

## Цифровые двойники: синтез теории сложности и искусственного интеллекта

А.В. Андреев<sup>1</sup>, Л.Ш. Дарасемля<sup>2</sup>, В.С. Дождев<sup>3</sup>, А.В. Шендерюк-Жидков<sup>4</sup>, В.В. Шпак<sup>3</sup>,  
А. Е. Храмов<sup>1,2</sup>✉

<sup>1</sup>Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия

<sup>2</sup>ФГАУ «Цифровые промышленные технологии», Москва, Россия

<sup>3</sup>Министерство промышленности и торговли РФ, Москва, Россия,

<sup>4</sup>Совет Федерации, Москва, Россия,

E-mail: ✉hramov.ae@rea.ru

Поступила в редакцию 15.12.2025, принята к публикации 23.01.2026,  
опубликована онлайн 01.02.2026

### Аннотация.

*Цель* настоящего исследования — проанализировать концепцию цифровых двойников как технологии, объединяющей теорию сложности и искусственный интеллект, а также рассмотреть их применение в различных областях. Особое внимание уделено математическим подходам к построению цифровых двойников, их отличиям от традиционных математических моделей и перспективам развития.

*Методы.* В работе использован междисциплинарный подход, включающий анализ современных технологий, таких как физически информированные нейронные сети, модели пониженного порядка, графовые нейронные сети и резервуарные вычисления. Проведено сравнение методов моделирования, основанных на первых принципах и данных, с акцентом на их интеграцию для создания гибридных цифровых двойников.

*Результаты.* Показано, что цифровые двойники обладают уникальными характеристиками, такими как динамичность, адаптивность и двусторонняя связь с физическими объектами. Выявлены ключевые преимущества и ограничения различных математических подходов, включая их применимость в промышленности, медицине, экономике и других сферах. Предложена *обобщенная* математическая формализация цифрового двойника, объединяющая традиционные модели и методы машинного обучения.

*Заключение.* Сформулированы перспективы развития цифровых двойников, включая создание сквозных экосистем и развитие гибридных подходов к моделированию сложных нелинейных процессов. Подчеркнута важность дальнейшей интеграции методов теории сложности и искусственного интеллекта для повышения точности и адаптивности виртуальных моделей. Цифровые двойники открывают новые возможности для прогнозирования и управления сложными системами в условиях неопределенности, что делает их ключевым инструментом в науке, промышленности и обществе.

**Ключевые слова:** цифровые двойники, искусственный интеллект, теория сложности, нелинейная динамика, машинное обучение, гибридные модели, предиктивное моделирование, персонализированная медицина, промышленность 4.0, графовые нейронные сети, физически-информированные сети

**Для цитирования:** А.В. Андреев, Л.Ш. Дарасемля, В.С. Дождев, А.В. Шендерюк-Жидков, В.В. Шпак, А. Е. Храмов Цифровые двойники: синтез теории сложности и искусственного интеллекта // Известия вузов. ПНД. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003211. EDN: UIJBGW

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Digital twins: a synthesis of complexity theory and artificial intelligence

*A.В. Андреев<sup>1</sup>, Л.Ш. Дараселия<sup>2</sup>, В.С. Дождев<sup>3</sup>, А.В. Шендерюк-Жидков<sup>4</sup>, В.В. Шпак<sup>3</sup>,  
А. Е. Храмов<sup>1,2</sup>✉*

*A. V. Andreev<sup>1</sup>, L. Sh. Daraselya<sup>2</sup>, V. S. Dozhdev<sup>3</sup>, A. V. Shenderuk-Zhidkov<sup>4</sup>, V. V. Shpak<sup>3</sup>,  
A. E. Hramov<sup>2,4</sup>✉*

<sup>1</sup>Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Federal State Autonomous Institution “Digital Industrial Technologies”, Moscow, Russia

<sup>3</sup>Ministry of Industry and Trade of the Russian Federation, Moscow, Russia,

<sup>4</sup>Federation Council, Moscow, Russia,

E-mail: ✉hramov.ae@rea.ru

*Received 15.12.2025, accepted 23.01.2026, available online 01.02.2026*

### **Abstract.**

*Purpose.* The objective of this study is to analyze the concept of digital twins as a technology integrating complexity theory and artificial intelligence, and to examine their applications across various fields. Particular emphasis is placed on mathematical approaches to the construction of digital twins, their distinctions from traditional mathematical models, and future development prospects.

*Methods.* This research employs an interdisciplinary approach, incorporating an analysis of contemporary technologies such as physics-informed neural networks, reduced-order models, graph neural networks, and reservoir computing. A comparison of first-principles and data-driven modeling methods is conducted, with a focus on their integration for creating hybrid digital twins.

*Results.* The findings demonstrate that digital twins possess unique characteristics, including dynamism, adaptability, and bidirectional interaction with physical objects. The key advantages and limitations of various mathematical approaches are identified, encompassing their applicability in industry, medicine, economics, and other domains. A **general** mathematical formalization of a digital twin, integrating traditional models and machine learning methods, is proposed.

*Conclusion.* The prospects for the development of digital twins are outlined, including the creation of end-to-end ecosystems and the advancement of hybrid approaches for modeling complex nonlinear processes. The importance of further integration of complexity theory and artificial intelligence methods to enhance the accuracy and adaptability of virtual models is emphasized. Digital twins present new opportunities for the forecasting and management of complex systems under uncertainty, establishing them as a pivotal tool in science, industry, and society.

**Keywords:** digital twins, artificial intelligence, complexity theory, nonlinear dynamics, machine learning, hybrid models, predictive modeling, personalized medicine, Industry 4.0, graph neural networks, physics-informed neural networks

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## 1. Введение. Экскурс в историю

Цифровые двойники (англ. Digital Twins) — одна из наиболее перспективных технологий XXI века, все чаще находящая применение в самых разных областях: от промышленности и науки до медицины и управления городской инфраструктурой. Суть цифровых двойников заключается в создании виртуальных копий реальных объектов, процессов или систем, которые динамически отражают их состояние в реальном времени. Это позволяет не только отслеживать текущее состояние объекта или системы, но и прогнозировать их поведение, оптимизировать процессы и предотвращать возможные сбои.

История цифровых двойников восходит к программе НАСА «Аполлон», где для обуче-

ния астронавтов и диспетчеров использовалось 15 симуляторов [1]. Как писал позже Джин Кранц, главный полётный директор НАСА для «Аполлон–13»: «Симуляторы были одними из самых сложных технологий всей космической программы: единственными реальными вещами в симуляционном обучении были экипаж, кабина и консоли управления полетами, все остальное было притворно, созданное кучей компьютеров, множеством формул и квалифицированными техническими специалистами». Хотя в то время они, очевидно, не назывались так, эти симуляторы были, возможно, первым реальным примером «цифровых двойников». Эти симуляторы высокой точности и связанные с ними компьютерные системы имели решающее значение для успеха программы «Аполлон». Различные симуляторы управлялись отдельными компьютерами, которые могли объединяться вместе для имитации взаимодействия различных подсистем. Было четыре компьютера для симулятора командного модуля и три для симулятора лунного модуля. Компьютеры могли общаться, используя 256 килобайт общей памяти, где можно было хранить информацию, необходимую на протяжении всего моделирования.

Конечно, симулятор сам по себе не является цифровым двойником, а является фактически моделью реального устройства. Но в миссии «Аполлон–13» эти симуляторы, по видимому, стали первыми настоящими примерами цифровых двойников. Этот полет стал единственным из всей программы полетов на Луну, во время которого произошла серьезная авария. 13 апреля 1970 на расстоянии 330 000 километров от Земли, во время плановых операций по обслуживанию баков с кислородом, часть систем корабля «Аполлон–13» вышла из строя, при этом сам корабль с астронавтами продолжал удаляться от Земли на 640 километров каждую минуту.

Диспетчеры миссии НАСА смогли быстро адаптировать и изменить имеющиеся симуляторы, чтобы соответствовать условиям на реальном частично вышедшем из строя космическом корабле, чтобы они могли исследовать, отвергать и совершенствовать стратегии, необходимые для возвращения астронавтов домой. Забегая вперед отметим, что большинство современных цифровых двойников включают в себя удаленный физический объект, который подключен к цифровой модели через непрерывный поток данных. Это соединение используется для обновления компьютерных моделей в ответ на изменения в реальном объекте. НАСА использовало самые современные на тот момент телекоммуникационные технологии, чтобы оставаться на связи со своим космическим аппаратом. Эти данные были использованы для модификации симуляторов, чтобы отразить состояние поврежденного космического аппарата. Хотя связь той эпохи являлась грубой по современным стандартам, реализация такой коммуникации между симуляторами и физическим объектом подчеркивает общую проблему с современными цифровыми двойниками: получение данных в режиме реального времени — это одно, но обработка этих данных в форму, которую можно легко использовать для принятия решений в режиме реального времени, остается проблемой. Даже с учетом этих ограничений управление полетом смогло быстро и точно диагностировать проблему и эвакуировать астронавтов в лунный модуль до того, как кислород в космическом модуле закончился. Также был сделан вывод, что двигатель сервисного модуля был поврежден. Инженеры смогли использовать эти данные для изменения своих симуляторов, чтобы отразить состояние физического объекта, еще одно ключевое качество цифрового двойника. Не вдаваясь во все подробности миссии по спасению экипажа, можно с уверенностью утверждать, что эта операция остается одним из лучших примеров применения цифрового двойника в критической аварийной ситуации. Быстрее всего без оперативно созданного цифрового двойника астронавты не смогли бы благополучно вернуться на Землю.

Давайте остановимся на характеристиках симуляторов программы «Аполлон», которые определяют их как пример цифрового двойника в действии.

*Физические.* Цифровые двойники наиболее полезны, когда они связаны с физическими объектами, которые (по крайней мере, временно) недоступны для прямого вмешательства человека. Несмотря на то, что на борту находились три астронавта, «Аполлон-13» является идеальным примером этого, так как экипаж не мог влиять на аппаратуру, которая находилась на корабле.

*Коммуникационные.* Цифровые двойники требуют постоянной обратной связи с физическими активами, которая может быть использована для обновления их состояния, а также для обоснования инженерных решений, что является ключевым требованием цифрового двойника. Современные цифровые двойники обычно используют «Интернет вещей» для достижения этой цели. НАСА в 70-х годах достигло той же цели с помощью передовых телекоммуникаций, которые включали двустороннюю передачу данных.

*Адаптивные.* Цифровые двойники должны быть достаточно гибкими, чтобы реагировать на изменения в физическом объекте. События «Аполлона-13» разворачивались всего 3,5 дня, в течение которых произошло невероятное количество адаптаций и реинжиниринга. НАСА смогло в считанные часы перенастроить свои симуляторы на конфигурацию, которая никогда не была предусмотрена при их разработке, и использовать эти симуляторы для предоставления критически важной информации экипажу.

*Модульные.* Для программы «Аполлон» не существовало единого цифрового двойника; НАСА использовало 15 различных тренажеров для отработки различных аспектов миссии. Концепция, согласно которой цифровые двойники должны быть основаны на единой «большой унифицированной модели», предсказывающей все аспекты работы физического устройства, чаще всего не работает и сегодня. Современные цифровые двойники состоят из множества взаимодействующих моделей, которые могут быть иерархически объединены для учета различных аспектов реального объекта.

Мы специально уделили столько внимания этому уже ставшему историческому примеру создания цифрового двойника, чтобы показать их основные особенности и специфику, а также их отличие от цифровых моделей объектов, которая позволяет анализировать динамику объекта моделирования, но не позволяет прогнозировать его поведение без получения в реальном времени информации о состоянии объекта, которое может постоянно меняться в связи с управляющими воздействиями.

Сам термин «цифровой двойник» появился в работе [2], где он использовался для представления цифровой модели для итеративных модификаций при проектировании городских дорожных сетей. Однако общепризнано, что впервые концепция «цифрового двойника» как «цифрового эквивалента физического продукта» была использована в работе [3], где она была направлена на построение архитектуры управления информацией, которая поддерживает двунаправленный поток информации с точки зрения продукт-центризма.

Конечно, настоящий прорыв в развитии этой концепции произошел с появлением и широким внедрением таких технологий как Интернет вещей (IoT), искусственный интеллект (ИИ) и обработка больших данных. Сегодня цифровые двойники становятся базовой технологией Индустрии 4.0, которая объединяет киберфизические системы, интернет вещей (IoT) и ИИ для создания «умных производств» [4], широко применяясь в аэрокосмической отрасли, машиностроении, энергетике, логистике и т.д. Но надо иметь в виду, что концепция цифровых двойников все активнее выходит за границы только технических задач и находит свое применение в здравоохранении, экономике и даже в создании «умных городов».

Особую актуальность цифровые двойники приобретают в контексте науки о сложности и нелинейной динамики, где сложные системы демонстрируют непредсказуемое поведение, зависящее от множества взаимосвязанных факторов. Благодаря интеграции с ИИ и методами машинного обучения цифровые двойники позволяют моделировать такие систе-

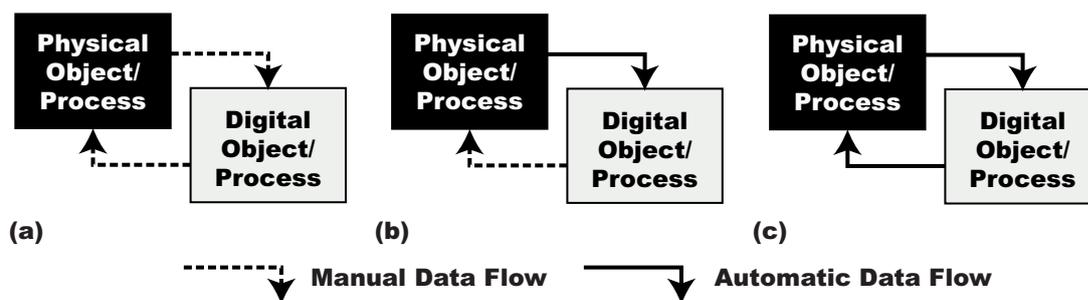


Рис. 1. Типы цифровых двойников в зависимости от уровня интеграции с реальной физической системой, процессом или объектом): (а) математическая модель; (б) цифровая тень; (с) цифровой двойник. Представленная схема подчеркивает иерархию создания цифрового двойника, который содержит как математическую модель, описывающую взаимосвязь между всеми интересующими нас переменными физического объекта, так и цифровую тень, представляющую собой структурированный набор операционных, условных и процессуальных данных. Основано на данных из [5, 6].

Types of Digital Twins based on level of integration: (a) Digital Model; (b) Digital shadow; (c) Digital Twin. The presented scheme highlights a hierarchy for creating a digital twin is presented, which contains both a mathematical model describing the relationship between all the variables of the physical object that interest us, and a digital shadow, which is a structured set of operational, conditional, and procedural data. Based on data from [5, 6].

мы, выявлять скрытые закономерности и адаптироваться к изменениям в реальном времени. Это открывает новые возможности для прогнозирования, управления и оптимизации в условиях высокой неопределенности.

В данной статье рассматриваются ключевые аспекты цифровых двойников: их эволюция, технологические основы, применение в различных сферах и перспективы развития, связанные с нелинейной динамикой и искусственным интеллектом. Предложен **обобщенный** математический подход к описанию цифровых двойников, который естественным образом объединяет подходы, основанные на традиционных математических моделях и технологиях машинного обучения. Особое внимание уделяется тому, как цифровые двойники могут стать инструментом для решения сложных, многопараметрических задач в науке и промышленности.

## 2. Определение цифрового двойника. Отличия от математической модели.

Цифровой двойник — это виртуальная динамическая модель физического объекта, системы или процесса, которая синхронизируется с реальным объектом в режиме реального времени за счет обмена данными (см. рис. 1, на котором схематично показаны различные типы цифровых двойников в зависимости от уровня интеграции с реальной физической системой, процессом или объектом). Цифровой двойник не только отражает текущее состояние физического объекта/системы или процесса, но и позволяет прогнозировать их поведение, оптимизировать процессы и принимать решения на основе анализа данных, получаемых от реального объекта.

Прежде чем переходить к обсуждению свойств и характеристик цифрового двойника, следует остановиться на важном вопросе: чем различаются цифровой двойник и традиционная математическая модель физического объекта? Не является ли цифровой двойник просто другим названием для математической модели, которая реализована с использованием тех или иных численных методов на современных вычислительных платформах (в литературе, посвященной цифровым двойникам, ее часто называют цифровой моделью)?

На эти вопросы можно дать однозначный ответ, что цифровой двойник и математическая модель объекта, хотя и связаны между собой, обладают принципиальными различиями. Основное отличие заключается в их взаимодействии с реальным объектом, системой или процессом. Модель объекта представляет собой представление, которое существует независимо от физического прототипа и не обновляется в реальном времени. В отличие от нее, цифровой двойник поддерживает постоянную динамическую синхронизацию с реальным объектом через потоки данных и системы обратной связи, которые обычно реализуются через IoT системы.

Наглядным примером может служить сравнение модели — карты города со всеми домами и улицами — и цифрового двойника — Yandex Map с пробками, маршрутами и обновлениями информации в реальном времени, получаемой от объектов в городе. Аналогично, можно сравнить 3D-модель двигателя в CAD-системе, которая остается просто цифровой моделью, с той же моделью, подключенной к датчикам работающего двигателя — в этом случае мы имеем дело уже с полноценным цифровым двойником.

Математические модели преимущественно используются для задач проектирования, визуализации или теоретического анализа, тогда как цифровые двойники служат для оперативного мониторинга, прогнозирования и управления в реальном времени [7]. В результате мы можем сделать вывод, что основным отличием математической модели от цифрового двойника, как показано на рис. 1а, является отсутствие самостоятельного взаимодействия и передачи данных между физическим объектом или процессом и его цифровым двойником.

Например, аэродинамическая модель самолета в ANSYS остается всего лишь моделью, в то время как цифровой двойник того же самолета, анализирующий актуальные данные полета и предупреждающий о потенциальных перегрузках, представляет собой принципиально иной инструмент. Если существует самостоятельный однонаправленный поток данных между физическим объектом и цифровым двойником, то говорят о цифровой тени объекта (см. рис. 1б), отличительной способностью которой является способность к адаптации [8]. Математические модели при их анализе остаются неизменными, если только их не модифицируют вручную, чтобы учесть те или иные дополнительные особенности объекта. Цифровые тени и/или двойники непрерывно модифицируются и обучаются на поступающих в данных и приобретают способность прогнозировать будущие состояния анализируемого объекта.

И, наконец, максимальную степень интеграции с реальным объектом демонстрирует цифровой двойник, для которого взаимодействие на уровне потоков данных между существующим физическим объектом и цифровым объектом полностью интегрировано в обоих направлениях (см. рис. 1с). Таким образом, если модель можно сравнить со статичной картой местности, то цифровой двойник подобен современной навигационной системе, которая не только отображает объекты, но и оперативно реагирует на изменения, предлагая оптимальные решения в реальном времени, например, изменение маршрута движения в зависимости от пробок и загруженности дорог в городе. В тоже самое время анализ и прогноз потоков транспорта может быть учтен на уровне оперативного перенаправления потоков как за счет средств городского регулирования, так и за счет изменения стратегии каждого пользователя навигационной системы на основании информации, предоставляемой ей, что обеспечивает наличие динамической обратной связи, то есть обратного потока информации от цифрового двойника к реальному физическому процессу.

### 3. Характеристики цифрового двойника

В зависимости от типа цифрового двойника, он может обладать отличительными свойствами от других, но, независимо от этого, все цифровые двойники имеют несколько общих характеристик. Остановимся на них подробнее.

**3.1. Высокая точность.** В отличие от математических моделей, которые, как отмечалось в [9], являются «упрощенным представлением оригинала», «карикатурой на объект» в силу того, что они обычно обладают только рядом свойств, присущих физическому объекту, для эффективной работы цифровой двойник должен быть почти идентичной копией своего физического аналога с точки зрения динамики, содержания, функциональности и т. д. с очень высокой степенью точности.

Сверхреалистичная цифровая модель (англ. High-fidelity Digital Model) помогает цифровому двойнику имитировать и предсказывать все аспекты своего физического двойника при изменении его состояния. Цифровые модели с высокой точностью считаются основой цифровых двойников [10]. Высокий уровень детализации позволяет инструментам моделирования и прогнозирования цифрового двойника быть более надежными при представлении набора альтернативных действий или сценариев [11]. Обычно достаточно сложно достичь необходимую точность с использованием традиционных методов моделирования, например, с использованием обыкновенных дифференциальных уравнения (ОДУ) или дифференциальных уравнений в частных производных (УЧП) за счет очень большого числа факторов, которые необходимо учесть для точного описания процессов в реальном физическом объекте. Более того, в случае медицинских цифровых двойников это часто даже невозможно в принципе, потому что мы не имеем хороших математических детерминированных моделей, основанных на физических принципах, таких как системы ОДУ, описывающих соответствующие процессы в живых организмах. Например, для многих медицинских применений соответствующая базовая биология частично или полностью неизвестна. Так, известно, что некоторые заболевания имеют важный микробиомный компонент. Однако в большинстве случаев о механизмах, участвующих в этом процессе, известно очень мало. При этом данные о микробиоме легко собирать, и их много, поэтому есть возможность применять подходы, основанные на данных, для стратификации пациентов и получения потенциально полезных сведений для таргетирования лечения на подгруппы пациентов, идентифицированные с помощью алгоритмов машинного обучения [12]. Этот пример говорит о том, что для построения цифрового двойника нам не обязательно знать все особенности внутреннего функционирования исходного объекта.

Поэтому наиболее часто в настоящее время для построения цифровых двойников используются модели машинного обучения [13], которые позволяют преодолевать эти сложности за счет обучения на основе больших данных, которые регистрируются с физического объекта или процесса. Часто такой подход противоречит основному принципу математического моделирования об активной познавательной роли модели: модель необходима, чтобы выявить и понять поведение исследуемого моделируемого объекта. Однако, модели машинного обучения часто не обладают этим свойством — они имеют высокую обобщающую способность к описанию процесса, но не позволяют в силу своей природы «черного ящика» объяснить те или иные закономерности взаимосвязей между характеристиками объекта, а повышение уровня прозрачности или интерпретируемости моделей машинного обучения обычно неизбежно ведет к снижению точности их работы за счет упрощения архитектуры моделей. Но для цифрового двойника это часто не важно. Мы уже знаем особенности работы объекта с использованием технологий математического моделирования, проведенных во

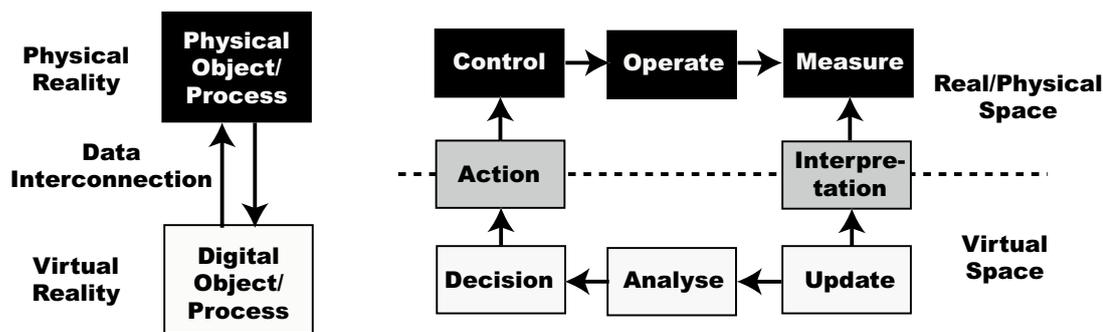


Рис. 2. Компоненты цифрового двойника и процессы высокого уровня в киберфизических системах (основано на данных из [17]).

Digital Twin components and high-level processes in cyber-physical systems (based on data from [17]).

время разработки и/или исследования физического объекта. Задача цифрового двойника — имитировать и предсказывать различные аспекты динамики и характеристик физического объекта, с чем методы ИИ отлично справляются. Это еще раз говорит о том, что цифровой двойник не заменяет традиционного математического моделирования, как и математические модели ограничены задачами познания и оптимизации объекта [9], а не его мониторинга и прогноза текущего состояния.

**3.2. Динамичность и нестационарность.** Обычно реальный объект динамичен, то есть он меняется во времени, а часто даже нестационарен, например, в случае, когда возникают сбои оборудования или пациент переходит из состояния «здоровье» в состояние «болезнь». Промышленные цифровые двойники характеризуются двумя особенностями: (1) они построены на основе тех или иных математических моделей физического объекта, которая должна быть «клонирована», и (2) они динамически в режиме реального времени калибруются по объекту с целью прогнозирования производительности системы и определения мер вмешательства, таких как профилактическое обслуживание и т.д. [14]. Другими словами, цифровой двойник развивается вместе с физическим объектом или системой с течением времени [5, 15]. Этот подход полностью соответствует и концепции персонализированной медицины, как лечебной, так и профилактической. Поэтому концепция цифровых двойников все больше находит применение в задачах персонализированной медицины [16].

Цифровой двойник развивается вместе со своим физическим аналогом на протяжении всего жизненного цикла в физическом и цифровом представлении. Любые изменения в физическом или цифровом двойнике отражаются в его аналоге, создавая замкнутую цепь обратной связи [17], показанную на рис. 2. Эта двухсторонняя связь осуществляется через двунаправленный обмен информацией, где «физически → виртуальная» и «виртуально → физическая» связи образуют замкнутый цикл управления в киберфизической системе «физический объект ↔ цифровой двойник».

Таким образом, цифровой двойник самоадаптируется и самооптимизируется с помощью данных, регистрируемых с реального объекта в режиме реального времени, меняясь по мере изменения состояния физического объекта или процесса, корректируя свои параметры и состояние для возможности прогноза физического объекта [15, 18]. Это достигается за счет бесшовной связи и непрерывного обмена между физическим и виртуальным мирами, о которой поговорим в следующем разделе 3.3. Цель динамичности цифрового двойника заключается в том, чтобы реалистично отражать реальный объект и его поведение в виртуальном представлении [19].

**3.3. Двухсторонняя связь.** Взаимодействие между физической реальностью и виртуальным представлением, реализующим замкнутую цепь обратной связи, составляет основу функциональности цифрового двойника. Как отмечено в разделе 3.2, это взаимодействие осуществляется через двунаправленный обмен информацией между физическим и цифровым пространствами, образуя замкнутый цикл управления.

«Физически → виртуальная» связь включает три ключевых этапа: сбор данных о физической системе, их интерпретацию в соответствии с выбранным уровнем абстракции, и обновление состояний цифрового представления. В медицинских приложениях это соответствует интеграции клинических данных (лабораторные показатели, визуализация, мониторинг в реальном времени) в персонализированные модели пациента. Например, данные непрерывного мониторинга глюкозы могут ассимилироваться в фармакокинетическую модель для уточнения параметров инсулинотерапии.

«Виртуально → физическая» связь представляет процесс трансляции аналитических выводов цифрового двойника в действия, влияющие на физическую систему. Такой подход очевиден для инженерных управлений и соответствует автоматической корректировке параметров оборудования [17]. В здравоохранении данный процесс в настоящее время чаще реализуется непрямым способом через рекомендательные системы поддержки врачебных решений [20]. Цифровой двойник пациента может, к примеру, прогнозировать индивидуальный риск осложнений при различных схемах лечения, позволяя клиницистам выбирать оптимальную терапевтическую стратегию. Вместе с тем, в некоторых биомедицинских приложениях, работающих в реальном времени, например, в интеллектуальных системах интерфейсов мозг-компьютер [21] или систем глубокой стимуляции мозга [22], допустимо прямое воздействие на живой организм в силу необходимости быстрого принятия очень большого числа решений на основе текущего состояния организма [23, 24]. Однако, такие сценарии применения цифровых двойников в биомедицине все же пока остаются исключением из правил [25].

**3.4. Многомасштабность и модульность.** Эти свойства тесно связаны между собой и заключаются в том, что цифровой двойник, являясь виртуальной копией своего физического двойника, должен включать в себя свойства реального объекта на нескольких масштабах или на нескольких уровнях. Например, нас может интересовать поведение макроскопического физического объекта как целого, но для этого необходимо учитывать его микроскопические характеристики, такие как шероховатость поверхности и т. д. [26]. Аналогична ситуация возникает при построении цифровых моделей пациентов, где перспективным представляется использование гибридных моделей, сочетающих физические принципы, например, уравнения гемодинамики (микромасштабный уровень), с методами машинного обучения, связывающими микромасштабные характеристики с макропараметрами пациента (ЭКГ, кровяное давление и т.д.) [27, 28].

Модульный характер цифровых двойников обусловлен тем, что различные компоненты и детали, из которых состоит конечный продукт, имеют свои соответствующие модели, например, цифровой двойник самолета состоит из цифрового двойника стойки, цифрового двойника системы управления полетом и т. д. [29]. Таким образом, цифрового двойника можно рассматривать как серию интегрированных подмоделей [30]. Возникает серьезная проблема, как увязать подобные разрозненные модули в единую систему, которая могла бы дать точное описание и прогноз динамики физического объекта (см. раздел 3.1). В этом случае принципиально необходимо учитывать макромасштабность рассматриваемых процессов как на шкале времени, так и разнородные пространственные масштабы процессов, описываемых цифровыми двойниками.

#### 4. Математические подходы к построению цифровых двойников.

Описанная выше структура цифровых двойников представлена на рис. 3а. Цифровой двойник используется для непрерывного во времени управления поведением и анализа состояния физического объекта или процесса на основании данных, который удается получить с объекта/процесса в реальном времени с некоторой задержкой по времени  $\Delta T$ , которая определяется как задержкой в коммуникационных каналах, так и временем первичной обработки данных. Цифровые двойники при высокой степени достоверности положенных в их основу моделей также могут быть использованы для моделирования гипотетических ситуаций, например, условий возникновения аварийных состояний или различных воздействий на реальный объект.

Формализуем математическое описание цифрового двойника некоторого реального/физического объекта. Пусть задана математическая модель объекта

$$S = (\mathcal{F}, \mathcal{G}, X, Y, Z, P), \quad (1)$$

где  $\mathcal{F} : X \times Y \rightarrow Y$  – оператор эволюции состояния реального объекта,  $\mathcal{G} : Y \rightarrow Z$  – оператор наблюдения,  $X$  – пространство входных управляющих параметров,  $Y$  – пространство состояний объекта,  $Z$  – пространство выходных измеряемых величин,  $P$  – пространство управляющих параметров.

Тогда цифровой двойник объекта в самом общем виде можно определить как динамическую систему

$$D = (S, \Phi, \Psi, \Omega, \mathcal{K}, \varepsilon_{\text{доп}}), \quad (2)$$

где  $\Phi : Z \times Y \rightarrow X$  – алгоритм коррекции входных параметров на основе данных от физического объекта,  $\Psi : Y \times Z \rightarrow Y$  – механизм адаптации внутреннего состояния по измерениям,  $\Omega : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$  – функция оценки расхождения между моделью и объектом (оператор невязки),  $\mathcal{K} : Y \times Z \times \mathbb{R}^+ \rightarrow P$  – оператор калибровки параметров  $P$ ,  $\varepsilon_{\text{доп}}$  – допустимая погрешность представления состояния реального объекта.

Процесс работы цифрового двойника в процессе взаимодействия с реальным объектом в дискретные моменты времени  $k$ , может быть описан следующей общей итерационной схемой:

1. *Получение данных*: на  $k$ -м моменте времени получаем измерение  $z_k \in Z$  с физического объекта
2. *Коррекция входов*: вычисляем скорректированные входные параметры:  $\tilde{x}_k = \Phi(z_k, y_{k-1})$
3. *Прогноз состояния*: обновляем состояние модели:  $\hat{y}_k = F(\tilde{x}_k, \Psi(y_{k-1}, z_k))$
4. *Оценка точности*: вычисляем невязку между моделью и объектом:  $\varepsilon_k = \Omega(\tilde{x}_k, y_k)$
5. *Адаптация модели*:
  - Если  $\varepsilon_k \leq \varepsilon_{\text{доп}}$ , принимаем  $y_k = \hat{y}_k$ .
  - Если  $\varepsilon_k > \varepsilon_{\text{доп}}$ , выполняем калибровку:

$$p_k = \mathcal{K}(y_{k-1}, z_k, \varepsilon_k),$$

$$y_k = \mathcal{F}_{p_k}(\tilde{x}_k, \Psi_{p_k}(y_{k-1}, z_k)),$$

где  $\mathcal{F}_{p_k}$  и  $\Psi_{p_k}$  – операторы модели и коррекции с обновленными параметрами  $P$ . Оператор  $\mathcal{K}$  может реализовываться различными методами: градиентный метод, метод наименьших квадратов, байесовская адаптация, и т.д.

Отметим, что не все шаги данной схемы могут выполняться при построении цифрового двойника, в частности, при конкретных реализациях может опускаться шаг адаптации модели.

Окончательно в дискретном времени  $k$  цифровой двойник реализует отображение:

$$D : Z^* \times Y \rightarrow Y \times \mathbb{R}^+, \quad (3)$$

где  $Z^*$  – последовательность измерений, а обновление состояния цифрового двойника происходит согласно следующему выражению:

$$y_k = F(\Phi(z_k, \Psi(y_{k-1}, z_k)), y_{k-1}). \quad (4)$$

Сходимость состояния цифрового двойника к состоянию реального объекта обеспечивается выполнением условия:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|z_k - G(y_k)\| < \delta \Rightarrow \Omega(x_k, y_k) < \varepsilon, \quad (5)$$

где величина  $\varepsilon$  характеризует точность представления цифровым двойником реального объекта в виртуальном пространстве. [Здесь и далее  \$\|\cdot\|\$  обозначает евклидову норму \(норму  \$L\_2\$ \), если не оговорено иное.](#)

Очевидно, что цифровые двойники могут быть применены практически во всех сферах нашей жизни — от производства и управлением движением транспорта, до медицины и социальных процессов — при условии, что существуют подходящие методы для создания сверхточных и надежных математических моделей соответствующих процессов или объектов [31,32]. По определению, цифровые двойники должны быть в конечном итоге неотличимы от физических объектов в моделируемых ими аспектах поведения реального объекта. Это требование ставит большие задачи, например, в области надежности, устойчивости, достоверности и предсказуемости с использованием построенных моделей. Как показано на рис. 3а (штриховая стрелка), в основе построения цифрового двойника используются ретроспективные данные о функционировании объекта/процесса (собранные датасеты) и/или понимание его работы на основе известных законов физики, биологии и т.д., например, мехатронные системы могут моделироваться с использованием законов механики, а для описания динамики кровотока в организме могут быть использованы соответствующие законы гемодинамики. Соответственно, в настоящее время рассматриваются три основных математических подхода к созданию цифровых двойников: (1) построение математических моделей из первых принципов, (2) моделирование на основе данных и (3) гибридное моделирование на основе больших данных [33].

Моделирование на основе первых принципов основано на наблюдении за поведением обычно физического, реже — биологического, объекта, а также на основании физических/биофизических законов и формировании частичного понимания, которое затем выражается в математических уравнениях, которые в конечном итоге решаются. Наиболее часто в качестве таких математических уравнений выступают ОДУ или УЧП. Поскольку понимание является лишь частичным и в процессе обычно делается много допущений и упрощений, то значительная часть реальных явлений и взаимосвязей в сложном объекте игнорируется.

Учитывая эти ограничения традиционного математического моделирования, для построения цифровых двойников все более популярным становится моделирование на основе данных, под которым мы понимаем подход к созданию моделей, при котором используются данные (например, результаты измерений) для обучения алгоритмов ИИ без явного учета физических законов. Моделирование на основе первых принципов, конечно, менее

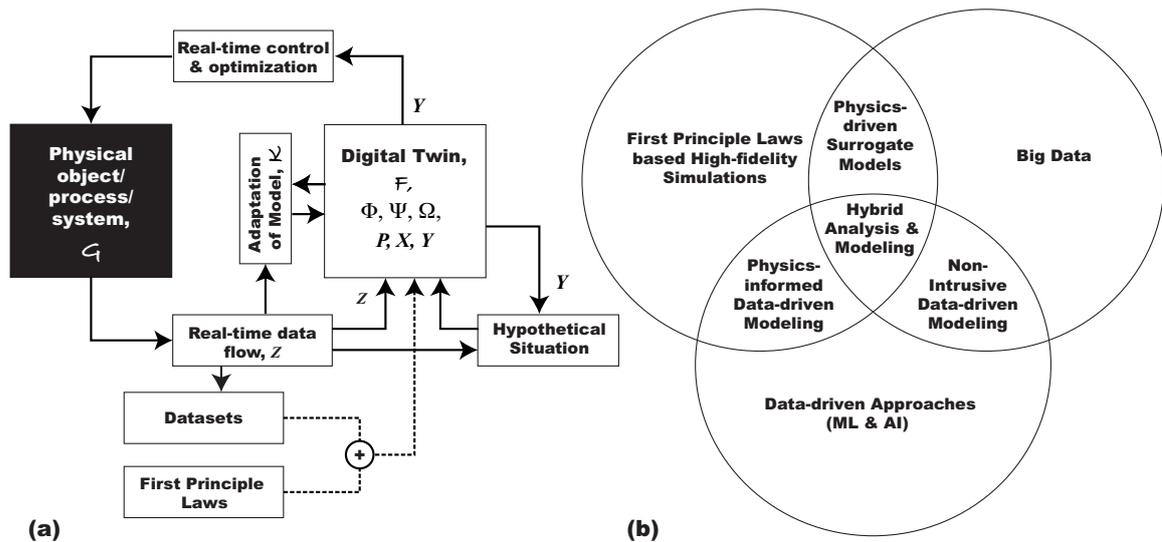


Рис. 3. (a) Базовая схема применения и конструирования цифровых двойников. (b) Диаграмма Венна методов моделирования, основанных на первых принципах и на больших данных, для создания цифровых двойников (панель (b) основана на данных из [33]).

(a) Basic scheme for the application and design of digital twins. (b) Venn diagram of first-principles modeling and data-driven approaches for the creation of digital twins (panel (b) is based on data from [33]).

предвзято, чем методы на основе данных, поскольку использует законы природы, которые легко интерпретировать и обобщать, но они могут быть сложными в вычислительном плане (например, требовать решения уравнений в частных производных в многомерных пространствах, что даже для современной вычислительной техники является сложной задачей при работе в реальном времени), характеризоваться численной неустойчивостью и требовать экспертных знаний для построения. В то же самое время, моделирование, основанное на данных, становится все более эффективно благодаря растущему объему собираемых данных о процессах, так называемых датасетах, относительно недорогим высокопроизводительным вычислительным решениям и эффективным методам обучения моделей ИИ. Данные о процессах отражают не только известные закономерности процессов и явлений, но и неизвестные их составляющие. Поэтому на основе этих данных можно составить более полную картину поведения реального объекта.

Интересным балансом, который объединяет достоинства моделей, основанных на первых принципах, и моделей, основанных на данных, являются редуцированные модели или, как их еще часто называют, модели пониженного порядка (англ. Reduced Order Models) или метамодели, которые хорошо подходят для создания цифровых двойников, обеспечивая баланс между уровнем точности и необходимой вычислительной мощностью [34]. Редуцированные модели — это упрощенные версии высокоточных моделей, сохраняющие ключевые характеристики, но требующие меньше вычислительных ресурсов, например, вместо полного решения уравнений Навье–Стокса можно использовать аппроксимирующую модель на основе нейросетей, так называемую физически информированную нейронную сеть.

Наконец, гибридное моделирование, позволяющее сочетать в себе физическое моделирование и моделирование на основе данных с подходами больших данных, позволяет включить больше физики за счет увеличения сложности модели. Преимуществом данного подхода является то, что анализ больших данных позволяет выявить неизвестные закономерности данных и дать более точные оценки связанных величин. Подходы, которые извлекают суррогатные модели на основе данных из физических моделей, расположены на

Таблица 1 Сравнение методов построения цифровых двойников

Метод	Основа	Преимущества	Ограничения	Ключевые выводы
Первые принципы	Физические законы (ОДУ/УЧП)	Высокая интерпретируемость, обобщаемость	Требует полных знаний о системе, вычислительно дорог	Физические модели незаменимы, когда известны законы системы.
PINNs	Данные + физические ограничения	Гибкость, работа с неполными данными	Сложность обучения, выбор гиперпараметров	Гибридные методы (PINNs, ROM) дают баланс между точностью и скоростью.
ROM	Редукция размерности	Высокая скорость прогноза	Потеря точности для нелинейных режимов	—
Глубокое обучение	Большие данные	Автоматическое извлечение признаков	Требует много данных, «чёрный ящик»	Машинное обучение эффективно при избытке данных, но страдает от недостаточной интерпретируемости.
Резервуарные вычисления	Данные и рекуррентные нейронные сети	Быстрое обучение, обработка временных рядов	Ограниченная точность, эмпирический дизайн	Компромисс для задач реального времени, простота учета внешних факторов.
Сетевые модели	Теория графов и сложных сетей, графовые нейронные сети	Учет структурных и функциональных зависимостей, топологий систем, выявление критических узлов, устойчивость к атакам	Сложность определения весов связей, вычислительная сложность для больших графов	Незаменимы для распределенных систем с явной структурой взаимодействий.

пересечении физического моделирования и анализа больших данных, такие модели традиционно называют суррогатные модели на основе физики [33].

В таблице 1 представлены основные методы построения цифровых двойников и их сравнение с точки зрения преимуществ и ограничений.

**4.1. Модели на основе первых принципов для построения цифровых двойников.** Концепция цифровых двойников существенно опирается на математическое моделирование с использованием дифференциальных уравнений. В этом контексте дифференциальные уравнения служат ядром виртуального представления физического объекта, позволяя не только описывать его текущее состояние, но и прогнозировать будущее поведение при различных сценариях.

В этом случае физический объект или процесс рассматривается как динамическая система, описываемая дифференциальными уравнениями, которые представляют собой мощный универсальный инструмент для описания эволюции систем во времени. Сущность данного подхода заключается в формализации поведения системы через математические соотношения, связывающие текущее состояние системы с его производными по времени, базируясь на первых принципах — законах механики, электродинамики, биофизики и т.д. Выбор конкретного типа дифференциальных уравнений — обыкновенных, в частных производных или стохастических — определяется природой моделируемого процесса и требуемой

детализацией описания.

В этом случае динамика состояния  $\mathcal{F}$  в математической системе (1) описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t), \quad (6)$$

где  $\mathbf{y}(t) \in Y$  – вектор-состояние системы в момент  $t$ ,  $\mathbf{x}(t) \in X$  – входные параметры системы, а  $\mathbf{F} : X \times Y \rightarrow Y$  – гладкое векторное поле, задающее динамику системы.

При вычислительной реализации подобного цифрового дневника необходимо ввести, во-первых, временную сетку  $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ ,  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$  (приведен простейший вариант эквидистантных временных интервалов), и, во-вторых, дискретный оператор эволюции  $\mathbf{F}_{\Delta} : X \times Y \rightarrow Y$ , получаемый численным интегрированием:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{F}_{\Delta}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) = \mathbf{y}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}(\tau)) d\tau.$$

В этом контексте дифференциальные уравнения служат ядром виртуального представления физического объекта, позволяя не только описывать его текущее состояние, но и прогнозировать будущее поведение при различных сценариях. Особую ценность представляет возможность анализа чувствительности системы к изменениям параметров  $\mathbf{p}$  и управления  $\mathbf{u}(\mathbf{y}, t)$  в системах с обратной связью вида

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(\mathbf{y}, t), t). \quad (7)$$

Такие модели позволяют проводить виртуальные эксперименты, оптимизировать параметры работы системы и разрабатывать алгоритмы управления без вмешательства в реальный объект.

Современные технологии цифровых двойников сталкиваются с проблемой моделирования сложных систем, где традиционные методы на основе дифференциальных уравнений могут быть либо вычислительно дорогостоящими, либо недостаточно точными из-за неполноты физических моделей. Поэтому, как отмечалось выше в разделе 4, современные тенденции в области моделирования динамических систем включают разработку редуцированных и гибридных моделей, сочетающих дифференциальные уравнения с методами машинного обучения, что особенно актуально для систем с неполной наблюдаемостью или сложными нелинейностями. Рассмотрим эти подходы более подробно.

#### 4.2. Физически информированные нейронные сети в цифровых двойниках

Физически информированные нейронные сети (Physics-Informed Neural Networks, PINNs) предлагают принципиально новый подход, сочетающий преимущества глубокого обучения с фундаментальными законами физики. Они представляют собой класс моделей глубокого обучения, в которые явно встроены известные физические законы, описывающие поведение моделируемой системы. В отличие от традиционных нейросетевых подходов, PINNs не требуют исключительно данных для обучения, а используют также уравнения, задающие физические ограничения, что делает их особенно перспективными для построения цифровых двойников реальных процессов, описываемых УЧП.

Рассмотрим цифровой двойник, заданный системой (1), где динамика состояния определяется дифференциальным уравнением (6). В случае PINNs модель состояния  $y(t)$  аппроксимируется нейронной сетью  $y_{NN}(t, \theta)$ , где  $\theta$  – набор обучаемых параметров нейронной сети.

Физическая информированность достигается за счет введения функции потерь, состоящей из двух компонент:

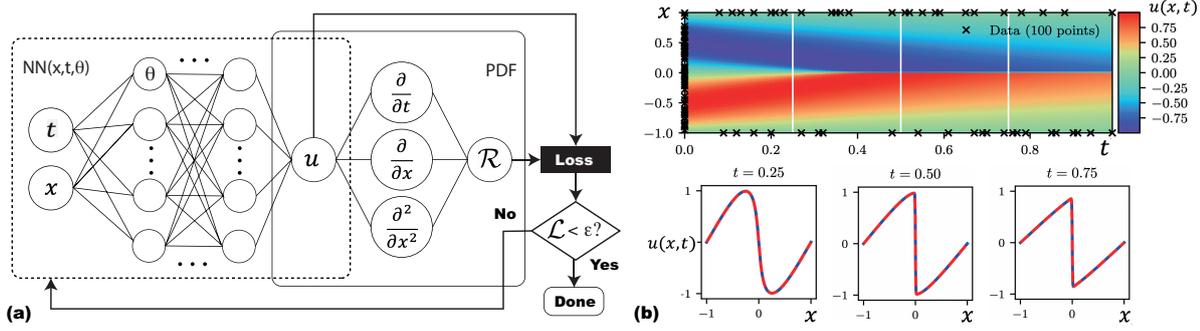


Рис. 4. (а) Схема работы физически информированных нейронных сетей (PINNs) на примере уравнения Бюргерса. Нейронная сеть ( $\text{NN}(x, t, \theta)$ ) предсказывает решение  $u(x, t)$ , а физически информированная часть (PDF) вычисляет невязку уравнения Бюргерса:  $\mathcal{R}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Функция потерь  $\mathcal{L}$  в соответствии с (10) включает ошибку на данных (начальные и граничные условия)  $\mathcal{L}_{\text{data}} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} (u(x_i, t_i) - u_i)^2$  и невязку уравнения  $\mathcal{L}_{\text{physics}} = \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} \mathcal{R}(x_j, t_j)^2$ . Производные вычисляются с помощью автоматического дифференцирования (на основе данных из работы [35]). (б) Верхняя часть: Прогноз решения уравнения Бюргерса  $u(x, t)$  вместе с начальными и граничными обучающими данными. Использовано  $N_c = 10\,000$  точек коллокации, сгенерированных с помощью стратегии латинского гиперкуба [36]. Внизу: сравнение прогнозируемых и точных решений, соответствующих трем временным моментам, обозначенным белыми вертикальными линиями на верхней панели. Относительная ошибка (10) для этого случая составляет  $\mathcal{L} = 6.7 \times 10^{-4}$ . Обратим внимание, что эта погрешность примерно на два порядка ниже, чем та, о которой сообщалось в работе [37] по решению уравнений в частных производных с использованием гауссовых процессов на основе данных. Обучение модели заняло примерно 60 с на одной видеокарте NVIDIA Titan X GPU (на основе данных из [38]).

(а) Schematic representation of PINNs using the Burgers equation as an example. The neural network ( $\text{NN}(x, t, \theta)$ ) predicts the solution  $u(x, t)$ , and the physically informed part (PDF) calculates the inconsistency of the Burgers equation:  $\mathcal{R}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . The loss function  $\mathcal{L}$  according to (10) includes an error on the data (initial and boundary conditions)  $\mathcal{L}_{\text{data}} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} (u(x_i, t_i) - u_i)^2$  and the equation mismatch  $\mathcal{L}_{\text{physics}} = \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} \mathcal{R}(x_j, t_j)^2$ . The derivatives are calculated using automatic differentiation (based on data from [35]). (б) Top: Prediction of the solution to the Burgers equation  $u(x, t)$  together with the initial and boundary training data.  $N_c = 10,000$  collocation points generated using the Latin hypercube strategy [36] were used. Bottom: Comparison of the predicted and exact solutions corresponding to the three time points marked by white vertical lines in the top panel. The relative error (10) for this case is  $\mathcal{L} = 6.7 \times 10^{-4}$ . Note that this error is approximately two orders of magnitude lower than that reported in [37] for solving partial differential equations using data-driven Gaussian processes. Training the model took approximately 60 sec on a single NVIDIA Titan X GPU (based on data from [38]).

1. Потери на данных (data loss):

$$\mathcal{L}_{\text{data}} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} \|y_{\text{NN}}(t_i; \theta) - y_i\|^2, \quad (8)$$

где  $\{t_i, y_i\}_{i=1}^{N_d}$  – доступные измерения состояния объекта.

2. Физические потери (physics loss):

$$\mathcal{L}_{\text{physics}} = \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} \|\dot{y}_{\text{NN}}(t_j; \theta) - F(x(t_j), y_{\text{NN}}(t_j; \theta))\|^2, \quad (9)$$

где  $\{t_j\}_{j=1}^{N_c}$  – точки коллокации, в которых выполняется проверка соответствия поведения модели уравнению динамики.

Общая функция потерь представляет собой сумму этих двух типов потерь (8) и (9) и

имеет вид:

$$\mathcal{L}(\theta) = (1 - \lambda)\mathcal{L}_{\text{data}} + \lambda\mathcal{L}_{\text{physics}}, \quad (10)$$

где  $\lambda \in [0, 1]$  – весовой коэффициент, балансирующий вклад данных и физических законов. Нейронная сеть  $y_{\text{NN}}(t; \theta)$  тренируется таким образом, чтобы найти оптимальные параметры  $\theta^*$  путем минимизации общей функции потерь (10).

Пример использования PINN для моделирования классического нелинейного уравнения математической физики – уравнения Бюргера, описывающего формирование ударной волны, показан на рис. 4.

В рамках итерационной схемы цифрового двойника PINNs могут быть использованы на этапах прогноза состояния и адаптации модели: На этапе прогноза состояния вместо численного интегрирования уравнения (6) состояние модели предсказывается обученной нейросетью:

$$\hat{y}_k = y_{\text{NN}}(t_k, \theta^*). \quad (11)$$

На этапе адаптации модели в случае выполнения условия, если  $\varepsilon_k > \varepsilon_{\text{доп}}$ , параметры  $\theta$  уточняются путем минимизации  $\mathcal{L}(\theta)$  на новых данных. В этом случае физические ограничения позволяют сохранять корректность модели машинного обучения даже при недостатке данных.

Применение PINNs в цифровых двойниках предлагает несколько ключевых преимуществ:

1. *Гибкость моделирования.* Возможность объединения разрозненных данных (экспериментальных измерений, результатов численного моделирования) в единую согласованную модель. PINNs могут работать с частично наблюдаемыми системами и неполными физическими моделями.

2. *Обратные задачи.* Эффективное решение параметрических обратных задач, когда требуется определить неизвестные параметры системы  $\mathbf{p}$  по наблюдаемым данным:

$$\mathbf{p}^* = \underset{\mathbf{p} \in P}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^N \Omega(\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\tilde{x}_k, \Psi_{\mathbf{p}}(y_{k-1}, z_k)), z_k), \quad (12)$$

где  $\mathbf{p}^* \in P$  – искомые оптимальные параметры системы,  $\Omega : Y \times Z \rightarrow \mathbb{R}^+$  – функционал невязки, определяемый формулой (5),  $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}$  – оператор эволюции состояния с параметрами  $\mathbf{p}$ ,  $\Psi_{\mathbf{p}}$  – механизм адаптации с параметрами  $\mathbf{p}$ ,  $\tilde{x}_k = \Phi(z_k, y_{k-1})$  – скорректированные входные параметры,  $z_{k=1}^N$  – последовательность наблюдений.

3. *Мультифизичность.* Естественное объединение уравнений из разных физических доменов (механика, теплопередача, электродинамика) в единую модель

4. *Вычислительная эффективность.* После обучения PINN обеспечивает быстрое предсказание состояний системы без необходимости решения дифференциальных уравнений в частных производных в реальном времени.

5. *Интерпретируемость.* Использование PINN сохраняют физическую осмысленность прогнозов.

Несмотря на перспективность подхода, PINNs сталкиваются с рядом существенных ограничений. Во-первых, PINN характеризуется сложностью обучения: требуется баланс между данными и физическими ограничениями; выбор точек коллокации  $\{t_j\}_{j=1}^{N_c}$  и веса  $\lambda$  критичен для точности модели; имеются проблемы сходимости обучения при наличии множественных масштабов времени и пространства. Во-вторых, при обучении таких моделей мы сталкиваемся с высокими требованиями к вычислительным ресурсам при обучении для сложных многомерных систем, а также со сложностью верификации и валидации полученных моделей.

**4.3. Модели пониженного порядка в построении цифровых двойников** При разработке цифровых двойников сложных динамических систем, описываемых уравнениями вида (6), часто возникает проблема вычислительной сложности. Полные модели, особенно основанные на уравнениях в частных производных, могут требовать значительных вычислительных ресурсов, что затрудняет их использование в режиме реального времени. В этом контексте модели пониженного порядка (Reduced Order Models, ROM) предлагают эффективный подход к снижению вычислительной нагрузки при сохранении ключевых физических свойств системы в рамках построения цифровых двойников [39].

Основная идея ROM заключается в проекции исходной высокоразмерной системы на подпространство существенно меньшей размерности. Рассмотрим полную модель, представленную в (1), где пространство состояний  $Y$  имеет размерность  $N$  (например, число узлов в конечно-элементной или конечно-сеточной дискретизации). Вместо работы непосредственно в  $Y$  мы ищем приближенное решение в подпространстве  $Q \subset Y$  размерности  $n \ll N$ :

$$y(t) \approx y_0 + \mathcal{U}q(t), \quad (13)$$

где  $y_0 \in Y$  – базовое состояние системы,  $\mathcal{U} : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$  – оператор проекции, а  $q(t) \in \mathbb{R}^n$  – вектор обобщенных координат. Такое представление позволяет переформулировать исходную систему (6) в терминах переменных  $q(t)$  с учетом (13):

$$\dot{q}(t) = \mathcal{U}^T F(x(t), y_0 + \mathcal{U}q(t)). \quad (14)$$

Эта редуцированная система сохраняет основные динамические характеристики оригинала, но требует на порядки меньше вычислительных ресурсов.

Интересно отметить, что ROM можно рассматривать как особый случай физически информированных моделей, обсуждавшихся ранее. В отличие от PINNs из раздела 4.2, где физические законы встраиваются через условия обучения (9), ROM непосредственно проецирует уравнения на подпространство. Однако современные гибридные подходы начинают сочетать оба метода, используя нейронные сети для построения нелинейных проекционных операторов  $\mathcal{U}$ .

На практике построение ROM включает два основных этапа. На подготовительном этапе обучения выполняется анализ полной модели: генерируется набор «снимков» состояний системы  $\{y_i\}_{i=1}^M$ , полученных при численном моделировании или экспериментальных измерениях, по которым строится базис  $\mathcal{U}$ .

Один из наиболее распространенных подходов к построению ROM основан на методе собственных ортогональных разложений (Proper Orthogonal Decomposition, POD) [40]. Этот метод позволяет выделить доминирующие моды динамики системы на основе анализа «снимков» её состояний  $\{y_i\}_{i=1}^M$ . Математически POD решает задачу минимизации:

$$\mathcal{U} = \operatorname{argmin}_{\mathcal{U}^T \mathcal{U} = \mathbf{I}} \sum_{i=1}^M \|y_i - \mathcal{U} \mathcal{U}^T y_i\|^2, \quad (15)$$

где  $\mathcal{U}$  – искомая ортонормированная матрица базисных векторов,  $\mathcal{U} \mathcal{U}^T$  – оператор проекции на подпространство,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица.

Решение этой задачи сводится к сингулярному разложению матрицы снимков, где столбцы  $\mathcal{U}$  соответствуют главным собственным векторам ковариационной матрицы системы. Чем быстрее убывают сингулярные числа, тем эффективнее работает метод, позволяя существенно сократить размерность задачи.

Для периодических или квазипериодических систем эффективным подходом является метод гармонического баланса. В этом случае решение представляется в виде ряда Фурье:

$$y(t) \approx \sum_{k=-K}^K \hat{y}_k e^{\sqrt{-1}k\omega t}, \quad (16)$$

где  $\hat{y}_k$  – комплексные амплитуды гармоник,  $\omega$  – основная частота системы,  $K$  – число учитываемых гармоник.

Этот метод особенно часто используется для анализа установившихся колебательных режимов в механических и электротехнических системах. Редуцированная модель в этом случае оперирует коэффициентами Фурье  $\hat{y}_k$  вместо полного временного решения.

Однако, современные подходы активно используют методы машинного обучения для построения метамоделей. Во-первых, это *регрессионные метамоделли* (гауссовы процессы, RBF-сети), которые позволяют аппроксимировать зависимость между параметрами системы и её откликом, обучаясь на данных численных экспериментов. Регрессионные метамоделли особенно эффективны, когда прямое решение полной модели требует значительных вычислительных ресурсов.

Во-вторых, *автоэнкодеры* (autoencoders) предоставляют нелинейный аналог POD, обучая нейронную сеть находить компактное представление состояний системы. Современные архитектуры автоэнкодеров позволяют достигать сжатия на порядки превосходящего классические методы при сопоставимой точности восстановления. Ключевое преимущество – способность сохранять неявные физические инварианты (например, симметрии или законы сохранения) даже без их явного задания.

Эти методы особенно ценны для систем со сложной нелинейной динамикой, где традиционные линейные методы проекции оказываются недостаточно точными. Их можно комбинировать с физически информированными подходами, обсуждавшимися в разделе 4.2, создавая гибридные модели, сочетающие данные и физические принципы.

В контексте цифрового двойника (1) применение ROM позволяет модифицировать оператор эволюции состояния:

$$\mathcal{F}_r : X \times Q \rightarrow Q, \quad Q \subset \mathbb{R}^n, \quad (17)$$

где  $X$  – пространство параметров,  $Q$  – подпространство пониженной размерности ( $n \ll N$ ), аппроксимирующее исходное пространство состояний полной модели.

Процесс построения и использования ROM включает две ключевые фазы. На этом этапе предварительных вычислений выполняются ресурсоемкие вычисления, необходимые для построения метамоделли:

- Генерация снимков полной модели: решение полной модели для репрезентативного набора параметров и начальных условий.
- Построение базиса  $\mathcal{U}$ : с помощью методов сингулярного разложения, собственных разложений (POD) или других методов выделяются доминантные моды, формирующие подпространство
- Калибровка метамоделли: настройка коэффициентов редуцированной системы для минимизации ошибки аппроксимации

После построения базиса метамоделль на этапе эксплуатации ROM позволяет:

- Эффективное прогнозирование: решение редуцированной системы в подпространстве  $Q$  с существенно меньшими вычислительными затратами.

- Реконструкция полного состояния: при необходимости полное состояние восстанавливается через линейную комбинацию базисных векторов  $\mathcal{U}$ .

Современные исследования в области ROM для цифровых двойников фокусируются на трех направлениях:

- Адаптивные методы, автоматически обновляющие базис при изменении режимов работы системы.
- Нелинейные обобщения традиционных линейных проекционных методов.
- Гибридные подходы, сочетающие ROM с методами машинного обучения.

Эти разработки особенно актуальны для сложных технических систем, где требования к скорости вычислений сочетаются с необходимостью учета широкого диапазона рабочих режимов. Как показывает практика, грамотное сочетание ROM с другими подходами, рассмотренными в предыдущих разделах, позволяет создавать эффективные цифровые двойники, удовлетворяющие противоречивым требованиям точности и быстродействия.

**4.4. Глубокое обучение в построении цифровых двойников** Современные методы машинного и глубокого обучения предлагают мощные инструменты для создания цифровых двойников, дополняя традиционные подходы, основанные на физических моделях. Эти методы особенно эффективны в случаях, когда система (1) содержит сложные нелинейности или когда полное физическое описание процессов невозможно или очень сложное.

Глубокие нейронные сети могут непосредственно аппроксимировать операторы эволюции  $\mathcal{F}$  и наблюдения  $\mathcal{G}$  из (1). Рассмотрим нейросетевую параметризацию оператора состояния:

$$\hat{\mathcal{F}}_{\theta} : X \times Y \rightarrow Y \quad (18)$$

где  $\theta$  – обучаемые параметры сети. Обучение такой модели проводится минимизацией функционала, аналогичного (5), но с заменой физического оператора на нейросетевую:

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{k=1}^N |\hat{\mathcal{F}}_{\theta}(x_k, y_{k-1}) - y_k|^2 + \beta R(\theta). \quad (19)$$

Здесь  $R(\theta)$  – регуляризатор, обеспечивающий устойчивость решения, а  $\beta$  – параметр регуляризации, обычно малый.

Интересный подход, называемый нейронным дифференциальным уравнением, сочетает физические модели с машинным обучением. Например, можно модифицировать уравнение (6), добавив нейросетевой член, аппроксимирующий векторное поле:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) + \mathbf{F}_{\text{NN}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t); \theta) \quad (20)$$

где  $\mathbf{F}$  описывает известные физические законы (6), а  $\mathbf{F}_{\text{NN}}$  обучается для моделирования неизвестных эффектов. Такой подход сохраняет физическую интерпретируемость, одновременно повышая точность модели за счет учета неизвестных и слабо контролируемых факторов. В разделе 4.6 на рис. 6 представлен пример такой модели.

В реальных задачах часто возникает ситуация, когда мы можем наблюдать только выходные величины системы  $z_k \in Z$  (например, показания датчиков), в то время как полное внутреннее состояние  $y_k \in Y$  остается скрытым. Эта проблема известна как обучение при частичной наблюдаемости. В этом случае можно использовать подход, аналогичный (4), но с нейронной сетью  $\mathcal{N}_{\theta}$  для восстановления скрытых состояний. Уравнение

$$y_k = \mathcal{N}_{\theta}(z_k, y_{k-1}, x_k), \quad (21)$$

описывает рекуррентную модель, где  $z_k$  – текущее наблюдение,  $y_{k-1}$  – предыдущее оцененное состояние,  $x_k$  – текущее входное воздействие,  $\theta$  – параметры нейронной сети.

Обучение проводится методом обратного распространения ошибки, минимизируя расхождение между предсказанными и наблюдаемыми выходами. Процесс обучения включает следующие этапы:

1. *Прямой проход.* Для каждой пары  $(x_k, z_k)$  в обучающих данных:

- Применяем нейросеть для последовательного предсказания состояний  $\hat{y}_k$ .
- Используем оператор наблюдения  $\mathcal{G}$  (из (1)) для получения предсказанных выходов  $\hat{z}_k = \mathcal{G}(\hat{y}_k)$ .

2. *Вычисление ошибки.* Сравниваем предсказанные выходы с реальными наблюдениями:

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{k=1}^N |z_k - \hat{z}_k|^2. \quad (22)$$

3. *Обратное распространение.*

- Вычисляем градиенты  $\nabla_{\theta}\mathcal{L}$  через всю временную последовательность.
- Обновляем параметры  $\theta$  методом градиентного спуска.

Ключевыми особенностями данного подхода являются, во-первых, возможность учитывать временные зависимости в данных за счет рекуррентной структуры алгоритма; во-вторых, возможность комбинации данных и моделей, используя известный оператор  $\mathcal{G}$  при обучении; в-третьих, универсальность подхода, которая позволяет учиться нейросети восстанавливать состояния без явной физической модели эволюции системы.

На практике такая схема особенно полезна для систем с неполным математическим описанием, задач диагностики и мониторинга и случаев, когда прямое измерение тех или иных переменных состояния невозможно.

Современные исследования сосредоточены на разработке архитектур, сочетающих преимущества физических моделей (6) с гибкостью глубокого обучения. Особый интерес представляют нейронные дифференциальные уравнения [41], трансформеры для временных рядов [42], методы обучения с небольшим количеством проб (few-shot learning) для быстрой адаптации [43]. Эти подходы открывают новые возможности для создания цифровых двойников сложных систем, где традиционные методы сталкиваются с ограничениями.

**4.5. Резервуарные вычисления для цифровых двойников** Резервуарные вычисления (англ. Reservoir Computing, RC) представляют собой особый подход к обработке временных последовательностей, особенно эффективный для задач цифровых двойников, где требуется моделирование сложной динамики системы (6). Основная идея RC заключается в использовании фиксированной случайной динамической системы («резервуара») для преобразования входных данных в высокоразмерное пространство состояний, с последующей линейной регрессией для получения выходного сигнала [44]. Отметим, что RC являются частными случаями рекуррентных нейронных сетей.

Математически RC описывается следующей системой уравнений:

$$\mathbf{r}_k = (1 - \alpha)\mathbf{r}_{k-1} + \alpha\sigma(\mathbf{W}_{\text{in}}\mathbf{u}_k + \mathbf{W}\mathbf{r}_{k-1}), \quad (23)$$

где  $\mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^{N_r}$  – состояние резервуара в момент  $k$ ,  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{N_u}$  – входной сигнал (например,  $x_k$  или  $z_k$  из (3)),  $\mathbf{W}_{\text{in}} \in \mathbb{R}^{N_r \times N_u}$  – матрица входных весов (случайная, фиксированная),  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N_r \times N_r}$  – матрица связей резервуара (разреженная, случайная),  $\sigma(\cdot)$  – нелинейная функция активации (обычно гиперболический тангенс  $\tanh(\cdot)$ ),  $\alpha \in (0, 1]$  – параметр утечки.

Обучение RC-системы для цифрового двойника включает два этапа:

1. *Фаза резервуара*: Подача входных данных  $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^T$  и сбор состояний  $\{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^T$ ,
2. *Фаза регрессии*: Решение задачи оптимизации для выходных весов  $\mathbf{W}_{\text{out}}$ :

$$\mathbf{W}_{\text{out}} = \arg \min_{\mathbf{W}_{\text{out}}} \sum_{k=1}^T \|\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_{\text{out}} \mathbf{r}_k\|^2 + \beta \|\mathbf{W}_{\text{out}}\|^2, \quad (24)$$

где  $\mathbf{y}_k$  — целевой выход (например,  $y_k$  или  $z_{k+1}$  из (4)),  $\beta \ll 1$  — коэффициент регуляризации.

Пример применения РС для создания цифровых двойников в условиях неполных данных представлен в работе [46]. Авторы исследовали возможность клонирования стохастических динамических систем, когда доступны для измерения лишь внешние воздействия и частичный отклик системы, а внутренние переменные остаются скрытыми. Схематическое представление подхода на основе резервуарных вычислений для клонирования динамических систем при наличии скрытых переменных показан на рис. 5а. РС состоит из трех слоев: входного слоя, скрытого резервуарного слоя и выходного слоя. Система испытывает внешние воздействия  $\xi(t)$  на дискретных временных интервалах  $t = k\tau$ , где  $\tau$  — интервал дискретизации, а  $k$  — дискретное время. Одновременно с этим реакция системы на это возбуждение регистрируется в тех же временных интервалах, что обеспечивает необходимые данные для обучения и прогнозирования. В результате входной сигнал резервуара (23) формируется как:

$$\mathbf{u}_k = (\xi_t, \mathbf{z}_t, \xi_{t-\tau}, \mathbf{z}_{t-\tau}, \dots, \xi_{t-n\tau}, \mathbf{z}_{t-n\tau})^T, \quad (25)$$

где  $\mathbf{z}$  — наблюдаемые переменные реального объекта,  $n$  — число задержанных переменных, которые формируют  $n$  пар  $(\xi_{t-i\tau}, \mathbf{z}_{t-i\tau})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Число пар  $n$  является важным параметром, определяющим качество построения цифрового двойника при отсутствии полной информации о системе. Аналогичные подходы могут найти применение и для обнаружения скрытых или восстановления утраченных данных сложных систем [47, 48].

В работах [46, 49] были проведены эксперименты по построению цифрового двойника эрбиевого волоконного лазера, используемого в различных системах связи [50], экспериментальная реализация которого показана на рис. 5б. В качестве внешнего воздействия  $\xi(t)$  использовалась шумовая накачка, которая приводила к генерации импульсов лазером, а в качестве измеряемой величины  $\mathbf{z}(t)$  — интенсивность лазерного излучения  $z(t)$ . При небольших интенсивностях шумовой накачки удалось достичь так называемого «сильного клонирования» с точным воспроизведением траекторий при использовании  $n = 3$  временных задержек в архитектуре РС. Соответствующие временные ряды интенсивности лазера и цифрового двойника, а также распределения их амплитуд показаны на рис. 5с. При больших интенсивностях шумовой накачки точное воспроизведение временных траекторий оказалось невозможным. Однако метод позволил достичь «слабого клонирования» — точного воспроизведения статистических характеристик системы при  $n = 9$  задержках, как показано на рис. 5д. Видно, что последовательность импульсов не совпадает с последовательностью импульсов экспериментальной системы, однако, распределения интервалов между импульсами  $\delta T$  для исходной системы и её РС-клона совпали с высокой точностью.

Полученные результаты имеют важное значение для разработки цифровых двойников реальных систем. Они показывают, что даже при отсутствии полной информации о внутренней динамике, использование внешних возмущений в сочетании с методом резервуарных вычислений позволяет создавать либо точные копии системы, либо их статистические аналоги, которые возможно использовать при тестировании и разработках реальных систем. Оптимальное количество временных задержек в архитектуре РС (обычно не более

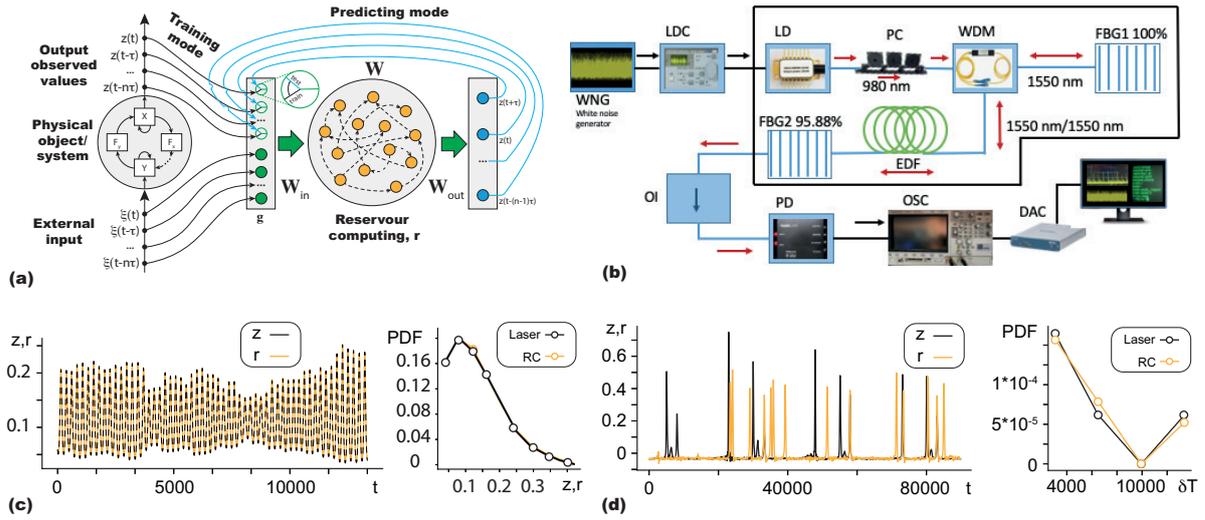


Рис. 5. Схематическое представление подхода резервуарных вычислений для клонирования динамических систем. (a) Общая архитектура RC-модели. (b) Экспериментальная схема эрбиевого волоконного лазера. (c,d) Сравнение результатов сильного и слабого клонирования волоконного лазера (на основе данных из работ [46, 49]).

Schematic representation of the reservoir computing approach for cloning dynamic systems. (a) General architecture of the RC model. (b) Experimental setup of an erbium fiber laser. (c,d) Comparison of the results of strong and weak cloning of a fiber laser (based on data from [46, 49]).

10) обеспечивает баланс между точностью моделирования и вычислительной сложностью, что особенно важно для работы в реальном времени.

Таким образом, RC имеет целый ряд преимуществ в качестве математического ядра цифровых двойников. Во-первых, это вычислительная эффективность. В отличие от полного обучения рекуррентных нейронных сетей, RC требует оптимизации только выходного слоя. Во-вторых, для RC не нужно очень много данных, так как данная архитектура демонстрирует высокую обобщающую способность даже при ограниченных данных. Наконец, RC очень эффективны для моделирования сложной динамики. Способность аппроксимировать нелинейные временные зависимости, характерные для (6), даже при неполноте всех данных, делает резервуарные вычисления незаменимым инструментом для построения цифровых двойников сложных нелинейных процессов.

**4.6. Теория сложных сетей и графовые модели в цифровых двойниках** Теория сложных сетей и методы анализа графов предоставляют мощный математический аппарат для построения цифровых двойников систем с распределенной структурой и сложными взаимодействиями между компонентами. В контексте формализма, заданного уравнениями (1)–(5), графовые цифровые модели позволяют компактно представить оператор эволюции состояния  $\mathcal{F}$  для систем, где пространство состояний  $Y$  имеет сетевую структуру. Типичными объектами такой природы являются различные транспортные и энергетические сети [51, 52], а также функциональные сети живых организмов, например, функциональные сети головного мозга [53], которые являются эффективным средством для построения цифровых двойников заболеваний головного мозга.

Пусть цифровой двойник описывает систему, состоящую из  $N$  взаимодействующих компонентов. Тогда её структуру можно представить ориентированным или неориентированным графом  $G = (V, E)$ , где  $V = \{v_i\}_{i=1}^N$  — множество вершин (компонентов системы), а  $E \subseteq V \times V$  — множество рёбер (взаимодействий между компонентами). Состояние системы

в момент дискретного времени  $k$  задаётся как  $y_k = \{y_k^i\}_{i=1}^N$ , где  $y_k^i \in \mathbb{R}^d$  — состояние  $i$ -го компонента.

Динамика системы описывается сетевой версией уравнения (6):

$$\dot{y}^i(t) = F_i(x_i(t), y^i(t), \{y^j(t)\}_{j \in \mathcal{N}_i}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (26)$$

где  $\mathcal{N}_i = \{j | (v_j, v_i) \in E\}$  — множество соседей вершины  $v_i$  в графе  $G$ , а  $F_i$  — локальный оператор эволюции для  $i$ -го компонента, учитывающий его собственное состояние и состояния соседних узлов.

Для цифровых двойников городских систем и промышленных комплексов, а также сетей головного мозга, особую ценность представляют методы анализа топологических свойств сети [54]:

- различные типы центральности вершин для выявления критически важных компонентов,
- алгебраическая связность графа для оценки устойчивости системы,
- свойства сегрегации и интеграции, вычисляемые через коэффициенты модулярности, кластеризации, эффективности и т.д. для выявления функциональных подсистем реального объекта.

Оператор наблюдения  $\mathcal{G}$  в (1) для сетевых систем часто имеет выборочный (разреженный) характер:

$$z_k = \{y_k^i\}_{i \in S}, \quad S \subset \{1, \dots, N\}, \quad S \ll N, \quad (27)$$

где  $S$  — множество наблюдаемых узлов. В этом случае задача восстановления полного состояния системы по ограниченному наблюдению требует применения методов сетевой реконструкции и теории разреженного восстановления [55, 56], могут также применяться методы машинного обучения, например, РС [47, 57].

Перспективным направлением является сочетание графовых моделей с методами глубокого обучения, такими как графовые нейронные сети (англ. Graph Neural Networks, GNN) [58, 59]. В этом случае оператор эволюции  $\mathcal{F}$  в (1) параметризуется как GNN:

$$y_{k+1} = \text{GNN}(y_k, x_k, \mathbf{A}, \theta), \quad (28)$$

где  $\mathbf{A}$  — матрица смежности графа  $G$ , а  $\theta$  — параметры сети, обучаемые на ретроспективных данных. Такой подход особенно эффективен для цифровых двойников транспортных систем, энергетических сетей и социальных сетей, где топология взаимодействий играет ключевую роль.

Ярким примером применения GNN в медицине является работа [60], где цифровой двойник пациента строится как граф  $G = (V, E)$ , объединяющий данные от микро- (молекулярный), через мезо- (клетки) до макро- (отдельные органы и внешние факторы) уровня организации. На рис. 6 представлена графовая архитектура цифрового двойника пациента, основанная на объединении модели на основе ОДУ и GNN. Модель отражает многоуровневую организацию человеческого организма, где каждый компонент системы (гены, клетки, органы, внешние факторы) представлен в виде вершин графа  $V$ , а их взаимодействия — в виде множества направленных рёбер  $E$ . Модель на основе ОДУ [61] позволяет, во-первых, формализовать известные биофизические закономерностей, а во-вторых, генерировать синтетические данные для обучения GNN. GNN прогнозирует динамику модели через обмен сообщениями (англ. message passing), благодаря которому каждая вершина обновляет своё состояние на основе информации от соседних вершин. Например, клеточный уровень

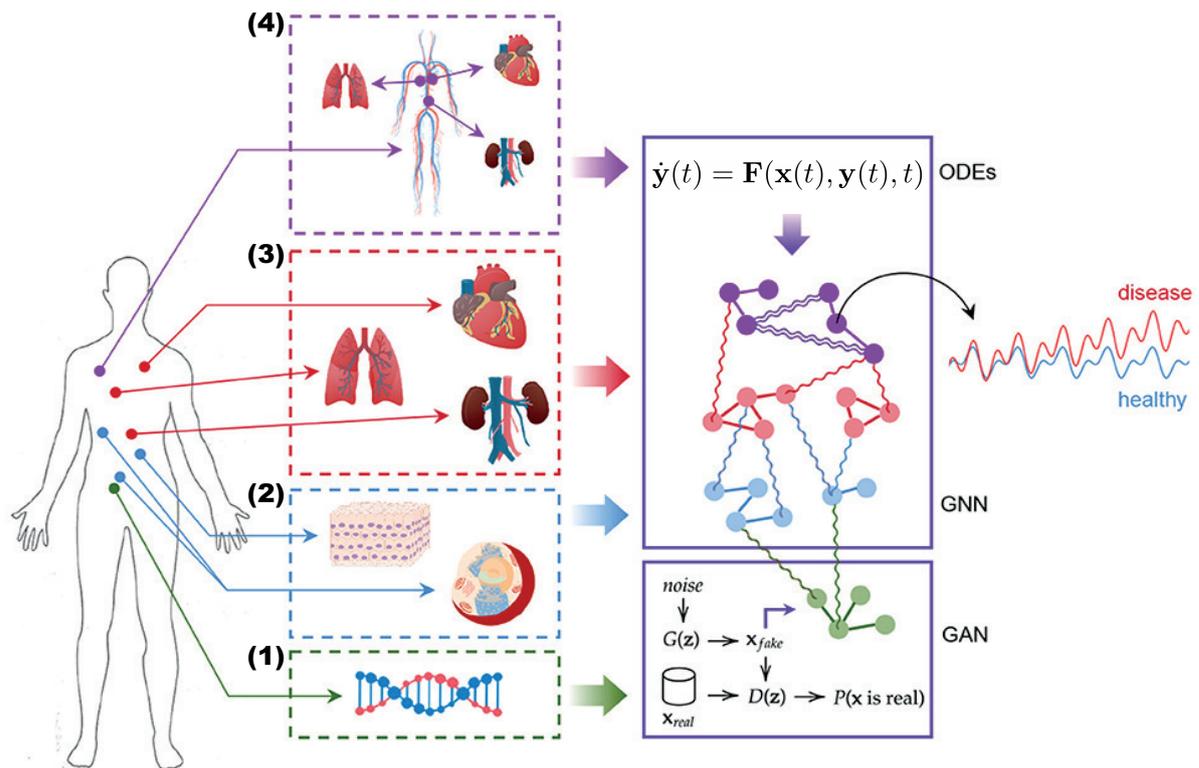


Рис. 6. Гибридная модель цифрового двойника пациента: ОДУ задают биофизические законы на локальном уровне, GNN интегрирует многоуровневые взаимодействия для прогнозирования системных эффектов, а GAN расширяет данные, моделируя редкие и критические состояния. Слева показана структура графа  $G$ . Множество вершин графа  $V$  (узлы сети, представленной справа) соответствуют четырем уровням: (1) транскриптомный уровень (гены и их экспрессия), (2) клеточный уровень (такие биологические процессы как метаболизм и воспаление, а также внутриклеточные сигнальные пути), (3) уровень органов (сердце, лёгкие, почки и их физиологические параметры (давление в камерах сердца)), (4) Уровень внешних факторов (диета, физическая активность, вирусные инфекции). Множество ребер  $E$  (связи между узлами сети) отражают причинно-следственные связи между уровнями, например, влияние экспрессии гена ACE2 в лёгких на уровень цитокинов в крови, воздействие высокого кровяного давления в сердце на функцию почек, модуляция клеточных процессов лекарствами (например, ингибиторами АПФ) и т.д. GAN-модуль (показан внизу) дополняет модель на основе GNN, генерируя реалистичные синтетические данные для редких клинических сценариев, что позволяет GNN обучаться на расширенном наборе патологических состояний и терапевтических вмешательств. Временные зависимости показывают результат прогноза для одного из узлов сети. Из работы [60]).

Hybrid model of patient's digital twin: ODEs specify biophysical laws at the local level, GNNs integrate multi-level interactions to predict systemic effects, and GANs expand data by simulating rare and critical states. The structure of graph  $G$  is shown on the left. The set of vertices  $V$  (nodes of the network shown in the center) corresponds to four levels: (1) the transcriptional level (genes and their expression), (2) cellular level (biological processes such as metabolism and inflammation, as well as intracellular signaling pathways), (3) organ level (heart, lungs, kidneys, and their physiological parameters (pressure in the heart chambers)), (4) external factors level (diet, physical activity, viral infections). The set of edges  $E$  (connections between network nodes) reflects causal relationships between levels, for example, the effect of ACE2 gene expression in the lungs on the level of cytokines in the blood, the effect of high blood pressure in the heart on kidney function, the modulation of cellular processes by drugs (e.g., ACE inhibitors), etc. The GAN module (shown below) complements the GNN-based model by generating realistic synthetic data for rare clinical scenarios, allowing the GNN to learn from an expanded set of pathological conditions and therapeutic interventions. Temporal dependencies show the forecast result for one of the network nodes. From [60]).

получает данные о генной экспрессии и внешних воздействиях (инфекция SARS-CoV-2), а уровень органов интегрирует сигналы от клеток и корректирует физиологические пара-

метры. Этот подход соответствует формализму уравнений (1)–(4), где оператор эволюции состояния  $\mathcal{F}(\cdot)$  реализован через GNN (28), а топология графа  $G$  кодирует биологические иерархии.

В рассматриваемой работе [60] модель в виде ОДУ использовалась для моделирования биохимические реакции гормонов, гемодинамики сердечных камер и влияния препаратов (ингибиторы АПФ). В свою очередь, GNN, благодаря использованию графового представления всех взаимосвязей в организме, во-первых, осуществляет интеграцию разнородных данных (молекулярный уровень (экспрессия генов)  $\rightarrow$  клеточный уровень (метаболические пути)  $\rightarrow$  уровень органов (физиологические параметры) и их взаимосвязь с внешними факторами) через механизм обмена сообщениями. Во-вторых, GNN оказывается эффективной для прогнозирования эмерджентных свойств системы, которые возникают только при взаимодействии компонентов системы, а также обнаружения точек бифуркации, где малые изменения вызывают качественный сдвиг. Например, GNN выявила эмерджентный эффект системной гиперкоагуляции и почечной дисфункции через анализ каскада взаимодействий: высокий уровень ACE2 в лёгких  $\rightarrow$  нарушение регуляции ренин-ангиотензиновой системы  $\rightarrow$  дисбаланс воспалительных цитокинов  $\rightarrow$  одновременное повышение свёртываемости крови (через активацию PAI-1) и ухудшение функции почек (через снижение почечного кровотока), что невозможно предсказать, анализируя каждый компонент системы по отдельности.

Авторы демонстрируют, что такой подход позволяет не только прогнозировать динамику клинических параметров (например, артериального давления), но и моделировать кросс-тканевые взаимодействия, такие как влияние экспрессии генов в лёгких на воспалительные маркеры в крови.

Ключевыми преимуществами графовой модели являются.

*Масштабируемость.* Легко добавлять новые узлы (например, дополнительные органы или гены).

*Интерпретируемость.* Врач-исследователь может проследить, как изменение в одном узле (например, приём лекарства) влияет на другие уровни.

*Интеграция данных.* Легко объединяет разнородные данные (ОМИКС-анализы, клинические показатели, внешние факторы).

*Синтетические данные.* Существует возможность генерации синтетических данных для редких патологических состояний с помощью генеративно-сопоставительных сетей (Generative Adversarial Network, GAN).

Подходы на основе теории сложных сетей и графовых представлений данных позволяют создавать цифровые двойники для сложных распределённых систем с различными внутренними взаимодействиями, сохраняя баланс между точностью моделирования и вычислительной эффективностью, что соответствует требованиям, заданным в (5) для цифровых двойников.

Перспективным направлением применения графовых моделей может стать создание цифровых двойников промышленных предприятий. Современные предприятия представляют собой сложные сетевые системы, в которых традиционные методы моделирования сталкиваются с принципиальными ограничениями, обусловленными неспособностью адекватно отражать многомерность, нелинейность и динамическую природу реальных процессов. Эти ограничения проявляются в упрощённом представлении взаимосвязей, игнорировании эмерджентного поведения, неучёте временных задержек и обратных связей, а также в недостаточной адаптивности к изменяющимся внешним условиям и высокой размерности данных. Ключевым вызовом является интеграция разнородных данных от IoT-устройств, ERP- и MES-систем, которые характеризуются высокой размерностью и требуют методов машин-

ного обучения для обработки [62, 63]. Кроме того, традиционные модели не учитывают сетевую топологию и иерархическую организацию предприятий, что затрудняет прогнозирование каскадных эффектов и оптимизацию в режиме реального времени. Всё это подчеркивает необходимость перехода к более совершенным подходам, таким как графовые цифровые двойники, которые интегрируют физические принципы с методами искусственного интеллекта для создания динамических, адаптивных и масштабируемых моделей, способных к непрерывному обучению и поддержке принятия решений в условиях неопределённости [64]. Эта парадигма может быть также эффективна для построения цифровых двойников: (1) цепочек поставок, (2) транспортных сетей, и (3) внутрикорпоративной логистики, включая медицинские учреждения.

Указанные выше ограничения проявляются в невозможности учета эмерджентных свойств, возникающих из-за взаимодействия множества гетерогенных компонентов, организованных в виде многослойного динамического графа

$$G_E(t) = \left( V, \bigcup_{k=1}^K E_k(t), \bigcup_{k=1}^K W_k(t) \right), \quad (29)$$

где  $V = V_h \cup V_m \cup V_l$  объединяет человеческие ( $V_h$ ), материальные ( $V_m$ ) и логистические ( $V_l$ ) ресурсы, а каждый слой рёбер  $E_k$  соответствует определённому типу взаимодействий: товарные потоки ( $E_1$ ) с параметрами объёмов и сроков ( $W_1(t)$ ) для цепочек поставок, маршруты ( $E_2$ ) с пропускной способностью ( $W_2(t)$ ) для транспортных сетей, перемещения пациентов и медикаментов ( $E_3$ ) с временными задержками ( $W_3(t)$ ) для медицинских учреждений и т.д.

Центральным компонентом преодоления указанных ограничений является гибридная модель цифрового двойника, сочетающая законы системы (это могут быть физические законы, аналоги законов сохранения, экономические принципы и т.д.) и корректировки на основе ИИ и анализа больших данных:

$$\dot{x}_i = f_i \left( x_i, u_i, \sum_{j \in N_i} \phi_{ij}(w_{ij}, x_j) \right) + \epsilon_{AI}(t) \quad (30)$$

где  $x(t)$  – вектор состояния системы (например, уровни запасов, загрузка узлов),  $f_i$  представляет законы системы, выраженные в функциональном виде, а  $\epsilon_{AI}$  – корректировку от ИИ-модели, обученной на исторических данных, при этом, например, для цепочек поставок  $\phi_{ij}$  кодирует транспортные издержки, а для больниц – совместимость медикаментов.

Критическими технологиями реализации графовых цифровых двойников выступают: во-первых, графовые нейронные сети для прогнозирования (28), во-вторых, методы динамической балансировки ресурсов с использованием оптимального управления для минимизации целевого функционала следующего вида:

$$\min_{u_i} \int_0^T [\alpha |x(t)|^2 + \beta |u(t)|^2] dt \quad \text{при ограничении} \quad \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (31)$$

где  $u(t)$  – управляющие воздействия,  $\mathbf{A}$  – матрица связей между компонентами системы (отражает топологию графа),  $\mathbf{B}$  – матрица влияния управлений на состояние, а система (30) линеаризована в окрестности текущей точки, и, в-третьих, спектральный анализ для обнаружения аномалий через вычисление критических параметров

$$\lambda_{\text{crit}} = \max \text{Re}(\text{eig}(\mathbf{M})), \quad \mathbf{M} = \mathbf{A} - \text{diag}(\mathbf{B}_u), \quad (32)$$

Здесь  $\mathbf{V}_u$  – вектор управляющих воздействий, применяемых к узлам (например, увеличение пропускной способности, коррекция маршрутов),  $\text{diag}(\mathbf{V}_u)$  – диагональная матрица, составленная из элементов  $\mathbf{V}_u$  и описывающая локальное усиление или ослабление узлов в силу управления (31). Таким образом,  $\mathbf{M}$  – модифицированная матрица связей, учитывающая влияние управлений на узлы. Параметр  $\lambda_{\text{crit}}$  оказывается критическим параметром, определяющим порог устойчивости системы. Его мониторинг позволяет, во-первых, обнаруживать аномалии (например, резкое увеличение  $\lambda_{\text{crit}}$  указывает на риск каскадного отказа), и, во-вторых, оценивать эффективность управлений  $u(t)$ : если  $\lambda_{\text{crit}}$  растёт, управления не компенсируют дестабилизирующие факторы.

Перспективы развития направления связаны с применением квантовых алгоритмов для ускорения вычислений на крупномасштабных графах, что открывает новые возможности для моделирования и управления сложными сетевыми системами предприятия или логистическими цепочками поставок.

## 5. Применения цифровых двойников

**5.1. Промышленное применение цифровых двойников** Цифровой двойник представляет собой одну из наиболее перспективных технологий цифровой трансформации промышленности, находящую применение на всех этапах жизненного цикла продукции. В промышленном контексте цифровые двойники позволяют компаниям перейти от реактивного к предиктивному и даже проактивному управлению процессами. Технология обеспечивает принципиально новые возможности для моделирования, анализа и оптимизации, становясь ключевым элементом концепций Индустрии 4.0 и умного производства [4]. Ключевую роль тут играют промышленные данные, которые благодаря цифровизации современного производства накапливаются и позволяют стать основой для создания цифровых двойников [62].

Широта применения цифровых двойников в промышленности поражает — от отдельных компонентов и оборудования до целых производственных линий и инфраструктурных объектов. Основная ценность технологии заключается в ее способности интегрировать данные из различных источников, применять сложные аналитические модели и предоставлять интуитивно понятные визуализации для поддержки принятия решений. В зависимости от этапа жизненного цикла продукта, цифровые двойники решают различные задачи, демонстрируя особую эффективность в проектировании, производстве и обслуживании сложных технических систем, как систематизировано в табл. 2.

*Применение в проектировании.* На этапе проектирования цифровые двойники революционизируют традиционные подходы к созданию новых продуктов и систем [65]. Они позволяют инженерам работать с виртуальными прототипами, которые точно отражают все характеристики будущего физического объекта. В отличие от традиционного САД-моделирования, цифровой двойник включает не только геометрические параметры, но и данные о материалах, нагрузках, температурных режимах и других критических факторах. Это дает возможность проводить комплексные мультифизические симуляции, выявляя потенциальные проблемы до начала физического производства.

Особенно ценным становится применение цифровых двойников в итеративном процессе оптимизации конструкций. Технология позволяет быстро тестировать сотни вариантов проектных решений, автоматически оценивая их по заданным критериям. Например, в аэрокосмической отрасли цифровые двойники используются для моделирования аэродинамических характеристик, распределения нагрузок и тепловых режимов летательных

Таблица 2 Промышленное применение цифровых двойников на разных этапах жизненного цикла

Основные применения	Ключевые преимущества
<b>Проектирование</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Итеративная оптимизация конструкций</li> <li>• Виртуальная проверка и валидация</li> <li>• Мультидисциплинарное моделирование</li> <li>• Обеспечение целостности данных</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Сокращение цикла проектирования</li> <li>• Выявление непредвиденных проблем на ранних стадиях</li> <li>• Интеграция данных для всех участников процесса</li> <li>• Создание цифровых нитей</li> </ul>
<b>Производство</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Мониторинг в реальном времени</li> <li>• Прогнозирование характеристик изделий</li> <li>• Управление производственными активами</li> <li>• Оптимизация технологических процессов</li> <li>• Взаимодействие человек-робот</li> <li>• Планирование производства</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Повышение качества продукции</li> <li>• Снижение производственных затрат</li> <li>• Гибкое реагирование на изменения</li> <li>• Предотвращение простоев оборудования</li> <li>• Улучшение эргономики рабочих мест</li> </ul>
<b>Эксплуатация</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Предиктивное техническое обслуживание</li> <li>• Диагностика неисправностей</li> <li>• Мониторинг состояния оборудования</li> <li>• Прогнозирование производительности</li> <li>• Виртуальные испытания</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Увеличение срока службы оборудования</li> <li>• Снижение затрат на обслуживание</li> <li>• Повышение безопасности эксплуатации</li> <li>• Оптимизация режимов работы</li> <li>• Удаленный мониторинг и управление</li> </ul>
<b>Утилизация</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Управление отходами электронного оборудования</li> <li>• Оптимизация процессов ремануфактуринга</li> <li>• Трассировка материалов для вторичной переработки</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Снижение экологического воздействия</li> <li>• Эффективное использование ресурсов</li> <li>• Сохранение знаний о продукте</li> </ul>

аппаратов [66]. В автомобилестроении они помогают оптимизировать компоновку узлов, снижая массу транспортного средства при сохранении прочностных характеристик [67]. Важно отметить, что цифровые двойники на этапе проектирования часто становятся основой для создания “цифровых нитей” (digital threads) — сквозных информационных потоков, сопровождающих продукт на всех последующих этапах его жизненного цикла [68].

*Применение в производстве.* В производственной сфере цифровые двойники трансформируют подходы к управлению и контролю технологических процессов [69]. Они создают виртуальное отражение всего производственного комплекса — от отдельных станков до целых цехов, позволяя в реальном времени отслеживать тысячи параметров. Такие системы могут автоматически выявлять отклонения в работе оборудования, прогнозировать возможные сбои и предлагать оптимальные корректирующие действия. Например, на автоматизированных линиях сборки автомобилей цифровые двойники помогают поддерживать стабильное качество продукции, оперативно реагируя на изменения в параметрах технологического процесса [67].

Особый интерес представляет применение цифровых двойников для аддитивного производства (3D-печати), где они позволяют контролировать процесс на микроуровне, предотвращая возникновение дефектов [70]. В гибких производственных системах цифровые двойники используются для виртуальной проверки программ ЧПУ перед их загрузкой на реальное оборудование, значительно снижая риск дорогостоящих ошибок. Еще одно перспективное направление — создание цифровых теней рабочих мест, которые анализируют эргономику и безопасность операций с учетом антропометрических данных конкретных сотрудников. По мере развития технологий IoT на базе 5G коммуникации возможности цифровых двойников в производственной сфере продолжают расширяться, открывая путь к полностью автономным производствам.

*Применения на этапе эксплуатации.* На этапе эксплуатации цифровые двойники становятся мощным инструментом предиктивного обслуживания и удаленного мониторинга сложных технических систем. Они непрерывно получают данные с датчиков, установленных на физическом оборудовании, и сравнивают их с эталонными моделями работы. Это позволяет выявлять малейшие отклонения от нормы, которые могут свидетельствовать о начинающихся неисправностях. Например, в энергетике цифровые двойники турбин анализируют вибрации, температурные режимы и другие параметры, прогнозируя остаточный ресурс оборудования с точностью до нескольких сотен часов наработки [71].

В транспортной отрасли цифровые двойники используются для оптимизации графиков технического обслуживания самолетов, поездов и судов, учитывая их реальное состояние, а не регламентные сроки [72]. Особенно впечатляющие результаты достигаются при комбинации цифровых двойников с технологиями дополненной реальности (AR) — техники получают визуальные подсказки прямо на устройстве, видя «сквозь» конструкции и получая доступ к историческим данным по каждому узлу [73]. В нефтегазовой отрасли цифровые двойники трубопроводов и буровых установок помогают предотвращать аварии, моделируя различные сценарии эксплуатации в сложных климатических условиях [74]. По мере развития технологий машинного обучения, цифровые двойники начинают не только диагностировать, но и самостоятельно принимать решения о корректировке режимов работы оборудования для продления его ресурса.

Итак, эволюция цифровых двойников продолжает набирать обороты, постепенно стирая границы между физическим и цифровым мирами. Сегодня мы наблюдаем переход от отдельных изолированных решений к комплексным экосистемам взаимосвязанных цифровых двойников, охватывающих всю цепочку создания стоимости. Особенно перспективным выглядит направление «цифровых двойников продукта» (англ. Product Digital Twins),

которые сопровождают изделие от момента проектирования до утилизации, накапливая уникальные данные о его эксплуатации и позволяя использовать эти знания для создания следующих поколений продукции [75]. По мере совершенствования технологий обработки данных и моделирования, цифровые двойники будут играть все более важную роль в создании устойчивых, эффективных и безопасных промышленных систем будущего.

**5.2. Медицинские цифровые двойники** Медицинские цифровые двойники находят применение в трех основных областях: профилактика заболеваний, лечение пациентов и разработка новых терапевтических методов, включая лекарственные средства и медицинские устройства [12, 76]. Рис. 7 иллюстрирует все три вышеуказанных направления.

Рис. 7а показывает принцип использования медицинского цифрового двойника для поддержания здоровья. Для конкретного пациента (желтый цвет) определяется безопасный уровень холестерина с использованием генетической информации, семейного анамнеза и других данных. Желтая линия показывает динамику уровня холестерина у пациента с течением времени без лечения, где желтые квадраты обозначают ежегодные измерения. С другой стороны, цифровой двойник пациента (синий) прогнозирует траекторию и рекомендует периодические профилактические меры (синие стрелки), в результате чего уровень холестерина следует синей кривой.

Рис. 7б демонстрирует пример использования цифрового двойника при поступлении в отделение интенсивной терапии пациент (зеленый). На входе пациент проходит обследование и получает первоначальное лечение от инфекции. Компьютерный алгоритм персонализирует соответствующую вычислительную модель заболевания вместе с информацией из базы данных эталонных пациентов, чтобы рекомендовать оптимальные меры. По мере проведения повторных измерений у пациента эталонная популяция уточняется, модель перекалибруется для пациента в более поздние моменты времени, а рекомендации по оптимальному лечению уточняются. Конусы представляют вероятную траекторию развития инфекции, определенную цифровым двойником. Со временем и с увеличением количества точек данных о пациенте неопределенность в прогнозах уменьшается (конус становится уже), и последующие моменты времени для пациента становятся ближе к центру предыдущего конуса прогнозов. Улучшение набора параметров, описывающих пациента, отражается в соответствующей виртуальной когорте, которая описывает пациента в каждый момент времени и изображается как содержащая все больше зеленых субъектов, подобных лечащемуся пациенту.

Наконец, на рис. 7с показано возможное использование медицинского цифрового двойника при разработке новых терапевтических средств. В настоящее время клинические испытания обычно включают использование животных и когорт пациентов (левая панель). С появлением цифровых двойников станет возможным сократить количество животных, используемых в доклинических испытаниях, и оптимизировать испытания на пациентах с помощью виртуальных пациентов. Их можно использовать для скрининга большого количества мишеней лекарственных препаратов и кандидатов в лекарственные препараты, а также для проведения первоначальных оптимизационных исследований с использованием большого количества цифровых двойников пациентов (средняя панель). Оптимальные режимы, дозы и комбинации лекарственных препаратов также могут быть определены с помощью медицинских цифровых двойников до введения лекарственных препаратов пациентам, что позволяет минимизировать побочные эффекты (правая панель).

Помимо этого, медицинские цифровые двойники могут способствовать сокращению использования животных в доклинических исследованиях, а также помогать преодолевать недостаточность больших данных в здравоохранении. Например, они позволяют форми-

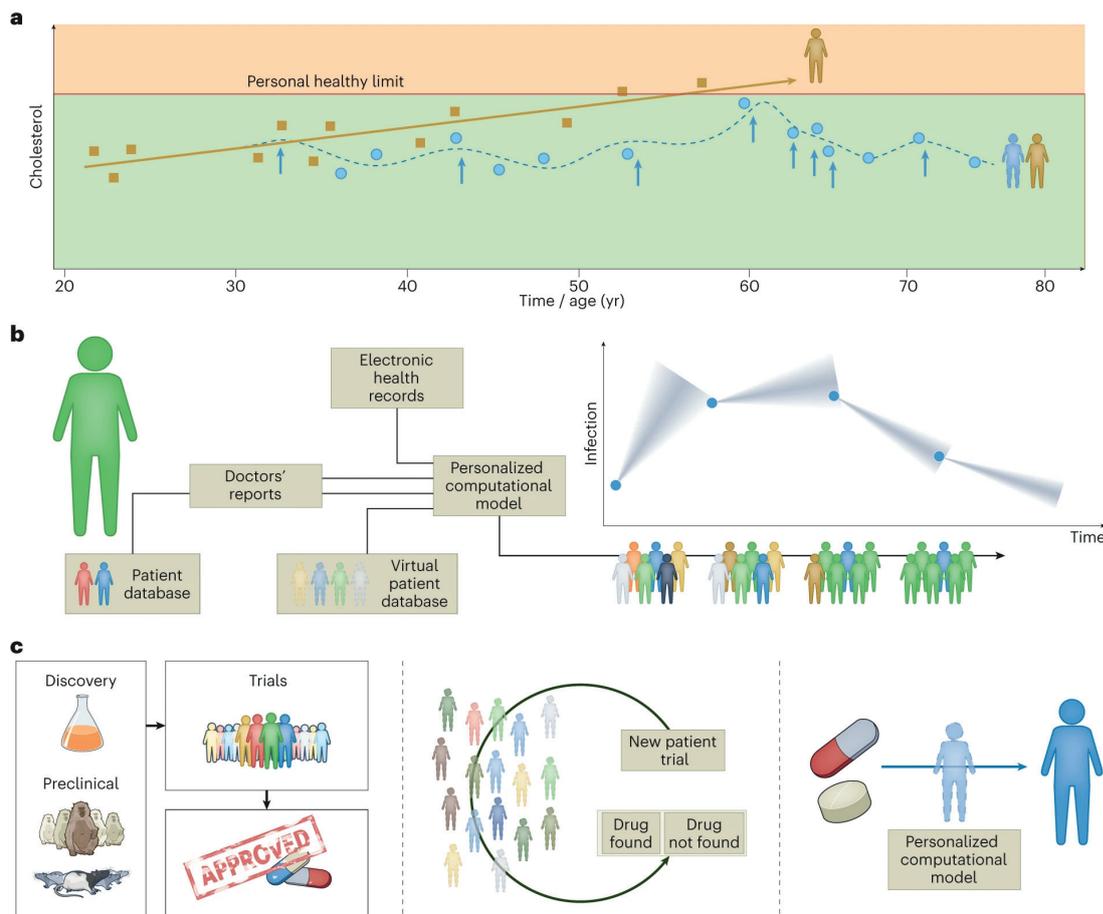


Рис. 7. Примеры применения цифровых двойников в медицине. (а) Профилактика здоровых пациентов. (б) Интенсивная терапия пациентов. (с) Разработка новых терапевтических средств. Взято из работы [12]  
 Examples of digital twins applications in medicine. (a) Prevention in healthy patients. (b) Intensive care of patients. (c) Development of new therapeutic agents. From Ref. [12].

ровать более репрезентативные когорты для клинических испытаний, учитывая недостаточную представленность отдельных групп населения, таких как этнические меньшинства или пациенты с редкими заболеваниями [20]. Кроме того, медицинские цифровые двойники могут снижать влияние социальных предубеждений на медицинские решения, предлагая модель-ориентированные системы поддержки принятия решений.

В контексте профилактической медицины цифровые двойники становятся инструментом перехода от лечения к предупреждению заболеваний [77]. Однако их широкое внедрение ограничено недостаточным пониманием критериев здоровья при высокой биологической вариабельности пациентов, что затрудняет создание точных прогностических моделей. Тем не менее, этот аспект применения медицинских цифровых двойников является наиболее перспективным в долгосрочной перспективе, аналогично использованию цифровых двойников в промышленности для предиктивного обслуживания. В отличие от методов машинного обучения, предпочтение отдается механистическим моделям, позволяющим прогнозировать эффект конкретных вмешательств.

Наибольших успехов в применении медицинских цифровых двойников достигнуто в лечении пациентов с хроническими и критическими состояниями. Примером служат системы автоматизированной подачи инсулина для больных диабетом 1-го типа, основанные на

моделях метаболизма глюкозы и алгоритмах замкнутого контроля. В условиях интенсивной терапии медицинские цифровые двойники используются как инструменты интеграции данных и поддержки принятия решений. Например, для лечения сепсиса и инсульта разрабатываются гибридные модели, сочетающие байесовские сети с экспертной логикой, что позволяет персонализировать терапию. Ключевой проблемой остается учет биологической гетерогенности пациентов, для чего предлагается комбинировать механистические модели с алгоритмами машинного обучения, адаптируя параметры под индивидуальные характеристики пациента.

Третье направление применения медицинских цифровых двойников — разработка новых терапевтических методов через виртуальные клинические испытания. Механистические модели, параметризованные на основе реальных данных, позволяют создавать виртуальные популяции пациентов, что особенно актуально для исследований редких заболеваний. Перспективным, но пока не реализованным подходом, является создание точных цифровых реплик реальных пациентов, что соответствует промышленным стандартам использования цифровых двойников.

В работе [60] представлен прогресс в создании целостных цифровых двойников пациента с использованием GNN и GAN, как показано на рис. 6. Графовый подход, основанный на GNN, позволяет учитывать сложные нелинейные взаимодействия между генетическими факторами, метаболическими путями и физиологическими параметрами, что существенно повышает точность прогноза по сравнению с традиционными статистическими моделями. В частности, такой подход позволил прогнозировать системные эффекты SARS-CoV-2 инфекции, таких как одновременное развитие гиперкоагуляции и почечной дисфункции через анализ межорганных взаимодействий и выявил критические пороговые значения (например, концентрации ANGII), при которых физиологическая адаптация переходит в патологическое ремоделирование. GAN вносят принципиально новое качество в медицинские цифровые двойники — способность синтезировать реалистичные мультиоматические профили для состояний, недостаточно представленных в реальных данных (например, экспрессия ACE2 в комбинации с диабетической нефропатией) [78]. Это позволяет преодолеть ключевое ограничение медицинских датасетов — недостаточность данных для редких, но клинически значимых паттернов заболеваний. В частности, в [60] представлены результаты моделирования редких клинических сценариев с помощью GAN, что особенно ценно для изучения осложнений у пациентов с коморбидностью (например, диабет + COVID-19).

Большие успехи в развитии медицинских цифровых двойников для персонализированной медицины достигнуты в онкологии и кардиологии. Так, цифровые двойники в онкологии открывают новые возможности для персонализированного лечения, позволяя моделировать прогрессирование опухоли и прогнозировать эффективность терапии. Они интегрируют генетические данные, клиническую историю и результаты визуализации, что особенно важно при агрессивных формах рака, таких как глиобластома, где цифровые двойники помогают точнее определять границы опухоли и планировать хирургическое вмешательство. Например, модели на основе дифференциальных уравнений, калиброванные с помощью МРТ, успешно прогнозируют рост опухоли молочной железы и реакцию на иммунотерапию. Однако остаются проблемы, включая недостаток данных и неполное понимание молекулярных механизмов различных подтипов рака, что ограничивает точность прогнозов.

В кардиологии медицинские цифровые двойники применяются для прогнозирования риска внезапной сердечной смерти и оптимизации лечения аритмий. Например, модели, созданные на основе МРТ пациентов после инфаркта, превосходят традиционные методы оценки риска, помогая определить необходимость имплантации дефибриллятора. Кроме того, цифровые двойники улучшают точность катетерной абляции, предсказывая оптималь-

ные мишени для воздействия, что снижает вероятность рецидивов [79]. Перспективным направлением является использование цифровых двойников при фибрилляции предсердий, где они позволяют планировать стратегии лечения и прогнозировать риск повторных госпитализаций [80]. Дальнейшее развитие технологии связано с интеграцией непрерывного мониторинга данных, что обеспечит актуальность цифровых двойников в реальном времени.

Наконец, вызывает интерес расширение концепции за рамки индивидуального пациента и переход к моделированию целых медицинских систем. Речь идет о разработке виртуальных копий не только физиологических процессов, но и организационных структур: например, цифрового двойника больницы, который имитирует потоки пациентов, работу отделений, использование оборудования и персонала в реальном времени [81–83]. Такие системные двойники позволяют проводить «что-если» анализ для оптимизации расписаний, распределения ресурсов, логистики экстренной помощи, управления запасами лекарств или планирования ремонтов, тем самым повышая общую эффективность, снижая затраты и улучшая доступность медицинской помощи. Например, в работе [84] описан цифровой двойник для применения в условиях оказания медицинской помощи в условиях чрезвычайных ситуаций. Кроме того, на уровне управленческих процессов возможно создание двойников для эпидемиологического прогнозирования, моделирования распространения заболеваний в популяции или оценки последствий внедрения новых медицинских протоколов в масштабах региона или всей системы здравоохранения. Таким образом, это направление знаменует переход от персонализированной медицины к предиктивному и оптимизированному управлению медицинскими организациями и отраслью в целом.

**5.3. Цифровые двойники в макроэкономике** В работе [85] предложена концепция «цифрового двойника экономики» как инструмента для проектирования и оценки экономической политики. Автор демонстрирует, что традиционные макроэкономические модели, такие как динамические стохастические модели общего равновесия (англ. *dynamically stochastic general equilibrium models, DSGE*) [86], обладают значительными ограничениями из-за упрощенных допущений и неспособности учитывать сложность реальных экономических систем [87]. В качестве решения была предложена концепция цифрового двойника, основанного на комбинации метода экономической архитектуры, обеспечивающую структурную прозрачность, и агентного моделирования, позволяющее имитировать поведение разнородных экономических агентов. Результаты показывают, что такой подход способен более точно прогнозировать последствия политических решений, выявлять скрытые взаимосвязи и минимизировать риски за счет виртуального тестирования мер до их реализации.

Ключевым достижением исследования является разработка теоретической основы для создания междисциплинарной платформы, объединяющей экономику, информационные технологии и поведенческую науку. Автор [85] подчеркивает потенциал цифрового двойника в оптимизации политики, например, при оценке антикризисных мер или переходе к экономике замкнутого цикла, основанной на возобновлении ресурсов. Однако успешное внедрение концепции требует решения вопросов стандартизации моделей, доступа к макроэкономическим данным и обеспечения международной координации. Работа [85] открывает новые перспективы для экономического моделирования, сочетая реалистичность микрооснований с возможностями современных вычислительных технологий.

Развитие цифровых двойников чрезвычайно важно для обеспечения процессов планирования и принятия решений в сфере отраслевого управления и реализации государственной политики, в особенности в сфере высокотехнологичных отраслей. Применение больших языковых моделей (*Large Language Models, LLM*) [88] может позволить значительно повы-

сить качество постановки и оцифровки стратегических целей и задач, оценки их реализуемости, прежде всего, за счет повышения оперативности и качества обработки широких массивов неструктурированной информации. Это особенно важно в условиях дефицита достоверных данных и растущего тренда на всестороннее ограничение открытого доступа как к финансово-экономической, так и к производственно-технологической информации. В таких условиях необходимо уделять внимание возможностям адаптации моделей цифровых двойников не только на уровне отдельных предприятий, но и на уровне отраслей. Данный подход сопряжён с рядом методологических рисков и ограничений. К ним относятся: 1) склонность LLM к генерации правдоподобных, но фактически недостоверных утверждений (“галлюцинации”), что может исказить выводы при работе с экономическими прогнозами; 2) низкая интерпретируемость решений, затрудняющая анализ причинно-следственных связей в экономических процессах; 3) зависимость качества результатов от репрезентативности и объёма обучающих данных, что особенно критично для динамичных и нестационарных экономических систем. Эти аспекты необходимо учитывать при интеграции LLM в системы принятия решений на макроуровне.

В России на сегодняшний день в электронной промышленности спроектирована базовая архитектура системы поддержки принятия решений [89], направленная на перевод отраслевого управления в режим цифровой интеллектуальной сетевидельческой модели [90, 91]. Такая платформа мезоэкономического управления в формате «цифровой двойник электронной промышленности – цифровые двойники предприятий электронной промышленности» составит основу для стратегического планирования развития электронной промышленности посредством формирования необходимых отраслевых и межотраслевых балансов, структуры управления бизнес-процессами отрасли, территориального планирования, развития производительных сил и т.п.

**5.4. Цифровые двойники финансовых агентов на основе больших языковых моделей** Парадигма цифровых двойников получает новое мощное воплощение в области финансов и экономики с появлением больших языковых моделей. В то время как традиционные экономические модели (например, DSGE) оперируют агрегированными показателями и упрощенными допущениями о поведении агентов, подход на основе LLM позволяет создавать цифровые двойники финансовых агентов – виртуальные модели, способные понимать финансовую терминологию, решать специализированные задачи, следовать инструкциям и, что наиболее важно, проводить сложные рассуждения в условиях неопределенности, используя мультимодальные данные (цифровые отчеты, экономические данные, политические новости и т.д.).

Ярким примером такого подхода является работа [92], где представлена методология Finance Domain-Adaptive Post-training (FinDAP) для доменной адаптации LLM в финансовой сфере. FinDAP – это целостный фреймворк для специализированной доработки LLM под задачи финансовой отрасли. В отличие от простого дообучения на финансовых текстах, FinDAP предлагает системный подход, который включает: FinCap – определение ключевых компетенций, которые должна иметь финансовая LLM; FinRec – рецепты обучения, которые совместно оптимизируют различные этапы дообучения; FinTrain – специально подобранные наборы данных для обучения; FinEval – комплексная система оценки результатов. По сути, FinDAP – это не просто метод дообучения, а полноценная методология создания экспертных LLM для финансов, которая учитывает особенности предметной области и обеспечивает сохранение полезных качеств исходной модели при приобретении специализированных финансовых знаний.

Авторы [92] выделяют четыре ключевые способности, которыми должен обладать

финансовый цифровой двойник: понимание доменно-специфичных концепций (например, облигация, коэффициент Шарпа и т.д.), выполнение специализированных задач (например, оценка кредитоспособности, анализ настроений на рынке), способность к рассуждению для анализа финансовых отчетов и решения математических задач и, наконец, следование инструкциям для взаимодействия в диалоговом режиме, что критически важно для интеграции цифрового двойника в системы поддержки принятия решений.

Методология FinRes предлагает эффективный рецепт пост-тренинга LLM, который может быть интерпретирован как процесс “воспитания” цифрового двойника. Совместное непрерывное предобучение и инструктивная тонкая настройка позволяет цифровому двойнику одновременно усваивать новые знания из финансовых текстов и сохранять общие способности, избегая “катастрофического забывания”. Это аналогично обучению специалиста, который углубляется в новую область, не теряя базовых навыков. Далее, выравнивание по предпочтениям с использованием методов FAP (Final Answer Preference) и SCP (Stepwise Corrective Preference) целенаправленно улучшает способность к рассуждениям. SCP, в частности, использует генеративную модель вознаграждения для идентификации и коррекции первой ошибки в цепочке рассуждений, обеспечивая тонкий, пошаговый контроль за “мышлением” цифрового двойника. Результирующая модель Llama-Fin, созданная по этой методологии, показывает высокую эффективность в выполнении широкого спектра финансовых задач, от анализа сентимента до сложных экзаменационных вопросов Chartered Financial Analyst (CFA), превосходя по многим показателям даже более крупные общие LLM.

Этот подход напрямую развивает идеи, заложенные в работе [85], обсуждаемой в разделе 5.3. Вместо создания единой монолитной модели экономики, методология на основе LLM позволяет создавать популяцию высокореалистичных цифровых двойников отдельных экономических агентов (трейдеров, аналитиков, риск-менеджеров). Такие двойники, обладая способностью к рассуждению и работе с неструктурированными данными, могут формировать более реалистичные микро-основания для агентных моделей, непосредственно использоваться в системах поддержки принятия решений для анализа новостей, отчетов и рыночной конъюнктуры, а также служить основой для “виртуальных испытаний” финансовых стратегий и нормативных актов в смоделированной среде, населенной такими агентами.

Таким образом, интеграция специализированных LLM, таких как Llama-Fin, открывает путь к созданию нового поколения цифровых двойников в экономике — не как статических моделей-агрегаторов, а как динамических, рассуждающих и обучающихся виртуальных субъектов, чье коллективное поведение сможет с высокой точностью моделировать сложность реальных финансовых систем.

**5.5. Другие области применения цифровых двойников** Применение цифровых двойников не ограничивается вышерассмотренными направлениями, но находят применение практически во всех направлениях деятельности, где возможна математическая формализация процессов или объектов. Рассмотрим кратко различные направления.

*Применение в архитектуре и строительстве.* Концепция цифровых двойников произвела революцию в архитектурно-строительной отрасли и развитии умных городов. Эти виртуальные копии физических объектов, постоянно обновляемые через потоки данных в реальном времени, открывают новые возможности для моделирования, мониторинга и оптимизации. В строительстве, как обсуждается в [93], цифровые двойники применяются на всех этапах жизненного цикла зданий — от проектирования до эксплуатации. В городском планировании, согласно [94], городские цифровые двойники интегрируют данные с IoT-устройств, BIM-моделей (Building Information Modeling — 3D-модель зданий с при-

вязанными данными, где каждый элемент модели содержит не только геометрию, но и технические параметры (плотность, теплопроводность, материалы, стоимость и сроки изготовления, производители), функциональные связи (взаимодействие элементов здания: стена ↔ окно ↔ вентиляция, логистика строительства), динамические свойства (например, автоматический пересчет сметы при замене материала) и т.д.) и геоинформационных систем (ГИС) для создания динамических моделей городских систем. Математический аппарат, лежащий в основе этих технологий, включает методы машинного обучения, численного моделирования и дискретной оптимизации.

Виртуальное проектирование с использованием цифровых двойников позволяет архитекторам создавать высокоточные модели зданий, учитывающие не только геометрические параметры, но и физические свойства материалов [93]. Для этого применяются методы конечных элементов и вычислительной гидродинамики, позволяющие прогнозировать поведение конструкций при различных нагрузках и климатических условиях. Например, инструмент для создания цифровых двойников в архитектурном проектировании Ph2D сочетает физические и цифровые прототипы, используя алгоритмы компьютерного зрения для преобразования ручных макетов в параметрические модели [95].

*Городские цифровые двойники.* В контексте умных городов цифровые двойники становятся мощным инструментом управления городской инфраструктурой [94]. Проект Virtual Singapore использует 3D-модели города, обогащенные данными IoT-сенсоров, для моделирования различных сценариев. Математической основой служат агентные модели для прогнозирования транспортных потоков и методы машинного обучения для анализа данных. В Дубае алгоритмы обучения с подкреплением оптимизируют работу светофоров, уменьшая заторы на дорогах.

Для моделирования энергетических городских сетей применяются методы кластерного анализа и регрессионные модели, обрабатывающие данные о потреблении энергии [96]. Методы теории сложных сетей и алгоритмы работы с графами помогают оптимизировать маршруты общественного транспорта и распределение коммунальных ресурсов [97]. Особое значение имеют методы обработки больших данных, такие как MapReduce и Spark, позволяющие анализировать терабайты информации с городских датчиков в реальном времени [98, 99].

*Энергетика.* В энергетике цифровые двойники играют ключевую роль в управлении умными сетями (smart grids) и оптимизации энергопотребления. Они позволяют моделировать и анализировать работу энергетических систем в режиме реального времени, что способствует повышению их эффективности и надежности [100]. Например, цифровые двойники используются для прогнозирования нагрузки на сеть, выявления потенциальных сбоев и планирования профилактических мероприятий [101]. В контексте возобновляемых источников энергии цифровые двойники помогают оптимизировать работу ветряных и солнечных электростанций, учитывая изменчивые погодные условия [102]. Кроме того, они применяются для моделирования сложных сценариев, таких как интеграция распределенных энергоресурсов в общую сеть [103]. Отдельным быстроразвивающимся направлением является применение цифровых двойников в управлении центрами обработки данных (ЦОД) [104]: интегрируют данные о нагрузке на вычислительные узлы, температурном режиме в серверных залах, эффективности систем охлаждения (включая жидкостное) и энергопотреблении в реальном времени, прогнозируют отказы оборудования и планируют техническое обслуживание, что повышает отказоустойчивость и снижает энергопотребление (включая улучшение PUE — Power Usage Effectiveness) [105] и позволяет проводить сценарный анализ при изменении нагрузки и конфигурации инфраструктуры [106].

*Образование.* Цифровые двойники в образовании открывают новые возможности для

персонализации обучения, улучшения педагогических процессов и управления образованием [107]. Внедрение технологий цифровых двойников позволяет создавать виртуальные модели студентов, которые учитывают их индивидуальные особенности, такие как уровень знаний, предпочтения и стиль обучения [108, 109]. Это способствует разработке адаптивных образовательных программ, которые автоматически подстраиваются под потребности каждого обучающегося [110, 111]. Например, в рамках массовых онлайн-курсов цифровые двойники помогают анализировать поведение студентов и оптимизировать учебные материалы в реальном времени [108]. Кроме того, цифровые двойники могут использоваться для автоматизированного мониторинга успеваемости и прогнозирования академических результатов, что позволяет преподавателям своевременно корректировать учебный процесс [112].

## 6. Заключение

В данной работе проведен комплексный анализ цифровых двойников как перспективной технологии, объединяющей достижения теории сложности и искусственного интеллекта. Показано, что цифровые двойники — это не просто статические модели, а динамические адаптивные системы, способные к самообучению и прогнозированию в реальном времени. Основу их эффективности составляет синтез традиционных математических методов (дифференциальные уравнения, теория графов) и современных подходов машинного обучения (PINNs, GNN, резервуарные вычисления), что позволяет преодолеть ограничения классического моделирования при работе со сложными нелинейными системами.

Теоретический анализ демонстрирует, что цифровые двойники эффективно решают проблему управления сложными системами за счет сочетания методов нелинейной динамики и ИИ-алгоритмов. Разработанная математическая формализация цифрового двойника как динамической системы с адаптивными свойствами открывает новые возможности для прогнозирования поведения сложных объектов в условиях неопределенности. Особую ценность представляет использование гибридных подходов, сочетающих физические модели с методами глубокого обучения, что позволяет сохранить интерпретируемость результатов при работе с неполными данными.

Практические применения цифровых двойников, рассмотренные в работе, подтверждают их трансформационный потенциал в различных областях — от промышленности и медицины до управления городской инфраструктурой и макроэкономикой. Универсальность концепции цифровых двойников позволяет создавать эффективные решения как для технических систем, так и для биологических объектов, что особенно важно в контексте развития персонализированной медицины.

Перспективы развития цифровых двойников связаны с дальнейшей интеграцией методов теории сложности и искусственного интеллекта, что позволит создавать более точные и адаптивные виртуальные модели. Ключевыми направлениями будущих исследований должны стать разработка унифицированных стандартов для цифровых двойников, совершенствование методов их верификации и валидации, а также решение этических и правовых вопросов, связанных с их применением в чувствительных областях, таких как медицина и социальное управление. На основании развития этих направлений в перспективе вероятен переход от отдельных приложений к сквозным экосистемам, где цифровые двойники разных уровней взаимодействуют друг с другом, формируя «цифровые миры» для науки, промышленности и общества, что вероятно возможно реализовать через технологии ИИ-агентов, как связующих элементов между отдельными цифровыми двойниками.

## Список литературы

1. S. Boschert and R. Rosen, "Digital twin—the simulation aspect," in *Mechatronic futures: Challenges and solutions for mechatronic systems and their designers*. Springer, 2016, pp. 59–74.
2. L. Hernández and S. Hernandez, "Application of digital 3d models on urban planning and highway design." *WIT Transactions on the built environment*, vol. 33, 1997.
3. M. Grieves, "Digital twin: manufacturing excellence through virtual factory replication," *White paper*, vol. 1, no. 2014, pp. 1–7, 2014.
4. Y. Lu, "Industry 4.0: A survey on technologies, applications and open research issues," *Journal of industrial information integration*, vol. 6, pp. 1–10, 2017.
5. M. Singh, E. Fuenmayor, E. P. Hinchy, Y. Qiao, N. Murray, and D. Devine, "Digital twin: Origin to future," *Applied System Innovation*, vol. 4, no. 2, p. 36, 2021.
6. Á. Bárkányi, T. Chovan, S. Nemeth, and J. Abonyi, "Modelling for digital twins—potential role of surrogate models," *Processes*, vol. 9, no. 3, p. 476, 2021.
7. A. Sharma, E. Kosasih, J. Zhang, A. Brintrup, and A. Calinescu, "Digital twins: State of the art theory and practice, challenges, and open research questions," *Journal of Industrial Information Integration*, vol. 30, p. 100383, 2022.
8. M. G. Juarez, V. J. Botti, and A. S. Giret, "Digital twins: Review and challenges," *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, vol. 21, no. 3, p. 030802, 2021.
9. В. Безручко, А. Короновский, Д. Трубецков, А. Храмов, *Путь в синергетику: Экз-курс в десяти лекциях*. Издательство ЛКИ, 2010.
10. K. Reifsnider and P. Majumdar, "Multiphysics stimulated simulation digital twin methods for fleet management," in *54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics, and materials conference*, 2013, p. 1578.
11. R. Rosen, G. Von Wichert, G. Lo, and K. D. Bettenhausen, "About the importance of autonomy and digital twins for the future of manufacturing," *Ifac-papersonline*, vol. 48, no. 3, pp. 567–572, 2015.
12. R. Laubenbacher, B. Mehrad, I. Shmulevich, and N. Trayanova, "Digital twins in medicine," *Nature Computational Science*, vol. 4, no. 3, pp. 184–191, 2024.
13. M. M. Rathore, S. A. Shah, D. Shukla, E. Bentafat, and S. Bakiras, "The role of ai, machine learning, and big data in digital twinning: A systematic literature review, challenges, and opportunities," *IEEE access*, vol. 9, pp. 32 030–32 052, 2021.
14. W. Birk, R. Hostettler, M. Razi, K. Atta, and R. Tammia, "Automatic generation and updating of process industrial digital twins for estimation and control—a review," *Frontiers in Control Engineering*, vol. 3, p. 954858, 2022.
15. B. R. Barricelli, E. Casiraghi, and D. Fogli, "A survey on digital twin: Definitions, characteristics, applications, and design implications," *IEEE access*, vol. 7, pp. 167 653–167 671, 2019.
16. A. Vallée, "Envisioning the future of personalized medicine: role and realities of digital twins," *Journal of medical Internet research*, vol. 26, p. e50204, 2024.
17. E. VanDerHorn and S. Mahadevan, "Digital twin: Generalization, characterization and implementation," *Decision support systems*, vol. 145, p. 113524, 2021.
18. E. LaGrange, "Developing a digital twin: The roadmap for oil and gas optimization," in *SPE offshore Europe conference and exhibition*. SPE, 2019, p. D011S003R001.
19. M. S. Dihan, A. I. Akash, Z. Tasneem, P. Das, S. K. Das, M. R. Islam, M. M. Islam, F. R. Badal, M. F. Ali, M. H. Ahamed *et al.*, "Digital twin: Data exploration, architecture, implementation and future," *Heliyon*, vol. 10, no. 5, 2024.

20. О.Э. Карпов, А.Е. Храмов, “Информационные технологии, вычислительные системы и искусственный интеллект в медицине,” *М.: ДПК Пресс*, 480 с., 2022.
21. А. Е. Hramov, V. A. Maksimenko, and A. N. Pisarchik, “Physical principles of brain–computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states,” *Physics Reports*, vol. 918, pp. 1–133, 2021.
22. A. M. Lozano, N. Lipsman, H. Bergman, P. Brown, S. Chabardes, J. W. Chang, K. Matthews, C. C. McIntyre, T. E. Schlaepfer, M. Schulder *et al.*, “Deep brain stimulation: current challenges and future directions,” *Nature Reviews Neurology*, vol. 15, no. 3, pp. 148–160, 2019.
23. О.Э Карпов, Д.А. Андриков, В.В Максименко, А.Е. Храмов, “Прозрачный искусственный интеллект для медицины,” *Врач и информационные технологии*, no. 2, СС. 4–11, 2025.
24. A. N. Pisarchik, V. A. Maksimenko, and A. E. Hramov, “From novel technology to novel applications: Comment on “an integrated brain-machine interface platform with thousands of channels” by elon musk and neuralink,” *Journal of medical Internet research*, vol. 21, no. 10, p. e16356, 2019.
25. О. Е. Karpov, E. N. Pitsik, S. A. Kurkin, V. A. Maksimenko, A. V. Gusev, N. N. Shusharina, and A. E. Hramov, “Analysis of publication activity and research trends in the field of ai medical applications: Network approach,” *International Journal of Environmental Research and Public Health*, vol. 20, no. 7, p. 5335, 2023.
26. M. Grieves and J. Vickers, “Digital twin: Mitigating unpredictable, undesirable emergent behavior in complex systems,” in *Transdisciplinary perspectives on complex systems: New findings and approaches*. Springer, 2016, pp. 85–113.
27. M. Kadem, L. Garber, M. Abdelkhalek, B. K. Al-Khazraji, and Z. Keshavarz-Motamed, “Hemodynamic modeling, medical imaging, and machine learning and their applications to cardiovascular interventions,” *IEEE Reviews in Biomedical Engineering*, vol. 16, pp. 403–423, 2022.
28. M. Mulder, L. Fresiello, and D. W. Donker, “Computational models for hemodynamic management in critically ill patients: a systematic review,” in *Virtual Physiological Human Conference, VPH 2022: Digital twins for personalized treatment development and clinical trials*, 2022.
29. E. Tuegel, “The airframe digital twin: Some challenges to realization,” in *53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics and materials conference 20th AIAA/ASME/AHS adaptive structures conference 14th AIAA*, 2012, p. 1812.
30. J. Lee, E. Lapira, B. Bagheri, and H.-a. Kao, “Recent advances and trends in predictive manufacturing systems in big data environment,” *Manufacturing letters*, vol. 1, no. 1, pp. 38–41, 2013.
31. R. Zhang, F. Wang, J. Cai, Y. Wang, H. Guo, and J. Zheng, “Digital twin and its applications: A survey,” *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 123, no. 11, pp. 4123–4136, 2022.
32. S. Mihai, M. Yaqoob, D. V. Hung, W. Davis, P. Towakel, M. Raza, M. Karamanoglu, B. Barn, D. Shetve, R. V. Prasad *et al.*, “Digital twins: A survey on enabling technologies, challenges, trends and future prospects,” *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, vol. 24, no. 4, pp. 2255–2291, 2022.
33. A. Rasheed, O. San, and T. Kvamsdal, “Digital twin: Values, challenges and enablers from a modeling perspective,” *IEEE access*, vol. 8, pp. 21 980–22 012, 2020.
34. P. Aivaliotis, K. Georgoulas, Z. Arkouli, and S. Makris, “Methodology for enabling digital twin concept using advanced physical-based modelling,” in *Proceedings of 52nd CIRP*

- Conference on Manufacturing Systems (CMS2019)*, vol. 81, 2019, pp. 417–422.
35. G. E. Karniadakis, I. G. Kevrekidis, L. Lu, P. Perdikaris, S. Wang, and L. Yang, “Physics-informed machine learning,” *Nature Reviews Physics*, vol. 3, no. 6, pp. 422–440, 2021.
  36. R. L. Iman, “Latin hypercube sampling,” *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online*, 2014.
  37. M. Raissi, P. Perdikaris, and G. E. Karniadakis, “Numerical gaussian processes for time-dependent and nonlinear partial differential equations,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 40, no. 1, pp. A172–A198, 2018.
  38. M. Raissi, P. Perdikaris, and G. Karniadakis, “Physics informed deep learning (part i): Data-driven solutions of nonlinear partial differential equations,” *arXiv preprint arXiv:1711.10561*, 2017.
  39. D. Hartmann, M. Herz, and U. Wever, “Model order reduction a key technology for digital twins,” in *Reduced-Order Modeling (ROM) for Simulation and Optimization: Powerful Algorithms as Key Enablers for Scientific Computing*. Springer, 2018, pp. 167–179.
  40. Y. Liang, H. Lee, S. Lim, W. Lin, K. Lee, and C. Wu, “Proper orthogonal decomposition and its applications—part i: Theory,” *Journal of Sound and vibration*, vol. 252, no. 3, pp. 527–544, 2002.
  41. Y. Oh, S. Kam, J. Lee, D.-Y. Lim, S. Kim, and A. Bui, “Comprehensive review of neural differential equations for time series analysis,” *arXiv preprint arXiv:2502.09885*, 2025.
  42. S. Ahmed, I. E. Nielsen, A. Tripathi, S. Siddiqui, R. P. Ramachandran, and G. Rasool, “Transformers in time-series analysis: A tutorial,” *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 42, no. 12, pp. 7433–7466, 2023.
  43. Y. Song, T. Wang, P. Cai, S. K. Mondal, and J. P. Sahoo, “A comprehensive survey of few-shot learning: Evolution, applications, challenges, and opportunities,” *ACM Computing Surveys*, vol. 55, no. 13s, pp. 1–40, 2023.
  44. K. Nakajima and I. Fischer, *Reservoir computing*. Springer, 2021.
  45. A. V. Andreev, A. N. Pisarchik, N. Kulagin, R. Jaimes-Reátegui, G. Huerta-Cuellar, A. A. Badarin, and A. E. Hramov, “Stochastic cloning of dynamical systems with hidden variables,” *Physical Review E*, vol. 112, no. 1, p. 015303, 2025.
  46. A. V. Andreev, A. N. Pisarchik, N. Kulagin, R. Jaimes-Reátegui, G. Huerta-Cuellar, A. A. Badarin, and A. E. Hramov, “Stochastic cloning of dynamical systems with hidden variables,” *Physical Review E*, vol. 112, no. 1, p. 015303, 2025.
  47. A. A. Badarin, A. V. Andreev, V. Klinshov, V. Antipov, and A. E. Hramov, “Hidden data recovery using reservoir computing: Adaptive network model and experimental brain signals,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 34, no. 10, p. 103121, 2024. DOI: 10.1063/5.0223184.
  48. A. A. Badarin, V. Klinshov, P. Smelov and A. V. Andreev, “Reservoir computing reconstructs blood-oxygen-level-dependent signals: whole-brain modeling study,” *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 234, pp. 447–4504, 2024. DOI: 10.1140/epjs/s11734-025-01702-z
  49. A. E. Hramov, N. Kulagin, A. N. Pisarchik, and A. V. Andreev, “Strong and weak prediction of stochastic dynamics using reservoir computing,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 35, no. 3, 2025.
  50. A. N. Pisarchik, A. V. Kir’yanov, Y. O. Barmenkov, and R. Jaimes-Reátegui, “Dynamics of an erbium-doped fiber laser with pump modulation: theory and experiment,” *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 22, no. 10, pp. 2107–2114, 2005.
  51. O. V. Maslennikov and V. I. Nekorkin, “Adaptive dynamical networks,” *Physics-Uspekhi*, vol. 60, no. 7, p. 694, 2017.

52. S. Guze, "Graph theory approach to the vulnerability of transportation networks," *Algorithms*, vol. 12, no. 12, p. 270, 2019.
53. A. E. Hramov, N. S. Frolov, V. A. Maksimenko, S. A. Kurkin, V. B. Kazantsev, and A. N. Pisarchik, "Functional networks of the brain: from connectivity restoration to dynamic integration," *Physics-Uspokhi*, vol. 64, no. 6, p. 584, 2021.
54. S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang, "Complex networks: Structure and dynamics," *Physics reports*, vol. 424, no. 4-5, pp. 175–308, 2006.
55. T. Pereira, E. R. dos Santos, and S. van Strien, "Robust reconstruction of sparse network dynamics," *Nonlinearity*, vol. 38, no. 5, p. 055031, 2025.
56. E. C. Marques, N. Maciel, L. Naviner, H. Cai, and J. Yang, "A review of sparse recovery algorithms," *IEEE access*, vol. 7, pp. 1300–1322, 2018.
57. A. V. Andreev, A. A. Badarin, V. A. Maximenko, and A. E. Hramov, "Forecasting macroscopic dynamics in adaptive kuramoto network using reservoir computing," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 32, no. 10, 2022.
58. G. Corso, H. Stark, S. Jegelka, T. Jaakkola, and R. Barzilay, "Graph neural networks," *Nature Reviews Methods Primers*, vol. 4, no. 1, p. 17, 2024.
59. M. Ferriol-Galmés, J. Suárez-Varela, J. Paillissé, X. Shi, S. Xiao, X. Cheng, P. Barlet-Ros, and A. Cabellos-Aparicio, "Building a digital twin for network optimization using graph neural networks," *Computer Networks*, vol. 217, p. 109329, 2022.
60. P. Barbiero, R. Vinas Torne, and P. Lió, "Graph representation forecasting of patient's medical conditions: toward a digital twin," *Frontiers in genetics*, vol. 12, p. 652907, 2021.
61. P. Barbiero and P. Lió, "The computational patient has diabetes and a covid," *arXiv preprint arXiv:2006.06435*, 2020.
62. В. Дождев, Е. Шантаев, Л. Дараселия, А. Храмов, "Интегрированный подход к обеспечению качества промышленных данных для решений на основе искусственного интеллекта," *Автоматизация в промышленности*, Т. 6, СС. 4–12, 2025.
63. A. E. Hramov, A. V. Pisarchik, "Big Data Management and Quality Evaluation for the Implementation of AI Technologies in Smart Manufacturing," *Applied Sciences*, vol. 15, no. 22, p. 11905, 2025. DOI: 10.3390/app152211905.
64. A. T. Wasi, M. A. Anik, A. Rahman, M. I. Hoque, M. Islam, and M. M. Ahsan, "A theoretical framework for graph-based digital twins for supply chain management and optimization," *arXiv preprint arXiv:2504.03692*, 2025.
65. M. Javaid, A. Haleem, and R. Suman, "Digital twin applications toward industry 4.0: A review," *Cognitive Robotics*, vol. 3, pp. 71–92, 2023. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2667241323000137>
66. L. Li, S. Aslam, A. Wileman, and S. Perinpanayagam, "Digital twin in aerospace industry: A gentle introduction," *IEEE Access*, vol. 10, pp. 9543–9562, 2021.
67. M. Chandrasekaran and P. Rajesh, "Conceptualisation of digital twin-enabled new product design framework for the automotive industry," *Journal of Engineering Design*, pp. 1–41, 2025.
68. Q. Zhang, J. Liu, and X. Chen, "A literature review of the digital thread: Definition, key technologies, and applications," *Systems*, vol. 12, no. 3, p. 70, 2024.
69. Y. Jiang, S. Yin, K. Li, H. Luo, and O. Kaynak, "Industrial applications of digital twins," *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 379, no. 2207, p. 20200360, 2021.
70. L. Zhang, X. Chen, W. Zhou, T. Cheng, L. Chen, Z. Guo, B. Han, and L. Lu, "Digital twins for additive manufacturing: a state-of-the-art review," *Applied Sciences*, vol. 10, no. 23, p. 8350, 2020.
71. T. Xu, X. Zhang, W. Sun, and B. Wang, "Intelligent operation and maintenance of wind

- turbines gearboxes via digital twin and multi-source data fusion,” *Sensors*, vol. 25, no. 7, p. 1972, 2025.
72. S. Werbińska-Wojciechowska, R. Giel, and K. Winiarska, “Digital twin approach for operation and maintenance of transportation system—systematic review,” *Sensors*, vol. 24, no. 18, p. 6069, 2024.
  73. P. K. Pandey, P. K. Pandey, S. Mahajan, J. Paul, and S. Iyer, “Digital twin and virtual reality, augmented reality, and mixed reality,” in *Digital Twins for Smart Cities and Villages*. Elsevier, 2025, pp. 273–293.  
zhu2024heatpipe
  74. T. R. Wanasinghe, L. Wroblewski, B. K. Petersen, R. G. Gosine, L. A. James, O. De Silva, G. K. Mann, and P. J. Warrian, “Digital twin for the oil and gas industry: Overview, research trends, opportunities, and challenges,” *IEEE access*, vol. 8, pp. 104175–104197, 2020.
  75. J. Leng, Q. Liu, S. Ye, J. Jing, Y. Wang, C. Zhang, D. Zhang, and X. Chen, “Digital twin-driven rapid reconfiguration of the automated manufacturing system via an open architecture model,” *Robotics and computer-integrated manufacturing*, vol. 63, p. 101895, 2020.
  76. P. Armeni, I. Polat, L. M. De Rossi, L. Diaferia, S. Meregalli, and A. Gatti, “Digital twins in healthcare: is it the beginning of a new era of evidence-based medicine? a critical review,” *Journal of personalized medicine*, vol. 12, no. 8, p. 1255, 2022.
  77. M. N. Kamel Boulos and P. Zhang, “Digital twins: from personalised medicine to precision public health,” *Journal of personalized medicine*, vol. 11, no. 8, p. 745, 2021.
  78. X. Yi, E. Walia, and P. Babyn, “Generative adversarial network in medical imaging: A review,” *Medical image analysis*, vol. 58, p. 101552, 2019.
  79. K. Sel, D. Osman, F. Zare, S. Masoumi Shahrababak, L. Brattain, J.-O. Hahn, O. T. Inan, R. Mukkamala, J. Palmer, D. Paydarfar *et al.*, “Building digital twins for cardiovascular health: From principles to clinical impact,” *Journal of the American Heart Association*, vol. 13, no. 19, p. e031981, 2024.
  80. P. Karakasis, A. P. Antoniadis, P. Theofilis, P. K. Vlachakis, N. Milaras, D. Patoulas, T. Karamitsos, and N. Fragakis, “Digital twin models in atrial fibrillation: Charting the future of precision therapy?” *Journal of Personalized Medicine*, vol. 15, no. 6, 2025. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2075-4426/15/6/256>
  81. Faisal, S.M., Ishrat, M. and Khan, W., 2025. Digital Twins in Healthcare: Revolutionizing Patient Care and Medical Operations. In *Digital Twins for Smart Cities and Urban Planning* (pp. 69-89). CRC Press.
  82. Elkefi, Safa, and Onur Asan. "Digital twins for managing health care systems: rapid literature review." *Journal of medical Internet research* 24, no. 8 (2022): e37641.
  83. Karakra, A., Fontanili, F., Lamine, E., Lamothe, J. (2022). A discrete event simulation-based methodology for building a digital twin of patient pathways in the hospital for near real-time monitoring and predictive simulation. *Digital Twin*, 2, 1.
  84. О.Э. Карпов, Д.А. Андриков, М.Н. Замятин, А.В. Осипов, А.И. Кильник, Г.А. Багаев, А.П. Максачук, А.Е. Храмов, “Перспективы и ограничения использования технологий искусственного интеллекта в системе поддержки принятия решений службы медицины катастроф. Врач и информационные технологии.” 4 (2025) 6-15. *Врач и информационные технологии*, Т. 4, no. 6, 2025. СС. 6-15 [Online]. Available: <https://www.vit-j.ru/jour/article/view/270>
  85. P. Pobuda, “The digital twin of the economy: Proposed tool for policy design and evaluation,” *real-world economics review*, vol. 94, pp. 1–9, 2020.

86. N. G. Mankiw, "The macroeconomist as scientist and engineer," *Journal of economic perspectives*, vol. 20, no. 4, pp. 29–46, 2006.
87. J. E. Stiglitz, "Where modern macroeconomics went wrong," *Oxford Review of Economic Policy*, vol. 34, no. 1-2, pp. 70–106, 2018.
88. H. Naveed, A. U. Khan, S. Qiu, M. Saqib, S. Anwar, M. Usman, N. Akhtar, N. Barnes, and A. Mian, "A comprehensive overview of large language models," *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*, vol. 16, no. 5, pp. 1–72, 2025.
89. В.В. Шпак, "Инвентаризация электроники–фундамент прорыва в лидеры," *Russian Technological Journal*, Т. 13, no. 4, СС. 135–148, 2025.
90. В.В. Шпак, "Формирование организационно-управленческой модели реализации «Стратегии развития электронной промышленности Российской Федерации на период до 2030 года»,» *Вестник Челябинского государственного университета*, Т. 3(449), СС. 10–23, 2021.
91. В.В. Шпак, "Основы мультиагентной планово-логистической модели управления воспроизводственным циклом отрасли в режиме «онлайн»,» *Фундаментальные исследования*, Т. 3, СС. 146–145, 2022.
92. Z. Ke, Y. Ming, X.-P. Nguyen, C. Xiong, and S. Joty, "Demystifying domain-adaptive post-training for financial llms," *arXiv preprint arXiv:2501.04961*, 2025.
93. H. Omrany, K. M. Al-Obaidi, A. Husain, and A. Ghaffarianhoseini, "Digital twins in the construction industry: a comprehensive review of current implementations, enabling technologies, and future directions," *Sustainability*, vol. 15, no. 14, p. 10908, 2023.
94. S. Mazzetto, "A review of urban digital twins integration, challenges, and future directions in smart city development," *Sustainability*, vol. 16, no. 19, p. 8337, 2024.
95. W. Liu, Y. Lv, Q. Wang, B. Sun, and D. Han, "A systematic review of the digital twin technology in buildings, landscape and urban environment from 2018 to 2024," *Buildings*, vol. 14, no. 11, p. 3475, 2024.
96. D. Hsu, "Comparison of integrated clustering methods for accurate and stable prediction of building energy consumption data," *Applied Energy*, vol. 160, pp. 153–163, 2015. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0306261915010624>
97. G.-L. Jia, R.-G. Ma, and Z.-H. Hu, "Urban transit network properties evaluation and optimization based on complex network theory," *Sustainability*, vol. 11, no. 7, 2019. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2071-1050/11/7/2007>
98. B. N. Silva, M. Khan, C. Jung, J. Seo, D. Muhammad, J. Han, Y. Yoon, and K. Han, "Urban planning and smart city decision management empowered by real-time data processing using big data analytics," *Sensors*, vol. 18, no. 9, 2018. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/1424-8220/18/9/2994>
99. L.-M. Ang, K. P. Seng, A. M. Zungeru, and G. K. Ijamaru, "Big sensor data systems for smart cities," *IEEE Internet of Things Journal*, vol. 4, no. 5, pp. 1259–1271, 2017.
100. X. Yu and Y. Xue, "Smart grids: A cyber–physical systems perspective," *Proceedings of the IEEE*, vol. 104, no. 5, pp. 1058–1070, 2016.
101. C. Brosinsky, D. Westermann, and R. Krebs, "Recent and prospective developments in power system control centers: Adapting the digital twin technology for application in power system control centers," in *2018 IEEE international energy conference (ENERGYCON)*. IEEE, 2018, pp. 1–6.
102. A. Joseph, M. Cvetković, and P. Palensky, "Predictive mitigation of short term voltage instability using a faster than real-time digital replica," in *2018 IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Conference Europe (ISGT-Europe)*. IEEE, 2018, pp. 1–6.
103. N. Mohamed, J. Al-Jaroodi, and S. Lazarova-Molnar, "Leveraging the capabilities of

industry 4.0 for improving energy efficiency in smart factories,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 18 008–18 020, 2019.

104. А. С. Буторова, В. И. Борисов, А. П. Сергеев, М. В. Ронкин, В. С. Бобаков, С. С. Иванов, С. О. Поляков, К. А. Игнатков, Ю. Ю. Чернышов, А. В. Скороходов, и А. И. Манжуров, “Прогностические модели инженерных систем центров обработки данных на основе искусственного интеллекта: обзор архитектур и датасетов,” *Траектория исследований - человек, природа, технологии*, Т 3, no. 15, СС. 3-18, 2025.
105. H. Zhu and B. Lin, “Digital twin-driven energy consumption management of integrated heat pipe cooling system for a data center,” *Applied Energy*, vol. 373, p. 123840, 2024.
106. H. Yuan, Z. Zhang, D. Yang, T. Xue, D. Wen, G. Yao, “An intelligent thermal management strategy for a data center prototype based on digital twin technology,” *Applied Sciences*, vol. 15, no. 14, p. 7675, 2025.
107. М.Н. Стриханов, Д.И. Трубецков, А.А. Короновский, Ю.П. Шараевский, А.Е. Храмов, Высшая школа России с позиций нелинейной динамики (проблемы, оценки, модели). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 192с.
108. H. Yu, C. Miao, C. Leung, and T. J. White, “Towards ai-powered personalization in mooc learning,” *npj Science of Learning*, vol. 2, no. 1, p. 15, 2017.
109. V. V. Grubov, M. V. Khramova, S. Goman, A. A. Badarin, S. A. Kurkin, D. A. Andrikov, E. Pitsik, V. Antipov, E. Petushok, N. Brusinskii *et al.*, “Open-loop neuroadaptive system for enhancing student’s cognitive abilities in learning,” *IEEE Access*, vol. 12, pp. 49 034–49 049, 2024.
110. Т. Букина, М. Храмова, С. Куркин, Д. Андриков, С. Гоман, А. Дедков, А. Храмов, “Нейрообразовательный программный рекомендательный сервис как инструмент персонализации образовательного процесса,” *Информатика и образование*, Т. 39, no. 5, СС. 50–62, 2024.
111. А. Федоров, С. Куркин, М. Храмова, А. Храмов, “Нейротехнологии и искусственный интеллект как ключевые факторы кастомизации жизненно-образовательного маршрута,” *Информатика и образование*, Т. 38, no. 3, СС. 5–15, 2023.
112. H. Peng, S. Ma, and J. M. Spector, “Personalized adaptive learning: an emerging pedagogical approach enabled by a smart learning environment,” *Smart Learning Environments*, vol. 6, no. 1, pp. 1–14, 2019.



*Андреев Андрей Викторович* — родился в Энгельсе (1993). Окончил с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика» (2015). Кандидат физико-математических наук (2020). Ведущий научный сотрудник НИИ прикладного ИИ и цифровых решений РЭУ им. Г. В. Плеханова, Москва.



*Леван Шотаевич Дараселия* — родился в Сухуми (1984). Окончил военно-юридический факультет Военного университета Министерства обороны РФ по специальности «Юриспруденция» (2006). Первый заместитель генерального директора ФГАУ «Цифровые промышленные технологии», Москва.



*Владимир Святославич Дождѐв* — родился в Москве (1989). Окончил Московский городской университет управления правительства Москвы (2011). Директор департамента цифровых технологий министерства промышленности и торговли Российской Федерации, Москва.



*Александр Владимирович Шендерюк-Жидков* — родился в Калининграде (1982). Окончил с отличием экономический факультет Калининградского государственного университета по специальности «Финансы и кредит» (2004). Сенатор, член Совета Федерации Федерального Собрания Российской Федерации от Калининградской области, первый зампред Комитета по бюджету и финансовым рынкам Совета Федерации, доктор h.c. БФУ им. И. Канта, Калининград.



*Василий Викторович Шпак* — родился в Куйбышеве (1977). Окончил Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет) по специальности «экономика и управление» (2000) и Федеральное казенное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский юридический институт Федеральной службы исполнения наказаний» по специальности «юриспруденция» (2012). Кандидат экономических наук (1916). Заместитель Министра промышленности и торговли Российской Федерации, Москва.



*Александр Евгеньевич Храмов* — родился в Саратове (1974). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника» (1996). Кандидат физико-математических наук (1999). Доктор физико-математических наук (2003). Профессор (2008). Ученый член РАН (2025). Директор НИИ прикладного ИИ и цифровых решений РЭУ им. Г. В. Плеханова, Москва. Главный научный сотрудник ФГАУ «Цифровые промышленные технологии», Москва.

А.В. Андреев, Л.Ш. Дараселия, В.С. Дождѐв, А.В. Шендерюк-Жидков, В.В. Шпак, А.Е. Храмов  
Известия вузов. ПНД, 2026, т. 34, № 1, с. 10-15