

*Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ, рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук»*

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Известия высших учебных заведений

**ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*научно-технический журнал*

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 22, № 1, 2014, Саратов

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

### ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

*Прохоров М.Д., Пономаренко В.И., Хорев В.С.* Определение времени задержки по временным рядам на основе метода ближайших соседей . . . . . 3

### НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

*Калинин Ю.А., Стародубов А.В., Кузнецов Н.Н., Левин Ю.И.* Исследование генератора широкополосных шумоподобных СВЧ-колебаний на много-скоростных неламинарных электронных пучках . . . . . 16

*Материалы X Международной школы  
«Хаотические автоколебания и образование структур – 2013»  
Россия, Саратов, 7–12 октября 2013*

### ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

*Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В., Сатаев И.Р., Чернышов Н.Ю.* Синхронизация и многочастотная квазипериодичность в динамике связанных осцилляторов . . . . . 27

*Флейшман А.Н., Кораблина Т.В., Петровский С.А., Мартынов И.Д.* Сложная структура и нелинейное поведение very low frequency variability ритма сердца: Модели анализа и практические приложения . . . . . 55

### БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

*Кащенко И.С., Кащенко С.А.* Локальная динамика систем разностных и дифференциально-разностных уравнений . . . . . 71

### НАУКА – ОБРАЗОВАНИЮ

*Мотова М.И., Шалфеев В.Д.* От теории колебаний – к нелинейной динамике 93

### ИСТОРИЯ. PERSONALIA

*Мясин Е.А.* Исследования генерации СВЧ-шума в ИРЭ АН СССР 1962–1967 годов – начало нового научного направления . . . . . 104

### КОНФЕРЕНЦИИ. ШКОЛЫ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ

X Международная школа «Хаотические автоколебания и образование структур – 2013» Россия, Саратов, 7–12.10.2013 . . . . . 123

C O N T E N T S

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Khorev V.S.* Delay time estimation from time series based on nearest neighbor method ..... 3

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Kalinin Yu. A., Starodubov A.V., Kuznetsov N.N., Levin Yu.I.* Investigation of the broadband noise-like microwave generator on multispeed nonlaminar electron beams ..... 16

*Transactions of the X International School  
«Chaotic Oscillations and Pattern Formation – 2013»  
Russia, Saratov, October 7–12, 2013*

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Kuznetsov A.P., Turukina L.V., Sataev I.R., Chernyshov N.Yu.* Synchronization and multi-frequency quasi-periodicity in the dynamics of coupled oscillators ..... 27

- Fleishman A.N., Korablina T.V., Petrovsky S.A., Martynov I.D.* Complex structure and nonlinear behavior of very low frequency of heart rate variability: Model of analysis, and practical applications ..... 55

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Kaschenko I.S., Kaschenko S.A.* Local dynamics of difference and differential-difference equations ..... 71

SCIENCE FOR EDUCATION

- Motova M.I., Shalfeev V.D.* From theory of oscillations to nonlinear dynamics ..... 93

HISTORY. PERSONALIA

- Myasin E.A.* Investigations of HF noise generation in IRE of Academy of Sciences of USSR at 1962–1967 years – the beginning of the new science direction ..... 104

CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIA. SCIENTIFIC SCHOOLS

- X International School «Chaotic Oscillations and Pattern Formation – 2013»  
Russia, Saratov, 7–12.10.2013 ..... 123



## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ЗАДЕРЖКИ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ

*М.Д. Прохоров,<sup>1</sup> В.И. Пономаренко,<sup>1</sup> В.С. Хорев<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

<sup>2</sup> Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Предложен метод определения времени запаздывания систем с задержкой по их временным рядам, основанный на применении метода ближайших соседей. Метод может быть применен к широкому классу систем с запаздыванием и остается эффективным при высоких уровнях динамического и измерительного шума.

*Ключевые слова:* Системы с запаздыванием, анализ временных рядов, оценка параметров.

### Введение

Автоколебательные системы с запаздывающей обратной связью чрезвычайно широко распространены в реальном мире. Например, в пространственно-развитых системах запаздывание определяется тем, что сигналы распространяются с конечной скоростью и им требуется время на преодоление расстояний [1]. Запаздывание реакции на сигнал и обратная связь с запаздыванием присущи многим физическим [2, 3], химическим [4], климатическим [5] и биологическим [6–8] объектам и процессам. При исследовании систем с запаздыванием важно знать значения временных задержек, величина которых во многом определяет динамику и свойства системы. Знание времен запаздывания имеет большое значение для построения модели системы и предсказания поведения системы во времени и при изменении параметров. Поэтому задача восстановления времени запаздывания по временным рядам наблюдаемых динамических переменных привлекает внимание многих исследователей.

Для ее решения были предложены различные методы, позволяющие восстановить времена запаздывания систем по хаотическим временным рядам их колебаний. Многие из этих методов основаны на проецировании бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием в подпространства малой размерности [9–14]. При этом используются такие критерии качества реконструкции системы с запаздыванием, как минимальная ошибка прогноза построенной модели [9–11], минимальная величина информационной энтропии [12] или различные меры сложности спроецированного временного ряда [13, 14]. Известны также методы восста-

новления времени запаздывания, основанные на применении регрессионного анализа [15, 16], статистического анализа экстремумов временного ряда [17], информационных подходов [18, 19], метода множественной стрельбы [20], метода оптимизации [21] и адаптивной синхронизации [22, 23]. В отдельную группу можно выделить методы определения времени запаздывания, основанные на возмущении системы внешним воздействием и анализе отклика [24–27], которые могут быть применены к системам не только в хаотических, но и в периодических режимах.

В данной работе мы предлагаем новый метод восстановления времени задержки по временным рядам, основанный на использовании метода ближайших соседей. Метод ближайших соседей широко используется в различных научных дисциплинах при анализе временных рядов [28, 29]. При этом основными областями его применения являются классификация объектов и прогноз динамики исследуемой системы. В задаче классификации объектов идея метода ближайших соседей заключается в том, что объект полагается относящимся к тому классу, который является наиболее распространенным среди его ближайших соседей. Применительно к задаче прогноза временного ряда, суть метода ближайших соседей состоит в том, чтобы использовать для предсказания динамики системы ее состояния в прошлом, наиболее близкие по своим свойствам состоянию в настоящий момент времени. Мы впервые предлагаем использовать метод ближайших соседей для определения по временному ряду системы с запаздыванием ее времени задержки.

## 1. Восстановление времени задержки в системах первого порядка с запаздыванием

Поясним идею предлагаемого метода на примере одного из наиболее широко используемых дифференциальных уравнений первого порядка с одним временем запаздывания

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau)), \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – параметр инерционности,  $t$  – время запаздывания,  $f$  – нелинейная функция. К уравнению вида (1) сводятся, например, уравнение Маккея–Гласса [6] и уравнение Икеды [1], ставшие эталонными при исследовании систем с запаздыванием.

Поскольку при анализе временных рядов мы всегда имеем дело с переменными, измеренными в дискретные моменты времени, удобно перейти от дифференциального уравнения (1) к разностному уравнению

$$\varepsilon \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -x(t) + f(x(t - \tau)), \quad (2)$$

где  $\Delta t$  – малое время, равное интервалу выборки. Уравнение (2) можно переписать в виде

$$x(t + \Delta t) = a_1 x(t) + a_2 f(x(t - \tau)), \quad (3)$$

где  $a_1 = 1 - \Delta t/\varepsilon$ ,  $a_2 = \Delta t/\varepsilon$ . Запишем уравнение (3) в виде дискретного отображения

$$x_{n+1} = a_1 x_n + a_2 f(x_{n-d}), \quad (4)$$

где  $n = t/\Delta t$  – дискретное время, а  $d = \tau/\Delta t$  – дискретное время задержки.

Пусть у нас имеется временной ряд  $\{x_n\}_{n=1}^N$  системы (1) длиной  $N$  точек. Введем вектор  $\mathbf{X}_i = (x_i, x_{i-d})$  и найдем для него ближайшего соседа – вектор

$\mathbf{X}_j = (x_j, x_{j-d})$ , где  $j \neq i$ . Существует несколько критериев выбора ближайшего соседа для заданного вектора, отличающихся выбором метрики [29]. Наиболее часто используемой является Евклидова метрика

$$L(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (x_{i-d} - x_{j-d})^2}. \quad (5)$$

Ближайшим соседом для вектора  $\mathbf{X}_i$  будет такой вектор  $\mathbf{X}_j$ , для которого расстояние  $L(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$  минимально. В общем случае, по временному ряду находят не одного, а  $k$  ближайших соседей для заданного вектора.

Идея предлагаемого метода состоит в том, что в системе (4) ближайшим соседним векторам, содержащим динамическую переменную в моменты времени  $n$  и  $n-d$ , где  $n \in [d+1, N-1]$ , будут соответствовать близкие состояния системы в моменты времени  $n+1$ , так как эволюция системы (4) определяется ее текущим состоянием и состоянием в задержанный момент времени. Поскольку время запаздывания нам неизвестно, будем перебирать пробные задержки  $m$  из некоторого интервала и для  $k$  ближайших соседних векторов каждого вектора  $\mathbf{X}_n = (x_n, x_{n-m})$  временного ряда оценивать дисперсию  $\sigma_n^2$  соответствующих им состояний системы в моменты времени  $n+1$ .

При ошибочном выборе величины  $m$  ( $m \neq d$ ) дисперсия этих состояний может оказаться большой, так как состояния системы в моменты времени  $n+1$  не будут зависеть от ее состояний в моменты времени  $n-m$ . Истинному времени запаздывания  $d$  будет соответствовать положение минимума величины

$$D(m) = \frac{1}{N-m-2} \sum_{n=m+1}^{N-1} \sigma_n^2. \quad (6)$$

Мы применили метод к временным рядам уравнения Маккея–Гласса

$$\dot{x}(t) = -bx(t) + \frac{ax(t-\tau)}{1+x^c(t-\tau)}. \quad (7)$$

Делением на  $b$  уравнение (7) приводится к виду (1) с  $\varepsilon = 1/b$ . Параметры системы (7)  $a = 0.2$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 10$ ,  $\tau = 300$  соответствовали движению на хаотическом аттракторе, шаг выборки точек  $\Delta t = 1$ , длина ряда  $N = 10000$ . Фрагмент временного ряда приведен на рис. 1, *a*.

На рис. 1, *b* приведены зависимости величины  $D$  от пробного времени запаздывания  $m$  при различном количестве  $k$  ближайших соседей для вектора  $\mathbf{X}_n = (x_n, x_{n-m})$ . Величина  $m$  перебирается из интервала от 1 до 500 с шагом 1. Все зависимости  $D(m)$  демонстрируют ярко выраженный абсолютный минимум при  $m = 300$ , обеспечивая точное восстановление дискретного времени запаздывания  $d = \tau/\Delta t = 300$ .

Отметим, что при выбранных значениях параметров процессы в системе Маккея–Гласса происходят с достаточно большой скоростью, и для численного решения системы часто используется шаг интегрирования  $h = 0.1$ . Если при этом для построения зависимости  $D(m)$  использовать все точки временного ряда, то есть положить шаг выборки точек  $\Delta t = 0.1$ , то дискретное время запаздывания будет  $d = 3000$ . В этом случае величину  $m$  потребуется перебирать в значительно более широком интервале, а длину ряда – увеличить на порядок, чтобы иметь достаточное количество колебаний системы. В результате время численного счета, необходимое

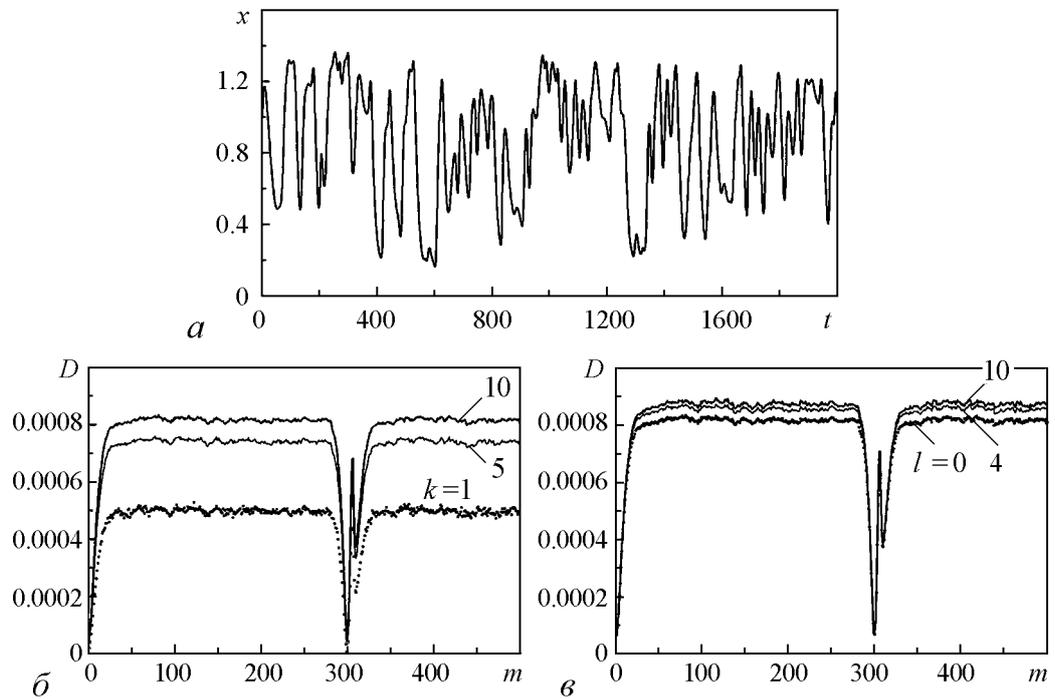


Рис. 1. *a* – временная реализация уравнения Маккея–Гласса в хаотическом режиме; *б* – зависимости величины  $D$  от пробного времени запаздывания  $m$  при различном количестве  $k$  ближайших соседей; *в* – зависимости  $D(m)$  при различном количестве  $l$  исключаемых из рассмотрения близких по времени векторов

для построения зависимости  $D(m)$ , очень сильно увеличится. Для уменьшения времени счета мы пробовали при  $h = 0.1$  брать лишь каждую десятую точку временного ряда ( $\Delta t = 1$  и  $d = 300$ ) для построения  $D(m)$ . Полученные при этом для разных  $k$  графики  $D(m)$  были очень близки соответствующим графикам, представленным на рис. 1, *б*, и имели такой же ярко выраженный абсолютный минимум при  $m = 300$ . Поэтому в последующих примерах мы использовали  $h = 1$  и  $\Delta t = 1$ .

При слишком частой выборке точек возможна ситуация, когда ближайшими соседями вектора  $\mathbf{X}_i = (x_i, x_{i-d})$  окажутся близкие ему по времени векторы  $\mathbf{X}_j = (x_j, x_{j-d})$  с  $j = i \pm p$ , где  $p = 1, 2, \dots, P$ , которые мешают оценке времени запаздывания. В таких случаях при поиске ближайших соседей вектора  $\mathbf{X}_i = (x_i, x_{i-d})$  следует исключить из рассмотрения близкие ему по времени векторы  $\mathbf{X}_j = (x_j, x_{j-d})$  в количестве  $l = 2P$ .

На рис. 1, *в* построены зависимости  $D(m)$  при различном количестве  $l$  близких по времени векторов, не учитываемых при поиске ближайших соседей, для случая  $k = 10$ . Как и на рис. 1, *б*, все графики имеют абсолютный минимум при  $m = d = 300$ .

Следует отметить, что вместо поиска фиксированного числа  $k$  ближайших соседей вектора  $\mathbf{X}_i = (x_i, x_{i-d})$  можно считать его ближайшими соседями все векторы  $\mathbf{X}_j = (x_j, x_{j-d})$ , для которых  $L(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) < \delta$ , где  $\delta$  – некоторая малая величина. Графики  $D(m)$ , построенные при таком способе нахождения ближайших соседних векторов, очень похожи на графики, представленные на рис. 1, *б*. Подобрать параметры  $k$  и  $\delta$  соответствующим образом, можно добиться практически полного совпа-

дения результатов поиска ближайших соседей обоими способами. Кроме того, нами установлено, что выбор метрики для поиска ближайших векторов почти не влияет на вид зависимостей  $D(m)$ .

Для оценки возможностей метода при наличии возмущений мы применили его к рядам, полученным при добавлении к временному ряду уравнения (7) гауссова белого шума с нулевым средним значением. Полученные результаты представлены на рис. 2, *а* для различных уровней измерительного шума при  $k = 10$  и  $l = 10$ . Положение минимума  $D(m)$  позволяет точно восстановить время запаздывания даже при уровнях шума порядка 30% (отношение сигнал/шум около 10 дБ), что существенно превышает уровень шума, допустимый для применения большинства других методов восстановления времени запаздывания.

По отношению к динамическому шуму предложенный нами метод оказывается еще более устойчивым. На рис. 2, *б* зависимости  $D(m)$  при  $k = 10$  и  $l = 10$  построены для случая, когда гауссов белый шум с нулевым средним значением добавлен в правую часть уравнения (7). Минимум всех графиков  $D(m)$ , построенных на рис. 2, *б* при различных уровнях динамического шума, наблюдается при  $m = 300$ .

Рассмотрим случай, когда система (7) совершает периодические колебания ( $a = 0.2, b = 0.1, c = 10, \tau = 10$ ). Фрагмент временного ряда таких колебаний приведен на рис. 3, *а*. При построении зависимостей  $D(m)$  будем считать ближайшими соседями векторы, для которых  $L(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) < 0.02$ . В отсутствие шума на графике  $D(m)$  нет выраженного минимума (рис. 3, *б*). Однако добавление динамического шума оказывается полезным для восстановления времени запаздывания. При 10% шуме (отношение сигнал/шум равно 20 дБ) на графике  $D(m)$  появляется отчетливый минимум при  $m = d = 10$  (см. рис. 3, *б*). Присутствие измерительного шума, разумеется, не оказывает положительного влияния на определение времени запаздывания.

В отличие от большинства других методов восстановления времени запаздывания, предложенный нами подход можно применять для определения времени задержки не только систем вида (1) с линейной зависимостью от текущего состояния и нелинейной зависимостью от состояния в задержанный момент времени, но и систем более общего вида, с нелинейной функцией  $F$ , зависящей от обеих переменных  $x(t)$  и  $x(t - \tau)$

$$\dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau)). \quad (8)$$

Рассуждения, приведенные выше для системы (1), остаются справедливыми

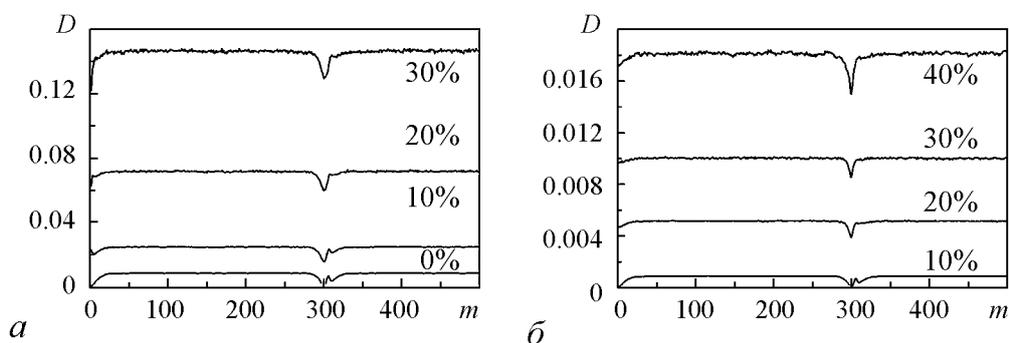


Рис. 2. Зависимости  $D(m)$  для системы Маккея–Гласса в хаотическом режиме при различных уровнях измерительного шума (*а*) и динамического шума (*б*). Уровни шума указаны в процентах на соответствующих кривых

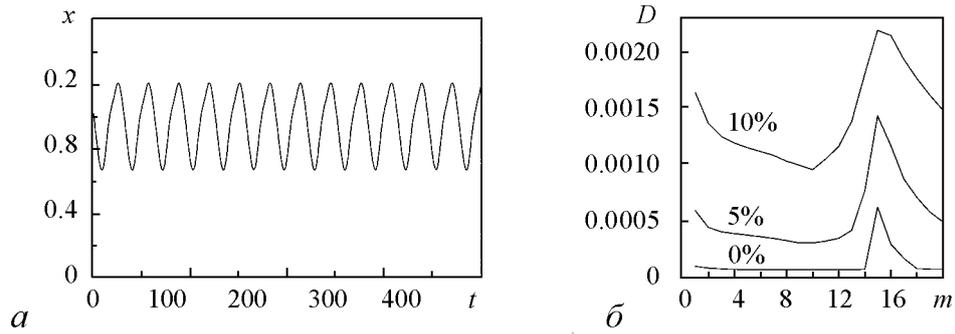


Рис. 3. *a* – временная реализация уравнения Маккея–Гласса в периодическом режиме; *b* – зависимости  $D(m)$  при различных уровнях динамического шума, указанного в процентах на соответствующих кривых

для систем вида (8), поскольку в основе метода лежит учет зависимости эволюции исследуемой системы от ее текущего состояния и состояния в задержанный момент времени, а сам вид зависимости не имеет значения.

## 2. Восстановление времени задержки в системах второго порядка с запаздыванием

Предложенный метод может быть легко развит на системы высокого порядка с задержкой, в частности на системы, описываемые дифференциальными уравнениями с запаздыванием второго порядка

$$\varepsilon_2 \ddot{x}(t) + \varepsilon_1 \dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau)), \quad (9)$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – параметры инерционности. Проиллюстрируем это на примере системы следующего вида:

$$\varepsilon_2 \ddot{x}(t) + \varepsilon_1 \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau)). \quad (10)$$

Используя описанный выше формализм, можно перейти от дифференциального уравнения (10) к дискретному отображению

$$x_{n+2} = b_1 x_{n+1} + b_2 x_n + b_3 f(x_{n-d}), \quad (11)$$

где  $b_1 = 2 - (\varepsilon_1 \Delta t) / \varepsilon_2$ ,  $b_2 = -1 + (\varepsilon_1 \Delta t - (\Delta t)^2) / \varepsilon_2$ ,  $b_3 = (\Delta t)^2 / \varepsilon_2$ .

Для каждого вектора  $\mathbf{X}_n = (x_{n+1}, x_n, x_{n-m})$  временного ряда системы (10) найдем  $k$  ближайших соседних векторов и оценим дисперсию соответствующих им состояний системы в моменты времени  $n + 2$ . Перебирая различные пробные задержки  $m$ , будем искать минимум величины

$$D(m) = \frac{1}{N - m - 3} \sum_{n=m+1}^{N-2} \sigma_n^2, \quad (12)$$

положение которого даст оценку дискретного времени запаздывания  $d = \tau / \Delta t$ .

Описанные методы могут быть использованы для определения по временному ряду априорно не известного порядка системы с запаздыванием. Идея подхода состоит в том, чтобы сначала восстановить время запаздывания исследуемой системы

в предположении, что она описывается уравнением с запаздыванием первого порядка (1), а затем в предположении, что модельным уравнением системы является уравнение второго порядка (10), и построить зависимости (6) и (12) на одном графике. При правильном выборе порядка модельного дифференциального уравнения зависимость  $D(m)$  будет лежать ниже зависимости  $D(m)$ , построенной при ошибочном выборе порядка модельного уравнения.

Например, пусть у нас имеется временной ряд системы с запаздыванием второго порядка (10) с квадратичной нелинейной функцией  $f(x) = \lambda - x^2$ , где  $\lambda$  – параметр нелинейности, находящейся под действием 10% динамического шума. Параметры системы  $\tau = 1000$ ,  $\lambda = 1.9$ ,  $\varepsilon_1 = 7$ ,  $\varepsilon_2 = 10$  соответствуют движению на хаотическом аттракторе. Шаг выборки точек  $\Delta t = 1$ , длина ряда  $N = 10000$ . Фрагмент временного ряда приведен на рис. 4, а. Будем считать, что порядок модельного уравнения этой системы нам не известен, и восстановим сначала время запаздывания, полагая, что система описывается уравнением с запаздыванием первого порядка (1). На рис. 4, б построена зависимость (6) при  $k = 10$  и  $l = 10$ . Она имеет минимум при  $m = 1001$ , что немного больше времени запаздывания  $d = \tau/\Delta t = 1000$ .

Восстановим теперь время запаздывания, предположив, что исследуемая система описывается уравнением с запаздыванием второго порядка (10). На рис. 4, б построена зависимость (12) при  $k = 10$  и  $l = 10$ . Она располагается ниже зависимости (6), что указывает на то, что система лучше описывается уравнением второго порядка. Минимум зависимости (12) наблюдается при  $m = d = 1000$ , то есть при правильном выборе порядка модельного уравнения время запаздывания удается восстановить точно.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда исследуемый временной ряд сгенерирован системой с запаздыванием первого порядка (1) с квадратичной нелинейной функцией и параметрами  $\tau = 1000$ ,  $\lambda = 1.9$ ,  $\varepsilon = 10$ , соответствующими движению на хаотическом аттракторе. Как и в рассмотренном выше примере, на систему действует 10% динамический шум,  $\Delta t = 1$ ,  $N = 10000$ .

При реконструкции времени задержки в предположении, что модельное уравнение имеет вид (1), график

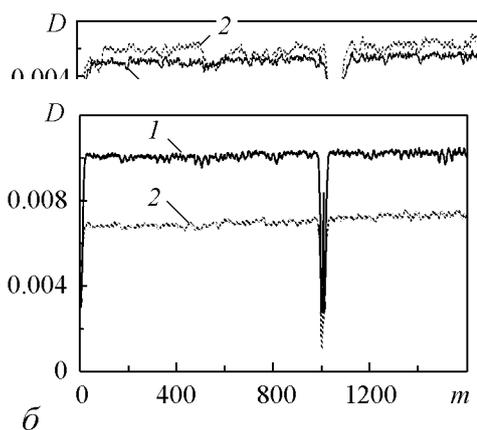
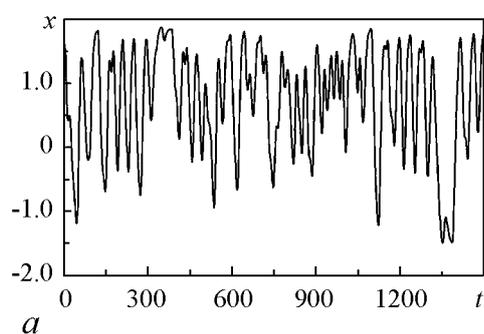


Рис. 4. а – временная реализация уравнения (10) с квадратичной нелинейностью в хаотическом режиме; б – зависимости  $D(m)$ , построенные в предположении, что модельное уравнение имеет первый порядок (1) и второй порядок (2)

$D(m)$ , построенный при  $k = 10$  и  $l = 10$ , демонстрирует минимум при  $m = d = 1000$ . (Кривая 1 на рис. 5.)

Зависимость  $D(m)$ , построенная в предположении, что модельное уравнение имеет вид (10), показана на рис. 5 (кривая 2). Она имеет минимум при  $m = 999$  и расположена преимущественно выше кривой 1, что указывает на то, что модельное уравнение системы имеет первый порядок.

Отметим, что при выборе шага интегрирования для рассмотренных в данном разделе систем мы руководствовались такими же соображениями, как и в разделе 1 для системы Маккея–Гласса. При  $h = 1$  и  $\Delta t = 1$  количество точек на характерном временном масштабе колебаний оказывается достаточным для успешной реализации предложенного метода и построения зависимостей  $D(m)$ .

### 3. Восстановление времен запаздывания в системах с двумя задержками

Предложенный метод может быть распространен и на системы с несколькими временами запаздывания. Рассмотрим систему с запаздыванием с двумя различными временами задержки  $\tau_1$  и  $\tau_2$

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f_1(x(t - \tau_1)) + f_2(x(t - \tau_2)). \quad (13)$$

Используя описанный выше подход, можно перейти от дифференциального уравнения (13) к дискретному отображению

$$x_{n+1} = a_1 x_n + a_2 f_1(x_{n-d_1}) + a_2 f_2(x_{n-d_2}), \quad (14)$$

где  $a_1 = 1 - \Delta t/\varepsilon$ ,  $a_2 = \Delta t/\varepsilon$ ,  $d_1 = \tau_1/\Delta t$ ,  $d_2 = \tau_2/\Delta t$ .

Из уравнения (14) следует, что ближайшим соседним векторам, содержащим динамическую переменную в моменты времени  $n$ ,  $n - d_1$  и  $n - d_2$ , где  $n \in [d_2 + 1, N - 1]$  ( $d_2 > d_1$ ), будут соответствовать близкие состояния системы в моменты времени  $n + 1$ . Поскольку времена запаздывания  $d_1$  и  $d_2$  нам не известны, будем перебирать пробные задержки  $m_1$  и  $m_2$  из некоторого интервала и для  $k$  ближайших соседних векторов каждого вектора  $\mathbf{X}_n = (x_n, x_{n-m_1}, x_{n-m_2})$  временного ряда оценивать дисперсию  $\sigma_n^2$  соответствующих им состояний системы в моменты времени  $n + 1$ .

При ошибочном выборе  $m_1$  и/или  $m_2$  ( $m_1 \neq d_1$ ,  $m_2 \neq d_2$ ) дисперсия этих состояний может оказаться большой. В качестве оценки времен запаздывания  $d_1$  и  $d_2$  будем использовать положение минимума величины

$$D(m_1, m_2) = \frac{1}{N - m_2 - 2} \sum_{n=m_2+1}^{N-1} \sigma_n^2. \quad (15)$$

Продemonстрируем работоспособность метода, применив его к временному ряду обобщенного уравнения Маккея–Гласса, получаемого введением второго времени запаздывания

$$\dot{x}(t) = -bx(t) + \frac{1}{2} \frac{ax(t - \tau_1)}{1 + x^c(t - \tau_1)} + \frac{1}{2} \frac{ax(t - \tau_2)}{1 + x^c(t - \tau_2)}. \quad (16)$$

Поделив обе части уравнения (16) на  $b$ , можно привести его к виду (13) с  $\varepsilon = 1/b$ . При  $a = 0.2$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 10$ ,  $\tau_1 = 70$ ,  $\tau_2 = 300$  система (16) демонстрирует хаотические колебания. По временному ряду длиной  $N = 10000$  точек при шаге выборки  $\Delta t = 1$  построим зависимость  $D(m_1, m_2)$ , представляющую собой двумерную поверхность (рис. 6, а). При ее построении мы считали ближайшими соседями вектора  $\mathbf{X}_i$  и  $\mathbf{X}_j$ , расстояние

$$L(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (x_{i-m_1} - x_{j-m_1})^2 + (x_{i-m_2} - x_{j-m_2})^2} \quad (17)$$

между которыми  $L(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) < 0.02$ . Зависимость  $D(m_1, m_2)$  имеет минимум при  $m_1 = d_1 = 70$ ,  $m_2 = d_2 = 300$ , обеспечивая точное восстановление обоих времен запаздывания. Так же как при численном интегрировании системы (7), мы выбрали  $h = 1$ . Такой шаг интегрирования позволяет при  $\Delta t = 1$  точно восстановить времена запаздывания, а уменьшение шага приводит к существенному увеличению вычислительных затрат для построения зависимости  $D(m_1, m_2)$ .

Для сравнения на рис. 6, б приведена зависимость  $D(m)$ , полученная при применении к временному ряду системы (16) метода, предложенного в разделе 1 для систем (1) с одной задержкой. График этой зависимости (6) имеет глубокие минимумы при  $m = 68$  и  $m = 298$ . Таким образом, без учета вида модельного уравнения (13) оценка времен запаздывания оказывается менее точной. Еще один характерный минимум  $D(m)$  наблюдается на рис. 6, б вблизи  $m = d_1 + d_2$ .

Отметим, что, если применить метод восстановления двух задержек к временному ряду системы (1) с одним временем запаздывания, минимум величины  $D(m_1, m_2)$  будет наблюдаться при  $m_1 = m_2 = d$ .

Описанный в данном разделе метод можно применять для определения времен запаздывания не только систем вида (13), но и систем более общего вида с двумя задержками

$$\dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2)). \quad (18)$$

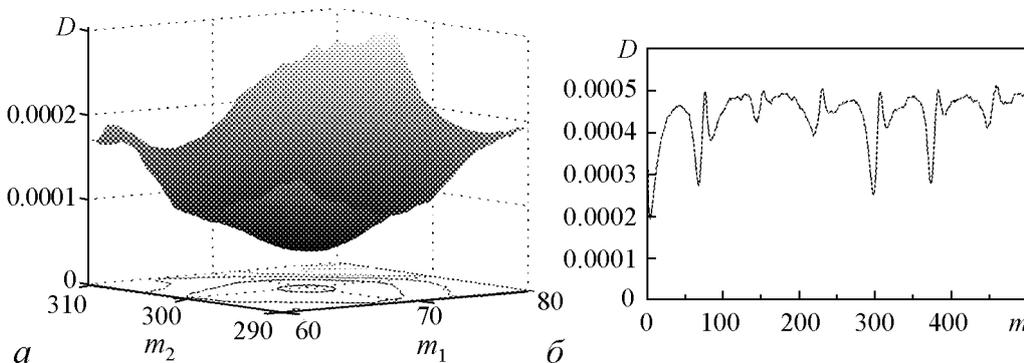


Рис. 6. Зависимости  $D(m_1, m_2)$  и  $D(m)$  для обобщенной системы Маккея–Гласса в хаотическом режиме

#### 4. Восстановление времени задержки в системах с запаздыванием с двумя динамическими переменными

Предложенный метод восстановления времени запаздывания по временным рядам, основанный на применении метода ближайших соседей, может быть распространен на системы, описываемые дифференциальными уравнениями с запаздыванием с несколькими динамическими переменными:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F(x(t), x(t - \tau), y(t - \tau)), \\ \dot{y}(t) &= F(y(t), y(t - \tau), x(t - \tau)).\end{aligned}\tag{19}$$

В этом случае, используя временные ряды обеих переменных  $x(t)$  и  $y(t)$ , будем искать ближайших соседей для векторов  $\mathbf{X}_n = (x_n, x_{n-m}, y_{n-m})$  или  $\mathbf{Y}_n = (y_n, y_{n-m}, x_{n-m})$  при различных пробных задержках  $m$  и определять время запаздывания по положению минимума величины (6).

Применим метод к временным рядам системы двух связанных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= rx(t) - \mu [x^2(t - \tau) + cy^2(t - \tau)] x(t), \\ \dot{y}(t) &= ry(t) - \mu [y^2(t - \tau) + cx^2(t - \tau)] y(t),\end{aligned}\tag{20}$$

введенной в [30]. Выберем следующие значения параметров:  $r = 4$ ,  $\mu = 4$ ,  $c = 0.5$ ,  $\tau = 0.35$ . Как показано в [30], при этих параметрах система (20) демонстрирует периодические колебания. Фрагмент временного ряда переменной  $x(t)$  приведен на рис. 7, а.

По временным рядам переменных  $x(t)$  и  $y(t)$  длиной  $N = 10000$  точек при шаге выборки  $\Delta t = 0.01$  построим зависимость  $D(m)$ . В отсутствие шума на графике  $D(m)$  нет выраженного минимума. Однако при добавлении в правую часть обоих уравнений системы (20) достаточно больших независимых динамических шумов на графике  $D(m)$  появляется минимум. На рис. 7, б зависимость  $D(m)$  построена при  $k = 10$ ,  $l = 10$  и 40% динамических шумах (отношение сигнал/шум около 8 дБ). Она имеет минимум при  $m = 35$ , что совпадает с временем запаздывания  $d = \tau/\Delta t = 35$ .

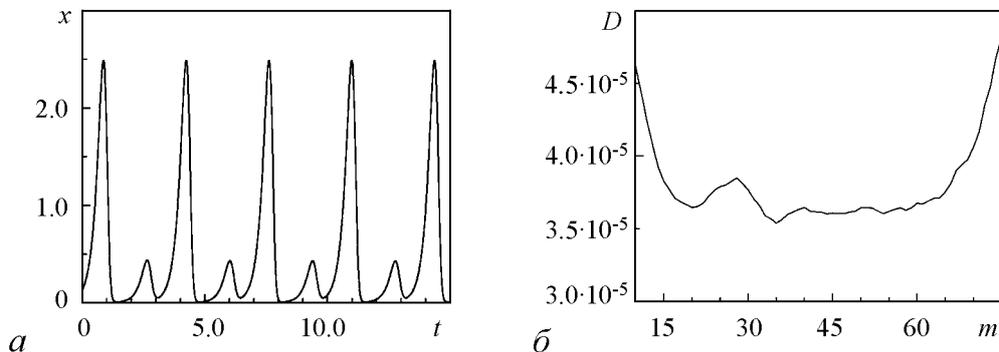


Рис. 7. а — временная реализация уравнения (20); б — зависимость  $D(m)$  при 40% динамических шумах

## Заключение

Нами предложен метод восстановления времени запаздывания систем с задержкой по их временным рядам, основанный на применении метода ближайших соседей. Метод позволяет определить время запаздывания систем высокого порядка с задержкой, систем с несколькими временами запаздывания и систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздыванием с несколькими динамическими переменными. Метод может быть применен к системам с запаздыванием с произвольным видом нелинейной функции, в том числе зависящей одновременно от задержанной и незадержанной переменной. Кроме того, метод можно использовать для определения по временному ряду априорно не известного порядка системы с запаздыванием.

Параметры метода могут быть выбраны в широких пределах, а сам метод остается эффективным при очень высоких уровнях как динамического, так и измерительного шума. Показано, что метод позволяет восстановить время запаздывания не только систем с задержкой, совершающих хаотические колебания, но и систем с задержкой в периодических режимах, находящихся под действием динамического шума.

*Работа выполнена при государственной поддержке ведущих научных школ, грант НШ-1726.2014.2 и при поддержке РФФИ, грант № 13-02-00227.*

## Библиографический список

1. Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system // Opt. Commun. 1979. Vol. 30. P. 257.
2. Lang R., Kobayashi K. External optical feedback effects on semiconductor injection lasers // IEEE J. Quantum Electron. 1980. Vol. 16. P. 347.
3. Erneux T. Applied Delay Differential Equations. New York: Springer, 2009.
4. Epstein I. R. Delay effects and differential delay equations in chemical-kinetics // Int. Rev. in Phys. Chem. 1992. Vol. 11. P. 135.
5. Mokhov I.I., Smirnov D.A. El Nino Southern Oscillation drives North Atlantic Oscillation as revealed with nonlinear techniques from climatic indices // Geophys. Research Lett. 2006. Vol. 33. L03708.
6. Mackey M.C., Glass L. Oscillations and chaos in physiological control systems // Science. 1977. Vol. 197. P. 287.
7. Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993.
8. Bocharov G.A., Rihan F.A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations // J. Comp. Appl. Math. 2000. Vol. 125. P. 183.
9. Fowler A.C., Kember G. Delay recognition in chaotic time series // Phys. Lett. A. 1993. Vol. 175. P. 402.
10. Hegger R., Bünner M.J., Kantz H., Giaquinta A. Identifying and modeling delay feedback systems // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. P. 558.
11. Bünner M.J., Ciofini M., Giaquinta A., Hegger R., Kantz H., Meucci R., Politi A. Reconstruction of systems with delayed feedback: (I) Theory // Eur. Phys. J. D. 2000. Vol. 10. P. 165.

12. *Tian Y.-C., Gao F.* Extraction of delay information from chaotic time series based on information entropy // *Physica D.* 1997. Vol. 108. P. 113.
13. *Kaplan D.T., Glass L.* Coarse-grained embeddings of time series: Random walks, gaussian random process, and deterministic chaos // *Physica D.* 1993. Vol. 64. P. 431.
14. *Bünner M.J., Meyer Th., Kittel A., Parisi J.* Recovery of the time-evolution equation of time-delay systems from time series // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 56. P. 5083.
15. *Voss H., Kurths J.* Reconstruction of non-linear time delay models from data by the use of optimal transformations // *Phys. Lett. A.* 1997. Vol. 234. P. 336.
16. *Ellner S.P., Kendall B.E., Wood S.N., McCauley E., Briggs C.J.* Inferring mechanism from time-series data: Delay differential equations // *Physica D.* 1997. Vol. 110. P. 182.
17. *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Караваев А.С., Безручко Б.П.* Определение параметров систем с запаздывающей обратной связью по хаотическим временным реализациям // *ЖЭТФ.* 2005. Т. 127. Вып. 3. С. 515.
18. *Udaltsov V.S., Larger L., Goedgebuer J.P., Locquet A., Citrin D.S.* Time delay identification in chaotic cryptosystems ruled by delay- differential equations // *J. Opt. Technology.* 2005. Vol. 72. P. 373.
19. *Zunino L., Soriano M.C., Fischer I., Rosso O.A., Mirasso C.R.* Permutation-information-theory approach to unveil delay dynamics from time- series analysis // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 82. 046212.
20. *Horbelt W., Timmer J., Voss H.U.* Parameter estimation in nonlinear delayed feedback systems from noisy data // *Phys. Lett. A.* 2002. Vol. 299. P. 513.
21. *Dai C., Chen W., Li L., Zhu Y., Yang Y.* Seeker optimization algorithm for parameter estimation of time-delay chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 2011. Vol. 83. 036203.
22. *Sorrentino F.* Identification of delays and discontinuity points of unknown systems by using synchronization of chaos // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 81. 066218.
23. *Ma H., Xu B., Lin W., Feng J.* Adaptive identification of time delays in nonlinear dynamical models // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 82. 066210.
24. *Siefert M.* Practical criterion for delay estimation using random perturbations // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76. 026215.
25. *Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* Recovery of systems with a linear filter and nonlinear delay feedback in periodic regimes // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 78. 066207.
26. *Yu D., Frasca M., Liu F.* Control-based method to identify underlying delays of a nonlinear dynamical system // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 78. 046209.
27. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* Reconstruction of time-delay systems using small impulsive disturbances // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 80. 066206.
28. *Farmer J.D., Sidorowich J.J.* Predicting chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59. P. 845.
29. *Garcna P., Jiménez J., Marcano A., Moleiro F.* Local optimal metrics and nonlinear modeling of chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 1449.
30. *Villermaux E.* Memory-induced low frequency oscillations in closed convection boxes // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75. P. 4618.

*Поступила в редакцию* 25.06.2013  
*После доработки* 6.12.2013

© М.Д. Прохоров, В.И. Пономаренко, В.С. Хорев  
Изв. вузов «ПНД», т. 22, № 1, 2014

## DELAY TIME ESTIMATION FROM TIME SERIES BASED ON NEAREST NEIGHBOR METHOD

*M.D. Prokhorov,<sup>1</sup> V.I. Ponomarenko,<sup>1</sup> V.S. Khorev<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Institute of Radio-Engineering and Electronics RAS, Saratov Branch

<sup>2</sup> Saratov State University

The method is proposed for delay time estimation in time-delay systems from their time series. The method is based on the nearest neighbor method. It can be applied to a wide class of time-delay systems and it is still efficient under very high levels of dynamical and measurement noise.

*Keywords:* Time-delay systems, time series analysis, parameter estimation



*Прохоров Михаил Дмитриевич* – родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 150 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН  
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru



*Пономаренко Владимир Иванович* – родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 150 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН  
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com



*Хорев Владимир Сергеевич* – родился в Гомеле (1987). Окончил магистратуру в Саратовском государственном университете (2011). Аспирант кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Область научных интересов – моделирование по временным рядам, нелинейная динамика и ее приложения к задачам биофизики и медицины. Принимал участие в 10 международных и всероссийских конференциях. Имеет 14 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: zergs@inbox.ru





## ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕНЕРАТОРА ШИРОКОПОЛОСНЫХ ШУМОПОДОБНЫХ СВЧ-КОЛЕБАНИЙ НА МНОГОСКОРОСТНЫХ НЕЛАМИНАРНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКАХ

*Ю.А. Калинин, А.В. Стародубов, Н.Н. Кузнецов, Ю.И. Левин*

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

В работе представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований многоскоростных электронных пучков. Показано, что в таких электронных пучках формируется турбулентность, приводящая к возникновению множественных сгустков пространственного заряда, которые являются источниками широкополосных шумоподобных колебаний. Приведены результаты экспериментального исследования малогабаритного лабораторного макета генератора, в основу которого положены принципы формирования и использования многоскоростных турбулентных электронных пучков.

*Ключевые слова:* Вакуумная СВЧ-электроника, генераторы широкополосных шумоподобных колебаний, многоскоростной электронный пучок, турбулентность, физический эксперимент.

1. В настоящее время такие источники широкополосных шумоподобных сверхвысокочастотных (СВЧ) колебаний как приборы на виртуальном катоде (виркаторы) достаточно широко известны. Различные схемы сверхвысоковольтных и низковольтных виркаторов рассмотрены, например, в работах [1–5]. На наш взгляд, имеются некоторые общие принципы, которые объединяют вышеуказанные приборы виркаторного типа. Это, прежде всего, использование многоскоростных электронных пучков, приводящее к их турбулизации и образованию сгустков пространственного заряда. Существующее между сгустками пространственного заряда пространственно-временное взаимодействие создает условие для формирования электронной обратной связи и, следовательно, приводит к генерации. Доказательством этого механизма служит тот факт, что генерация обнаруживается в тех случаях, когда потенциал в пространстве взаимодействия не достигает потенциала катода (условие образования виртуального катода), а значительно превышает его [6]. Кроме того, создав многоскоростной пучок, легче затормозить его небольшим понижением потенциала коллектора-отражателя. Теоретические и экспериментальные исследования показали, что в диоде, через который распространяется замедляющийся электронный

поток, возникает неустойчивость колебаний в СВЧ-диапазоне. Эта неустойчивость имеет место, когда в стационарном состоянии минимум потенциала в диоде не образуется, и может быть использована, например, для повышения КПД генерации при осуществлении обратной связи по электронному потоку в приборах виркаторного типа [6].

2. Перейдем к рассмотрению вопросов формирования многоскоростных электронных пучков. Известно, что разброс начальных (поперечных и продольных) скоростей электронов, обусловленный нагревом катода и действием пространственного заряда, достаточно мал и не превышает долей процента от среднего значения. Этот разброс увеличивается до значений процента при работе катода в режиме температурного ограничения. Таким образом, для получения большего разброса электронов по скоростям необходимо использовать другие физические механизмы изменения скорости электронов.

2.1. Одним из способов, позволяющих добиться большого разброса электронов по скоростям, является применение управляющей сетки. Суть данного способа заключается в следующем. В непосредственной близости у катода располагается сетка, на которую подается потенциал, существенно больший «естественного» («естественный» потенциал равен потенциалу эквипотенциали, на которую помещается сетка). Действие ячеек сетки на электроны приводит к тому, что электроны, прошедшие через центральную часть ячейки и вблизи краев, приобретают разные скорости как по модулю, так и по направлению. Другими словами, ячейка сетки играет роль своего рода рассеивающей линзы для электронных пучков, проходящих через нее. Разброс электронов по скоростям может достигнуть 2–3 %. С целью защиты управляющей сетки от перегрева перед ней располагается экранирующая сетка, находящаяся под потенциалом катода, витки которой закрывают витки управляющей сетки [7].

Увеличение разброса электронов по скоростям осуществляется структурой, состоящей из нескольких радиальных сеток (рис. 1). Первая сетка 2 является экранирующей и ее витки закрывают витки второй сетки 3 – управляющей. Экранирующая сетка находится под потенциалом катода 1 и защищает управляющую сетку от перегрева. Управляющая сетка имеет потенциал, равный ускоряющему потен-

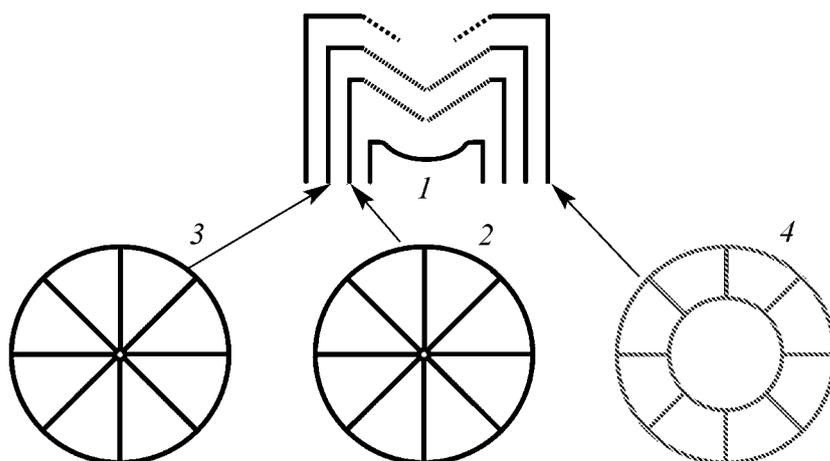


Рис. 1. Конструкция сеточной структуры с радиальными сетками у катода: 1 – катод, 2 – экранирующая сетка, 3 – управляющая сетка, 4 – тормозящая сетка

циалу  $U_0$ . После управляющей сетки располагается третья сетка 4, причем витки третьей сетки расположены таким образом, что она оказывает воздействие только на периферийные электроны. Чтобы оказывать тормозящее действие на электроны, проходящие через витки третьей сетки, на нее *подается потенциал, меньший ускоряющего*. Таким образом, в данной конструкции можно добиться *существенно больших* значений разброса электронов по скоростям. Эти значения будут определяться соотношением потенциалов на второй (управляющей) и третьей (тормозящей) сетках.

**2.2.** Еще одним способом, позволяющим увеличить разброс электронов по скоростям, является использование неоднородного магнитного поля. Изменение поперечного (углового) момента количества движения электронов в неоднородном магнитном поле приводит к увеличению разброса электронов по скоростям [8]. В случае медленно нарастающего магнитного поля создаются условия для получения больших значений углового момента количества движения. В результате азимутальная скорость электронов будет увеличиваться, а продольная уменьшаться. При этом приосевые электроны практически не изменяют своей скорости, а периферийные замедляются, что и приводит к большому разбросу электронов по скоростям в поперечном сечении пучка. Происходит смещение электростатических пульсаций в различных слоях электронного пучка, огибающая пучка утрачивает пульсирующий характер, что ведет к перемешиванию слоев с переходом в неламинарность (турбулентность). Образуются сгустки пространственного заряда, которые взаимодействуют друг с другом. Эти сгустки неустойчивы во времени и пространстве. Они совершают интенсивные пространственно-временные колебания, которые являются источниками широкополосного шумоподобного излучения в СВЧ-диапазоне.

**2.3.** Таким образом, многоскоростной электронный пучок в неоднородном магнитном поле образует места с повышенной плотностью заряда (электронные сгустки). Как правило, такие сгустки возникают вблизи периферии пучка, где сходятся в один объем много электронных траекторий. Сплошной пучок становится близким к трубчатому (полуму). Следует ожидать, что плотность тока в области сгустка значительно возрастает относительно среднего значения. Наличие скрещенных электрических и магнитных полей формирует силы, приводящие к смещению электронов в направлении перпендикулярном векторам напряженностей обеих полей. За счет такого смещения пучок изгибается, а затем разделяется на отдельные «струи», в поперечном сечении имеющие S-образную форму. При этом чем сильнее первоначальная неоднородность, тем ярче проявляются указанные эффекты. Другими словами, трубчатым электронным пучкам присущ механизм нарастания первоначальных возмущений плотности пространственного заряда.

**2.4.** Еще одним фактором, значительно влияющим на разброс электронов по скоростям, является наличие тормозящего электрического поля. В этом случае часть электронов многоскоростного пучка возвращается в область катода, усиливая таким образом электронную обратную связь. Отраженные электроны при этом попадают в область сгустков пространственного заряда и, в силу их небольшой скорости, существенно увеличивают плотность тока в области сгустка. Такие плотные сгустки пространственного заряда очень неустойчивы, они разрушаются, возникая в других местах пространства.

**2.5.** Кратко коснемся влияния положительных ионов на формирование плотных сгустков пространственного заряда. Здесь необходимо учесть то, что мы имеем дело с двумя процессами, влияние на пространственный заряд которых противоположно. С одной стороны, наличие положительных ионов в электронных пучках позволяет более длительное время удерживать электронные сгустки от развала, что способствует увеличению плотности тока в сгустке и более длительному его существованию. Понятно, что повышение плотности интенсивно колеблющихся электронных структур положительно скажется в итоге на мощности и полосе генерации. С другой стороны, положительные ионы компенсируют отрицательный заряд электронных сгустков. Таким образом, в настоящее время пока затруднительно однозначно выделить доминирующее влияние положительных ионов на сгустки пространственного заряда в рассматриваемом многоскоростном электронном пучке. Данный вопрос требует более детального как экспериментального, так и теоретического изучения, в том числе, с использованием численного моделирования.

**3.** Перейдем к рассмотрению результатов численного моделирования. Расчет непараксиальных неламинарных траекторий электронных пучков проводился на основе решения уравнений движения электронов в цилиндрических координатах [8–9]. Предполагается, что пучок электронов является аксиально-симметричным. В модели электронный пучок разбивается на  $N$  заряженных слоев толщиной  $dr$ , вложенных друг в друга, каждый из которых заменяется бесконечно тонким заряженным цилиндром. Каждому цилиндру присваивается ток  $j$ . Решая уравнения движения, можно получить представление о форме траекторий пучка. Для подсчета напряженности электрического поля, созданного пространственным зарядом, была использована теорема Гаусса. Описанная расчетная модель является приемлемой, поскольку в рассматриваемой задаче исследуется аксиально-симметричный электронный пучок. Следует подчеркнуть, что данная модель является одной из возможных для описания электронных пучков с аксиальной симметрией. Компьютерные расчеты показали, что данная модель позволяет качественно описать внутреннюю структуру турбулентного электронного пучка. Система уравнений решалась численно методом Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом  $h = 0.01$  [8]. Заметим, что теоретически электроны аксиально-симметричного пучка не могут пересекать ось, так как при подходе электронов к оси силы электрического расталкивания неограниченно возрастают. Чтобы сгладить подобную сингулярность, в нашей модели вводится приосевой слой толщиной  $\varepsilon = 0.001$ . Если траектория попадает в этот слой, то знак ее тангенса угла наклона меняется на противоположный и траектория тем самым отражается от оси. Такой метод сглаживания данной сингулярности является приемлемым в силу условия аксиальной симметрии пучка. Используемая модель позволяет задавать потенциалы на входе и выходе пространства взаимодействия, соответствующие ускоряющему напряжению и тормозящему потенциалу коллектора, а также задать начальный разброс электронов по скоростям на входе в пространство взаимодействия и величину внешнего магнитного поля. Величина начального скоростного разброса определяется параметрами электронной пушки и соотношением напряжений на ускоряющей и замедляющей сетках. При проведении численного моделирования величина разброса электронов по скоростям, входящих в пространство взаимодействия, была выбрана равной 50%. Расчет проводился для значений тока пучка от 200 до 800 мА и напряжениях, соответствующих рассмотренным в эксперименте режимам. Метод

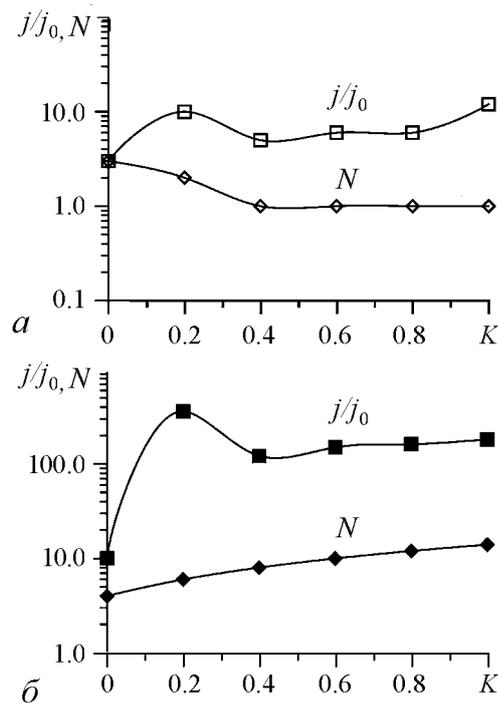


Рис. 2. Результаты численного моделирования зависимостей плотности тока  $j/j_0$  в электронных сгустках и их количества  $N$  от коэффициента торможения электронного пучка  $K$ : а – случай отсутствия начального разброса по скоростям, б – случай наличия начального разброса по скоростям. Магнитное поле  $B = 0.05$  Тл, ток пучка  $I = 0.2$  А

зависимость имеет место и при наличии неоднородного магнитного поля  $B_0 = 0.05$  Тл (рис. 2, б). Была исследована зависимость плотности тока в сгустках пространственного заряда и количества сгустков пространственного заряда от амплитуды магнитного поля  $B_0$ . Полученные результаты свидетельствуют о том, что с ростом амплитуды неоднородного магнитного поля наблюдается рост как плотности тока в сгустках пространственного заряда, так и их количество. Исследование зависимости плотности тока в сгустках пространственного заряда и количества сгустков пространственного заряда от тока пучка  $I$  показали, что в достаточно большом интервале изменений значений тока пучка  $I$  (до значений  $I_{max} = 0.8$  А) наблюдается слабое изменение как плотности тока в сгустках, так и их количество.

4. Рассмотрим результаты экспериментальных исследований. Принципиальная схема исследуемого макета генератора широкополосных шумоподобных колебаний представлена на рис 3, а. В лабораторном макете генератора использовался оксидный катод 1 диаметром 18.3 мм. Расстояние между катодом 1 и экранирующей сеткой 2 составляло 1 мм. Расстояние между экранирующей сеткой 2 и управляющей сеткой 3 составило 1.8 мм. Расстояние между управляющей сеткой 3 и тормозящей сеткой 4 составило 2.3 мм. В макете использовались сетки с проницаемостью 92%. Длина пространства взаимодействия в лабораторном макете составила 60 мм, диаметр трубы дрейфа 54 мм. Диаметр съемника б СВЧ-энергии 32 мм. Внешнее магнитное поле формировалось полем соленоида. Качественный вид распределения магнитного поля представлен на рис. 3, б. Питание лабораторного макета осуществлялось

позволяет строить траектории движения частиц в пространстве взаимодействия, а также определять плотность тока в заданной точке, рассчитывая число частиц попавших в эту точку.

Как уже было отмечено выше, для формирования плотных сгустков пространственного заряда необходим начальный разброс электронов по скоростям. Были проведены исследования зависимости плотности тока  $j_{max}/j_0$  (где  $j_0$  – среднее значение плотности тока) и числа сгустков  $N$  от параметра торможения электронного пучка  $K$ , который определяется следующим образом:

$$K = 1 - U_{col}/U_0,$$

где  $U_{col}$  – потенциал, подаваемый на коллектор;  $U_0$  – ускоряющее напряжение. В случае отсутствия внешнего магнитного поля установлено, что при токе пучка  $I = 0.2$  А и ускоряющем напряжении  $U_0 = 700$  В плотность тока в сгустках при наличии начального разброса электронов по скоростям возрастает в 10 и более раз (рис. 2, а). Аналогичная зависимость

в непрерывном режиме. Ускоряющее напряжение варьировало в диапазоне  $U_0 = 700 - 1000$  В при токе до 200 мА, что соответствует значениям микропереванса, не превышающим 11 ед. Величина разброса электронов по скоростям в лабораторном макете генератора достигалась 20–30%. Таким образом, описанный выше экспериментальный макет генератора представляет собой достаточно короткую систему. Расчет показывает [10], что для такой геометрии короткой системы критическое значение микропереванса составляет около 38 ед. при токе пучка 200 мА и ускоряющем напряжении 700 В.

В качестве контрольно-измерительного оборудования были использованы измеритель мощности Agilent Technologies N1912A P-series и спектроанализатор Agilent Technologies ESA-E Series Spectrum Analyzer E4402B.

Методами физического эксперимента с использованием разборной вакуумной установки [11,12] и набором соответствующих зондов были проведены исследования структуры многоскоростных турбулентных электронных пучков. На рис. 4 приведены результаты экспериментальных исследований, отражающие качественную картину части продольной структуры турбулентного электронного пучка. Из полученных результатов следует, что в турбулентном электронном пучке наблюдаются как узкие, но очень плотные электронные сгустки, в которых соотношение  $j/j_0 \approx 350$ , так и более протяженные электронные структуры, но с гораздо меньшей плотностью  $j/j_0 \approx 60$ .

На рис. 5 представлена динамика плотности тока в радиальном сечении пучка в процессе его движения по пространству взаимодействия. В сечении  $Z = Z_1$  на

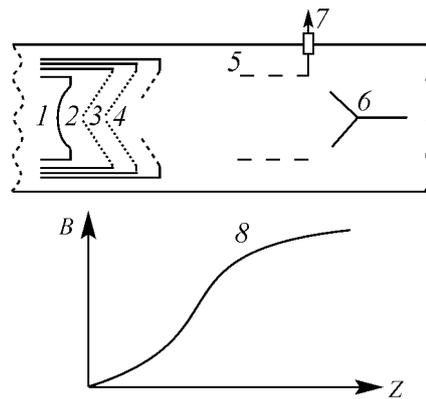


Рис. 3. Принципиальная схема конструкции лабораторного макета генератора широкополосных шумоподобных колебаний: 1 – катод, 2 – экранирующая сетка, 3 – управляющая сетка, 4 – тормозящая сетка, 5 – съемник энергии, 6 – коллектор, 7 – широкополосный вывод энергии

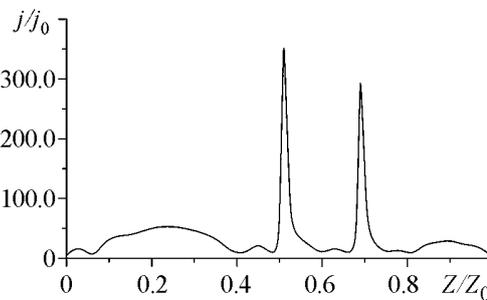


Рис. 4. Результаты экспериментальных исследований зависимости  $j/j_0$  вдоль части пространства дрейфа электронного пучка

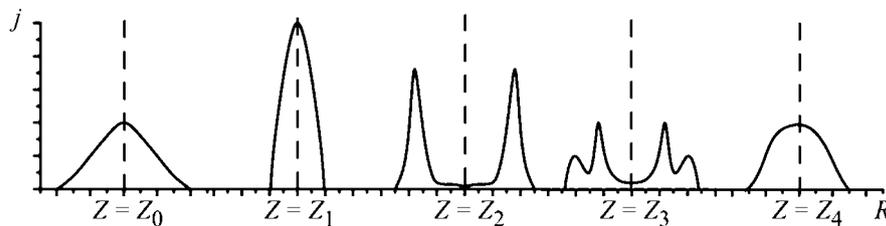


Рис. 5. Результаты экспериментальных исследований динамики плотности тока в радиальном сечении пучка в процессе его движения по пространству взаимодействия

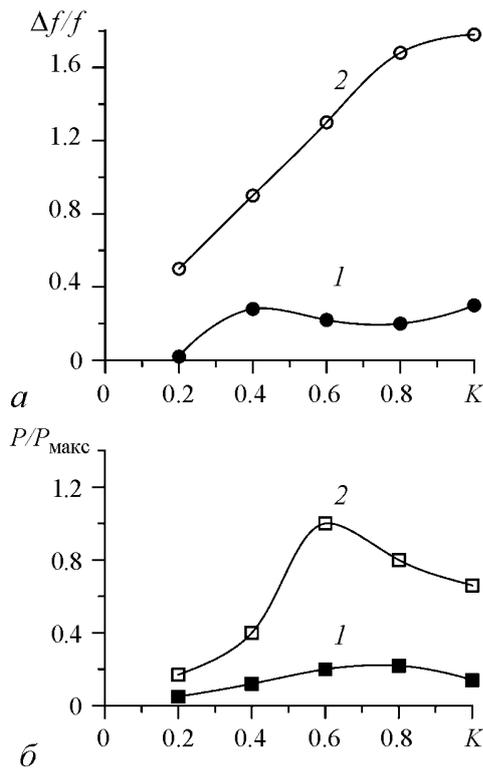


Рис. 6. Результаты экспериментальных исследований: зависимость полосы генерации  $\Delta f/f$  (а) и выходной мощности  $P/P_{max}$  (б) от коэффициента торможения электронного пучка  $K$ . Здесь 1 – случай отсутствия начального разброса электронов по скоростям, 2 – случай наличия начального разброса электронов по скоростям

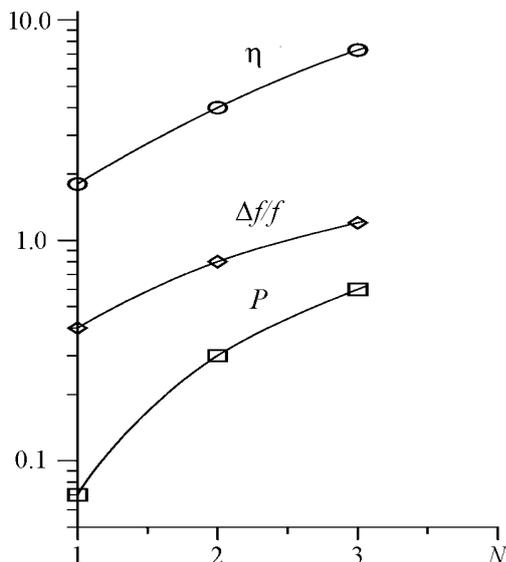


Рис. 7. Зависимости выходной мощности СВЧ-генерации  $P$ , КПД  $\eta$  и полосы генерации  $\Delta f/f$  для различных режимов работы прибора  $n$

пучок оказывает влияние неоднородное магнитное поле, сильно сжимая его. Далее, за счет кулоновских сил происходит расширение электронного пучка. Исследования показали, что сгустки возникновения возникают вблизи периферии пучка (сечение  $Z = Z_2$ ), где сходятся в один объем много электронных траекторий. Таким образом, сплошной пучок становится близким к трубчатому (полому), которому, как было отмечено выше, присущ механизм нарастания первоначальных возмущений плотности пространственного заряда ( $Z = Z_3$ ). В итоге трубчатый (полый) электронный пучок снова переходит в сплошной ( $Z = Z_4$ ).

На рис. 6 приведены зависимость выходной интегральной мощности (а) и полосы генерации (б) от параметра торможения электронного пучка  $K$ , определяющего соотношение ускоряющего и тормозящего напряжений. Видно, что наличие начального разброса электронов по скоростям (кривые 2) существенно улучшают (ср. с кривыми 1) выходные характеристики СВЧ излучения. Анализ полученных результатов показывает, что наиболее оптимальными значениями коэффициента торможения  $K$  электронного пучка являются значения, лежащие в диапазоне от  $K = 0.6$  до  $K = 0.8$ . Именно в этом диапазоне изменений значений коэффициента  $K$  торможения электронного пучка и тока пучка порядка 200 мА достигается максимальное соотношение выходной интегральной мощности и полосы генерации исследуемого лабораторного макета генератора.

На рис. 7 приведены зависимости выходной мощности СВЧ-генерации, КПД и полосы генерации для различных режимов работы прибора. Напряжения менялись в пределах до 1000 В при токе пучка до 200 мА. Первому режиму ( $n = 1$ ) соответствует случай отсутствия начального разброса электро-

нов по скоростям ( $\Delta v/v = 0.20.3$ ) и неоднородного магнитного поля  $B_0 = 0$  Тл при соотношении ускоряющего напряжения и напряжения на коллекторе  $K = 1 - U_{col}/U_0 = 0.6$ . Второй режим ( $n = 2$ ) характеризуется наличием начального разброса электронов по скоростям ( $\Delta v/v = 0.2 - 0.3$ ) при отсутствии неоднородного магнитного поля  $B_0 = 0$  Тл и соотношении ускоряющего напряжения и напряжения на коллекторе  $K = 1 - U_{col}/U_0 = 0.6$ . При этом разброс определяется соотношением тормозящего и ускоряющего напряжений в пространстве взаимодействия (за счет этого удается получать сильно неоднородный по скорости пучок), а также определяется параметрами самой пушки (единицы процента от среднего значения). При проведении численного моделирования по выше указанной методике было установлено, что начальный разброс электронов по скоростям приводит как к росту плотности тока в электронных сгустках, так и к росту их количества, что должно положительным образом сказаться на выходных характеристиках генератора. Сравнивая первый и второй режимы работы лабораторного макета генератора, видно, что наличие начального разброса электронов по скоростям приводит к росту мощности генерации и расширению полосы генерации. Третий режим ( $n = 3$ ) характеризуется наличием как начального разброса электронов по скоростям ( $\Delta v/v=0.2\div 0.3$ ), так и неоднородного магнитного поля  $B_0 = 0.05$  Тл, параметр  $K = 1 - U_{col}/U_0 = 0.6$ . Результаты предварительного численного моделирования показывают (см. рис. 2), что неоднородное магнитное поле при неизменных прочих параметрах схемы также может способствовать как росту мощности генерации, так и расширению полосы генерируемых сигналов. Из рассмотрения полученных зависимостей видно, что создание многоскоростных турбулентных электронных пучков приводит к образованию плотных сгустков пространственного заряда, что, в свою очередь, ведет к повышению мощности генерации. Установлено, что КПД прибора может достигать  $\eta \approx 10\%$ , а полоса частот  $-\Delta f/f \approx 1.6$ . Максимальная выходная мощность при этом составляет порядка 14 Вт при ускоряющем напряжении 700 В и токе пучка до 200 мА средняя частота генерации составляет 1 ГГц.

5. Таким образом, в данной работе рассмотрены различные механизмы создания многоскоростных турбулентных электронных пучков. Показано, что для формирования турбулентных электронных пучков важным фактором является наличие начального разброса электронов по скоростям. Рассмотрены эффективные механизмы формирования начального разброса электронов по скоростям. В работе приведены результаты численного моделирования и экспериментальных исследований по анализу структуры турбулентных электронных пучков. Показано влияние таких управляющих параметров, как начальный разброс электронов по скоростям, амплитуда неоднородного магнитного поля, коэффициент торможения электронного пучка на параметры сгустков пространственного заряда в формируемых турбулентных электронных пучках. Используя сеточные структуры у катода, можно добиться начального разброса электронов по скоростям до 50%. Это значение зависит от соотношения напряжений на ускоряющей и тормозящей сетках. Другими словами, такие сеточные структуры позволяют управлять начальным разбросом электронов по скоростям и тем самым оптимизировать формирование плотных сгустков пространственного заряда в пространстве дрейфа. Разброс электронов по скоростям за счет появления азимутальной скорости электронов, при фокусировке пучка неоднородными магнитными полями в пространстве дрейфа, может достигать 2–3%. Разброс электронов по скоростям за счет наличия тормозящего электрического поля в пространстве дрейфа не превышает 5–7%.

Обобщая полученные результаты, можно заключить, что такое фундаментальное физическое явление как турбулентность в интенсивных электронных пучках, наблюдаемое в приборах и устройствах вакуумной электроники, может быть рассмотрено с новых позиций, путем его использования для генерации принципиально широкополосных шумоподобных колебаний. Источники широкополосного шумоподобного излучения могут быть использованы в системах радиопротиводействия и радиоподавления, в перспективных системах шумовой радиолокации, в информационно-телекоммуникационных системах, а также в ряде других отраслей промышленности [13–15].

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 13-02-01209 А, № 14-02-00329 А, № 14-02-90006 Бел\_а, а также Президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-828.2014.2) и молодых ученых-кандидатов наук (проект МК-1373.2014.2)*

### **Библиографический список**

1. Диденко А.Н., Красик Я.Е., Перелыгин С.Ф., Фоменко Г.П. Генерация мощного СВЧ-излучения релятивистским электронным пучком в триодной системе // Письма в ЖТФ. 1979. Т. 5, № 6. С. 321.
2. Рухадзе А.А., Столбецов С.Д., Тараканов В.П. Виркаторы (обзор) // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37, № 3. С. 385.
3. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
4. Дубинов А.Е., Селемир В.Д. Электронные приборы с виртуальным катодом // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 6. С. 575.
5. Калинин Ю.А., Куркин С.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. СВЧ-генераторы хаотических колебаний на основе электронных пучков с виртуальным катодом // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. Т. 9. С. 53.
6. Пащенко А.В., Залкинд В.М., Лонин Ю.Ф., Мележик О.Г., Романов С.С., Ситников Д.А., Тарасов И.К., Тарасов М.И., Шаповал И.Н., Новиков В.Е., Яцышин В.А. Неустойчивость замедляющегося электронного потока, инжектированного в плоский диод // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, вып. 24. С. 83.
7. Калинин Ю.А., Стародубов А.В., Волкова Л.Н., Лёвин Ю.И. Малогабаритный сверхнизковольтный генератор широкополосных хаотических колебаний // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37, № 1. С. 56.
8. Калинин Ю.А., Волкова Л.Н. Генератор широкополосных шумоподобных СВЧ-колебаний на турбулентных электронных пучках // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, № 14. С. 65.
9. Афанасьев В.И., Лукин К.А., Ракитянский В.А. Возбуждение хаотических колебаний в ЛОВо неламинарными электронными потоками // Радиофизика и электроника. 1997. Т. 2, № 1. С. 115.
10. Алямовский И.В. Интенсивные электронные потоки: Учебное издание. М., 1991.
11. Калинин Ю.А., Стародубов А.В. Широкополосные генераторы хаотических ко-

лебаний на турбулентных электронных потоках с внутренней электронной обратной связью // ЖТФ. 2010. Т. 80, № 12. С. 80.

12. Калинин Ю.А., Есин А.Д. Методы и средства физического эксперимента в вакуумной СВЧ-электронике. Саратов: Изд-во СГУ, 1991.
13. Залогин Н.Н., Кислов В.В. Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнических и информационных системах. М.: Радиотехника, 2006.
14. Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
15. Калинин Ю.А., Стародубов А.В., Березин С.И. О взаимодействии микроволнового излучения с микро- и наноструктурами водонефтяных эмульсий // Наука и технологии в промышленности. 2009. № 3. С. 28.

Поступила в редакцию 27.04.2012

После доработки 24.05.2013

## INVESTIGATION OF THE BROADBAND NOISE-LIKE MICROWAVE GENERATOR ON MULTISPEED NONLAMINAR ELECTRON BEAMS

*Yu.A. Kalinin, A.V. Starodubov, N.N. Kuznetsov, Yu.I. Levin*

Saratov State University

The paper presents the results of theoretical and experimental studies of multispeed electron beams. Theoretical and experimental studies of the structure of such beams are considered. It is shown that turbulence forms in such electron beams. It leads to the formation of multiple bunches of space charge, which are sources of broadband noise-like fluctuations. The results of experimental studies of small-sized laboratory model of the generator based on the principles of formation and use of multispeed turbulent electron beams are shown.

**Keywords:** Vacuum microwave electronics, generator of broadband noise-like oscillations, multispeed electron beam, turbulence, physical experiment.

*Калинин Юрий Александрович* – родился в Саратове (1937). Окончил физический факультет СГУ по кафедре электроники (1959) и поступил на работу в НИИ «Волна». Кандидат физико-математических наук (1968, СГУ), старший научный сотрудник (1972), доктор физико-математических наук (1981, СГУ), профессор (1982). С 1994 года работает в НИИ механики и физики СГУ сначала в должности заместителя директора по научной работе, а затем директором (с 1999 года). В 2005–2014 годах руководитель Отделения физики нелинейных систем Научно-исследовательского института Естественных наук СГУ. В настоящее время ведущий научный сотрудник Отделения физики нелинейных систем Научно-исследовательского института Естественных наук СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника, физический эксперимент, физические эффекты и неустойчивости в электронных пучках. Автор более 350 печатных работ и более 40 патентов. Под его руководством защищено 32 кандидатские работы.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail: noios@sgu.ru





*Стародубов Андрей Викторович* – родился в Саратове (1982). Окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2005), кандидат физико-математических наук (2008). В настоящее время старший научный сотрудник Отделения физики нелинейных систем НИИ Естественных наук СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика, вакуумная электроника и микроэлектроника, физический эксперимент, численное моделирование физических процессов, физические эффекты и неустойчивости в электронных пучках, нанотехнологии, взаимодействие электромагнитного излучения с веществом, микро- и наноструктуры, наночастицы. Автор более 30 печатных работ и 9 патентов.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail: StarodubovAV@gmail.com



*Кузнецов Николай Никифорович* – родился в Саратове (1938), окончил физический факультет СГУ (1961). Работал в Саратовском НИИ Машиностроения (1961-1965). С 1965 года инженер НИИ механики и физики СГУ. В настоящее время инженер факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника, физический эксперимент, вакуумные исследовательские установки, методы исследования электронных пучков, физические эффекты и неустойчивости в электронных пучках. Автор более 10 печатных работ, имеет авторские свидетельства.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail:n.n.kuznetzov@yandex.ru



*Левин Юрий Иванович* – родился в Саратове (1942), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1965), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1974). В настоящее время декан факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, заведующий кафедрой физики открытых нелинейных систем СГУ. Автор более 100 научных статей, научно-методических пособий и руководств.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail:levin@nonlin.sgu.ru



## СИНХРОНИЗАЦИЯ И МНОГОЧАСТОТНАЯ КВАЗИПЕРИОДИЧНОСТЬ В ДИНАМИКЕ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ\*

*А.П. Кузнецов<sup>1,2</sup> Л.В. Тюрюкина<sup>1,2</sup> И.Р. Сатаев<sup>1</sup> Н.Ю. Чернышов<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
<sup>2</sup> Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Обсуждается динамика ансамблей осцилляторов, содержащих небольшое количество элементов. Анализируются возможные типы режимов, особенности бифуркаций регулярных и квазипериодических аттракторов. С помощью метода карт ляпуновских показателей выявлена картина вложения квазипериодических режимов разной размерности в пространство параметров. Сравняется динамика ансамблей осцилляторов ван дер Поля и фазовых осцилляторов.

*Ключевые слова:* Синхронизация, квазипериодические колебания, инвариантные торы, бифуркации.

### Введение

Задача о динамике связанных автоколебательных осцилляторов является фундаментальной в теории колебаний и нелинейной динамике [1–5]. Описание различных систем в терминах взаимодействующих осцилляторов используется в радиофизике, микроволновой электронике, лазерной физике, биофизике, химии. В настоящей лекции сделан обзор современных результатов, касающихся динамики низкоразмерных ансамблей, содержащих три-пять элементов. При этом обсуждаются такие вопросы, как эволюция картины при увеличении числа осцилляторов, особенности фазовой модели и ее сопоставление с исходной системой, влияние типа связи (диссипативная, активная, реактивная), влияние геометрии связи и т.д. Отметим, что данный круг вопросов в более широком плане можно мыслить, как элементы теории *синхронизации квазипериодических колебаний*. Подобные задачи привлекают внимание, начиная с 1980-х годов [6–17]. Однако сравнительно недавно получен ряд новых результатов, которые позволили понять, что речь идет о весьма обширной и многоплановой программе исследований [18–40]. Прогресс связан как с возросшими мощностями компьютеров, так и с определенным продвижением в теории. Некоторое «запаздывание» (по сравнению с задачами синхронизацией регулярных

\*Статья написана по материалам доклада на X Международной школе «Хаотические автоколебания и образования структур», 7–12 октября 2013, Саратов, Россия.

и хаотических колебаний) имеет свои причины. Прежде всего, это достаточно тонкие и непростые моменты теории и численных методов анализа *квазипериодических бифуркаций*<sup>1</sup>, которые все еще не получили необходимого развития. Далее, это увеличение числа фундаментальных моделей<sup>2</sup>, а также многообразие возможных типов колебательных режимов, разновидностей резонансов и т.д. Следует отметить и известное обсуждение сценария Рюэля–Такенса, которое, как теперь ясно, не вполне обоснованно охладило мотивацию исследования задач многочастотной квазипериодичности. Однако теперь становится понятно, что это обширная область, требующая своей математики, физики и «техники» исследования. Некоторые моменты такой картины и представлены в настоящей лекции<sup>3</sup>. В то же время, материал излагается так, чтобы он мог быть полезен для обучения студентов и аспирантов.

## 1. Ансамбль из трех связанных осцилляторов

**1.1. Фазовая модель для трех осцилляторов.** Обратимся сначала к системе трех диссипативно связанных в цепочку осцилляторов ван дер Поля

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $\lambda$  – параметр возбуждения автономных осцилляторов,  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  – частотные расстройки второго и третьего осцилляторов относительно первого,  $\mu$  – коэффициент связи. Частота первого осциллятора принята за единицу.

Если параметр возбуждения  $\lambda$  мал, а также малы частотные расстройки и величина связи, то можно следить только за динамикой фаз, считая, что осцилляторы движутся по своим стационарным орбитам. Действуя стандартным образом [1, 2], можно получить соответствующую (1) фазовую модель

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \theta.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь  $\theta$ ,  $\varphi$  – относительные фазы первого–второго и второго–третьего осцилляторов, а параметры нормированы на величину  $\lambda$ , так что могут считаться уже немалыми. (Детали см. в [33, 37].) Уравнение (2) можно рассматривать как обобщение классического уравнения Адлера на рассматриваемый случай.

<sup>1</sup>То есть бифуркаций инвариантных торов разной размерности.

<sup>2</sup>Для двух осцилляторов в фазовом приближении основная модель – это уравнение Адлера. При увеличении числа осцилляторов могут возникать различные варианты его обобщения, зависящие от геометрии системы и типа связи.

<sup>3</sup>Некоторые изложенные здесь результаты более подробно обсуждаются в работах [33–40], ряд результатов является новыми. При этом мы не будем касаться круга вопросов, связанного с вынужденной синхронизацией квазипериодических колебаний [18–22, 28–32], а также с динамикой квазипериодических генераторов [22, 23].

**Классификация режимов.** Система (2) может демонстрировать разнообразные режимы, которые допускают физически мотивированную классификацию (рис. 1):

а. В системе есть одно устойчивое равновесие 1, одно неустойчивое равновесие 4 и два седла 2 и 3. Устойчивое равновесие отвечает режиму *полной синхронизации всех трех осцилляторов*. В исходной системе (1) ему соответствует движение по устойчивому предельному циклу.

б. Аттрактором на фазовой плоскости является устойчивая *инвариантная кривая I*, для которой относительная фаза первого и второго осцилляторов  $\theta$  колеблется около некоторого среднего значения, а относительная фаза  $\varphi$  второго и третьего меняется во всем возможном диапазоне. Это режим *частичного захвата первого и второго осцилляторов*. Прилагательное «частичная» подчеркивает, что захват фаз неточный. В исходной системе (1) в этом случае реализуется *двухчастотная квазипериодичность*, а аттрактор имеет вид *инвариантного тора*.

в. Относительная фаза второго и третьего осцилляторов  $\varphi$  колеблется около некоторого среднего значения, а относительная фаза  $\theta$  меняется во всем возможном диапазоне. Это режим *частичного захвата первого и второго осцилляторов*.

г. На фазовой плоскости реализуется «поток» траекторий, всюду плотно ее покрывающий. В исходной системе наблюдается режим *трехчастотной квазипериодичности* и, соответственно, инвариантный тор более высокой размерности.

д. Аттрактором является инвариантная кривая, имеющее некоторое число пересечений со сторонами фазового квадрата. В исходной системе возникает *резонансный двухчастотный тор*, лежащий на поверхности трехчастотного тора. Такие

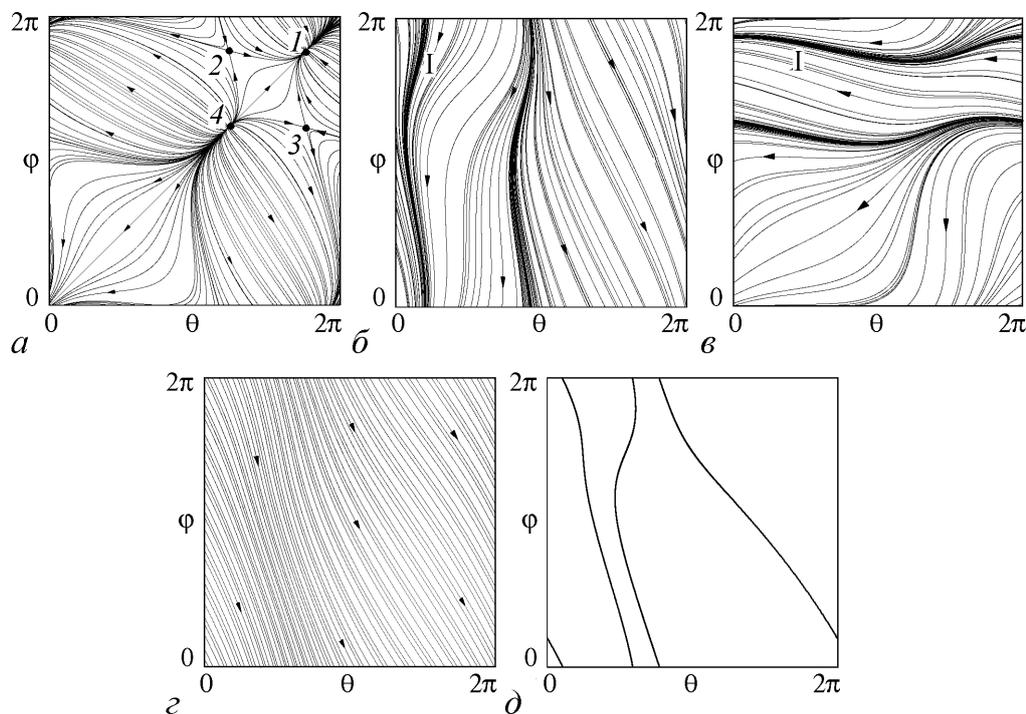


Рис. 1. Характерные фазовые портреты системы трех фазовых осцилляторов (2)

траектории удобно классифицировать с помощью, своего рода, числа вращения  $w = p:q$ , которое определяется по числу существенных пересечений фазовой траектории с вертикальной и горизонтальной границами фазового квадрата<sup>4</sup>. Так, для рис. 1, д число вращения  $w=1:3$ <sup>5</sup>. Число вращения можно ввести и для режимов частичного захвата, так что на рис. 1, б  $w=0:1$ , а на рис. 1, в –  $w=1:0$ .

**Плоскость параметров.** Обсудим, как те или иные режимы вложены в пространство параметров. При анализе двух связанных осцилляторов традиционным является представление результатов на плоскости частотная расстройка–величина связи. В случае трех осцилляторов можно зафиксировать частотную расстройку  $\Delta_2$  (то есть частоту третьего осциллятора) и построить плоскость параметров  $(\Delta_1, \mu)$ . Далее необходимо выбрать метод визуализации режимов. Для систем с многочастотной динамикой это может быть *метод карт ляпуновских показателей*<sup>6</sup> [29–40]. Он использует то обстоятельство, что наличие нулевых ляпуновских показателей и их число позволяют выявлять и классифицировать квазипериодические режимы.

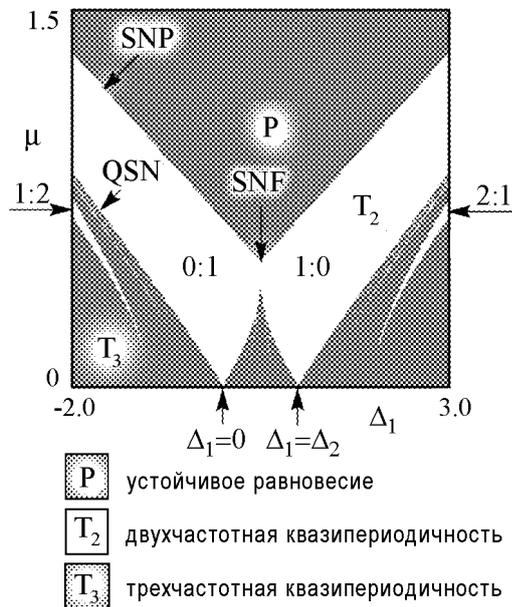


Рис. 2. Карта ляпуновских показателей трех фазовых осцилляторов (2) на плоскости  $(\Delta_1, \mu)$ ,  $\Delta_2=1$ . SNP – линия вырожденной седло-узловой бифуркации состояний равновесия, QSN – линия седло-узловой бифуркации инвариантных кривых, SNF – точка коразмерности два

С этой целью будем вычислять оба ляпуновских показателя системы (2)  $\Lambda_1, \Lambda_2$  в каждой точке плоскости параметров  $(\Delta_1, \mu)$ . Затем эту плоскость окрасим в разные цвета так, чтобы визуализировать следующие режимы:

- $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0$  – наличие устойчивого состояния равновесия P (точный захват фаз);
- $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$  – двухчастотный квазипериодический режим  $T_2$ ;
- $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0$  – трехчастотный квазипериодический режим  $T_3$ .

(Здесь размерность квазипериодических режимов дана в терминах исходной системы.) Полученная карта показана на рис. 2.

Прежде всего, отмечаем наличие области точного захвата всех трех осцилляторов P, для которой характерен порог полной синхронизации по величине связи. Область полной синхронизации граничит с двумя обширными областями двухчастотных режимов  $T_2$ .

<sup>4</sup>С учетом  $2\pi$ -периодичности фаз при замыкании этого квадрата в тор инвариантные кривые превращаются в предельные циклы на поверхности тора, а фактор  $w$  служит числом вращения на этом торе.

<sup>5</sup>Для наглядности на рис. 1, д показан только аттрактор системы.

<sup>6</sup>Его преимущества в данном случае следующие. Во-первых, «автоматически» визуализируются тонкие детали устройства пространства параметров, в частности, разнообразные области резонансных торов. Во-вторых, реализуется единый «инструментарий» для анализа как фазовой модели, так и исходной системы. Эти обстоятельства являются существенными, поскольку пока отсутствуют простые алгоритмы численного анализа бифуркаций инвариантных торов.

Они отвечают режимам частичного захвата первого-второго  $w=0:1$  и второго-третьего  $w=1:0$  осцилляторов. Эти области имеют вид языков, по виду напоминающие классические языки Арнольда. Однако они погружены в область трехчастотной квазипериодичности  $T_3$ . Острия языков лежат на оси частотной расстройки, причем отвечают точным резонансам в системе, когда совпадают собственные частоты пар осцилляторов:  $\omega_1 = \omega_2$  и  $\omega_2 = \omega_3$ . В соответствии с (2) это дает значения  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta_1 = \Delta_2$ , которые отмечены на рис. 2 стрелочками.

Внутри трехчастотной области, в свою очередь, имеются узкие языки *резонансных двухчастотных режимов* высшего порядка. Они имеют вид дополнительных языков, как, например, языки 1:2 и 2:1 на рис. 2. Также имеется система очень узких веерных языков с общей вершиной в точке SNF.

**Бифуркационные сценарии разрушения режима полной синхронизации и квазипериодических режимов.** Границы области полной синхронизации на рис. 2 легко найти аналитически. Полагая  $\dot{\theta} = 0$  и  $\dot{\varphi} = 0$ , из (2) можно выразить синус каждой относительной фазы через параметры системы

$$\sin \theta = -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3\mu}, \quad \sin \varphi = \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3\mu}. \quad (3)$$

При вариации параметров решения (3) появляются парами:  $(\theta_1, \theta_2)$  для первого уравнения и  $(\varphi_1, \varphi_2)$  – для второго. Поэтому четыре состояния равновесия на рис. 1, а располагаются в вершинах прямоугольника. При пересечении границ области Р они попарно сближаются ( $\theta_1 \rightarrow \theta_2$  или  $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ ). В результате все четыре равновесия попарно *одновременно* сливаются и исчезают. При этом негрубое состояние содержит два равновесия. Таким образом, за разрушение полной синхронизации в этом случае отвечает *вырожденная седло-узловая бифуркация* SNP, когда одновременно сливаются устойчивый узел и седло, а также неустойчивый узел и второе седло. Условие обращения синусов по модулю в единицу может быть записано аналитически

$$\frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3\mu} = \pm 1, \quad \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3\mu} = \pm 1. \quad (4)$$

Отрезки линий (4) на рис. 2 и образуют границу области полной синхронизации. В свою очередь, они пересекаются в характерной точке *коразмерности два* SNF  $\mu = \Delta_2/2$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2/2$ , в которой на фазовой плоскости одновременно стягиваются в одну точку *сразу все четыре равновесия*.

В результате вырожденной седло-узловой бифуркации SNP из инвариантных многообразий состояний равновесия возникают устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые. При приближении к границе языка двухчастотного режима они сближаются. Затем в результате *седло-узловой бифуркации инвариантных кривых* QSN возникает трехчастотный режим<sup>7</sup>. Отметим, что в фазовой модели границы всех двухчастотных языков образованы линиями бифуркаций такого типа, меняется лишь число вращения  $w$ .

**Плоскость собственных частот осцилляторов.** Увеличение числа осцилляторов более двух дает, однако, другой важный случай параметрического портрета

<sup>7</sup> Аналогичный механизм для задач вынужденной синхронизации двух осцилляторов внешним сигналом описан в работах [18, 19].

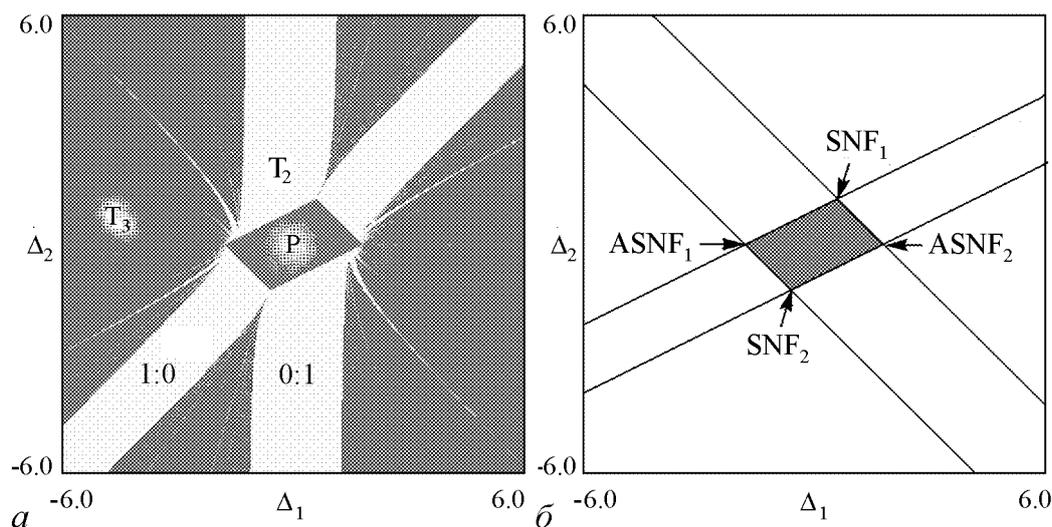


Рис. 3. Ляпуновская карта трех диссипативно связанных фазовых осцилляторов (2) на плоскости частотных параметров (а) и конфигурация области полной синхронизации в рамках аналитического рассмотрения (б);  $\mu = 0.6$

системы. Это пространство собственных частот осцилляторов. В случае трех осцилляторов следует обратиться к плоскости частотных расстройек ( $\Delta_1, \Delta_2$ ). На рис. 3, а показана ляпуновская карта в этом случае. Рядом, для удобства восприятия, даны линии (4) и показана образованная ими область полной синхронизации (рис. 3, б).

Из сравнения рис. 3, а и б можно видеть, что область полной синхронизации Р на карте отвечает аналитическому рассмотрению и имеет вид параллелограмма<sup>8</sup>. Пересечение линий (4) отвечает четырем точкам коразмерности два:

$$\begin{aligned} SNF_{1,2}: \Delta_1 = \mu, \Delta_2 = 2\mu; \Delta_1 = -\mu, \Delta_2 = -2\mu; \\ ASN_{1,2}: \Delta_1 = 3\mu, \Delta_2 = 0; \Delta_1 = -3\mu, \Delta_2 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В их окрестности наблюдается множество резонансных двухчастотных режимов разного порядка. Их сосуществование иллюстрируют *карты торов* на рис. 4. На этих картах цвет области двухчастотных режимов выбран в соответствии с введенным выше числом вращения  $w$ . Для первой пары точек характерным является система веерообразно расходящихся от точки SNF областей резонансных двухчастотных режимов разного порядка (рис. 4, а). Окрестность второй пары – точек ASN – устроена сложнее. В этом случае языки двухчастотных режимов не уменьшаются в размере при приближении к области полной синхронизации, а наоборот – расширяются так, что имеют с ней протяженный контакт (рис. 4, б). При этом точки смены типа двухчастотного режима накапливаются к точке ASN вдоль границы области полной синхронизации<sup>9</sup>.

Область полной синхронизации на рис. 3, а лежит на пересечении двух широких полос двухчастотных режимов, отвечающих частичной синхронизации двух пар осцилляторов  $w=0:1$  и  $w=1:0$ . Они лежат в окрестности линий  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta_1 = \Delta_2$ ,

<sup>8</sup>На это факт было указано в [1], так что его можно назвать «параллелограммом Ланды». Отметим, что позднее в работе [51], посвященной динамике лазеров, этот факт был заново переоткрыт в 1993 году.

<sup>9</sup>В [11, 13] аналогичные точки называют *saddle node fan* (седло-узловой веер) и *accumulation of saddle node fans*, что и определяет использованные аббревиатуры.

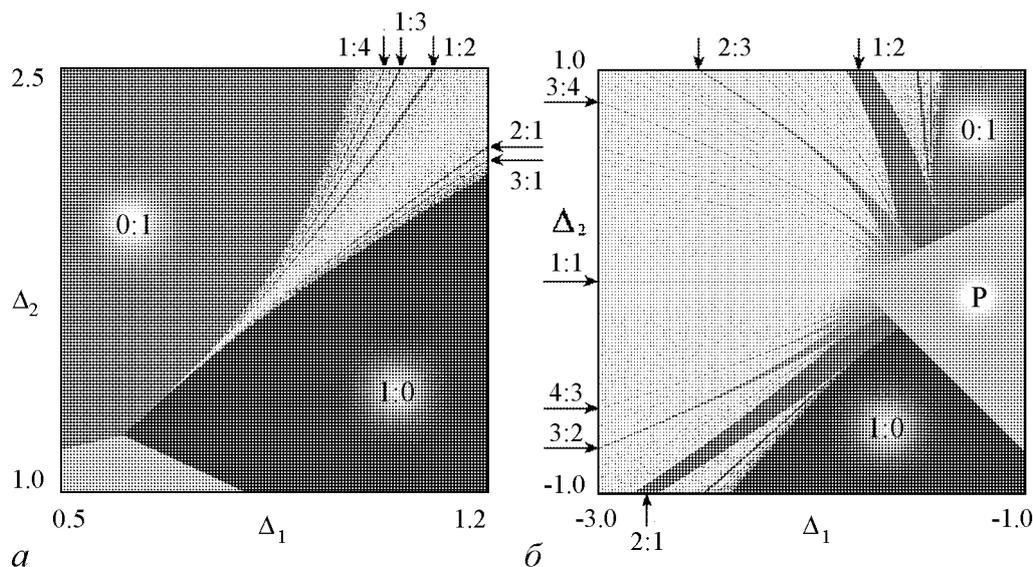


Рис. 4. «Карты торов» в окрестности точек SNF (а) и ASNF (б). В виде дробей показаны числа вращения, характеризующие инвариантные кривые

определяющих условия совпадения частот первого-второго и второго-третьего осцилляторов.

**1.2. Три осциллятора ван дер Поля.** Обратимся теперь к исходной системе (1). В этом случае бифуркации, отвечающие за область полной синхронизации, модифицируются, и «параллелограмм Ланды» разрушается (рис. 5)<sup>10</sup>. Выберем значение управляющего параметра  $\lambda = 0.1$ , которое является удобным значением, чтобы продемонстрировать как отличия от фазовой модели, так и некоторые наследуемые черты<sup>11</sup>. Форма области полной синхронизации на рис. 5 близка к параллелограмму. Имеются, однако, и существенные отличия.

Первая особенность состоит в том, что теперь седло-узловые бифуркации устойчивого и неустойчивых режимов происходят не одновременно, а на разных линиях  $SN_1$  и  $SN_2$ , показанных на рис. 5 сплошной линией и пунктиром. Соответственно, «угол» параллелограмма SNF меняется на плавную линию. При этом вблизи локализации точки SNF теперь располагаются три сборки линии неустойчивых режимов в форме катастрофы «бабочка». Таким образом, вырождение, характерное для фазовой модели, снимается.

В окрестности точки ASNF появляются также линии бифуркации

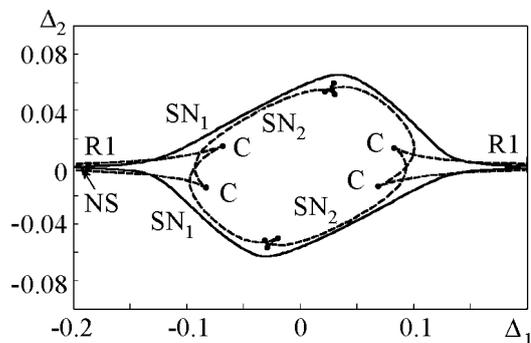


Рис. 5. Бифуркационные линии системы трех связанных осцилляторов ван дер Поля (1),  $\lambda = 0.1$ ,  $\mu = 0.04$ .  $SN_1$  – седло-узловая бифуркация устойчивого предельного цикла,  $SN_2$  – неустойчивого, C – точка сборки, NS – линия Неймарка-Сакера, R1 – резонанс 1:1

<sup>10</sup> Отметим, что теперь полной синхронизации отвечает предельный цикл. Его исчезновение отвечает бифуркациям неподвижной точки в сечении Пуанкаре.

<sup>11</sup> В соответствии с условием нормировки на  $\lambda$ , значения параметров по сравнению с рис. 2 изменены в 10 раз.

Неймарка–Сакера NS, которые имеют общие точки R1 с линиями седловых бифуркаций – точки резонанса 1:1. Таким образом, сильно вытянутые узкие области полной синхронизации, возникающие на месте точек ASNF, ограничены как линиями седло-узловых бифуркаций, так и продолжающимися их линиями бифуркации Неймарка–Сакера.

Если говорить о более общей картине, то возникают резонансные области периодических режимов более высокого порядка, которых нет в фазовой модели. Они отвечают различным периодам в сечении Пуанкаре (детали см. в [40]).

**1.3. Влияние геометрии системы.** Для двух осцилляторов возможен единственный тип геометрии связи. Для трех осцилляторов, однако, возможно их объединение как в цепочку, так и в кольцо (или сеть, что для трех осцилляторов одно и то же). Фазовая модель для сети может быть получена аналогичным образом и имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi - \frac{\mu}{2} \sin(\theta + \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \theta - \frac{\mu}{2} \sin(\theta + \varphi).\end{aligned}\tag{6}$$

По сравнению со случаем цепочки (2) появляются дополнительные члены, содержащие сумму относительных фаз. Поэтому строгое аналитическое рассмотрение полной синхронизации в этом случае выполнить не удастся и необходим численный анализ.

Карта ляпуновских показателей системы (6) на плоскости частотных расстройк показана на рис. 6, *a* для значения параметра связи  $\mu = 0.6$ . Сравним ее со случаем цепочки на рис. 3, *a*. Прежде всего, отмечаем изменение вида области полной синхронизации. Характерный для цепочки параллелограмм теперь меняется на овал.

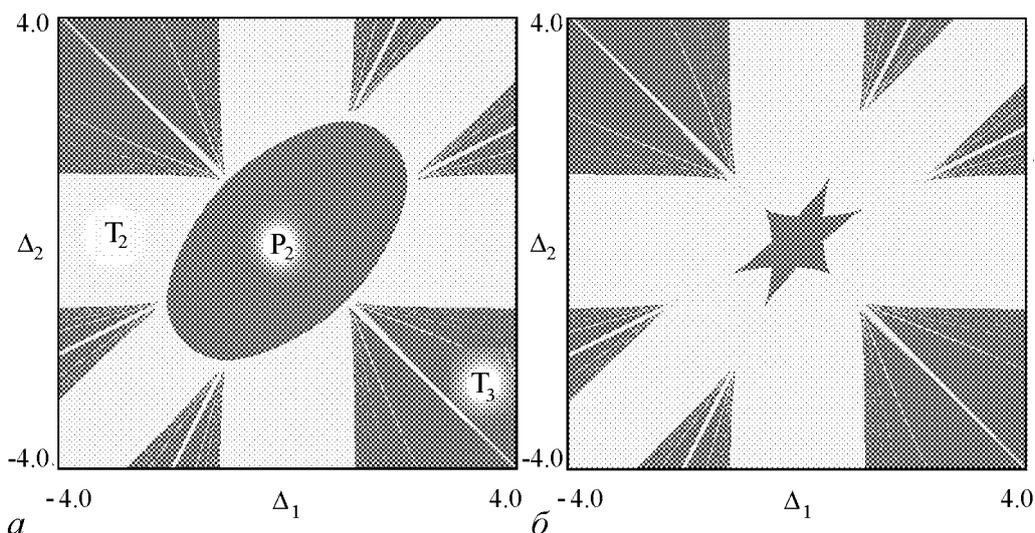


Рис. 6. Карта ляпуновских показателей для сети из трех фазовых осцилляторов (6) на плоскости частотных расстройк,  $\Delta_2=1$ ; случаи диссипативной связи  $\mu=0.6$  (*a*) и активной связи  $\mu = -0.6$  (*b*)

Можно показать, что при этом снимается вырождение: граница эллипса образована типичной седло-узловой бифуркацией устойчивого узла.

Другая особенность системы – увеличение числа основных полос двухчастотных режимов, на пересечении которых лежит область полной синхронизации. Причина состоит в геометрии системы, которая определяет число возможных резонансов. Действительно, для сети возможны три варианта основных резонансов: совпадают частота первого и второго осцилляторов ( $\Delta_1 = 0$ ), совпадают частоты второго и третьего осцилляторов ( $\Delta_2 = 0$ ), совпадают частоты первого и третьего осциллятора ( $\Delta_1 = \Delta_2$ ). Эти три ситуации и определяют три широкие полосы двухчастотных режимов на рис. 6, а.

**1.4. Случай активной связи.** Для задач лазерной физики достаточно типичен случай *активной* связи, когда синхронизация элементов описывается уравнением Адлера, но с отрицательной константой связи [53–55]. В этом случае говорят об *отталкивающем взаимодействии*, поскольку теперь устойчивым оказывается режим противофазной синхронизации [65].

Для цепочки из трех фазовых осцилляторов изменение знака связи оказывается не принципиальным: устройство карты режимов не меняется. Причина состоит в том, что замена переменных  $\theta \rightarrow \theta + \pi$ ,  $\psi \rightarrow \psi + \pi$  в уравнениях (2) эквивалента изменению знака константы связи  $\mu$ . Поэтому картина режимов в цепочке для диссипативной и активной связи полностью эквивалентна, хотя при этом синфазные режимы превращаются в противофазные и наоборот.

Иная ситуация имеет место для сети. В этом случае такая замена переменных меняет вид уравнений (6), а это означает, что при активной связи наблюдается другое устройство области полной синхронизации. Этот факт иллюстрирует рис. 6, б, на котором показана карта ляпуновских показателей сети для отрицательного параметра связи  $\mu = -0.6$ . Можно видеть изменение области полной синхронизации, которая представляет собой теперь шестиконечную «звезду». Отметим, что для сети с активной связью точки *saddle node fan* не лежат на границе области полной синхронизации, а располагаются вне ее.

Бифуркационные линии для системы с активной связью показаны на рис. 7. Можно видеть, что «звезда» образована линиями седло-узловых бифуркаций устойчивых равновесий  $SN_1$ , которые сходятся в шести точках сборки  $C$ . Вся эта система окружена овалом, представляющим собой показанную пунктиром линию седло-узловой бифуркации неустойчивых равновесий  $SN_2$ .

С другой стороны, изменение знака связи в уравнениях (6) эквивалентно обращению времени. Поэтому картины бифуркаций для случаев диссипативной и активной связи превращаются друг в друга при замене устойчивых режимов на неустойчивые. (То есть сплошные и пунктирные линии на рис. 7 нужно по-

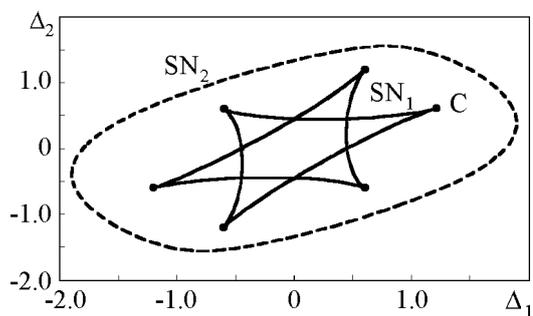


Рис. 7. Бифуркационные линии системы (6),  $\mu = -0.6$ ;  $\Delta_2=1$

менять местами.) При этом картина двухчастотных и трехчастотных режимов вне овала одинакова. Причина в том, что момент слияния устойчивой и неустойчивой инвариантных кривых инвариантен относительно обращения времени<sup>12</sup>.

**1.5. Случай реактивной связи.** Рассмотрим теперь случай, когда в уравнениях (1) осцилляторы связаны не через скорости изменения переменных, а через сами переменные. Это *реактивная* связь, которая при традиционной радиотехнической реализации отвечает связи не через резистор, а через реактивный элемент (емкость) [1].

Реактивная связь – явление существенно более тонкое, чем диссипативная. Случай двух осцилляторов обсуждался в [41–43]. Получена необходимая фазовая модель и показано, что эффект синхронизации возникает только *при учете эффектов второго порядка* по величине связи. При формальном выводе фазовых уравнений это проявляется в том, что необходимо учитывать отклонение орбит осцилляторов от невозмущенных стационарных орбит – иначе реактивная связь не проявляется. Учитывая эти особенности, можно получить необходимое фазовое уравнение для трех осцилляторов [35]

$$\begin{aligned} 2\dot{\theta} &= -\varepsilon - \Delta_1 + \varepsilon \cos \varphi - \varepsilon^2 \sin 2\theta + \varepsilon^2 \left( \sin \varphi \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right), \\ 2\dot{\varphi} &= \varepsilon + \Delta_1 - \Delta_2 - \varepsilon \cos \theta - \varepsilon^2 \sin 2\varphi + \varepsilon^2 \left( \sin \theta \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Интересно, что в отличие от случая двух осцилляторов [41–43], фазовые уравнения (7) содержат и члены первого порядка по параметру реактивной связи  $\varepsilon$ . Однако для правильного описания эффектов синхронизации одних линейных членов все же недостаточно. Действительно, если отбросить квадратичные члены, матрица возмущений состояний равновесия примет вид

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0, & -\varepsilon \sin \varphi \\ \varepsilon \sin \theta, & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

След этой матрицы  $S = 0$ . В этом случае вместо узлов возникают своего рода «нейтральные» состояния на границе между устойчивым и неустойчивым решениями. Таким образом, в этом приближении в системе вообще нет основного резонанса. Поэтому для описания возможности синхронизации в системе трех реактивно связанных осцилляторов обязательно необходимо учитывать эффекты второго порядка по величине связи<sup>13</sup>.

<sup>12</sup>Отметим также, что если для сети выполнить замену  $\theta \rightarrow \theta + \pi$ ,  $\psi \rightarrow \psi + \pi$ , то получим, что сеть из трех элементов со всеми активными связями эквивалентна сети с двумя диссипативными и одной активной связью.

<sup>13</sup>Отметим, что эта особенность реактивной связи осталась незамеченной в [1], где утверждается на основе уравнений первого порядка по связи, что область полной синхронизации имеет вид параллелограмма, как и в диссипативном случае. Отметим также, что основная модель фундаментальной математической работы [11] отвечает дискретизации по схеме Эйлера системы (7) с отброшенными квадратичными членами и поэтому также не описывает основные синхронные режимы, характерные для связанных «физических» осцилляторов.

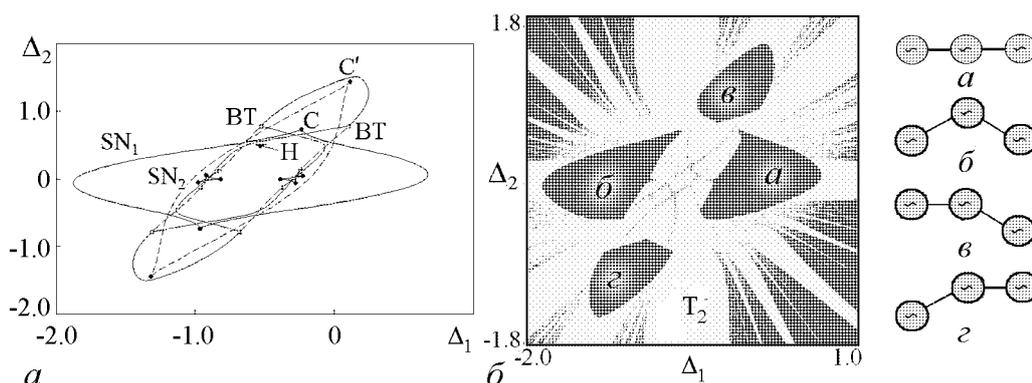


Рис. 8. *a* – бифуркационные линии и точки системы (6),  $\epsilon=0.6$ ;  $SN_1$  – седло-узловая бифуркация устойчивого равновесия;  $SN_2$  – неустойчивого;  $H$  – бифуркация Андронова–Хопфа;  $C$  и  $C'$  – точки сборки устойчивых и неустойчивых режимов;  $BT$  – точка Богданова–Такенса. *б* – карта ляпуновских показателей. Буквами обозначены точки, соответствующие определенным модам колебаний

На рис. 8 показана картина бифуркаций состояний равновесия системы (7) и соответствующая ляпуновская карта. Для реактивной связи линии седло-узловых бифуркаций  $SN_1$ , отвечающие слиянию устойчивого узла и седла (сплошная линия) и неустойчивого узла и седла  $SN_2$  (пунктирная линия) не совпадают. Существенно новый момент – возможность в фазовых уравнениях бифуркации Андронова–Хопфа  $H$ , когда положение равновесия теряет устойчивость, и от него отделяется устойчивый предельный цикл. Поэтому область полной синхронизации в случае реактивной связи фазовых осцилляторов ограничена, как линиями седло-узловой бифуркации, так и линией бифуркации Андронова–Хопфа. На рис. 8, *a* указаны также точки коразмерности два: точки сборки  $C$  и точки Богданова–Такенса  $BT$ .

Область полной синхронизации на рис. 8 состоит из четырех «островов». Внутри каждого из них наблюдается свой тип полной синхронизации. В точке «*a*» относительные фазы близки к нулю:  $\theta \approx 0$ ,  $\varphi \approx 0$ , и наблюдается режим синхронизации *синфазного* типа. В точке «*б*» относительные фазы  $\theta \approx \pi$ ,  $\varphi \approx \pi$ , так что первый и третий осциллятор колеблются примерно в фазе, а центральный осциллятор – в противофазе к ним. Это *противофазная* синхронизация. Внутри двух оставшихся «островов» наблюдается режим полной синхронизации *смешанного* типа. В этом случае одна из пар осцилляторов (первый–второй или второй–третий) колеблются в фазе, а оставшийся осциллятор – в противофазе к ним. Соответствующие конфигурации цепочки качественно показаны справа на рис. 8<sup>14</sup>.

В случае реактивной связи в результате бифуркации Андронова–Хопфа может возникнуть устойчивый предельный цикл  $C$ , как показано на рис. 9. Ему

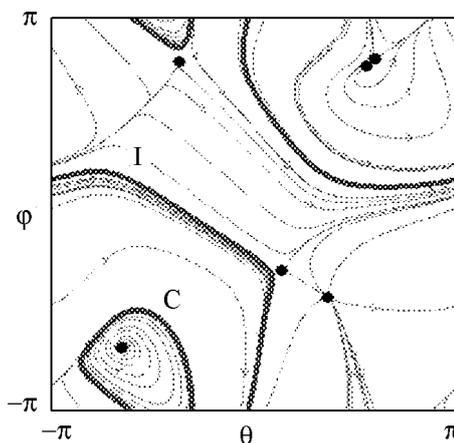


Рис. 9. Фазовый портрет трех реактивно связанных осцилляторов (7),  $\Delta_1 = -0.985$ ,  $\Delta_2 = -0.2$ ,  $\epsilon=0.6$ .  $C$  – устойчивый предельный цикл,  $I$  – «вращательная» инвариантная кривая

<sup>14</sup> Аналогичные режимы для осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля наблюдались в [44].

отвечает режим двухчастотной квазипериодичности, но отличающийся от описанных выше случаев захвата пар осцилляторов на рис. 1, б, в. Теперь обе относительные фазы не постоянны и колеблются около некоторого среднего значения. Таким образом, этот режим можно охарактеризовать, как *частичный захват всех трех осцилляторов*. В этом случае частотный спектр системы (1) будет содержать не только базовую частоту, но и набор составляющих, связанных с новым характерным масштабом времени – периодом обращения изображающей точки по предельному циклу фазовой модели. Соответствующая инвариантная кривая  $C$  отличается топологическими свойствами. Ее называют *стягиваемой (contractible)* в отличие от *вращательных (rotational)* кривых на рис. 1, б, в [11]. На рис. 9 сосуществуют устойчивые кривые обоих типов.

В системе с реактивной связью возможно несколько типов мультистабильности. Например, могут сосуществовать устойчивые состояния равновесия разных типов, устойчивые равновесия и инвариантная кривая, инвариантные кривые разных типов, отвечающие как частичной синхронизации пар осцилляторов, так и всех трех осцилляторов.

## 2. Ансамбль из четырех связанных осцилляторов

**2.1. Фазовая модель для четырех осцилляторов.** Обратимся теперь к цепочке четырех диссипативно связанных осцилляторов:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) + \mu(\dot{z} - \dot{w}) &= 0, \\ \ddot{w} - (\lambda - w^2)\dot{w} + (1 + \Delta_3)w + \mu(\dot{w} - \dot{z}) &= 0.\end{aligned}\tag{9}$$

Здесь  $\Delta_i$  – соответствующие частотные расстройки. Действуя стандартным образом, получаем уравнения в фазовом приближении для относительных фаз осцилляторов

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \theta - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= \frac{\Delta_2 - \Delta_3}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \varphi - \mu \sin \phi.\end{aligned}\tag{10}$$

На рис. 10 представлена карта ляпуновских показателей системы (10) на плоскости  $(\Delta_1, \mu)$ . Эта система имеет третий порядок и характеризуется уже тремя ляпуновскими показателями, так что дополнительно появляется возможность режимов четырехчастотной квазипериодичности  $T_4$  и хаоса  $C$ .

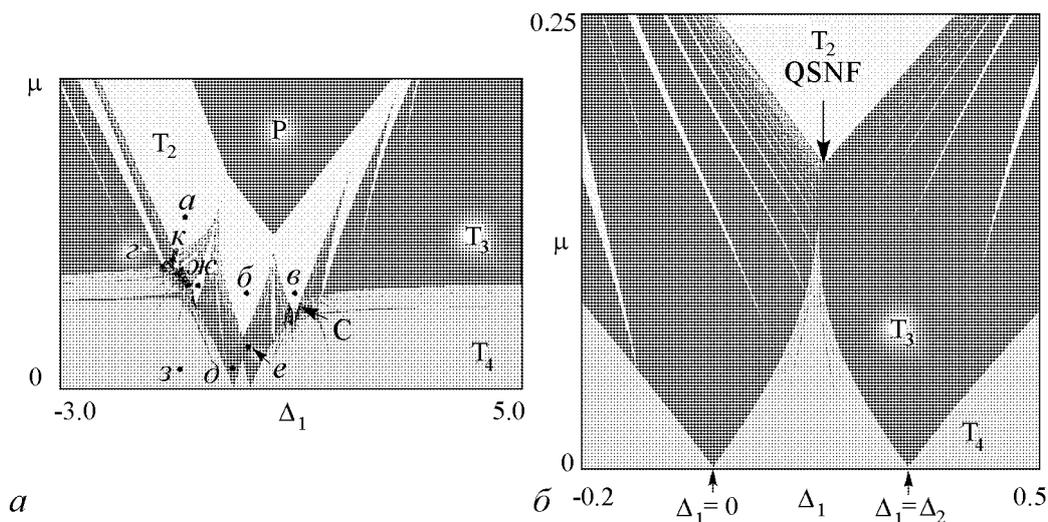


Рис. 10. *a* – карта ляпуновских показателей четырех фазовых осцилляторов (10); *б* – ее увеличенный фрагмент;  $\Delta_2 = 0.3$ ,  $\Delta_3 = 1$

**Характерные режимы.** Проиллюстрируем некоторые типы режимов системы четырех фазовых осцилляторов с помощью фазовых портретов. Примеры возможных аттракторов даны на рис. 11. Буквы соответствуют точкам на ляпуновской карте. Аттракторы представлены в виде трехмерных объектов в пространстве трех относительных фаз  $(\theta, \varphi, \phi)$ .

Простейшие инвариантные кривые, вложенные в трехмерное фазовое пространство, изображены на рис. 11, *a-в*. Они отвечают режимам двухчастотной квазипериодичности.

На рис. 11, *a* две фазы  $\theta$  и  $\phi$  колеблются около некоторых равновесных значений, а фаза  $\varphi$  изменяется во всем диапазоне  $(0, 2\pi)$ . Это означает, что первый–второй и третий–четвертый осцилляторы взаимно захвачены, как схематически показано на рис. 12, *a*. Режимы двухчастотной квазипериодичности можно классифицировать с помощью *трехкомпонентных чисел вращения*  $w = p : q : r$ , где  $p, q, r$  отвечают числам существенных пересечений инвариантной кривой с гранями куба в пространстве относительных фаз осцилляторов  $(\theta, \varphi, \phi)$ . Описанный режим имеет число вращения  $w = 0 : 1 : 0$ .

На рис. 11, *б* наблюдается подобный режим, только теперь осциллирует пара фаз  $\theta, \varphi$ , а третья фаза  $\phi$  изменяется во всем допустимом диапазоне. Эта ситуация отвечает частичному захвату одновременно первого, второго и третьего осцилляторов, как показано на рис. 12, *б*. Число вращения наблюдаемого режима  $w = 0 : 0 : 1$ .

Рис. 11, *в* соответствует режиму, когда захвачены уже второй, третий и четвертый осцилляторы. При этом число вращения  $w = 1 : 0 : 0$ , а возникшая кластеризация схематически показана на рис. 12, *в*.

Отметим, что в каждом из трех рассмотренных случаев колебание каждой пары фазовых переменных происходит вблизи нулевых значений (или, что эквивалентно,  $2\pi$ ). Это означает, что захват каждой пары осцилляторов происходит *синфазным* образом. Схематическое изображение возникающих простейших двухчастотных режимов  $T_2$  на рис. 12 можно рассматривать как первый шаг в построении *дерева*

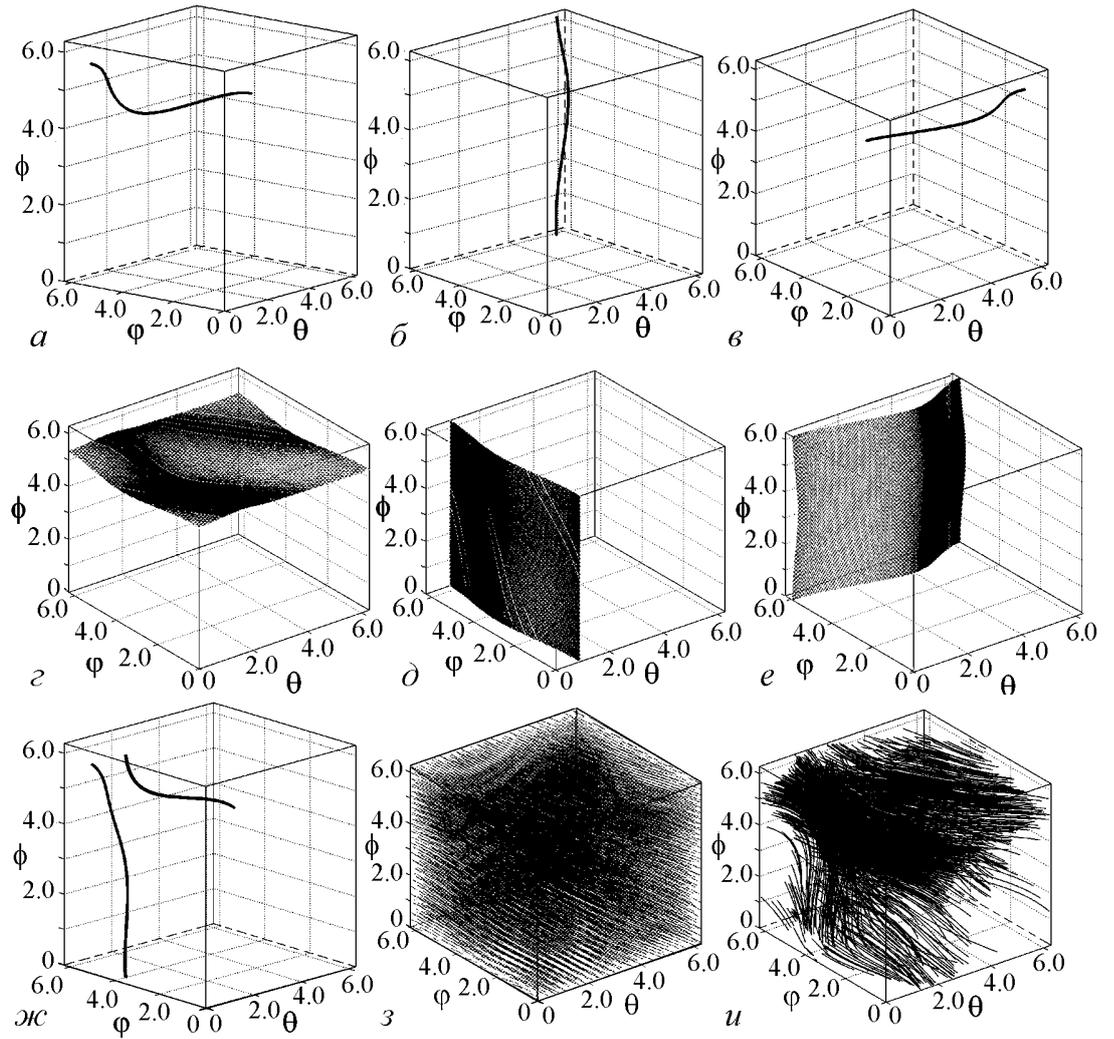


Рис. 11. Аттракторы четырех фазовых осцилляторов (10) в некоторых характерных точках

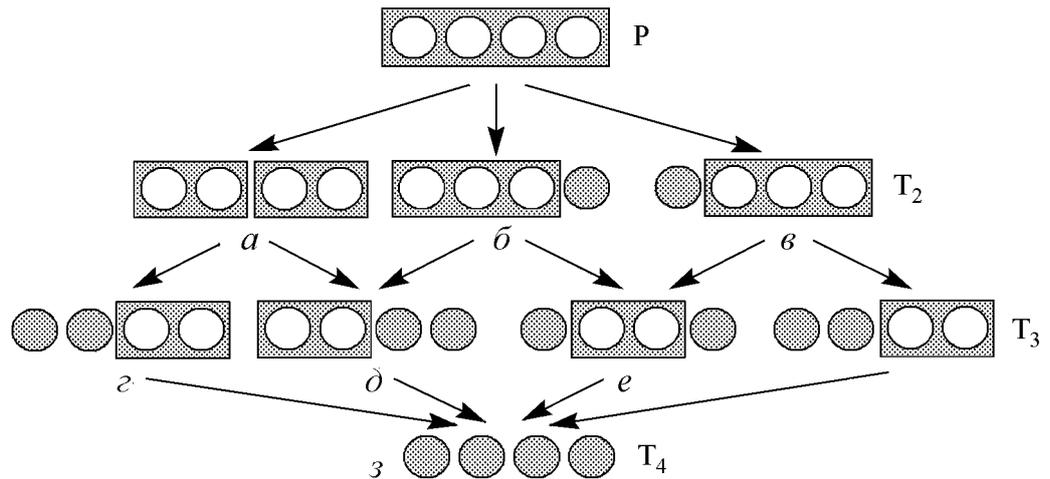


Рис. 12. Схематическое «дерево кластеризации» четырех фазовых осцилляторов. Иллюстрирует возникновение кластеров при уменьшении связи. Буквы отвечают точкам на карте режимов на рис. 10

кластеризации, которое является полезным «путеводителем» при изучении режимов четырех взаимодействующих осцилляторов.

Перейдем теперь в область трехчастотной квазипериодичности: точки «г», «д», и «е». Теперь аттракторы представляют собой *инвариантные поверхности*, которые фазовые траектории покрывают всюду плотным образом. В случае «г» слабо осциллирует фаза  $\phi$ , так что частично захвачены третий и четвертый осцилляторы. Два других основных возможных типа частичного захвата пар осцилляторов рис. 11, д, е демонстрируют фазовые портреты в виде различным образом ориентированных инвариантных поверхностей. На дереве кластеризации качественная конфигурация возникающих кластеров показана на рис. 12,  $z-e^{15}$ .

Более сложный вариант иллюстрирует рис. 11, ж. В этом случае наблюдается инвариантная кривая с числом вращения  $w = 0 : 1 : 1$ , возникшая на поверхности типа рис. 11, д из «сгущения траекторий». Это пример резонансного двухчастотного режима, возникающего на поверхности трехчастотного. На самом деле реализуется множество языков двухчастотных режимов с разными числами вращения, так что в системе существует большое число различных резонансных двухчастотных режимов.

При уменьшении связи кластеры, отвечающие трехчастотным режимам, будут разрушаться с возникновением режима четырехчастотной квазипериодичности. В этом случае фазовые траектории заполняют уже весь объем фазового куба, как показано на рис. 11, з. Отметим, что в некоторых областях параметров могут наблюдаться хаотические режимы. Пример представлен на рис. 11, и. Визуально четырехчастотный режим и хаос различить достаточно трудно, но для квазипериодического режима фазовые траектории более равномерно заполняют фазовый куб.

**Бифуркационные сценарии разрушения области полной синхронизации.**

Обсудим бифуркации, отвечающие за разрушение режима полной синхронизации. Полагая  $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = \dot{\phi} = 0$ , из (10) можно получить уравнения для синусов каждой из относительных фаз

$$\sin \theta = -\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{4\mu}, \quad \sin \varphi = \frac{\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3}{2\mu}, \quad \sin \phi = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 - 3\Delta_3}{4\mu}. \quad (11)$$

Решения каждого уравнения (11) появляются парами:  $(\theta_1, \theta_2)$ ,  $(\varphi_1, \varphi_2)$  и  $(\phi_1, \phi_2)$ . Поэтому система (10) имеет восемь состояний равновесия, расположенных в фазовом пространстве  $(\theta, \varphi, \phi)$  в вершинах параллелепипеда. Одно из них всегда устойчиво, а остальные являются седлами и неустойчивым узлом. При этом все восемь равновесий соединяются общими многообразиями, что и определяет эволюцию аттракторов.

При вариации любой из трех комбинаций параметров в правых частях (11), две грани параллелепипеда будут сближаться и могут слиться. При этом, как только синус одной из фазовых переменных обращается в единицу, все восемь равновесий попарно сливаются и одновременно исчезают через негрубое состояние из четырех равновесий. При этом полная синхронизация разрушается. Из приведенных

<sup>15</sup>Четвертый рисунок в этом ряду качественно аналогичен случаю «г»

рассуждений сразу следуют выражения, определяющие седло-узловые бифуркации указанного типа

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{4}, \mu = \pm \frac{\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3}{2}, \mu = \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 - 3\Delta_3}{4}. \quad (12)$$

Таким образом, возникает три варианта такой бифуркации  $SNP_{1-3}$ , соответствующие слиянию боковых граней параллелепипеда по одной из трех фазовых осей. Отрезки линий (12) и ограничивают область полной синхронизации на рис. 10. Их пересечение определяет точки коразмерности два, имеющие вид характерных «углов» на карте, причем одна из них определяет порог области полной синхронизации.

В результате описанной бифуркации из инвариантных многообразий состояний равновесия возникают четыре инвариантные кривые, как показано на рис. 13. При этом одна из них будет устойчива  $St$ , одна неустойчива  $N$ , а еще две будут седловыми  $Sd$ . Устойчивая инвариантная кривая будет отвечать за двухчастотный квазипериодический режим. Обсудим теперь бифуркации, отвечающие разрушению двухчастотной квазипериодичности.

Окрестность пороговой точки возникновения двухчастотной квазипериодичности в увеличенном виде показана на рис. 10, б. Можно видеть, что наблюдаемая картина в значительной мере аналогична точке  $SNF$  на рис. 2. Отличия состоят в повышении на единицу размерности квазипериодических режимов, то есть вместо области полной синхронизации имеет место область двухчастотной квазипериодичности, вместо области двухчастотной квазипериодичности – режим трехчастотной квазипериодичности, а вместо системы веерообразных языков трехчастотных режимов – аналогичная система языков четырехчастотных режимов. Поэтому мы будем называть такую точку *квазипериодическая точка (saddle node fan)* и обозначать  $QSNF$ .

Отметим и определенное отличие, состоящее в том, что внутри областей  $T_3$  на рис. 10, б имеется новая система узких языков двухчастотных режимов. Эти резонансные режимы отвечают ситуации, когда инвариантные кривые разных типов возникают на соответствующей инвариантной поверхности.

При выходе за пределы соответствующего языка двухчастотная квазипериодичность разрушается. Рис.13 иллюстрирует бифуркационный сценарий, отвечающий выходу из области  $T_2$  на рис. 10, б через ее правую границу. В этом случае при

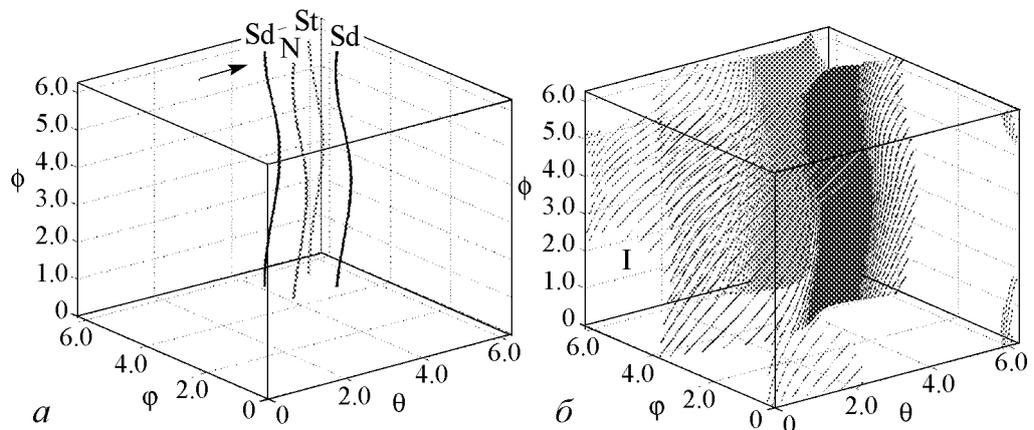


Рис. 13. Седло-узловая бифуркация инвариантных кривых, отвечающая за возникновение трехчастотной квазипериодичности при  $\mu = 0.2$  и различных  $\Delta_1$ : а – 0.16, б – 0.26

увеличении параметра  $\Delta_1$  устойчивая, неустойчивая и две седловые инвариантные кривые сближаются навстречу друг другу (показано стрелкой на рис. 13, *a*). В результате они *одновременно* и *попарно* сливаются и исчезают. В результате из их общих многообразий возникают устойчивая  $I$  и неустойчивая инвариантные поверхности, показанные на рис. 13, *б*.

Если же выйти из области  $T_2$  на рис. 10, *б* через ее левую границу, то меняется порядок седловых кривых. Теперь отмеченная стрелкой на рис. 13, *a* седловая кривая сливается уже с неустойчивой инвариантной кривой. В результате возникают инвариантные поверхности, ориентированные другим образом.

Непосредственно в точке QSNF (см. рис. 10, *б*) все четыре инвариантные кривые на рис. 13 одновременно стягиваются в одну кривую. Это некоторое вырожденное (негрубое) состояние<sup>16</sup>.

Рис.14 иллюстрирует дальнейшую эволюцию квазипериодического режима. Теперь наблюдается *разрушение трехчастотной квазипериодичности*. Это происходит в результате слияния устойчивой и неустойчивой инвариантных поверхностей. Такой сценарий наблюдается при выходе на плоскости параметров на рис. 10, *б* через левую границу языка трехчастотных режимов  $T_3$ .

На рис. 14 можно видеть, что при переходе через точку бифуркации и от рис. *б* к *в* при очень незначительном изменении частотной расстройки  $\Delta_1$  (всего 0.02) происходит скачкообразное исчезновение инвариантных поверхностей с возникновением картины траекторий, заполняющих весь фазовый куб. Это характерная особенность обсуждаемой бифуркации.

Отметим, что два характерных языка трехчастотных режимов на рис. 10, *б* имеют острия в точках, определяемых резонансными условиями: совпадением собственных частот второго и первого осцилляторов ( $\Delta_1 = 0$ ) и второго и третьего ( $\Delta_1 = \Delta_2$ )<sup>17</sup>.

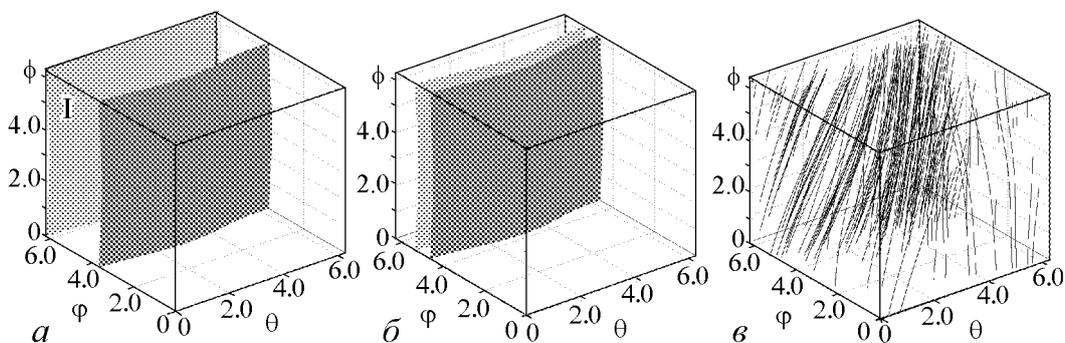


Рис. 14. Седло-узловая бифуркация инвариантных поверхностей, отвечающая за возникновение четырехчастотной квазипериодичности,  $I$  – устойчивая инвариантная поверхность для  $\mu=0.05$  и различных  $\Delta_1$ :  $a - 0.28$ ,  $b - 0.22$ ,  $v - 0.2$

<sup>16</sup>Отметим, что обсуждение в этом разделе ведется с «физических» позиций, в стиле компьютерного эксперимента. В этом плане остается необходимость более строгого обоснования результатов, в частности, возможности квазипериодических точек QSNF, сценариев разрушения квазипериодических режимов и т.д.

<sup>17</sup>Поскольку мы варьируем частоту одного осциллятора (второго), то число таких резонансов равно числу его ближайших соседей, то есть двум. Для сети оно уже будет зависеть от числа элементов, например, для четырех элементов оно равно трем.

**Пространство собственных частот.** Обсудим устройство пространства собственных частот четырех фазовых осцилляторов ( $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ). Область полной синхронизации дается уравнениями (12), которые задают три пары плоскостей, пересечение которых образует *многогранник* в форме *наклонного параллелепипеда* (рис. 15). Его грани являются поверхностями бифуркаций коразмерности один (SNP) трех указанных выше типов, ребра – линиями бифуркаций коразмерности два, а вершины – точками бифуркаций коразмерности три.

Удобно представить сечения многогранника плоскостями  $\Delta_2 = const$  и рассмотреть соответствующие плоскости ( $\Delta_1, \Delta_3$ ). Пример ляпуновской карты для  $\Delta_2 = 0.2$  показан на рис. 16, *а*. На рис. 16, *б* показаны три пары линий, заданных уравнениями (12). Их пересечение образует *шестиугольник*, который отвечает области полной синхронизации и выявляется также и на ляпуновской карте.

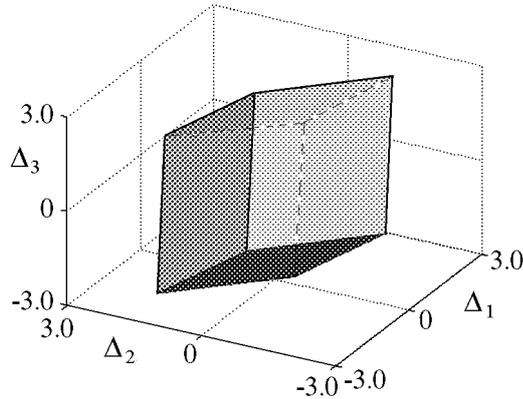


Рис. 15. Область полной синхронизации четырех фазовых осцилляторов в пространстве частотных расстройк ( $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ )

При увеличении частотного параметра  $\Delta_2$  образующие область полной синхронизации прямые линии будут смещаться в соответствии с (12): две пары вниз и одна – вверх. Нетрудно показать, что при значении  $\Delta_2 = \mu$  вершины шестиугольника одновременно попарно сливаются, и область полной синхронизации превращается в треугольник. При  $\Delta_2 = 2\mu$  наступает следующее качественное изменение: нижняя сторона треугольника достигает его вершины, и область полной синхронизации исчезает вообще.

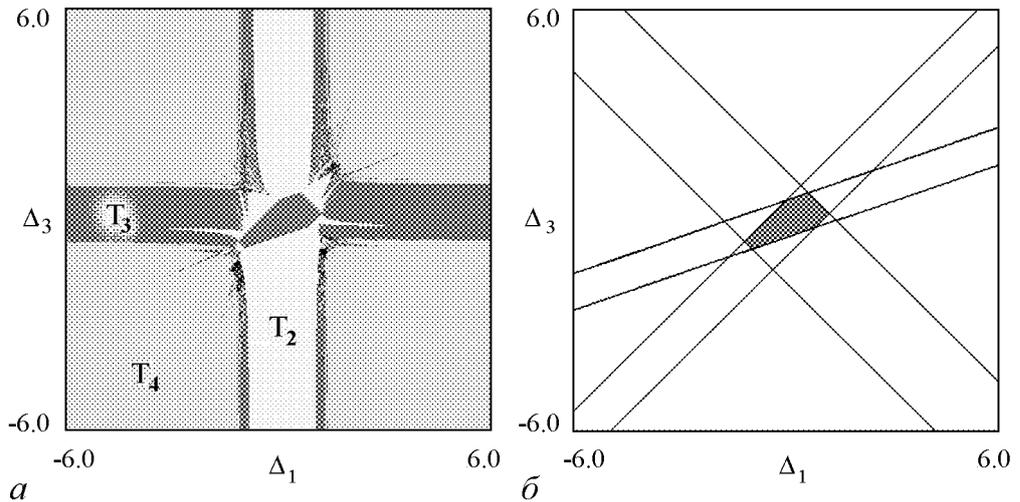


Рис. 16. Ляпуновская карта четырех диссипативно связанных фазовых осцилляторов на плоскости двух частотных параметров ( $\Delta_1, \Delta_3$ ) (*а*) и конфигурация области полной синхронизации в рамках аналитического рассмотрения (*б*);  $\mu = 0.4$

**2.2. Четыре связанных осциллятора ван дер Поля.** Вернемся теперь к системе из четырех диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля (9). Выберем  $\lambda = 0.1$ , а остальные параметры так, чтобы они соответствовали карте для фазового приближения на рис. 10 с учетом правила нормировки. Соответствующая карта ляпуновских показателей показана на рис. 17. Начнем обсуждение со случая больших масштабов (рис. 17, а).

**Квазипериодические бифуркации.** На рис. 17, а при уменьшении параметра связи  $\mu$  наблюдается каскад бифуркаций рождения инвариантных торов все более высокой размерности. Обсудим картину бифуркаций, сопровождающих наблюдаемый эффект. Для этого обратимся к графику зависимости пяти старших ляпуновских показателей от величины связи на рис. 18 для случая достаточно большого значения  $\Delta_1 = 2$ .

При большой связи реализуется эффект гибели колебаний OD, и все показатели на рис. 18 отрицательны. В точке  $\mu \approx 0.27$  первый показатель  $\Lambda_1$  обращается в ноль, и происходит бифуркация Андронова-Хопфа H рождения устойчивого (многомерного) предельного цикла. При дальнейшем уменьшении связи в точке NS проис-

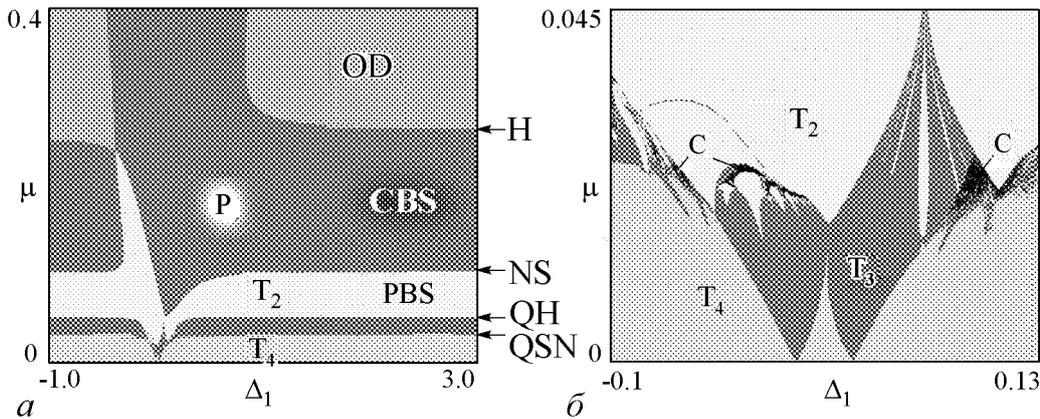


Рис. 17. Карта динамических режимов системы четырех осцилляторов Ван-дер-Поля (10) и ее увеличенный фрагмент,  $\lambda = 0.1$ ,  $\Delta_2 = 0.03$ ,  $\Delta_3 = 0.1$

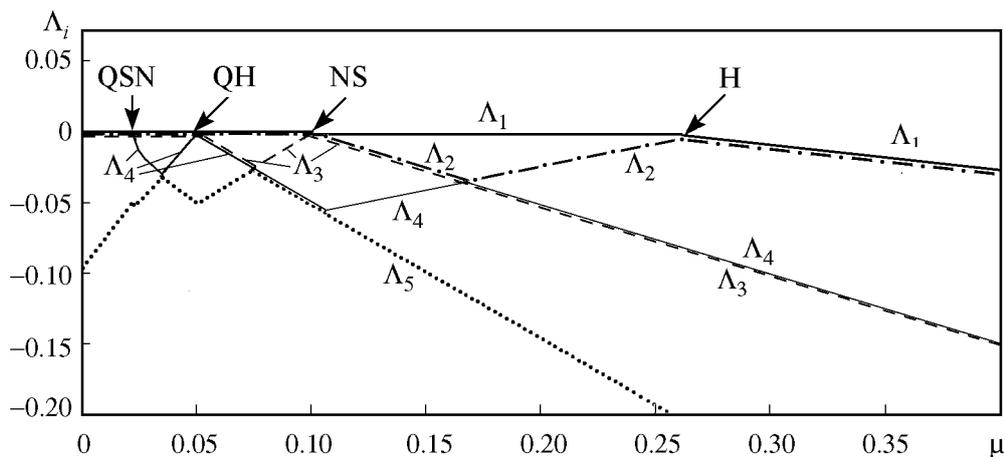


Рис. 18. Графики пяти старших ляпуновских показателей и точки бифуркации системы (10),  $\lambda = 0.1$ ,  $\Delta_1 = 2.0$ ,  $\Delta_2 = 0.03$ ,  $\Delta_3 = 0.1$

ходит бифуркация Неймарка–Сакера, и рождается устойчивый двухчастотный тор. При этом в ноль обращаются уже два показателя: первый и второй.

Затем в точке QH в ноль обращается третий показатель  $\Lambda_3$ . При этом наблюдается характерное поведение: до точки бифуркации два показателя равны друг другу, так что  $\Lambda_3 = \Lambda_4$ . За точкой бифуркации показатель  $\Lambda_3$  обращается в ноль, а четвертый показатель  $\Lambda_4$ , коснувшись горизонтальной оси, снова уходит в отрицательную область. Это характерная картина квазипериодической бифуркации Хопфа QH<sup>18</sup> [26], приводящей к мягкому возникновению трехчастотного тора из двухчастотного.

В точке QSN размерность тора вновь повышается. Однако, это бифуркация другого типа – теперь четвертый показатель просто обращается в ноль, а пятый показатель все время остается отрицательным. Это означает, что имеет место седло-узловая бифуркация торов: устойчивый трехмерный тор сливается с седловым тором, и возникает четырехмерный устойчивый тор. Отметим, что такая бифуркация описывается и фазовой моделью (см. на рис. 10, а характерную границу между трех- и четырехчастотными режимами по правому краю карты).

Для удобства восприятия тип бифуркаций указан по правому обрезу карты на рис. 17, а. Можно видеть также, что описанные бифуркации приводят к картине режимов широкополосной синхронизации<sup>19</sup> на базе квазипериодичности разной размерности. Одна такая область CBS отвечает полной синхронизации всех осцилляторов, а PBS – частичной.

**Сравнение с фазовой моделью.** Перейдем теперь к рис. 17, б. Картина в этих масштабах отчасти близка к случаю фазовой модели рис. 10. Так, можно видеть два характерных языка трехчастотных торов и систему встроенных в них веерных языков двухчастотных режимов. Однако имеют место и существенные отличия. Для системы осцилляторов ван дер Поля на рис. 17, б в левой области двухчастотные языки заметно расширяются с ростом связи и начинают *перекрывать*ся. При этом они имеют характерные округлые вершины. В области перекрытия двухчастотных языков возникает хаос. Такой картины нет в фазовой модели. Также возникают небольшие области хаоса.

### 3. Сценарий Ландау–Хопфа в ансамбле из пяти осцилляторов

В описанной выше системе наблюдаются три первых «шага» в сценарии Ландау–Хопфа [46]. Может ли продолжиться этот каскад? Или, иначе говоря, возможен ли сценарий Ландау–Хопфа мягкого рождения все более высокоразмерных торов с выходом за порог все новых колебательных мод?

Такой сценарий возможен, однако, требуется выполнение некоторых дополнительных условий. Во-первых, сама концепция сценария Ландау–Хопфа требует

<sup>18</sup>Так ее называют в [26] – квазипериодическая бифуркация Хопфа (quasiperiodic Hopf bifurcation). Ее можно также назвать квазипериодической бифуркацией Неймарка–Сакера, или же квазипериодической бифуркацией Хопфа–Неймарка–Сакера, поскольку речь идет все же о бифуркации тора. Трудно отдать предпочтение тому или иному варианту названия.

<sup>19</sup>Так в [45] для случая двух осцилляторов названы режимы, когда область синхронизации образует характерную полосу, простирающуюся в сторону больших частотных расстройек. Причина этого эффекта в неидентичности осцилляторов по управляющим параметрам. В случае трех осцилляторов играет роль неэквивалентность осцилляторов в цепочке – центральный осциллятор испытывает трение со стороны двух соседей [34]. Для четырех осцилляторов возникает еще ряд тонких особенностей этого эффекта [39].

неидентичности по управляющим параметрам  $\lambda$ . Действительно, разные моды должны иметь разную степень возбуждения. Именно тогда, варьируя параметр, отвечающий за диссипацию в системе (аналог числа Рейнольдса), можно наблюдать последовательный выход за порог новых мод. Во-вторых, все моды должны быть достаточно разнесены по частоте. В противном случае возникают эффекты синхронизации, которые приводят к различным резонансам<sup>20</sup> и, как следствие, к изменению бифуркационных сценариев. В-третьих, желательно устранить эффекты, связанные с наличием разного числа соседей у каждого осциллятора в цепочке.

Построим модель, которая удовлетворяет перечисленным требованиям. Это сеть из пяти осцилляторов с эквидистантным спектром собственных частот. При этом оставим единственный частотный параметр  $\Delta$ , который будет управлять рассинхронизмом сразу всех осцилляторов. Все осцилляторы будут неидентичными по управляющим параметрам, что обеспечит поэтапный вывод за порог возмущения соответствующих мод.

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \frac{\mu}{4}(4\dot{x} - \dot{y} - \dot{z} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\
 \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + (1 + \frac{\Delta}{4})y + \frac{\mu}{4}(4\dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\
 \ddot{z} - (\lambda_3 - z^2)\dot{z} + (1 + \frac{\Delta}{2})z + \frac{\mu}{4}(4\dot{z} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\
 \ddot{w} - (\lambda_4 - w^2)\dot{w} + (1 + \frac{3\Delta}{4})w + \frac{\mu}{4}(4\dot{w} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{v}) &= 0, \\
 \ddot{v} - (\lambda_5 - v^2)\dot{v} + (1 + \Delta)v + \frac{\mu}{4}(4\dot{v} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{w}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь  $\lambda_i$  – параметры возбуждения автономных осцилляторов,  $\Delta$  – определяет частотную отстройку осцилляторов, частота первого осциллятора принята за единицу. Положим далее  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.2$ ,  $\lambda_3 = 0.3$ ,  $\lambda_4 = 0.4$ ,  $\lambda_5 = 0.5$ . Карта ляпуновских показателей системы (13) в этом случае на плоскости  $(\Delta, \mu)$  показана на рис. 19.

Можно видеть, что в системе действительно устранены основные резонансные эффекты, за исключением небольшой области при малой частотной расстройке. Там же локализованы и небольшие области хаоса С. А вот в области большого рассинхронизма осцилляторов  $\Delta \geq 1.0$  наблюдается система торов все более высокой размерности. Границы этих областей в асимптотике  $\Delta \rightarrow \infty$  отвечают значениям соответствующих управляющих параметров  $\lambda_i$ . Для удобства восприятия эти значения отмечены стрелками по правому обрезу карты.

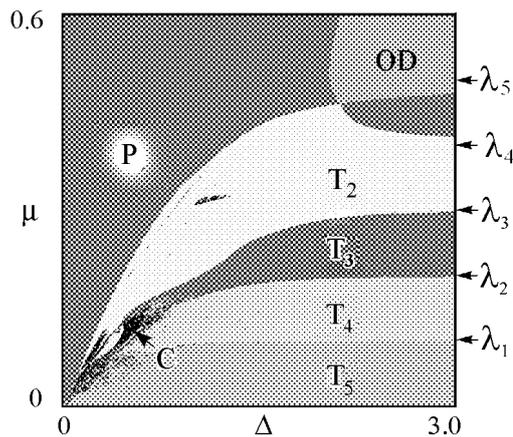


Рис. 19. Карта ляпуновских показателей системы (13)

<sup>20</sup>Включая и инвариантные торы разной размерности.

Убедимся, что здесь имеет место каскад квазипериодических бифуркаций Хопфа QH для торов все более высокой размерности. Для этого обратимся к графикам ляпуновских показателей на рис. 20, построенным вдоль линии  $\Delta = 3.0$ . Можно видеть, что при больших значениях величины связи все показатели отрицательные, и имеет место режим гибели колебаний. Затем в точке Н происходит бифуркация Андронова–Хопфа, и один показатель  $\Lambda_1$  становится нулевым. Далее в точке NS происходит бифуркация Неймарка–Сакера и еще один показатель  $\Lambda_2$  становится нулевым. В точке QH<sub>1</sub> становится равным нулю показатель  $\Lambda_3$ , и рождается трехмерный тор. Для идентификации характера бифуркации заметим, что до бифуркации показатели  $\Lambda_3$  и  $\Lambda_4$  совпадали. Это характерно для квазипериодической бифуркации Хопфа [26]. Далее совершенно аналогично ведут себя оставшиеся показатели, так что в точке QH<sub>2</sub> в результате второй квазипериодической бифуркации Хопфа рождается четырехмерный тор, а в точке QH<sub>3</sub> – пятимерный.

На рис. 21 показан спектр Фурье колебаний пятого осциллятора, отвечающий развитию сценария Ландау–Хопфа в системе (13). Можно видеть последовательное обогащение спектра колебаний все новыми линиями, отвечающими квазипериодичности все более высокой размерности.

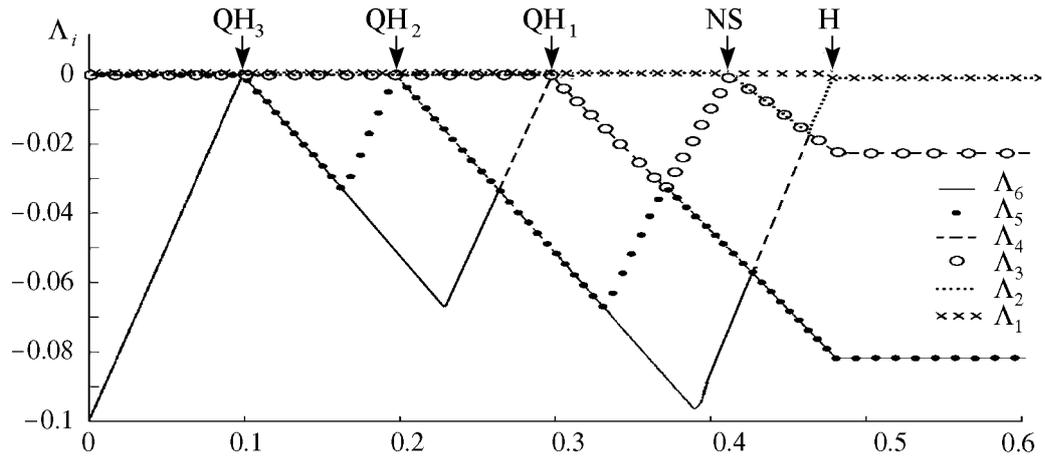


Рис. 20. Графики зависимости шести ляпуновских показателей системы (13) от величины диссипативной связи. QH<sub>i</sub> – каскад квазипериодических бифуркаций Хопфа,  $\Delta = 3.0$

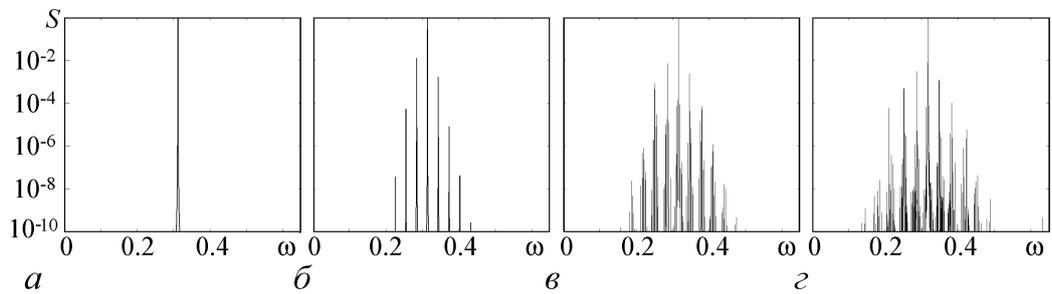


Рис. 21. Спектр колебаний пятого осциллятора системы (13), отвечающий развитию сценария Ландау–Хопфа: а – режим полной синхронизации  $\mu = 0.45$ ; б – двумерный тор  $\mu = 0.35$ ; в – трехмерный тор  $\mu = 0.25$ ; г – четырехмерный тор  $\mu = 0.15$

## Заключение

Обсуждены различные аспекты синхронизации и многочастотной квазипериодичности в ансамблях из небольшого числа осцилляторов. Приведенное изложение выполнено в универсальном стиле, характерном для теории колебаний и нелинейной динамики. В тоже время квазипериодические колебания появляются практически во всех областях физики: радиофизике, электронике, лазерной физике, гидродинамике, климатологии, биофизике, астрофизике и т.д. Известны примеры как в виде ансамблей автоколебательных элементов, так и в виде различных фазовых моделей. Например, модели в виде осцилляторов ван дер Поля и фазовые модели могут быть получены для мощных генераторов микроволнового излучения – *виркаторов* [47–50]. Известны примеры оптически связанных *лазеров*, приводящие к связанным уравнениям Адлера: системы с инъекцией лазерного излучения, системы с оптическим пространственным фильтром и т.д. [51–56]. Одним из интересных актуальных примеров систем с реактивной связью являются *ионные ловушки* [57, 58]. Различные типы связанных фазовых уравнений могут быть получены для описания связанных *контактов Джозефсона* [2, 59, 60]. Известны также и современные примеры, относящиеся к задаче *синхронизации нескольких часов* [61–64] и так далее.

*Работа поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-1726.2014.2 и проектами РФФИ 12-02-00342-а и 12-02-00541-а.*

## Библиографический список

1. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
2. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
3. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций. Учебник-монография. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2009. 312 с.
4. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2003. 443 с. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. Москва-Ижевск: РХД, 2009. 548 с.
5. *Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O.* Synchronization: From simple to complex. Springer, 2009. 437 p.
6. *Grebogi C., Ott E., James A., Yorke J.* Attractors on an N-torus: Quasiperiodicity versus chaos // *Physica D.* 1985. Vol. 15, № 3. P. 354.
7. *Battelino P.M.* Persistence of three-frequency quasiperiodicity under large perturbations // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol. 38. P. 1495.
8. *Linsay P.S., Cumming A.W.* Three-frequency quasiperiodicity, phase locking, and the onset of chaos // *Physica D.* 1989. Vol. 40. P.196.
9. *Kim S., MacKay R.S., Guckenheimer J.* Resonance regions for families of torus maps // *Nonlinearity.* 1989. Vol. 2, № 3. P. 391.

10. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S.* Simple resonance regions of torus diffeomorphisms // *Patterns and Dynamics in Reactive Media Proc. IMA (Minneapolis, 1989) (IMA Vol. in Maths. and its Applications)*, vol.37, ed. R.Aris et al. Berlin: Springer, p. 1-9.
11. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S.* Three coupled oscillators: Mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // *Physica D*. 1991. Vol. 49, №3. P. 387.
12. *Galkin O. G.* Phase-locking for maps of a torus: A computer assisted study // *Chaos*. 1993. Vol. 3, № 1. P. 73.
13. *Ashwin P., Guasch J., Phelps J.M.* Rotation sets and phase-locking in an electronic three oscillator system // *Physica D*. 1993. Vol. 66, № 3-4. P. 392.
14. *Khibnik A.I., Braimanc Y., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K.* Phase model analysis of two lasers with injected field // *Physica D*. 1998. Vol. 111, № 1-4. P. 295.
15. *Guckenheimer J., Khibnik A.* Torus maps from weak coupling of strong resonances. In book: *Methods of Qualitative Theory of Differential Equations and Related Topics* // American Mathematical Society. 2000. P. 205.
16. *Vasylenko A., Maistrenko Yu., Hasler M.* Modeling phase synchronization in systems of two and three coupled oscillators // *Nonlinear Oscillations*. 2004. Vol. 7, № 3. P. 301.
17. *Maistrenko Y., Popovych O., Burylko O.* Mechanism of desynchronization in the finite-dimensional Kuramoto model // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93. P. 084102.
18. *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // *Europhysics Letters*. 2009. Vol. 86. P. 30003.
19. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // *Нелинейная динамика*. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
20. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // *Нелинейная динамика*. 2008. Т. 4, № 1. С. 39.
21. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Chaos*. 2008. Vol. 18. P. 037123.
22. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 73. P. 056202.
23. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В.* Синхронизация генераторов квазипериодических колебаний // *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9, № 3. С. 409.
24. *Rompala K., Rand R., Howland H.* Dynamics of three coupled van der Pol oscillators with application to circadian rhythms // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2007. Vol. 12, № 5. P. 794.
25. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnold's resonance web // *Bulletin of the Belgian Mathematical Society – Simon Stevin*. 2008. Vol. 15, № 5. P. 769.
26. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2011. Vol. 16, № 1-2. P. 154.

27. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* Routes to chaos in the Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms // *Nonlinearity*. 2010. Vol. 23. P. 1919.
28. *Astakhov S., Fujiwara N., Gulay A., Tsukamoto N., Kurths J.* Hopf bifurcation and multistability in a system of phase oscillators // *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 88. P. 032908.
29. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов ван дер Поля // *Нелинейная динамика*. 2011. Т. 7, №3. С. 411.
30. *Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* Synchronization of forced quasi-periodic coupled oscillators. Preprint nlin. arXiv: 1106.5382
31. *Тюрюкина Л.В., Чернышов Н.Ю.* Синхронизация возбуждаемых реактивно связанных фазовых осцилляторов // *Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2012. Т. 20, № 1. С. 81.
32. *Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* On the road towards multidimensional tori // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2011. Vol. 16, №6. P. 2371.
33. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // *Нелинейная динамика*. 2010. Т. 6, № 4. С. 693.
34. *Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Динамика трех неидентичных по управляющим параметрам связанных осцилляторов ван дер Поля // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 11, № 5. С. 76.
35. *Кузнецов А.П., Чернышов Н.Ю., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация и квазипериодические колебания трех реактивно связанных осцилляторов // *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9, № 1. С. 11.
36. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Тюрюкина Л.В., Сатаев И.Р.* Сценарий Ландау–Хопфа в ансамбле взаимодействующих осцилляторов // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 5. С. 863.
37. *Emelianova Yu.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // *Physica D*. 2013. Vol. 244, №1. 36.
38. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // *Physics Letters A*. 2013. Vol. 377. P. 3291.
39. *Emelianova Y.P., Kuznetsov A.P., Turukina L.V.* Quasi-periodic bifurcations and «amplitude death» in low-dimensional ensemble of van der Pol oscillators // *Physics Letters A*. 2014. Vol. 378. P. 153.
40. *Emelianova Y.P., Kuznetsov A.P., Turukina L.V., Sataev I.R., Chernyshov N.Yu.* A structure of the oscillation frequencies parameter space for the system of dissipatively coupled oscillators // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2014. Vol. 19, № 4. P. 1203.
41. *Rand R., Holmes P.J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1980. Vol. 15. P. 387.
42. *Ivanchenko M., Osipov G., Shalfeev V., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Physica D*. 2004. Vol. 189, № 1–2. P. 8.
43. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V.* Coupled van der Pol–Duffing oscil-

- lators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // *Physica D*. 2009. Vol. 238, № 14. P. 1203.
44. *Kryukov A.K., Osipov G.V., Polovinkin A.V., Kurths J.* Synchronous regimes in ensembles of coupled Bonhoeffer–van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 79. P. 046209.
  45. *Kuznetsov A.P., Roman Ju. P.* Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization // *Physica D*. 2009. Vol. 238, № 16. P. 1499.
  46. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности // *ДАН СССР*. 1944. Т. 44, № 8. С. 339.  
*Hopf E.* A mathematical example displaying the features of turbulence // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1948. Vol. 1. P. 303.
  47. *Привезенцев А.П., Саблин Н.И., Филиппенко Н.М., Фоменко Г.П.* Нелинейные колебания виртуального катода в триодной системе // *Радиотехника и электроника*. 1992. Т. 37, № 7. С. 1242.
  48. *Магда И.И., Пащенко А.В., Романов С.С.* К теории пучковых обратных связей в генераторах с виртуальным катодом // *Вопросы атомной науки и техники. Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения*. 2003. №4. С. 167.
  49. *Sze H., Price D., Harteneck B.* Phase locking of two strongly coupled vircators // *J. Appl. Phys.* 1990. Vol. 67, № 5. P. 2278.
  50. *Репин Б.Г., Дубинов А.Е.* Исследование режимов фазировки трех виркаторов в рамках модели связанных осцилляторов Ван-дер-Поля // *Журнал технической физики*. 2006. Т. 76, вып. 4. С. 99.
  51. *Pampaloni E., Lapucci A.* Locking-range analysis for three coupled lasers // *Opt. Lett.* 1993. Vol. 18. P.1881.
  52. *Braimanc Y., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K., Khibnik A.I.* Entrainment of solid-state laser arrays // *Phys. Rev. A*. 1995. Vol. 52. P. 1500.
  53. *Khibnik A.I., Braimanc Y., Protopopescu V., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K.* Amplitude dropout in coupled lasers // *Phys. Rev. A*. 2000. Vol. 62. P. 063815.
  54. *Глова А.Ф., Лысиков А.Ю.* Синхронизация трех лазеров с оптической связью на пространственном фильтре // *Квантовая электроника*. 2002. № 4. С. 315.
  55. *Глова А.Ф.* Синхронизация излучения лазеров с оптической связью // *Квантовая электроника*. 2003, № 4. С. 283.
  56. *Владимиров А.Г.* Нелинейная динамика и бифуркации в многомодовых и пространственно распределенных лазерных системах. Диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук, 2006.
  57. *Lee T. E., Cross M. C.* Pattern formation with trapped ions // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106. 143001.
  58. *Lee T.E., Sadeghpour H.R.* Quantum simulation of quantum van der Pol oscillators with trapped ions. 2013, arXiv preprint arXiv.
  59. *Valkering T.P., Hooijer C.L.A., Kroon M.F.* Dynamics of two capacitively coupled Josephson junctions in the overdamped limit // *Physica D*. 2000. Vol. 135, № 1. P. 137.
  60. *Saitoh K., Nishino T.* Phase locking in a double junction of Josephson weak links // *Phys. Rev. B*. 1991. Vol. 44. P. 7070.
  61. *Czolczyński K., Perlikowski P., Stefański A., Kapitaniak T.* Why two clocks synchronize: Energy balance of the synchronized clocks // *Chaos*. 2011. Vol.21. P. 023129.

62. *Kapitaniak M., Czolczyński K., Perlikowski P., Stefański A., Kapitaniak T.* Synchronization of clocks // *Physics Reports*. 2012. Vol. 517, № 1–2. P. 1.
63. *Czolczyński K., Perlikowski P., Stefański A., Kapitaniak T.* Clustering of Huygens' clocks // *Prog. Theor. Phys.* 2009. Vol. 122, № 4. P. 1027.
64. *Czolczyński K., Perlikowski P., Stefański A., Kapitaniak T.* Synchronization of the self-excited pendula suspended on the vertically displacing beam// *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2013. Vol. 18, № 2. P. 386.
65. *Hong H., Strogatz S.H.* Kuramoto model of coupled oscillators with positive and negative coupling parameters: An example of conformist and contrarian oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106. 054102.

*Поступила в редакцию 19.12.2013*

## SYNCHRONIZATION AND MULTI-FREQUENCY QUASI-PERIODICITY IN THE DYNAMICS OF COUPLED OSCILLATORS

*A.P. Kuznetsov<sup>1,2</sup> L.V. Turukina<sup>1,2</sup> I.R. Sataev<sup>1</sup> N.Yu. Chernyshov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Institute of Radio-Engineering and Electronics RAS, Saratov Branch

<sup>2</sup> Saratov State University

The dynamics of ensembles of oscillators containing a small number of bits elements is discussed. The possible types of regimes and peculiarities of bifurcations of regular and quasi-periodic attractors are analyzed. By using the method of Lyapunov exponents charts the picture of embedding of quasi-periodic regimes of different dimension in the parameter space is revealed. Dynamics of ensembles of van der Pol and phase oscillators are compared.

*Keywords:* Synchronization, quasi-periodic oscillations, invariant tori, bifurcation.

*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, заведующий базовой кафедрой динамических систем Саратовского государственного университета. Имеет звание профессора. Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 100 статей в российских и международных научных журналах. Научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний», «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны (сборник задач) и др.



410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
 им. В.А. Котельникова РАН  
 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
 www.sgtnd.narod.ru  
 E-mail: apkuz@yandex.ru

*Тюрюкина Людмила Владимировна* – родилась в 1977 году. Окончила факультет нелинейных процессов в Саратовском госуниверситете (2000). Кандидат физико-математических наук (2003, СГУ), имеет звание доцента по специальности радиофизика (2009). В настоящее время – старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ. Область научных интересов – новые аспекты явления синхронизации в системах различной физической природы (радиофизические системы, модели турбулентности, модели биофизических систем и др.); контроль (управление) неустойчивыми режимами; динамический хаос; физические системы с гиперболическими аттракторами. Автор более 30 статей в российских и зарубежных журналах. Соавтор монографии «Физика квазипериодических колебаний» и 3 учебных пособий.



410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН  
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
[www.sgtnd.narod.ru](http://www.sgtnd.narod.ru)  
E-mail: [lvstur@rambler.ru](mailto:lvstur@rambler.ru)

*Сатаев Игорь Рустамович* – родился в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт в 1982 году. Кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов: моделирование динамики на пороге хаоса, гиперболический хаос, критические явления и метод ренормгруппы, приложения в механике. Автор более 50 статей в российских и международных журналах. Соавтор монографии «Физика квазипериодических колебаний».



410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН  
[www.sgtnd.narod.ru](http://www.sgtnd.narod.ru)  
E-mail: [sataevir@rambler.ru](mailto:sataevir@rambler.ru)

*Чернышов Николай Юрьевич* – родился в Саратове (1988). Окончил Саратовский государственный университет (2011). Аспирант базовой кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – математическое моделирование, теория синхронизации, нелинейная динамика и ее приложения. Автор 4 статей в российских и международных научных журналах.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: [nick.chernyschov@yandex.ru](mailto:nick.chernyschov@yandex.ru)



**СЛОЖНАЯ СТРУКТУРА И НЕЛИНЕЙНОЕ ПОВЕДЕНИЕ  
VERY LOW FREQUENCY ВАРИАБЕЛЬНОСТИ РИТМА СЕРДЦА:  
МОДЕЛИ АНАЛИЗА И ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ\***

*А.Н. Флейшман,<sup>1</sup> Т.В. Кораблина,<sup>2</sup> С.А. Петровский,<sup>1</sup> И.Д. Мартынов<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> ФГБУ «НИИ комплексных проблем гигиены и профессиональных заболеваний» СО РАМН

<sup>2</sup> Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк

Проведены исследования структуры очень медленных колебаний (very low frequency, VLF) спектра variability ритма сердца (ВРС), ее нелинейного поведения во взаимосвязи с энергетикой колебаний, барорефлекторной и парасимпатической активностью при функциональных пробах малой интенсивности у 100 человек (seven-test, углубленное дыхание), в том числе при активной ортостатической пробе у 32 лиц с ортостатической тахикардией в сравнении с контрольной группой, 20 человек.

Выполнено три этапа исследований. *Первый* – разработана методика спектрального анализа отдельных компонентов VLF. На основе сравнительных данных быстрого преобразования Фурье с фильтрами Уэлча, авторегрессии, непрерывного вейвлет-анализа и преобразования Гильберта–Хуанга, впервые показано, что VLF имеют отдельные 200-, 100- и 50-секундные колебания (VLF200, VLF100, VLF50). *Второй этап* – для оценки физиологических свойств выделенных колебаний проведен анализ структуры VLF в трех группах пациентов: с преобладанием парасимпатической активности (HF) в спектре ВРС; с доминированием 10-секундных ритмов (LF); с выраженной депрессией энергетичности всех компонентов спектра. Установлено, что отдельные компоненты VLF (VLF100 и VLF50) обладают определенной устойчивостью и независимостью от изменений периферических вегетативных показателей (LF/HF) при нагрузках малой интенсивности. *Третий этап* – проанализированы особенности структуры VLF (VLF100 и VLF50) отдельно и в сочетании с LF и HF, а также с частотой пульса и АД у лиц с ортостатической тахикардией с преобладанием парасимпатической активности в условиях функциональных проб малой интенсивности (seven-test, углубленное дыхание) и при активной ортостатической пробе. На основе проведенных исследований сделаны выводы о том, что отдельные компоненты в структуре VLF (VLF100, VLF50) могут демонстрировать реципрокные взаимоотношения при нагрузке между собой и по отношению LF/HF, и играют адаптивную роль в механизмах вегетативного обеспечения. Ранее найденные закономерности, характерные для лиц с ортостатической тахикардией, в виде высокого уровня LF оказались недостаточными для прогноза. Выявлено важное значение VLF и ее компонентов, 100- и 50-секундных колебаний при ортостазе в прогнозе развития ортостатической тахикардии. У 35% пациентов с вегетативными нарушениями при высоком

\*Статья написана по материалам доклада на X Международной школе «Хаотические автоколебания и образования структур», 7–12 октября 2013 г. Саратов, Россия.

уровне мощности VLF100 тахикардия не развивалась, то есть в этом случае VLF и ее составные части выполняли важную адаптивную функцию. Анализ сложной структуры VLF способствует дифференцированной терапии и выявлению центральных механизмов адаптации. Адаптивные функции VLF преимущественно регистрируются при ортостатической нагрузке. В предложенной модели нисходящего нейросоматического контроля вегетативной регуляции ВРС важную роль играют как собственно нейрогенные пути регуляции, так и нейрогормонально-метаболические пути, проявляющиеся в сложной структуре VLF. Рассматривается выбор путей и оптимальных моделей регуляции.

*Ключевые слова:* Сложная структура, очень низкая частота (very low frequency, VLF), нелинейная динамика, вариабельность сердечного ритма, ортостаз, синкопа, ортостатическая тахикардия, модели анализа.

## Введение

История изучения динамики медленных волновых процессов артериального давления (АД) и вариабельности ритма сердца (ВРС) связана с открытиями модуляций АД и кардиоритма дыханием [1–3], а также колебаниями с большим 10 секунд периодом [4]. Первая аппаратная регистрация этой модуляции была выполнена в 1887 году Карлом Людвигом. В дальнейшем изучение физиологической значимости этих колебаний сопровождалось спектральным фурье-анализом ВРС и многочисленными функциональными пробами. Было показано, что особенности соотношения дыхательных и 10-секундных ритмов отражают в определенной мере симпатовагальную регуляцию в организме человека на основе барорецепторного контроля. При многолетнем изучении практических приложений анализа ВРС были разработаны международные рекомендации по методике исследования [5]. В частности, было определено по крайней мере четыре частотных диапазона для оценки функционального состояния человека: 0.15...0.4 Гц – дыхательный диапазон, вагусная активность (HF); 0.05...0.15 Гц – 10-секундные ритмы, отражающие барорецепторную регуляцию (LF); а также диапазон 0.004...0.04 Гц – very low frequency (VLF) и менее 0.004 Гц – диапазон ultra-low frequency, физиологическая значимость которых была наименее изучена.

Установлено, что физические свойства диапазона VLF имеют свои особенности. В частности, при изучении фрактальных свойств ВРС было выявлено, что для диапазона очень медленных частот (меньше 0.01 Гц) соотношение амплитуды и частоты подчинялось экспоненте Херста (Hurst exponent) [6]. Угол наклона экспоненты может изменяться при различных физиологических условиях. Переход от очень медленных волновых процессов к колебаниям более быстрым в динамике ВРС рассматривался в виде мультифрактальных каскадов, так как различные части ВРС имели различные шкалированные нелинейные свойства [7].

Чаще спектр Фурье может быть использован лишь в сериях с линейными, монофрактальными характеристиками. При оценке мультифрактальных сигналов, в частности ВРС, трудности преодолеваются с помощью вейвлет-преобразования [8].

При клиническом использовании ВРС диапазон очень медленных колебаний (VLF) оказался прогностически значимым. Многочисленные исследования этого диапазона выявили большое разнообразие функций организма, которые отражаются в показателях этого диапазона [9–13], и его значимость в прогнозе смерти после инфаркта миокарда [14], в прогнозе осложнений родов [15] и внезапной смерти [16].

Важным шагом в изучении VLF была разработка классификации ВРС по энергетическим показателям, определение нормированного «коридора» variability и оценка роли этой классификации в клиническом прогнозе [13,17].

В генезе происхождения этого диапазона и отражения физиологически значимых процессов в свое время сыграли очень большую роль найденные зависимости VLF-диапазона от *терморегуляции*, концентрации *ренина-ангиотензина* [10,11]. Исследования происхождения VLF опубликованы в работе [12], в которой рассматривается парасимпатическое происхождение VLF, и в работе [18], в которой оценивается генез VLF-колебаний АД от циркулирующих катехоламинов, то есть адренергическое происхождение. Установлена связь VLF с энергодефицитными, иммунными процессами, а также кислород-зависимыми процессами, психоэмоциональными состояниями [13, 17]; определено участие VLF в адаптационных процессах после рабочей нагрузки и адаптации к изолирующим средствам индивидуальной защиты [19]. Наиболее важные исследования связывают VLF с метаболическими, иммунно-гормональными изменениями [13, 20]. В последнем десятилетии появился цикл работ по изучению взаимоотношения вегетативной регуляции ВРС и психических функций организма. В частности, найдена взаимосвязь депрессивных состояний с вегетативной депрессией ВРС в области ultra-low frequency и VLF и генетическая основа этой связи [21].

Супрасегментарная нейрогенная основа регуляции отдельными компонентами спектра ВРС показана в работах [22, 23].

Такое многообразие функций, которые отражаются в этом диапазоне, требует более подробного методического изучения. Подобная возможность появилась с использованием усовершенствованного метода быстрого преобразования Фурье (БПФ) – метода Прони, и новых – непрерывного вейвлет-анализа, преобразований Гильберта–Хуанга.

Использование этих методов дало первые предварительные результаты, указывающие на то, что LF-диапазон является двухкомпонентным [24], а диапазон VLF является двухкомпонентным [25] или трехкомпонентным [26].

Физиологическое значение свойств и нелинейного поведения динамики новых, выделенных поддиапазонов VLF ранее не изучалось.

**Цель настоящей работы** – дать характеристику сложной структуры VLF в динамике нагрузочных функциональных проб (seven-test, углубленное дыхание, ортостатическая проба) при различных энергетических уровнях ВРС и при различном нейровегетативном профиле у пациентов с вегетативными нарушениями – вегетосудистая дистония (ВСД), ортостатическая тахикардия, артериальная гипертензия – и у здоровых лиц.

## Материал и методы

Проведено исследование ста человек, включая 20 здоровых молодых женщин (возраст от 18 до 24 лет) и 56 человек с различной функциональной неврологической патологией (ВСД, ортостатическая тахикардия, нейровегетативные кризы), а также с начальными проявлениями соматических заболеваний (артериальная гипертензия).

Все обследованные лица были классифицированы по следующим признакам: с устойчивым вагусным преобладанием (HF) – 20 человек, возраст 12–30 лет; с доминированием 10-секундных ритмов (LF) – 20 человек, средний возраст 24 года; с выраженным снижением энергетики всех компонентов спектра ВРС – 12 человек, средний возраст 44.5 года. Подобное деление отражало устойчивые конституциональные или же клиничко-медленноволновые синдромологические признаки [26]. Группы сформированы из случайной выборки обследованных (1500 человек).

Регистрация ВРС проводилась по известной схеме, включающей оценку исходного состояния, функциональные пробы seven-test (обратный счет 500 – 7), отдых-1, углубленное диафрагмальное дыхание, отдых-2. Всего регистрировалось 1280 RR-интервалов кардиоциклов. Анализ ВРС включал как традиционные показатели – дисперсия, спектральные фурье-показатели БПФ с окнами Уэлча, так и нелинейные – показатели детрентного флуктуационного анализа (ДФА), аппроксимированная энтропия, фазовые портреты. Для характеристики феноменов ВРС на нагрузках также были использованы: непрерывный вейвлет-анализ и преобразования Гильберта–Хуанга. Выделялись следующие диапазоны анализируемых частот спектра ВРС для их количественной оценки:  $0.01 \pm 0.005$  Гц;  $0.02 \pm 0.005$  Гц;  $0.1 (0.08...0.12)$  Гц;  $0.15...0.35$  Гц. Диапазон в области  $0.005 \pm 0.001$  оценивался в длинных записях визуально в спектре при непрерывном вейвлет-анализе и преобразованиях Гильберта–Хуанга.

**На методическом этапе** исследования проанализирована структура волновых процессов VLF-диапазона ВРС у 20 здоровых человек молодого возраста. Используются четыре различных алгоритма спектрального анализа: фурье-анализ с окнами Уэлча, авторегрессия, непрерывный вейвлет-анализ, преобразование Гильберта–Хуанга. Получены схожие результаты, подтверждающие трехкомпонентную структуру VLF variability ритма сердца.

На рис. 1 приведены динамические частотные спектры ВРС молодой женщины 22 лет, построенные по 1024 RR-интервалам и полученные с помощью вейвлет-преобразования и преобразования Гильберта–Хуанга. Трехкомпонентный спектр VLF хорошо визуально просматривается как при анализе с помощью преобразования Гильберта–Хуанга (рис. 1, а), так и при вейвлет-анализе (рис. 1, б).

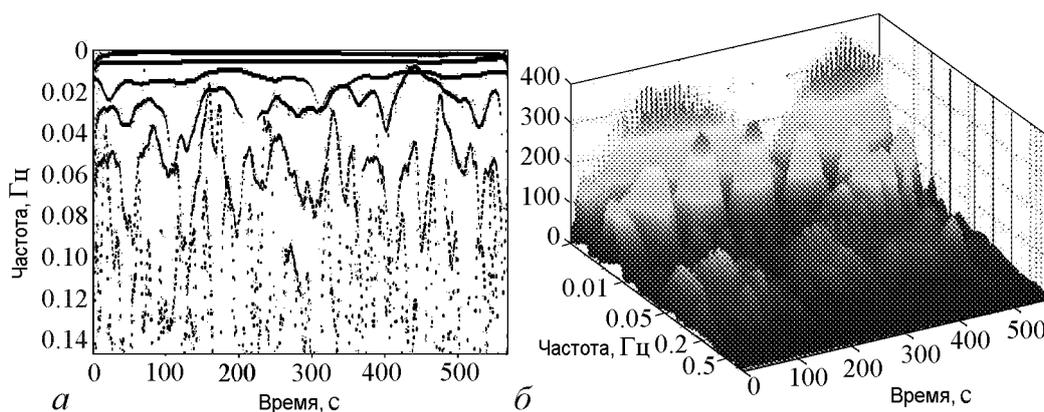


Рис. 1. Динамический частотный спектр ВРС молодой женщины (ШВД, 22 года, 1024 RR-интервала): а – преобразования Гильберта–Хуанга, б – спектральный вейвлет-анализ. Хорошо видны устойчивые колебания на частоте 0.01...0.02 Гц

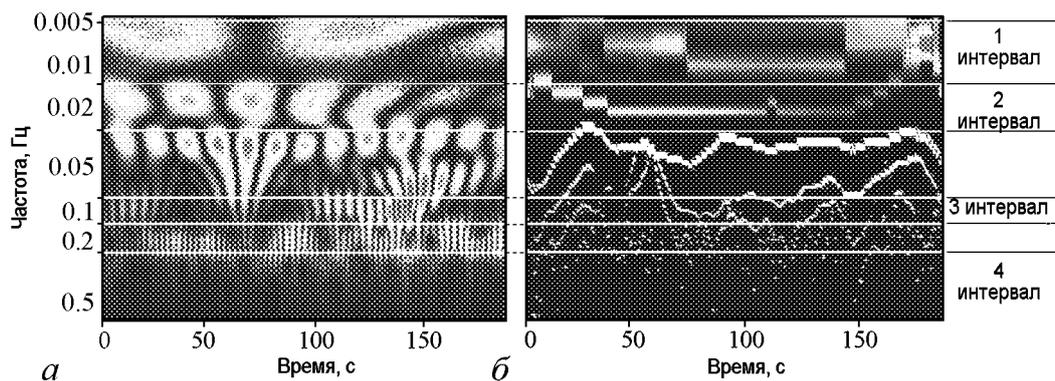


Рис. 2. Спектральная 4-компонентная структура ВРС с выделенными интервалами:  $0.01 \pm 0.005$  Гц – 1 интервал;  $0.02 \pm 0.005$  – 2 интервал; ... от 0.2 Гц и выше – 4 интервал

Непрерывное вейвлет-преобразование имеет следующий вид:

$$Wf(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi_{a,b} \left( \frac{t-b}{a} \right) dt. \quad (1)$$

Таким образом,  $Wf(a, b)$  содержит информацию о временных (или пространственных) и частотных свойствах сигнала одновременно (рис. 2, а).

При визуализации результатов вейвлет-анализа по горизонтальной оси отложено время, в течение которого регистрировалась ритмограмма, по вертикальной оси отложена псевдочастота в герцах, соответствующая масштабирующей переменной  $a$  вейвлета, а цвет области как раз и определяется значениями коэффициентов  $Wf(a, b)$ .

Преобразование Гильберта–Хуанга (ННТ) представляет собой сначала декомпозицию сигнала на так называемые эмпирические моды (EMD – empirical mode decomposition), а затем нахождение спектра Гильберта (HSA). ННТ – это частотно-временной анализ данных, особенностью которого является то, что он не требует *априорного* функционального базиса. Базисные функции получаются непосредственно из данных. Спектр представляется в частотно-временной области.

Результаты анализа области VLF с использованием преобразования Гильберта–Хуанга аналогичны результатам, полученным с использованием вейвлетов. Здесь также по горизонтальной оси отложено время, по вертикальной оси – значения частот, присутствующих в спектре (рис. 2, б).

Таким образом, колебательные процессы в области 50, 100 и 200 секунд в диапазоне VLF (от 0.004 до 0.04 Гц) отдельно регистрировались при сравнительном использовании фурье-анализа, авторегрессии, непрерывного вейвлет-анализа и преобразований Гильберта–Хуанга, а также в выборках длительностью 250, 500 и 1000 кардиоинтервалов.

**Физиологические аспекты исследования отдельных компонентов VLF** были сопряжены с оценкой особенностей функционирования новой структуры VLF, а именно 50- и 100-секундных колебаний, на функциональных пробах и в сопоставлении с 10-секундными и дыхательными ритмами. Нами дана сравнительная характеристика этих компонентов в трех группах пациентов: первая – с доминированием парасимпатической активности – HF, вторая группа с доминированием LF и третья группа – с выраженным снижением энергетичности всех компонентов спектра, особенно HF.

Первые две группы – это группа здоровых подростков 10–12 лет и группа молодых женщин 18–22 лет с функциональными изменениями нервной системы. Устойчивость нейровегетативного профиля в этих группах определялась по устойчивости частотно-амплитудного доминирования LF или HF в условиях функциональных проб малой интенсивности. Генетический источник этой устойчивости ранее описан [27].

Десятисекундные колебания (LF) часто рассматриваются как показатель симпатoadреналовой активации барорецепторного контроля. Дыхательные колебания (HF), как правило, рассматриваются как показатель вагусной активности. Их соотношение определяется как показатель симпатовагального равновесия.

Дальнейшие исследования свойств отдельных компонентов VLF (100- и 50-секундных колебаний), динамики их амплитудных значений (рСПМ) и соотношения 50- и 100-секундных колебаний нами было рассмотрено во взаимодействии с другими компонентами спектра ВРС: 10-секундными и дыхательными колебаниями (P3, P4). Третья группа лиц – с низкими показателями мощности всех составляющих ВРС – 23 человека. Средний возраст в этой группе – 43 года. Наблюдались по поводу артериальной гипертензии и вегетативных нарушений.

Особенности кардиотахограмм, их спектральных характеристик и фазовых портретов в трех группах представлены на рис. 3 и 4; зарегистрированы исходные значения ВРС в спокойном бодрствующем состоянии.

На рис. 3 и 4 представлены примеры из трех выборок лиц, у которых был проведен анализ особенностей ВРС и структуры VLF спектра. На рис. 3, *а* – показатели типичного представителя доминирования 10-секундных ритмов LF (18 человек). Здоровый испытуемый А-н, 23 года, с неблагоприятной наследственностью по артериальной гипертензии. Доминируют в спектре 10-секундные ритмы на частоте 0.08 Гц. Фазовый портрет по типу странного аттрактора не меняет своего рисунка на функциональных пробах. Соседние диапазоны частот (VLF100, VLF50 и HF) были более низкой амплитуды. При этом типе доминирования 10-секундных ритмов

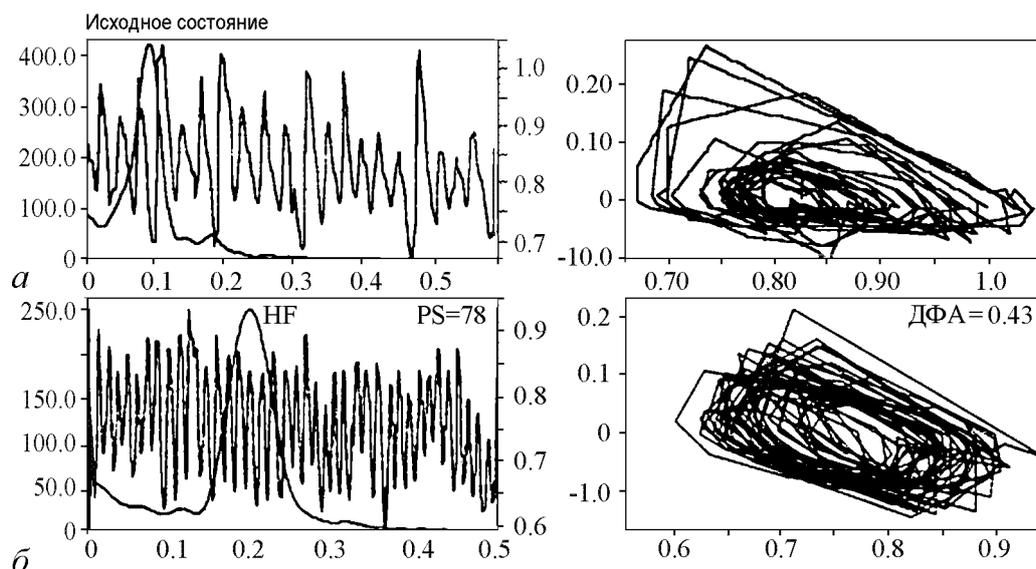


Рис. 3. Два типа ВРС: *а* – с доминированием 10-секундных ритмов (LF-P3) – 18 человек, *б* – с доминированием дыхательных ритмов (HF-P4) – 20 человек

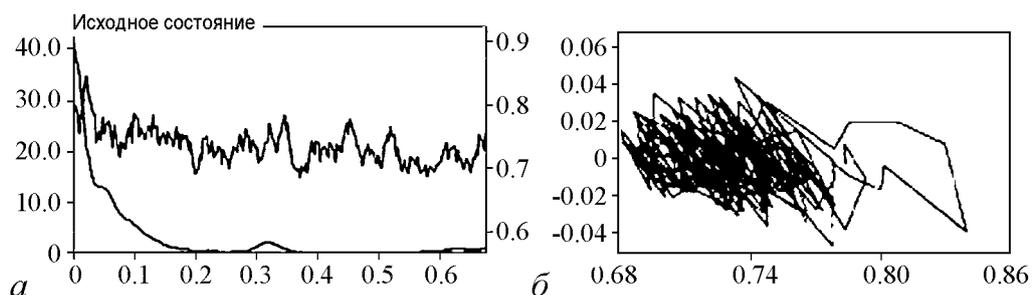


Рис. 4. Тип ВРС, характеризующих группу лиц с низкими показателями мощности всех компонентов ВРС – 23 человека

ранее отмечено влияние VLF на амплитудные значения 10-секундных ритмов [28]. На рис. 3, б – показатели типичного представителя группы лиц с преобладанием парасимпатической активности. Высокий уровень высокочастотных компонентов (HF) и устойчивых циклических типов фазовых портретов. Низкий показатель ДФА. При этом сохраняется в структуре VLF преобладание 100-секундных колебаний, однако часто регистрируются противоположные – реципрокные изменения на функциональные пробы между колебаниями с периодом 100 и 50 секунд. Клинический аспект связан с урежением пульса и низким АД. На рис. 4 – показатели представителя группы энергодефицитных ВРС (24 человека, средний возраст 43 года). Группа характеризуется клиническими патологическими состояниями, в частности, артериальной гипертонией. Низкая реактивность на функциональные пробы. Спектры ВРС характеризуются следующими показателями: для VLF – ниже  $40 \text{ мс}^2/\text{Гц}$ ; для LF – ниже  $15\text{...}20 \text{ мс}^2/\text{Гц}$ ; для HF – ниже  $15 \text{ мс}^2/\text{Гц}$ . В клинической картине часто регистрируются нарушения жирового, углеводного обменов, признаки тканевой гипоксии.

Следующий этап исследования был связан с изучением свойств спектров ВРС и структуры VLF в выделенных выше трех группах лиц. Сравнительные исследования структуры VLF (VLF100 и VLF50) в сочетании с LF и HF спектров ВРС в трех группах проводились на основе пятиэтапной методики с двумя функциональными пробами низкой интенсивности (seven-test, углубленное произвольное дыхание). Результаты сравнительных исследований представлены на рис 5.

На рис. 5, а хорошо видно, что наиболее энергетически высокие характеристики структуры спектра ВРС присущи лицам с парасимпатическим преобладанием. В группе с доминированием 10-секундных ритмов (LF-P3), отмечаются сниженные показатели P1, P2 и P4. В группе с низкими показателями энергетики спектра преобладают по мощности 100-секундные колебания.

Центральные показатели регуляции в виде отношения P2/P1 отличаются относительно низкой реактивностью на функциональные пробы малой интенсивности и постоянством соотношений близким к 0.5. При этом отмечается большее разнообразие изменений периферических вегетативных компонентов – P3 и P4.

При анализе средних значений пульса и АД в трех исследованных группах, высокая частота пульса наблюдается в группе с барорецепторной дисфункцией (рис.5, б, P3), а наиболее высокие цифры АД наблюдаются в так называемой группе энергодефицита (рис.5, в), отличающейся старшим возрастом и сопутствующей сосудистой патологией (артериальная гипертония).

Таким образом, анализ структуры VLF в группах с устойчивыми вегетативными сдвигами на периферии показал определенную устойчивость соотношений

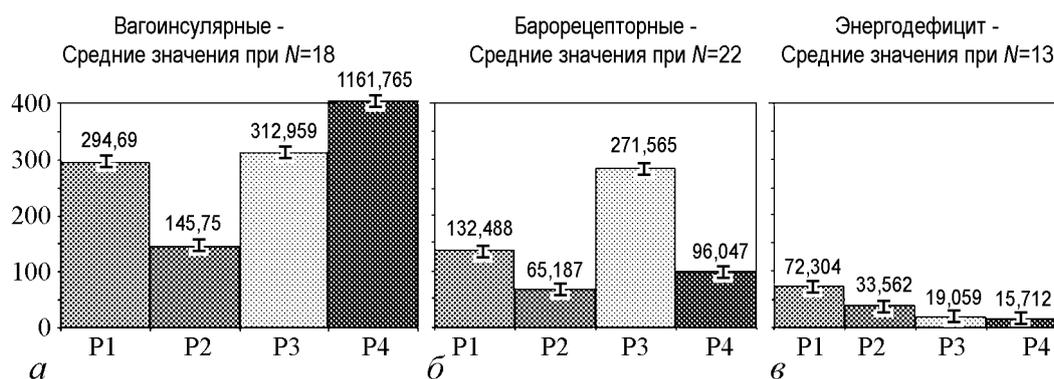


Рис. 5. Средние значения 4-компонентных спектров ВРС у лиц с доминированием HF и выраженным снижением энергетики колебаний. P1 – VLF100, P2 – VLF50, P3 – LF, P4 – HF

50/100 сек и независимость этого соотношения в полярных группах с симпатическим или парасимпатическим доминированием. При умственной нагрузке наблюдаются реципрокные изменения с одной стороны между этими показателями (50 и 100 сек), а также в ряде случаев с периферическими показателями ВНС: 10-секундных и дыхательных ритмов.

На основе полученных данных (рис. 5), видно что VLF и ее составляющие 100- и 50-секундные колебания в трех группах различались преимущественно амплитудными значениями, снижая мощность колебаний от парасимпатического доминирования к 10-секундным ритмам и далее к группе энергодефицита. В то же время показатели соотношения колебаний 50/100 (P2/P1) оставались устойчивыми и не зависели от симпатовагальных соотношений на периферии в ВНС (HF/LF или P4/P3).

### Клинические приложения потенциальных возможностей использования новой структуры спектра ВРС и, в частности, VLF. Исследования лиц с ортостатической тахикардией [29]

Рассмотрим динамику VLF, ее структуру при ортостатической пробе у лиц с ортостатической тахикардией (Postural Orthostatic Tachycardia Syndrome – POTS) в сравнении с группой лиц с нормальными показателями. Ортостатическая тахикардия или ортостатическая неустойчивость встречается часто. Характеризуется выраженным учащением пульса (прирост больше 30 уд/мин. или же пульс выше 125 уд/мин.) при изменении положения тела из горизонтального в вертикальное. Эти изменения сопровождаются головокружениями и реже обмороками. Для сравнения нами были взяты две группы лиц молодого возраста: 20 человек с ортостатической тахикардией и 20 человек с нормальной реакцией на ортостаз. Изменения средних показателей структуры спектра ВРС на ортостаз в обеих группах представлены на рис. 6.

На рис. 6 хорошо видно, что тахикардия развивается при депрессии P1 и P2 (100- и 50-секунные колебания) при устойчиво высоком P3 и значительно сниженном P4. Адаптация к ортостазу у лиц с нормальными показателями пульса происходит при выраженном увеличении P1 (VLF100), снижении P3 (LF) и умеренном снижении P4 (HF). В противоположность группе лиц с ортостатической тахикардией при нормальной реакции на ортостаз происходит увеличение мощности 100-секундных колебаний в 1.5...3.0 раза от исходного значения. Может быть незначительное увеличение (или даже уменьшение) мощности 50-секундных колебаний.

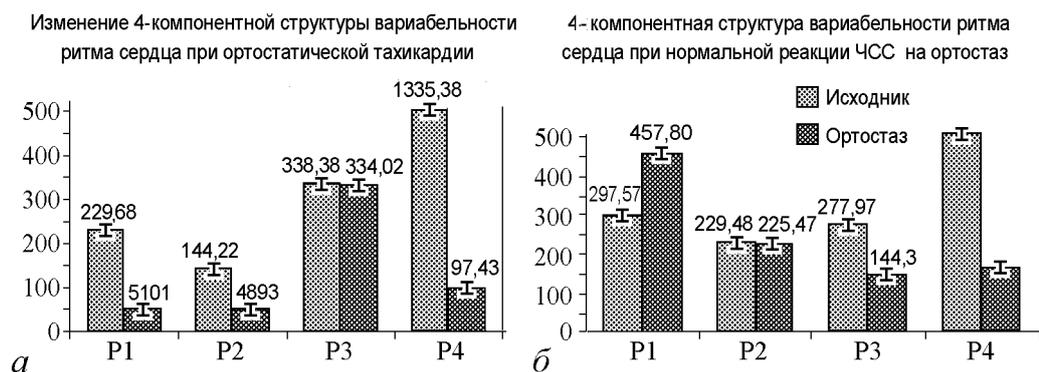


Рис. 6. Сравнительные средние данные изменений 4-компонентного спектра ВРС при ортостатической пробе у лиц, формирующих ортостатическую тахикардию (20 чел.) и при ее отсутствии (20 чел.). Представлены средние исходные значения 4-компонентной структуры ВРС в положении лежа (левые, светлые столбцы) и в вертикальном положении ортостаза (правые, темные столбцы)

Нет доминирования LF (10-секундных ритмов) на этом фоне и умеренно снижены дыхательные ритмы.

Таким образом, адаптация к нагрузке у лиц с нормальными значениями пульса в данной группе происходит при увеличении мощности, прежде всего, 100-секундных колебаний и нелинейных изменений сопутствующих значений 50-секундных колебаний или колебаний, отражающих периферические компоненты вегетативной нервной системы – 10-секундных колебаний и дыхательных ритмов.

Падение амплитуды VLF (VLF100, VLF50) параллельно с выраженным снижением мощности HF при ортостатической тахикардии можно расценить как индикатор энергодифицитного состояния. Это предположение подтверждается многочисленными исследованиями, установившими снижение VLF при различных клинических и физиологических моделях нарушений жирового и углеводного обмена при ожирении, сахарном диабете второго типа. Установлена важная роль лептинов и аркообразного ядра гипоталамической области центральной нервной системы (ЦНС) в метаболизме углеводов [30].

Обращает также внимание, что в группе с ортостатической тахикардией переход из положения лежа в вертикальное положение сопровождается не только учащением ЧСС, но и характерным изменением фазовых портретов ВРС. При этом на доминирующей частоте 10 Гц появляются *предельные циклы* в отличие от исходных хаотических (стохастических) фазовых портретов, то есть ВРС упорядочивается, что соответствует определенному уровню напряжения (рис. 7). Эти изменения указывают на усиление или более тесную связь кардиодинамики и дыхания с центрами регуляции ЦНС при ортостазе.

В другой сравниваемой группе лиц, где при ортостазе нет выраженного учащения сердечных сокращений, наблюдается увеличение 100-секундных колебаний, отсутствует повышение LF, и рисунок фазового портрета до и во время нагрузки остается прежним, чаще хаотическим.

Адаптивные функции VLF при ортостатической пробе у лиц с отсутствием тахикардии подтверждают ранее найденное участие VLF в феноменах адаптации у лиц в восстановительном периоде – у рабочих-металлургов после ночных смен, а также аналогичные адаптивные реакции VLF при использовании изолирующих средств индивидуальной защиты у горноспасателей [26].

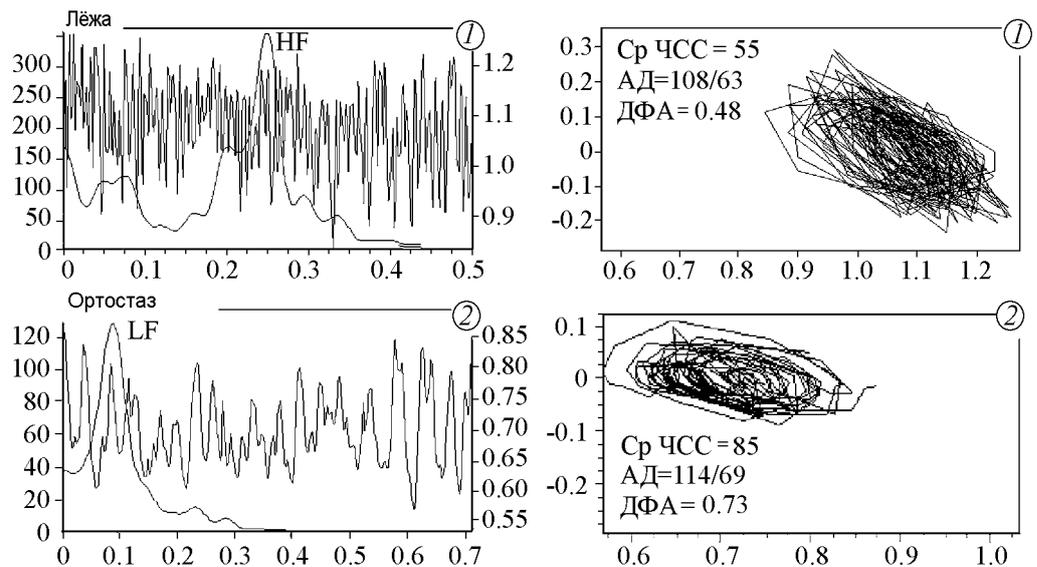


Рис. 7. Пациент И-ов, 16 лет. Диагноз: ВСД, синкопы, ортостатическая тахикардия. Динамика кардиограммы, спектров Фурье и фазовых портретов в исходном состоянии лежа и в вертикальном положении (ортостаз). При ортостазе: развивается депрессия HF и VLF100, появляется доминирование 10-секундных ритмов (LF). Исходно хаотический фазовый портрет сменяется предельно-циклическим типом. Показатель ДФА отражает переход от парасимпатического преобладания к симпатикотонии

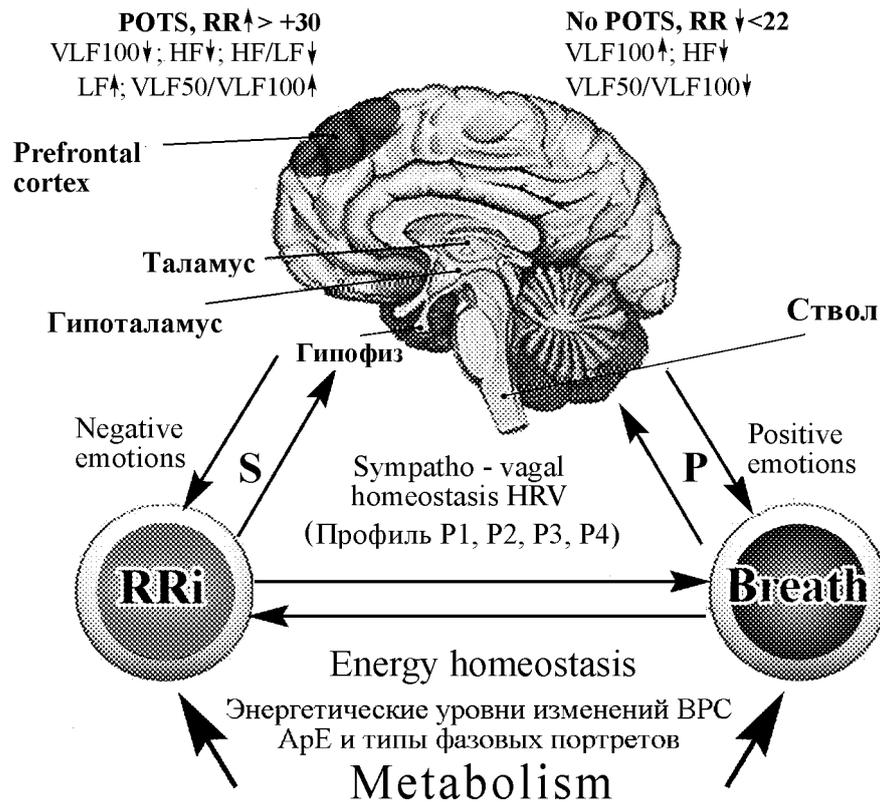


Рис. 8. Модель нейросоматических взаимоотношений, развивающихся при ортостатической пробе у лиц с ортостатической тахикардией и при ее отсутствии. Примечание: POTS – синдром постуральной ортостатической тахикардии, S – симпатическая активация, P – парасимпатическая активация, АрЕ – аппроксимированная энтропия.

Найденная взаимосвязь нейрогенных механизмов регуляции ВРС и особенностей ее спектральной структуры с энергетическими процессами в организме у здоровых и при нейросоматической патологии (ортостатическая тахикардия) может быть представлена в виде нейросоматической модели (рис. 8).

Представлено два полярных изменения ВРС и ее регуляции. Левая половина – механизмы развития ортостатической тахикардии при преобладании симпатической нервной системы: POTS – тахикардия, прирост пульса свыше 30 уд/мин. сопровождается падением 100-секундных и дыхательных колебаний и их отношения при одновременном доминировании 10-секундных колебаний. Правая половина – адаптивные процессы, препятствующие тахикардии: No POTS, прирост пульса менее 22 уд/мин. при значительном повышении VLF100, при умеренном снижении LF и HF.

### Заключение

Сложность в интерпретации спектрального диапазона ВРС очень медленных колебаний (VLF от 0.004 до 0.04 Гц) проявлялась в многообразии физиологических свойств, присущих этому диапазону. На основании сравнительной оценки результатов исследований этого диапазона с помощью вейвлет-анализа, преобразований Гильберта–Хуанга были обнаружены три отдельных компонента или три колебательных процесса в составе VLF (VLF50, VLF100, VLF200).

Подобное разделение спектра 10-секундных ритмов (LF от 0.05 до 0.15 Гц) на два компонента было найдено в работе [24] без оценки их свойств.

Первые результаты оценки свойств или поведения 50- и 100-секундных колебаний на функциональных пробах малой интенсивности показали, что между 50- и 100-секундными колебаниями часто регистрируются реципрокные изменения, а также непропорциональное увеличение или уменьшение мощности на нагрузку. Коэффициент отношения 50- и 100-секундных колебаний сохранял удивительную устойчивость как при симпатикотонических или парасимпатических профилях, так и при энергодефицитных изменениях.

Изучение структуры VLF было продолжено на клиническом примере лиц с ортостатической тахикардией. Было найдено, что у лиц с высокой реактивностью ЧСС тахикардия развивается при значительном снижении VLF100 и менее выраженном изменении VLF50. В то же время у лиц с нормальной реакцией на ортостаз отмечалось значительное усиление 100-секундных колебаний в составе диапазона VLF. Роль VLF в адаптивных реакциях на ортостаз подтверждает ранее отмеченное увеличение мощности VLF в адаптивных процессах организма в восстановительном периоде после ночных смен у рабочих-металлургов и при использовании изолирующих средств индивидуальной защиты у горноспасателей. По-видимому, VLF отражает центральные механизмы вегетативной регуляции и адаптации и представляет значительный интерес как в интегральном, так и в структурном виде.

Разделение VLF на три компонента, часто имеющих разное нелинейное поведение, требует дальнейшего изучения, не столько отдельно от других компонентов спектра ВРС, но, прежде всего, в их взаимосвязи с точки зрения *медленноволнового гомеостаза*, а также в соответствии с общим состоянием организма.

Таким образом, впервые установлены отдельные новые компоненты спектра

VLF – VLF50 и VLF100 – и их реципрокные взаимоотношения. Высокий уровень VLF100, появление предельных циклов в фазовом портрете ВРС, снижение LF при переходе в вертикальное положение предупреждает развитие ортостатической тахикардии. Новая структура VLF позволяет с физиологических позиций анализировать этот частотный спектральный диапазон на основе центральных механизмов адаптации автономных нарушений. Диапазон VLF суммарно отражает центральные адаптивные механизмы ЦНС и представляет собой сложную трехкомпонентную структуру, несущую симпатическую, парасимпатическую и метаболическую составляющие. Посредством механизмов обратной связи VLF влияет на периферические компоненты спектра ВРС. Компоненты VLF50 и VLF100 могут изменяться реципрокно, влиять на компенсацию (или декомпенсацию) ортостатической тахикардии и учитываться в стратегии лечебного процесса.

Новая спектральная структура ВРС открывает новые перспективы в изучении функций вегетативной нервной системы и ее использования для диагностики и профилактики социально значимой нейросоматической патологии и возрастных изменений.

### Библиографический список

1. *Ludwig C.* Beiträge zur Kenntnis des Einflusses der Respirations bewegungen auf den Blutlauf im Aortensysteme // Arch. Anat. Physiol. Wiss. Med (Müller Arch) 1847. P. 242.
2. *Traube L.* Überperiodische Thätigkeits–Ausserungen des vasomotorischen und Hemmungs–Nervenzentrums // Centrablatt Med. Wiss. 1865. Vol. 56. P. 880.
3. *Hering E.* Über den Einfluss der Athmung auf den Kreislauf. I. Mitteilung: Über Athembewegung – gen des Gefäßsystems // Sber Akd Wiss Wien Math-naturwiss Klasse 2. Abteilung 60. 1869. P. 829.
4. *Mayer S.* Studein zur Physiologie des Herzens und der Blutgefäße: V: Über spontane Blutdruckschwankungen // Sber Akd Wiss. Wien. 1876. Vol. 74. P. 281.
5. Heart Rate Variability. Standards of Measurement, Physiological Interpretation, and Clinical Use / Task Force of the European Society of Cardiology the North American Society of Pacing Electrophysiology // Circulation. 1996. Vol. 95, № 5. P. 1043.
6. *Yamamoto Y., Kiyono K., Struzik Z.R.* Measurement, analysis, and interpretation of long-term heart rate variability // Filtration & Separation, 2004; Annual Conference, Vol. 3.
7. *Ivanov P. Ch., Amaral L. A. N., Goldberger A. L., Havlin Sh., Rosenblum M. G., Stanley H. E., Struzik Z. R.* From 1/f noise to multifractal cascades in heartbeat dynamics // Chaos. 2001. Vol. 11, № 3.
8. *Ivanov P. Ch., Amaral L. A. N., Goldberger A. L., Havlin Sh., Rosenblum M. G., Struzik Z. R. & Stanley H. E.* Multifractality in human heartbeat dynamics // Nature. 1999. Vol. 399. P. 461.
9. *Sayers B. Mc A.* The analysis of heart rate variability // Ergonom. 1973. Vol. 16. P. 85.
10. *Akselrod S., Gordon D., Ubel F.A., Shannon D.C., Berger A.C., Cohen R.J.* Power spectrum analysis of heart rate fluctuation: a quantitative probe of beat-to-beat cardiovascular control // Science. 1981. Vol. 213. P. 220.
11. *Akselrod S., Gordon D., Madwed J.B. et al.* Hemodynamic regulation: investigation

- by spectral analysis // *Am. J. Physiol.* 1985. Vol. 249. P. 867–875.
12. *Taylor J.A., Carr D.L., Myers C.W., Eckberg D.L.* Mechanisms underlying very-low-frequency RR-interval oscillations in humans // *Circulation.* 1998. Vol. 98, № 6. P. 547.
  13. *Флейшман А.Н.* Медленные колебания гемодинамики. Теория, практическое применение в клинической медицине и профилактике. Новосибирск: Изд-во «Наука», 1999.
  14. *Kleiger R.E., Miller J.P., Bigger J.T., Moss A.J., and the Multicenter post-infarction research group.* Decreased heart rate variability and its association with increased mortality after acute myocardial infarction // *Am. J. Cardiol.* 1987. Vol. 59. P. 256.
  15. *Клещенко С.А., Флейшман А.Н.* Изучение патофизиологических особенностей развития беременности у здоровых женщин с различной спектральной мощностью вариабельности ритма сердца, показателями системной гемодинамики и массой тела // *Инженеринг в медицине: колебательные процессы гемодинамики. Пульсация и флюктуация сердечно-сосудистой системы.* Сб. науч. тр. Симпоз. 30 мая – 1 июня 2000. Челябинск. 2000. С.120–128.
  16. *Zuanetti G., Neilson J.M.M., Latini R., Santoro E., Maggioni A. P., Ewing D.J.* Prognostic significance of heart rate variability in post-myocardial infarction patients in the fibrinolytic era // *Circulation.* 1996. Vol. 94. P. 432.
  17. *Флейшман А.Н.* Энергодефицитные состояния, нейровегетативная регуляция физиологических функций и вариабельности ритма сердца. Теоретические и прикладные аспекты нелинейной динамики в физиологии и медицине // *Материалы IV всероссийского симпозиума с международным участием и II школы-семинара. Медленные колебательные процессы в организме человека.* Новокузнецк 24–27 мая 2005. Стр. 10–19.
  18. *Radaelli A., Castiglioni P., Centola M., Cesana F., Balestri G., Ferrari A. U., Di Rienzo M.* Adrenergic origin of very low frequency blood pressure oscillations in the unanesthetized rat // *Am. J. Physiol.* 2006. Vol. 290. P. 357.
  19. *Флейшман А.Н., Шумейко Н.И., Карпенко С.В., Син А.Ф., Дингес В.Р., Голлик А.С., Анпилогов К.А.* Нейровегетативные аспекты адаптации горноспасателей к изолирующим средствам индивидуальной защиты. 15–18 мая 2007. Новокузнецк. // *Материалы V всероссийского симпозиума с международным участием и III школы-семинара. Медленные колебательные процессы в организме человека. Теоретические и практические аспекты нелинейной динамики в физиологии и медицине.* 2007. Стр. 164–174.
  20. *Григорьев Е.В., Слепушкин В.В., Мулов А.Д.* Метаболические аспекты вариабельности сердечного ритма у больных в критическом состоянии // *В сб. Медленные колебательные процессы в организме человека. Теория. Практическое применение в клинической медицине и профилактике. Труды II симпозиума.* Новокузнецк, 1999. С. 126–130.
  21. *Su Sh., Lampert R., Lee F., Douglas B. J., Snieder H., Jones L., Murrah N.V., Goldberg J. and Vaccarino V.* Common genes contribute to depressive symptoms and heart rate variability // *Twin Res. Hum. Genet.* 2010. Vol. 13, №1. P. 1.
  22. *Thayer Ju. F., Ehs F., Fredrikson M., Sollers J.J., Wager T.D.* A meta-analysis of heart rate variability and neuroimaging studies: Implications for heart rate variability as a marker of stress and health // *Neuroscience and Biobehavioral Reviews.* 2012.

Vol. 36. P. 747.

23. *Thayer Ju. F., Lane R.D.* Claude Bernard and the heart–brain connection: Further elaboration of a model of neurovisceral integration // *Neuroscience and Biobehavioral Reviews* 2009. Vol. 33, № 2. P. 81.
24. *Kuusela T.A., Kaila T.J. and Kähönen M.* Fine structure of the low-frequency spectra of heart rate and blood pressure // *BMC Physiology*. 2003. Vol. 3, № 11.
25. *Togo F., Kiyono K., Struzik Z.R., Yamamoto Y.* Unique very low-frequency heart rate variability during deep sleep in humans // *IEEE Trans Biomed.* 2006. Vol. 53, № 1. P. 28.
26. *Флейшман А.Н.* Вариабельность ритма сердца и медленные колебания гемодинамики. Нелинейные феномены в клинической практике. 2-е изд. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2009.
27. *Герус А.Ю., Флейшман А.Н.* Возрастно-зависимые вегетативные изменения у лиц с отягощенной наследственностью по сахарному диабету второго типа // *Вестник НГУ. Медицина*. Новосибирск. 2008. Т. 6, вып. 3. С. 97.
28. *Постнов Д.Э., Щербаков П.А., Флейшман А.Н.* Использование адаптивного вейвлет-фильтра для анализа изменения структуры при нагрузках малой интенсивности. 24–27 мая 2005 // *Материалы IV всероссийского симпозиума с международным участием и II школы-семинара. Медленные колебательные процессы в организме человека. Теоретические и прикладные аспекты нелинейной динамики в физиологии и медицине*. Новокузнецк. 2005. С. 103.
29. *Raj S. R., Levine B.D.* Postural Tachycardia Syndrome (POTS) Diagnosis and Treatment: Basics and New Developments // *Cardiac Rhythm Management*, 2013.
30. *Morton G.J., and Schwartz M.W.* Leptin and the CNS Control of Glucose Metabolism // *Physiol. Rev.* 2011. Vol. 91, № 2. P. 389.

Поступила в редакцию 26.12.2013

### COMPLEX STRUCTURE AND NONLINEAR BEHAVIOR OF VERY LOW FREQUENCY OF HEART RATE VARIABILITY: MODEL OF ANALYSIS, AND PRACTICAL APPLICATIONS

*A.N. Fleishman,<sup>1</sup> T.V. Korablina,<sup>2</sup> S.A. Petrovsky,<sup>1</sup> I.D. Martynov<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> FSBI «Research Institute for Complex Problems of Hygiene and Occupational Diseases» SB RAMS

<sup>2</sup> Siberian State industrial University, Novokuznetsk

Researched the structure of Very Low Frequency (VLF) spectrum of heart rate variability (HRV) and its nonlinear behavior in a relationship with the energy of oscillations, baroreflex and parasympathetic activity at functional tests of low intensity in 100 subjects (seven-test, deep breathing), including active orthostatic test of 32 subjects with orthostatic tachycardia in comparison to the control group of 20 subjects.

There were three stages of research. *The first stage*: created the method of spectral analysis of separate components of VLF. On the basis of comparative data of Fast Furrier

Transform with Welch filters, autoregression, continuous wavelet analysis and Hilbert–Huang transform, for the first time it was shown that VLF has separate 200, 100 and 50 sec oscillations (VLF200, VLF100, VLF50). *The second stage:* for evaluation of physiological properties of the separate oscillations, was conducted the analysis of VLF structure in three groups of patients: (a) with a predominance of parasympathetic activity (HF) in the VLF spectrum, (b) with a dominance of 10 sec oscillations (LF), (c) with a severe depression of energy in all components of the spectrum. It was established that the individual components of VLF (VLF100 and VLF50) have a certain stability and partial independence from the changes of peripheral autonomic indices (LF/HF) at loads of low intensity. *The third stage:* analyzed features of VLF structure (VLF100 and VLF50) alone and in a conjunction with LF and HF, as well as heart rate and blood pressure in humans with orthostatic tachycardia with a predominance of parasympathetic activity at functional tests of low intensity (seven-test deep breathing) and at an active orthostatic test. Based on these studies it was concluded that the individual components in VLF structure (VLF100, VLF50) can demonstrate reciprocal relations at a load among themselves and in the LF/HF ratio, and play an adaptive role in the mechanisms of autonomic provision. Previously found regularities that are characteristic for the subjects with orthostatic tachycardia in the form of high-level LF turned out to be insufficient for the prognosis. Revealed the importance of VLF and its components, 100 and 50 sec oscillations at an orthostatic test in the prognosis of orthostatic tachycardia development. In 35% of patients with dysautonomia at high level of VLF100 power, tachycardia did not develop. In this case, VLF and its component parts did an important adaptive function. The analysis of a complex VLF structure contributes to the differential treatment and detection of central mechanisms of adaptation. Adaptive VLF functions were mainly registered at orthostatic load. In the proposed model of the descending neurosomatic control of autonomic regulation of HRV a very important role plays both neurogenic ways of regulation, and neuro-hormonal-metabolic ways, manifested in the complex VLF structure. Regarded the choice of ways and optimal models of regulation.

*Keywords:* Complex structure, very low frequency, nonlinear dynamics, heart rate variability, disautonomia, orthostasis, syncope, orthostatic tachycardia, models of analysis.

*Арнольд Наумович Флейшман* – родился в Омске (1937). Окончил Омский медицинский институт (1960). Защитил кандидатскую диссертацию в Институте нейрохирургии им. Бурденко АМН (Москва, 1972), посвященную нейрофизиологической диагностике родовой черепно-мозговой травмы. С 1973 года – старший научный сотрудник Новосибирского НИИТО. В 1977 году организовал и возглавил лабораторию прикладной физиологии НИИ КПГПЗ СО РАМН. Защитил докторскую диссертацию, посвященную медленным колебательным процессам гемодинамики (2000). Под руководством А.Н. Флейшмана выполнено 6 крупных научных исследовательских тем СО АМН, результаты одной из которых получили всесоюзное внедрение. Автор более 180 печатных работ, в том числе 2 монографии, 6 патентов.



Заслуженный деятель науки и образования РАЕ, невролог, эпилептолог, доктор медицинских наук, профессор, руководитель лаборатории физиологии медленных волновых процессов. Член международного общества «Society for Chaos Theory on Psychology and Life Sciences» (с 2011 года).

Участник международных конференций, симпозиумов в Праге (Чехия), Комо (Италия), Йена и Берлин (Германия), Белград (Сербия). Под руководством А.Н. Флейшмана защищено 3 кандидатские диссертации и готовится

к защите еще 3 кандидатские и одна докторская. Является организатором 6 всероссийских конференций с международным участием, посвященных медленным колебательным процессам в организме человека и теоретическим и практическим аспектам нелинейной динамики в физиологии и медицине. В 2004 году решением Коллегии экспертов Американского биографического института А.Н. Флейшман признан ЧЕЛОВЕКОМ ГОДА-2004. Научная биография внесена в издание Professional Contemporary Who's who 2004–2005 гг., в издании этого же института. 2007 – Международная награда: Золотая медаль для России Флейшману А.Н. за вклад в международное сотрудничество и научные достижения (февраль 2007, Американский Биографический Институт).

654 007 Кемеровская область, Новокузнецк, ул. Кутузова, 23  
НИИ комплексных проблем гигиены  
и профессиональных заболеваний СО РАМН  
E-mail: anf937@mail.ru  
Сайт: www.ndfm.ru

*Кораблина Татьяна Валентиновна* – окончила Новосибирский электротехнический институт (1987). Один год работала в Институте теоретической и прикладной механики СО РАН СССР. С 1988 года по настоящее время работает в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального обучения «Сибирский государственный индустриальный университет» на кафедре систем информатики и управления. В 1998 году защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук «Имитация и прогноз рядов данных с многовариантной динамикой при автоматизации металлургических объектов», в 2001 году присвоено ученое звание доцента. Автор более 70 научных и 33 учебно-методических работ.



654 007 Кемеровская область, Новокузнецк, ул. Бардина 25  
СибГИУ, Сибирский государственный индустриальный университет  
E-mail: kortv07@bk.ru  
Сайт: www.sibsiu.ru

*Петровский Станислав Альфредович* – родился в Новокузнецке (1987), окончил Санкт-Петербургский институт внешнеэкономических связей экономики и права (2010), после окончания ИВЭСЭП работает младшим научным сотрудником в НИИ комплексных проблем гигиены и профессиональных заболеваний СО РАМН. Участник международного симпозиума по нейрокардиологии: Neurocard – 2013 (Сербия).



654 007 Кемеровская область, Новокузнецк, ул. Кутузова, 23  
НИИ комплексных проблем гигиены  
и профессиональных заболеваний СО РАМН  
E-mail: staspetrovskiy@yandex.ru  
Сайт: www.ndfm.ru

*Мартынов Илья Дмитриевич* – родился в Прокопьевске (1985). Окончил Алтайский государственный медицинский университет (2008). После окончания АМГУ продолжил обучение в клинической ординатуре НИИ комплексных проблем гигиены и профессиональных заболеваний СО РАМН по специальности «неврология», с 2011 года обучается в аспирантуре по специальности «гигиена». Опубликовал ряд научных статей, касающихся патогенеза нейрогенных обмороков.



654 007 Кемеровская область, Новокузнецк, ул. Кутузова, 23  
НИИ комплексных проблем гигиены  
и профессиональных заболеваний СО РАМН  
E-mail: mart-nov@yandex.ru  
Сайт: www.ndfm.ru



## ЛОКАЛЬНАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. С. Кащенко<sup>1</sup>, С. А. Кащенко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

<sup>2</sup> Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Исследуется локальная – в окрестности нулевого состояния равновесия – динамика разностных и сингулярно возмущенных дифференциально-разностных систем уравнений. Критические случаи в задаче об устойчивости этого состояния равновесия имеют бесконечную размерность. Построены специальные нелинейные эволюционные уравнения, которые играют роль нормальной формы. Показано, что их динамика определяет поведение решений исходной системы.

*Ключевые слова:* Квазинормальная форма, запаздывание, разностное уравнение, дифференциально-разностное уравнение.

### 1. Введение

Нелинейные разностные и дифференциально-разностные системы уравнений служат математическими моделями многих прикладных задач. В этом плане особо можно отметить модели в областях радиоэлектроники, нейронных сетей, клеточных автоматов и т. д. Одним из базовых объектов в теории разностных систем уравнений являются системы вида

$$u_n = (A + \varepsilon B)u_{n-1} + F(u_{n-1}). \quad (1)$$

Здесь  $n = 0, 1, \dots$ ;  $u_n \in R^r$ ,  $A$  и  $B$  –  $r \times r$  матрицы,  $\varepsilon > 0$  – малый параметр:  $0 < \varepsilon \ll 1$ , вектор-функция  $F(u)$  достаточно гладкая и имеет в нуле порядок малости не ниже второго. Удобно считать, что  $F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \dots$ , где  $F_j(u, \dots, u)$  – линейны по каждому аргументу. Предполагается, что реализуется критический в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия случай, когда матрица  $A$  имеет  $m$  собственных значений, равных по модулю 1, а все остальные ее собственные значения по модулю меньше, чем 1. Известно, что при этих условиях

система (1) имеет в окрестности состояния равновесия  $u = 0$  локальное инвариантное интегральное многообразие размерности  $m$ , на котором (1) можно представить в форме специальной системы размерности  $m$  нелинейных уравнений – нормальной форме. Отметим, что общая теория одномерных отображений достаточно хорошо изучена в [1]. Обратим внимание на построенную в [2] специальную теорию кусочно-линейных непрерывных, а в [3] – кусочно-линейных разрывных отображений. Завершенной теории даже для двумерного случая не существует, однако для различных классов нелинейностей получено много интересных результатов (см., например, [4]).

В настоящее время хорошо разработана общая методика исследования локальной – в некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия – динамики систем вида (1). Здесь будут существенно использованы результаты работы [5] об устойчивости нулевого состояния равновесия в различных критических случаях. Суть их состоит в том, что нормальные формы для разностных систем представимы в виде специальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений для медленно меняющихся (в непрерывном времени  $t$ ) амплитуд при гармониках линейной части (1).

Вместе с (1) рассмотрим в  $R^r$  систему с непрерывным временем

$$u(t) = (A + \varepsilon B)u(t - 1) + F(u(t - 1)). \quad (2)$$

Эта система уравнений принадлежит к классу систем уравнений нейтрального типа нулевого порядка. Её решения с кусочно-непрерывной начальной при  $t = t_0$  вектор-функцией тоже будут при  $t > t_0$  кусочно-непрерывными.

Условие непрерывности решений (2) с начальной функцией  $u(s + t_0) = \varphi(s) \in C_{[-1,0]}(R^r)$  состоит в требовании выполнения условия согласования

$$\varphi(0) = (A + \varepsilon B)\varphi(-1) + F(\varphi(-1)). \quad (3)$$

Здесь будут рассмотрены вопросы о локальной динамике решений системы уравнений (3) с кусочно-непрерывными и непрерывными с условиями согласования начальными функциями. Соответственно, установившиеся решения будут либо кусочно-непрерывными, либо стремящиеся при  $t \rightarrow \infty$  к кусочно-непрерывным функциям.

Отметим, что характеристический квазиполином линейной части (2) при  $\varepsilon = 0$  имеет вид

$$\det |\exp A - I| = 0. \quad (4)$$

Обозначим через  $\kappa_1, \dots, \kappa_m$  все собственные значения матрицы  $A$ , равные по модулю 1. Тогда  $\kappa_j = \exp(i\omega_j)$  ( $0 \leq \omega_j < 2\pi$ ) и корни (4) составляют бесконечную совокупность

$$\lambda_{jk} = i[\omega_j + 2\pi k], \quad j = 1, \dots, m; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

Таким образом, для (2) реализуется критический в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия случай бесконечной размерности. Как следствие этого факта для системы (2) характерно наличие бесконечных множеств различных локальных разрывных динамических режимов. Введем затем в рассмотрение эквивалентную системе (2) систему уравнений

$$u(t + \mu) = (A + \varepsilon B)u(t - 1) + F(u(t - 1)), \quad (6)$$

где

$$0 < \mu \ll 1 \quad (7)$$

– еще один малый параметр. Эта система получается из (2) путем простых преобразований и переобозначений. Решение (6) с начальной функцией  $u(s) = \varphi(s) \in C_{[-1, 0]}(R^r)$  будет тоже  $n$ -раз непрерывно дифференцируемым, если выполнены условия согласования

$$\varphi^j(\mu) = (A + \varepsilon B)\varphi^j(-1) + \left. \frac{d^j}{ds^j} F(\varphi(s-1)) \right|_{s=0} \quad (j = 0, \dots, n).$$

Вместе с изучением динамики непрерывно дифференцируемых и дважды непрерывно дифференцируемых решений (2) естественным образом возникает задача изучения локальной динамики следующих двух систем уравнений

$$\mu \dot{u}(t) + u(t) = (A + \varepsilon B)u(t-1) + F(u(t-1)) \quad (8)$$

и

$$\frac{1}{2}\mu^2 \ddot{u}(t) + \mu \dot{u}(t) + u(t) = (A + \varepsilon B)u(t-1) + F(u(t-1)). \quad (9)$$

Каждая из этих двух систем является системой с запаздывающим аргументом, а значит для гладкости решений (при всех  $t$  больше некоторого  $t_0$ ) не нужны условия согласования начальных функций. В силу (7), системы (8) и (9) являются сингулярно возмущенными.

Поставим задачу сравнительного локального анализа динамики систем (2), (8) и (9) (при достаточно малых значениях  $\varepsilon$  и  $\mu$ ).

Характеристические квазиполиномы линеаризованных в нуле систем (2), (8) и (9) имеют бесконечно много корней, вещественные части которых стремятся к нулю при  $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ . Тем самым и для этих систем реализуется критический в задаче об устойчивости нуля случай бесконечной размерности.

Стандартные методы локального анализа, основанные на применении методов инвариантных интегральных многообразий [6, 7] и метода нормальных форм (см., например, [8]), вообще говоря, здесь неприменимы, однако формализм метода нормальных форм существенно используется. Для изучения динамики при сформулированных условиях в [9] разработаны методы построения специальных нелинейных эволюционных систем, нелокальная динамика которых определяет локальные динамические свойства исходных систем соответственно (2), (8) и (9). Эти методы базируются на использовании некоторых формальных (бесконечных) рядов, в которых фигурируют неизвестные медленно меняющиеся по времени амплитудно-коэффициенты при гармонических решениях линейных (вырожденных) систем (2), (8), (9). Подставляя эти ряды в исходные системы и собирая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим бесконечную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Как оказывается, эту бесконечную систему удастся «свернуть», то есть записать в виде нелинейного уравнения с частными производными – в виде так называемой квазинормальной формы (КНФ). Важно отметить, что получены явные формулы, которые позволяют перейти от решений построенных эволюционных уравнений (КНФ) к решениям исходных

систем. По решениям КНФ будут построены главные приближения асимптотических по невязке решений (2), (8) и (9).

В настоящей работе ограничимся рассмотрением трех наиболее важных и интересных случаев, когда  $m = 1$  и  $\kappa_1 = 1$ , когда  $m = 1$  и  $\kappa_1 = -1$  и когда  $m = 2$  и  $\kappa_{1,2} \neq -1; 1$ .

Во втором разделе приведены результаты для наиболее простого случая, когда  $A_0$  имеет на единичной окружности одно простое – единичное – собственное значение. Отметим, что полученные для (2) и (8) в этом случае результаты довольно просты, а для (9) являются новыми. В третьем разделе рассмотрен существенно более интересный случай, когда  $m = 1$  и матрица  $A$  имеет собственное значение  $-1$ . В частности, будет показано, что динамика всех трех систем (2), (8) и (9) может принципиально отличаться. Наконец, в четвертом разделе рассмотрены ситуации, когда  $m = 2$  и  $\kappa_{1,2} \neq 1; -1$ . Особый интерес здесь представляет рассмотрение резонансных случаев  $\omega_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}$  и  $\omega_{1,2} = \pm \frac{2\pi}{3}$ .

Будут выявлены сходства и различия динамических свойств уравнений с дискретным и с непрерывным «временем», а также разрывных и гладких решений исходных систем уравнений.

**Замечание 1.1.** Из приведенных ниже результатов можно сделать вывод о том, что использование систем вида (9) с более старшими производными ( $\frac{1}{6}\mu^3\ddot{u}$  и т. д.) интереса не представляет.

В плане обсуждения поставленной задачи обратим особое внимание на важность вывода систем уравнений с запаздыванием (8) и (9) из системы (6). Поясним сказанное. Для этого рассмотрим систему уравнений нейтрального типа в форме

$$Cu(t) = Du(t-1) + F(u(t-1)).$$

Согласно идеологии вывода систем (8) и (9) здесь возникают системы уравнений

$$\mu C\dot{u}(t) + Cu(t) = Du(t-1) + F(u(t-1))$$

и

$$\frac{1}{2}\mu^2 C\ddot{u}(t) + \mu C\dot{u}(t) + Cu(t) = Du(t-1) + F(u(t-1)).$$

Эти системы уравнений нейтрального типа и сингулярно возмущенные системы с запаздыванием сводятся, очевидно, к системам вида (2), (8) и (9), соответственно. Если же вместо последних двух систем рассматривать системы

$$\mu\dot{u}(t) + Cu(t) = Du(t-1) + F(u(t-1))$$

и

$$\frac{1}{2}\mu^2\ddot{u}(t) + \mu\dot{u}(t) + Cu(t) = Du(t-1) + F(u(t-1)),$$

то, вообще говоря, задачи о динамике решений уравнений с малым параметром  $\mu$  могут не иметь ничего общего с уравнением нейтрального типа (при  $\mu = 0$ ).

**Замечание 1.2.** Обратим внимание еще на одно обстоятельство, подчеркивающее важность вывода систем (8), (9) из системы (6). Для этого рассмотрим две системы дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{u}(t) + u(t) = (A + \varepsilon B)u(t - \tau) + F(u(t - \tau))$$

и

$$\ddot{u}(t) + a\dot{u}(t) + u(t) = (A + \varepsilon B)u(t - \tau) + F(u(t - \tau)) \quad (a > 0).$$

Будем предполагать, что запаздывание  $\tau$  достаточно велико:  $\tau = \mu^{-1}$ ,  $0 < \mu \ll 1$ . Тогда в результате замены времени  $t \rightarrow \tau t$  приходим к системам

$$\mu \dot{u}(t) + u(t) = (A + \varepsilon B)u(t - 1) + F(u(t - 1))$$

и

$$\mu^2 \ddot{u}(t) + a\mu \dot{u}(t) + u(t) = (A + \varepsilon B)u(t - 1) + F(u(t - 1)).$$

Первая из этих систем совпадает с (8), а вторая отличается от (9) параметрами левой части. Ниже будет показано, что в последнем случае динамика может существенно отличаться от динамики системы (9).

## 2. Случай простого единичного собственного значения матрицы $A$

**2.1.** Здесь считаем, что  $m = 1$  и  $\kappa_1 = 1$  ( $\omega_1 = 0$ ). Отметим, что модельный – в случае, когда размерность  $r = 1$  – вид системы (1) такой

$$v_n = v_{n-1} + \varepsilon b_0 v_{n-1} + c v_{n-1}^2 + o(\varepsilon^2 + |v_{n-1}|^3 + \varepsilon v_{n-1}^2).$$

При выполнении условий невырожденности  $b_0 \neq 0$  и  $c \neq 0$  локальная динамика этого уравнения определяется динамикой укороченного уравнения

$$v_n = (1 + \varepsilon b_0)v_{n-1} + c v_{n-1}^2.$$

Очевидно, имеется ровно два состояния равновесия, устойчивость которых определяется просто.

**2.2.** Рассмотрим систему (2) при  $m = 1$ ;  $\kappa_1 = 1$ . Обозначим через  $a$  собственный вектор матрицы  $A$ , отвечающий собственному значению  $\kappa_1 = 1$ , а через  $b$  – собственный вектор сопряженной к ней матрицы  $A^*$ , отвечающий такому же собственному значению. Удобно нормировать  $a$  и  $b$  так, чтобы  $(a, b) = 1$ . Напомним, что характеристическое уравнение (4) имеет корни  $\lambda_k = 2\pi i k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части.

Согласно методу КНФ [9, 10], введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(2\pi i k t) a + \varepsilon^2 u_2(\tau, t) + \dots, \quad (10)$$

где  $\tau = \varepsilon t$  – медленное время;  $\xi_k(\tau)$  – неизвестные, медленно меняющиеся «амплитуды» при периодических гармониках-решениях линейной (при  $\varepsilon = 0$ ) системы (2); вектор-функции  $u(\tau, t)$  периодичны по  $t$  с периодом 1. Подставляя (10) в (2) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , на втором шаге получим уравнение для определения выражения  $\xi(\tau, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(2\pi i k x)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = b_0 \xi + c \xi^2, \quad \xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x). \quad (11)$$

Здесь  $b_0 = (Ba, b)$ ,  $c = (F_2(a, a), b)$  и использовано соотношение  $\xi(\tau - \varepsilon, x) = \xi(\tau, x) - \varepsilon \frac{\partial \xi(\tau, x)}{\partial \tau} + o(\varepsilon^2)$ .

Заметим, что эта КНФ – обыкновенное дифференциальное уравнение с периодически меняющимся параметром  $x$  – анализируется тривиально.

**2.3.** Построение КНФ для системы (8). Сначала дополнительно предполагаем, что параметры  $\varepsilon$  и  $\mu$  связаны соотношением

$$\mu = g\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

где значение параметра  $g > 0$  как-то фиксировано.

Подставляя ряд (10) в (8) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , на втором шаге получим КНФ – параболическую краевую задачу для определения  $\xi(\tau, x)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{g^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + g^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + b_0 \xi + c \xi^2, \quad \xi(\tau, x+1) \equiv \xi(\tau, x). \quad (13)$$

Определенное при всех  $\tau \geq \tau_0$  решение этой краевой задачи позволяют определить асимптотическое по невязке решение (8) с помощью формулы

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon \xi(\varepsilon t, t) + o(\varepsilon^3).$$

Предположим затем, что выполнено соотношение

$$\mu = g\varepsilon^\alpha \quad (\alpha > 0).$$

Тем самым к краевой задаче (13) сводится случай  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Динамика (в главном) при  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  тривиальна: снова приходим к (13), но при  $b_0 = 0$ .

**2.4.** Существенно более интересен случай, когда

$$\alpha > \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Здесь используем результаты из [11]. Введем несколько обозначений. Фиксируем произвольное значение  $z \neq 0$  и через  $\theta = \theta(\varepsilon, z) \in (0, 1]$  обозначим такую величину, для которой значение  $z\varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta$  является целым. Рассмотрим параболическую краевую задачу

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = \frac{z^2 g^2}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + b_0 \varepsilon + c \varepsilon^2, \quad \xi(\tau, y+1) \equiv \xi(\tau, y). \quad (15)$$

Определенное при всех  $\tau > \delta_0$  и ограниченное при  $\tau \rightarrow \infty$  решение этой краевой задачи доставляет асимптотическое по невязке решение  $u(t, \varepsilon)$  уравнения (8) с помощью формулы

$$u = \varepsilon \xi(\varepsilon t, (z\varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta)t) + o(\varepsilon).$$

Таким образом, в качестве квазинормальной формы выступает однопараметрическое семейство (зависящее от параметра  $z$ ) краевых задач (15).

При условии (14) роль квазинормальных форм играют и существенно более сложные краевые задачи [11]. Опишем их структуру. Фиксируем произвольно целое

$n > 1$  и рассмотрим произвольный набор чисел  $z_1, \dots, z_n$  ( $z_j \neq 0$ ). Через  $\theta_j = \theta_j(z_j, \varepsilon) \in (0, 1]$  обозначим значение, для которого выражение  $z_j \varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta_j$  является целым. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{g^2}{2} \left( z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + z_n \frac{\partial}{\partial y_n} \right)^2 \xi + b_0 \xi + c \xi^2 \quad (16)$$

с 1-периодическими по каждому из  $y_j$  краевыми условиями. Главный вывод заключается в том, что по ограниченному при  $\tau \rightarrow \infty$  решению  $\xi(\tau, y, \dots, y_n)$  этой краевой задачи восстанавливаем асимптотическое по невязке решение уравнения (8). Сформулируем соответствующее утверждение более точно.

**Теорема 1.** *Фиксируем произвольно натуральное  $n$  и произвольный набор вещественных чисел  $z_1, \dots, z_n$  ( $z_j \neq 0$ ). Пусть уравнение (16) имеет ограниченное по  $\tau$  при  $\tau \rightarrow \infty$  вместе с производными  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_i^2}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и 1-периодическое по всем  $y_1, \dots, y_n$  решение  $\xi(\tau, y_1, \dots, y_n)$ . Тогда система уравнений (8) имеет асимптотическое по невязке решение  $u(t, \varepsilon)$ , для которого*

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon \xi(\varepsilon t, (z_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta_1)t, \dots, (z_n \varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta_n)t) + o(\varepsilon).$$

Отметим, что устойчивым решением краевой задачи (15) может быть только состояние равновесия. По-видимому, этот же вывод справедлив и для (16).

**2.5.** Рассмотрим вопрос о поведении решений уравнения второго порядка с запаздыванием (9). Сначала остановимся на наиболее интересном случае, когда

$$\mu = g \varepsilon^{\frac{1}{3}}. \quad (17)$$

Рассмотрим характеристический квазиполином линеаризованного в нуле уравнения (9)

$$\frac{1}{2} g^2 \varepsilon^{\frac{2}{3}} \lambda^2 + g \varepsilon^{\frac{1}{3}} \lambda + 1 = (1 + \varepsilon b_0) \exp(-\lambda). \quad (18)$$

Вещественные части бесконечно многих корней  $\lambda_k(\varepsilon)$  уравнения (18) стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и нет корней, вещественные части которых положительны и отделены от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Асимптотическое разложение для  $\lambda_k(\varepsilon)$  имеет вид

$$\lambda_k(\varepsilon) = 2\pi k i - \varepsilon^{\frac{1}{3}} g 2\pi k i + \varepsilon^{\frac{2}{3}} g^2 2\pi k i - \varepsilon \left[ b_0 + g^3 \left( \frac{1}{6} (2\pi k)^3 i + 2\pi k i \right) \right] + o(\varepsilon^{\frac{4}{3}}). \quad (19)$$

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp \left[ 2\pi k i \left( 1 - \varepsilon^{\frac{1}{3}} g + \varepsilon^{\frac{2}{3}} g^2 \right) t \right] + \varepsilon^2 u_2(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (9) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , на втором шаге получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для  $\xi_k(\tau)$ . Как оказывается, эта система уравнений представима в виде одного уравнения для  $\xi(\tau, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_k(\tau) \exp(2\pi k i x)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = g^3 \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} - g^3 \frac{\partial \xi}{\partial x} + b_0 \xi + c \xi^2 \quad (21)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + 1) = \xi(\tau, x). \quad (22)$$

Очевидно, краевая задача (21), (22) имеет два однородных состояния равновесия  $\xi \equiv 0$  и  $\xi \equiv -b_0 c^{-1}$ . Первое устойчиво при  $b_0 < 0$ , а второе – при  $b_0 > 0$  ( $c \neq 0$ ). Для этой же краевой задачи просто строятся бегущие волны – 1-периодические решения вида  $\xi(y)$ , где  $y = \omega_n \tau + nx$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Для  $\xi(y)$  тогда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{6} g^3 n^3 \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3} - (\omega_n + g^3 n) \frac{\partial \xi}{\partial y} + b_0 \xi + c \xi^2 = 0. \quad (23)$$

Положим здесь  $\omega_n = -g^3 n - \frac{2\pi^2}{3} g^3 n^3 - (\frac{1}{6} g^3 n^3)^{-1} \sigma$  и  $\nu = (\frac{1}{6} g^3 n^3)^{-1}$ . Опуская индекс  $n$ , из (23) приходим к уравнению

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3} + 4\pi^2 (1 + \nu \sigma) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \nu (b_0 \varepsilon + c \xi^2) = 0. \quad (24)$$

При каждом фиксированном  $\sigma$  и при достаточно малых значениях параметра  $\nu$  это уравнение имеет периодическое решение периода  $T(\nu) = 1 + o(\nu)$  и

$$\xi_0(y_1, \varepsilon) = \sqrt{2} b_0 (2c)^{-1} \cos 2\pi y_1 - b_0 (2c)^{-1} + o(\nu),$$

где  $y_1 = (1 + o(\nu))y$ . Распорядиться фигурирующим в (24) параметром  $\sigma = \sigma(\nu)$  можно так, чтобы  $T(\nu) \equiv 1$ . Таким образом при всех достаточно малых  $\nu$  или, что то же самое, при всех достаточно больших значениях  $n$  краевая задача (21), (22) имеет периодическое решение

$$\xi(\tau, x) = \xi_0 \left( - \left[ g^3 n + \frac{2\pi^2}{3} g^3 n^3 + \nu_n \sigma(\nu_n) \right] \tau + nx \right) \quad (\nu_n = (\frac{1}{6} g^3 n^3)^{-1}).$$

Исследование устойчивости  $\xi_n(\tau, x)$  сводится, очевидно, к определению асимптотики при  $\nu \rightarrow 0$  таких собственных значений  $\lambda = \lambda(\nu)$  периодической краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^3 \xi}{dy^3} + 4\pi^2 (1 + o(\nu^2)) \frac{d\xi}{dy} + b_0 + 2c \xi(\tau, x) \xi = \lambda \xi, \quad (25)$$

которые стремятся к нулю при  $\nu \rightarrow 0$ . Таковых, очевидно, три. Одно из них, конечно, нулевое, а два других  $\lambda_1(\nu)$  и  $\lambda_2(\nu)$  вещественны, таковы, что  $\lambda_j(\nu) = \nu \lambda_{j1} + o(\nu^2)$  ( $j = 1, 2$ ) и  $\lambda_{11} \lambda_{21} < 0$ . Тем самым одно из  $\lambda_j(\nu)$  положительно, а значит все периодические решения  $\xi_n(\tau, x)$  при достаточно больших  $n$  неустойчивы.

**2.6.** О некоторых распространениях полученных утверждений.

**2.6.1.** Пусть в системе (9) для параметра  $\mu$  выполнено условие  $\mu = g\varepsilon^\alpha$ , где

$$\alpha > \frac{1}{3}.$$

Соответствующие квазинормальные формы получаются из краевой задачи (21), (22) заменой в ней оператора  $\frac{\partial}{\partial x^3}$  на оператор  $\left(z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + z_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ .

**2.6.2.** В том случае, когда в (11), (13), (21) выполнено равенство  $c = 0$ , следует, очевидно, перейти к рассмотрению кубической нелинейности  $du^3(t-1)$ . В результате приходим к нормализованным краевым задачам вида (11), (13), (21), в которых слагаемое  $c \xi^2$  следует заменить на  $d \xi^3$ . Установившиеся режимы здесь имеют амплитуды порядка  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ . Для нахождения бегущих волн соответствующего уравнения приходим к задаче определения 1-периодических решений обыкновенного дифференциального уравнения-аналога (24)

$$\frac{d^3 \xi}{dy^3} + 4\pi^2(1 + \nu\sigma) \frac{d\xi}{dy} + \nu(b_0\varepsilon + d\xi^3) = 0, \quad 0 < \nu \ll 1.$$

При условии  $b_0 > 0$  и  $d < 0$  (и при подходящем выборе функции  $\sigma = \sigma(\nu)$ ) это уравнение имеет состояния равновесия  $\xi \equiv 0$ ,  $\xi = \pm \xi_0$ , где  $\xi_0 = (-b_0 d^{-1})^{\frac{1}{2}}$  и 1-периодические решения

$$\xi_0(y, \nu) = \frac{2}{\sqrt{3}} \xi_0 \cos 2\pi y + o(\nu)$$

и

$$\xi_{1,2}(y, \nu) = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \xi_0 + \sqrt{\frac{8}{15}} \xi_0 \cos 2\pi y + o(\nu).$$

Тем самым исходное уравнение имеет неустойчивое состояние равновесия  $u \equiv 0$ , два устойчивых однородных состояния равновесия  $u_{1,2} = \pm \varepsilon^{\frac{1}{2}} \xi_0 + o(\varepsilon)$  и – при достаточно больших  $n$  – три семейства периодических решений  $u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n}$ , причем

$$u_{1,2,n}(t, \varepsilon) = \pm \varepsilon_0 \left[ \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{8}{15}} \cos(\omega_n(1 + \nu_n \sigma(\nu_n))\varepsilon t + nx) + o(1) \right],$$

$$u_{3,n}(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \xi_0 \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\omega_n(1 + \nu_n \sigma(\nu_n))\varepsilon t + nx) + o(1) \right].$$

Все решения  $u_{1,n}(t, \varepsilon)$  и  $u_{2,n}(t, \varepsilon)$  неустойчивы, а все решения  $u_{3,n}(t, \varepsilon)$  орбитально асимптотически устойчивы.

**Замечание 2.1.** В этом и следующих параграфах фигурируют краевые задачи, содержащие произвольный параметр  $z$  (формула (15)). После замены  $x \rightarrow zx$  получаем параболическое уравнение без параметра, а параметр входит только в краевые условия. Тем самым речь идет о построении решений параболического уравнения с произвольным периодом по пространственной переменной. В этой связи актуальной становится задача о решениях уравнения вообще без краевых условий. Тогда для уравнения из (15) применима, например, известная методика Колмогорова–Петровского–Пискунова [12].

## 2.7. Квазинормальные формы для системы уравнений

$$\rho \mu^2 \ddot{u}(t) + \mu \dot{u}(t) + u(t) = (hA + \varepsilon B)u(t-1) + cu^2(t-1) + du^3(t-1) + \dots \quad (26)$$

Эта система является несколько более общей, по сравнению с (9). В ней присутствуют два новых параметра  $\rho > 0$  и  $h$ . Система (26) переходит в (9) при  $\rho = \frac{1}{2}$  и

$h = 1$ . Здесь коротко остановимся на описании локальной динамики (26). Подробно соответствующие результаты приведены в [13].

Предположим сначала, что выполнены условия

$$0 < \rho < \frac{1}{2} \quad (27)$$

и

$$\mu = g\varepsilon^\alpha \text{ и } \alpha = \frac{1}{2}. \quad (28)$$

Тогда при  $0 < |h| < 1$  и при достаточно малых  $\varepsilon$  и  $\mu$  все решения (9) из некоторой (достаточно малой и независимой от  $\varepsilon$  и  $\mu$ ) окрестности  $u = 0$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Если же  $|h| > 1$ , то характеристический квазиполином

$$\rho\mu^2\lambda^2 + \mu\lambda + 1 = b \exp(-\lambda) \quad (29)$$

имеет корень с положительной (и отделенной от нуля при малых  $\varepsilon$  и  $\mu$ ) вещественной частью. При условии  $|b| = 1$  бесконечно много корней (29) стремятся к мнимой оси при  $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ . В этом случае динамика (9) описывается [13] при  $\alpha = \frac{1}{2}$  поведением решений КНФ

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = g^2 \left( \frac{1}{2} - \rho \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + b_0 \xi - (d + c^2) \xi^3, \quad \xi(\tau, y + 1) \equiv -\xi(\tau, y), \quad (30)$$

а связь (30) и (9) устанавливает соотношение

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \xi(\varepsilon t, t + \sqrt{\varepsilon} g (1 + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}})) t) + o(\varepsilon).$$

При  $\alpha > \frac{1}{2}$  ситуация в основе своей повторяет построения, приведенные выше в п. 2.4: оператор  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$  заменяется на вырожденный параболический  $\left( z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + z_n \frac{\partial}{\partial y_n} \right)^2$ , решение  $u(t, \varepsilon)$  становится быстро осциллирующим по «пространственной» переменной:

$$u(t, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \xi \left( \varepsilon t, \left( z_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta_1 \right) t + \sqrt{\varepsilon} g z_1 (1 + o(1)) t, \dots, \right. \\ \left. \dots \left( z_n \varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta_n \right) t + \sqrt{\varepsilon} g z_n (1 + o(1)) t \right) + o(\varepsilon).$$

Если же

$$\rho > \frac{1}{2}, \quad (31)$$

то ситуация существенно сложнее [13]. Введем в рассмотрение функцию

$$h(\rho) = \left[ (2\rho^2)^{-1} \left( 2\rho - \frac{1}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

При условии (31) эта функция положительна, монотонно возрастает и  $h(\frac{1}{2}) = 1$ . Тогда при  $0 < |h| < h(\rho)$  все корни (29) имеют отрицательные вещественные части, отделенные от нуля при малых  $\varepsilon$  и  $\mu$ . При  $|h| > h(\rho)$  имеется корень квази-полинома (29) с положительной (и отделимой от нуля при  $0 < \varepsilon, \mu \ll 1$ ) вещественной частью. Таким образом, в изучении нуждается только случай, когда в (9)  $|h| = h(\rho)$ . В [13] показано, что при  $\alpha = \frac{1}{2}$  динамика (9) определяется тогда поведением решений параболической краевой задачи для комплексной функции  $\xi(\tau, y)$  с  $2\pi$ -периодическими краевыми условиями

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \beta_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \beta_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + \beta_3 \xi + \beta_4 |\xi|^2 \xi.$$

Значения всех комплексных коэффициентов  $\beta_1, \dots, \beta_4$  приведены в [13]. Таким образом динамика (9) в случае (31) существенно сложнее, чем в случае (27). Отметим, что при  $\alpha > \frac{1}{2}$ , как и выше, оператор  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$  заменяется на  $\left( z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + z_n \frac{\partial}{\partial y_n} \right)^2$ . Решение  $u(t, \varepsilon)$  связано с  $\xi(\tau, y_1, \dots, y_n)$  формулой

$$\begin{aligned} u(t, \varepsilon) = & \sqrt{\varepsilon} \exp \left[ i \sqrt{\rho - \frac{1}{2}} (\rho \varepsilon)^{-1} (1 + o(1)) t \right] \xi \left( \varepsilon t, \left( z_1 \varepsilon^{\frac{1}{2} - \alpha} + \theta_1 + \sqrt{\varepsilon} g z_1 + o(\sqrt{\varepsilon}) \right) t, \dots, \right. \\ & \left. \dots \left( z_n \varepsilon^{\frac{1}{2} - \alpha} + \theta_n + \sqrt{\varepsilon} g z_1 + o(\sqrt{\varepsilon}) \right) t \right) + \\ & + \sqrt{\varepsilon} \exp \left[ -i \sqrt{\rho - \frac{1}{2}} (\rho \varepsilon)^{-1} (1 + o(1)) t \right] \bar{\xi} \left( \varepsilon t, \left( z_1 \varepsilon^{\frac{1}{2} - \alpha} + \theta_1 + \sqrt{\varepsilon} g z_1 + o(\sqrt{\varepsilon}) \right) t, \dots, \right. \\ & \left. \dots \left( z_n \varepsilon^{\frac{1}{2} - \alpha} + \theta_n + \sqrt{\varepsilon} g z_1 + o(\sqrt{\varepsilon}) \right) t \right) + o(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned}$$

### 3. Случай простого собственного значения $\kappa_1 = -1$ матрицы $A$

**3.1.** Этот случай существенно более содержателен по сравнению с предыдущим.

Отметим, что простейшим модельным уравнением здесь служит уравнение

$$u_n = (-1 + \varepsilon b_0) u_{n-1} + c u_{n-1}^2 + d u_{n-1}^3 + \dots$$

Характеристическое уравнение (4) имеет на единичной окружности корни

$$\lambda_k = \exp[(2k + 1)\pi i], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пусть  $Aa = -a$ ,  $A^*b = -b$  и  $(a, b) = 1$ . Ниже предполагаем, что выполнены условия невырожденности

$$b_0 \neq 0, \quad d + c^2 \neq 0.$$

Для исследования системы уравнений (2) введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a \xi_k(\tau) \exp[i(2k + 1)\pi t] + \varepsilon u_2(t, \tau) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_3(t, \tau) + \dots, \quad (32)$$

в котором  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\xi_k(\tau)$  – неизвестные «амплитуды» при соответствующих гармониках, зависимость функций  $u_j(t, \tau)$  от первого аргумента является 2-периодической. Подставляя (32) в (2) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , на третьем шаге (то есть собирая коэффициенты при  $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ ) из условий разрешимости уравнений относительно  $u_3(t, \tau)$  получаем уравнение для  $\xi(\tau, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \times \exp(i(2k+1)\pi x)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = b_0 \xi - (d + c^2) \xi^3, \quad \xi(\tau, x + 1) = -\xi(\tau, x). \quad (33)$$

Отметим, что при  $b_0 > 0$  и  $(d + c^2) < 0$  и при каждом  $x \in [0, 2\pi]$  краевая задача (33) имеет множество разрывных периодических решений, которые принимают два значения:  $\xi_0 = \pm [b_0(d + c^2)^{-1}]^{\frac{1}{2}}$ .

**3.2.** Рассмотрим вопрос о построении гладких асимптотических по невязке решений системы (8). Предположим сначала, что для некоторой постоянной  $g > 0$  малые параметры  $\mu$  и  $\varepsilon$  связаны соотношением

$$\mu = g\sqrt{\varepsilon}. \quad (34)$$

Тогда локальная динамика системы уравнений (8) определяется [9] (нелокальным) поведением решений параболической краевой задачи

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + g^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + b_0 \xi - (d + c^2) \xi^3, \quad \xi(\tau, y + 1) \equiv -\xi(\tau, y). \quad (35)$$

Решения системы (8) и (35) связаны асимптотическим равенством

$$u(t, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} a \xi(\varepsilon t, t + \sqrt{\varepsilon} g(1 + o(1))t) + \varepsilon u_2(\varepsilon t, t + \varepsilon^{\frac{1}{2}}(g + o(1))t) + \dots$$

Таким образом при условии (34) получаем асимптотическое представление для гладких решений системы уравнений (8).

Отметим, что при условии

$$\mu = g\varepsilon^\alpha \quad (36)$$

и при  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  получаем краевую задачу (35) при  $b_0 = 0$ . Тем самым этот случай интереса не представляет.

**3.3.** Быстро осциллирующие решения (8). Пусть в (36) для параметра  $\alpha$  верно неравенство

$$\alpha > \frac{1}{2}. \quad (37)$$

Как и выше, через  $z$  будем обозначать произвольную постоянную, а через  $\theta = \theta(z, \varepsilon) \in (0, 1]$  такую величину, которая дополняет выражение  $z\varepsilon^{1/2-\alpha}$  до целого. Пусть  $\xi(\tau, y)$  – ограниченное при  $\tau \rightarrow \infty$  решение краевой задачи

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} g^2 z^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + b_0 \xi - (d + c^2) \xi^3, \quad \xi(\tau, y + 1) \equiv \xi(\tau, y). \quad (38)$$

Тогда формулой

$$u(t, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \xi(\varepsilon t, t(z\varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta) + gz(1 + o(1))\sqrt{\varepsilon}t)$$

доставляется асимптотическое с точностью до  $o(\varepsilon)$  решение системы уравнений (8).

В более общей ситуации функция  $\xi(\tau, y_1, \dots, y_n)$  – решение уравнения

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \left( z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + z_n \frac{\partial}{\partial y_n} \right)^2 \xi + b_0 \xi - (d + c^2) \xi^3.$$

Рассматриваются либо 2-периодические, либо 1-антипериодические условия по каждой из переменных  $y_1, \dots, y_n$ , причем количество 1-антипериодических условий обязательно нечетно.

Для решения  $\xi(\tau, y_1, \dots, y_n)$  этого уравнения с соответствующими краевыми условиями имеет место утверждение теоремы и асимптотическая формула для решения  $u(t, \varepsilon)$  системы (8)

$$u(t, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \xi \left( \varepsilon t, \left( z_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta_1 \right) t + \sqrt{\varepsilon} g z_1 (1 + o(1)) t, \dots, \right. \\ \left. \dots \left( z_n \varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta_n \right) t + \sqrt{\varepsilon} g z_n (1 + o(1)) t \right) + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

Заметим, что функция  $r(\tau, zgy) = \xi(\tau, y, \dots, y)$ , где  $z = (z_1 + \dots + z_n)$  является решением уравнения

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + b_0 r - (d + c^2) r^3.$$

### 3.4. Построение КНФ для системы уравнений (9).

Пусть сначала выполнено условие

$$\mu = g\varepsilon^{1/3}.$$

Подставляя формальный ряд (32) в (9) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ , приходим на третьем шаге к КНФ

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{6} g^3 \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3} - g^3 \frac{\partial \xi}{\partial y} + b_0 \xi - (d + c^2) \xi^3, \quad (39)$$

$$\xi(\tau, y + 1) \equiv -\xi(\tau, y), \quad (40)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ ,  $y = t - \varepsilon^{1/3} g t + \varepsilon^{2/3} g^2 t$ . Напомним, что решения этой краевой задачи и системы (9) связаны соотношением

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} a \xi(\varepsilon t, t - \varepsilon^{1/3} g t + \varepsilon^{2/3} g^2 t) + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

Если же  $\mu = g\varepsilon^\alpha$  и  $\alpha > \frac{1}{3}$ , то, как и во втором разделе, соответствующие совокупности семейств КНФ получаются из (39), (40) путем замены там оператора  $g^3 \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial y^3} - \frac{\partial}{\partial y} \right)$  на операторы  $\frac{1}{6} g^3 \left( z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + z_k \frac{\partial}{\partial y_k} \right)^3$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{6} g^3 \left( z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + z_k \frac{\partial}{\partial y_k} \right)^3 + b_0 \xi - (d + c^2) \xi^3. \quad (41)$$

Следует рассматривать такие краевые условия для (41), которые по каждому из  $y_j$ , ( $j = 1, \dots, k$ ) либо 2-периодичны, либо 1-антипериодичны, но количество переменных с антипериодическими краевыми условиями должно быть обязательно нечетным. Сформулируем итоговое утверждение.

**Теорема 2.** Пусть для некоторого натурального  $k$  и для некоторой совокупности вещественных (ненулевых) чисел  $z_1, \dots, z_k$  уравнение (41) с соответствующими краевыми условиями имеет ограниченное при  $\tau \rightarrow \infty$  вместе с производными  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_i^2}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) решение  $\xi_0(\tau, y_1, \dots, y_k)$ . Тогда система уравнений (9) имеет асимптотическое по невязке решение  $u(t, \varepsilon)$ , для которого

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} a \xi_0 \left( \varepsilon t, (z_1 \varepsilon^{\frac{1}{3}-\alpha} + \theta_1 - \varepsilon^{\frac{1}{3}} g z_1 + \varepsilon^{\frac{2}{3}} g^2 z_1^2) t, \dots, \dots (z_k \varepsilon^{\frac{1}{3}-\alpha} + \theta_k - \varepsilon^{\frac{1}{3}} g z_k + \varepsilon^{\frac{2}{3}} g^2 z_k^2) t \right) + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

**Замечание 3.1.** Как и в п.2 из второго раздела для КНФ (39), (40) и (41) можно довольно просто конструировать, используя бифуркационный метод Андронова–Хопфа, бесконечные семейства периодических бегущих волн вида  $\xi_n = \xi_n(\omega_n \tau + \pi(2n + 1)y)$ .

**Замечание 3.2.** Пусть функция  $\xi(\tau, y_1, \dots, y_k)$  являются решением уравнения (41). Тогда функция  $\eta(\tau, y) = \xi(\tau, \delta y, \dots, \delta y)$ , где  $\delta = (z_1 + \dots + z_k) g \sigma^{-\frac{1}{3}}$  является решением уравнения

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} + b_0 \eta - (d + c^2) \eta^3.$$

### 3.5. О квазилинейных разностных и дифференциально-разностных уравнениях.

Изложенный выше подход распространяется, очевидно, и на квазилинейные разностные уравнения. Пусть, для примера, имеем квазилинейную разностную систему

$$u(t) = -u(t-1) + \varepsilon f(u(t-1)), \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (42)$$

или квазилинейную дифференциально-разностную систему

$$\mu \dot{u}(t) + u(t) = -u(t-1) + \varepsilon f(u(t-1)), \quad 0 < \varepsilon, \mu \ll 1. \quad (43)$$

Динамика (42) в главном тогда описывается КНФ-уравнением для 1-антипериодической по второму аргументу «амплитуды»  $\xi(\tau, x)$  ( $\xi(\tau, x+1) \equiv -\xi(\tau, x)$ )

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = f_0(\xi), \quad \text{где } \tau = \varepsilon t, \quad f_0(\xi) = \frac{1}{2} (f(-\xi) - f(\xi)). \quad (44)$$

При  $\mu = g \varepsilon^{\frac{1}{2}}$  динамика (43) описывается квазинормальной формой

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + f_0(\xi), \quad \xi(\tau, x+1) \equiv -\xi(\tau, x). \quad (45)$$

Функция  $u(t, \varepsilon)$  в (42) и (43) связана с  $\xi(\tau, x)$  равенством  $u(t, \varepsilon) = \xi(\varepsilon t, t) + O(\varepsilon)$ . В [9, 10] отмечалось, что динамические свойства уравнений (44) и (45), а значит и (42) и (43), могут существенно отличаться. Поясним сказанное. Пусть, для примера, уравнение  $f_0(\xi) = 0$  имеет корни  $\xi_0 = 0, \xi_1, -\xi_1, \dots, \xi_m, -\xi_m$  и  $0 < \xi_1 < \dots < \xi_m$ . Пусть, далее,  $(-1)^j f'(\xi_j) > 0$ . Тогда уравнение (44) при каждом

$x$  имеет (неустойчивое) однородное состояние равновесия  $\xi \equiv 0$  и неоднородные состояния равновесия (1-антипериодические по  $x$ ), принимающие только два значения  $\xi_j$  и  $-\xi_j$ , устойчивость которых чередуется. В этих условиях относительно краевой задачи (45) заключаем, что она может иметь только состояния равновесия, близкие при каждом фиксированном  $x$  и при  $\mu \rightarrow 0$  либо к  $\xi_1$ , либо к  $-\xi_1$ .

#### 4. Динамика систем (2), (8) и (9) в случае, когда матрица $A$ имеет два собственных значения $\kappa_{1,2} = \exp \pm i\omega$

Пусть  $Aa = \kappa_1 a$ ,  $A^*b = \kappa_2 b$  и  $(a, b) = 1$ .

**4.1.** Динамика при выполнении условия отсутствия главных резонансов. Здесь предполагаем, что  $0 < \omega < 2\pi$  и  $\omega \neq \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega \neq \pi$ ,  $\omega \neq \frac{2\pi}{3}$ .

Отметим, что простейшие резонансные случаи  $\omega = 0$  и  $\omega = \pi$  рассмотрены выше, а случаи  $\omega = \frac{\pi}{2}$  и  $\omega = \frac{2\pi}{3}$  будут рассмотрены ниже.

При сформулированных условиях характеристический квазиполином (4) имеет бесконечно много корней  $\lambda_k^+$  и  $\lambda_k^-$  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ ), лежащих на мнимой оси,

$$\lambda_k^\pm = \pm i(\omega + 2k\pi).$$

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\xi(\tau, x) \exp(i\omega t)a + \bar{\xi}(\tau, x) \exp(-i\omega t)\bar{a}) + \varepsilon u_2(t, \tau) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_3(t, \tau) + \dots, \quad (46)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ ,  $x = t$ ,  $\xi(\tau, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(2\pi i k x)$ , а зависимость от первого аргумента функции  $u_j(t, x)$  является 1-периодической.

Подставим (46) в (2) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Функцию  $\xi(\tau, x)$  предполагаем достаточно гладкой по  $\tau$ . На втором шаге тогда находим, что

$$u_2(t, \tau) = |\xi|^2 b_1 + \xi^2 b_2 \exp(2i\omega t) + \bar{\xi}^2 \bar{b}_2 \exp(-2i\omega t),$$

а для векторов  $b_1$  и  $b_2$  верны равенства

$$b_1 = (I - A)^{-1} (F_2(a, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, a)),$$

$$b_2 = (\exp(2i\omega)I - A)^{-1} \exp(-2i\omega) F_2(a, a).$$

На третьем шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ , из условия разрешимости получающейся системы относительно  $u_3(t, \tau)$  приходим к комплексному уравнению (КНФ) для нахождения неизвестной амплитуды  $\xi(\tau, x)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \gamma \xi + d |\xi|^2 \xi, \quad \xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x).$$

Здесь  $\gamma = \exp(-i\omega)(A_1 a, b)$ ,  $d = \exp(-i\omega) ((F_3(a, a, \bar{a}) + F_3(a, \bar{a}, a) + F_3(\bar{a}, a, a) + F_2(b_1, a) + F_2(a, b_1) + F_2(b_2, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, b_2)), b)$ .

Приведем квазинормальные формы для двух систем уравнений (8) и (9). Ограничимся только рассмотрением в некотором смысле основного случая, когда в (8)  $\mu = g\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ , а в (9) –  $\mu = g\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ . Другие соотношения, связывающие малые параметры  $\varepsilon$  и  $\mu$  исследуются по аналогии с изложенным выше.

Для корней  $\lambda_k(\varepsilon)$  и  $\bar{\lambda}_k(\varepsilon)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) характеристического квазиполинома, отвечающего линейной части (8), верны асимптотические формулы

$$\lambda_k(\varepsilon) = i(\omega + 2k\pi) - \varepsilon^{\frac{1}{2}}gi(\omega + 2k\pi) + \\ + \varepsilon \left[ -\frac{1}{2}g^2(4\pi^2k^2) - 2g^2\omega k\pi + ig2k\pi - \frac{1}{2}g^2\omega^2 + ig^2\omega + \gamma \right] + \dots$$

Рассмотрим решение (8) в виде формального ряда

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\xi(\tau, y) \exp[i\omega(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}}g)t]a + \bar{\xi}(\tau, y) \exp[-i\omega(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}}g)t]\bar{a}) + \\ + \varepsilon u_2(t, \tau) + \varepsilon^{\frac{3}{2}}u_3(t, \tau) + \dots, \quad (47)$$

где  $y = t - \varepsilon^{\frac{1}{2}}gt$ ,  $\tau = \varepsilon t$ . Для нахождения неизвестной амплитуды  $\xi(\tau, y)$  получаем квазинормальную форму – комплексное параболическое уравнение типа Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}g^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + g^2(1 + i\omega) \frac{\partial \xi}{\partial y} + (\gamma + g^2\omega(i - \frac{1}{2}\omega))\xi + d|\xi|^2\xi, \quad \xi(\tau, y+1) \equiv \xi(\tau, y). \quad (48)$$

Для корней соответствующего характеристического квазиполинома для уравнения (9) верна асимптотическая формула

$$\lambda_k(\varepsilon) = i(\omega + 2\pi k) - \varepsilon^{\frac{1}{3}}gi(\omega + 2\pi k) + \varepsilon^{\frac{2}{3}}g^2i(\omega + 2\pi k) + \\ + \varepsilon \left[ -\frac{1}{6}ig^3(\omega + 2\pi k)^3 - ig^3(\omega + 2\pi k) + \gamma \right] + \dots,$$

а аналог формулы (6) имеет вид

$$u = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\xi(\tau, y) \exp[i\omega(1 - \varepsilon^{\frac{1}{3}}g + \varepsilon^{\frac{2}{3}}g^2)t]a + \\ + \bar{\xi}(\tau, y) \exp[-i\omega(1 - \varepsilon^{\frac{1}{3}}g + \varepsilon^{\frac{2}{3}}g^2)t]\bar{a}) + \varepsilon u_2(t, \tau) + \dots, \quad (49)$$

где  $y = t - \varepsilon^{\frac{1}{3}}gt + \varepsilon^{\frac{2}{3}}g^2t$ ,  $\tau = \varepsilon t$ . Для нахождения  $\xi(\tau, y)$  получаем квазинормальную форму – краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{g^3}{6} \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3} + \frac{i\omega g^3}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - g^3 \left( 1 + \frac{1}{2}\omega^2 \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \\ + \left[ \gamma - \frac{ig^3\omega^3}{6} - ig^3\omega \right] \xi + d|\xi|^2\xi, \quad \xi(\tau, y+1) \equiv \xi(\tau, y). \quad (50)$$

Основной результат состоит в том, что с помощью формул (47), (49) по решениям квазинормальных форм (48), (50) определяются асимптотические по невязке решения систем уравнений (8), (9), соответственно.

Отметим, что в (48) и (50) просто определяются бегущие волны – решения вида  $\xi_n = \rho_n \exp(i\sigma\tau + 2\pi n i y)$ . Для (48) таких решений всегда конечное число, а для уравнения (50), например, при условиях  $\operatorname{Re} \gamma > 0$  и  $\operatorname{Re} d < 0$  их бесконечно много и у всех у них одинаковая амплитуда  $\rho_n = \rho_0 = [-(\operatorname{Re} \gamma)(\operatorname{Re} d)^{-1}]^{\frac{1}{2}}$ . Используя приведенные выше построения, можно исследовать вопросы о существовании, асимптотике и устойчивости решений краевой задачи (50) более сложной, по сравнению с бегущими волнами, структуры.

**4.2.** Нормальные и квазинормальные формы в случае резонансного соотношения  $\omega = \frac{\pi}{2}$ .

При условии  $\omega = \frac{\pi}{2}$  подставим формальный ряд (46) в (2). Собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , на третьем шаге получим уравнение для  $\xi(\tau, x)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \gamma \xi + d |\xi|^2 \xi + p \exp(-2\pi i x) \bar{\xi}^3, \quad \xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x). \quad (51)$$

Параметры  $\gamma$  и  $d$  те же, что и выше, а

$$p = (-i) [(F_3(\bar{a}, \bar{a}, \bar{a}) + F_2(\bar{b}_2, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, \bar{b}_2), b)].$$

Отметим, что при  $p = 0$  и при условиях  $\operatorname{Re} \gamma > 0$ ,  $\operatorname{Re} d > 0$  уравнение (51) имеет простейшее периодическое решение – бегущую волну  $\xi_0(\tau) = [-(\operatorname{Re} \gamma)(\operatorname{Re} d)^{-1}]^{\frac{1}{2}} \exp(i\omega_0 \tau)$ , где  $\omega_0 = \operatorname{Im} \gamma + (\operatorname{Im} d)[-(\operatorname{Re} \gamma)(\operatorname{Re} d)^{-1}]$ . При  $p \neq 0$  решений вида  $\operatorname{const} \exp(i\sigma\tau)$  ( $\sigma \neq 0$ ) не существует.

Рассмотрим вопрос о состоянии равновесия уравнения (51). Положим  $\xi = \rho \exp(i\varphi)$ , где  $\rho > 0$ . Тогда для нахождения  $\rho$  и  $\varphi$  приходим у системе уравнений

$$|\gamma + d\rho^2|^2 = \rho^2 |p|^2, \quad (52)$$

$$p \exp[-i(4\varphi + 2\pi x)] = -(\gamma + \rho^2 d) \rho^{-2}. \quad (53)$$

Первое из этих двух уравнений представляет собой вещественное уравнение второго порядка относительно  $\rho^2$ . Если  $|p|^2 > |d|^2$ , то значение  $\rho^2$  из (52) определяется единственным образом. Если же  $0 < |p|^2 < |d|^2$ , то условия существования положительного корня, а их тогда обязательно два, формулируется в виде неравенства

$$\gamma \bar{d} + \bar{\gamma} d < 0.$$

Определив положительный корень из (52), из (53) находим соответственно 4, если этот корень один, и 8, если таких корней два, значений величин  $\varphi = \varphi_j$ . Важно подчеркнуть, что все  $\varphi_j = \varphi_j(x)$  представимы в виде  $\varphi_j = \varphi_{j0} + \frac{\pi}{2}x$ , где  $\varphi_{j0}$  не зависят от  $x$ . Таким образом уравнение (51) не может иметь ненулевого непрерывно зависящего от  $x$  1-периодического состояния равновесия. Разрывных и 1-периодических по  $x$  состояний равновесия можно, очевидно, компоновать множеством способов.

Сформулируем результаты об устойчивости состояний равновесия уравнения (51) при каждом фиксированном  $x$ . Для определенности условимся считать, что при наличии двух положительных корней  $\rho_1^2$  и  $\rho_2^2$  у уравнения (52) выполнено неравенство  $0 < \rho_1^2 \leq \rho_2^2$ .

**Лемма 1.** Пусть  $|p|^2 > |d|^2$ . Тогда уравнение (51) имеет четыре ненулевых состояния равновесия  $\xi_j = \rho_1 \exp i\varphi_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ), причем все они неустойчивые.

**Лемма 2.** Пусть  $0 < |p|^2 < |d|^2$ . Тогда уравнение (51) имеет 8 состояний равновесия  $\xi_j = \rho_1 \exp i\varphi_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) и  $\xi_j = \rho_2 \exp i\varphi_j$  ( $j = 5, \dots, 8$ ). Состояния равновесия  $\xi_1, \dots, \xi_4$  неустойчивы, а  $\xi_5, \dots, \xi_8$  – асимптотически устойчивы.

Простые доказательства этих утверждений опустим.

При рассмотрении системы уравнений (8) для нахождения  $\xi(\tau, y)$ , где  $\tau = \varepsilon t$ ,  $y = t - \varepsilon^{1/2}gt$ , приходим к параболической краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}g^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + g^2(1 + i\omega) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \left( \gamma + g^2\omega \left( i - \frac{1}{2}\omega \right) \right) \xi + d|\xi|^2\xi + \\ + p \exp(-2\pi i(y + \varepsilon^{-1/2}gt))\bar{\xi}^3, \quad \xi(\tau, y + 1) \equiv \xi(\tau, y). \end{aligned} \quad (54)$$

Последнее слагаемое в уравнении (54) является быстро осциллирующим по времени  $\tau$ , поэтому можно воспользоваться известным (см., например, [14]) принципом усреднения. В результате для нахождения главного члена асимптотики функции  $\xi(\tau, y)$  приходим опять к краевой задаче (48). Таким образом в нормальной форме (51) влияние резонансного соотношения  $\omega = \frac{\pi}{2}$  существенно, а в квазинормальной форме (54) им можно пренебречь.

При рассмотрении системы уравнений (9) в случае  $\mu = g\varepsilon^{1/3}$  для  $\xi(\tau, y)$  получаем краевую задачу, которая отличается от (50) только тем, что в правую часть добавляется слагаемое  $p \exp(-2\pi i(y + \varepsilon^{-1/2}g\tau))\bar{\xi}^3$ .

**3.3.** Нормальные и квазинормальные формы в случае резонансного соотношения  $\omega = \frac{2\pi}{3}$ .

В отличие от предыдущих случаев, когда  $\omega = \pi$  или  $\omega = \frac{\pi}{2}$ , нормализованное уравнение здесь будет содержать и квадратичное и кубическое слагаемые. Тем самым амплитуду и саму зависимость от времени нельзя пронормировать так, чтобы исключить из уравнения малый параметр  $\varepsilon$ . Поэтому в качестве аналога формального ряда (46) имеем

$$u(t, \varepsilon) = \xi(t, \tau) \exp(i\omega t)a + \bar{\xi}(t, x) \exp(-i\omega t)\bar{a} + u_2(t, x) + \dots, \quad (55)$$

причем по первому аргументу функции в правой части (55) являются медленно (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) меняющимися, по второму аргументу они 1-периодичны, амплитуда  $\xi(\tau, x)$  достаточно мала (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) и каждое последующее слагаемое в (55) имеет более высокий порядок малости по сравнению с предыдущим. Подставляя (55) в (2) при  $x = t$  и производя стандартные действия, приходим к уравнению для  $\xi(\tau, x)$  с точностью до  $o(\varepsilon)$  и  $O(|\xi|^4)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon\gamma\xi + d|\xi|^2\xi + q \exp(-2\pi ix)\bar{\xi}^2, \quad \xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x), \quad (56)$$

где  $q = \exp(-\frac{4i\pi}{3}) (F_2(\bar{a}, \bar{a}), b)$ .

При рассмотрении системы уравнений (8) в случае  $\mu = g\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  получаем краевую задачу параболического типа для нахождения достаточно гладких асимптотических по невязке решений

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\varepsilon g^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \varepsilon g^2 (1 + i\omega) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \varepsilon \left( \gamma + g^2 \omega \left( i + \frac{1}{2} \omega \right) \right) \xi + d|\xi|^2 \xi + q \exp(-2\pi i(y + \varepsilon^{\frac{1}{2}} t)) \bar{\xi}^2, \quad \xi(t, y + 1) \equiv \xi(t, y). \quad (57)$$

Соответственно, в случае уравнения (9) для  $\mu = g\varepsilon^{\frac{1}{3}}$  приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon \frac{g^3}{3} \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3} + \varepsilon i \omega \frac{g^3}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \varepsilon g^3 \left( 1 + \frac{1}{2} \omega^2 \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \varepsilon \left[ \gamma - i \frac{g^3 \omega^3}{6} - i g^3 \omega \right] \xi + d|\xi|^2 \xi + q \exp[-2\pi i(y + \varepsilon^{\frac{1}{2}} t)] \bar{\xi}^2, \quad \xi(t, y + 1) \equiv \xi(t, y). \quad (58)$$

Сделаем несколько важных замечаний.

Во-первых, при выполнении условий невырожденности  $\gamma \neq 0$ ,  $q \neq 0$  и при каждом фиксированном  $y$  уравнение (56) имеет три ненулевых состояния равновесия

$$\xi_j = \varepsilon |\gamma q^{-1}| (1 + o(1)) \exp \left[ i(\varphi_j + \frac{2}{3} \pi y) + O(\varepsilon) \right] \quad (j = 1, 2, 3),$$

где  $\varphi_j$  не зависят от  $y$ . Тем самым это уравнение не может иметь ненулевых непрерывно зависящих от  $y$  и 1-периодических по  $y$  состояний равновесия. Простой анализ показывает, что все состояния равновесия  $\xi_j$  при каждом  $y$  неустойчивы.

Во-вторых, краевые задачи (57) и (58) содержат быстро осциллирующие (причем с нулевым средним) по времени  $\tau$  ( $\tau = \varepsilon t$ ) слагаемые. Это открывает путь к применению известного метода усреднения [14].

В-третьих, ситуации, когда  $\mu = g\varepsilon^\alpha$  (при  $\alpha > \frac{1}{2}$  в случае (8) и  $\alpha > \frac{1}{3}$  в случае (9)) рассматриваются так же, как и выше, поэтому соответствующие квазинормальные формы здесь не приводим.

#### 4.4. Системы с малым внешним воздействием.

Коротко остановимся на рассмотрении системы двух уравнений с малым внешним периодическим воздействием

$$u(t) = (A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon (\cos \Omega t) B) u(t - 1) + F_2(u(t - 1), u(t - 1)) + \dots \quad (59)$$

Ограничимся изучением наиболее простого и интересного случая, когда матрица  $A_0$  имеет два собственных значения  $\kappa_{1,2} = \exp(\pm i\omega)$  и  $0 < \omega < \pi$ . Пусть  $\Omega \neq 2\pi n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) и  $\Omega \neq 2\omega$ . Повторяя предыдущие построения, для нахождения  $\xi(\tau, x)$  получим те же, что и выше, уравнения. Если же  $\Omega = 2\omega$ , то в правую часть соответствующего уравнения добавляется слагаемое

$$\frac{1}{2} \exp(-i\Omega) (Ba, a) \bar{\xi}(\tau, x),$$

а при выполнении для некоторого  $n_0 \neq 0$  соотношения  $\Omega = 2\pi n_0$  в правую часть добавляется лишь слагаемое  $(\cos 2\pi n_0 x) \exp(-i\omega) (Ba, b) \xi(\tau, x)$ .

## Выводы

1. Выше речь шла только о нахождении главных членов асимптотических по невязке решений исходных систем уравнений. После этого, применяя стандартные методы асимптотических разложений, можно строить и более высокие по порядку приближения таких решений. Это, в свою очередь, открывает возможность получать результаты о существовании точных решений, близким к асимптотическим по невязке. Отсюда уже решается вопрос о наследовании свойств устойчивости решений квазинормальной формы и соответствующих им решений исходной системы.

2. Построенные квазинормальные формы, как правило, являются нелинейными уравнениями с частными производными. Динамические свойства такого типа уравнений могут быть достаточно сложны и разнообразны (см., например, [15]). Тем самым можно сделать вывод о том, что для исходных систем уравнений (8) и (9) характерна сложная динамика.

3. В ряде наиболее интересных ситуаций квазинормальные формы представляют собой семейства краевых задач, зависящих от «континуальных» параметров. Каждому решению каждого из представителей этих семейств отвечает решение исходной системы. Отсюда заключаем, что для рассмотренных задач характерно явление гипермультистабильности, когда происходит резкое и неограниченное увеличение количества установившихся режимов при стремлении к нулю малого параметра.

4. Некоторые квазинормальные формы содержат в качестве параметра определенную выше величину  $\theta = \theta(\varepsilon)$ , причем  $\theta(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  бесконечно много раз пробегает значения от 0 до 1. Для различных значений  $\theta$  динамика соответствующих краевых задач может быть различна. Отсюда следует, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  возможен неограниченный процесс чередования «рождения» и «гибели» установившихся решений в исходной системе уравнений.

5. Может показаться, что численное исследование динамики квазинормальных форм является более трудной задачей по сравнению с задачей численного анализа исходной системы. Однако это не так. Во-первых, решения исходных систем устроены так, что их главные приближения являются решениями квазинормальных форм. Во-вторых, квазинормальные формы не содержат сингулярностей, поэтому проблем с организацией численного исследования не возникает, а для исходных систем такие исследования весьма затруднительны.

*Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ и гранта Президента РФ (соглашение №14.124.13.5948-МК).*

## Библиографический список

1. Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Н., Шарковский А.Н. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1986
2. Maistrenko Yu.L., Maistrenko V.L., Chua L.O. Cycles of chaotic intervals in a time-delayed Chua's circuit // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3, № 6. P. 1557.
3. Каценко Д.С. Динамика простейших кусочно-линейных разрывных отображений // Модел. и анализ информ. систем. 2012. Vol. 19, № 3. P. 73.

4. *Kulenovic M. R.S., Ladas G.* Dynamics of second order rational difference equations with open problems and conjectures. Chapman & Hall/CRC. 2002
5. *Шноль Э.Э.* Об устойчивости неподвижных точек двумерных отображений // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 7. С. 1156.
6. *Kuramoto Y., Tsuzudi T.* On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems// Progr. Theor. Phys. 1975. Vol. 54, № 3. P. 687.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
8. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
9. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Диф. уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1448.
10. *Kaschenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // Int. J. of Bifurcations and chaos. 1996. Vol. 6, №7. P. 10939.
11. *Кащенко И.С.* Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 421, № 5. С. 586.
12. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Математика и механика. 1937. Т. 1, № 6. С. 1.
13. *Кащенко С.А.* Уравнения Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Журнал Вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, № 3. С. 457.
14. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1974.
15. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. матем. Новейшие достижения. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 28. С. 207.

*Поступила в редакцию 29.11.2013*

## LOCAL DYNAMICS OF DIFFERENCE AND DIFFERENCE-DIFFERENTIAL EQUATIONS

*I. S. Kaschenko,<sup>1</sup> S. A. Kaschenko<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> P.G. Demidov Yaroslavl State University

<sup>2</sup> National Research Nuclear University «MEPhI»

We study local dynamics of difference and singular perturbed difference-differential systems in the neighborhood of zero equilibrium state. All critical cases in this problem have infinite dimension. We construct special nonlinear equations that play the role of normal form. Their nonlocal dynamics describes the behavior of solution of initial system.

*Keywords:* Quasi-normal form, delay, difference equation, difference-differential equation.



*Кащенко Илья Сергеевич* – родился в Ярославле (1982), окончил Ярославский государственный университет (2004). После окончания ЯрГУ работает там же. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ЯрГУ (2006) в области нелинейной динамики уравнений с запаздыванием. Является автором 35 научных и научно-методических трудов.

150000 Ярославль, ул. Советская, д. 14  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
E-mail: [iliyask@uniyar.ac.ru](mailto:iliyask@uniyar.ac.ru)



*Кащенко Сергей Александрович* – родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). После окончания ЯрГУ работает там же. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1990) в области теории нелинейных колебаний. Автор пяти монографий. Опубликовал 230 научных статей по направлению, указанному выше.

150000 Ярославль, ул. Советская, д. 14  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
115409 Москва, Каширское шоссе, 31  
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
E-mail: [kasch@uniyar.ac.ru](mailto:kasch@uniyar.ac.ru)



## ОТ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ – К НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ\*

*М.И. Мотова, В.Д. Шалфеев*

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

В статье дан ретроспективный взгляд на университетский курс лекций по теории колебаний и его эволюции за семидесятилетний период на примере лекций, читавшихся для студентов-радиофизиков в Нижегородском университете.

*Ключевые слова:* Курс лекций по теории колебаний, нелинейные колебания, нелинейная динамика.

Роль теории колебаний в различных ее обликах – нелинейных колебаний, нелинейной физики, нелинейных волн, нелинейной динамики, теории динамических систем, качественной теории дифференциальных уравнений, синергетики – и сейчас огромна. Теория колебаний – наука об общих закономерностях эволюционных процессов различной природы: физической, химической, биологической, экономической, социальной. . . Изучаемая ею математическая модель – динамическая система – стала основной математической моделью точной науки.

*Ю.И. Неймарк*

*«Личность в науке. А.А. Андронов», 2001*

Вопрос о том, чему учить и как учить, во все времена относился к числу наиболее актуальных, наиболее проблемных и наиболее обсуждаемых как среди тех, кто учит, так и среди тех, кто учится. В полной мере это относится и к современному университетскому образованию. Общее направление подготовки по любой специальности в основном определяется набором общеспециальных дисциплин, а конкретная подготовка (специализация) – набором спецкурсов. Наборы спецкурсов

\*Статья написана по материалам доклада на X Международной школе «Хаотические автоколебания и образования структур», 7–12 октября 2013 г. Саратов, Россия.

и их содержание, как правило, периодически обновляются в соответствии с изменяющимися запросами отраслей – потребителей выпускников по данной специальности. Что касается общеспециальных дисциплин, то и набор курсов и их содержание, несомненно, обладают определенной степенью консервативности и изменяются существенно медленнее, поскольку именно они определяют «лицо» специальности (а «лицо», хотя и подвержено некоторым изменениям, тем не менее должно оставаться узнаваемым).

Очевидно, что решение задач оптимизации управления образовательными процессами требует понимания закономерностей развития тех или иных специальностей, что, в свою очередь, определяет актуальность изучения основных тенденций эволюционного развития общеспециальных дисциплин, составляющих основу специальности. В общем случае задача представляется трудноразрешимой, поскольку для различных специальностей существует множество различных факторов (как объективного, так и субъективного характера), влияющих на их развитие. Однако, даже упрощенный вариант рассмотрения отдельного, частного случая развития конкретной дисциплины для конкретной специальности, несомненно, может представлять интерес. Принимая во внимание это обстоятельство, авторы выбрали для дальнейшего рассмотрения типичный общеспециальный курс лекций по теории колебаний (специальность – радиофизика).

В 1945 году в Горьковском (Нижегородском) университете в ответ на запросы промышленности в специалистах по СВЧ-электронике, радиолокации, радиосвязи был создан первый в нашей стране радиофизический факультет и открыта подготовка по новой специальности – радиофизике. Фундаментом радиофизики как науки, являются электроника, электродинамика и теория колебаний (см. Физический энциклопедический словарь [1]). Естественно, что в цикле общеспециальных дисциплин по этой специальности наряду с другими присутствует дисциплина – теория колебаний.

В этой статье авторы попытались представить ретроспективный анализ содержания курса лекций по теории колебаний, читавшегося в Горьковском (Нижегородском) университете на протяжении около 70 лет различными лекторами, и рассмотреть особенности его эволюционной динамики.

По-видимому, первый лекционный курс по теории колебаний, систематически излагавший физику колебательно-волновых процессов и методы их исследования, читался Л.И. Мандельштамом для студентов-физиков МГУ. До этого в учебном плане высшей школы теории колебаний как отдельного курса не существовало.

Записи этого курса, близкие к стенограмме, в 1930–1932 годах были сделаны А.А. Андроновым. Им же был прочитан ряд лекций в этом курсе по плану Л.И. Мандельштама (например, лекции 11, 17, 18, 23). Конспект в это время вел М.А. Дивильковский.

С использованием записей А.А. Андронина курс лекций Л.И. Мандельштама был опубликован в 1972 году в виде книги [2]. Главная особенность этого курса состояла в том, что здесь впервые предметом изучения стали не свойства отдельных колебательных систем разной физической природы, а общие свойства колебательно-волновых процессов и систем, независимо от их физической природы. Объем курса – 32 лекции.

В лекциях рассматриваются линейные колебания сосредоточенных систем: математическое описание колебательных процессов, сложение линейных колебаний, вынужденные колебания, резонанс, параметрический резонанс. И хотя основное внимание сосредоточено на линейных системах, имеется несколько лекций, содержащих своеобразное краткое введение в теорию нелинейных колебаний (фазовая плоскость консервативных систем, ламповый генератор), а во второй части лекций рассматриваются и колебания в распределенных системах.

В 1931 году А.А. Андронов переезжает из Москвы в Горький, где с 1933 года заведует кафедрой теоретической физики и физики колебаний физико-математического факультета ГГУ. Здесь А.А. Андронов читает курс лекций по теории колебаний для студентов-физиков. Заметим, что в этот период времени А.А. Андронов с соавторами готовит рукопись будущей книги «Теория колебаний» [3]. Сохранились лекции Андропова, запись которых сделана студентом тех лет, а затем сотрудником кафедры Н.И. Ашбелем в 1934–1936 годах.

В Приложении представлен полекционный план курса, прочитанного А.А. Андроновым, по записям, сделанным Н.И. Ашбелем. Курс разбит на три части: первая (20 лекций) для студентов 3 курса, вторая (52 лекции) для студентов 4 курса, третья (43 лекции) для студентов 5 курса. Общий объем 115 лекций.

В первой части этого курса лекций, в основном, излагается теория линейных колебаний с большим числом примеров из области электротехники (теория переменных токов, трансформатор, мост Уинстона и др.), радиотехники (модуляция, прием-передача, спектры и др.) и других областей (теория атома, теория атмосферных помех и др.). Во второй части излагается теория нелинейных колебаний сосредоточенных систем. Здесь, в основном, изложение соответствует книге «Теория колебаний» [3], однако есть разделы, не вошедшие в книгу, например, несколько лекций посвящено теории захватывания (синхронизации). Наконец, третья часть содержит теорию колебаний распределенных систем. Интересно отметить, что в первой и второй частях наряду с использованием аналитических и асимптотических методов (что характерно для курса Л.И. Мандельштама) очень широко используются качественные методы теории дифференциальных уравнений и теории бифуркаций. По существу, во второй части изложена теория нелинейных колебаний на плоскости, называемая сейчас классической теорией нелинейных колебаний.

В 1945 году при организации радиофизического факультета и создании на новом факультете кафедры теории колебаний (заведующим кафедрой стал А.А. Андронов) этот курс становится основным профильным кафедральным курсом. В этот период курс несколько сократился за счет изъятия из него разделов, непосредственно относящихся к профилю других кафедр, созданных на радиофизическом факультете – электроники, радиотехники, электродинамики, распространения радиоволн.

Рассматривая курс А.А. Андропова в целом, следует отметить, что для него, несомненно, характерна преемственность с курсом Л.И. Мандельштама, поскольку в этом курсе, так же как и в курсе Л.И. Мандельштама, излагается физика колебательно-волновых процессов и систем. Судя по содержанию, А.А. Андронов, как и Л.И. Мандельштам, рассматривал теорию колебаний (физику колебаний) как часть теоретической физики. В этой связи интересно отметить, что кафедра, которой заведовал А.А. Андронов на физико-математическом факультете ГГУ, имела название «кафедра теоретической физики и физики колебаний». По сравнению с курсом Л.И. Мандельштама, А.А. Андронов существенно расширил объем курса. Расши-

рен раздел, касающийся теории линейных колебаний, в частности, за счет большого числа примеров из актуальных для того времени приложений в электро- и радиотехнике. Существенно расширена, хотя и осталась в рамках линейной, часть курса по колебаниям в распределенных системах, в частности за счет примеров. Наконец, в курсе А.А. Андропова представлена практически полностью новая, отсутствовавшая в курсе Л.И. Мандельштама, очень объемная часть теории нелинейных колебаний, включающая как качественные методы исследования нелинейных систем на плоскости, так и большое число примеров исследования конкретных нелинейных систем.

В курсе лекций, прочитанном А.А. Андроновым, в последующие годы, конечно, происходили изменения по требованиям времени.

С 1953 года заведующим кафедрой теории колебаний становится Н.А. Железцов, ученик А.А. Андропова. Именно он читает в 50-е годы курс лекций по теории колебаний (при этом он читал часть лекций еще в курсе Андропова). В этот период Н.А. Железцов вместе с Е.А. Леонтович-Андроновой работает над вторым, переработанным и дополненным изданием книги «Теория колебаний» [4]. По сравнению с курсом А.А. Андропова, в курсе лекций Н.А. Железцова произошло существенное сокращение общего объема (осталось примерно 60 лекций). Несколько сокращена часть, посвященная линейным колебаниям, (за счет физических примеров) и полностью изъята часть, связанная с распределенными системами. Зато занимающий центральное место в курсе раздел по теории нелинейных колебаний существенно расширен как за счет изложения новых методов, интенсивно развивавшихся в 1950-е годы (метод Д-разбиений, метод малого параметра при старшей производной, метод точечных отображений, методы качественной теории дифференциальных уравнений и теории бифуркаций), так и за счет включения большого числа примеров по исследованию устойчивости, исследованию предельных циклов и т.д. Кроме этого в курсе довольно большой объем отведен изложению основ теории систем автоматического регулирования, следящих систем, в частности, исследованию устойчивости таких систем, условий возбуждения автоколебаний в зависимости от используемых параметров.

Обсуждая в целом изменения, введенные Н.А. Железцовым, можно сделать вывод, что позиции курса теории колебаний на радиофизическом факультете, как курса по физике колебательно-волновых процессов и систем (каким трактовали его Л.И. Мандельштам и А.А. Андронов), в курсе Н.А. Железцова ослабились из-за резкого уменьшения числа физических примеров и полного изъятия раздела по колебаниям распределенных систем. Однако наряду с этим произошло и значительное расширение разделов, связанных с новыми методами теории нелинейных колебаний и новыми приложениями теории колебаний для изучения систем автоматического регулирования. Это объясняется тем, что на кафедре в этот период активно велись работы по исследованию систем автоматического регулирования, начатые еще при А.А. Андронове, а также работы по созданию одной из первых в СССР цифровых вычислительных машин – «машины ГИФТИ» [5] (именно А.А. Андронов в начале 50-х годов обратил внимание на перспективность этих работ). Поэтому включение Н.А. Железцовым в курс теории колебаний разделов по динамике систем автоматического регулирования и по динамике таких схем, как мультивибратор, кипп-реле, триггер (основной элемент ЭВМ), представляется достаточно оправданным для того времени.

Наряду с этим интересно отметить, что в этот период времени значительно обострился интерес к поиску и анализу предельных циклов в системах разной природы, не только физических, но и биологических, химических и т.д. (Своеобразная «охота на предельные циклы» была объявлена еще А.А. Андроновым [6].) Таким образом, к 60-м годам становится заметным, что теория колебаний может не только трактоваться как физика колебательно-волновых процессов и систем, но и иметь более широкую трактовку как нелинейная динамика колебательно-волновых систем любой природы – физических, биологических, химических, социально-экономических и т.п. К 90-м годам тенденция к этим изменениям значительно укрепилась и фактически получила признание во всем мире [7]. В этом убеждают огромное число приходящихся на этот период конференций, книг, статей по нелинейной динамике биологических систем, социально-экономических систем, нейродинамике и др.

В середине 60-х годов курс теории колебаний начинает читать М.И. Рабинович, ученик А.В. Гапонова-Грехова. В этот период в Горьком под общим руководством А.В. Гапонова-Грехова интенсивно развиваются исследования по теории нелинейных волн (ударные волны, стационарные волны, теория солитонов и др.). Активно развивается и теория многомерных динамических систем, в частности, теория динамического хаоса (Ю.И. Неймарк, Л.П. Шильников, М.И. Рабинович).

М.И. Рабинович предпринимает попытку осуществить достаточно смелое изменение курса теории колебаний для студентов-радиофизиков, имеющее целью восстановить традиции чтения курса теории колебаний как курса по физике колебательно-волновых процессов и систем, заложенные Л.И. Мандельштамом и А.А. Андроновым. Для этого, понимая, что увеличение числа часов по лекциям практически невозможно, М.И. Рабинович предлагает новую концепцию чтения курса лекций по теории колебаний, предполагающую не последовательное, как было ранее при Л.И. Мандельштаме и А.А. Андронове, а параллельное изложение теории колебаний сосредоточенных систем и теории колебаний распределенных систем (теории нелинейных волн). Он разрабатывает новую рабочую программу курса и начинает читать по ней курс лекций. Несколько позднее М.И. Рабинович, вместе с Д.И. Трубецковым выпускают книгу по теории колебаний и волн, реализующую концепцию параллельного изложения теории колебаний и волн в едином курсе [8]. Примерно в это же время к этому курсу сотрудниками кафедры теории колебаний ГГУ (ННГУ) выпускается сборник задач под редакцией Л.В. Постникова и В.И. Королева [9]. Подготовка книги [8] заняла достаточно продолжительное время, а первоначально запись курса была сделана в 1972–1973 годах сотрудниками кафедры М.И. Мотовой и Т.М. Таранович, а в 1978 году курс был издан в виде учебного пособия [10]. Общий объем примерно 50 лекций. В курсе М.И. Рабиновича появились новые разделы по конкуренции, синхронизации, анализу многомерных систем (состояния равновесия систем третьего порядка, динамический хаос, бифуркации перехода к хаосу, генератор хаоса и др.). И, естественно, появились новые разделы по распределенным системам (теории нелинейных волн) с большим количеством примеров.

Рассматриваемые здесь программы курсов лекций по теории колебаний, читавшихся с временными интервалами порядка 15–20 лет, охватывают период около 70 лет. Естественно, что за такой период времени прошло несколько поколений студентов и преподавателей, появились заново или утратили свою актуальность отдельные разделы науки, развились новые методы исследования, возникли новые прило-

жения. Все это, в той или иной степени, влияло на содержание курса. Кроме того, следует принять во внимание, что за этот период времени неоднократно происходили упорядочения типовых учебных планов и программ, как правило, приводившие к сокращению лекционного объема, что также вело к некоторым изменениям в содержании курса. Какие выводы можно сделать из проведенного рассмотрения?

Сравнение программ курсов показывает, что во всех программах есть некая инвариантная часть со времен А.А. Андропова – часть, касающаяся изложения теории нелинейных колебаний на плоскости, называемая сейчас классической теорией колебаний. В современных учебных планах по радиофизике эта часть присутствует под названием «Основы теории колебаний». Кроме этого в последние 40–50 лет сформировалась и приобрела законченность теория нелинейных волн. Все это говорит о том, что в современных программах по радиофизике как общеспециальная дисциплина наряду с другими должна выступать именно «теория нелинейных колебаний и волн» (как единый курс или как два курса). На фоне реализующейся сейчас идеи разделения обучения на программы бакалавриата, магистратуры и аспирантуры весьма актуальной становится задача оптимизации процесса обучения. Приведенный выше анализ изменений, происходивших с курсом лекций по теории колебаний, позволяет считать для радиофизиков наиболее целесообразной следующую последовательность обучения.

*Бакалавриат* – основы теории нелинейных колебаний и волн.

*Магистратура* – современные проблемы теории нелинейных колебаний и волн (многомерные динамические системы, динамический хаос, синхронизация, структурообразование).

*Аспирантура* – обзорные лекции и семинары по программе кандидатского минимума и новейшим достижениям по разделу «теория колебаний и волн».

Несомненно, что курс лекций по теории колебаний и волн может быть ориентирован не только на студентов-физиков, но и на студентов других специальностей – биологов, химиков, студентов социально-экономических специальностей и т.д. В этом случае курс теории колебаний, как курс по физике колебательно-волновых процессов и систем, должен трансформироваться в курс нелинейной динамики с акцентом на примеры из соответствующих областей применения. Здесь основным содержанием курса станут методы исследования нелинейных систем и содержательные примеры из соответствующей области знания.

Проведенный ретроспективный анализ развития курса лекций по теории колебаний – это своеобразный взгляд в прошлое колебательно-волновой науки. Однако такой взгляд на теорию колебаний сквозь призму прошлого несомненно полезен для осмысления современного состояния теории колебаний и направлений ее развития в будущем.

Теория колебаний или, говоря современным языком, нелинейная динамика [7], находится сейчас на этапе интенсивного развития. Большинство процессов и явлений, которыми занимается современная наука, включают в себя время в качестве переменной, то есть основной интерес при изучении этих процессов и явлений связан с динамическими закономерностями. Динамика современных технических, биологических, глобальных социэкономических процессов и систем обладает исключительной сложностью. Тем не менее, несмотря на сложность, на довольно больших отрезках времени поведение этих систем определяют сравнительно простые дина-

мические модели и закономерности. Эти закономерности на ранних этапах развития нелинейной динамики были связаны с движениями типа предельных циклов, торов, а на более поздних этапах определялись странными аттракторами. Для современной нелинейной динамики сложных систем характерно наличие таких объектов, как устойчивые переходные состояния. Переходная динамика с метастабильными состояниями – наиболее адекватная модель динамики сложных систем. Черты такого поведения мы находим сейчас в нейродинамике [11], в социэкономике и др. Именно на изучении таких моделей, по-видимому, будет ориентирован в будущем курс теории колебаний. Изучение процессов развития сложных систем и их понимание в значительной степени опирается на наличие в них двух характерных процессов современной нелинейной динамики – конкуренции и кооперации (синхронизации). Именно эти процессы, по-видимому, станут своеобразным ключом к пониманию динамики сложных систем.

Авторы благодарны М.И. Рабиновичу за обсуждение материалов.

## Приложение

### Лекции А.А. Андропова, записанные Н.И. Ашбелем

**Из вступительной лекции:** Физика колебаний изучает общие колебательные закономерности. Автоколебания – периодический колебательный процесс, получаемый от непериодического источника (например, провода гудят от ветра, который вовсе не совершает периодических колебаний, вибрация перископа подводной лодки при определенной скорости лодки, автоколебания крыльев самолета).

### III курс

#### 1934 год, I семестр (1–11 лекции)

Линейные системы с одной степенью свободы и элементы теории нелинейных систем. Гармонические колебания. Примеры колебательных систем: колебания пробирки на воде; колебания пробки, закрывающей сосуд; маятник; электрический контур. Уравнения движения. Особые точки дифференциальных уравнений. Фазовая плоскость. Типы состояний равновесия – седло и центр. Осциллятор с трением. Логарифмический декремент затухания. Сильное затухание. Аперриодическое движение.

Линейные системы, обладающие отрицательным трением. Примеры: маятник Фроуда, катодный генератор, схема Мейснера. Энергетическое толкование декремента затухания.

Вопросы идеализации колебательных систем. Вырожденные системы.

Ламповый генератор. Теория вынужденных колебаний.

Системы с конечным числом степеней свободы. Автономные системы, неавтономные системы. Характеристики вынужденных колебаний, резонансные кривые.

Теория переменных токов. Простая цепь переменного тока, векторная диаграмма напряжений. Резонанс напряжений и токов.

### **1935 год II семестр (12-20 лекции)**

Сложные цепи переменного тока. Последовательное и параллельное соединение проводников. Применение комплексного метода. Примеры: схема Бушера, Чарданцева и других; метод трех вольтметров; мостик Уинстона.

О тепловых приборах. Трансформаторы. Графические построения для определения изменения тока.

Модуляция и прием. Резонансные кривые, скорость установления амплитуды. Прием идеального модулированного сигнала, искажения. Спектры сигналов. Частотная модуляция. Модуляция звука. Модуляция света. Частотомер. Гетеродинный прием.

Рассмотрение взаимодействия колебательных систем. О биениях. Спектральные разложения для определения оценки действия сил на линейный резонатор. Комплексный интеграл Фурье. Теорема Рэлея. Мера расплывчивости, теорема Мандельштама.

Теория атома. Задача о движении материальной частицы в классической и волновой механике. Элементарная теория атмосферных помех.

Параметрический резонанс. Учет трения. Зоны Матъе.

Теория линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Теорема Флоке.

### **IV курс**

#### **1935 год, I семестр (21–45 лекции)**

Классификация колебательных систем – автономные, неавтономные, диссипативные, автоколебательные. О нелинейности и идеализации.

Фазовая плоскость. Особые точки состояния равновесия. Об устойчивости движения. Устойчивость по Ляпунову. Метод изоклин. Примеры: маятник Фроуда (автономная система); схема детекторного приемника (неавтономная система).

Типы состояний равновесия. Ламповый генератор – уравнения, состояния равновесия.

Консервативные системы (с использованием уравнений Гамильтона). математическая характеристика консервативных систем. Поведение фазовых траекторий вблизи состояния равновесия – экстремум потенциальной энергии. Центр, седло, построение сепаратрис. Уравнения изоклин. Маятник Фроуда (автономная система). Схема детекторного приемника (неавтономная система).

Плоскость параметров. Бифуркационная диаграмма.

Катодная лампа. Диод. Триод. Статические и динамические характеристики. Экранированная лампа. Динатронный эффект. Усилители на сопротивлении. Усилитель с несколькими каскадами.

Катодная лампа как детектор. Приемники прямого усиления, супергетеродин. Катодная лампа как источник автоколебаний. Динатрон с последовательным включением. Схема Мейснера – составление уравнений, определение амплитуд, условия возбуждения. О балансе энергии автоколебательной системы. Условие возбуждения генератора. О мягком режиме. Синусоидальные колебания генератора. Нахождение стационарных амплитуд при жестком режиме для различных параметров. Бифуркационная диаграмма.

Метод резонансных членов. Генератор с Z-характеристикой. Метод приспособивания начальных условий. О мощности генератора.

Разрывные колебания – условия получения таких уравнений, способ Ляпунова определения устойчивости состояния. Условие скачка. Пример: маятник Фроуда без груза; электрическая релаксационная схема (пример Мандельштама).

### **1936 год, II семестр (46–72 лекции)**

Метод ван дер Поля для автономных систем. Область применения. Безразмерные переменные и параметры. Полные и укороченные уравнения ван дер Поля и связь с фазовой плоскостью системы. Мягкий и жесткий режимы возбуждения генератора. Бифуркационные диаграммы. Динактронный генератор. Поправка на частоту.

Качественная теория поведения фазовых траекторий для систем 2-го порядка. Линеаризация. Типы состояний равновесия. Фазовая плоскость для различных типов состояний равновесия для разных параметров.

Примеры : вольтова дуга, мультивибратор Абрама–Блоха, асинхронный мотор, схема Мандельштама.

Уравнение с малым параметром при старшей производной – разрывные колебания как предельный случай колебаний, когда один из параметров стремится к нулю.

Метод последовательных приближений, определение предельных циклов, фазовый портрет для устойчивых и неустойчивых циклов. Устойчивость в большом. Циклы без контакта. Индексы Пуанкаре. Зависимость качественной картины интегральных кривых от параметра. Критерий Бендиксона. Пример: кипп-реле. Об устойчивости предельных циклов.

Действие внешней силы на нелинейную систему. Исследование с помощью метода ван дер Поля. Вибрационный гальванометр (по статье А.Г. Любиной 1934 г.) Резонансные кривые, нелинейный резонанс (срывы).

Захватывание, мягкий режим, резонансные кривые на плоскости. Интервал захватывания при слабом и сильном сигнале. Качественная картина на плоскости переменных ван дер Поля.

Случай действия внешней периодического сигнала на автоколебательную систему, когда частота внешнего сигнала приблизительно в 2 раза больше собственных колебаний системы. Резонанс 2-го рода.

Действие сигнала на несамовозбужденную систему. Асинхронное воздействие – тушение и возбуждение.

### **V курс**

#### **1936 год, I семестр (73–115 лекции)**

Связанные линейные консервативные системы с двумя степенями свободы. Вековое уравнение, нормальные частоты, коэффициенты распределения. Различные начальные условия. Парциальные системы и парциальные частоты. Для связанных маятников – парциальные, нормальные частоты, связь и связанность. Кратные частоты. Автоколебательная система с двумя степенями свободы. Нормальные координаты.

Теория дискретных систем со многим степенями свободы.

Действие внешней синусоидальной силы на линейную консервативную систему с двумя степенями свободы. Резонанс.

Теория телефона, применение теории переменных токов. Диссипативная линейная система. Решение векового уравнения. Общее решение уравнений.

Теория фильтров. Постановка задачи о фильтрах на языке теории переменных токов. Электротехническая теория фильтров. Об акустических фильтрах. Теория кристаллической решетки (приложение теории колебаний к теории строения вещества).

Классическая теория теплоемкости.

Общая теория нелинейных дискретных систем. Грубая система в пространстве. Системы 3 порядка, генератор с дополнительным контуром, центробежный регулятор.

Теория распределенных систем. Струна, антенна (разные граничные условия), крутильные колебания вала, воздушные волны. Исследование колебаний стержня (собственные и вынужденные колебания).

Общая постановка задачи о вынужденных колебаниях распределенной системы. Общая краевая задача. Понятие об общей проблеме собственных значений (проблема Штурма–Лиувилля). Элементарная теория колебаний (поперечных) стержней. Поперечные колебания стержня с массой на конце (задача Рэлея).

Понятия о скорости распространения возмущения в распределенных системах. Дисперсия, фазовая и групповая скорость.

#### Библиографический список

1. Физический энциклопедический словарь (статья о радиофизике). М.: Советская энциклопедия, 1984.
2. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
3. *Андронов А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. Ч. 1, М.-Л.: ОНТИ, 1937.
4. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний, 2 изд. М.: Физматгиз, 1959.
5. *Мотова М.И., Шалфеев В.Д.* А.А. Андронов и зарождение кибернетики в Горьковском университете. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2013.
6. Личность в науке. А.А. Андронов. Документы жизни. Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2001.
7. *Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И.* Л.И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний и волн // УФН. 1979 Т. 128, вып. 4. С. 579.
8. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984
9. Сборник задач по теории колебаний / Под ред. Л.В. Постникова, В.И. Королева. М.: Наука, 1987.
10. *Рабинович М.И., Мотова М.И., Тарантович Т.М.* Колебания и волны в нелинейных системах. Учебное пособие. Горький: Изд-во ГГУ, 1978.
11. *Рабинович М.И., Мюезинолу М.К.* Нелинейная динамика мозга: эмоции и интеллектуальная деятельность // УФН. 2010. Т. 180, вып. 4. С. 371.

Поступила в редакцию 30.11.2013

## FROM THEORY OF OSCILLATIONS TO NONLINEAR DYNAMICS

*M.I. Motova, V.D. Shalfeev*

Nizhny Novgorod State University

The paper deals with the retrospective consideration of course lectures on theory of oscillations in Nizhny Novgorod university and its evolution during more than 70 years.

*Keywords:* Lectures on theory of oscillations, nonlinear oscillations, nonlinear dynamics.

*Мотова Марина Ильинична* – родилась в Горьком (1939), окончила радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1961). После окончания ГГУ работала инженером вычислительного центра, а с 1963 года преподает на кафедре теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика механических, биологических, химических систем, а также история развития колебательно-волновой науки, в частности, в Нижегородском университете. Опубликовала более 30 научных работ, учебных пособий, а также работ, связанных с историей школы академика А.А. Андропова и кафедры теории колебаний Нижегородского университета. Автор монографии «А.А. Андронов и зарождение кибернетики в Нижегородском университете» (Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2013; в соавторстве с Шалфеевым В.Д.).

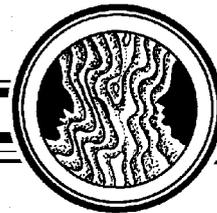


603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23а  
Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского  
E-mail: motova@rf.unn.ru

*Шалфеев Владимир Дмитриевич* – родился в Арзамасе Горьковской области (1941). После окончания в 1963 году ГГУ работал научным сотрудником Горьковского исследовательского физико-технического института (НИФТИ), зав. сектором, лабораторией, зам. директора по научной работе, исполняющим обязанности директора НИИ прикладной математики и кибернетики при ГГУ (1963–1976). Декан факультета Вычислительной математики и кибернетики ГГУ (1976–1981). Заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования (1981–2012). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ГГУ (1967) и доктора физико-математических наук в Саратовском университете (1991) в области теории колебаний и волн, нелинейной динамики сетей синхронизации – устойчивость, структуры, хаос. Автор 5 монографий и 3 учебных пособий. Опубликовал более 200 научных работ по направлениям, указанным выше. Лауреат премии Ленинского комсомола в области науки и техники (1974), премии РАН им. А.А. Андропова (2012).



603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23а  
Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского



Посвящается В.Я. Кислову,  
Учёному и Организатору

**ИССЛЕДОВАНИЯ ГЕНЕРАЦИИ СВЧ-ШУМА  
В ИРЭ АН СССР 1962–1967 годов –  
НАЧАЛО НОВОГО НАУЧНОГО НАПРАВЛЕНИЯ\***  
Лекция

*Е.А. Мясин*

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Фрязинский филиал

Статья посвящена **истории создания в 1967 году шумотрона** – генератора хаотических колебаний, содержащего две лампы бегущей волны, последовательно замкнутых в кольцо. Показано, что создание шумотрона является результатом развития работ по генерации СВЧ-шума в системах «электронно-ионная плазма–электронный поток», проводимых в лаборатории В.Я. Кислова. Начало этим работам положили теоретических исследования Кислова (1956–1960 гг.) по взаимодействию электронного потока с электронно-ионной плазмой, проведенных В.Я. Кисловым. Экспериментальная проверка результатов его теории привела (1962–1963 гг.) к обнаружению генерации СВЧ-шума в плазменной лампе обратной волны. Утверждается, что исследование работы шумотрона **впервые в явном виде** показало причину возникновения режима генерации СВЧ-шума в детерминированной системе без плазмы и независимо от собственных шумов электронного потока. В самой конструкции шумотрона эта причина выделена в виде лампы бегущей волны как нелинейного элемента, то есть причиной этого режима является **нелинейность** системы. Дается краткая справка о развитии работ по шумотронной тематике в лаборатории В.Я. Кислова в течение последующих лет, включая 1980 год. На основе проведенного рассмотрения делается вывод о том, что результаты исследований в ИРЭ АН СССР положили начало новому научному направлению – исследованию нелинейной хаотической динамики автоколебательных систем.

*Ключевые слова:* Электронно-ионная плазма, электронный поток, усиление, ЛБВ-усилитель, ЛБВ-нелинейный элемент, шумотрон.

Прежде, чем приступить к письменному изложению лекции, прочитанной мною на X Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», я хочу отметить, что предложение написать статью по материалам лекции было для меня неожиданным. Никогда мне не приходилось писать статью в научный журнал на историческую тему, хотя и связанную с серьезными научными результатами.

\*Статья написана по материалам доклада на X Международной школе «Хаотические автоколебания и образования структур», 7–12 октября 2013 г. Саратов, Россия.

Я сравниваю эту мою статью-лекцию с рассказом о том, как на И. Ньютона упало яблоко с яблони, под которой он отдыхал, и вот к нему пришло озарение в виде его известных законов, которыми все пользуются, забыв, естественно, о яблоке. И, вообще, кому это яблоко интересно? Мало того, я взялся рассказать, как это яблоко созревало прежде, чем упасть, так как о результате этого падения – шумотроне, кто только не писал. Но, дело в том, что рассказ о созревании яблока в нашем случае – это рассказ о приоритете открытия нового научного направления. Поэтому я и согласился на столь необычное предприятие. И ещё, я буду излагать материал лекции в том виде, как она была прочитана мною устно, от первого лица, Придётся рассказывать и о себе, поскольку я был непосредственным участником исследований, вынесенных в название, и одним из авторов заявки на шумотрон, и прошу не подозревать меня в нескромности. Итак, я начинаю.

### Введение

Во-первых, я хотел бы поблагодарить Дмитрия Ивановича Трубецкого за предложение подготовить Лекцию с любым названием, касающемся истории появления первого генератора шума на основе нелинейной хаотизации колебаний в ЛБВ с задержанной обратной связью – «шумотроне», и предложить её вниманию столь квалифицированной аудитории в вопросе нелинейной динамики различных физических систем. Поскольку сам факт появления шумотрона не мог бы состояться в отсутствие соответствующей предыдущей истории исследований, проводимых в лаборатории Владимира Яковлевича Кислова, то и название Лекции, связано с этим фактом. И посвящается она В.Я. Кислову – Учёному и Организатору.

Во-вторых, я принял это предложение после длительного размышления и вот почему. Основные события, о которых я собираюсь рассказать, произошли в период с 1959 по 1970 год. Как первый аспирант В.Я. Кислова я защитил кандидатскую диссертацию на тему «Исследование нового способа генерирования шумовых СВЧ-колебаний в системах с запаздывающей флюктуирующей обратной связью» 30 мая 1970 года. Думаю, что это была первая успешная защита по нелинейной хаотизации колебаний в динамической системе. За ней последовал нескончаемый ряд защит как кандидатских, так и докторских диссертаций по разработке экспериментальных систем и теоретических моделей этого явления, причём не только в электронных системах с задержкой и не только в ИРЭ АН СССР. Работа в этом направлении продолжается и сегодня, о чём свидетельствует эта конференция. Я искренне этому рад.

Но в конце 1980 года я круто поменял область своей деятельности, став заведующим лабораторией, в которой велись исследования генератора монохроматических колебаний с открытым резонатором – оротрона с двухрядной периодической структурой в 3 см диапазоне волн. Я продолжаю работать над продвижением этого прибора в субмиллиметровый диапазон и сегодня и достаточно успешно. Но связь с моей бывшей лабораторией, руководимой В.Я. Кисловым, в которой я перед уходом 13 лет был его заместителем, тогда не потерял. К работе, связанной непосредственно с генераторами шума, но уже в миллиметровом диапазоне и на твердотельной элементной базе, и, что важно, как руководитель этого направления я вернулся только

в 1984 году. Но основное внимание и время было отдано оротрону.

Короче, в настоящее время я не владею обширной информацией по изучению нелинейной динамики различных систем и вынужден следить за успехами в области исследования различных теоретических моделей устройств, демонстрирующих переход к хаосу, благодаря авторефератам диссертантов вашего университета, на которые иногда пишу отзывы. А также просматриваю монографии, которые мне любезно дарят помнящие меня нынешние исследователи динамического хаоса.

Тем не менее, я решил подготовить такую Лекцию, так как обдумывание её содержания увело меня в далёкую юность, о которой всегда приятно вспомнить через 51 год, тем более, что я был непосредственным участником исследований, вынесенных в название Лекции, а таких свидетелей и участников тех далёких событий, работающих в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, осталось двое: Н.Н. Залогин и Е.А. Мясин.

В.Я. Кислов сыграл решающую роль, хотя и опосредовано, в выборе моего жизненного пути, поэтому я считаю своим долгом рассказать о его теоретических (фундаментальных) и прикладных исследованиях, тем более что 26 сентября 2013 г. ему исполнилось бы 82 года. Его деятельность в Институте Академии наук является ярким примером инновационной деятельности, о которой сегодня так много высокопарно ратуют наши новые начальники в Правительстве, пытаюсь обвинить Академию наук в неспособности её организовать, а также во всех смертных грехах, не стесняясь использовать для этого любые средства.

Как известно, не смотря на протесты академического сообщества, Дума приняла в трех чтениях закон о так называемой реорганизации РАН с отделением от неё Институты. Тем самым узаконила развал Академии наук и рейдерский захват материального имущества Академии, переведя его под управление спец. структуры (Агентства), которая будет определять нужную чиновникам тематику и курировать хозяйственную деятельность Институты. Причём авторы, не побоюсь этого слова, гнусного Закона для его проталкивания в Думе организовали перед голосованием кампанию травли на продажном телевидении и в СМИ, которые не стеснялись выливать на Академию ушаты помоев, используя ложь и клевету. Ярким примером такой реформы в Армии является дело о миллиардных хищениях в ОборонСервисе, растраты в 2.5 миллиарда в РосНано и всего нескольких тысяч долларов США в Сколково. Далее всё прошло как по маслу. Верхняя палата, как всегда, проштамповала 25 сентября 2013 года поддержку, а президент своей подписью подтвердил содеянное. Блестящая иллюстрация мыслительных способностей нашей Власти, граничащих с предательством интересов России.

Но я перехожу от такого отступления к изложению собственно того, о чём хотел рассказать. Прежде всего, хочу представить Вам краткую справку о жизни и деятельности Владимира Яковлевича.

Родился в городе Дзержинске в семье инженеров-химиков. В 1949 году после окончания школы поступил на физико-технический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, теперь физический факультет, и окончил его 1955 году. С 1956 года – инженер ИРЭ АН СССР в отделе Н.Д. Девяткова, в 1961 году защитил диссертацию на соискание степени к. ф.-м. н., с 1962 года – заведующий лабораторией, в 1978 году защитил диссертацию на соискание степени д. ф.-м. н., с 1990 года – заведующий отделом. Лауреат Государственной Премии СССР (1980), Лауреат Премии Совета

Министров СССР (1984, 1989 гг.), Лауреат Государственной Премии РФ (2000 г.)

За кратким перечнем этих дат стоят годы напряжённого труда В.Я. и руководимых им коллективов учёных на благо Великой Страны Советов (в 2000 году премия присуждена за работы в области медицины). Состав лаборатории менялся на протяжении этих лет. Кроме того, при проведении работ по внедрению результатов исследований создавались творческие коллективы из сотрудников других лабораторий Института и других организаций.

## **ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЗМОЖНОСТИ УСИЛЕНИЯ И ГЕНЕРАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОННО-ИОННАЯ ПЛАЗМА–ЭЛЕКТРОННЫЙ ПОТОК (1959–1964 годы)**

### **Становление учёного**

После окончания МИФИ в 1961 году и года работы после распределения на предприятии п/я 1598, я поступил 2 октября 1962 году на работу в ИРЭ АН СССР. Я занял должность м.н.с. в новой лаборатории, которую руководство отдела СВЧ электроники в лице Н.Д. Девяткова и З.С. Чернова организовали для В.Я. Кислова.

В этой связи я не могу свидетельствовать лично о том, что предшествовало решению руководства отдела. Поэтому обращаюсь к воспоминаниям моего коллеги Николая Николаевича Залогина, выпускника ФИЗТЕХа, проходившего с 1957 года в отделе практику после третьего курса, а в 1960 году поступившего на работу в ИРЭ АН СССР на должность м.н.с. в тот же отдел. Вот как он сообщает об этом в своей книге [1].

«В ИРЭ в лаборатории З.С. Чернова после окончания МГУ появился молодой специалист В.Я. Кислов. Его отец Яков Васильевич Кислов был одним из помощников самого Курчатова, а многие друзья по университету распределились в Институт атомной энергии именно в подразделения, занимавшиеся плазмой. В.Я. Кислов провёл ряд теоретических исследований, которые показали, что по плазменному цилиндру, помещенному в продольное магнитное поле, в определённых диапазонах частот могут распространяться медленные электромагнитные волны, имеющие продольную компоненту электрического поля. При этом в отличие от спирали или других металлических замедляющих структур, упомянутая компонента имеет максимум на оси цилиндра. Это значит, что взаимодействие плазменной замедляющей структуры с электронным потоком должно быть существенно эффективнее, чем в случае традиционных вакуумных ЛБВ и ЛОВ. Результаты, полученные В.Я. Кисловым, подтверждённые экспериментом, привели к тому, что Н.Д. Девятков и З.С. Чернов перевели значительную часть сотрудников отдела на плазменную тематику».

Для развития этой тематики была организована (после успешной защиты В.Я. диссертации и прохождения по конкурсу на должность завлаба) лаборатория, в которую В.Я. Кислов набирал новых сотрудников, и я поступил к нему на работу.

Конечно, краткость – сестра таланта Николая Николаевича, но, по большому счёту, эти исследования были инициированы руководством отдела в 1956 году для исследования возможного использования плазмы в приборах миллиметрового диапа-

зона с длительным взаимодействием. Работа В.Я. Кислова была пионерской, так как впервые в ней было проведено рассмотрение взаимодействия ограниченного электронного потока с ограниченной плазмой (плазменный цилиндр). Поэтому к этой краткой справке Н.Н. Залогина я хотел бы привести документальные свидетельства.

На Международной конференции по миллиметровым волнам (1959 г., США) З.С. Чернов сделал доклад по результатам этой теоретической работы В.Я. Кислова и эксперимента, который подготовил и блестяще провёл вместе с ним Е.В. Богданов, ставший затем моим учителем при проведении экспериментов. Доклад был настолько интересен, что Политехнический институт Бруклина издал этот доклад отдельной брошюрой [2]. Содержание доклада на русском языке можно найти в работе [3].

Затем последовало развитие этих исследований, результаты которых отражены в открытой печати в работе [4]. Именно в этой работе В.Я. Кисловым рассмотрено взаимодействие электронного потока с плазмой в магнитном поле и получены дисперсионные уравнения плазменной ЛБВ и ЛОВ.

### Генерация СВЧ-шума в плазменной ЛОВ

Генерации шумовых колебаний в плазменной ЛОВ была обнаружена в конце 1962 года. Вот как об этом событии пишет Н.Н. Залогин в той же книге [1].

«Плазма в длинной стеклянной трубке образовывалась за счёт ионизации паров ртути быстрым (порядка 1 кВ) электронным пучком в продольном магнитном поле. Подбирая давление остаточных газов, ток и напряжение электронного пучка и величину магнитного поля, удалось быстро получить генерацию электромагнитных волн в 3 см диапазоне с излучением этих волн в пространство или в волновод. Измерения концентрации плазмы и величины магнитного поля подтвердили тот факт, что работает плазменная ЛОВ. Когда же начались измерения спектра возбуждаемых колебаний, всё стало непонятным. Экран анализатора спектра ИВ-66 был забит интенсивными шумами. Решили, что идёт наводка на усилитель промежуточной частоты, и стали измерять спектр с помощью перестраиваемого фильтра на СВЧ-резонаторе. И тут континуум. Вспомнили, что в микроволновых радиометрах работают плазменные источники шума, но у них спектральная плотность мощности шума (СПМШ) определяется как  $65 kT_0$ . Это соответствует  $2.6 \cdot 10^{-13}$  Вт/МГц. У нас же СПМШ на 8 порядков, то есть в 100 миллионов раз больше! Тогда это всё-таки генерация. Все окружающие сотрудники ничего не могли сказать по этому поводу. В те времена понятие автогенератор всегда почему-то связывалось с генератором ван дер Поля и соответствующим дифференциальным уравнением второго порядка, имеющим лишь периодические решения. Все были в плену фазовой плоскости, где траектории движения принципиально не могли пересекаться.

Заявка на изобретение (авторы Н.Н. Залогин и В.Я. Кислов) была подана в начале 1963 года. Она прошла довольно быстро. Сотрудники Комитета по открытиям и изобретениям признали её пионерской [5]. В том же 1963 году была опубликована теоретическая статья Е. Лоренца «Детерминированный непериодический поток» в американском журнале, посвященном физике атмосферы [E.N.Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow, Journal of the Atmospheric Sciences, 1963, 20, p.130–141]. Реально в этой статье были приведены дифференциальные уравнения, соответствующие

простейшему генератору хаотических колебаний. Нижегородские радиофизики на-ткнулись на эту работу только во второй половине 1970-х годов. На русский язык статья была переведена в 1981 году.

Следует заметить, что интерпретация эффекта шумовой генерации была да-на авторами заявки на вполне современном уровне. Предполагалось одновременное возбуждение нескольких (не менее трёх) видов колебаний – мод (mode) на неэк-видистантных частотах в заданном диапазоне и их нелинейное взаимодействие с рождением множества комбинационных составляющих. Дополнительная хаотизация колебаний обеспечивалась флуктуациями концентрации плазмы, степень которой за-висела от интенсивности возбуждаемых колебаний (ВЧ-разряд)».

С этого момента наших открытых публикаций с упоминанием о генерации шума до 1979 года [6] не было.

По-видимому, следует объяснить, что представляет собой анализатор спектра ИВ-66. Это анализатор спектра 3 см диапазона на отражательном клистроне. Полоса просмотра спектра, соответствующая его зоне генерации, составляет 15–20 МГц, но механически можно перестраивать это «окно» по диапазону. Для ИВ-66 это 3 см диапазон.

Заявка (кстати сказать, она была закрытой), как было сказано, была подана в начале 1963 года, но обнаружили эту генерацию в конце 1962 года. Если учесть, что я поступил на работу 2 октября 1962 года, не имея ни малейшего представления о СВЧ-электронике (так как окончил факультет теоретической и экспериментальной физики МИФИ, где этот курс не читали), то вся эйфория, связанная с данным откры-тием, не произвела на меня особого впечатления. Но, начав вникать в суть проблемы, читая приведенную ранее литературу и отчёты, а, также принимая участие в специ-фических для меня экспериментах, я в течение года вошёл в курс событий и стал полноправным членом очень дружной, как мне казалось, и интеллигентной команды исследователей и инженеров. Таким образом, я целый год занимался самообразова-нием, и В.Я. Кислов не только не мешал, но и содействовал этому. Кроме того, он не мешал мне заниматься вторым любимым делом, отпуская на спортивные сборы. Я был почти профессиональным игроком (вратарём) в команде по ручному мячу ещё со времени учёбы в МИФИ, которая, в конце концов, из команды инженеров пре-вратилась в команду СК «Кунцево». Меня так увлекла работа в лаборатории, что, когда в 1964 году (после того, как команда стала третьей в Первенстве СССР, а я – мастером спорта) тренер предложил мне стать профессиональным спортсменом, я отказался, не задумываясь. Но тренироваться и играть продолжал и в 1966 году вместе с командой стал чемпионом СССР и принял участие в играх на Кубок Ев-ропейских Чемпионов. В 1967 году в полуфинальных играх мы проиграли немцам (СК «Гуммерсбах») и у них, и у себя дома по 2 мяча. Расстаться с большим спортом пришлось в 1971 году после перехода на работу во Фрязинский филиал ИРЭ.

Когда я поступил на работу, лаборатория вела исследования в рамках НИР «Исследование радиофизических свойств электронно-ионной плазмы» (шифр «Финиш-АН»), которую успешно окончила в декабре 1964 года. Само название гово-рит о том, что к моменту начала работы В.Я. казалось, что основные исследования по плазменной тематике завершаются. Но ситуация изменилась, в связи с обнару-жением шумовой генерации в плазменной ЛОВ. Поэтому уже в марте 1964 года, то есть ещё до окончания НИР «Финиш-АН», В.Я. Кислов заключил Договор со

сторонней организацией на «Исследование возможности создания плазменных генераторов непрерывного действия» (НИР «Сабля», 1964–1965 гг.). В дальнейшем я не буду использовать воспоминания Н.Н. Залогина [1], а вести повествование только от первого лица, так как с этого времени я принимал в выполнении этой работы, как и последующих работах, самое непосредственное участие. Кроме того, в отличие от Н.Н. Залогина, который самонадеянно восстанавливал по памяти события этих лет, я, не надеясь на свою память, просмотрел все отчёты в библиотеке Первого отдела. Поэтому воспроизвожу слово в слово часть Аннотации к отчёту по этой работе, не содержащую закрытой информации. «Предлагается метод генерации широкополосного СВЧ-шума, основанный на возбуждении множества видов колебаний в неравновесной плазме и стохастическом перемешивании фаз и амплитуд этих колебаний. На основе предложенного метода рассмотрен ряд конкретных систем. . . ». И еще выдержка из Введения: «Метод заключается в коллективном возбуждении в много резонансной системе большого числа видов электромагнитных колебаний, занимающих широкую полосу частот и хаотизации этих колебаний за счёт случайных коллективных процессов, происходящих в плазме. При этом в системе плазма–пучок возбуждается много видов колебаний и имеет место их нелинейное взаимодействие, которое происходит по закону случайных процессов».

#### **Генерация СВЧ-шума в системе спираль–плазма–электронный поток (1964–1965 годы)**

Руководители ИРЭ и Аксель Иванович Берг, а затем и Владимир Александрович Котельников всегда говорили, что радиотехника и электроника – это прикладные науки и значит необходимо, чтобы полученные результаты исследований находили применение. В.Я. Кислов твёрдо следовал этой установке. Поэтому, по видимому, впервые в ИРЭ лаборатория и взялась за выполнение этой договорной НИР «Сабля». Какой-то «доброжелатель» в институтской стенгазете под соответствующим коллажем с фотографией В.Я. написал: *«Висит над Вами Сабля острая. Обрезаться довольно просто»*. Но эта злопыхательская острота не оправдалась. Работа была успешно выполнена. События развивались следующим образом. Для выполнения работы были задействованы традиционные экспериментальные установки, об одной из которых упоминал Н.Н. Залогин, но, кроме того, создана установка для исследования генерации шума в системе спираль–плазма–пучок. Предполагалось возбудить в системе плазма–пучок электромагнитные волны, но уже в диапазоне параметров, соответствующих дисперсии плазменной ЛБВ. Спираль должна была обеспечить наилучшую связь с этими волнами для вывода их в нагрузку и, кроме того, дополнительное усиление. В работе в качестве соисполнителя принимал участие Харьковский ФТИ, в котором группа А.К. Березина также исследовала генерацию шума в такой системе. Но если в Харькове такую систему сделали сами, то В.Я. Кислов придумал сделать её на базе промышленной мощной ЛБВ. Для этого он договорился с главным конструктором о её переделке, допускающей в пространство взаимодействия напуск рабочего газа. Следует отметить, что эта лампа непрерывного действия с замедляющей системой спираль, нагруженная кольцами, рассчитана на выходную мощность 10 кВт и напряжение 11 кВ. Поэтому вместо поглотите-

ля между модулирующей и выходной секциями промежутков дрейфа организован за счёт вывода мощности с выхода 1-й секции на внешнюю нагрузку, охлаждаемую водой. Такая же нагрузка установлена на входе 2-й секции для устранения усиления отражений от выходного вывода энергии. На выходе лампы размещался специфический направленный коаксиальный ответвитель, охлаждаемый водой с ответвлением в «плечо» – 35 дБ. Он был предназначен для измерительных целей. Диапазон лампы был 300–600 МГц. Лампа работала в магнитной фокусирующей системе в виде солениода с величиной фокусирующего поля примерно 400 Гс с экранированной от поля электронной пушкой.

Для работы с этой лампой был создан Экспериментальный стенд, а я был назначен В.Я. ответственным экспериментатором.

В лаборатории нужного источника напряжения не было. Поэтому лампа работала при пониженном напряжении (до 6 кВ) и токе (до 1 А). В этой связи и коэффициент усиления у неё был невысоким (примерно 15 дБ). Тем не менее, на ее основе был создан генератор путем подачи части мощности с её выхода на вход с помощью дополнительного направленного ответвителя и коаксиального кабеля (отрезки длиной 30, 60, 90 м). Подбирая давление рабочего газа и напряжение замедляющей системы, добивались генерации шумового сигнала с непрерывным спектром. Но удалось получить генерацию сигнала только со спектром в полосе усиления ЛБВ в виде шумовых полос. С кабелем РК-2 длиной 60 м (задержка в 300 нс) расстояние между шумовыми полосами было 1.5 МГц, а их ширина 0.5 МГц. Интегральная мощность генерируемого сигнала в непрерывном режиме была 0.5 кВт. Такой спектр тоже устраивал Заказчика, но всё-таки желательно было уменьшить «дыры» между шумовыми полосами.

Как ни старались добиться их перекрытия, ничего хорошего не получалось: не хватало усиления и, как только увеличивалась длина кабеля, генерация срывалась. Без плазмы в системе с тем же кабелем возбуждались две-три собственные частоты.

Но зато в Харькове генерацию широкополосного СВЧ-шума в системе спираль–плазма–электронный пучок получили. При этом обратная связь в системе обеспечивалась за счёт внутренних отражений. Выполнение этой части работы как представитель головного исполнителя НИР «Сабля» принимал я. Дотошно ко всему придираясь, я работу принял. После этого «проверяемые» настояли на проведении по этому поводу маленького банкета. В результате я опоздал на поезд и добирался до Москвы в теплушке грузового состава.

Отчёт о работе ФТИ был также предъявлен комиссии как Приложение к основному отчёту ИРЭ АН СССР. Работа была предъявлена Заказчику с выполнением всех пунктов ТЗ и принята с рекомендациями о необходимости продолжения исследований.

### **ШУМОТРОН (1966–1997 годы)**

И работа продолжалась. Потерпев фиаско с генератором шума, использующим мощную ЛБВ, решили проверить возможность возбуждения многочастотного сигнала и сближения собственных частот в генераторе, состоящем из маломощной ЛБВ 10 см диапазона с усилением 30–35 дБ и тех же отрезков кабеля разной длины.

Цель эксперимента была в выяснении соотношения между предельной длиной кабеля, то есть ослабления сигнала, и коэффициентом усиления ЛБВ, когда генерация не срывается и происходит возбуждение многих собственных частот и их желаемое сближение. Эти исследования проводились уже в рамках новой внутренней работы «Исследование радиофизических свойств плазмы и пространственного заряда с целью получения шумовых колебаний» (январь 1966–декабрь 1967 гг.).

В.Я. Кислов поручил провести это моделирование мне, так как я был ответственным за стенд с мощной ЛБВ. Нужно было понять, что ещё можно сделать, чтобы попытаться улучшить спектр шумовой генерации.

Хочу заметить, что в лаборатории было не более трех пакетированных в магнитную систему ЛБВ малой мощности ( $P_{\text{вых}} \cong 1 \text{ Вт}$ ). Как их доставал В.Я., я не знал, но то, что прежде всего была задача при запуске не вывести их из строя, знал точно. Я благополучно запустил УВ-34. Измерил её усилительную характеристику. Установил, что она добирается до насыщения по выходу при входном сигнале порядка 1 мВт. Значит, подавать на её вход большую мощность не следует, чтобы она, не дай бог, не вышла из строя. О падающем участке характеристики я тогда и не догадывался. На всякий случай в цепь обратной связи я ввёл ещё и аттенюатор с дискретным ослаблением 0, 5, 10, 15 дБ. Ну, и начал включать те же отрезки кабеля в цепь обратной связи. Осторожно изменяя ослабление аттенюатора, я следил за тем, чтобы, не дай бог, не перегрузить ЛБВ. Поэтому даже многочастотные режимы возбуждались с трудом и спектры сигнала были ещё менее привлекательны, чем в системе с мощной ЛБВ без плазмы.

В конце концов, я решил использовать в качестве регулируемой задержки ещё и ЛБВ того же типа, УВ-34 (или УВ-35, теперь уже не помню). Поскольку главная задача эксперимента, кроме той которой я занимался, была не вывести обе лампы из строя, то блок-схема генератора содержала две лампы с переменными аттенюаторами на входе каждой и длинный кабель между ними.

В процессе эксперимента ослабление аттенюатора на входе первой лампы можно было уменьшать (в соответствии с измерением мощности входного сигнала), снижая рабочий ток 2-й ЛБВ, то есть, уменьшая усиление. В итоге аттенюатор был удалён, а во 2-й ЛБВ пришлось существенным образом снизить рабочий ток до 1 мА, вместо 10 мА по паспорту. В таком режиме работы усиление её по малому сигналу, как потом было установлено, было близко к нулю. Таким образом, оказалось возможным использовать самый короткий отрезок кабеля, то есть существенным образом уменьшить потери в линии ОС.

Но теперь режим работы ЛБВ (названной позднее «ЛБВ-нелинейный элемент») был такой, что она не могла выйти из строя ни при какой мощности сигнала на её входе. Поэтому я спокойно мог изменять ослабление аттенюатора на её входе, выводя его даже на «0». И вот, когда это случилось в первый раз, на экране ИВ-46 возник шумовой сигнал. Исследование генерации с помощью перестройки ИВ-46 показало, что генерация имеет место в широкой полосе частот. Изъяв из схемы длинный кабель, обнаружил, что неравномерность СПМШ по диапазону значительно уменьшилась, хотя расстояние между максимумами существенно увеличилось. Кроме того, режимы генератора можно было изменять, меняя ослабление этого аттенюатора. Блок-схема первого шумотрона приведена, например, в работе [1]. Не говоря пока никому об этих событиях, я измерил амплитудные характеристики обеих ламп на одной из частот диапазона. Они были представлены на слайдах и присут-

ствуют, естественно, в Заявке на изобретение в моей диссертации и в статье [7]. После этого пошёл к В.Я. с докладом. То, что всё в этом режиме определяет ЛБВ-нелинейный элемент сомнений не было. Но что заставляет систему генерировать шумовой сигнал с непрерывным спектром?

Нужно было **срочно** подавать заявку на изобретение, а это значит, объяснять экспертизе как же всё происходит, причём **без плазмы!** Было проведено бесконечное число дискуссий по этому поводу, и ход мыслей был таким: «Максимумы в спектре располагаются на собственных частотах системы, а они определяются задержкой  $T$  в цепи обратной связи:  $\omega_n = 2\pi n/T$ . Поэтому, если найти механизм, с помощью которого можно сдвигать собственные частоты, хотя бы, на места минимумов, то спектр сигнала будет непрерывным». Таким образом, необходимо, чтобы была переменная часть задержки сигнала при обходе цепи обратной связи порядка  $\pi$ , а лучше больше. Возникать она должна в нелинейном режиме работы ЛБВ. Такая возможность имеет место в ЛБВ, так как существует нелинейный набег фазы, зависящий от амплитуды сигнала, как показано в работе *J.E. Row «Nonlinear Electron Wave Interaction Phenomena» Academic, New York, 1965*.

Но как он реализуется в генераторе? За счёт неустойчивости амплитуды, которая благодаря падающему участку амплитудной характеристики при изменении ослабления сигнала в цепи обратной связи уже не остаётся постоянной, а претерпевает, как теперь говорят, бифуркации удвоения периода, а спектр сигнала обогащается модуляционными частотами. (Кстати, по этому поводу на закрытой конференции по электронной технике в 1968 году был доклад трёх авторов В.Я. Кислова, Н.Н. Залогина, Е.А. Мясина.) При этом модулируется и нелинейный набег фазы. Если в системе возбуждается несколько собственных частот, то в результате этого нелинейного преобразования сигнала на каждой из них происходит, в конце концов, перекрытие спектров и хаотизация колебаний.

Поскольку предполагалось, что в системе происходит как бы хаотизация времени обхода замкнутого контура генератора, то этот режим (амплитудно-фазовой неустойчивости) получил название режима «нелинейной флюктуирующей задержки». Именно так было сделано Описание к Заявке, так я объяснял возникновение этого режима в диссертации. Позднее было показано, что в этом режиме имеет место, кроме этого эффекта, и преимущественное усиление малого сигнала над большим сигналом. Многие нелинейные эффекты были выявлены и исследованы позднее. Закрытая заявка на изобретение (авторы В.Я. Кислов, Е.А. Мясин, Е.В. Богданов) была подана 22 июня 1967 года. Авторское свидетельство было получено. Суть этой заявки, которую с большим трудом удалось рассекретить, представлена в открытом виде двумя Авторскими свидетельствами на генератор [8] и способ [9].

Вскоре после подачи заявки стало ясно, что для хаотизации колебаний достаточно нелинейности, задержки и фильтра. Вот как это было выяснено.

Естественно, к исследованию этой версии объяснения подключился теоретик Всеволод Николаевич Данилов. Он исследовал в той же НИР, упомянутой ранее в этом разделе, возможность хаотизации колебаний в кольцевой системе: нелинейный усилитель, источник внутренних шумов, фильтр и задержка при её медленном и быстром изменении. Было показано, что в обоих случаях такая возможность реализуется. Но самое главное, он сделал вывод о том, что «роль источника белого шума, образно говоря, играет сигнал, прошедший задержку и усилитель». Им была «показана возможность существования стохастических автоколебаний в системе, не

зависящих ни от внутреннего шума элементов кольца, ни от любых изменений задержки». Почему этот материал не был опубликован в открытой печати, а остался в переплёте секретного Отчёта, я не знаю. Спросить уже не у кого, так как В.Н. Данилов трагически погиб через 10 лет после написания этой главы Отчёта, а В.Я. ушёл из жизни в 2007 году. Но эти результаты В.Н. Данилова заставили более детально исследовать поведение генератора с рабочей точкой на падающем участке амплитудной характеристики усилителя (см. [6]), что дало возможность В.Я. использовать найденные зоны стохастичности для завоевания доверия к обнаруженному явлению у дирекции и ведущих академиков ИРЭ. Ещё до моей защиты (1970 г.) В.Я. предлагал академикам найти замкнутый цикл в отображении с экспоненциальной нелинейностью и коэффициентом усиления, соответствующим этой зоне [6], используя программируемую электронную машинку с памятью. Однако это им, естественно, не удавалось сделать. Как бы то ни было, версия стохастизации колебаний за счёт нелинейной флюктуирующей задержки осталась основной в моей диссертации. Нелинейный набег фазы в ЛБВ был позднее измерен Ю.В. Анисимовой.

В этой НИР ещё присутствовали исследования плазменных систем, но уже с 1968 года вся лаборатория переключилась на исследования работы шумотронов разных диапазонов и выходных мощностей. Эта тематика развивалась в лаборатории и после моего ухода из неё, вплоть до «лихих 90-х».

#### **Продолжение исследований и внедрение результатов (1968–1980 годы)**

Дальнейшие исследования были направлены как на изучение механизма генерации СВЧ-шума, так и на создание устройств для конкретных применений.

Тут следует напомнить, что наши теперешние партнёры из США ввели тогда (в 1965 г.) в Южный Вьетнам войска для поддержки правительственных войск в борьбе с партизанами Вьетконга. Естественно, СССР помогал оружием Северному Вьетнаму, а тот, в свою очередь, партизанам. Начиная с 1972 года интервенты начали бомбить города Северного Вьетнама. Постановщики помех подавляли наши комплексы земля–воздух, и остро встал вопрос о создании чего-то похожего для противодействия им. Конструкция шумотрона, использующая выпускаемые промышленностью ЛБВ, позволяла быстро решать подобные задачи. Поэтому лаборатория должна была, с одной стороны, продолжать исследования механизма генерации шума, а с другой – доказывать, что по своим параметрам шумовой сигнал годится для систем РЭБ (радиоэлектронная борьба). Исследовали распределение вероятностей сигнала, доказывая, что он практически не отличается от гауссова, что спектр действительно непрерывный, а функция автокорреляции не отличается от одной для широкополосных тепловых шумов, ограниченных полосой фильтра. Приходилось в связи с этим, выезжать в поле на натурные испытания генераторов в станциях помех, созданных в лаборатории. У экспериментаторов была напряжённая программа по выполнению этих задач, в то время как теоретики могли спокойно заниматься более детальной разработкой моделей. Я не могу рассказывать о деталях внедрения шумотрона в системы. Скажу только, что на предприятии Радиопрома с 1970 года была поставлена ОКР и созданная в результате её выполнения система была принята на вооружение.

Хочу заметить, что информация, которая в деталях присутствовала в закрытых отчётах и закрытой печати, в общем виде становилась достоянием «узкого круга











лиц». Во-первых, читателей журнала «Специальная электроника» и участников закрытой конференции 1968 года; во-вторых, сотрудников других лабораторий отдела; в-третьих, должен был печататься аспирант В.Я.; в-четвертых, В.Я., чтобы привлечь внимание Заказчиков на всяких закрытых НТС, рекламировал результаты в присутствии представителей других организаций. Однако самая большая утечка информации была связана с поездкой в Нижний Новгород В.Н. Данилова.

Параллельно с работой в лаборатории В.Н. заканчивал работу над своей кандидатской диссертацией, посвящённой формированию и фокусировке различных электронных потоков. Диссертацию эту он успешно защитил в 1969 году, получив 28.01.1970 утверждение ВАК. Защита проходила в Нижнем Новгороде, где его радушно принял и оставил ночевать М.И. Рабинович. С ним-то В.Н. и поделился информацией об исследовании процессов в кольцевой системе автогенератора, приводящих к генерации шума. И пока нам было запрещено публиковать результаты своих исследований, в открытой печати начали появляться и нарастать, как снежный ком, статьи, посвящённые как генераторам с обратной связью, так и этому явлению. Вот далеко не полный список публикаций на эту тему.

1. *Заславский Г.М., Чуриков Б.В.* УФН 1971.Т.105, вып.1. С.3

2. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence. Comm. Math. Phys. 1971. Vol. 20. P. 167

3. *Розаишкова А.И., Дихтяр В. Б., Розаишков С.А.* Спектр колебаний в автогенераторе с запаздывающей обратной связью//РЭ. 1973. Т. 18, №5. С. 1075

4. *Дихтяр В.Б.* Анализ влияния формы частотной характеристики и усиления на тип колебаний, формируемых автогенераторами с внешней запаздывающей обратной связью // РЭ. 1973. Т. 22, № 5. С. 969.

5. *Ruelle D.* Lecture Notes in Math//The Lorenz Attractor and the Problem of Turbulence. 1976.

6. *Рабинович М.И.* УФН. 1978. Т. 125, вып.1. С. 123.

За период с 1970 по 1980 год в лаборатории по этой тематике защитили диссертации: В.Б. Дихтяр (кандидатскую); В.Я. Кислов (1978 г., докторскую); после чего под руководством В.Я. 13 человек защитили кандидатские диссертации и при его содействии А.С. Дмитриев защитил докторскую диссертацию.

Оригинальность, научная новизна результатов исследований и внедрение их в народное хозяйство Страны были по достоинству оценены руководством ИРЭ АН СССР, представившим в лице В.А. Котельникова этот цикл исследований на Государственную Премию СССР 1980 года. В конкурентной борьбе с другими соискателями её получил коллектив авторов работы, в том числе от ИРЭ В.Я. Кислов, Н.Н. Залогин, Е.А. Мясин, от Секции Прикладных проблем при АН СССР Е.П. Чигин и ряд товарищей от отраслевых и военных организаций.

### Заключение

Обнаружение нелинейной хаотической динамики в электронном генераторе с задержанной обратной связью побудило поиск аналогичного явления в автоколебательных системах другой природы. Таким образом, была открыта новая область поведения разнообразных детерминированных систем (в том числе и биологических) для исследования с помощью методов теории колебаний.

Действительно, в конструкции шумотрона был выделен элемент, который был

ответственен за хаотизацию колебаний в ЛБВ с задержанной обратной связью и определял возможность генерации хаотических колебаний в нелинейной детерминированной автоколебательной системе. Причём был показан и тип этой нелинейности. Это позволяло: во-первых, использовать любой тип усилителей в схеме самого шумотрона, например, мощного усилителя с ответвлением малой мощности с его выхода на вход маломощного нелинейного элемента; во-вторых, создать длинную двухсекционную ЛБВ с выводом сигнала в нагрузку с выхода первой секции (однобаллонный шумотрон); в-третьих, использовать новые схемы генераторов шума, в которых в качестве усилителя можно применять приборы любой природы и т.д., причём большинство из этих схем были реализованы. И, главное, была открыта первая страница новой области исследований.

Подводя итог моей Лекции, можно, не боясь ошибиться, утверждать, что результаты исследования генерации СВЧ-шума, проведенные в ИРЭ АН СССР в 1963–1967 годы под руководством В.Я. Кислова, явились основой нового научного направления. Это направление – **исследование нелинейной хаотической динамики автоколебательных систем.**

### Библиографический список

1. *Залогин Н.Н.* Генерация стохастических сигналов на основе динамического хаоса в электронных приборах. // Фрязинская школа электроники: К 80-летию электронной промышленности в наукограде Фрязино. М.: Изд-во Янус-К, 2012. С. 413.
2. *Bogdanov E.V., Kislov V.J., Tchernov Z.S.* Interaction between an electron beam and plasma // Reprinted from Proceedings of the Symposium on Millimeter Waves. Politechnic Institute of Brooklyn. March 31, April 1, 2, 1959. P. 57.
3. *Богданов Е.В., Кислов В.Я., Чернов З.С.* Взаимодействие электронного потока с плазмой. // РЭ. 1960. Т. 5, № 2 С. 229.
4. *Кислов В.Я., Богданов Е.В.* Взаимодействие медленных плазменных волн с потоком электронов. // РЭ. 1960. Т. 5, № 12. С. 1974.
5. *Залогин Н.Н., Кислов В.Я.* А.с. 28547 СССР. Заявка 961182 с приоритетом от 15 апреля 1963 г.
6. *Кислов В.Я., Залогин Н.Н., Мясин Е.А.* Исследование стохастических автоколебательных процессов в автогенераторах с запаздыванием // РЭ. 1979. Т. 24, № 6. С. 1118.
7. *Кислов В.Я., Мясин Е.А., Залогин Н.Н.* О нелинейной стохастизации автоколебаний в электронно-волновом генераторе с задержанной обратной связью // РЭ. 1980. Т.25, № 10 С. 2160.
8. *Мясин Е.А., Кислов В.Я., Богданов Е.В.* Генератор сверхвысокочастотных шумовых колебаний. А.с. 1053711 СССР. Заявка 0984513 от 8 июля 1983 г. с приоритетом от 22 июня 1967 г.
9. *Мясин Е.А., Кислов В.Я., Богданов Е.В.* Способ генерирования электромагнитных шумовых колебаний. А.с.1125735 СССР. Заявка 3523601 от 23 июля 1984 г. с приоритетом от 22 июня 1967 г.

Поступила в редакцию 24.12.2013

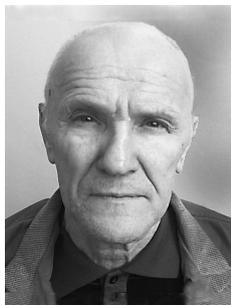
# INVESTIGATIONS OF THE HF NOISE GENERATION IN IRE OF ACADEMY OF SCIENCES OF USSR AT 1962–1967 YEARS – THE BEGINNING OF THE NEW SCIENCE DIRECTION

*E.A. Myasin*

V.A. Kotel'nikov Institute of Radio-Engineering and Electronics RAS, Fryazino Branch

This paper is devoted to **the noisetron creation history in 1967** – the chaotic oscillations oscillator consisted of two traveling wave tubes (TWT), contacted successively in ring. It is shown that the noisetron creation is the result of the work on HF noise generation in the systems electron-ion plasma–electron stream, which was fulfilled in V.Ya. Kislov's laboratory. This work was initiated by the theoretic investigations on the interaction of electron stream with electron-ion plasma, fulfilled by V.Ya.Kislov in the period of 1956...1960 years. The experimental verification of these results led to the discovery of the HF noise generation in the plasma backward wave oscillator (BWO) in 1962–1963. It is maintained that the investigation the noisetron operation mechanism **for the first time took evident the reason of appearance** of the regime of HF noise generation in determinate system without plasma and independently on the own noises of electron stream. This reason picked out in noisetron construction as TWT-nonlinear element, that is the reason of this regime is the system **nonlinearity**. The brief information about the work on the noisetron subject in V.Ya. Kislov's laboratory is given for the period of next years, including 1980 year. On the basis of upper consideration the conclusion is done that the investigation results obtained in IRE of Academy of Sciences of USSR marked the beginning of the new science direction – **investigation of nonlinear chaotic dynamics of the autooscillation systems**.

*Keywords:* Electron-ion plasma, electron stream, amplification, plasma BWO, HF noise generation, helix–plasma–electron stream system, TWT-amplifier, TWT-nonlinear element, noisetron.



*Мясин Евгений Анатольевич* – родился в Новосибирске (1938), окончил Московский инженерно-физический институт (МИФИ, 1961). С 1962 года работает в ИРЭ АН СССР сначала в должности младшего затем старшего научного сотрудника. В 1966 году установил связь между возникновением генерации шума и нелинейным режимом ЛБВ в автогенераторе с задержанной обратной связью из двух ЛБВ, замкнутых в кольцо. Соавтор заявки на способ генерации и устройство генератора шума (Шумотрон, 1967). Защитил диссертацию на соискание степени кандидата технических наук (ИРЭ, 1970) в области радиофизики и СВЧ-электроники. Лауреат Государственной премии СССР (1980). С 1980 года по настоящее время заведующий лабораторией генерации и усиления электромагнитных волн миллиметрового диапазона в ФИРЭ АН СССР (в настоящее время – Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук). Опубликовал (в том числе в соавторстве) 108 статей и сделал 69 докладов на Российских и Международных конференциях по направлениям, указанным выше.

141190 РФ, Московская область, Фрязино, площадь им. Введенского, 1  
ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

E-mail: eam168@ms.ire.rssi.ru



X Международная школа  
**ХАОТИЧЕСКИЕ  
 АВТОКОЛЕБАНИЯ  
 И ОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУР  
 ХАОС-2013**  
 Саратов, 7–12.10.2013

#### **Организаторы**

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
 Факультет нелинейных процессов СГУ  
 НОЦ «Сложные системы» СГУ  
 НОЦ «Нелинейная динамика и биофизика» СГУ  
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
 имени В.А. Котельникова РАН

#### **Программный комитет**

Анищенко В.С., д.ф.-м.н., проф., Саратовский госуниверситет, Саратов, Россия; Гуляев Ю.В., академик, член Президиума РАН, директор ИРЭ им. В.А. Котельникова, Москва, Россия; Гурбатов С.Н., д.ф.-м.н., проф., Нижегородский госуниверситет, Н. Новгород, Россия; Ebeling W., профессор, Гумбольдтский университет, Берлин, Германия; Дмитриев А.С., д.ф.-м.н., проф., Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва; Ильин И.В., д.п.н., проф., декан факультета глобальных процессов МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; Калинин Ю.А., д.т.н., проф., руководитель Отделения физики нелинейных систем НИИ ЕН СГУ, Саратов, Россия; Кузнецов С.П., д.ф.-м.н., проф., Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия; Ланда П.С., д.ф.-м.н., проф., Московский государственный университет, Москва, Россия; Литвак А.Г., академик, проф., Институт прикладной физики РАН, Н. Новгород, Россия; Некоркин В.И., д.ф.-м.н., проф., Институт прикладной физики РАН, Н. Новгород, Россия; Очкин В.Н., д.ф.-м.н., проф., ФИАН, Москва, Россия; Руденко О.В., чл.-корр. РАН, проф., Московский государственный университет, Москва, Россия; Сергеев А.М., чл.-корр. РАН, проф., Институт прикладной физики РАН, Н. Новгород, Россия; Сухоруков А.П., д.ф.-м.н., проф., Московский государственный университет, Москва, Россия; Трубецков Д.И., чл.-корр. РАН, проф., Саратовский госуниверситет, Саратов, Россия; Филимонов Ю.А., д.ф.-м.н., директор СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия

#### **Локальный оргкомитет**

Д.И. Трубецков, чл.-корр. РАН, профессор, д.ф.-м.н., СГУ, председатель; Ю.И. Левин, профессор, к.ф.-м.н., декан факультета нелинейных процессов СГУ, зам. председателя; А.Е. Храмов, профессор, д.ф.-м.н., СГУ, зам. председателя; Е.Н. Егоров, доцент, к.ф.-м.н., СГУ, ученый секретарь; члены оргкомитета: проф. Ю.П. Шараевский, проф. А.А. Короновский; доц. И.С. Ремпен, доц. О.И. Москаленко, доц. С.А. Куркин, к.ф.-м.н. А.В. Стародубов, асп. А.О. Сельский, асп. М.О. Журавлёв, асп. А.В. Титов, асп. Н.С. Фролов, асп. В.В. Грубов, асп. Г.М. Краснова; технические секретари: В.П. Марнопольская, О.И. Москаленко, С.А. Шурыгина

## Рабочая программа

### 7 октября 2013

Открытие школы

#### **Пленарное заседание: Фундаментальные проблемы нелинейной динамики**

*Мотова М.И., Шалфеев В.Д.* (ННГУ, Нижний Новгород). От теории колебаний – к нелинейной динамике

*Трубецков Д.И.* (СГУ, Саратов). Самоподобие как вид симметрии

*Трубецков Д.И.* (СГУ, Саратов). Алгебраический путь к симметрии

### 8 октября 2013

#### **Пленарное заседание: Распределенные системы и ансамбли связанных элементов со сложной динамикой**

*Некоркин В.И.* (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Переключательная динамика осцилляторных сетей с адаптивными связями

*Сухоруков А.П.* (МГУ, Москва). Динамика колебаний в замкнутой цепочке резонаторов

*Дмитриев А.С., Герасимов М.Ю., Лазарев В.А., Рыжов А.И., Мохсени Т.И.* (ИРЭ РАН, Москва). Самоорганизующиеся сверхширокополосные беспроводные сенсорные сети на основе хаотических радиоимпульсов и их применение

*Казанцев В.Б.* (ННГУ, Нижний Новгород). Синхронизация в нейронных сетях с пластичными связями

#### **Пленарное заседание: Фундаментальные проблемы нелинейной динамики**

*Храмов А.Е.* (СГУ, Саратов). Гиперсинхронизация нейронных сетей головного мозга и эпилепсия: анализ динамики, предсказание, подавление

#### **Устные доклады**

#### **Секция 1а. Распределенные системы и ансамбли связанных элементов со сложной динамикой**

*Анчиков Д.А., Кренц А.А., Пахомов А.В.* (СГАУ, Самара). Генерация решеток оптических вихрей в широкоапертурных лазерах

*Корнилов М.В., Сысоев И.В.* (СГУ, Саратов). Выбор временных масштабов модели для метода причинности по Грейнджеру

*Кренц А.А., Анчиков Д.А., Пахомов А.В.* (СГАУ, Самара). Двумерные оптические структуры, образующиеся при взаимодействии волновой и хопфовской моды в модели широкоапертурного лазера

*Санин А.Л., Семёнов Е.А.* (СПбГПУ, Санкт-Петербург). Квантовый ангармонический осциллятор на плоскости

*Санин А.Л., Смирновский А.А.* (СПбГПУ, Санкт-Петербург). Квантовый ангармонический осциллятор с трением и внешним воздействием

*Слепнев А.В., Шепелев И.А., Вадивасова Т.Е.* (СГУ, Саратов). Бегущие волны, мультистабильность и синхронизация в кольцевой возбудимой среде

*Сысоев И.В., Прохоров М.Д., Пономаренко В.И.* (СГУ, Саратов). Реконструкция архитектуры связей в ансамблях связанных осцилляторов с задержкой по временным рядам

*Флейшман А.Н., Кораблина Т.В., Петровский С.А., Кисляков С.М.* (НИИ КППЗ СО РАМН, Новокузнецк). Сложная структура и нелинейное поведение Very Low Frequency variability ритма сердца: модели анализа и практические приложения

#### **Устные доклады**

#### **Секция 2а. Фундаментальные проблемы нелинейной науки**

*Адилова А.Б., Кузнецов А.П., Савин А.В.* (СГУ, Саратов). Динамика связанных дискретных осцилляторов Ресслера

*Исаева О.Б., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р., Пиковский А.С.* (СФ ИРЭ РАН, Саратов; University of Potsdam Germany). О сценариях рождения и разрушения соленоида Смейла–Вильямса

*Завершинский Д.И., Молевич Н.Е.* (СГАУ, Самара). Исследование динамики магнитоакустических и альфвеновских волн в средах с тепловой неустойчивостью

*Завершинский Д.И., Молевич Н.Е.* (СГАУ, Самара). Параметрическое усиление альфвеновских волн и акустически неустойчивых медленных магнитоакустических волн

*Казаков А.О.* (ННГУ, Нижний Новгород). Странные аттракторы и смешанная динамика в задаче качения «резинового» неуравновешенного шара по плоскости

*Кащенко И.С.* (ЯрГУ, Ярославль). Локальная динамика уравнения с двумя большими «близкими» запаздываниями

#### **9 октября 2013**

#### **Пленарное заседание: Фундаментальные проблемы нелинейной динамики (нелинейные колебания и волны, хаос и образование структур)**

*Кащенко С.А.* (ЯрГУ, Ярославль) Сравнительный локальный анализ динамики разностных и дифференциально-разностных уравнений

*Иванченко М.В.* (ННГУ, Нижний Новгород) Новые вопросы андерсоновской локализации: нелинейность, хаос и квантовая динамика (часть 1)

*Короновский А.А.* (СГУ, Саратов). Перемежающееся поведение в связанных осцилляторах

*Анищенко В.С.* (СГУ, Саратов) Теория возвратов Пуанкаре и ее приложение к задачам нелинейной динамики

*Гурия Г.Т.* (ГНИЦ РАМН, Москва). Моделирование процессов свертывания крови и тромболизиса

*Иванченко М.В.* (ННГУ, Нижний Новгород). Новые вопросы андерсоновской локализации: нелинейность, хаос и квантовая динамика (часть 2)

#### **Устные доклады**

#### **Секция 1б. Распределенные системы и ансамбли связанных элементов со сложной динамикой**

*Кульминский Д.Д., Караваев А.С., Селезнев Е.П., Пономаренко В.И.* (СГУ, Саратов). Экспериментальная система скрытой передачи информации на гибридном генераторе с запаздыванием с переключением хаотических режимов

*Кутцов П.В.* (СГТУ, Саратов). Модель распределённой системы, демонстрирующая «наилучший» и «наихудший» виды хаотической динамики

*Леванова Т.А., Осипов Г.В., Пиковский А.С.* (ННГУ, Нижний Новгород). Когерентные свойства циклического хаоса

*Сысоева М.В., Сысоев И.В., Ситникова Е.Ю.* (СГУ, Саратов). Применение адаптивной грейнджеровской причинности к выявлению структуры связей при абсансных разрядах

*Хорев В.С., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* (СГУ, Саратов). Метод оценки времён задержки и порядка модельного уравнения по временным рядам систем с запаздыванием

*Грубов В.В., Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* (СГУ, Саратов). Метод удаления глагодвигательных артефактов на ЭЭГ

**Секция 3а. Нелинейная динамика электронно-волновых, магнитоэлектронных и твердотельных систем СВЧ электроники и радиопизики, а также устройств оптического диапазона**

*Глазков Д.В.* (ЯрГУ, Ярославль). Качественный анализ сингулярно возмущенных моделей динамики многомодового полупроводникового лазера

*Матвеев О.В., Морозова М.А.* (СГУ, Саратов). Нелинейное переключение в структурах на основе связанных магнитных кристаллов и ферромагнитных пленок

*Романенко Д.В., Гришин С.В., Шараевский Ю.П.* (СГУ, Саратов). Управление генерацией хаотических радиоимпульсов в неавтономной автоколебательной системе на основе ферромагнитной плёнки

*Сытова С.Н.* (БелГУ, Беларусь, Минск). Нелинейная динамика и хаос в процессах излучения заряженных частиц, движущихся в неоднородных пространственно-периодических структурах

*Шешукова С.Е., Бегинин Е.Н., Садовников А.В., Никитов С.А.* (СГУ, Саратов; ИРЭ РАН, Москва). Пространственно-временная динамика магнитостатических волн в периодических нерегулярных ферритовых волноводах

*Максименко В.А., Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е., Баланов А.Г., Алексеев К.Н.* (СГУ, СГТУ, Саратов; Университет Лафборо, Великобритания). Критерий устойчивости стационарного состояния сильносвязанной полупроводниковой структуры GaAs–AlGaAs

*Макаров В.В., Храмов А.Е., Короновский А.А., Москаленко О.И., Куркин С.А., Алексеев К.Н., Баланов А.Г.* (СГУ, Саратов; Университет города Лафборо, Великобритания). Использование внешнего резонатора для усиления высокочастотного сигнала полупроводниковой сверхрешеткой

*Митрофанов А.А., Удалов Н.Н., Сафин А.Р.* (НИУ МЭИ, Москва). Динамические процессы бесфильтровой системы фазовой синхронизации спин-трансферного наноосциллятора

**10 октября 2013**

**Пленарное заседание: Нелинейная динамика радиоэлектронных устройств, а также устройств оптического диапазона**

*Мясин Е.А.* (ФирЭ РАН, Фрязино). Исследование генерации СВЧ-шума в ИРЭ АН СССР 1962–1967гг. – начало нового научного направления

*Бегинин Е.Н.* (СГУ, Саратов). Исследование процессов распада спиновых волн в ферритовых структурах методом бриллюэновской спектроскопии

*Царёв В.А.* (СГТУ, Саратов). Фрактальные резонаторы в СВЧ-электронике

*Шараевский Ю.П., Гришин С.В., Морозова М.А., Никитов С.А.* (СГУ, Саратов; ИРЭ РАН, Москва). Параметрические и хаотические солитоны в распределенных и автоколебательных системах на основе ферромагнитных структур

**Пленарное заседание: Фундаментальные проблемы нелинейной динамики. Нелинейные колебания и волны, хаос и образование структур**

*Полежаев А.А.* (ФИАН, Москва). Пространственно-временные структуры в активной среде, вызванные диффузионной неустойчивостью

**Стендовые доклады**

*Андреев Д.А., Божокин С.В., Веневцев И.Д., Жунусов К.Т.* (С.-ПбГПУ, Санкт-Петербург). Точно решаемые модели нелинейных нестационарных сигналов: преобразование Габора и непрерывное вейвлетное преобразование

*Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* (СыктГУ, Сыктывкар). Влияние случайного характера распределения параметров слоев на распространение волн в многослойных средах

*Астахов С.В., Балакин М.И., Астахов В.В.* (СГТУ, Саратов). Эффекты синхронизации и гашения колебаний во взаимодействующих генераторах с инерционной нелинейностью с запаздывающей обратной связью

*Балякин А.А., Жулего В.Г.* (НИЦ «Курчатовский институт», Москва). Двухкомпонентная модель роста народонаселения

*Белякин С.Т.* (МГУ, Москва). Управление гиперболической системы гармоническим воздействием

*Бирюков К.В., Садовников А.В.* (СГУ, Саратов). Распространение поверхностных волн в латерально связанных ферритовых волноводах конечной ширины с сегнетоэлектрическим слоем

*Богаевская В.Г., Кащенко И.С.* (ЯрГУ, Ярославль). Стабилизация и дестабилизация периодических орбит

*Болдырева Н.В., Матросов В.В.* (ННГУ, Нижний Новгород). Анализ автоколебательных режимов астроцита

*Бубликов К.В., Садовников А.В.* (СГУ, Саратов). Спектр поверхностных магнитостатических волн в ЖИГ-волноводе конечной ширины, нагруженном на сегнетоэлектрический слой

*Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* (СыктГУ, Сыктывкар). Автомодационный режим нелинейных колебаний намагниченности феррита в резонаторе

*Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* (СыктГУ, Сыктывкар). Ударное возбуждение гиперзвуковых колебаний при перемагничивании ферритовой пластины, обладающей магнитоупругими свойствами

*Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* (СыктГУ, Сыктывкар). Комбинационное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре, обладающей магнитоупругими свойствами

*Герасимов М.Ю., Дмитриев А.С., Кузьмичев Р.А., Рыжов А.И.* (ИРЭ РАН, Москва). Моделирование ансамблей динамических систем с помощью беспроводных сенсорных сетей

*Антоновская О.Г., Горюнов В.И.* (НИИ ПМК ННГУ, Нижний Новгород). О существовании циклов высокой сложности в системе синхронизации с импульсным частотно-фазовым управлением при идеальном астатизме фильтра

*Дорошенко В.М., Тюрюкина Л.В.* (СГУ, Саратов). Синхронизация в низкоразмерной фазовой модели связанных осцилляторов: от цепочки к кольцу

*Садовников А.В., Дулин Ю.В.* (СГУ, Саратов). Электродинамические характеристики структуры металл–диэлектрик–магнетонный кристалл–сегнетоэлектрик–металл

*Емельянов В.В., Емельянова Ю.П.* (СГУ, СГТУ, Саратов). Изучение широкополосной синхронизации генераторов СВЧ-диапазона на примере связанных пролетных клистронов

*Емельянова Ю.П.* (СГТУ, Саратов). Многочастотные квазипериодические колебания в ансамбле связанных нефронов

*Ефремова И.Н., Ефремов В.В.* (ЮЗГУ, Курск). К вопросу применения методов хаотической динамики к обработке символьной информации

*Гусев В.А., Завершинский И.П., Коган Е.Я.* (СГАУ, Самара). Радиальная структура газового разряда в акустическом поле

*Зайцев В.В., Юдин А.Н.* (СамГУ, Самара). Способ параметрического синтеза нелинейных ДВ-осцилляторов

*Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* (СыктГУ, Сыктывкар). Магнитоупругие автоколебания в нормально намагниченной ферритовой пластине

*Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* (СыктГУ, Сыктывкар). Характер связи нелинейных осцилляторов как основа для нестационарного и автоколебательного режимов

*Кащенко А.А.* (ЯрГУ, Ярославль). Динамика периодических решений для двух моделей с большим запаздыванием

*Власов В.С., Кирушев М.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* (СыктГУ, Сыктывкар). Нелинейная прецессия намагниченности второго порядка в анизотропной среде

*Крылов С.Н., Смирнов Д.А., Безручко Б.П.* (СГУ, Саратов). Оценки взаимосвязей между разномасштабными процессами по временным рядам

*Купцова А.А., Вадивасова Т.Е.* (СГУ, Саратов). Влияние двух типов параметрического шума на режим работы автогенератора

*Садовников А.В., Лисицын Е.А.* (СГУ, Саратов). Линейная и нелинейная динамика распространения электромагнитного излучения в наклонной брэгговской решетке

*Макарян В.Г., Стукалина И.Л.* (СГАУ, Самара). Динамика газодинамических структур в замкнутом объеме стационарно неравновесного колебательно-возбужденного газа

*Мигунова Н.А., Седова Ю.В., Тюрюкина Л.В.* (СГУ, Саратов). Взаимная и вынужденная синхронизация системы хаотических осцилляторов Ресслера

*М.А. Обычев, О.Б. Исаева, С.П. Кузнецов* (СГУ, Саратов). Реализация соленоида Смейла–Вильямса и феноменов комплексной аналитической динамики в кольцевой стадийной системе

*Павлов А.С., Москаленко О.И.* (СГУ, Саратов). Метод оценки нулевого показателя Ляпунова по временному ряду

*Пахомов А.В., Кренц А.А., Анчиков Д.А.* (СГАУ, Самара). Обобщение метода анализа устойчивости Флоке для исследования режимов генерации широкоапертурных лазеров

*Сафин А.Р., Петров К.А., Башарин А.* (НИУ МЭИ, Москва). Terahertz nano-antenna based on spin torque nanooscillators and polaritonic metamaterials

*Гусев В.А., Завершинский И.П., Молевич Н.Е., Порфирьев Д.П., Сугак С.С.* (СГАУ, Самара). Индуцированные переходы между коронным и шнуровым ВЧЕ-разрядами в закрученных газовых потоках

*Горбунова А.О., Порфирьев Д.П.* (СГАУ, Самара). Моделирование прецессии вихревого ядра в закрученных потоках с тепловыделением

*Рыжов А.И., Мохсени Т.И.* (ИРЭ РАН, Москва). Исследование затухания сверхширокополосных хаотических радиоимпульсов при распространении сигнала вблизи тела человека

*Савин А.В., Савин Д.В.* (СГУ, Саратов). Переход к хаосу в слабодиссипативном отображении-паутине

*Савин А.В., Савин Д.В.* (СГУ, Саратов). Эволюция плоскости параметров консервативно связанных нелинейных отображений при изменении уровня диссипации

*Садовников А.В., Бегинин Е.Н., Шараевский Ю.П.* (СГУ, Саратов). Дискретная дифракция магнитостатических волн в системе латерально связанных ферритовых волноводов

*Кузнецов А.П., Седова Ю.В.* (СФ ИРЭ РАН, Саратов). Автономная и связанные системы с гиперхаосом

*Мохсени Т.И., Рыжов А.И., Лазарев В.А., Андреев Ю.В.* (ИРЭ РАН, Москва). Исследования возможности применения СШП-прямохаотических систем связи в автомобилях

*Сидак Е.В., Смирнов Д.А., Безручко Б.П.* (СГУ, Саратов). Оценка запаздывающих связей между осцилляторами при коррелированных и негауссовых фазовых шумах

*Фельк Е.В., Савин А.В.* (СГУ, Саратов). Сценарии перехода к хаосу в отображении-паутине со слабодиссипативным возмущением автоколебательного типа

*Феоктистов А.В.* (СГУ, Саратов). Когерентный резонанс в генераторе с жестким возбуждением

*Чернявский С.П.* (ЧелГУ, Челябинск). Формирование пространственно-временных структур и хаотических режимов ансамблем автогенераторов в двумерном волновом поле

*Шараевская А.Ю., Морозова М.А.* (СГУ, Саратов). Магнитостатические волны в магнитных кристаллах на основе двухслойной структуры

*Щеглов В.И.* (ИРЭ РАН, Москва). Бистабильный нелинейный осциллятор как динамическая модель структурного фазового перехода

*Щеглов В.И.* (ИРЭ РАН, Москва). Стохастическая неустойчивость траекторий поверхностных магнитостатических волн в неоднородном поле типа «вала» с периодической модуляцией

*Садовников С.А., Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Скороходов В.Н.* (СГУ, Саратов). Когерентный резонанс в клистронных автогенераторах (теория и эксперимент)

*Макаров В.В., Храмов А.Е., Короновский А.А. Москаленко О.И., Куркин С.А., Алексеев К.Н., Баланов А.Г.* (СГУ, Саратов; Университет города Лафборо, Великобритания). Синхронизация колебаний тока на сверхрешетке, помещенной во внешнюю резонансную систему с внешним гармоническим сигналом

*Бадарин А.А., Куркин С.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* (СГУ, Саратов). Изучение высших гармоник токовых колебаний в пучке с виртуальным катодом

*Маганакова Л.Е., Ситникова Е.Ю., Короновский А.А., Храмов А.Е.* (СГУ, Саратов). Переключаемость в динамике пик-волновых разрядов при абсанс-эпилепсии при воздействии лекарственных препаратов

*Пластун И.Л., Мисюрин А.Г., Бокарев А.Н.* (СГТУ, Саратов). Нелинейная динамика частотно-модулированного лазерного пучка в условиях резонансного самовоздействия

*Андреев А.В., ван Люжетаалар Ж., Короновский А.А., Храмов А.Е.* (СГУ, Саратов). Исследование высокочастотных компонент во время эпилептических событий по данным магнитоэнцефалографии

*Глуховская Е.Е., Мантуров А.О.* (СГТУ, Саратов). Система защищенной передачи информации с параметрическим нелинейным подмешиванием и инверсным преобразованием «ток–напряжение–ток»

*Горбунова А.О., Порфирьев Д.П.* (СГАУ, Самара). Моделирование прецессии вихревого ядра в закрученных потоках с тепловыделением

*Круглов В.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С.* (СГУ, Саратов; University of Potsdam Germany). Аттрактор типа Смейла–Вильямса в автономной пространственно распределенной системе

**11 октября 2013**

**Пленарное заседание: Нелинейная динамика информационных технологий, окружающей среды и общества**

*Щёголев С.Ю.* (ИБФРМ РАН, Саратов). Самоорганизация открытых систем, Чарльз Дарвин и биологическая эволюция

*Мухин Д.Н., Гаврилов А.С., Лоскутов Е.М., Фейгин А.М.* (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Эмпирические прогностические модели климата

*Малинецкий Г.Г.* (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва). Синергетика, самоорганизация, сети

*Малинецкий Г.Г.* (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва). Настоящее, прошлое и будущее кучи песка

**Пленарное заседание: Фундаментальные проблемы нелинейной динамики (нелинейные колебания и волны, хаос и образование структур)**

*Кузнецов С.П.* (СФ ИРЭ РАН). Кельтский камень: аттракторы в консервативной системе?

**Устные доклады**

**Секция 4. Синхронизация** *Assanov G.S., Zhanabaev Z.Zh., Govorov A.O., and Neiman A.V.* (Al-Farabi KNU, Kazakhstan, Almaty). Control of biological oscillators by brief temperature pulses

*Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П., Станкевич Н.В.* (СГТУ, Саратов). Синхронизация двух связанных генераторов квазипериодических колебаний

*Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В., Чернышов Н.Ю.* (СГУ, Саратов). Синхронизация и динамика трех реактивно связанных осцилляторов

*Астахов С.В., Гулай А.П.* (СГУ, Саратов). Роль асимметричной связи в формировании мультистабильности при синхронизации двух связанных квазигармонических осцилляторов внешним гармоническим сигналом

*Мищенко М.А., Матросов В.В., Шалфеев В.Д.* (ННГУ, Нижний Новгород). Синхронизация биений двух связанных систем фазовой автоподстройки частоты

*Сафин А.Р., Удалов Н.Н., Капранов М.В.* (НИУ МЭИ, Москва). Особенности взаимной синхронизации неидентичных вихревых спин-трансферных наноосцилляторов

**Устные доклады**

**Секция 2б. Фундаментальные проблемы нелинейной науки**

**Секция 3б. Нелинейная динамика электронно-волновых, магнитоэлектронных и твердотельных систем СВЧ электроники и радиопластики, а также устройств оптического диапазона**

*Трубецкова Е.Г.* (СГУ, Саратов). «И чем случайней, тем верней»: поэтика случайности в русской литературе первой половины XX века

*Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* (СГУ, Саратов). Исследование характеристик перемежающегося поведения вблизи границы синхронного режима при случайном изменении управляющего параметра  
*Курушина С.Е., Максимов В.В., Кайдалова Л.В.* (СГАУ, Самара). Переход «порядок–беспорядок» в многокомпонентных стохастических реакционно-диффузионных системах: приближение среднего поля

*Фролов Н.С., Короновский А.А., Максименко В.А., Храмов А.Е.* (СГУ, Саратов). Анализ сложной динамики распределенных систем электроники СВЧ, моделируемых в рамках РС-метода

*Гуляев Ю.В., Вилков Е.А., Зильберман П.Е., Михайлов Г.М., Чигарев С.Г.* (ФИРЭ РАН, Фрязино). Спин-инжекционный источник ТГц излучения

*Куркин С.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* (СГУ, Саратов). Влияние внешнего магнитного поля на мощность генерации ультрарелятивистского виртатора

*Журавлев М.О., Храмов А.Е., Короновский А.А., Москаленко О.И.* (СГУ, Саратов). Теория перемежаемости перемежаемостей в нелинейных системах

*Половинкин А.В., Мишагин К.Г.* (ННГУ, Нижний Новгород). Влияние шума магнитного поля на работу спинового генератора

#### **Секция 5. Нелинейная динамика информационных технологий, окружающей среды и общества**

*Павлов А.Н.* (СГУ, Саратов). Адаптивный вейвлет-анализ данных оптической когерентной томографии

*Аникин В.М., Ремизов А.С., Самойлов Н.Д.* (СГУ, Саратов). Статистический анализ хаотических схем шифрования. 1. Шифрование на базе модифицированного отображения «Кот Арнольда». 2. Шифрование на базе комплекса хаотических отображений

*Смирнов Д.А., Мохов И.И.* (СФ ИРЭ РАН, Саратов). Взаимосвязи между Атлантическим долгопериодным колебанием, Эль-Ниньо и вариациями глобальной приповерхностной температуры

*Гаврилов А.С., Мухин Д.Н., Лоскутов Е.М., Фейгин А.М.* (ИПФ РАН, Нижний Новгород). Построение климатических мод по пространственно-распределенным временным рядам с помощью метода M-SSA

*Иванов М.О., Хандурин А.В.* (НИУ МЭИ, Москва). Влияние несоизмеримости частот сигнала с аддитивной фрактальной структурой на качество скрытной передачи информации

*Чеченя С.А., Хандурин А.В.* (НИУ МЭИ, Москва). Исследование самоподобия сигналов с аддитивной фрактальной структурой

*Калафати Ю.Д., Козловский П.А., Старков С.О., Тельных А.А.* (НИЯУ МИФИ, Обнинск). Технология поиска «похожего» в графических базах

#### **12 октября 2013**

##### **Пленарное заседание: Синхронизация**

*Малинецкий Г.Г.* (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва). Математическая история

*Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* (СФ ИРЭ РАН). Синхронизация и квазипериодические колебания в низкоразмерных ансамблях осцилляторов

##### **Закрытие школы**