

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СООРУЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ В МАТЕРИАЛЕ

М. М. Мирсаидов^{1,2}✉, А. Н. Ишиматов¹, Б. Ш. Юлдошев¹, Ш. М. Салимов³,
И. О. Хазраткулов¹

¹Национальный исследовательский университет “Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства”, ул. Кори Ниёзи, 39, 100000, г. Ташкент, Узбекистан

²Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т.Уразбаева Академии наук Узбекистана.
ул. Дормон йули 33, 100125, г. Ташкент, Узбекистан

³Ташкентский университет прикладных наук, ул. Гавхар 1, 100149, г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: ✉mirsaidov1948@mail.ru, ribs@mail.ru

Поступила в редакцию 01.11.2025, принята к публикации 31.12.2025,
опубликована онлайн 07.02.2026

Аннотация. В работе дан подробный анализ современного состояния проблемы динамики осесимметричных сооружений. Разработаны математическая модель, метод, алгоритм и компьютерная программа расчета на ЭВМ для оценки динамических характеристик (частота, форма и декремент колебаний) пространственных осесимметричных сооружений с учетом диссипации энергии в материале с использованием наследственной модели вязкоупругости Больцмана-Вольтерра в трехмерной постановке.

Оценены динамические характеристики конкретных пространственных осесимметричных сооружений типа градирен. Установлено, что для данного типа сооружений, низшие неосесимметричные собственные частоты попадают в диапазон преобладающих частот землетрясений.

Выявлено, что: учет диссипации в материале приводит к незначительному снижению собственных частот колебаний сооружения и слабому частотно независимому декременту колебаний; установленные кольца жесткости наверху сооружения несколько повышают неосесимметричные собственные частоты колебаний, при этом изгибные частоты сооружений несколько снижаются.

Ключевые слова: осесимметричные пространственные сооружения, градирня, динамические характеристики, неосесимметричные колебания, комплексные собственные частоты, формы и декремент колебаний, диссипация энергии, наследственная вязкоупругость.

Благодарности.

Для цитирования: Мирсаидов М. М., Ишиматов А. Н., Юлдошев Б. Ш., Салимов Ш. М., Хазраткулов И. О.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СООРУЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ В МАТЕРИАЛЕ // Известия вузов. ПНД. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003212. EDN: UMJPRE

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

DYNAMIC CHARACTERISTICS OF SPATIAL AXISYMMETRIC STRUCTURES CONSIDERING ENERGY DISSIPATION IN THE MATERIAL

M. M. Mirsaidov^{1,2}✉, *A. N. Ishmatov*¹, *B. Sh. Yuldoshev*¹, *Sh. M. Salimov*³, *I. O. Khazratkulov*¹

¹National Research University-Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, 39 Kori Niyoziy str., 100000, Tashkent, Uzbekistan

²M.T.Urazbaev Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures, Uzbekistan Academy of Sciences. 100125, Tashkent, Akademgorodok, Dormon yuli, 33

³University Tashkent for Applied Sciences, 1 Gavhar str., 100149, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: ✉mirsaidov1948@mail.ru, ribs@mail.ru

Received 01.11.2025, accepted 31.12.2025, available online 07.02.2026

Abstract. The work presents a comprehensive analysis of the current state of the issue concerning the dynamics of axisymmetric structures. A mathematical model, method, algorithm, and computer program for calculations on a computer have been developed to assess the dynamic characteristics (frequency, mode, and damping ratio of vibrations) of spatial axisymmetric structures, considering energy dissipation in the material using the hereditary Boltzmann-Volterra viscoelastic model in a three-dimensional setting.

The dynamic characteristics of specific spatial axisymmetric structures of the cooling tower type have been evaluated. It has been determined that for this type of structure, the lowest non-axisymmetric natural frequencies fall within the range of predominant earthquake frequencies.

It has been found that: accounting for dissipation in the material results in a slight reduction in the natural vibration frequencies of the structure and a weakly frequency-independent damping ratio; the installed stiffening rings at the top of the structure somewhat increase the non-axisymmetric natural vibration frequencies, while the bending frequencies of the structures decrease slightly.

Keywords: axisymmetric spatial construction, cooling tower, dynamic properties, non-axisymmetric vibrations, complex eigenfrequencies, vibration modes and damping ratio, energy dissipation, hereditary viscoelasticity.

Acknowledgements.

For citation: Mirsaidov MM, Ishmatov AN, Yuldoshev BSh, Salimov ShM, Khazratkulov IO. DYNAMIC CHARACTERISTICS OF SPATIAL AXISYMMETRIC STRUCTURES CONSIDERING ENERGY DISSIPATION IN THE MATERIAL. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003212

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В последнее время динамические пространственные характеристики различных осесимметричных сооружений с учетом как их сложной геометрии, так и неупругих свойств материалов привлекают внимание исследователей в связи со строительством АЭС и ТЭЦ в районах с высокой сейсмичностью. Очевидно, что динамические характеристики (собственная частота, форма и декремент колебаний) являются основными параметрами сооружений и несут в себе достаточно большую информацию о динамических свойствах сооружения в целом. Как известно, определение динамических характеристик этих сооружений является самостоятельной и достаточно трудной задачей механики.

Это в свою очередь требует создания надежной методики и алгоритмов динамического расчета для данного ряда сооружений с учетом как упругих, так и неупругих свойств

Мирсаидов М. М., Ишматов А. Н., Юлдошев Б. Ш., Салимов Ш. М., Хазраткулов И. О.
Известия вузов. ПНД, 2026

материала для реального характера работы сооружения.

Имеется большое количество публикаций, рассматривающие динамическое поведение сооружений такого типа, исследование параметров колебательных процессов с учетом диссипации энергии в материале, исследовано с меньшей полнотой. Актуальность решения подобных задач прежде всего объясняется запросами проектирования, строительства и эксплуатации различного типа высотных пространственных осесимметричных сооружений.

Цель работы состоит в разработке методики, алгоритма решения задачи о собственных колебаниях пространственных сооружений, обладающих вязкоупругими свойствами их материала; исследование динамики конкретных сооружений и анализ полученных результатов с точки зрения обнаружения новых механических эффектов.

В последние годы опубликованы ряд работ, где исследованы напряжённо-деформированное состояние и динамическое поведение различных осесимметричных сооружений.

К таким научным работам относятся следующие:

- в работах [1–6] рассмотрены динамика различных осесимметричных сооружений в одномерной и двухмерной постановке с учетом упругих, вязкоупругих постановок с учетом как линейных, так и нелинейных свойств материала сооружения при различных воздействиях. Для оценки динамики рассмотренных сооружений разработана методика и алгоритм решения поставленных задач. Исследовались собственные колебания сооружений в упругой постановке, а также вынужденные колебания с учетом вязкоупругих свойства материала. Вопрос оценки собственных колебаний сооружений с учетом различного рода диссипации в материале оставался открытым из-за сложности решения пространственных задач.

- в работе [7] на основе метода конечных элементов дан анализ свободных колебаний градирни, результаты, которого хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными как для реальной градирни, так и для соответствующей модельной конструкции. Показана эффективность метода в качестве инструмента проектирования. Показана возможность использования полученных результатов для анализа другого типа вращательно-периодических сооружений, подверженных сейсмическим возмущениям, ударам ракет или силам ветра.

- в работе [8] содержатся основы физического и геометрически нелинейного анализа градирен в виде тонких оболочек, включая определение точек неустойчивости на траектории перемещения груза. Численное исследование состоит из сравнения трещиностойких и предельных нагрузок двух различных железобетонных градирен, подвергнутых собственной нагрузке и квазистатической ветровой нагрузке, с нагрузками на изгиб, полученными в результате трех режимов анализа физического линейного изгиба.

- в работе [9] рассматривается физическое и математическое моделирование системы градирня-фундамент-грунт. Физическое моделирование было выполнено с использованием сплошного 20-узлового изопараметрического элемента для моделирования градирни, кольцевого стропильного фундамента и грунтовых сред. Система градирня-фундамент-грунт была проанализирована с учетом вертикальных и поперечных нагрузок, возникающих из-за собственного веса и ветровых нагрузок. Нелинейность грунта была учтена с использованием гиперболического нелинейного закона упругости. Исследована реакция конструкции на смещение и напряжения. Исследовано влияние линейного и нелинейного интерактивного анализа по сравнению с традиционным анализом. Установлено, что интерактивный анализ взаимодействия градирни, фундамента и грунта играет важную роль в снижении напряжений в градирне, особенно в нижней кольцевой балке.

- в работе [10] дан всесторонний обзор научных работ, опубликованных в области градирен, и дает представление о последних разработках градирен с естественной тягой. В статье обобщены различные методы моделирования, анализа и проектирования, а так-

же обсуждены проблемы. Даны 118 ссылок, которые в основном сосредоточены на обзоре опубликованных работ после 2005 года. Работа представляет собой полный обзор исследований, проведенных для градирен, и предоставит обновленный материал для исследователей и инженеров-проектировщиков в области гиперболических градирен.

- в работе [11] рассматриваются характеристики гиперболической оболочки градирни на свободные и вынужденные колебания, которые являются одним из сложных реальных применений осесимметричных конструкций. В численной модели градирни используется 9-узловый гармонический кольцевой конечный элемент. Физически трехмерная задача о градирне сводится к двумерной путем выражения сейсмической нагрузки в виде ряда Фурье для одной гармоники с помощью гармонических элементов. Полное решение задачи получено для одного компонента нагрузки, что значительно повышает вычислительную эффективность модели. Проведено параметрическое исследование изменений кривизны корпуса градирни. Для определения динамических характеристик корпуса градирни используется метод анализа временной истории. В исследовании использованы данные об ускорении землетрясения в Дюздже (Турция, 2022). Дан вывод, что число режимов движения по окружности и кривизна корпуса оказывают существенное влияние на динамические характеристики градирен.

- в работе [12] показано применение модифицированной модели фундамента Власова для анализа свободных колебаний гиперболических градирен, опирающихся на упругие основания. При расчете использован вычислительный инструмент, закодированный в MATLAB, использующий функцию открытого интерфейса прикладного программирования SAP2000 для обеспечения двустороннего потока данных во время выполнения. На основе численных примеров, сделан вывод, что взаимодействие башни с грунтом и структурой приводит к значительному снижению частотного параметра системы по сравнению с фиксированным состоянием, а изменение геометрических параметров значительно влияет на частотные параметры.

- в работе [13] исследовано динамическое поведение гиперболических градирен с различными геометрическими свойствами при воздействии землетрясения. Анализируются различные образцы градирен с различными геометрическими размерами и исследуется влияние кривизны, гибкости, толщины и уровня горловины на динамическое поведение гиперболических градирен. Влияние данных параметров на поведение градирни исследуется путем сравнения бокового смещения, меридиональных сил и моментов. Численный анализ выполняется с использованием программного обеспечения, написанного на языке программирования MATLAB, что позволяет одновременно использовать пакет программного обеспечения для структурного анализа MATLAB и SAP2000.

- в работе [14] исследованы обширные обзорные и исследовательские статьи, опубликованных по моделированию гиперболических градирен. В работе указывается, что градирни представляют собой дважды изогнутые тонкостенные оболочки сложной геометрии, анализ и проектирование которых привлекли внимание исследователей во всем мире. Даны последние разработки градирен с естественной тягой воздуха в области моделирования надстроек и подконструкций, а также такие аспекты, как конечные элементы оболочки, экспериментальные исследования, поддерживающие системы, различные системы фундаментов. Приводится обзор статей, посвященных градирням, опубликованных после 2005 года по настоящее время.

- в работе [15] рассмотрены сейсмические характеристики гиперболической градирни, опирающейся на грунтовое основание, представленное трехпараметрической моделью упругого грунта Власова. Трехпараметрическая модель грунта исключает необходимость проведения полевых испытаний для определения параметров грунта: модуля упругости и

параметра сдвига. Параметры рассчитываются с использованием итерационной процедуры в зависимости от профиля вертикальной деформации поверхности грунта в модели. При расчете использована программа структурного анализа SAP2000 с использованием вычислительного инструмента, закодированного в MATLAB. Численные результаты показывают, что гибкость грунтового основания приводит к увеличению смещений, но к уменьшению усилий на оболочку и колонны. Утверждается, что учет взаимодействия грунта и конструкции при анализе сейсмической реакции системы градирни обеспечивает экономичный процесс проектирования.

- в работе [16] построена трехмерная физическая модель для всех восьми этапов строительства сверхбольшой градирни высотой 210 м. Динамические характеристики градирни проанализированы на каждом этапе. Сначала получена информация о поле потока и 3D-хронологии аэродинамических сил для всего процесса строительства с использованием моделирования больших вихрей (LES). Полный динамический анализ методом конечных элементов использован для расчета динамических характеристик башни при изменении ветровых нагрузок в реальном времени в течение всего процесса строительства. На основе исследований оценено влияние и механизм действия коэффициента вибрации от ветра, возраста бетона, нагрузки на конструкцию, геометрической нелинейности, силы внутреннего всасывания на устойчивость к изгибу и предельную несущую способность градирен.

- в работе [17] проведен нелинейный анализ устойчивости стальных гиперболических градирен высотой 150 м. Созданы модели с пятью структурными системами, включая два типа сетчатых оболочек (т.е. однослойные и двухслойные оболочки) и три формы балок (т.е. треугольную сетку, прямоугольную сетку и квадратную пирамидальную сетку). Проведены геометрические и материальные анализы нелинейной устойчивости более чем в 220 случаях с учетом различных распределений и амплитуд дефектов. Результаты показали, что пять стальных градирен с гиперболической формой имеют относительно низкую чувствительность к дефектам, что отличает их от большинства других тонкостенных корпусов, а чувствительность к дефектам прямоугольной сетки высока, в то время как треугольная сетка и квадратная пирамидальная сетка имеют низкую чувствительность к дефектам. Анализом установлено, что конструкции с двухслойными сетчатыми оболочками, более чувствительны к дефектам, чем конструкции с однослойными.

- в работе [18] рассмотрено гиперболическое охлаждение башни высотой 117 м и исследовано поведение сооружения при землетрясении и воздействии ветра. При расчете ветровой нагрузки применялась скорость ветра 25 м/с, и в ходе анализа землетрясений к конструкциям были применены три записи о движении грунта. Ветровая нагрузка рассчитана в соответствии со стандартом ASCE 7-10 и задана как угловая. В результате анализа получены и исследованы значения смещения и напряжения. Согласно результатам анализа ветровой нагрузки, с увеличением высоты башни значения ветровой нагрузки и значения смещений, происходящих в здании, увеличиваются. Значения смещения и напряжения изменяются под углом в зависимости от угловой ветровой нагрузки. Самые высокие значения смещения и напряжения были получены при землетрясении в Кобе (Япония, 1995). Значения смещения исследованы в зависимости от высоты, и наибольшие значения смещения получены в верхней части.

- в работе [19] представлен анализ ряда работ, посвященных вопросам проектирования и расчета градирен. Особое внимание уделено расчету градирен на ветровые нагрузки (статическую и пульсационную). На основе выполненного анализа разных типов градирен показаны достоинства каркасно-обшивной градирни, выявлены особенности металлических градирен в сравнении с железобетонными заключающиеся в том, что каркасно-обшивные сооружения можно возводить в любом климатическом районе, включая строительство в

зимний период, причем без устройства тепляков. Показано, что пространственный каркас стальной башенной градирни в виде гиперблоида вращения является наиболее целесообразным конструктивным решением для объектов атомной и тепловой электростанций.

Как показывает, приведенный анализ известных научных работ, каждая из этих работ имеет как свои преимущества, так и некоторые недостатки, несмотря на это, все они используются при решении конкретных практических задач.

Исходя из этого анализа, можно отметить, что разработка математических моделей, методов решения для оценки динамических характеристик пространственных осесимметричных сооружений с учетом диссипации энергии в материале конструкции с использованием наследственной теории вязкоупругости Больцмана-Вольтерра на данный момент является весьма актуальной и важной проблемой требующая своего решения.

1. Методика

1.1. Математическая модель. Рассматриваются собственные колебания вязкоупругой пространственной осесимметричной системы, состоящей из осесимметричного сооружения, фундамента и грунтового основания. Рассматриваемая система (рис. 1) занимает объем $V = V_1 + V_2 + V_3$ в котором объемы: V_1 – сооружения, V_2 – фундамента и V_3 – основания. Материалы каждого элемента системы обладает различными вязкоупругими характеристиками. Нижняя часть основания Σ_Z жестко закреплена, а боковая поверхность Σ_R – свободна от напряжений. .

Задача состоит в нахождении собственных колебаний, т.е. наиболее упорядоченных движений, протекающих при отсутствии внешних воздействий. При учете диссипации в материале все точки системы колеблются по одному и тому же комплексному гармоничному, закону с различными амплитудами, т.е.

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}^*(\vec{x})e^{-i\omega t} \quad (1)$$

здесь ω - комплексная собственная частота; $\vec{u}^*(\vec{x})$ – комплексная собственная форма колебаний;

$$\vec{u} = \{\vec{u}(\vec{x}, t), \vec{v}(\vec{x}, t), \vec{w}(\vec{x}, t)\}, u^* = \{\vec{u}^*, \vec{v}^*, \vec{w}^*\}; \vec{x} = \{r, z, \varphi\} -$$

u, v, w - продольное, тангенциальное и радиальное перемещения рассматриваемой точки системы.

В случае неконсервативных систем, т.е. когда учитывается диссипация энергии, ω и \vec{u}^* - являются комплексными величинами. При этом $\omega = \omega_R + i\omega_I$ и $\vec{u}^* = \vec{u}_R^* + i\vec{u}_I^*$.

По физическому смыслу действительная часть, ω т.е. ω_R является частотой собственных затухающих колебаний системы, а мнимая ω_I несет информацию о скорости затухания колебаний и с точностью до знака равна коэффициенту демпфирования. Коэффициент демпфирования, являясь количественной характеристикой скорости затухания колебаний, определяет диссипативные свойства системы в целом.

Обычно при использовании модели Кельвина или Фойгта учитывается диссипация только при ползучести или при релаксации. В данной работе для описания диссипативных процессов в системе (рис. 1) используется наследственная теория вязкоупругости Больцмана-Вольтерра, что одновременно учитывает диссипативные процессы как в ползучести, так и в релаксации [20, 32-35].

Для математической постановки задачи используется принцип возможных перемещений, согласно которому работа всех активных сил, включая силы инерции на произвольном возможном перемещении, равна нулю, т.е. [20, 24]:

$$\delta A = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \delta \vec{u} dV = 0 \quad (2)$$

$$\vec{x} \in \sigma_z : \vec{u} = 0, \quad \delta \vec{u} = 0. \quad (3)$$

$\vec{u}, \delta_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – соответственно компоненты вектора перемещений, тензоров напряжений и деформаций; $\delta \vec{u}, \delta \varepsilon_{ij}$ – вариации перемещений и деформаций

$V = V_1 + V_2 + V_3$ – сумма объемов соответственно тела, фундамента и основания; ρ – плотность материала; $\vec{x} = \{r, z, \varphi\}$ – цилиндрические координаты. $i, j = r, z, \varphi$.

При этом подлежит определению комплексная собственная частота ω и форма колебаний \vec{u}^* – вязкоупругой пространственной системы (рис.1), удовлетворяющее при любых возможных перемещениях вариационному уравнению (2) при кинематических условиях (3).

Подстановка (1) в (2) и (3) сводит рассматриваемую задачу к комплексной вариационной задаче о собственных значениях:

$$- \int_V \sigma_{ij}^* \delta \varepsilon_{ij} dV + \omega^2 \int_V \rho_n \vec{u}^* \delta \vec{u}^* dV = 0, \quad (4)$$

$$x \in \sigma_z : \delta \vec{u}^* = 0, \quad (5)$$

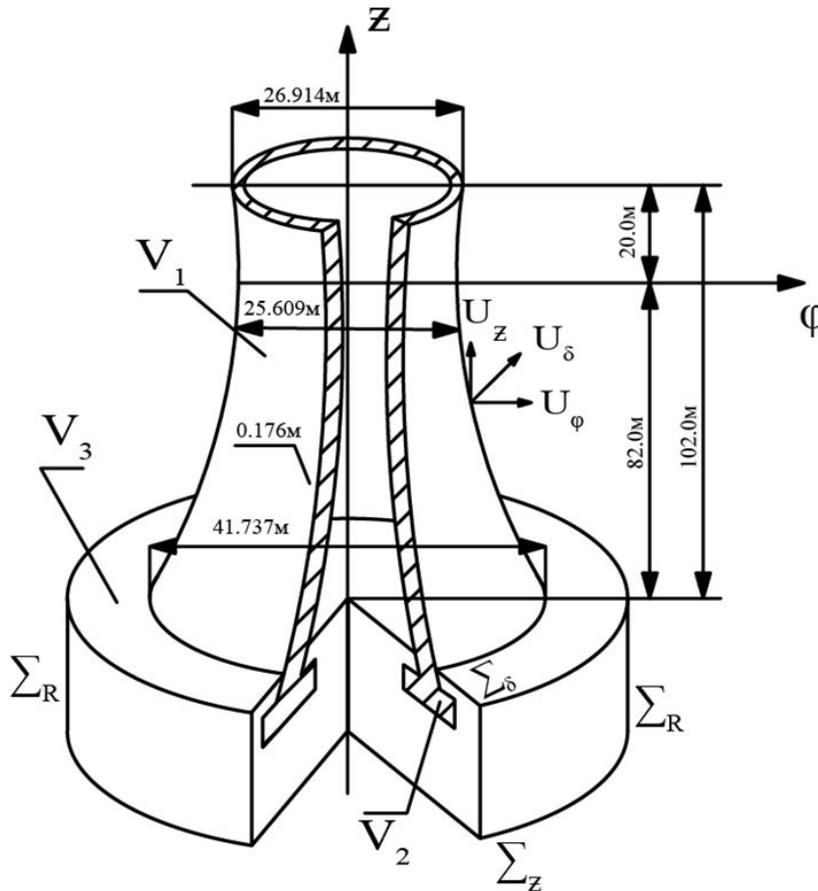


Рис. 1. Пространственная осесимметричная система: 1 - сооружение, 2 - фундамент, 3 – основание.

где σ_{ij}^* - амплитуда компонентов тензоров напряжений.

Собственная форма колебаний \vec{u}^* определяется из (4) с точностью до постоянного множителя. Для устранения этого произвольно вводится дополнительное условие нормировки собственных форм:

$$\int_V \rho_n \vec{u}^{*2} dV = 1. \quad (6)$$

Теперь задача о собственных колебаниях вязкоупругой системы (рис.1) сводится к отысканию константы ω^2 и функции $\vec{u}^*(\vec{x})$, удовлетворяющих уравнениям (1), условиям нормировки (6) и кинематическим условиям (5) при любом $\delta \vec{u}^*(\vec{x})$.

Здесь

$$\omega, \vec{u}^* = \{u_3^*(r, z, \varphi), u_\varphi^*(r, z, \varphi), u_z^*(r, z, \varphi), \}$$

- соответственно комплексная собственная частота и собственная форма колебаний системы.

Тензор деформаций и вектор перемещений связаны соотношениями Коши [22, 24]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r^*}{\partial r}; & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \varphi} + \frac{u_r^*}{r}; & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z^*}{\partial z}; \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^*}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^*}{\partial r} - \frac{u_\varphi^*}{r} \right); \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial r} + \frac{\partial u_r^*}{\partial z} \right); \\ \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi^*}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^*}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Связь между напряжениями и деформациями имеет вид [23, 24]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= K_m(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) + \frac{2}{3} \tilde{\mu}_m(2\varepsilon_r - \varepsilon_z - \varepsilon_\varphi); \\ \sigma_z &= K_m(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) + \frac{2}{3} \tilde{\mu}_m(2\varepsilon_z - \varepsilon_r - \varepsilon_\varphi); \\ \sigma_\varphi &= K_m(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) + \frac{2}{3} \tilde{\mu}_m(2\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r - \varepsilon_z); \\ \tau_{rz} &= \tilde{\mu}_m \gamma_{rz}; & \tau_{r\varphi} &= \tilde{\mu}_m \gamma_{r\varphi}; & \tau_{z\varphi} &= \tilde{\mu}_m \gamma_{z\varphi}. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом предполагается, что объемное деформирование происходит по упругому закону, а сдвиговое по вязкоупругому, т.е. [23, 24]:

Здесь

$$\tilde{\mu}_m \varphi = \mu_m \left[\varphi(t) - \int_0^t \Gamma_m(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right]. \quad (9)$$

здесь μ_m - модуль сдвига; K_m - модуль объемного сжатия; $\Gamma_m(t-\tau)$ - ядро релаксации; φ - произвольная функция времени; m - тело, к которому относятся механические характеристики ($m = 1$ - конструкция, $m = 2$ - фундамент, $m = 3$ - основание).

Если интегральные члены в соотношении (9) малы, то функцию $\varphi(t)$ в (5) можно представить в виде

$$\varphi(t) = \psi(t) e^{-i\omega_R t}$$

где ψ - медленно меняющаяся функция времени, i - мнимая единица, ω_R - действительная константа, то предполагая, что интегральные члены малы по сравнению с $\varphi(t)$, и используя метод замораживания [21], можно свести интегральное соотношение к комплексному, т.е.:

и тогда интегральные соотношения (9) можно заменить следующими комплексными соотношениями [21]

где ω_R – действительная константа; φ – медленно меняющаяся функция времени; i – мнимая единица.

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_m \varphi &= \mu_m [1 - \Gamma_{\mu_m}^c(\omega_R) - i\Gamma_m^S(\omega_R)] \varphi, \\ \Gamma_m^c(\omega_R) &= \int_0^\infty \Gamma_{\mu_m}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \\ \Gamma_m^S(\omega_R) &= \int_0^\infty \Gamma_{\mu_m}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau.\end{aligned}\quad (10)$$

$\Gamma_{\mu_m}^S, \Gamma_{\mu_m}^C$ – синусы и косинусы образа Фурье ядра $\Gamma_{\mu_m}(\tau)$.

Таким образом, задача об отыскании комплексных собственных частот и собственных форм колебаний вязкоупругой системы (рис.1) свелась к отысканию константы ω^2 и вектора функции $\vec{u}^*(\vec{x})$, удовлетворяющей вариационному уравнению (4), с учетом соотношения (7)-(10) и условиям (5) и (6) при любом возможном перемещении $\delta\vec{u}^*$.

1.2. Метод и алгоритм решения задачи При решении выше поставленной вариационной задачи о динамических характеристиках пространственной осесимметричной вязкоупругой системы (рис.1) используется полуаналитический вариант метода конечных элементов [28]. При этом решение по одной координате (в окружном направлении) представляется в виде отдельных гармоник т.е., через n , в виде:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \{u_r, u_\varphi, u_z\} \\ u_r &= u_r^*(r, \varphi, z) \cos \omega t \\ u_\varphi &= u_\varphi^*(r, \varphi, z) \cos \omega t \\ u_z &= u_z^*(r, \varphi, z) \cos \omega t \\ u_r^* &= u_n^*(r, z) \cos n\varphi \\ u_\varphi^* &= w_n(r, z) \sin n\varphi \\ u_z^* &= v_n \cos n\varphi\end{aligned}\quad (11)$$

Дискретизация рассматриваемой системы (рис.1) осуществляется с использованием конечного элемента в виде кольцевым конечным элементом треугольного сечения [20, 28].

Использование конечных элементов сложной формы усложняет решение системы из десятков тысяч интегро-дифференциальных уравнений. Поэтому применяются простые треугольные элементы, а требуемая точность обеспечивается за счет их большого количества.

Использование процедуры метода конечных элементов позволяет свести вариационную задачу (4)-(5) к решению комплексного алгебраического уравнения на собственные значения, т.е.:

$$([\bar{K}] - \omega^2 [M]) \{\bar{X}\} = 0 \quad (12)$$

где

$[\bar{K}]$ – комплексная матрица жесткости системы;

$[M]$ – матрица массы системы;

$\omega = \omega_R - i\omega_I, \{\bar{X}\} = \{X_R - iX_I\}$ – комплексные собственная частота и собственный вектор рассматриваемой системы (рис.1) соответственно.

Кинематические граничные условия учитываются при формировании уравнений (12), т.е. если компоненты перемещений или прогиб какого-то узла равны нулю, то соответствующие им строки уравнений (12) не формируются.

Комплексные корни характеристического определителя задачи (12) ищутся методом Мюллера [29], а собственный вектор – методом Гаусса [30].

Для решение данной задачи разработана компьютерные программы на ЭВМ [36, 37], зарегистрированные в Агентстве интеллектуальной собственности при Министерстве юстиции Республики Узбекистан от 04.03.2025 г.

При этом решение однородной системы алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами (12), т.е. действительная часть ω_R частоты ω является частотой свободных затухающих колебаний системы (рис.1), а мнимая ω_I несет информацию о скорости затухания колебаний и с точностью до знака равна коэффициенту демпфирования.

1.3. Результаты и выводы. В качестве примера для оценки пространственных динамических характеристик осесимметричных сооружений с учетом диссипативных свойств материала рассмотрена градирня Ново-Ангренской тепловой электростанции высотой 102 м с переменным уклоном и переменной толщиной, что позволяет учесть их реальную геометрию.

Для учета диссипативных свойств в материале сооружения используется линейная наследственная теория Больцмана-Вольтерра, которая достаточно хорошо описывает вязкоупругие свойства бетона. В качестве ядра релаксации используются ядра Колтунова-Ржаницина [24, 25], т.е.:

$$\Gamma(t - \tau) = \frac{Ae^{-\beta(t-\tau)}}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \quad (13)$$

Параметры ядра релаксации (13) определяются с использованием методики М.А.Колтунова [24] из экспериментальных кривых ползучести для бетона, приведенные в работе [26], т.е.: $A = 0,0194$; $\beta = 0,00000014$; $\alpha = 0,075$.

Для различных грунтов параметры ядра релаксации (13) также по данной методике определяются из экспериментальных кривых ползучести [31], результаты которых приведены в работе [27].

Другие физико-механические параметры бетона принимаются в следующем виде: $\rho = 2.5/3$; $\sigma_c = 1.510^5$ МПа; $\mu = 1.3610^5$ МПа, а геометрические параметры сооружения были взяты из проектной документации.

Для определения комплексных собственных частот и форм колебаний разработаны компьютерные программы на ЭВМ [36, 37], зарегистрированные в Агентстве интеллектуальной собственности при Министерстве юстиции Республики Узбекистан от 04.03.2025 г.

При дальнейших расчетах жесткость фундамента и грунтового основания были приняты намного жестче, чем жесткость сооружения, для оценки только динамической характеристики самого сооружения.

В табл.1 приведены в упругой постановке по пять собственных частот Ново-Ангренской градирни соответствующие различным гармоникам, т.е.: $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Таблица 1.

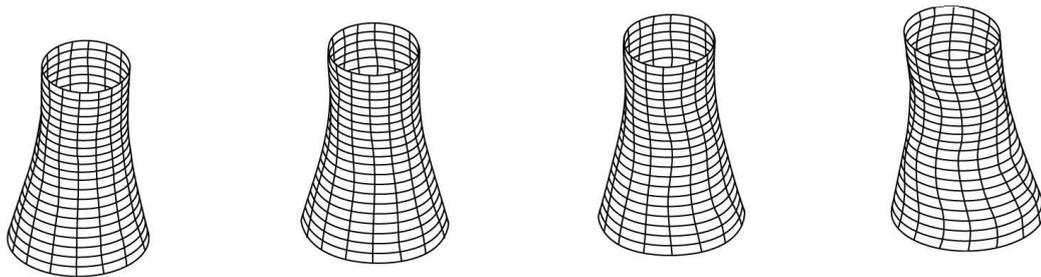
Номер гар- моник	Собственные частоты в рад/сек.				
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$n = 0$ (крутильн.)	14.0296	32.9882	54.2194	75.5951	97.0503
$n = 0$ (осесимметр.)	18.2147	30.4233	33.7759	37.1874	40.2305
$n = 1$	7.6475	16.0506	25.4146	28.9566	31.3514
$n = 2$	4.1310	8.6557	16.5660	22.8386	26.9128
$n = 3$	3.3395	4.7183	10.3443	16.2120	21.3067
$n = 4$	3.1419	3.7494	6.8003	11.4990	16.3899
$n = 5$	3.2486	4.3613	5.2828	8.6026	12.8673
$n = 6$	3.9139	4.7766	5.6844	7.2035	10.7321

В табл.2 приведены значения комплексных собственных частот и логарифмических декрементов колебаний градирни при различных гармониках, т.е.: $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Собственные частоты и формы колебаний: при $n = 0$ - соответствуют крутильным, осесимметричным, при $n = 1$ - изгибным, а при $n = 2, 3, 4, 5, 6$ - неосесимметричным колебаниям.

Таблица 2.

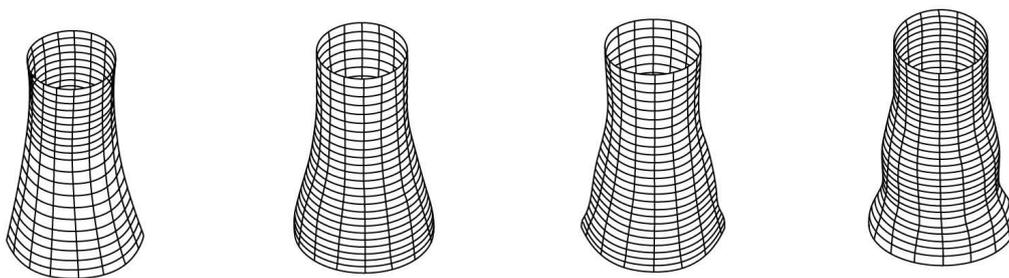
Номер гар- моник	Собственные частоты в рад/сек.				
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$n = 0$ (крутильн.)	13.2364 – 0.1771i $\delta_1 = 0.084$	31.3441 – 0.3867i $\delta_2 = 0.077$	51.7152 – 0.6088i $\delta_3 = 0.074$	72.2778 – 0.8250i $\delta_4 = 0.072$	92.9605 – 0.1037i $\delta_5 = 0.070$
$n = 0$ (осесимметр.)	16.2283 – 0.2473i $\delta_1 = 0.095$	27.3264 – 0.3852i $\delta_2 = 0.086$	31.3398 – 0.3873i $\delta_3 = 0.078$	33.5728 – 0.3994i $\delta_4 = 0.074$	38.1766 – 0.4332i $\delta_5 = 0.071$
$n = 1$	6.8208 – 0.1053i $\delta_1 = 0.097$	14.4436 – 0.2074i $\delta_2 = 0.090$	23.2058 – 0.3250i $\delta_3 = 0.088$	27.4214 – 0.3814i $\delta_4 = 0.086$	32.6175 – 0.4370i $\delta_5 = 0.084$
$n = 2$	3.6661 – 0.0618i $\delta_1 = 0.105$	7.8060 – 0.1181i $\delta_2 = 0.095$	15.0946 – 0.2180i $\delta_3 = 0.091$	21.1896 – 0.3015i $\delta_4 = 0.089$	25.8517 – 0.3587i $\delta_5 = 0.087$
$n = 3$	3.0718 – 0.0528i $\delta_1 = 0.107$	4.4524 – 0.0719i $\delta_2 = 0.101$	9.6549 – 0.1444i $\delta_3 = 0.094$	15.3610 – 0.2225i $\delta_4 = 0.091$	20.7157 – 0.2931i $\delta_5 = 0.088$
$n = 4$	2.9875 – 0.0500i $\delta_1 = 0.109$	3.2864 – 0.0546i $\delta_2 = 0.103$	6.0604 – 0.0921i $\delta_3 = 0.096$	10.3025 – 0.1498i $\delta_4 = 0.091$	14.7369 – 0.2078i $\delta_5 = 0.089$

Сравнение значений собственных частот, полученных в упругой постановке (табл.1) и с учетом диссипации энергии в материале (табл.2) показывает, что значение собственные частот колебаний полученные с учетом диссипации меньше приблизительно на 8-12 %. При этом необходимо отметить, что учет диссипации в материале приводит декремент колебаний к слабой частотной зависимым результатам, т.е. увеличение значения собственных частот колебаний сооружений, приводит к незначительному уменьшению декремента колебаний.



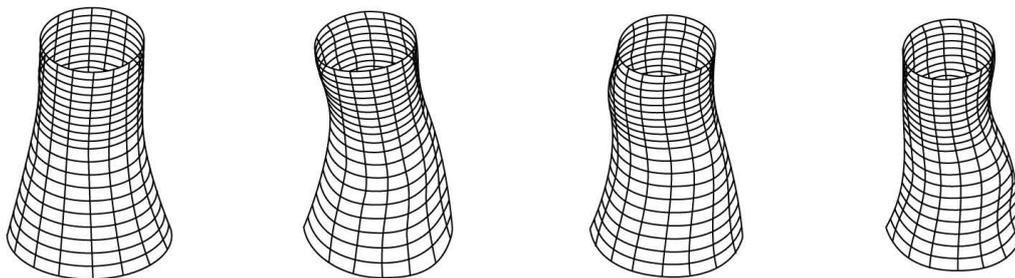
$$\omega_1 = 13.2364 \quad \omega_2 = 31.3441 \quad \omega_3 = 51.7152 \quad \omega_4 = 92.9605$$

Рис. 2. Крутильные формы колебаний градирни (n=0).



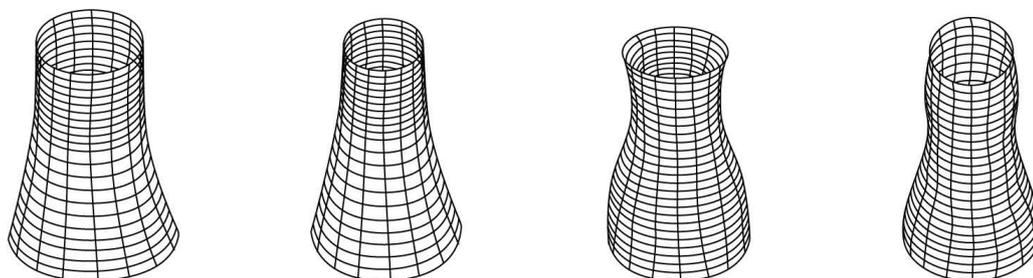
$$\omega_1 = 16.2283 \quad \omega_2 = 27.3264 \quad \omega_3 = 31.3398 \quad \omega_4 = 33.5728$$

Рис. 3. Осесимметричные формы колебаний градирни (n=0).



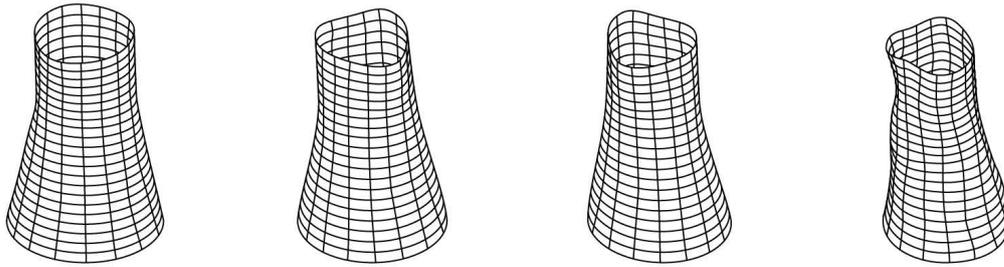
$$\omega_1 = 6.8208 \quad \omega_2 = 14.4436 \quad \omega_3 = 23.2058 \quad \omega_4 = 27.4214$$

Рис. 4. Изгибные формы колебаний градирни (n=1).



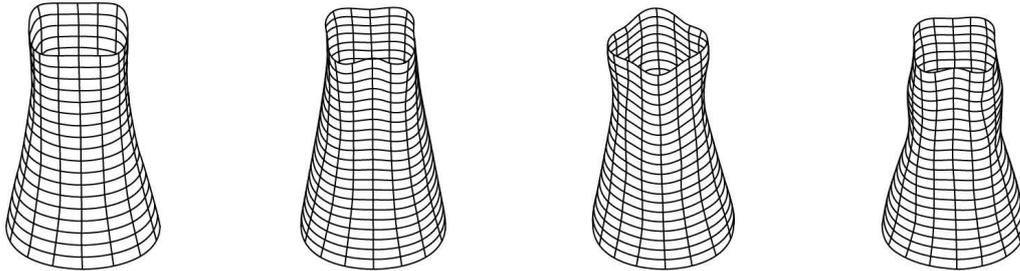
$$\omega_1 = 3.6661 \quad \omega_2 = 7.8060 \quad \omega_3 = 15.0946 \quad \omega_4 = 21.1896$$

Рис. 5. Неосесимметричные формы колебаний градирни (n=2).



$$\omega_1 = 3.0718 \quad \omega_2 = 4.4524 \quad \omega_3 = 9.6549 \quad \omega_4 = 15.3610$$

Рис. 6. Неосесимметричные формы колебаний градирни (n=3).



$$\omega_1 = 2.9875 \quad \omega_2 = 3.2864 \quad \omega_3 = 6.0604 \quad \omega_4 = 10.3025$$

Рис. 7. Неосесимметричные формы колебаний градирни (n=4).

На рисунках 2-7 приведены как пример найденные первые и пятые собственные формы колебаний (т.е. - действительные части X_R собственных форм X) соответствующие различным гармоникам - $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Анализ полученных собственных форм колебаний при $n = 0$ показывает, что первая форма осесимметричных колебаний, представляет собой продольную деформацию градирни, а при других более высоких частотах ($\omega_2 \dots \omega_5 \dots$) колебаний представляет собой осесимметричную деформацию градирни и при этом деформируется, в основном нижняя часть градирни, а верхняя часть практически не деформируется.

В формах колебаний, соответствующих низшим частотам (при гармониках $n = 1, 2, 3, 4, 5$) значительно деформируется верхняя часть градирни, по сравнению с нижней частью.

Анализ значений полученных низших собственных частот и форм колебаний сооружения соответствующим для различных гармоник, показывает, что первые собственные частоты неосесимметричных форм колебаний, попадают в преобладающий диапазон частот землетрясений.

Наряду с этим исследована собственных частот и формы колебаний градирни с учетом верхнего подкрепляющего ребра (т.е. кольца жесткости). Сравнение полученных результатов собственных частот градирни без ребра жесткости и с ребром жесткости, показали, что верхнее ребро жесткости влияет на незначительное увеличению частоты осесимметричных и неосесимметричных колебаний сооружения за счет увеличения жесткости в верхней части градирни. При этом значения частот изгибных колебаний незначительно снижается за счет увеличения массы сооружения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана математическая модель для оценки динамических характеристик пространственных осесимметричных сооружений с учетом диссипации энергии в материале с использованием наследственной теории вязкоупругости.

2. Разработан метод, алгоритм и компьютерная программа расчета на ЭВМ для оценки комплексных собственных частот, формы колебаний и декремента колебаний пространственных осесимметричных сооружений с учетом вязкоупругих свойств материала.

3. Оценены динамические характеристики (комплексные частоты, декремент и форма колебаний) конкретного пространственного осесимметричного сооружения типа градирня.

4. Установлено, что для данного пространственного осесимметричного сооружения, низшие неосесимметричные собственные частоты попадают в диапазон преобладающие частот землетрясения.

5. Выявлены некоторые механические эффекты связанные с учетом диссипации энергии в материале и с учетом реальной геометрии сооружения, т.е.:

- учет диссипации в материале с использованием наследственной теории вязкоупругости приводит к незначительному снижению собственных частот колебаний сооружений и приводит в слабо частотной независимой декремента колебаний;

- кольца жесткости установленные наверху пространственных осесимметричных сооружений несколько повышают неосесимметричные собственные частоты колебаний, при этом изгибные частоты сооружений несколько снижаются.

Список литературы

1. *Mirsaidov M., Mekhmonov, Ya.* Nonaxisymmetric vibrations of axisymmetric structures with associated masses and hollows (protrusions). *StrengthofMaterials*, 1987, 19(3), с. 424-430. DOI: 10.1007/BF01524147
2. *Mirsaidov, M.M., Khudainazarov, Sh.O.* Spatial natural vibrations of viscoelastic axisymmetric structures. *Magazine of Civil Engineering*, 2020, 96(4), стр. 118–128.
3. *Mirsaidov, M., Nosirov, A., Nasirov, I.* Spatial forced oscillations of axisymmetric inhomogeneous systems. *E3S Web of Conferences*, 2020, 164, 02009.
4. *Mirsaidov, M.M., Nosirov, A.A., Nasirov, I.A.* Modeling of spatial natural oscillations of axisymmetric systems. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, 1921(1), 012098. DOI:10.1088/1742-6596/1921/1/012098.
5. *М.М. Мурсаидов М.М. и др.* Свободные линейные колебания вязкоупругой сферической оболочки с наполнителем. *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2025. Т.33, № 4 DOI: 10.18500/0869-6632-003162 EDN: OXVENZ
6. *Мурсаидов М.М. и др.* Нелинейные колебания высотного сооружения с динамическим гасителем колебаний. *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2025. DOI: 10.18500/0869-6632-003186. EDN: BLEOZB.
7. *R. L. Nelson.* "Analyses of cooling tower dynamics," *J. Sound Vib.*, vol. 79, pp. 501–518, Dec. 1981, doi: 10.1016/0022-460X(81)90462-4.
8. *H. A. Mang and F. Trappel,* "Physically Linear Buckling Analysis of Reinforced Concrete Cooling Towers - Design Necessity or Academic Excercise"[No source Inf. available], Jan. 1984, doi: 10.1007/978-3-642-82345-9-23.
9. *J. Noorzaei, A. Naghshineh, M. Kadir, W. Thanoon, and M. S. Jaafar,* "Nonlinear interactive analysis of cooling tower–foundation–soil interaction under unsymmetrical wind load," *Thin-walled Struct. - THIN WALL STRUCT*, vol. 44, pp. 997–1005, Sep. 2006.
10. *E. Asadzadeh and M. Alam,* "A Survey on Hyperbolic Cooling Towers," *Int. Sch. Sci. Res.*

- Innov., vol. 8, no. 10, pp. 1027–1039, 2014.
11. *A.I. Karakas and A.T. Daloglu*, "Free and Forced Vibration Analyses of Hyperbolic Cooling Tower Shell Using Harmonic Solid Ring Finite Elements," *J. Eng. Fundam.*, no. June 2015, pp. 38–53, 2015, doi: 10.17530/jef.15.06.2.1.
 12. *A.I. Karakas, K. Ozgan, and A.T. Daloglu*, "A parametric study for free vibration analysis of hyperbolic cooling towers on elastic foundation using consistent FEM-Vlasov model," *Arch. Appl. Mech.*, vol. 86, no. 5, pp. 869–882, 2016, doi: 10.1007/s00419-015-1067-7.
 13. *K. Özgan, A. I. Karakas, and A. T. Daloglu*, "Earthquake analysis of hyperbolic cooling towers," *Pamukkale Univ. J. Eng. Sci.*, vol. 22, no. 6, pp. 433–441, 2016.
 14. *S. Kulkarni*, "Review on Modeling of hyperbolic cooling towers," vol. 9, no. 1, 2018
 15. *A.I. Karakas, K. Ozgan, and A. T. Daloglu*, "Soil-structure interaction effects on seismic behavior of a hyperbolic cooling tower using three-parameter Vlasov foundation model," *Earthq. Struct.*, vol. 14, no. 1, pp. 85–94, 2018, doi: 10.12989/eas.2018.14.1.085.
 16. *S. Ke, P. Zhu, L. Xu, and Y. Ge*, "Evolution mechanism of wind vibration coefficient and stability performance during the whole construction process for super large cooling towers," *Appl. Sci.*, vol. 9, no. 20, 2019, doi: 10.3390/app9204202.
 17. *J. Wu, J. Zhu, Y. Dong, and Q. Zhang*, "Nonlinear stability analysis of steel cooling towers considering imperfection sensitivity," *Thin-Walled Struct.*, vol. 146, no. April 2019, p. 106448, 2020, doi: 10.1016/j.tws.2019.106448.
 18. *A. I. Çarhoğlu*, "Investigation of behavior of cooling tower structure under external loads," *Cumhur. Sci. J.*, vol. 42, pp. 465–475, Jun. 2021, doi: 10.17776/csj.719940
 19. *Rashchepkina S.A., Akimova E.K.*, "To calculation of metal tower cooling tower," *Eurasian Sci. J.*, vol. 13, no. 6, pp. 1–12, 2021.
 20. *Мирсаидов М.М., Трояновский Е.И.* Динамика неоднородных систем с учетом внутренней диссипации и волнового уноса энергии. Ташкент: Фан, 1990.108с.
 21. *Филатов А.Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 1974. 214 с.
 22. *Лалин В. В., Зданчук Е. В.* Теория упругости. Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. DOI: 10.18720/SPBPU/2/id22-6.
 23. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термо-вязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
 24. *Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П.* Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Высшая школа. 1983. 349 с.
 25. *Ржаницын А.Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 416 с.
 26. *Александровский С.В., Багрий В.Я.* Ползучесть бетона при периодических воздействиях. М.: Стройиздат, 1970. 167 с.
 27. *Мирсаидов М.М.* Теория и методы расчета грунтовых сооружений на прочность и сейсмостойкость. - Ташкент: Фан, 2010.-312 с.
 28. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и МКЭ. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
 29. *Muller D.E.* A Method for Solving Algebraic Equations Using an Automatic Computer. *Mathematical Tabl.*, October, 1956.
 30. *Фадеев Д.К., Фадеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Издательство "Лань". 2009. 736 с.
 31. *Вялов С.С.* Реологические основы механики грунтов. М.: Высшая школа, 1978. 447 с.
 32. *Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С.* Механика полимерных и композиционных материалов. М.: «Наука», 1985, 304 с.
 33. *Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П.* Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Высшая школа. 1983. 349 с.

34. *Safarov I.I., Usmonov B.Sh., Teshaev M. Kh.* Propagation of Natural Waves in Plates and Cylindrical Viscoelastic Bodies. Cambridge Scholars Publishing. 2025, 262 p.
35. *Сафаров И.И.* Колебания и волны в диссипативно–неоднородных средах и конструкциях. Ташкент. ФАН. 1992г., 252 с.
36. *Авторское свидетельство № DGU 48676. Мирсаидов М. и др.* «Определение собственных частот, амплитуды и остальных характеристик высотных осесимметричных сооружений». Регистрирован в Агентстве интеллектуальной собственности РУз от 04.03.2025 г.
37. *Авторское свидетельство № DGU 48677. Мирсаидов М. и др.* «Определение динамических характеристик осесимметричных сооружений с динамическими гасителями колебаний». Регистрирован в Агентстве интеллектуальной собственности РУз от 04.03.2025 г.

References

1. *Mirsaidov, M., Mekhmonov, Ya.* Nonaxisymmetric vibrations of axisymmetric structures with associated masses and hollows (protrusions). *StrengthofMaterials*, 1987, 19(3), с. 424–430. DOI: 10.1007/BF01524147
2. *Mirsaidov, M.M., Khudainazarov, Sh.O.* Spatial natural vibrations of viscoelastic axisymmetric structures. *Magazine of Civil Engineering*, 2020, 96(4), стр. 118–128. DOI:
3. *Mirsaidov, M., Nosirov, A., Nasirov, I.* Spatial forced oscillations of axisymmetric inhomogeneous systems. *E3S Web of Conferences*, 2020, 164, 02009.
4. *Mirsaidov, M.M., Nosirov, A.A., Nasirov, I.A.* Modeling of spatial natural oscillations of axisymmetric systems. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, 1921(1), 012098. DOI:10.1088/1742-6596/1921/1/012098
5. *M.M. Mirsaidov, M.M., et al.* Free linear oscillations of a viscoelastic spherical shell with a filler. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025. Vol. 33, No. 4. DOI: 10.18500/0869-6632-003162. EDN: OXVENZ
6. *Mirsaidov M.M., et al.* Nonlinear oscillations of a high-rise structure with a dynamic vibration absorber. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025. DOI: 10.18500/0869-6632-003186. EDN: BLEOZB.
7. *R. L. Nelson.* “Analyses of cooling tower dynamics,” *J. Sound Vib.*, vol. 79, pp. 501–518, Dec. 1981, doi: 10.1016/0022-460X(81)90462-4.
8. *H. A. Mang and F. Trappel,* ‘Physically Linear Buckling Analysis of Reinforced Concrete Cooling Towers - Design Necessity or Academic Exercise’ [No source Inf. available], Jan. 1984, doi: 10.1007/978-3-642-82345-923.
9. *J. Noorzaei, A. Naghshineh, M. Kadir, W. Thanoon, and M. S. Jaafar.* “Nonlinear interactive analysis of cooling tower–foundation–soil interaction under unsymmetrical wind load,” *Thin-walled Struct. - THIN WALL STRUCT*, vol. 44, pp. 997–1005, Sep. 2006, doi: 10.1016/j.tws.2006.08.019.
10. *E. Asadzadeh and M. Alam,* “A Survey on Hyperbolic Cooling Towers,” *Int. Sch. Sci. Res. Innov.*, vol. 8, no. 10, pp. 1027–1039, 2014.
11. *A.I. Karakas and A.T. Daloglu,* “Free and Forced Vibration Analyses of Hyperbolic Cooling Tower Shell Using Harmonic Solid Ring Finite Elements,” *J. Eng. Fundam.*, no. June 2015, pp. 38–53, 2015, doi: 10.17530/jef.15.06.2.1.
12. *A.I. Karakas, K. Ozgan, and A.T. Daloglu,* “A parametric study for free vibration analysis of hyperbolic cooling towers on elastic foundation using consistent FEM-Vlasov model,” *Arch. Appl. Mech.*, vol. 86, no. 5, pp. 869–882, 2016, doi: 10.1007/s00419-015-1067-7.

13. *K. Özgan, A. I. Karakas, and A. T. Daloglu*, "Earthquake analysis of hyperbolic cooling towers," Pamukkale Univ. J. Eng. Sci., vol. 22, no. 6, pp. 433–441, 2016, doi: 10.5505/pajes.2015.71601.
14. *S. Kulkarni*, "Review on Modeling of hyperbolic cooling towers," vol. 9, no. 1, 2018
15. *A.I. Karakas, K. Ozgan, and A. T. Daloglu*, "Soil-structure interaction effects on seismic behavior of a hyperbolic cooling tower using three-parameter Vlasov foundation model," Earthq. Struct., vol. 14, no. 1, pp. 85–94, 2018, doi: 10.12989/eas.2018.14.1.085.
16. *S. Ke, P. Zhu, L. Xu, and Y. Ge*, "Evolution mechanism of wind vibration coefficient and stability performance during the whole construction process for super large cooling towers," Appl. Sci., vol. 9, no. 20, 2019, doi: 10.3390/app9204202.
17. *J. Wu, J. Zhu, Y. Dong, and Q. Zhang*, "Nonlinear stability analysis of steel cooling towers considering imperfection sensitivity," Thin-Walled Struct., vol. 146, no. April 2019, p. 106448, 2020, doi: 10.1016/j.tws.2019.106448.
18. *A. I. Çarhoğlu*, "Investigation of behavior of cooling tower structure under external loads," Cumhuriyet Sci. J., vol. 42, pp. 465–475, Jun. 2021, doi: 10.17776/cs.j.719940
19. *Rashchepkina S.A., Akimova E.K.*, "To calculation of metal tower cooling tower.," Eurasian Sci. J., vol. 13, no. 6, pp. 1–12, 2021.
20. *Mirsaidov M.M., Troyanovsky E.I.* Dynamics of inhomogeneous systems taking into account internal dissipation and wave energy entrainment. Tashkent: Fan, 1990.108p
21. *Filatov A.N.* Asymptotic methods in the theory of differential and integro-differential equations. Tashkent: Fan, 1974. 214 p.
22. *Lalin V. V., Zdanchuk E. V.* Theory of elasticity. Saint Petersburg: POLYTECH PRESS, 2022. DOI: 10.18720/SPBPU/2/id22-6.
23. *Ilyushin A.A., Pobedrya B.E.* Fundamentals of the mathematical theory of thermo-viscoelasticity. Moscow: Nauka Publ., 1970. 280 p.
24. *Koltunov M.A., Kravchuk A.S., Mayboroda V.P.* Applied mechanics of a deformable solid. Moscow: Higher School. 1983. 349 p.
25. *Rzhanitsyn A.R.* Theory of creep. Moscow: Stroyizdat, 1968. 416 p.
26. *Alexandrovsky S.V., Bagri V.Ya.* Creep of concrete under periodic impacts. Moscow: Stroyizdat, 1970. 167 p.
27. *Mirsaidov M.M.* Theory and methods of calculating ground structures for strength and earthquake resistance. Tashkent: Fan Publ., 2010. 312 p.
28. *Bate K., Wilson E.* Numerical methods of analysis and FEM. Moscow: Stroyizdat, 1982. 448 p.
29. *Muller D.E.* A Method for Solving Algebraic Equations Using an Automatic Computer. Mathematical Tabl., Oktober, 1956.
30. *Fadeev D.K., Fadeeva V.N.* Computational methods of linear algebra. Lan Publishing House. 2009. 736 p
31. *Vyalov S.S.* Rheological foundations of soil mechanics. Moscow: Higher School, 1978. 447s.
32. *Kravchuk A.S., Mayboroda V.P., Urzhumtsev Yu.S.* Mechanics of polymer and composite materials. Moscow: Nauka, 1985, 304 p.
33. *Koltunov M.A., Kravchuk A.S., Mayboroda V.P.* Applied mechanics of deformable solids. Moscow: Higher School. 1983. 349 p.
34. *Safarov I.I., Usmonov B.Sh., Teshaeov M. Kh.* Propagation of Natural Waves in Plates and Cylindrical Viscoelastic Bodies. Cambridge Scholars Publishing. 2025, 262 p.
35. *Safarov I.I.* Vibrations and waves in dissipatively inhomogeneous media and structures. Tashkent. FAN. 1992, 252 p.
36. Copyright certificate No. DGU 48676. Mirsaidov M. et al. "Determination of natural

frequencies, amplitude and other characteristics of high-rise axisymmetric structures." Registered with the Intellectual Property Agency of the Republic of Uzbekistan on 03/04/2025.

37. Copyright certificate No. DGU 48677. Mirsaidov M. et al. "Determination of dynamic characteristics of axisymmetric structures with dynamic vibration dampers." Registered with the Intellectual Property Agency of the Republic of Uzbekistan on 03/04/2025.