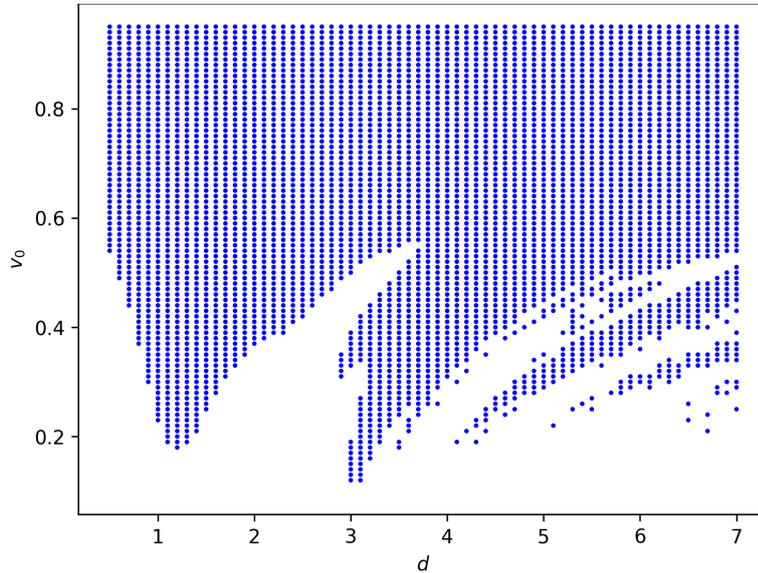


Рис. 3. Область полного прохождения примесей кинком в зависимости от расстояния между примесями  $d$  и начальной скорости кинка  $v_0$  (показана точками)

На рис. 6 представлена пространственно-временная динамика локализованных волн при различных расстояниях  $d$ . При малых расстояниях (рис. 6a) наблюдаются синфазные колебания трех локализованных волн как единого целого, с частотой  $\Omega_1$ . С увеличением расстояния до  $d = 2.0$  (рис. 6b) в системе дополнительно появляется мода  $\Omega_3$ . В этом режиме локализованная волна на центральной примеси колеблется с малой амплитудой. При  $d \gtrsim 3.0$  (рис. 6c, рис. 6d) в спектре частот появляется мода  $\Omega_2$ . Таким образом, динамика системы при  $d > 3.0$  демонстрирует фундаментальное усложнение связанной динамики локализованных волн в трехпримесной модели по сравнению с двухпримесной.

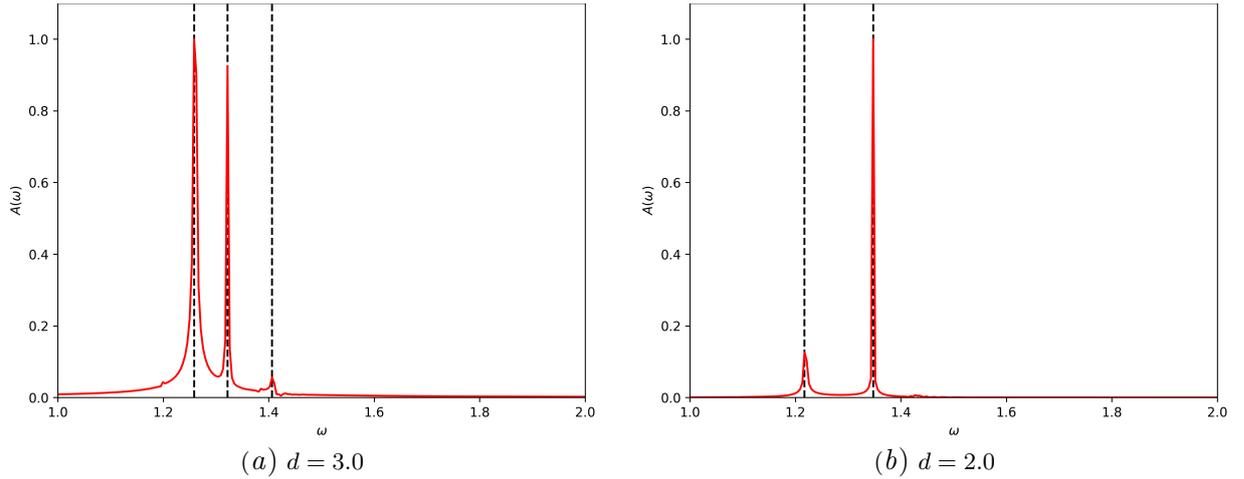


Рис. 4. Дискретное Фурье преобразование  $A(\omega)$  для двух значений  $d$ : (a)  $d = 3.0$ , (b)  $d = 2.0$

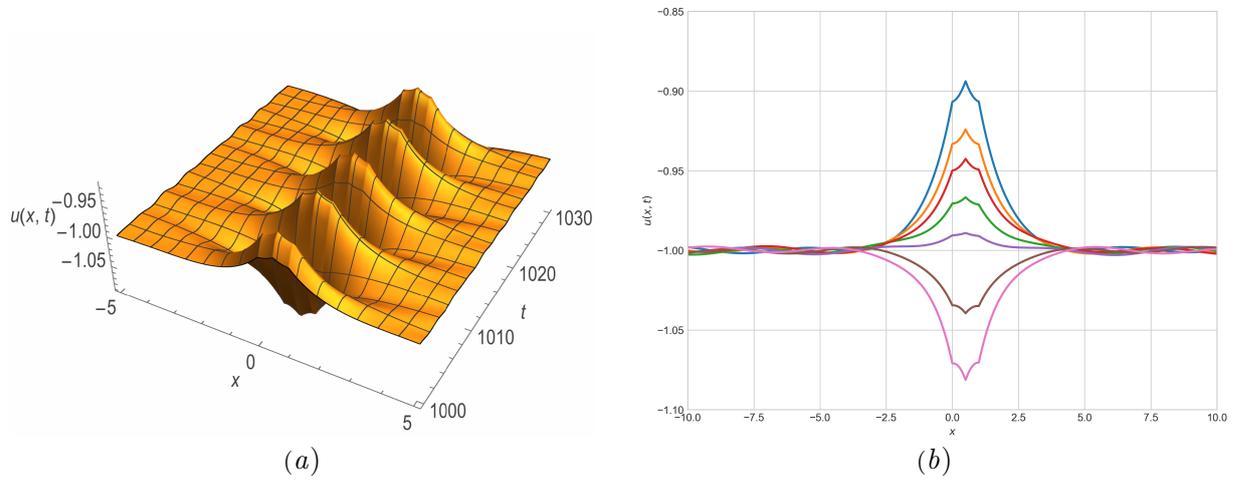


Рис. 5. Зависимость при  $d = 0.5$ ,  $v_0 = 0.5$ : (a)  $u(x, t)$ ; (b)  $u(x, t)$  в отдельные моменты времени

### Заключение

В настоящей работе исследована структура и динамика локализованных на трех точечных примесях волн бризерного типа в модели  $\varphi^4$ . С помощью метода коллективных переменных получена система уравнений, описывающая связанную динамику трех примесных осцилляторов, и найдены аналитические зависимости частот нормальных мод от расстояния  $d$  между примесями и глубины примеси  $\varepsilon$ .

Показано, что наличие третьей примеси приводит к качественному усложнению динамики локализованных волн по сравнению с двухпримесной моделью. Это усложнение обусловлено наличием еще одной моды нормальных колебаний ( $\Omega_2$ ), обладающей пороговым характером возбуждения. Выявлены три характерных режима связанной динамики локализованных волн: при малых расстояниях ( $d \lesssim 1$ ) на всех трех примесях наблюдается решение в виде одной локализованной волны бризерного типа, колеблющейся с частотой  $\Omega_1$ ; в диапазоне  $1 \lesssim d \lesssim 3$  наблюдаются три локализованные волны колеблющиеся с частотами  $\Omega_1, \Omega_3$ ; при  $d \gtrsim 3$  наблюдаются связанные колебания трех локализованных волн в спектре

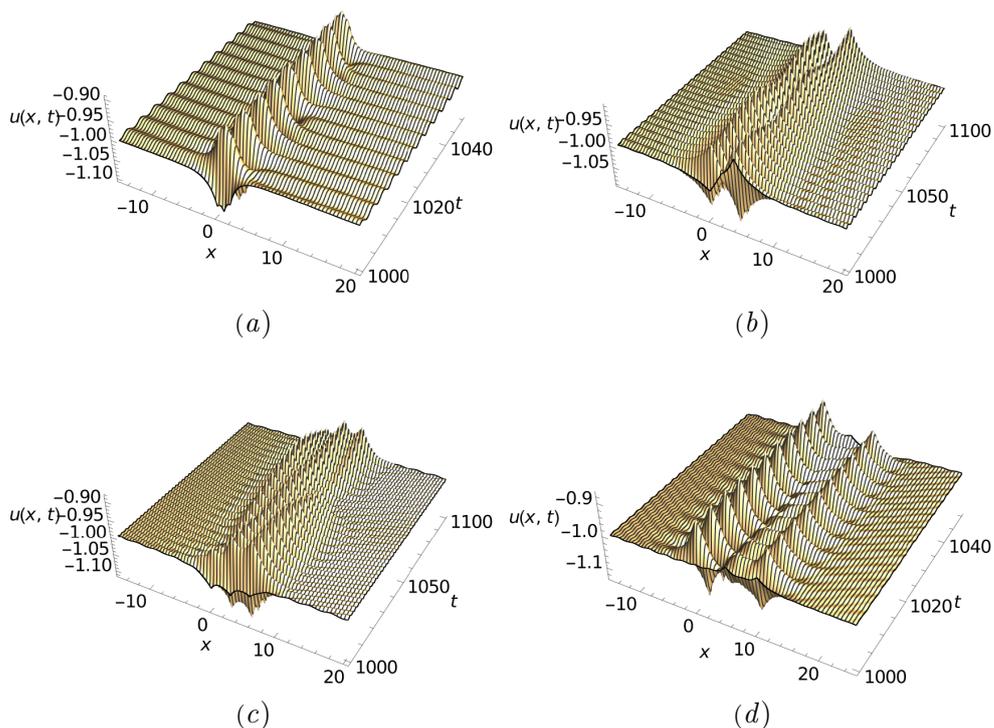


Рис. 6. Зависимость  $u(x, t)$  при  $v = 0.6$ , а)  $d = 1.0$  б)  $d = 2.0$  в)  $d = 3.0$  г)  $d = 5.0$

частот которых появляется мода  $\Omega_2$ , что существенно усложняет картину колебаний. Обнаруженные механизмы перераспределения энергии между локализованными на примесях волнами открывают новые возможности для управления локализованными возбуждениями в нелинейных средах.

### Список литературы

1. *Kevrekidis P., Cuevas-Maraver J. (Eds.), A Dynamical Perspective on the  $\varphi^4$  Model: Past, Present and Future (Nonlinear Systems and Complexity, 26). Berlin: Springer, 2019.*
2. *Gani V. A., Kudryavtsev A. E., Lizunova M. A. Kink interactions in the (1+1)-dimensional  $\varphi^6$  model // Phys. Rev. D. 2014. Vol. 89, no. 12. P. 125009. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.125009.*
3. *Marjaneh A. M., Saadatmand D., Zhou K., Dmitriev S. V., Zomorrodian M. E. High energy density in the collision of  $n$  kinks in the  $\varphi^4$  model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2017. Vol. 49. P. 30–38. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.01.022.*
4. *Yan H., Zhong Y., Liu Y. X., Maeda K. I. Kink–antikink collision in a Lorentz-violating  $\varphi^4$  model // Phys. Lett. B. 2020. Vol. 807. P. 135542. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135542.*
5. *Yamaletdinov R. D., Slipko V. A., Pershin Y. V. Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the  $\varphi^4$  field model // Phys. Rev. B. 2017. Vol. 96, no. 9. P. 094306. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.094306.*
6. *Yamaletdinov R. D., Romańczukiewicz T., Pershin Y. V. Manipulating graphene kinks through positive and negative radiation pressure effects // Carbon. 2019. Vol. 141. P. 253–257. DOI: 10.1016/j.carbon.2018.09.064.*
7. *Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P., Williams F. (Eds.), The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Cham: Springer, 2014.*

8. *Getmanov B. S.* Possible system of equations of relativistic string theory with cubic nonlinearity // JETP Lett. 1976. Vol. 24. P. 291–295.
9. *Saadatmand D. et al.* Effect of the  $\varphi^4$  kink's internal mode at scattering on a  $\mathcal{PT}$ -symmetric defect // JETP Lett. 2015. Vol. 101. P. 497–502. DOI: 10.1134/S0021364015090126.
10. *Saadatmand D., Javidan K.* Collective-coordinate analysis of inhomogeneous nonlinear Klein–Gordon field theory // Braz. J. Phys. 2013. Vol. 43. P. 48–56. DOI: 10.1007/s13538-012-0103-9.
11. *Marjaneh A., Simas F., Bazeia D.* Collisions of kinks in deformed  $\varphi^4$  and  $\varphi^6$  models // Chaos, Solitons & Fractals. 2022. Vol. 164. P. 112723. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112723.
12. *Lizunova M. A. et al.* Kinks and realistic impurity models in  $\varphi^4$ -theory // Int. J. Mod. Phys. B. 2022. Vol. 36, no. 5. P. 2250042. DOI: 10.1142/S0217979222500420.
13. *Lizunova M., Kager J., de Lange S., van Wezel J.* Emergence of oscillons in kink–impurity interactions // J. Phys. A: Math. Theor. 2021. Vol. 54. P. 315701. DOI: 10.1088/1751-8121/ac0cc7.
14. *Romańczukiewicz T., Shnir Y.* Oscillons in the presence of external potential // JHEP. 2018. No. 1. P. 101. DOI: 10.1007/JHEP01(2018)101.
15. *Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Yu., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G.* Attractive impurity as a generator of wobbling kinks and breathers in the  $\varphi^4$  model // Russ. J. Nonlinear Dyn. 2024. Vol. 20, no. 1. P. 15–26. DOI: 10.20537/nd231206.
16. *Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Yu., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G.* Kink dynamics in the  $\varphi^4$  model with extended impurity // Russ. J. Nonlinear Dyn. 2023. Vol. 19, no. 3. P. 303–320. DOI: 10.20537/nd230603.
17. *Dorey P., Romańczukiewicz T.* Resonant kink–antikink scattering through quasinormal modes // Phys. Lett. B. 2018. Vol. 779. P. 117–123. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.01.032.
18. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V., Dmitriev S. V., Nazarov V. N.* Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities // Braz. J. Phys. 2018. Vol. 48, no. 6. P. 576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0599-0.
19. *Samsonov K. Yu., Kabanov D. K., Nazarov V. N., Ekomasov E. G.* Localized nonlinear waves of the sine-Gordon equation in the model with three extended impurities // Comput. Res. Model. 2024. Vol. 16, no. 4. P. 855–868. DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-4-855-868.
20. *Ekomasov E. G., Samsonov K. Yu., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V.* Nonlinear localized waves in the sine-Gordon equation with identical impurities // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022. Vol. 30, no. 6. P. 749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011.
21. *Ekomasov E. G., Kudryavtsev R. V., Samsonov K. Yu., Nazarov V. N., Kabanov D. K.* Kink dynamics in the sine-Gordon equation with three identical attractive or repulsive impurities // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023. Vol. 31, no. 6. P. 693–709. DOI: 10.18500/0869-6632-003069.
22. *Zhang F., Kivshar Y. S., Vázquez L.* Resonant kink-impurity interactions in the  $\varphi^4$  model // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46, no. 8. P. 5214–5220. DOI: 10.1103/PhysRevA.46.5214.
23. *Fakhretdinov M. I., Ekomasov E. G.* Localized waves of the  $\varphi^4$  equation in models with two extended impurities // Computer Research and Modeling. 2025. Vol. 17, no. 3. P. 437–449. DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-3-437-449.
24. *Fakhretdinov M. I., Kabanov D. K., Ekomasov E. G.* Localized Waves of the  $\varphi^4$  Equation in the Model with Two-Point Impurities // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2025. Vol. 21, no. 3. P. 419–432. DOI: 10.20537/nd250703.
25. *Schiesser W. E.* The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations. Academic Press: Elsevier, 2012. ISBN: 9780128015513.
26. *Belova T. I., Kudryavtsev A. E.* Solitons and their interactions in classical field theory //

Phys. Usp. 1997. Vol. 40. P. 359–387. DOI: 10.1070/PU1997v040n04ABEH000227.

27. Israeli M., Orszag S. A. Approximation of radiation boundary conditions // Journal of Computational Physics. 1981. Vol. 41, no. 1. P. 115–135. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90082-6.

## References

1. *Kevrekidis P., Cuevas-Maraver J.* (Eds.), A Dynamical Perspective on the  $\varphi^4$  Model: Past, Present and Future (Nonlinear Systems and Complexity, 26). Berlin: Springer, 2019.
2. *Gani V. A., Kudryavtsev A. E., Lizunova M. A.* Kink interactions in the (1+1)-dimensional  $\varphi^6$  model // Phys. Rev. D. 2014. Vol. 89, no. 12. P. 125009. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.125009.
3. *Marjaneh A. M., Saadatmand D., Zhou K., Dmitriev S. V., Zomorrodian M. E.* High energy density in the collision of  $n$  kinks in the  $\varphi^4$  model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2017. Vol. 49. P. 30–38. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.01.022.
4. *Yan H., Zhong Y., Liu Y. X., Maeda K. I.* Kink–antikink collision in a Lorentz-violating  $\varphi^4$  model // Phys. Lett. B. 2020. Vol. 807. P. 135542. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135542.
5. *Yamaletdinov R. D., Slipko V. A., Pershin Y. V.* Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the  $\varphi^4$  field model // Phys. Rev. B. 2017. Vol. 96, no. 9. P. 094306. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.094306.
6. *Yamaletdinov R. D., Romańczukiewicz T., Pershin Y. V.* Manipulating graphene kinks through positive and negative radiation pressure effects // Carbon. 2019. Vol. 141. P. 253–257. DOI: 10.1016/j.carbon.2018.09.064.
7. *Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P., Williams F.* (Eds.), The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Cham: Springer, 2014.
8. *Getmanov B. S.* Possible system of equations of relativistic string theory with cubic nonlinearity // JETP Lett. 1976. Vol. 24. P. 291–295.
9. *Saadatmand D. et al.* Effect of the  $\varphi^4$  kink’s internal mode at scattering on a  $\mathcal{PT}$ -symmetric defect // JETP Lett. 2015. Vol. 101. P. 497–502. DOI: 10.1134/S0021364015090126.
10. *Saadatmand D., Javidan K.* Collective-coordinate analysis of inhomogeneous nonlinear Klein–Gordon field theory // Braz. J. Phys. 2013. Vol. 43. P. 48–56. DOI: 10.1007/s13538-012-0103-9.
11. *Marjaneh A., Simas F., Bazeia D.* Collisions of kinks in deformed  $\varphi^4$  and  $\varphi^6$  models // Chaos, Solitons & Fractals. 2022. Vol. 164. P. 112723. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112723.
12. *Lizunova M. A. et al.* Kinks and realistic impurity models in  $\varphi^4$ -theory // Int. J. Mod. Phys. B. 2022. Vol. 36, no. 5. P. 2250042. DOI: 10.1142/S0217979222500420.
13. *Lizunova M., Kager J., de Lange S., van Wezel J.* Emergence of oscillons in kink–impurity interactions // J. Phys. A: Math. Theor. 2021. Vol. 54. P. 315701. DOI: 10.1088/1751-8121/ac0cc7.
14. *Romańczukiewicz T., Shnir Y.* Oscillons in the presence of external potential // JHEP. 2018. No. 1. P. 101. DOI: 10.1007/JHEP01(2018)101.
15. *Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Yu., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G.* Attractive impurity as a generator of wobbling kinks and breathers in the  $\varphi^4$  model // Russ. J. Nonlinear Dyn. 2024. Vol. 20, no. 1. P. 15–26. DOI: 10.20537/nd231206.
16. *Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Yu., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G.* Kink dynamics in the  $\varphi^4$  model with extended impurity // Russ. J. Nonlinear Dyn. 2023. Vol. 19, no. 3. P. 303–320. DOI: 10.20537/nd230603.
17. *Dorey P., Romańczukiewicz T.* Resonant kink–antikink scattering through quasinormal modes // Phys. Lett. B. 2018. Vol. 779. P. 117–123. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.01.032.

18. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V., Dmitriev S. V., Nazarov V. N.* Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities // *Braz. J. Phys.* 2018. Vol. 48, no. 6. P. 576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0599-0.
19. *Samsonov K. Yu., Kabanov D. K., Nazarov V. N., Ekomasov E. G.* Localized nonlinear waves of the sine-Gordon equation in the model with three extended impurities // *Comput. Res. Model.* 2024. Vol. 16, no. 4. P. 855–868. DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-4-855-868.
20. *Ekomasov E. G., Samsonov K. Yu., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V.* Nonlinear localized waves in the sine-Gordon equation with identical impurities // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022. Vol. 30, no. 6. P. 749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011.
21. *Ekomasov E. G., Kudryavtsev R. V., Samsonov K. Yu., Nazarov V. N., Kabanov D. K.* Kink dynamics in the sine-Gordon equation with three identical attractive or repulsive impurities // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023. Vol. 31, no. 6. P. 693–709. DOI: 10.18500/0869-6632-003069.
22. *Zhang F., Kivshar Y. S., Vázquez L.* Resonant kink-impurity interactions in the  $\varphi^4$  model // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 46, no. 8. P. 5214–5220. DOI: 10.1103/PhysRevA.46.5214.
23. *Fakhretdinov M. I., Ekomasov E. G.* Localized waves of the  $\varphi^4$  equation in models with two extended impurities // *Computer Research and Modeling.* 2025. Vol. 17, no. 3. P. 437–449. DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-3-437-449.
24. *Fakhretdinov M. I., Kabanov D. K., Ekomasov E. G.* Localized Waves of the  $\varphi^4$  Equation in the Model with Two-Point Impurities // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2025. Vol. 21, no. 3. P. 419–432. DOI: 10.20537/nd250703.
25. *Schiesser W. E.* *The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations.* Academic Press: Elsevier, 2012. ISBN: 9780128015513.
26. *Belova T. I., Kudryavtsev A. E.* Solitons and their interactions in classical field theory // *Phys. Usp.* 1997. Vol. 40. P. 359–387. DOI: 10.1070/PU1997v040n04ABEH000227.
27. *Israeli M., Orszag S. A.* Approximation of radiation boundary conditions // *Journal of Computational Physics.* 1981. Vol. 41, no. 1. P. 115–135. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90082-6.



*Екомасов Евгений Григорьевич* — родился в с. Анучино Приморского края (1958). Окончил физический факультет Башкирского государственного университета (1980). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Физика магнитных явлений» (1991, МГУ) и доктора физико-математических наук специальности «Физика конденсированного состояния» (2005, ЧелГУ). Профессор кафедры теоретической физики Уфимского университета науки и технологий. Награжден Нагрудным знаком «Почетный работник высшего образования РФ» (2011) и Почетной грамотой Министерства образования и науки РФ (2008). Область исследовательских интересов — теоретическая и математическая физика, физика конденсированного состояния, спинтроника, вычислительная физика. Опубликовал более 200 научных и методических работ.

450076, Республика Башкортостан, Уфа, ул. Заки Валиди, 32  
Башкирский государственный университет  
E-mail: [ekomasoveg@gmail.com](mailto:ekomasoveg@gmail.com)  
ORCID: 000-0002-6194-3358  
AuthorID (eLibrary.Ru): 29060



*Фахретдинов Марат Ирекович* — родился в г. Уфа (1984). Окончил физический факультет Башкирского государственного университета (2007). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Теоретическая физика». Доцент кафедры теоретической физики Уфимского университета науки и технологий. Область исследовательских интересов — нелинейные волны, вычислительная физика. Опубликовал более 50 научных и методических работ.

450076, Республика Башкортостан, Уфа, ул. Заки Валиди, 32  
Башкирский государственный университет  
E-mail: [fmi106tf@gmail.com](mailto:fmi106tf@gmail.com)  
ORCID: 0000-0002-5338-2933  
AuthorID (eLibrary.Ru): 586430