

Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ, рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА
научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 22, № 3, 2014, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ

Мухин Р.Р., Черникова А.А. Об истории эконофизики, нелинейной и эволюционной экономики 3

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Заковоротный В.Л., Фам Динь Тунг, Быкадор В.С. Самоорганизация и бифуркации динамической системы обработки металлов резанием 26

Заковоротный В.Л., Фам Динь Тунг, Быкадор В.С. Влияние изгибных деформаций инструмента на самоорганизацию и бифуркации динамической системы резания металлов 40

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

Ерёмка В.Д., Копоть М.А., Кулагин О.П. 32 ГГц магнетрон с холодным катодом на пространственных гармониках – аналитический расчёт в рамках нелинейной модели и 3D-моделирование 53

АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

Шабунин А.В. Мультистабильность в динамических сетях «тесного мира» 63

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

Пономаренко В.П. Регулярная и хаотическая динамика двухкольцевой системы фазовой синхронизации. Часть 2. Особенности нелинейной динамики частотно-фазовой системы с одинаковыми фильтрами третьего порядка в цепях управления 77

Загребнева А.Д., Говорухин В.Н., Сурков Ф.А. Бифуркации в модели активный хищник – пассивная жертва 94

Правила для авторов 107

C O N T E N T S

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS

- Mukhin R.R., Chernikova A.A.* About the history of econophysics, nonlinear and evolutionary economics..... 3

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Zakovorotny V.L., Pham Dinh Tung, Bykador V.S.* Self-organization and bifurcations of dynamical metal cutting system 26

- Zakovorotny V.L., Pham Dinh Tung, Bykador V.S.* Influence of a flexural deformation of a tool on self-organization and bifurcations of dynamical metal system 40

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Yeryomka V.D., Kopot' M.A., Kulagin O.P.* 32 GHz cold cathode magnetron with space harmonics – nonlinear analytical calculation and 3D-simulation .. 53

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

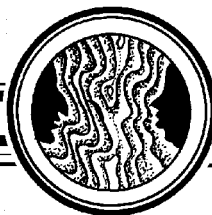
- Shabunin A.V.* Multistability in dynamical small world networks 63

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Ponomarenko V.P.* Regular and chaotic dynamics of two-ring phase locked system. Part 2. Peculiarities of nonlinear dynamics of frequency-phase system with identical third-order filters in control circuits 77

- Zagrebnova A.D., Govorukhin V.N., Surkov F.A.* Bifurcations in active predator – passive prey model..... 94

- Author's rules..... 107



ОБ ИСТОРИИ ЭКОНОФИЗИКИ, НЕЛИНЕЙНОЙ И ЭВОЛЮЦИОННОЙ ЭКОНОМИКИ

Р. Р. Мухин¹, А. А. Черникова²

¹ Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова,
филиал Национального исследовательского технологического университета
«Московский институт стали и сплавов»

² Национальный исследовательский технологический университет
«Московский институт стали и сплавов»

В статье рассматриваются вопросы истории воздействия физики и эволюционной биологии на экономическую науку. Это воздействие началось с самого рождения экономики как отдельной области научного знания и менялось с развитием физики и биологии. Усиление роли статистических методов в физике XX в., рождение нелинейной физики, развитие биологии нашли отражение в сфере экономики и финансов, в результате чего появились такие области, как эконофизика, нелинейная и эволюционная экономика. Можно надеяться на плодотворность новых подходов, которые должны привести к новой экономической идеологии и существенно обогатить экономическую теорию и существующие эконометрические методы.

Ключевые слова: Эконофизика, нелинейная динамика, эволюционная теория, экономическая теория, временные ряды, статистические методы, моделирование.

*Посвящается памяти Александра Юрьевича
Лоскутова, из общения с которым у одного
из авторов в значительной степени сложились
представления о «финансово-экономической
составляющей» нелинейной динамики.*

Научная революция XVI–XVII вв. и ее высшее достижение – создание классической механики – не только заложили основы индустриального развития последующих столетий, но и сформировали научную картину мира. Изменения в этом отношении были колоссальными. Простые и познаваемые законы, управляющие ходом природных процессов, дедуктивное знание, математические схемы составили фундамент нового мышления. И. Пригожин и И. Стенгерс назвали этот золотой период классической науки «триумфом разума» [1]. Важнейшее место в указанном

подходе отводилась концепции об однозначности связей, всеобъемлющей роли динамических закономерностей, которую в наиболее радикальной форме связывают с именем П.С. Лапласа [2]. Фантастическое существо – демон Лапласа – обладало неограниченными математическими возможностями и, зная в любой момент времени положение и скорость каждой частицы Вселенной, было способно решить уравнения движения и в точности описать как будущее, так и прошлое всего нашего мира. Это был догмат научной веры того времени. Господствовало царство порядка, полностью предсказуемое и предопределенное, и лишь на небольшом клочке этого упорядоченного мира, по словам В.М. Тихомирова, находилась «противоправная область» хаоса. Еще поколение, вступавшее в жизнь в начале XX в., взирало на мир иными глазами, чем мы. Тогда казалось, что наука близка к рациональному объяснению картины мироздания.

Надо сказать, что в этой стройной и вызывавшей глубокое интеллектуальное удовлетворение картине имелись области, в которых без вероятностных подходов обойтись было невозможно. Речь идет о системах, состоящих из очень большого числа частиц (порядка числа Авогадро $N \sim 10^{23}$), как, например, в газах. Но эта трудность считалась лишь технической, не имевшей принципиального характера. Были известны уравнения движения для отдельных частиц, и не существовало сомнений в принципиальной возможности решения этих уравнений, если даже частиц очень много. Вера в такую возможность являлась твердой почвой, на которую можно было опереться. В действительности детальная картина поведения каждой отдельной частицы большой системы и не требовалась. Для различных задач достаточно было знания усредненных характеристик – температуры, давления и т.п. Все же для законченности грандиозной картины мироздания были предприняты немалые усилия строгого и последовательного получения законов статистической механики из первых принципов – законов динамики для отдельных частиц. Хотя такая задача до настоящего времени остается не решенной, на этом пути была создана очень важная и с многочисленными приложениями область современной математики, получившая название эргодической теории.

Надежды на полное утверждение царства порядка не оправдались, действительность оказалась совсем иной и намного сложнее. Во-первых, расширилась область хаоса, причем так, что в это трудно было поверить: она охватила системы с небольшим числом степеней свободы, то, что безоговорочно относили к чистой динамике. Для осмысления и признания новой группы явлений, получившей название «динамический хаос», потребовалось около восьми десятилетий [3]. Другая неожиданность – возникновение упорядоченности в области сложных движений. В открытых неравновесных системах с макроскопически большим числом степеней свободы самопроизвольно, без внешних воздействий происходило образование регулярных структур [4–8]. Надо сказать, что новые идеи о самоорганизующихся структурах, о «порядке из хаоса» настолько противоречили устоявшимся представлениям об устройстве мира, что встретили острое неприятие целого ряда крупнейших отечественных теоретиков, среди которых были Л.Д. Ландау, М.А. Леонтович, А.А. Власов [9–11].

Одной из концептуальных сторон новых открытий явилось то, что полный хаос и полная упорядоченность относятся к предельным случаям и не реализуются в «чистом виде». В реальных системах имеет место сосуществование областей

хаоса и регулярности, и эти области могут иметь весьма сложное топологическое строение. В консервативном случае такие системы называются системами с разделенным фазовым пространством [12,13]. Для диссипативных систем характерны квазиаттракторы, в которых наряду с хаотическими траекториями присутствуют регулярные движения [14–16]. Сосуществование областей регулярного и хаотического движений привело к новому, более высокому уровню сложности. Хаос (или упорядоченность) теперь стал неоднородным, он перемежается регулярными (или, наоборот, хаотическими) движениями. Говорить о системе с регулярным или хаотическим поведением возможно только в том смысле, какое поведение – регулярное или хаотическое – является преобладающим.

Нелинейность вошла в число основных понятий физики. Практически во всех разделах физической науки обнаруживаются явления хаоса и самоорганизации, составившие ядро новой области – нелинейной динамики. Никого уже не удивит статья под названием, скажем, «Фрактальный анализ и универсальность Фейгенбаума в физике адронов» [17]. В свой знаменитый список «Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными?», опубликованный в 1971 г. и в последующем пополнявшийся новыми проблемами, В.Л. Гинзбург в 1985 г. (список № 4) включил «§10. Сильнонелинейные явления. Солитоны. Странные аттракторы» [18]. В.Л. Гинзбург пишет: «Сейчас ситуация радикально изменилась. В физической литературе почти всех рангов публикуются, и в немалом количестве, статьи, посвященные солитонам, странным аттракторам, динамическому хаосу и т.д. ...Проблемы, типичные для сильнонелинейной физики, уже привлекли к себе внимание работающих в общей теории относительности и квантовой теории поля. Можно полагать, что в будущем эта тенденция (так сказать, проникновение «нелинейной идеологии» в область микрофизики) будет все больше усиливаться, быть может, даже сыграет выдающуюся роль в ее дальнейшем развитии» [18].

Но что все это значит для тех, кто не занимается фундаментальными проблемами и вообще далек от физики? Идеи и принципы нелинейной динамики приобрели не только общезначимое, но и общенаучное значение. Стал понятнее мир, в котором мы живем, представший под новым ракурсом. С одной стороны, размылись четкие контуры динамической картины, вместо нее пришли сложность, нерегулярность, неопределенность, непредсказуемость. Этот негативный список можно продолжить. Но с другой стороны, появилась новая возможность описания сложно устроенных систем. Понятия и представления нелинейной динамики проникают в различные области знания. Язык нелинейной динамики (зона турбулентности, бифуркация и др.) начинает входить в политический лексикон и даже в обыденную речь. Из многочисленных областей новой «сферы влияния» нелинейной динамики важнейшее место занимает экономика, которая так или иначе неизбежно затрагивает каждого из нас.

К нелинейной экономической динамике тесно примыкают и частично с ней перекрываются экономическая физика и эволюционная экономика – быстро набирающие обороты области, которые используют методологию и аппарат, сложившиеся в физике (особенно в статистической физике) и эволюционной биологии. По поводу применения физических методов в экономической теории приведем выдержку из работы [19]: «Физика здесь выступает как наука, которая имеет дело как с природой, так и с современной математикой, и поэтому обладает дисциплиной мысли и критичностью по отношению к догмам». Сам термин «экономическая физика» принадлежит Ю. Стэнли, ши-

роко известному своими работами по статистической физике. Стэнли предложил этот термин на конференции «Динамика сложных систем» в Калькутте в 1995 г. по аналогии с астрофизикой, химической физикой, биофизикой. В следующем году термин «эконофизика» появился в печати [20] и получил распространение. Может сложиться впечатление (иногда даже прямо утверждается), что до 1995 г. физика, эволюционная биология с одной стороны и экономика с другой, развивались независимо и двигались параллельными путями, а в указанный период произошло их пересечение. Интеграция науки и появление междисциплинарных направлений является характерной чертой науки второй половины XX в., но такие процессы, хоть и в значительно меньших масштабах, имели место и раньше. Издавна экономическая сфера являлась полем деятельности математиков и физиков. Так, И. Ньютон в 1695 г. стал смотрителем Монетного двора. Его деятельность в упорядочении финансов способствовала превращению Англии в богатейшую страну, она стала центром назревающей промышленной революции [21].

Если задаться вопросом, с какого времени физика начала оказывать влияние на экономическую науку, то ответ здесь – как только начала складываться экономическая наука. Другими словами, как только экономика появилась как отдельная область знания (а это относится к концу XVIII в.), она непосредственно формировалась под воздействием физики. С тех пор этот процесс продолжается до настоящего времени. Такое положение совершенно закономерно. В XVIII в. единственной сложившейся физической теорией была классическая механика. Тогда механика не только являлась образцом научного знания и составила основу инженерии, но сформировала мировоззрение целой эпохи. Механистические воззрения заполнили все культурное пространство. Живые организмы представлялись как своего рода сложные механизмы. До настоящего времени мы говорим о механизме химической реакции, механизме власти и т.д. По словам И. Пригожина и И. Стенгерс, даже этика и политика черпали из механики материал для «подкрепления» своих аргументов в пользу существовавших моральных норм и политического устройства [1]. Функционирование экономических и социальных систем тоже представлялось как работа механизмов. Это ощущается уже в сочинениях Дж. Милля и Д. Рикардо, но их идеи были выражены не в формализованном, а в вербальном виде. Многие создатели классической экономической теории были непосредственно связаны с физикой или инженерией. Так, Л. Вальрас учился одно время в Горной школе и имел широкий круг интересов. Он развил теорию общего равновесия под влиянием физика Л. Поинсога. При этом Вальрас указывал, что он несколько лет разрабатывал вопросы чистой экономики как физико-математическую науку [22, с. 7]. В. Парето окончил Политехническую школу в Турине (созданную по образцу знаменитой Политехнической школы в Париже) и защитил диссертацию по механике. Основоположник американской математической экономики, автор самой первой монографии в этой области И. Фишер, был учеником Дж.В. Гиббса. Фишер явился главным инициатором создания Международного эконометрического общества в 1930 г. и его первым президентом (одним из первых членов общества был Н. Винер), которое объединило статистиков и экономистов, способных говорить на языке математики. Фишер при разработке своей теории стоимости использовал гидромеханическую аналогию с сосудами с водой [23, с. 8]. На предыдущей странице он указывал, что сама экономическая терминология в значительной степени заимствована из механики: равновесие, стабильность,

упругость, течение, сила, давление, сопротивление, движение и т.п. Ближайшим учеником Гиббса был другой математик и экономист Э. Уилсон. Внесший огромный вклад в систематизацию экономической теории и установление её логической структуры П. Самуэльсон написал свои знаменитые «Основы экономического анализа», будучи студентом физического факультета Чикагского университета [24, 25].

В основе механистической парадигмы лежат определенность, упорядоченность, однозначность, устойчивость, предсказуемость, жесткость причинно-следственных связей. На этом пути была построена экономическая теория (мейнстрим), которая оставалась доминирующей до последних десятилетий XX в. и на которой были воспитаны поколения экономистов. В основе мейнстрима лежат представления об универсальных законах, описывающих прошлое, настоящее и будущее, главное внимание уделяется поиску равновесных состояний, широко используются количественные методы. В «твердое ядро» мейнстрима вошли предпосылки об индивидуализме, эгоизме, рационализме поведения экономического субъекта, то есть модель *Homo economicus* – человека экономического. В основе доминировавшей экономической теории лежала концепция линейности системы, когда какое-либо воздействие на нее вызывало пропорциональную ответную реакцию. При этом на экономические системы распространяли заимствованный из физики принцип суперпозиции и рассматривали динамику сложной экономической системы как линейную суперпозицию отдельно функционирующих частей системы. Одним из центральных пунктов мейнстрима является принцип соответствия Самуэльсона – состояние равновесия должно быть стабильным, только в этом случае возможно получение значимой информации о системе. Очевидная временная зависимость экономических процессов необходимо требовала учета динамики. Этот вопрос решался рассмотрением смещения положения равновесия при изменении внешних условий, под их воздействием система перестраивала свои внутренние связи и приходила в новое равновесное состояние. Это положение воплощено в популярной концепции «невидимой руки» рынка Адама Смита. В стационарном и равновесном состоянии спрос на товары, деньги и т.п. уравновешивается предложением. Такое состояние является единственным. Вопрос о переходе между различными состояниями не ставился. Считалось, что главным побудительным мотивом для инвесторов является достижение финансового успеха. Они ведут себя как рациональные, эгоистичные индивидуалисты, стремящиеся к получению максимальной прибыли. Ошибки вообще исключаются, и только такой подход считается единственно возможным. В построении мейнстрима о максимизации прибыли явно проглядывает влияние инженерии, где центральным пунктом в принятии инженерных решений является оптимизация и достижение максимальных значений ряда параметров. Благодаря таким действиям инвесторов рынок работает эффективно, формируются «правильные цены». Далее, несмотря на индивидуальность каждого человека, у инвесторов на первый план выступают усредненные черты, направленные на достижение одной цели – извлечение прибыли. Поэтому инвесторы представляют однородную группу с одинаковыми ожиданиями и мыслящую одними и теми же категориями. Кроме того, краеугольным камнем экономической теории является положение о непрерывных изменениях цен, выражаемое восходящей ещё ко временам Аристотеля формулой «*Natura non facit saltum*» («Природа не совершает скачков»). Совершенно естественно, что основой математического арсенала стали такие объекты классической математики, как непрерывные функции

и дифференциальные уравнения. В определенной степени мейнстрим является целостной концепцией, напоминающей структуру естественных наук [26,27]. «Создается впечатление, что экономическая наука, по существу, так и не выросла из детства, протекавшего в эпоху, когда ньютоновская физика была единственной наукой, достойной подражания, а небесная механика – наиболее примечательным достижением этой науки» [28, с. 30].

С развитием физики меняла свой облик и экономическая наука, но этот процесс протекал с временным запаздыванием. Статистический подход в физике стал использоваться в середине XIX в., хотя к этому времени теория вероятностей и основанная на ней математическая статистика являлись развитыми разделами математики. Первые шаги были сделаны немецким физиком К. Кренигом и одним из основателей термодинамики Р. Клаузиусом. Но главная заслуга введения в физику статистического рассмотрения принадлежит Дж.К. Максвеллу (1860) [29]. Видимо, одним из факторов, подтолкнувших Максвелла к этой идее, был монументальный труд английского историка Г.Т. Баккла «History of Civilization in England» (1857–1861), который Максвелл внимательно изучал. Баккл полемизирует со своими оппонентами по поводу «свободной воли» в поведении людей. Хотя у каждого индивидуума в отдельности могут быть разные и непредсказуемые вариации в поступках, в среднем масса людей ведет себя упорядоченно, ее поведение вполне предсказуемо. Идея становится ясной: использовать аналогию между человеческими индивидуумами и частицами газа [30]. Максвеллу принадлежит и глубокое обобщение понятия механического равновесия – статистическое равновесие. основополагающее для мейнстрима равновесие «спрос (D_i) – предложение (S_i)»:

$$D_i(p_1, p_2, \dots, p_n, M) = S_i(p_1, p_2, \dots, p_n, M), \quad (1)$$

где p_i – относительная цена ($i = 1, 2, \dots, n$), n – количество номенклатуры товаров, M – общее количество денег, которое следует понимать в статистическом смысле, но последнее нередко ускользает в моделях мейнстрима.

Наиболее проникательные из физиков с давних пор осознавали потенциальную применимость методов физики, особенно статистической физики, в других областях знания задолго до того, как эти заимствования стали систематически использоваться. В этой связи примечательны высказанные в 1905 году слова Л. Больцмана: «Если мы будем исходить не только из механических объектов, это [методы статистической физики] открывает широкие перспективы. Давайте рассмотрим, как можно применить эти методы к живой материи, обществу, социологии и т.д.» (цит. по [31]). Еще более определенно высказался выдающийся ученик Э. Ферми, рано ушедший из жизни Этторе Майорана. Около 1938 г. Майорана написал статью для социологического журнала, которая осталась неопубликованной и позднее была найдена в его бумагах. Эта работа Майораны вышла в журнале «Scientia» в 1942 г. [32] и потом, во многом благодаря усилиям Р. Мантеньи, в 2005 г. появился её английский перевод [33]. В своей работе Майорана далеко отходит от традиционных задач школы Ферми и касается применимости законов статистической физики по отношению к гуманитарным наукам. Он вводит энтропию через статистический вес – число микросостояний, энергия которых расположена в узком интервале вблизи энергии системы с заданным объемом и числом частиц. Далее Майорана указывает на всеобъемлющую роль статистических законов, подчеркивая, что не все области подчиняются законам

физики, но статистические закономерности действуют везде и их роль универсальна. Работа Майораны десятилетия оставалась малоизвестной, она могла бы иметь программное значение для всей экономической науки.

Физические корни прослеживаются в фундаментальных для мейнстрима динамических уравнениях для спроса и предложения

$$\begin{aligned}\frac{dD_i}{dt} &= \sum_j \alpha_{ij} D_j(p_1, p_2, \dots, p_n, M), \\ \frac{dS_i}{dt} &= \sum_j \beta_{ij} S_j(p_1, p_2, \dots, p_n, M).\end{aligned}\tag{2}$$

Эти выражения с точностью до обозначений совпадают с кинетическими соотношениями в линейном приближении в неравновесной системе [34]. Приравняв в выражениях (2) производные к нулю, придем к любимому сюжету мейнстрима – равновесию. П. Самуэльсон вспоминал, что на его работы по экстремальным принципам в экономических системах, которые принесли ему Нобелевскую премию, значительное влияние оказали прослушанные им во время учебы в университете лекции Б. Уилсона по термодинамике [35].

Конец XIX – начало XX в. можно отнести к числу главных реперных точек в развитии изучения экономических систем методами естественных наук. Здесь произошли два главных события. Первое из них является одним из самых крупных «вторжений» физической теории на экономическую территорию, имевшим весьма значительные последствия. Это произошло в 1900 г., в год рождения квантовой физики. Тогда 30-летний французский математик Луи Башелье представил к защите диссертацию, в которой он рассматривал физическую модель для анализа финансового рынка [36]. В качестве такой модели Башелье выбрал броуновское движение, математической основой которого является теория случайных блужданий. Обратим внимание на неординарность подхода Башелье, ведь основополагающие работы по теории броуновского движения А. Эйнштейна [37] и М. Смолуховского [38] появились лишь через несколько лет, а строгое математическое обоснование было проведено Н. Винером более чем через два десятка лет [39, 40]. Судьба работы Башелье была трудной. Хотя он получил степень «mention honorable» («почетный отзыв»), но от нее было далеко до «très honorable» («с особым отличием»), открывавшей путь к академической карьере [26]. Работа Башелье не произвела впечатления на современников. Лишь через шесть десятилетий, уже после смерти автора, его работа была переведена и опубликована в США [41] и была оценена по достоинству.

Работа Башелье явилась одним из истоков мейнстрима, который до настоящего времени в значительной степени еще удерживает свои позиции. Работа [41] по существу была исторически первой моделью финансового рынка, основанной на строгой и последовательной математической теории с отчетливо изложенными исходными положениями и аргументированными дедуктивными выводами. Это была идеализированная экономическая модель, позволяющая на определенных предпосылках формулировать инвестиционный портфель, оценивать вероятности рисков, определять тактику действий для получения доходов с заданным уровнем риска и т.д. Развитие модели Башелье легло в основу современных работ в указанной области, наиболее значимые из которых были увенчаны пятью Нобелевскими премиями по экономи-

ке [26, 42]. Значение работы Башелье сказанным не исчерпывается. Модель Башелье выглядит вполне убедительной, но критический анализ ее явился одним из побудительных факторов отхода от доминировавшей экономической теории. Анализ Башелье был основан на двух положениях: статистическая независимость стоимости ценных бумаг, и нормальное распределение Гаусса, то есть колебания цен в прошлом не оказывали никакого влияния на цены сегодняшнего дня, цены менялись случайным и независимым образом друг от друга. Используемое нормальное распределение имело нулевое среднее вследствие суммарного действия большого числа преобладающих малых независимых случайных факторов. Около этого среднего значения концентрировалась большая часть колебаний цен, представляющих многочисленные изменения вверх и вниз. Если говорить об очень значительных изменениях, то они должны происходить крайне редко, обусловленные хвостами нормального распределения [26].

Второе событие связано с именами американского экономиста и социолога Торстейна Веблена и Йозефа Шумпетера – крупнейшего представителя австрийской школы. К Веблену (1898) и Шумпетеру (1911) восходит применение идей эволюционной биологии к экономическим системам [43, 44]. Идеи об эволюции, пробившие первую брешь в представлениях о неизменности мира, восходят еще к XVIII в. (гипотеза Канта–Лапласа о возникновении Солнечной системы, геологическая история Земли Лайеля). Но первые эволюционные теории являются достижением XIX в. – теория биологической эволюции (Ч. Дарвин, А. Уоллес, Г. Спенсер), кинетическая теория газов, теория таких явлений, как теплопроводность, диффузия и т.п. Экономическая система представляет не статическую, а подверженную развитию, эволюционирующую систему. Но глубокие идеи Веблена и Шумпетера оставались чисто качественными, не воплотившись в какие-либо математические модели. Потенциальные возможности этих идей остались не полностью реализованными и не оказали того влияния на развитие экономической теории, какое могли бы оказать.

Состояние равновесия является ключевым понятием мейнстрима, которое имеет, в основном, статический характер. При рассмотрении динамики упор все равно делался на статические равновесные состояния, на фоне которых динамика и разыгрывалась. Понадобилась начавшаяся в конце XX в. смена экономической идеологии, чтобы динамические процессы вышли на передний план, приобрели самостоятельное значение, а стационарные равновесные состояния рассматривались как частные случаи. Именно в этом смысле следует понимать утверждение Д. Норта в его нобелевской лекции в 1993 г., что теории экономической динамики не существует. Так, традиционные подходы не позволяют объяснить скачкообразное изменение статических состояний. При рассмотрении традиционных балансовых соотношений «спрос–предложение», «доходы–расходы», «производство–реализация», «потребление–накопление», «сбережения–инвестиции» основное внимание уделяется достижению равновесия, а не его нарушению [45]. Еще В. Леонтьев заметил, что психологически равновесию и устойчивости отдается предпочтение, они ассоциируются с чем-то хорошим, тогда как неустойчивости связываются с чем-то плохим и с порога отвергаются [25].

Другую реперную точку следует отнести к 1940-м – началу 1950-х, когда стали появляться нелинейные модели в экономических задачах. Некоторые основополагающие идеи нелинейной динамики высказывались еще до того как эта область знания

сформировалась в целостную систему. Это делалось и экономистами, не изучавшими непосредственно нелинейные явления. Вспомним слова классика экономической науки Адама Смита о том, как влияет индивидуальный интерес на достижение экономической выгоды для всего общества и происходит самоорганизация экономической системы. Всякий человек «преследует лишь собственную выгоду, причем в этом случае, как и во многих других, он *невидимой рукой* (курсив наш. – Р.М., А.Ч.) направляется к цели, которая совсем и не входила в его намерения» [46]. Вот высказывание другого классика – Василия Леонтьева, рассматривавшего экономическую систему как динамическую систему (в современном смысле): «Небольшая, едва различимая ошибка в описании начального положения неустойчивой динамической системы принесет значительную погрешность в прогноз или объяснение последующих положений. С увеличением временного интервала, отделяющего год прогноза от базового года, ошибка будет нарастать» [25]. Трудно поверить, что это написано в 1948 году! В 1940 г. английский экономист венгерского происхождения Н. Калдор опубликовал работу, в которой представил модель делового цикла [47]. Модель Калдора явилась предтечей более поздних нелинейных экономических моделей. Другим заметным событием стала работа о деловых циклах будущего Нобелевского лауреата Дж. Хикса [48], который обобщил классическую модель мультипликатора-акселератора П. Самуэльсона [49]. Самуэльсон представил свою модель с помощью разностных уравнений; при переходе к непрерывному случаю получается уравнение гармонического осциллятора с затуханием или, наоборот, с ускорением. Дополнительные условия, наложенные Хиксом в виде неравенств, делают эту модель нелинейной.

Особенно примечательна работа Р. Гудвина 1951 г. [50], в которой он изучал модель экономических циклов, впоследствии названную его именем. В основе этой модели лежит уравнение нелинейного осциллятора. О своих первоначальных результатах Гудвин сначала сообщил на собрании Эконометрического общества в 1948 г. в Кливленде, на следующий год они были опубликованы в журнале *Econometrica*. В работе [50] задача рассмотрена более полно и обстоятельно. Гудвин исходил из следующего уравнения:

$$\varepsilon\theta\dot{y} + [\varepsilon + (1 - \alpha)\theta]\dot{y} - \varphi(\dot{y}) + (1 - \alpha)y = O^*(t), \quad (3)$$

где y – величина дохода, ε – постоянная, характеризующая задержку, связанную с мультипликатором, θ – задержка между решением об инвестициях и соответствующими затратами, $O^*(t)$ – затраты к моменту времени t . При исследовании этого уравнения Гудвин ссылается на только что опубликованную на английском языке классическую монографию А.А. Андропова, А.А. Витта и С.Э. Хайкина «Теория колебаний» [51]. Уравнение вида (3) изучалось еще Дж. Рэлеем, оно легко трансформируется к уравнению типа уравнения ван дер Поля. Гудвин рассматривает однородный случай, когда $O^*(t) = \text{const}$, и показывает существование предельного цикла. При периодической функции $O^*(t)$ система демонстрирует вынужденные колебания. Несколькими годами раньше работы Гудвина М. Картрайт и Дж. Литтлвуд как раз провели изучение уравнений типа (3) и обнаружили при определенных значениях параметров наличие областей со сложной динамикой [52, 53], что, как позднее было установлено, явилось проявлением хаотического движения. Но эти результаты не были известны Гудвину.

Тогда, в начале 1950-х годов работа Гудвина не произвела впечатления, слишком радикальным был отход от устоявшихся представлений. Но это был росток нового подхода, новой парадигмы, которой через несколько десятилетий суждено было привлечь пристальное внимание. Эволюционный характер сложной нелинейной финансово-экономической сферы делает совершенно естественным применение методов нелинейной динамики и ее математического аппарата – теории динамических систем. Вспомним идеологию «нелинейного мышления» Л.И. Мандельштама. Как большинство глубоких положений, оно оказывается справедливым не только в области, для которой первоначально было сформулировано, а выходит далеко за ее пределы. Упомянем также другую, более позднюю работу Гудвина, в которой он применил модель Лотки–Вольтерры для описания классово-борьбы [54].

Распространению новых взглядов способствовало продолжающееся критическое рассмотрение основ классической теории, в которой были обнаружены глубокие изъяны. Сомнения в адекватности некоторых положений, которые закладывались в фундамент экономической теории, высказывались задолго до рассматриваемых событий. Еще в 1930-е годы классик экономической теории П. Самуэльсон отмечал, что при стремлении системы к единственному положению равновесия независимо от начальных условий предположение о неизменности параметров оказывается несостоятельным, необходимо учитывать наличие памяти системы, откуда вытекает вариативность параметров и динамическое поведение [55].

Сразу можно отметить, что утверждение единственности стационарного равновесного состояния является совершенно априорным. К примеру, в задаче трех тел определены равновесные состояния (эйлеровы и лагранжевы движения) [56]. Но уже для четырех тел вопрос о конечности таких состояний остается открытым. А ведь задача n тел является задачей, хорошо поставленной математически, с известными уравнениями движения, и эта система неизмеримо более простая, чем область экономики и финансов.

Еще В. Леонтьев в 1982 г. отмечал, что работа экономистов, в отличие от их коллег в естественных и исторических науках, не подчинена строгой дисциплине систематического сбора данных. К примеру, с марта 1977 по декабрь 1981 математические модели без статистических данных или анализ без математических формул и статистических данных составляли 65.6%, эмпирический анализ с использованием косвенных статистических оценок – 22.7% [25]. «Каждая страница экономических журналов пестрит математическими формулами, которые ведут читателя от более или менее правдоподобных, но абсолютно произвольных предположений к точно сформулированным, но не относящимся к делу теоретическим выводам» [там же]. Далее Леонтьев продолжает: как долго научное и инженерное сообщество «будет воздерживаться от выражения озабоченности по поводу состояния устойчивого, стационарного равновесия и блестящей изоляции, в которой оказались экономисты-теоретики в настоящее время?» [там же]. Критика следовала с разных сторон, одним из «возмутителей спокойствия» был Б. Мандельброт. Другие несоответствия сводятся к следующему: 1) инвесторы не всегда являются рациональными и эгоистичными, их поведение может быть иррациональным и подвержено воздействию эмоций; 2) категория инвесторов неоднородна, совокупное воздействие на рынок различных факторов не сводится к их сумме, и рынок демонстрирует значительно более сложное поведение; 3) действительное поведение цен также значительно отличается от сложившихся представлений, вместо ожидаемой непрерывности могут иметь место разрывы, существенные скачки цен; 4) предположение о нормальности распределения в изменении цен не

соответствует фактам; 5) положение о стационарном и равновесном состоянии рынка является догмой и подвергается серьезным сомнениям [19, 26]. При нормальном распределении со среднеквадратичным отклонением σ около 95% случаев не превышают 2σ . Широко известно правило «трех сигм» – с вероятностью 0.9973 значения нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием a лежат в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ [57]. Реальные колебания цен сильно противоречили нормальному распределению. Если рассмотреть индекс Доу–Джонса (среднее значение стоимости акций тридцати ведущих компаний США), имелось довольно много изменений, превышавших 5σ , некоторые достигали 10σ , а в одном случае – 19 октября 1987 г. – даже 22σ (вероятность такого скачка менее 10^{-50} !) [26]. Что касается единственного рыночного положения равновесия, в работе [58] показано, что, к примеру, современная Россия может иметь по крайней мере два устойчивых состояния – низкопродуктивное и высокопродуктивное. В настоящее время страна находится в первом из этих состояний, для перехода во второе требуется преодолеть барьер.

Появление нелинейной динамики, кроме прочего, расширило область применимости статистических методов. В этом отношении нелинейная динамика сближается со статистической физикой. Эволюционная биология сама использует многие методы нелинейной динамики. В эволюционной экономике, помимо проникновения идей и методов эволюционной биологии, существует направление, рассматривающее эволюцию экономической системы, исходя из теории самоорганизации. Общим для всех трех областей является подход с позиций сложности, причем сложность присуща не только сложно устроенным системам, но простым системам с небольшим числом степеней свободы. Более того, сложность может проявляться максимально сильным образом: имеет место сосуществование областей нерегулярных и регулярных движений, причем топологическое строение этих областей само может быть весьма сложным. В связи со сказанным можно полагать, что нелинейная динамика, статистическая физика, эволюционная биология представляют единое целое при использовании в экономических исследованиях. Здесь возникают две группы вопросов. Первая из них носит больше прагматический характер и заключается в возможности применения готовых моделей и существующих методов в экономических исследованиях. Указанное направление активно развивается. Уже простой подход приспособления к экономическим ситуациям известных физических понятий и моделей привел к весьма осязаемым результатам. Важнейшим топологическим инвариантом в теории динамических систем является грубость Андронова–Понтрягина (структурная устойчивость). Грубость сначала выступала как общефизическая и общематематическая концепция, а затем приобрела значение как одного из принципов экономической теории [59]. При анализе экономического развития весьма полезным инструментом оказывается теория бифуркаций, становятся понятными внезапные и загадочные качественные структурные изменения. Важнейшее значение имеет, как правило, небольшое число сценариев дальнейшей эволюции системы после прохождения точки бифуркации и возможность анализа поведения рассматриваемой системы. При изучении динамики развития городов было использовано обобщение уравнения ван дер Поля [59]. Было показано, что в критических точках малые изменения в транспортировке ресурсов оказывают огромное влияние на процессы производства. Точки бифуркации являются обычной принадлежностью нелинейных систем, и данный аспект нелинейной динамики находит свое проявление в самых разнообразных экономических задачах: транспортировка грузов, использование природных ресурсов, модели экономического роста, финансовый анализ и др. Особый интерес

представляет рассмотрение при изменении бифуркационных параметров перехода в одно из состояний равновесия. Для экономических систем важность изучения бифуркаций обуславливается еще тем, что фиксация значений параметров становится еще более проблематичной, чем в физических системах, неоднозначность и непредсказуемость развития вблизи точек бифуркации являются важнейшими факторами при любом реалистическом экономическом анализе. Оказалось, что практически все канонические модели нелинейной динамики нашли применение в экономических задачах [60]. Большое количество таких ситуаций описано в книге В.-Б. Занга [59]. Вот пример использования физических методов в экономике. Известное степенное распределение Парето родилось при решении экономической задачи (распределение доходов населения, 1897). Открытие степенных законов в статистической физике произошло значительно позже. Отметим любопытный обратный ход от физики к экономике, который привел к нетривиальному результату. Оказалось, что в сложных системах существенно различается релаксация эндогенных и экзогенных возмущений: реакция на внешнее затухает значительно быстрее, чем внутренние возмущения. Этот эффект хорошо известен в теории реальных деловых циклов [61].

Ввиду сложности финансово-экономических систем и трудности достаточно полного и корректного учета внешних воздействий возможность моделирования таких систем весьма ограничена. Путь к изучению их динамики открывается при наблюдении за их поведением, анализом реальных данных без обращения к априорным моделям. Наблюдаемой здесь является последовательность значений переменной (или переменных) системы, поэтому используется термин *временной ряд*. Финансовый временной ряд – это последовательность, описывающая поведение какого-либо рыночного процесса [62]. Сама идея изучения временных рядов является весьма привлекательной, ведь в этом случае информация получена непосредственно из экспериментальных данных. Поэтому на исследование временных рядов были направлены значительные усилия.

Главными задачами исследования временных рядов являются задачи *идентификации* динамических систем и *прогнозирования* их поведения. В задачах идентификации ищется ответ на вопрос, каковы параметры системы, породившие данный временной ряд [63]. Для всех гладких динамических систем, за исключением меры нуль, по временному ряду для одной динамической переменной можно получить аттрактор, по основным свойствам аналогичного аттрактору, породившего данный временной ряд. Прежде чем говорить о прогнозировании, обратимся к прошлому, к уже совершившимся событиям. 24 октября 1929 г., в «черный четверг» началось обвальное падение курса акций на Нью-Йоркской бирже, через несколько дней произошел биржевой крах Уолл-стрита. Это событие положило начало Великой депрессии – мировому экономическому кризису, продолжавшемуся до конца 1930-х годов. Великой депрессии посвящена огромная литература, до настоящего времени среди экономистов нет единодушия о причинах этого явления, для его объяснения создан десяток теорий. Даже в такой намного более простой задаче, как адекватное понимание прошлого при наличии большей части относящейся к ситуации информации, получение однозначного решения оказывается проблематичным. Ясно, что прогнозирование будущего представляет качественно более сложную задачу и трудно сказать, во всех ли случаях она имеет решение.

Для наших целей основное значение имеет работа Ф. Такенса [64], в которой он доказал носящую его имя теорему вложения, играющую ключевую роль при изучении временных рядов. Из теоремы Такенса можно получить соотношение, пред-

ставляющее покомпонентный вариант записи временного ряда: $x_i = F(x_{i-1}, \dots, x_{i-m})$. Данное соотношение можно использовать при решении задачи прогнозирования, так как для этого требуется знать только величину m – размерность вложения при отображении многообразия, на котором определена динамическая система, в векторы m -мерного евклидова пространства, при этом размерность вложения m должна быть достаточно велика [62]. Главное допущение в доказательстве теоремы Такенса – временной ряд порожден детерминированной динамической системой. Теорема Такенса нашла множество приложений в самых разных областях знания: в технике, в химической технологии, экономике, психиатрии и др.

Одним из фундаментальных понятий хаотической динамики является фрактал. В основе этого понятия лежит идея о повторяющихся структурах, что весьма удачно формирует инструмент, в котором объединены и анализ, и синтез. Самоподобные структуры издавна известны в математике, но никто не предполагал, что множества с нетривиальной хаусдорфовой размерностью могут иметь какое-либо отношение к реальности. Убедительно показал, что это именно так, Б. Мандельброт. Если к правильному фракталу добавить элемент случайности, то получается конструкция, довольно близкая к реальности, имитируются творения природы [65, 66, 26]. С помощью фрактальной структуры описывают строение областей с хаотической динамикой [67]. В концептуальном отношении использование хаотических фракталов для описания областей с хаотической динамикой внутренне противоречиво, но для прикладных задач такой подход вполне приемлем. Видимо, первым, кто обратил внимание на фрактальную структуру временных рядов, еще в 1967 г. был Мандельброт [68]. Отметим дату появления работы (1967), тогда теория фракталов еще создавалась, формирование основ теории хаоса выходило на завершающую стадию. В дальнейшем утверждение Мандельброта было подкреплено вычислительными экспериментами целого ряда авторов [66, 69 и др.]. Наличие фрактальных структур в финансовых временных рядах можно объяснить тем, что для устойчивого рынка на нем должны присутствовать инвесторы с разными инвестиционными горизонтами (от нескольких часов до нескольких лет). Это приводит к масштабной инвариантности на соответствующем временном интервале [66].

Для исследования временных рядов с помощью фрактального анализа в 2003 г. М.М. Дубовиковым и Н.В. Старченко (на основе идей, высказанных первым из авторов) был предложен другой подход [42, 66, 70, 71]. Была введена новая характеристика – индекс фрактальности μ – основной фрактальный показатель и был разработан соответствующий алгоритм. Традиционным методом анализа временных рядов является использование показателя Херста H , который считается наиболее эффективным [72]. Однако для надежного вычисления H требуется обработать несколько тысяч данных. Оказалось, что в подавляющем большинстве случаев индекс μ вычисляется на порядок более точно, чем H – показатель Херста. К примеру, для ценового ряда компании Alcoa Inc., с которого начинается по алфавиту список индекса Доу–Джонса, был получен следующий результат: $\mu = 0.571 \pm 0.071$, $H = 0.229 \pm 0.405$ [66, с. 288–292].

Использование индекса μ дает возможность существенно продвинуться в решении задач идентификации и прогноза.

Если говорить о реальной возможности прогнозирования экономической ситуации из анализа временных рядов, ответ здесь положительный, но с рядом суще-

ственных оговорок. Существующие методы пригодны не во всех ситуациях, в каких именно – зависит от конкретного случая. Методы анализа временных рядов дают хорошие результаты в применении к задачам, поставленным кардиологией, психиатрией и некоторыми другими областями. Для экономических задач в общем случае результаты более скромные. Корректный анализ для такого рода задач требует использования значительно больших массивов информации [73, 74]. Все это, видимо, подтолкнуло некоторых экономистов с горечью констатировать, что использование экономофизических методов прогнозирования не оправдало надежд [75]. Это, наверно, слишком сильное утверждение. Обратимся к методу анализа временных рядов, предложенному английским экономистом К. Грэнджером. Грэнджер вспоминал в своей Нобелевской лекции, что в его попытках осмыслить понятие причинности при представлении данных двумя взаимосвязанными временными рядами на ключевую идею натолкнул основатель голографии Д. Габор, посоветовавший обратиться к работе Н. Винера по теории предсказаний [76]. В ней Грэнджер нашел два положения, оказавших решающее воздействие: 1) причина предшествует следствию, 2) в причине содержится уникальная информация о следствии, которая не содержится в других переменных. Отсюда можно было прийти к идее, что, используя информацию, содержащуюся в одном временном ряде (причина), можно улучшить предсказуемость другого временного ряда (следствие). Грэнджер формализовал эту идею с помощью линейной регрессионной модели и разработал процедуру тестирования метода [77, 78]. Коллеги не восприняли эти идеи как настоящую причинность и стали называть ее «причинность по Грэнджеру», видимо, вследствие того, что указанное условие было только необходимым, но не достаточным. Указанный метод оказался значительным достижением и нашел широкое применение для объяснения долгосрочных тенденций в экономических показателях. Термин «причинность по Грэнджеру» стал общепринятым для обозначения причинно-следственной связи между временными рядами.

Американский экономист румынского происхождения Н. Джорджеску-Реген применил для задач экономической теории принципы термодинамики, широко используя понятие энтропии. Его главный труд «Закон энтропии и экономический процесс» вышел в 1971 г. [79]. Джорджеску-Реген подчеркивал универсальность понятия энтропии и считал из всех законов природы второе начало термодинамики наиболее близким к экономике, в нем он видел главную причину экономического дефицита. Развитие идей Джорджеску-Регена легло в основание направления, получившего название экологической экономики.

В 1982 г. была опубликована монография Р. Нельсона и С. Уинтера «Эволюционная теория экономических изменений» [28]. Это тот случай, когда с появлением труда, сконцентрировавшего предыдущие результаты, появляется осознание того, что сложилась и приобрела самостоятельное значение новая область. С появлением указанной работы Нельсона и Уинтера стало возможным говорить, что сформировалась эволюционная экономика как новый раздел экономической науки. В предисловии к русскому изданию авторы пишут: «Теоретическая позиция, которую мы развиваем в этой книге, отражает нашу убежденность в том, что ключевая задача экономического анализа – осмысление процессов, являющихся движущей силой экономических изменений, и что неоклассическая теория не в состоянии справиться с этой задачей» [28, с. 8].

Работы Т. Веблена и Й. Шумпетера конца XIX – начала XX в. по эволюционному подходу в экономике не успели занять надлежащего места и оказались на периферии экономической науки. Центральное место по-прежнему занимала концепция экономического равновесия. В эволюционной экономике упор делается на попытки понять, как происходят изменения. Последнее особенно важно для экономики переходного периода, который переживает среди других стран и Россия. В основу эволюционной экономики положены два ключевых понятия: 1) идея экономического «естественного отбора», 2) представления об «организационной генетике» – процессах передачи во времени характерных черт организации, которые лежат в основе их способности выпускать продукцию и извлекать прибыль. Теория рассматривает наследование благоприобретенных признаков и своевременную изменчивость под воздействием неблагоприятной обстановки. Так, инвестирование направлено на рентабельность фирмы, то есть рентабельные фирмы будут расти, а нерентабельные – сворачиваться. Чувствительность фирмы к ее преуспеянию или неудачам является отражением качества ее «генов». У фирмы имеется критерий оценки изменения ее повседневной деятельности – ожидаемая прибыль. Концепция поиска изменений представляет аналог концепции мутации в биологической эволюционной теории. Важной чертой «экономической мутации» является недетерминированный характер этого процесса, результатам поиска присущ элемент случайности [28].

Неустойчивость и значительная изменчивость характерны для самых разных экономических процессов: формированию цен, валютных курсов, биржевых котировок, спроса и предложения на рынках факторов производства, потреблению и сбережениям, инвестированию, реализации продукции, проведению расчетов, формированию доходов и расходов бюджетной системы и др. Изменчивость имеет характер не просто колебаний соответствующих показателей, а представляет сложное, часто хаотическое движение [45]. Заметим, что в физических системах области хаотической динамики часто являются очень узкими, их мера мала, но, что принципиально важно, ненулевая. Вопрос, насколько велики области хаоса в экономических системах, остается открытым. Значение этого вопроса не подлежит сомнению, сопоставимым с этим является и трудность задачи.

Что касается математических методов (см., например [80–82]), то, по словам Д.С. Чернавского, эволюционная экономика использует тот же математический аппарат, что и все развивающиеся системы (физические, химические, биологические), отсутствие своего особого аппарата не недостаток, а скорее достоинство, поскольку сближает эволюционную экономику с естественными науками [83]. Подводя итог развития эволюционной экономики, в своей книге Нельсон и Уинтер отмечают различие между мощью и универсальностью идей, на которые они опираются, и куда более скромными результатами, полученными с помощью конкретного моделирования [28, с. 44]. Сказанное относится к началу 1980-х годов. Эволюционная экономика и эконофизика, будучи очень молодыми областями, испытывают неизбежные трудности роста. Но, несмотря на это, начиная с 1980-х, было получено всюду плотное множество результатов, в том числе весьма нетривиальных. Укажем в качестве примера только на некоторые из них: статистический механизм денег [84, 85], термодинамическая формулировка экономики [86], принципы самоорганизации в сетях снабжения и производства [87], установление стабильности посредством экономических циклов [88], применение понятия статистической энтропии в теории общего равно-

весия [89]. Значительным достижением являются результаты исследований школы И.Г. Поспелова, которые представляют важный вклад в теоретическую и прикладную экономику [90, 91]. Этим их роль не исчерпывается. Указанные результаты в некотором отношении имеют общенаучное значение. Конечно, это требует отдельного рассмотрения, но здесь нет иной возможности, кроме как ограничиться краткими замечаниями. В этих исследованиях исходным пунктом являлись общие физические положения – вариационные принципы, принципы симметрии, разделение величин на интенсивные и экстенсивные и др. Применение вариационного принципа в пространстве экономических агентов приводит к гамильтоновым уравнениям движения. В отличие от физических систем, здесь функция Гамильтона обладает существенной особенностью – все ее критические точки имеют характер седла. Это приводит к необходимости решения не задачи Коши, а краевой задачи. Следующие из этого результаты получили название *теорем о магистралях*. Данные результаты неожиданным образом оказались связанными с антропным принципом – необычным научным принципом, затрагивающим глубинные вопросы об устройстве мироздания. Антропный принцип имел длительную предысторию, а в XX в. он восходит к П. Дираку, А.Л. Зельманову, Г.М. Идлису, Р. Дикке, Б. Картеру, Дж. Уилеру [92–96]. Антропный принцип утверждает о наличии у Вселенной таких свойств, которые позволяют появление в ней разумной жизни. Это возможно лишь в узком диапазоне физических постоянных. Если исходить не из биологической формы материи, то возможно рассмотрение на более фундаментальном уровне – ядерном и атомарном. Кажущееся естественным, что относительно небольшое (в пределах порядка) изменение значений физических постоянных не нарушит главных черт физической картины, оказывается неверным. Численные значения физических постоянных являются не только достаточными, но и необходимыми для фундамента физической картины – существования основных состояний. Другими словами, изменение физических постоянных (в пределах порядка) или исключение одного из внутренних квантовых чисел (например, изотопического спина) приведет не только к количественным, но и к качественным изменениям в физической картине, поскольку рухнет ее фундамент – существование основных состояний [96]. Теоремы о магистралях дают возможность экстраполировать идеи антропного принципа в другом направлении – «Возникает ощущение существования некоего «экономического антропного принципа»: экономический механизм вступает в действие только тогда, когда его рациональное использование не требует слишком детального предвидения» [91, с. 90]. Иными словами, можно предположить, что в каждый момент времени в экономике отбирается и действует такой комплекс механизмов, который не требует детальных расчетов для принятия разумных решений. Мы имеем дело со своего рода экономическим антропным принципом: «экономическая Вселенная» представляется наблюдателю гармоничной и «приспособленной» к нему потому, что при ином ее устройстве наблюдатель не существует. Предложенный подход нашел уже практическое применение, например, при анализе деятельности Центрального банка России [91, с. 767; 102, с. 320].

Широкое распространение получили нелинейные модели, это направление отражено и в монографической литературе [78, 99–101]. Появилась также монографическая литература по эконофизике (см., например [101, 102]. С эконофизикой тесно связаны физические методы в демографии [103] и еще одна интенсивно развивающаяся область приложений физических идей и методов – социофизика

[104–106]. Но эти важные и интересные направления выходят за рамки предмета данной работы.

В современной экономической науке сложность теоретических моделей и применяемых эконометрических методов ведет к становлению двух научных сообществ, в чем-то напоминающих разделение между теоретиками и экспериментаторами в естественных науках [27]. Рассмотренное выше в значительной степени можно отнести к новой эконометрике. Но воздействие методов современной физики и эволюционной биологии по отношению к экономическим задачам этим не исчерпывается. Такое воздействие глубже и способно влиять на концептуальном, теоретическом уровне. В качестве примера отметим работы Л.П. Евстигнеевой и Р.Н. Евстигнеева, результаты которых суммированы в монографии «Экономика как синергетическая система» [107], и фактически претендуют на новую парадигму экономической науки.

Проникновение в экономику новых идей и методов из областей физической и биологической науки уже состоявшийся факт. Новые подходы пришли в резкое противоречие с устоявшимися взглядами, они непривычны и неудобны с традиционных позиций. Один из основателей нелинейной науки В.И. Арнольд указывал на некоторые качественные выводы применительно к нелинейной системе при переходе из одного устойчивого состояния в другое, более предпочтительное: 1) постепенное движение к лучшему состоянию сразу приводит к ухудшению и его скорость при равномерном движении увеличивается, при этом сопротивление изменению растет; 2) сопротивление достигает максимального значения раньше перехода через наихудшее состояние; 3) величина ухудшения, необходимая для перехода в лучшее состояние, сравнима с финальным улучшением [108]. Вместо линейной модели, детально разработанной, удобной и понятной, с определенностью и предсказуемостью поведения, пришла сложность с предельными циклами, бифуркациями, аттракторами, с неопределенностью и ограниченной предсказуемостью. Как всегда, новое проникает с большими трудностями. Причем наиболее консервативными оказываются не ведущие экономисты, которые сами лучше других видят недостатки ортодоксальной экономической теории и открыты к восприятию новых идей, если они достаточно проработаны. Наибольшее сопротивление исходит от экономистов более низкого ранга, убежденных сторонников устаревшей ортодоксальной науки [24].

Каков вывод из изложенного? Авторы настоящей работы далеки от мысли «мы наш, мы новый мир построим». Но использование готовых рецептов явно недостаточно и требуется для новых задач создавать свои новые методы. Помимо новых подходов к конкретным задачам, фундаментальное значение имеет то, что привлечение инструментов из арсенала физики и биологии, ведет к избавлению от некоторых иллюзий и способствует созданию новой экономической идеологии. Приходит более полное осознание сложного поведения экономического мира, что прежние устоявшиеся представления имеют весьма ограниченную область применимости. С другой стороны, оппоненты описанных новых подходов к экономическим исследованиям аргументируют свою позицию тем, что методы эконофизики, нелинейной и эволюционной экономики представляют что-то вроде модных течений и, как всякая мода, со временем уходят. Прослеженное на длительном временном интервале взаимодействие физики и эволюционной теории с экономикой убеждают в обратном. Высокий уровень развития физической науки предлагает не только новые методы, а определяет стиль научного мышления, и заимствование из арсенала физики другими областями научного знания является совершенно закономерным и естественным. Об

этом свидетельствует вся история науки Нового времени. Эконофизика, нелинейная и эволюционная экономика, несмотря на новизну этих терминов, не веяние моды. Конечно, не все, активно сейчас разрабатываемое в этих областях, приживется на новой почве. Но в любом случае будет какой-то «сухой остаток». Новые методы из физики и эволюционной биологии могут стать «любимым местом охоты», по выражению В. Леонтьева, в экономических исследованиях. Сюда добавим, что С. Смейл включил задачу «Развитие экономической теории с точки зрения динамических систем» в число важнейших подлежащих решению проблем математики XXI в. наряду с 8 и 16-й проблемами Гильберта, аттрактором Лоренца, проблемой турбулентности и др. [109]. Думается, со временем новые методы сформируют новую экономическую идеологию и внесут значительный вклад в новую эконометрику.

Библиографический список

1. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. М.: Прогресс, 1986.
2. Лаплас П.С. Опыт философии теории вероятностей. М., 1908.
3. Мухин Р.Р. Очерки по истории динамического хаоса. М.: URSS, 2012.
4. Пригожин И., Николис Г. Биологический порядок, структуры и неустойчивость // УФН. 1973. Т. 109. Вып. 3. С. 517.
5. Пригожин И., Николис Г. Познание сложного. М.: Мир, 1980.
6. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.
7. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985.
8. Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974.
9. Климонтович Ю.Л. Работа М.А.Леонтовича 1935 года по теории необратимых процессов // Академик М.А.Леонтович. Ученый. Учитель. Гражданин. М.: Наука, 2003. С. 160.
10. Горобец Б.С. Круг Ландау. Физика войны и мира. М.: URSS, 2009.
11. Романовский Ю.М. Устное сообщение 19.01.2011.
12. Заславский Г.М., Чириков Б.В. О механизме ускорения Ферми в одномерном случае // ДАН СССР. 1964. Т. 159, № 2. С. 306.
13. Чириков Б.В. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт 267. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1969.
14. Афраймович В.С. Странные аттракторы и квазиаттракторы // Проблемы нелинейных и турбулентных потоков в физике. Киев: Наукова думка, 1985. С. 21.
15. Шильников Л.П. Теория бифуркаций и турбулентность // Там же. С. 118.
16. Afraimovich V.A., Shilnikov L.P. On strange attractors and quasiattractors // Nonlinear dynamics and turbulence. Boston-London-Melbourn: Pitman, 1983. P. 1.
17. Батунин А.В. Фрактальный анализ и универсальность Фейгенбаума в физике адронов // УФН. 1995. Т. 166, № 6. С. 645.
18. Гинзбург В.Л. Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными? // В.Л.Гинзбург. О физике и астрофизике. М.: Наука, 1985. С. 7.
19. Чернавский Д.С., Старков Н.И., Малков С.Ю., Косе Ю.В., Щербаков А.В. Об эконофизике и ее месте в современной теоретической экономике // УФН. 2001. Т. 181, № 7. С. 767.

20. *Stanley H.E. et al.* Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from DNA and physiology to econophysics // *Physica A*. 1996. 224. P. 302.
21. *Вавилов С.И.* Исаак Ньютон. М.: Наука, 1989.
22. *Walras L.* Principe d'une théorie mathématique de l'échange // *J. des économistes*. 1874. Vol. 34. P. 1.
23. *Fisher I.* Mathematical investigations in the theory of value and prices. N.Y.: A.M. Kelley, 1961.
24. *Россер-мл. Дж.* Настоящее и будущее эконофизики // *Вопросы экономики*. 2009. № 11. С. 76.
25. *Леонтьев В.* Экономические эссе. М.: Изд-во полит. лит., 1990.
26. *Мандельброт Б., Хадсон Р.Л.* (Не)послушные рынки. М.: Вильямс, 2006.
27. *Либман М.* Теоретические и эмпирические исследования в современной экономике: проблемы коммуникации // *Вопросы экономики*. 2008, № 6. С. 4.
28. *Nelson R.R., Winter S.G.* An Evolutionary Theory of Economic Change. Cambridge, MA: NUP, 1982. Русский перевод: Нельсон Р.Р., Уинтер С.Дж. Эволюционная теория экономических изменений. М.: Дело, 2002.
29. *Шушурин С.Ф.* Максвелл и статистический метод в физике // *Максвелл и развитие физики XIX- XX веков*. М.: Наука, 1985. С. 166.
30. *Ball P.* The physical modeling of society: a historical perspective // *Physica A*. 2002. Vol. 314. P. 1.
31. *Yakovenko V.M.* Econophysics, Statistical Mechanics Approach to // *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. Springer, 2009. P. 2800.
32. *Majorana E.* Il valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle sociali // *Scientia*. 1942. Quarta serie, Febbraio-Marzo. P. 58.
33. *Majorana E.* The value of statistical laws in physics and social sciences // *Quantitative Finance*. 2005. Vol. 5. P. 133.
34. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
35. *Самульсон П.А.* Принцип максимизации в экономическом анализе // *Работы Нобелевских лауреатов по экономике*. Минск: БелГУ, 2010. С. 5.
36. *Bachelier L.* Théorie de la spéculation. Doctoral dissertation // *Ann. Ecole Norm. Sup.* 1900. Vol. 17. P. 21.
37. *Einstein A.* Über die von der molecular-kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen // *Ann. Phys.* 1905. Band 17. S. 182.
38. *Smoluchowski M.* Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molecularbewegung und der Suspensionen // *Ann. Phys.* 1906. Band 21 (14). S. 756.
39. *Wiener N.* Differential-space // *J.Math. Phys.* MIT. 1923. Vol. 2. P. 131.
40. *Винер Н.* Нелинейные задачи в теории случайных процессов. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
41. *Bachelier L.* Theorie of Speculation // *The Random Character of Stock Market Prices*/ Ed. P.H.Cooter. Cambridge: MIT Press, 1964. P. 17.
42. *Дубовиков М.М., Старченко Н.В.* Эконофизика и фрактальный анализ финансовых временных рядов // *УФН*. 2011. Т. 181, № 7. С. 779.
43. *Veblen T.* Why is Economics not an Evolutionary Science? // *Quarterly J. of Economics*. 1898. Vol. 12. P. 373.

44. *Шумпетер Й.А.* Теория экономического развития. М.: Директмедиа Паблшинг, 2008.
45. *Бурлачков В.* Турбулентность экономических процессов: теоретические аспекты // *Вопр. экономики*, 2009. № 11. С. 90.
46. *Смит А.* Исследования о природе и причинах богатства народов. М.: Изд-во соц.-экон. лит, 1962.
47. *Kaldor N.* A model of the trade cycle // *The Economic J.* 1940. Vol. 50, № 197. P. 78.
48. *Hicks J.R.* A contribution to the theory of the trade cycle. Oxford: OUP, 1950.
49. *Samuelson P.A.* Interactions between the multiplier and the principle of acceleration // *Rev. Economics and Statistics.* 1939. Vol. 21, № 2. P. 75.
50. *Goodwin R.M.* The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles // *Econometrica.* 1951. Vol. 19, № 1. P. 1.
51. *Andronov A.A., Khaikin S.E.* Theory of oscillations. Princeton, NJ: PUP, 1949.
52. *Cartwright M., Littlewood J.E.* On non-linear differential equation of the second order: $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha)$, k large // *London Math. Soc.* 1945. Vol. 20. Part 3. P. 180–189.
53. *Cartwright M., Littlewood J.E.* On non-linear differential equation of the second order: $\ddot{y} + kf(y, \dot{y}) + g(y, k) = p_1(t) + kp_2(t)$; $k > 0$, $f(y) \geq 1$ // *Ann. Math.* 1947. № 2. P. 472.
54. *Goodwin R.M.* A growth cycle // *Socialism, Capitalism and Economic Growth.* C.H. Feinstein (ed.). Cambridge: CUP, 1967. P. 54.
55. Samuelson P.A. The Collected Scientific Papers of Paul Samuelson. Vol. 3. Cambridge, MA: MIT Press, 1973.
56. *Маршал К.* Задача трех тел. Москва-Ижевск: Инст-т компьютерн. исслед., 2004.
57. *Бородин А.Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. СПб.: Лань, 1999.
58. *Чернавский Д.С., Старков Н.И., Щербаков А.В.* О проблемах физической экономики // *УФН.* 2002. Т. 172, № 9. С. 1045.
59. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. М.: Мир, 1999.
60. *Трубецков Д.И.* Канонические модели нелинейной динамики в экономике // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2006. Т. 14, № 2. С. 75.
61. *Леонидов А.* Путь к экономическому равновесию и эффективность финансовых рынков: взгляд физика // *Вопр. экономики.* 2009. № 11. С. 82.
62. *Лоскутов А.Ю., Жарикова Н.А.* Новые методы финансового анализа. (В рукописи).
63. *Малинецкий Г.Г., Потанов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
64. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Lecture Notes in Math.* 1981. 898. P. 336.
65. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Инст. компьют. исслед., 2002.

66. Дубовиков М.М., Старченко Н.В. Эконофизика и анализ финансовых временных рядов // Эконофизика. Современная физика в поисках экономической теории. М.: МИФИ, 2007. С. 256.
67. Zaslavsky G.M. Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics. Oxford: Oxford Univ. Press, 2005.
68. Mandelbrot B. The variation of some other speculative prices // J. of Business. 1967. Vol. 40. P. 393.
69. Gencay R., Selkuk F., Whitcher B. Scaling properties of foreign exchange volatility // Physica, 2001. Vol. A289. P. 249.
70. Dubovikov M.M., Starchenko N.S. Variation index and its application to analysis of fractal structures // Sci. Almanac Gordon. 2003. № 1. P. 1.
71. Dubovikov M.M., Starchenko N.S., Dubovikov M.S. Dimension of minimal cover and fractal analysis of time series // Physica A. 2004. 333. P. 591.
72. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
73. Kantz H., Schreiber T. Nonlinear Time Series Analysis. Cambridge: CUP, 1997.
74. Handbook of Time Series Analysis. Weinheim: Wiley-VCH, 2006.
75. Бурлачков В. Проблема прогнозируемости экономической системы: теоретические аспекты // Вопр. экономики. 2010. № 11. С. 136.
76. Wiener N. The theory of prediction // Modern Math. For Engineers, 1956. Chap. 8.
77. Granger C.W.J. Investigating casual relations by econometric methods and cross-spectral methods // Econometrica. 1969. Vol. 37. P. 424.
78. Granger C.W.J. Modelling Nonlinear Economic Relationships. Oxford: OUP, 1993.
79. Georgescu-Roegen N. The Entropy Law and Economic Progress. Cambridge, MA: HUP, 1971.
80. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Москва-Ижевск: РХД, 2002.
81. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975.
82. Мюррей Дж. Математическая биология. Москва-Ижевск: РХД. Т. 1. 2009; Т. 2. 2011.
83. Чернавский Д.С. Сопоставление математических основ классической и эволюционной экономики // Эволюционная теория, инновации и экономические изменения (доклады и выступления участников Международного симпозиума). М.: Институт экономики РАН, 2005. С. 27.
84. Dragulescu A.A., Yakovenko V.M. Statistical mechanism of money // The Europ. Phys. J. B. 2000. 17. P. 723.
85. Chakraborti A., Chakraborti V.K. Statistical mechanism of money // The Europ. Phys. J. B. 2000. 17. P. 167.
86. Mimkes J. A Thermodynamic Formulation of Economics // Econophysics and Sociophysics Trends and Perspectives. Weinheim: WILEY-VCH, 2006. P. 1.
87. Helbing D., Seidel T., Lammer S., Peters K. Self-organization Principles in Supply Networks and Production Systems // Econophysics and Sociophysics Trends and Perspectives. Weinheim: WILEY-VCH, 2006. P. 535.

88. *Groot E.A., Franses P.H.* Stability through cycles // *Technological Forecasting and Social Change*. 2008. Vol. 75. Issue 3. P. 301.
89. *Lioissatos P.S.* Statistical Entropy in General Equilibrium Theory. Report of Department of Economics. Florida Int. Univ. 2004.
90. *Андреев М.Ю., Пильник Н.П., Поспелов И.Г.* Сильный магистральный эффект в модели рациональных ожиданий современной банковской системы России // *Журн. новой экон. ассоциации*. 2009. Т. 1, № 2. С. 70.
91. *Поспелов И.Г.* Равновесные модели экономики в период мирового финансового кризиса // *УФН*. 2011. Т. 181, № 7. С. 762.
92. *Идлис Г.М.* Основные черты наблюдаемой астрономической Вселенной как характерные свойства обитаемой космической системы // *Изв. Астрофиз. института КазССР*. 1958. Т. 7. С. 40.
93. *Картер Б.* Совпадение больших чисел и антропологический принцип в космологии // *Космология. Теории и наблюдения*. М.: Наука, 1978. С. 369.
94. *Barrow J.D., Tipler F.J.* The Anthropic Cosmological Principle. Oxford: Clarendon Press, 1986.
95. *Казютинский В.В., Балашиов Ю.В.* Антропный принцип // *Природа*. 1989. № 1. С. 1.
96. *Розенталь И.Л.* Физические закономерности и численные значения фундаментальных постоянных // *УФН*. 1980. Т. 131. В. 2. С. 239.
97. *Terasvirta T., Tjostheim D., Granger C.W.J.* Modelling Nonlinear Economic Time Series. Oxford: OUP, 2010.
98. *Либман А.* Современная экономическая теория: основные тенденции // *Вопр. экономики*. 2007. № 3. С. 22.
99. *Nonlinear economic models*. Ed. J.Creedy, V.Martin. Edward Elgar, 1997.
100. *Nonlinear Economic modeling in Time Series*. Proceedings of the Eleventh International Symposium in Economic Theory. Ed. W.A.Barnett and oth. Cambridge: CUP, 2000.
101. *Mantegna R.N., Stanley H.E.* An introduction to econophysics. Correlation and complexity in finance. Cambridge: CUP, 2000.
102. *Романовский М.Ю., Романовский Ю.М.* Введение в эконофизику. Статистические и динамические модели. Москва-Ижевск: Институт компьютер. исслед., 2012.
103. *Каница С.П.* К теории населения Земли // *УФН*. 2010. Т. 180. № 12. С. 1337.
104. *Galam S., Gefen Y., Shapir Y.* Sociophysics: a new approach of sociological collective behavior // *J. Math. Sociology*. 1982. Vol. 9. P. 1.
105. *Galam S.* Sociophysics: a personal testimony // *Physica A*. 2004. 336. P. 49.
106. *Econophysics and Sociophysics: Trends and Perspectives* / Chakrabarti B.K., Chakraborti A., Chatterjee A. (ed). Berlin: Wiley-VCH, 2006.
107. *Евстигнеева Л.П., Евстигнеев Р.Н.* Экономика как синергетическая система. М.: ЛЕНАНД, 2010.
108. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990.
109. *Смейл С.* Математические проблемы следующего столетия // *Современные проблемы хаоса и нелинейности*. Ижевск: Инст-т компьютер. исслед., 2002. С. 280.

Поступила в редакцию 20.02.2014

ABOUT THE HISTORY OF ECONOPHYSICS, NONLINEAR AND EVOLUTIONARY ECONOMICS

R. R. Mukhin¹, A. A. Chernikova²

¹ A brunch of National Research Technological University
«Moscow Institute of Steel and Alloys», Stary Oskol

² National Research Technological University «Moscow Institute of Steel and Alloys»

The paper is devoted to the history of physics and evolutionary biology to economics. This influence began with the birth of economics as a separate field of scientific knowledge and changed with the development of physics and biology. Strengthening the role of statistical methods in the physics of the twentieth century, the birth of nonlinear physics, biology, evolution is reflected in the economy and finance, resulting in the appearance of such area as econophysics, nonlinear and evolutionary economics. We can hope for the fruitfulness of new approaches, which should lead to a new economic ideology and significantly enrich the existing economic theory and econometric methods.

Keywords: Econophysics, nonlinear dynamics, evolutionary theory, economic theory, time series, statistical methods, modeling.



Мухин Равиль Рафкатович – родился в Челябинской области (1947), окончил Московский инженерно-физический институт (1976). Защитил кандидатскую диссертацию по химической физике (1991, Институт органического синтеза и углехимии АН Казахстана) и докторскую диссертацию по истории динамического хаоса (2011, ИИЕТ РАН). Автор монографии «Очерки по истории динамического хаоса» (2007, 2012). Область научных интересов – история физико-математических наук. В настоящее время – профессор Старооскольского технологического института НИТУ МИСиС.

309516 Белгородская обл., г. Старый Оскол, мкр-н Макаренко, 42
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова, филиал
Национального исследовательского технологического университета
«Московский институт стали и сплавов»
E-mail: mukhiny@mail.ru



Черникова Алевтина Анатольевна – родилась в Белгородской области (1966), окончила Воронежский государственный университет (1988). Защитила кандидатскую (2002) и докторскую (2008) диссертации по динамике хозяйственной деятельности, профессор, автор ряда монографий по указанному направлению. Ректор Национального исследовательского технологического университета «Московский институт стали и сплавов». В настоящее время область научных интересов – история экономики, новые методы в экономической теории и эконометрике.

117279 Москва, Ленинский проспект, 4
Национальный исследовательский технологический университет
«Московский институт стали и сплавов»
E-mail: chernikova@misis.ru



САМООРГАНИЗАЦИЯ И БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ РЕЗАНИЕМ

В.Л. Заковоротный¹, Фам Динь Тунг², В.С. Быкадор¹

¹Донской государственный технический университет

²Вьетнамский государственный технический университет им. Ле Куй Дона

Рассматриваются проблемы нелинейной динамики процессов обработки материалов резанием. На примере процесса точения предлагается математическая модель динамической системы, учитывающая динамическую связь, формируемую процессом резания. При этом принимаются во внимание следующие главные особенности динамической связи: зависимость сил резания от площади срезаемого слоя, запаздывания сил по отношению к упругим деформационным смещениям инструмента относительно обрабатываемой заготовки, ограничения, накладываемые на движения инструмента при сближении задней грани инструмента с обработанной частью заготовки, зависимость сил от скорости резания. Динамическая подсистема инструмента представлена линейной системой в плоскости, нормальной к поверхности резания. Главное внимание в статье уделено анализу формируемых в окрестности точки равновесия стационарных аттракторов (орбитально асимптотически устойчивых предельных циклов и двумерных инвариантных торов). Приводятся данные по бифуркационным преобразованиям стационарных аттракторов. Даются рекомендации по проектированию систем, имеющих требуемые стационарные аттракторы в пространстве состояния.

Ключевые слова: Динамическая система, аттракторы, бифуркации, процесс резания материалов.

Введение

Проблемы динамики процесса резания являлись предметом исследований многих авторов, которые выполнены в течение последних 40–50 лет. При этом главное внимание уделялось двум вопросам: условиям и механизмам возбуждения автоколебаний [1–5]; анализу устойчивости процесса резания [6–10]. Под устойчивостью процесса резания во всех случаях понимается устойчивость заданной и неизменной во времени точки равновесия, рассматриваемой в подвижной системе координат, движение которой определяется траекториями исполнительных элементов. Динамика процесса резания рассматривается на основе изучения взаимодействия подсистем со стороны инструмента и обрабатываемой заготовки через динамическую связь, формируемую процессом резания. Основные свойства динамической системы можно раскрыть, используя базовую динамическую модель упругих деформационных

смещений инструмента в плоскости, нормальной к поверхности резания [11–13]. Динамическая связь представляет модель сил резания в координатах состояния системы [14–19]. При этом учитываются: нелинейная зависимость сил резания от технологических режимов [16–18], периодические изменения параметров динамической системы [18–20, 22], закономерности формирования новых поверхностей [23, 24]. При рассмотрении устойчивости системы с периодически изменяющимися параметрами, а также при моделировании формирования новых поверхностей резания используется теория Флоке [25]. В статье развиваются указанные выше представления о динамической системе резания и уделяется главное внимание вопросам динамической самоорганизации системы, а также ее бифуркациям в параметрическом пространстве.

Базовая математическая модель

Уравнение динамики процесса (рис. 1) можно представить в виде [14]

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + h \frac{dX}{dt} + cX = F \left(X, \frac{dX}{dt}, S_{\text{п}}, V \right), \quad (1)$$

где $m = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$, $h = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{2,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} \end{bmatrix}$ – соответственно матрицы инерционных, диссипативных и упругих коэффициентов подсистемы инструмента; $X = \{X_1, X_2\}^T$ – вектор упругих деформационных смещений инструмента в плоскости, нормальной к поверхности резания; $F(X, dX/dt, S_{\text{п}}, V) = \{F_1(X, dX/dt, S_{\text{п}}, V), F_2(X, dX/dt, S_{\text{п}}, V)\}^T$ – вектор сил резания, представленный в координатах состояния системы и зависящий от технологических режимов ($S_{\text{п}}$ – величины продольной подачи и V – скорости резания). Это динамическая связь, формируемая процессом резания. Упругие деформационные смещения рассматриваются в подвижной системе координат, двигающейся вдоль заготовки со скоростью движения суппорта V_c . Угловая скорость вращения заготовки и скорость резания V считаются постоянными.

Сила резания формируется в виде суммы двух составляющих, действующих на переднюю грань инструмента $F^{(1)}$ и на его заднюю грань $F^{(2)}$, то есть $F = F^{(1)} + F^{(2)}$ (рис. 1, а). Причем силы $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ являются сепарабельными. Технологические режимы, глубина резания t_p и величина подачи $S_{\text{п}}$, в установившемся состоянии при заданной геометрии инструмента однозначно определяют ширину срезаемого слоя b и его толщину a , так как $a = S_{\text{п}} \sin \varphi$, $b = t_p / \sin \varphi$ (φ – главный угол инструмента в плане (рис. 1, б)). Деформационные смещения в направлении, нормальном к плоскости ($X_1 - X_2$) не принимаются во внимание, так как выполняется соотношение $S_{\text{п}} \ll t_p$. Рассмотрим случай, когда жесткость подсистемы заготовки считается на порядок большей, чем инструмента, и поэтому ее деформационными смещениями можно пренебречь. Заметим, что учет упругих деформационных смещений заготовки не представляет сложности. Параметры m , h и c можно определить по правилам, изложенным, например, в [11].

Главная проблема при моделировании динамической системы состоит в представлении сил $F(X, dX/dt, S_{\text{п}}, V)$ в координатах состояния при заданных технологических режимах. Будем следовать известным представлениям о динамической

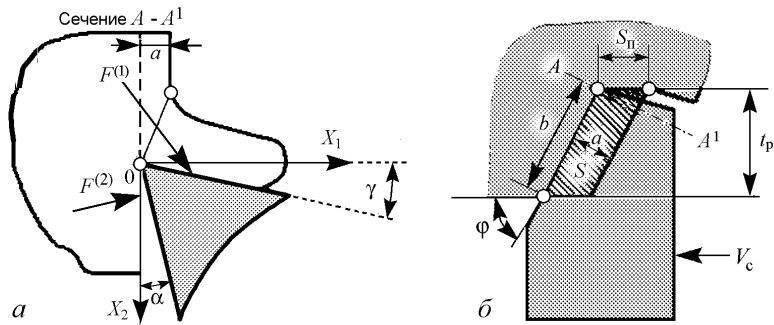


Рис. 1. Ориентация осей деформационных смещений (а) и геометрические соотношения (б), определяющие формирование площади S срезаемого слоя

связи, формируемой процессом резания. Эти представления, отдельные элементы которых изложены в выше цитированных работах, базируются на следующих особенностях формирования сил резания: они возрастают при увеличении площади срезаемого слоя S ; существуют запаздывания сил по отношению к вариациям упругих деформационных смещений [3, 6–9]; они изменяются при варьировании скорости резания [4]; при сближении задней грани инструмента и обработанной части заготовки имеет место непропорционально быстрое нарастание сил, действующих на заднюю грань инструмента [6, 10]; существует запаздывание тангенциальных составляющих сил по отношению к их нормальным составляющим.

При моделировании сил используется гипотеза о неизменности их ориентации в установившемся состоянии. Она определяется для силы $F^{(1)}$ угловыми коэффициентами χ_1 и χ_2 . Для силы $F^{(2)}$ – угловыми коэффициентами $\chi_1^{(1)}$ и $\chi_2^{(1)}$. Они в основном зависят от переднего угла γ инструмента (угловые коэффициенты χ_1 и χ_2) и от заднего угла α (угловые коэффициенты $\chi_1^{(1)}$ и $\chi_2^{(1)}$). Кроме этого при резании наблюдается приращение сил, обусловленное изменением скорости резания, которая через температурно-скоростной фактор изменяет силы, проекции которых определяются угловыми коэффициентами $\chi_1^{(2)}$ и $\chi_2^{(2)}$. Этим свойствам соответствуют следующие представления сил в координатах состояния и технологических режимах:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(X_1, X_2, V, S_n, t_p) = \chi_1 \rho b [a - y_1] - \chi_1^{(2)} \alpha_1 \left\{ \left[V - \frac{dX_2}{dt} \right] - \alpha_2 \left[V - \frac{dX_2}{dt} \right]^3 \right\} + \\ + \chi_1^{(1)} F^{(0)} \exp \left[-\frac{dX_1/dt}{T_3} \right], \\ F_2(X_1, X_2, V, S_n, t_p) = \chi_2 \rho b [a - y_2] - \chi_2^{(2)} \alpha_1 \left\{ \left[V - \frac{dX_2}{dt} \right] - \alpha_2 \left[V - \frac{dX_2}{dt} \right]^3 \right\} + \\ + \chi_2^{(1)} F^{(0)} \exp \left[-\frac{dX_1/dt}{T_3} \right], \\ T_1 \frac{dy_1}{dt} + y_1 = X_1, \\ T_2 \frac{dy_2}{dt} + y_2 = X_1, \end{array} \right. \quad (2)$$

где a, b – соответственно толщина и ширина срезаемого слоя, мм, определяются глубиной резания t_p и величиной подачи S_n (см. рис. 1, б); T_1, T_2 – постоянные вре-

мени, с, моделирующие запаздывание сил по отношению к деформационным смещениям; ρ – давление, кг/мм², стружки на переднюю грань инструмента; $F^{(0)}$ – сила резания, кг, действующая на заднюю грань инструмента в состоянии равновесия; T_3 – параметр, мм/с, определяющий крутизну нарастания силы, действующей на заднюю грань инструмента (зависит от заднего угла инструмента α); V – скорость резания, м/мин; α_1 , кг·с/мм и α_2 , (с/мм)² – параметры кинетической характеристики процесса резания, определяющие тангенциальную составляющую силы, действующей на заднюю грань инструмента. Здесь зависимость главной составляющей силы резания от скорости учитывает два противоречивых фактора. Первый фактор определяет влияние скорости резания на предел прочности материала через температуру, производство которой зависит от мощности резания, возрастающей при увеличении скорости. Поэтому при увеличении скорости резания силы уменьшаются. Второй фактор связан через процесс резания с образованием квазивязких диссипативных структур в области контакта инструмента и заготовки. Поэтому, начиная с некоторой скорости, возрастает вязкое (зависящее от скорости) сопротивление и суммарные силы увеличиваются.

Кроме этого в системе (1) принято во внимание, что главные составляющие сил, определяемые площадью срезаемого слоя, запаздывают относительно деформационных смещений. Также по мере увеличения частоты периодических движений инструмента относительно заготовки имеет место уменьшение коэффициента преобразования вариаций упругих деформационных смещений с изменениями сил. Эти свойства учитываются введением промежуточных координат y_1 , мм и y_2 , мм в последних двух уравнениях системы (1). Если $dy_1/dt = dy_2/dt = 0$, то $y_1 = y_2 = X_1$. В системе (1) справедливо $T_2 > T_1$. Тем самым учитывается, что всегда запаздывание сил F_2 больше, чем силы F_1 .

Таким образом, исследованию подлежит следующая система, которая учитывает все отмеченные выше свойства формирования сил резания:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 X_1}{dt^2} + h_{1,1} \frac{dX_1}{dt} + h_{2,1} \frac{dX_2}{dt} + c_{1,1} X_1 + c_{2,1} X_2 = \\ = \chi_1 \rho b [a - y_1] + \chi_1^{(1)} F^{(0)} \exp \left[-\frac{dX_1/dt}{T_3} \right] - \chi_1^{(2)} \alpha_1 \left\{ \left[V - \frac{dX_2}{dt} \right] - \alpha_2 \left[V - \frac{dX_2}{dt} \right]^3 \right\}, \\ m \frac{d^2 X_2}{dt^2} + h_{1,2} \frac{dX_1}{dt} + h_{2,2} \frac{dX_2}{dt} + c_{1,2} X_1 + c_{2,2} X_2 = \\ = \chi_2 \rho b [a - y_2] + \chi_2^{(1)} F^{(0)} \exp \left[-\frac{dX_1/dt}{T_3} \right] - \chi_2^{(2)} \alpha_1 \left\{ \left[V - \frac{dX_2}{dt} \right] - \alpha_2 \left[V - \frac{dX_2}{dt} \right]^3 \right\}, \\ T_1 \frac{dy_1}{dt} + y_1 = X_1, \\ T_2 \frac{dy_2}{dt} + y_2 = X_1. \end{array} \right. \quad (3)$$

Главная проблема, рассматриваемая в настоящей статье, связана с анализом аттракторов, которые формируются в окрестности равновесия системы (2). Поэтому вначале рассмотрим свойства равновесия и, прежде всего, условия потери его устойчивости.

Свойства равновесия системы

В общем случае траектории движения исполнительных элементов станка с учетом геометрии заготовки при продольном точении определяются скоростью подачи $V_{\text{п}}(t)$ по перемещению (фазовой траекторией движения суппорта), скоростью резания $V^{(0)}(t)$ и функцией изменения глубины резания $t_{\text{р}}^{(0)}(t)$ без учета упругих деформационных смещений. Реальная траектория движения вершины инструмента отличается на величину упругих деформационных смещений. Эти траектории задают технологические режимы (подачу $S_{\text{п}}(t)$, глубину $t_{\text{р}}(t)$ и скорость резания $V(t)$), то есть

$$\begin{cases} S_{\text{п}}(t) = \int_{t-T}^t \{V_{\text{п}}(t) - v(t)\} dt, \\ t_{\text{р}}(t) = t_{\text{р}}^{(0)}(t) - X_1 \cos \varphi, \\ V(t) = V^{(0)}(t) - \frac{dX_2}{dt}, \end{cases} \quad (4)$$

где T – время одного оборота заготовки; $v(t)$ – скорость упругих деформационных смещений инструмента в направлении оси вращения заготовки. Таким образом, в общем случае параметры системы (2) являются функциями времени и для анализа устойчивости траекторий необходимо рассматривать линеаризованное уравнение в вариациях, которое имеет изменяющиеся во времени параметры. В рамках настоящего исследования ограничимся случаем, когда $t_{\text{р}}^{(0)} = \text{const}$, $V_{\text{п}} = \text{const}$, $V^{(0)} = \text{const}$. Тогда в подвижной системе координат стационарная траектория есть точка равновесия (X_1^*, X_2^*) , определяемая из условия $d^2 X_i / dt^2 = dX_i / dt = 0$ ($i = 1, 2$). Следовательно, из (2) получаем

$$\begin{cases} (c_{1,1} + \chi_1 \rho b) X_1^* + c_{2,1} X_2^* = \chi_1 \rho b a + \chi_1^{(1)} F^{(0)} - \chi_1^{(2)} \alpha_1 [V - \alpha_2 V^3], \\ (c_{1,2} + \chi_2 \rho b) X_1^* + c_{2,2} X_2^* = \chi_2 \rho b a + \chi_2^{(1)} F^{(0)} - \chi_2^{(2)} \alpha_1 [V - \alpha_2 V^3]. \end{cases} \quad (5)$$

Система (3) является линейной, и она задает единственную точку равновесия, то есть при изменении параметров и внешних воздействий ветвления точек равновесия не наблюдается. Для определения ее устойчивости, как известно [26], необходимо определить линеаризованное в окрестности равновесия уравнение в вариациях относительно (X_1^*, X_2^*) после замены $X_1(t) = X_1^* + x_1(t)$ и $X_2(t) = X_2^* + x_2(t)$. При этом учтем, что при анализе устойчивости точки равновесия $x_1(t) \rightarrow 0$, $x_2(t) \rightarrow 0$, $dx_1/dt \rightarrow 0$, $dx_2/dt \rightarrow 0$. Тогда при отбрасывании членов второго порядка малости получаем

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h_{\Sigma} \frac{dx}{dt} + c_{\Sigma} x = 0, \quad (6)$$

где $h_{\Sigma} = \begin{bmatrix} h_{1,1} - \chi_1 \rho b T_1 + \chi_1^{(1)} F^{(0)} / T_3 & h_{2,1} - \chi_1^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2) \\ h_{1,2} - \chi_2 \rho b T_2 + \chi_2^{(1)} F^{(0)} / T_3 & h_{2,2} - \chi_2^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2) \end{bmatrix}$, $c_{\Sigma} = \begin{bmatrix} c_{1,1} + \chi_1 \rho b & c_{2,1} \\ c_{1,2} + \chi_2 \rho b & c_{2,2} \end{bmatrix}$, $x = \{x_1, x_2\}^T$ – вектор вариаций упругих деформационных смещений.

Из (5) получаем характеристический полином линеаризованной в окрестности равновесия системы

$$\Delta(p) = \begin{bmatrix} mp^2 + (h_{1,1} - \chi_1 \rho b T_1 + \chi_1^{(1)} F^{(0)} / T_3)p + (c_{1,1} + \chi_1 \rho b) & \Leftrightarrow \\ (h_{1,2} - \chi_2 \rho b T_2 + \chi_2^{(1)} F^{(0)} / T_3)p + (c_{1,2} + \chi_2 \rho b) & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (h_{2,1} - \chi_1^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2))p + c_{2,1} & \\ \Leftrightarrow mp^2 + (h_{2,2} - \chi_2^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2))p + c_{2,2} & \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Видно, что условия потери устойчивости определяются как свойствами динамической подсистемы инструмента, так и параметрами и моделями представления сил в координатах состояния. В частности, если конструктивно выполнить динамическую систему инструмента ортогональной и одновременно обеспечить выполнение условия $h_{2,1} = \chi_1^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2)$, то система будет устойчивой при соблюдении следующих требований: $h_{1,1} > \chi_1 \rho b T_1 - \chi_1^{(1)} F^{(0)} / T_3$, $h_{2,2} > \chi_2^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2)$. Ранее показано [11], что недиагональные элементы матрицы c зависят от ориентации эллипса жесткости подсистемы инструмента в рассматриваемой плоскости. Этот случай, несмотря на некоторую его условность, подчеркивает, что главные факторы, вызывающие потерю устойчивости, связаны с формированием запаздывающих аргументов в преобразовании деформационных смещений в силы резания. Они указывают также на значение угла наклона скоростной зависимости сил по мере увеличения скорости резания в установившемся состоянии.

В общем же случае главный механизм потери устойчивости связан с образованием ускоряющих сил, которые формируются симметричной составляющей матрицы скоростных коэффициентов. Суммарная матрица h_Σ в (5) несимметрична. Следовательно, она представима в виде суммы симметричной $h_\Sigma^{(0,C)}$ и кососимметричной $h_\Sigma^{(0,K)}$ составляющих.

Из (5) необходимым условием устойчивости является

$$h_\Sigma^{(0,C)} = \begin{bmatrix} h_{1,1} - \chi_1 \rho b T_1 + \chi_1^{(1)} F^{(0)} / T_3 & \Leftrightarrow \\ h_{1,2} - 0,5(\chi_2 \rho b T_2 - \chi_2^{(1)} F^{(0)} / T_3 + \chi_1^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2)) & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow h_{1,2} - 0,5(\chi_2 \rho b T_2 - \chi_2^{(1)} F^{(0)} / T_3 + \chi_1^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2)) & \\ \Leftrightarrow h_{2,2} - \chi_2^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2) & \end{bmatrix} > 0, \quad (8)$$

из которого вытекают все известные условия потери устойчивости. Увеличение запаздывающего аргумента T_1 и коэффициента α_1 , определяющего «падающую» характеристику приращения сил при увеличении скорости резания, способствуют преобразованию матрицы $h_\Sigma^{(0,C)}$ из положительно определенной в отрицательно определенную. В результате система может потерять устойчивость равновесия, так как гироскопические силы, формируемые матрицей $h_\Sigma^{(0,K)}$, не могут стабилизировать равновесие при условии $h_\Sigma^{(0,C)} < 0$ [27, 28].

Характеристический полином (6) позволяет в параметрическом пространстве проанализировать области устойчивости. Однако нас, в основном, будут интересо-

вать условия, при которых система теряет устойчивость равновесия и в его окрестности формируются различные аттракторы. Проанализируем этот вопрос на примере. Заметим, что зачастую примеры являются более показательными, чем анализ общего уравнения.

Бифуркации аттракторов динамической системы резания

Система (2) моделирует два взаимосвязанных колебательных контура, которые имеют два источника самовозбуждения. Один обусловлен запаздыванием сил резания по отношению к деформационным смещениям. Другой вызван существованием участка вариаций скорости, на котором увеличению скорости соответствует уменьшение сил резания. Этот участок обусловлен действием так называемого температурно-скоростного фактора, поэтому в системе в зависимости от параметров могут существовать три состояния. Первое – асимптотически устойчивая точка равновесия. Второе – орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл. Третье – двумерный инвариантный тор.

Рассмотрим систему, параметры динамической модели инструмента которой приведены в таблице. Значения элементов матрицы жесткости выбраны достаточно малыми для того, чтобы увеличить чувствительность формируемых аттракторов к изменениям параметров динамической связи, обусловленной процессом резания. Осуществляется процесс продольного точения стали марки 20Х четырехгранными неперетачиваемыми пластинками из сплава Т16К6. Основные геометрические параметры инструмента: $\gamma = 6^\circ$, $\alpha = 2^\circ$, $\varphi = 45^\circ$.

Частоты системы без взаимного влияния колебательных контуров ($h_{1,2} = h_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1} = 0$) и динамической связи, формируемой процессом резания, соответственно равны: $\omega_{0,1}^{(1)} = 1020$ Гц, $\omega_{0,2}^{(1)} = 332$ Гц. Частоты системы с учетом динамической связи, формируемой процессом резания, – $\omega_{0,1}^{(2)} = 1540$ Гц, $\omega_{0,2}^{(2)} = 840$ Гц. Давление стружки на переднюю поверхность инструмента – $\rho = (450 \dots 600)$ кг/мм². Коэффициенты ориентации силы резания в плоскости равны: $\chi_1 = 0.6$, $\chi_2 = 0.8$, $\chi_1^{(1)} = 1$, $\chi_2^{(1)} = 0$, $\chi_1^{(2)} = 0.8$, $\chi_2^{(2)} = 0.6$. Они удовлетворяют условиям нормировки, например, $(\chi_1)^2 + (\chi_2)^2 = 1$. Чтобы варьировать основные параметры динамической характеристики процесса, изменялись технологические режимы: скорость резания в пределах (60 ... 160) м/мин; глубина резания в пределах (0.5 ... 3.0) мм. Величина подачи выбрана неизменной и равной 0.1 мм/об. Все параметры идентифицированы по правилам, изложенным в [11].

Проанализируем подробно бифуркационную диаграмму в плоскости двух параметров ($\alpha_1 - T_3$) (рис. 2). На этой иллюстрации в качестве примера показаны

Таблица точки «1, 2, 3, 4», для которых на рис. 3 приведены фазовые траектории в сечениях фазового пространства. На рис. 2 приведены также области D-разбиения для линеаризованного в окрестности

Таблица 1. Параметры динамической системы резания

$m, \text{кг} \cdot \text{с}^2 / \text{мм}$	$h, \text{кг} \cdot \text{с} / \text{мм}$	$c, \text{кг} / \text{мм}$
$\begin{bmatrix} 0.98 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0.98 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 30 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1020 & 25 \\ 25 & 108 \end{bmatrix}$

равновесия уравнения. Они показаны пунктирными кривыми. На участках «А-О» и «О-Д» пунктирные кривые совпадают с границами бифуркационной диаграммы, поэтому они сливаются с границами областей D-разбиения. Они определяют четыре области: область (А-О-Д), в которой все корни характеристического полинома расположены в отрицательной комплексной полуплоскости; области (А-О-Е) и (F-О-Д), в которых пара комплексно-сопряженных корней расположена в положительной комплексной полуплоскости; область (Е-О-F), в которой две пары комплексно-сопряженных корней расположены в положительной комплексной полуплоскости. Как видно, границы областей D-разбиения не совпадают с границами бифуркаций аттракторов в параметрическом пространстве. Для объяснения этого можно рассмотреть фазовые траектории на рис. 3, соответствующие точке «2». Временные диаграммы для этого случая приведены на рис. 4. Здесь хорошо видно, что двухчастотный процесс с течением времени преобразуется в одночастотный, то есть имеет место затягивание высокочастотных колебаний к низкочастотным. Аналогичная ситуация возникает и в области (С-О-F). Однако здесь низкочастотный процесс стягивается к высокочастотному. Эти эффекты связаны с нелинейными диссипативными свойствами, которые учитываются в правой части системы (2).

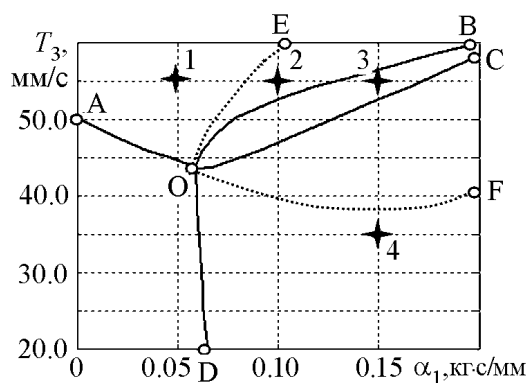


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма в плоскости $(\alpha_1 - T_3)$: (А-О-Д) – область устойчивости равновесия; (В-О-С) – область формирования двумерного инвариантного тора; (А-О-В) – область формирования орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла на низкой частоте; (С-О-Д) – область формирования орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла на высокой частоте

Спектральные характеристики колебаний в направлении X_1 для точек «2,3,4» (см. рис. 2) приведены на рис. 5, а,в,д, а траектории установившихся колебаний в плоскости $(X_1 - X_2)$ приведены на рис. 5, б,г,е. Важно подчеркнуть, что при этом меняется расположение ориентации колебаний в плоскости $(X_1 - X_2)$ и их размах в направлении X_1 , в котором инструмент оставляет следы на обрабатываемой поверхности. При переходе от низкочастотных автоколебаний к высокочастотным размахам соответственно уменьшается с 0.065 мм до 0.006 мм. При этом изменяется ориентация направления колебаний в плоскости $(X_1 - X_2)$. Анализ влияния упруго диссипативных параметров подсистемы инструмента на формируемые аттракторы показывает, что качественно бифуркационная диаграмма остается соответствующей рис. 2. Варьирование параметров матрицы s приводит к смещениям корней характеристического полинома (5) в комплексной плоскости. При этом корни могут сближаться. В этом случае область, в которой формируется двумерный инвариантный тор, вырождается.

На формирование этой области оказывают существенное влияние недиагональные элементы матрицы жесткости. При увеличении, прежде всего, диагональных элементов матрицы h область устойчивости расширяется. Таким образом, при изменении параметров упругости и диссипации подсистемы инструмента происхо-

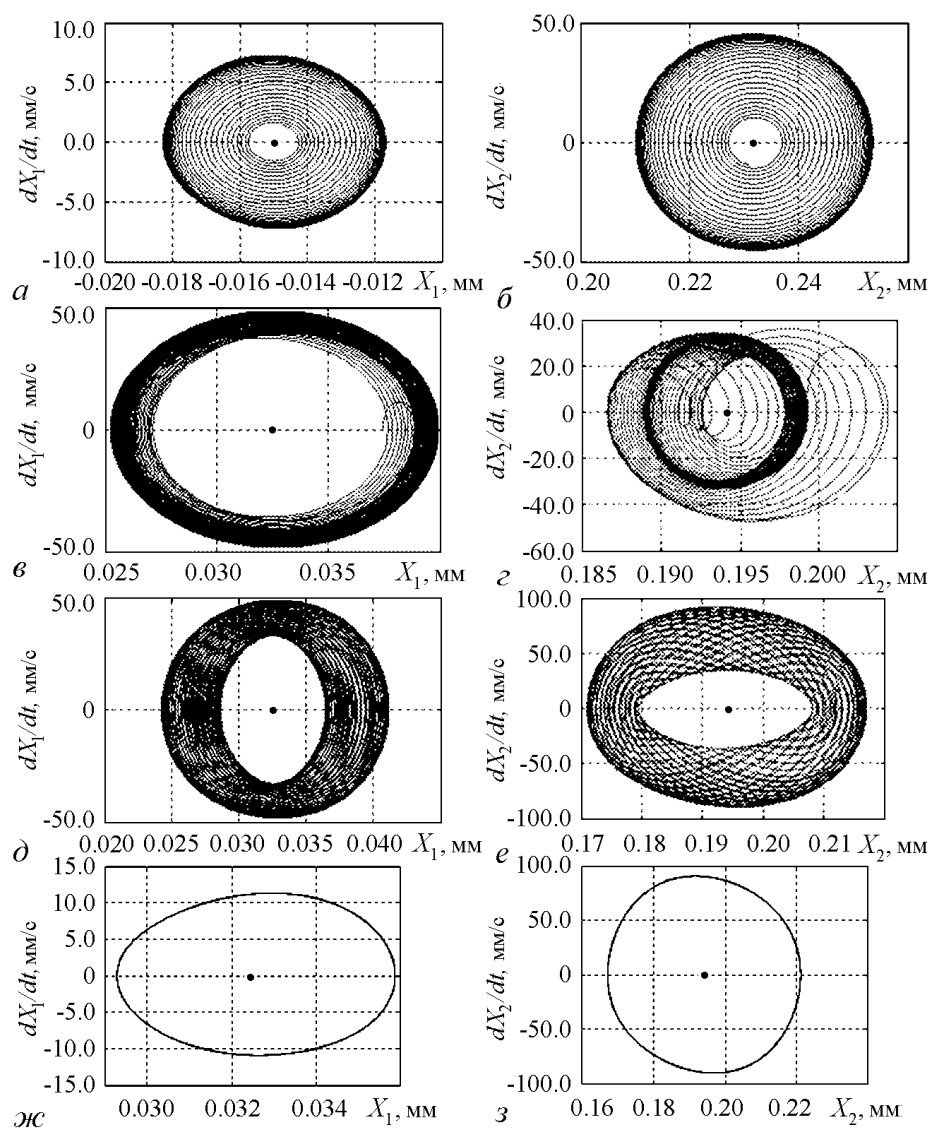


Рис. 3. Фазовые траектории системы: а, б – точка «1»; в, з – точка «2»; д, е – точка «3»; ж, з – точка «4»

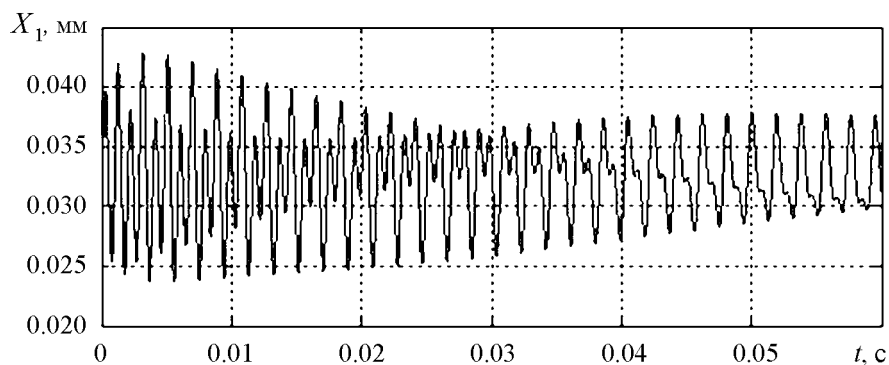


Рис. 4. Пример преобразования двухчастотного процесса в одночастотный, то есть в орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл

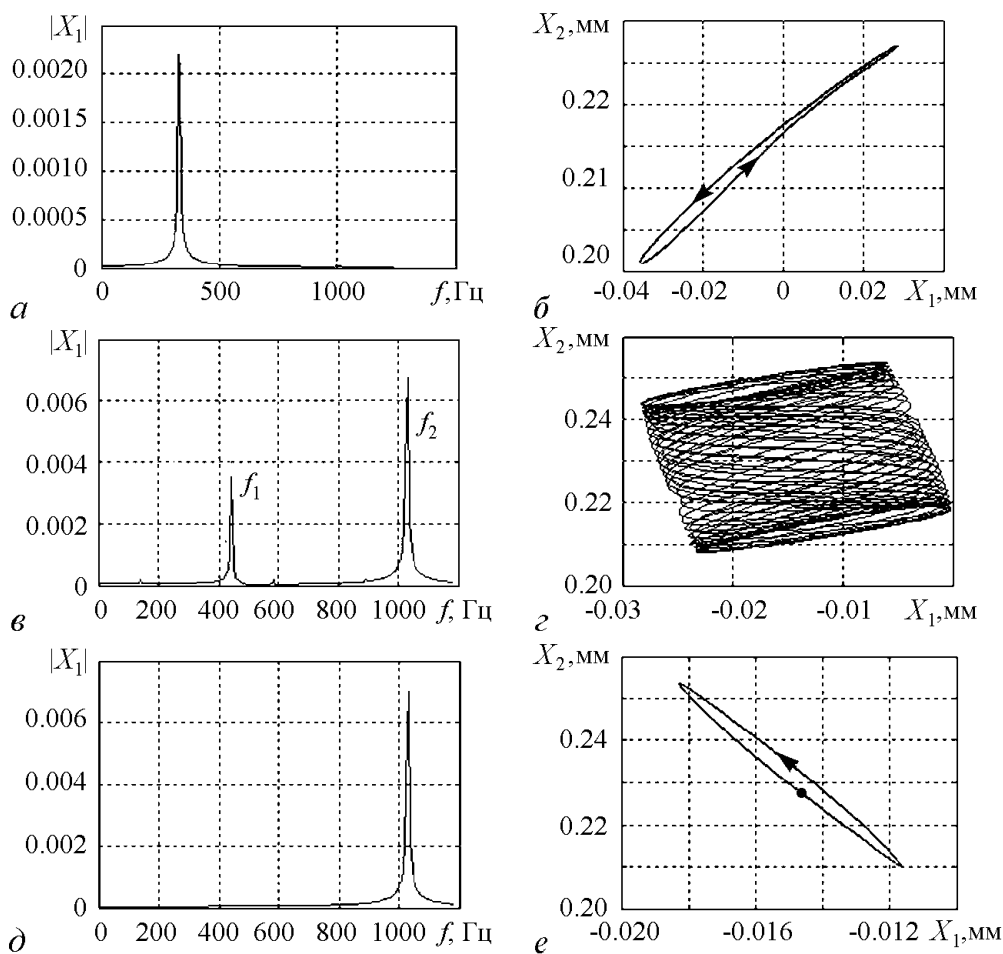


Рис. 5. Изменение спектров установившихся колебаний и их ориентация в плоскости $(X_1 - X_2)$: а, б – для точки «2» на рис. 2; в, г – для точки «3» на рис. 2; д, е – для точки «4» на рис. 2

дят изменения аттракторов, формируемых в окрестности равновесия системы резания. Следовательно, меняются показатели качества изготовления деталей и интенсивность изнашивания инструмента [6, 29].

Заключение

Динамическая система резания, формируемая на основе взаимодействия подсистемы инструмента с динамической связью процесса обработки, является принципиально нелинейной. При изучении устойчивости точки равновесия, связанном с анализом линеаризованных уравнений в вариациях относительно этой точки, раскрыта связь устойчивости с технологическими параметрами системы и параметрами динамической модели подсистемы инструмента. Показано, что в рассматриваемом классе систем существует главный механизм потери устойчивости. Он обусловлен преобразованием положительно определенной симметричной составляющей матрицы скоростных коэффициентов линеаризованного уравнения динамики в отрицательно определенную. Это преобразование осуществляется за счет запаздывающих

аргументов в динамической связи, зависящих от скорости резания и объема пластической деформации материала в зоне обработки. На это преобразование оказывает также влияние крутизна падающего участка зависимости сил от скорости. Этот вывод обобщает известные механизмы потери устойчивости, рассмотренные в настоящее время в скалярных системах.

В том случае, когда равновесие системы становится неустойчивым, в его окрестности образуются притягивающие множества типа орбитально асимптотически устойчивых предельных циклов и двумерных притягивающих торов. Эти существенно нелинейные эффекты оказывают важное влияние на состояние процесса резания. Их параметры влияют на износостойкость инструментов, зависящих от параметров автоколебаний. При этом в зависимости от частоты, имеет место оптимальное значение автоколебаний, при которых стойкость максимальна. Кроме этого, в зависимости от ориентации параметров автоколебаний в пространстве, они могут приводить к уменьшению величины шероховатости формируемой поверхности. Поэтому раскрытие механизмов образования и прогнозирование их параметров открывает путь улучшения процесса резания. Кроме этого, в рассматриваемой нелинейной системе имеет место синхронизация частот на торе. Этот эффект зависит от матрицы скоростных коэффициентов и близости частот двух взаимодействующих осцилляторов.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 14-08-00206 «Разработка теории управления процессами обработки на металлорежущих станках на основе синергетической концепции с учетом самоорганизации и эволюции системы резания».

Библиографический список

1. Дроздов Н.А. К вопросу о вибрациях станка при токарной обработке // Станки и инструмент. 1937. С. 12.
2. Каширин А.И. Исследование вибраций при резании металлов. М.-Л.: АН СССР, 1944. 282 с.
3. Соколовский А.П. Вибрации при работе на металлорежущих станках // Исследование колебаний при резании металлов. М.: Машгиз, 1958. С. 15.
4. Мурашкин Л.С., Мурашкин С.Л. Прикладная нелинейная механика станков. Л.: Машиностроение, 1977. 192 с.
5. Альбрехт П. Динамика процесса резания металла // Конструирование и технология машиностроения: Труды американского общества инженеров-механиков ASME. М.: Изд. Мир, 1965. Т. 87, серия В, № 4. С. 40.
6. Жарков И.Г. Вибрации при обработке лезвийным инструментом. Л.: Машиностроение, 1987. 184 с.
7. Глустый И. Автоколебания в металлорежущих станках / Пер. с чешск. М.: Машгиз, 1956. 395 с.
8. Кудинов В.А. Динамика станков. М.: Машиностроение, 1967. 359 с.
9. Эльясберг М.Е. Автоколебания металлорежущих станков: Теория и практика. СПб.: ОКБС, 1993. 182 с.

10. Вейц В.Л., Васильков Д.В. Задачи динамики, моделирования и обеспечения качества при механической обработке маложестких заготовок // СТИН. 1999. № 6. С. 9.
11. Заковоротный В.Л., Флек М.Б. Динамика процесса резания. Синергетический подход. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 2006. 876 с.
12. Заковоротный В.Л., Фам Динь Тунг, Нгуен Суан Тьем. Математическое моделирование и параметрическая идентификация динамических свойств подсистемы инструмента и заготовки // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2011. № 2. С. 38.
13. Заковоротный В.Л., Бордачев Е.В., Алексейчик М.И. Динамический мониторинг состояния процесса резания. // СТИН. 1998. № 12. С. 6.
14. Заковоротный В.Л., Фам Динь Тунг, Нгуен Суан Тьем. Моделирование деформационных смещений инструмента относительно заготовки при точении // Вестник ДГТУ. 2010. Т. 10, № 7. С. 1005.
15. Altintas Y., Budak E. Analytical prediction of stability lobes in milling // Ann. CIRP. 1995. Vol. 44. P. 357.
16. Balachandran B. Non-linear dynamics of milling process // Philos. Trans. Roy. Soc. 2001. Vol. 359. P. 793.
17. Davies M.A., Pratt J.R. The stability of low immersion milling // Ann. CIRP. 2000. Vol. 49. P. 37.
18. Davies M.A., Pratt J.R., Dutterer B.S., Burns T.J. Stability prediction for low radial immersion milling // J. Manuf. Sci. Engin. 2002. Vol. 124. P. 217.
19. Faassen R.P.H., van de Wouw N., Osterling J.A.J., Nijmeijer H. Prediction of regenerative chatter by modeling and analysis of high-speed milling // Int. J. Mach. Tools Manuf. 2003. Vol. 43. P. 1437.
20. Corpus W.T., Endres W.J. Added stability lobes in machining processes that exhibit periodic time variation – Part 1: An analytical solution // J. Manuf. Sci. Engin. 2004. Vol. 126. P. 467.
21. Gousskov A.M., Voronov S.A., Paris H., Batzer S.A. Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2002. Vol. 7. P. 207.
22. Заковоротный В.Л., Фам Тхы Хыонг. Параметрическое самовозбуждение динамической системы резания // Вестник ДГТУ. 2013. № 6. С. 97.
23. Peigne G., Paris H., Brissaud D., Gousskov A. Impact of the cutting dynamics of small radial immersion milling operations on machined surface roughness // Int. J. Mach. Tools Manuf. 2004. Vol. 44. P. 1133.
24. Szalai R., Stepan G., Hogan S.J. Global dynamics of low immersion high-speed milling // Chaos. 2004. Vol. 14. P. 1069.
25. Floquet M.G. Equations différentielles linéaires a coefficients périodiques // Ann. Scientifiques de l'École Normale Supérieure. 1883. Vol. 12. P. 47.
26. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 307 с.
27. Лихаданов В.М. О влиянии структуры сил на устойчивость движения // ПММ. 1974. Т. 38. С. 246.

28. Лихаданов В.М. О стабилизации потенциальных систем // ПММ. 1975. Т. 39. С. 53.
29. Остафьев В.А., Антонюк В.С., Тымчик Г.С. Диагностика процесса металлообработки. Киев: Тэхника. 1991. 152 с.

Поступила в редакцию 18.03.2014
После доработки 5.05.2014

SELF-ORGANIZATION AND BIFURCATIONS OF DYNAMICAL METAL CUTTING SYSTEM

V. L. Zakovorotny¹, Pham Dinh Tung², V. S. Bykador¹

¹Don State Technical University

²Le Quy Don Technical University

The problems of nonlinear dynamics of cutting metal are considered in the article. We offer mathematical model of dynamical system that includes a dynamical relation of the cutting process by using turning example. Basic positions of the dynamical relation are the forces dependence of cutting area, the force's delay of elastic deformation shift of a tool by relative to workpiece, limitations of the cutting forces on clearance face of the tool, dependence of the cutting forces of the cutting velocity. Dynamical subsystem of the tool is described as linear system on perpendicular plane to cutting surface. The principal focus in the paper was given to analyse of forming of attractors near to fixed point (orbitally stable solutions, double invariant toruses). The article provides data about bifurcation of attractors. Design recommendations for the systems that have required attractors in the state space are also given at the paper.

Keywords: Dynamical system, attractors, bifurcations, cutting process of the materials.



Заковоротный Вилор Лаврентьевич – родился в 1940 году в Красноярске, окончил Ростовский институт сельскохозяйственного машиностроения (ныне Донской государственный технический университет) в 1962 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (1966) в Новочеркасском политехническом институте (ныне Южно-Российский государственный политехнический университет) и доктора технических наук (1983) в Киевском политехническом институте. Основал научную школу, исследующую синергетические принципы управления и диагностики процессов резания и трения. Более 40 лет работает в области исследования устойчивости и эволюции динамических нелинейных систем взаимодействующих со средой. С 1981 года является заведующим кафедры Автоматизация производственных процессов ДГТУ, а с 1991 года по 2008 год был проректором по науке ДГТУ. Автор более чем 350 научных статей как в российских, так и зарубежных научных журналах, а также ряда авторских свидетельств и патентов. Опубликовал 9 научных монографий. Под его руководством защищено 7 докторских и 38 кандидатских диссертаций. Является лауреатом Государственной премии Украинской ССР, заслуженным деятелем науки РФ. Входит в редакционную коллегию 3 журналов включенных в перечень ВАК РФ.

344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
Донской государственный технический университет
E-mail: vzakovorotny@dstu.edu.ru



Фам Динь Тунг – родился в 1980 году в городе Ханое, Вьетнам. В 2005 году окончил ДГТУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (2008) в ДГТУ, диссертацию доктора технических наук (2013) в Таганрогском технологическом институте Южного федерального университета. Область научных интересов – анализ и синтез динамики металлорежущих станков с учетом эволюции связей в технологических системах. Автор более 50 научных работ и одной монографии «Синергетический системный синтез управляемой динамики металлорежущих станков с учетом эволюционных связей» (совместно с В.Л. Заковоротным, А.Д. Лукьяновым, Нгуен Донг Ань, Ростов н/Д: Изд. Центр ДГТУ, 2008).

Вьетнам, г. Ханой, ул. Хоанг Куок Вьет, 100
Вьетнамский государственный технический университет им. Ле Куй Дона
E-mail: phamdinhtung@mail.ru



Быкадор Виталий Сергеевич – родился 1980 году в Ростове-на-Дону. В 2002 году окончил Ростовскую-на-Дону государственную академию сельскохозяйственного машиностроения (ныне ИЭиМ ДГТУ), в 2007 году окончил ДГТУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (2011, ДГТУ). Область научных интересов – исследование и управление нелинейной динамикой процессов резания на основе синергетического подхода. Доцент кафедры автоматизация производственных процессов ДГТУ. Автор 4 статей и 2 учебных пособий (в соавторстве с В.Л. Заковоротным и М.В. Чувейко).

344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
Донской государственный технический университет
E-mail: vitaly.bykador@yandex.ru



ВЛИЯНИЕ ИЗГИБНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ИНСТРУМЕНТА НА САМООРГАНИЗАЦИЮ И БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РЕЗАНИЯ МЕТАЛЛОВ

В. Л. Заковоротный¹, Фам Динь Тунг², В. С. Быкадор¹

¹Донской государственной технической университет

²Вьетнамский государственный технический университет им. Ле Куи Дона

В статье рассматривается случай, когда изгибные деформационные смещения инструмента не являются величинами малыми. Такая ситуация характерна, например, для процесса растачивания глубоких отверстий. Борштанга в этом случае имеет малые значения изгибной жесткости. В этом случае за счет уменьшения переднего угла режущего инструмента наблюдается увеличение сил при возрастании деформационных смещений в направлении скорости резания. Тем самым формируется положительная обратная связь, которая принципиально изменяет динамику процесса резания. Показано, что для такого процесса характерен определенный вид бифуркаций. Во-первых, наблюдается ветвление точек равновесия. Во-вторых, по мере увеличения жесткости процесса резания в окрестностях равновесия формируются не только предельные циклы, но и после этапа удвоения периодов колебаний формируются хаотические аттракторы, обладающие ограниченной областью притяжения. Показано, что на формируемые притягивающие множества влияние оказывают технологические режимы, которые определяют силы резания и задают упругие деформационные смещения инструмента.

Ключевые слова: Динамическая система, притягивающие множества, хаотические аттракторы, бифуркации, процесс резания материалов.

Введение

В исследованиях динамики процессов обработки на металлорежущих станках главное внимание уделялось изучению устойчивости точки равновесия системы, а также автоколебаний системы [1–18]. Во всех этих работах не принимался во внимание случай, когда за счет существенных изгибных деформационных смещений инструмента, вызывающих уменьшение переднего угла режущего инструмента, силы резания не уменьшаются (как полагалось в отмеченных выше работах), а возрастают. Тем самым формируется положительная обратная связь, способствующая самовозбуждению системы резания, в том числе пересечению устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий. При этом динамика системы существенно меняется: подавляется квазипериодическая динамика, возникает мультистабильность, каскады

бифуркаций удвоения периода, хаотические аттракторы. Приводимый в статье материал дополняет известные примеры образования хаотических аттракторов [19–24] и объясняет возможность образования при резании экспериментально наблюдаемых аттракторов типа детерминированного хаоса.

Математическая модель системы

Рассмотрим математическую модель процесса резания (рис. 1), в которой силы, действующими на заднюю грань инструмента, будем пренебрегать (задний угол инструмента α есть величина большая, что характерно, например, для растачивания). Однако деформационные смещения инструмента в направлении X_2 сопровождаются изгибом, вызывающим изменение переднего угла инструмента γ . Поэтому, во-первых, по мере увеличения деформационных смещений в направлении X_2 имеет место увеличение объема пластической деформации в зоне резания и как следствие увеличение модуля силы резания $F^{(1)} = \{F_1^{(1)}, F_2^{(1)}\}^T$ [25]. Во-вторых, силы резания $F_1^{(1)}$ в направлении X_1 возрастают непропорционально быстро [11]. Кроме этого, как и в ранее рассмотренных случаях [26, 27], имеет место запаздывание изменения сил по отношению к деформационным смещениям инструмента. Для наглядности рассматриваемых ниже эффектов зависимость сил от скорости также не будем учитывать. Эти особенности процесса резания можно учесть, если рассмотреть силы

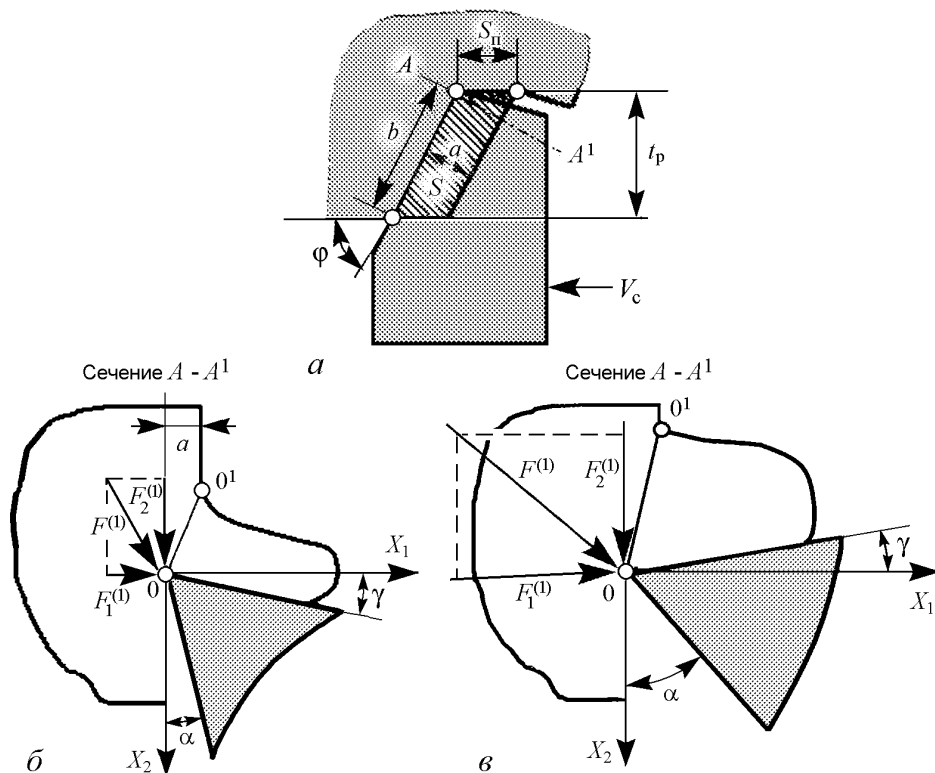


Рис. 1. а – формирование площади срезаемого слоя; б – поверхность скольжения и образование сил резания без изгибных деформаций инструмента; в – поверхность скольжения и образование сил резания при развитии изгибных деформаций инструмента

резания в виде следующих зависимостей:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1^{(1)} = \chi_1 \rho b [a - Y_1^{(1)}] + \delta (Y_2^{(1)})^3, \\ F_2^{(1)} = \chi_2 \rho b [a - Y_1^{(2)}] + \beta Y_2^{(2)}, \\ T_1^{(1)} \frac{dX_1}{dt} + X_1 = Y_1^{(1)}, \\ T_1^{(2)} \frac{dX_1}{dt} + X_1 = Y_1^{(2)}, \\ T_2^{(1)} \frac{dX_2}{dt} + X_2 = Y_2^{(1)}, \\ T_2^{(2)} \frac{dX_2}{dt} + X_2 = Y_2^{(2)}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где X_1, X_2 – деформационные смещения, мм, вершины инструмента в двух ортогональных направлениях; χ_1, χ_2 – угловые коэффициенты, удовлетворяющие условиям нормировки $(\chi_1)^2 + (\chi_2)^2 = 1$; S, a, b – площадь срезаемого слоя, мм², толщина и ширина, мм, срезаемого слоя, зависящие от технологических режимов (подачи на оборот $S_{\text{п}}$ и глубины резания t_p) и угла φ (см. рис. 1) (здесь очевидны соотношения: $a = S_{\text{п}} \sin(\varphi)$, $b = t_p / \sin(\varphi)$); δ – коэффициент, кг/мм³, определяющий отношение приращения силы к приращению объема деформируемого материала, имеющий смысл плотности; β – коэффициент, кг/мм, имеющий смысл жесткости; $T_1^{(1)}, T_1^{(2)}, T_2^{(1)}, T_2^{(2)}$ – постоянные времени, с, определяющие запаздывание изменения сил по отношению к деформационным смещениям инструмента относительно заготовки. Причем $T_1^{(1)} < T_1^{(2)}$ и $T_2^{(1)} < T_2^{(2)}$. $Y_1^{(1)}, Y_1^{(2)}, Y_2^{(1)}, Y_2^{(2)}$ – промежуточные координаты, моделирующие запаздывание сил по отношению к деформационным смещениям, а также их частотную зависимость.

Для построения математической модели введем параметры, характеризующие физические свойства инструмента [11]: m – диагональная матрица инерционных коэффициентов, кг · с²/мм; h – матрица диссипативных коэффициентов, кг · см/мм; c – матрица упругих коэффициентов, кг/мм. Математическая модель представляется в виде системы

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 X_1}{dt^2} + h_{1,1} \frac{dX_1}{dt} + h_{2,1} \frac{dX_2}{dt} + c_{1,1} X_1 + c_{2,1} X_2 = \chi_1 \rho b [a - Y_1^{(1)}] + \delta (Y_2^{(1)})^3, \\ m \frac{d^2 X_2}{dt^2} + h_{1,2} \frac{dX_1}{dt} + h_{2,2} \frac{dX_2}{dt} + c_{1,2} X_1 + c_{2,2} X_2 = \chi_2 \rho b [a - Y_1^{(2)}] + \beta Y_2^{(2)}, \\ T_1^{(1)} \frac{dX_1}{dt} + X_1 = Y_1^{(1)}, \\ T_1^{(2)} \frac{dX_1}{dt} + X_1 = Y_1^{(2)}, \\ T_2^{(1)} \frac{dX_2}{dt} + X_2 = Y_2^{(1)}, \\ T_2^{(2)} \frac{dX_2}{dt} + X_2 = Y_2^{(2)}, \end{array} \right. \quad (2)$$

которая учитывает следующие основные свойства: во-первых, запаздывание сил по отношению к деформационным смещениям и частотную зависимость связи деформационных смещений с силами; во-вторых, формирование сил в зависимости от деформационных смещений в направлении скорости резания; в-третьих, нелинейную зависимость сил от деформационных смещений в направлении скорости резания. Модель (2) не принимает во внимание закономерности изменения сил, формируемых в области задней грани инструмента, а также зависимость сил от скорости резания.

Свойства равновесия

Равновесие системы определяется, исходя из условия отсутствия изменения деформационных смещений инструмента. Следовательно, точка равновесия (X_1^*, X_2^*) определяется из уравнения

$$\begin{cases} (c_{1,1} + \chi_1 \rho b) X_1^* + c_{2,1} X_2^* = \chi_1 \rho b a + \delta (X_2^*)^3, \\ (c_{1,2} + \chi_2 \rho b) X_1^* + (c_{2,2} - \beta) X_2^* = \chi_2 \rho b a. \end{cases} \quad (3)$$

Анализ выражений (3) приводит к необходимости рассмотрения следующего уравнения

$$\delta (X_2^*)^3 + C_\Sigma X_2^* + F_\Sigma = 0, \quad (4)$$

где $C_\Sigma = \{c_{2,2}(c_{1,1} + \chi_1 \rho b) - [c_{1,1}\beta + \chi_1 \rho b\beta + c_{1,2}^2 + \chi_2 \rho b c_{1,2}]\} / (c_{1,2} + \chi_2 \rho b) = (A - B) / D$ – обобщенная жесткость системы; $F_\Sigma = (\chi_1 c_{1,2} - \chi_2 c_{1,1}) / (c_{1,2} + \chi_2 \rho b \rho b a)$ – суммарное значение силы. В динамической системе резания параметры A , B , D и суммарная сила F_Σ варьируют в достаточно широком диапазоне. Они определяются элементами матрицы жесткости подсистемы инструмента, свойствами процесса резания, технологическими режимами и геометрией инструмента, влияющей на угловые коэффициенты.

Вначале рассмотрим случай, когда $\chi_1 c_{1,2} = \chi_2 c_{1,1}$. Возможность выполнения этого условия зависит от геометрии инструмента, которая определяет угловые коэффициенты, и от углов ориентации осей эллипсов жёсткости в подсистеме инструмента, то есть от конструктивных свойств суппортной группы. Для этого случая наибольший интерес представляет выяснение влияния параметра β на свойства системы. Из (4) видно, что по мере увеличения β с учетом соотношения $\chi_1 c_{1,2} = \chi_2 c_{1,1}$ существует точка бифуркации $\beta_0 = c_{2,2} - ((\chi_2)^2 / (\chi_1)^2) c_{1,1}$, начиная с которой имеет место ветвление решений. Это бифуркация равновесия системы типа вилки. Ей соответствует $C_\Sigma = 0$. Как видно, при $\beta < \beta_0$ система имеет единственную точку равновесия (рис. 2, а). При $\beta > \beta_0$ свойства системы, рассматриваемые в вариациях относительно двух точек равновесия, например, $\pm X_{2,1}^*$, являются симметричными, как это наблюдается в системе Лоренца [19]. Нетрудно показать, что для этой системы у потенциальной функции точкам $X_{2,1}^*$ соответствуют два минимума. При $\beta < \beta_0$ потенциальная функция имеет единственный минимум, соответствующий точке $X_2^* \equiv 0$.

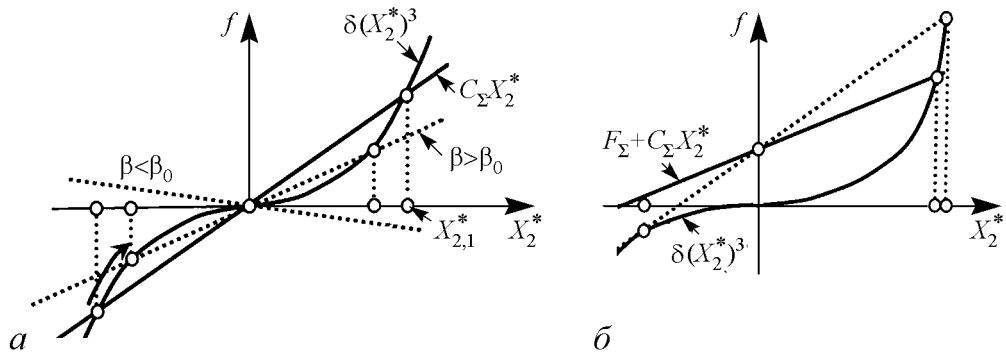


Рис. 2. Графическая интерпретация формирования точек равновесия системы: *a* – случай, когда $\chi_1 c_{1,2} = \chi_2 c_{1,1}$; *б* – случай, когда $\chi_1 c_{1,2} \neq \chi_2 c_{1,1}$

В общем случае условие $\chi_1 c_{1,2} = \chi_2 c_{1,1}$ не выполняется. Тогда точка бифуркации и точки равновесия системы, во-первых, становятся зависящими от F_Σ , во-вторых, свойства системы в вариациях относительно точки равновесия при неизменных параметрах также изменяются (рис. 2, б). В этом случае точке бифуркации равновесия соответствует условие $C_\Sigma > 0$. Отметим, что точкам равновесия X_2^* из (3) однозначно соответствуют X_1^* .

Для анализа устойчивости точек равновесия необходимо рассмотреть линеаризованное в окрестности равновесия уравнение (2), получаемое после замены $X_1(t) = X_1^* + x_1(t)$ и $X_2(t) = X_2^* + x_2(t)$,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h_\Sigma \frac{dx}{dt} + c_\Sigma x = 0, \quad (5)$$

$$\text{где } m = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, h_\Sigma = \begin{bmatrix} h_{1,1} - \chi_1 \rho b T_1^{(1)} & h_{2,1} + 3\delta T_2^{(1)} (X_2^*)^2 \\ h_{1,2} - \chi_2 \rho b T_1^{(2)} & h_{2,2} + \beta T_2^{(1)} \end{bmatrix},$$

$$c_\Sigma = \begin{bmatrix} c_{1,1} + \chi_1 \rho b & c_{2,1} - 3\delta (X_2^*)^2 \\ c_{1,2} + \chi_2 \rho b & c_{2,2} - \beta \end{bmatrix}.$$

Для анализа устойчивости конкретной точки равновесия необходимо рассматривать корни характеристического полинома системы (5)

$$\Delta(p) = \begin{bmatrix} mp^2 + (h_{1,1} - \chi_1 \rho b T_1^{(1)})p + c_{1,1} + \chi_1 \rho b & [h_{2,1} + 3\delta T_2^{(1)} (X_2^*)^2]p + c_{2,1} - 3\delta (X_2^*)^2 \\ (h_{1,2} - \chi_2 \rho b T_1^{(2)})p + c_{1,2} + \chi_2 \rho b & mp^2 + (h_{2,2} + \beta T_2^{(1)})p + c_{2,2} - \beta \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Анализ эволюции корней характеристического полинома показывает большое разнообразие возможных механизмов потери устойчивости равновесия системы. В частности, если варьировать суммарное значение силы F_Σ , влияющее на X_2^* , то знак смещения точки равновесия не влияет на свойства системы в вариациях относительно точки равновесия. Матрицы h_Σ и c_Σ в (5) являются несимметричными, то есть представимы в виде сумм симметричных и косимметричных составляющих. Анализ конкретных систем показывает, что главный механизм потери устойчивости

равновесия связан с преобразованием симметричной составляющей матрицы h_{Σ} из положительно определенной в отрицательно определенную. Кроме этого, по мере увеличения β возможно преобразование симметричной (потенциальной) составляющей матрицы c_{Σ} из положительно в отрицательно определенную. При варьировании β и F_{Σ} имеет место множество бифуркаций притягивающих множеств, формируемых в окрестности равновесия.

Анализ бифуркаций системы

Проанализируем бифуркации системы на конкретном примере. Так как при анализе бифуркаций рассматриваются большие отклонения от точек равновесия, то исследованию подлежит система (2). Решение этой системы не может быть найдено в явном виде. Поэтому для ее интегрирования использовался метод Рунге–Кутты 4-го порядка.

Рассмотрим две системы, имеющие параметры

$$m = \begin{bmatrix} 0.2 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0.2 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.8 \\ 0.8 & 2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 800 & 900 \\ 900 & 1200 \end{bmatrix}.$$

Они отличаются угловыми коэффициентами ориентации силы резания: для системы № 1 – $\chi_1 = 0.8$, $\chi_2 = 0.6$; для системы № 2 – $\chi_1 = 0.6$, $\chi_2 = 0.8$. Таким образом, для системы № 1 по мере увеличения β ветвление равновесия симметрично, симметричны и свойства в вариациях относительно точек равновесия. Для системы № 2 имеет место асимметрия. Параметры процесса резания остаются неизменными и соответствуют: $b = 3$ мм, $a = 0.2$ мм, $\rho = 2000$ кг/мм², $\beta = 0.9 \cdot 10^4$ кг/мм, $T_1^{(1)} = 0.002$ с, $T_1^{(2)} = 0.003$ с, $T_2^{(1)} = 0.001$ с, $T_2^{(2)} = 0.002$ с [12].

На рис. 3 приведены две диаграммы бифуркаций аттракторов в окрестности равновесия при варьировании $\beta \in [0, 2000]$ кг/мм. Проанализируем притягивающие множества по мере увеличения параметра β .

Если $F_{\Sigma} = 0$ (система № 1, рис. 3, а), то по мере увеличения β вначале единственная точка равновесия является асимптотически устойчивой (множество №1, $\beta \in [0 \dots 755]$), затем имеет место бифуркация точки равновесия, при этом верхняя и нижняя точки двух ветвей диаграммы равновесия являются асимптотически устойчивыми (множество №2). Устойчивость точек равновесия является аperiodической. Затем (множество №3) наблюдается бифуркация Андронова–Хопфа рождения орбитально асимптотически устойчивой пары предельных циклов. Эти предельные циклы являются симметричными в окрестностях верхнего и нижнего равновесий. Они находятся в ограниченном пространстве, расположенном между двумя верхними и нижними ветвями. При дальнейшем увеличении β (множество №4) наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода. Известно, что бифуркация удвоения периода характеризует один из сценариев рождения хаотического аттрактора, рассмотренный М. Фейгенбаумом [28]. Хаотические аттракторы формируются на множестве №5. Они образуются в окрестностях верхней и нижней точек равновесия, существуя в ограниченном объеме фазового пространства, то есть одновременно обладают свойством притяжения. Далее, за счет увеличения интенсивности возбуждения, траектории ста-

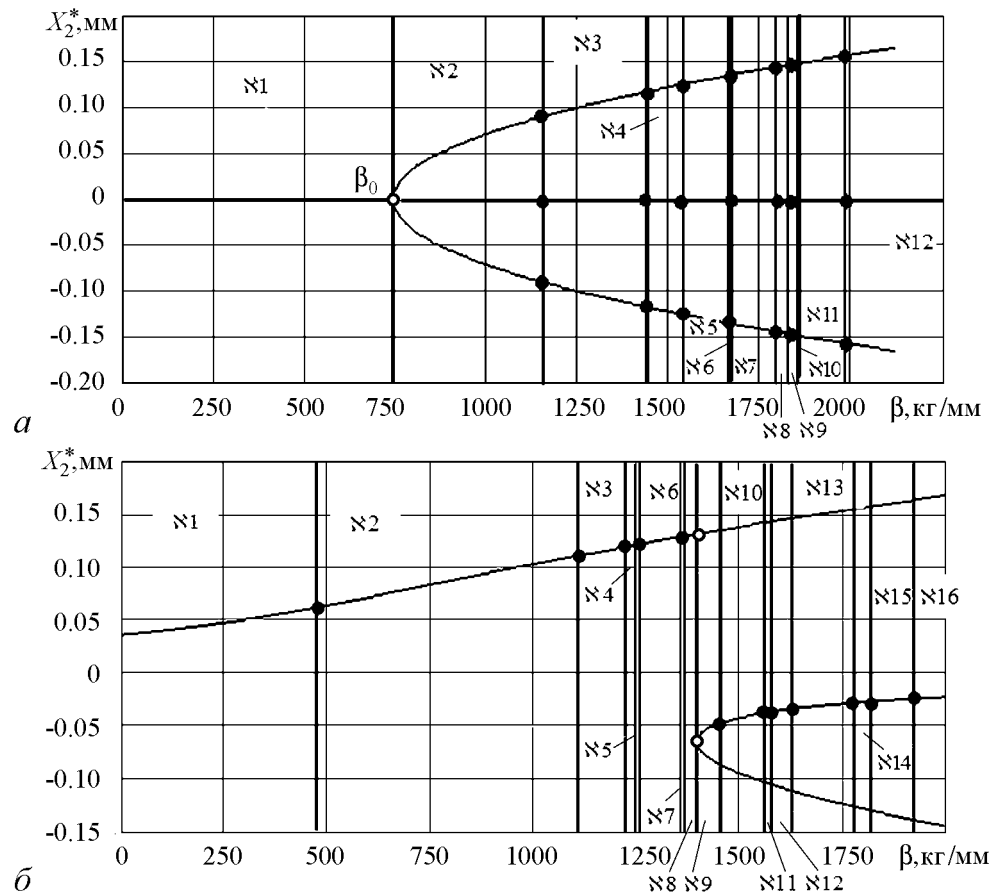


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма при варьировании β : a – система № 1, $F_z = 0$; b – система № 2, $F_z \neq 0$

новятся орбитальными относительно всех трех точек равновесия. При этом вначале формируется траектория с каскадом удвоения периодов (множество №6). Затем после каскада бифуркаций удвоения периода вновь формируется хаотический аттрактор (множество №9). Однако, в отличие от ранее рассмотренного хаотического аттрактора, траектории захватывают все три точки равновесия. В дальнейшем циклы преобразования стационарных траекторий периодически повторяются (множества №10, №11). Наконец, система становится неустойчивой в целом (множество №12). Однако в этом случае траектории, двигаясь относительно каждой точки равновесия, находятся в пространствах, которые не пересекаются друг с другом. Заметим, что, начиная с $\beta = 1500$ кг/мм, свойства системы становятся чрезвычайно чувствительными к вариациям этого параметра.

Некоторые наиболее типичные примеры проекций фазовых траекторий на плоскость $(X_2 - dX_2/dt)$ приведены на рис. 4. Здесь необходимо обратить внимание на то, что хаотические аттракторы при $\beta \in \text{№4}$ (рис. 4, в) формируются исключительно в окрестности двух точек равновесия, а при $\beta \in \text{№9}$ (рис. 4, е) они напоминают аттрактор Лоренца и имеют свойства, близкие к этому аттрактору [23, 24].

Проанализируем также частотные свойства стационарных колебаний при переходе от орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла (рис. 4, б)

к хаотическому аттрактору (рис. 4, *е*). Как видно из рис. 5, достаточно узкополосный спектр колебаний (рис. 5, *а*) в случае устойчивого предельного цикла через бифуркацию удвоения периода, характеризующегося образованием дополнительных частот с кратными и дробными частотами (рис. 5, *б*, *в*), трансформируется в достаточно широкополосный спектр при формировании хаотического аттрактора. После установления хаотического аттрактора спектральный состав колебаний скорее характеризуется окрашенным белым шумом (рис. 5, *в*). Подчеркнем, что даже малые вариации параметра β вызывают существенные изменения свойств системы.

Если $F_{\Sigma} \neq 0$ (система № 2, рис. 3, *б*), то бифуркационная диаграмма за счет асимметрии верхней и нижней ветвей является более сложной. По мере увеличения β система вначале также имеет единственную точку равновесия, которая является асимптотически устойчивой (множество $\aleph 1$). Затем в окрестности единственной точки равновесия формируется устойчивый предельный цикл (множество $\aleph 2$), бифуркация удвоения периодов (множество $\aleph 3$) и далее хаотический аттрактор

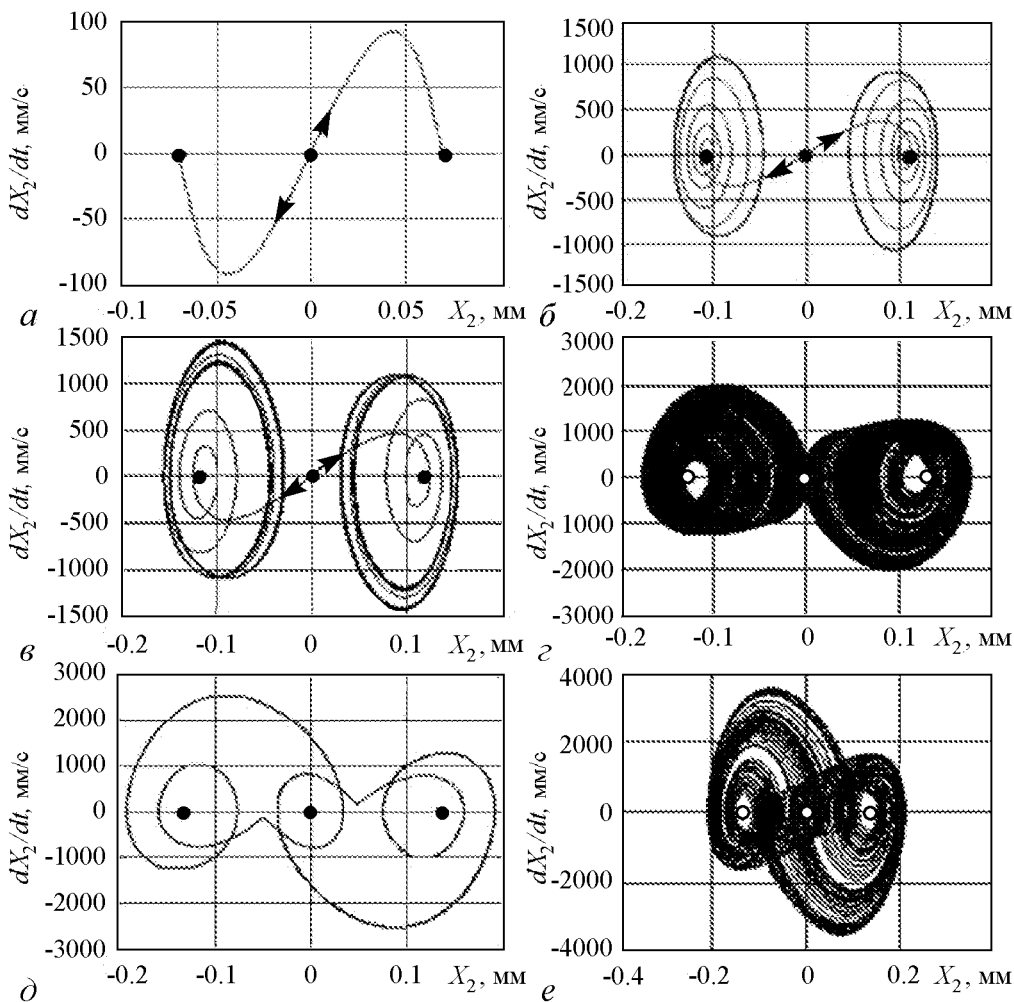


Рис. 4. Система № 1. Некоторые примеры проекций стационарных траекторий на фазовую плоскость ($X_2 - dX_2/dt$) по мере увеличения параметра β : *а* – $\aleph 2$; *б* – $\aleph 3$; *в* – $\aleph 4$; *г* – $\aleph 5$; *д* – $\aleph 6$; *е* – $\aleph 9$

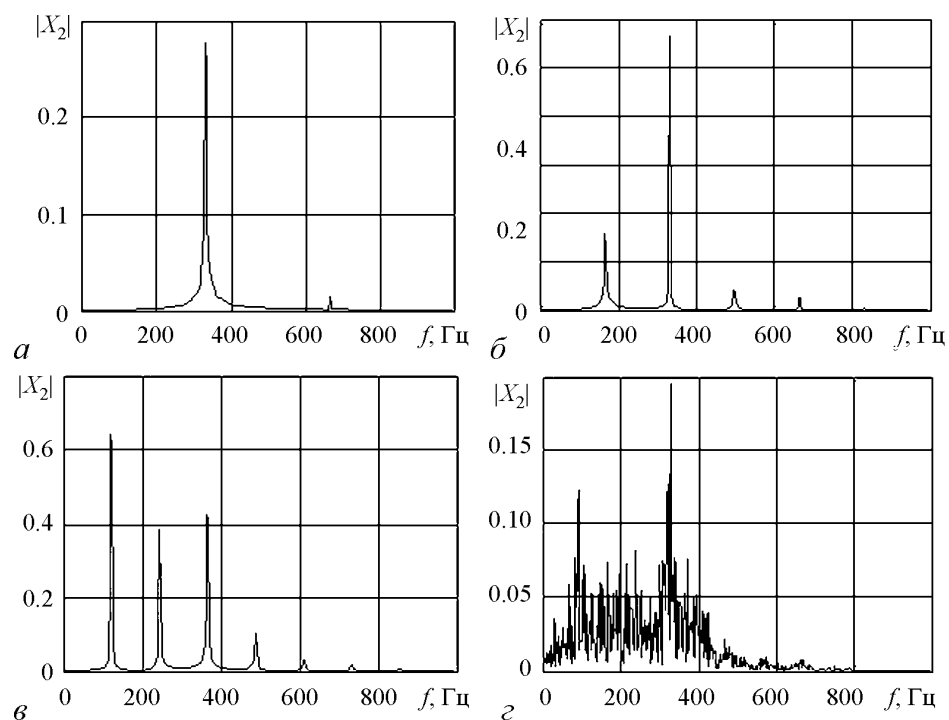


Рис. 5. Система № 1. Изменение спектрального состава аттракторов, соответствующих рис. 4, для различных значений параметра β : a – 500; δ – 590; ϵ – 610; z – 650

(множество №4). Процесс удвоения периодов (множества №5 и №7) и формирование хаотических аттракторов (множества №6 и №8) повторяется вплоть до точки, в которой наблюдается ветвление равновесия $\beta_0 = 1386$ кг/мм. Затем свойства системы в окрестностях верхней и нижней ветвей равновесия существенно меняются. Вначале в окрестности верхней ветви формируется странный аттрактор, а в окрестности нижней – асимптотически устойчивая точка равновесия (множество №9). Затем в окрестности верхней ветви (множество №10) в системе вновь происходит бифуркация удвоения периода циклов, а на нижней – устойчивая точка равновесия. Наконец, в области нижней ветви наблюдается бифуркация Андронова–Хопфа (множество №11), в области верхней ветви продолжается процесс удвоения периода. При дальнейшем увеличении β в области верхней ветви формируется хаотический аттрактор, а в области нижней ветви – сохраняются автоколебания (множество №12). Как предельный цикл, так и хаотический аттрактор характеризуют притягивающие множества, существующие в ограниченном фазовом пространстве. Наконец в области верхней ветви система теряет устойчивость, и траектории уходят от центральной ветви, в области нижней ветви в ограниченном пространстве сохраняются автоколебания (множество №13). При дальнейшем увеличении β система в области верхней точки равновесия остается неустойчивой, а в области нижней ветви в ограниченном пространстве вначале образуется каскад бифуркаций удвоения периода (множество №14), а затем образуется хаотический аттрактор, занимающий ограниченную область в окрестности нижней точки равновесия (множество №15). За пределами этой ограниченной области система движется по траекториям, отходящим от всех трех точек равновесия. Наконец система становится неустойчивой в целом (множество №16).

Принципиальным отличием каскада бифуркаций в системе № 2 ($F_{\Sigma} \neq 0$) от системы № 1 ($F_{\Sigma} = 0$) является различное поведение ее в областях верхней и нижней ветвей траектории смещения точек равновесия (рис. 6). При этом не образуются притягивающие множества, включающие сразу три точки равновесия, как это наблюдается в системе № 1. Обратим внимание на возможность существования в неустойчивой в целом системе некоторых локальных областей (рис. 6, *в* и *г*), в которых система является устойчивой в малом (см. рис. 6, *в*). Существуют также случаи, когда формируются хаотические аттракторы в ограниченном объеме (рис. 6, *з*). На формируемые траектории, кроме β и F_{Σ} , оказывают влияние практически все параметры системы (2). Если ранжировать параметры по чувствительности к ним изменения аттракторов, то необходимо отметить заметное влияние постоянных времени в системе (2), которые моделируют запаздывание сил по отношению к деформационным

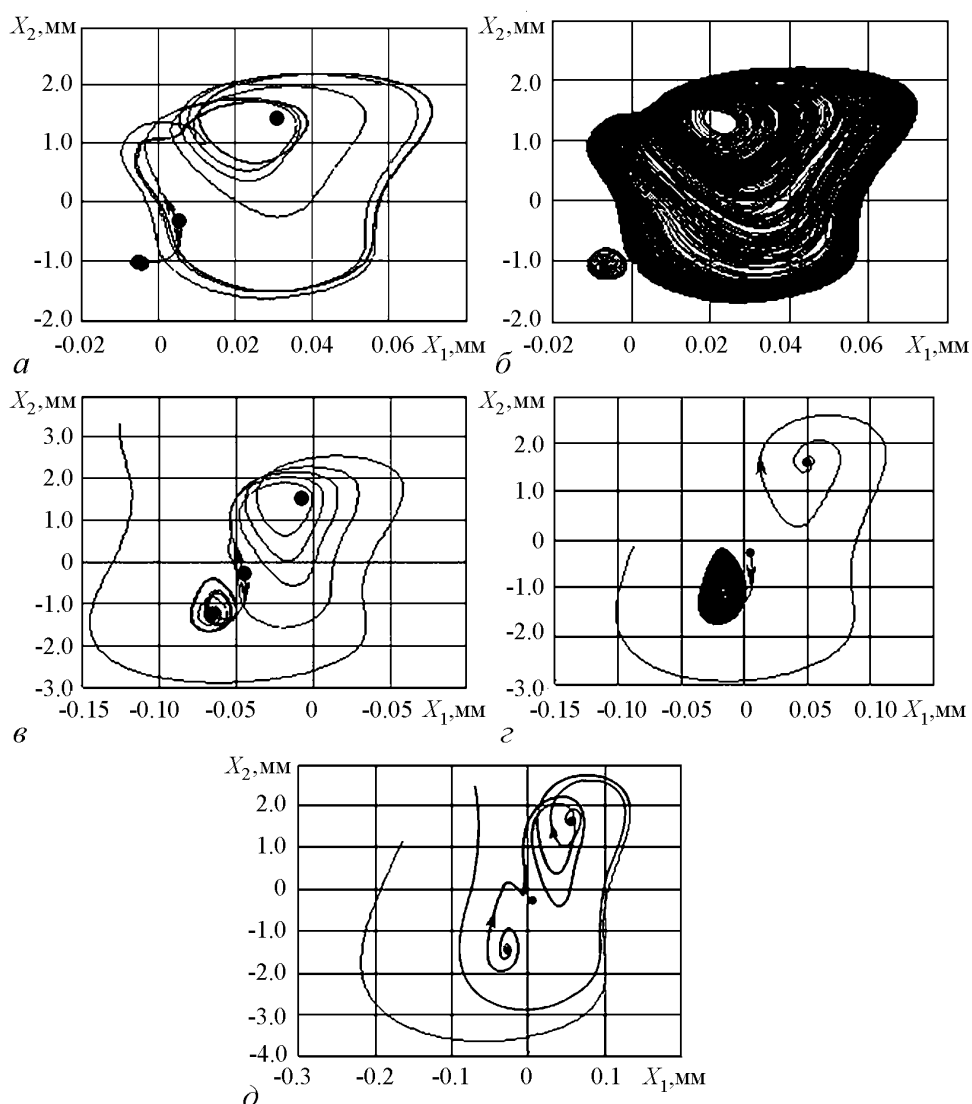


Рис. 6. Система № 2. Пример преобразования траекторий вершины инструмента в плоскости ($X_1 - X_2$) по мере увеличения параметра β : а – №11; б – №12; в – №14; г – №15; д – №16

смещениям. Необходимо подчеркнуть, что все эти преобразования имеют практическое подтверждение, экспериментально полученное авторами и другими исследователями [11, 29].

Заключение

Динамическая система резания может служить примером сложных преобразований притягивающих множеств, формируемых в окрестности точек равновесия. В зависимости от параметров динамической характеристики процесса резания пространство состояния динамической системы структурируется, и при этом свойства системы становятся чувствительными к малым вариациям параметров. Система обладает сложной динамикой и даже при неизменных параметрах в отдельных случаях в пространстве образуются области с различной топологией фазового пространства. Характерными для системы являются бифуркации Андронова–Хопфа, удвоения периода колебаний и образование хаотических аттракторов. Необходимо подчеркнуть, что такими свойствами начинает обладать система, имеющая единственную нелинейную зависимость в построенной математической модели. Если силы в системе уравнений представляются линейными зависимостями в координатах состояния, то система имеет единственную точку равновесия и может быть устойчивой или неустойчивой. В рассматриваемой системе не обнаружено формирование аттракторов типа инвариантного тора. Если принять во внимание, что система резания является возмущенной, то в ней в реальных условиях образуется сложный, трудно предсказуемый режим колебаний. Важно подчеркнуть, что эти колебания оказывают влияние на параметры качества изготовления деталей и состояние процесса обработки, например, на интенсивность изнашивания инструментов.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 14-08-00206 «Разработка теории управления процессами обработки на металлорежущих станках на основе синергетической концепции с учетом самоорганизации и эволюции системы резания».

Библиографический список

1. Дроздов Н.А. К вопросу о вибрациях станка при токарной обработке // Станки и инструмент. 1937. С. 12.
2. Каширин А.И. Исследование вибраций при резании металлов. М.-Л.: АН СССР, 1944. 282 с.
3. Соколовский А.П. Вибрации при работе на металлорежущих станках // Исследование колебаний при резании металлов. М.: Машгиз, 1958. С. 15.
4. Мурашкин Л.С., Мурашкин С.Л. Прикладная нелинейная механика станков. Л.: Машиностроение, 1977. 192 с.
5. Альбрехт П. Динамика процесса резания металла // Конструирование и технология машиностроения: Труды американского общества инженеров-механиков ASME. М.: Мир, 1965. Т. 87, серия В. № 4. С. 40.

6. Жарков И.Г. Вибрации при обработке лезвийным инструментом. Л.: Машиностроение, 1987. 184 с.
7. Глушый И. Автоколебания в металлорежущих станках / Пер. с чешск. М.: Машгиз, 1956. 395 с.
8. Кудинов В.А. Динамика станков. М.: Машиностроение, 1967. 359 с.
9. Эльясберг М.Е. Автоколебания металлорежущих станков: Теория и практика. СПб.: ОКБС, 1993. 182 с.
10. Вейц В.Л., Васильков Д.В. Задачи динамики, моделирования и обеспечения качества при механической обработке маложестких заготовок // СТИН. 1999, № 6. С. 9.
11. Заковоротный В.Л., Флек М.Б. Динамика процесса резания. Синергетический подход. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 2006. 876 с.
12. Заковоротный В.Л., Фам Динь Тунг, Нгуен Суан Тьем. Математическое моделирование и параметрическая идентификация динамических свойств подсистемы инструмента и заготовки // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2011. № 2. С. 38.
13. Заковоротный В.Л., Бордачев Е.В., Алексейчик М.И. Динамический мониторинг состояния процесса резания // СТИН. 1998. № 12. С. 6.
14. Заковоротный В.Л., Фам Динь Тунг, Нгуен Суан Тьем. Моделирование деформационных смещений инструмента относительно заготовки при точении // Вестник ДГТУ. 2010. Т. 10, № 7. С. 1005.
15. Altintas Y., Budak E. Analytical prediction of stability lobes in milling // Ann. CIRP 44. 1995. P. 357.
16. Balachandran B. Non-linear dynamics of milling process // Philos. Trans. Roy. Soc. 2001. Vol. 359. P. 793.
17. Davies M.A., Pratt J.R. The stability of low immersion milling // Ann. CIRP. 2000. Vol. 49. P. 37.
18. Gousskov A.M., Voronov S.A., Paris H., Batzer S.A. Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2002. Vol. 7. P. 207.
19. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
20. Анищенко В.С. Атракторы динамических систем // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 1. С. 109.
21. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. 1987. 424 с.
22. Li T.-Y, Yorke J.A. Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly. 1975. Vol. 82. P. 982.
23. Lorens E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 20. P. 130.
24. Dorfman J.R. An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics. Cambridge University Press, 1999. 288 p.
25. Бобров В.Ф. Основы теории резания металлов. М.: Машиностроение, 1975. 344 с.

26. *Заковоротный В.Л., Фам Динь Тунг, Нгуен Суан Тьем, Рыжкин М.Н.* Моделирование динамической связи, формируемой процессом точения, в задачах динамики (скоростная связь) // Вестник ДГТУ. 2011. Т. 11, № 2. С. 137.
27. *Заковоротный В.Л., Фам Динь Тунг, Нгуен Суан Тьем, Рыжкин М.Н.* Моделирование динамической связи, формируемой процессом точения, в задачах динамики (позиционная связь) // Вестник ДГТУ. 2011. Т. 11, № 5. С. 30.
28. *Feigenbaum M.J.* The transition to a periodic behavior in turbulent systems // Commun. Math. Phys. 1980. Vol. 77, № 1. P. 65.
29. *Кабалдин Ю.Г.* Самоорганизация и нелинейная динамика в процессах трения и изнашивания инструмента при резании. Комсомольск-на-Амуре: Изд-во КнАГТУ, 2003. 175 с.

Поступила в редакцию 18.03.2014
После доработки 5.05.2014

INFLUENCE OF A FLEXURAL DEFORMATION OF A TOOL ON SELF-ORGANIZATION AND BIFURCATIONS OF DYNAMICAL METAL CUTTING SYSTEM

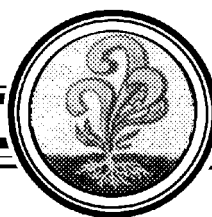
V. L. Zakovorotny¹, Pham Dinh Tung², V. S. Bykador¹

¹Don State Technical University

²Le Quy Don Technical University

In the article we offer to consider case of a flexural deformation shifts of a tool when they are essential for nonlinear dynamics of cutting process. This situation is observed for drill deep holes, because a boring bar has a small values of a flexural stiffness. In that case an angle of cutting edge reduces and cutting forces increase if the deformation shifts also increased in velocity direction. The last circumstance becomes occasion for positive feedback that essentially changes dynamics of the cutting process. In the paper it is shown that process with positive feedback has the bifurcation. In the first place we can observe bifurcation of fixed points. In the second place we can watch if stiffness of cutting process is increased that limit cycles and chaotic attractors with limit region of attract are generated in neighborhood of fixed points. It is shown that attracting sets fundamentally depend on cutting parameters. The cutting parameters define cutting forces and the flexural deformation shifts of a tool.

Keywords: Dynamical system, attracting sets, chaotic attractor, bifurcations, cutting process of the materials.



32 ГГц МАГНЕТРОН С ХОЛОДНЫМ КАТОДОМ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГАРМОНИКАХ – АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ В РАМКАХ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ И 3D-МОДЕЛИРОВАНИЕ

В. Д. Ерёмка¹, М. А. Копоть², О. П. Кулагин¹

¹Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины

²Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Проведена аналитическая оценка оптимальных параметров импульсного магнетрона с холодным вторично-эмиссионным катодом – генератора электромагнитного излучения на частоте 32 ГГц при анодном напряжении 8 кВ и магнитном поле около 0.4 Тл. Установлено, что выбранная геометрия пространства взаимодействия магнетрона может обеспечивать взаимодействие электронов с высокочастотным полем как (-1) -й пространственной гармоники колебаний $\pi/2$ -вида, так и $(+1)$ -й пространственной гармоники колебаний π -вида в режиме дрейфово-орбитального резонанса. Трёхмерное численное моделирование процессов взаимодействия в таком генераторе показывает, что обе модификации прибора способны обеспечить требуемые энергетические характеристики. Подтверждена возможность применения предложенной нелинейной аналитической модели при оценке рабочих параметров неклассических приборов М-типа на пространственных гармониках.

Ключевые слова: Дрейфово-орбитальный резонанс, магнетроны на пространственных гармониках, нелинейная аналитическая модель, трёхмерная численная модель.

Введение

Решение задач, связанных с разработкой и созданием импульсных магнетронов миллиметрового диапазона длин волн с холодным катодом, большим сроком службы и сравнительно невысокими рабочими напряжением и магнитным полем, является актуальным. Известен ряд магнетронов с основным холодным вторично-эмиссионным катодом – импульсных генераторов электромагнитного излучения миллиметрового диапазона волн, которые работают на пространственной гармонике колебаний не π -вида при напряжениях около 8...10 кВ [1]. Такие генераторы относят к нетрадиционным (неклассическим) приборам М-типа. Существующие в литературе методики расчета и проектирования традиционных магнетронов [2] не соответствуют задачам, которые возникают при создании нетрадиционных приборов М-типа, в частности, магнетронов на пространственных гармониках. Это обусловлено, прежде

всего, отсутствием единства позиций авторов и фрагментарностью решаемых ими проблем.

Кроме того, разработчики магнетронов в своих публикациях, посвященных методам расчета геометрии пространства взаимодействия генератора и его выходных характеристик, в частности, рабочих напряжения, тока и магнитного поля, оперируют с некой обоснованной компромиссами исходной геометрией и (или) с неким рациональным выбором параметров его режима работы. Как известно, в пространстве взаимодействия магнетронов (между катодом и анодом) электроны, перемещающиеся в скрещенных электрическом и магнитном полях, имеют дрейфовую и орбитальную компоненты скорости. Обычно второй компонентой пренебрегают – в этом случае потенциал синхронизации описывается линейным относительно магнитного поля уравнением Хартри:

$$U = \frac{1884 \cdot B}{2p\lambda} (r_a^2 - r_c^2) - 4.04 \cdot 10^7 \left(\frac{r_a}{2p\lambda} \right)^2. \quad (1)$$

Здесь U – рабочее напряжение; B – индукция магнитного поля; $p = |\gamma + \mu N|$ – число вариаций ВЧ-поля по периметру пространства взаимодействия, где N – число резонаторов, μ – номер пространственной гармоники, γ – мода (вид) колебаний; r_a , r_c – радиусы анода и катода, соответственно; λ – длина рабочей волны в сантиметрах.

Однако вызывает большие сомнения справедливость этого соотношения при расчете и проектировании магнетронов на пространственных гармониках. Данное уравнение, как известно, справедливо при малых по сравнению с длиной рабочей волны орбитах электронов – иначе говоря, при сильных рабочих магнитных полях, когда движение электронов фактически можно аппроксимировать движением ведущих центров их орбит. При этом орбитальное движение считается «быстрым». При описании процессов в классических магнетронах, для которых характерен параметр заkritичности $h = B/B_{cr} \sim 2.5...3$, такое приближение допустимо и результаты эксперимента подтверждают достаточно хорошее совпадение с уравнением Хартри.

При величине параметра заkritичности $h \sim 1...1.5$, характеризующей режим работы большинства нетрадиционных магнетронов миллиметрового диапазона, упомянутое приближение не приемлемо. В магнетронах миллиметрового диапазона часть энергии электронов, связанная с орбитальной компонентой их скорости, может составлять более 60 % их полной энергии. То есть пренебрежение орбитальным движением электронов не соответствует физике процессов в таких магнетронах и приводит к серьёзным ошибкам при их практической реализации.

Результаты экспериментов подтверждают, что уравнение Хартри фактически не соблюдается при описании физики процессов в магнетронах, работающих при $h \sim 1...1.5$. Причём даже для магнетронов сантиметрового диапазона, работающих на (-1) -й пространственной гармонике в режимах вблизи критического, это несоответствие носит систематический характер [3]. Как видно из рис. 1, чем ближе рабочая точка к параболе критических режимов, тем сильнее она удалена от прямой, соответствующей уравнению Хартри. При дальнейшем укорочении длины волны и переходе в миллиметровую область данная закономерность полностью сохраняется [4].

Таким образом, при расчёте всех приборов М-типа, работающих в близкритических режимах, в качестве отправной точки необходима аналитическая модель, более адекватно учитывающая все компоненты электронного движения [5].

В настоящее время, основой теоретического изучения физики процессов в генераторах М-типа остаётся численное моделирование [6]. Однако нелинейная динамика электронно-волнового взаимодействия в магнетронах на пространственной гармонике (с основным холодным вторично-эмиссионным катодом) недостаточно изучена с помощью численного эксперимента.

Без адекватной аналитической модели в близкритических режимах такие расчеты оказываются малоэффективными. Первые шаги к модели, учитывающей орбитальную составляющую скорости электронов, были сделаны в работе [7] около 30 лет назад. К сожалению, несмотря на плодотворное развитие идей, высказанных ранее в [8] и [9], данный подход не стал основой для полноценной аналитической теории приборов М-типа миллиметрового диапазона. Среди причин отметим следующие. Автор работы [7], применяя уравнение Хартри, не сформулировал условия применимости полученных им соотношений для реальных магнетронов, не получил выражения для минимального потенциала, определяющего начало дрейфово-орбитального взаимодействия. Кроме того, он практически не рассматривал реальные магнетроны на пространственных гармониках, ограничившись режимом «слабых полей».

В последние годы тенденции развития электроники магнетронов возродили интерес к задаче построения нелинейной относительно рабочего магнитного поля аналитической теории, общей для всех неклассических приборов М-типа. В ряде статей описаны первые шаги в этом направлении [4, 5, 10].

Целью данной работы является краткое описание новой методики расчета параметров неклассических приборов М-типа на примере 32 ГГц магнетрона, в котором взаимодействие электронов и электромагнитного поля осуществляется в режиме дрейфово-орбитального резонанса. В основе методики – аналитическое моделирование и 3D численное моделирование.

1. Аналитическая модель

1.1. Взаимодействие на (-1)-й пространственной гармонике колебаний $\pi/2$ -вида. Как известно, для компьютерного расчета и проектирования нетрадиционных магнетронов с использованием двумерных и трехмерных численных моделей необходимо создать непротиворечивый общий алгоритм проектирования элементов, узлов и прибора в целом, а также соответствующий ему программный продукт и банк данных. При решении указанного комплекса задач первоочередным является этап нахождения (расчета и оптимизации) упомянутой выше исходной геометрии пространства взаимодействия и параметров режима работы (рабочего магнитного

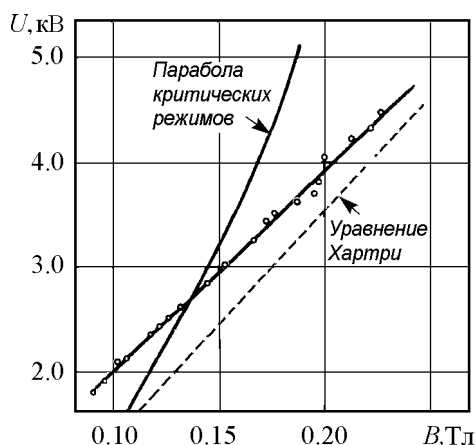


Рис. 1. Экспериментальные результаты для магнетрона с боковым катодом (радиус анода $r_a = 5.0$ мм, радиус катода $r_c = 3.5$ мм, число резонаторов $N = 20$, длина волны $\lambda = 3.2$ см, вид колебаний $\gamma = 3(N/4 - 2)$, число вариаций ВЧ-поля $p = 17$)

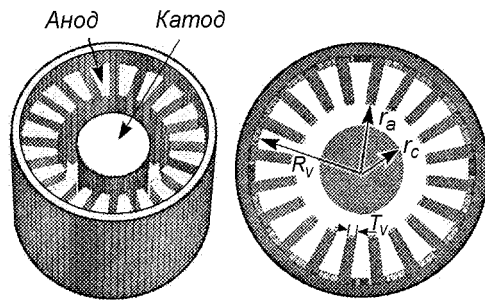


Рис. 2. Схематическое изображение пространства взаимодействия 32 ГГц магнетрона с 20 лопаточными резонаторами, работающего на (-1)-й пространственной гармонике

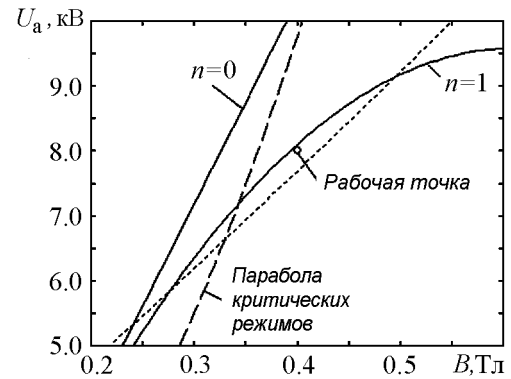


Рис. 3. Зависимость $U_a(B)$ для $N = 20$ и $p = 16$ (пунктирная линия – пороговое напряжение для первой гармоники $n = 1$ дрейфово-орбитального резонанса)

поля и анодного напряжения), которые, как «первое приближение», соответствовали бы основным требованиям технического задания на проектирование и могли бы быть применены в качестве исходных при численном 3D-моделировании и расчетах. Последнее позволяет существенно уменьшить число экспериментальных образцов на пути к созданию оптимальной конструкции генератора.

Исходные требования к параметрам магнетрона: рабочий ток обеспечивает основной холодный катод с вторично-электронным эмиттером, генерирование электромагнитных колебаний осуществляется на частоте 32 ГГц при рабочем напряжении $U_a = 8.0$ кВ, рабочем магнитном поле B около 0.4 Тл.

С помощью аналитической модели [4] определены следующие геометрические размеры узлов пространства взаимодействия импульсного магнетрона: радиус анода $r_a = 3.0$ мм, радиус катода $r_c = 2.0$ мм (рис. 2). Для данной геометрии в режиме взаимодействия синхронных электронов с ВЧ-полем первой отрицательной пространственной гармоники (рабочая мода $N/4 - 1$) аналитическая модель позволяет определить оптимальное число лопаточных резонаторов $N = 20$ и число вариаций ВЧ-поля $p = 16$.

Подстановка рассчитанных параметров в формулу (2) [4]

$$U_a = U_1 (B/B_1)^2 - \left(\frac{1 - B/B_1}{1 - 2n/p} \right)^2, \quad (2)$$

где $B_1 = 2 \frac{m \omega}{e p}$, $U_1 = (1 - \sigma^2) \frac{m r_a^2 \omega^2}{e 2p^2}$, $\sigma = \frac{r_c}{r_a}$, позволяет построить зависимость, представленную на рис. 3. Кружочком на рисунке указана рабочая точка магнетрона. Очевидно, что она с достаточной точностью ложится в рабочую область первой дрейфово-орбитальной гармоники ($n = 1$). Величина $h = B/B_{cr} \sim 1.13$, $B \approx 0.46$ Тл. Оценка максимального электронного КПД в рамках аналитической модели даёт достаточно высокую величину, порядка 30%.

1.2. Взаимодействие на (+1)-й пространственной гармонике колебаний л-вида. Имеем следующие исходные требования к параметрам магнетрона: генерирование электромагнитных колебаний на частоте 32 ГГц при рабочем напряжении $U_a = (7.5...12.0)$ кВ, рабочем магнитном поле B около 0.4 Тл.

С помощью аналитической модели [4] мы определили следующие геометрические размеры узлов импульсного магнетрона с основным холодным вторично-эмиссионным катодом: радиус анода $r_a = 3.5$ мм, радиус катода $r_c = 2.6$ мм, длина эмиттера основного катода $l_{ec} = 4$ мм. Для режима взаимодействия синхронных электронов с ВЧ-полем первой положительной пространственной гармоники (рабочая мода $N/2$), оптимальное число лопаточных резонаторов $N = 12$ (рис. 4) и число вариаций ВЧ-поля $p = 18$.

Ниже представлены результаты аналитического моделирования для магнетрона с $N = 12$ и $p = 18$.

Подстановка рассчитанных параметров в формулу (1) позволяет построить зависимость, представленную на рис. 5. Оценка максимального электронного КПД для этого случая даёт около 32%.

Как видно из рисунков и расчётов, использование (+1)-й пространственной гармоники колебаний π -вида даёт выигрыш по сравнению с первым случаем – и по размерам пространства взаимодействия, и по уменьшенному числу резонаторов. 12-резонаторная периодическая структура анодного блока такого магнетрона обеспечивает устойчивость к повышенным тепловым нагрузкам, а соответственно, и увеличенный срок его службы.

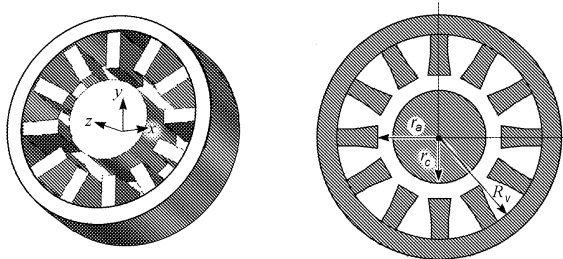


Рис. 4. Схема пространства взаимодействия 12-резонаторного 32 ГГц магнетрона на (+1)-й пространственной гармонике

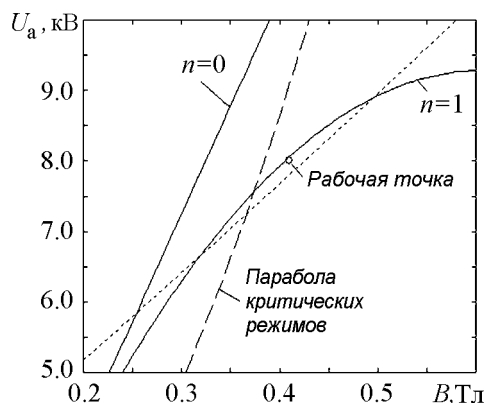


Рис. 5. Зависимость $U_a(B)$ для $N = 12$ и $p = 18$

2. Трехмерная численная модель магнетрона

2.1. Взаимодействие на (-1)-й пространственной гармонике колебаний $\pi/2$ -вида. При построении трехмерной численной модели импульсного магнетрона с холодным вторично-эмиссионным катодом применена геометрия пространства взаимодействия, количество резонаторов, величины анодного напряжения и рабочего магнитного поля, которые соответствуют вышеописанной аналитической модели. Моделирование процессов вторично-электронной эмиссии осуществлено с использованием работ [11, 12]. Коэффициент вторичной эмиссии выбран равным 1.8 при энергии бомбардировки 780 эВ. Разброс энергии первичных электронов, которые вылетают с дополнительного термоэлектронного катода, взят в интервале 2...5 эВ. В основе трехмерной модели лежит концепция самосогласованного поля, в кото-

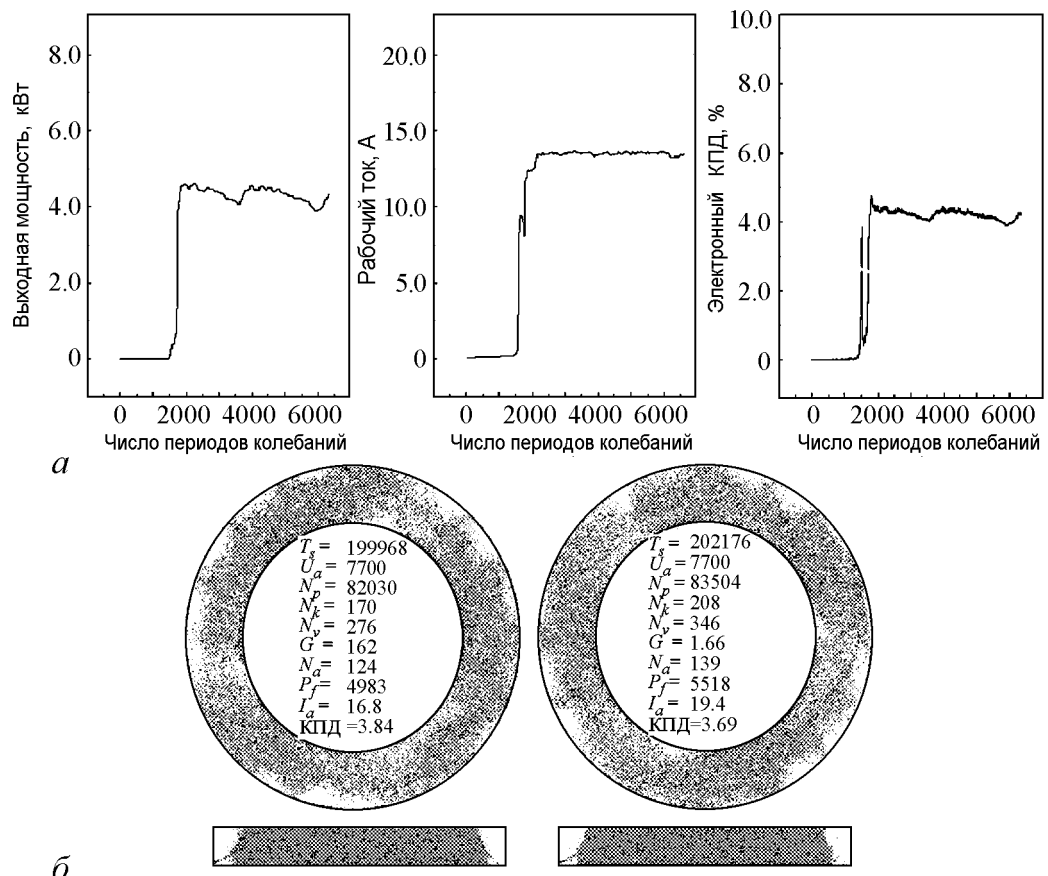


Рис. 6. *a* – Зависимость рабочего тока, КПД и выходной мощности магнетрона с холодным катодом от длительности процесса моделирования (на (-1) -й пространственной гармонике); *б* – 3D-моделирование распределения электронов в пространстве взаимодействия генерирующего магнетрона (черные точки – синхронные электроны)

ром кинетическое уравнение решают методом крупных частиц. Метод базируется на совместном решении уравнений возбуждения анодной резонаторной замедляющей системы электронным потоком, уравнения Пуассона, уравнений движения. Результаты численного моделирования методом крупных частиц представлены на рис. 6. Рабочая частота 32 ГГц, выходная мощность около 4 кВт, КПД около 4.3% при $U_a = 7.7$ кВ, $B \approx 0.37$ Тл, рабочем токе около 13 А. Рассчитанные значения выходной мощности и КПД можно увеличить путем оптимизации геометрии пространства взаимодействия магнетрона и режима его работы.

2.2. Взаимодействие на $(+1)$ -й пространственной гармонике колебаний π -вида. Аналогичным образом, при построении трехмерной численной модели 32 ГГц импульсного магнетрона с холодным вторично-эмиссионным катодом используются параметры, определенные в рамках вышеописанной аналитической модели: $r_a = 3.5$ мм, $r_c = 2.6$ мм, количество резонаторов $N = 12$, величина анодного напряжения $U_a = 8.0$ кВ и рабочего магнитного поля $B = 0.4$ Тл.

Моделирование процессов вторично-электронной эмиссии осуществлено с использованием работ [11, 12]. Коэффициент вторичной эмиссии выбран равным 1.8 при энергии бомбардировки 780 эВ. Разброс энергии первичных электронов, кото-

рые вылетают с дополнительного термоэлектронного катода, выбран в интервале 2...5 эВ.

В основе трехмерной модели лежит концепция самосогласованного поля, для решения кинетического уравнения применен метод крупных частиц, коэффициент укрупнения $0.85 \cdot 10^6$ электронов в частице. Метод базируется на совместном решении уравнений возбуждения анодной резонаторной замедляющей системы электронным потоком, уравнения Пуассона, уравнений движения. Результаты численного моделирования методом крупных частиц представлены на рис. 7. Рабочая частота 32 ГГц, выходная мощность около 6 кВт, КПД около 9% при $U_a = 8.0$ кВ, $B \approx 0.4$ Тл, рабочем токе около 8.3 А.

Полученные выходные значения мощности и КПД могут быть увеличены после оптимизации конструкции магнетрона, так как в модели было использовано одномодовое приближение. В силу этого не учитывалось «размывающее» действие на электронную втулку со стороны остальных видов колебаний анодной системы.

Как показало моделирование, режим взаимодействия на (+1)-й пространствен-

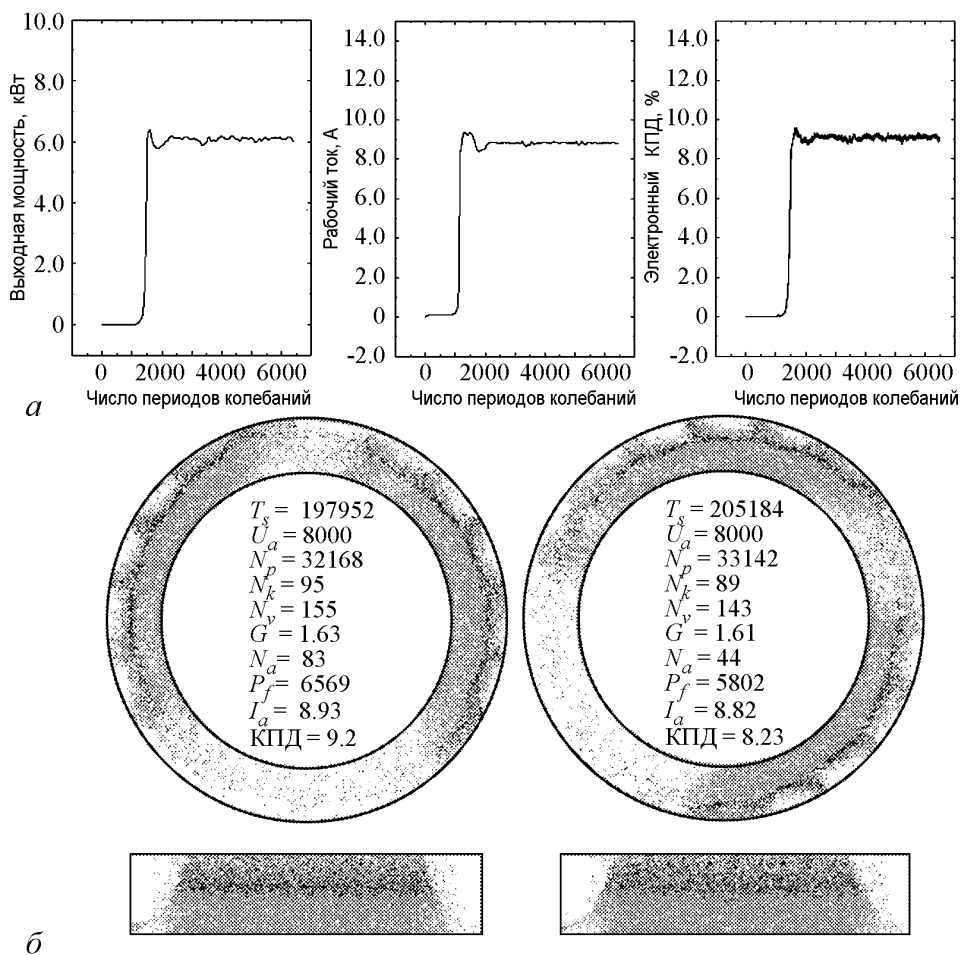


Рис. 7. *а* – Зависимость рабочего тока, КПД и выходной мощности магнетрона с холодным катодом от длительности процесса моделирования (на (+1)-й пространственной гармонике); *б* – 3D-моделирование распределения электронов в пространстве взаимодействия генерирующего на (+1)-й пространственной гармонике магнетрона (черные точки – синхронные электроны)

ной гармонике колебаний π -вида в нетрадиционном магнетроне миллиметрового диапазона обеспечивает более высокие выходную мощность и КПД, чем режим взаимодействия на (-1) -й пространственной гармонике колебаний $\pi/2$ -вида. Вероятно, это обусловлено тем, что амплитуда электромагнитного поля вблизи поверхности 12-резонаторной периодической структуры анодного блока больше.

Заключение

Применение представленной нелинейной аналитической модели электронно-волнового взаимодействия в процессе проектирования нетрадиционного импульсного магнетрона миллиметрового диапазона с холодным вторично-эмиссионным катодом позволяет получить данные о геометрии его пространства взаимодействия и ориентировочные приемлемые параметры рабочего магнитного поля, а также анодного напряжения. Рассчитанные с учётом дрейфово-орбитальных резонансов параметры служат исходными данными при осуществлении 3D-моделирования численными методами.

При этом уже на уровне аналитических расчётов, можно сделать выводы о преимуществах того или иного распределения ВЧ-поля в магнетроне и выбрать оптимальное для этой картины поля число резонаторов. А при последующем численном моделировании – приблизительно оценить мощность и эффективность прибора.

Библиографический список

1. Грицаенко С.В., Ерёмка В.Д., Копоть М.А., Кулагин О.П. и др. Многорезонаторные магнетроны с холодным вторично-эмиссионным катодом: Достижения, проблемы и перспективы // Радиофизика и электроника. Сборник научных трудов ИРЭ им. А.Я. Усикова НАН Украины. 2004. Т. 10, спец. вып. С. 499.
2. Шлифер Э.Д. Расчет многорезонаторных магнетронов. М.: МЭИ, 1966. 143 с.
3. Бабенко М. И., Вигдорчик И. М., Половин Р. В., Яновский М.С. Магнетрон с боковым катодом. Препринт № 31. Харьков: Изд. ИРЭ АН УССР, 1974. 47 с.
4. Kulagin O.P., Yeryomka V.D. Optimal conditions for drift-orbital resonance in M-type devices // IEEE Trans. Plasma Science. June, 2004. Vol. 32, № 3. P. 1181.
5. Кулагин О.П., Ерёмка В.Д. Дрейфово-орбитальные режимы в магнетронных генераторах миллиметровых волн // Радиофизика и электроника. Харьков: Институт радиофизики и электроники НАН Украины. 2003. Т. 8, № 3. С. 81.
6. Avtomonov N.I., Sosnytskiy S.V., Vavriv D.M. Dependence of magnetron characteristics on the secondary-emission yield of cold cathode // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (5). 2006. № 5. С. 225.
7. Красников М.Ю. О резонансном взаимодействии в цилиндрическом магнетроне // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. XXIII, № 1. С. 113.
8. Капица П.Л. Электроника больших мощностей. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 195 с.
9. Вайнштейн Л.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике / Л.А. Вайнштейн, В.А. Солнцев. М.: Сов. Радио, 1973. 400 с.: ил.
10. Yeryomka V.D., Kopot' M.A., Kulagin O.P., Tishchenko A.S., Naumenko V.D.,

Suvorov A.N., Jung-II Kim. Simulation and experimental breadboarding of 35 GHz spatial harmonic magnetrons with cold cathode // 20-я Международная Крымская конф. «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (КрыМиКо'2010), Украина, 2010, Труды конф. Т. 1. С. 310.

11. Rodney J., Vaughan M. A new formula for secondary emission yield// IEEE Transaction on electron devices. September 1989. Vol. 36, № 9. P. 1963.
12. Rodney J., Vaughan M. Secondary emission formulas// IEEE Transaction on electron devices. April 1993. Vol. 40, № 4. P. 830.

Поступила в редакцию 5.05.2014
После доработки 29.05.2014

32 GHZ COLD CATHODE MAGNETRON WITH SPACE HARMONICS – NONLINEAR ANALYTICAL CALCULATION AND 3D-SIMULATION

V.D. Yeryomka¹, M.A. Kopot'², O.P. Kulagin¹

¹ A.Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics of the National Academy of Sciences of Ukraine

² Kharkiv National University of Radio Electronics

The analytical estimation of the optimal parameters fulfilled for pulsed magnetrons with cold secondary-emission cathodes, operating at a frequency of 32 GHz with anode voltage of 8 kV and with magnetic field of about 0.4 Tesla. As shown, the geometry of the magnetron interaction space can ensure an interaction between electrons and the high-frequency field as for the (-1) -th space harmonic of $\pi/2$ -oscillations, so for $(+1)$ -th space harmonic π -oscillations in the drift-orbit resonance mode. Three-dimensional numerical experiments show that both modifications of the tube can provide the required power characteristics. The possibility to use the chosen non-linear analytical model for preliminary calculations of the operating parameters of the non-classical M-type spatial-harmonics tubes is confirmed.

Keywords: Drift-orbital resonance, spatial harmonics magnetrons, three-dimensional numerical model, non-linear analytical model.

Ерёмка Виктор Данилович – родился в Донецкой обл.(1938), окончил Киевский политехнический институт (1961). После окончания КПИ работает в ИРЭ им. А.Я. Усикова НАН Украины. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ХГУ (1974) в области физической электроники. Руководил Лабораторией вакуумной СВЧ электроники и микроэлектроники (1982–1996), Отделом вакуумной электроники (1996–2001). С 2001 года по настоящее время – старший научный сотрудник того же отдела. Соавтор монографий «Электривакуумные приборы диапазона миллиметровых волн» (2007) и «Физические основы и радиоэлектронные средства контроля надводной обстановки и судоходства» (2012). Опубликовал 130 научных статей по направлениям физической электроники и радиофизики. Автор 70 изобретений в области электроники СВЧ. Член редколлегии журнала «Техника и приборы СВЧ», член Украинского физического общества, Senior Member IEEE.



Украина 61085, г. Харьков, ул. Академика Проскуры, 12
Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины

E-mail: v.yeryomka@gmail.com



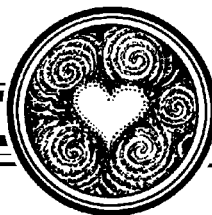
Копоть Михаил Андреевич – родился в Орловской области РФ (1965). Окончил Харьковский институт радиоэлектроники (1987). Работал на различных должностях в Харьковском национальном университете радиоэлектроники, в данный момент – заведующий лабораторией кафедры «Программная инженерия». Область интересов – нелинейная динамика заряженных частиц, электродинамика. Опубликовал более 30 научных статей, более 10 патентов по данной тематике.

Украина 61166, г. Харьков, пр. Ленина, 14
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
E-mail: miko_ua@list.ru



Кулагин Олег Павлович – окончил физико-технический факультет Харьковского политехнического института (ХПИ) в 1994 году. После окончания ХПИ работает в Институте радиофизики и электроники имени А.Я. Усикова Национальной Академии Наук Украины (ИРЭ НАНУ) в отделе вакуумной электроники, в настоящее время занимает должность научного сотрудника. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИРЭ НАНУ (2013) в области физической электроники, область интересов – электровакуумные приборы М-типа, нелинейная динамика электронных потоков в скрещенных полях. Опубликовал более 70 статей, патентов и докладов на международных конференциях по указанным выше направлениям.

Украина 61085, г. Харьков, ул. Академика Проскуры, 12
Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины
E-mail: kulagin2008@mail.ru



МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ В ДИНАМИЧЕСКИХ СЕТЯХ «ТЕСНОГО МИРА»

А. В. Шабунин

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Рассматривается динамическая сеть «тесного мира» из фазовых осцилляторов, в которой наряду с регулярными локальными связями действуют случайные меняющиеся во времени дальнедействующие связи. Исследуется влияние таких связей на мультистабильность. Показывается, что мультистабильность существует лишь при малом числе и интенсивности дальнедействующих связей и лишь в том случае, когда их структура достаточно быстро меняется во времени.

Ключевые слова: Распределенные системы, колебания, синхронизация, мультистабильность, модели «тесного мира».

Введение

В последнее время в нелинейной динамике наблюдается растущий интерес к моделям в виде сетей из простых осцилляторов со сложным характером связей между ними. Примерами подобных систем являются сети «тесного мира» (small world networks), которые представляют собой гибриды регулярных решеток и ансамблей со случайными связями. Одной из первых работ, посвященных моделям «тесного мира», была статья в журнале *Nature* американских ученых Д. Уотта и С. Строгатца [1], в которой они показали, что многие реальные системы в технике, биологии и социологии соответствуют данной модели. Они же предложили и название для таких сетей по аналогии с феноменом «тесного мира», обнаруженного в 1967 году социологом С. Милграммом [2]. Оказалось, что хотя социальные связи имеют локальный характер, локальные кластеры часто оказываются связанными между собой «дальними» связями. Подобное свойство, как было показано в работе [1], характерно и для иных реальных взаимодействующих систем.

Сети «тесного мира» демонстрируют многие явления, характерные для регулярных ансамблей: полную и фазовую синхронизацию колебаний [3–7], образование различных пространственных кластеров [8], стохастический резонанс [9], амплитудную смерть [10], перколяцию [11]. Общий обзор свойств сетей в зависимости от топологии связей можно найти, например, в [12].

Из характерных для сетей явлений особый интерес представляет синхронизация, поскольку она определяет поведение всей сети как единого целого. Для автоколебательных систем под синхронизацией понимают обычно захват фаз колебаний осцилляторов фазой внешней силы (вынужденная синхронизация), либо взаимозахват фаз колебаний в автономной системе (взаимная синхронизация). Следствием этого является подстройка собственных частот колебаний – выработка общего колебательного ритма. Другим, менее очевидным следствием захвата фаз является образование в ансамблях автоколебательных систем различных пространственных структур. Например, в решетках с регулярной структурой связей синхронизация ведет к образованию бегущих автоволн – колебательных режимов, характеризуемых постоянным фазовым сдвигом между колебаниями подсистем [13–15]. В том случае, когда несколько таких колебательных мод сосуществуют в пространстве параметров, говорят о явлении *фазовой мультистабильности* [16, 17].

Фазовая мультистабильность – типичное явление для взаимодействующих осцилляторов. Оно наблюдается для слабосвязанных систем как с простой, так и со сложной динамикой. В первом случае число сосуществующих режимов обычно невелико. В системах со сложным поведением может наблюдаться неограниченный рост числа сосуществующих мод, то есть – *развитая фазовая мультистабильность* [18].

Поскольку системы тесного мира сочетают в себе свойства как регулярных, так и нерегулярных сетей, они также должны демонстрировать явление фазовой мультистабильности. Будет ли оно наблюдаться только при слабой нерегулярности связей, когда структура сети близка к структуре решетки, или оно «выживет» и при сильной неоднородности? Каковы типичные сценарии эволюции фазовой мультистабильности с ростом случайности в структуре связей? Может ли рост нерегулярности вести к каким-либо формам кластеризации в пространственной динамике? Каким образом мультистабильность в таких системах зависит от свойств одиночного осциллятора сети? Будет ли мультистабильность зависеть от скорости «переключения» связей в случае динамической сети? Все перечисленные вопросы представляются интересными и важными для приложений.

В данном исследовании рассматривается фазовая мультистабильность в ансамбле осцилляторов с наиболее простой динамикой – фазовых осцилляторах. Выбор модели обусловлен стремлением «отсечь» все эффекты, связанные с особенностями динамики подсистем и оставить лишь те, что обусловлены топологией и динамикой связей. Структура связей представляет собой гибрид кольца и случайной сети. В отличие от работы [19], где использовалось периодическое переключение связей, а их общее число было фиксированным, в данной модели связи между произвольными узлами кольца спонтанно возникают и исчезают во времени, независимо друг от друга, а их общее число меняется случайным образом. Такая динамика связей представляется более реалистичной. Методом компьютерного эксперимента исследуется к каким эффектам приводит постепенное увеличение силы дальних связей при фиксированных локальных связях. Динамика переключений связей моделируется при помощи клеточного автомата.

1. Сеть «тесного мира» из фазовых осцилляторов

Пусть в общем случае автоколебательная система задана уравнением $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ – вектор динамических переменных, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – вектор-функция,

задающая значения фазовой скорости. Тогда ансамбль из N таких подсистем с диффузионными связями между ними описывается следующей системой уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^N C_{ij} (\mathbf{h}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь функция $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ определяет характер связей, а матрица \hat{C} задает их топологию и интенсивность. В случае сети «тесного мира» структура связей представляет собой гибридную регулярную решетку и сети со случайными связями. Поэтому матрица \hat{C} принимает вид $\gamma \hat{L} + \varepsilon \hat{G}$, где γ и матрица смежности \hat{L} задают интенсивность и структуру для локальных, а ε и \hat{G} – для глобальных (дальнодействующих) связей, соответственно. Выберем в качестве решетки однородное кольцо с взаимными связями, характеризуемое матрицей вида

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Помимо регулярных связей, определяемых матрицей \hat{L} , в сети присутствуют случайные связи, структура которых меняется во времени: связь между двумя произвольными узлами спонтанно возникает и исчезает, независимо от состояния остальных элементов сети. Таким образом матричные элементы G_{ij} случайным образом принимают значения 0 или 1, то есть являются случайными телеграфными сигналами.

Рассмотрим конкретную реализацию системы (1) на базе фазовых осцилляторов $\dot{\varphi} = \omega$ с функцией связи $h(\varphi) = \sin \varphi$

$$\dot{\varphi}_i = \omega + \gamma [\sin(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + \sin(\varphi_{i-1} - \varphi_i)] + \varepsilon \sum_{j=1}^N G_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i). \quad (3)$$

Система (3) при $\varepsilon = 0$ представляет собой хорошо известную в физике модель Курамото [20]. Перейдя в движущуюся систему координат посредством замены переменных $\theta_i = \varphi_i - \omega t$, получим уравнения для модуляции фаз

$$\dot{\theta}_i = \gamma [\sin(\theta_{i+1} - \theta_i) + \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)] + \varepsilon \sum_{j=1}^N G_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (4)$$

Заметим, что один из коэффициентов связи (γ или ε) можно вынести в качестве общего множителя, который таким образом не влияет на характер динамики, а определяют только ее временной масштаб. Соответственно эволюция системы определяется не самими значениями коэффициентов связи, а лишь их отношением ε/γ . Поэтому в дальнейшем, не снижая общности, будем полагать коэффициент γ равным единице.

2. Фазовая мультистабильность в регулярной сети

При $\varepsilon = 0$ уравнение (4) имеет множество состояний равновесия, подчиняющихся одному из двух условий: $\theta_{i+1} - \theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, или $\theta_{i+1} - \theta_i = \pi - [\theta_i - \theta_{i-1}]$. Обозначив $\theta_2 - \theta_1$ как $\Delta\theta$, получим, что при равновесии разность фаз между любыми соседними осцилляторами составляет либо $\Delta\theta$ (состояние «A»), либо $\pi - \Delta\theta$ (состояние «B»). Таким образом, любое состояние равновесия системы (4) может быть представлено цепочкой из n элементов A и m элементов B , так что $n + m = N$. Учитывая, что суммарный набег фазы вдоль кольца должен быть кратен 2π , получим $n\Delta\theta + m(\pi - \Delta\theta) = 2\pi K$. Значения целочисленных индексов $K = 0, \pm 1, \dots, \pm N/2$ и $m = 0, 1, \dots, N$ полностью характеризуют установившийся режим. Обозначим его как $C^{K,m}$. Если $m = 0$, то такой режим будет пространственно-однородным, в противном случае – неоднородным.

Как показывают исследования, неоднородные режимы при положительной связи всегда неустойчивы, поэтому мы будем рассматривать только те моды, для которых $m = 0$ (в дальнейшем индекс m будем опускать в обозначениях). Собственные значения матрицы линеаризации для однородных режимов могут быть найдены аналитически (см., например, [15, 21])

$$\lambda_n^{(K)} = -\gamma \cos(\Delta\theta^{(K)}) \left[1 - \cos \frac{2\pi n}{N} \right], \quad (5)$$

$$n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где $\Delta\theta^{(K)}$ подчиняется соотношению

$$\Delta\theta^{(K)} = \frac{2\pi K}{N}. \quad (6)$$

Нулевое собственное значение $\lambda_0^{(K)}$ определяет нейтральную устойчивость решения C^K по отношению к выбору начальной фазы. При положительной связи все остальные собственные значения являются либо одновременно отрицательными при $\Delta\theta^{(K)} \in [-\pi/2 : \pi/2]$, либо одновременно положительными при $\Delta\theta^{(K)} \notin [-\pi/2 : \pi/2]$. Отсюда следует, что для кольца из 30 осцилляторов устойчивыми являются моды с $K = 0, \pm 1, \dots, \pm 7$. Поскольку волны с положительными и отрицательными индексами отличаются только направлением распространения, в дальнейшем будем рассматривать только режимы с положительными K .

Как следует из равенства (5), все моды с $K \leq 7$ сосуществуют в системе (4) в области значений параметра $\gamma > 0$. Однако не все они в одинаковой степени устойчивы, и соответственно реализация их не является равновероятной. Если задавать начальные условия случайным образом так, чтобы все θ_i представляли собой случайные величины, равномерно распределенные в интервале $[-\pi : \pi]$, то вероятности выхода на тот или иной режим будут существенно разными: наиболее вероятными окажутся режимы с малыми K (длинноволновые), а моды с $K > 3$ останутся практически ненаблюдаемыми. На рис. 1 построена соответствующая зависимость вероятности реализации режимов с заданным индексом K для 10^5 вариантов выбора случайных начальных условий. Вероятность $P(K)$ для режимов с $K \geq 4$ практически равна нулю. Тем не менее, все перечисленные моды, включая коротковолновые,

можно реализовать, если задавать начальные условия, соответствующие равенству (6).

Таким образом, в отсутствие случайных связей система (4) демонстрирует фазовую мультистабильность при $\gamma > 0$. Вероятно, что эта мультистабильность может сохраниться в сети «тесного мира» при $\varepsilon \rightarrow 0$ и/или при малом числе случайных связей. Рассмотрим, как постепенное увеличение роли нерегулярной составляющей сети влияет на ее пространственную динамику.

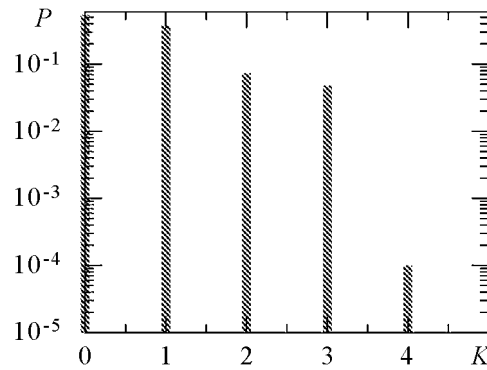


Рис. 1. Вероятности выхода на режимы с разными значениями индекса K при случайном задании начальных условий

3. Моделирование спонтанно возникающих связей при помощи клеточного автомата

Чтобы смоделировать процесс спонтанного возникновения дополнительных связей воспользуемся методом *клеточного автомата*. Рассмотрим клеточный автомат в виде квадратной решетки G_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N$, элементы которой принимают два значения (находятся в двух состояниях): 0 и 1. Определим для клеток автомата два события: «возникновение» и «исчезновение». В первом случае элемент $G_{ij} = 0$ трансформируется с вероятностью P_{on} в элемент $G_{ij} = 1$. Во втором случае элемент $G_{ij} = 1$ трансформируется с вероятностью P_{off} в элемент $G_{ij} = 0$. Схематически оба процесса можно представить следующим образом:

$$0 \xrightarrow{P_{\text{on}}} 1, \quad (7)$$

$$1 \xrightarrow{P_{\text{off}}} 0. \quad (8)$$

Рассмотрим эволюцию клеточного автомата во времени с некоторым фиксированным шагом τ : $G_{ij}[n\tau] \rightarrow G_{ij}[(n+1)\tau]$. Заметим, что при малом τ вероятности переходов будут пропорциональны величине шага $P_{\text{on(off)}} = \tau p_{\text{on(off)}}$, где $p_{\text{on(off)}}$ – интенсивности соответствующих случайных процессов. Полученная в результате работы автомата матричная функция дискретного аргумента $\hat{G}(n)$ задает выборку временной эволюции структуры глобальных связей системы (1) с шагом τ . Выберем в качестве начальных условий $\hat{G} = 0$ и рассмотрим работу клеточного автомата для решетки с $N = 30$. Пусть $U = \sum G_{ij}$ – число «единиц», а $S = N^2 - U$ – число «нулей» матрицы \hat{G} . Введем параметр $u = U/N$, характеризующий число связей, приходящихся в среднем на один элемент ансамбля. Его можно назвать *средней концентрацией* связей. Рассмотрим, как значение концентрации меняется в ходе функционирования клеточного автомата. На рис. 2, а построены временные реализации $u(t)$ для двух разных пар значений интенсивностей: $p_{\text{on}} = 0.05$, $p_{\text{off}} = 1.5$ и $p_{\text{on}} = 0.01$, $p_{\text{off}} = 0.15$. Видно, что в обоих случаях после непродолжительного переходного процесса значение u выходит на некоторый стационарный уровень $\bar{u}(t)$, около которого затем флуктуирует. При этом на решетке возникает случайное распределение единиц и нулей, меняющееся во времени. Примеры таких распределений

в моменты времени t_1 (отмечены кружками) и $t_2 = t_1 + 50\tau$ (отмечены крестиками) показаны на рис. 2, б.

Установившееся значение \bar{u} можно оценить, воспользовавшись методом *среднего поля*. Для этого запишем среднее изменение числа «единиц» на одном шаге алгоритма

$$\Delta U = SP_{\text{on}} + UP_{\text{off}}. \quad (9)$$

Поделив уравнение (9) на N и учтя соотношение между S и U , перепишем его для величины концентрации связей u

$$\Delta u = (N - u)p_{\text{on}}\tau + up_{\text{off}}\tau. \quad (10)$$

Если шаг по времени мал («малость» интервала τ означает малую величину приращения Δu), отображение (10) будет эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\dot{u} = p_{\text{on}}(N - u) - p_{\text{off}}u. \quad (11)$$

Уравнение (11) имеет единственное состояние равновесия с координатой

$$u_0 = N \frac{\xi}{1 + \xi}, \quad (12)$$

где $\xi = p_{\text{on}}/p_{\text{off}}$ – отношение вероятностей. Значение u_0 дает оценку среднего числа глобальных связей для одного осциллятора $u_0 \simeq \bar{u}$. Равенство (12) показывает, что число дальних связей системы определяется не самими значениями вероятностей событий, а лишь их отношением. Одновременно меняя в одной и той же пропорции p_{on} и p_{off} , получим одно и то же среднее число связей. Однако сами значения вероятностей тоже приходится принимать во внимание – они влияют на частоту переключений связей.

Пусть f_s – среднее число переключений связей одного осциллятора, происходящих за единицу времени. Чтобы определить f_s , рассчитаем вероятность P_s одного переключения за шаг τ для элемента решетки G_{ij} . Она может быть определена

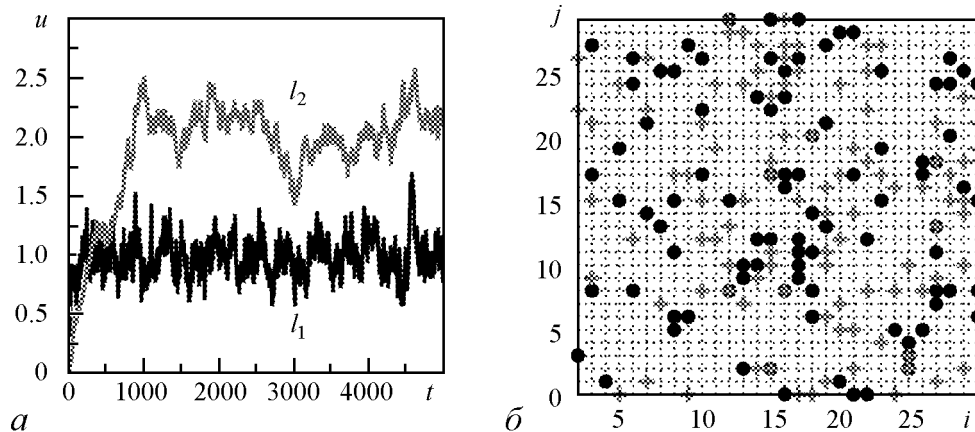


Рис. 2. а – Зависимость среднего числа глобальных связей одного осциллятора от времени при $p_{\text{on}} = 0.05$, $p_{\text{off}} = 1.5$ (кривая l_1) и $p_{\text{on}} = 0.01$, $p_{\text{off}} = 0.15$ (кривая l_2); б – распределение «единиц» на решетке в моменты времени, отличающиеся на интервал $\Delta t = 1$. Шаг работы автомата $\tau = 0.02$

как сумма вероятностей двух независимых событий – «включения» новой связи или «выключения» существующей

$$P_s = P_{\text{on}} \frac{S}{N^2} + P_{\text{off}} \frac{U}{N^2}. \quad (13)$$

Здесь S/N^2 и U/N^2 – вероятности того, что выбранный элемент G_{ij} находится в состоянии «0» или «1», соответственно. Так как одному осциллятору сопоставляются N элементов матрицы \hat{G} (строка), то вероятность переключений какой-либо из его связей составит NP_s . Отсюда следует, что среднее число переключений связей для одного осциллятора составит NP_s/τ . Подставляя значение P_s из (13) и учитывая (12), получим

$$f_s = 2Np_{\text{off}} \frac{\xi}{1 + \xi}. \quad (14)$$

Средняя концентрация связей \bar{u} и их средняя частота переключений f_s – характеристики сети, которые определяют ее свойства. Они более наглядны, чем сами вероятности переключений P_{on} и P_{off} , и поэтому будут использоваться для управления состоянием связей. Проведенные исследования показывают, что при малых P_{on} и P_{off} величина u_0 достаточно точно оценивает среднее число единиц в матрице \hat{G} . Так, на рис. 3, *a* построены зависимости $\bar{u}(t)$ от ξ , полученные в ходе работы клеточного автомата при разных значениях P_{off} . Для сравнения штриховой линией изображена соответствующая теоретическая зависимость, подсчитанная по формуле (12). Из рисунка видно, что чем меньше значение вероятности, тем лучше экспериментальное значение совпадает с теоретическим. Аналогичный характер имеют зависимости средней частоты переключений f_s от ξ , построенные на рис. 3, *б* при тех же значениях P_{off} . Для $P_{\text{off}} = 0.04$ и $P_{\text{off}} = 0.1$ соответствие с теоретической оценкой хорошее, а для $P_{\text{off}} = 0.4$ экспериментальное значение уже значительно отстает от оценочного.

Как следует из рис. 3, при небольшом числе связей ($u_0 \ll 1$) для хорошего соответствия между u_0 и $\bar{u}(t)$ достаточно выбрать частоту переключений $f_s < 10$. В этом диапазоне значений u_0 и f_s можно использовать в качестве управляющих па-

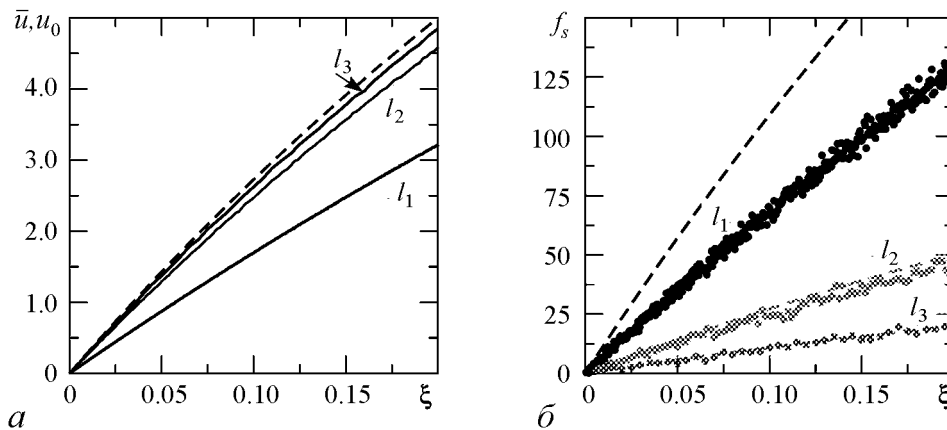


Рис. 3. *a* – зависимость средней концентрации связей \bar{u} от ξ при $P_{\text{off}} = 0.4$ (линия l_1), $P_{\text{off}} = 0.1$ (линия l_2) и $P_{\text{off}} = 0.04$ (линия l_3); *б* – зависимость средней скорости переключений связей одного осциллятора f_s от ξ при тех же значениях P_{off} . Теоретические зависимости отображаются штриховыми линиями

раметров. При этом величины вероятностей переходов легко могут быть выражены через них по формулам

$$P_{\text{on}} = 0.5 \frac{f_s}{N - u_0} \tau, \quad P_{\text{off}} = 0.5 \frac{f_s}{u_0} \tau. \quad (15)$$

4. Динамика ансамбля при «включении» далекодействующих связей

Рассмотрим отличие сети «тесного мира» от регулярной сети при постепенном росте числа случайных связей в ансамбле (4). Для этого зафиксируем интенсивность и частоту связей в значениях $\varepsilon = 1$ и $f_s = 3$ и начнем постепенно увеличивать параметр u_0 . В качестве исходного режима выберем сначала моду с наибольшей длиной волны – C^1 .

При $u_0 = 0$ режим C^1 характеризуется постоянным значением разности фаз вдоль кольца: $\Delta\theta^{(1)} = 0.21$. Включение случайных связей нарушает его пространственную однородность. Разности фаз начинают флуктуировать во времени относительно среднего значения: $\Delta\theta_i(t) = \Delta\theta^{(1)} + \eta_i(t)$, где $\eta_i(t)$ – случайный процесс с нулевым средним. Мгновенный снимок таких флуктуаций при $u_0 = 0.07$ представлен на рис. 4, *а* (линия l_1), а соответствующая функция плотности вероятности $\Delta\theta$ – на рис. 4, *б*. При малом числе связей последняя практически повторяет по форме гауссову кривую, с максимумом в точке $\Delta\theta = 0.21$, значение которого отмечено на рисунке штриховой линией. Постепенное увеличение концентрации связей вплоть до $u_0 \simeq 0.1$ не ведет к качественному изменению в поведении системы, а лишь увеличивает интенсивность флуктуаций $\eta_i(t)$. Количественно этот процесс удобно характеризовать при помощи величины среднеквадратичного отклонения (СКО) $\sigma = \sqrt{\langle \Delta\theta^2 \rangle - \langle \Delta\theta \rangle^2}$, где усреднение проводится как по ансамблю осцилляторов, так и по времени. График $\sigma^{(1)}(u_0)$ представлен на рис. 5. Видно, что в широком диапазоне параметра u_0 СКО линейно растет с ростом числа случайных связей. Качественное изменение в динамике начинается при превышении значения $u_0 \simeq 0.1$, что проявляется в изменении зависимости $\sigma^{(1)}(u_0)$ – она становится существенно нелинейной. При этом в самой сети происходит процесс кластеризации. Он выражается в том, что пространственное распределение флуктуаций фаз становится сильно неоднородным. На некотором сегменте кольца разности фаз между соседними ос-

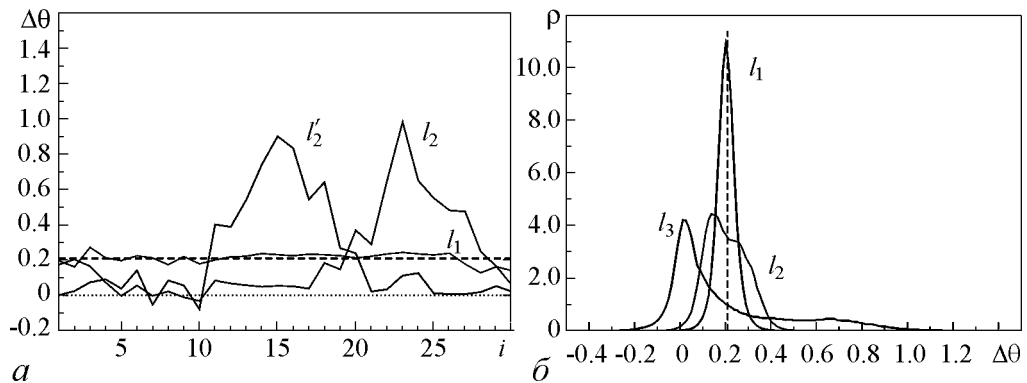


Рис. 4. Эволюция моды C^1 : *а* – распределение разности фаз вдоль кольца для $u_0 = 0.07$ (линия l_1) и $u_0 = 0.23$ (линии l_2 и l'_2); *б* – функция плотности распределения разности фаз $\rho(\Delta\theta)$ для $u_0 = 0.07$ (линия L_1), $u_0 = 0.12$ (линия l_2) и $u_0 = 0.23$ (линия l_3)

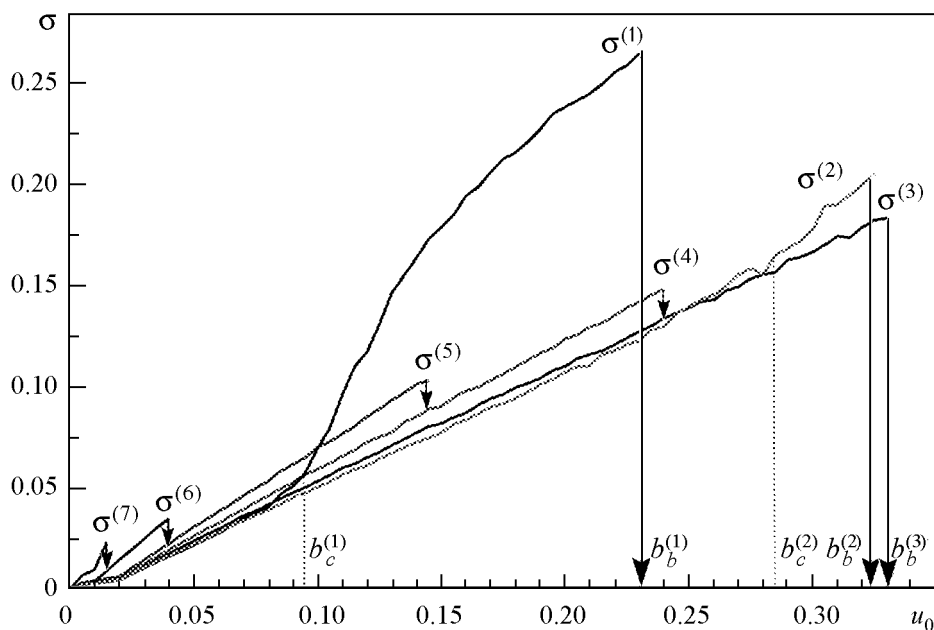


Рис. 5. Зависимость среднеквадратичного отклонения разности фаз от u_0 для режимов с разными целочисленными индексами K

цилляторами начинают уменьшаться, формируя в ансамбле кластер осцилляторов с почти синфазным поведением (линия l_2 на рис. 4, а). Чтобы компенсировать это уменьшение разности фаз в другой части кольца формируется несинфазный кластер, в котором разности фаз значительно выше исходного значения $\Delta\theta^{(1)}$. В итоге, несмотря на то, что среднее значение $\Delta\theta$ в ансамбле сохраняется равным $\Delta\theta^{(1)}$, ансамбль разбивается на два сектора с существенно разным поведением.

Образовавшаяся двухкластерная структура является подвижной – она случайным образом «блуждает» вдоль кольца. Для иллюстрации этого процесса на том же рисунке приведено распределение разностей фаз в момент времени, отстоящий от предыдущего на интервал $\Delta t = 4000$ (линия l'_2). Видно, что несинфазный кластер меняет свое положение в ансамбле осцилляторов, слегка изменяя форму, но в целом сохраняя свою ширину постоянной. Изменение в распределении фаз отражается и на зависимости $\rho(\Delta\theta)$ (см. рис. 4, б). Хорошо видно, что при $u_0 = 0.12$ плотность вероятности распределения фаз (линия l_2) перестает подчиняться нормальному закону: она становится несимметричной, максимум плотности вероятности смещается в сторону нуля и одновременно формируется длинный «хвост» в сторону больших значений $\Delta\theta$. При увеличении числа связей этот характер зависимости $\rho(\Delta\theta)$ становится еще более выраженным (линия l_3).

Несмотря на то, что значения $\Delta\theta_i$ случайным образом меняются во времени, полный набег фазы вдоль кольца сохраняется равным 2π . Таким образом, в данной области параметров динамические связи искажают режим C^1 , но не разрушают его окончательно. При отключении этих связей система немедленно возвращается к исходному однородному состоянию.

Рассмотренная динамика наблюдается вплоть до $u_0 \simeq 0.23$. При превышении этого значения мода C^1 теряет устойчивость, и система необратимо переходит на синфазный режим C^0 , на который диффузионные связи не оказывают влияния. На рис. 5 этот переход показан стрелкой. Таким образом, эволюция моды с наибольшей

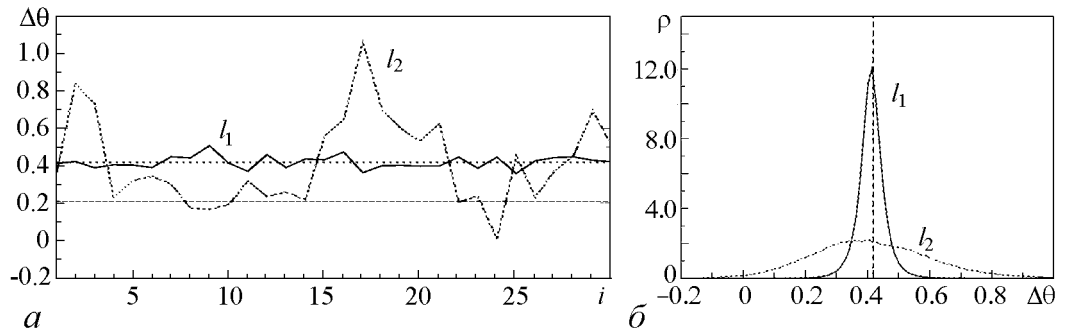


Рис. 6. Эволюция моды C^2 : a – распределение разности фаз вдоль кольца для $u_0 = 0.1$ (линия l_1) и $u_0 = 0.33$ (линия l_2); b – функция плотности распределения разности фаз $\rho(\Delta\theta)$ для тех же значений u_0

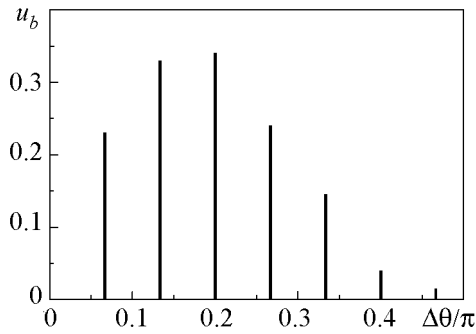


Рис. 7. Зависимость критического значения параметра $u_b^{(K)}$ от $\Delta\theta^{(K)}$

длиной волны проходит через два критических значения параметра u_0 : $u_c^{(1)} \simeq 0.1$ – начало кластеризации и $u_b^{(1)} \simeq 0.23$ – потеря устойчивости моды C^1 .

Рассмотрим теперь следующий за C^1 режим – моду C^2 . Исследования показывают, что ее эволюция с увеличением u_0 будет качественно схожей с эволюцией C^1 ; однако значения критических параметров u_c и u_b иные: $u_c^{(2)} \simeq 0.29$ и $u_b^{(2)} \simeq 0.33$. Таким образом

начало кластеризации существенным образом сдвигается в сторону больших значений u_0 – почти к самой границе существования моды. Соответственно процесс кластеризации существует в узком диапазоне параметра и оказывается менее выражен. На рис. 6, a построены распределения разностей фаз вдоль кольца вне зоны кластеризации (линия l_1) и внутри нее (линия l_2). В первом случае все значения $\Delta\theta_i$ флуктуируют вокруг $\Delta\theta^{(2)}$, а во втором – формируются кластеры, в которых значения $\Delta\theta_i$ «спускаются» к $\Delta\theta^{(1)}$, и кластеры, в которых разность фаз увеличивается. При достижении u_0 критического значения $u_b^{(2)} \simeq 0.33$ система необратимо переходит к более длинноволновому состоянию, каковым для данного значения параметра u_0 является режим C^0 (поскольку, как следует из рис. 5, мода C^1 к этому моменту уже не существует).

Исследование более коротковолновых режимов: C^3, \dots, C^7 – показывает, что процесс кластеризации для них не наблюдается вовсе – каждый из этих режимов демонстрирует линейный рост интенсивности флуктуаций разности фаз вплоть до своего разрушения при достижении критического значения $u_b^{(K)}$. При этом происходит необратимый переход на ближайший из более длинноволновых режимов, который существует при данном u_0 : $C^3 \rightarrow C^0$ (режимы C^1 и C^2 к этому моменту уже потеряли устойчивость), $C^4 \rightarrow C^3$, $C^5 \rightarrow C^4$, $C^6 \rightarrow C^5$ и $C^7 \rightarrow C^6$ (см. рис. 5).

Таким образом, под действием случайных связей происходит сначала «возмущение» колебательных режимов, затем для некоторых из них – разделение на кластеры с разным фазовым поведением и, в конце концов, – потеря устойчивости и переход на более длинноволновый режим. Зависимость критических значений параметра u_0 для каждой из рассмотренных мод построена на рис. 7.

5. Влияние выбора управляющих параметров на динамику системы

Описанная выше эволюция режимов построена для фиксированных значений параметров ε и f_s . Попробуем выяснить, как изменится картина явлений при другом выборе этих величин. Рассмотрим сначала зависимость от величины интенсивностей случайных связей ε . Как показывают исследования, полученная ранее для $\varepsilon = 1$ эволюция качественно воспроизводится и для других значений интенсивности связей. Чтобы определить количественную зависимость от этого параметра построим график $\sigma(u_0)$ для разных значений ε и сравним результат с уже полученной ранее зависимостью для $\varepsilon = 1$. Результаты расчетов для моды C^1 представлены на рис. 8. Кривая l_1 отображает график $\sigma^{(1)}(u_0)$ для $\varepsilon = 1$, а кривые l_2 и l_3 – для $\varepsilon = 0.5$ и $\varepsilon = 2.0$, соответственно. Из рисунка видно, что форма зависимостей всех трех графиков подобна друг другу и они отличаются лишь масштабом по оси u_0 . Например, кривая l_2 при сжатии по оси абсцисс в два раза ($u_0 \rightarrow u_0/2$) практически совмещается с кривой l_1 . Для наглядности такое перемасштабирование произведено на том же рисунке (линия l'_2). Аналогичный результат продемонстрирован для линии l_3 : растяжение масштаба вдвое ($u_0 \rightarrow 2u_0$) совмещает полученную линию l'_3 с линией l_1 .

Таким образом, динамика системы в равной степени зависит как от средней концентрации связей \bar{u} , так и от их интенсивностей ε . Увеличение средней концентрации числа связей ведет к тем же последствиям, что и аналогичное увеличение их интенсивностей. Чтобы учесть их совместное влияние введем в качестве эффективного параметра нелокальных связей величину $\mu = \varepsilon \bar{u}$. Наши исследования показывают, что именно эта величина является определяющей для динамики ансамбля (4).

Рассмотрим теперь, как динамика системы зависит от средней скорости переключения связей f_s . Верхней границей для этой величины является частота переключений клеточного автомата $1/\tau$, которая в нашем случае равна 50. Нижняя граница ($f_s = 0$) соответствует случаю «замороженных» связей. Построим зависимость СКО разности фаз от f_s при фиксированных значениях параметра μ . На рис. 9 приведены

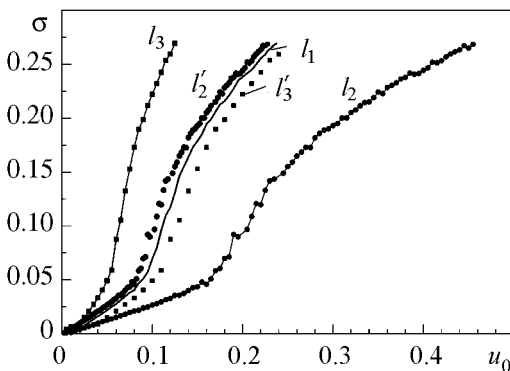


Рис. 8. Зависимость σ от u_0 при разных значениях ε : $\varepsilon = 1$ (линия l_1), $\varepsilon = 0.5$ (линия l_2) и $\varepsilon = 2$ (линия l_3). Линия l'_2 – это l_2 , построенная при масштабировании $u_0 \rightarrow 0.5u_0$; линия l'_3 – это l_3 , построенная при масштабировании $u_0 \rightarrow 2u_0$

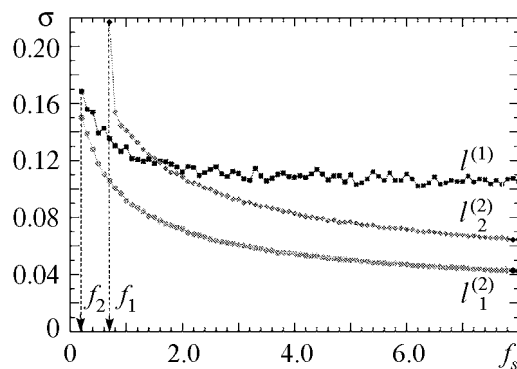


Рис. 9. Зависимость среднеквадратичного отклонения разностей фаз σ от скорости переключения связей f_s

соответствующие зависимости для моды C^1 при $\mu = 0.1$ (линия $l^{(1)}$) и моды C^2 при $\mu = 0.1$ (линия $l_1^{(2)}$) и $\mu = 0.15$ (линия $l_2^{(2)}$). Видно, что неоднородность в распределении фаз увеличивается при уменьшении скорости переключения связей. При больших f_s эта зависимость очень пологая, но при стремлении частоты переключений к нулю, дисперсия разности фаз резко растет и при достижении f_s некоторого критического значения, зависящего от μ , наблюдается необратимый переход к синфазным колебаниям. При $\mu = 0.1$ критическое значение частоты переключений составляет $f_s \simeq 0.2$ (отмечено на рисунке как f_2), а при $\mu = 0.15$ – $f_s \simeq 0.6$ (отмечено как f_1). Таким образом, при «замороженных» связях мультистабильность в системе отсутствует. В рассмотренной области значений параметров при каждом значении эффективного параметра связей существует нижний порог частоты переключений дальних связей, после которого «включается» мультистабильность.

Отсутствие мультистабильности в случае слишком медленных связей можно объяснить с точки зрения явления синхронизации колебаний. Как уже отмечалось выше, в ансамбле с регулярными связями «выживают» только однородные типы колебаний, при которых разности фаз у любого узла сети с соседями являются одинаковыми. Появление дополнительных связей между произвольными узлами ансамбля приводит к тому, что условие однородности становится возможным только для синфазных колебаний. Любые другие моды становятся неустойчивыми и начинают медленно эволюционировать в сторону моды C^0 . При этом, если время переходного процесса оказывается меньшим, чем интервал стационарности связей, этот переход завершается установлением синфазного режима. Последний является устойчивым к любым изменениям в структуре связей. Если же время переходного процесса оказывается меньшим, чем $1/f_s$, то он не успевает завершиться до того, как структура связей успеет смениться на новую. При этом реализуется режим перманентных блужданий θ_i вокруг их средних значений.

Выводы

Фазовая мультистабильность, характерная для кольца взаимосвязанных автоколебательных систем, сохраняется и в модели «тесного мира» в том случае, если структура случайных связей меняется со временем. Существует нижний порог частоты переключений связей за которым из всех мод остается только мода синфазных колебаний.

При росте числа случайных связей или их интенсивностей сосуществующие режимы (кроме синфазного) проходят через ряд стадий: флуктуация разностей фаз относительно среднего уровня; формирование пространственных кластеров с разными характерными значениями $\Delta\theta$ (этот этап может отсутствовать у некоторых мод); необратимый переход на синфазный режим. Таким образом, мультистабильность сохраняется лишь при небольшом числе и небольшой интенсивности действующих связей. При большом числе таких связей в системе наблюдаются только синфазные колебания.

У каждой из мод, за исключением синфазной, существует критический параметр концентрации случайных связей, при переходе через который данный вид колебаний теряет устойчивость. При этом траектория переходит на ближайшую бо-

лее длинноволновую моду из тех, что остаются устойчивыми при данных значениях параметров.

Динамика системы в равной степени зависит как от средней концентрации связей \bar{u} , так и от их интенсивностей ε . Увеличение средней концентрации числа связей ведет к тем же последствиям, что и аналогичное увеличение их интенсивностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-02-01298-а).

Библиографический список

1. *Watt D.J., Strogatz S.H.* Collective dynamics of «small-world» networks // *Nature*. 1998. Vol. 393. P. 440.
2. *Milgram S.* The small world problem // *Psychology Today*. 1967. Vol. 2. P. 60.
3. *Belykh I.V., Hasler M., Belykh V.N.* Blinking model and synchronization in small-world networks with a time-varying coupling // *Physica D*. 2004. Vol. 195, № 1–2. P. 188.
4. *Li C., Chen G.* Phase synchronization in small-world networks of chaotic oscillators // *Physica A*. 2004. Vol. 341, № 1–4. P. 73.
5. *Percha B., Dzakpasu R., Zochowski M.* Parent Transition from local to global phase synchrony in small world neural network and its possible implications for epilepsy // *Physical Review E*. 2005. Vol. 72, № 3. P. 1.
6. *Wang Q., Duan Z., Perc M., Chen G.* Synchronization transitions on small-world neuronal networks: Effects of information transmission delay and rewiring probability // *European Physical Letters*. 2008. Vol. 83, № 5. P. 50008.
7. *Yu H., Wang J., Deng B., Wei X., Wong Y.K., Chan W.L., Tsang K.M., Yu Z.* Chaotic phase synchronization in small-world networks of bursting neurons // *Chaos*. 2011. Vol. 21, № 1. P. 013127.
8. *Rothkegel A., Lehnertz K.* Multistability, local pattern formation, and global collective firing in a small-world network of nonleaky integrate-and-fire neurons // *Chaos*. 2009. Vol. 19, № 1. P. 015109.
9. *Gao Z., Hu B., Hu G.* Stochastic resonance of small-world networks // *Physical Review E*. 2001. Vol. 65. P. 016209.
10. *Hou Z., Xin H.* Oscillator death on small-world networks // *Physical Review E*. 2003. Vol. 68. P. 551031.
11. *Moukarzel C.F.* Percolation in networks with long-range connections // *Physica A*. 2006. Vol. 372, № 2. P. 340.
12. *Евин И.А.* Введение в теорию сложных сетей // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2010. Т. 2, № 2. С. 121.
13. *Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М.* О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // *Известия вузов. Радиофизика*. 1984. Т. 27, № 11. С. 1388.
14. *Ermentrout G.B.* The behaviour of rings of coupled oscillators // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 23, № 1. P. 55.
15. *Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2005. Т. 13, № 4. С. 37.

16. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния в диссипативно связанных Фейгенбаумовских системах // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, № 3. С. 60.
17. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пудовочкин О.Б., Селезнев Е.П. Фазовая мультистабильность и установление колебаний в нелинейных системах с удвоением периода // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 2. С. 2.
18. Шабунин А.В., Астахов В.В. Фазовая мультистабильность в ансамбле генераторов с удвоениями периода // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 6. С. 99.
19. Шабунин А.В. Действие случайных дальних связей на систему с фазовой мультистабильностью // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21, № 2. С. 20.
20. Kuramoto Y. Chemical oscillators, waves and turbulence. New-York: Springer, 1984.
21. Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И. Синхронизмы в системе циклически слабосвязанных осцилляторов // Динамические системы: Межвузовский сборник научных трудов. Изд. Нижегородского университета, 1991. С. 84.

Поступила в редакцию 11.03.2014

После доработки 12.05.2014

MULTISTABILITY IN DYNAMICAL SMALL WORLD NETWORKS

A. V. Shabunin

Saratov State University

We explore phase multistability which takes place in an ensemble of periodic oscillators under the action of long-distance couplings, which appear randomly between the arbitrary cells. The system under study is Kuromoto's model with additional dynamical interconnections between phase oscillators. The sequence of bifurcations, which accompany increasing of the strength of the global coupling is determined. Regions of multistability existence are defined.

Keywords: Distributed systems, oscillations, synchronization, multistability, «small world» models колебания.

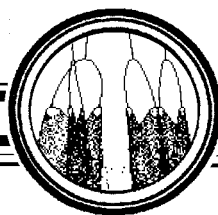


Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доктор физико-математических наук (2008), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 75 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: shabuninav@info.sgu.ru



РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ДВУХКОЛЬЦЕВОЙ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Часть 2

Особенности нелинейной динамики частотно-фазовой системы с одинаковыми фильтрами третьего порядка в цепях управления

В. П. Пономаренко

Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского

Приведены результаты исследования режимов динамического поведения в автогенераторной системе с частотно-фазовым управлением при использовании инверсно включенного многочастотного дискриминатора в цепи частотного управления в случае одинаковых фильтров третьего порядка в цепях фазового и частотного управления. Исследование проведено на основе математической модели системы с двумя степенями свободы с применением качественно-численных методов нелинейной динамики. Показано, что в такой системе возможно существование как синхронного режима, так и множества несинхронных периодических и хаотических режимов различной сложности. Установлено расположение областей параметров с различными динамическими режимами системы, исследованы бифуркационные переходы, приводящие к генерации хаотических колебаний.

Ключевые слова: Системы с частотно-фазовым управлением, динамические состояния, устойчивость, бифуркации, аттракторы, фазовые портреты, режим синхронизации, несинхронные режимы, динамический хаос.

Введение

Данная работа продолжает исследование, нелинейной динамики двухкольцевой системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП), объединяющей системы фазовой и частотной автоподстройки частоты перестраиваемого (управляемого) генератора, представленное в [1]. Основное назначение системы ЧФАП состоит в обеспечении подстройки частоты колебаний управляемого генератора к частоте колебаний эталонного генератора. Исследуемая в данной работе частотно-фазовая система отличается от традиционной системы ЧФАП, рассматривавшейся в [2–11], тем, что в цепи частотного управления применен инверсно включенный многочастотный дискриминатор, имеющий синусоидальную характеристику [12–14]. Инверсное

включение дискриминатора соответствует положительной (в отличие от традиционной отрицательной) обратной связи по цепи частотного управления, благодаря которой в системе создаются условия для более активного взаимодействия автомодуляционных колебаний, что делает систему богаче в отношении сложной динамики. В [1] приведены результаты анализа режимов динамического поведения частотно-фазовой системы с инверсно включенным многочастотным дискриминатором в случае применения одинаковых фильтров первого порядка в фазовой и частотной цепях управления. Анализ проведен на основе математической модели системы ЧФАП – динамической системы второго порядка, определенной на цилиндрической фазовой поверхности. Основным результатом, полученным в [1], состоит в выявлении множества вращательных предельных циклов на фазовой поверхности, соответствующих периодическим асинхронным режимам (режимам с вращением фазы) частотно-фазовой системы, в обнаружении возможности потери устойчивости синхронного режима и в установлении расположения на плоскости «начальная частотная расстройка – коэффициент усиления цепи частотного управления» областей параметров с различными динамическими режимами системы.

В данной работе исследуются особенности нелинейной динамики системы ЧФАП с инверсно включенным многочастотным дискриминатором в цепи частотного управления и одинаковыми фильтрами третьего порядка в фазовой и частотной цепях управления. Как упоминалось в [1], применение фильтров высокого порядка в цепях управления системы является одним из эффективных путей увеличения набора возможных автомодуляционных режимов управляемого генератора и воздействия на области существования и характеристики генерируемых колебаний. Усложнение фильтров ведет к усложнению динамики системы ЧФАП – наряду с регулярными режимами, выявленными в [1], становятся возможными квазипериодические и хаотические несинхронные режимы. В данной работе показано, что, благодаря применению в цепи частотного управления многочастотного дискриминатора с синусоидальной характеристикой, в частотно-фазовой системе возможно существование множества различных типов периодических и хаотических модуляционных режимов управляемого генератора, включая режимы с нерегулярными переключениями колебательных движений.

1. Математическая модель системы

Исходным уравнением для описания динамических процессов в рассматриваемой частотно-фазовой системе является следующее уравнение для разности фаз φ колебаний управляемого и эталонного генераторов, записанное в операторной форме ($p \equiv d/dt$) [2]:

$$p\varphi + \Omega_1 K_1(p) F(\varphi) + \Omega_2 K_2(p) \Phi(p\varphi) = \delta\omega. \quad (1)$$

В уравнении (1) $K_1(p)$ и $K_2(p)$ – коэффициенты передачи фильтров низких частот (ФНЧ) в цепях управления; $F(\varphi)$ и $\Phi(p\varphi)$ – характеристики фазового и частотного дискриминаторов, нормированные на единицу; Ω_1 и Ω_2 – коэффициенты усиления по цепям управления; $\delta\omega$ – начальная расстройка частот колебаний эталонного и управляемого генераторов. Характеристики дискриминаторов будем аппроксимировать функциями $F(\varphi) = \sin \varphi$ и $\Phi(p\varphi) = -\sin(\beta_1 p\varphi)$, где β_1 – параметр частотного

дискриминатора [4–6]. Знак «минус» в выражении для $\Phi(p\varphi)$ соответствует инверсному включению многочастотного дискриминатора.

В данной работе мы будем рассматривать случай, когда в цепях управления используются одинаковые ФНЧ третьего порядка с коэффициентами передачи $K_1(p) = K_2(p) = 1/(1 + b_1p + b_2p^2 + b_3p^3)$, где a_1 , b_1 , b_2 и b_3 – постоянные времени. Математическая модель системы ЧФАП с такими ФНЧ, полученная на основании (1), представляется динамической системой

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = u, \quad \frac{du}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = z, \quad \mu_1 \frac{dz}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi - u - \varepsilon y - \mu z + b \sin(\beta u) \quad (2)$$

с четырехмерным цилиндрическим фазовым пространством $U_2 = \{\varphi(\text{mod } 2\pi), u, y, z\}$. В уравнениях (2) $\tau = \Omega_1 t$, $\varepsilon = b_1 \Omega_1$, $b = \Omega_2 / \Omega_1$, $\beta = \beta_1 \Omega_1$, $\gamma = \delta \omega / \Omega_1$, $\mu = b_2 \Omega_1^2$, $\mu_1 = b_3 \Omega_1^3$.

Исследование полной картины нелинейной динамики рассматриваемой системы ЧФАП на основе модели (2) сопряжено с существенными трудностями, в связи с чем, в качестве основного метода ее исследования применено компьютерное моделирование, которое базируется на качественных и численных методах нелинейной динамики [15–18] и использовании программного комплекса «ДНС» [19].

2. Результаты исследования модели (2)

Рассмотрим особенности динамики частотно-фазовой системы, описываемой динамической системой (2). Движения, развивающиеся в фазовом пространстве U_2 системы (2), зависят от шести параметров. Исследование полной картины нелинейной динамики этой системы является весьма сложной и трудоемкой задачей. В данной работе ограничимся рассмотрением динамических состояний и бифуркаций, которые реализуются при изменении параметров b и μ_1 , характеризующих степень влияния кольца частотного управления и инерционности фильтров в цепях управления, полагая фиксированными значения параметров β , γ , μ и ε .

Система (2) при значениях $0 \leq \gamma < 1$ имеет два состояния равновесия $A_1(\arcsin \gamma, 0, 0, 0)$ и $A_2(\pi - \arcsin \gamma, 0, 0, 0)$. Исследуя корни характеристического уравнения

$$\xi^4 + (\mu/\mu_1) \xi^3 + (\varepsilon/\mu_1) \xi^2 + ((1 - b\beta)/\mu_1) \xi + \sqrt{1 - \gamma^2}/\mu_1 = 0, \quad (3)$$

выясняем, что состояние равновесия A_1 устойчиво при значениях параметров

$$\mu_1 < \mu_1^0(b, \beta, \varepsilon, \gamma), \quad \mu_1^0 = \mu \varepsilon (1 - b\beta) - \mu^2 \sqrt{1 - \gamma^2} / (1 - b\beta)^2, \quad 1 - b\beta > 0, \quad (4)$$

состояние равновесия A_2 – неустойчивое седлового типа. Неравенства (4) выделяют в пространстве параметров модели (2) область $B_0 : \{\mu_1 < \mu_1^0(b, \beta, \varepsilon, \gamma)\}$ – область удержания режима синхронизации в системе ЧФАП, определяемого устойчивым состоянием равновесия A_1 .

2.1. Карта динамических режимов. Как показали результаты численного исследования системы (2), в фазовом пространстве U_2 может существовать большое число вращательных предельных циклов, в связи с чем картина расположения

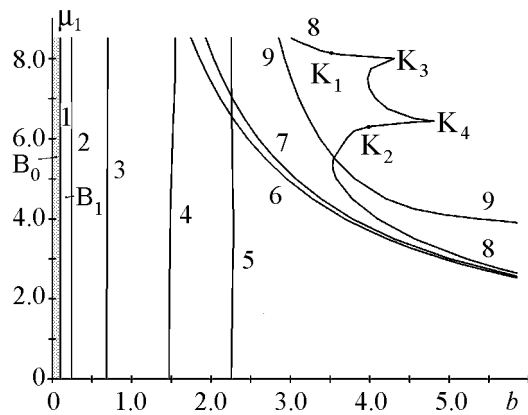


Рис. 1. Карта динамических режимов системы при значениях $\gamma = 0.3$, $\beta = 8$, $\varepsilon = 25$, $\mu = 4.8$

бифуркационных кривых на плоскости управляющих параметров (b, μ_1) представляется достаточно сложной. На рис. 1 приведена карта динамических режимов системы (2), на которой представлены кривые, соответствующие бифуркациям состояния равновесия A_1 , колебательного предельного цикла и четырех вращательных предельных циклов, локализованных в области $u > 0$ фазового пространства U_2 ; эти кривые построены при значениях параметров $\gamma=0.3$, $\beta=8$, $\varepsilon=25$, $\mu=4.8$. Охарактеризуем кривые, представленные на рис. 1.

Кривая 1 – это граница $\mu_1 = \mu_1^0$ области устойчивости B_0 состояния равновесия A_1 , определяемая (5). Область B_0 заключена между кривой 1 и линией $b = 0$. Численное исследование системы (3) показало, что в области B_0 одновременно с состоянием равновесия A_1 в фазовом пространстве существует устойчивый вращательный (2π -периодический по φ) предельный цикл L_1^+ . При переходе с возрастанием параметра b через границу 1 в системе (2) наблюдается бифуркация Андронова–Хопфа [15,17], в результате которой в фазовом пространстве U_2 появляется устойчивый предельный цикл колебательного типа S_0 , которому отвечает периодический квазисинхронный режим системы ЧФАП. Этот режим существует при значениях параметров b и μ_1 в области между кривыми 1 и 2 одновременно с периодическим асинхронным режимом предельного цикла L_1^+ .

Кривая 2 отвечает седло-узловой бифуркации предельного цикла S_0 . Пересечение кривой 2 с увеличением b соответствует прекращению квазисинхронного режима в системе ЧФАП и жесткому переходу к периодическому асинхронному режиму предельного цикла L_1^+ .

Кривые 3,4,5 соответствуют седло-узловым бифуркациям вращательных (2π -периодических по φ) предельных циклов, расположенных в области $u > 0$ фазового пространства U_2 . При переходе через кривые 3,4,5 с возрастанием b в фазовом пространстве последовательно появляются устойчивые вращательные предельные циклы L_2^+ , L_3^+ , L_4^+ . На рис. 2, а даны (φ, u) -проекции фазовых портретов циклов L_1^+ , L_2^+ , L_3^+ и L_4^+ . Режим цикла L_1^+ существует в области значений b и μ_1 между линией $b = 0$ и кривой 6; режим цикла L_2^+ – в области значений b и μ_1 между кривыми 3 и 7. Область существования режима цикла L_3^+ заключена между кривыми 4 и 8. Режим цикла L_4^+ существует в области значений b и μ_1 между кривыми 5 и 9.

Кривые 6,7,9 отвечают потере устойчивости предельных циклов L_1^+ , L_2^+ и L_4^+ через бифуркации рождения в фазовом пространстве U_2 устойчивых двумерных торов вращательного типа T_1^+ , T_2^+ и T_4^+ , соответственно. Торы рождаются при пересечении кривых 6,7,9 с увеличением параметра b . Части кривой 8 выше точки K_1 и ниже точки K_2 отвечают бифуркации рождения устойчивого двумерного вращательного тора T_3^+ из предельного цикла L_3^+ ; тор T_3^+ рождается при пересечении указанных частей кривой 8 с возрастанием параметра b . На рис. 2, б даны (φ, u) -проекции фазовых портретов квазипериодических асинхронных режимов торов T_1^+ ,

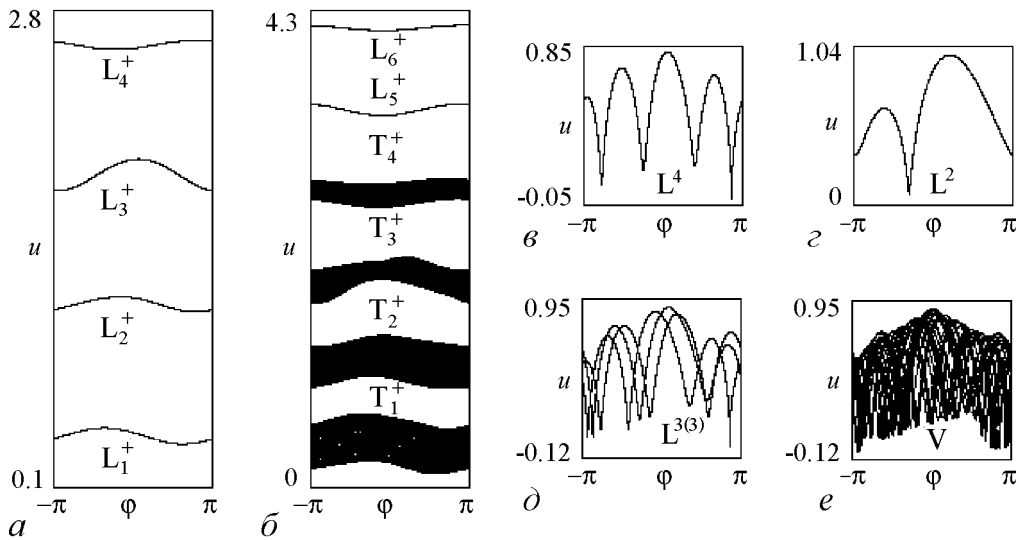


Рис. 2. Проекция фазовых портретов системы (3) при значениях $\gamma = 0.3$, $\beta = 8$, $\varepsilon = 25$, $\mu = 4.8$, $\mu_1 = 5.5$, $b = 2.5$ (а), 4.0 (б); $b = 4.0$, $\mu_1 = 10.05$ (в), 21.59 (г), 12.34 (д), 12.55 (е)

T_2^+ , T_3^+ и T_4^+ . Части K_1K_3 и K_2K_4 кривой 8 соответствуют седло-узловой бифуркации предельного цикла L_3^+ , приводящей к прекращению в системе асинхронного режима этого цикла. При пересечении части K_3K_4 кривой 8 с возрастанием b наблюдается потеря устойчивости режима предельного цикла L_3^+ в результате бифуркации удвоения периода.

Следует отметить, что, наряду с бифуркационными кривыми вращательных предельных циклов, приведенными на рис. 1, на плоскости (b, μ_1) установлено существование аналогичных бифуркационных кривых, отвечающих вращательным предельным циклам L_1^- , L_2^- , L_3^- и L_4^- системы (2), локализованным в области $u < 0$ фазового пространства U_2 . Кроме этого, в результате численного исследования системы (2) выяснено, что для значений параметров μ_1 и b , расположенных на плоскости (b, μ_1) в областях справа от кривой 5, в системе (2) реализуются седло-узловые бифуркации вращательных предельных циклов, которые приводят к появлению в фазовом пространстве устойчивых предельных циклов, локализованных выше предельного цикла L_4^+ и ниже предельного цикла L_4^- . При рассматриваемых значениях параметров γ , β , ε , μ эти циклы, так же как и циклы L_1^+ , L_2^+ , L_3^+ , L_4^+ и L_1^- , L_2^- , L_3^- , L_4^- , при возрастании параметра b испытывают бифуркации рождения двумерных вращательных торов и бифуркации удвоения периода. Таким образом, с возрастанием b повышается степень мультистабильности системы ЧФАП. Какой из множества одновременно существующих асинхронных режимов реализуется в системе при этих значениях параметров – это зависит от начальных условий.

2.2. Развитие асинхронных режимов при изменении параметра инерционности. Рассмотрим особенности развития асинхронных режимов, аттракторы которых локализованы в области $u > 0$ фазового пространства U_2 . Обратимся к результатам однопараметрического исследования системы (2) при фиксированном значении параметра $b = 4.0$ и вариации параметра μ_1 . Отметим, что при $b = 4.0$ в фазовом пространстве U_2 существуют торы T_1^+ , T_2^+ , T_3^+ и T_4^+ и вращательные

предельные циклы L_5^+ и L_6^+ , расположенные выше тора T_4^+ (рис. 2, б). Рассмотрим развитие режимов торов T_1^+ , T_2^+ , T_3^+ , T_4^+ и режимов предельных циклов L_5^+ и L_6^+ при возрастании параметра μ_1 .

В процессе эволюции режима тора T_1^+ обнаружен эффект чередования режима тора T_1^+ и сложных вращательных предельных циклов, временные реализации $u(\tau)$ колебаний на которых содержат несколько максимумов и минимумов в интервале $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. При этом наблюдались как однооборотные (2π -периодические по φ), так и многооборотные (от 4π - до 16π -периодические по φ) сложные предельные циклы. В интервале значений μ_1 от 6.9 до 21.59 зафиксировано существование сложных однооборотных вращательных предельных циклов L^5 , L^4 , L^3 и L^2 соответственно с пятью, четырьмя, тремя и двумя максимумами на интервале $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. На рис. 2, в, г приведены (φ, u) -проекции фазовых портретов циклов L^4 и L^2 , а на рис. 2, д – трехоборотного (6π -периодического по φ) сложного предельного цикла $L^{3(3)}$. При возрастании μ_1 реализуются бифуркации удвоения периода сложных предельных циклов, в результате которых в фазовом пространстве образуются вращательные хаотические аттракторы. На рис. 2, е приведена (φ, u) -проекция фазового портрета одного из таких хаотических аттракторов, который возникает на базе трехоборотного сложного предельного цикла.

Другим интересным эффектом, обнаруженным в процессе эволюции режима тора T_1^+ при возрастании μ_1 , является возникновение в фазовом пространстве колебательных предельных циклов и переходы от квазисинхронных режимов этих циклов к асинхронным режимам. Этот эффект иллюстрирует рис. 3, на котором приведены однопараметрическая бифуркационная диаграмма (μ_1, u) (рис. 3, а), (φ, u) -проекция фазовых портретов и фрагмент зависимости $u(\tau)$, соответствующие аттракторам системы (2) (рис. 3, б–е). Диаграмма (μ_1, u) характеризует эволюцию квазисинхронного режима колебательного предельного цикла S_1 (см. рис. 3, б) при изменении параметра μ_1 от 19.45 до 21.65. В соответствии с этой диаграммой при возрастании μ_1 цикл S_1 теряет устойчивость, и в фазовом пространстве рождается притягивающий тор T_1 колебательного типа. Далее наблюдается чередование режима тора T_1 и режимов колебательных предельных циклов различной сложности на торе T_1 . Затем, в результате разрушения тора T_1 система переходит к режиму колебательного хаотического аттрактора P_1 (см. рис. 3, в). При возрастании μ_1 аттрактор P_1 преобразуется в хаотический аттрактор колебательно-вращательного типа W_1 (см. рис. 3, г, д) в результате появления витков вращательных фазовых траекторий в структуре аттрактора P_1 . Режим колебаний на аттракторе W_1 представляет собой нерегулярное чередование стадий колебательных и вращательных движений.

Из диаграммы, приведенной на рис. 3, а, видно, что, когда параметр μ_1 изменяется в интервале $19.66 \leq \mu_1 \leq 20.64$, в фазовом пространстве одновременно с аттракторами, развивающимися на базе предельного цикла S_1 , существуют аттракторы вращательного типа, которые образуются в процессе эволюции вращательного хаотического аттрактора V_1 (см. рис. 3, е) при возрастании μ_1 . При этом вначале происходит дехаотизация колебаний, соответствующих аттрактору V_1 , через бифуркации, обратные бифуркациям удвоения периода, и в системе устанавливается периодический асинхронный режим сложного предельного цикла L^2 (см. рис. 2, г). Затем наблюдается жесткий переход от режима цикла L^2 к режиму хаотического аттрактора W_1 (см. рис. 3, г, д) в результате седло-узловой бифуркации цикла L^2 . При

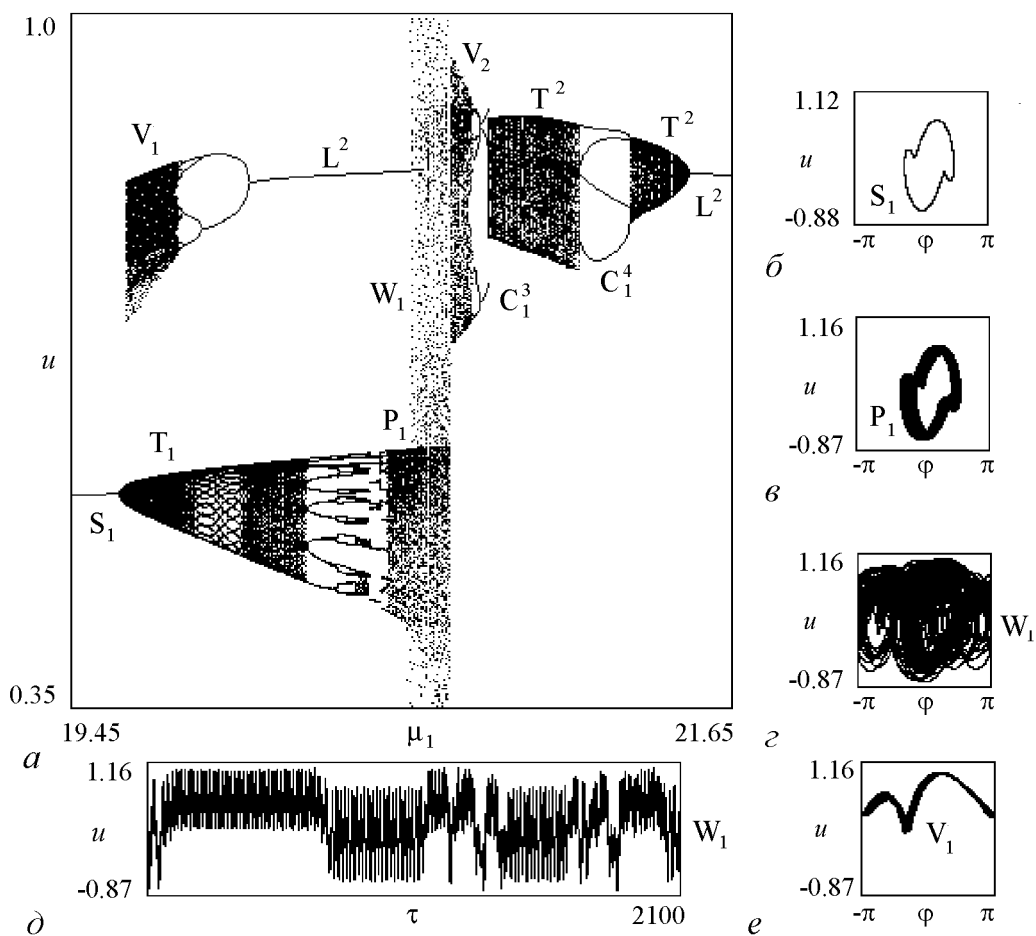


Рис. 3. Эволюция периодического квазисинхронного и хаотического асинхронного режимов при $\gamma = 0.3$, $\beta = 8$, $\varepsilon = 25$, $\mu = 4.8$, $b = 4.0$ (a) при изменении параметра μ_1 : 19.5 (б), 20.56 (в), 20.71 (г, д), 19.67 (е)

дальнейшем увеличении μ_1 частота и длительность стадии колебательных движений в структуре аттрактора W_1 уменьшаются, затем эти движения прекращаются, и система переходит к режиму вращательного хаотического аттрактора V_2 , подобного аттрактору V_1 (см. рис. 3, e). Далее режим колебаний на аттракторе V_2 мягко через бифуркации, обратные бифуркациям удвоения периода, преобразуется в периодический асинхронный режим трехоборотного вращательного предельного цикла C_1^3 (см. рис. 3, a), который при увеличении μ_1 жестко сменяется квазипериодическим режимом колебательного тора T^2 . Внутри области существования режима тора T^2 наблюдается «окно» четырехоборотного (8π -периодического по ϕ) вращательного предельного цикла C_1^4 (см. рис. 3, a). Далее режим тора T^2 мягко преобразуется в периодический асинхронный режим предельного цикла L^2 (см. рис. 2, з).

Примечательно, что когда μ_1 превышает значение 21.89, цикл L^2 испытывает субкритическую бифуркацию удвоения периода, при которой происходит слияние устойчивого цикла L^2 с седловым предельным циклом удвоенного периода. Одновременно с этим появляется перемежаемость – чередование регулярной стадии колебательного процесса с нерегулярными движениями. Через перемежаемость воз-

никает колебательно-вращательный хаотический аттрактор, подобный хаотическому аттрактору W_1 (см. рис. 3, з, д), колебания на этом аттракторе поддерживаются в системе при продолжении увеличения параметра μ_1 .

Рассмотрим динамику режима тора T_2^+ (см. рис. 2, б) при изменении величины параметра μ_1 . Обратимся к однопараметрической бифуркационной диаграмме (μ_1, u) , приведенной на рис. 4, а, где μ_1 изменяется от 7.35 до 10.2. На рис. 4, б–д приведены примеры (φ, u) -проекций фазовых портретов и (y, u) -проекций сечения Пуанкаре, соответствующие аттракторам модели (2), возникающим при изменении μ_1 . Замкнутая инвариантная кривая Γ_2^+ на рис. 4, б соответствует тору T_2^+ . Режим тора T_2^+ существует при значениях $7.35 < \mu_1 < 7.99$, в этом интервале значений μ_1 выделяются узкие области многооборотных вращательных предельных циклов. Самые широкие из этих областей соответствуют режимам трехоборотных предельных циклов C_2^3 и C_3^3 (см. рис. 4, а). При $\mu_1 > 7.99$ тор T_2^+ разрушается в результате потери гладкости [20,21] (см. рис. 4, в) с образованием в фазовом пространстве вращательного хаотического аттрактора V_3 (см. рис. 4, з). При увеличении μ_1 режим аттрактора V_3 жестко сменяется режимом трехоборотного вращательного предельного цикла C_3^3 , затем на базе цикла C_3^3 формируется вращательный хаотический аттрактор V_4 (см. рис. 4, д) через бифуркации удвоения периода. Когда величина параметра μ_1 превышает значение 10.21, происходит жесткий переход от режима аттрактора V_4 к режиму однооборотного сложного вращательного предельного цикла L^4 (см. рис. 2, в), который сформировался в процессе эволюции режима тора T_1^+ .

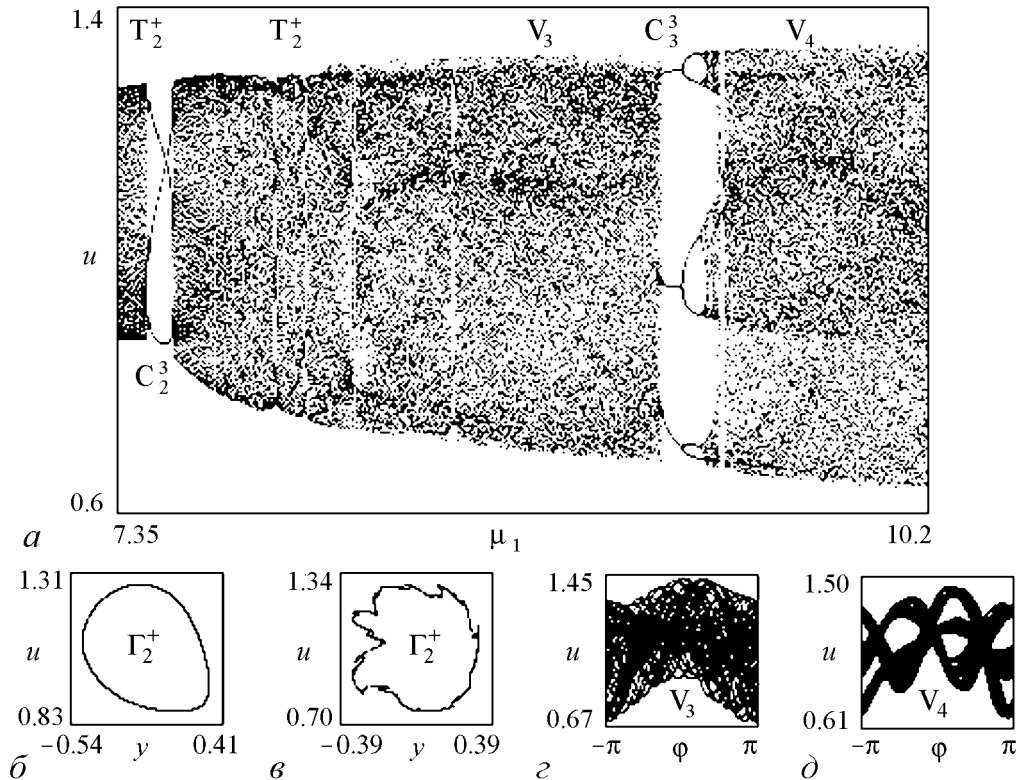


Рис. 4. Развитие режима тора T_2^+ при $\gamma = 0.3$, $\beta = 8$, $\varepsilon = 25$, $\mu = 4.8$, $b = 4.0$ (а) и при возрастании параметра μ_1 : 7.35 (б), 7.99 (в), 8.9 (г), 9.44 (д)

Эволюция режима тора T_3^+ при увеличении μ_1 характеризуется следующими явлениями, которые иллюстрирует рис. 5. Вначале происходит переход от режима тора T_3^+ к режиму однооборотного вращательного предельного цикла L_3 , (φ, u) -проекция фазового портрета которого приведена на рис. 5, а. После прекращения этого режима в результате седло-узловой бифуркации цикла L_3 наблюдается перемежаемость, через которую формируется режим хаотического вращательного аттрактора V_5 (рис. 5, б). Затем в интервале $8.4 < \mu_1 < 9.37$ происходит чередование хаотических колебаний в режиме аттрактора V_5 и периодических режимов вращательных предельных циклов, число оборотов по φ на которых с увеличением μ_1 последовательно уменьшается на единицу от 21 до 10, то есть имеет место эффект «убавления периода». На рис. 5, в приведен фрагмент однопараметрической бифуркационной диаграммы (μ_1, u) при изменении μ_1 от 8.74 до 9.4, на котором отчетливо видны «окна» предельных циклов с числом оборотов по φ от 14 до 10. Внутри этих окон реализуются процессы хаотизации и дехаотизации колебаний соответственно через прямые и обратные бифуркации удвоения периода, жесткие переходы к хаотическим режимам и к режимам многооборотных предельных циклов. После выхода из области убавлений периода режим хаотического аттрактора V_5 поддерживается в системе до значения $\mu_1 = 10.32$, с превышением которого наблюдается жесткий переход от режима аттрактора V_5 к периодическому режиму однооборотного сложного предельного цикла L^4 (рис. 5, г). Этот переход осуществляется через хаотические движения в окрестности уже исчезнувшего хаотического аттрактора V_4 .

Численное исследование динамики режима тора T_4^+ показывает, что при увеличении μ_1 вначале наблюдается чередование этого режима и режимов многооборотных вращательных предельных циклов, а затем реализуется бифуркация удвоения тора T_4^+ . На рис. 6, а–г представлена эволюция инвариантной кривой Γ_4^+ сечения Пуанкаре (см. рис. 6, а), соответствующей тору T_4^+ , при изменении μ_1 . Инвариант-

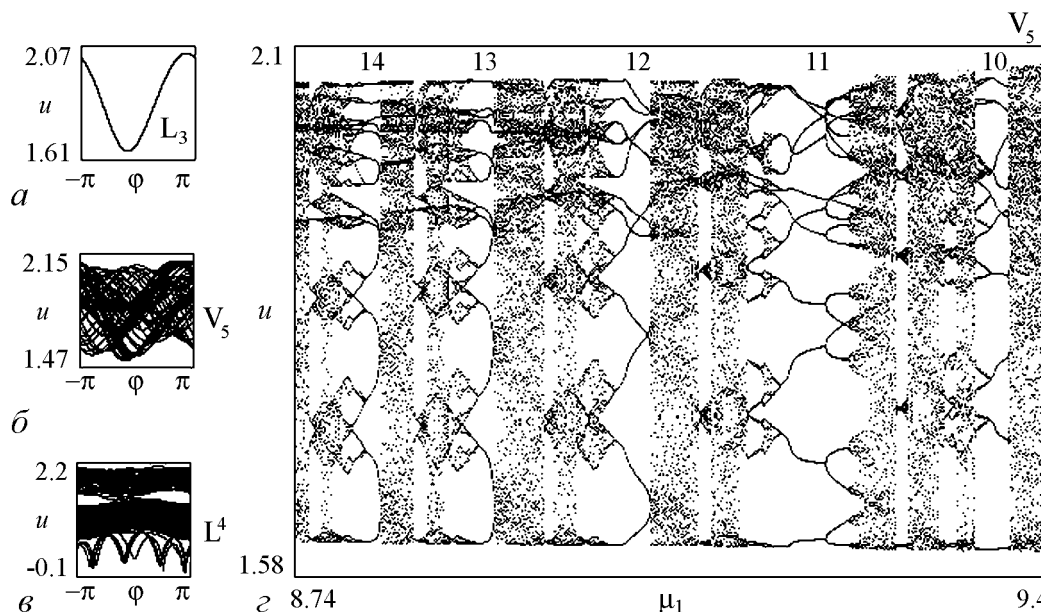


Рис. 5. Аттракторы модели (2) при значениях параметров $\gamma = 0.3$, $\beta = 8$, $\varepsilon = 25$, $\mu = 4.8$, $b = 4.0$ и значениях $\mu_1 = 8.0$ (а), 10.0 (б), 10.33 (в) и фрагмент бифуркационной диаграммы (μ_1, u) (г), иллюстрирующий эффект «убавления периода»

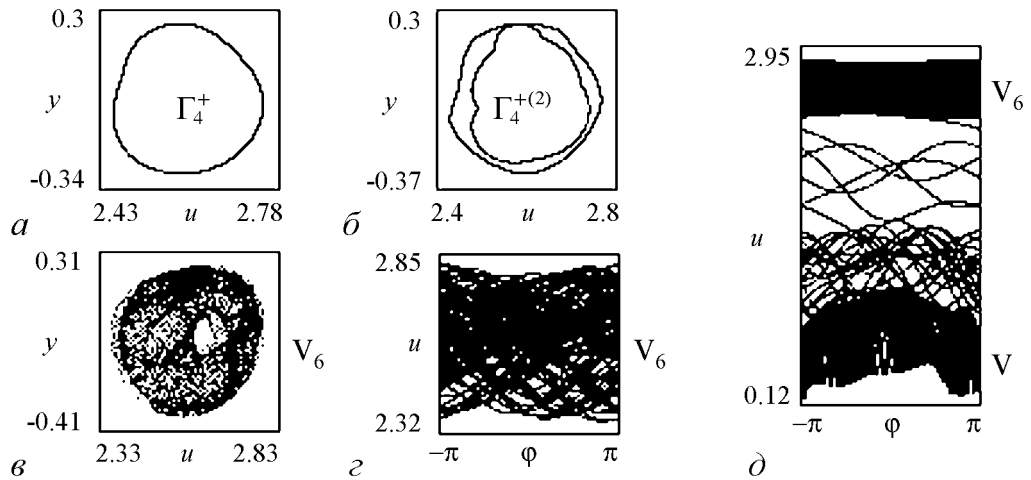


Рис. 6. Аттракторы модели (2) при значениях $\gamma = 0.3$, $\beta = 8$, $\varepsilon = 25$, $\mu = 4.8$, $b = 4.0$, $\mu_1 = 9.95$ (а), 10.12 (б), 11.2 (в, г), 11.798 (д)

ная кривая становится двухоборотной (см. рис. 6, б) – такая перестройка соответствует бифуркации удвоения тора Γ_4^+ . Далее инвариантная кривая теряет гладкость, и реализуется переход к режиму вращательного хаотического аттрактора V_6 (см. рис. 6, в, г). При дальнейшем увеличении μ_1 происходит жесткий переход от режима аттрактора V_6 к режиму хаотического аттрактора V (рис. 6, д), который сформировался в процессе эволюции режима тора Γ_1^+ . Переходный процесс является хаотическим, он складывается из движений в окрестности уже исчезнувших хаотических аттракторов V_5 и V_4 .

Динамические состояния, развивающиеся на базе предельного цикла L_5^+ (см. рис. 2, б) при увеличении μ_1 , можно представить в виде следующей последовательности переходов: предельный цикл $L_5^+ \Rightarrow$ вращательный тор $T_5^+ \Rightarrow$ две бифуркации удвоения тора $T_5^+ \Rightarrow$ потеря гладкости четырехоборотной инвариантной кривой и возникновение хаотического аттрактора $V_7 \Rightarrow$ прекращение колебаний в режиме аттрактора V_7 и жесткий переход к режиму хаотического аттрактора W_1 (см. рис. 3, з, д).

Развитие режима предельного цикла L_6^+ при возрастании μ_1 характеризуется следующими явлениями: образование тора T_6^+ из цикла L_6^+ ; бифуркации удвоения тора T_6^+ , которые завершаются образованием в фазовом пространстве вращательного хаотического аттрактора V_8 ; прекращение колебаний в режиме аттрактора V_8 и жесткий переход к режиму хаотического аттрактора W_1 (см. рис. 3, з, д).

Из представленных результатов видно, что развитие режимов торов T_2^+ , T_3^+ , T_4^+ , T_5^+ и T_6^+ при возрастании μ_1 в итоге завершается жесткими переходами к режимам аттракторов L^4 , V и W_1 , которые сформировались в процессе эволюции режима тора T_1^+ .

2.3. Особенности динамики системы при изменении параметра b . Анализ поведения системы (2) при изменении параметра b показывает, что система демонстрирует динамику, схожую с той, которая выявлена при изменении параметра μ_1 . Так же, как и в первом случае, когда параметр μ_1 являлся варьируемым, при возрастании b наблюдаются бифуркации рождения двумерных торов из вращательных

предельных циклов, чередование торов и предельных циклов и переходы к хаотическим режимам через разрушение торов. На рис. 7 приведен пример однопараметрической бифуркационной диаграммы (b, u) , соответствующей значениям $\gamma = 0.3$, $\beta = 8$, $\varepsilon = 25$, $\mu = 4.8$, $\mu_1 = 5.5$. Для ее построения начальные условия были выбраны на торах T_1^+ , T_2^+ , T_7^+ и торе $T_6^{+(2)}$, образующемся в результате бифуркации удвоения тора T_6^+ , и на хаотических аттракторах V_3^+ , V_4^+ и V_5^+ , образующихся в результате разрушения торов T_3^+ , T_4^+ и T_5^+ ; значения параметра b изменялись от 6.5 до 7.8. На рис. 7 слева от (b, u) -диаграммы даны (y, u) -проекции сечения Пуанкаре, соответствующие стартовым аттракторам модели (2) при $b = 6.5$.

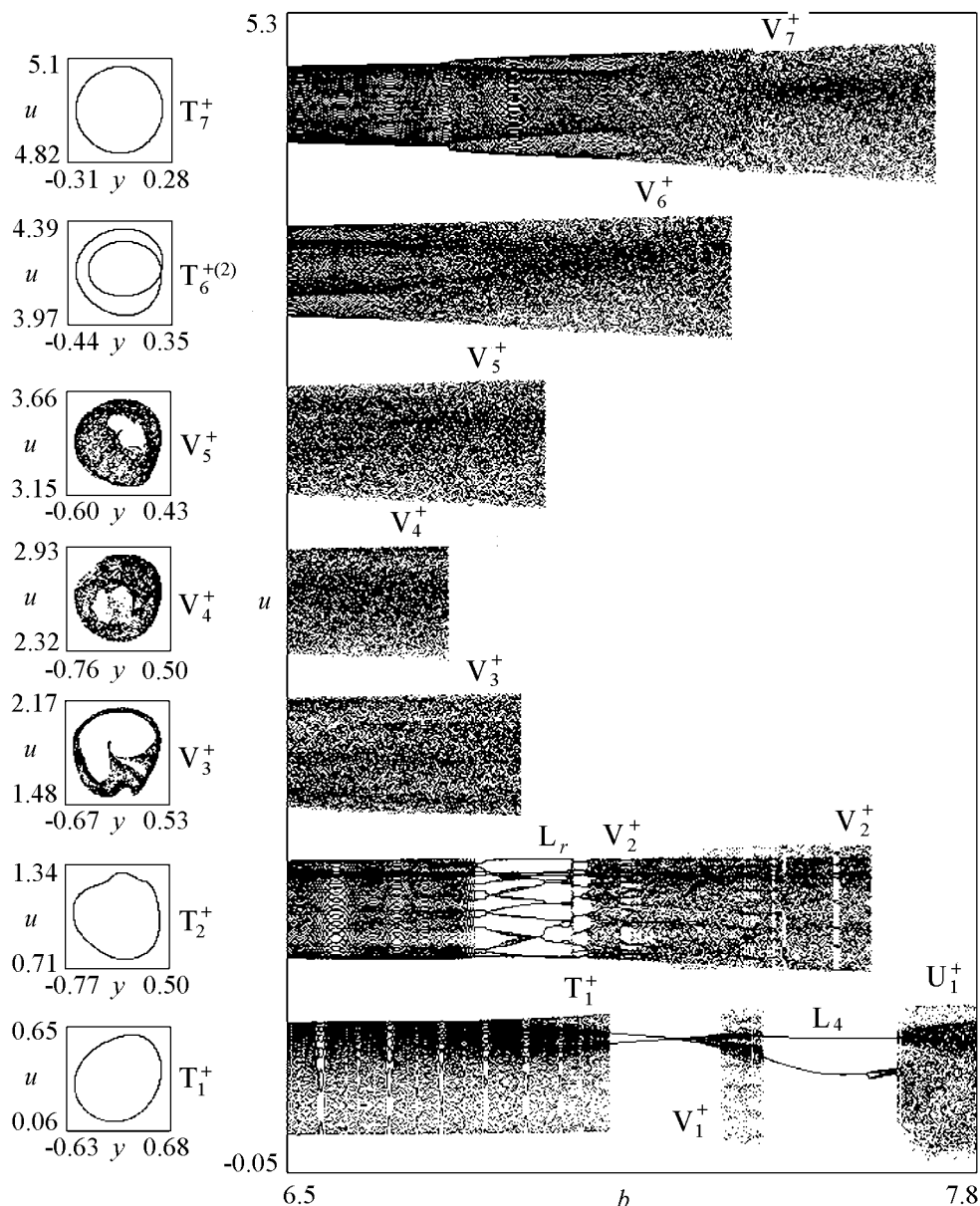


Рис. 7. Сечения Пуанкаре аттракторов стартовых асинхронных режимов и их развитие при возрастании параметра b ($\gamma = 0.3$, $\beta = 8$, $\varepsilon = 25$, $\mu = 4.8$, $\mu_1 = 5.5$)

Анализ диаграммы (b, u) показывает, что развитие режимов торов T_1^+ , T_2^+ , $T_6^{+(2)}$ и T_7^+ при изменении b в интервале $(6.5; 7.8)$ завершается переходами к вращательным хаотическим аттракторам U_1^+ , V_2^+ , V_6^+ и V_7^+ , соответственно. Далее при возрастании b наблюдается последовательное прекращение режимов аттракторов V_4^+ , V_3^+ , V_5^+ , V_6^+ , V_2^+ , V_7^+ и жесткие переходы $V_4^+ \rightarrow V_3^+$, $V_3^+ \rightarrow$ многооборотный вращательный предельный цикл L_r , $V_5^+ \rightarrow T_1^+$, $V_6^+ \rightarrow V_2^+$, $V_2^+ \rightarrow$ четырехоборотный вращательный предельный цикл L_4 , $V_7^+ \rightarrow U_1^+$, который сформировался на базе цикла L_4 (см. рис. 7). Таким образом, при возрастании b развитие режимов торов T_1^+ , T_2^+ , $T_6^{+(2)}$, T_7^+ и хаотических аттракторов V_3^+ , V_4^+ , V_5^+ в итоге завершается установлением в системе режима хаотического аттрактора U_1^+ , сформировавшегося в процессе эволюции режима тора T_1^+ .

При дальнейшем увеличении b на базе аттрактора U_1^+ образуются сложные хаотические аттракторы W^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) с n областями сосредоточения колебательных движений и нерегулярными переключениями между этими областями. Аттракторы W^n по виду (u, y) -проекции фазовых портретов и реализаций колебаний $u(\tau)$ похожи на хаотические многоспиральные аттракторы, наблюдаемые в моделях систем с частотным управлением и систем автофазирования [22–27], а также в других динамических системах с неединственным состоянием равновесия [28–30] и др. На рис. 8 приведены примеры хаотических аттракторов W^n с $n = 2, 3, 5, 7, 12$.

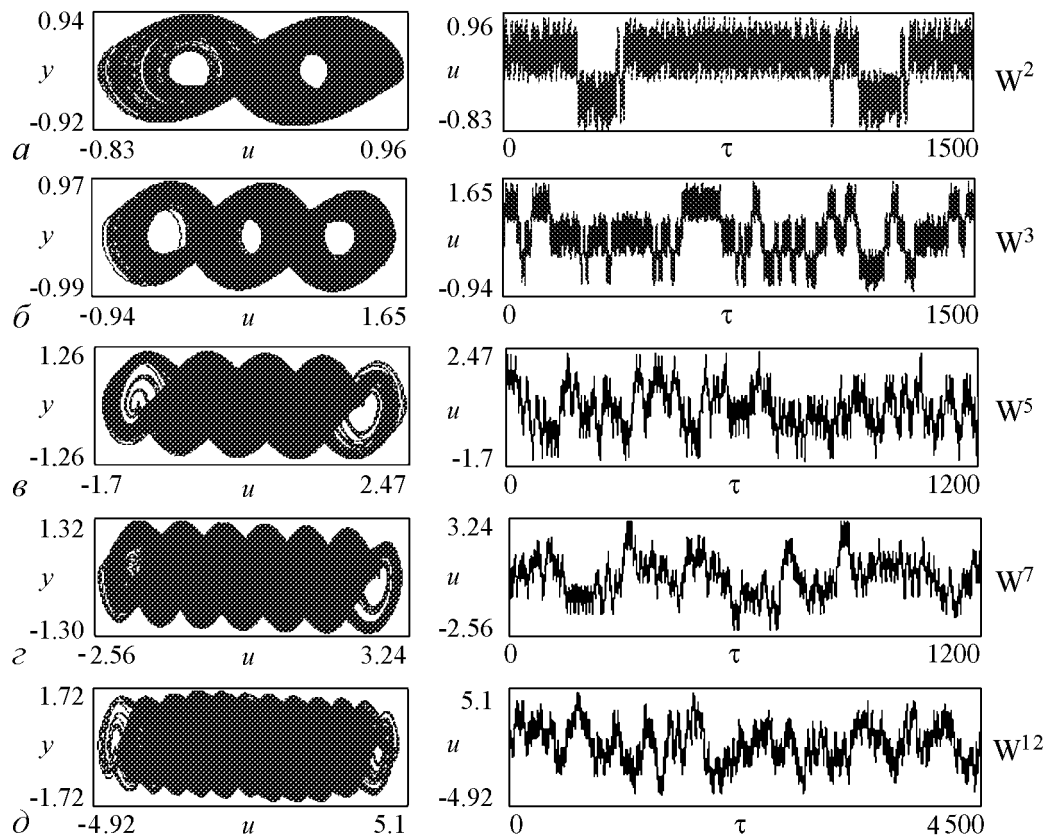


Рис. 8. Хаотические аттракторы W^n , $n = 2, 3, 5, 7, 12$, при значениях $\gamma = 0.3$, $\beta = 8$, $\varepsilon = 25$, $\mu = 4.8$, $\mu_1 = 5.5$, $b = 9.25$ (а), 9.8 (б), 16.0 (в), 18.0 (г), 23.0 (д)

На (u, y) -проекциях фазовых портретов этих аттракторов четко выделяются n областей сосредоточения колебательных движений, между которыми совершаются нерегулярные переходы. Видно, как усложняется структура хаотического аттрактора и занимаемый объем в фазовом пространстве при возрастании параметра b . Об этом усложнении свидетельствуют вычисленные величины ляпуновских характеристических показателей ρ_m на аттракторах W^n при значениях параметра b , указанных на рис. 8. Они имеют значения 0.27, 0.33, 0.7, 0.93, 1.17, соответственно.

Приведенные результаты исследования модели (3) показывают, что использование многочастотного дискриминатора с синусоидальной характеристикой в цепи частотного управления системы ЧФАП создает возможности для существования множества разнообразных периодических и хаотических автомодуляционных режимов управляемого генератора.

Заключение

В данной работе проведено исследование особенностей нелинейной динамики двухкольцевой системы с частотно-фазовым управлением, обусловленных использованием многочастотного дискриминатора с инвертированной синусоидальной характеристикой в кольце частотного управления. На основе математической модели (2) с двумя степенями свободы в цилиндрическом фазовом пространстве, соответствующей частотно-фазовой системе с одинаковыми фильтрами третьего порядка в частотной и фазовой цепях управления, и качественно-численных методов изучено поведение системы при изменении основных управляющих параметров (начальной частотной расстройки, параметра инерционности кольца фазового управления и параметра, характеризующего степень влияния кольца частотного управления).

Выявлена достаточно сложная картина динамических состояний исследуемых моделей, обусловленная существованием множества асинхронных режимов различной сложности и их бифуркаций. Построена карта динамических режимов, на которой выделены области с различными режимами управляемого генератора (синхронным режимом, периодическими и хаотическими автомодуляционными режимами). Переходы к хаотическим режимам реализуются в результате бифуркаций удвоения периода предельных циклов, через перемежаемость и разрушение двумерных торов, через бифуркации удвоения двумерных торов, а также в результате седло-узловых бифуркаций предельных циклов.

Выяснена нетривиальная роль нелинейности частотного дискриминатора при формировании автомодуляционных колебаний в системе. Результатом влияния этой нелинейности является появление в двухкольцевой системе ЧФАП новых колебательных режимов и нелинейных эффектов, не свойственных отдельным системам с фазовым и частотным управлением. Наиболее интересными эффектами являются: потеря устойчивости синхронного режима; многочисленные переходы между периодическими и хаотическими режимами по мере увеличения параметра инерционности и степени влияния частотного кольца управления; возникновение хаотических колебаний с переключениями движений, похожих на колебания в режимах многоспиральных хаотических аттракторов, характерных для динамических систем с неединственным состоянием равновесия. Возникновение подобных колебательных

режимов в рассматриваемой системе оказывается возможным благодаря выясненному в работе существованию множества периодических, квазипериодических и хаотических асинхронных режимов, обязанных своим происхождением применению частотного дискриминатора с синусоидальной характеристикой, и взаимодействию таких режимов. Следует отметить, что существование множества асинхронных режимов в частотно-фазовой системе связано с существованием множества состояний равновесия и соответствующих им моногармонических режимов управляемого генератора в отдельной системе с частотным управлением [24, 25, 31].

Выявленное многообразие динамических состояний модели (2) и возможность эффективного воздействия на их свойства и области существования путем легко реализуемого изменения параметров цепей управления создают предпосылки для расширения области применения систем с частотно-фазовым управлением, в частности, для использования их в качестве генераторов хаотических колебаний для формирования перспективных сигналов с хаотической модуляцией их неэнергетических параметров (частоты и фазы) и применения таких сигналов в информационно-коммуникационных системах [4, 27, 32-36].

Библиографический список

1. Пономаренко В.П. Регулярная и хаотическая динамика двухкольцевой системы фазовой синхронизации дискриминатора. Часть 1. Динамика частотно-фазовой системы с одинаковыми фильтрами первого порядка в цепях управления // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 2. С. 25.
2. Капранов М.В. О полосе захвата при частотно-фазовой автоподстройке // Науч. докл. высш. школы. Сер. «Радиотехника и электроника». 1958. Т. 2, № 9. С. 162.
3. Шахильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 448 с.
4. Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2013. 366 с.
5. Пономаренко В.П., Тихонов Е.А. Динамика автогенератора с частотно-фазовым управлением при инверсии характеристики частотного дискриминатора // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6. С. 75.
6. Пономаренко В.П., Тихонов Е.А. Хаотическая и регулярная динамика автогенераторной системы с нелинейной петлей частотно-фазового управления // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 2. С. 205.
7. Матросов В.В. Динамические свойства генератора с частотно-фазовым управлением // Известия вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47, № 4. С. 334.
8. Матросов В.В. Моделирование динамики системы частотно-фазовой автоподстройки с фильтрами первого порядка // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. «Математическое моделирование и управление». 2006. Вып. 2(31). С. 17.
9. Пономаренко В.П. Динамические режимы в моделях автогенераторных систем с частотным и частотно-фазовым управлением // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 3. С. 33.

10. Пономаренко В.П. Динамические режимы и нелинейные эффекты в автогенераторе с частотно-фазовым управлением // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 6. С. 18.
11. Леонов Г.А., Томаев А.М., Чиишева Т.Л. Устойчивость систем частотно-фазовой синхронизации // РЭ. 1992. Т. 37, № 4. С. 671.
12. Капранов М.В., Романов Е.В. Линейные модели системы ЧАП с дискриминатором на линии задержки // Радиотехника. 1988. № 11. С. 34.
13. Капранов М.В. Связь запаздывания сигнала в волоконно-оптической линии задержки с параметрами каскадно-кольцевых ФАП на границе устойчивости // Радиотехнические устройства пьезоэлектроники. Омск, 1985.
14. Каганов В.И. Радиозлектронные системы автоматического управления. Компьютеризированный курс: Учебное пособие для вузов. М.: Горячая линия–Телеком, 2009. 432с.
15. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 548 с.
16. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. 288 с.
17. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
18. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Автоматизация исследований нелинейной динамики систем синхронизации // Вестник Верхне-Волжского отделения АТН РФ. Высокие технологии в радиоэлектронике. Н. Новгород. 1997. Вып. 2(4). С. 15.
19. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем: Учебно-методическая разработка / Сост. В.В. Матросов. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 54 с.
20. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: ГГУ, 1983. С. 3.
21. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Станкевич Н.М., Тюрюкина Л.В. Физика квазипериодических колебаний. Саратов: Издательский центр «Наука», 2013. 252 с.
22. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Самоорганизация временных структур в мультиравновесной автогенераторной системе с частотным управлением // Журнал технической физики. 1997. Т. 67, № 3. С. 1.
23. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Сложная динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с комбинированным дискриминатором // Радиотехника и электроника. 1997. Т.42, № 9. С. 1125.
24. Заулин И.А., Пономаренко В.П. Синхронные и автоколебательные режимы в многоустойчивых системах с фазовым управлением // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 4. С. 732.
25. Мишагин К.Г., Шалфеев В.Д., Пономаренко В.П. Нелинейная динамика систем фазирования в антенных решетках: Учебное пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2007. 188 с.

26. *Капранов М.В., Родионов М.Н.* Формирование регулярных и хаотических колебаний с помощью системы частотной автоподстройки частоты // Радиотехнические тетради. М.: МЭИ. 1998. № 16. С. 49.
27. *Шахтарин Б.И., Кобылкина П.И., Сидоркина Ю.А., Кондратьев А.В., Митин С.В.* Генераторы хаотических колебаний: Учебное пособие. М.: Гелиос АРВ, 2007.
28. *Radwan A., Soliman A.M., Elwakil A.C.* 1-D digitally-controlled multiscroll chaos generator // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, № 1. P. 227.
29. *Lu J., Chen G.* Generating multiscroll chaotic attractors: Theories, methods and application // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2006. Vol. 16, № 4. P. 775.
30. *Bilotta E., Pantano P., Stranges F.* A gallery of Chua attractors: Part 1 // International Journal of Bifurcation and Chaos 2007. Vol. 17, № 1. P. 1.
31. *Заулин И.А., Пономаренко В.П.* Анализ динамических процессов в статических системах синхронизации // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 33, № 1. С. 106.
32. *Капранов М.В., Морозов А.Г.* Использование хаотической модуляции для передачи информации // Радиотехнические тетради. М.: МЭИ, 1998. № 14. С. 66.
33. *Капранов М.В., Чернобаев В.Г.* Управляемые генераторы хаотических колебаний на базе систем фазовой синхронизации // Радиотехнические тетради. М.: МЭИ, 1998. № 15. С. 86.
34. *Дмитриев А.С., Широков М.Е.* Выбор генератора для прямохаотической системы связи // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 7. С. 840.
35. *Дмитриев А.С., Клецов А.В., Кузьмин Л.В.* Генерация сверхширокополосного хаоса в дециметровом диапазоне // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 7. С. 709.
36. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И.* Генерация хаоса / Под общ. ред. Дмитриева А.С. М.: Техносфера, 2012. 424 с.

Поступила в редакцию 7.05.2014

REGULAR AND CHAOTIC DYNAMICS OF TWO-RING PHASE LOCKED SYSTEM

Part 2

Peculiarities of nonlinear dynamics of frequency-phase system with identical third-order filters in control circuits

V. P. Ponomarenko

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod

The results of investigation of dynamical modes in the model of oscillatory system with frequency-phase control using multi-frequency discriminator inversely switched in

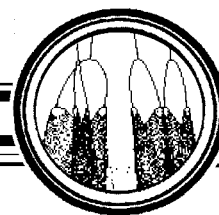
the chain of frequency control are presented. The study was carried out on the basis of mathematical model of the system with two degrees of freedom with the use of qualitative and numerical methods of nonlinear dynamics. It is shown that in such a system may be realized both synchronous and great number of non-synchronous periodic and chaotic modes of different complexity. Location parameters domains are established with different dynamic modes of the system. The processes developing in the domain of instability of the synchronous mode are considered.

Keywords: Systems with frequency-phase control, dynamical states, stability, bifurcation, attractors, phase portraits, synchronous and non-synchronous modes, dynamical chaos.

Пономаренко Валерий Павлович – родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. С 2013 года – учёный секретарь НИИ ПМК ННГУ. По совместительству – профессор кафедры численного и функционального анализа и кафедры прикладной математики факультета вычислительной математики и кибернетики ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Один из авторов монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше.



603950 Н. Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет
E-mail: povp@uic.nnov.ru



БИФУРКАЦИИ В МОДЕЛИ АКТИВНЫЙ ХИЩНИК – ПАССИВНАЯ ЖЕРТВА

А. Д. Загребнева¹, В. Н. Говорухин¹, Ф. А. Сурков²

¹ Южный федеральный университет

² НИИ механики и прикладной математики им. И.И. Воровича
Южного Федерального Университета

Численно исследованы бифуркации в системе уравнений в частных производных, являющейся вариантом модели хищник–жертва. В модели учитываются пространственное распределение популяций по ареалу, наличие направленных перемещений хищников и процессы рождения/смертности у жертв. С помощью двух качественно различных методов дискретизации задачи (метод Бубнова–Галеркина и метод прямых) выполнен анализ возможных сценариев развития популяционной динамики при изменении количества хищников и скорости их реакции на пространственную неоднородность жертв. Показано, что при сделанных предположениях реализуются сложные бифуркационные переходы, в результате которых возможна разнообразная пространственно-временная динамика: периодические, квазипериодические, хаотические режимы.

Ключевые слова: Популяционная динамика, бифуркации, численный анализ, таксис.

Введение

Реальные экосистемы являются сложными объектами со сложной динамикой. Известно, что организмы при некоторых условиях движутся в пространстве неравномерно: формируют пространственные структуры, как стационарные, так и динамические [1–5]. Разнообразные пространственные структуры образуют часто используемые в лабораторных экспериментах бактерии кишечной палочки *E. coli*, которые являются хемочувствительными к аспартату (соли аспарагиновой кислоты). Из-за погрешностей в измерениях, сложности проведения экспериментов, сбора и анализа полевых данных отличить периодические режимы от квазипериодических и хаотических режимов в живых экосистемах достаточно тяжело. Тем не менее многие процессы в живых системах хорошо описываются и исследуются методами математического моделирования. Так, например, Долак и Хиллен в [6] воссоздали опыты Берга с кишечной палочкой *E. coli* [7, 8], а пространственные пятна в экспериментах Будрена и Берга с бактериями *E. coli* и *S. typhimurium* [9] воспроизведены в [10]. Однако, как происходит развитие динамики при изменении параметров экосистемы,

какова при этом роль различных популяционных факторов и какие типы режимов могут возникать в силу внутренних свойств экосистем, ещё до конца не ясно. В данной статье предпринята попытка анализа этих вопросов для достаточно простой математической модели популяции, состоящей из одного вида хищников и одного вида жертв.

В работе изучаются популяционные явления, порождаемые трофотаксисом – наличием направленных миграций особей, обусловленных неравномерным распределением пищевых ресурсов в пространстве. Объектом исследования является предложенная в [11] математическая модель при максимально простых предположениях: наличие направленной скорости перемещения хищников; линейная зависимость ускорения перемещения хищников от градиента распределения жертв в пространстве; случайные перемещения жертв; наличие простых демографических процессов только у жертв (логистическая трофическая функция и линейная смертность). При таких допущениях в математической модели возможно нестационарное пространственно-временное поведение, которое можно трактовать как стаеобразование, что показано в работах [11–13]. Данная модель относится к системам с кросс-диффузией, в которых волновые явления существенно отличаются от поведения волн в системах типа «реакция–диффузия», см. [14]. Кроме того, модель описывает один из типов таксисных взаимодействий популяций, активно изучаемых в последнее время, см. обзор в [15]. Она является также частным случаем модели таксиса, описывающей структурообразование в системе веслоногие рачки (гарпактициды) – диатомовые микроводоросли [16].

Несмотря на очевидный интерес, детальный бифуркационный анализ модели активный хищник – пассивная жертва до сих пор не проводился. В данной работе исследуется случай одномерного ареала обитания популяции и возможные сценарии бифуркационных переходов при изменении двух параметров, характеризующих свойства рассматриваемой популяции: количества хищников и коэффициента таксиса.

Исследование бифуркаций в данной задаче требует использования численного анализа, так как аналитический аппарат здесь применим только в частных вопросах. Так, в [11–13] аналитически изучена устойчивость некоторых стационарных распределений популяций. Известно, что результаты численного бифуркационного анализа задач в частных производных зависят от методов пространственной и временной дискретизации и их размерностей. Чаще всего это выражается в зависимости бифуркационных значений параметров от характеристик аппроксимаций [17], а недостаточный порядок конечномерных аналогов может приводить к искажению бифуркационной картины и возникновению ложной динамики [17, 18]. Для проверки получаемых численных результатов в работе используются два принципиально различающихся метода аппроксимаций (метод прямых и метод Бубнова–Галеркина) различных размерностей.

1. Математическая модель активный хищник – пассивная жертва и ее конечномерные аппроксимации

В работе рассматривается математическая модель популяций хищников и жертв, распределенных на одномерном ареале $x \in [0, L]$, представляющая собой систему

трех уравнений [11, 12]

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} = R(1 - R - N) + \delta_R \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial(Nv)}{\partial x} + \delta_N \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \kappa \frac{\partial R}{\partial x} + \delta_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{cases} \quad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial x} \right|_{x=0,L} = \left. \frac{\partial N}{\partial x} \right|_{x=0,L} = v|_{x=0,L} = 0. \quad (2)$$

Здесь $R(x, t)$, $N(x, t)$ – плотности популяции жертв и хищников, соответственно; $v(x, t)$ – скорость перемещения хищников; κ – коэффициент таксиса (активности хищников в поисках пищи); δ_R , δ_N , δ_v – коэффициенты диффузии. Граничные условия (2) следуют из предположения о замкнутости местообитания. В модели предполагается, что хищники не рождаются и не умирают. Тогда, в силу (2), осредненное по пространству значение плотности популяции хищников $\langle N \rangle = \int_0^L N dx / L$ постоянно и может интерпретироваться как параметр

$$\frac{d\langle N \rangle}{dt} = \frac{1}{L} \frac{d}{dt} \int_0^L N dx = \frac{1}{L} \left(-Nv + \delta_N \frac{\partial N}{\partial x} \right) \Big|_{x=0,L} = 0.$$

Система (1)–(2) имеет два однородных стационарных режима

$$(R_1, N_1, v_1) = (0, \langle N \rangle, 0), \quad (R_2, N_2, v_2) = (1 - \langle N \rangle, \langle N \rangle, 0). \quad (3)$$

Первый из режимов соответствует вымиранию жертв, а второй – пространственно-однородному ненулевому уровню хищников и жертв. В [12] проведен линейный анализ устойчивости режима (R_2, N_2, v_2) относительно неоднородных по пространству возмущений. Показано, что при достаточно большом коэффициенте таксиса κ однородный режим (R_2, N_2, v_2) теряет устойчивость колебательно, и при росте κ в модели реализуется периодическая пространственно-неоднородная динамика. Дальнейший аналитический анализ нестационарных режимов и бифуркаций в задаче (1)–(2) затруднен, и следует прибегнуть к численному исследованию.

Для пространственной аппроксимации задачи (1)–(2) использовались два принципиально разных метода: проекционный метод Бубнова–Галеркина и сеточный метод прямых. Для обоих методов рассматривались аппроксимации различных размерностей. Это делалось для контроля правильности получаемых численных результатов.

В случае метода Бубнова–Галеркина решение системы (1)–(2) разыскивалось в виде отрезка ряда по базисным функциям, удовлетворяющим граничным условиям (2)

$$R = R_0(t) + \sum_{k=1}^m R_k(t) \cos\left(\frac{\pi}{L} kx\right), \quad N = \langle N \rangle + \sum_{k=1}^m N_k(t) \cos\left(\frac{\pi}{L} kx\right), \\ v = \sum_{k=1}^m v_k(t) \sin\left(\frac{\pi}{L} kx\right).$$

Неизвестные коэффициенты разложения $R_0(t), \dots, R_m(t), N_1(t), \dots, N_m(t), v_1(t), \dots, v_m(t)$ определялись из условия ортогональности невязки базисным функциям. Корректность применения метода Бубнова–Галеркина к исследованию подобных задач обсуждена в [19]. В результате применения метода Бубнова–Галеркина исследование задачи (1)–(2) сводится к анализу следующей системы $3m + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{cases} \frac{dR_0}{dt} = R_0(1 - R_0 - \langle N \rangle) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m R_k (R_k + N_k), \\ \frac{dR_i}{dt} = R_i(1 - \langle N \rangle - \delta_R \frac{\pi^2}{L^2}) - \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{m-i} R_{k+i} (2R_k + N_k) + R_k N_{i+k} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{i-1} R_k (N_{i-k} + R_{i-k}) + 3R_i R_0 + R_0 N_i \right], \\ \frac{dN_i}{dt} = -\langle N \rangle \frac{i\pi}{L} v_i - \delta_N \frac{i^2 \pi^2}{L^2} N_i + \frac{i\pi}{2L} \left[\sum_{k=1}^{m-i} v_k N_{k+i} - v_{k+i} N_k - \sum_{k=1}^{i-1} v_k N_{i-k} \right], \\ \frac{dv_i}{dt} = -\kappa \frac{i\pi}{L} R_i - \delta_v \frac{i^2 \pi^2}{L^2} v_i, \quad i = 1 \dots m, \end{cases} \quad (4)$$

где m – количество базисных функций. В расчетах m предполагалось достаточным, если при его увеличении в два раза численные результаты не изменялись.

Отметим, что аппроксимация (4) сохраняет свойство исходной задачи (1)–(2) – для неё осредненное значение плотности популяции хищников $\langle N \rangle$ постоянно (проверяется непосредственной подстановкой с учетом (4)):

$$\frac{d\langle N \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L} \sum_{k=1}^m N_k \int_0^L \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right) dx \right) = 0.$$

При использовании метода прямых решение системы (1)–(2) на отрезке $x \in [0, L]$ строилось в узлах равномерной сетки $x_i = ih, i = 0 \dots M, h = L/M$. После дифференцирования нелинейного члена во втором уравнении системы (1) и аппроксимации первых и вторых производных по x центральными разностями дискретизованная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dR_i}{dt} = R_i(1 - N_i - R_i) + \delta_R \frac{R_{i-1} - 2R_i + R_{i+1}}{h^2}, \quad i = 1 \dots M - 1, \\ \frac{dN_i}{dt} = -N_i \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} - v_i \frac{N_{i+1} - N_{i-1}}{2h} + \delta_N \frac{N_{i-1} - 2N_i + N_{i+1}}{h^2}, \\ \frac{dv_i}{dt} = \kappa \frac{R_{i+1} - R_{i-1}}{2h} + \delta_v \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2}, \quad i = 2 \dots M - 2, \end{cases} \quad (5)$$

где $R_i(t) = R(x_i, t), N_i(t) = N(x_i, t), v_i(t) = v(x_i, t)$ – значения переменных во внутренних узлах сетки. В уравнениях относительно значений во внешних узлах сетки пространственные производные скорости перемещения хищников $v(t)$ аппроксимированы разностями вперед, а остальные пространственные производные – центральными разностями. В результате применения метода прямых задача (1)–(2)

сводится к системе $3M + 1$ ОДУ, где $M + 1$ – количество узлов сетки. Построенная аппроксимация (5) сохраняет свойство исходной задачи (1)–(2) – для нее значение $\langle N \rangle$ постоянно:

$$\frac{d\langle N \rangle}{dt} = \frac{1}{L} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^M \frac{N_i + N_{i-1}}{2} h \right) = \frac{h}{L} \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{dN_i}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{dN_0}{dt} + \frac{dN_M}{dt} \right) \right) = 0.$$

Данное равенство проверяется непосредственной подстановкой выражений для dN_i/dt и суммированием.

Динамика систем (4) и (5) рассчитывалась методом Рунге–Кутты четвертого порядка с контролем точности и автоматическим выбором шага. Для построения решения методом Бубнова–Галеркина использовалось $m = 30 \dots 70$ базисных функций, а методом прямых – выбиралось $M = 100 \dots 300$ узлов. Интервал изменения независимой переменной $t \in [0, T]$ (времени) в расчетах задавался так, чтобы реализующийся аттрактор установился с высокой точностью. Построение отображения Пуанкаре, определяемого гиперплоскостью $f(R, N, v) = 0$, проводилось с помощью расчета траектории системы и метода бисекций. Методы проведения вычислительных экспериментов были реализованы в виде программ на языке C++. Визуализация и анализ решений проводились средствами пакета MATLAB. Частотный анализ динамики переменных проводился с помощью функции `fft` (быстрого преобразования Фурье) пакета MATLAB. Показатели Ляпунова находились методом, предложенным в [20], который реализован в программе MATDS [21].

2. Схема и результаты численного анализа бифуркаций

Исследование бифуркаций при изменении параметров выполнено с помощью процедуры продолжения, когда в качестве начального значения при решении задачи Коши брались значения, соответствующие аттрактору, полученному для предыдущего набора параметров. Для определения типа динамики использовались: анализ проекций решений на характерную плоскость; расчет спектра Фурье; построение отображения Пуанкаре; вычисление показателей Ляпунова. В качестве переменных при анализе и визуализации результатов использовались $\langle RN \rangle = \int_0^L RN dx / L$ (среднее по интервалу потребление жертв хищниками) и $\langle R \rangle = \int_0^L R dx / L$ (средняя плотность популяции жертв).

Расчеты проводились для $t \geq 1000$ (такой временной интервал гарантировал установление аттрактора) при следующих фиксированных значениях параметров:

$$\delta_R = 0.005, \quad \delta_N = 0.05, \quad \delta_v = 0.0001, \quad L = 1. \quad (6)$$

Решения, полученные разными методами, сравнивались между собой. Результаты считались достоверными при их качественном совпадении и количественной близости (если различие бифуркационных значений параметров и проекций на плоскость не превышало 5%). На рис. 1 приведен пример такой проверки, где даны проекции установившегося аттрактора на плоскость, полученные методом Бубнова–Галеркина с использованием $m = 45$ базисных функций и методом прямых с $M = 100$ узлов аппроксимации по пространству для двух значений параметров. Видно, что проекции

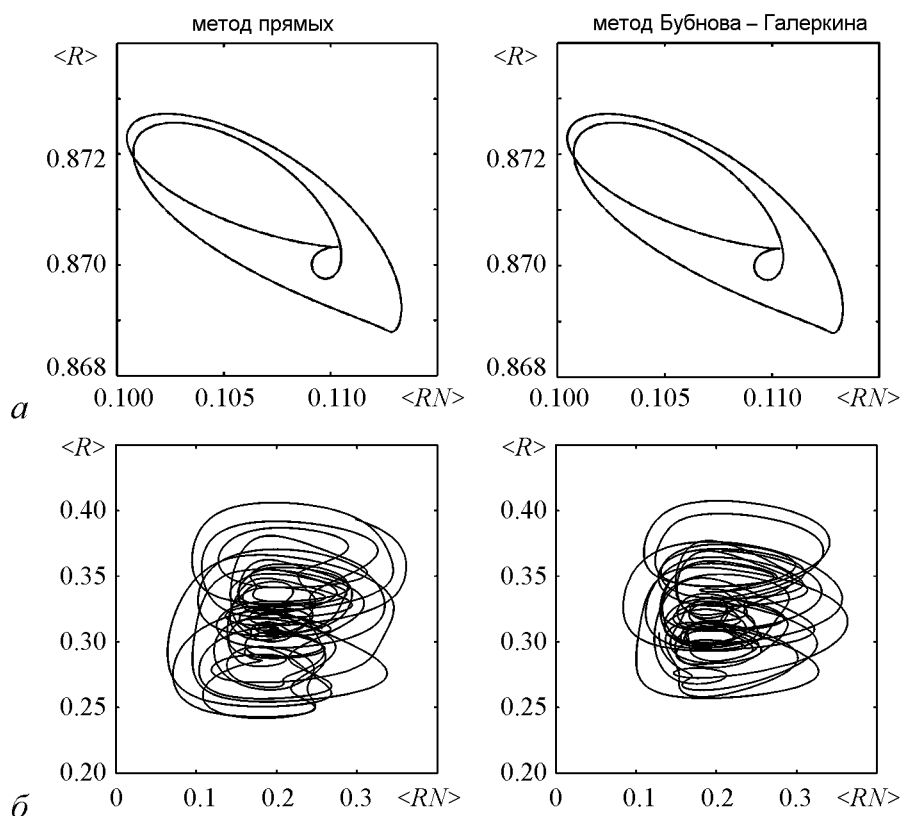


Рис. 1. Проекция на плоскость $\langle RN \rangle, \langle R \rangle$ при наборе параметров (6), $\kappa = 2$, $\langle N \rangle = 0.13$ (а), $\langle N \rangle = 0.8$ (б)

практически идентичны для двух типов аппроксимаций в случае детерминированной динамики (предельные циклы) и находятся в одной области пространства при хаотическом поведении. Подобная проверка проводилась для всех представленных ниже результатов.

В качестве бифуркационных параметров были выбраны коэффициент таксиса κ и средняя плотность популяции хищников $\langle N \rangle$. Такой выбор обусловлен тем, что эти параметры во многом определяют свойства сообществ активных хищников и пассивных жертв, см. [11–13].

Проведенное исследование показало, что в задаче (1)–(2) могут наблюдаться разнообразные режимы: от стационарного распределения популяционных плотностей (в случае малого количества хищников и низкого коэффициента κ) до хаотического распределения (при больших κ и $\langle N \rangle$). Приведенная на рис. 2 диаграмма демонстрирует разнообразие популяционной динамики в зависимости от бифуркационных параметров. При построении диаграммы в расчетах использовались случайные начальные распределения переменных и решение задачи Коши из этих начальных данных до установления аттрактора. Для диагностики типа режима использовался расчет спектра показателей Ляпунова. Видно, что с увеличением активности хищников и коэффициента таксиса κ область, соответствующая хаотической динамике, расширяется и хаотизация динамики сообщества возникает при меньшей средней плотности популяции хищников $\langle N \rangle$.

Анализ бифуркаций проводился с использованием процедуры продолжения по параметру $\langle N \rangle$ при нескольких значениях параметра κ . Наиболее сложным и

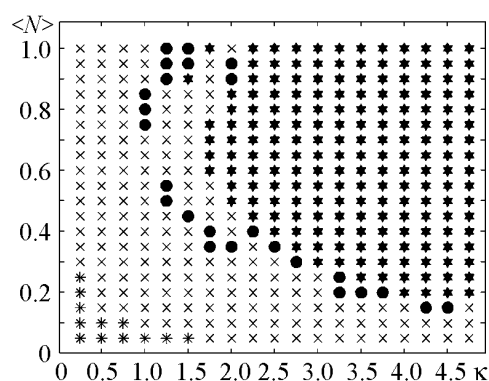


Рис. 2. Разнообразие режимов в задаче (1)–(2) с набором параметров (6) на двухпараметрической плоскости $k, \langle N \rangle$: * – устойчивое стационарное распределение, x – устойчивый пространственно-неоднородный периодический режим, • – квазипериодический режим, ☆ – хаотический режим

интересным оказался сценарий при $k = 2$: стационарный режим \rightarrow предельный цикл \rightarrow удвоение предельного цикла \rightarrow квазипериодический режим \rightarrow хаотический режим \rightarrow предельный цикл \rightarrow квазипериодический режим \rightarrow хаотический режим \rightarrow квазипериодический режим \rightarrow периодический режим. В таблице представлены области параметра $\langle N \rangle$, соответствующие различным режимам. При проведении расчетов в случае метода Бубнова–Галеркина использовались 45 базисных функций, а в случае метода прямых – 100 узлов.

Таблица

Области изменения параметра $\langle N \rangle$ с качественно одинаковым поведением системы при наборе параметров (6) и $k = 2$

№	Метод Бубнова–Галеркина $\langle N \rangle$	Метод прямых $\langle N \rangle$	Наблюдаемые режимы
1	0.000 – 0.040	0.000 – 0.040	равновесие $(1 - \langle N \rangle, \langle N \rangle, 0)$
2	0.041 – 0.123	0.041 – 0.123	предельный цикл
3	0.124 – 0.309	0.124 – 0.307	удвоенный предельный цикл
4	0.310 – 0.337	0.308 – 0.334	квазипериодический режим и резонансные циклы
5	0.338 – 0.353	0.335 – 0.349	хаотический режим
6	0.354 – 0.497	0.350 – 0.493	периодический режим
7	0.498 – 0.542	0.494 – 0.531	квазипериодический режим и резонансные циклы
8	0.543 – 0.920	0.532 – 0.928	хаотический режим
9	0.921 – 0.924	0.929 – 0.932	квазипериодический режим и резонансные циклы
10	0.925 – 1.000	0.933 – 1.000	предельный цикл

На рис. 3 и рис. 4 представлены установившиеся режимы из каждой параметрической области, приведенной в таблице. На рис. 3 изображены проекции реализующегося аттрактора на плоскость $(\langle RN \rangle, \langle R \rangle)$, а на рис. 4 приведены порождаемые аттракторами отображения Пуанкаре на гиперплоскости $v(0.5, t) = 0$ в тех же проекциях. Приведенные рисунки демонстрируют бифуркационные переходы, приводящие как к детерминированной периодической и квазипериодической динамике, так и к хаотическому поведению. Усложнение динамики может происходить в результате удвоений периода (см. рис. 3 и 4 при $\langle N \rangle = 0.11$ и $\langle N \rangle = 0.13$), рождения устойчивого инвариантного тора (при $\langle N \rangle = 0.32$ и $\langle N \rangle = 0.53$), возникновения хаотической динамики в результате распада инвариантного тора (при $\langle N \rangle = 0.345$ и $\langle N \rangle = 0.8$).

Разнообразие возможного поведения популяции не ограничивается перечисленными режимами. Было обнаружено, что в задаче (1)–(2) возможно сосущество-

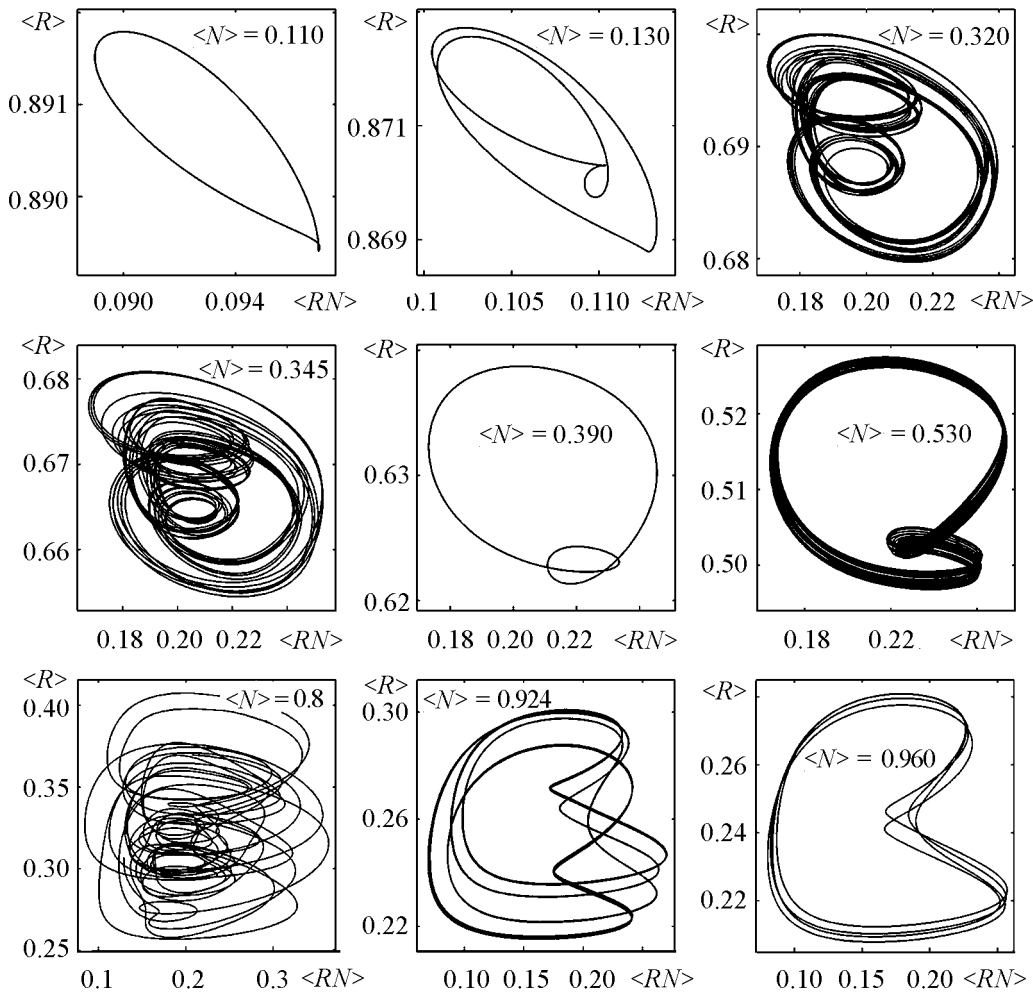


Рис. 3. Проекция решений задачи (1)–(2) с набором параметров (6) и $\kappa = 2$ на плоскость $\langle RN \rangle, \langle R \rangle$ для различных значений $\langle N \rangle$

вание качественно различных режимов при одинаковых значениях параметров, а их реализация зависит от начальных состояний экосистемы. В численных экспериментах начальные данные для задачи Коши выбирались следующим образом:

$$R(x, 0) = R_2 + \varepsilon + \delta, \quad N(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad (7)$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$ – степень отклонения плотности популяции жертв от равновесного значения R_2 ; δ – параметр, выбираемый так, чтобы начальные значения были в области, имеющей биологический смысл, то есть если $R_2 + \varepsilon > 1$, то $\delta = 1 - (R_2 + \varepsilon)$, иначе $\delta = 0$. Необходимые для численных экспериментов значения параметров даны в (6); $\kappa = 2$, $\langle N \rangle = 0.35$.

На верхней части рис. 5 дано распределение реализации сосуществующих периодического и хаотического режима для различных ε , а на нижней части рисунка – проекции этих аттракторов. Видно, что тип устанавливающегося режима не зависит от степени отклонения плотности жертвы от стационарного распределения ε , что подтверждает ранее известные факты, см. [22, 23].

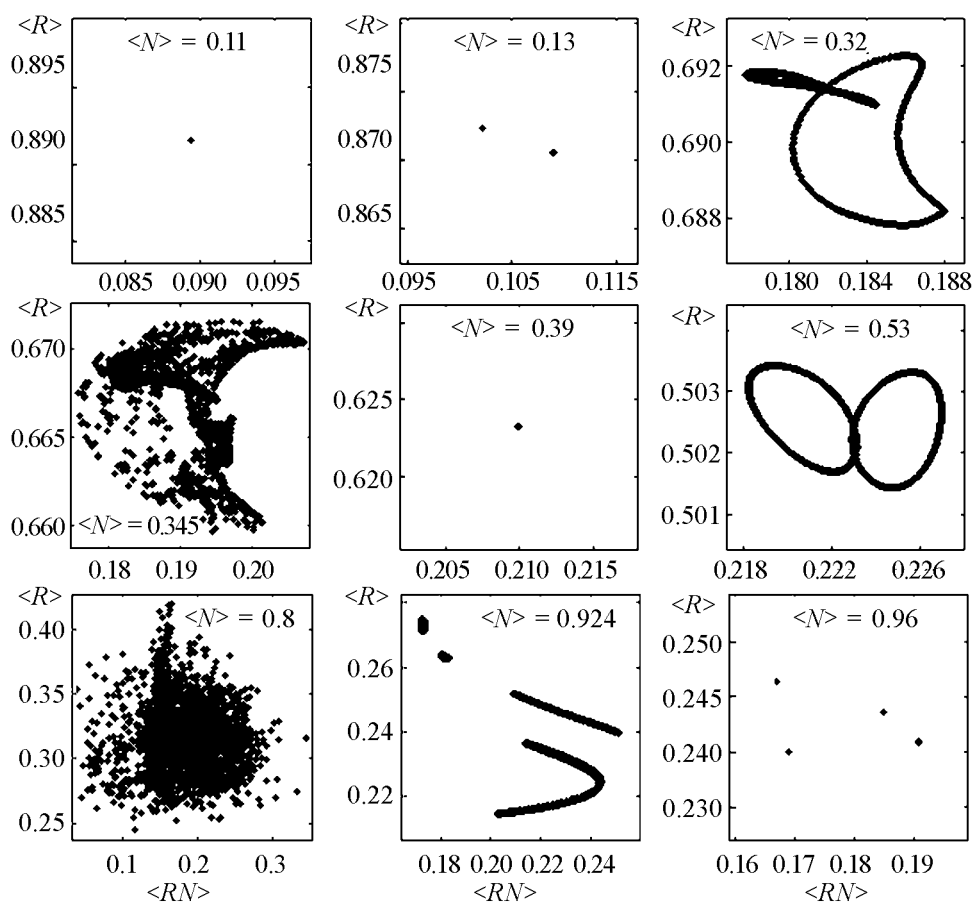


Рис. 4. Проекция отображения Пуанкаре гиперплоскостью $v(0.5, t) = 0$ решений задачи (1)–(2) с набором параметров (6) и $\kappa = 2$ на плоскость $\langle RN \rangle, \langle R \rangle$ для различных значений $\langle N \rangle$

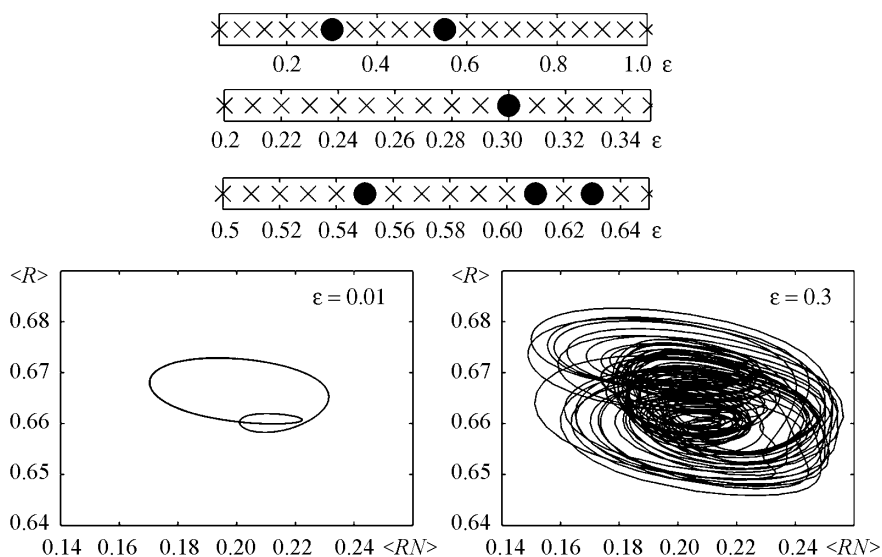


Рис. 5. Проекция отображения Пуанкаре гиперплоскостью $v(0.5, t) = 0$ решений задачи (1)–(2) с набором параметров (6) и $\kappa = 2$ на плоскость $\langle RN \rangle, \langle R \rangle$ для различных значений ε

Таким образом, нами показано, что при различных значениях параметра в системе могут реализоваться стационарные, периодические, квазистационарные и хаотические режимы. В данной работе мы не пытались изучить бифуркации в реальных популяциях, так как нами использовалась достаточно простая математическая модель и целью исследования было выяснение возможности сложной динамики только при изменении миграционной активности и количества хищников. Однако полученные результаты полностью согласуются с работами [24, 25], в которых с помощью аналогичного формализма изучалась популяционная динамика системы инфузория дидиния *Didinium nasutum* (хищник) – инфузория парамеция хвостатая *Paramecium caudatum* (жертва) [24] и взаимодействия хищного клеща *Phytoseiulus persimilis* (хищник) и паутиного клеща *Tetranychus urticae* (жертва) [25]. В частности, в [24, 25] было показано, что форма наблюдаемых пространственных структур зависит от начальных данных и вида трофической функции, а также, что в модели реализуется хаотическая динамика, когда коэффициент таксиса значительно выше критического значения, при котором происходит потеря устойчивости.

Заключение

В работе проведено бифуркационное исследование достаточно простой пространственно-распределенной модели хищник–жертва, учитывающей трофотаксис хищников и демографические процессы в популяции жертв. Оказалось, что даже в такой упрощенной ситуации в популяции могут реализоваться сложные бифуркационные сценарии, которые приводят к разнообразной (периодической, квазипериодической и хаотической) пространственно-временной динамике. Эти явления в наибольшей степени зависят от двух параметров системы – общей численности популяции хищников и их пространственной активности. То есть можно предположить, что именно эти факторы определяют тип динамики популяций при сделанных предположениях. Полученные результаты являются еще одним подтверждением того, что сложная динамика популяций может быть следствием внутренних механизмов экосистем, а не внешних факторов. Обнаружено, что задача (1)–(2) чувствительна к начальному распределению и в ней могут сосуществовать несколько качественно различных аттракторов (например, периодический и хаотический режимы) при одинаковых параметрах.

При численном исследовании одновременно использовались два принципиально разных метода аппроксимации уравнений в частных производных: проекционный метод Бубнова–Галеркина и сеточный метод прямых. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что даже аппроксимации невысоких размерностей (десятки базисных функций или узлов сетки) адекватно описывают бифуркационные механизмы в нелинейных задачах типа реакция–диффузия–конвекция и достаточны для получения качественных численных результатов.

Работа частично поддержана РФФИ (код проекта 14-01-00470).

Библиографический список

1. *Иваницкий Г.Р., Медвинский А.Б., Цыганов М.А.* От беспорядка к упорядоченности – на примере движения микроорганизмов // УФН. 1991. Т. 161, № 4. С. 13.
2. *Иваницкий Г.Р., Медвинский А.Б., Цыганов М.А.* От динамики популяционных

- автоволн, формируемых живыми клетками, к нейроинформатике // УФН. 1994. Т. 164, № 10. С. 1041.
3. *Okubo A., Levin S.* Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives. New York: Springer-Verlag, 2001. 467 p.
 4. *Murray J.D.* Mathematical Biology: I. An Introduction. Vol. I. NY: Springer, 2002. 576 p.
 5. *Murray J.D.* Mathematical Biology: II. Spatial Models and Biomedical Applications. Vol. II. NY: Springer, 2003. 811 p.
 6. *Dolak Y., Hillen T.* Cattaneo models for chemosensitive movement numerical solution and pattern formation // Journal of Mathematical Biology. 2003. Vol. 46. P. 153.
 7. *Berg H.C.* Motile behavior of bacteria // Physics Today. 2000. Vol. 53, № 1. P. 24.
 8. *Berg H.C.* E. coli in Motion. NY: Springer, 2004. 133 p.
 9. *Budrene E.O., Berg H.C.* Complex patterns formed by motile cells of Escherichia coli // Nature. 1991. Vol. 349, № 6310, P. 630.
 10. *Tyson R., Lubkin S.R., Murray J.D.* Model and analysis of chemotactic bacterial patterns in a liquid medium // Journal of Math. Biology. 1999. Vol. 38. P. 359.
 11. *Говорухин В.Н., Моргулис А.Б., Тютюнов Ю.В.* Медленный таксис в модели хищник–жертва // Докл. РАН. 2000. Т. 372, № 6. С. 730.
 12. *Arditi R., Tyutyunov Yu., Morgulis A., Govorukhin V., Senina I.* Directed movement of predators and the emergence of density-dependence in predator–prey models // Theoretical Population Biology. 2001. Vol. 59. P. 207.
 13. *Тютюнов Ю.В., Сапухина Н.Ю., Моргулис А.Б., Говорухин В.Н.* Математическая модель активных миграций как стратегии питания в трофических сообществах // Журнал общей биологии. 2001. Т. 62, № 3. С. 253.
 14. *Цыганов М.А., Бикташев В.Н., Бриндли Дж., Холден А.В., Иваницкий Г.Р.* Волны в кросс-диффузионных системах – особый класс нелинейных волн // УФН. 2007. Т.177, № 3. С. 275.
 15. *Hillen T., Painter K.J.* A user’s guide to PDE models for chemotaxis // Journal of Mathematical Biology. 2009. Vol. 58. P. 183.
 16. *Тютюнов Ю.В., Загребнева А.Д., Сурков Ф.А., Азовский А.И.* Микромасштабная пятнистость распределения веслоногих рачков как результат трофически-обусловленных миграций // Биофизика. 2009. Т. 54, № 3. С. 508.
 17. *Hataue I.* Spurious numerical solutions in higher dimensional discrete systems // AIAA journal. 1995. Vol. 33, № 1. P.163.
 18. *Garba S.M., Gumel A.B., Lubuma J.M.-S.* Dynamically-consistent non-standard finite difference method for an epidemic model // Mathematical and Computer Modelling. 2011. Vol. 53, № 1–2. P. 131.
 19. *Chen L., Jünger A.* Analysis of a parabolic cross-diffusion population model without self-diffusion // Journal of Differential Equations. 2006. Vol. 224, № 1. P. 39.
 20. *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., and Vastano J.A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D. 1985. № 16. P. 285.
 21. *Говорухин В.Н.* Пакет MATDS. <http://kvm.math.rsu.ru/matds/>
 22. *Petrovskii S.V., Malchow H.* Wave of chaos: New mechanism of pattern formation in spatio-temporal population dynamics // Theoretical Population Biology. 2001. Vol. 59. P. 157.

23. Медвинский А.Б., Петровский С.В., Тихонова И.А., Тихонов Д.А., Ли Б.Л., Вентурино Э., Мальхе Х., Иваницкий Г.Р. Формирование пространственно-временных структур, фракталы и хаос в концептуальных экологических моделях на примере динамики взаимодействующих популяций планктона и рыбы // УФН. 2002. Т. 172, № 1. С. 31.
24. Chakraborty A., Singh M., Lucy D., Ridland P. Predator-prey model with prey-taxis and diffusion // Mathematical and Computer Modelling. 2007. Vol. 46 (3-4). P. 482.
25. Chakraborty A., Singh M., Ridland P. Effect of prey-taxis on biological control of the two-spotted spider mite: A numerical approach // Mathematical and Computer Modelling. 2009. Vol. 50, №3-4. P. 598.

Поступила в редакцию 18.04.2014
После доработки 16.07.2014

BIFURCATIONS IN ACTIVE PREDATOR – PASSIVE PREY MODEL

A.D. Zagrebneva¹, V.N.Govorukhin¹, F.A. Surkov²

¹Southern Federal University

²I.I. Vorovich Institute of Mechanics and Applied Mathematics
Southern Federal University

Bifurcations were studied numerically in the system of partial differential equations, which is a one variant of predator-prey models. The mathematical model takes into account spatial distribution in habitat, active directed predator movements, birth and death process in prey population. The analysis of possible population dynamics development was performed by two qualitatively different discrete sampling techniques (Bubnov-Galerkin's method and grid method). As a bifurcation parameters the predator quantity and predator reaction rate to spatial non-uniformity of prey population were used. As a result of numerical investigation was found that population under these assumptions can demonstrates a complex bifurcation transitions which leads to various spatio-temporal dynamics: periodic, quasi-periodic and chaotic regimes.

Keywords: Population dynamics, bifurcations, numerical analysis, taxis.



Зagreбнева Анна Дмитриевна – родилась в Ростове-на-Дону (1983), окончила Ростовский государственный университет (2006). После окончания университета работает в Южном федеральном университете. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ЮФУ (2010) в области математического моделирования биологических объектов, применения численных методов и создания программных комплексов. Опубликовала более 20 печатных работ (из них 5 статей) по направлениям, указанным выше.

344090 Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1
Кафедра глобальных информационных систем
Факультет высоких технологий
Южный федеральный университет
E-mail: azagrebneva@sfedu.ru



Говорухин Василий Николаевич – родился в Ростове-на-Дону (1962), окончил Ростовский государственный университет (1984). После окончания университета работает в РГУ (ныне Южный федеральный университет). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в РГУ (1999) в области динамики жидкости, применения вычислительных методов и компьютерного эксперимента в различных областях науки. Опубликовал более 40 научных статей по вычислительной математике, гидродинамике, математической биологии.

344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
Кафедра вычислительной математики
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Южный федеральный университет
E-mail: vgov@math.rsu.ru



Сурков Федор Алексеевич – родился в Сухуми (1950), окончил с отличием Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (1971). После окончания МГУ работал в Научно-исследовательском институте механики и прикладной математики им И.И. Воровича младшим, старшим научным сотрудником, заведующим отделом, заместителем директора по научной работе, в настоящее время работает директором. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ВЦ АН СССР (1979), работает в области математического моделирования сложных эколого-экономических систем, использования геоинформационных технологий в математическом моделировании, распознавания образов по данным космического мониторинга. Опубликовал более 60 научных статей. Лауреат Государственной премии СССР.

344090 Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1
НИИ механики и прикладной математики им. И.И. Воровича
Южного федерального университета
E-mail: sur@gis.sfedu.ru

Правила представления рукописей

Рукописи, **объемом не более 16 стр. и 8 рис.** принимаются в редакцию в 2 вариантах: бумажном и электронном.

Первоначально в редакцию присылается PDF-файл статьи с соответствующим сопроводительным письмом. После получения положительной рецензии автор присылает следующие документы. Наш эл. адрес: and@nonlin.sgu.ru

1. Бумажный вариант (1 экз.) должен быть напечатан шрифтом размером в 12 pt через 1,5 интервала при ширине рабочего поля не менее 16 см. Если рисунки (только черно-белые!) не вставлены в текст, то они выполняются на отдельных страницах также в 1-ом экз. Под рисунком указывается его номер, фамилии авторов, название статьи; подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.

2. Требования к оформлению текста.

На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны:

- индекс УДК,
- название статьи,
- инициалы и фамилии авторов,
- названия организаций, в которых работают авторы,
- краткая аннотация статьи с ключевыми словами, составленная по форме, удобной для непосредственного включения ее в РЖ, издаваемые ВИНТИ.

3. К статье прилагаются в 1 экз.:

- перевод на английский язык:
названия статьи,
инициалов и фамилий авторов,
названий организаций, в которых работают авторы,
аннотации и ключевых слов;
- краткие сведения об авторах;
- фотографии авторов в графических форматах JPG, GIF и т.д., или сканированные с разрешением не менее 300dpi без дополнительной компьютерной обработки (с сайтов фотографии не присылать);
- e-mail каждого автора;
- почтовый адрес организации, в которой работает автор на постоянной основе.

4. Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме:

Сидоров Петр Иванович – родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИАН заведующим отделом. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1964) и доктора физико-математических наук (1977) в области теории колебаний и волн, радиофизика и электроника, применение нелинейной динамики в различных областях науки. Автор монографии «Детерминированный хаос и экономика» и учебника «Волны в экологии» (в соавторстве с...). Опубликовал 120 научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала International Journal of Chaos Theory и член редакционной коллегии журнала «Физика и жизнь».

5. В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке указываются:

- а) для книг – фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;
- б) для журнальных статей – фамилия автора, инициалы, название статьи, название журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;
- в) для депонированных статей – название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;
- г) для препринта – фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;
- д) для материалов конференций, школ, семинаров – фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

6. В конце статьи авторы должны указать наименование программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.

7. Электронный вариант. Статья оформляется с использованием макропакета LATEX 2 ϵ . Рекомендуется пользоваться компилятором MiKTEX (MiKTeX2.4), так как именно им пользуются в редакции. В редакцию присылать только TEX-файл (с англ. аннотацией и ав. сведениями) без стилевых файлов. Все иллюстрации, включенные в оригинал-макет, предоставляются в виде отдельных файлов, записанных в любом из форматов: TIFF, GIF, JPEG, EPS. Название файла должно состоять из номера рисунка в тексте.

В виде исключения принимаются статьи, подготовленные с помощью текстового редактора Microsoft Word (все формулы должны быть набраны при помощи Equation или MathType).

Все публикации в журнале, в том числе и публикации аспирантов, бесплатные.