

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(3)

Научная статья
УДК 534.11

DOI: 10.18500/0869-6632-003214
EDN: VNVCSZS

Частоты колебаний цепного маятника в модели со слабой нелинейностью

Е. А. Дегилевич¹✉, А. С. Смирнов^{1,2}

¹Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия

E-mail: ✉degilevichegor@gmail.com, smirnov.alexey.1994@gmail.com

Поступила в редакцию 11.01.2026, принята к публикации 25.01.2026,

опубликована онлайн 15.02.2026, опубликована 29.05.2026

Аннотация. Цель настоящего исследования — построить аналитическое решение по определению поправок к частотам колебаний цепного маятника для исходной модели с распределенными параметрами и для стержневой конечномерной модели с сосредоточенными параметрами в зависимости от амплитуды колебаний; проверить сходимость решения из конечномерной модели к решению из распределенной модели при увеличении количества сегментов, из которых состоит модель. **Методы.** Для описания колебательного движения цепного маятника при наличии слабой нелинейности применялся аналитический подход на основе асимптотических методов, включающий использование уравнения гармонического баланса. Конечномерная модель представляет собой стержневую схему с произвольным числом инерционных стержней, шарнирно связанных между собой. В качестве численных экспериментов с конечномерной моделью были проведены симуляции ее свободных колебаний методами многотельной динамики, а также осуществлено интегрирование матричного уравнения ее движения при наличии коллинеарного управления, позволяющего разгонять систему по формам колебаний. **Результаты.** Выведены формулы для вычисления частот колебаний распределенной и конечномерной моделей цепного маятника при учете слабой нелинейности в зависимости от номера частоты, амплитуды колебаний и количества стержней для конечномерной модели. Показана сходимость поправочных коэффициентов из конечномерной модели цепного маятника к значениям аналогичных коэффициентов из распределенной модели при возрастании количества стержней. Построены графические иллюстрации результатов расчетов для наглядной оценки моделей и их сопоставления. **Заключение.** На основе полученных формул и графиков определено, что стержневая конечномерная схема пригодна для описания поведения цепного маятника при наличии слабой нелинейности. При колебаниях системы в рамках этой модели на низшей частоте достаточно порядка десяти стержней для корректного описания и математического моделирования цепного маятника. В случае более сложного движения по второй или третьей форме колебаний потребуется использовать не меньше тридцати стержней для обеспечения достаточной плавности форм колебаний.

Ключевые слова: цепной маятник, слабая нелинейность, частоты колебаний, распределенная модель, конечномерная модель, многомерные системы.

Для цитирования: Дегилевич Е. А., Смирнов А. С. Частоты колебаний цепного маятника в модели со слабой нелинейностью // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 3. С. 432–452. DOI: 10.18500/0869-6632-003214. EDN: VNVCSZS

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Oscillation frequencies of a chain pendulum in a model with weak nonlinearity

E. A. Degilevich¹✉, A. S. Smirnov^{1,2}

¹Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS, St. Petersburg, Russia

²Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia

E-mail: ✉degilevichgor@gmail.com, smirnov.alexey.1994@gmail.com

Received 11.01.2026, accepted 25.01.2026, available online 15.02.2026, published 29.05.2026

Abstract. The *purpose* of this study is to derive an analytical solution for determining corrections to the oscillation frequencies of a chain pendulum for the initial distributed-parameter model and the rod finite-dimensional model with concentrated parameters, depending on the oscillation amplitude. Check the convergence of the solution from the finite-dimensional model to the solution from the distributed model as the number of segments that make up the model increases. *Methods.* To describe the oscillatory motion of a chain pendulum in the presence of weak nonlinearity, an analytical approach based on asymptotic methods was used, including the harmonic balance equation. The finite-dimensional model is a rod system with an arbitrary number of inertial rods, pivotally connected to each other. As numerical experiments with a finite-dimensional model, simulations of its free oscillations were carried out using multibody dynamics methods, and the integration of the matrix equation of its motion was also carried out in the presence of collinear control, which allows the system to be accelerated according to the oscillation modes. *Results.* Formulas are derived for calculating the oscillation frequencies of distributed model and finite-dimensional model of a chain pendulum, accounting for weak nonlinearity, in the dependence of the frequency number, oscillation amplitude, and the number of rods for the finite-dimensional model. The convergence of correction factors from the finite-dimensional model of a chain pendulum to the values of similar coefficients from the distributed model is demonstrated as the number of rods increases. Graphical illustrations of the calculation results are plotted for visual evaluation and comparison of the models. *Conclusion.* Based on the obtained formulas and graphs, it was determined that the rod finite-dimensional model is suitable for describing the behavior of a chain pendulum in the presence of weak nonlinearity. In the case of system oscillations in this model at the lowest frequency, the order of ten rods is sufficient for the correct description and mathematical modeling of a chain pendulum. In the case of more complex motion according to the second or third oscillation mode, at least thirty rods are required to ensure sufficient smoothness of the oscillation modes.

Keywords: chain pendulum, weak nonlinear, oscillation frequencies, distributed model, finite-dimensional model, multidimensional systems.

For citation: Degilevich EA, Smirnov AS. Oscillation frequencies of a chain pendulum in a model with weak nonlinearity. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(3):432–452. DOI: 10.18500/0869-6632-003214

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Исследованию модели цепного маятника (ЦМ), с помощью которого можно описывать поведение цепей, тросов, канатов, тяжелых нитей, посвящено значительное число работ [1–5]. В частности, особый интерес представляет динамический анализ ЦМ по определению частот колебаний, когда ЦМ входит в виде конструктивной единицы в самые разнообразные механизмы и сооружения. Так, например, еще на этапе проектирования анализ частот колебаний троса перегрузочного крана может митигировать риски нежелательных колебаний, вызванных ветровым резонансом [6] или качкой на волнах, если кран располагается на судне. В настоящее время появляются работы, целью которых выступает определение оптимальных методов и алгоритмов для численной симуляции динамики цепных систем. Так, в работе [7] проводится моделирование троса перегрузочного крана методом интегрирования Верле с переменным числом сегментов, позволяющим адаптивно подбирать число разбиений троса в зависимости от режима работы крана с сохранением необходимой точности. В работе [8] изучается динамика ЦМ, подвешенного на козловом кране. Цепь моделируется как непрерывный однородный трос без трения с применением метода аппроксимации Ритца. Также уделяется особое внимание управлению и стабилизации

вертикального ЦМ, представляющего собой последовательное соединение жестких звеньев, соединенных сферическими шарнирами [9, 10].

Отдельный интерес представляет изучение нелинейных колебаний ЦМ, поскольку в случае раскачки цепей и тросов от ветра и сейсмике опор амплитуды колебаний могут быть достаточно велики, что уже не позволит производить расчеты при помощи теории малых колебаний. Существуют работы по анализу нелинейных колебаний трехзвенного маятника [11], однако вместе с тем аналитическое исследование нелинейных колебаний многозвенных маятников и цепных систем в случае, когда число их звеньев достаточно велико или стремится к бесконечности, а поведение системы может описываться моделями как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами, представлено недостаточно полно. Основной целью настоящего исследования и является устранение этого пробела, а именно, оно посвящено определению поправочных слагаемых в выражениях для частот нелинейных колебаний ЦМ.

Для проверки результатов аналитического расчета распределенной модели целесообразно также провести частотный анализ с применением конечномерных моделей, которые себя успешно зарекомендовали при анализе цепей [12, 13]. Аналитическое решение для конечномерных моделей ЦМ с применением стержневой схемы строится по схожему асимптотическому подходу, что и для распределенной модели. Помимо аналитического решения, в настоящем исследовании для моделирования и симуляций свободных колебаний ЦМ с учетом нелинейности применяется программный комплекс MSC Adams, который отлично себя проявляет в задачах, связанных с моделированием многотельных систем. Возможность оценки статики, кинематики и динамики делает MSC Adams эффективным инструментом, применяемым как в инженерном деле, так и в научной деятельности. Так, в работах [14, 15] данное программное обеспечение позволило описать поведение троса в системе цепных канатных дорог в квазистатике и смоделировать систему цепного привода контейнера с хорошим совпадением с экспериментальными данными. Также для проверки результатов аналитического расчета следует воспользоваться еще одной численной процедурой, осуществив интегрирование матричного уравнения движения системы при наличии коллинеарного управления, позволяющего разгонять систему по формам ее колебаний в отдельности с плавным дрейфом как частоты, так и самой формы колебаний по мере перехода из линейной области в нелинейную, что востребовано в робототехнике и биомеханике [11, 16].

1. Аналитическое определение поправочных коэффициентов

1.1. Распределенная модель. Рассмотрим распределенную модель ЦМ (рис. 1, а) длины L с массой $M = \rho L$, где ρ – погонная плотность. Уравнения движения системы имеют вид [17]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left[T \left(1 + \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right] + \rho g, \quad \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial v}{\partial s} \right), \quad (1)$$

где s – координата вдоль цепи, отсчитываемая от ее верхнего конца; $u(s, t)$ и $v(s, t)$ – проекции вектора перемещения точки цепи с координатой s в момент времени t на оси x и y соответственно; g – ускорение свободного падения; T – усилие в цепи. При этом также имеет место условие связи

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 = 1, \quad (2)$$

которое можно сразу записать в форме, удобной для последующих действий:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

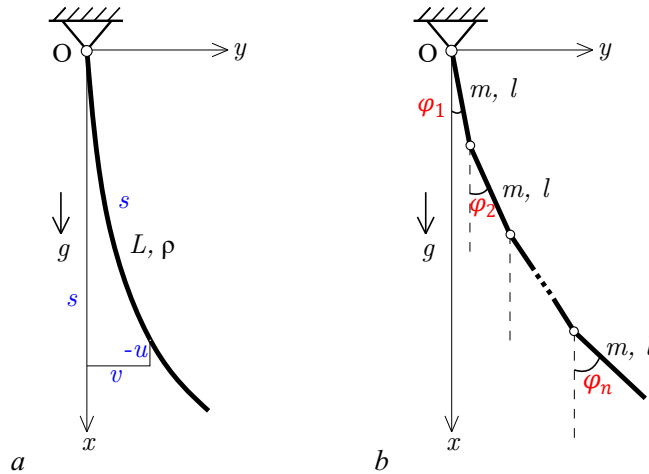


Рис. 1. Модели цепного маятника: *a* – распределенная модель; *b* – конечномерная модель
 Fig. 1. Chain pendulum models: *a* – distributed model; *b* – finite-dimensional model

Известно, что в рамках линейной модели формы колебаний ЦМ будут [18]:

$$V_n(s) = J_0 \left(\lambda_n \sqrt{1 - \frac{s}{L}} \right), \quad (4)$$

где корни λ_n определяются из частотного уравнения $J_0(\lambda) = 0$ [17, 18].

Определим частоты слабонелинейных колебаний ЦМ при движении системы по каждой из форм колебаний V_n в отдельности. При этом рассмотрение модели со слабой нелинейностью означает учет влияния наиболее значимых нелинейных слагаемых, имеющих третий порядок малости. В рамках поставленной задачи приближенное решение представим в форме

$$v(s, t) = AV_n(s) \cos \psi, \quad \psi = \tilde{k}_n(A)t + \theta, \quad (5)$$

где A – величина, которая характеризует амплитуды колебаний всех точек ЦМ в поперечном направлении, ψ – полная фаза колебаний, θ – начальная фаза колебаний, \tilde{k}_n – частота колебаний в модели со слабой нелинейностью, зависящая от амплитуды. Ясно, что здесь уже необходимо учитывать и вертикальное перемещение, которым нельзя пренебрегать, как это делается в линейной модели. Далее необходимо определить зависимости частот \tilde{k}_n от A , которые отличаются от частот малых колебаний k_n за счет поправочных коэффициентов, вызванных нелинейными факторами. Искомые поправки могут быть найдены из уравнения гармонического баланса [19] по конкретной форме колебаний $V_n(s)$, которое записывается в виде

$$\int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi \int_0^L V_n(s) \left[\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right] ds = 0. \quad (6)$$

Для упрощения дальнейшего исследования введем в рассмотрение следующие безразмерные величины:

$$\tau = k_0 t, \quad z = \sqrt{1 - \frac{s}{L}}, \quad N = \frac{T}{\rho g L}, \quad \xi = \frac{u}{L}, \quad \eta = \frac{v}{L}, \quad a = \frac{A}{L}, \quad (7)$$

где $k_0 = \sqrt{g/L}$ – частота колебаний математического маятника длиной L . Стоит пояснить физический смысл введенных параметров: τ – безразмерное время, z – безразмерная координата,

N – безразмерное усилие, ξ и η – безразмерные поперечное и вертикальное перемещения соответственно, a – безразмерная амплитуда колебаний. С учетом (7) уравнения (1) примут более удобный вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = 1 + \frac{1}{2z} \frac{\partial}{\partial z} \left[N \left(\frac{1}{2z} \frac{\partial \xi}{\partial z} - 1 \right) \right], \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = \frac{1}{4z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{N}{z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right). \quad (8)$$

В случае малых колебаний величина ξ имеет более высокий порядок малости по сравнению с η , так как подъем цепи сильно меньше в сравнении с поперечным отклонением. С целью построения решения для модели со слабой нелинейностью будем считать, что η имеет первый порядок малости, а ξ , как нетрудно понять, будет иметь второй порядок малости. Из условия связи (3) найдем тогда с требуемой точностью

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{4z} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2. \quad (9)$$

Решение (5), с учетом (7), в безразмерном виде теперь примет следующий вид:

$$\eta(a, z, \psi) = aV_n(z) \cos \psi = aJ_0(\lambda_n z) \cos \psi, \quad \psi = \tilde{p}_n(a)\tau + \theta, \quad (10)$$

где было учтено выражение для форм колебаний ЦМ согласно (4), а также введены безразмерные частоты нелинейных колебаний $\tilde{p}_n = \tilde{k}_n/k_0$. Из (10) также следует, что величина a равна безразмерной амплитуде колебаний концевой точки ЦМ $s = L$, то есть $z = 0$. Подставим выражение для η согласно (10) в формулу (9), вследствие чего получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{4z} a^2 \lambda_n^2 J_1^2(\lambda_n z) \cos^2 \psi. \quad (11)$$

Проинтегрируем уравнение (11), воспользовавшись соотношением

$$\int \frac{J_1^2(\lambda_n z)}{z} dz = -\frac{1}{2} [J_0^2(\lambda_n z) + J_1^2(\lambda_n z)] + C, \quad C = \text{const}, \quad (12)$$

где C – константа интегрирования, и принимая во внимание граничное условие $\xi = 0$ при $z = 1$, отвечающее закрепленному концу ЦМ $s = 0$. В результате получим

$$\xi(a, z, \psi) = \frac{1}{8} a^2 \lambda_n^2 [J_1^2(\lambda_n) - J_0^2(\lambda_n z) - J_1^2(\lambda_n z)] \cos^2 \psi. \quad (13)$$

Сравнивая (10) и (13), можно удостовериться, что ξ в самом деле имеет второй порядок малости по a , тогда как η имеет первый порядок малости.

Обратимся теперь к вычислению безразмерного усилия N . Будем полагать его равным $N = N_0 + S$, где N_0 – усилие в линейной модели, которое не зависит от амплитуды колебаний ЦМ, S – малая добавка, возникающая при учете нелинейности и имеющая, как несложно показать, второй порядок малости по a . Подставим выражение для N в первое уравнение (8) и, опуская все нелинейные слагаемые, получим

$$0 = 1 - \frac{1}{2z} \frac{\partial N_0}{\partial z}, \quad N_0 = z^2, \quad (14)$$

где учтено, что $N_0 = 0$ на свободном конце ЦМ при $z = 0$. Теперь удержим в первом уравнении (8) слагаемые второго порядка малости по a и получим для определения S следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial S}{\partial z} = -2z \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \xi}{\partial z} \right). \quad (15)$$

Для определения S необходимо проинтегрировать уравнение (15). Отметим, что второе слагаемое в правой части уравнения (15) само по себе является производной некоторой функции по z , поэтому остается вычислить интеграл только от первого слагаемого, которое, согласно формуле (13), примет вид

$$-2z \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = \frac{1}{8} a^2 \lambda_n^4 z [J_1^2(\lambda_n) - J_0^2(\lambda_n z) - J_1^2(\lambda_n z)] \cos 2\psi. \quad (16)$$

Воспользовавшись табличными интегралами из [20] с учетом условия $S = 0$ при $z = 0$, получим после ряда преобразований следующее выражение:

$$S = \frac{1}{16} a^2 \lambda_n^2 [J_1^2(\lambda_n z) + \cos 2\psi ((1 - 2\lambda_n^2 z^2) J_1^2(\lambda_n z) + z^2 \lambda_n^2 J_1^2(\lambda_n) - 2z^2 \lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n z) + 2\lambda_n z J_0(\lambda_n z) J_1(\lambda_n z))] . \quad (17)$$

Из (17) следует, что величина S действительно имеет второй порядок малости по a , как этого и следовало ожидать.

Переходя далее к вычислению частот нелинейных колебаний, запишем уравнение гармонического баланса (6) в безразмерной форме:

$$\int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi \int_0^1 V_n(z) \left[z \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{N}{z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \right] dz = 0. \quad (18)$$

Очевидно, что поправка в выражении для частоты колебаний, ввиду учета слабой нелинейности, должна иметь второй порядок малости по a . В силу сказанного будем разыскивать частоту колебаний в следующем виде:

$$\tilde{p}_n(a) = p_n(1 + \gamma_n a^2), \quad (19)$$

где γ_n — искомый поправочный коэффициент, подлежащий вычислению из уравнения (18), а $p_n = \lambda_n/2$ — безразмерные частоты при малых колебаниях ЦМ [18]. Найдем выражение в квадратных скобках в уравнении гармонического баланса (18) с точностью до величин третьего порядка малости по a :

$$\left[\dots \right] = -az V_n(z) p_n^2 (1 + 2\gamma_n a^2) \cos \psi - \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dV_n}{dz} \right) a \cos \psi - Q, \quad (20)$$

где введено следующее обозначение для величины Q :

$$Q = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{S}{z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right), \quad (21)$$

имеющей третий порядок малости по a . Принимая во внимание, что форма колебаний ЦМ V_n (4) удовлетворяет дифференциальному уравнению [21]

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dV_n}{dz} \right) + 4p_n^2 V_n = 0, \quad (22)$$

можно упростить выражение (20) до более простого вида:

$$\left[\dots \right] = -2z \gamma_n V_n(z) a^3 p_n^2 \cos \psi - Q. \quad (23)$$

Подставляя выражение (23) в уравнение гармонического баланса (18), получим следующую формулу для поправочного коэффициента γ_n :

$$\gamma_n = -\frac{1}{a^3 p_n^2 J_1^2(\lambda_n) \pi} \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi \int_0^1 V_n(z) Q dz. \quad (24)$$

Для упрощения повторного интеграла, стоящего в правой части (24), необходимо учесть, что величина Q , согласно (21), является производной некоторой функции по z , а значит, для вычисления интеграла целесообразно воспользоваться правилом интегрирования по частям:

$$\int_0^1 V_n(z) Q dz = \frac{1}{4} \lambda_n a \cos \psi \left[S \frac{J_1(\lambda_n z)}{z} J_0(\lambda_n z) \Big|_0^1 - \lambda_n \int_0^1 S \frac{J_1^2(\lambda_n z)}{z} dz \right], \quad (25)$$

где учтено, что $\partial \eta / \partial z = a \lambda_n J_1(\lambda_n z) \cos \psi$. Первое слагаемое в квадратных скобках в выражении (25) равно нулю, так как $S = 0$ при $z = 0$, а функция $J_1(\lambda_n z)/z$ имеет конечный предел при $z \rightarrow 0$, тогда как при $z = 1$ имеем $J_0(\lambda_n) = 0$. Следовательно, выражение (24) примет вид

$$\gamma_n = \frac{1}{a^2 J_1^2(\lambda_n) \pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi \int_0^1 S \frac{J_1^2(\lambda_n z)}{z} dz, \quad (26)$$

где учтено, что $p_n = \lambda_n/2$. Наконец, остается подставить выражение для S согласно (17) в формулу (26) и вычислить интеграл по $d\psi$. После ряда преобразований запишем окончательное выражение для поправочного коэффициента γ_n в виде

$$\gamma_n = \frac{\lambda_n^2}{16 J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 F(z) dz, \quad (27)$$

где функция $F(z)$ имеет следующее представление:

$$F(z) = J_1^2(\lambda_n z) \left[\frac{3}{2} \frac{J_1^2(\lambda_n z)}{z} - z \lambda_n^2 J_1^2(\lambda_n z) + \lambda_n J_0(\lambda_n z) J_1(\lambda_n z) - z \lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n z) + \frac{1}{2} z \lambda_n^2 J_1^2(\lambda_n) \right]. \quad (28)$$

Невзирая на весьма громоздкую структуру функции (28), определенный интеграл в формуле (27) может быть легко вычислен с помощью численных процедур. В результате находим значения поправочного коэффициента для первых трех частот колебаний:

$$\gamma_1 = -0.04999, \quad \gamma_2 = -3.129, \quad \gamma_3 = -17.74. \quad (29)$$

Стоит обратить внимание, что все поправочные коэффициенты γ_n отрицательны, а значит, согласно выражению (19) частоты колебаний убывают с увеличением амплитуд колебаний. Более того, вклад поправочных слагаемых возрастает с увеличением номера частоты.

1.2. Конечномерная модель. Перейдем теперь к анализу конечномерной модели рассматриваемого ЦМ, которая состоит из n стержней, соединенных шарнирно, а значит, эта модель обладает n степенями свободы (рис. 1, б). В качестве обобщенных координат будем рассматривать углы отклонения стержней φ_k от вертикали. Каждый стержень имеет длину $l = L/n$, массу

$m = \rho L/n$ и момент инерции $J = ml^2/12$ относительно своего центра масс. Все стержни соединены друг с другом шарнирно, что обеспечивает гибкость, которая характерна для классической модели ЦМ.

Для составления уравнений кинетической и потенциальной энергии запишем координаты центров масс k -го стержня:

$$x_k = \frac{l}{2} \cos \varphi_k + l \sum_{i=1}^{k-1} \cos \varphi_i, \quad y_k = \frac{l}{2} \sin \varphi_k + l \sum_{i=1}^{k-1} \sin \varphi_i. \quad (30)$$

Потенциальная энергия силы тяжести k -го стержня, с учетом (30), будет

$$\Pi_k = -mgx_k = -mgl \left(\frac{1}{2} \cos \varphi_k + \sum_{i=1}^{k-1} \cos \varphi_i \right). \quad (31)$$

Выражение для суммарной потенциальной энергии, с учетом (31), для нелинейной модели тогда примет вид

$$\Pi(\boldsymbol{\varphi}) = -mgl \sum_{i=1}^n \left(n - i + \frac{1}{2} \right) \cos \varphi_i. \quad (32)$$

При вычислении кинетической энергии промежуточные выкладки оказываются несколько сложнее в сравнении с потенциальной энергией, что отчасти связано с необходимостью учитывать как поступательную, так и вращательную составляющую при движении каждого стержня. Дифференцируя выражения (30) по времени, получим

$$\dot{x}_k = -\frac{l}{2} \sin \varphi_k \dot{\varphi}_k - l \sum_{i=1}^{k-1} \sin \varphi_i \dot{\varphi}_i, \quad \dot{y}_k = \frac{l}{2} \cos \varphi_k \dot{\varphi}_k + l \sum_{i=1}^{k-1} \cos \varphi_i \dot{\varphi}_i. \quad (33)$$

Тогда выражение кинетической энергии для k -го стержня примет вид

$$T_k = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_k^2 + \frac{1}{2} m v_k^2 = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{\varphi}_k^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2), \quad (34)$$

где первое слагаемое характеризует энергию вращения стержня вокруг его центра масс, а второе слагаемое — поступательное движение центра масс стержня со скоростью v_k . С учетом (33) выражение (34) можно привести к виду

$$T_k = \frac{1}{2} ml^2 \left[\frac{1}{3} \dot{\varphi}_k^2 + \dot{\varphi}_k \sum_{i=1}^{k-1} \cos(\varphi_i - \varphi_k) \dot{\varphi}_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \right]. \quad (35)$$

Тогда суммарную кинетическую энергию для многомерной стержневой схемы ЦМ можно записать в матричном виде:

$$T(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi}) \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (36)$$

где $\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi})$ — симметричная матрица инерционных коэффициентов нелинейной модели, а ее элементы $\tilde{a}_{ij}(\boldsymbol{\varphi})$ с учетом (35) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} i = j : \quad \tilde{a}_{ii} &= ml^2 \left(n - i + \frac{1}{3} \right), \\ i \neq j : \quad \tilde{a}_{ij} &= ml^2 \left(n - r + \frac{1}{2} \right) \cos(\varphi_i - \varphi_j), \quad r = \max(i, j). \end{aligned} \quad (37)$$

В случае малых колебаний вблизи положения равновесия при $\varphi_k = 0$ можно провести аппроксимацию. В формуле для потенциальной энергии (32) положим $\cos \varphi_i \approx 1 - \varphi_i^2/2$, а в выражении для кинетической энергии (37) запишем $\cos(\varphi_j - \varphi_i) \approx 1$, что будет гарантировать удержание лишь слагаемых второго порядка малости по обобщенным координатам и скоростям в выражениях для потенциальной и кинетической энергий соответственно. Следовательно, выражения кинетической и потенциальной энергии стержневой системы в квадратичной аппроксимации будут

$$T(\dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \Pi(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}, \quad (38)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{C} — матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов соответственно, а $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^T$ — столбец обобщенных координат. С учетом вышесказанного элементы матриц \mathbf{A} и \mathbf{C} можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} i = j: \quad a_{ii} &= ml^2 \left(n - i + \frac{1}{3} \right), \quad c_{ii} = mgl \left(n - i + \frac{1}{2} \right), \\ i \neq j: \quad a_{ij} &= ml^2 \left(n - r + \frac{1}{2} \right), \quad r = \max(i, j), \quad c_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Возвращаясь к исследованию нелинейных колебаний ЦМ, запишем уравнение Лагранжа второго рода [2] для многомерного случая в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varphi}}. \quad (40)$$

Подставляя (36) и (32) в (40), приведем уравнение движения многомерной стержневой системы к следующей записи [12, 22]:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi}) \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) + \tilde{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\varphi}) = 0, \quad (41)$$

где введены новые столбцы:

$$\tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\varphi}) \dot{\boldsymbol{\varphi}}^2, \quad \tilde{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{C} \sin \boldsymbol{\varphi}. \quad (42)$$

В формулах (42) для удобства записи введены следующие столбцы: $\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 = [\dot{\varphi}_1^2, \dot{\varphi}_2^2, \dots, \dot{\varphi}_n^2]^T$, $\sin \boldsymbol{\varphi} = [\sin \varphi_1, \sin \varphi_2, \dots, \sin \varphi_n]^T$. При этом элементы симметричной матрицы \mathbf{C} линейной модели приведены в (39), а матрица $\tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\varphi})$ является кососимметричной, причем ее элементы с учетом (37) можно записать в виде

$$\tilde{h}_{ij} = ml^2 \left(n - r + \frac{1}{2} \right) \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad r = \max(i, j). \quad (43)$$

Разложим в ряды Тейлора по $\boldsymbol{\varphi}$ столбец $\sin \boldsymbol{\varphi}$, а также матрицы $\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi})$ и $\tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\varphi})$, и удержим в этих разложениях лишь те слагаемые, которые потребуются для последующих вычислений:

$$\sin \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{6} \boldsymbol{\varphi}^3 + \dots, \quad \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{A} + \check{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi}) + \dots, \quad \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\varphi}) = \check{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\varphi}) + \dots, \quad (44)$$

где снова для удобства записи введен столбец $\boldsymbol{\varphi}^3 = [\varphi_1^3, \varphi_2^3, \dots, \varphi_n^3]^T$. При этом элементы симметричной матрицы \mathbf{A} линейной модели приведены в (39), а для записи элементов матриц $\check{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi})$ и $\check{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\varphi})$ обратимся к формулам (37) и (43), в результате чего получим

$$\begin{aligned} i = j: \quad \check{a}_{ii}(\boldsymbol{\varphi}) &= 0, \quad \check{h}_{ii}(\boldsymbol{\varphi}) = 0, \\ i \neq j: \quad \check{a}_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) &= -\frac{1}{2} ml^2 \left(n - r + \frac{1}{2} \right) (\varphi_i - \varphi_j)^2, \quad r = \max(i, j), \\ \check{h}_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) &= ml^2 \left(n - r + \frac{1}{2} \right) (\varphi_i - \varphi_j). \end{aligned} \quad (45)$$

Из (45) следует, что матрица $\check{H}(\varphi)$ имеет первый порядок малости, а матрица $\check{A}(\varphi)$ – второй порядок. Подставим теперь (44) в (41) и перенесем все нелинейные по φ слагаемые в правую часть. В результате получим так называемое уравнение первого приближения [23]:

$$\mathbf{A}\ddot{\varphi} + \mathbf{C}\varphi = \mathbf{F}(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}), \quad (46)$$

где в структуре функции $\mathbf{F}(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ отражены все необходимые нелинейные слагаемые, а именно:

$$\mathbf{F}(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = -\check{A}(\varphi)\ddot{\varphi} - \check{H}(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6}\mathbf{C}\varphi^3. \quad (47)$$

Из (47) следует, что столбец $\mathbf{F}(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ ожидаемо имеет третий порядок малости, поэтому будем трактовать его как столбец вынуждающих сил, который действует на линейную систему [19].

Разыскивать решение уравнения (47) будем в виде колебаний по одной из форм колебаний Φ_s линейной системы:

$$\varphi = \Phi_s \alpha \cos \psi, \quad \psi = \tilde{k}_s(\alpha)t + \theta, \quad (48)$$

где α уже является величиной, которая характеризует амплитуду колебаний по s -й форме.

Частота нелинейных колебаний с порядковым номером s принимается в виде

$$\tilde{k}_s(\alpha) = k_s(1 + \beta_s \alpha^2), \quad (49)$$

где, как и прежде, вносится поправка, имеющая второй порядок малости по α . Поправочный коэффициент β_s определяется из уравнения гармонического баланса [19] по рассматриваемой форме Φ_s :

$$\int_0^{2\pi} \Phi_s^T (\mathbf{A}\ddot{\varphi} + \mathbf{C}\varphi - \mathbf{F}) \cos \psi d\psi = 0, \quad (50)$$

которое нужно выполнить с необходимой точностью. Определим с учетом (48) столбцы обобщенных скоростей и ускорений с точностью до третьего порядка малости по α :

$$\dot{\varphi} = -\Phi_s \alpha k_s \sin \psi (1 + \beta_s \alpha^2), \quad \ddot{\varphi} = -\Phi_s \alpha k_s^2 \cos \psi (1 + 2\beta_s \alpha^2). \quad (51)$$

Введем в рассмотрение безразмерные частоты колебаний линейной модели $p_s = k_s/k_0$, где $k_0 = \sqrt{g/L}$. С учетом (48) и (51) вычислим выражение, фигурирующее в (50):

$$\mathbf{A}\ddot{\varphi} + \mathbf{C}\varphi = \frac{1}{n} mgl [n\mathbf{C}_0 - p_s^2 \mathbf{A}_0 (1 + 2\beta_s \alpha^2)] \Phi_s \alpha \cos \psi, \quad (52)$$

где учтено, что $l = L/n$, и введены безразмерные матрицы инерционных $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}/(ml^2)$ и квазиупругих $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}/(mgl)$ коэффициентов линейной модели, элементы которых, с учетом (39), будут

$$\begin{aligned} i = j : \quad a_{0ii} &= n - i + \frac{1}{3}, \quad c_{0ii} = n - i + \frac{1}{2}, \\ i \neq j : \quad a_{0ij} &= n - r + \frac{1}{2}, \quad r = \max(i, j), \quad c_{0ij} = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Стоит отметить, что для поиска собственных частот малых колебаний рассматриваемой стержневой системы достаточно подставить матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов в частотное уравнение, которое в размерном и безразмерном варианте соответственно будет иметь вид

$$\det(\mathbf{C} - k_s^2 \mathbf{A}) = 0, \quad \det(n\mathbf{C}_0 - p_s^2 \mathbf{A}_0) = 0. \quad (54)$$

При этом форма колебаний Φ_s удовлетворяет следующему уравнению [21]:

$$(n\mathbf{C}_0 - p_s^2\mathbf{A}_0)\Phi_s = 0, \quad (55)$$

поэтому выражение (52) можно упростить до вида

$$\mathbf{A}\ddot{\Phi} + \mathbf{C}\dot{\Phi} = -\frac{2}{n}mgl\beta_s p_s^2 \mathbf{A}_0 \Phi_s \alpha^3 \cos \psi. \quad (56)$$

Для определения столбца $\mathbf{F}(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ с точностью до третьего порядка малости по α достаточно подставить в (47) выражения

$$\varphi = \Phi_s \alpha \cos \psi, \quad \dot{\varphi} = -\Phi_s \alpha k_s \sin \psi, \quad \ddot{\varphi} = -\Phi_s \alpha k_s^2 \cos \psi, \quad (57)$$

после чего получим

$$\mathbf{F} = \frac{1}{n}mgl \left[p_s^2 \check{\mathbf{A}}_0 \Phi_s \cos^3 \psi - p_s^2 \check{\mathbf{H}}_0 \Phi_s^2 \cos \psi \sin^2 \psi + \frac{n}{6} \mathbf{C}_0 \Phi_s^3 \cos^3 \psi \right] \alpha^3, \quad (58)$$

где введены условные обозначения Φ_s^2 и Φ_s^3 , подразумевающие столбцы квадратов и кубов элементов форм колебаний соответственно. Также в рассмотрение добавлены безразмерные матрицы $\check{\mathbf{A}}_0 = \check{\mathbf{A}}/(ml^2)$ и $\check{\mathbf{H}}_0 = \check{\mathbf{H}}/(ml^2)$, элементы которых, с учетом (45), будут

$$\begin{aligned} i = j: \quad \check{a}_{0ii} &= 0, \quad \check{h}_{0ii} = 0, \\ i \neq j: \quad \check{a}_{0ij} &= -\frac{1}{2} \left(n - r + \frac{1}{2} \right) (\Phi_{is} - \Phi_{js})^2, \quad r = \max(i, j), \\ \check{h}_{0ij} &= \left(n - r + \frac{1}{2} \right) (\Phi_{is} - \Phi_{js}), \end{aligned} \quad (59)$$

причем здесь Φ_{is} и Φ_{js} — соответствующие элементы столбца Φ_s . Для дальнейших действий необходимо ввести нормировочный коэффициент $N_s = \Phi_s^T \mathbf{A}_0 \Phi_s$, а также использовать интегралы:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \psi \sin^2 \psi d\psi = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos^4 \psi d\psi = \frac{3\pi}{4}. \quad (60)$$

Подставим формулы (56) и (58) в уравнение гармонического баланса (50) и, учитывая соотношения (60), после ряда преобразований получим итоговую формулу для β_s :

$$\beta_s = \frac{1}{8N_s p_s^2} \Phi_s^T \left(p_s^2 \check{\mathbf{H}}_0 \Phi_s^2 - 3p_s^2 \check{\mathbf{A}}_0 \Phi_s - \frac{n}{2} \mathbf{C}_0 \Phi_s^3 \right). \quad (61)$$

Формула (61) позволяет определить поправочный коэффициент в выражении для конкретной частоты при заданном количестве стержней.

Для возможности сравнения результатов, полученных в рамках конечномерной и распределенной моделей, необходимо связать величину α , характеризующую угловые амплитуды колебаний стержней в первой из этих моделей, с безразмерной амплитудой поперечных колебаний концевой точки ЦМ $a = A/L$ во второй модели. Для этого запишем горизонтальную координату нижнего конца ЦМ в рамках конечномерной стержневой модели:

$$y_L = l \sum_{i=1}^n \sin \varphi_i. \quad (62)$$

Полагая, что $\sin \varphi_i \approx \varphi_i$, подставим в (62) решение (48) и после вычисления безразмерной амплитуды колебаний с учетом того, что $L = nl$, получим

$$a = \kappa_s \alpha, \quad \kappa_s = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n \Phi_{is} \right|, \quad (63)$$

где введен коэффициент пересчета κ_s для связи угловой и трансляционной амплитуд колебаний. Остается лишь провести обезразмеривание формулы для частоты нелинейных колебаний ЦМ (49) традиционным образом с учетом (63):

$$\tilde{p}_s(a) = p_s(1 + \gamma_s a^2), \quad \gamma_s = \frac{\beta_s}{\kappa_s^2}. \quad (64)$$

Завершая разговор о построении приближенного аналитического решения, следует отметить, что как для исходной распределенной модели, так и для конечномерной модели ЦМ формы колебаний с ростом амплитуд также начинают постепенно отличаться от своего линейного варианта, усложняя при этом свой характер [11]. Исследование дрейфа форм колебаний по мере увеличения амплитуд представляет отдельную задачу и выходит за рамки настоящего исследования, однако он и не сказывается на полученных выражениях (19) и (64) для частот колебаний в рамках модели со слабой нелинейностью, отражаясь только при нахождении частот колебаний в следующем приближении.

2. Численные эксперименты по определению частот нелинейных колебаний

2.1. Моделирование свободных колебаний в программном комплексе MSC Adams.

С целью проверки аналитических расчетов, выполненных в предыдущем разделе, рассмотрим конечномерную модель ЦМ и проведем численные симуляции с применением специального программного комплекса MSC Adams для моделирования многотельной динамики. Рассматриваемая модель состоит из 20 шарнирно соединенных стержней. Отметим, что данного количества стержней вполне достаточно для анализа низших частот колебаний модели ЦМ с распределенной массой с точки зрения сходимости результатов [24].

Для организации колебаний системы на нужной частоте предлагается задать начальное положение конечномерного ЦМ в соответствии с интересующей нас формой колебаний. Начальные значения углов φ_k берутся в соответствии со столбцом Φ_s , который вычисляется из уравнения (55). Варьируя величину α , можно получить желаемое начальное отклонение нижнего конца и в дальнейшем сопоставить результаты с аналитическими расчетами, применив формулы (63) и (64). Примеры отклоненных положений конечномерной модели с 20 стержнями для первых трех форм колебаний приведены на рис. 2. Отметим, что задание начальных отклонений, в соответствии с формами малых колебаний, позволяет получить адекватные результаты только при не сильно больших амплитудах по аналогии с тем, как это делалось выше при построении приближенного аналитического решения, где оно, согласно (48), также разыскивалось в виде колебаний по одной из форм линейной модели.

После проведения серии симуляций свободных колебаний конечномерной модели ЦМ с варьированием начальных амплитуд для каждой из трех рассматриваемых форм колебаний определяются периоды колебаний как усредненное значение времени между соседними максимумами, минимумами и точками прохождения через нуль при одинаковом направлении движения для выборки из нескольких десятков поперечных колебаний нижнего конца цепи, а далее при каждой конкретной амплитуде по найденному значению для периода вычисляется и частота колебаний.

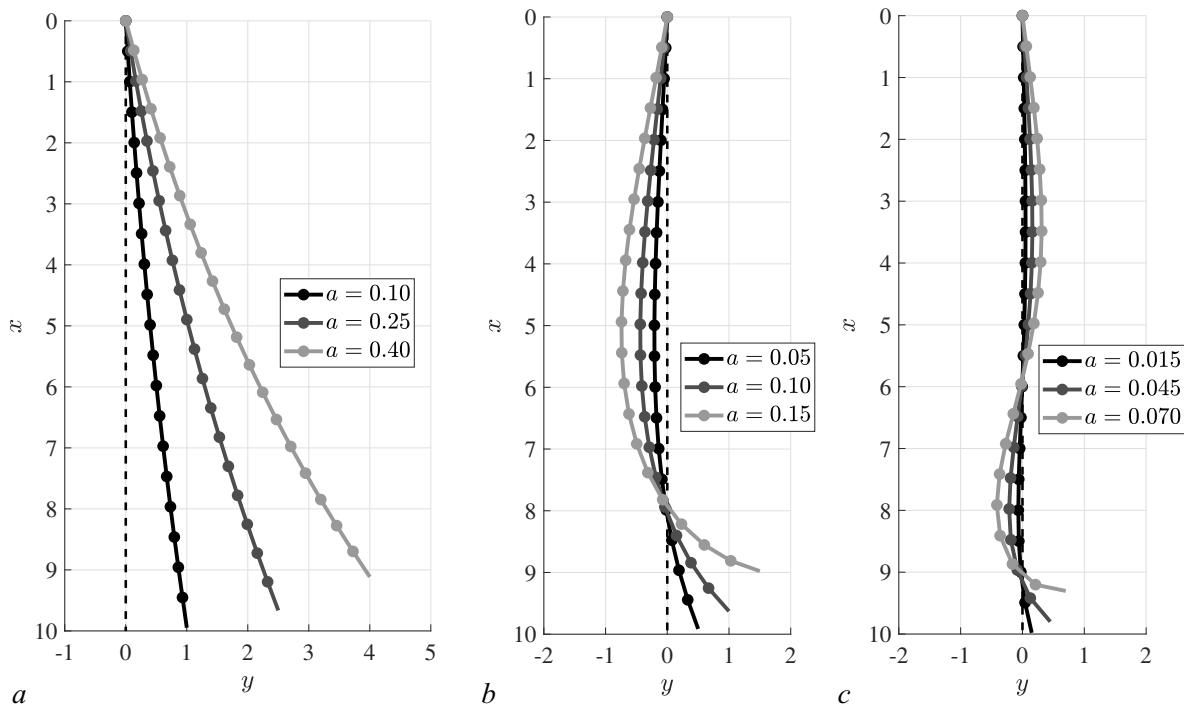


Рис. 2. Начальное положение двадцатистержневой модели для симуляции свободных колебаний в MSC Adams при разных амплитудах: *a* – первая форма колебаний; *b* – вторая форма колебаний; *c* – третья форма колебаний

Fig. 2. The initial position of the twenty-rod model for simulating free oscillations in MSC Adams at different amplitudes: *a* – the first oscillation mode; *b* – the second oscillation mode; *c* – the third oscillation mode

2.2. Моделирование управляемого разгона системы под действием коллинеарного управления. В качестве второго подхода к проведению численного эксперимента для вычисления частот колебаний ЦМ с учетом нелинейности предлагается провести симуляции не свободных, а управляемых движений под действием надлежащим образом выбранного закона управления. Для определения отсчетного положения двадцатистержневой модели ЦМ необходимо задать начальные углы φ_k на основе столбца Φ_s , как и в предыдущем подходе, однако начальная амплитуда α должна быть достаточно малой, чтобы колебания можно было считать малыми. Далее следует организовать управляемое движение с постепенным нарастанием полной энергии $E = T + \Pi$ в системе с применением коллинеарного закона управления [11]. Предлагаемое управляющее воздействие формируется пропорционально обобщенным импульсам системы и действует по всем степеням свободы. Основная ценность данного управления заключается в возможности осуществлять плавный разгон колебаний системы с малых и до достаточно больших амплитуд, переводя систему в область нелинейных колебаний по исходной форме колебаний, которая при этом также будет некоторым образом дрейфовать [16]. В отличие от уравнения движения системы (41), которое описывает свободные колебания, для учета коллинеарного управления в правой части этого уравнения должно появиться слагаемое, отвечающее управляющим воздействиям:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\varphi)\ddot{\varphi} + \tilde{\mathbf{B}}(\varphi, \dot{\varphi}) + \tilde{\mathbf{C}}(\varphi) = \mathbf{R}, \quad (65)$$

где \mathbf{R} – столбец обобщенных управляющих сил, который в случае коллинеарного управления представляется в виде

$$\mathbf{R} = \mu \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \mu \tilde{\mathbf{A}}(\varphi) \dot{\varphi}, \quad (66)$$

где μ — положительный коэффициент усиления, который целесообразно выбирать достаточно малой величиной для обеспечения медленного разгона конечномерного ЦМ. Для выхода на режим, отвечающего конкретной амплитуде колебаний, необходимо задаться целевым значением полной энергии системы E_* , достигая которого раскочка ЦМ будет прекращаться, а система продолжит далее свободные колебания на требуемой форме, которые будут отвечать заданному уровню энергии. Таким образом, коэффициент усиления μ следует принять в виде

$$\mu(E) = \begin{cases} \text{const}, & E < E_*, \\ 0, & E \geq E_*. \end{cases} \quad (67)$$

Для интегрирования уравнения управляемого движения (65) можно применить универсальный решатель ode89 в программной среде MATLAB. Задаваясь интересующими нас формами колебаний Φ_s и перебирая целевые уровни энергии E_* , необходимо осуществить серию расчетов, а затем провести обработку результатов с определением периода колебаний и амплитуды колебаний конечной точки ЦМ, чтобы после обезразмеривания можно было построить требуемые зависимости $\tilde{p}_s(a)$.

3. Обсуждение результатов расчетов и их сопоставление

Точные значения первых трех безразмерных частот колебаний p_s при малых колебаниях ЦМ в рамках распределенной модели равны [18]:

$$p_1 = 1.202, \quad p_2 = 2.760, \quad p_3 = 4.327. \quad (68)$$

Проверим сначала сходимость частот малых колебаний конечномерной стержневой модели к частотам малых колебаний распределенной модели (68) с ростом количества стержней. Для вычисления частот колебаний конечномерной модели обратимся ко второму частотному уравнению (54), куда следует подставить необходимые матрицы, элементы которых определяются по формулам (53). Зависимости первых трех частот малых колебаний стержневой модели ЦМ от количества стержней n приведены на рис. 3, где пунктиром нанесены значения частот

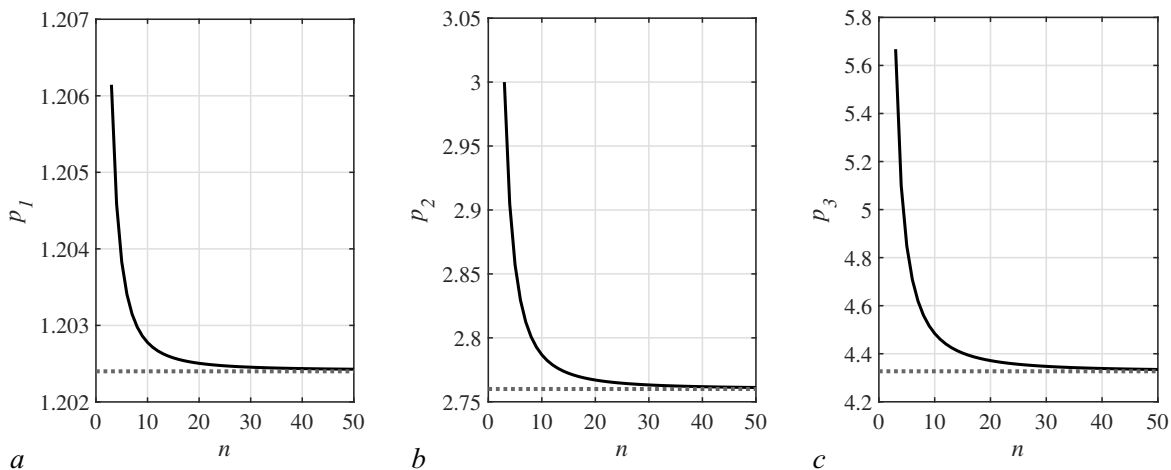


Рис. 3. Безразмерные частоты малых колебаний в зависимости от количества стержней в модели: a — первая частота; b — вторая частота; c — третья частота

Fig. 3. Dimensionless frequencies of small oscillations depending the rods number in the model: a — the first frequency; b — the second frequency; c — the third frequency

распределенной модели. Видно, что стержневая модель дает оценку сверху для частот распределенной модели ЦМ, причем с ростом n наблюдается монотонная сходимость результатов конечномерной модели к соответствующим значениям из распределенной модели. Все сказанное является первым успешным этапом по сравнению частот.

Вторым этапом является сравнение поправочных коэффициентов к частотам нелинейных колебаний. Для вычисления поправочных коэффициентов γ_s конечномерной стержневой схемы следует обратиться к формулам (61) и (64). На рис. 4 приведены графики значений поправочных коэффициентов γ_s в зависимости от числа стержней n , из которых состоит конечномерная модель ЦМ, а также пунктиром нанесены значения γ_s из распределенной модели согласно (29). Отметим, что значения поправочных коэффициентов приведены в узком диапазоне, чтобы можно было наглядно увидеть сходимость к соответствующим значениям из распределенной модели с ростом n . Так, значения γ_2 приведены, начиная с $n = 3$, а значения γ_3 приведены, начиная с $n = 5$, поскольку при меньших значениях n абсолютные значения γ_2 и особенно γ_3 слишком велики, что весьма уменьшает информационную насыщенность графиков. Стоит отметить, что приведенные на рис. 4 зависимости монотонно возрастают с ростом n , стремясь в пределе к значениям (29) из распределенной модели, как этого и следовало ожидать. При этом значение γ_1 даже при относительно малом количестве стержней дает хорошее приближение к аналогичному значению из распределенной модели ЦМ, в то время как для адекватного приближения величин γ_2 и γ_3 потребуется использовать более 30 стержней в конечномерной модели.

Следует подчеркнуть, что, помимо стержневой схемы, интерес представляет еще и гантельная схема, которая несколько проще в сравнении со стержневой с точки зрения построения аналитического решения. Если для рассмотренной в настоящем исследовании стержневой схемы структурным звеном является однородный стержень, обладающий массой m и моментом инерции $J = ml^2/12$ относительно его центра масс, то в гантельной схеме таким звеном является гантель, представляющая собой безынерционный стержень с двумя точечными массами $m/2$ на его концах, так что в данной схеме в структуре кинетической энергии будут присутствовать только слагаемые, отвечающие за поступательное движение точечных масс. При этом потенциальная энергия для

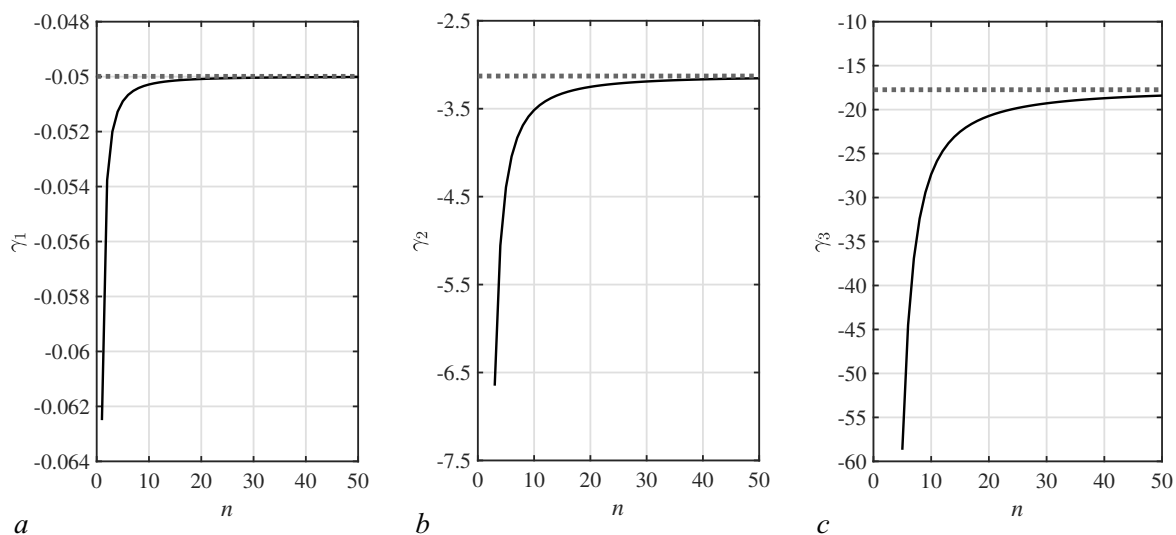


Рис. 4. Поправочные коэффициенты в зависимости от количества стержней в модели: a — для первой частоты; b — для второй частоты; c — для третьей частоты

Fig. 4. Correction factors depending on the rods number in the model: a — for the first frequency; b — for the second frequency; c — for the third frequency

гантельной схемы описывается той же формулой (32), а выражение для элементов матрицы инерционных коэффициентов $\tilde{\mathbf{A}}$, согласно [21], будет

$$\tilde{a}_{ij} = ml^2 \left(n - r + \frac{1}{2} \right) \cos(\varphi_i - \varphi_j), \quad r = \max(i, j). \quad (69)$$

Как несложно заметить, элементы (37) и (69) отличаются лишь на главной диагонали матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$. Следуя аналогичному подходу, можно вычислить и поправочные коэффициенты в выражениях для частот нелинейных колебаний и для гантельной схемы. Построим графики относительной погрешности для значений γ_s в сравнении со значениями из распределенной модели (29) при рассмотрении гантельной и стержневой схем. Результаты расчетов погрешностей для величин γ_1 , γ_2 и γ_3 приведены на рис. 5–7 соответственно.

Из рис. 5 и 6 следует, что с ростом n значения γ_1 и γ_2 гантельной схемы быстрее приближаются к соответствующему значению из распределенной модели в сравнении со стержневой схемой, однако они делают это немонокотонно, пересекая значение из распределенной модели, после чего отдаляются от него, но затем снова начинают приближаться к нему. В случае третьей частоты колебаний (рис. 7) значение γ_3 из стержневой схемы приближается к значению из распределенной модели с ростом n быстрее, чем для гантельной схемы, до момента $n = 17$, а далее значения

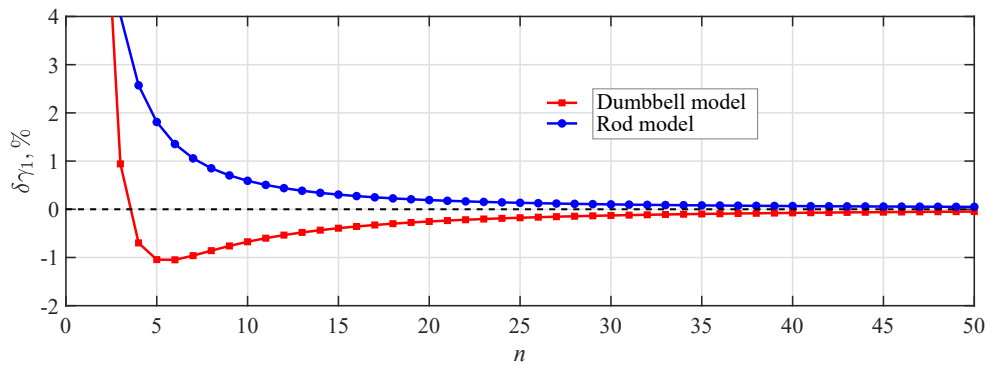


Рис. 5. Погрешность поправочного коэффициента в выражении для первой частоты колебаний конечномерных моделей в зависимости от числа звеньев (цвет онлайн)

Fig. 5. The error of the correction factor in the expression for the first oscillation frequency of finite-dimensional models depending on the links number (color online)

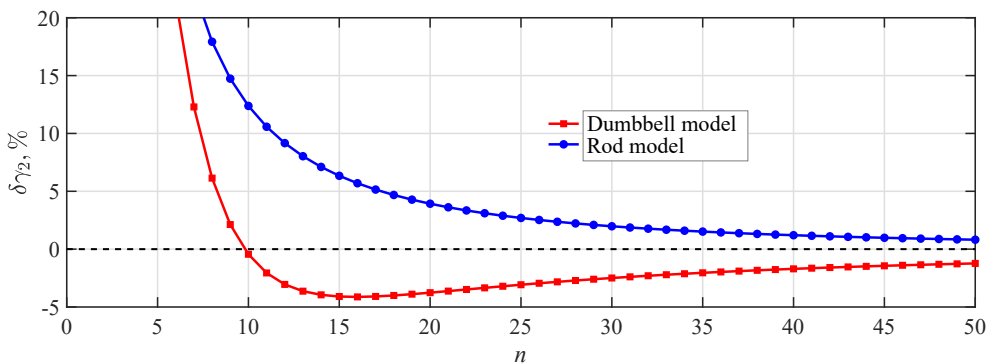


Рис. 6. Погрешность поправочного коэффициента в выражении для второй частоты колебаний конечномерных моделей в зависимости от числа звеньев (цвет онлайн)

Fig. 6. The error of the correction factor in the expression for the second oscillation frequency of finite-dimensional models depending on the links number (color online)

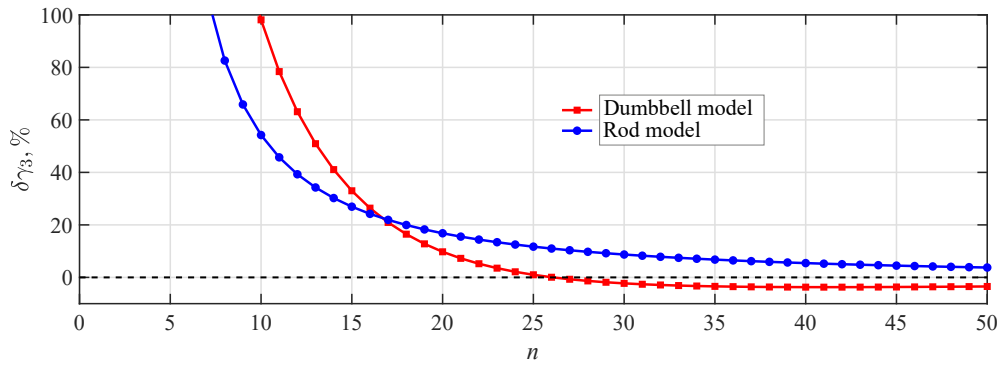


Рис. 7. Погрешность поправочного коэффициента в выражении для третьей частоты колебаний конечномерных моделей в зависимости от числа звеньев (цвет онлайн)

Fig. 7. The error of the correction factor in the expression for the third oscillation frequency of finite-dimensional models depending on the links number (color online)

гантельной схемы начинают приближаться к значению из распределенной модели быстрее, но аналогично первым двум поправочным коэффициентам вновь пересекают это значение. Исходя из данного анализа, можно заключить, что количественно гантельная и стержневая схемы дают схожие поправочные коэффициенты при относительно малом количестве звеньев, однако с точки зрения качества стержневая модель является более предпочтительной, поскольку сохраняет монотонность при сходимости решения и имеет меньшую погрешность при больших значениях n .

Возвращаясь к аналитическому решению (64), построенному на основе асимптотического метода для стержневой конечномерной модели ЦМ с учетом слабой нелинейности, сопоставим его с результатами численных экспериментов, описанных ранее. С этой целью построим графики зависимости первых трех безразмерных частот нелинейных колебаний \tilde{p}_s в зависимости от безразмерной амплитуды a по обозначенным формулам для случая $n = 20$, которые приведены на рис. 8 сплошными линиями. Также на рис. 8 нанесены результаты численных экспериментов: во-первых, симуляции свободных колебаний двадцатистержневой модели ЦМ в программном комплексе MSC Adams и, во-вторых, численного интегрирования уравнения управляемого движения (65) под действием коллинеарного управления для вывода двадцатистержневой схемы на заданный

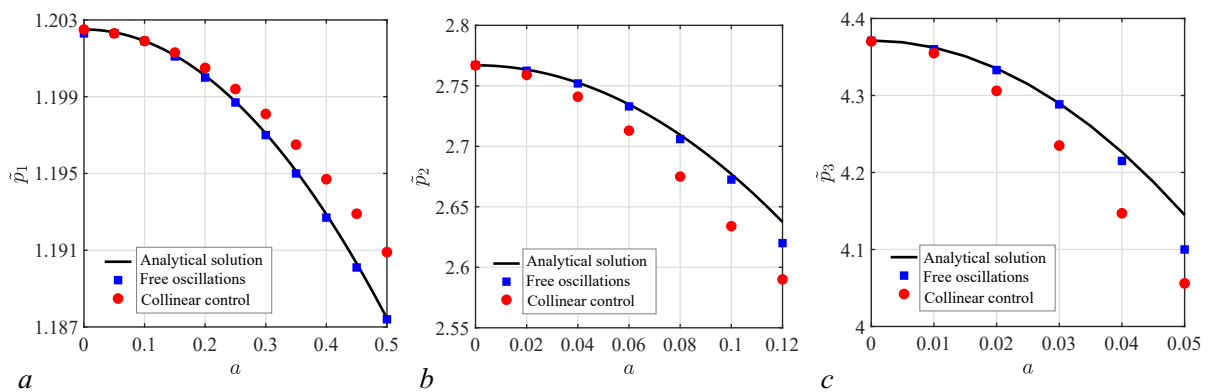


Рис. 8. Зависимость частоты нелинейных колебаний от амплитуды: a — первая частота колебаний; b — вторая частота колебаний; c — третья частота колебаний (цвет онлайн)

Fig. 8. Dependence of the frequency of nonlinear oscillations on the amplitude: a — the first oscillation frequency; b — the second oscillation frequency; c — the third oscillation frequency (color online)

уровень энергии путем разгона системы по нужной форме колебаний с применением программной среды MATLAB.

Видно, что для первой частоты колебаний (рис. 8, *a*) результаты численных экспериментов оказываются близки к аналитически найденной зависимости даже при весьма существенных амплитудах колебаний. Для второй (рис. 8, *b*) и третьей (рис. 8, *c*) частот колебаний максимальные значения рассматриваемых амплитуд a принимаются меньшими в сравнении с тем, что было для первой частоты колебаний, что связано со спецификой отвечающих им форм колебаний (см. рис. 2). Здесь также наблюдается достаточно хорошее соответствие аналитических зависимостей и результатов, полученных при помощи численных экспериментов. Следует отметить, что расхождение аналитически полученного решения с результатами симуляции свободных колебаний в программном комплексе MSC Adams оказывается ощутимо меньшим по сравнению с результатами численного моделирования управляемого разгона системы под действием коллинеарного управления. Это можно объяснить тем, что при симуляции свободных колебаний движение задается по формам малых колебаний, что, как было сказано выше, достаточно для того, чтобы уловить изменение частоты колебаний в рамках модели со слабой нелинейностью, которая и исследуется аналитическим путем, тогда как эксперимент по моделированию управляемых движений осуществляется с использованием точной нелинейной модели без каких-либо аппроксимаций.

Заключение

В настоящей работе на базе асимптотических методов было построено аналитическое решение по вычислению поправочных коэффициентов в выражениях для частот колебаний ЦМ как в рамках распределенной модели, так и в рамках многомерной стержневой схемы при учете слабой нелинейности. Полученные значения коэффициентов оказались отрицательными, что говорит о том, что частоты колебаний убывают с ростом амплитуды колебаний, причем с увеличением номера частоты поправочные коэффициенты по модулю возрастают. Была проверена сходимость поправочных коэффициентов при увеличении количества стержней в конечномерной модели к результатам из распределенной модели. При относительном малом количестве сегментов стержневая схема отлично соотносится с распределенной моделью при нелинейных колебаниях на первой частоте. В случае колебаний на второй и третьей частотах потребуется несколько десятков сегментов для корректного описания нелинейного движения. При этом проведенные численные эксперименты позволили проверить корректность выведенных аналитических формул.

Также в рамках исследования было проведено сравнение поправочных коэффициентов в стержневой и гантельной схемах. Несмотря на количественную схожесть значений, стержневую модель можно считать более предпочтительной для моделирования ЦМ, поскольку графики сходимости представляют собой монотонные кривые, в то время как для гантельной схемы наблюдаются немонотонные зависимости с пересечением точного значения. Стремление поправочных коэффициентов в выражениях для частот колебаний в рамках конечномерных моделей к аналогичным значениям из распределенной модели подтверждает возможность применения моделей с сосредоточенными параметрами для описания систем с распределенными параметрами, что часто требуется в инженерных изысканиях с применением вычислительных программ для построения математических моделей и проведения симуляций. С другой стороны, это также говорит и о том, что и распределенные модели применимы для аналитического описания многозвенных цепных систем, которые, несмотря на свою дискретность, могут описываться как непрерывные объекты. Возможность применения конечномерных моделей открывает для исследователей и инженеров перспективу проведения компьютерных симуляций с более сложными механизмами, где ЦМ может выступать в качестве конструктивного звена.

Список литературы

1. Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 240 с.
2. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
3. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
4. Irvine H. M., Caughey T. K. The linear theory of free vibrations of a suspended cable // Proc. A. 1974. Vol. 341, no. 1626. P. 299–315. DOI: 10.1098/rspa.1974.0189.
5. Bailey H. Motion of a hanging chain after the free end is given an initial velocity // Am. J. Phys. 2000. Vol. 68, iss. 8. P. 764–767. DOI: 10.1119/1.19539.
6. Golebiowska I., Peszynski K. Cable vibration caused by wind // EPJ Web of Conferences. 2018. Vol. 180. P. 02031. DOI: 10.1051/epjconf/201818002031.
7. Тютюных А. А., Тютюных Е. А. Моделирование троса методом интегрирования Верле с переменным числом сегментов // В сб.: Автоматизированные системы управления и информационные технологии. Материалы всероссийской научно-технической конференции в 2-х томах. 08–10 июня 2022 г., Пермь, Россия. Пермь: Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 2022. С. 272–278.
8. Tiefenbacher M., Jakubek S., Kozek M. Modeling and identification of a chain pendulum // In: Proceedings of the International Symposium on Models and Modeling Methodologies in Science and Engineering. 2011. In the context of The 2nd International Multi-Conference on Complexity, Informatics and Cybernetics: IMCIC 2011. 27–30 March, 2011, Orlando, Florida, USA.
9. Lee T., Leok M., McClamroch N. H. Dynamics and control of a chain pendulum on a cart // In: 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2012, Maui, HI, USA. P. 2502–2508. DOI: 10.1109/CDC.2012.6427059.
10. Hoshino T., Kawai H., Furuta K. Stabilization of the triple spherical inverted pendulum - A simultaneous design approach // Autommatisierungstechnik. 2000. Vol. 48. P. 577–587. DOI: 10.1524/auto.2000.48.12.577.
11. Смирнов А. С., Булов С. А., Дегилевич Е. А. Построение и анализ нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника асимптотическими методами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, № 4. С. 598–610. DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-4-598-610.
12. Tenreiro Machado J. A., Lopes A. M. The N-link pendulum: Embedding nonlinear dynamics into the multidimensional scaling method // Chaos, Solitons and Fractals. 2016. Vol. 89. P. 130–138. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.10.013.
13. Klaycham K., Nguantud P., Athisakul C., Chucheeesakul S. Free vibration analysis of large sag catenary with application to catenary jumper // Ocean Systems Engineering. 2020. Vol. 10, iss. 1. P. 67–86.
14. Mwappe C. J., Hong T. S., Wu W. B. Static studies of a steel chain ropeway section using Msc Adams // Advanced Materials Research. 2011. Vol. 328–330. P. 1031–1036. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031.
15. Suwanjumrat C., Suwannahong W., Thongkom S. Implementation of multi-body dynamics simulation for the conveyor chain drive system // MATEC Web Conf. 2017. Vol. 95. P. 06006. DOI: 10.1051/mateconf/20179506006.
16. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Управление резонансными колебаниями нелинейных механических систем на основе принципов биодинамики // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 4. С. 11–19.
17. Ламб Г. Теоретическая механика. М.: ОНТИ, 1936. Т. 3. 292 с.
18. Verbin Y. Boundary conditions and modes of the vertically hanging chain // Eur. J. Phys. 2015. Vol. 36. P. 015005. DOI: 10.1088/0143-0807/36/1/015005.
19. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Физматгиз, 1958. 408 с.

20. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. 800 с.
21. *Смирнов А. С., Дегилевич Е. А.* Колебания цепных систем. Санкт-Петербург: Политех-Пресс, 2021. 246 с.
22. *Формальский А. М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012. 232 с.
23. *Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О.* Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 432 с.
24. *McCreesh J. P., Goodfellow T. L., Seville A. H.* Vibrations of a hanging chain of discrete links // *Am. J. Phys.* 1975. Vol. 43. P. 646–648. DOI: 10.1119/1.10103.

References

1. Merkin DR. Introduction to the Mechanics of Flexible Thread. M.: Nauka; 1980. 240 p. (in Russian).
2. Lurie AI. Analytical Mechanics. NY: Springer; 2002. 864 p.
3. Timoshenko SP. Oscillations in Engineering. 2nd ed. M.: Nauka; 1967. 444 p.
4. Irvine HM, Caughey TK. The linear theory of free vibrations of a suspended cable. *Proc. A.* 1974;341(1626):299–315. DOI: 10.1098/rspa.1974.0189.
5. Bailey H. Motion of a hanging chain after the free end is given an initial velocity. *Am. J. Phys.* 2000;68(8):764–767. DOI: 10.1119/1.19539.
6. Golebiowska I, Peszynski K. Cable vibration caused by wind. *EPJ Web of Conferences.* 2018;180: 02031. DOI: 10.1051/epjconf/201818002031.
7. Tyutyunikh AA, Tyutyunikh EA. Modeling of a cable using Verlet integration with a variable number of segments. In: Automated Control Systems and Information Technologies. Materials of the All-Russian Scientific and Technical Conference. 08–10 June 2022, Perm, Russia. Perm: Perm National Research Polytechnic University Publishing; 2022. P. 272–278 (in Russian).
8. Tiefenbacher M, Jakubek S, Kozek M. Modeling and Identification of a Chain Pendulum. In: Proceedings of the International Symposium on Models and Modeling Methodologies in Science and Engineering. 2011. In the context of The 2nd International Multi-Conference on Complexity, Informatics and Cybernetics: IMCIC 2011. 27–30 March, 2011, Orlando, Florida, USA.
9. Lee T, Leok M, McClamroch NH. Dynamics and control of a chain pendulum on a cart. In: 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2012, Maui, HI, USA. P. 2502–2508. DOI: 10.1109/CDC.2012.6427059.
10. Hoshino T, Kawai H, Furuta K. Stabilization of the triple spherical inverted pendulum – A simultaneous design approach. *Automatisierungstechnik.* 2000;48:577–587. DOI: 10.1524/auto.2000.48.12.577.
11. Smirnov AS, Bulov SA, Degilevich EA. Construction and analysis of nonlinear oscillation modes of a three-link pendulum by asymptotic methods. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics.* 2024;24(4):598–610 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-4-598-610.
12. Tenreiro Machado JA, Lopes AM. The N-link pendulum: Embedding nonlinear dynamics into the multidimensional scaling method. *Chaos, Solitons and Fractals.* 2016;89:130–138. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.10.013.
13. Klaycham K, Nguantud P, Athisakul C, Chucheepsakul S. Free vibration analysis of large sag catenary with application to catenary jumper. *Ocean Systems Engineering.* 2020;10(1):67–86.
14. Mwape CJ, Hong TS, Wu WB. Static Studies of a steel chain ropeway section using Msc Adams. *Advanced Materials Research.* 2011;328–330:1031–1036. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031.
15. Suvanjumrat C, Suwannahong W, Thongkom S. Implementation of multi-body dynamics simulation for the conveyor chain drive system. *MATEC Web Conf.* 2017;95:06006. DOI: 10.1051/mateconf/20179506006.

16. Smirnov AS, Smolnikov BA. Resonance oscillations control of the non-linear mechanical systems based on the principles of biodynamics. *Mechanical Engineering and Engineering Education*. 2017;(4):11–19.
17. Lamb H. *Higher Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press; 1929. 292 p.
18. Verbin Y. Boundary conditions and modes of the vertically hanging chain. *Eur. J. Phys.* 2015;36: 015005. DOI: 10.1088/0143-0807/36/1/015005.
19. Bogolyubov NN, Mitropolskiy YuA. *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. M: GIFML; 1958. 408 p. (in Russian).
20. Watson GN. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge: Cambridge University Press; 1944. 800 p.
21. Smirnov AS, Degilevich EA. *Oscillations of Chain Systems*. St. Petersburg: Polytech-Press; 2021. 246 p. (in Russian).
22. Formalskii AM. *Motion Control for Unstable Objects*. M.: Fizmatlit; 2012. 232 p. (in Russian).
23. Ganiev RF, Kononenko VO. *Vibrations of Solids*. M.: Nauka; 1976. 432 p. (in Russian).
24. McCreesh JP, Goodfellow TL, Seville AH. Vibrations of a hanging chain of discrete links. *Am. J. Phys.* 1975;43:646–648. DOI: 10.1119/1.10103.



Дегилевич Егор Алексеевич — родился в Санкт-Петербурге (1998). Окончил с отличием Физико-механический институт Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого по направлению «Прикладная механика» (2022). В настоящее время обучается в аспирантуре Института проблем машиноведения РАН. Научные интересы — теоретическая механика, теория колебаний, динамика машин, математическое моделирование. Опубликовал более 10 научных статей и 1 книгу по указанным направлениям.

Россия, 199178 Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61
 Институт проблем машиноведения Российской академии наук
 E-mail: degilevichegor@gmail.com
 ORCID: 0000-0003-0142-4561
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1076938



Смирнов Алексей Сергеевич — родился в Санкт-Петербурге (1994). Окончил с отличием Институт прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого по направлению «Прикладная механика» (2017). Кандидат физико-математических наук (2025, СПбГУ). В настоящее время работает в Высшей школе механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого в должности доцента и в лаборатории мехатроники Института проблем машиноведения РАН в должности старшего научного сотрудника. Научные интересы — аналитическая механика, теория колебаний, динамика твердого тела, устойчивость равновесия и движения, оптимизация и управление в механике. Опубликовал более 120 научных статей и 3 книги по указанным направлениям.

Россия, 199178 Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61
 Институт проблем машиноведения Российской академии наук
 Россия, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
 E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-6148-0322
 AuthorID (eLibrary.Ru): 947771