

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(2)

Научная статья  
УДК 531.37

DOI: 10.18500/0869-6632-003203  
EDN: OEJBDW

### Устойчивость движения и дрейф твердого тела в неконтактном индукционном электромагнитном подвесе

П. П. Удалов<sup>1</sup>✉, А. В. Лукин<sup>1</sup>, И. А. Попов<sup>1</sup>, Л. В. Штукин<sup>1</sup>, К. В. Полеткин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия

<sup>2</sup>Технологический университет Хэфэя, Китай

E-mail: ✉udalov\_pp@spbstu.ru, lukin\_av@spbstu.ru, popov\_ia@spbstu.ru,  
shtukin\_lv@spbstu.ru, 022810003@hfut.edu.cn

Поступила в редакцию 4.06.2025, принята к публикации 27.11.2025,  
опубликована онлайн 27.11.2025, опубликована 31.03.2026

**Аннотация.** Цель настоящей работы — исследование нелинейной динамики и устойчивости движения проводящего тонкого кольца в электромагнитном поле двух круговых катушек индуктивности. *Методы.* Анализ выполняется с применением асимптотических методов нелинейной механики. С помощью численных методов теории бифуркаций исследуется среднее по периоду быстро осциллирующего поля положение левитирующего тела в пространстве ключевых параметров подвеса. *Результаты.* В предположении о медленной эволюции среднего положения левитирующего тела определены условия возникновения и параметры дрейфа. В уточненной асимптотической постановке исследована устойчивость режима левитации. *Заключение.* Показано, что учет возможности медленной эволюции среднего положения левитирующего тела приводит к формулировке условия устойчивости, связанного с соотношением между диссипацией механической и электрической природы.

**Ключевые слова:** индукционный подвес, электромагнитный подвес, электромагнитная индукция, левитация, нелинейная динамика, устойчивость колебаний, метод многих масштабов.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 25-21-00402, <https://rscf.ru/project/25-21-00402/>

**Для цитирования:** Удалов П. П., Лукин А. В., Попов И. А., Штукин Л. В., Полеткин К. В. Устойчивость движения и дрейф твердого тела в неконтактном индукционном электромагнитном подвесе // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 2. С. 247–267. DOI: 10.18500/0869-6632-003203. EDN: OEJBDW

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Stability of motion and drift of a rigid body in a non-contact inductive electromagnetic suspension

*P. P. Udalov*<sup>1</sup>✉, *A. V. Lukin*<sup>1</sup>, *I. A. Popov*<sup>1</sup>, *L. V. Shtukin*<sup>1</sup>, *K. V. Poletkin*<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia

<sup>2</sup>Hefei University of Technology, China

E-mail: ✉udalov\_pp@spbstu.ru, lukin\_av@spbstu.ru, popov\_ia@spbstu.ru,  
shtukin\_lv@spbstu.ru, 022810003@hfut.edu.cn

*Received 4.06.2025, accepted 27.11.2025, available online 27.11.2025, published 31.03.2026*

**Abstract.** Purpose of this work is to study the nonlinear dynamics and stability of the motion of a conducting thin ring in the electromagnetic field of two circular inductors. *Methods.* The analysis is performed using asymptotic methods of nonlinear mechanics. Numerical methods of bifurcation theory are used to study the average position of a levitating body in the space of key suspension parameters over the period of a rapidly oscillating field. *Results.* Assuming a slow evolution of the average position of a levitating body, the conditions for the occurrence and parameters of drift are determined. The stability of the levitation regime is investigated in a refined asymptotic formulation. *Conclusion.* It is shown that taking into account the possibility of slow evolution of the average position of a levitating body leads to the formulation of a stability condition related to the relationship between the dissipation of mechanical and electrical nature.

**Keywords:** induction suspension, electromagnetic suspension, electromagnetic induction, levitation, nonlinear dynamics, stability of oscillations, method of multiple scales.

**Acknowledgements.** The work was supported by the Russian Science Foundation, grant no. 25-21-00402, <https://rscf.ru/project/25-21-00402/>

**For citation:** Udalov PP, Lukin AV, Popov IA, Shtukin LV, Poletkin KV. Stability of motion and drift of a rigid body in a non-contact inductive electromagnetic suspension. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2026;34(2):247–267. DOI: 10.18500/0869-6632-003203

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Электромагнитный подвес — элемент навигационных, транспортных и электрических систем [1], работающий на основе принципа электромагнитной левитации (ЭЛ) и уравнивающей силу тяжести проводящего твердого тела (ТТ) пондеромоторными силами [2–6]. Схема работы устройств, основанных на принципе ЭЛ, позволяет достигать высокой надежности [7], стабильности [8], увеличенного срока безотказной работы [9, 10]. Устройства на основе принципа ЭЛ нашли применение в навигационном приборостроении (микромеханические акселерометры [11], гироскопы [12–15], гравиметры/сейсмические датчики [16]), микро-опто-электромеханических системах (сканирующие микрзеркала [11, 17, 18], сортировочных манипуляторах [19], поездах на магнитной подушке [20, 21], автомобильных подвесках [22], системах беспроводной передачи энергии [23], устройствах для измерения магнитных характеристик жидкостей [24] и т. д.

При разработке неконтактного подвеса как элемента микромеханических инерциальных сенсоров левитирующее ТТ, как правило, выполняется в форме простейшего геометрического объекта (диск [7], кольцо [25], прямоугольная пластина [26], сфера [27]) и изготавливается из проводящего материала. Переменное электромагнитное поле, создаваемое системой катушек [28, 29], приводит к наведению в ТТ вихревых токов. Взаимодействие индукционных токов с токами катушек может при определенных условиях приводить к режиму устойчивой левитации ТТ [3]. В работе [12] показывается, что для обеспечения устойчивости состояния левитации по отношению

к пространственным возмущениям необходимо вводить в конструкцию устройства дополнительную катушку индуктивности, запитываемую током в противофазе по отношению к току основной катушки меньшего радиуса.

Аналитическому, численному и экспериментальному исследованиям режимов работы и характеристик электромагнитного подвеса посвящено множество работ. В [7, 11, 13, 14, 30] обсуждаются вопросы разработки инерциального датчика с чувствительным элементом в форме диска на основе электромагнитного подвеса. В [31], [32] рассматривается экспериментальный прототип электромагнитного подвеса с объемными катушками индуктивности (соленоиды, спиральные катушки).

В работах [33, 34] исследуются аналитические модели акселерометра и гироскопа соответственно, основанных на принципе ЭЛ. В [35] исследуется линеаризованная модель колебаний левитирующего ТТ. В [7, 36] обсуждаются вопросы выбора оптимальных радиусов катушек индуктивности и ТТ в форме диска.

В [37, 38] выполнены аналитические расчеты собственных и взаимных индуктивностей проводов и контуров. В [39, 40] приводятся оценки сил и жесткостей чувствительного элемента индукционного подвеса. В [41] исследуются вопросы устойчивости индукционного подвеса. Работы [26, 42] посвящены экспериментальному и аналитическому исследованиям эффекта схлопывания, заключающегося в прилипании ТТ электромагнитного подвеса к обкладкам конденсаторов при достижении на них критической величины напряжения как для дискообразной, так и для прямоугольной формы в плане инерционных масс. Численные исследования режимов работы и силовых характеристик устройства электромагнитного подвеса на основе метода конечных элементов приведены в [34, 43–46].

Аналитические подходы к исследованию динамики электромагнитного подвеса ТТ [26, 33, 34, 42] основаны на ключевом предположении о постоянстве высоты левитации. Данное допущение позволяет линеаризовать систему в окрестности положения равновесия и получить условия устойчивости для консервативной модели. Однако, как показывает численный анализ полной нелинейной модели, это предположение является ограниченно применимым, существует область неустойчивости подвеса для малых высот левитации. С целью учета существенной особенности движения тела в подвесе (в реальности осредненная по быстро осциллирующему полю высота левитации является медленной функцией времени) в настоящей работе развивается подход с явным моделированием зависимости высоты левитации от медленного времени, что и составляет основную научную новизну исследования.

Основная цель настоящей работы заключается в аналитическом исследовании динамики ТТ, выполненного в форме кольца, в поле двух круговых катушек индуктивности в предположении о том, что высота левитации является медленно меняющейся функцией времени, то есть дрейфующей вблизи своего среднего положения.

Работа построена следующим образом: в разделе 1 приводится построение аналитической модели вертикальных колебаний ТТ, в разделе 2 проводится асимптотический анализ динамики исходной системы с применением метода многих масштабов, в разделе 3 приведены результаты исследования, в **Заключении** даны общие выводы по работе.

## 1. Математическая модель

Рассматривается модель вертикальных движений ТТ неконтактного индукционного подвеса, выполненного в форме тонкого недеформируемого кольца прямоугольного сечения и находящегося в переменном электромагнитном поле двух круговых катушек индуктивности. Схематическое

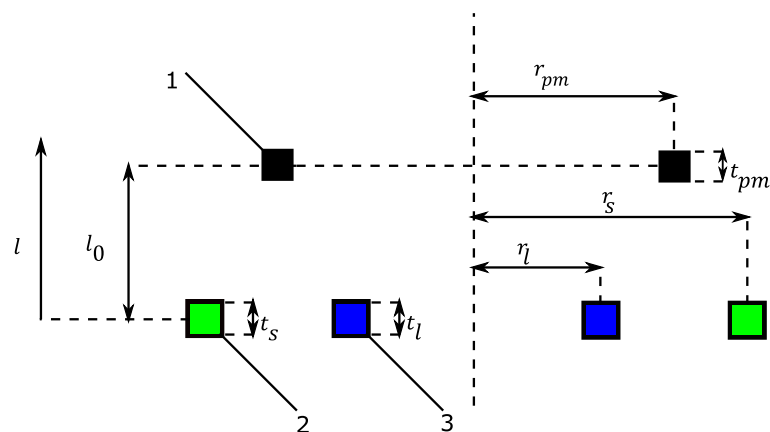


Рис. 1. Схематическое изображение индукционного бесконтактного подвеса; 1 — ТТ, 2 и 3 — стабилизирующая и левитационная катушки соответственно (цвет онлайн)

Fig. 1. Schematic view of inductive non-contact suspension; 1 — rigid body (RB), 2 and 3 — stabilizing and levitation coils, respectively (color online)

изображение рассматриваемого устройства представлено на рис. 1. Трехмерная модель возможной конструкции электромагнитного подвеса приведена рис. 2.

При подаче переменного тока  $i_l = I_l \sin \omega t$  ( $I_l$  и  $\omega$  — амплитуда и частота тока  $i_l$ ) на левитационную катушку индуктивности среднего радиуса  $r_l$  толщины  $t_l$  (на рис. 1 она обозначена под номером 3) возникает переменное электромагнитное поле, взаимодействующее с полем вихревых токов в объеме ТТ, выполненного в форме кольца квадратного сечения среднего радиуса  $r_{pm}$  и толщиной  $t_{pm}$  (на рис. 1 оно обозначено под номером 1). Сила Ампера между током  $i_l$  и индуцированным током  $i_{pm}$  может при определенных условиях приводить к левитации ТТ (компенсировать силу тяжести и обеспечивать устойчивость движения). Стабилизирующая катушка, по которой течет ток  $i_s = I_s \sin \omega t$  ( $I_s$  и  $\omega$  — амплитуда и частота тока  $i_s$ ), обозначенная на рис. 1 под номером 2, препятствует боковым и угловым смещениям ТТ и обеспечивает пространственную устойчивость. Результирующее электромагнитное поле представляет собой суперпозицию электромагнитных полей левитационной и стабилизирующей катушек. Параметр  $I_s$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения:  $I_s/I_l = 1$  отвечает случаю синфазности токов  $i_l$  и  $i_s$ ,  $I_s/I_l = -1$  — противофазности,  $I_s/I_l = 0$  — отсутствие тока

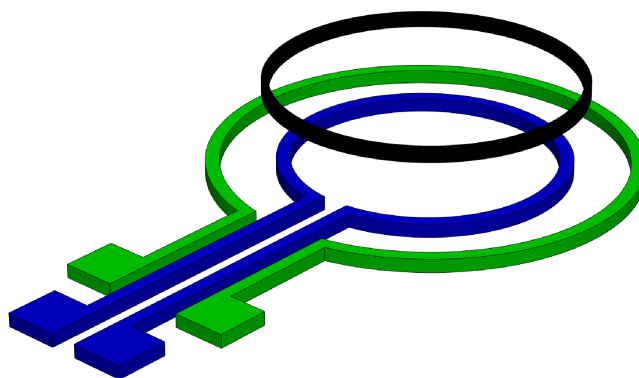


Рис. 2. Трехмерная модель индукционного бесконтактного подвеса (цвет онлайн)

Fig. 2. Three-dimensional model of inductive non-contact suspension (color online)

в стабилизирующей катушке. Изменение величины  $I_s$  обозначает собой изменение как амплитуды, так и направления тока  $i_s$ .

Система уравнений колебаний ТТ в безразмерном виде запишется следующим образом [47]:

$$\xi_l'' + \varepsilon^2 \lambda \xi_l' = \varepsilon^2 \left( \alpha m^{\xi_l} j_{pm} \sin \tau - 1 \right), \quad j_{pm}' + r j_{pm} = -m \cos \tau - m^{\xi_l} \xi_l' \sin \tau, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_l &= \frac{l}{r_l}, \quad \xi_{l0} = \frac{l_0}{r_l}, \quad j_s = \frac{I_s}{I_l}, \quad j_{pm} = \frac{i_{pm}}{I_l}, \quad \tau = \omega t, \quad \varepsilon^2 = \frac{g}{\omega^2 r_l}, \quad \alpha = \frac{L_{pm} I_l^2}{\hat{m} g r_l}, \quad r = \frac{R_{pm}}{L_{pm} \omega}, \\ \lambda &= \frac{\lambda_l}{\hat{m} \omega}, \quad b_l = \frac{r_{pm}}{r_l}, \quad b_s = \frac{r_{pm}}{r_s}, \quad \hat{\kappa}_l^2 = \frac{4b_l}{(1+b_l)^2 + \xi_l^2}, \quad \hat{\kappa}_s^2 = \frac{4b_s}{(1+b_s)^2 + (\frac{b_s}{b_l})^2 \xi_l^2}, \\ m_{l,s|pm} &= \frac{M_{l,s|pm}}{L_{pm}} = \frac{w_{l,s}}{\hat{L}} \frac{\Phi(\hat{\kappa}_{l,s})}{\sqrt{b_{l,s}}}, \quad \Phi(\hat{\kappa}_{l,s}) = \left( \frac{2}{\hat{\kappa}_{l,s}} - \hat{\kappa}_{l,s} \right) K(\hat{\kappa}_{l,s}^2) - \frac{2}{\hat{\kappa}_{l,s}} E(\hat{\kappa}_{l,s}^2), \\ m &= m_{l|pm} + j_s m_{s|pm}, \quad \hat{L} = \ln \left( \frac{8r_{pm}}{S_{pm}} \right) - 2, \\ S_{pm} &= \exp \left( \ln t_{pm} + \frac{1}{3} (\ln 2 + \pi) - \frac{25}{12} \right) \approx 0.44705 t_{pm}, \end{aligned} \quad (2)$$

$t$  — время,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\hat{m}$  — масса ТТ,  $R_{pm}$  — электрическое сопротивление ТТ,  $\lambda_l$  — коэффициент вязкой диссипации энергии в окружающую среду,  $L_{pm} = \mu_0 r_{pm} \hat{L}$  — собственная индуктивность ТТ,  $M_{l|pm}$  — величина взаимной индуктивности между левитационной катушкой и ТТ,  $M_{s|pm}$  — величина взаимной индуктивности между стабилизирующей катушкой и ТТ,  $\hat{\kappa}_{l,s}$  — эллиптические модули;  $K(\hat{\kappa}_{l,s}^2)$ ,  $E(\hat{\kappa}_{l,s}^2)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго родов соответственно,  $\hat{\kappa}_{l,s}$  — эллиптические модули,  $(\ )' = \frac{\partial}{\partial \tau}$ ,  $(\ )^{\xi_l} = \frac{\partial}{\partial \xi_l}$ ,  $l$  — вертикальные перемещения ТТ,  $l_0$  — характерный масштаб вертикального перемещения, в дальнейшем принятый равным координате среднего положения ТТ;  $w_{l,s}$  — количество витков в левитационной и стабилизирующей катушках;  $S_{pm}$  — среднее геометрическое сечения ТТ [37, 38].

Отметим, что правые части системы (1) нелинейно зависят от искомым переменных  $\xi_l$  и  $j_{pm}$  вследствие наличия в них членов, содержащих взаимную индуктивность и её производные.

При выборе рабочего режима подвеса стараются обеспечить разделение быстрых электрических и медленных механических движений, тогда параметр  $\varepsilon$ , выражающий отношение квадратов характерных частот механической и электрической природы, оказывается малым. Эта особенность основной системы уравнений позволяет применять для построения приближенного решения и анализа устойчивости асимптотические методы нелинейной механики.

## 2. Построение асимптотического решения

Для нахождения равномерно пригодного решения системы (1) применим метод многих масштабов [48]. Для этого представим искомые функции в виде следующих разложений по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} j_{pm}(\varepsilon, T_0, T_1, T_2) &= j_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon j_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 j_2(T_0, T_1, T_2), \\ \xi_l(\varepsilon, T_0, T_1, T_2) &= \xi_{l0}(T_1, T_2) + \varepsilon \xi_{l1}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \xi_{l2}(T_0, T_1, T_2), \\ m(\varepsilon, T_0, T_1, T_2) &= m_0 + m_l(\xi_l - \xi_{l0}) + \frac{1}{2} m_{ll}(\xi_l - \xi_{l0})^2, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2, \quad \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $T_n = \varepsilon^n \tau$ ,  $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ ,  $m_0 = m(\xi_{l0})$ ,  $m_l = m^{\xi_l}(\xi_{l0})$ ,  $m_{ll} = m^{\xi_l \xi_l}(\xi_{l0})$ .

Подставляя (3) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим

$$\varepsilon^0 \quad D_0 j_0 + r j_0 = -m_l D_0 \xi_{l0} \sin T_0 - m_0 \cos T_0, \quad D_0^2 \xi_{l0} = 0, \quad (4)$$

$$\varepsilon^1 \quad D_0 j_1 + r j_1 = -D_1 j_0 - \xi_{l1} m_l \cos T_0 - (m_l (D_0 \xi_{l1} + D_1 \xi_{l0}) + m_{ll} \xi_{l1} D_0 \xi_{l0}) \sin T_0, \quad (5)$$

$$D_0^2 \xi_{l1} = -2D_0 D_1 \xi_{l0},$$

$$\varepsilon^2 \quad D_0 j_2 + r j_2 = -D_1 j_1 - D_2 j_0 - \left( m_l \xi_{l2} + \frac{m_{ll} \xi_{l1}^2}{2} \right) \cos T_0 -$$

$$- ((D_0 \xi_{l2} + D_1 \xi_{l1} + D_2 \xi_{l0}) m_l + (\xi_{l2} D_0 \xi_{l0} + (D_0 \xi_{l1} + D_1 \xi_{l0}) \xi_{l1}) m_{ll}) \sin T_0, \quad (6)$$

$$D_0^2 \xi_{l2} = -2D_0 D_1 \xi_{l1} - 2D_0 D_2 \xi_{l0} - D_1^2 \xi_{l0} - \lambda D_0 \xi_{l0} + \alpha m_l j_0 \sin T_0 - 1,$$

$$\varepsilon^3 \quad D_0 j_3 + r j_3 = -D_1 j_2 - D_2 j_1 - (m_l (D_2 \xi_{l1} + D_1 \xi_{l2} + D_0 \xi_{l3}) +$$

$$+ m_{ll} \xi_{l1} (D_2 \xi_{l0} + D_1 \xi_{l1} + D_0 \xi_{l2}) + D_0 \xi_{l0} m_{ll} \xi_{l3} +$$

$$+ m_{ll} \xi_{l2} (D_1 \xi_{l0} + D_0 \xi_{l1})) \sin T_0 - (m_l \xi_{l3} + m_{ll} \xi_{l1} \xi_{l2}) \cos T_0, \quad (7)$$

$$D_0^2 \xi_{l3} = -2D_0 D_1 \xi_{l2} - 2D_0 D_2 \xi_{l1} - D_1^2 \xi_{l1} - 2D_1 D_2 \xi_{l0} -$$

$$- \lambda (D_0 \xi_{l1} + D_1 \xi_{l0}) - \alpha (m_l j_1 + m_{ll} \xi_{l1} j_0) \sin T_0.$$

Частное решение уравнения (4) может быть представлено как

$$\xi_{l0} = \xi_{l0}(T_1, T_2), \quad j_0 = -m_0 \cos \gamma \sin(T_0 + \gamma), \quad (8)$$

где  $\tan \gamma = r$ .

Отметим, что в выражение для  $\xi_{l0}$  не включен линейно растущий, заведомо секулярный член общего решения однородного уравнения; в выражение для тока  $j_0$  также не включено аperiodическое переходное слагаемое в решении.

Решение системы (5) запишется как

$$\xi_{l1} = 0, \quad j_1 = \frac{1 - \cos 4\gamma}{4} m_l D_1 \xi_{l0} \cos T_0 + \frac{\sin 4\gamma}{4} m_l D_1 \xi_{l0} \sin T_0. \quad (9)$$

С учетом (9) второе уравнение в (6) запишется как

$$D_0^2 \xi_{l2} = -D_1^2 \xi_{l0} - \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{2} m_0 m_l - 1 + \frac{\alpha \cos \gamma}{2} m_0 m_l \cos(2T_0 + \gamma). \quad (10)$$

Для того чтобы избавиться от секулярных слагаемых в уравнении для  $\xi_{l2}$ , положим

$$D_1^2 \xi_{l0} = -\frac{\alpha \cos^2 \gamma}{2} m_0 (\xi_{l0}) m_l (\xi_{l0}) - 1, \quad (11)$$

откуда

$$\xi_{l2} = -\frac{\alpha \cos \gamma}{8} m_0 m_l \cos(2T_0 + \gamma). \quad (12)$$

Уравнение (11) определяет медленную эволюцию высоты левитации  $\xi_{l0}$ .

Умножим (11) на величину  $d\xi_{l0}$ , проинтегрируем перемещения  $\xi_{l0}$  в диапазоне  $[\xi_{st} \quad \xi_{l0}]$  и получим

$$dT_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\xi_{l0}}{\sqrt{h(T_2) + h_0 - \xi_{l0} - \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{4} m_0^2}}, \quad (13)$$

где  $h_0 = \xi_{st} + \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{4} m_0^2(\xi_{st})$ ,  $h(T_2)$  – константа интегрирования,  $\xi_{st}$  – положение равновесия динамической системы, определяемое из равенства нулю правой части равенства (11):

$$\frac{\alpha \cos^2 \gamma}{2} m_0(\xi_{st}) m_l(\xi_{st}) + 1 = 0. \quad (14)$$

Устойчивость положения равновесия  $\xi_{st}$  определяется из

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{l0}} \left( m_0(\xi_{st}) m_l(\xi_{st}) + \frac{2}{\alpha \cos^2 \gamma} \right) > 0 \Rightarrow m_l^2(\xi_{st}) + m_0(\xi_{st}) m_{ll}(\xi_{st}) > 0, \quad (15)$$

что совпадает с результатами, полученными при изучении малых колебаний электромагнитного подвеса вблизи среднего положения ТТ  $\xi_{st}$  [35].

В предположении о том, что ТТ колеблется вблизи своего среднего положения  $\xi_{st}$ , разложим радикал в ряд Тейлора и перепишем (13) как

$$dT_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dy}{\sqrt{h(T_2) - by^2}}, \quad (16)$$

где  $y = \xi_{l0} - \xi_{st}$ ,  $b = \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{4} (m_0(\xi_{st}) m_{ll}(\xi_{st}) + m_l^2(\xi_{st}))$ .

Уравнение (16) дает решение в квадратурах для колебаний эквивалентного линейного осциллятора. После интегрирования левой и правой частей (16) получим

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin \sqrt{\frac{b}{h(T_2)}} (\xi_{l0} - \xi_{st}), \quad (17)$$

откуда

$$\xi_{l0} = \xi_{st} + \sqrt{\frac{h(T_2)}{b}} \sin \sqrt{2b} T_1. \quad (18)$$

Решение (18) указывает на факт медленных осцилляций (дрейфа) высоты левитации  $\xi_{l0}$  вблизи положения равновесия  $\xi_{st}$  с амплитудой  $\sqrt{\frac{h}{b}}$  и частотой  $\sqrt{2b}$ .

Подставляя (8), (9), (12) во второе уравнение в (7), получим

$$D_0^2 \xi_{l3} = -2D_1 D_2 \xi_{l0} - \left( \lambda - \frac{\alpha \sin 4\gamma}{8} m_l^2 \right) D_1 \xi_{l0} + \text{н.с.ч.}, \quad (19)$$

где н.с.ч. – несекулярные члены [48].

Условие на отсутствие секулярных членов в (19) приводит к соотношению

$$D_1 D_2 \xi_{l0} = -\frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{\alpha \sin 4\gamma}{8} m_l^2 \right) D_1 \xi_{l0}. \quad (20)$$

После подстановки (18) в (19) получим

$$D_2 \sqrt{h} = -\frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{\alpha \sin 4\gamma}{8} m_l^2 \right) \sqrt{h}. \quad (21)$$

Уравнение (21) описывает медленное изменение полной механической энергии нелинейного осциллятора (11), отсчитываемой от минимума его потенциальной энергии.

Равновесное состояние  $h^*$  (21) определяется из равенства нулю его правой части:

$$h^* = 0, \quad (22)$$

чему соответствует  $\xi_{l0} = \xi_{st}$ .

Устойчивость состояния равновесия  $h^*$  определяется из

$$\lambda - \frac{\alpha \sin 4\gamma}{8} m_l^2(\xi_{st}) > 0 \quad (23)$$

или с учетом (14)

$$\lambda + \cos 2\gamma \tan \gamma \frac{m_l(\xi_{st})}{m_0(\xi_{st})} > 0. \quad (24)$$

Неравенство (24) определяет области в пространстве параметров системы, при которых полная механическая энергия (21)  $h$  не возрастает во времени. Можно видеть, что условие (24) выражает соотношение между механической  $\lambda$  и электрической  $\cos 2\gamma \tan \gamma \frac{m_l(\xi_{st})}{m_0(\xi_{st})}$  диссипацией, знак которого определяет устойчивость движений левитирующего ТТ.

Таким образом, асимптотическое приближение решения исходной задачи (1) имеет вид

$$\xi_l = \xi_{st} + \sqrt{\frac{h(\varepsilon^2\tau)}{b}} \sin \sqrt{2b\varepsilon\tau} + \frac{\varepsilon^2}{4 \cos \gamma} \cos(2\tau + \gamma), \quad j_{pm} = -m_0 \cos \gamma \sin(\tau + \gamma), \quad (25)$$

где  $h(\varepsilon^2\tau)$  определяется из решения (21).

Установившееся решение при выполнении условия (24) отсутствия дрейфа среднего положения ТТ имеет вид

$$\xi_l = \xi_{st} + \frac{\varepsilon^2}{4 \cos \gamma} \cos(2\tau + \gamma), \quad j_{pm} = -m_0(\xi_{st}) \cos \gamma \sin(\tau + \gamma), \quad (26)$$

где учтена связь  $\alpha$  и  $\xi_{st}$  согласно (14). Устойчивость  $\xi_{st}$  определяется из (15).

### 3. Результаты

Далее приведено сравнение аналитических результатов согласно (26) с данными численного расчета, проведенного в программном комплексе Matlab (система (1) интегрировалась с использованием встроенной функции ode45 при заданных начальных условиях  $[\xi_l, \xi'_l, j_{pm}]_{\tau=0} = [0.4, 0, 0]$  [49]). Используемые для расчета параметры приведены в табл. 1.

Таблица 1. Параметры системы

Table 1. System's parameters

Параметр	$\lambda$	$\varepsilon$	$b_l$	$\alpha$	$\gamma$	$w_l$	$w_s$	$r_l$	$r_s$	$t_{pm}$	$j_s$
Значение	10	0.01	1.2	0.2534	0.61	14	12	1 мм	1.9 мм	0.1 мм	-0.5

На рис. 3 приведены графики сравнения колебаний ТТ и наведенного тока в случае численного расчета и аналитических выражений (26).

Из рис. 3 видно, что аналитическое решение (26) в случае установившихся колебаний ТТ с достаточной степенью точности совпадает с численными результатами.

Для исследования бифуркаций состояний равновесия динамической системы (11) в зависимости от параметров системы применяется программный комплекс численных алгоритмов теории бифуркаций MatCont [50]. На рис. 4, а–6, а приведены зависимости среднего положения ТТ  $\xi_{l0}$  от параметров  $\alpha$ ,  $j_s$ ,  $\gamma$ . Сплошными линиями далее обозначены устойчивые положения равновесия, пунктирными — неустойчивые. Розовые кружки обозначают точки бифуркации, которые разделяют в пространстве параметров системы область отсутствия равновесных состояний и область существования двух (одного при бифуркации) нетривиальных положений равновесия.

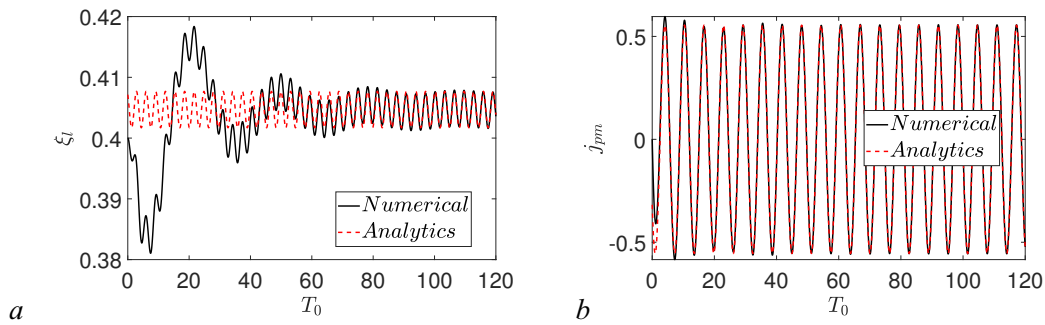


Рис. 3. График сравнения безразмерной величины:  $a$  — высоты левитации ТТ,  $b$  — наведенного тока от безразмерного времени  $T_0$  в случае прямого численного счета (черные сплошные линии) и аналитических формул (26) (пунктирная красная линия) (цвет онлайн)

Fig. 3. Graph comparing dimensionless value of  $a$  — RB displacement,  $b$  — induced current from dimensionless time  $T_0$  in case of direct numerical calculation (black solid lines) and analytical equations (26) (dotted red line) (color online)

Вычисленные и осредненные значения высоты левитации системы (1) с использованием функции ode45 обозначены квадратными символами. На рис. 4,  $b-6$ ,  $b$  приведены характерные зоны, в которых существует (II) / не существует (I) положение равновесия в зависимости от параметров системы.

На рис. 4,  $a, b$  показана зависимость среднего положения ТТ  $\xi_{l0}$  от параметра  $\alpha$ , прямо пропорционального квадрату амплитуды тока левитационной катушки  $I_l$ , при варьировании параметра  $j_s$ . Видно, что существуют «критические» значения параметра  $\alpha = \alpha_{crit}$  (минимальная величина амплитуды тока левитационной катушки  $I_l$ ) и соответствующие им «критические» значения параметра  $\xi_{l0} = \xi_{crit}$ , обозначающие случай слияния (с последующим исчезновением) состояний равновесия типа «седло» и «центр». При увеличении параметра  $j_s$  величина  $\alpha_{crit}$  уменьшается, а  $\xi_{crit}$  — увеличивается. Граница, разделяющая зоны устойчивых и неустойчивых ветвей равновесия, изображена розовой линией (LP). Розовыми ромбами обозначаются граничные значения варьирования параметра  $j_s$  в диапазоне  $[-1; 1]$ .

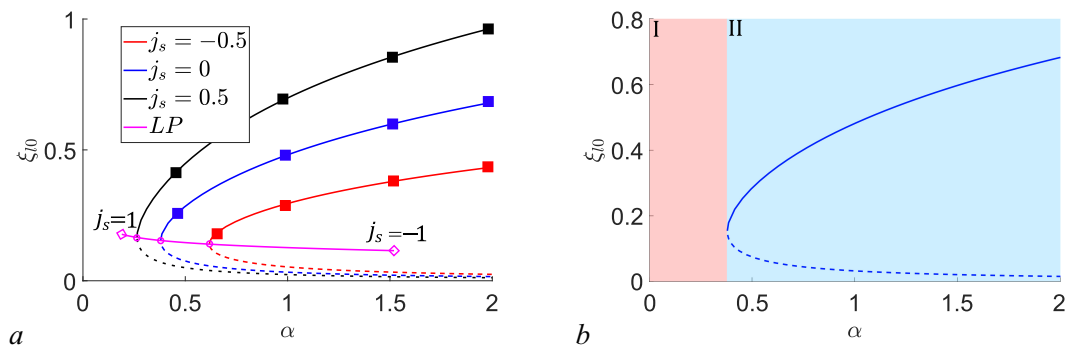


Рис. 4.  $a$  — Зависимость среднего положения ТТ  $\xi_{l0}$  от параметра  $\alpha$  при  $j_s = -0.5, 0, 0.5$  (красная, синяя, черная линии соответственно); розовая линия (LP) обозначает зону разделения устойчивых (сплошные линии) и неустойчивых (пунктирные линии) ветвей при варьировании параметра  $j_s = [-1; 1]$ ;  $b$  — изображение характерных зон существования и несуществования положений равновесия при  $j_s=0$ ,  $\varepsilon = 0.001$ ,  $r_l = 1$  мм,  $r_s = 1.9$  мм,  $t_{pm} = 0.1$  мм,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\gamma = 0$  (цвет онлайн)

Fig. 4.  $a$  — Dependence of the average position of RB  $\xi_{l0}$  on the parameter  $\alpha$  at  $j_s = -0.5, 0, 0.5$  (red, blue, black lines, respectively); the pink line (LP) indicates the zone of separation of stable (solid lines) and unstable (dashed lines) branches when varying the parameter  $j_s = [-1; 1]$ ;  $b$  — depiction of characteristic zones of existence and nonexistence of equilibrium positions at  $j_s=0$ ,  $\varepsilon = 0.001$ ,  $r_l = 1$  mm,  $r_s = 1.9$  mm,  $t_{pm} = 0.1$  mm,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\gamma = 0$  (color online)

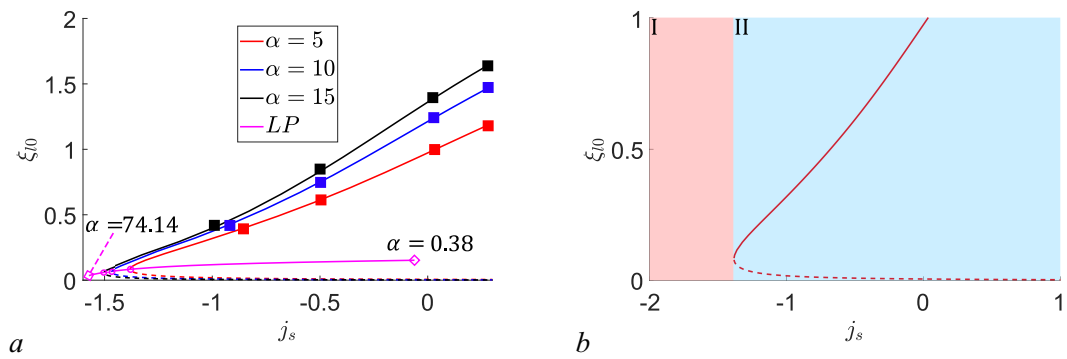


Рис. 5. *a* — Зависимость среднего положения ТТ  $\xi_{10}$  от параметра  $j_s$  при  $\alpha = 5, 10, 15$  (красная, синяя, черная линии соответственно); розовая линия (LP) обозначает зону разделения устойчивых (сплошные линии) и неустойчивых (пунктирные линии) ветвей при варьировании параметра  $\alpha = [0.38; 74.14]$ ; *b* — изображение характерных зон существования и несуществования положений равновесия при  $\alpha=5, \varepsilon = 0.001, r_l = 1 \text{ мм}, r_s = 1.9 \text{ мм}, t_{pm} = 0.1 \text{ мм}, w_l = 14, w_s = 12, \lambda = 10, \gamma = 0$  (цвет онлайн)

Fig. 5. *a* — Dependence of the average position of RB  $\xi_{10}$  on the parameter  $j_s$  at  $\alpha = 5, 10, 15$  (red, blue, black lines, respectively); the pink line (LP) indicates the zone of separation of stable (solid lines) and unstable (dashed lines) branches when varying the parameter  $\alpha = [0.38; 74.14]$ ; *b* — depiction of characteristic zones of existence and nonexistence of equilibrium positions at  $\alpha=5, \varepsilon = 0.001, r_l = 1 \text{ mm}, r_s = 1.9 \text{ mm}, t_{pm} = 0.1 \text{ mm}, w_l = 14, w_s = 12, \lambda = 10, \gamma = 0$  (color online)

На рис. 5, *a, b* изображена зависимость среднего положения ТТ  $\xi_{10}$  от параметра  $j_s$ , обозначающего собой отношение амплитуд токов левитационной и стабилизирующей катушек, для различных значений параметра  $\alpha$ . При увеличении амплитуды стабилизирующего тока, противофазного току левитационной катушки, наблюдается исчезновение положения равновесия. Это объясняется тем, что при увеличении амплитуды тока стабилизирующей катушки стабилизирующая и левитационная катушки компенсируют магнитный поток через ТТ, что ведет к падению индуцированного тока, что приводит к исчезновению среднего положения ТТ. Это в свою очередь вызывает притяжение ТТ к катушкам. Линия раздела устойчивых / неустойчивых положений равновесия представлена при варьировании параметра  $\alpha$  в диапазоне  $[0.38; 74.14]$ .

На рис. 6, *a, b* изображена зависимость высоты левитации  $\xi_{10}$  от параметра  $\gamma$ , обозначающего собой разность фаз между токами  $i_l, i_s$  и  $i_{pm}$ . Видно, что  $\xi_{10}$  убывает и при приближении к «критическому» значению  $\gamma = \gamma_{crit}$  режим левитации исчезает. Это следует из того, что при увеличении разности фаз между токами  $i_l, i_s$  и  $i_{pm}$  до величины  $\gamma_{crit}$  они могут начать притягиваться, что приводит к нарушению функционирования устройства. При  $j_s = 1$ , то есть если на левитирующую и стабилизирующую катушки подаются синфазные токи, видно, что при  $\gamma_{crit} \approx \pi/2$  левитация не наблюдается.

Из рис. 4–6 видно, что бифуркация «седло–центр» соответствует граничному значению варьируемого параметра и определяет область параметров, при которых положение равновесия ТТ существует. Дальнейший этап исследования бифуркации, которой соответствуют одна из пар набора параметров  $(\alpha^*, \gamma^*, j_s^*)$ , заключается в продолжении рассмотрения положения равновесия  $\xi_{crit}$  по одному из активных параметров  $(\alpha, \gamma$  или  $j_s)$  [50]. Для определения области существования положения равновесия на плоскостях параметров  $(\alpha, j_s), (\gamma, j_s), (\alpha, \gamma)$  осуществим продолжение по параметру точки бифуркации. Для продолжения выбирается точка слияния устойчивого и неустойчивого равновесий. Именно эта точка продолжается над исследуемыми плоскостями и дает границу области существования среднего положения ТТ. На рис. 7, *a* изображено продолжение точки бифуркации (розовая линия), рис. 7, *b–d* обозначают зоны отсутствия (I) и наличия двух равновесных состояний (II) в пространстве параметров исследуемой системы.

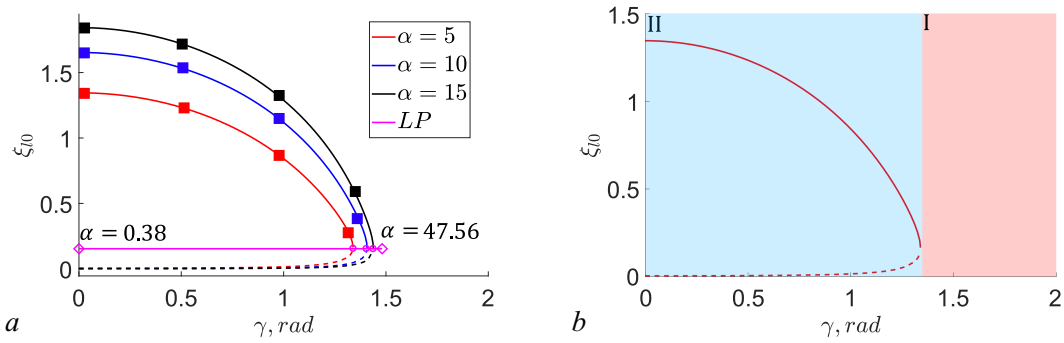


Рис. 6. *a* – Зависимость среднего положения ТТ  $\xi_{l0}$  от параметра  $\gamma$  при  $\alpha = 5, 10, 15$  (красная, синяя, черная линии соответственно); розовая линия (LP) обозначает зону разделения устойчивых (сплошные линии) и неустойчивых (пунктирные линии) ветвей при варьировании параметра  $\alpha = [0.38; 47.56]$ ; *b* – изображение характерных зон существования и несуществования положений равновесия при  $\alpha = 5, \varepsilon = 0.001, r_l = 1 \text{ мм}, r_s = 1.9 \text{ мм}, t_{pm} = 0.1 \text{ мм}, w_l = 14, w_s = 12, \lambda = 10, j_s = 0$  (цвет онлайн)

Fig. 6. *a* – Dependence of the average position of RB  $\xi_{l0}$  on the parameter  $\gamma$  at  $\alpha = 5, 10, 15$  (red, blue, black lines, respectively); the pink line (LP) indicates the zone of separation of stable (solid lines) and unstable (dashed lines) branches when varying the parameter  $\alpha = [0.38; 47.56]$ ; *b* – depiction of characteristic zones of existence and nonexistence of equilibrium positions at  $\alpha = 5, \varepsilon = 0.001, r_l = 1 \text{ mm}, r_s = 1.9 \text{ mm}, t_{pm} = 0.1 \text{ mm}, w_l = 14, w_s = 12, \lambda = 10, j_s = 0$  (color online)

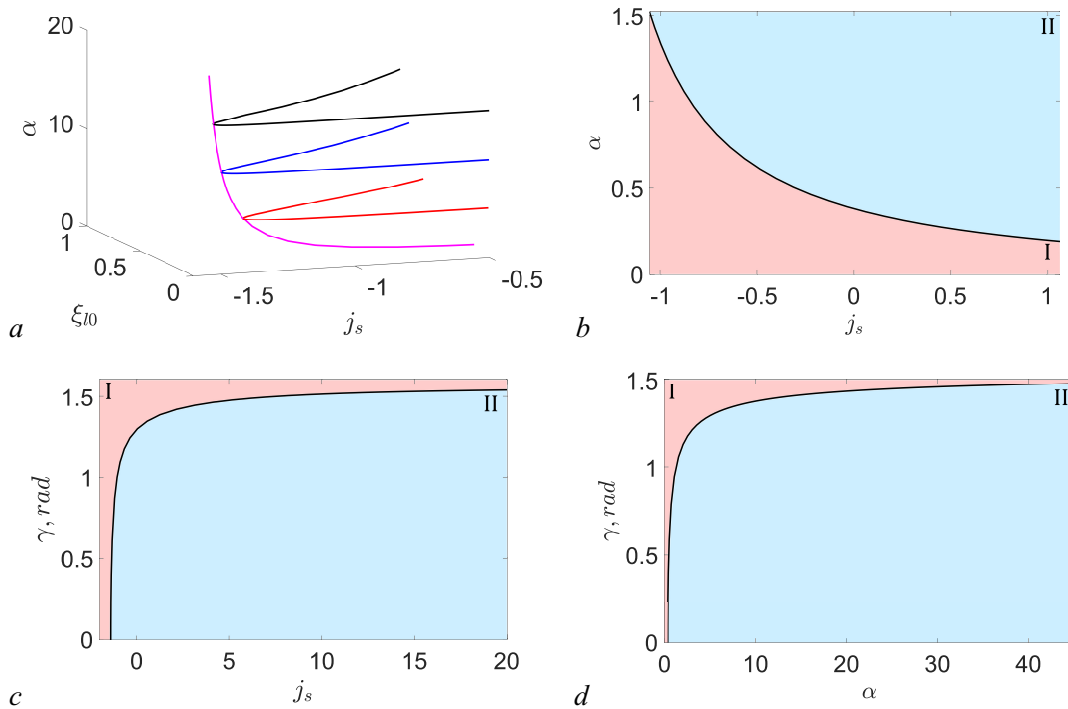


Рис. 7. *a* – Зависимость  $\xi_{l0}$  в точке бифуркации «седло-центр» от параметров  $\alpha, j_s$  (розовая линия); красная, синяя, черная линии – многообразие решений  $\xi_{l0}$  при варьировании параметров  $\alpha, j_s$  соответственно; *b-d* – изображение зон в пространстве параметров системы, отвечающих условиям отсутствия и наличия состояний равновесия (цвет онлайн)

Fig. 7. *a* – Dependence of  $\xi_{l0}$  at the saddle-center bifurcation point on parameters  $\alpha, j_s$  (pink line); red, blue, black lines – manifold of solutions of  $\xi_{l0}$  at varying parameters  $\alpha, j_s$  respectively; *b-d* – image of zones in the parameter space of the system corresponding to the conditions of the absence and presence of equilibrium states (color online)

На рис. 8, *a–d* изображены области устойчивости (серая область) среднего положения ТТ  $\xi_{l0}$  согласно (15) (черные линии), (24) (красные линии) при  $\gamma = 0.2$ ,  $\lambda = 0.4$ . Синими крестиками обозначены результаты прямого интегрирования системы (1).

Из рис. 8 видны области устойчивости среднего положения ТТ.

На рис. 9, *a–c* изображены графики сравнения колебаний ТТ в случае численного расчета для различных параметров системы  $(\xi_{l0}, b_l)$ , соответствующих случаям: *a* — устойчивых

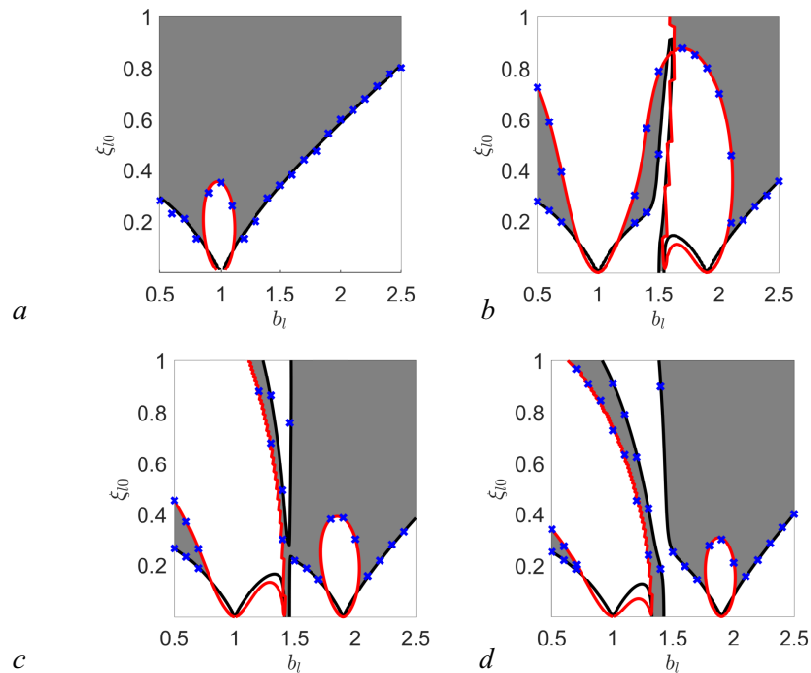


Рис. 8. Эволюция области устойчивости (серые области) среднего положения ТТ  $\xi_{l0}$  при: *a* —  $j_s = 0$ , *b* —  $j_s = -0.5$ , *c* —  $j_s = -0.75$ , *d* —  $j_s = -1$ ,  $r_l = 1$  мм,  $r_s = 1.9$  мм,  $t_{pm} = 0.1$  мм,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda = 0.4$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $b_s = \frac{r_l}{r_s} b_l$  согласно формулам (15) (черные линии), (24) (красные линии); синие крестики — результаты прямого интегрирования системы (1) (цвет онлайн)

Fig. 8. Evolution of the stability region (gray areas) of the average position of RB  $\xi_{l0}$  at: *a* —  $j_s = 0$ , *b* —  $j_s = -0.5$ , *c* —  $j_s = -0.75$ , *d* —  $j_s = -1$ ,  $r_l = 1$  mm,  $r_s = 1.9$  mm,  $t_{pm} = 0.1$  mm,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda = 0.4$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $b_s = \frac{r_l}{r_s} b_l$  according to the formulas (15) (black lines), (24) (red lines); blue crosses — results of direct integration of the system (1) (color online)

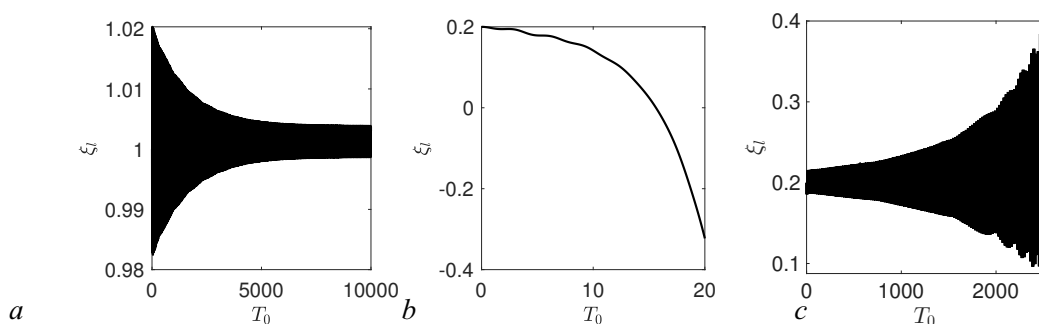


Рис. 9. Графики зависимости безразмерной величины перемещения ТТ от безразмерного времени  $T_0$  в случае прямого численного счета для: *a* —  $(b_l, \xi_{l0}) = (1, 1)$ , *b* —  $(2, 0.2)$ , *c* —  $(1, 0.2)$ ;  $j_s = 0$ ,  $r_l = 1$  мм,  $r_s = 1.9$  мм,  $t_{pm} = 0.1$  мм,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda = 0.4$ ,  $\gamma = 0.2$

Fig. 9. Graphs of dependence of dimensionless RB displacement on dimensionless time  $T_0$  in the case of direct numerical calculation for: *a* —  $(b_l, \xi_{l0}) = (1, 1)$ , *b* —  $(2, 0.2)$ , *c* —  $(1, 0.2)$ ;  $j_s = 0$ ,  $r_l = 1$  mm,  $r_s = 1.9$  mm,  $t_{pm} = 0.1$  mm,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda = 0.4$ ,  $\gamma = 0.2$

колебаний (серая область на рис. 8),  $b$  — неустойчивых колебаний согласно нарушения условия (15),  $c$  — неустойчивых колебаний в предположении о нарушении условия (24).

Из рис. 9,  $a-c$  видно, что в случае выполнения всех неравенств в (15), (24) колебания ТТ являются установившимися; при невыполнении хотя бы одного из неравенств (15), (24) движения ТТ являются расходящимися.

На рис. 10 представлена зависимость высоты левитации ТТ от времени  $T_0$ , полученная в результате численного расчёта при нарушении условия (24) в интервале  $T_0 = [1200; 1250]$ . Чёрной линией (1) обозначено численное решение, красной (2) — аналитическая оценка дрейфа среднего положения  $\sin \sqrt{2b}\varepsilon\tau$ , соответствующая выражению (25).

В качестве числового примера оценим собственную частоту и жесткость ТТ, выполненного в форме тонкого кольца. Физические параметры, взятые из [51] и принятые для аналитической оценки, приведены в табл. 2. Здесь  $\rho$ ,  $\rho_{el}$  — плотность и удельное электрическое сопротивление материала ТТ.

В [35] нами была аналитически получена оценка для безразмерной величины собственной частоты  $\omega_l$ :

$$\hat{\omega}_l = \varepsilon \sqrt{-\frac{m_l^2 + m_0 m_{ll}}{m_0 m_l}}, \quad (27)$$

откуда размерные собственная частота  $\omega_l$  и жесткость  $c_l$  вычисляются как

$$\omega_l = \omega \hat{\omega}_l, \quad c_l = \hat{m} \omega_l^2. \quad (28)$$

Как видно из рис. 10, нарушение условия (24) приводит к дрейфу среднего положения  $\xi_{l0}$ , на который накладываются колебания с безразмерной частотой, равной двум. На рис. 11 изображена зависимость жесткости системы  $c_l$  от высоты левитации ТТ  $l$  (25).

Таблица 2. Физические и геометрические параметры подвеса

Table 2. Physical and geometric parameters of the suspension

Параметр	$r_l$	$r_s$	$r_{pm}$	$t_{pm}$
Значение	1000 мкм	1900 мкм	1600 мкм	25 мкм
Параметр	$w_l$	$w_s$	$\rho$	$\rho_{el}$
Значение	20	12	2700 кг/м <sup>3</sup>	0.026 мкОмм
Параметр	$\omega$	$I_l$	$I_s$	$\hat{m}$
Значение	12 МГц	0.11 А	-0.106 А	$5.4 \times 10^{-7}$ кг
Параметр	$R_{pm}$	$g$	$\mu_0$	$L_{pm}$
Значение	0.42 Ом	9.8 м/с <sup>2</sup>	$4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м	10.14 нГн

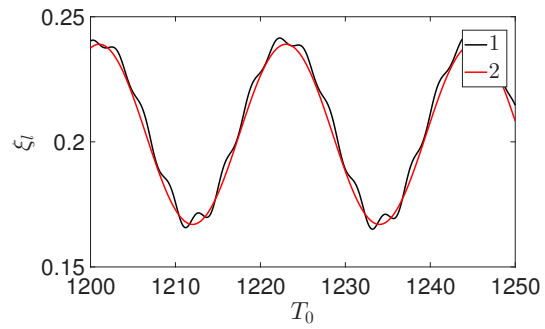


Рис. 10. График зависимости безразмерной величины перемещения ТТ от безразмерного времени  $T_0$  в случае прямого численного счета для  $(b_l, \xi_{l0}) = (1, 0.2)$ ;  $j_s = 0$ ,  $r_l = 1$  мм,  $r_s = 1.9$  мм,  $t_{pm} = 0.1$  мм,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda = 0.4$ ,  $\gamma = 0.2$ . Диапазон  $T_0 = [1250 \ 1240]$  (цвет онлайн)

Fig. 10. Graph of the dependence of the dimensionless displacement of the RB on the dimensionless time  $T_0$  in the case of direct numerical calculation for  $(b_l, \xi_{l0}) = (1, 0.2)$ ;  $j_s = 0$ ,  $r_l = 1$  mm,  $r_s = 1.9$  mm,  $t_{pm} = 0.1$  mm,  $w_l = 14$ ,  $w_s = 12$ ,  $\lambda = 0.4$ ,  $\gamma = 0.2$ . Range  $T_0 = [1250 \ 1240]$  (color online)

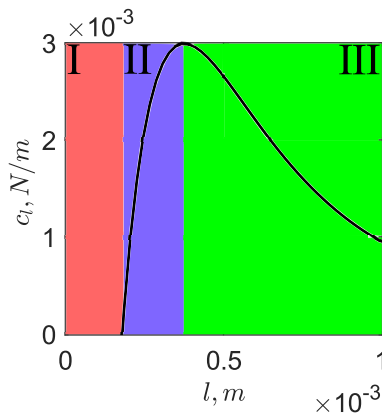


Рис. 11. График зависимости жесткости  $c_l$  системы от высоты левитации  $l$  (цвет онлайн)

Fig. 11. Graph of dependence of stiffness  $c_l$  of the system on the levitation height  $l$  (color online)

неустойчивым. Колебание имеет «среднее положение», определяемое как результат усреднения координаты на масштабе времени, который значительно больше периода колебаний, но значительно меньше других («медленных») временных масштабов динамики системы.

Динамика в медленном времени  $T_1$ , описываемая уравнением консервативного нелинейного осциллятора (11), может иметь (или не иметь) одно или более положений равновесия  $\xi_{st}$ , каждое из которых может быть устойчивым или нет, в зависимости от выполнения условия устойчивости (15). Если положение равновесия  $\xi_{st}$  устойчиво, то система (11) имеет «медленное» колебательное решение (18) в его окрестности; это колебательное решение является аппроксимацией медленного движения («дрейфа») «среднего положения» исходной модели.

Динамика амплитуды  $A = \sqrt{h(T_2)/b}$  колебательного решения (18) в ещё более медленном времени  $T_2$  описывается уравнением 1-го порядка (21), имеющим состояние равновесия  $h = 0$ . Устойчивость этого состояния, в свою очередь, определяется условием (24). Если условие (24) выполнено, то медленные колебания («дрейф среднего положения») затухают (тогда суммарное асимптотическое решение устойчиво), в противном случае — нарастают (тогда суммарное решение неустойчиво).

## Заключение

В настоящей работе построена аналитическая модель одномерных нелинейных колебаний чувствительного элемента электромагнитного подвеса, выполненного в форме тонкого кольца из токопроводящего материала. Приближенное решение задачи динамики найдено с применением асимптотических методов нелинейной механики. В предположении о медленной эволюции среднего положения ТТ определены условия возникновения и параметры дрейфа левитирующего твердого тела. В уточненной асимптотической постановке исследована устойчивость режима стационарной левитации. Показано, что учет возможности медленной эволюции средней высоты левитации приводит к формулировке условия устойчивости, связанного с соотношением между диссипацией механической и электрической природы.

## Список литературы

1. Мартыненко Ю. Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
2. Скубов Д. Ю., Ходжаев К. Ш. Нелинейная электромеханика. М.: Наука, 2003. 360 с.

Из рис. 11 видно, что существуют три характерные зоны зависимости жесткости  $c_l$  от высоты левитации  $l$ . В зоне малых величин  $l$  (красная область (I)) величина  $c_l$  принимает отрицательные значения (они не приведены на рис. 11). В фиолетовой области (II) наблюдается монотонное возрастание  $c_l$  вплоть до достижения максимума  $c_l = c_l^{max}$ , в зеленой области (III) с увеличением  $l$  величина  $c_l$  убывает.

Суммируя вышеизложенное, подчеркнем ключевые особенности режима левитации ТТ в индукционном подвесе, выявленные в ходе проведенного исследования:

Исходная модель (1) не имеет положения равновесия, только «быстрое» колебательное решение, которое может быть устойчивым или

3. *Han H. S., Kim D. S.* Magnetic Levitation: Maglev Technology and Applications. Dordrecht: Springer, 2016. 247 p. DOI: 10.1007/978-94-017-7524-3.
4. *Poletkin K.* Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators. Cham: Springer, 2021. 174 p. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0.
5. *Poletkin K.* Levitating micro-actuators: A review // *Actuators*. 2018. Vol. 7, no. 2. P. 17. DOI: 10.3390/act7020017.
6. *Liu K., Zhang W., Chen W., Li K., Dai F., Cui F., Wu X., Ma G., Xiao Q.* The development of micro-gyroscope technology // *J. Micromech. Microeng.* 2009. Vol. 19, no. 11. P. 113001. DOI: 10.1088/0960-1317/19/11/113001.
7. *Shearwood C., Ho K. Y., Williams C. B., Gong H.* Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope // *Sensors and Actuators A: Physical*. 2000. Vol. 83, no. 1–3. P. 85–92. DOI: 10.1016/S0924-4247(00)00292-2.
8. *Poletkin K.* Mechanical Thermal Noise in Levitation Micro-Gyroscopes // In: *Levitation Micro-Systems. Microsystems and Nanosystems*. Cham: Springer, 2021. P. 135–154. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0\_7.
9. *Mustafa M. N. M.* Comprehensive review and analysis of the electromagnetic levitation systems (modeling, controllers, nonlinearity sources) // *E3S Web Conf.* 2023. Vol. 371. P. 04027. DOI: 10.1051/e3sconf/202337104027.
10. *Poletkin K. V., Lu Z., Moazenzadeh A., Mariappan S. G., Korvink J. G., Wallrabe U., Badilita V.* Energy-aware 3D micro-machined inductive suspensions with polymer magnetic composite core // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2018. Vol. 1052. P. 012048. DOI: 10.1088/1742-6596/1052/1/012048.
11. *Shearwood C., Williams C. B., Mellor P. H., Chang K. Y., Woodhead J.* Electro-magnetically levitated micro-discs // In: *IEE Colloquium on Microengineering Applications in Optoelectronics*. London: IET, 1996. P. 6/1–6/3. DOI: 10.1049/ic:19960241.
12. *Williams C. B., Shearwood C., Mellor P. H., Yates R. B.* Modelling and testing of a frictionless levitated micromotor // *Sensors and Actuators A: Physical*. 1997. Vol. 61, no. 1–3. P. 469–473. DOI: 10.1016/S0924-4247(97)80307-X.
13. *Shearwood C., Williams C. B., Mellor P. H., Yates R. B., Gibbs M. R. J., Mattingley A. D.* Levitation of a micromachined rotor for application in a rotating gyroscope // *Electronics Letters*. 1995. Vol. 31, no. 21. P. 1845–1846. DOI: 10.1049/el:19951232.
14. *Williams C. B., Shearwood C., Mellor P. H., Mattingley A. D., Gibbs M. R. J., Yates R. B.* Initial fabrication of a micro-induction gyroscope // *Microelectronic Engineering*. 1996. Vol. 30, no. 1–4. P. 531–534. DOI: 10.1016/0167-9317(95)00302-9.
15. *Wu X. S., Chen W. Y., Zhao X. L., Zhang W. P.* Micromotor with electromagnetically levitated rotor using separated coils // *Electronics Letters*. 2004. Vol. 40, no. 16. P. 996–997. DOI: 10.1049/el:20040601.
16. *Tsai N. C., Huang W. M., Chiang C. W.* Magnetic actuator design for single-axis micro-gyroscopes // *Microsyst. Technol.* 2009. Vol. 15. P. 493–503. DOI: 10.1007/s00542-008-0769-y.
17. *Luan B., Zhang X., Xu F., Yang G., Jin J., Xu C., Sun F., Oka K.* High precision magnetic levitation actuator for micro-EDM // *Actuators*. 2022. Vol. 11, no. 12. P. 361. DOI: 10.3390/act11120361.
18. *Xiao Q., Wang Y., Dricot S., Kraft M.* Design and experiment of an electromagnetic levitation system for a micro mirror // *Microsyst. Technol.* 2019. Vol. 25. P. 3119–3128. DOI: 10.1007/s00542-019-04452-w.
19. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Korvink J., Badilita V.* Stable dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017. Vol. 131–132. P. 753–766. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.08.016.

20. *Jayawant B. V.* Electromagnetic suspension and levitation // *Rep. Prog. Phys.* 1981. Vol. 44, no. 4. P. 411–477. DOI: 10.1088/0034-4885/44/4/002.
21. *Kim N. H., Ge L.* Dynamic modeling of electromagnetic suspension system // *Journal of Vibration and Control.* 2013. Vol. 19, no. 5. P. 729–741. DOI: 10.1177/1077546312438601.
22. *Gysen B. L., Janssen J. L., Paulides J. J., Lomonova E. A.* Design aspects of an active electromagnetic suspension system for automotive applications // *IEEE Transactions on Industry Applications.* 2009. Vol. 45, no. 5. P. 1589–1597. DOI: 10.1109/TIA.2009.2027097.
23. *Chu S. Y., Cui X., Zan X., Avestruz A. T.* Transfer-power measurement using a non-contact method for fair and accurate metering of wireless power transfer in electric vehicles // *IEEE Transactions on Power Electronics.* 2021. Vol. 37, no. 2. P. 1244–1271. DOI: 10.1109/TPEL.2021.3105689.
24. *Lohöfer G.* High-resolution inductive measurement of electrical resistivity and density of electromagnetically levitated liquid metal droplets // *Rev. Sci. Instrum.* 2018. Vol. 89. P. 124709. DOI: 10.1063/1.5065482.
25. *Udalov P., Lukin A., Popov I., Skubov D.* Analysis of the equilibrium of a magnetic contactless suspension // In: *Microactuators, Microsensors and Micromechanisms. MAMM 2022. Mechanisms and Machine Science / Pandey A. K., Pal P., Nagahanumaiah Z. L. (eds) Cham: Springer, 2022.* P. 183–190. DOI: 10.1007/978-3-031-20353-4\_14.
26. *Mamleyev E. R., Lee C. H., Korvink J. G., Kohl M., Poletkin K. V.* Experimental study and simulation of pull-in behavior in hybrid levitation microactuator for square-shaped proof masses // *Actuators.* 2023. Vol. 12, no. 2. P. 48. DOI: 10.3390/act12020048.
27. *Okress E. C., Wroughton D. M., Comenetz G., Brace P. H., Kelly J. C. R.* Electromagnetic levitation of solid and molten metals // *J. Appl. Phys.* 1952. Vol. 23, no. 5. P. 545–552. DOI: 10.1063/1.1702249.
28. *Poletkin K., Chernomorsky A. I., Shearwood C., Wallrabe U.* A qualitative analysis of designs of micromachined electromagnetic inductive contactless suspension // *International Journal of Mechanical Sciences.* 2014. Vol. 82. P. 110–121. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.03.013.
29. *Poletkin K. V., Lu Z., Wallrabe U., Korvink J. G., Badilita V.* A qualitative technique to study stability and dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions // In: *2017 19th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS).* 2017, Kaohsiung, Taiwan. New York: IEEE, 2017. P. 528–531. DOI: 10.1109/TRANSDUCERS.2017.7994102.
30. *Shearwood C., Ho K. Y., Williams C. B., Gong H.* Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope // *Sensors and Actuators A: Physical.* 2000. Vol. 83, no. 1–3. P. 85–92. DOI: 10.1016/S0924-4247(00)00292-2.
31. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Badilita V.* Hybrid electromagnetic and electrostatic micromachined suspension with adjustable dynamics // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2015. Vol. 660. P. 012005. DOI: 10.1088/1742-6596/660/1/012005.
32. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Badilita V.* A new hybrid micromachined contactless suspension with linear and angular positioning and adjustable dynamics // *Journal of Microelectromechanical Systems.* 2015. Vol. 24, no. 5. P. 1248–1250. DOI: 10.1109/JMEMS.2015.2469211.
33. *Poletkin K. V., Chernomorsky A. I., Shearwood C., Wallrabe U.* An analytical model of micromachined electromagnetic inductive contactless suspension // In: *Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition.* 15–21 November, 2013, San Diego, California, USA. P. V010T11A072. DOI: 10.1115/IMECE2013-66010.
34. *Xia D., Yu C., Kong L.* A micro dynamically tuned gyroscope with adjustable static capacitance // *Sensors.* 2013. Vol. 13, no. 2. P. 2176–2195. DOI: 10.3390/s130202176.
35. *Udalov P. P., Popov I. A., Lukin A. V., Shtukin L. V., Poletkin K. V.* Parametric stability of microscale

- contactless inductive suspension with an electrostatic control loop of stiffness // *J. Mach. Manuf. Reliab.* 2024. Vol. 53. P. 25–34. DOI: 10.1134/S1052618824010138.
36. *Poletkin K., Lu Z., en Hartogh B., Wallrabe U., Badilita V.* Stability and spring constant investigation for micromachined inductivesuspensions: Theoretical analysis vs. experimental results // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2014. Vol. 557. P. 012133. DOI: 10.1088/1742-6596/557/1/012133.
  37. *Калантаров П. Л., Цейтлин Л. А.* Расчет индуктивностей: Справочная книга. Л.: Энергоатомиздат, 1986. 488 с.
  38. *Rosa E. B., Grover F. W.* Formulas and Tables for the Calculation of Mutual and Self-inductance. Washington, DC: US Government Printing Office, 1948. Vol. 169. 237 p.
  39. *Poletkin K. V.* Calculation of magnetic force and torque between two arbitrarily oriented circular filaments using Kalantarov–Zeitlin’s method // *International Journal of Mechanical Sciences.* 2022. Vol. 220. P. 107159. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2022.107159.
  40. *Babic S., Akyel C.* Magnetic force between inclined circular loops (Lorentz approach) // *Progress In Electromagnetics Research B.* 2012. Vol. 38. P. 333–349. DOI: 10.2528/PIERB12011501.
  41. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Korvink J., Badilita V.* Stable dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions // *International Journal of Mechanical Sciences.* 2017. Vol. 131–132. P. 753–766. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.08.016.
  42. *Poletkin K.* On the static pull-in of tilting actuation in electromagnetically levitating hybrid micro-actuator: Theory and experiment // *Actuators.* 2021. Vol. 10, no. 10. P. 256. DOI: 10.3390/act10100256.
  43. *Liu K., Zhang W., Liu W., Chen W., Li K., Cui F., Li S.* An innovative micro-diamagnetic levitation system with coils applied in micro-gyroscope // *Microsyst. Technol.* 2010. Vol. 16. P. 431–439. DOI: 10.1007/s00542-009-0935-x.
  44. *Liu W., Zhang W., Chen W.* Simulation analysis and experimental study of the diamagnetically levitated electrostatic micromotor // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials.* 2019. Vol. 492. P. 165634. DOI: 10.1016/j.jmmm.2019.165634.
  45. *Poletkin K.* Quasi-finite element modelling // In: *Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators.* Cham: Springer, 2021. P. 45–58. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0\_4.
  46. *Lu Z., Jia F., Korvink J., Wallrabe U., Badilita V.* Design optimization of an electromagnetic microlevitation system based on copper wirebonded coils // In: *Proceedings of the 2012 Power MEMS. 2–5 December 2012, Atlanta, GA.* P. 363–366. DOI: 10.13140/2.1.4460.9284.
  47. *Скубов Д. Ю., Индейцев Д. А., Удалов П. П., Попов И. А., Лукин А. В., Полеткин К. В.* Нелинейная динамика микромеханического неконтактного индукционного подвеса // *Изв. РАН. МТТ.* 2023. № 6. С. 98–112. DOI: 10.31857/S0572329922600864.
  48. *Nayfeh A. H.* Perturbation Methods. New York: Wiley, 2008. 425 p.
  49. *Gatzke E.* Introduction to MATLAB // In: *Introduction to Modeling and Numerical Methods for Biomedical and Chemical Engineers.* Cham: Springer, 2022. P. 99–121. DOI: 10.1007/978-3-030-76449-4\_6.
  50. *Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Y. A., Meijer H. G. E., Sautois B.* New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems // *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems.* 2008. Vol. 14, no. 2. P. 147–175. DOI: 10.1080/13873950701742754.
  51. *Lu Z., Poletkin K., den Hartogh B., Wallrabe U., Badilita V.* 3D micro-machined inductive contactless suspension: Testing and modeling // *Sensors and Actuators A: Physical.* 2014. Vol. 220. P. 134–143. DOI: 10.1016/j.sna.2014.09.017.

## References

1. Martynenko YuG. Motion of a Rigid Body in Electric and Magnetic Fields. Moscow: Nauka; 1988. 368 p. (in Russian).

2. Skubov D, Khodzhaev KS. Non-Linear Electromechanics. Berlin: Springer; 2008. 471 p. DOI: 10.1007/978-3-540-44779-5.
3. Han HS, Kim DS. Magnetic Levitation: Maglev Technology and Applications. Dordrecht: Springer; 2016. 247 p. DOI: 10.1007/978-94-017-7524-3.
4. Poletkin K. Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators. Cham: Springer; 2021. 174 p. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0.
5. Poletkin K. Levitating micro-actuators: A review. *Actuators*. 2018;7(2):17. DOI: 10.3390/act7020017.
6. Liu K, Zhang W, Chen W, Li K, Dai F, Cui F, Wu X, Ma G, Xiao Q. The development of micro-gyroscope technology. *J. Micromech. Microeng.* 2009;19(11):113001. DOI: 10.1088/0960-1317/19/11/113001.
7. Shearwood C, Ho KY, Williams CB, Gong H. Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2000;83(1–3):85–92. DOI: 10.1016/S0924-4247(00)00292-2.
8. Poletkin K. Thermal Noise in Levitation Micro-Gyroscopes. In: *Levitation Micro-Systems. Microsystems and Nanosystems*. Cham: Springer; 2021. P. 135–154. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0\_7.
9. Mustafa MNM. Comprehensive review and analysis of the electromagnetic levitation systems (modeling, controllers, nonlinearity sources). *E3S Web of Conferences*. 2023;371:04027. DOI: 10.1051/e3sconf/202337104027.
10. Poletkin KV, Lu Z, Moazenzadeh A, Mariappan SG, Korvink JG, Wallrabe U, Badilita V. Energy-aware 3D micro-machined inductive suspensions with polymer magnetic composite core. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2018;1052:012048. DOI: 10.1088/1742-6596/1052/1/012048.
11. Shearwood C, Williams CB, Mellor PH, Chang KY, Woodhead J. Electro-magnetically levitated micro-discs. In: *IEE Colloquium on Microengineering Applications in Optoelectronics*. London: IET; 1996. P. 6/1–6/3. DOI: 10.1049/ic:19960241.
12. Williams CB, Shearwood C, Mellor PH, Yates RB. Modelling and testing of a frictionless levitated micromotor. *Sensors and Actuators A: Physical*. 1997;61(1–3):469–473. DOI: 10.1016/S0924-4247(97)80307-X.
13. Shearwood C, Williams CB, Mellor PH, Yates RB, Gibbs MRJ, Mattingley AD. Levitation of a micromachined rotor for application in a rotating gyroscope. *Electronics Letters*. 1995;31(21):1845–1846. DOI: 10.1049/el:19951232.
14. Williams CB, Shearwood C, Mellor PH, Mattingley AD, Gibbs MRJ, Yates RB. Initial fabrication of a micro-induction gyroscope. *Microelectronic Engineering*. 1996;30(1–4):531–534. DOI: 10.1016/0167-9317(95)00302-9.
15. Wu XS, Chen WY, Zhao XL, Zhang WP. Micromotor with electromagnetically levitated rotor using separated coils. *Electronics Letters*. 2004;40(16):996–997. DOI: 10.1049/el:20040601.
16. Tsai NC, Huang WM, Chiang CW. Magnetic actuator design for single-axis micro-gyroscopes. *Microsyst. Technol.* 2009;15:493–503. DOI: 10.1007/s00542-008-0769-y.
17. Luan B, Zhang X, Xu F, Yang G, Jin J, Xu C, Sun F, Oka K. High precision magnetic levitation actuator for micro-EDM. *Actuators*. 2022;11(12):361. DOI: 10.3390/act11120361.
18. Xiao Q, Wang Y, Dricot S, Kraft M. Design and experiment of an electromagnetic levitation system for a micro mirror. *Microsyst. Technol.* 2019;25:3119–3128. DOI: 10.1007/s00542-019-04452-w.
19. Poletkin K, Lu Z, Wallrabe U, Korvink J, Badilita V. Stable dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017;131:753–766. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.08.016.
20. Jayawant BV. Electromagnetic suspension and levitation. *Reports on Progress in Physics*. 1981;44(4):411–477. DOI: 10.1088/0034-4885/44/4/002.

21. Kim NH, Ge L. Dynamic modeling of electromagnetic suspension system. *Journal of Vibration and Control*. 2013;19(5):729–741. DOI: 10.1177/107754631243860.
22. Gysen BL, Janssen JL, Paulides JJ, Lomonova EA. Design aspects of an active electromagnetic suspension system for automotive applications. *IEEE Transactions on Industry Applications*. 2009;45(5):1589–1597. DOI: 10.1109/TIA.2009.2027097.
23. Chu SY, Cui X, Zan X, Avestruz AT. Transfer-power measurement using a non-contact method for fair and accurate metering of wireless power transfer in electric vehicles. *IEEE Transactions on Power Electronics*. 2021;37(2):1244–1271. DOI: 10.1109/TPEL.2021.3105689.
24. Lohöfer G. High-resolution inductive measurement of electrical resistivity and density of electromagnetically levitated liquid metal droplets. *Rev. Sci. Instrum.* 2018;89:124709. DOI: 10.1063/1.5065482.
25. Udalov P, Lukin A, Popov I, Skubov D. Analysis of the Equilibrium of a Magnetic Contactless Suspension. In: Pandey AK, Pal P, Nagahanumaiah ZL, editors. *Microactuators, Microsensors and Micromechanisms. MAMM 2022. Mechanisms and Machine Science*. Cham: Springer; 2022. P. 183–190. DOI: 10.1007/978-3-031-20353-4\_14.
26. Mamleyev ER, Lee CH, Korvink JG, Kohl M, Poletkin KV, Badilita V. Experimental study and simulation of pull-in behavior in hybrid levitation microactuator for square-shaped proof masses. *Actuators*. 2023;12(2):48. DOI: 10.3390/act12020048.
27. Okress EC, Wroughton DM, Comenetz G, Brace PH, Kelly JCR. Electromagnetic levitation of solid and molten metals. *J. Appl. Phys.* 1952;23(5):545–552. DOI: 10.1063/1.1702249.
28. Poletkin K, Chernomorsky AI, Shearwood C, Wallrabe U. A qualitative analysis of designs of micromachined electromagnetic inductive contactless suspension. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014;82:110–121. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.03.013.
29. Poletkin KV, Lu Z, Wallrabe U, Korvink JG, Badilita V. A qualitative technique to study stability and dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions. In: 2017 19th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS). 2017, Kaohsiung, Taiwan. New York: IEEE; 2017. P. 528–531. DOI: 10.1109/TRANSDUCERS.2017.7994102.
30. Shearwood C, Ho KY, Williams CB, Gong H. Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2000;83(1–3):85–92. DOI: 10.1016/S0924-4247(00)00292-2.
31. Poletkin K, Lu Z, Wallrabe U, Badilita V. Hybrid electromagnetic and electrostatic micromachined suspension with adjustable dynamics. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2015;660:012005. DOI: 10.1088/1742-6596/660/1/012005.
32. Poletkin K, Lu Z, Wallrabe U, Badilita V. A new hybrid micromachined contactless suspension with linear and angular positioning and adjustable dynamics. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2015;24(5):1248–1250. DOI: 10.1109/JMEMS.2015.2469211.
33. Poletkin KV, Chernomorsky AI, Shearwood C, Wallrabe U. An analytical model of micromachined electromagnetic inductive contactless suspension. In: *Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. 15–21 November, 2013, San Diego, California, USA. P. V010T11A072. DOI: 10.1115/IMECE2013-66010.
34. Xia D, Yu C, Kong L. A micro dynamically tuned gyroscope with adjustable static capacitance. *Sensors*. 2013;13(2):2176–2195. DOI: 10.3390/s130202176.
35. Udalov PP, Popov IA, Lukin AV, Shtukin LV, Poletkin KV. Parametric stability of microscale contactless inductive suspension with an electrostatic control loop of stiffness. *J. Mach. Manuf. Reliab.* 2024;53:25–34. DOI: 10.1134/S1052618824010138.
36. Poletkin K, Lu Z, en Hartogh B, Wallrabe U, Badilita V. Stability and spring constant investigation for micromachined inductivesuspensions: Theoretical analysis vs. experimental results. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2014;557:012133. DOI: 10.1088/1742-6596/557/1/012133.

37. Kalantarov PL, Cejtin LA. Calculation of Inductors: The Reference Book. L.: Energoatomizdat; 1986. 488 p. (in Russian).
38. Rosa EB, Grover FW. Formulas and Tables for the Calculation of Mutual and Self-inductance. Washington, DC: US Government Printing Office; 1948. Vol. 169. 237 p.
39. Poletkin KV. Calculation of magnetic force and torque between two arbitrarily oriented circular filaments using Kalantarov–Zeitlin’s method. International Journal of Mechanical Sciences. 2022;220:107159. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2022.107159.
40. Babic S, Akyel C. Magnetic force between inclined circular loops (Lorentz approach). Progress In Electromagnetics Research B. 2012;38:333–349. DOI: 10.2528/PIERB12011501.
41. Poletkin K, Lu Z, Wallrabe U, Korvink J, Badilita V. Stable dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions. International Journal of Mechanical Sciences. 2017;131: 753–766. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.08.016.
42. Poletkin K. On the static pull-in of tilting actuation in electromagnetically levitating hybrid micro-actuator: Theory and experiment. Actuators. 2021;10(10):256. DOI: 10.3390/act10100256.
43. Liu K, Zhang W, Liu W, Chen W, Li K, Cui F, Li S. An innovative micro-diamagnetic levitation system with coils applied in micro-gyroscope. Microsyst. Technol. 2010;16:431–439. DOI: 10.1007/s00542-009-0935-x.
44. Liu W, Zhang W, Chen W. Simulation analysis and experimental study of the diamagnetically levitated electrostatic micromotor. Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2019;492:165634. DOI: 10.1016/j.jmmm.2019.165634.
45. Poletkin K. Quasi-finite Element Modelling. In: Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators. Cham: Springer; 2021. P. 45–58. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0\_4.
46. Lu Z, Jia F, Korvink J, Wallrabe U, Badilita V. Design optimization of an electromagnetic microlevitation system based on copper wirebonded coils. In: Proceedings of the 2012 Power MEMS. 2–5 December 2012, Atlanta, GA. P. 363–366. DOI: 10.13140/2.1.4460.9284.
47. Skubov DYu, Indeitsev DA, Udalov PP, Popov IA, Lukin AV, Poletkin KV. Nonlinear dynamics of a micromechanical non-contact induction suspension. Mech. Solids. 2023;58(6):2011–2023. DOI: 10.3103/S0025654423600307.
48. Nayfeh AH. Perturbation Methods. New York: John Wiley; 2008. 425 p.
49. Gatzke E. Introduction to MATLAB. In: Introduction to Modeling and Numerical Methods for Biomedical and Chemical Engineers. Cham: Springer; 2022. P. 99–121. DOI: 10.1007/978-3-030-76449-4\_6.
50. Dhooge A, Govaerts W, Kuznetsov YA, Meijer HGE, Sautois B. New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems. Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. 2008;14(2):147–175. DOI: 10.1080/13873950701742754.
51. Lu Z, Poletkin K, den Hartogh B, Wallrabe U, Badilita V. 3D micro-machined inductive contactless suspension: Testing and modeling. Sensors and Actuators A: Physical. 2014;220: 134–143. DOI: 10.1016/j.sna.2014.09.017.



*Удалов Павел Павлович* — инженер-исследователь Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29  
 Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
 E-mail: pp\_udalov@mail.ru  
 ORCID: 0000-0002-9744-8869  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1117107



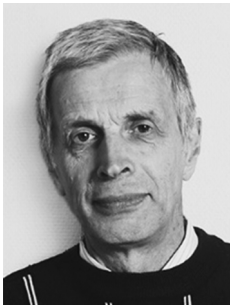
*Лукин Алексей Вячеславович* — кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
E-mail: lukinalexei@yandex.ru  
ORCID: 0000-0003-2016-8612  
AuthorID (eLibrary.Ru): 742760



*Попов Иван Алексеевич* — инженер-исследователь Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
E-mail: popov\_ia@spbstu.ru  
ORCID: 0000-0003-4425-9172  
AuthorID (eLibrary.Ru): 879490



*Штукин Лев Васильевич* — кандидат технических наук, доцент Высшей школы «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
E-mail: shtukin\_lv@spbstu.ru  
ORCID: 0000-0002-8584-619X  
AuthorID (eLibrary.Ru): 166909



*Полеткин Кирилл Владимирович* — кандидат технических наук, профессор школы приборостроения и оптико-электронной техники Технологического университета Хэфэя.

Китай, Хэфэй, ул. Тунси, 193, 230009  
Технологический университет Хэфэя  
E-mail: k.poletkin@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-9711-7517