

**О динамике гидромеханической системы
с вязкой жидкостью, совершающей прямолинейное движение**

В. Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: sennitskii@yandex.ru

*Поступила в редакцию 25.01.2026, принята к публикации 28.03.2026,
опубликована онлайн 02.04.2026*

Аннотация. Целью работы является обнаружение и изучение особенностей динамики гидромеханической системы, реализующихся в присутствии периодических воздействий, не имеющих выделенного направления в пространстве, при совершении жидкой частью системы простейшего, прямолинейного движения. **Методы.** Используются аналитические методы исследования уравнений движения твердых тел и краевых задач для уравнения Навье—Стокса. **Результаты.** Поставлена и решена новая задача о движении гидромеханической системы при внешних нестационарных воздействиях. Система состоит из вязкой жидкости и трех твердых тел — стенки, пластины и проницаемой для жидкости мембраны. Стенка совершает заданное движение. Пластина и мембрана подвергаются внешним силовым воздействиям; движение данных тел подлежит определению. К присутствующим в постановке задачи существенным новым моментам относятся, в частности, возможность совершения жидкостью только прямолинейного движения, а также то, что движение мембраны не является заданным. **Заключение.** Полученные результаты могут использоваться, в частности, в научном поиске подходов к управлению гидромеханическими системами.

Ключевые слова: вязкая жидкость, твердые тела, периодические по времени воздействия, выделенное направление в пространстве, эффекты среднего движения

Для цитирования: Сенницкий В. Л. О динамике гидромеханической системы с вязкой жидкостью, совершающей прямолинейное движение // Известия вузов. ПНД. 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003218. EDN: XDAPZK

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

On the dynamics of a hydro-mechanical system with a viscous liquid fulfilling a straightforward motion

V. L. Sennitskii

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia

E-mail: sennitskii@yandex.ru

Received 25.01.2026, accepted 28.03.2026, available online 02.04.2026

Abstract. *The purpose* of the work is the discovery and the study of peculiarities of the dynamics of a hydro-mechanical system under the presence of periodic influences possessing no predominant direction in space under the performance a straightforward motion by the liquid part of the system. *The methods.* The analytical investigational methods for the equations of solid bodies motion and boundary problems for Navier–Stokes equation are used. *The results.* A new problem on the hydro-mechanical system motion under external non-stationary influences is formulated and solved. The system consists of a viscous liquid and three solid bodies that are a wall, a plate and a membrane which is permeable for the liquid. The wall fulfils a prescribed motion. The plate and the membrane are free. Important new circumstances in the formulation of the problem in particular are the possibility for the liquid to realize only a straightforward motion and that the motion of the membrane [s not prescribed. *The conclusion.* The obtained results can be used in particular in a scientific search of ways to control hydro-mechanical systems.

Key words: viscous liquid, periodic in time influences, predominant direction in space, structure of flow.

For citation : Sennitskii VL. On the structure of a viscous liquid flow under periodic influences which have no predominant direction in space. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026. DOI: 10.18500/0869-6632-003218

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY4.0).

Введение

В настоящей работе продолжено изучение динамики гидромеханических систем при периодических по времени воздействиях, начатое в работах [1–5] (см. также [6, 7]). Результаты исследований в данном направлении обладают фундаментальным и прикладным содержанием. Современное состояние исследований адекватно характеризуется, в частности, работами [8–11].

Динамика гидромеханической системы, в общем случае, является нелинейной. Задачи с вязкой жидкостью представляют собой задачи повышенной сложности, которая резко возрастает при увеличении числа свободных частей гидромеханической системы (частей системы, движение которых не задано, подлежит определению).

В данной работе рассмотрена задача о движении системы, состоящей из вязкой жидкости и трех твердых тел, два из которых являются свободными. Обнаружены новые особенности динамики свободных частей гидромеханической системы — жидкости и свободных твердых тел.

1. Постановка задачи

Имеется гидромеханическая система, движение которой подлежит определению. Система состоит из вязкой несжимаемой жидкости и трех абсолютно твердых тел — стенки η , однородной пластины ξ и проницаемой для жидкости однородной мембраны χ (рис. 1). Движение гидромеханической системы рассматривается относительно инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z . Стенка η ограничена плоскостью $Y = 0$. Пластина ξ ограничена плоскостями $Y = L$ и $Y = L'$ ($L > 0$, $L' > L$ — постоянные). Мембрана χ ограничена плоскостями $Y = H$

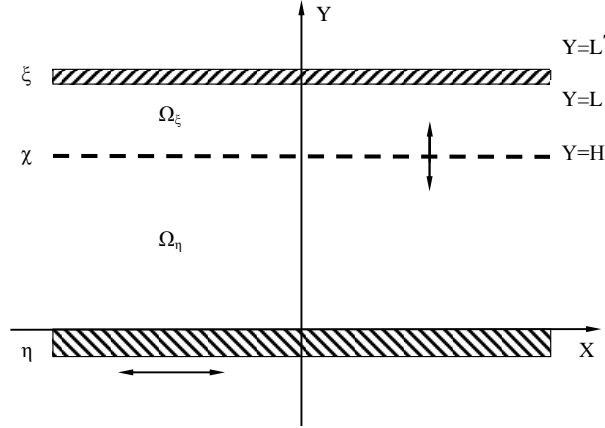


Рис. 1: Гидромеханическая система. The hydro-mechanical system

и $Y = H'$. Стенка η совершает заданное поступательное движение вдоль оси X . Мембрана χ совершает заданное поступательное движение вдоль оси Y . Координаты H , H' и скорость $U_\eta \mathbf{e}_1$ стенки η периодически с периодом T изменяются со временем t ($0 < H < H' < L$; $H' - H = \Delta H$ — постоянная; $H = \bar{H} + \tilde{H} \sin(2\pi t/T)$; $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0\}$; $U_\eta = \tilde{U}_\eta \sin(2\pi t/T + \varphi)$; $\tilde{H} \geq 0$, $\bar{H} > \tilde{H}$, $\tilde{U}_\eta > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ — параметры). Толщина мембраны ΔH пренебрежимо мала по сравнению с расстояниями H и $L - H'$. Ввиду этого мембрана χ рассматривается, как материальная плоскость $\chi : X = H$. Движение стенки η вдоль оси X и движение мембраны χ вдоль оси Y характеризуются отсутствием выделенного направления в пространстве. Жидкость заполняет области $\Omega_\eta : 0 < Y < H$, $\Omega_\xi : H < Y < L$ ($-\infty < X < \infty$, $-\infty < Z < \infty$). Пластина ξ и мембрана χ подвергаются (или не подвергаются) заданным внешним периодическим воздействиям, не имеющим выделенного направления в пространстве. Пластина, жидкость и мембрана совершают движение вдоль оси X . Пластина ξ и жидкость движутся со скоростями соответственно $U_\xi \mathbf{e}_1$ и $V \mathbf{e}_1$; полная скорость мембраны χ составляет $W \mathbf{e}_1 + (dH/dt) \mathbf{e}_2$ ($\mathbf{e}_2 = \{0, 1, 0\}$). Скорости U_ξ , V , W подлежат определению. В отсутствие движения стенки η , пластины ξ и движения мембраны χ вдоль оси X жидкость в областях Ω_η , Ω_ξ покоится.

Требуется определить периодическое по времени движение гидромеханической системы (свободных частей системы — жидкости, пластины ξ и мембраны χ).

Пусть $\tau = t/T$; $y = Y/L$; $h = H/L$; $\bar{h} = \bar{H}/L$; $\varepsilon = \tilde{H}/L$; $u_\eta = TU_\eta/L = \tilde{u}_\eta \sin(2\pi\tau + \varphi)$; $u_\xi = TU_\xi/L$; $v = TV/L = v(\tau, y)$; $w = TW/L$; ρ и ν — соответственно плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости; P — давление в жидкости; $p = T^2 P/(\rho L^2) = p(\tau, y)$; $Re = L^2/(\nu T)$ — число Рейнольдса; ξ^* — твердое тело, часть пластины ξ , которая определяется соотношениями: $X^* < X < X^* + D_X$, $L < Y < L'$, $Z^* < Z < Z^* + D_Z$ (X^* , Z^* , $D_X > 0$, $D_Z > 0$ — постоянные); m_ξ — масса тела ξ^* ; χ^* — твердое тело, часть мембраны χ , которая определяется

соотношениями: $X^* < X < X^* + D_X$, $Y = H$, $Z^* < Z < Z^* + D_Z$; m_χ — масса тела χ^* ; $F_\xi \mathbf{e}_1$ — внешняя сила, действующая на тело ξ^* ; $f_\xi = T^2 F_\xi / (m_\xi L) = (\widehat{f}_\xi / Re) \sin(2\pi\tau + \psi_\xi)$ ($\widehat{f}_\xi \geq 0$, $0 \leq \psi_\xi < 2\pi$ — параметры); $F_\chi \mathbf{e}_1$ — внешняя сила, действующая на тело χ^* ; $f_\chi = T^2 F_\chi / (m_\chi L) = (\widehat{f}_\chi / Re) \sin(2\pi\tau + \psi_\chi)$ ($\widehat{f}_\chi \geq 0$, $0 \leq \psi_\chi < 2\pi$ — параметры); $\varkappa_\xi = \rho D_X D_Z L / m_\xi$; $G_\xi \mathbf{e}_1$ — сила, действующая на тело ξ^* со стороны жидкости; $g_\xi = T^2 G_\xi / (m_\xi L) = -(\varkappa_\xi / Re) (\partial v / \partial y)|_{y=1}$; $\varkappa_\chi = \rho D_X D_Z L / m_\chi$; $G_\chi \mathbf{e}_1$ — сила, действующая на тело χ^* со стороны жидкости; $g_\chi = T^2 G_\chi / (m_\chi L) = (\varkappa_\chi / Re) [(\partial v / \partial y)|_{y=h+0} - (\partial v / \partial y)|_{y=h-0}]$.

Задачу о движении гидромеханической системы составляют уравнения движения тел ξ , χ (тел ξ^* , χ^*), уравнение Навье—Стокса и условия на границах областей Ω_η , Ω_ξ :

$$\frac{du}{d\tau} = f_\xi + g_\xi; \quad (1)$$

$$\frac{dw}{d\tau} = f_\chi + g_\chi; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \quad \text{в} \quad \Omega_\eta, \Omega_\xi; \quad (3)$$

$$v = u_\eta \quad \text{при} \quad y = 0; \quad (4)$$

$$v = w \quad \text{при} \quad y = h - 0, \quad y = h + 0; \quad (5)$$

$$v = u_\xi \quad \text{при} \quad y = 1. \quad (6)$$

2. Решение задачи

Из (1)—(6) следует

$$p = c_\eta \quad \text{в} \quad \Omega_\eta, \quad p = c_\xi \quad \text{в} \quad \Omega_\xi \quad (7)$$

(c_η , c_ξ — функции τ);

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{в} \quad \Omega_\eta; \quad (8)$$

$$v = u_\eta \quad \text{при} \quad y = 0, \quad v = w \quad \text{при} \quad y = h - 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{в} \quad \Omega_\xi; \quad (10)$$

$$v = w \quad \text{при} \quad y = h + 0, \quad v = u_\xi \quad \text{при} \quad y = 1; \quad (11)$$

$$\frac{du}{d\tau} = f_\xi - \frac{\varkappa_\xi}{Re} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=1}; \quad (12)$$

$$\frac{dw}{d\tau} = f_\chi + \frac{\varkappa_\chi}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=h+0} - \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=h-0} \right). \quad (13)$$

Будем рассматривать задачу (8)—(13) при малых по сравнению с единицей значениях ε . Применим метод разложения по степеням малого параметра [12, 13]. Предположим, что

$$v \sim v_0 + \varepsilon v_1, \quad u_\xi \sim u_0 + \varepsilon u_1, \quad w \sim w_0 + \varepsilon w_1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (14)$$

Согласно (8)—(14) в ε^N -приближении ($N = 0, 1$) имеем

$$\frac{\partial v_N}{\partial \tau} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_N}{\partial y^2} \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}_\eta; \quad (15)$$

$$v_N = (1 - N)u_\eta \quad \text{при} \quad y = 0; \quad (16)$$

$$v_N = (1 - N)w_0 + N \left[w_1 - (\sin 2\pi\tau) \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] \quad \text{при} \quad y = \bar{h} - 0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial v_N}{\partial \tau} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_N}{\partial y^2} \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}_\xi; \quad (18)$$

$$v_N = (1 - N)w_0 + N \left[w_1 - (\sin 2\pi\tau) \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] \quad \text{при} \quad y = \bar{h} + 0; \quad (19)$$

$$v_N = u_N \quad \text{при} \quad y = 1; \quad (20)$$

$$\frac{du_N}{d\tau} = (1 - N) \left[f_\xi - \frac{\varkappa_\xi}{Re} \frac{\partial v_0}{\partial y} \Big|_{y=1} \right] - N \frac{\varkappa_\xi}{Re} \frac{\partial v_1}{\partial y} \Big|_{y=1}; \quad (21)$$

$$\frac{dw_N}{d\tau} = (1 - N) \left[f_\chi + \frac{\varkappa_\chi}{Re} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}+0} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}-0} \right) \right] +$$

$$N \frac{\varkappa_\chi}{Re} \left[\frac{\partial v_1}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}+0} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}-0} + (\sin 2\pi\tau) \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \Big|_{y=\bar{h}+0} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \Big|_{y=\bar{h}-0} \right) \right]; \quad (22)$$

Здесь $\bar{\Omega}_\eta$, $\bar{\Omega}_\xi$ — области соответственно $0 < y < \bar{h}$, $\bar{h} < y < 1$ ($-\infty < X < \infty$, $-\infty < Z < \infty$).

Пусть $N = 0$. Сделаем в (15)–(22) подстановку

$$v_0 = \text{Real}(\tilde{v}_0 e^{2\pi i\tau}), \quad u_0 = \text{Real}(\tilde{u}_0 e^{2\pi i\tau}), \quad w_0 = \text{Real}(\tilde{w}_0 e^{2\pi i\tau}), \quad (23)$$

где \tilde{v}_0 — функция y ; \tilde{u}_0 , \tilde{w}_0 — постоянные. Используя полученные в результате этого соотношения, определим задачу

$$\frac{d^2 \tilde{v}_0}{dy^2} = q^2 \tilde{v}_0 \quad \text{для} \quad 0 < y < \bar{h}; \quad (24)$$

$$\tilde{v}_0 = -i\tilde{u}_\eta e^{i\varphi} \quad \text{при} \quad y = 0; \quad (25)$$

$$\tilde{v}_0 = \tilde{w}_0 \quad \text{при} \quad y = \bar{h} - 0; \quad (26)$$

$$\frac{d^2 \tilde{v}_0}{dy^2} = q^2 \tilde{v}_0 \quad \text{для} \quad \bar{h} < y < 1; \quad (27)$$

$$\tilde{v}_0 = \tilde{w}_0 \quad \text{при} \quad y = \bar{h} + 0; \quad (28)$$

$$\tilde{v}_0 = \tilde{u}_0 \quad \text{при} \quad y = 1; \quad (29)$$

$$q^2 \tilde{u}_0 = -i\hat{f}_\xi e^{i\psi_\xi} - \varkappa_\xi \frac{d\tilde{v}_0}{dy} \Big|_{y=1}; \quad (30)$$

$$q^2 \tilde{w}_0 = -i\hat{f}_\chi e^{i\psi_\chi} + \varkappa_\chi \left(\frac{d\tilde{v}_0}{dy} \Big|_{y=\bar{h}+0} - \frac{d\tilde{v}_0}{dy} \Big|_{y=\bar{h}-0} \right). \quad (31)$$

Здесь $q = (1 + i)\sqrt{\pi Re}$.

Решение уравнения (24), удовлетворяющее условиям (25), (26), имеет вид

$$\tilde{v}_0 = \frac{\tilde{w}_0 \text{sh} qy - i\tilde{u}_\eta e^{i\varphi} \text{sh} q(\bar{h} - y)}{\text{sh} q\bar{h}}. \quad (32)$$

Решение уравнения (27), удовлетворяющее условиям (28), (39), имеет вид

$$\tilde{v}_0 = \frac{\tilde{u}_0 \operatorname{sh} q(y - \bar{h}) + \tilde{w}_0 \operatorname{sh} q(1 - y)}{\operatorname{sh} q(1 - \bar{h})}. \quad (33)$$

Используя (30)–(33), получим

$$\tilde{u}_0 = A_u(B_u \tilde{w}_0 + D(\hat{f}_\xi/Re)e^{i\psi_\xi}), \quad \tilde{w}_0 = A_w(B_w \tilde{u}_0 + C\tilde{u}_\eta e^{i\varphi} + D(\hat{f}_\chi/Re)e^{i\psi_\chi}), \quad (34)$$

где

$$A_u = \frac{\operatorname{sh} q(1 - \bar{h})}{\varkappa_\xi \operatorname{ch} q(1 - \bar{h}) + q \operatorname{sh} q(1 - \bar{h})}; \quad B_u = \frac{\varkappa_\xi}{\operatorname{sh} q(1 - \bar{h})};$$

$$A_w = \frac{\operatorname{sh} q \bar{h} \operatorname{sh} q(1 - \bar{h})}{\varkappa_\chi \operatorname{sh} q + q \operatorname{sh} q \bar{h} \operatorname{sh} q(1 - \bar{h})}; \quad B_w = \frac{\varkappa_\chi}{\operatorname{sh} q(1 - \bar{h})}; \quad C = -\frac{i\varkappa_\chi}{\operatorname{sh} q \bar{h}}; \quad D = -\frac{q}{2\pi}.$$

Из (34) следует

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0 &= \alpha_u(\hat{f}_\xi/Re)e^{i\psi_\xi} + \beta_u(\hat{f}_\chi/Re)e^{i\psi_\chi} + \gamma_u \tilde{u}_\eta e^{i\varphi}, \\ \tilde{w}_0 &= \alpha_w(\hat{f}_\xi/Re)e^{i\psi_\xi} + \beta_w(\hat{f}_\chi/Re)e^{i\psi_\chi} + \gamma_w \tilde{u}_\eta e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_u &= A_u D Q; & \beta_u &= A_u B_u A_w D Q; & \gamma_u &= A_u B_u A_w C Q; \\ \alpha_w &= A_u A_w B_w D Q; & \beta_w &= A_w D Q; & \gamma_w &= A_w C Q \end{aligned}$$

($Q = 1/(1 - A_u B_u A_w B_w)$).

Пусть $N = 1$. Согласно (22), (32), (33) имеем

$$\frac{dw_1}{d\tau} = \frac{\varkappa_\chi}{Re} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}+0} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}-0} \right); \quad (36)$$

Представим условия (17), (19) в виде

$$v_1 = w_1 + \frac{1}{2} \operatorname{Imag} \left[\frac{d\tilde{v}_0}{dy} \left(1 - e^{4\pi i \tau} \right) \right] \quad \text{при} \quad y = \bar{h} - 0, \quad y = \bar{h} + 0. \quad (37)$$

Произведем усреднение (15), (16), (18), (20), (21), (36), (37) по безразмерному времени τ . Представим полученные в результате этого уравнения и условия в виде

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} = 0 \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}_\eta; \quad (38)$$

$$\bar{v} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0; \quad (39)$$

$$\bar{v} = \bar{w} + \frac{1}{2} \operatorname{Imag} \left(\frac{d\tilde{v}_0}{dy} \right) \quad \text{при} \quad y = \bar{h} - 0; \quad (40)$$

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} = 0 \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}_\xi; \quad (41)$$

$$\bar{v} = \bar{u} \quad \text{при} \quad y = 1; \quad (42)$$

$$\bar{v} = \bar{w} + \frac{1}{2} \operatorname{Imag} \left(\frac{d\tilde{v}_0}{dy} \right) \quad \text{при} \quad y = \bar{h} + 0; \quad (43)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dy}\Big|_{y=1} = 0; \quad (44)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dy}\Big|_{y=\bar{h}-0} = \frac{d\bar{v}}{dy}\Big|_{y=\bar{h}+0}. \quad (45)$$

Здесь $\bar{v} = \langle v_1 \rangle$; $\bar{u} = \langle u_1 \rangle$; $\bar{w} = \langle w_1 \rangle$ ($\langle \dots \rangle = \int_{\tau}^{\tau+1} \dots d\tau'$ — оператор усреднения по τ).
Задача (15)—(22) имеет решение

$$\begin{aligned} v_1 &= \bar{v} + \tilde{v} = \bar{v} + \text{Real}(\tilde{v}_1 e^{4\pi i \tau}), \\ u_1 &= \bar{u} + \tilde{u} = \bar{u} + \text{Real}(\tilde{u}_1 e^{4\pi i \tau}), \quad w_1 = \bar{w} + \tilde{w} = \bar{w} + \text{Real}(\tilde{w}_1 e^{4\pi i \tau}), \end{aligned} \quad (46)$$

где \tilde{v}_1 — функция y ; \tilde{u}_1, \tilde{w}_1 — постоянные; $\tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{w}$ — решение задачи

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \quad \text{в} \quad \Omega_\eta, \Omega_\xi; \quad (47)$$

$$\tilde{v} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0; \quad (48)$$

$$\tilde{v} = \tilde{w} - \frac{1}{2} \text{Imag} \left(\frac{d\tilde{w}_0}{dy} e^{4\pi i \tau} \right) \quad \text{при} \quad y = \bar{h} - 0, \quad y = \bar{h} + 0; \quad (49)$$

$$\tilde{v} = \tilde{u} \quad \text{при} \quad y = 1; \quad (50)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = -\frac{\varkappa_\xi}{Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \Big|_{y=1}; \quad (51)$$

$$\frac{d\tilde{w}}{d\tau} = \frac{\varkappa_\chi}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}+0} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}-0} \right). \quad (52)$$

Отметим, что решение $\tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{w}$ задачи (47)—(52) в отношении дальнейшего рассмотрения никакой сколь-нибудь существенной значимостью не обладает.

Из (38)—(40) следует

$$\bar{v} = A_\eta y \quad \text{для} \quad 0 \leq y \leq \bar{h} - 0, \quad (53)$$

где

$$A_\eta = \frac{1}{\bar{h}} (\bar{w} + D_-) \quad \left(D_- = \frac{1}{2} \text{Imag} \left(\frac{d\tilde{w}_0}{dy} \Big|_{y=\bar{h}-0} \right) \right).$$

Из (41)—(43) следует

$$\bar{v} = A_\xi y + B \quad \text{для} \quad \bar{h} + 0 \leq y \leq 1, \quad (54)$$

где

$$A_\xi = \frac{1}{1-\bar{h}} (\bar{u} - \bar{w} - D_+); \quad B = \frac{1}{1-\bar{h}} (-\bar{h}\bar{u} + \bar{w} + D_+) \quad \left(D_+ = \frac{1}{2} \text{Imag} \left(\frac{d\tilde{w}_0}{dy} \Big|_{y=\bar{h}+0} \right) \right).$$

Используя (44), (45), (53), (54), получим

$$\bar{v} = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leq y \leq \bar{h} - 0; \quad (55)$$

$$\bar{v} = \bar{u} \quad \text{для} \quad \bar{h} + 0 \leq y \leq 1; \quad (56)$$

$$\bar{u} = D_+ - D_-; \quad (57)$$

$$\bar{w} = -D_- . \quad (58)$$

Формулами

$$v = v_0 + \varepsilon v_1, \quad u_\xi = u_0 + \varepsilon u_1, \quad w = w_0 + \varepsilon w_1 \quad (59)$$

и (7), (23), (32), (33), (35), (46), (55)–(58) определяется приближенное решение задачи (1)–(6). Данное решение, в частности, свидетельствует о наличии эффекта, состоящего в том, что (на фоне колебаний) свободные части гидромеханической системы — жидкость, пластина ξ и мембрана χ — совершают стационарное движение.

3. Среднее движение системы

Рассмотрим вопрос о среднем по времени движении жидкости, пластины ξ и мембраны χ . Используя (23), (32), (33), (35), (46), (55)–(59), найдем

$$\langle \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}_\eta; \quad (60)$$

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \varepsilon(D_+ - D_-)\mathbf{e}_1 \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}_\xi; \quad (61)$$

$$\langle u_\xi \rangle = \varepsilon(D_+ - D_-), \quad \langle w \rangle = -\varepsilon D_- . \quad (62)$$

Соотношения (60)–(62) выполняются для любых значений числа Рейнольдса $Re > 0$.

Отметим, что, в среднем по времени, жидкость в области $\bar{\Omega}_\eta$ покоится, скорость жидкости в области $\bar{\Omega}_\xi$ совпадает со скоростью пластины — вне зависимости от скорости стенки и внешних воздействий на свободные твердые части гидромеханической системы.

Пусть значения Re малы по сравнению с единицей. Используя (61), (62), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim \left(\varepsilon \frac{\hat{f}_\chi}{2\kappa_\chi} \cos \psi_\chi \right) \mathbf{e}_1 \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}_\xi \quad \text{при} \quad Re \rightarrow 0; \quad (63)$$

$$\langle u_\xi \rangle \sim \varepsilon \frac{\hat{f}_\chi}{2\kappa_\chi} \cos \psi_\chi, \quad \langle w \rangle \sim \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\hat{f}_\xi}{\kappa_\xi} \cos \psi_\xi + \frac{\hat{f}_\chi}{\kappa_\chi} \cos \psi_\chi \right) \quad \text{при} \quad Re \rightarrow 0. \quad (64)$$

Формулы (63), (64) свидетельствуют о том, что при малых значениях Re среднее по времени движение рассматриваемых свободных частей гидромеханической системы (жидкости в области $\bar{\Omega}_\xi$, пластины ξ , мембраны χ) не зависит от заданного движения стенки η ; наличие или отсутствие среднего движения данных свободных частей системы определяется только внешними воздействиями на свободные твердые части системы (“управляющими параметрами” $\hat{f}_\xi, \psi_\xi, \hat{f}_\chi, \psi_\chi$).

Согласно (63), (64) на фоне колебаний имеет место, в частности, следующее.

1. Если $\hat{f}_\xi \cos \psi_\xi = 0$, $\hat{f}_\chi \cos \psi_\chi = 0$, то гидромеханическая система находится в состоянии покоя.
2. Если $\hat{f}_\xi \cos \psi_\xi = 0$, $\hat{f}_\chi \cos \psi_\chi \neq 0$, то жидкость в области $\bar{\Omega}_\xi$, пластина ξ и мембрана χ совершают движение с одной и той же скоростью — “как одно целое”; при $\cos \psi_\chi > 0$ данное движение происходит в направлении, совпадающем с направлением оси X ; при $\cos \psi_\chi < 0$ — в направлении, противоположном направлению оси X .
3. Если $\hat{f}_\xi \cos \psi_\xi \neq 0$, $\hat{f}_\chi \cos \psi_\chi = 0$, то жидкость в области $\bar{\Omega}_\xi$ и пластина ξ покоятся, мембрана χ движется — при $\cos \psi_\xi > 0$ в направлении, совпадающем с направлением оси X , при $\cos \psi_\xi < 0$ в направлении, противоположном направлению оси X .

4. Если $\widehat{f}_\xi \cos \psi_\xi \neq 0$, $\widehat{f}_\chi \cos \psi_\chi \neq 0$, то:

а) при $\cos \psi_\xi > 0$, $\cos \psi_\chi > 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}_\xi$, пластина ξ и мембрана χ совершают движение в направлении, совпадающем с направлением оси X ; мембрана обгоняет жидкость и пластину;

б) при $\cos \psi_\xi < 0$, $\cos \psi_\chi < 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}_\xi$, пластина ξ и мембрана χ совершают движение в направлении, противоположном направлению оси X ; мембрана обгоняет жидкость и пластину;

с) при $\cos \psi_\xi > 0$, $(\widehat{f}_\xi/\varkappa_\xi) \cos \psi_\xi + (\widehat{f}_\chi/\varkappa_\chi) \cos \psi_\chi = 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}_\xi$ и пластина ξ совершают движение в направлении, противоположном направлению оси X , мембрана χ покоится;

д) при $\cos \psi_\xi < 0$, $(\widehat{f}_\xi/\varkappa_\xi) \cos \psi_\xi + (\widehat{f}_\chi/\varkappa_\chi) \cos \psi_\chi = 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}_\xi$ и пластина ξ совершают движение в направлении, совпадающем с направлением оси X , мембрана χ покоится;

е) при $\cos \psi_\xi > (\varkappa_\xi/\varkappa_\chi)(\widehat{f}_\chi/\widehat{f}_\xi)$, $\cos \psi_\chi < 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}_\xi$ и пластина ξ совершают движение в направлении, противоположном направлению оси X , мембрана χ движется в направлении, совпадающем с направлением оси X ;

ф) при $\cos \psi_\xi < 0$, $\cos \psi_\chi > (\varkappa_\chi/\varkappa_\xi)(\widehat{f}_\xi/\widehat{f}_\chi)$ жидкость в области $\bar{\Omega}_\xi$, пластина ξ и мембрана χ совершают движение в направлении, совпадающем с направлением оси X , мембрана отстает от жидкости и пластины.

Найденным решением задачи (1)–(6) и формулами (60)–(64) определяется многообразие особенностей динамики представленной гидромеханической системы с вязкой жидкостью, совершающей прямолинейное движение.

В числе нетривиальных моментов, касающихся рассмотренного движения системы, заслуживает быть выделенным эффект, способный казаться “абсолютно алогичным”, состоящий в том, что (согласно (64)) движение пластины не зависит от оказываемого на нее внешнего силового воздействия.

Заключение

В данной работе поставлена и решена новая задача о движении гидромеханической системы с вязкой жидкостью при периодических по времени воздействиях. В рассмотренной задаче жидкость способна совершать только простейшее, прямолинейное движение. Тем не менее, динамика системы характеризуется наличием ряда существенных особенностей, таких как имеющие место на фоне колебаний неподвижность жидкости в области $\bar{\Omega}_\eta$, движение жидкости в области $\bar{\Omega}_\xi$ и (свободной) пластины ξ с одной и той же скоростью, а также других (обнаруженных в работе) эффектов, представляющих самостоятельный интерес и демонстрирующих управляющие возможности периодических воздействий, не имеющих выделенного направления в пространстве.

Полученные результаты могут использоваться, в частности, в научном поиске методов организации заданной динамики гидромеханических систем.

Список литературы

1. Челомей В. Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Доклады АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 62–67.
2. Сенницкий В. Л. О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1985. Т. 26, № 5. С. 19–23.
3. Сенницкий В. Л. Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // Прикладная механика и техническая физика. 1986. Т. 27, № 4. С. 31–36.
4. Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л. О движении тела в вибрирующей жидкости // Доклады АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.

Сенницкий В. Л.

Известия вузов. ПНД, 2026

5. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. О движении твердого тела в вибрирующей жидкости // В кн.: Конвективные течения. Пермь: Издательство Пермского педагогического института, 1987. С. 61–71.
6. Сенницкий В. Л. Движение включений в колеблющейся жидкости // Сибирский физический журнал. 1995. № 4. С. 18–26.
7. Сенницкий В. Л. Парадоксальное движение жидкости // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2017. № 8-1. С. 28–33.
8. Власова О. А., Козлов В. Г., Козлов Н. В. Динамика тяжелого тела, находящегося во вращающейся кювете с жидкостью, при модуляции скорости вращения // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59, № 2. С. 39–49.
9. Карпунин И. Э., Козлов В. Г. Осцилляционная динамика границы раздела жидкостей в радиальной ячейке Хеле–Шоу // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 3. С. 62–73.
10. Сенницкий В. Л. Эффекты вращательного движения жидкости между криволинейными стенками // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 2. С. 219–232. DOI: 10.18500/0869-6632-003155.
11. Сенницкий В. Л. О структуре течения вязкой жидкости при периодических воздействиях, не имеющих выделенного направления в пространстве // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4. С. 531–544. DOI: 10.18500/0869-6632-003163.
12. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 352 с.
13. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М: ГИФ-МЛ, 1958. 408 с.

References

1. Chelomei VN. Paradoxes in mechanics caused by vibrations // Doklady Akad. Nauk SSSR. 1983. V. 270, N. 1. P. 62–67 (in Russian).
2. Sennitskii VL. Motion of a circular cylinder in a vibrating liquid. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1985;26(5):620–623. DOI: 10.1007/BF00915307.
3. Sennitskii VL. Motion of a sphere in fluid caused by vibrations of another sphere. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1986;27:501–505. DOI: 10.1007/BF00910190.
4. Lugovtsov BA, Sennitskii VL. Motion of a body in a vibrating liquid. Sov. Phys. Doklady. 1986;289(2):314–317 (in Russian).
5. Lyubimov DV, Lyubimova TP, Cherepanov AA. On the motion of a solid body in a vibrating fluid. In: Convective Flows. Perm: Perm. Ped. Institute Publishing; 1987. P. 61–71 (in Russian).
6. Sennitskii VL. The motion of inclusions in an oscillating liquid. Siberian Physical Journal. 1995;(4):18–26 (in Russian).
7. Sennitskii VL. Paradoxical motion of a liquid. International Journal of Applied and Fundamental Research. 2017;(8):28–33 (in Russian). DOI: 10.17513/mjpf.11753.
8. Vlasova OA, Kozlov VG, Kozlov NV. Dynamics of a heavy body in a rotating liquid-filled cavity under modulated rotation // Prikladnaia Mehanika i Tehnicheskaiia Fizika. 2018. V. 59, N. 2. P. 39–49 (in Russian).
9. Karpunin IE, Kozlov VG. Oscillational dynamics of the separation boundary of liquids in a HeleShaw radial cell // Applied Mechanics and Technical Physics. 2023. V. 64, N. 3. P. 62–73. DOI: 10.15372/PMTF202215190 (in Russian).

10. Sennitskii VL. Effects of rotational motion of a liquid between curvilinear walls // *Izvestiya visshih uchebnykh zavedenii. Prikladnaya nelineinaya dinamika*. 2025. V. 33, N. 2. P. 219–232. DOI: 10.18500/0869-6632-003155 (in Russian).
11. Sennitskii VL. On the structure of a viscous liquid flow under periodic influences which have no predominant direction in space // *Izvestiya visshih uchebnykh zavedenii. Prikladnaya nelineinaya dinamika*. 2025. V. 33, N. 4. P. 531–544. DOI: 10.18500/0869-6632-003163 (in Russian).
12. Krilov NM, Bogolyubov NN. Introduction in non-linear mechanics. Moscow-Ijevsk: NITs Reguliarnaya i haoticheskaya dinamika, 2004. 352 p. (in Russian).
13. Bogolyubov NN, Mitropolskii YA. Asimptotic methods in the theory of non-linear oscillations. M.: GIF-ML, 1958. 408 p. (in Russian).