

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 18, № 1 (101), 2010, Саратов

СОДЕРЖАНИЕ

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

- Ланда П.С.* Возбуждение хаотических и стохастических колебаний в различных системах 3
- Баранов С.В., Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* Хаос в фазовой динамике осциллятора ван дер Поля с модулированной добротностью и дополнительной запаздывающей обратной связью 12
- Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Перемежаемость типа I в присутствии шума и перемежаемость игольного ушка 24

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

- Баширцеева И.А., Перевалова Т.В., Ряшко Л.Б.* Анализ индуцированных шумом бифуркаций в системе Хопфа 37
- Жусубалиев Ж.Т., Яночкина О.О.* Рождение и разрушение многослойной замкнутой кривой в необратимых отображениях 51

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* Хаос в радиотехническом устройстве с квадратичным фазовым модулятором и интерференционным усилением квазигармонического сигнала: модель и вычислительный эксперимент 61
- Закирьянов Ф.К., Фахретдинов М.И.* Конформационный *B-A* переход в модели молекулы ДНК с несимметричным двухъямным потенциалом взаимодействия между нуклеотидами 80
- Курушина С.Е., Максимов В.В.* Шумоиндуцированные фазовые переходы в процессах конкуренции во внешних флуктуирующих средах 88
- Антипов О.И.* Анализ хаотической работы составного стабилизатора, состоящего из двух понижающих конверторов, связанных по схеме ведущий-ведомый, при помощи фрактальных мер детерминированного хаоса 101

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA

- Трубецков Д.И.* Две тысячи девятый год в датах нелинейной динамики 112

КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ

- Алексеев Ю.К., Сухоруков А.П.* Введение в теорию катастроф 138
- Ланда П.С.* Автоколебания в распределенных системах 140
- Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы . 143
- Трубецков Д.И.* Медицинский труэнтнизм и кентавристика 146

PERSONALIA

- Митенков Ф.М. К 85-летию 148
- Правила для авторов 155

C O N T E N T S

DETERMINISTIC CHAOS

<i>Landa P.S.</i> Excitation of chaotic and stochastic oscillations in different systems	3
<i>Baranov S.V., Kuznetsov S.P., Ponomarenko V.I.</i> Chaos in the phase dynamics of Q-switched van der Pol oscillator with additional delayed feedback loop	12
<i>Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I., Hramov A.E.</i> Intermittency of type-I with noise and eyelet intermittency	24

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

<i>Bashkirtseva I.A., Perevalova T.V., Ryashko L.B.</i> Analysis of noise-induced bifurcations for the Hopf system	37
<i>Zhusubaliyev Z.T., Yanochkina O.O.</i> Formation and breakdown of a multilayered closed curve in noninvertible maps	51

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

<i>Izmailov I.V., Poizner B.N.</i> Chaos in radio device with square-law phase modulator and interference amplification of quasi-harmonic signal: a model and simulation	61
<i>Zakir'yanov F.K., Fakhretdinov M.I.</i> Conformational <i>B–A</i> transition in the model of DNA molecule with asymmetric double-well interaction potential of nucleotides	80
<i>Kurushina S.E., Maximov V.V.</i> Noise-induced phase transitions in competition processes in the external fluctuated media	88
<i>Antipov O.I.</i> Analysis of stochastic work of the composite voltage stabilizer consisting of two buck converters connected as master–slave by fractal measures of deterministic chaos	101

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

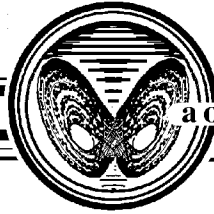
<i>Trubetskov D.I.</i> Nonlinear dynamics dates in 2009	112
---	-----

КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ

<i>Alekseev Yu.K., Suchorukov A.P.</i> An introduction to catastrophe theory	138
<i>Landa P.S.</i> Self-oscillations in distributed systems	140
<i>Landa P.S.</i> Self-oscillations in systems with finite number of degrees	143
<i>Trubetskov D.I.</i> Medicine «truants» and centauristics	146

PERSONALIA

F.M. Mitenkov. To the 85th Birthday	148
Author's rules	155



ВОЗБУЖДЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ

П.С. Ланда

Рассматривается возможная реакция сосредоточенных и распределенных систем на слабые случайные возмущения как силового характера (аддитивные), так и приводящие к параметрическому возбуждению колебаний (мультипликативные). Показано, что мультипликативные возмущения системы могут приводить к коренному изменению ее поведения подобному тому, как это имеет место в термодинамически равновесных системах при фазовых переходах 2-го рода.

Ключевые слова: Силовые и параметрические случайные воздействия, возбуждение колебаний, неравновесные фазовые переходы 2-го рода.

1. Системы со случайными силами

В работах [1,2] приводится классификация динамических систем, которые могут быть представлены в виде четырехполосника с заданным случайным входным воздействием (рис. 1), в зависимости от внутренних свойств системы, определяющих характер ее реакции на приложенное воздействие. Естественно, что выход такой системы также будет случайным. Показано, что рассматриваемые системы можно разделить на три класса: преобразователи, усилители и генераторы стохастичности.

Преобразователь стохастичности — это система, преобразующая подаваемый на нее случайный сигнал, но так, что статистические свойства выходного сигнала полностью определяются статистическими свойствами входного, причем дисперсия выходного сигнала оказывается сравнимой с дисперсией входного. При отсутствии случайного входного сигнала выходной сигнал также отсутствует.

Усилитель стохастичности отличается от преобразователя только тем, что дисперсия его выхода может быть намного большей, чем дисперсия входного воздействия. Даже при стремлении коэффициента усиления к бесконечности, а входного воздействия — к нулю, стохастические свойства выхода, как и в случае преобразователя стохастичности, определяются только этим малым случайным входом. При уменьшении входного воздействия до нуля выходной сигнал также стремится к нулю.

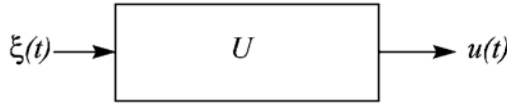


Рис. 1. Блок-схема системы с аддитивным (силовым) случайным воздействием

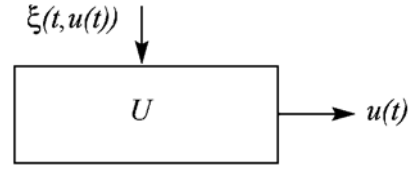


Рис. 2. Блок-схема системы с комбинированным случайным воздействием

В случае генератора стохастичности при сколь угодно малом случайном входе дисперсия выхода остается большей некоторой конечной величины. При этом статистические свойства выходного сигнала оказываются независимыми от статистических свойств входного сигнала. Они полностью определяются свойствами самой невозмущенной системы, ее детерминированным описанием.

Естественно, что в рассматриваемом случае входное случайное воздействие не зависит от координат, описывающих состояние самой динамической системы. В достаточно общем виде стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее поведение такой системы, может быть записано как

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \xi(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{u}(t)$ – вектор, описывающий внутреннее состояние системы; $\xi(t)$ – вектор случайных сил, действующих на систему. В дальнейшем будем называть подобное случайное воздействие на систему аддитивным.

Однако существуют и широко распространены системы, в которых случайное воздействие зависит от координат самой системы (рис. 2). Примером такой системы может служить маятник со случайно вибрирующей (в направлении вертикали) осью подвеса, впервые рассмотренный в [3, 4]. Стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее такие системы, может быть записано в виде

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \xi(\mathbf{u}(t), t). \quad (2)$$

Частным случаем уравнения (2) является такое уравнение:

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \xi_1(t) + \xi_2(t)\mathbf{u}(t), \quad (3)$$

где $\xi_2(t)$ – матрица. Мы видим, что правая часть уравнения (3) представляет собой сумму двух случайных воздействий – аддитивного и мультипликативного.

Поведение систем этого типа существенно отличается от рассмотренного выше. В частности, в таких системах, хотя они являются термодинамически неравновесными, могут происходить явления, подобные равновесным фазовым переходам 2-го рода [5]. При этом в отсутствие аддитивной составляющей стохастичность на выходе системы при изменении интенсивности мультипликативного воздействия возникает не плавно, а скачком. Весьма существенно, что развитие турбулентности в незамкнутых потоках, например, в струях, происходит подобно росту стохастичности в решении уравнения (3) при увеличении интенсивности мультипликативной составляющей входного воздействия [6, 7].

2. Системы с мультипликативным случайным воздействием

Как уже отмечалось, мультипликативное случайное воздействие на динамическую систему также может приводить к появлению случайного сигнала на ее выходе. При этом поведение системы существенно зависит от величины входного параметрического воздействия. При входном случайном параметрическом воздействии, меньшем некоторой величины, выходной сигнал равен нулю. И только, когда входное воздействие превышает некоторый критический уровень, на выходе системы появляется сигнал конечной интенсивности, статистические свойства которого при дальнейшем увеличении входа изменяются слабо. Примером такой системы может служить осциллятор с нелинейным трением и случайным параметрическим воздействием, рассмотренный, например, в работах [8–10]. Наиболее существенно, что статистические свойства возбужденного таким образом сигнала определяются не характеристиками входного сигнала, а свойствами самой системы. Это часто наблюдается и в целом ряде других систем (см., например, [11]).

Уравнение такого осциллятора запишем в виде

$$\ddot{x} + 2\delta(1 + \alpha x^2)\dot{x} + \omega_0^2(1 + \xi(t))x = 0, \quad (4)$$

где $\xi(t)$ – сравнительно широкополосный случайный процесс с ненулевой спектральной плотностью на частоте $\omega = 2\omega_0$.

Приближенное аналитическое решение задачи может быть получено в предположениях, что $\delta/\omega_0 \sim \varepsilon$, $\xi(t) \sim \sqrt{\varepsilon}$, где ε – условный малый параметр, который в окончательных выражениях можно положить равным единице. При этих предположениях уравнение (4) удобно записать в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2\varepsilon\delta(1 + \alpha x^2)\dot{x} - \sqrt{\varepsilon}\omega_0^2 \xi(t)x. \quad (5)$$

Уравнение (5) можно решать методом Крылова–Боголюбова [4, 12]. Для этого зададим

$$x = A \cos \psi + \varepsilon u_1 + \dots, \quad \psi = \omega_0 t + \phi, \quad (6)$$

$$\dot{A} = \varepsilon f_1 + \dots, \quad \dot{\phi} = \varepsilon F_1 + \dots, \quad (7)$$

где $u_1, \dots, f_1, \dots, F_1, \dots$ – неизвестные функции. Используя указанный метод, найдем выражения для неизвестных функций f_1 и F_1 . Подставляя эти выражения в уравнения (7), получаем

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\delta \left(1 + \frac{3\omega_0^2}{4} \alpha A^2\right) A + \omega_0 \overline{g_1(A, \phi, t)}, \\ \dot{\phi} &= \omega_0 \overline{g_2(\phi, t)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$g_1(A, \phi(t), t) = \frac{A}{2} \xi(t) \sin 2\psi(t), \quad g_2(\phi(t), t) = \xi(t) \cos^2 \psi(t). \quad (9)$$

Черта над выражением обозначает усреднение по времени.

Как следует из [4], уравнениям (8) соответствует следующее уравнение Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w(A, \phi)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial A} \left\{ \left[\omega_0^2 \int_{-\infty}^0 \left\langle \overline{\left\langle \frac{\partial g_1(A, \phi, t)}{\partial A} g_1(A, \phi, t + \tau) \right\rangle} \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left\langle \overline{\left\langle \frac{\partial g_1(A, \phi, t)}{\partial \phi} g_2(\phi, t + \tau) \right\rangle} \right\rangle \right] d\tau - \delta \left(1 + \frac{3\omega_0^2}{4} \alpha A^2 \right) A \right\} w(A, \phi) \\
& - \omega_0^2 \int_{-\infty}^0 \left\langle \overline{\left\langle \frac{\partial g_2(\phi, t)}{\partial \phi} g_2(\phi, t + \tau) \right\rangle} \right\rangle d\tau \frac{\partial w(A, \phi)}{\partial \phi} + \\
& + \frac{K_1 \omega_0^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial A^2} (A^2 w(A, \phi)) + \frac{K_2 \omega_0^2}{2} \frac{\partial^2 w(A, \phi)}{\partial \phi^2}, \tag{10}
\end{aligned}$$

где угловые скобки означают усреднение по статистическому ансамблю,

$$K_1 = \frac{\kappa(2\omega_0)}{8}, \quad K_2 = \frac{1}{4} \left(\kappa(0) + \frac{\kappa(2\omega_0)}{2} \right) \tag{11}$$

и $\kappa(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle \cos \omega \tau d\tau$ – спектральная плотность процесса $\xi(t)$ на частоте ω .

Вычислим интегралы в уравнении (10) с учетом (9)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \left(\left\langle \overline{\left\langle \frac{\partial g_1(A, \phi, t)}{\partial A} g_1(\phi, t + \tau) \right\rangle} \right\rangle + \left\langle \overline{\left\langle \frac{\partial g_1(\phi, t)}{\partial \phi} g_2(\phi, t + \tau) \right\rangle} \right\rangle \right) d\tau = \frac{3\kappa(2\omega_0)}{16}, \\
\int_{-\infty}^0 \left\langle \overline{\left\langle \frac{\partial g_2(\phi, t)}{\partial \phi} g_2(\phi, t + \tau) \right\rangle} \right\rangle d\tau = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^0 \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle \sin 2\omega_0 \tau d\tau \equiv M. \tag{12}
\end{aligned}$$

Значение M зависит от характеристик случайного процесса $\xi(t)$: если $\xi(t)$ – белый шум, то $M = 0$, но если $\xi(t)$ имеет конечное время корреляции, например, в случае, когда его спектральная плотность имеет вид $\kappa(\omega) = \frac{\beta^2 \kappa(2\omega_0)}{(\omega - 2\omega_0)^2 + \beta^2}$, где β имеет порядок ширины полосы случайного процесса $\xi(t)$, то $M = -\frac{\beta \omega_0 \kappa(2\omega_0)}{4(16\omega_0^2 + \beta^2)}$. Следует заметить, что M отрицательно, то есть оно уменьшает среднюю частоту колебаний.

Принимая во внимание (12), находим уравнения Ланжевена, соответствующие уравнению (10),

$$\dot{A} = \delta \left(\eta - \frac{3\omega_0^2}{4} \alpha A^2 \right) A + \frac{\omega_0}{2} A \zeta_1(t), \quad \dot{\phi} = \omega_0^2 M + \omega_0 \zeta_2(t), \quad (13)$$

где

$$\eta = \frac{3\omega_0^2 \kappa(2\omega_0)}{16\delta} - 1, \quad (14)$$

$\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ – белые шумы с нулевыми средними значениями и интенсивностями K_1 и K_2 , соответственно. Из первого уравнения (13) видно, что при $\eta > 0$ и достаточно малом начальном условии амплитуда колебаний будет нарастать со временем, то есть состояние равновесия потеряет устойчивость.

Полученные аналитические результаты подтверждаются численным решением уравнения (4) при $\delta = 0.1$, $\omega_0 = 1$, $\alpha = 10$ [13]. Задаваемый шум имел приблизительно постоянную спектральную плотность в диапазоне от 0 до 100 Гц. При этом вычислялась дисперсия σ_x процесса $x(t)$, которая приблизительно равна $\sqrt{\langle A^2 \rangle} / 2$. Найденная численная зависимость σ_x от интенсивности шума $\kappa = \kappa(2\omega_0) \approx \kappa(0)$ показана на рис. 3 крестиками. Как видно из этого рисунка, полученная зависимость достаточно хорошо аппроксимируется формулой $\sigma_x = 0.33(\kappa - \kappa^*)^{1/2}$, где $\kappa^* = 16\delta / (3\omega_0^2)$ – критическое значение интенсивности шума, при котором происходит возбуждение колебаний. Как известно [5], подобной формулой описывается зависимость параметра порядка от температуры для фазовых переходов 2-го рода с критическим индексом 1/2. Поэтому рассматриваемое явление было названо нами шумоиндуцированным фазовым переходом.

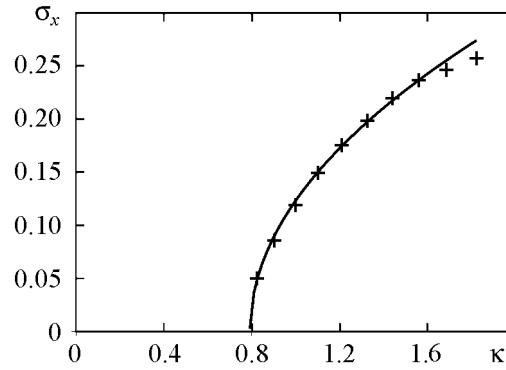


Рис. 3. Зависимость дисперсии колебаний осциллятора σ_x от интенсивности шума κ (крестики). Сплошной линией изображена кривая $0.33\sqrt{\kappa - 0.52734}$

3. Системы с одновременным мультипликативным и аддитивным случайными воздействиями

Если в системе имеются одновременно как аддитивное, так и мультипликативное параметрическое воздействие, то результат может носить смешанный характер.

Рассмотрим этот случай, как и предыдущий, аналитически на примере нелинейного осциллятора, описываемого уравнением [9]

$$\ddot{x} + 2\delta(1 + \alpha \dot{x}^2)\dot{x} + \omega_0^2(1 + \xi_1(t))x = \omega_0^2 \xi_2(t). \quad (15)$$

Приближенное аналитическое решение задачи может быть найдено при тех же условиях, что и раньше.

Задавая решение уравнения (15) в виде (6), получаем для A и ϕ следующие уравнения:

$$\dot{A} = \left[-\delta \left(1 + \frac{3\omega_0^2}{4} \alpha A^2 \right) A + \omega_0 \overline{g_1(A, \phi, t)} \right], \quad (16)$$

$$\dot{\phi} = \overline{\omega_0 g_2(\phi(t), t)},$$

где
$$g_1(A, \phi, t) = \frac{A}{2} \xi_1(t) \sin 2\psi(t) + \xi_2(t) \sin \psi(t), \quad (17)$$

$$g_2(\phi, t) = \xi_1(t) \cos^2 \psi(t) + \frac{1}{A} \xi_2(t) \cos \psi(t).$$

Как и раньше, уравнение Фоккера–Планка, соответствующее уравнениям (16), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(A, \phi)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial A} \left\{ \left[-\delta \left(1 + \frac{3\alpha\omega_0^2}{4} \alpha A^2 \right) A + \omega_0^2 \int_{-\infty}^0 \left\langle \left\langle \frac{\partial g_1(A, \phi, t)}{\partial A} g_1(A, \phi, t + \tau) \right\rangle \right\rangle + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left\langle \frac{\partial g_1(A, \phi, t)}{\partial \phi} g_2(\phi, t + \tau) \right\rangle \right] w(A, \phi) \right\} - \omega_0^2 \int_{-\infty}^0 \left\langle \frac{\partial g_2(\phi, t)}{\partial \phi} g_2(\phi, t + \tau) \right\rangle d\tau \times \\ & \times \frac{\partial w(A, \phi)}{\partial \phi} + \frac{\omega_0^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial A^2} [(K_{11}A^2 + K_{12}) w(A, \phi)] + \left(K_{21} + \frac{K_{22}}{A^2} \right) \frac{\partial^2 w(A, \phi)}{\partial \phi^2} \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $K_{11} = \kappa_{\xi_1}(2\omega_0)/8$, $K_{21} = (1/4)(\kappa_{\xi_1}(0) + \kappa_{\xi_1}(2\omega_0)/2)$, $K_{12} = \kappa_{\xi_1}(\omega_0)/2$, $K_{22} = \kappa_{\xi_1}(\omega_0)/2$.

Вычисляя интегралы, находим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \left(\left\langle \frac{\partial g_1(A, \phi, t)}{\partial A} g_1(A, \phi, t + \tau) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial g_1(A, \phi, t)}{\partial \phi} g_2(\phi, t + \tau) \right\rangle \right) d\tau = \\ & = \frac{3A}{8} K_{11} + \frac{K_{12}}{2A}, \quad \int_{-\infty}^0 \left\langle \frac{\partial g_2(\phi, t)}{\partial \phi} g_2(\phi, t + \tau) \right\rangle d\tau = M. \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом (19) уравнения Ланжевена, соответствующие уравнению Фоккера–Планка (18), принимают вид

$$\dot{A} = \delta \left(\eta - \frac{3\omega_0^2}{4} \alpha A^2 \right) A + \frac{\omega_0^2}{2A} K_{12} + \frac{\omega_0}{2} A \zeta_{11}(t) + \omega_0 \zeta_{12}(t), \quad (20)$$

$$\dot{\phi} = \omega_0^2 M + \omega_0 \left(\zeta_{21}(t) + \frac{\zeta_{22}(t)}{A} \right).$$

Отсюда видно, что за счет аддитивного случайного воздействия (член $\omega_0^2 K_{12}/(2A)$) колебания в системе существуют при любой интенсивности мультипликативного воздействия. При малых интенсивностях мультипликативного воздействия (до начала фазового перехода при отсутствии случайной силы) система будет вести себя почти так же, как в его отсутствие, то есть она может быть либо преобразователем, либо усилителем шума. Затем вступает в игру параметрическое возбуждение и, по мере увеличения его интенсивности, поведение системы приближается к тому, которое имеет место в отсутствие силового воздействия. При этом статистические характеристики выхода системы становятся все менее зависимыми от статистических характеристик ее входов.

Заключение

В заключение заметим, что, как уже указывалось, переход к турбулентности в какой-то степени аналогичен рассмотренному шумоиндуцированному фазовому переходу в нелинейном осцилляторе с аддитивным и мультипликативным шумом [6, 7, 14–16]. Однако, как показывают наши последние исследования, при потере устойчивости в затопленных струях любое гармоническое возмущение частоты ω вызывает не одну гидродинамическую волну, распространяющуюся и усиливающуюся вниз по потоку, а бесконечное число таких волн, распространяющихся с различными фазовыми скоростями и имеющих различные коэффициенты усиления. За счет неустойчивости амплитуды этих волн по мере распространения могут стать случайными. Насколько нам известно, такой сценарий перехода к хаосу в распределенных системах не рассматривался ни в одной работе, хотя, как представляется из очевидных соображений, он должен иметь место для широкого класса систем.

Библиографический список

1. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
2. *Неймарк Ю.И.* Математические модели в естествознании и технике. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2004.
3. *Стратонович Р.Л., Романовский Ю.М.* Параметрическое воздействие случайной силы на линейные и нелинейные колебательные системы // Научные доклады высшей школы, сер. физ.-мат. 1958. Т. 3. С. 221.
4. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
6. *Landa P.S.* Turbulence in nonclosed fluid flows as a noise-induced phase transition // Europhys. Lett. 1996. Vol. 36. P. 401.
7. *Ланда П.С.* Возникновение турбулентности в незамкнутых течениях жидкости как неравновесный шумоиндуцированный фазовый переход второго рода // ЖТФ. 1998. Т. 68. С. 31.
8. *Ланда П.С., Заикин А.А.* Неравновесные индуцированные шумом фазовые переходы в простых системах // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 358.
9. *Landa P.S., Zaikin A.A.* Noise-induced phase transitions in nonlinear oscillators // AIP Conference Proceedings 465 (Computing Anticipatory Systems, CASYS'98, Liege, Belgium 1998), 419–433.

10. *Landa P.S.* Regular and Chaotic Oscillations. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
11. *Landa P.S., Rabinovitch A.* Exhibition of intrinsic properties of certain systems in response to external disturbances// *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 61. P. 1829.
12. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
13. *Landa P.S., Zaikin A.A.* Noise-induced phase transitions in a pendulum with a randomly vibrating suspension axis // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 4. С. 3535.
14. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
15. *Landa P.S., McClintock P.V.E.* Development of turbulence in subsonic submerged jets // *Phys. Rep.* 2004. Vol. 397. P. 1.
16. *Ланда П.С., Трубецков Д.И., Гусев В.А.* Мифы и реальность в некоторых задачах физики (теория и эксперимент) // *УФН.* 2009. Т. 179, № 3. С. 255.

Московский государственный университет

*Поступила в редакцию 17.03.2009
После доработки 5.10.2009*

EXCITATION OF CHAOTIC AND STOCHASTIC OSCILLATIONS IN DIFFERENT SYSTEMS

P.S. Landa

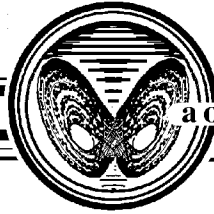
A possible response of both lumped and distributed systems to weak random disturbances of forced character (additive) and the disturbances leading to parametric excitation of oscillations (multiplicative) is presented. It is shown that multiplicative disturbances of a system may cause radical change in its behavior, similar to that occurs in thermodynamically equilibrium systems after second kind phase transitions.

Keywords: Additive and multiplicative random perturbations, excitation of oscillations, non-equilibrium phase transitions of the second order.



Ланда Полина Соломоновна – родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий научный сотрудник МГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор пяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика».

119899, Москва, ГСП В-234, Воробьевы горы, МГУ
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: landa@phys.msu.ru



ХАОС В ФАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ С МОДУЛИРОВАННОЙ ДОБРОТНОСТЬЮ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

С.В. Баранов, С.П. Кузнецов, В.И. Пономаренко

Предложен генератор хаоса на основе осциллятора ван дер Поля с двумя дополнительными цепями запаздывающей обратной связи. Осциллятор пребывает поочередно в режиме возбуждения и затухания в силу периодического изменения параметра, ответственного за бифуркацию рождения предельного цикла. Возбуждение колебаний на каждой новой стадии активности стимулируется сигналом, который возникает в результате смещения на квадратичном нелинейном элементе первой и второй гармоник сигналов, поступивших по цепям обратной связи и порожденных на двух предыдущих стадиях активности. Для разности фаз на последовательных стадиях возбуждения реализуется растягивающее отображение окружности (отображение Бернулли) с хаотической динамикой. Предпринято численное исследование динамики системы; представлены реализации, портреты аттрактора, результаты расчета показателей Ляпунова, оценка размерности, а также спектр генерируемого сигнала. Предложенная система реализована в виде радиотехнического устройства. Представлены экспериментальные данные, находящиеся в качественном соответствии с результатами численных расчетов.

Ключевые слова: Осциллятор ван дер Поля, отображение Бернулли, аттрактор Смейла–Вильямса, гиперболический хаос.

Введение

Примеры систем, в которых имеет место гиперболический аттрактор Смейла–Вильямса, а также систем, демонстрирующих ряд других феноменов, таких как структурно-устойчивый странный нехаотический аттрактор, множество Мандельброта, гиперболическая динамика на торе, предложены недавно в работах [1-6]. Общий принцип, положенный в основу функционирования этих систем, состоит в манипуляции фазами колебаний при передаче возбуждения между парциальными осцилляторами, которые становятся активными попеременно, с тем чтобы трансформация фаз отвечала итерациям отображений с нужным типом сложной динамики.

В качестве альтернативы для реализации принципа манипуляции фазами при передаче возбуждения можно обратиться к системам с запаздыванием. В этом случае достаточно иметь один активный элемент – осциллятор, который попеременно пребывает в стадии активности или затухания, а передача возбуждения с надлежащей трансформацией фазы осуществляется от одной стадии активности к другой с использованием цепи запаздывающей обратной связи.

Представляется, что, с точки зрения практической реализации, эти системы проще, чем класс систем на основе попеременно возбуждающихся осцилляторов. С математической точки зрения, они сложнее, поскольку наличие запаздывания означает формально бесконечную размерность фазового пространства. Аккуратный математический анализ природы аттракторов в таких системах, в том числе строгое обоснование гипотезы гиперболичности, является трудной проблемой, требующей разработки новых подходов.

В работе [7] рассмотрена система на основе неавтономного осциллятора ван дер Поля с запаздыванием, который пребывает поочередно в режиме возбуждения и затухания в силу периодического изменения параметра, ответственного за бифуркацию рождения предельного цикла. Возбуждение колебаний на каждой новой стадии активности стимулируется сигналом, порожденным на предыдущей стадии активности, который поступает через линию задержки и претерпевает нелинейное преобразование с использованием вспомогательного внешнего сигнала на основной рабочей частоте, так что на каждой очередной стадии активности имеет место умножение фазовой переменной на коэффициент 2. В результате для фаз последовательных циклов колебаний реализуется растягивающее отображение окружности (отображение Бернулли) с хаотической динамикой. В работе [8] предложена другая схема, преимущество которой состоит в том, что она функционирует в отсутствие вспомогательного сигнала. Система содержит две цепи запаздывающей обратной связи с разными временами задержки. В этих цепях сигнал претерпевает нелинейное преобразование, соответственно, во вторую и третью гармоники. При их смещении на квадратичном нелинейном элементе возникает сигнал, используемый для стимуляции возбуждения осциллятора на очередной стадии его активности. Недостаток этой схемы – необходимость использования высокой степени нелинейных преобразований, что может быть затруднено на практике.

В настоящей статье вводится в рассмотрение и анализируется система, сочетающая достоинства двух упомянутых выше схем. Ее функционирование подразумевает использование для стимуляции возбуждения на стадиях активности осциллятора только первой и второй гармоник сигналов, проходящих по цепям обратной связи, и не требует вспомогательного сигнала на рабочей частоте. Наряду с численными расчетами, представлены результаты экспериментального исследования радиотехнического устройства, реализованного на основе предложенной схемы.

1. Основная модель и ее принцип действия

Рассмотрим блок-схему на рис. 1. Основным элементом служит осциллятор ван дер Поля, в котором параметр, управляющий бифуркацией Андронова–Хопфа, медленно изменяется во времени с периодом T , так что реализуются поочередно стадии возбуждения и затухания колебаний. Сигнал от осциллятора проходит по двум

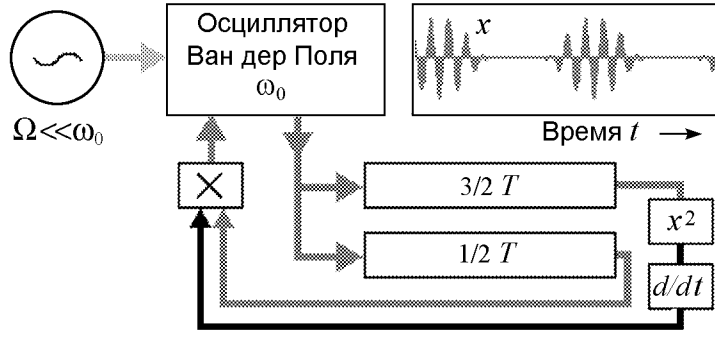


Рис. 1. Блок-схема исследуемой системы с запаздыванием

цепям запаздывающей обратной связи, время задержки в которых различается на T . На выходе одной из них сигнал подвергается квадратичному нелинейному преобразованию (блок, обозначенный x^2 на схеме), из него отфильтровывается низкочастотная составляющая (блок d/dt) и на квадратичном нелинейном элементе (отмечен на схеме косым крестом) производится его смешение с сигналом, поступившим по второй цепи обратной связи. Результирующий сигнал содержит составляющую на разностной частоте, попадающую в резонанс с рабочей частотой осциллятора ω_0 , и она стимулирует возбуждение осциллятора ван дер Поля в начале очередной стадии активности. Для этого времена задержки подобраны так, чтобы для возбуждения колебаний на $(n + 1)$ -й стадии сигнал приходил в нужный момент по первой цепи от $(n - 1)$ -й, а по второй – от n -й стадии активности.

Подходящей моделью рассмотренного устройства служит дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\ddot{x} - (A \cos(2\pi t/T) + h - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x(t - \frac{1}{2}T)x(t - \frac{3}{2}T)\dot{x}(t - \frac{3}{2}T). \quad (1)$$

Здесь x – обобщенная координата осциллятора ван дер Поля; ε – параметр, характеризующий глубину запаздывающей обратной связи; величина A определяет глубину модуляции параметра, ответственного за возбуждение осциллятора, относительно среднего уровня, заданного величиной h .

Примем пока параметр h нулевым. Тогда осциллятор будет поочередно пребывать в стадиях возбуждения и затухания колебаний равной продолжительности (соответственно, когда $A \cos(2\pi t/T) > 0$ и $A \cos(2\pi t/T) < 0$). Если предположить, что на стадиях активности с номерами n и $n - 1$ имели место колебания с фазами φ_n и φ_{n-1} , соответственно, то есть $x \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_n)$ и $x \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_{n-1})$, то подстановка этих выражений в правую часть дает

$$\begin{aligned} & x(t - \frac{1}{2}T)x(t - \frac{3}{2}T)\dot{x}(t - \frac{3}{2}T) \sim \\ & \sim \sin(\omega_0 t - \frac{1}{2}\omega_0 T + \varphi_n) \sin(\omega_0 t - \frac{3}{2}\omega_0 T + \varphi_{n-1}) \cos(\omega_0 t - \frac{3}{2}\omega_0 T + \varphi_{n-1}) = \\ & = \frac{1}{2} \sin(\omega_0 t - \frac{1}{2}\omega_0 T + \varphi_n) \sin(2\omega_0 t - 3\omega_0 T + 2\varphi_{n-1}) = \\ & = -\frac{1}{4} \cos(\omega_0 t - \frac{5}{2}\omega_0 T + 2\varphi_{n-1} - \varphi_n) + (\dots), \end{aligned} \quad (2)$$

где многоточие означает нерезонансный член на третьей гармонике. Таким образом, фаза колебаний на новой стадии активности будет определяться выражением

$$\varphi_{n+1} = -\varphi_n + 2\varphi_{n-1} + \eta \pmod{2\pi}, \quad (3)$$

где η – некоторая константа. Для разности фаз $\Delta\varphi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$ будет иметь место растягивающее отображение окружности (отображение Бернулли)

$$\Delta\varphi_{n+1} = -2\Delta\varphi_n + \eta \pmod{2\pi}, \quad (4)$$

причем константу в уравнении можно устранить сдвигом начала отсчета переменной $\Delta\varphi_n$. Отображение для разности фаз демонстрирует хаотическую динамику с показателем Ляпунова $\Lambda_1 = \ln 2 \approx 0.693$. Отображение (3) имеет такой же по величине старший показатель Ляпунова и, кроме того, нулевой показатель $\Lambda_2 = 0$.

В следующем разделе приведены результаты численного решения дифференциального уравнения с запаздыванием (1) и продемонстрировано, что при надлежащем выборе параметров динамика системы протекает в соответствии с приведенными рассуждениями.

2. Численные результаты исследования динамики модели

Для численного решения задачи применялся конечно-разностный метод Рунге–Кутты 4 порядка, модифицированный применительно к системе с запаздыванием. Необходимые для выполнения шагов разностной схемы запаздывающие значения переменной x выбирались из сохраняемого в процессе вычислений массива данных, полученных на предыдущих шагах; при этом использовалась интерполяционная схема, обеспечивающая нужный порядок точности.

Начальные условия для системы с запаздыванием подразумевают задание функции $x(t)$ на отрезке $[-T, 0]$, что соответствует бесконечномерному пространству состояний рассматриваемой системы. В начале расчетов соответствующий массив данных обычно заполнялся случайными величинами, далее проводился начальный этап вычислений до выхода системы на аттрактор, и лишь затем осуществлялось выполнение различных процедур обработки данных.

Расчеты показывают, что ожидаемый тип динамики реализуется в достаточно широком диапазоне изменения параметров. Для детального анализа выбран случай $\omega_0 = 2\pi$, $T = 8$, $A = 4.0$, $h = 0$, $\varepsilon = 0.05$. На рис. 2, *a* показаны зависимости обобщенной координаты осциллятора от времени при указанных параметрах в режиме генерации хаоса. Процесс имеет вид последовательности радиоимпульсов, следующих друг за другом через интервал времени T . При этом, однако, фаза заполнения от импульса к импульсу меняется хаотическим образом. Это обстоятельство иллюстрируется диаграммой на рис. 2, *б*, где друг на друга наложено несколько реализаций. Присутствие хаоса обусловлено описанным выше механизмом передачи фазы от предыдущих стадий процесса к последующим. На рис. 3, *a* показана итерационная диаграмма для фаз в виде трехмерного графика, из которой видно приближительное

соответствие функции двух переменных $\varphi_{n+1} = f(\varphi_n, \varphi_{n-1})$ и выражения (3). Фаза, отвечающая каждой очередной стадии активности, определяется в момент времени, фиксированный по отношению к сигналу, обеспечивающему медленную модуляцию параметра, по формуле

$$\varphi_n = \begin{cases} \arctan(\omega_0 x / \dot{x}), & \dot{x} > 0, \\ \arctan(\omega_0 x / \dot{x}) + \pi, & \dot{x} < 0. \end{cases} \quad (5)$$

На рис. 3, б приводится итерационная диаграмма для разности фаз $\Delta\varphi_n$, вид которой приближенно согласуется с формулой (4).

На рис. 4 показан портрет аттрактора на фазовой плоскости осциллятора ван дер Поля (x, \dot{x}) . На самом деле аттрактор системы с запаздыванием представляет собой объект в бесконечномерном пространстве состояний, так что изображение на рисунке следует рассматривать, как двумерную проекцию этого объекта. На рис. 4, б показан портрет аттрактора в стробоскопическом сечении $t = nT$.

Количество показателей Ляпунова для системы с запаздыванием, формально говоря, бесконечно, однако, с точки зрения существенных особенностей динамики, значение имеет лишь некоторое ограниченное их число. Представляется естественным определить его как количество показателей, достаточное для вычисления раз-

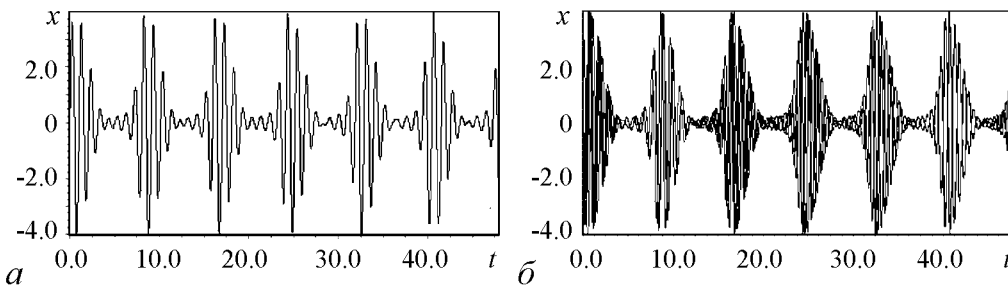


Рис. 2. Зависимости обобщенной координаты осциллятора от времени по результатам численного решения уравнения (1) (а) и результат наложения нескольких реализаций процесса на одном графике (б)

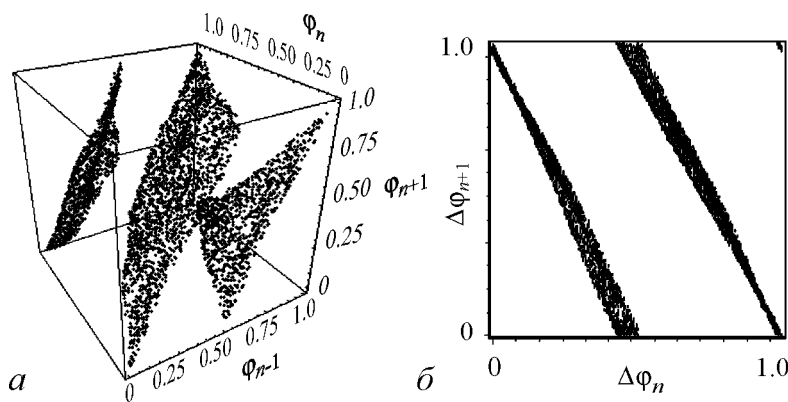


Рис. 3. Диаграммы, иллюстрирующие трансформацию фазы на последовательных стадиях активности осциллятора в режиме хаотической генерации в системе (1)

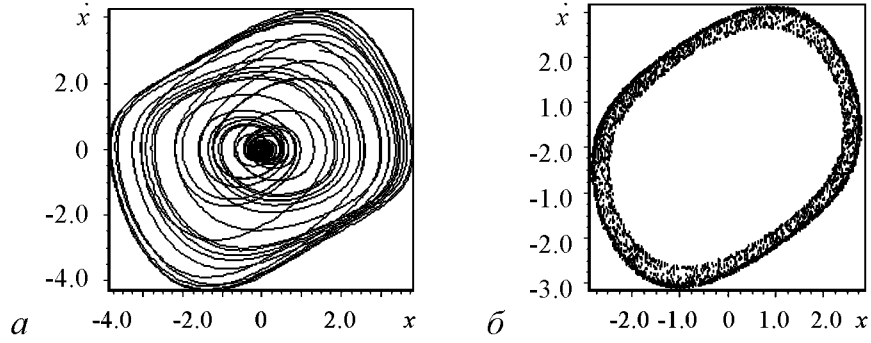


Рис. 4. Двумерная проекция фазового портрета (а) и стробоскопическое отображение (б), полученные при численном решении уравнения (1) в режиме хаотической генерации

мерности по формуле Каплана–Йорке [9,10]

$$D = m + \frac{\sum_{i=1}^m \Lambda_i}{|\Lambda_{m+1}|}, \quad (6)$$

где целое число m выбрано так, что сумма m больших показателей Ляпунова еще положительна, а сумма $m + 1$ показателей уже отрицательна.

Для расчета показателей Ляпунова использовался метод, основанный на алгоритме Бенеттина, с модификациями, соответствующими системе с запаздыванием [9,11]. Проводилось совместное решение уравнений (1) и комплекта уравнений в вариациях для нескольких векторов возмущения $\tilde{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} + 2x\tilde{x}\dot{x} - (A \cos(2\pi t/T) + h - x^2)\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = \\ = \varepsilon \tilde{x}(t - \frac{1}{2}T)x(t - \frac{3}{2}T)\dot{x}(t - \frac{3}{2}T) + \\ + \varepsilon x(t - \frac{1}{2}T)\tilde{x}(t - \frac{3}{2}T)\dot{x}(t - \frac{3}{2}T) + \varepsilon x(t - \frac{1}{2}T)x(t - \frac{3}{2}T)\dot{\tilde{x}}(t - \frac{3}{2}T). \end{aligned} \quad (7)$$

В численных расчетах вектор возмущения задается мгновенными значениями \tilde{x} , $\dot{\tilde{x}}$ и массивом данных $\tilde{x}(t)$, отвечающих значениям переменной на интервале запаздывания. Поскольку система неавтономная, удобно строить вычисления, рассматривая динамику стробоскопически, с периодом T . По завершении каждого этапа проводится ортогонализация векторов возмущения по Граму–Шмидту и нормализация на фиксированную константу. Показатели Ляпунова получаются из оценки скорости нарастания накапливающихся сумм логарифмов от коэффициентов приращенения норм соответствующих векторов.

На рис. 5 показана зависимость четырех показателей Ляпунова от параметра глубины модуляции A при фиксированных остальных параметрах. Следует отметить, что старший показатель в широком интервале изменения параметра A почти постоянен и близок к $\ln 2$. В то же время значение второго показателя остается близким к нулю.

При значении параметра глубины модуляции $A = 4.0$ первые пять показателей Ляпунова таковы:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = 0.69333, \quad \Lambda_2 = 0.00002, \quad \Lambda_3 = -1.13994 \\ \Lambda_4 = -1.33343, \quad \Lambda_5 = -3.80704. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что второй показатель в пределах ошибки вычислений нулевой. Для оценки размерности по формуле Каплана-Йорке нужно принимать во внимание положительный, нулевой и один отрицательный показатель, что дает

$$D = 2 + \frac{\ln 2}{1.1399} \approx 2.6080. \quad (9)$$

На рис. 6 показан спектр колебаний осциллятора в рассматриваемом режиме генерации хаоса. Для его построения проводилась обработка полученной численно достаточно длительной реализации с помощью метода статистической оценки спектральной плотности мощности, рекомендуемого в теории случайных процессов. Процедура состоит в разбиении имеющейся реализации на участки конечной протяженности, выполнении преобразования Фурье для каждого участка и последующем усреднении квадратов амплитуд спектральных компонент.

Из рисунка видно, что спектр сосредоточен в некотором диапазоне вблизи частоты $f \approx 1$, то есть $\omega = 2\pi f \approx \omega_0 = 2\pi$. Отметим присутствие характерной для хаоса непрерывной составляющей спектра. Дискретные пики в левой части диаграммы обусловлены периодичностью, присутствующей в динамике системы благодаря медленной модуляции параметра возбуждения.

Как было обнаружено, в рассматриваемой системе имеет место сложный мягкожесткий режим возбуждения и гистерезис.

В самом деле, описанный выше режим функционирования подразумевает возбуждение каждого нового цуга колебаний на стадии активности осциллятора благодаря стимулированию сигналом, переданным по цепи запаздывающей обратной связи. Его величина пропорциональна третьей степени характерной амплитуды колебаний на стадии активности. Если задать начальные условия такими, что характерная амплитуда мала, то стимуляции возбуждения не происходит, и колебания отсутствуют. Режим генерации можно восстановить, увеличивая параметр h , то есть

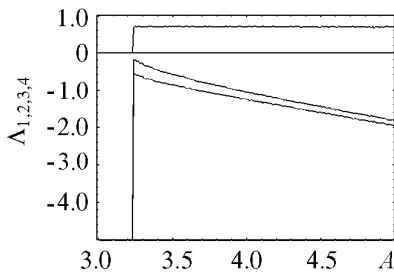


Рис. 5. Зависимость первых четырех показателей Ляпунова от параметра глубины модуляции A . Вычисления проводились при вариации A от больших величин к меньшим с наследованием мгновенного состояния системы в момент изменения параметра

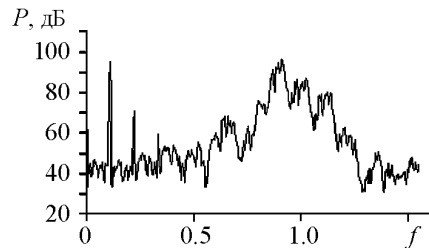


Рис. 6. Спектр мощности сигнала, генерируемого системой, полученный путем обработки численных результатов для модели (1)

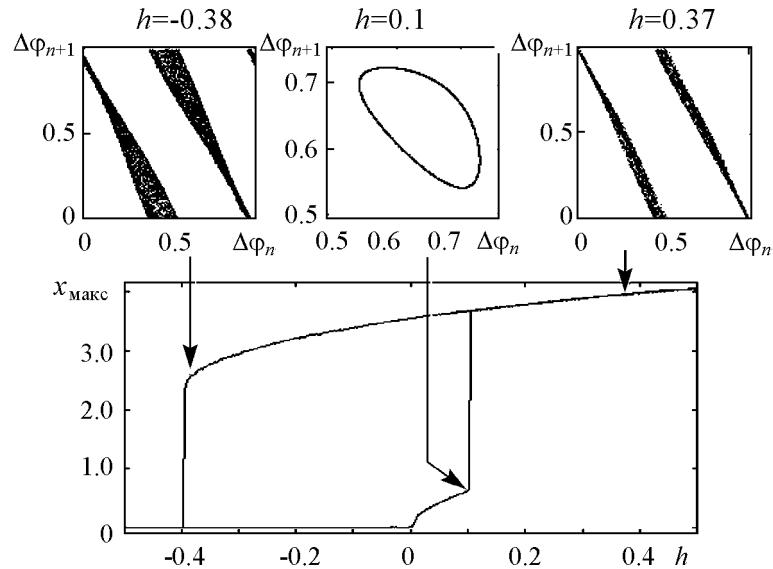


Рис. 7. Диаграмма, иллюстрирующая гистерезис в исследуемой системе. Показана зависимость максимального значения амплитуды колебаний от параметра h . Движение по параметру осуществляется слева направо вдоль нижней ветви, а затем справа налево вдоль верхней ветви петли гистерезиса

увеличивая долю периода модуляции, в течение которой колебания осциллятора в линейном приближении будут нарастающими. При этом сначала возникают регулярные колебания малой амплитуды, а затем в некоторый момент имеет место скачкообразный переход к хаотическому режиму больших амплитуд. После этого уменьшение величины h не приводит немедленно к срыву хаотических колебаний, даже в области отрицательных значений h , поскольку возбуждение в системе передается от предыдущих стадий активности к последующим. Только при некоторой достаточно большой отрицательной величине h происходит срыв колебаний.

Описанное явление гистерезиса иллюстрируется диаграммой на рис. 7. Вверху на врезках представлены итерационные диаграммы для фаз, отвечающие определенным участкам на петле гистерезиса. (При проведении вычислений в систему добавлялся небольшой шум на уровне $\Delta x \sim 0.001$, чтобы обеспечить выход из тривиального невозбужденного состояния при возникновении в системе неустойчивости.)

3. Эксперимент

На рис. 8 показана схема экспериментального устройства. Его основой служит генератор ван дер Поля, выполненный с использованием операционного усилителя DA1, вносящего отрицательное сопротивление в колебательный контур LC ($L = 10$ мГн, $C1 = 5$ мкФ). Нелинейность обеспечивается элементом в виде двух параллельных цепочек полупроводниковых диодов. Частота автоколебаний составляет около 700 Гц. Параметр надкритичности генератора модулируется внешним сигналом с частотой 71 Гц, подаваемым на затвор полевого транзистора VT1. Сигнал генератора ван дер Поля возводится в квадрат при помощи аналогового умножителя DA2 и дифференцируется схемой на операционном усилителе DA4. Сигналы с выхода схемы дифференцирования и с генератора ван дер Поля подаются на два входа

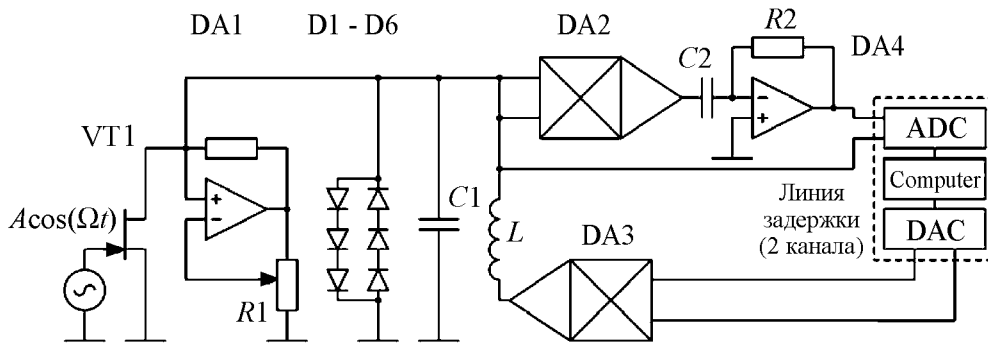


Рис. 8. Схема экспериментального устройства

аналого-цифрового преобразователя и в компьютер, где реализована двухканальная линия задержки (времена задержки 21 и 7 мс, соответственно, что составляет примерно $3/2$ и $1/2$ периода модуляции параметра). Выходные сигналы подаются на входы аналогового умножителя, выход которого подключен к катушке индуктивности колебательного контура генератора ван дер Поля. Таким образом, данное устройство качественно соответствует уравнению (1). Для анализа фазовых соотношений сигнал генератора ван дер Поля (напряжение на конденсаторе $C1$) записывался в компьютер при помощи дополнительного не показанного на схеме аналого-цифрового преобразователя.

На рис. 9 показаны реализация хаотического сигнала, полученная в эксперименте, и спектр колебаний осциллятора в режиме генерации хаоса, которые качественно неплохо согласуются, соответственно, с рис. 2, *a* и рис. 6.

На рис. 10, *a* приводится итерационная диаграмма для фаз в виде трехмерного графика, а на рис. 10, *б* – итерационная диаграмма для разности фаз $\Delta\varphi_n$. Отметим соответствие фазовых итерационных диаграмм качественным рассуждениям раздела 1, а также, с точностью до аддитивной добавки, диаграммам, полученным в численных расчетах и обсуждавшимся в разделе 2.

На рис. 11, *a* показан полученный в эксперименте портрет аттрактора на фазовой плоскости осциллятора. Напомним, что аттрактор системы с запаздыванием представляет собой объект в бесконечномерном пространстве состояний, так что

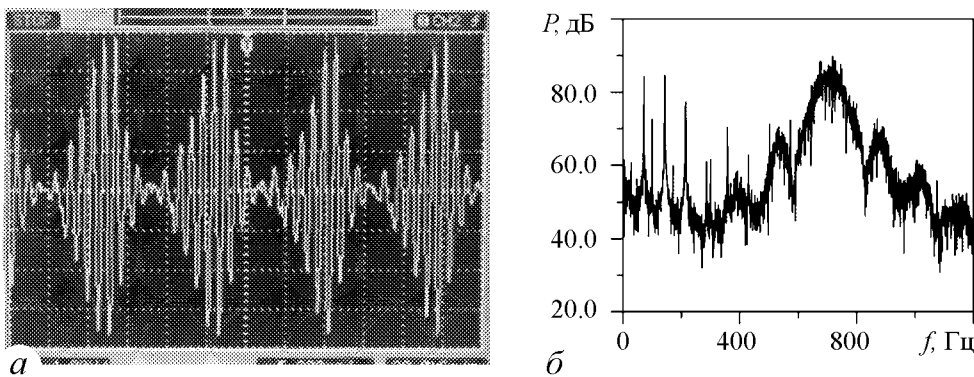


Рис. 9. Реализация хаотического сигнала в эксперименте (*a*) и спектр генерации (*б*)

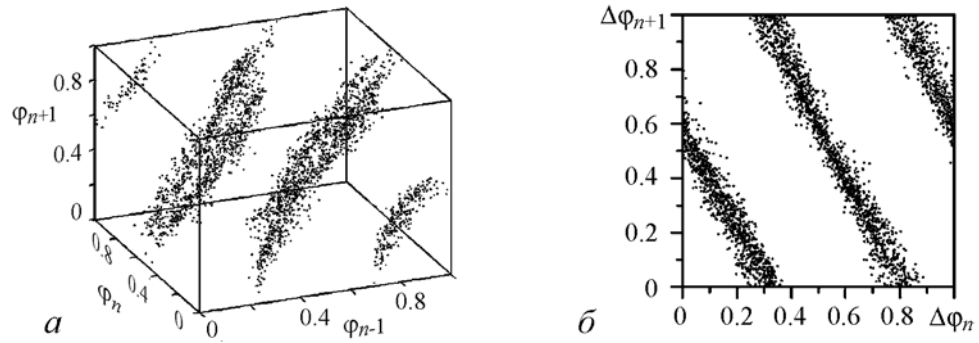


Рис. 10. Итерационная диаграмма для фаз в виде трехмерного графика (а), построенная по результатам эксперимента, и диаграмма для разностей фаз (б)

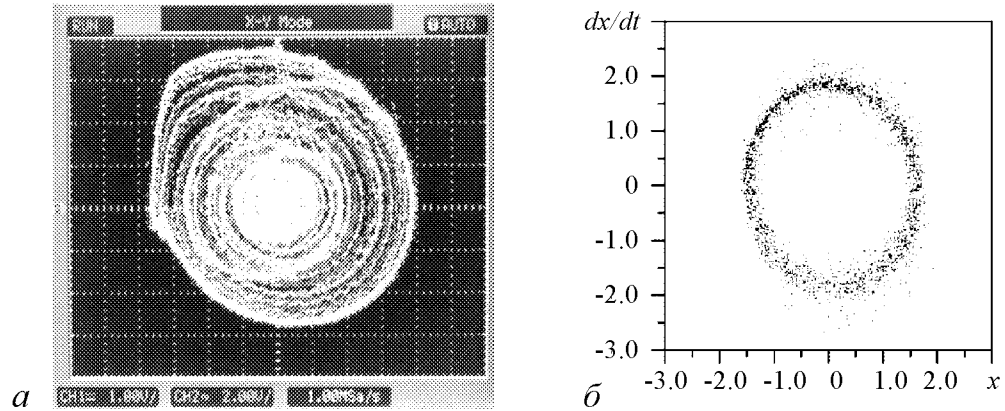


Рис. 11. Портрет аттрактора в проекции на фазовую плоскость осциллятора (а), сфотографированный с экрана осциллографа, и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении (б), построенный путем обработки экспериментальных данных

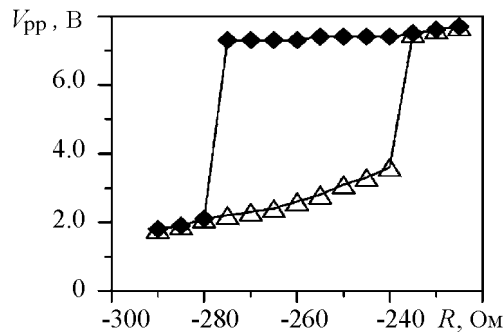


Рис. 12. Диаграмма, иллюстрирующая гистерезис при возбуждении колебаний в экспериментальном устройстве. Представлена зависимость напряжения V_{pp} («от пика до пика») порождаемого системой сигнала от величины отрицательного сопротивления, вносимого в колебательный контур благодаря присутствию операционного усилителя

представленное на рисунке изображение следует рассматривать как двумерную проекцию этого объекта. На рис. 11, б приводится портрет аттрактора в стробоскопическом сечении. Эти рисунки находятся в разумном качественном соответствии с результатами численных расчетов (см. рис. 4).

В эксперименте нашло подтверждение присутствие в системе отмеченного в предыдущем разделе эффекта жесткого возбуждения. При регулировке отрицательного сопротивления, вносимого в колебательный контур благодаря наличию операционного усилителя, можно было наблюдать гистерезис, что иллюстрирует рис. 12. При постепенном движении по параметру слева направо

вдоль нижней ветви графика интенсивных колебаний в системе нет; они возникают при переходе некоторого порога, но сохраняются при обратном движении по параметру в относительно широком диапазоне, где ранее они отсутствовали.

Заключение

В настоящей работе введена в рассмотрение неавтономная система с запаздывающей обратной связью, генерирующая колебания в виде последовательности импульсов, фаза заполнения которых изменяется хаотически, так что разность фаз между соседними импульсами подчиняется растягивающему отображению окружности. В широкой области параметров система характеризуется присутствием одного положительного показателя Ляпунова, слабо зависящего от параметров, и показателя, близкого к нулю, тогда как остальные показатели отрицательны. (Их полное количество, формально говоря, бесконечно в силу бесконечной размерности фазового пространства системы с запаздыванием.)

Как можно предположить, данная система должна быть отнесена к классу систем с частично гиперболическим аттрактором [12,13] ввиду наличия в точках на аттракторе нейтрального направления, ассоциирующегося с близким к нулю показателем Ляпунова. Строгое обоснование этой гипотезы представляется достаточно сложной математической проблемой в силу бесконечной размерности фазового пространства системы.

В отличие от систем с аттрактором Смейла–Вильямса, обсуждавшихся в работах [1,2], рассмотренная схема использует единственный активный элемент в виде осциллятора ван дер Поля, что делает ее более простой в практическом отношении. В отличие от системы с запаздыванием, предложенной в работе [7], она не требует для своего функционирования вспомогательного сигнала на частоте, близкой к рабочей частоте осциллятора. Наконец, в сравнении со схемой, рассмотренной в работе [8], она характеризуется более низкой степенью нелинейности, что также представляется преимуществом с точки зрения радиотехнической реализации.

Системы, подобные рассмотренной в настоящей работе, могут представлять интерес как генераторы хаоса, в том числе, для применения в схемах скрытой коммуникации [14]. Одно из преимуществ данного класса систем обусловлено тем, что хаос в них выражается в случайном изменении фазы генерируемой последовательности радиоимпульсов. Как можно полагать, это открывает возможность реализации схем, в которых передача сигнала в канале связи будет гораздо менее чувствительной к помехам, потерям и искажениям, нежели в предложенных до сих пор вариантах. (Это подобно хорошо известному в традиционной радиотехнике преимуществу частотной или фазовой модуляции в сравнении с амплитудной.) Другое преимущество состоит в структурной устойчивости или грубости хаотического аттрактора (если справедлива гипотеза о его гиперболической природе). На практике это будет означать нечувствительность свойств генерируемого хаоса по отношению к вариациям параметров и характеристик элементов устройства, техническим флуктуациям и т.п.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-02-00426, а также гранта Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Программы развития научного потенциала высшей школы № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 144101.
2. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // *ЖЭТФ.* 2006. Т. 129, № 2. С. 400.
3. *Isaeva O.B., Jalnine A.Yu. and Kuznetsov S.P.* Arnold’s cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // *Phys. Rev.* 2006. Vol. E 74. 046207.
4. *Жалнин А.Ю., Кузнецов С.П.* О возможности реализации в физической системе странного нехаотического аттрактора Ханта и Отта // *ЖТФ.* 2007. Т. 77, № 4. С. 10.
5. *Кузнецов С.П., Исаева О.Б., Осбалдестин А.Н.* Феномены комплексной аналитической динамики в системе связанных неавтономных осцилляторов с поочередным возбуждением // *Письма в ЖТФ.* 2007. Т. 33, вып. 17. С. 69.
6. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В.* Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2007. Т. 15, № 6. С. 75.
7. *Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // *Письма в ЖТФ.* 2008. Т. 34, вып. 18. С. 1.
8. *Kuznetsov S.P. and Pikovskiy A.S.* Hyperbolic chaos in the phase dynamics of a Q-switched oscillator with delayed nonlinear feedbacks // *Europhysics Lett.* 2008. Vol. 84. 10013.
9. *Farmer D.J.* Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // *Physica D. Nonlinear Phenomena.* 1980. Vol. 4, Issue 3. P. 366
10. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
11. *Балякин А.А., Рыскин Н.М.* Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2007. Т. 15, №6. С. 3.
12. *Hasselblatt B., Pesin Y.* Hyperbolic dynamics. *Scholarpedia* 2008; 3(6):2208.
13. *Pesin Y., Hasselblatt B.* Partial hyperbolicity, *Scholarpedia*, http://www.scholarpedia.org_2008_.
14. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.

*Саратовский филиал ИРЭ РАН
Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 13.04.2009
После доработки 15.06.2009*

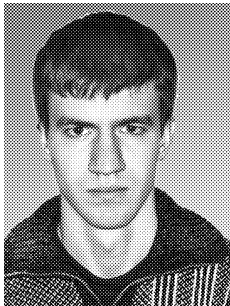
CHAOS IN THE PHASE DYNAMICS OF Q-SWITCHED VAN DER POL OSCILLATOR WITH ADDITIONAL DELAYED FEEDBACK LOOP

S.V. Baranov, S.P. Kuznetsov, V.I. Ponomarenko

We present chaos generator based on a van der Pol oscillator with two additional delayed feedback loops. Oscillator alternately enters active and silence stages due to

periodic variation of the parameter responsible for the Andronov–Hopf bifurcation. Excitation of the oscillations on each new activity stage is forced by signal resulting from mixing of the first and the second harmonics of signals from previous activity stages, transported through the feedback loops. The phase difference between each two neighboring successive activity stages evolves in accordance to the Bernoulli doubling map, with chaotic dynamics. We discuss results of numerical studies: time dependences of variables, attractor portraits, Lyapunov exponents, and power spectrum. The proposed system is implemented as an electronic device, and experimental data are found to be in good correspondence with the computations.

Keywords: van der Pol oscillator; Bernoulli doubling map; Smale–Williams solenoid; hyperbolic chaos.



Баранов Станислав Владимирович – родился в Саратове (1985). С 1998 по 2002 год обучался в Лицее прикладных наук Саратова. В 2002 году поступил в Саратовский госуниверситет на факультет нелинейных процессов, который окончил в 2007 году. В настоящее время учится в аспирантуре. Область научных интересов – динамический хаос, сложная динамика систем с запаздывающей обратной связью, различные численные характеристики сложной динамики. Принимал участие в конференциях. Автор 3 публикаций.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: stanislav@baranov.me



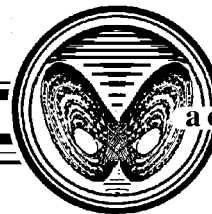
Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены семь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: spkuz@rambler.ru



Пономаренко Владимир Иванович – родился в 1960 году в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 130 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com



ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ ТИПА I В ПРИСУТСТВИИ ШУМА И ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ ИГОЛЬНОГО УШКА

А.А. Короновский, М.К. Куровская, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов

В настоящей работе проводится сравнительный анализ характеристик двух типов перемежающегося поведения (перемежаемости типа I в присутствии шума и перемежаемости игольного ушка), которые до настоящего времени считались различными явлениями. Как показано в работе, эти разновидности перемежающегося поведения являются одним типом динамики систем, наблюдаемым при различных условиях. Справедливость полученных выводов доказывается посредством рассмотрения различных модельных систем, таких как квадратичное отображение, осциллятор ван дер Поля и системы Ресслера.

Ключевые слова: флуктуации, случайный процесс, шум, синхронизация, хаотические осцилляторы, динамическая система, перемежаемость.

Введение

Наличие перемежаемости характерно для многих нелинейных систем и наблюдается, в частности, при переходе от периодических колебаний к хаотическим [1], а также вблизи границы возникновения различных режимов хаотической синхронизации связанных осцилляторов [2–5].

Существует определенная классификация перемежающегося поведения, в частности, выделяют перемежаемость типа I–III [1, 6], on-off перемежаемость [7], перемежаемость игольного ушка [8]. Несмотря на некоторое сходство (наличие во временном ряду двух различных режимов, чередующихся друг с другом), каждый тип перемежаемости обладает своими собственными особенностями и характеристиками (прежде всего, это зависимость средней длительности ламинарных фаз от управляющего параметра и распределение длительностей ламинарных фаз). Причины, приводящие к возникновению перемежающегося поведения каждого типа, также различны.

В настоящей работе сравниваются характеристики перемежаемости типа I при наличии в системе шума и перемежаемости игольного ушка, наблюдаемой вблизи границы режима фазовой синхронизации. Впервые показывается, что эти два вида перемежающегося поведения, считавшиеся до настоящего момента различными явлениями, на самом деле представляют собой один тип динамики систем.

1. Связь между перемежаемостью типа I в присутствии шума и перемежаемостью игольного ушка

Для начала рассмотрим кратко перемежаемость игольного ушка и перемежаемость типа I в присутствии шума, следуя общепринятой в научной литературе концепции. Аргументы в пользу эквивалентности указанных типов перемежающегося поведения будут приведены ниже.

1.1. Перемежаемость типа I в присутствии шума. Известно, что перемежаемость типа I наблюдается ниже точки седло-узловой бифуркации, которая как раз совпадает с порогом установления/разрушения синхронного режима в периодическом осцилляторе под внешним гармоническим воздействием [9]. При этом средняя длительность ламинарных фаз T обратно пропорциональна квадратному корню из параметра надкритичности $(\varepsilon_c - \varepsilon)$, то есть

$$T \sim (\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2}, \quad (1)$$

где ε – управляющий параметр, а ε_c – его бифуркационное значение, соответствующее точке седло-узловой бифуркации [9]. Влияние шума интенсивности D на систему приводит к изменению характеристик перемежаемости [10–12], при этом перемежающееся поведение будет наблюдаться как ниже, так и выше точки седло-узловой бифуркации ε_c . В закритической области значений управляющего параметра (выше бифуркационной точки, $\varepsilon > \varepsilon_c$) средняя длительность T ламинарных фаз определяется выражением

$$T = \frac{1}{k\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_c}} \exp\left(\frac{4(\varepsilon - \varepsilon_c)^{3/2}}{3D}\right), \quad (2)$$

в то время как распределение $p(\tau)$ длительностей ламинарных фаз τ подчиняется экспоненциальному закону

$$p(\tau) = T^{-1} \exp(-\tau/T). \quad (3)$$

1.2. Перемежаемость игольного ушка. В научной литературе описано существование двух типов перемежающегося поведения для хаотических систем, наблюдающихся при разрушении режима фазовой синхронизации в случае, когда собственные частоты осциллятора и внешнего сигнала отличаются мало [8, 13, 14], и, соответственно, выделяют два значения параметра связи $\sigma_1 < \sigma_2$, являющиеся характерными точками, разграничивающими различные типы динамики. Ниже границы режима фазовой синхронизации зависимость разности фаз $\Delta\varphi$ от времени t содержит участки синхронной динамики (ламинарные фазы), постоянно прерываемые внезапными фазовыми проскоками (турбулентные фазы), в течение которых значение $|\Delta\varphi(t)|$ изменяется на 2π . Проанализировав статистику ламинарных фаз, можно заключить, что ниже величины связи σ_1 (то есть достаточно далеко от границы σ_2 установления/разрушения режима хаотической фазовой синхронизации) наблюдается перемежаемость типа I, для средней длительности ламинарных фаз которой имеет место степенной закон $T \sim (\sigma_1 - \sigma)^{-1/2}$, в то время как выше критической точки σ_2 обнаруживается режим фазовой синхронизации. Для величины связи $\sigma \in (\sigma_1; \sigma_2)$ наблюдается сверхдлинное ламинарное поведение (так называемая «*перемежаемость игольного ушка*») с характеристиками, существенно отличающимися

от хорошо известных характеристик перемежаемости типа I. В предыдущих исследованиях (например, работы [8, 14]) показано, что для перемежаемости игольного ушка зависимость средней длительности T ламинарных фаз от параметра надкритичности $(\sigma_2 - \sigma)$ выражается законом

$$T \sim \exp(k|\sigma_2 - \sigma|^{-1/2}) \quad (4)$$

или

$$-\ln(1/T) = c_0 - c_1|\sigma_2 - \sigma|^{-1/2}, \quad (5)$$

(c_0 , c_1 и k – константы), приведенным впервые в [15] для переходного процесса, предшествующего точке бифуркации слияния пары неустойчивых орбит.

Таким образом, на плоскости управляющих параметров существует область, примыкающая снизу к границе фазовой синхронизации, где система демонстрирует перемежающееся поведение, характеристики которого соответствуют перемежаемости игольного ушка. Ниже этой области (уже достаточно далеко от границы установления режима фазовой синхронизации) в системе реализуется перемежаемость I типа.

Теоретическое объяснение явления перемежаемости игольного ушка основано на граничном кризисе синхронных аттракторов, вызванном бифуркацией слияния неустойчивых орбит, одни из которых являются седловыми, а другие – неустойчивы по всем направлениям [8, 13]. Данный тип перемежающегося поведения наблюдался как при численном моделировании [8, 14], так и в эксперименте [16] для различных нелинейных систем, включая осцилляторы Ресслера.

1.3. Эквивалентность рассматриваемых типов поведения системы. Как показано далее, несмотря на то, что перемежаемость типа I в присутствии шума и перемежаемость игольного ушка изначально кажутся различными явлениями, они, на самом деле, являются одним и тем же типом динамики системы, наблюдаемым при различных условиях. Хорошо известно, что для слабонелинейного изохронного осциллятора, находящегося под периодическим внешним воздействием (в случае малой частотной расстройки), можно использовать метод комплексных амплитуд для нахождения решения, описывающего поведение осциллятора, в виде

$$u(t) = \operatorname{Re} a(t)e^{i\omega t}. \quad (6)$$

Для комплексной амплитуды $a(t)$ получают усредненное (укороченное) уравнение

$$\dot{a} = -i\nu a + a - |a|^2 a - i\kappa, \quad (7)$$

где ν – расстройка частот, а κ – перенормированная амплитуда внешнего сигнала. При малых ν и больших κ устойчивое решение

$$a(t) = Ae^{i\Phi} = \operatorname{const} \quad (8)$$

соответствует синхронному режиму, при этом разрушению синхронной динамики соответствует локальная седло-узловая бифуркация, связанная с глобальной бифуркацией рождения предельного цикла [17]. Ниже границы режима синхронизации динамика разности фаз

$$\Delta\varphi(t) = \varphi(t) - \omega_e t \quad (9)$$

($\varphi(t)$ – фаза ведущего осциллятора, ω_e – частота внешнего гармонического сигнала) представляет собой интервалы синхронного поведения (ламинарные фазы), прерываемые фазовыми проскоками (турбулентные фазы). Средняя длительность T ламинарных фаз зависит от параметра надкритичности ($\varepsilon_c - \varepsilon$) по степенному закону (1), что соответствует перемежаемости типа I [9] (см. разд. 1.1).

В то же время поведение периодических и хаотических систем вблизи границы установления синхронного режима во многих случаях очень схоже. Так, было обнаружено, что в связанных хаотических системах Ресслера и в неавтономном генераторе ван дер Поля реализуются одни и те же сценарии разрушения синхронного режима [18]. Более того, при определенных условиях динамика хаотических систем может рассматриваться как случайные возмущения [11, 19, 20], включая поведение систем вблизи границы синхронного режима. В частности, для двух связанных систем Ресслера поведение одной из условных ляпуновских экспонент в окрестности границы режима фазовой синхронизации подчиняется тем же законам, что и в случае неавтономного генератора ван дер Поля под воздействием шума [21]. Следовательно, можно ожидать, что характеристики перемежаемости типа игольного ушка, которая имеет место вблизи границы режима фазовой синхронизации в связанных хаотических осцилляторах, будут наблюдаться и в случае классической синхронизации периодических колебаний, если добавить некоторое случайное воздействие на периодический осциллятор.

В качестве дополнительных аргументов в пользу справедливости данного предположения можно упомянуть, что обнаружение режима перемежаемости игольного ушка в хаотических осцилляторах основывается, главным образом, на следующих фактах.

- Зависимость средней длительности T ламинарных фаз от управляющего параметра может быть аппроксимирована выражением (5) [8, 13, 14, 16]. Как показано далее (раздел 4), аналогичную характеристику перемежаемости типа I с шумом можно аппроксимировать тем же самым законом, несмотря на то, что средняя длительность ламинарных фаз подчиняется также закону (2).

- Когда начинается турбулентная фаза, движение по фазовой траектории близко к периодическому [13]. Данный аспект интерпретируется как доказательство бифуркации слияния пары неустойчивых орбит, когда неустойчивая периодическая орбита на аттракторе и неустойчивая орбита того же периода на границе бассейна аттрактора сливаются и исчезают. Тем не менее тот же тип движения по фазовой траектории наблюдается в начале турбулентной фазы, если речь идет о перемежаемости типа I, связанной с седло-узловой бифуркацией, равно как и в случае перемежаемости типа I с шумом.

Таким образом, если данные разновидности перемежаемости обусловлены одними и теми же механизмами и, фактически, являются одним типом динамики систем, то средняя длительность ламинарных фаз должна удовлетворять уравнениям (2) и (5) одновременно, независимо от того, классифицируется ли поведение системы как перемежаемость игольного ушка, или как перемежаемость типа I с шумом. Распределение длительностей ламинарных фаз должно удовлетворять при этом экспоненциальному закону (3).

2. Результаты численного моделирования

Для того чтобы подтвердить предположение об эквивалентности типов перемежающегося поведения, являющихся предметом исследования, рассмотрим системы, в которых можно наблюдать перемежаемость игольного ушка (связанные осцилляторы Ресслера) и перемежаемость типа I с шумом (квадратичное отображение и неавтономный генератор ван дер Поля).

2.1. Две связанные системы Ресслера. Перемежающееся поведение в двух связанных хаотических осцилляторах в окрестности границы фазовой синхронизации (при малой частотной расстройке взаимодействующих подсистем) традиционно классифицируется как перемежаемость игольного ушка [8, 13, 14], при этом теоретическое объяснение механизмов, обуславливающих данный тип перемежаемости, дается в терминах синхронизации/десинхронизации неустойчивых периодических орбит, встроенных в хаотические аттракторы взаимодействующих систем. Важно отметить, что поведение двух связанных систем Ресслера вблизи порога установления режима фазовой синхронизации было рассмотрено с точки зрения перемежаемости типа I с шумом (впервые это было сделано в работе [11]), хотя ранее та же система (при тех же значениях управляющих параметров) исследовалась с позиций перемежаемости игольного ушка в [14]. Согласно различным работам, получается, что средняя длительность ламинарных фаз удовлетворяет как уравнению (2) (работа [11]), так и выражению (5) (статья [14]). Позднее, в работе [22] было показано, что распределение длительностей ламинарных фаз для связанных систем Ресслера удовлетворяет экспоненциальному закону (3). Чтобы получить полную картину, мы проводим рассмотрение двух связанных систем Ресслера вблизи порога фазовой синхронизации при ином типе связи между системами и другом наборе значений управляющих параметров и показываем, что наблюдаемое перемежающееся поведение можно классифицировать и как перемежаемость игольного ушка, и как перемежаемость типа I с шумом.

Исследуемая система описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), \\ \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \sigma(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c),\end{aligned}\tag{10}$$

где (x, y, z) – декартовы координаты ведущего (индекс d) и ведомого (индекс r) осцилляторов; σ – параметр, отвечающий за величину связи. Значения других управляющих параметров были выбраны по аналогии с предыдущими исследованиями [23, 24]: $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$. Параметр ω_r , задающий собственную частоту ведомой системы, был фиксирован ($\omega_r = 0.95$), а значение аналогичного параметра ведущей системы ω_d равнялось 0.93. При указанных значениях управляющих

параметров хаотические аттракторы обеих подсистем в отсутствие связи являются фазово-когерентными, благодаря чему мгновенная фаза хаотического сигнала может быть введена традиционным способом, как угол поворота $\varphi_{d,r} = \arctan(y_{d,r}/x_{d,r})$ на плоскости проекции (x, y) каждой системы.

На рис. 1 один и тот же результат численного моделирования двух связанных систем Ресслера (10) проиллюстрирован различными способами для того, чтобы сравнить полученные данные с аналитическими аппроксимациями для перемежаемости игольного ушка (рис. 1, *a*) и перемежаемости типа I с шумом (рис. 1, *б*). На рис. 1, *a* зависимость средней длительности ламинарных фаз T от параметра надкритичности $(\sigma_2 - \sigma)$, где $\sigma_2 = 0.042$ соответствует границе фазовой синхронизации, показана во всем диапазоне значений параметра связи, чтобы продемонстрировать отклонение численных данных от закона (5) вдали от границы фазовой синхронизации. Закономерность (5) является справедливой в диапазоне значений параметра связи $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, где $\sigma_1 = 0.031$, что позволяет говорить о наличии в этой области в системе режима перемежаемости игольного ушка.

Параметр связи σ играет роль управляющего параметра. Заметим, однако, что критические точки σ_2 и σ_c , использованные в аналитических зависимостях (5) и (2) для перемежаемости игольного ушка и перемежаемости типа I при наличии шума, соответственно, не совпадают друг с другом, и значения их различны. Критическая точка $\sigma_2 \approx 0.042$ связана с порогом установления режима фазовой синхронизации двух связанных систем Ресслера. Точка $\sigma_c \approx 0.0345$, фигурирующая в (2) как ε_c , соответствует точке седло-узловой бифуркации, если хаотическая динамика рассматривается как аналог шума, который можно было бы «выключить». Значение этой точки определялось по зависимости нулевого условного показателя Ляпунова от параметра связи (см. работу [21]).

Нетрудно видеть, что перемежающееся поведение двух связанных систем Ресслера можно трактовать и как перемежаемость игольного ушка, и как перемежаемость типа I в присутствии шума, при этом в обоих случаях наблюдается отличное соответствие численных данных и теоретических зависимостей. Это позволяет утверждать, что оба эти явления представляют один тип динамики системы. Тем не

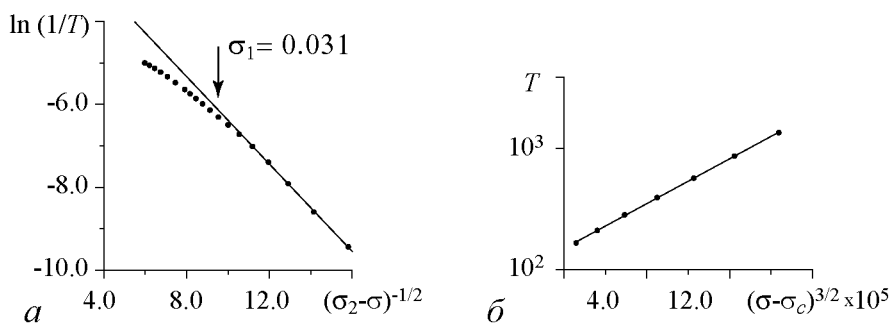


Рис. 1. Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности для двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (10). Точки – численно полученные результаты. Сплошные линии – теоретические зависимости (5) и (2). *a* – перемежаемость игольного ушка ($\sigma_2 = 0.042$), стрелкой отмечена граница возникновения режима перемежаемости игольного ушка $\sigma_1 = 0.031$. *б* – перемежаемость типа I с шумом ($\sigma_c = 0.0345$), ось ординат показана в логарифмическом масштабе

менее, для того чтобы быть полностью уверенными в справедливости этого вывода, необходимо рассмотреть другой пример: систему, демонстрирующую перемежающееся поведение, которое традиционно классифицируется как перемежаемость типа I с шумом.

2.2. Неавтономный осциллятор ван дер Поля в присутствии шума.

В качестве второго примера рассмотрим неавтономный генератор ван дер Поля, на который оказывается некоторое случайное воздействие. Уравнение, описывающее динамику такой системы, имеет вид

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin(\omega_e t) + D\xi(t). \quad (11)$$

Здесь A – амплитуда внешнего гармонического сигнала с частотой ω_e , $D\xi(t)$ – случайное слагаемое. Значения управляющих параметров были выбраны следующими: $\lambda = 0.1$, $\omega_e = 0.98$. При таком наборе параметров и нулевом уровне шума ($D = 0$) динамика неавтономного генератора ван дер Поля становится синхронной, когда $A = A_c = 0.0238$, что соответствует седло-узловой бифуркации на плоскости комплексных амплитуд. Плотность вероятности случайной величины $\xi(t)$ есть функция

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right), \quad (12)$$

где $\sigma^2 = 2$. Для интегрирования (11) использовался одношаговый метод Эйлера с шагом по времени $h = 5 \times 10^{-4}$, значение интенсивности шума было фиксированным, $D = 1$.

С одной стороны, как это уже обсуждалось выше, перемежающееся поведение в этом случае классифицируется как перемежаемость типа I с шумом. Соответствующая зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности ($A - A_c$) показана на рис. 2, б. Когда амплитуда A внешнего сигнала превышает критическое значение A_c , должен наблюдаться экспоненциальный закон $T \sim \exp(\alpha(A - A_c)^{3/2})$. Чтобы более наглядно изобразить наличие этой зависимости, абсцисса на рис. 2, б отложена в масштабе $(A - A_c)^{3/2}$, а ось ординат T показана в логарифмической шкале. Вновь можно видеть хорошее соответствие между численно полученными данными и теоретической зависимостью (2). Распределение

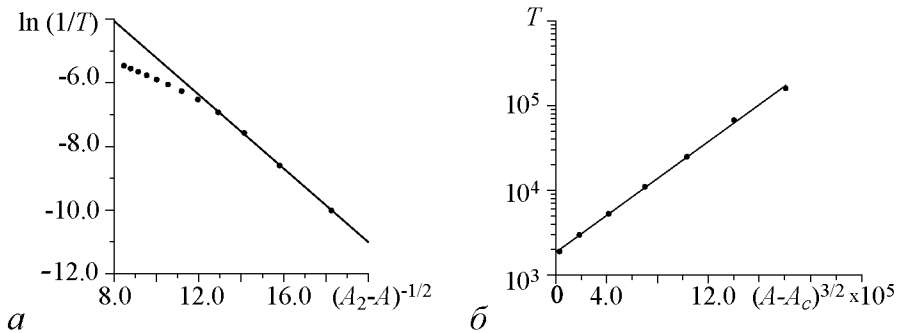


Рис. 2. Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности для неавтономного осциллятора ван дер Поля со случайным слагаемым (11). Точки – численно полученные результаты, сплошные линии – теоретические зависимости (5) и (2). а – перемежаемость игольного ушка ($A_2 = 0.029$). б – перемежаемость типа I с шумом ($A_c = 0.0238$)

длительностей ламинарных фаз $p(t)$, полученное при $A > A_c$ также удовлетворяет теоретическому выражению (3), см. рис. 7 в работе [12].

С другой стороны, если подобрать соответствующее значение A_2 для неавтономного генератора ван дер Поля (11), то можно обнаружить, что перемежающееся поведение в этой системе может также рассматриваться как перемежаемость игольного ушка. Действительно, на рис. 2, а нетрудно видеть очень хорошее соответствие между полученной в численном счете для различных значений параметра связи средней длительностью ламинарных фаз T и теоретическим законом (5), соответствующим перемежаемости игольного ушка. Заметим также, что зависимость $T(A_2 - A)$ в осях $((A_2 - A)^{-1/2}, \ln(1/T))$ ведет себя таким же образом, как и соответствующая функция $T(\sigma_2 - \sigma)$ в осях $((\sigma_2 - \sigma)^{-1/2}, \ln(1/T))$ для двух связанных систем Ресслера (10).

2.3. Квадратичное отображение со случайным воздействием. Следующим примером является система с дискретным временем, квадратичное отображение

$$x_{n+1} = x_n^2 + \lambda - \varepsilon + D\xi_n, \quad \text{mod } 1, \quad (13)$$

где операция «mod 1» используется для того, чтобы обеспечить возврат системы в окрестность точки $x = 0$; $\lambda = 0.25$, а плотность вероятности случайной величины ξ распределена равномерно в интервале $\xi \in [-1, 1]$. Если интенсивность шума D равна нулю, то седло-узловая бифуркация в системе наблюдается при $\varepsilon = 0$. Перемежающееся поведение типа I имеет место при $\varepsilon < 0$, в то время как для положительных ε наблюдается устойчивая неподвижная точка. Если добавить случайное воздействие ($D > 0$) в (13), то можно ожидать, что перемежающееся поведение будет также наблюдаться в области положительных значений управляющего параметра ε , при этом средняя длительность ламинарных фаз в зависимости от параметра надкритичности подчиняется закону (2).

Несмотря на то, что в этом случае мы имеем дело с перемежаемостью типа I в присутствии шума, точки, полученные численно и соответствующие средней длительности ламинарных фаз при различных значениях управляющего параметра, хорошо аппроксимируются как выражением (5), так и зависимостью (2) (см. рис. 3), что доказывает справедливость нашего утверждения об эквивалентности рассматриваемых типов перемежающегося поведения.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что построенные характеристики одни и те же, как в случае, когда перемежающееся поведение традиционно классифицируется как перемежаемость игольного ушка, так и в ситуации, когда мы имеем дело с системой, демонстрирующей перемежаемость типа I с шумом.

Два следующих подраздела посвящены рассмотрению перемежающегося поведения в другой системе и анализу того, как соотносятся между собой зависимости для перемежаемости типа I с шумом и перемежаемости игольного ушка, чтобы предоставить дополнительные аргументы в пользу сделанного предположения относительно эквивалентности этих двух типов перемежающегося поведения.

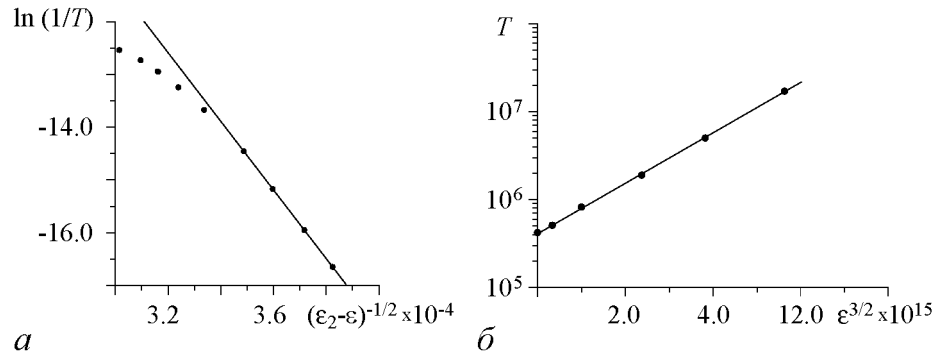


Рис. 3. Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности для квадратичного отображения (13). Точки – численно полученные результаты, сплошные линии – теоретические зависимости (5) и (2). *a* – перемежаемость игольного ушка ($\epsilon_2 = 10^{-9}$). *б* – перемежаемость типа I в присутствии шума ($\epsilon_c = 0$)

3. Осциллятор ван дер Поля, управляемый хаотическим сигналом

В данном разделе рассмотрим осциллятор ван дер Поля, находящийся под внешним хаотическим сигналом со стороны системы Ресслера

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_d &= \alpha(-\omega y - z), \\
 \dot{y}_d &= \alpha(\omega x + ay), \\
 \dot{z}_d &= \alpha(p + z(x - c)), \\
 \ddot{u} - (\lambda - u^2)\dot{u} + u &= \varepsilon(Dy - \dot{u}),
 \end{aligned} \tag{14}$$

где $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10$, $\lambda = 0.1$, $\omega = 0.9689$ – управляющие параметры. Вспомогательные параметры $\alpha = 0.99$ и $D = 0.0664$ изменяют характеристики (амплитуду и основную частоту) хаотического сигнала, оказывающего воздействие на осциллятор ван дер Поля.

С формальной точки зрения поведение системы (14) нельзя классифицировать ни как перемежаемость игольного ушка, ни как перемежаемость типа I с шумом. Действительно, поскольку ведомый осциллятор является периодическим, в его аттрактор не могут быть встроены неустойчивые периодические орбиты, которые могли бы синхронизоваться, следовательно, динамику системы нельзя трактовать как перемежаемость игольного ушка. Кроме того, благодаря наличию хаотических возмущений, говорить о чистой седло-узловой бифуркации в такой системе также нельзя, следовательно, нельзя вести речь и о перемежаемости типа I. Тем не менее, интуитивно понятно, что данный пример тесно связан со всеми случаями, рассмотренными выше, и можно ожидать, что в этой системе должны наблюдаться те же типы перемежающегося поведения. Принимая во внимание схожесть хаотических и случайных возмущений, о которой упоминалось выше, можно объяснить поведение генератора ван дер Поля, управляемого внешним хаотическим сигналом, в окрестности границы синхронного режима с позиций перемежаемости типа I в присутствии шума.

Рис. 4 иллюстрирует справедливость данного утверждения. В самом деле, численно полученные данные удовлетворяют как выражению (5) (рис. 4, *a*), так и зависимости (2) (рис. 4, *б*), что позволяет утверждать, что мы имеем здесь дело с тем

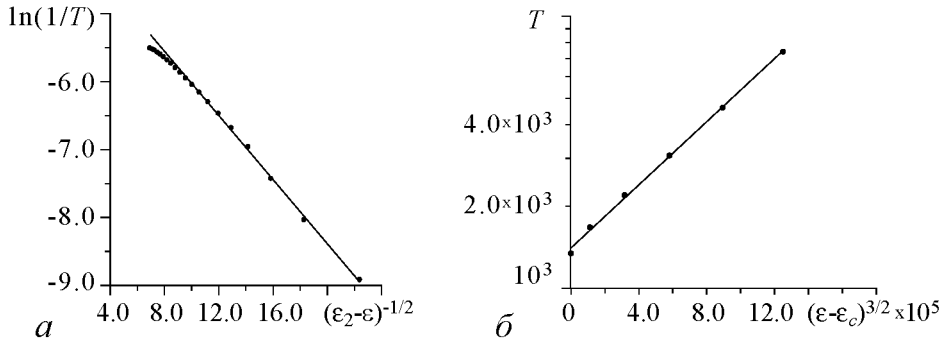


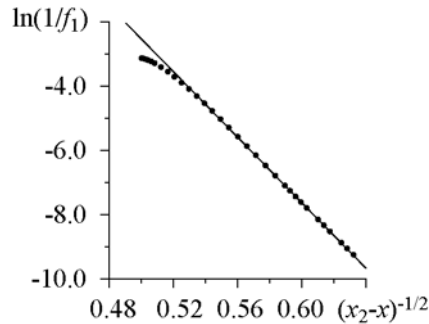
Рис. 4. Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности для генератора ван дер Поля под внешним хаотическим сигналом системы Ресслера (14). Точки – численно полученные результаты, сплошные линии – теоретические зависимости (5) и (2). *a* – перемежаемость игольного ушка ($\varepsilon_2 = 0.023$). *б* – перемежаемость типа I с шумом ($\varepsilon_c = 0.0185$)

же самым типом динамики, что и в случаях неавтономного осциллятора ван дер Поля (11), квадратичного отображения (13) и двух связанных систем Ресслера (10), рассмотренных выше.

4. Соотношение зависимостей средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности для перемежаемости игольного ушка и перемежаемости типа I в присутствии шума

Поскольку один и тот же набор данных может быть аппроксимирован двумя различными кривыми (5) и (2), очевидно, что одна из них может быть аппроксимирована другой. Иными словами, экспоненциальный закон (2), полученный для средней длительности ламинарных фаз перемежаемости типа I с шумом, может быть также аппроксимирован зависимостью (5), соответствующей перемежаемости игольного ушка. Такая аппроксимация представлена на рис. 5. Очевидно, что, выбрав подходящее значение для критической величины x_2 , можно аппроксимировать экспоненциальный закон (2) зависимостью, используемой для перемежаемости игольного ушка. Более того, в осях $(|x_2 - x|^{-1/2}, \ln(1/f_1))$ функция f_1 ведет себя таким же образом, как и аналогичные зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности для квадратичного отображения (13), неавтономного осциллятора ван дер Поля (11), (14) и двух связанных систем Ресслера (10) (достаточно сравнить рис. 5 с рис. 1–4).

Рис. 5. Зависимость $f_1(x) = C \exp(\alpha x^{3/2})$, моделирующая теоретический экспоненциальный закон (2) и его аппроксимация кривой $f_2(x) = c_0 - c_1|x - x_2|^{-1/2}$, соответствующей закону (5) для перемежаемости игольного ушка. Значения параметров: $C = 23$, $\alpha = 3.33$, $c_0 = 22.96$, $c_1 = 50.98$, $x_c = 4.0$. Точки соответствуют зависимости $f_1(x)$. Зависимость $f_2(x)$ изображена сплошной линией.



Заключение

Таким образом, на основании всего вышеизложенного можно сделать вывод о том, что перемежаемость игольного ушка и перемежаемость типа I с шумом, рассматриваемые до настоящего времени как разные типы динамики, на самом деле являются одним типом поведения. Различие между данными типами перемежаемости заключается только в характере внешнего сигнала, воздействующего на систему. В случае перемежаемости типа I с шумом на систему оказывается случайное воздействие, в то время как для перемежаемости игольного ушка используется сигнал хаотической динамической системы, который влияет на динамику ведомого хаотического осциллятора. Вместе с тем, механизмы, отвечающие за поведение системы, равно как и характеристики динамики системы, одни и те же в обоих случаях.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты 08-02-00102-а, 09-02-92421-КЭ).

Библиографический список

1. *Dubois M., Rubio M., and Bergé P.* Experimental evidence of intermitencies associated with a subharmonic bifurcation // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 51. P. 1446.
2. *Boccaletti S. and Valladares D.L.* Characterization of intermittent lag synchronization // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 5. P. 7497.
3. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., and Zhou C.T.* The synchronization of chaotic systems // *Physics Reports.* 2002. Vol. 366. P. 1.
4. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // *Europhysics Lett.* 2005. Vol. 70, № 2. P. 169.
5. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Levin Yu.I.* Synchronization of chaotic oscillator time scales // *JETP.* 2005. Vol. 127, № 4. P. 886.
6. *Bergé P., Pomeau Y., and Vidal Ch.* L'ordre dans le chaos. Hermann, Paris, 1988.
7. *Platt N., Spiegel E.A., and Tresser C.* On-off intermittency: a mechanism for bursting // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70, № 3. P. 279.
8. *Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., and Kurths J.* Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79, № 1. P. 47.
9. *Pomeau Y. and Manneville P.* Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // *Commun. Math. Phys.* 1980. Vol. 74. P. 189.
10. *Eckmann J.P., Thomas L., and Wittwer P.* Intermittency in the presence of noise // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1981. Vol. 14. P. 3153.
11. *Kye W.-H. and Kim C.-M.* Characteristic relations of type-I intermittency in the presence of noise // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 5. P. 6304.
12. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Ovchinnikov A.A., and Boccaletti S.* Length distribution of laminar phases for type-I intermittency in the presence of noise // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76, № 2. 026206.

13. *Rosa E., Ott E., and Hess M.H.* Transition to phase synchronization of chaos // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80, № 8. P. 1642.
14. *Lee K.J., Kwak Y., and Lim T.K.* Phase jumps near a phase synchronization transition in systems of two coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81, № 2. P. 321.
15. *Grebogi C., Ott E., and Yorke J.A.* Fractal basin boundaries, long lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50, № 13. P. 935.
16. *Boccaletti S., Allaria E., Meucci R., and Arcelli F.T.* Experimental characterization of the transition to phase synchronization of chaotic CO_2 laser systems // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89, № 19, 194101.
17. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., and Kurths J.* Phase synchronisation in regular and chaotic systems, Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2291.
18. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Kurovskaya M.K.* Two types of phase synchronization destruction // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 75, № 3, 036205.
19. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., and Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // Physica D. 1997. Vol. 104, № 4. P. 219.
20. *Horita Takehiko, Ouchi Katsuya, Yamada T., and Fujisaka H.* Stochastic model of chaotic phase synchronization. II // Progress of Theoretical Physics. 2008. Vol. 119, № 2. P. 223.
21. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Kurovskaya M.K.* Zero Lyapunov exponent in the vicinity of the saddle-node bifurcation point in the presence of noise // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 78, 036212.
22. *Куровская М.К.* Распределение длительности ламинарных фаз при перемежаемости «игольного ушка» // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, № 12. С. 483.
23. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* Generalized synchronization: a modified system approach // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71, № 6, 067201.
24. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Moskalenko O.I.* Generalized synchronization onset // Europhysics Letters. 2005. Vol. 72, № 6. P. 901.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 18. 11.2009

INTERMITTENCY OF TYPE-I WITH NOISE AND EYELET INTERMITTENCY

A.A. Koronovskii, M.K. Kurovskaya, O.I. Moskalenko, A.E. Hramov

In this article we compare the characteristics of two types of the intermittent behavior (type-I intermittency in the presence of noise and eyelet intermittency) supposed hitherto to be the different phenomena. We prove that these effects are the same type of dynamics observed under different conditions. The correctness of our conclusion is proven by the consideration of different sample systems, such as quadratic map, van der Pol oscillator and Rössler system.

Keywords: Fluctuation phenomena, random processes, noise, synchronization, chaotic oscillators, dynamical system, intermittency.



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru



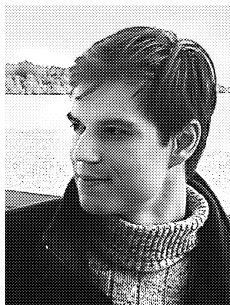
Куровская Мария Константиновна – родилась в г. Ташауз (1986). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2007). Награждена медалью Российской академии наук (2008). Кандидат физико-математических наук (2009). Ассистент кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика, различные типы хаотической синхронизации и методы их диагностики. Автор ряда статей в рецензируемых отечественных и зарубежных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: mc@nonlin.sgu.ru



Москаленко Ольга Игоревна – родилась в Саратове (1984). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета (2006), кандидат физико-математических наук (2008). Доцент кафедры нелинейной физики СГУ, старший научный сотрудник лаборатории физики нелинейных явлений отделения физики нелинейных систем НИИ Естественных наук СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; исследование кооперативных явлений в сетях со сложной топологией; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях. Автор более 20 статей в центральных рецензируемых отечественных и зарубежных научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru



Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал в соавторстве с чл.-корр. РАН, профессором Д.И. Трубецковым книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004) и в соавторстве с доцентом А.А. Короновским монографии «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003) и «Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aeh@nonlin.sgu.ru



АНАЛИЗ ИНДУЦИРОВАННЫХ ШУМОМ БИФУРКАЦИЙ В СИСТЕМЕ ХОПФА

И.А. Баширцева, Т.В. Первалова, Л.Б. Ряшко

Рассматривается система Хопфа, являющаяся классической моделью бифуркации жесткого рождения цикла. В присутствии параметрических и аддитивных случайных возмущений в системе наблюдаются различные типы стохастических аттракторов. Для соответствующего уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова получено решение, дающее явное представление для стационарной плотности распределения. Показано, как при вариации интенсивности мультипликативных шумов форма стохастических аттракторов системы претерпевает качественные изменения. Детально описано явление обратной стохастической бифуркации, при которой автоколебания подавляются мультипликативным шумом.

Ключевые слова: Система Хопфа, циклы, равновесия, стохастические аттракторы, обратные бифуркации.

Введение

Многие сложные явления нелинейной динамики связаны с мультистабильностью – наличием у исследуемой системы сразу нескольких аттракторов. Классическим случаем здесь является сосуществование равновесия и охватывающего его предельного цикла. Возможные переходы из бассейна притяжения одного аттрактора в бассейн притяжения другого сопровождаются возбуждением соответствующих автоколебаний или их подавлением [1]. В анализе таких переходов важную роль играет учет различных эффектов, связанных с наличием случайных возмущений. Индуцированные шумами переходы для нелинейных систем со стохастическими автоколебаниями привлекают внимание широкого круга исследователей как с теоретической, так и с практической точек зрения [2–4]. Воздействие даже малых шумов может привести к качественным изменениям в динамике системы [5, 6].

Исследование нелинейных стохастических автоколебаний было начато в [7] и продолжено в большом числе работ [8–10]. Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова дает детальное вероятностное описание динамики исследуемой системы, однако сложности его прямого анализа даже для двумерных систем заставляют обратиться к тем или иным асимптотическим методам и аппроксимациям. В настоящее время активно развивается вероятностный асимптотический анализ, использующий функцию квазипотенциала [11–15]. Новый подход, связанный с аппроксимацией квазипотенциала при помощи функции стохастической чувствительности, предложен в

работах [16–19] для количественного анализа отклика предельных циклов на случайные возмущения. Нелинейные динамические системы с индуцированными шумами переходами от равновесия к предельному циклу рассматривались многими авторами. Стохастический аналог бифуркации Андронова–Хопфа изучался для таких систем как брусселятор [20–23], осцилляторов Дуффинга [24], ван дер Поля [25] и Дуффинга–ван дер Поля [26, 27]. В ходе исследования этих моделей с помощью приближенных методов были обнаружены различные явления, связанные с воздействием случайных возмущений. Так, например, в [20, 21] описан сдвиг точки бифуркации Андронова–Хопфа в сторону больших значений бифуркационного параметра на величину, пропорциональную интенсивности возмущения.

В теории нелинейных динамических систем общеизвестна роль простых модельных примеров, допускающих точное аналитическое решение и позволяющих в силу этого получить исчерпывающее описание рассматриваемых явлений. К числу таких моделей относятся системы Хопфа – базовые примеры детерминированной теории бифуркаций, иллюстрирующие два варианта возбуждения автоколебаний (мягкое и жесткое). Явное аналитическое представление решений этих детерминированных систем позволяет достичь отчетливого понимания механизмов как мягкой, так и жесткой бифуркаций рождения цикла. Результаты анализа стохастически возмущенной модели Хопфа с мягкой бифуркацией рождения цикла представлены в [28]. Воздействие шумов на генератор с жестким возбуждением рассматривалось в [1], где изучались вероятности возбуждения и срыва автоколебаний.

В данной работе исследуется стохастический вариант модели Хопфа с жестким возбуждением автоколебаний. Из соответствующего уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова получено явное аналитическое представление стационарной плотности распределения радиальной составляющей этой системы. Данная функция позволяет провести подробный вероятностный анализ зависимости стохастических аттракторов системы от параметров.

В статье представлены эффекты, связанные с воздействием как аддитивных, так и параметрических случайных возмущений. Показан механизм качественных изменений формы плотности распределения при вариации интенсивности параметрических шумов. Исследуются различия в реакции модели Хопфа на аддитивные и параметрические помехи в зоне перехода от равновесия к циклу. В работе исследованы соответствующие обратные стохастические бифуркации, связанные со сдвигом бифуркационных значений параметра, приводящие к подавлению автоколебаний.

1. Система Хопфа со случайными возмущениями

Будем рассматривать систему Хопфа (жесткий режим) под воздействием внешних аддитивных и параметрических шумов. Исходная детерминированная система имеет вид

$$\begin{cases} dx = (x(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) - y)dt, \\ dy = (y(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) + x)dt. \end{cases} \quad (1)$$

При значении параметра $\mu < -1$ единственным аттрактором системы является устойчивая точка покоя $(0, 0)$. При $\mu = -1$ наряду с существующей точкой покоя появляется полуустойчивый предельный цикл $x^2 + y^2 = 1$.

При $-1 < \mu < 0$ система (1) имеет два аттрактора – равновесие $(0, 0)$ и цикл $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{1 + \mu}$, разделенных неустойчивым циклом $x^2 + y^2 = 1 - \sqrt{1 + \mu}$.

При $\mu = 0$ происходит слияние внутреннего цикла с точкой покоя. В результате при $\mu > 0$ система имеет неустойчивое равновесие $(0, 0)$ и устойчивый предельный цикл. На рис. 1 представлена бифуркационная диаграмма величины $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, где для системы (1) устойчивые состояния изображены сплошными линиями, неустойчивые – штриховыми. При переходе параметра μ через значение -1 слева направо происходит жесткая бифуркация Хопфа – в системе появляется предельный цикл с радиусом $r > 1$.

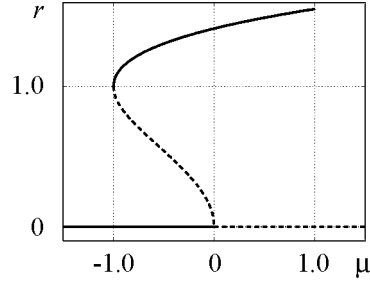


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма детерминированной системы

Добавим в систему (1) случайные возмущения. Рассмотрим соответствующую стохастическую систему уравнений Стратоновича

$$\begin{cases} dx = (x(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) - y)dt + \sigma_1 x \circ dW_1 + \sigma_2 \circ dW_2, \\ dy = (y(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) + x)dt + \sigma_1 y \circ dW_1 + \sigma_3 \circ dW_3, \end{cases} \quad (2)$$

где W_i ($i = 1, 2, 3$) – независимые стандартные винеровские процессы, $\sigma_1 \geq 0$ – интенсивность параметрического (мультипликативного) шума, $\sigma_2 \geq 0$ и $\sigma_3 \geq 0$ – интенсивности аддитивных шумов. Запишем для (2) эквивалентную систему уравнений Ито

$$\begin{cases} dx = \left(x(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) - y + \frac{\sigma_1^2}{2}x \right) dt + \sigma_1 x dW_1 + \sigma_2 dW_2, \\ dy = \left(y(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) + x + \frac{\sigma_1^2}{2}y \right) dt + \sigma_1 y dW_1 + \sigma_3 dW_3. \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, что обе системы имеют подобную математическую структуру и отличаются на сдвиг $\mu_{\text{Ито}} = \mu_{\text{Страт}} + \sigma_1^2/2$.

Сделаем в системе замену переменных

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x},$$

получим по формуле Ито

$$\begin{aligned} dr &= \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} (\sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2) + 2 \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} (\sigma_1^2 xy) + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} (\sigma_1^2 y^2 + \sigma_3^2) \right) dt, \\ d\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2) + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} (\sigma_1^2 xy) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} (\sigma_1^2 y^2 + \sigma_3^2) \right) dt \end{aligned}$$

новую систему стохастических уравнений в полярных координатах

$$\begin{cases} dr = \left((\mu + 2r^2 - r^4)r + r \frac{\sigma_1^2}{2} \right) dt + \frac{1}{2r} (\sigma_2^2 \sin^2 \varphi + \sigma_3^2 \cos^2 \varphi) dt + \\ \quad + r\sigma_1 dW_1 + \sigma_2 \cos \varphi dW_2 + \sigma_3 \sin \varphi dW_3, \\ d\varphi = dt + \frac{1}{r^2} (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) \cos \varphi \sin \varphi dt + \frac{1}{r} (-\sigma_2 \sin \varphi dW_2 + \sigma_3 \cos \varphi dW_3). \end{cases} \quad (4)$$

Предположим, что интенсивность внешних аддитивных возмущений в системе уравнений (3) одинакова, то есть $\sigma_2 = \sigma_3$. При этом предположении определим два новых случайных процесса W_r и W_φ следующим образом:

$$dW_r = \cos \varphi dW_2 + \sin \varphi dW_3,$$

$$dW_\varphi = -\sin \varphi dW_2 + \cos \varphi dW_3.$$

Эти формулы представляют собой ортогональное преобразование двух винеровских процессов W_2 и W_3 , в силу чего случайные процессы W_r и W_φ также являются независимыми стандартными винеровскими процессами (см., например, [29]).

В результате систему (4) с новыми винеровскими процессами W_r и W_φ можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} dr = \left((\mu + 2r^2 - r^4)r + r \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2r} \right) dt + r\sigma_1 dW_1 + \sigma_2 dW_r, \\ d\varphi = dt + \frac{1}{r} \sigma_2 dW_\varphi. \end{cases} \quad (5)$$

В системе (5) переменная r не зависит от φ . Решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1^2 r^2 + \sigma_2^2) \rho]'' = [((\mu + 2r^2 - r^4)r + r \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2r}) \rho]' \quad (6)$$

для стационарной плотности распределения $\rho(r)$ может быть найдено аналитически. Функция $\rho(r)$ является исчерпывающей вероятностной характеристикой стохастических аттракторов системы (5). Исследуем отдельно случаи воздействия аддитивного и мультипликативного шумов.

2. Стохастические аттракторы системы Хопфа

2.1. Влияние аддитивного шума. Рассмотрим случай, когда на систему Хопфа действует только аддитивный шум ($\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 \neq 0$). Тогда уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (6) примет вид

$$\frac{\sigma_2^2}{2} \rho'' = [((\mu + 2r^2 - r^4)r + \frac{\sigma_2^2}{2r}) \rho]'$$

и сводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{2\mu r^2 + 4r^4 - 2r^6 + \sigma_2^2}{\sigma_2^2 r} dr,$$

решением которого является функция

$$\rho(r) = Nr \exp\left(\frac{3\mu r^2 + 3r^4 - r^6}{3\sigma_2^2}\right), \quad (7)$$

где $N > 0$ – константа интегрирования. Для стационарной плотности распределения $p(x, y)$ системы Хопфа (3) в декартовых координатах x и y получим

$$p(x, y) = K \exp\left(\frac{3\mu(x^2 + y^2) + 3(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^3}{3\sigma_2^2}\right) \quad (8)$$

с константой интегрирования $K > 0$.

На рис. 2 представлены графики функции $p(x, 0)$ для пяти значений параметра μ и при различных значениях интенсивности аддитивного шума σ_2 .

Проведем анализ функции плотности распределения $p(x, y)$ в зависимости от параметров μ и σ_2 . Экстремумы функции $p(x, y)$ удовлетворяют следующим равенствам:

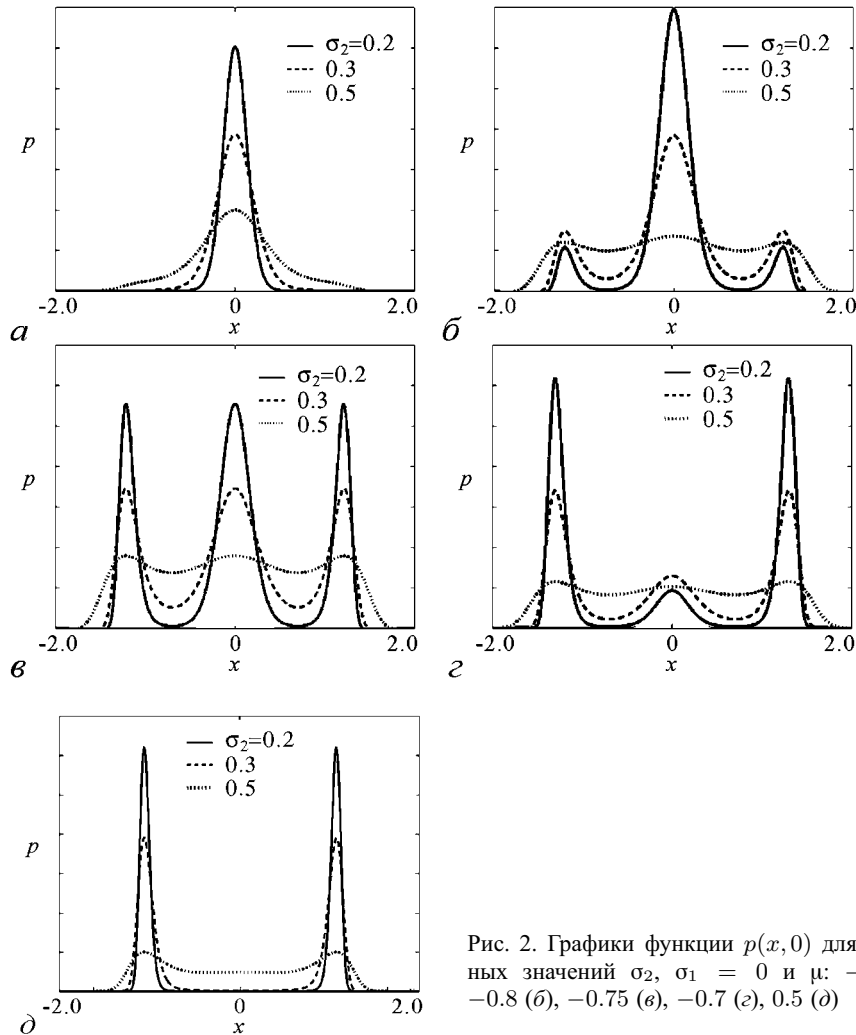


Рис. 2. Графики функции $p(x, 0)$ для различных значений σ_2 , $\sigma_1 = 0$ и μ : -1.2 (а), -0.8 (б), -0.75 (в), -0.7 (г), 0.5 (д)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2K}{\sigma_2^2} e^\beta x [\mu + 2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2] = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{2K}{\sigma_2^2} e^\beta y [\mu + 2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2] = 0,$$

где $\beta = 1/(3\sigma_2^2)(3\mu(x^2 + y^2) + 3(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^3)$.

Экстремумы достигаются в следующих точках фазовой плоскости:

$$x = y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}, \quad x^2 + y^2 = 1 - \sqrt{\mu + 1}.$$

Анализ этих множеств приводит к следующим результатам.

При $\mu \leq -1$ функция $p(x, y)$ имеет единственный максимум в точке $(0, 0)$. Случайные траектории системы Хопфа под воздействием аддитивных помех концентрируются вблизи точки $(0, 0)$. Соответствующий аттрактор будем называть *стохастической точкой покоя* (рис. 2, а).

При $\mu \geq 0$ функция $p(x, y)$ достигает максимума в точках детерминированного цикла $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}$ и имеет единственный минимум в точке $(0, 0)$. Случайные траектории системы Хопфа под воздействием аддитивных помех концентрируются вблизи точек окружности $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}$. Такой аттрактор будем называть *стохастическим предельным циклом* (рис. 2, д).

При $-1 < \mu < 0$ функция $p(x, y)$ имеет три экстремума. Локальный минимум функции достигается при $x^2 + y^2 = 1 - \sqrt{\mu + 1}$ и два локальных максимума достигаются при $x = y = 0$, $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}$. Случайные состояния системы Хопфа под воздействием аддитивных помех распределяются между точкой $(0, 0)$ и детерминированным циклом $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}$. В этом случае наблюдается комбинированный аттрактор, объединяющий стохастическое равновесие и предельный цикл (рис. 2, б-з).

На интервале $\mu \in (-1, 0)$ в графиках сечений плотности $p(x, 0)$ наблюдаются три пика. Средний пик связан с повышенной концентрацией случайных состояний вблизи равновесия, а крайние – в окрестности цикла. При $\mu = -0.75$ максимальные значения плотности распределения $p(x, y)$ для равновесия $(0, 0)$ и цикла $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}$ совпадают (см. рис. 2, в). На интервале $-1 < \mu < -0.75$ в стационарной плотности распределения доминирует стохастическое равновесие. Чем ближе μ к -1 , тем вес стохастического равновесия больше (см. рис. 2, б). На интервале $-0.75 < \mu < 0$ уже доминирует стохастический цикл. При стремлении μ к 0 вес стохастического равновесия уменьшается (см. рис. 2, з). При изменении параметра μ от -1 до 0 высота P_e пика плотности $p(x, 0)$, соответствующего равновесию, уменьшается и одновременно увеличивается высота P_c крайних пиков, характеризующих стохастический цикл.

Величина $k = (P_c - P_e)/(\max(P_c, P_e))$ позволяет оценить вес равновесия и цикла в общем распределении. На рис. 3 представлены графики весовой функции $k(\mu, \sigma_2)$ на интервале $-1 < \mu < 0$ при разных значениях σ_2 ($\sigma_1 = 0$). Для $\mu = -0.75$ при всех σ_2 имеем $k = 0$ ($P_c = P_e$) – концентрации состояний вблизи равновесия и цикла одинаковы. При $-1 < \mu < -0.75$ знак у k отрицательный – домини-

рует стохастическое равновесие; при $-0.75 < \mu < 0$, где знак у k положительный, доминирует цикл. При увеличении σ_2 значение k для каждого фиксированного μ стремится к нулю – пики плотности распределения равновесия и цикла выравниваются по высоте.

Изменение интенсивности σ_2 аддитивного шума не меняет положение локальных экстремумов функции плотности распределения. Увеличение аддитивного шума приводит к увеличению разброса случайных траекторий системы Хопфа вблизи детерминированных аттракторов: вокруг устойчивой точки покоя $(0, 0)$ при $\mu \leq 1$; вокруг устойчивой точки покоя $(0, 0)$ и устойчивого предельного цикла $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}$ при $-1 < \mu < 0$; вокруг устойчивого предельного цикла $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1}$ при $\mu \geq 0$. Заметим, что бифуркационные значения $\mu_1 = -1$ и $\mu_2 = 0$ детерминированной системы Хопфа являются точками, при которых форма графика $p(x, y)$ претерпевает качественные изменения – в стохастической системе Хопфа происходит так называемая Р-бифуркация [30]. Таким образом, в отсутствие параметрических шумов точки бифуркации детерминированной системы являются одновременно точками бифуркации и системы с аддитивными помехами. Иными словами, аддитивный шум не меняет расположения точек бифуркации.

2.2. Влияние мультипликативного шума. Рассмотрим случай, когда на систему действует невырожденный мультипликативный шум ($\sigma_1 \neq 0$). В этом случае решение уравнения (6) имеет вид

$$\rho(r) = Nr \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} r^4 + \left(\frac{2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^4} \right) r^2 \right) (\sigma_1^2 r^2 + \sigma_2^2)^\alpha \quad (9)$$

для полярных координат и

$$p(x, y) = K \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} (x^2 + y^2)^2 + \left(\frac{2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^4} \right) (x^2 + y^2) \right) (\sigma_1^2 (x^2 + y^2) + \sigma_2^2)^\alpha \quad (10)$$

в декартовых координатах. Здесь

$$\alpha = \frac{\mu}{\sigma_1^2} - \frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1^4} - \frac{\sigma_2^4}{\sigma_1^6} - 1,$$

$K > 0$ и $N > 0$ – константы интегрирования.

Для локальных экстремумов функции $p(x, y)$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2K e^\gamma (\sigma_1^2 (x^2 + y^2) + \sigma_2^2)^{\alpha-1} x [\mu + 2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 - \sigma_1^2] = 0,$$

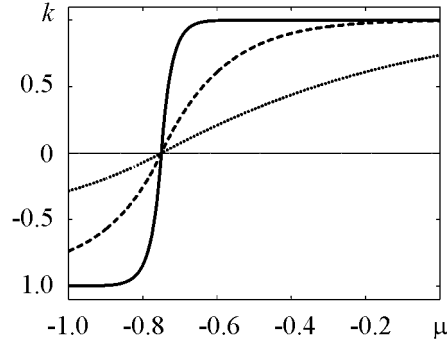


Рис. 3. Вес при различных значениях σ_2 : 0.2 (сплошная линия), 0.5 (штриховая линия), 1.0 (пунктирная линия)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2Ke^\gamma(\sigma_1^2(x^2 + y^2) + \sigma_2^2)^{\alpha-1}y[\mu + 2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 - \sigma_1^2] = 0,$$

где $\gamma = -1/(2\sigma_1^2)(x^2 + y^2)^2 + (2/\sigma_1^2 + \sigma_2^2/\sigma_1^4)(x^2 + y^2)$. Экстремумы могут достигаться в следующих точках фазовой плоскости

$$x = y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1 - \sigma_1^2}, \quad x^2 + y^2 = 1 - \sqrt{\mu + 1 - \sigma_1^2}.$$

Анализ этих множеств приводит к следующим результатам.

При $\mu \leq -1 + \sigma_1^2$ функция $p(x, y)$ имеет единственный максимум в точке $(0, 0)$. В этом случае аттрактором системы Хопфа (3) является стохастическая точка покоя $(0, 0)$.

При $-1 + \sigma_1^2 < \mu \leq \sigma_1^2$ функция $p(x, y)$ имеет три экстремума одновременно. Локальный минимум функции достигается при $x^2 + y^2 = 1 - \sqrt{\mu + 1 - \sigma_1^2}$. Два локальных максимума достигаются при $x = y = 0$, $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1 - \sigma_1^2}$. Случайные состояния системы Хопфа (3) концентрируются вблизи точки $(0, 0)$ и вблизи окружности радиуса $r_s = \sqrt{1 + \sqrt{\mu + 1 - \sigma_1^2}}$. Параметры системы, при которых значения соответствующих локальных максимумов функции $p(x, y)$ совпадают, могут быть найдены из уравнения

$$\begin{aligned} &(\sigma_1^2(1 + \sqrt{1 + \mu - \sigma_1^2}) + \sigma_2^2)^\alpha \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(\sqrt{1 + \mu - \sigma_1^2} + 1)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^4}\right)(\sqrt{1 + \mu - \sigma_1^2} + 1)\right) = (\sigma_2^2)^\alpha, \end{aligned}$$

где $\alpha = \mu/\sigma_1^2 - (2\sigma_2^2)/\sigma_1^4 - \sigma_2^4/\sigma_1^6 - 1$.

При $\mu > \sigma_1^2$ функция $p(x, y)$ достигает максимума в точках стохастического цикла $x^2 + y^2 = r_s^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1 - \sigma_1^2}$ и имеет единственный минимум в точке $(0, 0)$. Тип аттрактора – стохастический предельный цикл радиуса r_s .

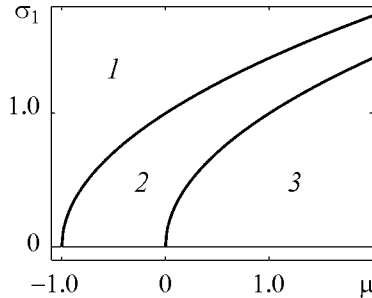


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма возмущенной системы. Зона 1 – «стохастическое равновесие»; зона 2 – комбинированный аттрактор «стохастическое равновесие и предельный цикл»; зона 3 – «стохастический предельный цикл»

Как видим, расположение экстремумов функции $p(x, y)$ не зависит от аддитивного шума и определяется исключительно интенсивностью σ_1 мультипликативного шума и параметром μ .

Изменение интенсивности σ_1 параметрического шума сдвигает точки экстремума функции плотности распределения на величину σ_1^2 . Таким образом, присутствие мультипликативного шума изменяет точки бифуркации от $\mu_1 = -1$ и $\mu_2 = 0$ к $\mu_1 = -1 + \sigma_1^2$ и $\mu_2 = \sigma_1^2$. На рис. 4 показана бифуркационная диаграмма возмущенной системы Хопфа. Кривые $\mu = -1 + \sigma_1^2$ и $\mu = \sigma_1^2$ являются границами между зонами: зона 1 – область параметров $\mu < -1 + \sigma_1^2$,

где наблюдается стохастическая точка покоя; зона 2 – область $-1 + \sigma_1^2 \leq \mu \leq \sigma_1^2$ сосуществования стохастической точки покоя и стохастического предельного цикла; зона 3 – область $\mu > \sigma_1^2$, где система имеет лишь стохастический предельный цикл.

Очевидно, что для каждого фиксированного значения параметра $\mu > 0$ увеличение σ_1 приводит к переходу от стохастического предельного цикла ($0 < \sigma_1 < \sqrt{\mu}$) к комбинированному аттрактору, объединяющему стохастический цикл и равновесие ($\sqrt{\mu} < \sigma_1 < \sqrt{\mu + 1}$), а затем к стохастическому равновесию ($\sigma_1 > \sqrt{\mu + 1}$). Таким образом, в точках $\sigma_1 = \sqrt{\mu}$ и $\sigma_1 = \sqrt{\mu + 1}$, где происходит качественное изменение динамики системы, наблюдаются *обратные стохастические бифуркации*.

Особенности в поведении функции плотности распределения $p(x, y)$ при изменении параметров σ_1 и μ демонстрируются на рис. 5.

На рис. 5, а представлен график функции $p(x, 0)$ для $\mu = -1.1, \sigma_2 = 0.2$ и трех значений интенсивности мультипликативного шума σ_1 . Увеличение интенсивности мультипликативного шума ведет к уменьшению разброса случайных траекторий вокруг точки покоя $(0, 0)$.

На рис. 5, б представлен график функции $p(x, 0)$ для $\mu = -0.5, \sigma_2 = 0.2$ и трех значений интенсивности мультипликативного шума σ_1 . Увеличение интенсивности мультипликативного шума ведет к уменьшению плотности вероятности случайных траекторий вокруг стохастического предельного цикла $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{\mu + 1 - \sigma_1^2}$ и к повышению их концентрации в окрестности точки покоя $(0, 0)$.

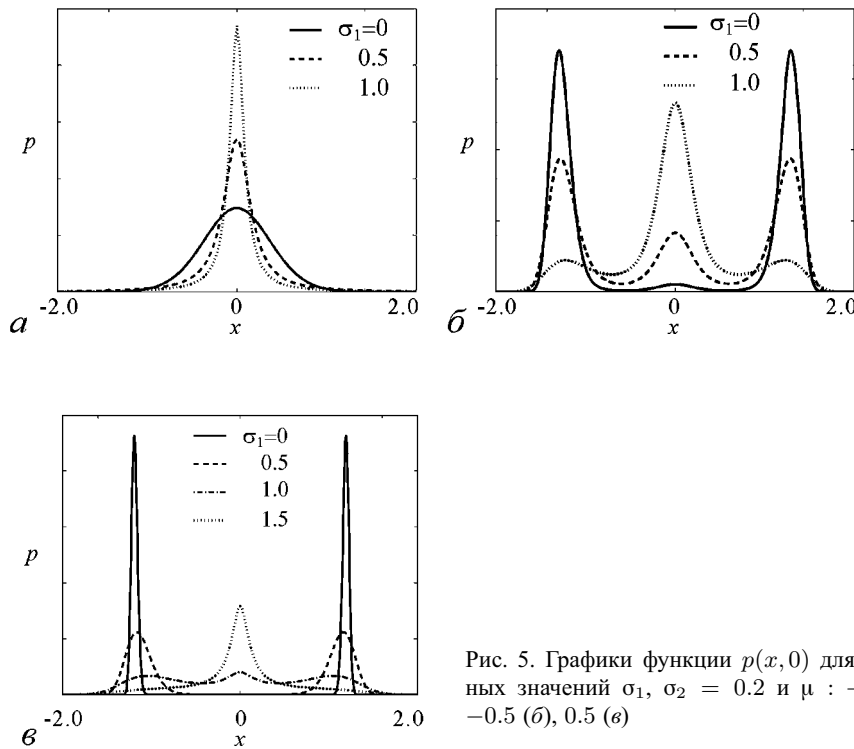


Рис. 5. Графики функции $p(x, 0)$ для различных значений $\sigma_1, \sigma_2 = 0.2$ и μ : -1.1 (а), -0.5 (б), 0.5 (в)

На рис. 5, в представлен график функции $p(x, 0)$ для $\mu = 0.5, \sigma_2 = 0.2$ и четырех значений интенсивности мультипликативного шума σ_1 . Увеличение интенсивности мультипликативного шума сопровождается затуханием автоколебаний и приводит к увеличению концентрации случайных траекторий вокруг точки покоя $(0, 0)$. При этом наблюдается стадия сосуществования стохастической точки покоя и стохастического предельного цикла.

Качественные изменения формы графика функции плотности распределения $p(x, y)$, соответствующие описанным выше стохастическим бифуркациям, представлены на рис. 6. Здесь график функции $p(x, y)$ имеет три характерных формы: «кратер», «кратер+пик», «пик».

Для фиксированного значения $\mu = 0.1$ стохастические бифуркации происходят в точках $\sigma_1 = \sqrt{0.1} \approx 0.316$ и $\sigma_1 = \sqrt{1.1} \approx 1.049$. При увеличении интенсивности мультипликативного шума от $\sigma_1 = 0.3$ (рис. 6, а) к $\sigma_1 = 0.8$ (рис. 6, б) форма графика функции $p(x, y)$ преобразуется из «кратер» в «кратер+пик». Увеличение σ_1 от $\sigma_1 = 0.8$ (см. рис. 6, б) к $\sigma_1 = 1.0$ (рис. 6, в) преобразует форму графика из «кратер+пик» в «пик». Дальнейшее увеличение σ_1 приводит лишь к увеличению высоты пика (рис. 6, з).

На рис. 7 представлены случайные состояния системы Хопфа для фиксированных значений параметров $\mu = 0.1, \sigma_2 = 0.2$ при различных значениях интенсивности σ_1 мультипликативного шума. Легко заметить, что при увеличении интенсивности σ_1 концентрация случайных состояний перераспределяется от предельного цикла к точке покоя.

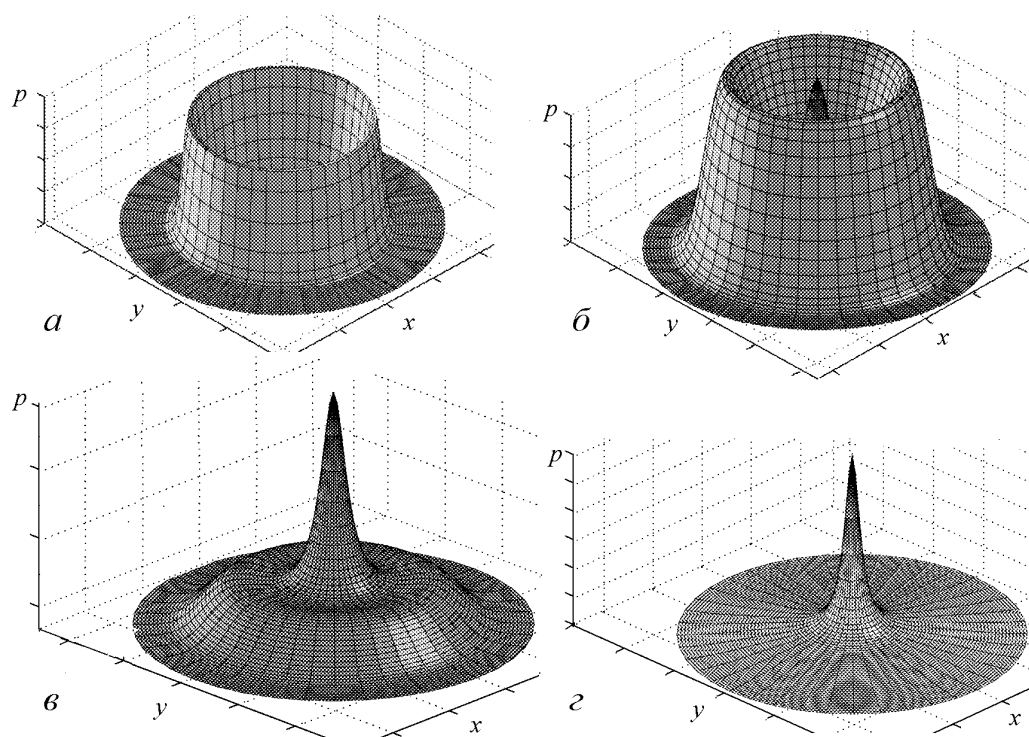


Рис. 6. Графики функции $p(x, y)$ при $\mu = 0.1, \sigma_2 = 0.2$ для различных значений σ_1 : 0.3 (а), 0.8 (б), 1.0 (в), 1.5 (з)

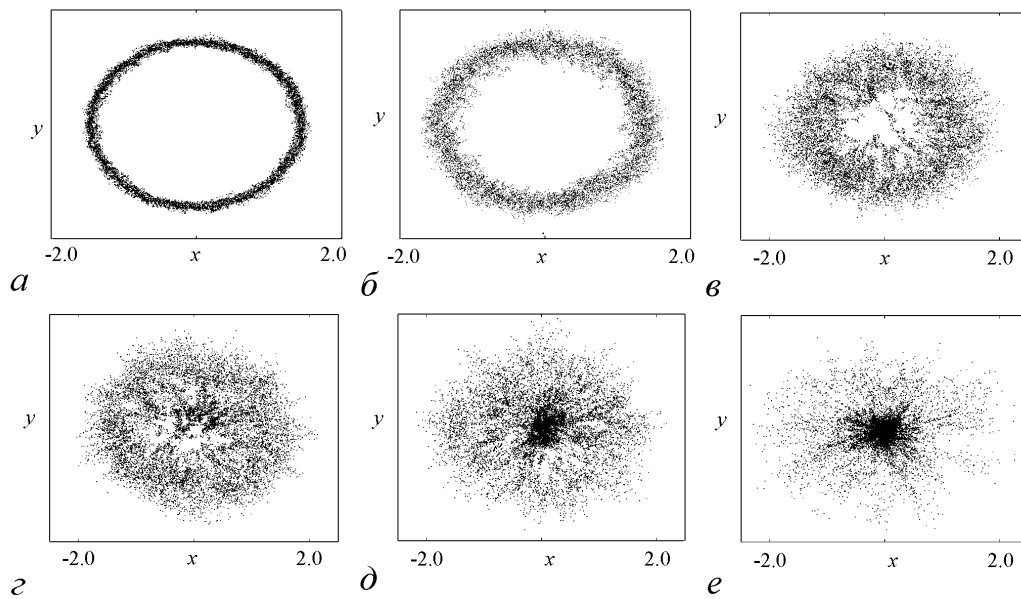


Рис. 7. Случайные состояния системы Хопфа при $\mu = 0.1$, $\sigma_2 = 0.2$ для различных значений σ_1 : 0.0 (а), 0.3 (б), 0.7 (в), 0.8 (г), 1.0 (д), 1.5 (е)

Заключение

Исследована стохастически возмущенная система Хопфа в зоне жесткой бифуркации рождения цикла. В присутствии параметрических и аддитивных случайных возмущений в системе наблюдаются различные типы стохастических аттракторов. Детальное описание этих аттракторов может быть получено с помощью стационарной плотности распределения $p(x, y)$. Для функции $p(x, y)$ – решения соответствующего уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова – получено явное параметрическое представление.

Исследованы эффекты, связанные с воздействием как аддитивных, так и параметрических случайных возмущений. Вариация интенсивности аддитивных шумов (в отсутствие параметрических) приводит лишь к количественному изменению формы $p(x, y)$. Максимумы этой функции всегда достигаются на детерминированных аттракторах (равновесие, цикл) невозмущенной системы.

При вариации интенсивности параметрических шумов форма стохастических аттракторов системы претерпевает качественные изменения. Построены явные формулы для сдвигов бифуркационных значений параметров. Полученные результаты позволяют детально описать явление обратной стохастической бифуркации, при которой стохастические автоколебания подавляются мультипликативным шумом.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ N09-01-00026, N09-08-00048, РФФИ 10-01-96022 урал, Федерального агентства по образованию 2.1.1/2571, ФЦП 02.740.11.0202.

Библиографический список

1. *Стратонович Р.Л., Ланда П.С.* Воздействие шумов на генератор с жестким возбуждением // Радиофизика. 1959. Т. 2, № 1. С. 37.
2. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987. 400 с.
3. *Неймарк Ю.Н., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
4. *Landa P.S., McClintock P.V.E.* Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise // Physics Reports. 2000. Vol. 323. P. 1.
5. *Fedotov S., Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic analysis of a non-normal dynamical system mimicking a laminar-to-turbulent subcritical transition // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. P. 066310.
6. *Fedotov S., Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic analysis of subcritical amplification of magnetic energy in a turbulent dynamo // Phys. A. 2004. Vol. 342. P. 491.
7. *Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А.* О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С. 165.
8. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
9. *Ibrahim R.A.* Parametric Random Vibration. New York: John Wiley and Sons, 1985.
10. *Soong T.T., Grigoriu M.* Random Vibration of Mechanical and Structural Systems. New Jersey: RTL Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993.
11. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
12. *Dembo M., Zeitouni O.* Large Deviations Techniques and Applications. Boston: Jones and Bartlett Publishers, 1995.
13. *Naeh T., Klosek M.M., Matkowsky B.J., Schuss Z.* A direct approach to the exit problem // SIAM J. Appl. Math. 1990. Vol. 50. P. 595.
14. *Roy R.V.* Asymptotic analysis of first passage problem // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1997. Vol. 32. P. 173.
15. *Smelyanskiy V.N., Dykman M.I., Maier R.S.* Topological features of large fluctuations to the interior of a limit cycle // Physical Review E. 1997. Vol. 55. P. 2369.
16. *Башикурцева И.А., Ряшко Л.Б., Стихин П.В.* Стохастическая чувствительность циклов системы Ресслера при переходе к хаосу // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6. С. 32.
17. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles // Mathematics and Computers in Simulation. 2004. Vol. 66. P. 55.
18. *Ryagin M., Ryashko L.* The analysis of the stochastically forced periodic attractors for Chua's circuit // Int. J. Bifurcation Chaos. 2004. Vol. 14, № 11. P. 3981.
19. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity and chaos control for the forced nonlinear oscillations // Chaos, Solitons and Fractals. 2005. Vol. 26. P. 1437.

20. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to external multiplicative noise // In *Fluctuations and Sensitivity in Equilibrium Systems* / ed. by W. Horsthemke and D.K. Kondepudi. Berlin: Springer, 1984. P. 143.
21. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56. P. 1631.
22. *Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F.* Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // *Phys. Rev. A.* 1987. V. 36. P. 834.
23. *Arnold L., Bleckert G., Schenk-Hoppe K.* The stochastic Brusselator: Parametric noise destroys Hopf bifurcation // In *Stochastic Dynamics*. Bremen, 1997. P. 71. New-York: Springer, 1999.
24. *Malick K., Marcq P.* Stability analysis of noise-induced Hopf bifurcation // *Eur. Phys. J.* 2003. Vol. 36. P. 119.
25. *Leung H.K.* Stochastic Hopf bifurcation in a biased van der Pol model // *Physica A.* 1998. Vol. 254. P. 146.
26. *Namachchivaya N.Sri.* Hopf bifurcation in the presence of both parametric and external stochastic excitations // *J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 110. P. 923.
27. *Schenk-Hoppe K.R.* Bifurcation scenarios of the noisy Duffing–van der Pol oscillator // *Nonlinear dynamics.* 1996. Vol. 11. P. 255.
28. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances// *Chaos, Solitons and Fractals.* 2009. Vol. 39. P. 7.
29. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
30. *Arnold L.* *Random Dynamical Systems.* Berlin: Springer, 1998.

*Уральский государственный
университет*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*9.03.2009
20.05.2009*

ANALYSIS OF NOISE-INDUCED BIFURCATIONS FOR THE HOPF SYSTEM

I.A. Bashkirtseva, T.V. Perevalova, L.B. Ryashko

We consider the Hopf system as a classical model of a stiff birth of a cycle. In the presence of parametrical and additive random disturbances, various types of the stochastic attractors are observed. The solution of the corresponding Fokker–Planck–Kolmogorov equation is found. The qualitative changes of the form for stochastic attractors under multiplicative noise are shown. The phenomenon of backward stochastic bifurcations is described in details.

Keywords: Hopf system, cycles, equilibria, stochastic attractors, backward bifurcations.



Башкирцева Ирина Адольфовна – родилась в 1965 году, окончила Уральский госуниверситет (1987), кандидат физико-математических наук (1997), доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – асимптотический анализ и численное моделирование нелинейных стохастических систем.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет
E-mail: irina.bashkirtseva@usu.ru



Перевалова Татьяна Владимировна – родилась в 1981 году, окончила Уральский госуниверситет (2004), ассистент кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – аттракторы нелинейных систем, анализ стохастической чувствительности, компьютерное моделирование динамических систем.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет
E-mail: tatyana.perevalova@usu.ru



Ряшко Лев Борисович – родился в 1953 году, окончил Уральский госуниверситет (1975), доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет
E-mail: lev.ryashko@usu.ru



РОЖДЕНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ ЗАМКНУТОЙ КРИВОЙ В НЕОБРАТИМЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Ж.Т. Жусубалиев, О.О. Яночкина

В статье обсуждается новый феномен, открытый авторами совсем недавно в двумерных эндоморфизмах, демонстрирующих переход к хаосу через разрушение замкнутой инвариантной кривой. Как известно, при рациональном числе вращения на этой кривой имеется четное число периодических орбит, половина из которых устойчивые, а половина – седловые, а сама кривая образована замыканием неустойчивых многообразий седловых циклов. Как оказалось, если отображение необратимо, то седловая периодическая орбита, лежащая на замкнутой инвариантной кривой, обычно претерпевает бифуркацию удвоения периода или бифуркацию вилки. В результате этого на инвариантной кривой мягко рождаются два новых «слоя», образованные неустойчивыми многообразиями седлового цикла удвоенного периода или неустойчивыми многообразиями двух седловых циклов того же периода в случае бифуркации вилки.

Ключевые слова: Двумерные эндоморфизмы, «многослойная» замкнутая инвариантная кривая, квазипериодическая динамика.

Введение

Возникновение хаотических колебаний через разрушение двумерного тора, на котором число вращения рационально, – широко распространенное явление. В.С. Афраймович и Л.П. Шильников доказали теорему о разрушении замкнутой инвариантной кривой в сечении тора с резонансной структурой и указали возможные пути хаотизации колебаний [1, 2]. Общий характер выводов этой теоремы был подтвержден численно и экспериментально для широкого класса дискретных и потоковых систем (см., например, [3] и цитируемую там литературу).

В последние годы теория Афраймовича–Шильникова была существенно дополнена некоторыми модификациями, характерными для необратимых отображений (эндоморфизмов) [4, 5] и для кусочно-гладких динамических систем [6, 7]. Так например, в работах [4, 5] показано, что разрушение инвариантной кривой может быть связано с особой нелокальной бифуркацией, приводящей к бесконечному числу самопересечений неустойчивых многообразий седловой периодической орбиты с образованием «петель» на этой кривой [8–10].

В недавней нашей работе [11] при анализе динамики трехмерной системы кусочно-гладких дифференциальных уравнений впервые была обнаружена «двухслойная» замкнутая инвариантная кривая в сечении резонансного тора. Такая кривая

является объединением неустойчивых многообразий двух седловых периодических орбит с устойчивым циклом. В последующих исследованиях [12–14] было установлено, что это явление – типичное свойство двумерных эндоморфизмов, причем число «слоев» замкнутой инвариантной кривой может быть и больше двух. Такую кривую мы назвали «многослойной».

В данной статье мы преследуем цель описать это явление на простейшем примере необратимого отображения.

1. Рождение и разрушение «многослойной» замкнутой кривой

Рассмотрим двумерное необратимое отображение [15, 16]

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ by - cx + x^2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

принадлежащее к классу $(Z_0 - Z_2)$.

Фазовая плоскость отображения (1) делится на две открытые области Z_0 и Z_2 такие, что точка $X = (x, y)^T$, принадлежащая Z_2 , имеет два разных прообраза $f^{-1}(X)$ ранга один, а точка $X = (x, y)^T$ из области Z_0 – ни одного. Границей указанных областей является линия LC (ligne critique [15]), которая есть геометрическое место точек X , имеющих два совпадающих прообраза $f^{-1}(X)$, расположенных на так называемой кривой сливающихся прообразов LC_{-1} (curve of merging pre-images [15]). Если отображение непрерывно и непрерывно дифференцируемо, то LC_{-1} включена во множество, определяемое условием

$$|J(X)| = 0,$$

где $|J(X)|$ – определитель матрицы Якоби.

Для рассматриваемого отображения определитель матрицы Якоби обращается в нуль вдоль вертикальной прямой

$$LC_{-1} = \{(x, y) : x = c/2\}.$$

Если отображение недифференцируемо, как в случае кусочно-гладких систем, то роль LC_{-1} обычно играет кривая недифференцируемости, на которой определитель матрицы Якоби меняет знак [15]. Кривую LC , удовлетворяющую $f(LC_{-1}) = LC$ и $f^{-1}(LC) \supseteq LC_{-1}$, называют критической линией ранга один [15]. Для отображения (1) уравнение критической линии имеет вид

$$LC = f(LC_{-1}) = \{(x, y) : y = bx - c^2/4\}.$$

Образ ранга k кривой LC называется критической линией ранга $k + 1$: $LC_k = f^k(LC)$ [15]. Следует отметить, что отображения типа $(Z_0 - Z_2)$ составляют класс необратимых отображений, обладающих простейшими свойствами. Мы не будем здесь обсуждать вопрос о роли критических линий при бифуркациях инвариантных кривых. Заинтересованных читателей отсылаем к источникам [9, 10, 15, 16].

Отображение (1) имеет две неподвижные точки $O_1 = (0, 0)^T$ и $O_2 = (1 - b + c, 1 - b + c)^T$. На линии $N_\varphi = \{(b, c) : c = 1\}$ плоскости параметров (b, c) неподвижная точка $O_1 = (0, 0)^T$ теряет устойчивость, когда комплексносопряженная пара мультипликаторов выходит на границу единичного круга. При этом из неподвижной точки рождается квазипериодический режим через суперкритическую бифуркацию Неймарка–Саккера.

На рис. 1 приведена карта динамических режимов, рассчитанная в плоскости параметров (b, c) . Области периодичности, расположенные выше бифуркационной границы N_φ , соответствуют резонансным языкам (языкам Арнольда). Белая часть рисунка, обозначенная через Π_∞ , относится к области квазипериодичности и хаоса. На рис. 1 выделен резонансный язык 1 : 5.

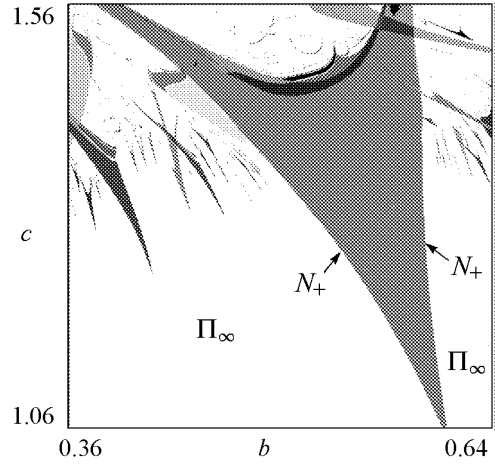


Рис. 1. Карта динамических режимов в плоскости управляющих параметров (b, c)

В классическом случае внутри каждого клюва на замкнутой инвариантной кривой, отвечающей рациональному значению числа вращения, устойчивый цикл сосуществует с седловым того же периода или сосуществуют несколько пар устойчивых и неустойчивых периодических орбит. Сама кривая является объединением неустойчивых многообразий седловых периодических орбит с устойчивыми циклами.

Оказывается, если отображение необратимое, то седловая периодическая орбита, лежащая на замкнутой инвариантной кривой, может претерпевать бифуркацию удвоения периода или бифуркацию вилки [12–14]. В результате на этой кривой появляются два новых «слоя», образованные неустойчивыми многообразиями седловой периодической орбиты удвоенного периода или неустойчивыми многообразиями двух седловых циклов того же периода в случае бифуркации вилки [12–14].

На рис. 2, а приведена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая основные стадии рождения «трехслойной» замкнутой кривой в отображении (1). В точке

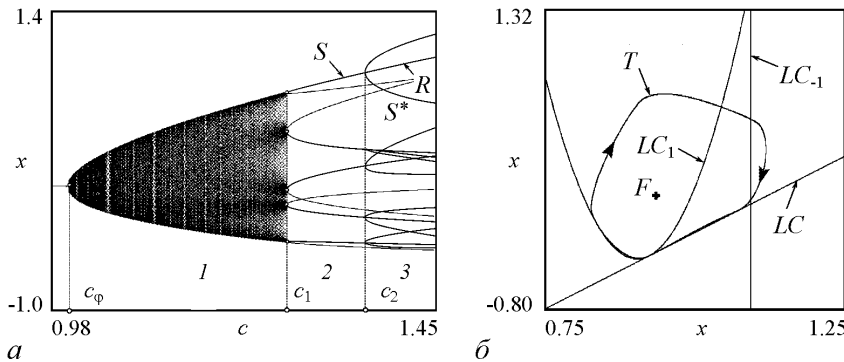


Рис. 2. а – бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая рождение замкнутой инвариантной кривой с «трехслойной» структурой ($b = 0.54$). 1 – область квазипериодической динамики; 2 – область существования «однослойной» замкнутой кривой отвечающей рациональному значению числа вращения; 3 – область существования «трехслойной» инвариантной кривой. б – инвариантная кривая T с иррациональным числом вращения, отвечающая квазипериодическому режиму ($b = 0.54, c = 1.25$). Здесь F – неустойчивый фокус

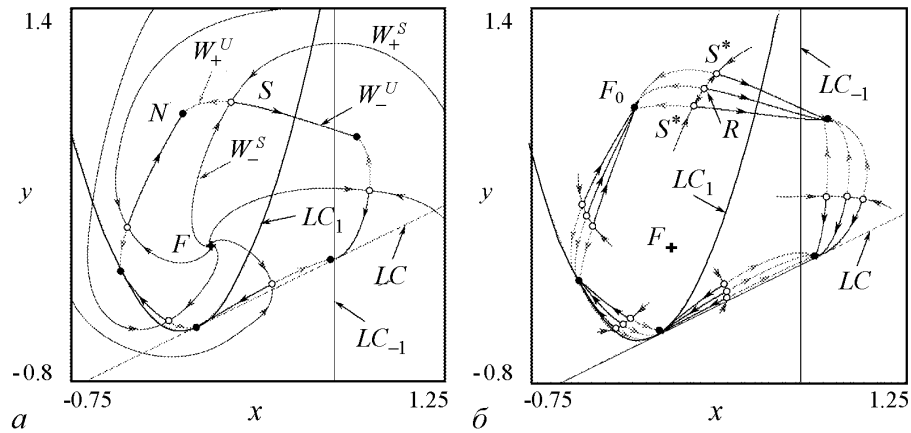


Рис. 3. *a* – «однослойная» замкнутая кривая ($b = 0.54$, $c = 1.32$); N, S – соответственно устойчивый и седловой резонансные циклы; W_{\pm}^S, W_{\pm}^U – устойчивые и неустойчивые многообразия седловой периодической орбиты S . *б* – «трехслойная» инвариантная кривая ($b = 0.54$, $c = 1.375$); F_0 – устойчивый резонансный цикл; R – неустойчивый узловой 5-цикл (репеллер); S^* – седловой 10-цикл, возникающий через бифуркацию удвоения периода

$c = c_{\varphi}$, лежащей на линии N_{φ} , из неподвижной точки O_1 рождается инвариантная кривая T с иррациональным числом вращения, отвечающая квазипериодическому режиму (рис. 2, б).

На рис. 3, *a* изображен фазовый портрет отображения (1) после седло-узловой бифуркации, при которой возникает «однослойная» замкнутая кривая. При дальнейшем увеличении параметра c резонансный цикл сначала переходит из устойчивого узла N в устойчивый фокус F_0 , когда мультипликаторы становятся комплексносопряженными. При этом инвариантный тор теряет гладкость вблизи точек устойчивого цикла. Затем в точке $c = c_2$, как это видно на рис. 2, *a*, мягко возникает неустойчивый 10-цикл через бифуркацию удвоения периода, а седловой 5-цикл становится

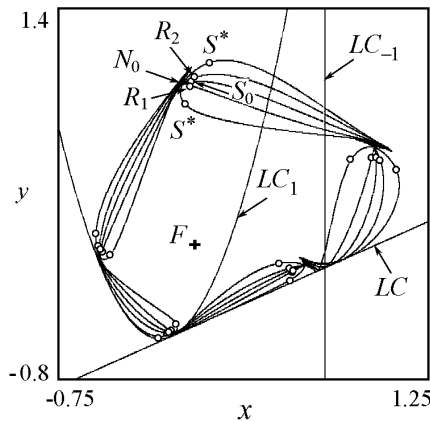


Рис. 4. «Пятислойная» замкнутая кривая ($b = 0.4905$, $c = 1.379$). S_0 – седловой цикл периода 5; N_0 – устойчивый резонансный цикл; R_1, R_2 – неустойчивые циклы периода 5 (репеллеры), возникающие через бифуркацию вилки неустойчивого узла R

неустойчивым узлом R (репеллером). В результате такого перехода из «однослойной» замкнутой инвариантной кривой мягко рождается «трехслойная» (рис. 3, б). Внешние два слоя являются притягивающими и образованы неустойчивыми многообразиями седлового 10-цикла S^* , а внутренний слой – многообразиями неустойчивого узла R , соответствующими большему по модулю мультипликатору.

При изменении параметров «трехслойная» замкнутая кривая может перейти в «пятислойную» следующим образом (рис. 4). При движении по параметрам к левой границе N_+ резонансного языка неустойчивый 5-цикл R претерпевает бифуркацию вилки, в резуль-

тате которой он становится седловым S_0 , а в окрестности R мягко рождается пара неустойчивых симметричных цикла R_1 и R_2 . После этой бифуркации центральный слой вновь становится притягивающим, но возникают два новых «отталкивающих» слоя (рис. 4).

При дальнейшем изменении параметров наблюдается сложная последовательность бифуркаций, приводящая к разрушению инвариантной кривой и возникновению хаотических колебаний. Мы не будем детально обсуждать механизмы разрушения «многослойной» замкнутой инвариантной кривой, а ограничимся рассмотрением лишь двух сценариев, связанных с бифуркацией седло-узел и гомоклинической бифуркацией.

Рис. 5 и рис. 6 иллюстрируют случай, связанный с седло-узловой бифуркацией. Этот переход наблюдается при выходе из резонансного языка через левую границу N_+ . В этом случае сначала «пяτισлойная» замкнутая кривая (см. рис. 4) переходит в «трехслойную», когда неустойчивые узлы R_1, R_2 , лежащие на центральном

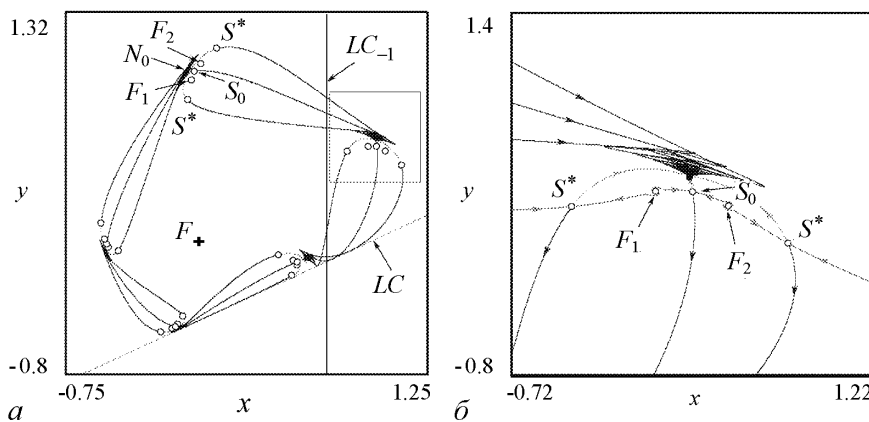


Рис. 5. Переход от «пяτισлойной» к «трехслойной» инвариантной кривой. Средние два слоя (см. рис. 4) исчезают, когда неустойчивые узлы R_1 и R_2 становятся неустойчивыми фокусами F_1, F_2

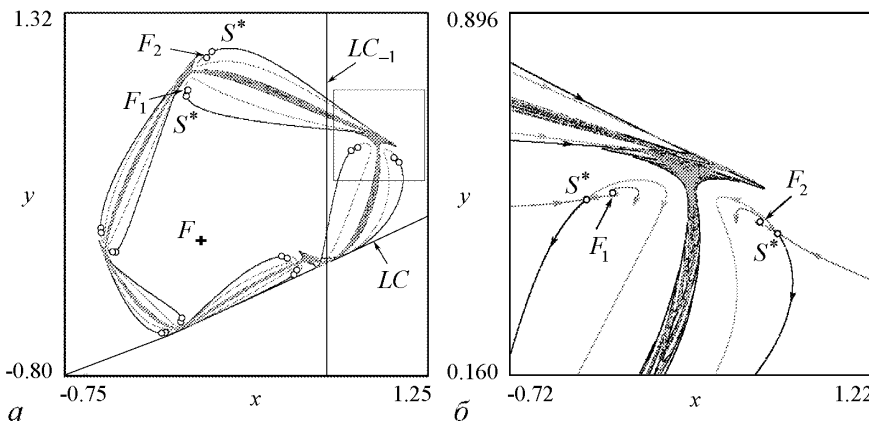


Рис. 6. Фазовый портрет отображения (1) после седло-узловой бифуркации

слое, становятся неустойчивыми фокусами F_1, F_2 . Эта бифуркация проиллюстрирована на рис. 5. Затем седловой цикл S_0 , лежащий на центральном слое, «подтягивается» к устойчивому узловому 5-циклу N_0 , сливается с ним и исчезает на линии N_+ . В результате этого центральный слой «трехслойной» замкнутой кривой исчезает, а неустойчивые многообразия внешних слоев формируют «хаотическое множество», причем, связанные с ними седловая орбита S^* и неустойчивые фокусы F_1, F_2 продолжают существовать (см. рис. 6).

При изменении параметров в направлении правой границы резонансного языка, «пятислойная» инвариантная кривая сначала переходит в «трехслойную» через бифуркацию вилки, а затем реализуются две гомоклинические бифуркации, в результате которых сначала разрушается внешний слой, а затем внутренний.

На рис. 7 изображен момент гомоклинического касания устойчивого и неустойчивого многообразий седловой периодической орбиты S^* . Дальнейшие изменения параметров приводят к рождению гомоклинических точек трансверсального пересечения многообразий (рис. 8, а и рис. 8, б). Как можно видеть из рис. 8 и рис. 9, а, после этой бифуркации внешний слой превращается в довольно сложное множество с фрактальной структурой [4], однако центральный слой продолжает существовать. На рис. 8, в показан отдельно увеличенный фрагмент центрального слоя после гомоклинической бифуркации. Затем седловой 10-цикл S^* претерпевает «обратную» бифуркацию удвоения периода, что приводит к исчезновению внешнего слоя. На рис. 9, а изображен фазовый портрет перед бифуркацией удвоения периода. Рис. 9, б иллюстрирует фазовый портрет после «обратной» бифуркации удвоения периода. На рис. 9, в приведен увеличенный фрагмент «однослойной» замкнутой кривой.

Далее реализуется вторая гомоклиническая бифуркация, приводящая к разрушению «однослойной» инвариантной кривой. После бифуркации седло-узел на границе N_+ резонансного языка движение становится хаотическим. На рис. 10, а показан фазовый портрет после гомоклинической бифуркации, а на рис. 10, б – увеличенный фрагмент фазового портрета.

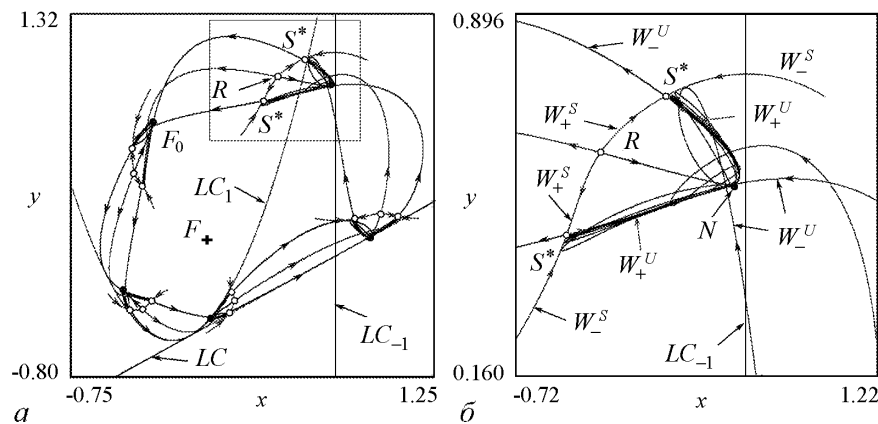


Рис. 7. Разрушение внешнего слоя через гомоклиническую бифуркацию: а – фазовый портрет отображения вблизи гомоклинического касания; б – увеличенный фрагмент фазового портрета, выделенного прямоугольником

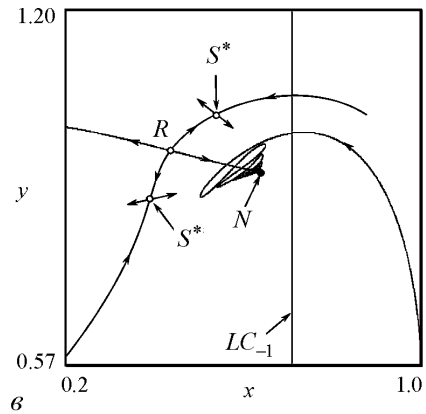
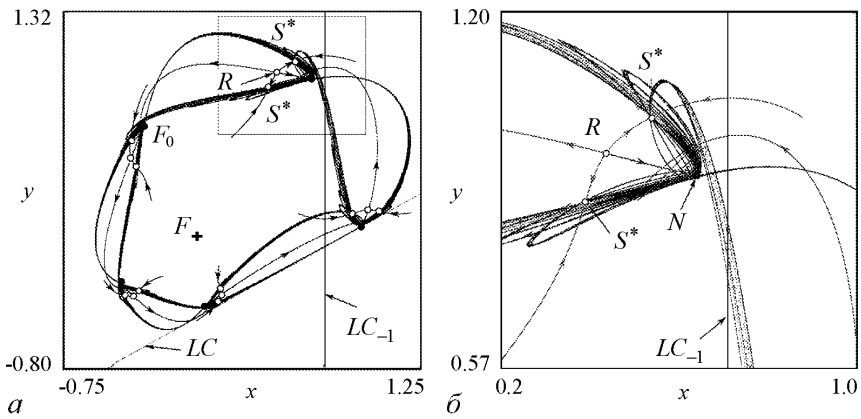


Рис. 8. *a* – фазовый портрет после разрушения внешнего слоя. *б* – увеличенный фрагмент фазового портрета, изображенного на рис. 8, *а*. *в* – центральный слой после гомоклинической бифуркации

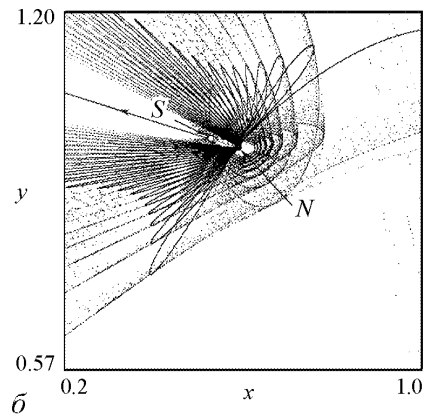
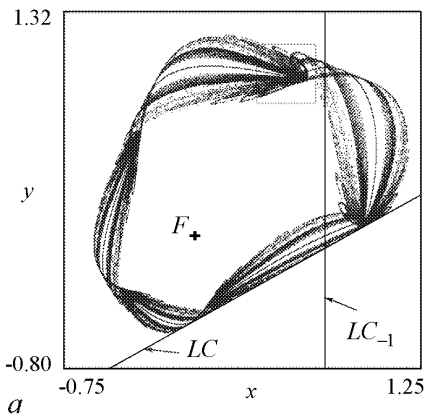
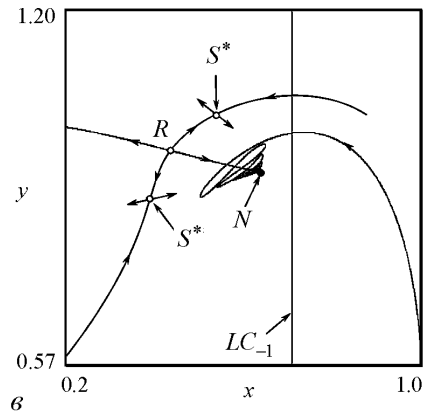
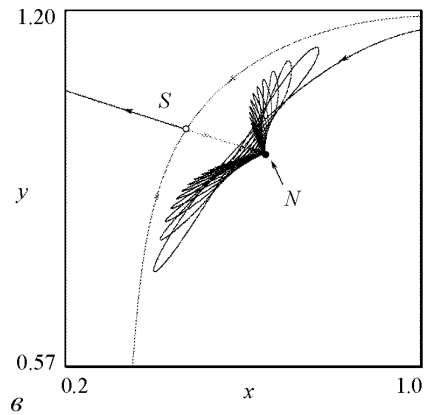


Рис. 9. *a* – фазовый портрет перед «обратной» бифуркацией удвоения периода. *б* – фазовый портрет после бифуркации удвоения периода седлового 10-цикла. *в* – увеличенный фрагмент «однослойной» замкнутой кривой



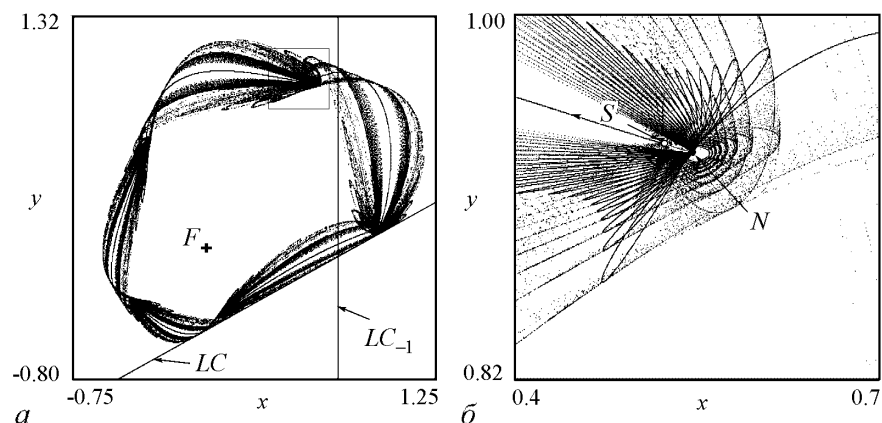


Рис. 10. Разрушение «однослойной» замкнутой кривой через гомоклиническую бифуркацию

Заключение

Представленная статья, как и предыдущие [12–14], посвящена обсуждению бифуркаций замкнутой инвариантной кривой с «многослойной» структурой в двумерных эндоморфизмах. В качестве конкретного примера приведены результаты бифуркационного анализа квадратичного необратимого отображения. В плоскости параметров выделены области с различным динамическим поведением. Показано, что при изменении параметров в пределах резонансного языка, седловая периодическая орбита, лежащая на замкнутой инвариантной кривой, претерпевает бифуркацию удвоения периода, становясь неустойчивым узлом (репеллером). В результате такой бифуркации на этой кривой мягко рождаются два новых «слоя», образованные неустойчивыми многообразиями седлового цикла удвоенного периода. Неустойчивый узловой цикл (репеллер), лежащий на центральном слое, может претерпевать бифуркацию вилки, при которой возникает «пятислойная» замкнутая кривая. При изменении параметров инвариантная кривая разрушается, и при выходе из резонансного языка через линию седло-узловой бифуркации, движение становится хаотическим. Детальное обсуждение механизмов разрушения «многослойной» замкнутой инвариантной кривой требует отдельной статьи. Поэтому, мы ограничились анализом лишь двух сценариев, связанных с гомоклинической бифуркацией и бифуркацией седло-узел.

Вопрос, связан ли описанный феномен в общем случае с необратимостью отображения, остается открытым. Во всяком случае, нам пока не удается доказать это строго и найти примеры диффеоморфизмов, демонстрирующих такое явление.

Библиографический список

1. *Афраймович В. С., Шильников Л. П.* Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность //Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1983. С. 3.
2. *Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П.* Теория бифуркаций //Современные проблемы математики: фундаментальные направления /Под ред. В. И. Арнольда. М.: ВИНТИ, 1986.

3. *Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Schimansky-Geier L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development. Berlin: Springer, 2007.
4. *Maistrenko V., Maistrenko Yu., Mosekilde E.* Torus breakdown in noninvertible maps // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 046215.
5. *Frouzakis C. E., Kevrekidis I. G., Peckham B. B.* A route to computational chaos revisited: noninvertibility and breakup of an invariant circle // *Physica D.* 2003. Vol. 177. P. 101.
6. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise- Smooth Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2003.
7. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., De S., Banerjee S.* Transition from phase-locked dynamics to chaos in a piecewise-linear map // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 77. P. 026206.
8. *Lorenz E. N.* Computational chaos – a prelude to computational instability // *Physica D.* 1989. Vol. 35. P. 299.
9. *Krauskopf B., Osinga H. M., Peckham B. B.* Unfolding the cusp-cusp bifurcation of planar endomorphisms // *SIAM J. Applied Dynamical Systems.* 2007. Vol. 6(2). P. 403.
10. *England J. P., Krauskopf B., Osinga H. M.* Bifurcations of stable sets in noninvertible planar maps // *Int. J. Bifurcat. Chaos.* 2005. Vol. 15. P. 891.
11. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Birth of bilayered torus and torus breakdown in a piecewise-smooth dynamical system // *Phys. Lett. A.* 2006. Vol. 351. P. 167.
12. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Formation and destruction of multilayered tori in coupled map systems // *Chaos.* 2008. Vol. 18. P. 037124.
13. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Multilayered tori in a system of two coupled logistic maps // *Phys. Lett. A.* 2009. Vol. 373. P. 946.
14. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Novel routes to chaos through torus breakdown in noninvertible maps // *Physica D.* 2009. Vol. 283. P. 589.
15. *Mira C., Gardini L., Barugols A., Cathala J. C.* Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps. Singapore: World Scientific, 1996.
16. *Frouzakis C. E., Gardini L., Kevrekidis I. G., Millerioux G., Mira C.* On some properties of invariant sets of two-dimensional noninvertible maps // *Int. J. Bifurcat. Chaos.* 1997. Vol. 7. P. 1167.

*Курский государственный
технический университет*

*Поступила в редакцию 15.03.2009
После доработки 04.06.2009*

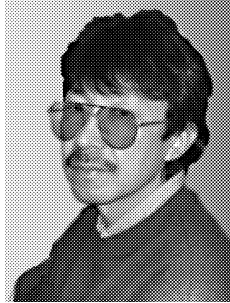
FORMATION AND BREAKDOWN OF A MULTILAYERED CLOSED CURVE IN NONINVERTIBLE MAPS

Z.T. Zhusubaliyev, O.O. Yanochkina

The paper describes the mechanism for the formation of closed invariant curves that are formed as layered structures of several sets of interlacing manifolds each with their associated stable or unstable resonance modes. Such invariant curves can arise, for instance, if the saddle cycle on a «simple resonance curves» undergoes period-doubling or pitchfork bifurcations transversely to the circumference of the closed curve.

Keywords: Two-dimensional endomorphisms, multilayered closed invariant curve, quasi-periodic dynamics.

Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич – доктор технических наук, профессор. Окончил Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники (ТИАСУР) в 1982 г. После окончания института работал в НИИ автоматики и электромеханики при ТИАСУР. В 1989 г. защитил кандидатскую диссертацию, а в 2002 г. – диссертацию доктора технических наук в области исследования нелинейной динамики и хаоса в импульсных системах автоматического управления. Профессор кафедры вычислительной техники Курского государственного технического университета. Область научных интересов – теория бифуркаций и динамического хаоса; сложная динамика и хаос в кусочно-гладких динамических системах, импульсных системах управления и вибрационной механике. Опубликовал свыше 100 работ в отечественной и зарубежной научной печати, является соавтором 5 монографий и одного учебного пособия, включая монографию «Zhanybai T. Zhusubaliyev and Erik Mosekilde, Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. World Scientific, 2003». Член Международного общества физики и управления (IPACS).



305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94
Курский государственный технический университет
E-mail: zhanybai@mail.kursk.ru, zhanybai@hotmail.com

Яночкина Ольга Олеговна – окончила машиностроительный факультет Курского государственного технического университета (КурскГТУ) в 2001 г. Инженер кафедры вычислительной техники КурскГТУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, теория бифуркаций, математическое моделирование импульсных систем автоматического управления. Имеет 11 научных публикаций.



305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94
Курский государственный технический университет
E-mail: yanoolga@gmail.com



**ХАОС В РАДИОТЕХНИЧЕСКОМ УСТРОЙСТВЕ
С КВАДРАТИЧНЫМ ФАЗОВЫМ МОДУЛЯТОРОМ
И ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫМ УСИЛЕНИЕМ
КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА:
МОДЕЛЬ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ**

И.В. Измайлов, Б.Н. Пойзнер

Предпринята попытка выделить класс источников колебаний или волн, принцип действия которых основан на интерференционном усилении сигнала обратной связи входным сигналом. Прецедентом здесь служит оптическая система Икеды. Предложен радиоэлектронный аналог нелинейного кольцевого интерферометра и его модификация. Построены структурные схемы и математические модели. Проведено компьютерное моделирование. Обнаружены перемежаемость, хаотические, регулярные, статические режимы.

Ключевые слова: Интерференционное усиление, запаздывающая обратная связь, бифуркация, хаос, перемежаемость, статическое состояние.

Введение

В 2009 году исполнилось 30 лет публикации статьи К. Икеды с коллегами [1], посвященной описанию неустойчивости (позднее получившей имя Икеды), которая способна возникать в кольцевом интерферометре, содержащем нелинейную поглощающую среду, если через интерферометр распространяется лазерное излучение. Это устройство и его математическая модель составили один из «эталонных» («канонических») сюжетов теории хаотических автоколебаний [2, с. 367–472; 3, с. 317–318; 4, с. 71–73], причем дискретное отображение, описывающее динамику комплексной амплитуды поля в кольцевом интерферометре с нелинейной (керровской, то есть проявляющей зависимость показателя преломления от среднего квадрата напряженности светового поля) средой, также носит имя К. Икеды [4, с. 71–73].

Теоретическое и экспериментальное изучение сложной динамики в нелинейном кольцевом интерферометре (НКИ) развернулось в 1990-е годы (например, [5]). Многообразие нелинейных феноменов в НКИ, дополненное в цепи обратной связи

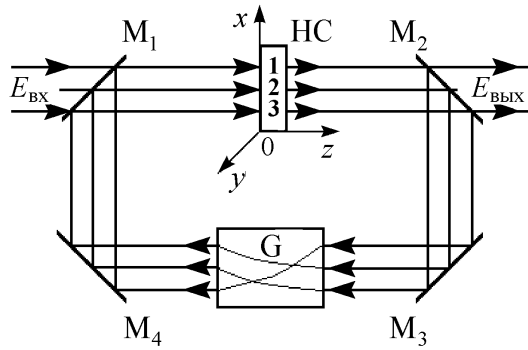


Рис. 1. Схематическое изображение нелинейного кольцевого интерферометра. Ход лучей в НКИ показан для случая поворота пучка (элементом G) в плоскости xOy на 120° . Приняты следующие обозначения: НС – нелинейная среда; G – линейный элемент, производящий крупномасштабное преобразование поля; M_i – зеркала

важной проблемы управления детерминированным хаосом в «двухконтурной» системе Икеды [9, 10]. Вопросам применения хаоса в НКИ с насыщающимся поглотителем посвящена работа [11]. Самоорганизацию в НКИ при некогерентном освещении (например, упорядочение пространственных солитонов в поперечной плоскости фоторефрактивного кристалла) обсуждают авторы статей [12–14]. Хаос в НКИ Икеды, модифицированном С.А. Ахмановым и М.А. Воронцовым, стал содержанием вычислительных экспериментов в книге [15]. В ней также рассмотрен двухконтурный НКИ, который более перспективен как основа устройства шифрования [16].

Во многих отмеченных выше работах показано, что кольцевой интерферометр (см. рис. 1) с керровской нелинейной средой (НС) способен формировать в поперечном сечении лазерного пучка различные статические или динамические структуры, а также (при определенных условиях) – детерминированный хаос: оптическую турбулентность либо «пространственный» хаос. Модель динамики нелинейного фазового набегу U лазерного пучка в керровской НС в кольцевом интерферометре имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_n dU(\mathbf{r}, t)/dt &= D_e \Delta_{xy} U(\mathbf{r}, t) - U(\mathbf{r}, t) + K A_{\text{НС}}^2(\mathbf{r}, t)/(1 - R), \\ A_{\text{НС}}^2(\mathbf{r}, t) &= (1 - R) A^2(\mathbf{r}, t) + 0.25 \gamma^2 A_{\text{НС}}^2(\mathbf{r}', t - \tau) + \\ &+ (1 - R)^{0.5} \gamma A(\mathbf{r}, t) A_{\text{НС}}(\mathbf{r}', t - \tau) \cos[\omega \tau + \varphi(\mathbf{r}, t) - \varphi_{\text{НС}}(\mathbf{r}', t - \tau)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{r} \equiv (x, y)$ – радиус-вектор поперечного сечения xOy ; τ_n – время релаксации нелинейной части показателя преломления нелинейной среды протяженностью L ; D_e – нормированный коэффициент диффузии молекул нелинейной среды; $K = (1 - R) n_2 L k A_{\text{макс}}(x, y, t)$ – параметр, определяющий силу нелинейных эффектов; n_2 – параметр нелинейной рефракции; $|k| = \omega/c$ – волновое число; $A_{\text{макс}}(x, y, t)$ – максимальное значение амплитуды входного поля; $A_{\text{НС}}$, A – амплитуды поля на входе НС и НКИ, соответственно, нормированные к значению $A_{\text{макс}}(x, y, t)$; $\varphi_{\text{НС}}$, φ – фазы поля на входе НС и НКИ, соответственно; $\tau \equiv \tau(\mathbf{r}', t) = t_e(\mathbf{r}', t) + U(\mathbf{r}', t - t_e(\mathbf{r}', t))/\omega$; t_e – эквивалентное время запаздывания в НКИ; γ – удвоенный коэффициент передачи поля (по амплитуде) за один оборот НКИ полем через контур обратной связи.

линейным элементом крупномасштабного пространственного преобразования светового пучка (G на рис. 1), исследовалось оптиками из МГУ, когда изменение светового поля в НКИ моделировалось преимущественно в приближении больших потерь (например, [6, 7]). Многосторонний анализ физических аспектов устойчивости и оптической бистабильности в НКИ выполнен Н.Н. Розановым в монографии [8]. Связанные отображения Икеды исследовались Н.М. Рыскиным с коллегами применительно к случаям многочастотного и двухчастотного внешнего воздействия на НКИ, что способствовало решению

Несмотря на многолетнее внимание к оптической системе, предложенной К. Икедой, и ее модификациям, в литературе, насколько известно авторам, не ставился вопрос о переносе принципов функционирования НКИ в радиодиапазон. Иначе говоря, предлагается рассмотреть вопрос о более низкочастотных (радиотехнических, СВЧ) аналогах этих систем. Не исключено, что такой перенос принципов приведет к появлению отдельного класса устройств, способных генерировать регулярные и хаотические режимы динамики.

1. Математическое описание функционального аналога нелинейного кольцевого интерферометра и его модификации

В качестве прототипа выберем НКИ с керровской нелинейной средой. В приближении, когда входной пучок однороден, отсутствуют диффузия молекул в нелинейной среде и крупномасштабное преобразование поля в НКИ [15], функциональным аналогом НКИ служит радиофизическое устройство (рис. 2) [17]. Блок « A, A^2 » представляет собой комбинацию амплитудного детектора и схему возведения в квадрат, а блок « t_e » есть линия задержки с малой дисперсией. Блоки « A, A^2 », «ФНЧ», « α » и «Фазовый модулятор» образуют аналог керровской среды в НКИ. Динамика сдвига фазы θ (в блоке «Фазовый модулятор») в устройстве на рис. 2 имеет вид

$$\tau_n d\theta/dt = -\theta + K_a (A/A_{\text{вх макс}})^2, \tag{2}$$

$$V = V(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) = V_{\text{вх}}(t) + \gamma_a V(t - \tau),$$

где $K_a = \alpha\beta A_{\text{вх макс}}^2$ – коэффициент нелинейности; V – напряжение на выходе сумматора; $V_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}}(t) \cos(\omega t + \varphi_{\text{вх}}(t))$ – входной сигнал; $\tau \equiv \tau(t) = t_e + \theta(t - t_e)/\omega$; γ_a – амплитудный коэффициент передачи сигнала за один обход системы (например, от входа фазового модулятора – через контур обратной связи – до его же входа); α – коэффициент, учитывающий эффективность выпрямителя и коэффициент передачи умножителя; β – крутизна преобразования электрического напряжения в сдвиг фазы (размерность – рад/В); t_e – эквивалентное время запаздывания сигнала.

Наша практическая реализация функционального аналога НКИ отличается от устройства на рис. 2 наличием между блоками « A » и « A^2 » фильтра высоких частот (CR -фильтра) с постоянной времени $\tau_{\text{ФВЧ}}$. Такая конструкция позволяет уменьшить вероятность выхода управляющего сигнала фазового модулятора за динамический

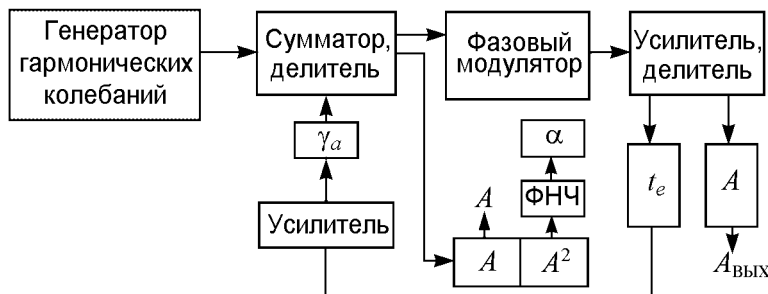


Рис. 2. Блок-схема источника регулярных и хаотических колебаний, генетически восходящего к НКИ

диапазон. Следовательно, модель динамики сдвига фазы θ в построенном устройстве отличается от модели (2)

$$\tau_n d\theta/dt = -\theta + K_a[(A - U_c)/A_{\text{вх макс}}]^2,$$

$$V = V(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) = V_{\text{вх}}(t) + \gamma_a V(t - \tau), \quad (3)$$

$$\tau_{\text{ФВЧ}} dU_c/dt = -U_c + A,$$

где U_c – напряжение на конденсаторе CR -фильтра.

Чтобы яснее описать отличие модели (3) от (2), упростим модель (3). Пусть в системе установился процесс с неизменными характеристиками и пусть существует Δt такое, что $\tau_{\text{ФВЧ}} \gg \Delta t \gg \tau_n$, или даже $\tau_{\text{ФВЧ}} \gg \Delta t \gg (\tau_n + t_e)$.

Усредним дифференциальное уравнение для U_c по промежутку времени Δt и получим: $\tau_{\text{ФВЧ}} dU_c/dt = -U_c + \langle A \rangle_{\Delta t}$, где $\langle A \rangle_{\Delta t} \equiv \int_t^{t+\Delta t} A(t') dt' / \Delta t$. В силу условия $\Delta t \gg \tau_n$ можно принять, что $\langle A \rangle_{\Delta t} = \text{const} \equiv \langle A \rangle$. Тогда $\tau_{\text{ФВЧ}} dU_c/dt = -U_c + \langle A \rangle$ и, следовательно, при $t \gg \tau_{\text{ФВЧ}}$ верно равенство $U_c = \langle A \rangle = \text{const}$. Модель (3) преобразуется к виду

$$\tau_n d\theta/dt = -\theta + K_a[(A - \langle A \rangle)/A_{\text{вх макс}}]^2,$$

$$V = V(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) = V_{\text{вх}}(t) + \gamma_a V(t - \tau).$$

В рассматриваемом случае сдвиг фазы можно представить в виде суммы постоянной и переменной составляющих $\theta = \theta_- + \theta_{\sim}$. Тогда окончательно получим

$$\tau_n d\theta_{\sim}/dt = -\theta_{\sim} + K_a(A/A_{\text{вх макс}})^2 - 2K_a A \langle A \rangle / A_{\text{вх макс}}^2,$$

$$V = V(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) = V_{\text{вх}}(t) + \gamma_a V(t - \tau), \quad (4)$$

$$\theta = \theta_- + \theta_{\sim}, \quad \theta_- = K_a(\langle A \rangle / A_{\text{вх макс}})^2.$$

Заметим, что, если бы не член $(-2K_a A \langle A \rangle / A_{\text{вх макс}}^2)$, то динамика θ_{\sim} в этой модели (4) совпала бы с динамикой θ в модели (2), если в последней увеличить значение времени запаздывания t_e на величину $\theta_- = K_a(\langle A \rangle / A_{\text{вх макс}})^2 / \omega$. Следует помнить, что модель (4) не описывает процесс установления режима в системе. Поскольку значение $\langle A \rangle$ априори не известно, то для проведения вычислительного эксперимента удобнее использовать модель (3).

Однако, если в модели (4) величину $\langle A \rangle$ рассчитывать (оценивать) по формуле $\langle A \rangle \equiv \int_0^t A(t') dt' / t$, и если предел $\langle A \rangle$ при $t \rightarrow \infty$ существует, то, очевидно, установившийся режим в модели (4) должен соответствовать некоторому установившемуся режиму в модели (3). Иными словами, фазовые траектории в моделях (3) и (4) принадлежат одному и тому же аттрактору. В этом случае (4) вполне пригодна для моделирования процессов в предлагаемом устройстве – вместо (3). Вероятно, в ряде случаев величину $\langle A \rangle$ можно оценить как $\langle A_{\text{вх}} \rangle$.

Продолжая анализ отличий модели (3) от (2), обратим внимание на несходство структур бифуркационных диаграмм статических состояний ($d\theta/dt = 0$ для модели (2), $dU_c/dt = 0$ и $d\theta/dt = 0$ для модели (3)). Бифуркационная диаграмма для

модели (2) подобна изображенной на рис. 3 – всего лишь подобна, но не идентична, так как диаграмма для НКИ на рис. 3 построена в приближении больших потерь. На ней присутствуют разрывные бифуркации числа решений и бифуркация потери устойчивости (обозначены на рис. цифрами 1, 2 и 3, соответственно).

В модели же (3) всегда существует лишь единственное статическое решение: $\theta = 0$, $U_c = 0$. Следовательно, бифуркаций числа статических решений в ней быть не может. Тогда логично выяснить, возможны ли бифуркации устойчивости этого статического состояния ($\theta = 0$, $U_c = 0$)?

Для простоты рассмотрим модель (3) в приближении малых γ_a ($\gamma_a \gg \gamma_a^2 \approx 0$): $V = V(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) = V_{\text{вх}}(t) + \gamma_a [V_{\text{вх}}(t - \tau) + \gamma_a V(t - \tau(t) - \tau(t - \tau(t)))] \approx V_{\text{вх}}(t) + \gamma_a V_{\text{вх}}(t - \tau)$. Следовательно, (3) преобразуется к модели

$$\tau_n d\theta/dt = -\theta + K_a [(A - U_c)/A_{\text{вх макс}}]^2,$$

$$V = V(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) = V_{\text{вх}}(t) + \gamma_a V_{\text{вх}}(t - \tau), \quad (5)$$

$$\tau_{\text{ФВЧ}} dU_c/dt = -U_c + A.$$

По аналогии со случаем НКИ [15] модель (5) можно назвать моделью в приближении *одного прохода* поля в контуре обратной связи. Преобразуя (5) к более простому виду, возведем в квадрат выражение для $V(t)$ и получим

$$\begin{aligned} A^2(t) \cos^2[\omega t + \varphi(t)] &= A_{\text{вх}}^2(t) \cos^2[\omega t + \varphi_{\text{вх}}(t)] + \\ &+ 2\gamma_a A_{\text{вх}}(t) A_{\text{вх}}(t - \tau) \cos[\omega t + \varphi_{\text{вх}}(t)] \cos[\omega(t - \tau) + \varphi_{\text{вх}}(t - \tau)] + \\ &+ \gamma_a^2 A_{\text{вх}}^2(t - \tau) \cos^2[\omega(t - \tau) + \varphi_{\text{вх}}(t - \tau)] \approx A_{\text{вх}}^2(t) \cos^2[\omega t + \varphi_{\text{вх}}(t)] + \\ &+ 2\gamma_a A_{\text{вх}}(t) A_{\text{вх}}(t - \tau) \cos[\omega t + \varphi_{\text{вх}}(t)] \cos[\omega(t - \tau) + \varphi_{\text{вх}}(t - \tau)]. \end{aligned}$$

Здесь выражение после символа « \approx » соответствует приближению больших потерь, накладывающему более сильное условие на γ_a , чем это было в приближении одного прохода (см. запись до символа « \approx »).

Усредним эти равенства по отрезку времени, равному периоду высокочастотных колебаний $T = 2\pi/\omega$. При этом используем приближение медленного изменения

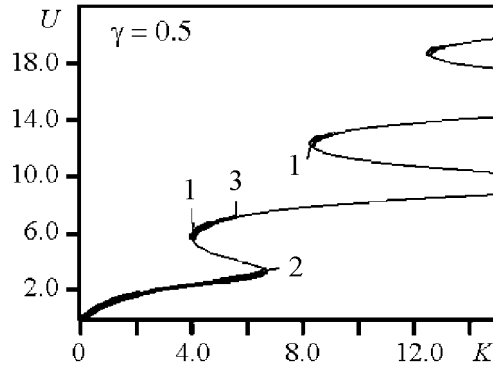


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы статических состояний нелинейного фазового набег в нелинейной среде НКИ в приближении больших потерь при $t_e = \tau_n$. Жирные линии отображают состояния, устойчивые при любых t_e , линии средней толщины – состояния, устойчивые при данном t_e , тонкие линии – неустойчивые состояния [15]

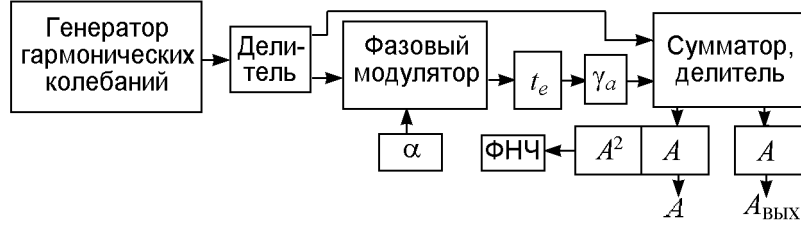


Рис. 4. Блок-схема источника регулярных и хаотических колебаний, реализующего приближение одного прохода в модели (6)

амплитуды, фазы входного поля и сдвига фазы θ . Получим, что

$$\begin{aligned}
 A^2(t) &= A_{\text{ВХ}}^2(t) + 2\gamma_a A_{\text{ВХ}}(t)A_{\text{ВХ}}(t - \tau) \cos[\omega t + \varphi_{\text{ВХ}}(t) - \\
 &\quad - \varphi_{\text{ВХ}}(t - \tau)] + \gamma_a^2 A_{\text{ВХ}}^2(t - \tau) \approx \\
 &\approx A_{\text{ВХ}}^2(t) + 2\gamma_a^2 A_{\text{ВХ}}(t)A_{\text{ВХ}}(t - \tau) \cos[\omega t + \varphi_{\text{ВХ}}(t) - \varphi_{\text{ВХ}}(t - \tau)].
 \end{aligned}$$

Следовательно, (5) примет вид

$$\tau_n d\theta/dt = -\theta + K_a[(A - U_c)/A_{\text{ВХ МАКС}}]^2, \quad \tau_{\text{ФВЧ}} dU_c/dt = -U_c + A,$$

$$\begin{aligned}
 A^2(t) &= A_{\text{ВХ}}^2(t) + 2\gamma_a A_{\text{ВХ}}(t)A_{\text{ВХ}}(t - \tau) \cos[\omega t + \varphi_{\text{ВХ}}(t) - \\
 &\quad - \varphi_{\text{ВХ}}(t - \tau)] + \gamma_a^2 A_{\text{ВХ}}^2(t - \tau) \approx \\
 &\approx A_{\text{ВХ}}^2(t) + 2\gamma_a^2 A_{\text{ВХ}}(t)A_{\text{ВХ}}(t - \tau) \cos[\omega t + \varphi_{\text{ВХ}}(t) - \varphi_{\text{ВХ}}(t - \tau)].
 \end{aligned} \tag{6}$$

Напомним, что здесь $\tau \equiv \tau(t) = t_e + \theta(t - t_e)/\omega$, t_e – эквивалентное время запаздывания сигнала. Подчеркнем, что приближению одного прохода в модели (6) строго соответствует устройство, построенное согласно блок-схеме на рис. 4.

Линеаризуем систему уравнений (6) около траектории $\{\theta_0(t), U_{c0}(t)\}$. Для этого, пренебрегая членами при множителях $(A_{\text{ВХ}})'_t/\omega$, $(\varphi_{\text{ВХ}})'_t/\omega$, найдем производные

$$\tau_n \partial[d\theta/dt]/\partial\theta = -1 + 2K_a[(A - U_c)/A_{\text{ВХ МАКС}}^2] \partial A/\partial\theta,$$

$$\tau_n \partial[d\theta/dt]/\partial U_c = -2K_a(A - U_c)/A_{\text{ВХ МАКС}}^2,$$

$$\tau_{\text{ФВЧ}} \partial[dU_c/dt]/\partial\theta = \partial A/\partial\theta,$$

$$\tau_{\text{ФВЧ}} \partial[dU_c/dt]/\partial U_c = -1, \tag{7}$$

$$\partial A/\partial\theta = |A = (A^2)^{0.5}| =$$

$$= -\gamma_a [A_{\text{ВХ}}(t)A_{\text{ВХ}}(t - \tau)/A(t)] [\partial\theta(t - t_e)/\partial\theta(t)] \times$$

$$\times \sin[\omega t_e + \theta(t - t_e) + \varphi_{\text{ВХ}}(t) - \varphi_{\text{ВХ}}(t - \tau)].$$

С учетом полученных выражений линеаризованная около траектории $\{\theta_0(t), U_{c0}(t)\}$ система примет вид

$$\begin{aligned}\tau_n d\theta/dt &= -\{1 - 2K_a[(A - U_c)/A_{\text{вх макс}}^2] \partial A/\partial \theta\}[\theta(t) - \theta_0(t)] - \\ &\quad - 2K_a(A - U_c)/A_{\text{вх макс}}^2 [U_c(t) - U_{c0}(t)], \\ \tau_{\text{ФВЧ}} dU_c/dt &= (\partial A/\partial \theta)[\theta(t) - \theta_0(t)] - [U_c(t) - U_{c0}(t)].\end{aligned}$$

Тогда имеем уравнение для собственных значений λ :

$$\begin{vmatrix} -\{1 - 2K_a[(A - U_c)/A_{\text{вх макс}}^2] \partial A/\partial \theta\} - \lambda & -2K_a(A - U_c)/A_{\text{вх макс}}^2 \\ \partial A/\partial \theta & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или, вводя обозначение $W \equiv K_a \cdot [(A - U_c)/A_{\text{вх макс}}^2] \partial A/\partial \theta$, перепишем его

$$\begin{vmatrix} 1 - 2W + \lambda & 2W/(\partial A/\partial \theta) \\ -\partial A/\partial \theta & 1 + \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda\{1 - 2W + 1\} + 1 - 2W + 2W = 0.$$

Отсюда имеем

$$\lambda = W - 1 \pm [W(W - 2)^{0.5}]. \quad (8)$$

Обратимся к статическому решению $\theta = 0, U_c = A$. Будем считать неизменными во времени все параметры входного сигнала устройства и параметры самого устройства. Подставим значения $\theta = 0, U_c = A$ вместо $\theta_0(t), U_{c0}(t)$ в выражение для W и получим: $W = 0$. Тогда из (8) следует, что $\lambda = -1$ – исследуемое решение *всегда устойчиво*.

2. Численное исследование поведения модификации функционального аналога НКИ

Для изучения особенностей процессов в устройствах на рис. 2 и 4 предпринято компьютерное моделирование, данные которого приводятся ниже.

Моделирование подтверждает наличие устойчивого статического состояния: $\theta = 0, U_c = A$ (при любых значениях параметров модели) не только для системы (6), но и для системы (3). Если в вычислительном эксперименте выбором должных начальных условий «поместить» систему в это состояние, то она не покидает его со временем; если же «поместить» ее в малую окрестность состояния $\theta = 0, U_c = A$, то система сходится к нему. При этом с ростом коэффициента нелинейности K_a размеры бассейна притяжения статического состояния уменьшаются.

Если начальные условия достаточно сильно отличаются от состояния $\theta = 0, U_c = A$, то, начиная с некоторого значения коэффициента нелинейности K_a (при заданных величинах амплитудного коэффициента передачи сигнала γ_a , времени запаздывания t_e и фазовой задержки ωt_e в контуре обратной связи), наблюдаются динамические режимы. Их отображают рис. 5 – 13, где $\tau_{\text{ФВЧ}} = 300\tau_n, \gamma_a = 0.25, \omega t_e = 0, A_{\text{вх}} = 0.5^{0.5} \approx 0.7$.

Влияние нелинейности, запаздывания, числа проходов сигнала в системе и числа ее идентичных подсистем на динамику в модификации функционального аналога НКИ демонстрируют серии экспериментов. Их результаты представлены на рис. 5 – 19, содержащих временные реализации и фазовые портреты. На них – при наличии градаций серого цвета – более темные участки соответствуют более длительному пребыванию системы в окрестности данной точки (в фазовом пространстве).

Моделирование показывает: при относительно низких значениях K_a (50... 81.847) модификация функционального аналога НКИ с учетом многих проходов (3) сходится к состоянию $\theta = 0$, $U_c = A$. Но уже при $K_a = 81.85$ наступает хаос, который выглядит как перемежаемость без ламинарной фазы (см. рис. 5). Подобный вид аттрактора сохраняется до значений $K_a = 85.5$, а при $K_a = 86.0$ возникает предельный цикл (рис. 6, а), который сохраняет свои черты до $K_a = 100.0$, затем претерпевает ряд бифуркаций (утроения и удвоения) периода (рис. 6). Далее, при $K_a = 129.0$ возникает режим, который можно назвать «хаосом смещающегося предельного цикла» (см. рис. 7). Эта ассоциация возникает при наблюдении за построением фазового портрета на рис. 7. Ее подкрепляет и вид временной динамики U_c : медленный дрейф среднего значения U_c диктует *смещения* первоначально существовавшего предельного цикла. Затем структура этого аттрактора сложным образом меняется с ростом K_a .

На наш взгляд, нетривиальное следствие роста запаздывания t_e демонстрирует рис. 8: в отличие от рис. 6, б наблюдается хаос с «квазиламинарными» стадиями (см. центр рис. 8), характерными для режимов с перемежаемостью (intermittency) [18]. Ограничение же одним проходом сигнала через контур обратной связи (см. рис. 9) – несмотря на уменьшение t_e – повышает вероятность «квазиламинарных» стадий.

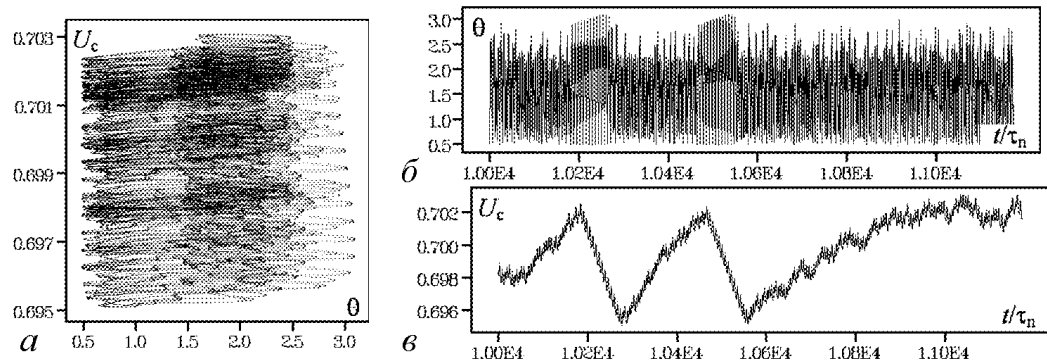


Рис. 5. Хаотическая динамика с чертами перемежаемости в системе (3) при $K_a = 81.9$ и $t_e = \tau_n$. Фазовый портрет (а), временные реализации (б, в)

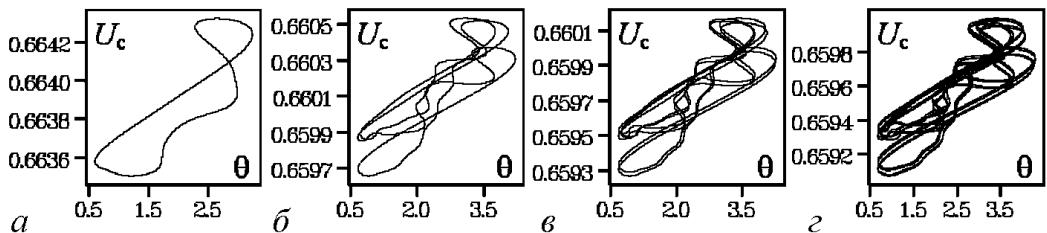


Рис. 6. Последовательность бифуркаций предельных циклов в системе (3) с ростом K_a : 86.0 (а), 125.0 (б), 127.0 (в), 128.0 (г) при $t_e = \tau_n$

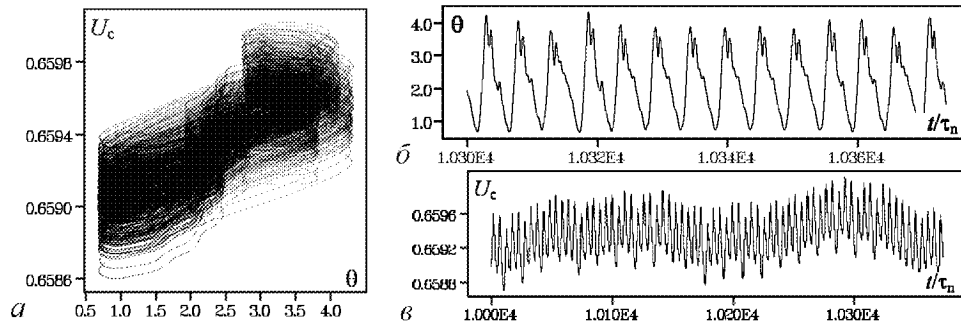


Рис. 7. «Хаос смещающегося предельного цикла» в системе (3) при $K_a = 129.0$ и $t_e = \tau_n$. Фазовый портрет (а), временные реализации (б, в)

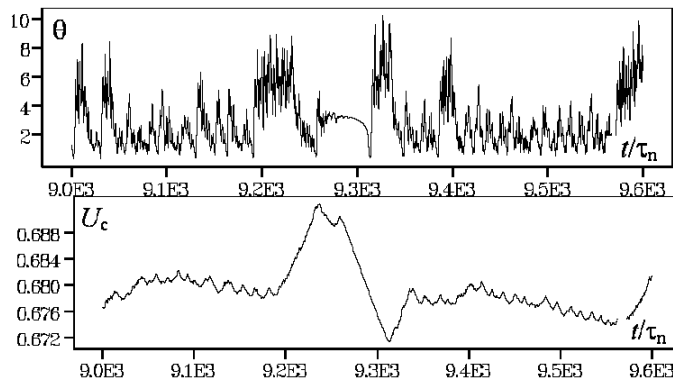


Рис. 8. Хаотическая динамика в системе (3) при $K_a = 125.0$ и $t_e = 2\tau_n$. В центре графиков расположена «квазиламинарная» стадия

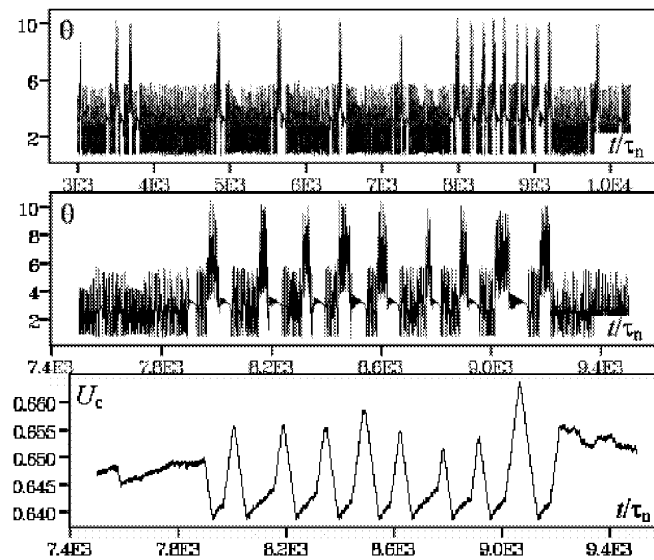


Рис. 9. Хаотическая динамика в системе (3) в приближении одного прохода при $K_a = 125.0$ и $t_e = \tau_n$. «Квазиламинарные» стадии идут спорадически: и по отдельности, и нерегулярными сериями. На среднем и нижнем графиках серия показана в увеличенном виде

Рис. 10–19 отражают моделирование явлений в «двухточечной» модификации системы (3) при $K_a = 250$, построенной по аналогии с НКИ, в котором реализуется поворот оптического поля на 180° [4, с. 52]. Прилагательное «двухточечная» означает наличие двух систем типа изображенных на рис. 2, причем сигнал с выхода первой системы поступает – через линию задержки – на вход сумматора второй системы (а не первой) и vice versa. Характерно, что при $t_e \leq 0.002\tau_n$ наблюдается «каскадная» (иначе говоря, «многостадийная») периодическая динамика (рис. 10). Строение фазовых портретов (а) и временных реализаций (б, в) позволяет предположить: здесь предельный цикл образован – в отличие от классической петли сепаратрисы седло-фокуса [15, с. 103] – каскадом восьми петель. Период составляет около $1500\tau_n$.

Рост запаздывания ($t_e = 0.01\tau_n$) приводит к уменьшению устойчивости седло-фокусов. А это увеличивает долю времени, приходящуюся на затухающие высокочастотные колебания (рис. 11). Дальнейший рост запаздывания ($t_e = 0.027\tau_n$) влечет перекрытие областей затухающих высокочастотных колебаний. Временная реализация на рис. 12 ($t_e = 0.02782\tau_n$) демонстрирует (неравномерностью оттенков серого цвета) усложнение формы релаксационных колебаний за счет автомодуляции. Незначительное увеличение запаздывания ($t_e = 0.027823\tau_n$) оборачивается разрушением предельного цикла, построенного на петлях (рис. 12), и возникновением более простого (рис. 13), но наследующего некоторые морфологические черты его предшественника. Фазовый портрет $\theta_2(\theta_1)$ на рис. 13 воспроизводит фрагмент контура половины портрета $\theta_2(\theta_1)$ на рис. 12, расположенной выше диагонали $\theta_2 = \theta_1$. Заметим, что соображения симметрии заставляют предположить существование «комплементарного» ему цикла ниже диагонали $\theta_2 = \theta_1$.

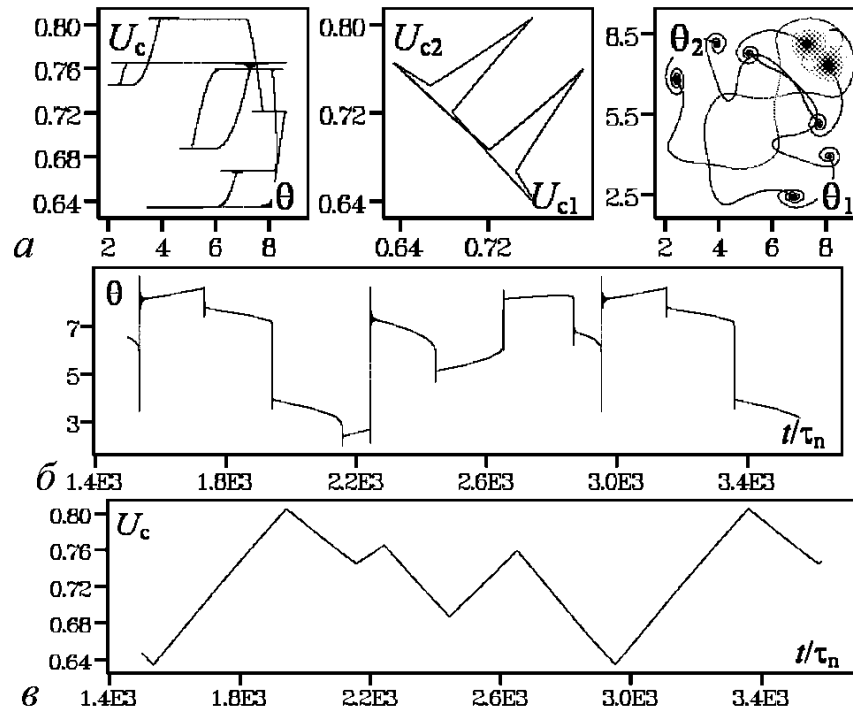


Рис. 10. «Каскадная» периодическая динамика в «двухточечной» модификации системы (3) при $K_a = 250.0$ и $t_e = 0.002\tau_n$: фазовые портреты (а), временные реализации (б, в)

Дальнейший рост запаздывания ($t_e = 0.0295\tau_n$) рождает режим, названный выше «хаосом смещающегося предельного цикла» (рис. 14). Такой образ навеяют – подобно рис. 7 – как наблюдения (и на промежутке времени $3980\tau_n - 4100\tau_n$, и на промежутке $4100\tau_n - 14000\tau_n$) за построением фазовых портретов $U_c(\theta)$ и $U_{c2}(U_{c1})$, так и их окончательный вид. Казалось бы, режим мог представлять собой эргодический тор, но сечение этого предельного цикла неизменно, что препятствует отождествлению его с тором. Судя по временной реализации, здесь динамика θ_1, θ_2 весьма близка к регулярной; поведение же U_{ci} вносит хаотический ритм. В частности,

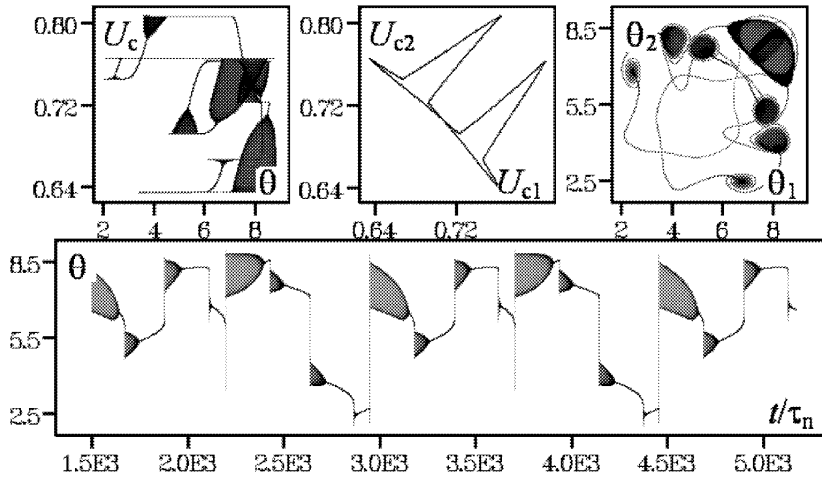


Рис. 11. «Каскадная» периодическая динамика в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 10 здесь $t_e = 0.01\tau_n$

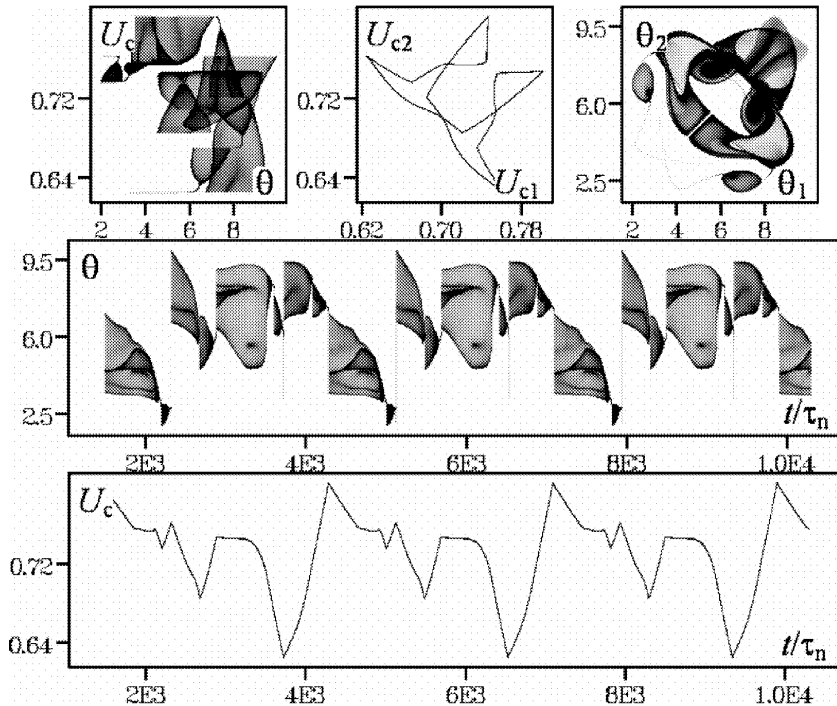


Рис. 12. «Каскадная» периодическая динамика в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 11 здесь $t_e = 0.02782\tau_n$

это выражается в нерегулярной скорости движения фазовой точки по проекции на плоскости $\theta_1 O \theta_2$.

Динамика при $t_e = 0.03\tau_n$ побуждает аттестовать режим неологизмом «хаос прыгающего и смещающегося предельного цикла». Как явствует из рис. 15, на сохранившееся «блуждание» накладываются нерегулярные всплески напряжения U_c , влияющие, в свою очередь, на θ et vice versa. Визуально это выражается в прыжках предельного цикла $U_c(\theta)$, а на портрете $\theta_2(\theta_1)$ формируется относительно редко посещаемая дуга, примыкающая к диагонали $\theta_2 = \theta_1$ (см. рис. 15). Степень струк-

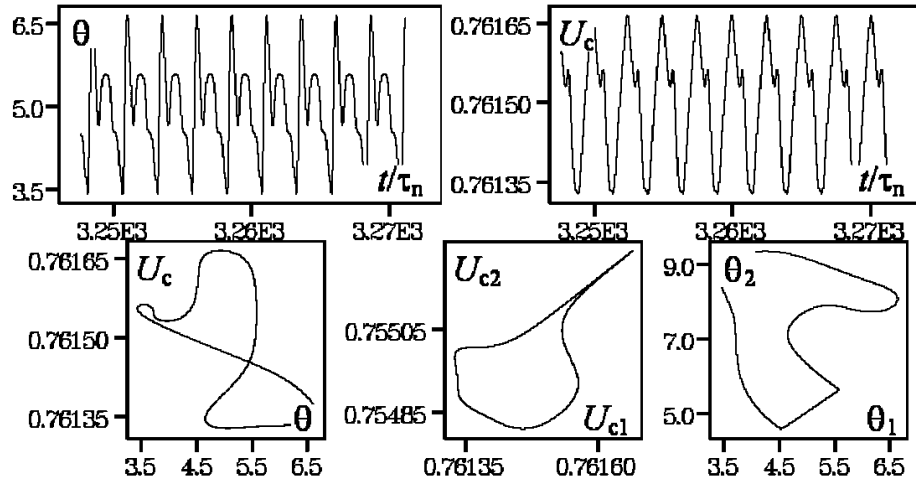


Рис. 13. Периодическая динамика в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 12 здесь $t_e = 0.027823\tau_n$

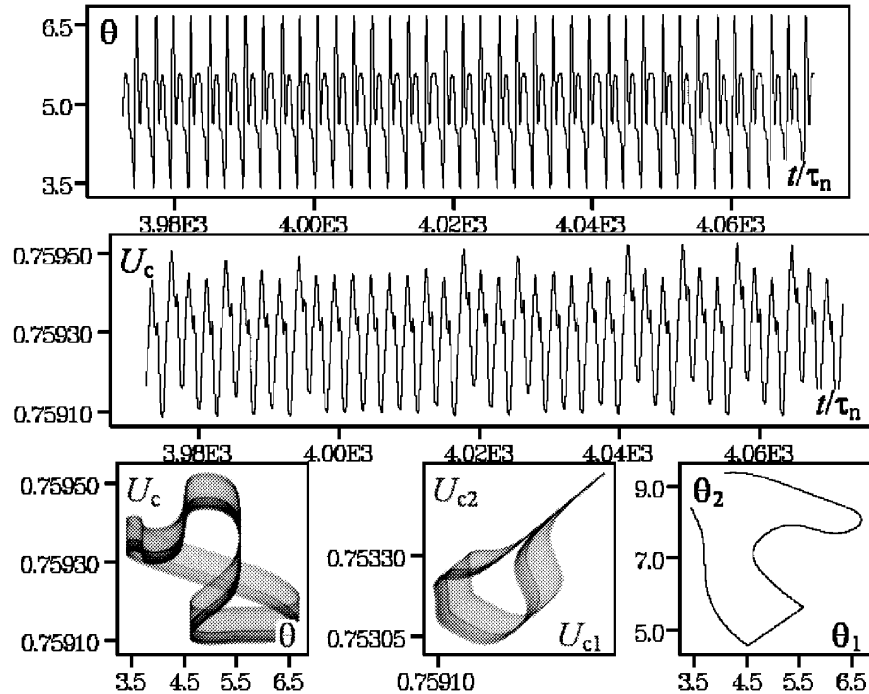


Рис. 14. «Хаос смещающегося предельного цикла» в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 13 здесь $t_e = 0.0295\tau_n$

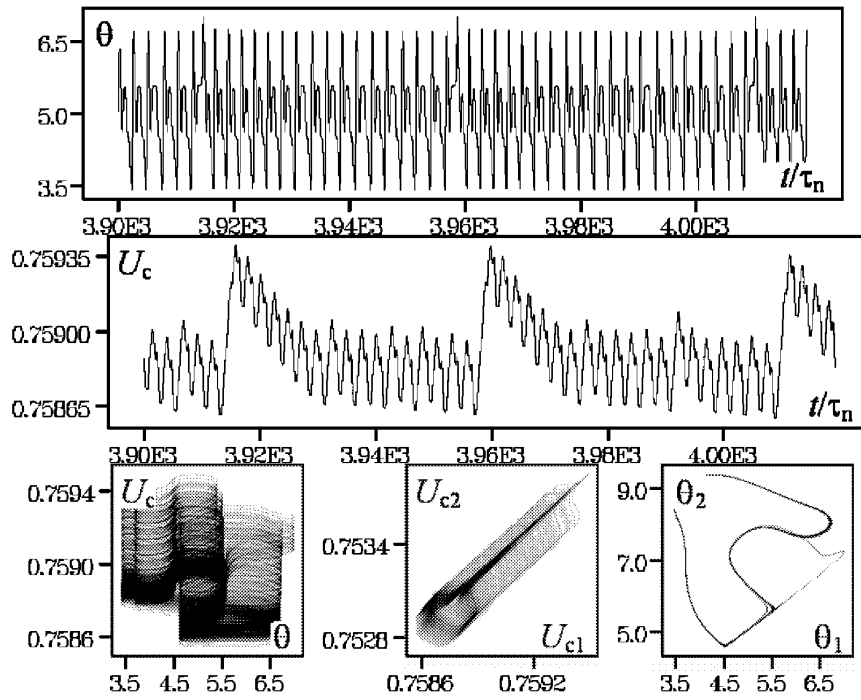


Рис. 15. «Хаос прыгающего и смещающегося предельного цикла» в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 14 здесь $t_e = 0.03\tau_n$

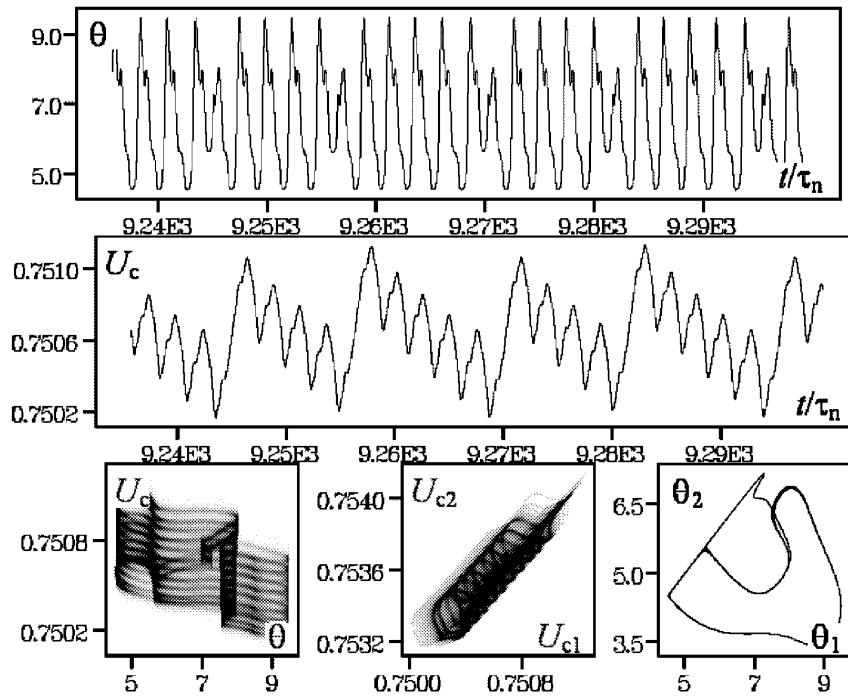


Рис. 16. Рост степени структурности аттрактора типа «хаоса прыгающего и смещающегося предельного цикла» в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 15 здесь $t_e = 0.035\tau_n$

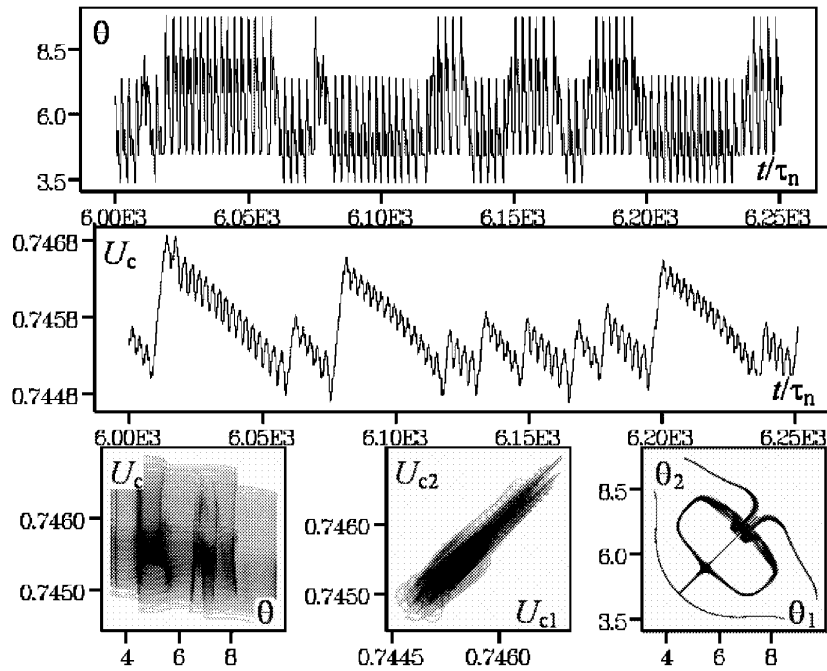


Рис. 17. Утрата структурности аттрактора типа «хаос прыгающего и смещающегося предельного цикла» в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 16 здесь $t_e = 0.05\tau_n$

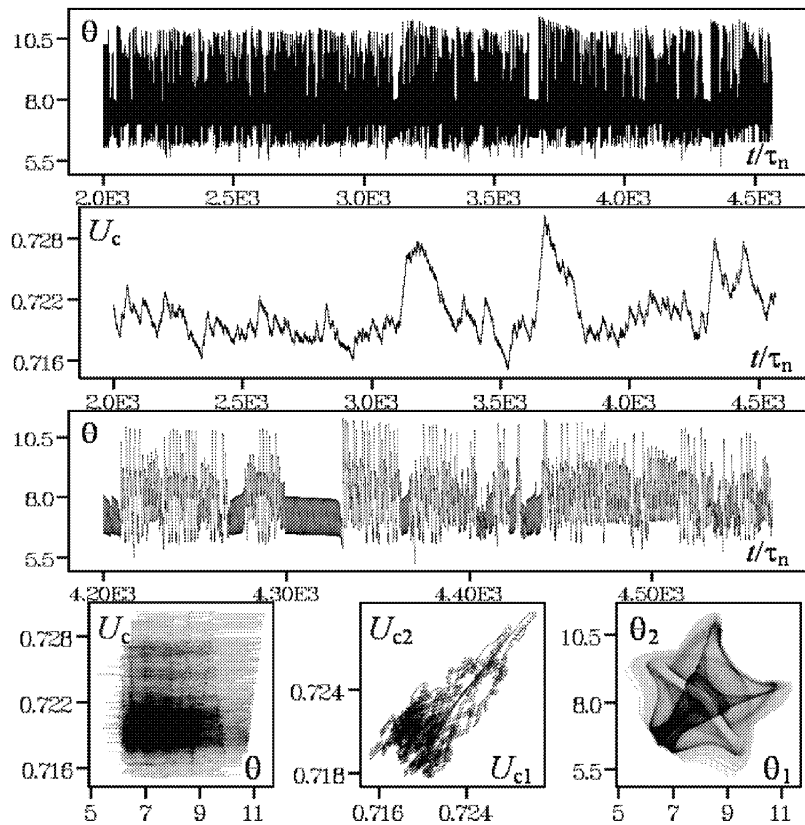


Рис. 18. Пережимаемость, сменившая «хаос прыгающего и смещающегося предельного цикла» в «двухточечной» модификации системы (3). Третья временная реализация есть увеличенный фрагмент первой реализации. В отличие от рис. 17 здесь $t_e = 0.1\tau_n$

турности данного аттрактора растет с увеличением запаздывания ($t_e = 0.035\tau_n$). Об этом свидетельствует сокращение числа и укрупнение деталей фазовых портретов $U_c(\theta)$ и $U_{c2}(U_{c1})$ на рис. 16. Регуляризация ритмики заметна и на временных реализациях. Портрет $\theta_2(\theta_1)$ теперь располагается ниже диагонали $\theta_2 = \theta_1$, причем дуга, примыкающая к ней, становится чаще посещаемой.

Однако еще больший рост запаздывания ($t_e = 0.05\tau_n$) вызывает утрату структурности аттрактора. Она вызвана объединением двух зеркально-симметричных аттракторов, разделенных (в четырехмерном фазовом пространстве) плоскостью $\theta_2 = \theta_1$. Такой факт нетрудно видеть, сопоставляя фазовые портреты $\theta_2(\theta_1)$ на рис. 15 – 17. А временная реализация $\theta(t)$ на рис. 17 убеждает: появляются хаотические переходы (то есть переключения) системы из одного полупространства в другое, ему зеркально симметричное. Здесь напрашивается параллель с аттрактором Лоренца.

Судя по временным реализациям (рис. 18), удвоение – по отношению к рис. 17 – запаздывания ($t_e = 0.1\tau_n$) вызывает режим перемежаемости. Амплитуда колебаний U_c увеличивается примерно в 6 раз. Существенно изменяется структура аттрактора. Так, строение его проекции на плоскость $\theta_2(\theta_1)$, оставаясь симметричным относительно диагонали $\theta_2 = \theta_1$, становится почти «зооморфной» и уже совершенно не создает впечатления периодической динамики. Структура проекции на плоскость $U_{c2}(U_{c1})$ выглядит «мелко витой линией» (спиралью), хаотически блуждающей по этой плоскости.

С ростом запаздывания ($t_e = 0.15\tau_n$) перемежаемость сохраняется, но доля времени, приходящаяся на квазипериодические стадии, по-видимому, уменьшается (рис. 19). Амплитуда колебаний U_c (впрочем, как и θ) еще более увеличивается, а «зооморфный» фазовый портрет $\theta_2(\theta_1)$ заметно обновляется.

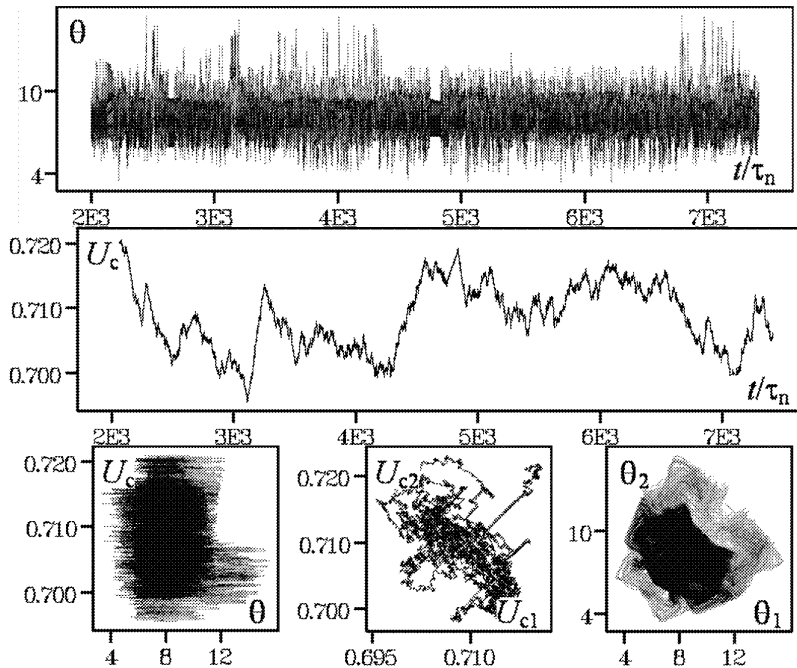


Рис. 19. Перемежаемость с доминированием хаотических стадий в «двухточечной» модификации системы (3). В отличие от рис. 18 здесь $t_e = 0.15\tau_n$

**Заключение. К понятиям «интерференционное усиление»,
«интерференционный усилитель» и «автомодуляционный»
источник колебаний**

Представленные выше результаты моделирования динамики огибающей высокочастотного сигнала в радиоэлектронном аналоге и в его модификации указывают на возможность регулярных и хаотических режимов динамики в устройстве на рис. 2.

Показано как сходство между моделями НКИ (1) и его радиоэлектронного аналога (2), так и существенные различия между последней и моделями (3), (6) модификации радиоэлектронного аналога НКИ. Приведенные данные моделирования демонстрируют многообразие рабочих режимов предложенного устройства и качественно подтверждаются результатами пилотного эксперимента [17]. Обнаруженные особенности сложного поведения потребовали (и, возможно, потребуют далее) некоторых терминологических нововведений. В целом авторы ожидают, что радиотехническая система на рис. 2 послужит прецедентом нелинейно-динамического устройства, располагающего к диверсификации, а тем самым – к порождению разнообразных по своим свойствам источников регулярных и хаотических режимов динамики.

Теперь уместно задуматься о квалификации предложенного устройства. Общеизвестно, что автогенератором называют усилитель, снабженный положительной обратной связью. При этом подразумевают, что рост амплитуды колебаний ограничен из-за нелинейности усилителя, либо благодаря специальным мерам стабилизации. Модулятор же, как известно, изменяет (согласно характеру *внешнего* управляющего воздействия) параметры колебательного процесса. Модулятор – в отличие от автогенератора – является пассивной системой. Естественно задуматься: возможна ли техническая автоколебательная система, совмещающая свойства автогенератора и модулятора? Иначе говоря, возможен ли модулятор, обладающий автономией поведения? Либо заострить так: возможен ли генератор без активного элемента?

По мнению авторов, на эти вопросы следует ответить положительно. Прецедентом служат описанные нами оптическое и радиофизические устройства, наследующие принцип действия системы Икеды.

Действительно, для функционирования устройства на рис. 2 нет нужды в усилителе, поскольку достаточно, чтобы выполнялось условие $\gamma_a < 1$. Следовательно, предлагаемое устройство есть *пассивная* система? Но, по определению [3, с. 17, 223], усилители и генераторы – активные системы. Предположим, в рассматриваемом устройстве имеет место *положительная* обратная связь ($\omega t_e + \theta(t - t_e) = 2\pi N$). Тогда, по отношению к сигналу $V(t)$, циркулирующему в системе, сумматор вкупе с входным сигналом $V_{вх}(t)$ окажется «интерференционным усилителем» [19]. Его коэффициент усиления, вводимый как $A_{вых\ ус}/A_{вх\ ус}$, является скалярной (вещественной) величиной и равен $1 + [A_{вх}(t)/(\gamma_a A(t - \tau))] \geq 1$. Если обратная связь является отрицательной, то имеем $1 - [A_{вх}(t)/(\gamma_a A(t - \tau))] \leq 1$. При этом эффективный коэффициент передачи за один проход равен, соответственно, $\pm\gamma_a + (A_{вх}(t)/A(t - \tau))$.

При $A_{вх}(t) = \text{const}$ в указанных двух предельных случаях (для положительной и отрицательной обратной связи) амплитуда сигнала на выходе «интерференционного усилителя» с течением времени ($t \rightarrow \infty$) неизбежно стремится к $A_{вх}/(1 - \pm\gamma_a)$, а коэффициент усиления и коэффициент передачи – соответственно к $\pm 1/\gamma_a$ и к 1.

В этих случаях «интерференционный усилитель», действительно, ведет себя как (не)инвертирующий усилитель с модулем коэффициента усиления $1/\gamma_a > 1$. В общем случае коэффициент усиления – комплексная величина (в терминах метода комплексных амплитуд), а его модуль может и не превосходить единицы. На языке векторных диаграмм работа этого усилителя описывается вектором, соответствующим комплексной амплитуде внешнего сигнала $V_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}}(t) \cos(\omega t + \varphi_{\text{вх}}(t))$, поступающего на вход сумматора. Поэтому логично говорить также о «векторном усилителе».

Подчеркнем: в устройстве на рис. 2 нет усилителя как такового. Но *есть усиление*. А его коэффициент (нелинейно) зависит от величины усиливаемого сигнала $V(t)$, циркулирующего в системе. Коэффициент усиления еще и неявно зависит от $A(t)$: через зависимость от фазового набега θ в (2). Очевидно, что сочетание нелинейности (усиления) и запаздывания есть предпосылка хаотической динамики, то есть реализации *пассивного* (иначе говоря, «автомодуляционного») источника детерминированного хаоса.

Предлагаемые понятия нуждаются в методологической разработке. Так, в классификации динамических систем [3, с. 17, 233] следует определить место устройства на основе «интерференционного усиления». Предстоит выяснить преимущества интерпретации и описания кольцевой системы с воздействием внешнего поля как автоколебательной системы, снабженной нелинейным «усилителем» и цепью обратной связи. Необходим анализ, позволяющий оптимизировать предложенное устройство с учетом классических требований радиофизики [3], а также специфических запросов теории детерминированного хаоса [3, 4, 8, 18, 20] и его приложений [9–11, 16, 21].

В последующей статье авторы приведут материалы эксперимента с радиотехническим устройством, реализующим модель (3).

Авторы благодарны профессору Саратовского государственного университета С.П. Кузнецову за полезные замечания.

Библиографический список

1. Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by ring cavity system // Opt. Comm. 1979. Vol. 30, № 2. P. 257.
2. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
3. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
5. Adachi-hara H., Faid H. Two-dimensional nonlinear-interferometer pattern analysis and decay of spirals // Opt. Soc. Am. 1993. Vol. 10, № 7. P. 1242.
6. Новые физические принципы оптической обработки информации: сб. ст. / Под ред. С.А. Ахманова, М.А. Воронцова. М.: Наука, 1990.
7. Chesnokov S.S., Rybak A.A. Spatiotemporal chaotic behavior of time-delayed nonlinear optical systems // Laser Physics. 2000. Vol. 10, №5. P. 1.

8. *Розанов Н.Н.* Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М.: Наука, 1997.
9. *Рыскин Н.М., Хаврошин О.С.* Управление хаосом в системе Икеды: упрощенная модель в виде точечного отображения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, №2. С. 66.
10. *Рыскин Н.М., Хаврошин О.С.* Управление хаосом в системе Икеды: пространственно-временная модель // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, №2. С. 87.
11. *Garcia-Ojalvo J., Roy R.* Spatiotemporal communication with Synchronized Optical Chaos // <http://xxx.lanl.gov/abs/nlin.CD/0011012>. 2000. 6 Nov. 4 p., 6.
12. *Carmon T., Buljan H., Segev M.* Spontaneous pattern formation in a cavity with incoherent light // Optics Express. 2004. Vol. 12, №15. P. 3481.
13. *Schwartz T., Fleischer J.W., Cohen O. et al.* Pattern formation in a ring cavity with temporally incoherent feedback // J. Opt. Soc. Am. B. 2004. Vol. 21, №12. P. 2197.
14. *Smirnov E., Stepić M., Shandarov V., Kip D.* Pattern formation by spatially incoherent light in a nonlinear ring cavity // Appl. Phys. B. 2006. Vol. 85. P. 135.
15. *Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н.* Детерминированный хаос в моделях нелинейного кольцевого интерферометра. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007.
16. *Владимиров С.Н., Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* Нелинейно-динамическая криптология: радиофизические и оптические системы / Под ред. С.Н. Владимирова. М: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 208 с.
17. *Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* Радиоаналог оптического генератора хаоса: модель и экспериментальная реализация // Тезисы докладов XIV Междунар. зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике. Саратов: ИЦ «РАТА», 2009. С. 48.
18. *Тимашев С.Ф.* Фликкер-шум как индикатор «стрелы времени». Методология анализа временных рядов на основе теории детерминированного хаоса // Рос. хим. журнал. 1997. Т. 41. №3. С. 17.
19. *Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* О понятии интерференционного усиления в контексте генерации детерминированного хаоса // Синергетика в естественных науках: Пятые Юбилейные Курдюмовские чтения: Материалы Международной междисциплинарной научной конференции (16 – 18 апреля 2009 г., г. Тверь). Тверь: Твер. гос. ун-т, 2009. Ч. 1. С. 80.
20. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
21. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

*Томский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 16.06.2009
После доработки 5.09.2009*

**CHAOS IN RADIO DEVICE WITH SQUARE-LAW PHASE
MODULATOR AND INTERFERENCE AMPLIFICATION
OF QUASI-HARMONIC SIGNAL:
A MODEL AND SIMULATION**

I.V. Izmailov, B.N. Poizner

The attempt is undertaken to define a class of oscillations or waves sources, the operation principle of which is based on interference amplification of feedback signal by an input signal. The precedent here is the optical Ikeda's system. The radio-electronic analog of a nonlinear ring interferometer and its modification are offered, the block diagrams and mathematical models are constructed. The computer simulation is performed. An intermittency, chaos, regular, static modes are detected.

Keywords: Interference amplification, delayed feedback, bifurcation, chaos, intermittency, static state.

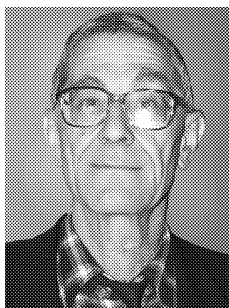
Измайлов Игорь Валерьевич – родился в Алма-Ате (1976), окончил Томский государственный университет (ТГУ, 1999). Учился в аспирантуре (1999–2002) и докторантуре (2006–2009) ТГУ. Работает в ТГУ старшим научным сотрудником радиофизического факультета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ТГУ (2002). Ведёт исследования, ориентированные на выявление новых синергетических феноменов и закономерностей нелинейной динамики в системах различной природы, на применение их в радиофизических и оптических устройствах (обработки и защиты информации, адаптивной, сингулярной оптики, функциональной электроники). Опубликовал три монографии и одно учебное пособие с грифом УМО (в соавторстве). Автор 85 научных статей по направлениям, указанным выше (из них 35 – в рецензируемых журналах).

634050, Томск, пр. Ленина, 36
ТГУ, РФФ, каф. квантовой электроники и фотоники
E-mail: izmi@elefot.tsu.ru



Поизнер Борис Николаевич – родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), профессор кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, лазерной технике, основам синергетики, социальной информатике. Автор и соавтор более 400 публикаций, 10 изобретений, 17 учебных пособий и монографий по физике лазеров, процессам самоорганизации и хаотизации в оптических, радиофизических, социокультурных системах, проблемам вузовской педагогики и (само)образования, науковедению и культурологии. Заслуженный работник высшей школы РФ (2005). Учёный секретарь диссертационного совета Д 212.267.04 при ТГУ. Действительный член Организации российских библиофилов.

634050, Томск, пр. Ленина, 36
ТГУ, РФФ, каф. квантовой электроники и фотоники
E-mail: pznr@elefot.tsu.ru





КОНФОРМАЦИОННЫЙ $B-A$ ПЕРЕХОД В МОДЕЛИ МОЛЕКУЛЫ ДНК С НЕСИММЕТРИЧНЫМ ДВУХЪЯМНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ НУКЛЕОТИДАМИ

Ф.К. Закирьянов, М.И. Фахретдинов

В работе рассмотрена модификация модели Пейарда–Бишопа с несимметричным двухъямным потенциалом взаимодействия между нуклеотидами и с учетом диссипации. Показано, что при определенном значении коэффициента диссипации в рассматриваемой модели возможно решение в виде кинков – нелинейных уединенных волн переключения между двумя состояниями. В терминах молекулы ДНК это решение описывает переход между двумя устойчивыми конформационными состояниями молекулы ДНК – $B-A$ переход.

Ключевые слова: ДНК, конформационный переход, нелинейные волны.

Функционирование генетического аппарата биологических систем во многом обусловлено конформационными изменениями молекулы ДНК. Как известно, нативная форма ДНК является B -формой, однако в природных условиях возможны структурные переходы из B -формы в A -форму и обратно [1]. Эти две формы ДНК отличаются различными параметрами: числом пар оснований на один виток, наклоном пары к оси спирали, но, на наш взгляд, самое главное, расстоянием между нуклеотидами в комплементарных цепочках (рис. 1).

Кроме A и B известны и другие формы ДНК, а также Z -форма, отличающаяся от всех остальных направлением закручивания спиралей (левозакрученная двойная спираль) [1].

По-видимому, есть основания полагать, что существуют не разные формы, а два обширных семейства форм [2]. Структуры в пределах каждого из семейств в зависимости от условий могут иметь различные параметры, но все формы A -семейства характеризуются большим расстоянием пар оснований от оси молекулы ДНК.

Считается, что структурные конформационные $B-A$ переходы в ДНК кооперативны и слабо зависят от состава и последовательности нуклеотидов. Вследствие кооперативности конформационные возбуждения имеют коллективный характер и охватывают протяженные участки макромолекулярной цепи. Следовательно, для их описания естественным является привлечение аппарата нелинейных уединенных волн в простой модели однородной ДНК.

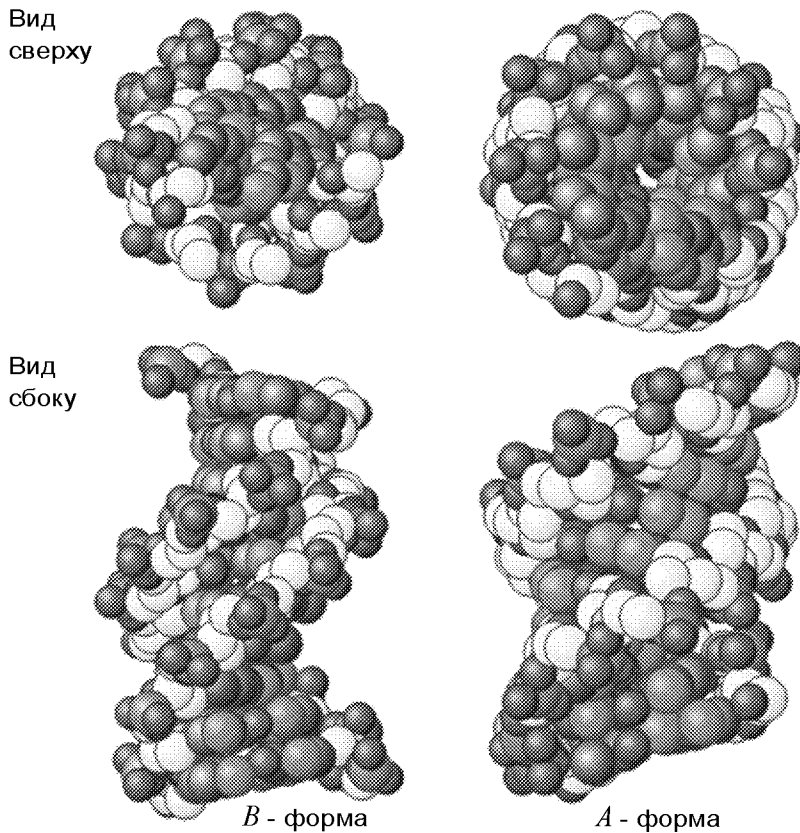


Рис. 1. *A*- и *B*-формы ДНК

Одной из первых работ, в которой были использованы нелинейные уединенные волны для описания конформационных переходов в одномерных молекулярных системах, была работа А.С. Давыдова [3]. В дальнейшем этот подход развивался в большом количестве других работ. В частности, были рассмотрены как однокомпонентные, например, [4–6], так и двухкомпонентные модели, например [7, 8]. Обзор исследований конформационной динамики ДНК представлен в известной монографии Л.В. Якушевич [9].

В данной работе предлагается рассмотреть модель молекулы ДНК, основанную на модификации модели Пейярда–Бишопа [10], но с двухъямным асимметричным потенциалом взаимодействия между нуклеотидами комплементарных цепочек. Эта модель учитывает, что молекула ДНК состоит из двух полинуклеотидных цепочек, и её можно представить в виде двух эластичных стержней, слабо взаимодействующих между собой и свернутых в двойную спираль. Дискретный механический аналог такой модели представляет собой две цепочки дисков, связанных друг с другом продольными и поперечными пружинами (рис. 2).

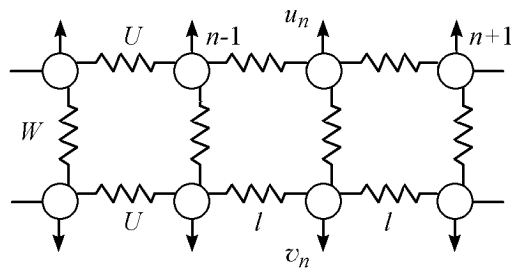


Рис. 2. Модель Пейярда–Бишопа

Обозначим через U энергию взаимодействия узлов одной цепочки, W – энергию взаимодействия узлов разных цепочек, n – номера атомов в цепочке, l – продольное расстояние между атомами в цепочке, u_n, v_n – смещение узлов верхней и нижней цепочки, соответственно (стрелочками на рис. 2 показаны положительные значения смещений узлов).

В качестве U для простоты берется гармонический потенциал

$$U = \sum_n \frac{k}{2} [(u_n - u_{n-1})^2 + (v_n - v_{n-1})^2],$$

где k – константа упругости взаимодействия оснований, принадлежащих одной цепочке.

Наблюдаемые экспериментально переходы между двумя формами ДНК позволяют сделать вывод, что реальный потенциал W взаимодействия комплементарных нуклеотидов имеет вид двухъямной потенциальной функции (рис. 3).

Если ограничиться рассмотрением внутримолекулярных конформационных переходов, не рассматривая плавление и репликацию ДНК, то можно аппроксимировать рассматриваемую сложную потенциальную функцию относительно простым полиномиальным потенциалом (рис. 4)

$$W = \sum_n (u_n - v_n)^2 \left(a (u_n - v_n)^2 + b (u_n - v_n) + c \right).$$

Условие асимметричности и двухъямности потенциала накладывает на параметры W следующие ограничения:

$$c > 0, \quad b < 0, \quad 0 < \frac{b^2}{4c} < a \leq \frac{9b^2}{32c}.$$

Система имеет два стационарных состояния: основное (соответствующее B -форме ДНК) и метастабильное (A -форма). B -форма является более выгодной по энергии. Такая неэквивалентность B - и A -форм соответствует свойствам реальной молекулы ДНК.

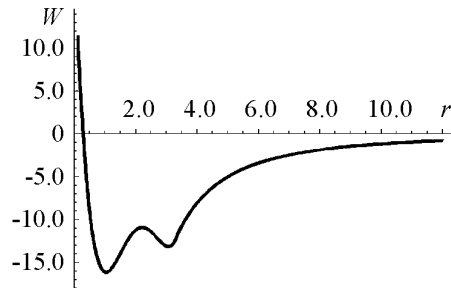


Рис. 3. Зависимость потенциальной энергии взаимодействия от расстояния между комплементарными нуклеотидами в ДНК

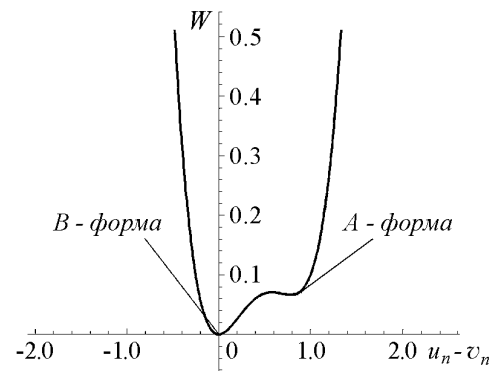


Рис. 4. Вид потенциала взаимодействия комплементарных нуклеотидов

Параметры предлагаемого модельного потенциала выберем из следующих соображений: точка локального минимума потенциальной энергии, соответствующая *A*-форме молекулы ДНК, должна быть порядка величины смещения нуклеотидов при *B*-*A* переходе, то есть 1–2 Å, а значение максимума потенциальной энергии (потенциальный барьер) – порядка энергии *B*-*A* перехода, то есть около 0.1 эВ [6]. Эти условия удовлетворяются, например, при следующих параметрах потенциала: $a = 3.1 \times 10^{20}$ Дж/м⁴, $b = -9.54 \times 10^{10}$ Дж/м³, $c = 8.108$ Дж/м².

Гамильтониан рассматриваемой задачи имеет вид

$$H = \frac{1}{2}m \left(\left(\frac{du_n}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv_n}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{2}k \left((u_{n+1} - u_n)^2 + (v_{n+1} - v_n)^2 \right) + (u_n - v_n)^2 \left(a (u_n - v_n)^2 + b (u_n - v_n) + c \right).$$

Приведем гамильтониан к безразмерному виду с использованием следующих замен:

$$\check{u}_n = u_n/l, \quad \check{v}_n = v_n/l, \quad \tau = \sqrt{\frac{k}{m}}t, \quad \check{H} = H/(k l^2);$$

$$H = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d\check{u}_n}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{d\check{v}_n}{d\tau} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left((\check{u}_{n+1} - \check{u}_n)^2 + (\check{v}_{n+1} - \check{v}_n)^2 \right) + (\check{u}_n - \check{v}_n)^2 \left(\frac{a l^2}{k} (\check{u}_n - \check{v}_n)^2 + \frac{b l}{k} (\check{u}_n - \check{v}_n) + \frac{c}{k} \right).$$

Далее сделаем переобозначения параметров a, b, c

$$\frac{a l^2}{k} \Rightarrow a, \quad \frac{b l}{k} \Rightarrow b, \quad \frac{c}{k} \Rightarrow c.$$

В итоге, в континуальном приближении гамильтониан примет следующий вид:

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2} (u_\tau^2 + v_\tau^2) + \frac{1}{2} (u_x^2 + v_x^2) + (u - v)^2 \left(a (u - v)^2 + b (u - v) + c \right) \right\} \frac{dx}{l}.$$

Уравнения движения получаются в виде

$$u_{\tau\tau} = u_{xx} - 4a (u - v)^3 - 3b (u - v)^2 - 2c (u - v) - \mu u_\tau,$$

$$v_{\tau\tau} = v_{xx} + 4a (u - v)^3 + 3b (u - v)^2 + 2c (u - v) - \mu v_\tau.$$

Здесь учтено взаимодействие молекулы ДНК с окружающей средой, приводящее к диссипативным членам μu_τ и μv_τ .

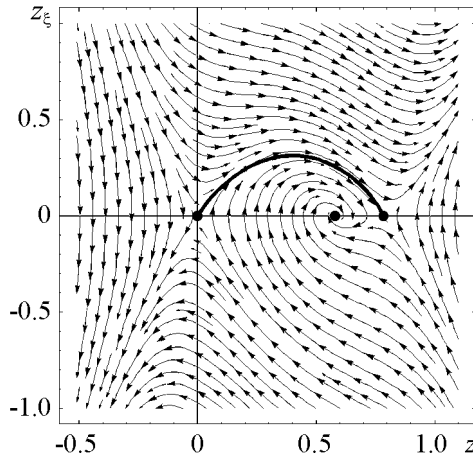


Рис. 5. Фазовый портрет уравнения (1). Гетероклиническая траектория (жирная линия) соответствует переходу ДНК из B -формы в A -форму

От переменных u и v перейдем к переменным ψ и z , имеющим следующий смысл: $\psi = u + v$ соответствует движению центра масс системы, $z = u - v$ соответствует изменению расстояния между комплементарными парами нуклеотидов. Уравнения движения примут вид

$$\psi_{\tau\tau} = \psi_{xx} - \mu \psi_{\tau},$$

$$z_{\tau\tau} = z_{xx} - 8a z^3 - 6b z^2 - 4c z - \mu z_{\tau}.$$

При переходе к волновой переменной $\xi = x - s \tau$, где s – скорость волны, уравнение для z примет вид

$$(1 - s^2) z_{\xi\xi\xi} - 8a z^3 - 6b z^2 - 4c z + \mu s z_{\xi} = 0. \quad (1)$$

Решение уравнения (1), описывающее переход системы из B -состояния в A -состояние, будем искать в виде кинка, соответствующего гетероклинической траектории на фазовом портрете

$$z(\xi) = \frac{A_1}{1 + A_2 \exp(-A_3 \xi)}. \quad (2)$$

Из рис. 5 видно, что переход ДНК из B -формы в A -форму возможен только при определенном значении коэффициента диссипации μ , связанном со значениями параметров a , b , c потенциала и скорости волны s . Действительно, после подстановки (2) в (1) получим систему уравнений для определения параметров решения A_1 , A_2 , A_3 , решая которую с учетом всех ограничений придем к следующему выражению для параметра μ :

$$\mu = \frac{-3 \left(b + \sqrt{9b^2 - 32ac} \right) \sqrt{9b^2 - 16ac - 3b \sqrt{9b^2 - 32ac} \sqrt{1 - s^2}}}{2\sqrt{2a} \left(-3b + \sqrt{9b^2 - 32ac} \right) s}. \quad (3)$$

Подставляя в формулу (3) границы изменения параметра $a \left(\frac{b^2}{4c} < a \leq \frac{9b^2}{32c} \right)$, получим для коэффициента диссипации максимальное и минимальное значения: $0 < \mu(a, b, c, s) < \frac{\sqrt{2c}}{s} \sqrt{1 - s^2}$.

В размерных переменных зависимость коэффициента диссипации (3) от параметров модели выглядит следующим образом:

$$\mu = \frac{-3 \left(b + \sqrt{9b^2 - 32ac} \right) \sqrt{9b^2 - 16ac - 3b\sqrt{9b^2 - 32ac}} \sqrt{kl^2 - ms^2}}{2\sqrt{2a} \left(-3b + \sqrt{9b^2 - 32ac} \right) s}.$$

Для оценки численного значения коэффициента диссипации воспользуемся полученными выше параметрами рассматриваемого модельного потенциала и данными работы [10] ($m = 5.1 \times 10^{-25}$ кг, $l = 3.4 \times 10^{-10}$ м, $k = 24$ Н/м). Зависимость коэффициента диссипации от скорости представлена на рис. 6. Аналогичные величины коэффициента трения были получены и в работе [10]. При $\mu = 0$ получим максимальное допустимое значение скорости солитона $s \approx 2332.4$ м/с. Это согласуется с оценками, представленными в приложении к монографии Л.В. Якушевич [9].

Решение системы (1) в безразмерных переменных имеет вид

$$z(\xi) = \frac{\frac{-3b + \sqrt{9b^2 - 32ac}}{8a}}{1 + A_2 \exp \left[- \sqrt{\frac{-2c - 3b \left(\frac{-3b + \sqrt{9b^2 - 32ac}}{8a} \right)}{1 - s^2}} \xi \right]}, \quad (4)$$

где A_2 – произвольная положительная константа, соответствующая сдвигу кинка влево или вправо по оси ξ . Вид решения представлен на рис. 7.

Высота кинка (предел решения на бесконечности)

$$h = \frac{-3b + \sqrt{9b^2 - 32ac}}{8a}.$$

соответствует расстоянию между локальными минимумами функции $z^2(az^2 + bz + c)$ и равна смещению нуклеотидов при $B-A$ переходе. Область, захваченная рассматриваемым возмущением, по аналогии с динамикой магнетиков может рассматриваться как своего рода «доменная стенка», являющаяся областью перехода между двумя различными конформационными состояниями.

Решение типа кинка (4) в рамках нашей модели (см. рис. 2) определяет растяжение нелинейных пружинок, соединяющих узлы разных цепочек.

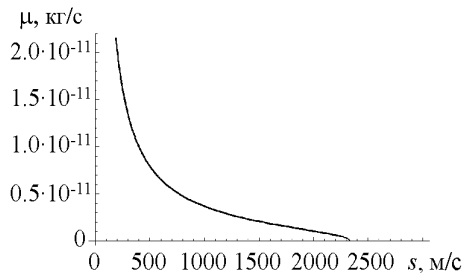


Рис. 6. Зависимость коэффициента диссипации от скорости

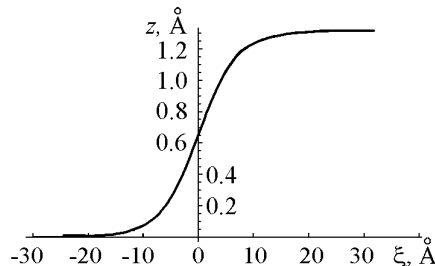


Рис. 7. Вид решения (4) в размерных переменных

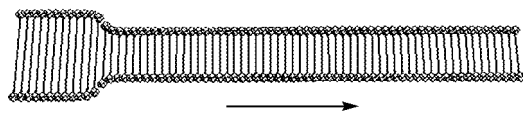


Рис. 8. *B–A* переход

Это растяжение движется вдоль цепочки узлов (рис. 8) по мере того, как бегущая волна – «кинк» – идет по цепочке. В рамках терминов молекулы ДНК это определяет переход между двумя устойчивыми конформационными состояниями молекулы ДНК, то есть *B–A* переход.

Таким образом, нами была рассмотрена модель Пейярда–Бишопа с несимметричным двухъямным потенциалом взаимодействия между нуклеотидами с учетом трения. Показано, что при определенном значении коэффициента диссипации в данной модели возможно решение типа кинк, которое можно интерпретировать как *B–A* переход. Получены численные оценки построенного решения, качественно совпадающие с оценками в других работах.

Библиографический список

1. Албертс Б., Брей Д., Льюис Дж. Молекулярная биология клетки. В 2 т. М.: 1994.
2. Иванов В.И. А-ДНК // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 1. С. 2.
3. Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наук. думка, 1984. 287 с.
4. Волков С.Н. Нелинейные волны и конформационная подвижность ДНК. Киев, 1984. 36 с. (Препринт АН УССР. Ин-т теор. физики: № 52Р).
5. Волков С.Н. О возможности распространения нелинейных волн в ДНК // Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике. Киев: Наук. думка, 1985, ч. 1. С. 161.
6. Khan A., Bhaumic D. and Dutta-Roy B. The possible role of solitonic process during A to B conformational changes in DNA // Bull. Math. Biol. 1985. Vol. 47. P. 783.
7. Волков С.Н. Развитие нелинейной конформационной динамики ДНК // Биополимеры и клетка. 1990. Т. 6, № 4. С. 21.
8. Пономарев В.О., Шиховцева Е.С. Механизм $B \rightarrow A$ перехода в молекуле ДНК с упругим взаимодействием между сахарами и азотистыми основаниями // Биофизика. 2000. Т. 45, вып. 1. С. 27.
9. Якушев Л.В. Нелинейная физика ДНК // Москва; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований; Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 250 с.
10. Zdravcovic S., Tuszyński J.A., Sataric M.V. Peyrard–Bishop–Dauxois model of DNA dynamics and impact of viscosity // Journal of Computational and Theoretical Nanoscience. 2005. Vol. 2, № 2. P. 1.

Башкирский государственный
университет

Поступила в редакцию 12.05.2009
После доработки 11.06.2009

CONFORMATIONAL B - A TRANSITION IN THE MODEL OF DNA MOLECULE WITH ASYMMETRIC DOUBLE-WELL INTERACTION POTENTIAL OF NUCLEOTIDES

F.K. Zakir'yanov, M.I. Fakhretdinov

In this paper we consider a modified Peyrard–Bishop model with asymmetric double-well interaction potential of nucleotides and dissipation. It is shown that at the certain value of dissipation coefficient the model solution takes the form of a kink. In terms of DNA molecule it describes the transition between two stable conformational states of DNA molecules – B - A transition.

Keywords: DNA, conformational transitions, nonlinear waves.



Закирьянов Фарит Кабирович – родился в Уфе (1967), окончил Башкирский государственный университет (1989). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1993) по специальности «биофизика». Опубликовал около 50 научных и методических работ. Доцент кафедры теоретической физики БашГУ.

450074, Уфа, ул. З. Валиди, 32

Башкирский государственный университет, кафедра теоретической физики

E-mail: farni@rambler.ru



Фахретдинов Марат Ирекович – родился в Уфе (1984), окончил кафедру теоретической физики Башкирского государственного университета (2007). После окончания БашГУ поступил в аспирантуру, работает ассистентом кафедры теоретической физики физического факультета БашГУ.

450074, Уфа, ул. З. Валиди, 32

Башкирский государственный университет, кафедра теоретической физики

E-mail: fakhretdinovmi@pochta.ru



ШУМОИНДУЦИРОВАННЫЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ПРОЦЕССАХ КОНКУРЕНЦИИ ВО ВНЕШНИХ ФЛУКТУИРУЮЩИХ СРЕДАХ

С.Е. Курушина, В.В. Максимов

Исследовано влияние внешнего аддитивного однородного изотропного поля гауссовых флуктуаций на эволюцию процессов конкуренции. В качестве конкретной модели выбрана система, описываемая уравнениями типа Лотки–Вольтерры, учитывающими подвижность особей слабого вида и флуктуации ресурса в пространстве и во времени. В результате численного моделирования показано, что такая система допускает три различных типа стационарных решений: классическое решение, соответствующее исчезновению слабого вида; решение, соответствующее явлению кинетического перехода типа «заселения среды»; новый тип решений, соответствующий установлению стационарного состояния, при котором средняя по объему и асимптотическая по времени плотность численности слабого вида больше средней по объему и асимптотической по времени плотности численности сильного вида. Построены параметрические диаграммы, определяющие границы областей различных типов решений. Исследованы зависимости асимптотических по времени и средних по объему плотностей численности слабого и сильного видов от параметров модели.

Ключевые слова: Шумоиндуцированные фазовые переходы, процессы конкуренции, численное моделирование, параметрические диаграммы.

Введение

Вопросы, относящиеся к влиянию шумов на эволюцию неравновесных систем, неоднократно обсуждались в литературе [1–10]. Исследования, проведенные за последние годы, показали, что поведение нелинейных систем во внешних флуктуирующих полях, как правило, противоречит интуитивным представлениям о возможных итогах их эволюции. Для широкого класса явлений случайный характер среды способен индуцировать гораздо более богатое разнообразие режимов, чем те, которые возможны при соответствующих детерминированных условиях [1]. Во-первых, шумы вызывают флуктуации параметров систем, что, в частности, приводит к формированию турбулентных коэффициентов переноса и дисперсии, значения которых могут заметно превышать значения коэффициентов переноса [2–5]. Во-вторых, в случайно

неоднородных системах могут возникать корреляционные неустойчивости, при которых моменты первого порядка устойчивы, а высшие моменты могут нарастать во времени и пространстве [2,6]. Наконец, шумы способны приводить к качественному изменению режимов поведения распределенных систем: появлению и исчезновению новых стационарных состояний [1,7], возникновению незатухающих осцилляций, изменению размерности аттракторов [8,9] и т.д.

В настоящей работе исследуется влияние внешнего аддитивного однородного изотропного поля гауссовых флуктуаций на процессы конкуренции в системах различной природы. Актуальность поставленной задачи обусловлена тем, что процессы конкуренции и отбора являются важными факторами, определяющими поведение сильнонеравновесных открытых систем (конкуренция между модами в лазере, химические модели эволюции, конкурентный отбор в экологии). Фактически сам процесс самоорганизации можно рассматривать как результат конкуренции между большим числом неустойчивых мод, приводящей к установлению макроскопической амплитуды одной из таких мод и подавлению остальных [7,10].

Здесь рассматривается система, описывающая конкуренцию двух потребителей (биологических видов), ориентированных на один ресурс. К этой модели сводится большое количество физических, экономических, социальных и экологических задач. Далее для определенности будем оперировать экологической терминологией.

Простейшей моделью этого типа является модель Лотки–Вольтерры [11], в которую добавим слагаемые, учитывающие подвижность особей слабого вида, а также пространственные и временные флуктуации скорости прироста ресурса [7].

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= (BM - A)N, \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= (bM - a)n + D\Delta n, \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= Q - GM - CN - cn + f(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где N , n – плотности численности сильного и слабого вида; M – плотность ресурса; A , a (B , b) – коэффициенты естественного изменения численности видов; Q – скорость прироста ресурса; C , c – коэффициенты его потребления; G – коэффициент естественной убыли ресурса. Слагаемое $D\Delta n$ учитывает подвижность особей слабого вида. Случайное поле $f(\mathbf{r}, t)$ задает пространственные и временные флуктуации плотности ресурса. Все коэффициенты в (1) положительны.

Источник флуктуаций вводится только в третье уравнение системы (1), так как в данной задаче предполагается, что внешние факторы оказывают наиболее значительное влияние на компоненту системы, описывающую изменение плотности пищевого ресурса, от которого в наибольшей степени зависит численность видов. Случайные изменения плотности численности конкурирующих видов, связанные с внешним вмешательством в процессы их размножения и вымирания, не учитываются. Так как источник флуктуаций внешний, его можно смоделировать как аддитивное случайное поле.

В работах [1,12] рассматриваются двухкомпонентные точечные системы хищник–жертва с различными трофическими функциями. В этих работах предполагается, что случайные изменения среды приводят к случайному изменению параметров системы (внутренним флуктуациям). Случайная компонента моделируется как мультипликативный белый шум. В [12] показано, что в такой системе за счет флуктуаций параметров может происходить статистическая параметрическая раскочка положения равновесия. В работе [1] показано, что шум сдвигает точку детерминированного фазового перехода. Это приводит к бистабильности системы.

В данной работе предполагается, что шумом параметров системы можно пренебречь, чтобы при малых коэффициентах диффузии вышеописанные эффекты не влияли на кинетические переходы, то есть интенсивность внутренних флуктуаций значительно меньше интенсивности флуктуаций внешнего источника.

В работе [1] приводится обоснование того факта, что для большинства реальных систем, имеющих немарковское поведение, хорошим приближением для моделирования флуктуирующей окружающей среды является так называемый цветной шум. В этом случае будущая эволюция системы зависит лишь от ее состояния и состояния среды в данный момент времени, которое является марковским (при этом предполагается, что начальное состояние системы не зависит от шума). Это означает, что любое предсказание будущей стохастической эволюции многомерного процесса, описываемого переменными системы и случайным внешним источником, основанное на информации о состоянии в данный момент, является наилучшим из всех возможных.

Как отмечено в [1], флуктуации окружения представляют собой суммарный эффект действия многих слабосвязанных факторов окружающей среды. Тогда из центральной предельной теоремы следует, что флуктуации внешнего источника распределены по Гауссу. Свойства эргодичности, марковости и гауссовости флуктуирующего окружения ограничивают выбор случайных процессов для моделирования флуктуаций окружающей среды стационарным однородным изотропным гауссовым полем с экспоненциальной функцией корреляции

$$\langle f(\mathbf{r}, t)f(\mathbf{r}', t') \rangle = 2G^2 \theta \exp(-k_f |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \exp(-k_t |t - t'|). \quad (2)$$

Здесь $r_f = k_f^{-1}$ определяет характерный пространственный масштаб флуктуаций, $r_t = k_t^{-1}$ – характерный временной масштаб флуктуаций, θ – их интенсивность. Время корреляции считается значительно меньше всех характерных времен задачи. При $r_t \rightarrow 0$ поле становится δ -коррелированным во времени. Дополнительно предполагается, что выполнены условия $A/B < a/b$, $Q > GA/B$.

Единственное устойчивое решение системы (1) при $\theta = 0$ и $D = 0$ имеет вид

$$n_s = 0, \quad M_s = \frac{A}{B}, \quad N_s = \frac{Q - GM_s}{C}. \quad (3)$$

Таким образом, в отсутствие флуктуаций невозможно сосуществование видов – выполняется теорема Гаузе [13].

В [7] было показано, что ситуация становится отличной от классической, если скорость изменения плотности ресурса флуктуирует в пространстве и во времени.

Начиная с некоторой критической интенсивности шума

$$\theta_c = p_1 D k_f^2 / b, \quad (4)$$

где $p_1 = (a/b - A/B)$ – нехватка ресурса в стационарном состоянии для размножения особей слабого вида, становится возможным стационарное статистическое сосуществование двух соревнующихся видов («заселение среды»). Средняя по объему и асимптотическая по времени плотность численности слабого вида становится равной

$$\langle n \rangle_{Vs} = \begin{cases} 0, & \theta < \theta_c, \\ \frac{b p_1}{R} \left(\frac{1}{\theta_c} - \frac{1}{\theta} \right), & \theta > \theta_c. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $R = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{b^3 c}{G \omega_0^2 (D k_f^2)^{3/2}}$, $\omega_0 = \sqrt{B(Q - GA/B)}$.

При этом показано, что в отсутствие диффузии флуктуации скорости прироста ресурса не предотвращают асимптотического вымирания слабого вида [14], поэтому такой кинетический переход принципиально связан с наличием диффузии. В условиях флуктуирующего окружения простая подвижность оказывается фактором, обеспечивающим эволюционное преимущество.

Авторами работы [7] по аналогии с теорией равновесных переходов второго рода получено уравнение типа Гинзбурга–Ландау для медленной составляющей параметра порядка, которое справедливо в малой окрестности области перехода к режиму с ненулевой средней по объему плотностью численности слабого вида $\langle n \rangle_V \neq 0$. При этом учитывалась сложная иерархия микроскопических масштабов уравнений с размерностью обратного времени, и анализ проводился при условии малости отклонений концентраций n и N от стационарных значений и при определенных ограничениях на интенсивность шума. Кроме того, при анализе использовался целый ряд дополнительных ограничений, серьезно сужающих область применимости полученных результатов.

В настоящей работе система (1) анализировалась в отсутствие указанных выше ограничений.

Результаты численного моделирования

Сложность и ограниченная применимость аналитических методов делает актуальным построение численной модели для исследования системы (1). Трудности, возникающие при численном моделировании, в свою очередь, связаны с высокой вычислительной сложностью модели. Для наблюдения предсказываемых теорией эффектов необходимо разбиение пространства на большое число точек и значительное число отсчетов в модельном времени до наступления стационарного режима. Кроме этого, эффект «заселения среды» наблюдается в узких областях срезов параметрического пространства модели, границы которых можно указать лишь приблизительно.

Это требует разработки специальных инструментальных методик проведения вычислительных экспериментов, которые подробно описаны в [15], где предложен новый подход для качественного исследования процесса конкуренции на основе численного моделирования с использованием кластерных вычислительных систем с централизованным управлением вычислительным процессом.

Будем считать, что взаимодействие популяций происходит в конечной области пространства. Рассмотрим одномерную задачу. Тогда систему уравнений (1) с учетом нормировки на стационарные состояния можно переписать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \tau} &= (\tilde{M} - 1)\tilde{N}, \\ \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tau} &= \left(\frac{b}{B}\tilde{M} - \frac{a}{A}\right)\tilde{n} + \frac{D}{A} \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \tau} &= \frac{QB}{A^2} - \frac{G}{A}\tilde{M} - \frac{B}{A^2} \left(Q - G\frac{A}{B}\right)\tilde{N} - \frac{c}{C} \frac{B}{A^2} \left(Q - G\frac{A}{B}\right)\tilde{n} + \frac{B}{A^2} f(x, \tau), \end{aligned} \right\} (6)$$

где $\tau = At$, $\tilde{N} = N/N_s$, $\tilde{M} = M/M_s$, $\tilde{n} = n/N_s$. Предполагается непроницаемость неподвижных границ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \Big|_{x=0;L} &= 0, & \frac{\partial \tilde{n}}{\partial x} \Big|_{x=0;L} &= 0, & \frac{\partial \tilde{M}}{\partial x} \Big|_{x=0;L} &= 0, \end{aligned} \right\} (7)$$

где L – характерный размер области взаимодействия видов.

В настоящее время существует достаточно большое количество работ, посвященных решению задач, которые сводятся к уравнениям вида [16]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \xi(z) = a(\xi, z) + b(\xi, z)\varepsilon(z), \quad \xi(z_0) = \xi_0. \quad (8)$$

В системе уравнений (8) шум $\varepsilon(z)$ является δ -коррелированным.

В этих работах делается попытка «подогнать» методы решения стохастических дифференциальных уравнений (ДУ) под методы, которые разработаны для обыкновенных ДУ. Для этого сначала из эвристических соображений предполагается определенная вычислительная схема, а затем выполняется проверка – в каком статистическом смысле выполняется численное интегрирование: в смысле Ито или Стратоновича. Одним из способов такой проверки является проверка вычислительной схемы на простейших примерах. Этот способ служит скорее эвристическим, чем строгим доказательством, однако он нашел широкое применение в целом ряде серьезных исследований, например [17].

Схема численного моделирования, использованная здесь, записана также из эвристических предположений. Ее обоснованием могут служить следующие рассуждения. Запишем формально решение системы (6) в его эквивалентной интегральной форме

$$\begin{aligned}
\tilde{N} &= \tilde{N}_0 + \int_{t_0}^t (\tilde{M} - 1) \tilde{N} d\tau, \\
\tilde{n} &= \tilde{n}_0 + \int_{t_0}^t \left[\left(\frac{b}{B} \tilde{M} - \frac{a}{A} \right) \tilde{n} + \frac{D}{A} \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2} \right] d\tau, \\
\tilde{M} &= \tilde{M}_0 + \int_{t_0}^t \left[\frac{QB}{A^2} - \frac{G}{A} \tilde{M} - \frac{B}{A^2} \left(Q - G \frac{A}{B} \right) \tilde{N} - \frac{c}{C} \frac{B}{A^2} \left(Q - G \frac{A}{B} \right) \tilde{n} \right] d\tau + \\
&\quad + \frac{B}{A^2} \int_{t_0}^t f(x, \tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{9}$$

Реальный шум, в отличие от белого, имеет почти наверное непрерывные реализации, поэтому решению стохастических ДУ (9), благодаря сглаживающему эффекту интегрирования, будет соответствовать процесс с почти наверное дифференцируемыми реализациями. Поэтому (9) можно интерпретировать как систему обыкновенных ДУ для реализаций, а $\int_{t_0}^t f(x, \tau) d\tau$ можно понимать в смысле обычного интеграла Римана.

Все вышеизложенное позволяет для стохастических ДУ (9) использовать обычную двухслойную конечно-разностную схему [18], в которой $f(x, \tau)$ можно интерпретировать как часть нелинейной функции. Тогда получим

$$\begin{aligned}
N_i^j &= \tau (M_i^{j-1} - 1) N_i^{j-1} + N_i^{j-1}, \\
n_{i-1}^j - n_i^j \left(2 + \frac{Ah^2}{D\tau\sigma} \right) + n_{i+1}^j &= -\frac{(1-\sigma)}{\sigma} \left(n_{i+1}^{j-1} - 2n_i^{j-1} + n_{i-1}^{j-1} \right) - \\
&\quad - \frac{Ah^2}{D\tau\sigma} n_i^{j-1} - \frac{Ah^2}{D\tau\sigma} n_i^{j-1} \left(\frac{b}{B} M_i^{j-1} - \frac{a}{A} \right), \\
M_i^j &= \tau \left(\frac{QB}{A^2} - \frac{G}{A} M_i^{j-1} - \frac{B}{A^2} \left(Q - G \frac{A}{B} \right) N_i^{j-1} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{c}{C} \frac{B}{A^2} \left(Q - G \frac{A}{B} \right) n_i^{j-1} + \frac{B}{A^2} f_i^{j-1} \right) + M_i^{j-1}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь f_i^j – реализации случайного гауссова поля с соответствующей функцией корреляции. Реализации поля f_i^j получены из следующих соображений. Предположим, что временную зависимость поля можно считать практически одинаковой во всех точках пространства. Тогда можно записать $f(x, \tau) = u(x)v(\tau)$ [19]. Для такого поля корреляционная функция принимает вид $B(x, \tau) = B_F(x)B_f(\tau)$, что соответствует виду (2). Далее реализуются процессы u_i^j и v^j по схеме [20]

$$u_i^j = [\theta_1(1 - \exp(-2k_f |x_i - x_{i-1}|))]^{1/2} e_i + u_{i-1}^j \exp(-k_f |x_i - x_{i-1}|),$$

$$v^j = [\theta_2(1 - \exp(-2k_t |t^j - t^{j-1}|))]^{1/2} e^j + v^{j-1} \exp(-k_t |t^j - t^{j-1}|); \quad \theta_1\theta_2 = 2G^2\theta,$$

u_0^j – случайное гауссово число с нулевым математическим ожиданием и дисперсией θ_1 ; v^0 – случайное гауссово число с нулевым математическим ожиданием и диспер-

сией θ_2 ; e_i и e^j – случайные гауссовы числа с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Тогда $f_i^j = u_i^j v^j$. При этом время корреляции r_t выбирается малым, много меньше характерных времен задачи.

Разностные граничные условия определяются выражениями

$$\begin{aligned} n_{-1}^j &= n_1^j; & n_{\max i+1}^j &= n_{\max i-1}^j, \\ N_{-1}^j &= N_1^j; & N_{\max i+1}^j &= N_{\max i-1}^j, \\ M_{-1}^j &= M_1^j; & M_{\max i+1}^j &= M_{\max i-1}^j. \end{aligned} \quad (11)$$

Система (10) с граничными условиями (11) решается стандартным методом прогонки. Итерационный процесс останавливается, когда среднее по объему значение плотности численности слабого вида стабилизируется на постоянном уровне.

Анализ показал, что в зависимости от значений параметров D , p_1 и θ система (6)–(7) допускает три различных типа решений (рис. 1).

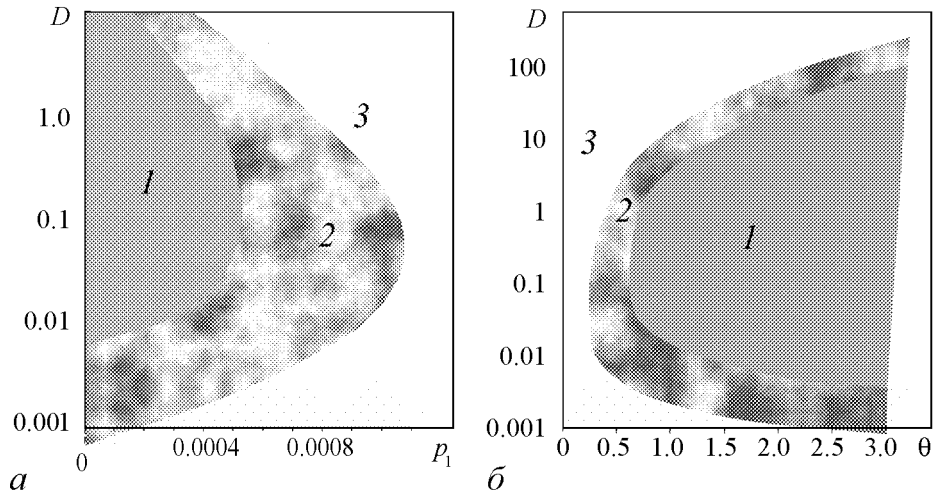


Рис. 1. Параметрические диаграммы для системы (6)–(7): a – на плоскости (D, p_1) ; b – на плоскости (D, θ) . 1 – область режима «инверсии»; 2 – область режима «заселения среды»; 3 – область классических решений

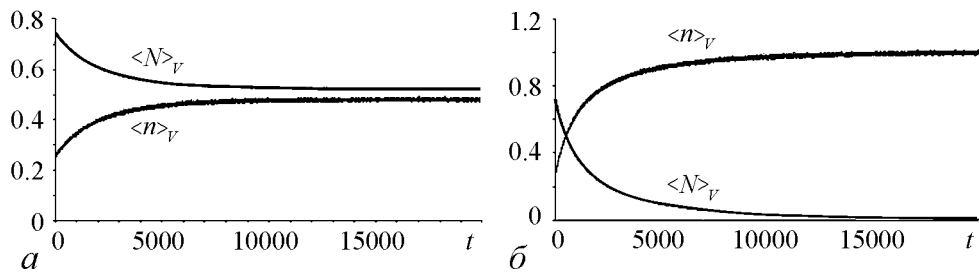


Рис. 2. Динамика изменения во времени средних по объему плотностей численности слабого $\langle n \rangle_V$ и сильного $\langle N \rangle_V$ видов. Параметры модели: $A = B = 1$, $a = 4.755278$, $b = 4.751796$, $C = c = 1$, $Q = 9.25$, $G = 3.68$, $\theta = 0.7$, $k_f = 5.4$. a – режим «заселения среды» ($D = 0.01$); b – режим «инверсии» ($D = 0.5$)

Классическое решение типа (3) (область 3 на рис. 1), описанное в [2,13], соответствует исчезновению слабого вида.

Решение типа (5) – заселение среды особями слабого вида (область 2 на рис. 1), полученное в [7] и соответствующее установлению статистического стационарного состояния, при котором средние по объему и асимптотические по времени плотности численности видов удовлетворяют условию $\langle n \rangle_{V_s} < \langle N \rangle_{V_s}$. Зависимости $\langle n(t) \rangle_V$ и $\langle N(t) \rangle_V$ в области 2 приведены на рис. 2, а.

Новый тип решений [21] (область 1 на рис. 1) соответствует установлению стационарного состояния, при котором $\langle n \rangle_{V_s} > \langle N \rangle_{V_s}$. В этой области параметров происходит «инверсия» явления «заселения среды» слабым видом, при которой последний становится сильным! Зависимости $\langle n(t) \rangle_V$ и $\langle N(t) \rangle_V$ в области 1 приведены на рис. 2, б.

На рис. 3, а представлена одна из реализаций плотности численности слабого вида n в выбранной точке пространства. По оси абсцисс отложен счетчик отсчетов времени j . Шаг по времени равен 0.01. Из рисунка видно, что при увеличении интенсивности флуктуаций внешнего источника и неизменных остальных параметров системы происходят изменения статистических стационарных состояний системы.

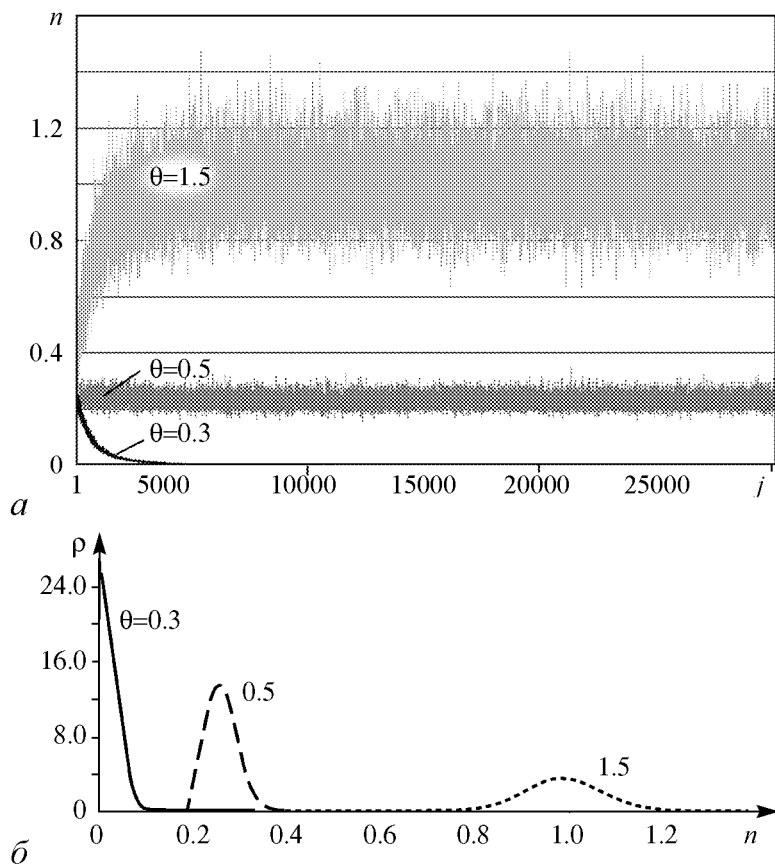


Рис. 3. Распределение плотности численности слабого вида в некоторой точке пространства: а – некоторая реализация; б – соответствующая плотность вероятности

На рис. 3, б показаны соответствующие плотности вероятности для статистических стационарных распределений n в этой же точке. Здесь принято, что статистическое стационарное состояние начинается с момента $t = 82$. Плотность вероятности получена с помощью автоматизированной системы аппроксимативного анализа законов распределения [22]. Из приведенных графиков видно, что кинетическим переходам соответствует сдвиг математического ожидания и увеличение дисперсии. Кроме того, можно заметить, что тип распределения при увеличении интенсивности шума стремится к гауссову.

Особенности поведения системы в зависимости от параметров D , p_1 весьма прозрачны. В самом деле, явление «заселения среды» происходит жестко по отношению к параметру p_1 , поэтому при увеличении дефицита ресурса, доступного слабому виду, выполняется теорема Гаузе, причем при $D \rightarrow 0$ и $p_1 \rightarrow 0$ слабый неподвижный вид исчезает при сколь угодно малом дефиците ресурса. Последний вывод совпадает с результатами работы [7].

Уменьшение дефицита ресурса, доступного слабому виду, приводит к сглаживанию отличий в динамике сильного и слабого видов, а подвижность дает слабому виду дополнительные конкурентные преимущества. В результате, вначале появляется возможность сосуществования видов, а затем, по мере уменьшения p_1 , и «инверсия» режима заселения. Динамика этого процесса в зависимости от p_1 показана на рис. 4.

Отметим здесь, что режим инверсии заселения является пороговым по параметру D : при $D \rightarrow D_c(p_1, \theta)$ дополнительные конкурентные преимущества исчезают. Рост коэффициента подвижности в пределе больших D приводит к тому, что последнее слагаемое во втором уравнении системы (6) становится преобладающим. При большой подвижности особи слабого вида слишком быстро проходят через области с профицитом ресурса и не могут эффективно использовать последний. В асимптотике при $D \rightarrow \infty$ это уравнение допускает только затухающие решения диффузионного типа вне зависимости от величины дефицита ресурса. Этим, в частности, объясняется подковообразный вид области 2 (см. рис. 1).

Динамика процесса в зависимости от коэффициента диффузии D , характеризующего подвижность слабого вида, и коэффициента естественной убыли ресурса G показана на рис. 5.

Разделение режимов на плоскости (D, θ) также легко объяснимо. Чем меньше интенсивность флуктуаций, тем меньше доступный исключительно слабому виду случайно возникающий в случайным образом распределенных областях пространства ресурс. При превышении интенсивности флуктуаций θ первого критического значения θ_{c1} появляется возможность сосуществования видов, при котором $\langle n \rangle_{Vs} < \langle N \rangle_{Vs}$. При превышении интенсивности флуктуаций θ второго критического значения θ_{c2} , слабый вид получает преимущество, поскольку этот тип ресурса непосредственно доступен только ему и появляется возможность сосуществования видов, при котором $\langle n \rangle_{Vs} > \langle N \rangle_{Vs}$.

Динамика процесса в зависимости от величины θ показана на рис. 6, а.

На рис. 6, б демонстрируется динамика смены режимов в зависимости от масштаба флуктуаций. Наличие крупномасштабных флуктуаций, очевидно, сглажива-

ет конкурентные преимущества подвижного потребителя. При выполнении условия $r_f \gg \max \left\{ l; (D/a)^{1/2} \right\}$, где $l = (D/(p_1 b))^{1/2}$ – среднее диффузионное смещение за характерное время вымирания $(p_1 b)^{-1}$ слабого вида в стационарном состоянии, либо его подвижность слишком мала, для того чтобы концентрация n в областях размножения превосходила ее уменьшение вне этих областей, либо последний не успевает воспользоваться преимуществом в подвижности.

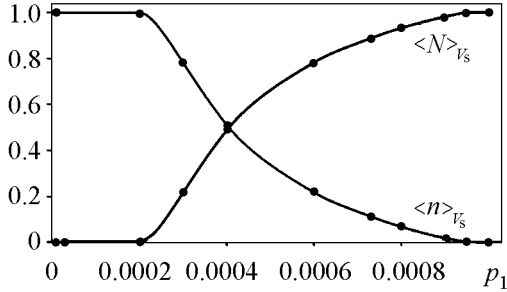


Рис. 4. Зависимость асимптотических по времени и средних по объему плотностей численности слабого $\langle n \rangle_{Vs}$ и сильного $\langle N \rangle_{Vs}$ видов от нехватки ресурса в стационарном состоянии для размножения особей слабого вида p_1 . Параметры модели: $A = B = 1$; $a = 4.755278$; $C = c = 1$; $D = 0.01$; $Q = 9.25$; $G = 3.68$; $\theta = 0.7$; $k_f = 5.4$

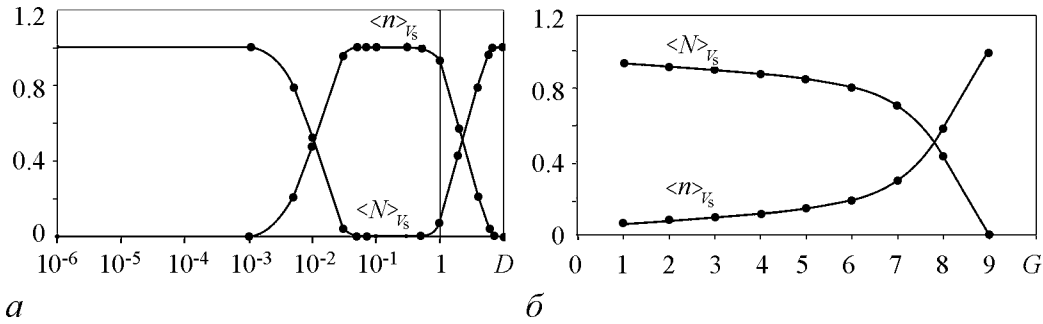


Рис. 5. Зависимости асимптотических по времени и средних по объему плотностей численности слабого $\langle n \rangle_{Vs}$ и сильного $\langle N \rangle_{Vs}$ видов: a – от коэффициента диффузии D ($G = 3.68$); b – от коэффициента естественной убыли ресурса G ($D = 0.01$). Параметры модели: $A = B = 1$; $a = 4.755278$; $b = 4.751796$; $C = c = 1$; $Q = 9.25$; $\theta = 0.7$; $k_f = 5.4$

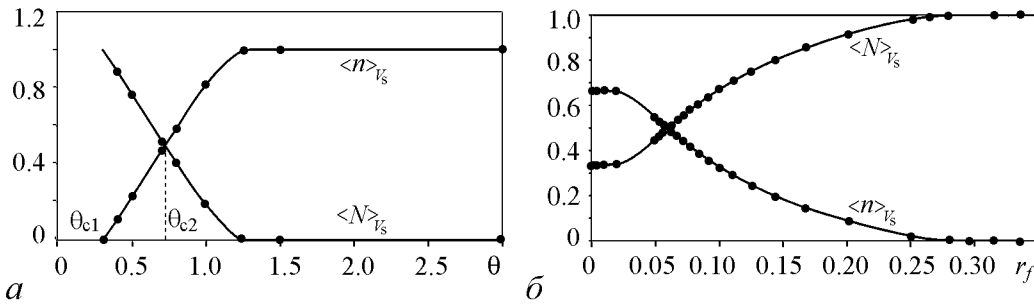


Рис. 6. Зависимости асимптотических по времени и средних по объему плотностей численности слабого $\langle n \rangle_{Vs}$ и сильного $\langle N \rangle_{Vs}$ видов: a – от интенсивности флуктуаций шума θ ($k_f = 5.4$.); b – от масштаба флуктуаций r_f ($\theta = 0.7$). Параметры модели: $A = B = 1$; $a = 4.755278$; $b = 4.751796$; $C = c = 1$; $D = 0.5$; $Q = 9.25$; $G = 3.68$

Заключение

Таким образом, в работе показано, что система (1) допускает три различных типа стационарных решений: классическое решение, соответствующее исчезновению слабого вида; решение, соответствующее явлению кинетического перехода типа «заселения среды»; и новый тип решений, соответствующий установлению стационарного состояния, при котором средняя по объему и асимптотическая по времени плотность численности слабого вида больше средней по объему и асимптотической по времени плотности численности сильного вида. Построены параметрические диаграммы на плоскостях (D, p_1) и (D, θ) , определяющие границы областей различных типов решений. Исследованы зависимости асимптотических по времени и средних по объему плотностей численности слабого и сильного видов от параметров модели.

Рассмотренная выше модель и близкие к ней имеют весьма широкую область применения. Они описывают процессы конкуренции в экологических сообществах и эффекты предбиологической химической эволюции [1]. Весьма близкие к рассмотренной модели при отсутствии флуктуаций были предложены в работе [23] – для описания взаимодействия двух категорий, участвующих в производстве – производителей и управленцев с произведенным и накопленным ими продуктом, и в [24] – при описании экономического и демографического развития некоторой области и т.д. Основные отличия этих моделей от рассмотренной заключаются в виде трофических функций. Тем не менее полученные в работе закономерности, касающиеся поведения системы ресурс–потребитель во внешних случайных полях являются весьма общими и следует ожидать их проявления и в данных системах. Конкретная интерпретация результатов при этом зависит от характера рассматриваемой системы.

Библиографический список

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: теория и применение. М.: Мир, 1987. 399 с.
2. Свирижев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.
3. Бенилов Е.С., Пелиновский Е.Н. К теории распространения волн в нелинейных флуктуирующих средах без дисперсии // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. Вып. 1. С. 175.
4. Моисеев С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Яновский В.В. Влияние вихрей на спектр акустической турбулентности // ЖЭТФ. 1978. Т. 87, № 2. С. 105.
5. Завершинский И.П., Коган Е.Я. Ослабление ударных волн в неравновесном газе // ТВТ. 2000. Т. 38, № 2. С. 293.
6. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 2000.
7. Михайлов А.С., Упоров И.В. Критические явления в средах с размножением, распадом и диффузией // УФН. 1984. Т. 14. Вып. 1. С. 79.
8. Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1981.
9. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы. Саратов: Изд-во СГУ, 1999.

10. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
11. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Мир, 1976.
12. *Свирижев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. 352 с.
13. *Гаузе Г.Ф.* Борьба за существование. Москва; Ижевск: Изд-во РХД, 2000. 234 с.
14. *Михайлов А.С., Упоров И.В.* Индуцированный шумом фазовый переход и перколяционная задача для флуктуирующих сред с диффузией // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. Вып. 5(11). С. 1958.
15. *Востокин С.В., Курушина С.Е.* Численное моделирование процесса конкуренции во флуктуирующих средах на кластерных вычислительных системах // Известия Самарского научного центра РАН. 2005. Т. 7, № 1. С. 143.
16. *Яроцук И.О., Гулин О.Э.* Метод статистического моделирования в задачах гидроакустики. Владивосток: Дальнаука, 2002. 352 с.
17. *Иванов М.Ф., Швец В.Ф.* Метод стохастических уравнений для расчета кинетики плазмы со столкновениями // ЖВММФ. 1980. Т. 20, № 3. С. 682.
18. *Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М.* Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991. 368 с.
19. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1981. 640 с.
20. *Бакалов В.П.* Цифровое моделирование случайных процессов. М.: Сайнс-ПРЕСС, 2002. 88 с.
21. *Курушина С.Е., Левченко Л.В., Максимов В.В.* Математическое моделирование процесса конкуренции в системе ресурс-потребитель во флуктуирующей среде // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2006. Т. 13, вып. 4. С. 660.
22. *Прохоров С.А., Лезин И.А. и др.* Автоматизированная система аппроксимативного анализа законов распределения ортогональными полиномами и нейросетевыми функциями. Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2007. 528 с.
23. *Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П.* Динамические модели теории управления. М.: Наука, 1985. 378 с.
24. *Гамма Э., Хелм Р., Джонсон Р., Влссидес Дж.* Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования. СПб: Питер, 2003. 368 с.

*Самарский государственный
аэрокосмический университет*

*Поступила в редакцию 1.12.2008
После доработки 2.04.2009*

NOISE-INDUCED PHASE TRANSITIONS IN COMPETITION PROCESSES IN THE EXTERNAL FLUCTUATED MEDIA

S.E. Kurushina, V.V. Maximov

The influence of external additive homogeneous isotropic field of Gauss fluctuations to evolution of competition processes, which described by Lotka–Volterra equations, where taking into account the mobility of weak population individuals and spatial and temporal fluctuations of resource, has been researched. The numerical simulation of considered

model was performed. It was shown that considered system have three different types of stationary solutions: classical solution, which corresponds to extinction of weak population; solution, which similar to phenomenon of kinetic transition, called «occupation of environment»; and a new type of solutions, which correspond to stationary state, where average in volume and asymptotic in time density of population size of weak species more than corresponding density of population size of strong species. Parametric diagrams for different types of solutions were plotted. Average in volume and asymptotic in time density of population size of weak and strong species dependences from main parameters were investigated.

Ключевые слова: Noise-induced phase transitions, competition processes, numerical simulation, parametric diagram.



Курушина Светлана Евгеньевна – родилась в Самаре (1971), окончила Самарский государственный университет (1994). После окончания СГУ работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГАУ (2002) по специальности 01.04.05 – Оптика. Опубликовала 30 научных работ. Область научных интересов: теория колебаний, волн, структур; динамика нелинейных стохастических систем; теория самоорганизации; прикладная математика; стохастические уравнения.

443086 Самара, Московское шоссе, 34
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева
E-mail: kurushina72@mail.ru



Максимов Валерий Владимирович – родился в поселке Усть-Омчуг, Магаданской области (1952). Окончил Куйбышевский авиационный институт (1976). После окончания КуАИ работал в ЦСКБ «Прогресс». С 1979 г. работает в КуАИ – СГАУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в КуАИ (1987) по специальности 05.07.05 - Тепловые двигатели летательных аппаратов. Опубликовал 47 научных работ. Имеет 6 авторских свидетельств. Область научных интересов: теория колебаний и волн; динамика нелинейных стохастических систем; теория самоорганизации.

443086 Самара, Московское шоссе, 34
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева



**АНАЛИЗ ХАОТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ СОСТАВНОГО СТАБИЛИЗАТОРА,
СОСТОЯЩЕГО ИЗ ДВУХ Понижающих КОНВЕРТОРОВ,
СВЯЗАННЫХ ПО СХЕМЕ ВЕДУЩИЙ-ВЕДОМЫЙ,
ПРИ ПОМОЩИ ФРАКТАЛЬНЫХ МЕР
ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ХАОСА**

О.И. Антипов

Рассматривается работа составного стабилизатора напряжения, состоящего из двух понижающих конверторов, связанных по схеме ведущий-ведомый, в хаотическом режиме. Для качественного анализа динамики системы построены бифуркационные диаграммы. Количественный анализ хаотических режимов был проведен путем расчета основных и специальных фрактальных размерностей.

Ключевые слова: Хаос, странные аттракторы, дробная размерность.

Введение

Развитие современных источников вторичного электропитания постоянно стимулируется регулярным повышением требований потребителей постоянного стабильного напряжения к его качеству. Одновременно с этим растут потребляемые мощности, что ставит задачу разработки высокомоощных, но одновременно с этим высококачественных источников питания. Одним из решений возникшей из-за этого проблемы является построение составных стабилизаторов, состоящих из двух или более параллельно соединенных конверторов одного типа. Одним из вариантов таких систем является составной стабилизатор, состоящий из двух параллельных понижающих конверторов, соединенных по схеме ведущий-ведомый, работающих в синхронном режиме. Особенностью его функционирования является наличие неравнозначных цепей обратной связи. Кроме того, параметры элементов силовой части подобных составных стабилизаторов различны. Данная ситуация будет не только подробно рассмотрена ниже, но и проанализирована с помощью фрактальных мер. Проведенный анализ позволил исследовать факторы, влияющие на устойчивость составного стабилизатора с точки зрения возникновения хаотических колебаний.

1. Математическая модель связанных понижающих конверторов с учетом различных потерь

Функциональная схема исследуемого стабилизатора представлена на рис. 1. Подобное описание принципов работы схемы можно найти в [1–3]. Приведенные ниже результаты отличаются только тем, что содержат учет большего числа потерь.

Вектор состояния для данной системы имеет вид

$$x(t) = [u(t), i_1(t), i_2(t)]^T,$$

где $u(t)$ – выходное напряжение сдвоенного стабилизатора, $i_1(t)$ – ток дросселя L_1 , $i_2(t)$ – ток дросселя L_2 . В зависимости от состояния ключей $VT1$ и $VT2$ силовая часть сдвоенного стабилизатора может иметь четыре состояния. Когда оба транзистора открыты, силовая часть имеет вид, представленный на рис. 2, а. При этом матричная система с учетом потерь может быть описана выражением

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_1x(t) + B_1, \tag{1}$$

где

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C(R_H + r_C)} & \frac{R_H}{C(R_H + r_C)} & \frac{R_H}{C(R_H + r_C)} \\ \frac{1}{L_1} \left(\frac{r_C}{R_H + r_C} - 1 \right) - \frac{1}{L_1} \left(r_{L1} + r_{T1} + \frac{R_H r_C}{R_H + r_C} \right) & -\frac{R_H r_C}{L_1(R_H + r_C)} & \\ \frac{1}{L_2} \left(\frac{r_C}{R_H + r_C} - 1 \right) & -\frac{1}{L_2} \left(\frac{R_H r_C}{R_H + r_C} \right) & -\frac{1}{L_2} \left(r_{L2} + r_{T2} + \frac{R_H r_C}{R_H + r_C} \right) \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(U - U_{T1})}{L_1} & \frac{(U - U_{T2})}{L_2} \end{bmatrix}^T.$$

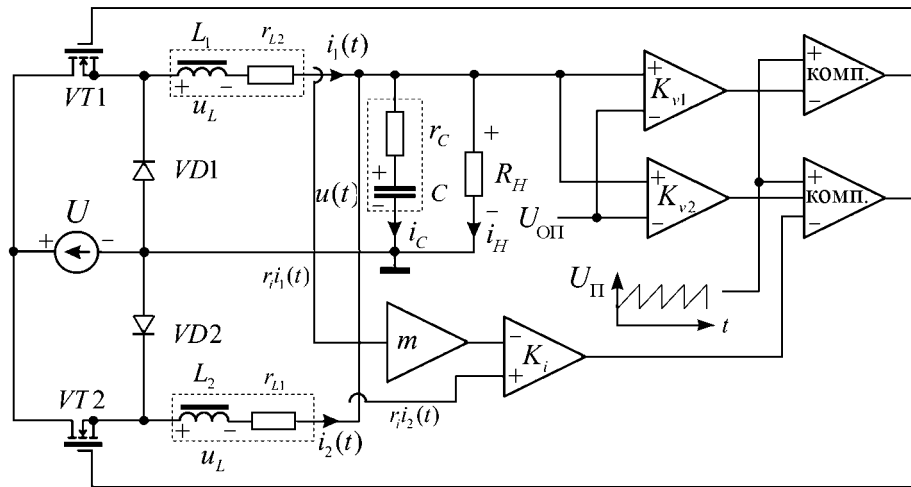


Рис. 1. Функциональная схема составного стабилизатора, состоящего из двух понижающих конверторов, связанных по схеме ведущий–ведомый

Когда транзистор $VT1$ открыт, а транзистор $VT2$ закрыт, силовую часть можно представить в виде, изображенном на рис. 2, б. При этом система с учетом потерь может быть описана матричным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_2x(t) + B_2, \quad (2)$$

где

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C(R_H + r_C)} & \frac{R_H}{C(R_H + r_C)} & \frac{R_H}{C(R_H + r_C)} \\ \frac{1}{L_1} \left(\frac{r_C}{R_H + r_C} - 1 \right) - \frac{1}{L_1} \left(r_{L1} + r_{T1} + \frac{R_H r_C}{R_H + r_C} \right) & -\frac{R_H r_C}{L_1(R_H + r_C)} & \\ \frac{1}{L_2} \left(\frac{r_C}{R_H + r_C} - 1 \right) & -\frac{1}{L_2} \left(\frac{R_H r_C}{R_H + r_C} \right) & -\frac{1}{L_2} \left(r_{L2} + r_{D2} + \frac{R_H r_C}{R_H + r_C} \right) \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(U - U_{T1})}{L_1} & \frac{-U_{D2}}{L_2} \end{bmatrix}^T.$$

Когда транзистор $VT2$ открыт, а транзистор $VT1$ закрыт, эквивалентная схема имеет вид, представленный на рис. 2, в. Тогда система описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_3x(t) + B_3,$$

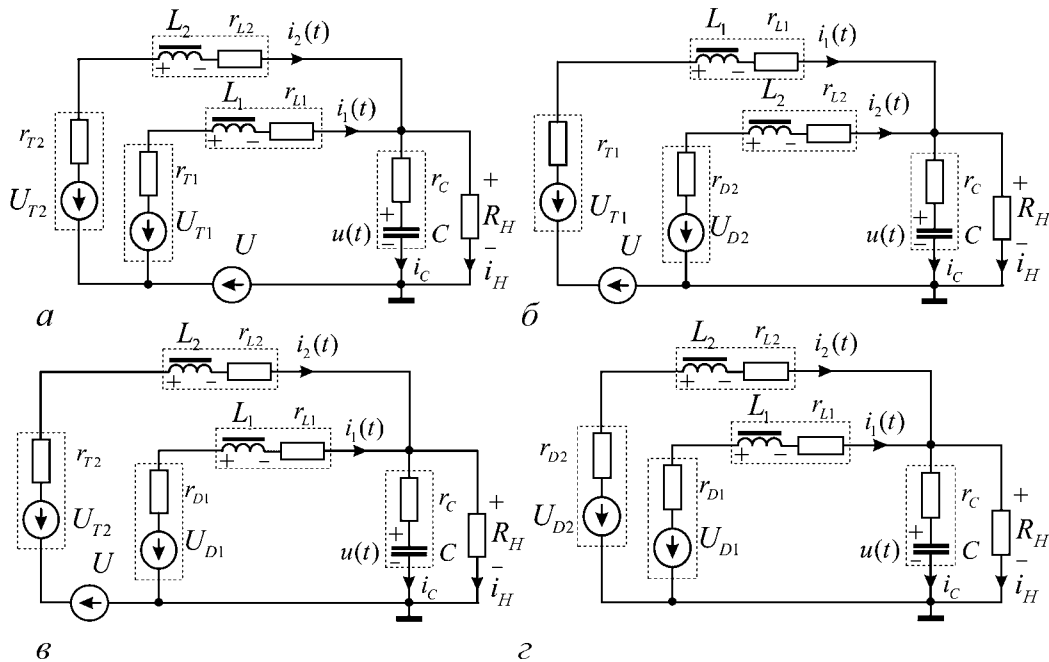


Рис. 2. Эквивалентная схема силовой части составного стабилизатора при открытых силовых ключах $VT1$ и $VT2$ (а), при открытом $VT1$ и закрытом $VT2$ (б), при открытом $VT2$ и закрытом $VT1$ (в) и при закрытых $VT1$ и $VT2$ (г)

где

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C(R_H + r_C)} & \frac{R_H}{C(R_H + r_C)} & \frac{R_H}{C(R_H + r_C)} \\ \frac{1}{L_1} \left(\frac{r_C}{R_H + r_C} - 1 \right) - \frac{1}{L_1} \left(r_{L_1} + r_{D_1} + \frac{R_H r_C}{R_H + r_C} \right) & -\frac{R_H r_C}{L_1(R_H + r_C)} & \\ \frac{1}{L_2} \left(\frac{r_C}{R_H + r_C} - 1 \right) & -\frac{1}{L_2} \left(\frac{R_H r_C}{R_H + r_C} \right) & -\frac{1}{L_2} \left(r_{L_2} + r_{T_2} + \frac{R_H r_C}{R_H + r_C} \right) \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-U_{D_1}}{L_1} & \frac{(U - U_{T_2})}{L_2} \end{bmatrix}^T.$$

Когда оба транзистора закрыты, эквивалентная схема силовой части выглядит так, как показано на рис. 2, з, а система описывается следующим матричным уравнением:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_4x(t) + B_4, \quad (3)$$

где

$$A_4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C(R_H + r_C)} & \frac{R_H}{C(R_H + r_C)} & \frac{R_H}{C(R_H + r_C)} \\ \frac{1}{L_1} \left(\frac{r_C}{R_H + r_C} - 1 \right) - \frac{1}{L_1} \left(r_{L_1} + r_{D_1} + \frac{R_H r_C}{R_H + r_C} \right) & -\frac{R_H r_C}{L_1(R_H + r_C)} & \\ \frac{1}{L_2} \left(\frac{r_C}{R_H + r_C} - 1 \right) & -\frac{1}{L_2} \left(\frac{R_H r_C}{R_H + r_C} \right) & -\frac{1}{L_2} \left(r_{L_2} + r_{D_2} + \frac{R_H r_C}{R_H + r_C} \right) \end{bmatrix},$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-U_{D_1}}{L_1} & \frac{-U_{D_2}}{L_2} \end{bmatrix}^T.$$

Пилообразное напряжение цепи обратной связи составного стабилизатора описывается следующим выражением:

$$U_{\Pi} = U_{\min} + (U_{\max} - U_{\min}) \frac{t \bmod T}{T}, \quad (4)$$

где U_{\min} и U_{\max} – минимальное и максимальное напряжения компенсации, T – период пилообразного напряжения U_{Π} . Пилообразное напряжение подается на первые входы компараторов, а на вторые входы подаются напряжения сигналов ошибки, описываемые зависимостями

$$U_{\text{комп1}} = U_{\text{см}} - K_{v1}(u(t) - U_{\text{оп}}), \quad (5)$$

$$U_{\text{комп2}} = U_{\text{см}} - K_{v2}(u(t) - U_{\text{оп}}) - K_i(r_{i2} - m r_{i1}), \quad (6)$$

где K_{v1} и K_{v2} – коэффициенты усиления усилителей обратной связи по напряжению, показанных на рис. 1; K_i и m – коэффициенты усиления усилителей обратной связи по току для обоих датчиков тока и дополнительного усилителя для датчика

тока дросселя L_1 , соответственно; $r_i i_1$ и $r_i i_2$ – сигналы датчиков тока дросселей L_1 и L_2 ; $U_{оп}$ – опорное напряжение цепи обратной связи; $U_{см}$ – напряжение смещения цепи обратной связи. Как видно из этих выражений, одним из отличий ведомого стабилизатора от ведущего является то, что на работу одного обратная связь по току обоих дросселей оказывает влияние, а на работу другого нет.

На основании вышеизложенных уравнений и выражений автором была составлена программа, находящая численное решение уравнений состояния (1)–(4) методом Рунге–Кутты 4-го порядка в каждом из состояний, которые переключаются между собой согласно вышеизложенным законам управления (5)–(7). Некоторые результаты данного моделирования приведены ниже.

2. Бифуркационные диаграммы системы связанных источников стабильного напряжения с учетом различных потерь

Автором было проведено исследование влияния основных параметров связанного конвертера [1–2], таких как индуктивность дросселей силовой части схемы, емкость выходного конденсатора, среднее значение входного напряжения и др. на его хаотическую работу. Все основное качественное влияние можно отследить по характерному изменению внешнего вида бифуркационных диаграмм. Для построения бифуркационных диаграмм были использованы параметры, взятые из [1–2]. Они имели следующие значения: $C = 47$ мкФ, $r_{L_1} = 0.05$ Ом, $r_{L_2} = 0.2$ Ом, $r_C = 0.1$ Ом, $T = 400$ мкс, $K_i = 5$, $m = 1$, $R_H = 10$ Ом, $U_{оп} = 24$ В, минимальное напряжение пилы $U_{мин} = 2$ В, максимальное напряжение пилы $U_{мак} = 8$ В, постоянная составляющая входного напряжения $U = 35.85$ В, напряжение смещения $U_{см} = 5$ В. При данных параметрах схемы были получены все представленные в данной статье бифуркационные диаграммы для системы связанных стабилизаторов как зависимость от коэффициентов усиления усилителей обратной связи K_{v1} и K_{v2} . Причем значения обоих коэффициентов менялось одновременно, то есть $K_{v1} = K_{v2}$.

Для исследования влияния индуктивности на устойчивость системы, с точки зрения возникновения хаотичной работы, индуктивность дросселей была сначала понижена до значений $L_1 = 15$ мГн и $L_2 = 30$ мГн, а затем повышена до значений $L_1 = 25$ мГн и $L_2 = 50$ мГн. Бифуркационные диаграммы для пониженных и повышенных индуктивностей для выходного напряжения составного стабилизатора приведены на рис. 3, а для тока первого дросселя на рис. 4.

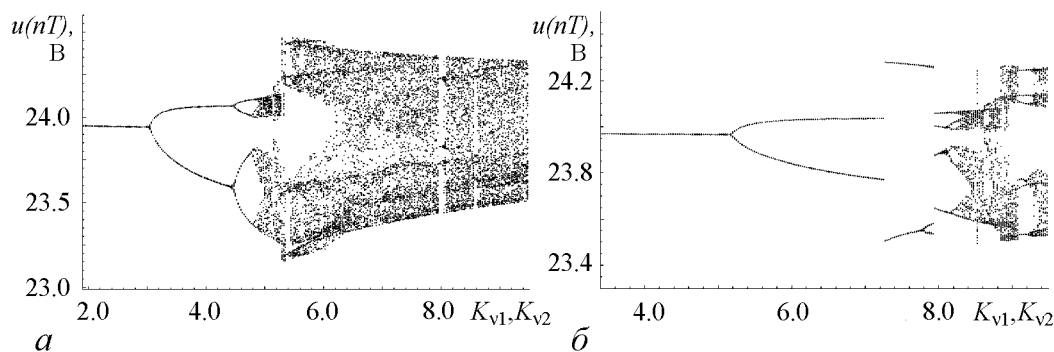


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы для выходного напряжения $u(nT)$ при $C = 47$ мкФ: а – $L_1 = 15$ мГн, $L_2 = 30$ мГн; б – $L_1 = 25$ мГн, $L_2 = 50$ мГн

Было исследовано также влияние емкости на хаотическую работу. Аналогичным образом значение емкости было также сначала занижено до $C = 30$ мкФ, а затем повышено до $C = 60$ мкФ. Бифуркационные диаграммы для $C = 30$ мкФ и $C = 60$ мкФ для выходного напряжения составного стабилизатора приведены на рис. 5, а для тока первого дросселя на рис. 6.

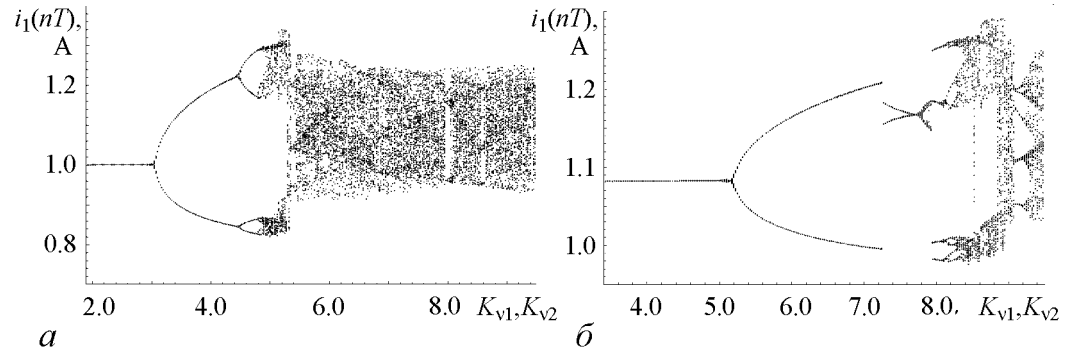


Рис. 4. Бифуркационные диаграммы для тока первого дросселя $i_1(nT)$ при $C = 47$ мкФ: $a - L_1 = 15$ мГн, $L_2 = 30$ мГн; $b - L_1 = 25$ мГн, $L_2 = 50$ мГн

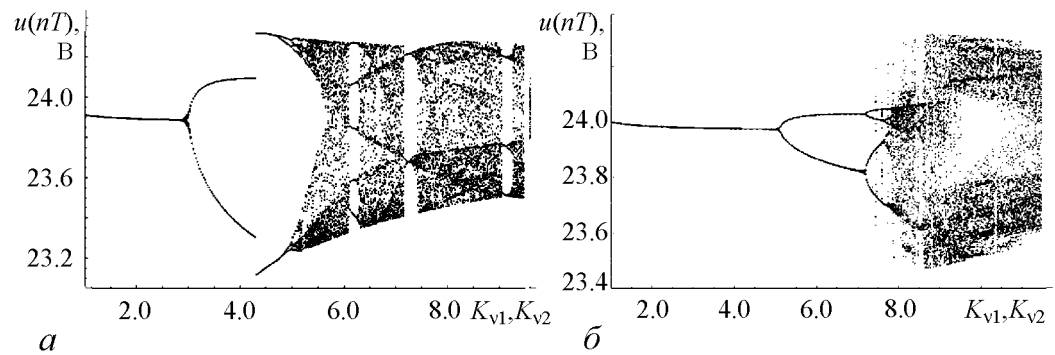


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы для выходного напряжения $u(nT)$ при $L_1 = 20$ мГн, $L_2 = 40$ мГн и при C : $a - 30$ мкФ; $b - 60$ мкФ

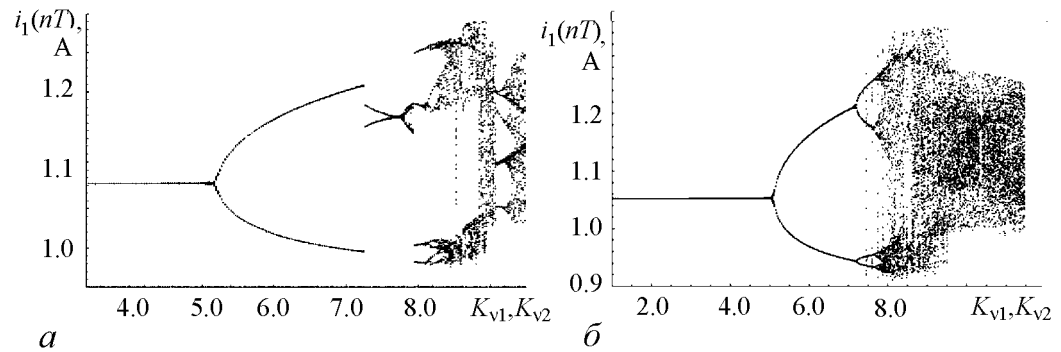


Рис. 6. Бифуркационные диаграммы для тока первого дросселя $i_1(nT)$ при $L_1 = 20$ мГн, $L_2 = 40$ мГн и при C : $a - 30$ мкФ; $b - 60$ мкФ

Как видно из бифуркационных диаграмм (рис. 3–6), переход к хаосу осуществляется в основном через удвоение периода. На некоторых диаграммах (рис. 3, *a*, 4, *a*, 5, *б*, 6, *a*) хорошо видны последовательные переходы через бифуркации периода 2, 4 и 8 к хаосу. Кроме того, на многих бифуркационных диаграммах в зоне хаотической работы видны окна как периода 3 (рис. 3, *a*, 4, *a*, 5, *a*), так и окна периодов, кратных 3 (рис. 3, *б*, 4, *б*, 6, *a*).

Судя по бифуркационным диаграммам рис. 3, можно сделать вывод, что при пропорциональном увеличении значений индуктивностей дросселей L_1 и L_2 со значений $L_1 = 15$ мГн, $L_2 = 30$ мГн до значений $L_1 = 25$ мГн, $L_2 = 50$ мГн граница устойчивой работы до первой бифуркации удвоения для выходного напряжения отодвигается со значений примерно $K_v \approx 3.0$ до $K_v \approx 5.5$. Те же самые выводы следуют для токов первого дросселя из рис. 4. Также из сравнения рис. 4, *a* и 4, *б* видно, что в дросселе с меньшей индуктивностью в хаотическом режиме работы пульсации тока заметно больше по величине.

В результате анализа было установлено, что при понижении емкости со значения $C = 47$ мкФ до значения $C = 30$ мкФ граница устойчивой работы для выходного напряжения сдвигается со значения $K_v \approx 4.2$ до значения $K_v \approx 3.0$. При повышении емкости со значения $C = 47$ мкФ до значения $C = 60$ мкФ граница устойчивой работы для выходного напряжения и токов обоих дросселей сдвигается со значения $K_v \approx 4.2$ до значения $K_v \approx 5.0$.

3. Внешний вид странных аттракторов связанных понижающих конвертеров и их фрактальные размерности Реньи

На основании разработанной автором программы, принцип действия которой и подтверждение достоверности полученных при помощи нее результатов подробно описаны в [4], были найдены различные хаотические аттракторы, а затем измерены их основные и специальные фрактальные размерности. Сама программа была разработана на теоретическом материале, представленном в [5–13]. Следует отметить, что внешний вид аттракторов, типичные формы которых приведены на рис. 7, предполагает наличие сложной функции последования. Лишь аттракторы, находящиеся на поверхности сечения, имеют относительно простые геометрические структуры, что видно из рис. 7, *a*.

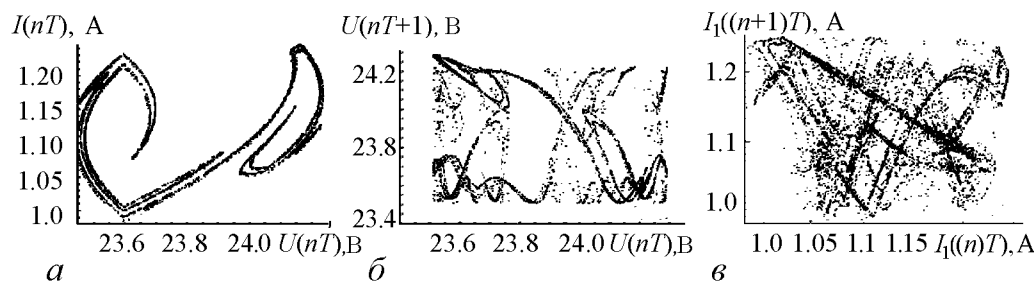


Рис. 7. Внешний вид странных аттракторов для связанных понижающих конвертеров на секущей поверхности (*a*) и сечениях Пуанкаре для выходного напряжения (*б*) и тока первого дросселя (*в*) при $K_v = K_{v1} = K_{v2} = 9.5$

Для определения фрактальных размерностей аттрактора необходимо разбить фазовое пространство, в котором находится аттрактор, на элементарные ячейки, то есть кубы различной размерности. Для обеспечения соответствия размерностей переменных фазового пространства предлагаем избавиться от размерностей вообще, вписав аттракторы в многомерный куб единичного объёма. Тогда все аттракторы, полученные в совершенно различных системах, будут поставлены в одинаковые условия. После нормировки единичный фазовый объём разбивается на $M = N^n$ кубов со стороны ε , где $N \sim 1/\varepsilon$, n – размерность фазового пространства. В рамках данной статьи размерность n бралась равной 2.

С учетом вышеперечисленных условий размерности Реньи будут определяться выражением [6,7]

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum_{i=0}^{M(\varepsilon)} p_i^q \right)}{\ln(\varepsilon)},$$

из которого видно, что существует целый спектр размерностей для любого действительного числа q , лежащего в пределах $-\infty < q < +\infty$. Выделим некоторые основные размерности спектра, имеющие приоритетную значимость на данный период развития синергетики:

D_0 – размерность Хаусдорфа, определяющая емкость аттрактора;

D_1 – информационная размерность, определяемая энтропией Колмогорова;

D_2 – корреляционная размерность, которая также может быть определена через корреляционный интеграл по методу Грассбергера–Прокачиа (однако в данной статье корреляционный интеграл не брался).

Формулы для основных размерностей после раскрытия неопределенностей в соответствующих пределах будут иметь следующий вид:

$$D_0 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum_{i=0}^{M(\varepsilon)} 1 \right)}{\ln(\varepsilon)}, \quad D_1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{- \sum_{i=0}^{M(\varepsilon)} p_i \ln(p_i)}{\ln(\varepsilon)}, \quad D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum_{i=0}^{M(\varepsilon)} p_i^2 \right)}{\ln(\varepsilon)}.$$

Кроме основных, определены две специальные размерности: минимальная $D_{+\infty}$, определяемая из предела $D_{+\infty} = \lim_{q \rightarrow +\infty} D_q$, и максимальная $D_{-\infty}$, определяемая из предела $D_{-\infty} = \lim_{q \rightarrow -\infty} D_q$ [10]. Как показал анализ, для нахождения величин $D_{+\infty}$ и $D_{-\infty}$ с точностью, примерно, до 0.001% достаточно ограничиться значением $|q| = 10000$ [14].

Полученные зависимости основных и специальных фрактальных размерностей от параметра бифуркации представлены на рис. 8. Из рис. 8, *a* и *b* видно, что при параметрах бифуркации $K_v = K_{v1} = K_{v2} = 9.5$ между значениями основных размерностей видны заметные различия, что позволяет предположить мультифрактальную природу соответствующих аттракторов, поскольку, если функция D_q как-то меняется с q , то рассматриваемое множество точек является мультифракталом [12]. Следовательно, некоторые аттракторы на сечении Пуанкаре для напряжения выхода

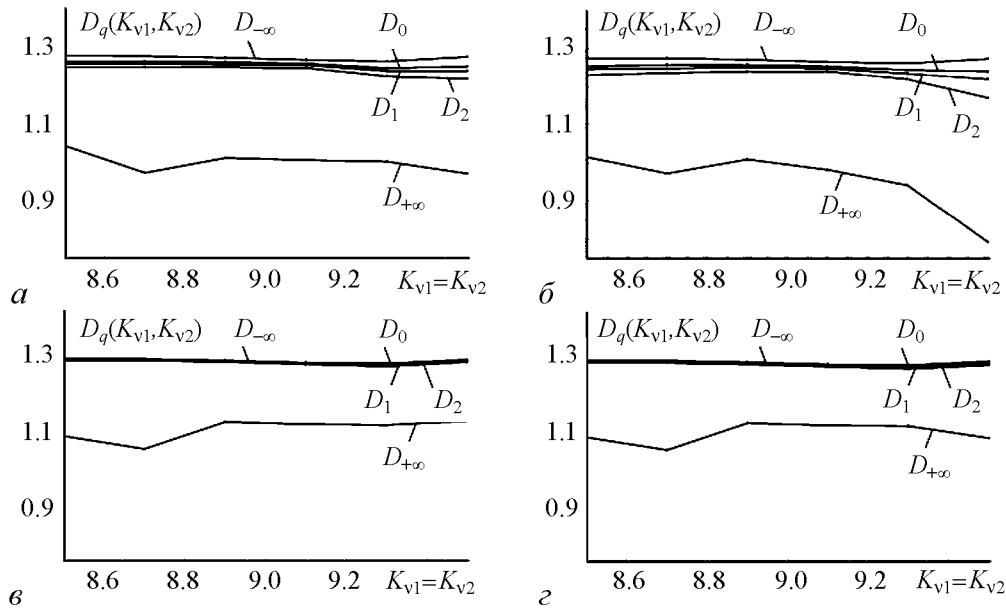


Рис. 8. Зависимости основных и специальных размерностей от параметра бифуркации для аттракторов находящихся: *a* – на поверхности сечения; *б* – на сечении Пуанкаре для напряжения выхода; *в* и *г* – на сечении Пуанкаре для токов первого и второго дросселей, соответственно

и на секущей поверхности имеют явную мультифрактальную природу. А вот аттракторы на сечении Пуанкаре для токов первого и второго дросселя (рис. 8, *в*, *г*), следуя данному определению, не имеют мультифрактальных свойств.

Заключение

Из анализа полученных в работе бифуркационных диаграмм можно сделать следующие качественные выводы:

- увеличение емкости выходного конденсатора приводит к увеличению устойчивости стабилизатора с точки зрения возникновения бифуркаций;
- увеличение индуктивности одного из дросселей приводит к уменьшению уровня пульсаций в нем;
- данные результаты можно использовать как при синтезе подобных систем с целью увеличения их устойчивости, так и при их фрактальном анализе.

Из анализа зависимостей основных и специальных размерностей от параметра бифуркации следует:

- только выходное напряжение полностью отражает нелинейную динамику системы, поскольку только сечение Пуанкаре для выходного напряжения отражает мультифрактальную природу секущей поверхности;
- только выходное напряжение можно использовать для фрактального анализа нелинейной динамики исследуемой системы связанных стабилизаторов;
- только аттрактор, восстановленный из выходного напряжения по методу за-

держек, будет обладать, согласно теореме Такенса [7], свойствами аттрактора всей системы;

• этот теоретически полезный вывод можно использовать как при фрактальном анализе подобных систем, так и при практическом выяснении причин возникновения их хаотического поведения.

Библиографический список

1. *Iu H.H.C. and Tse C.K.* Bifurcation behaviour of parallel-connected buck converters // IEEE Transactions on Circuits and Systems I. February 2001. Vol. 48, № 2. P. 233.
2. *Iu H.H.C. and Tse C.K.* Effects of interleaving on bifurcation behaviour in parallel-connected buck converters // Journal of Circuits, Systems and Computers. June 2004. Vol. 13, № 3. P. 495.
3. *Iu H.H.C. and Tse C.K.* Instability and bifurcation in parallel-connected buck converters under a master-slave current sharing scheme // IEEE Power Electronics Specialists Conference, Galway Ireland. June 2000. P. 708.
4. *Антипов О.И., Неганов В.А.* Исследование динамического хаоса в импульсном стабилизаторе напряжения инвертирующего типа с учетом влияния активных потерь с помощью мер фрактального исчисления // Нелинейный мир. Москва, 2008. Т. 6, № 7. С. 364.
5. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.
6. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного ряда. Ижевск: НИЦ«Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 528 с.
7. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2001. 296 с.
8. *Федер Е.* Фракталы / Пер. с англ. М.: Мир, 1991. 254 с.
9. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
10. *Мун Ф.* Хаотические колебания: Вводный курс для научных сотрудников и аспирантов / Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 312 с.
11. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение / Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 312 с.
12. *Божоккин С.В., Паришин Д.А.* Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 128 с.
13. *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / Пер.с англ., науч. ред. В.А. Журавлев. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 320 с.
14. *Антипов О.И., Неганов В.А.* Исследование динамического хаоса в импульсном стабилизаторе напряжения инвертирующего типа с учетом влияния активных потерь с помощью мер фрактального исчисления // Нелинейный мир. Москва, 2008. Т. 6, № 7. С. 364.

*Поволжский государственный
университет телекоммуникаций
и информатики, Самара*

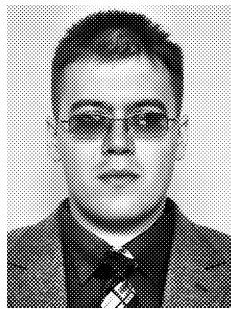
*Поступила в редакцию 15.06.2009
После доработки 4.09.2009*

ANALYSIS OF STOCHASTIC WORK OF THE COMPOSITE VOLTAGE STABILIZER CONSISTING OF TWO BUCK CONVERTERS CONNECTED AS MASTER-SLAVE BY FRACTAL MEASURES OF DETERMINISTIC CHAOS

O.I. Antipov

Stochastic operation of the parallel-connected buck convertors is considered. For qualitative analysis of the system the bifurcation diagrams are plotted. Quantitative analysis of chaotic regimes was realized by computing of main and special fractal dimensions.

Keywords: Chaos, strange attractors, fractional dimensionality.



Антипов Олег Игоревич – родился в Куйбышеве (1978), окончил Самарский государственный технический университет (2000). В этом же году поступил в аспирантуру Поволжской государственной академии телекоммуникации и информатики на кафедру основ конструирования и технологии радиотехнических систем и параллельно начал преподавательскую деятельность ассистентом этой же кафедры. Закончил аспирантуру (2003) и перевелся на должность старшего преподавателя кафедры. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.12.04 на тему «Исследование динамических характеристик и детерминированного хаоса импульсных стабилизаторов напряжения» (2005). На данный момент является старшим научным сотрудником кафедры. Автор монографии «Детерминированный хаос и фракталы в дискретно-нелинейных системах» (в соавторстве с Негановым В.А. и Потаповым А.А.), имеет более 45 научных работ.

443010 Самара, ул. Л. Толстого, 23

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
E-mail: oleg1307@mail.ru



ДВЕ ТЫСЯЧИ ДЕВЯТЫЙ ГОД В ДАТАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ*

Д.И. Трубецков

1929 «Человек, открывший взрыв Вселенной: Жизнь и труд Эдвина Хаббла» – так называется замечательная книга А.С. Шарова и И.Д. Новикова (М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, 208 с.), посвященная описанию жизни и деятельности великого ученого XX века Эдвина Пауэла Хаббла (1889–1953), которого считают величайшим астрономом со времени Коперника. В 2009 году – 120 лет со дня его рождения; 80 лет назад, 17 января 1929 года Э.П. Хаббл представил в Труды Национальной академии наук США статью «Связь между расстоянием и лучевой скоростью внегалактических туманностей», в которой излагалось открытие красного смещения линий в спектрах далеких галактик, что соответствовало расширению Вселенной.

К этому времени он уже открыл галактики и показал, что они характеризуют крупномасштабную структуру Вселенной.

Для нас особенно интересным будет связь расширения Вселенной Хаббла с частным решением одного из эталонных уравнений нелинейной динамики – уравнения Бюргерса [1].

Но немного о герое повествования.

Эдвин Пауэл Хаббл был третьим ребенком в большой семье Хабблов. В ней всего было одиннадцать детей. Отец Эдвина, Джон Хаббл получил юридическое образование и начинал карьеру с работы адвоката. Однако, в связи с ухудшением зрения, стал работать в агентстве по страхованию имущества от огня. Семья часто переезжала с места на место, но никогда не нуждалась. Непререкаемым авторитетом в семье был отец, который одинаково справедливо относился ко всем детям. Мать умела поддерживать добрую обстановку в семье, разрешая всякие, и простые и сложные, ситуации в спокойном духе. В 1906 году Эдвин окончил среднюю школу и поступил в Чикагский университет, где особенно интересовался астрономией и математикой, занимался спортом – баскетболом, футболом, боксом. В сентябре 1910 года Эдвин получил двухлетнюю стипендию, продленную затем еще на год, для обучения в Англии. Но... ему пришлось, по-видимому, по решению тех, кто руководил стипендиатами, заняться юриспруденцией. Хаббла определили в Оксфорд, где он изучал международное право. Летом 1913 года он возвратился в Луисвилль, где тогда жила

*Продолжение. Начало см. в ПНД № 5, 2009.

его семья. Год он занимался юридической практикой, после чего вернулся в Чикаго, в университет, чтобы в Йеркской лаборатории подготовить диссертацию на степень доктора философии. Его диссертация называлась «Фотографические исследования слабых туманностей», под которыми в то время понимали все: и газовые образования в нашей звездной системе, диффузные и планетарные, и удаленные галактики. Грянула Первая мировая война, и Хаббл ушел на фронт. Он провел во Франции и Англии почти год. С сентября 1919 года Хаббл был зачислен в Маунтвилсоновскую лабораторию в Калифорнии, где и прошла большая часть его жизни, где он сделал много важных открытий в астрономии. И главное из них – закон Хаббла. Что было известно к моменту его открытия?

Была построена теория космологического расширения. Первым здесь был Александр Александрович Фридман (1886–1925), построивший теорию расширяющейся Вселенной на основе модифицированной общей теории относительности.

В теории Фридмана Вселенная изотропна и однородна по распределению вещества в ней. Прямым следствием этого, вытекающим из фридмановской теории, является то, что расширение должно происходить по линейному закону

$$\mathbf{v} = H\mathbf{R}, \quad (1)$$

где \mathbf{v} – вектор скорости удаления объекта, находящегося на расстоянии $|R|$ от точки наблюдения, H – постоянная, которая не зависит ни от R , ни от направления на объект от точки наблюдения. Закон этот был открыт Хабблом в его наблюдениях 1927–1928 годов. Он носит имя Хаббла, а постоянная H называется постоянной Хаббла.

Справедливости ради заметим, что еще в 1917 году американский астроном Весто Слайфер фактически открыл космологическое расширение, говоря в своей статье о разбегании «космических туманностей», и не очень понимая, что он именно открыл. Правда, Фридман в одном из своих семинаров, по воспоминаниям его участников, указал на результат Слайфера как на наблюдательное свидетельство в пользу модели расширяющейся Вселенной.

На рисунке приведена оригинальная диаграмма Хаббла 1929 года, заимствованная нами из книги [2, стр. 214].

Закон Хаббла и измерения скоростей основаны на измерениях красного смещения в спектрах галактик, а переход от спектров к скоростям основан на использовании в объяснении эффекта Доплера (длина волны растет, то есть свет «краснеет», когда со временем возрастает расстояние между источником и приемником).

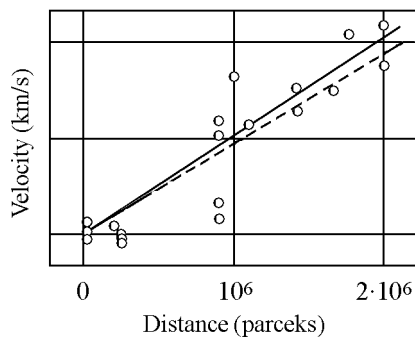


Рис. Оригинальная Хаббловская диаграмма 1929 года. Зависимость скорости удаления галактики (в км/сек) от расстояния до нее (в парсеках). Это графический образ самого грандиозного по масштабу явления природы – космологического расширения. Расстояния у Хаббла были занижены тогда почти в... 10 раз. На оригинальной диаграмме по вертикальной оси ошибочно указано (km) – должно быть (km/s). [2]

«Однажды, через много лет после своего космологического открытия, Хаббл неожиданно заявил на собрании Американского астрономического общества, что никакого космологического расширения в природе нет, а наблюдаемое красное смещение в спектрах галактик – всего лишь результат старения света на пути к нам. По словам одного из участников собрания, это выглядело так, как если бы сэр Исаак Ньютон явился бы и сказал: "Кстати о том яблоке, джентльмены. В действительности ведь оно, знаете ли, не падало"» [2, стр. 213].

Интересно, что во время Второй Мировой войны Хаббл занимался расчетом таблиц прицельного бомбометания, чем А.А. Фридман занимался в Первую Мировую войну.

В конце первой части книги А.С. Шарова и И.Д. Новикова, название которой приведено в начале нашего очерка, есть следующие слова (стр. 144).

«...Вероятно, полнее и точнее всех сказал о Хаббле Алан Сендидж, назвав его величайшим астрономом со времени Коперника... "Никто не знает, где похоронен Хаббл. Есть некая тайна в том, что произошло. Не было панихиды, не было церемонии похорон... Милтон Хьюмасон, вероятно, единственный человек, который когда-либо знал, что происходило после смерти Хаббла. Его жена не хотела какой-либо огласки по поводу случившегося" (Сендидж). Ни на Маунт Вилсон, ни на Маунт Паломар, нигде на Земле нет памятников Хабблу.

Много лет после кончины астрономы скромно отметили память Хаббла на небе. Его именем назвали один из кратеров на Луне возле Краевого моря. Между орбитами Марса и Юпитера движется астероид № 2069 "Хаббл"...

Именем Хаббла названо рукотворное светило – космический телескоп».

Вернемся к модели расширяющейся Вселенной, в которой господствует закон Хаббла (1). Кажется, что сообразно грандиозности задачи о расширяющейся Вселенной должна быть и очень сложная математика (у Фридмана – модифицированная общая теория относительности). На самом деле, есть и простые модели.

Пусть масса M всей материи заполняет с одинаковой плотностью шар радиуса R , и пусть вещество шара – газ каких-то частиц, но давление его пренебрежимо мало. Тогда единственной силой, действующей на частицы газа, будет их взаимное притяжение. Очевидно, что из-за притяжения частиц шар будет сжиматься. Допустим, однако, что он расширяется, то есть, например, всем частицам шара в какой-то начальный момент приданы скорости, направленные от центра шара наружу¹. Что произойдет с шаром дальше?

Рассмотрим некоторую частицу массы m на поверхности шара. Ее скорость, согласно формуле (1), будет равна

$$v_R = HR. \quad (2)$$

Из-за приданной ей начальной скорости частица будет удаляться от центра шара, а ее кинетическая энергия выразится формулой

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} = \frac{mv_R^2}{2}. \quad (3)$$

Против этого движения направлена сила притяжения, создаваемая всеми остальными частицами, которая равна $F = -\gamma(Mm)/(R^2)$, где γ – гравитационная постоянная. Она стремится остановить движение частиц, обратив расширение в сжатие.

¹ Не будем задумываться о том, откуда взялись эти скорости.

Потенциальная энергия может быть выражена как FR , то есть

$$\mathcal{E}_{\text{пот}} = -\gamma \frac{Mm}{R}. \quad (4)$$

Из закона сохранения энергии

$$m \left(\frac{v_R^2}{2} - \gamma \frac{M}{R} \right) = \text{const} \quad (5)$$

следует, что

$$v_R^2 = 2\gamma \frac{M}{R} + K, \quad K = \frac{\text{const}}{m}. \quad (6)$$

Таким образом, судьба расширения определяется противоборством тяготения и начального разгона частиц.

Если в соотношении (6) $K > 0$, то расширение будет продолжаться вечно. Если же тяготение велико и $K < 0$, то расширение остановится и сменится сжатием.

Равенство

$$v_R^2 - 2\gamma \frac{M}{R} = 0 \quad (7)$$

определяет граничную ситуацию.

Подставляя соотношение (2) в уравнение (7) и учитывая, что $M = (4/3)\pi R^3 \rho$, где ρ – плотность вещества, получаем

$$R^2 \left(H^2 - \frac{8\pi}{3} \gamma \rho \right) = 0.$$

Отсюда критическая плотность вещества во Вселенной

$$\rho^* = \frac{3H^2}{8\pi\gamma}, \quad (8)$$

что совпадает с оценкой, которую получил А.А. Фридман на основе теории относительности.

Оценки средней плотности вещества во Вселенной близки к критическому значению (8), поэтому приблизительно имеет место соотношение (7), то есть

$$v_R = \frac{dR}{dt} = 3\gamma \frac{M}{R}. \quad (9)$$

Разделяя в (9) переменные и интегрируя от 0 до R и от 0 до t , находим

$$\frac{2}{3} R^{3/2} = \sqrt{2\gamma M} t \quad (10)$$

или

$$t = \frac{2}{3} R^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2\gamma M}} = \frac{2}{3} \frac{R}{\sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}}, \quad (11)$$

но из формулы (9) $2\gamma(M/R) = v_R = HR$, и

$$t = \frac{2}{3H} \approx 10^{10} \text{ лет}, \quad (12)$$

если $H = 55-75 \text{ км} \cdot (\text{с} \cdot \text{Мпк})^{-1}$; мегапарсек (Мпк)= 10^6 парсек; парсек – расстояние, с которого диаметр земной орбиты виден под углом в одну секунду.

Как указано в книге [2, с. 206], по современным космологическим данным (2003) возраст мира заключен в пределах от 13 до 15 миллиардов лет, что по порядку величины хорошо совпадает с нашей оценкой.

В книге [2] эта оценка получена на основе любимого нами анализа размерностей.

В случае плоского трехмерного пространства из величин γ , ρ и t можно составить только одну безразмерную комбинацию

$$\gamma \rho t^2 = \text{const}, \quad (13)$$

поскольку, скажем, в системе LMT $[\gamma] = L^3 M^{-1} T^{-2}$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[t] = T$. Тогда, так как $\rho \sim 1/R^3$, из (13) имеем

$$\gamma \frac{1}{R^3} t^2 \sim \text{const} \quad \text{и} \quad R \sim t^{2/3}$$

(сравни с формулой (11)). Если гравитации вообще нет, то при постоянных скоростях расстояния возрастают пропорционально времени, то есть $R \sim t$. Следовательно, расширение происходит медленнее, чем по инерции, когда тяготение существенно, то есть расширение замедляется со временем.

Постоянная Хаббла по теории Фридмана может меняться при космологическом расширении; она не зависит от направлений и расстояний в пространстве, и в этом смысле ее называют постоянной. Из формулы (12) видно, что $H \sim 1/t$; следовательно, в начальной космологической сингулярности она обращается в бесконечность. Поскольку из формулы (13) следует, что $\gamma \rho \sim H^2$, в бесконечность в исходной «точке» обращается и плотность ρ .

Остановимся теперь на том, как расширение Хаббла связано с частным решением уравнения Бюргера

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (14)$$

где $v = v(x, t)$ будем далее трактовать как поле скоростей, $\mu = \text{const}$. В изложении следуем книге [1].

Начнем с выяснения вопроса, будет ли решением уравнения (14) линейная функция от x

$$v(x, t) = \beta(t)x, \quad \beta(t=0) = \alpha.$$

Подставив ее в уравнение (14), находим, что она является решением уравнения Бюргера, если коэффициент $\beta(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\beta}{dt} + \beta^2 = 0, \quad \beta(t=0) = \alpha.$$

Решив это уравнение, находим $\beta(t) = \alpha/(1 + \alpha t)$, и частное решение уравнения Бюргера (14) имеет вид:

$$v(x, t) = \frac{\alpha}{1 + \alpha t} x. \quad (15)$$

Заметим, что формула (15) вытекает из анализа движения равномерно разлетающихся частиц, скорости которых в начальный момент $v_0(y) = \alpha y$, где y – начальная лагранжева координата частицы. Движение таких частиц задается соотношениями

$$v = \alpha y, \quad x = y + \alpha y t.$$

Исключая из них y , приходим к формуле (15). Тогда можно говорить, что решение (15) есть расширение Хаббла для модели одномерной расширяющейся Вселенной при $\alpha > 0$. Особенность этого решения состоит в том, что со временем поле $v(x, t)$ теряет информацию о коэффициенте α , то есть о начальном профиле, поскольку при $t \rightarrow \infty$

$$v(x, t) \sim \frac{x}{t}. \quad (16)$$

Заметим, что при $\alpha < 0$ решение (15) соответствует сжатию: за конечное время поле всюду обращается в бесконечность, то есть наступает градиентная катастрофа. В реальности во Вселенной есть движения вещества, отклоняющиеся от расширения Хаббла. Для того чтобы понять, как влияет расширение Хаббла на поведение подобных возмущений, решим уравнение Бюргера с начальным условием

$$v(x, t = 0) = \alpha x + \hat{v}_0(x),$$

где первое слагаемое учитывает расширение Хаббла, а второе – возмущения поля скорости. Это условие получается при $t = 0$ из предполагаемого вида решения

$$v(x, t) = \frac{\alpha}{1 + \alpha t} x + \hat{v}(x, t), \quad (17)$$

которое есть сумма однородного расширения Хаббла и поля $\hat{v}(x, t)$, называемого в астрофизике пекулярной скоростью. Последняя отражает развитие возмущений относительно расширяющегося фона. Перейдем к расширяющейся с фоном системе координат, в которой новая координата связана со старой равенством

$$z = \frac{x}{1 + \alpha t}.$$

В новой системе координат искомое поле примет вид:

$$v(x, t) = \alpha z + u(z, t), \quad (18)$$

где

$$u(z, t) = \hat{v}[z(1 + \alpha t), t].$$

Подставив соотношение (18) в уравнение (14), получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{1 + \alpha t} u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\alpha u}{1 + \alpha t} + \frac{\mu}{(1 + \alpha t)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (19)$$

Из сравнения последнего уравнения с уравнением (14) видно, что расширяющийся фон уменьшает действие нелинейности и ослабляет диссипацию, а также при $\alpha > 0$ ослабляет и само поле. Последнее ослабление объясняется тем, что «частицы» с большой скоростью опережают расширение Хаббла, поэтому разница в скорости между пекулярным возмущением и фоном Хаббла уменьшается.

Явно учесть ослабление пекулярной скорости можно, подставив $u(z, t) = w(z, t)/(1 + \alpha t)$ в уравнение (19). Тогда получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{(1 + \alpha t)^2} w \frac{\partial w}{\partial z} = \mu \frac{1}{(1 + \alpha t)^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \quad (20)$$

Любопытно, что, если перейти в уравнении (20) к новому времени $\tau = t/(1 + \alpha t)$, то возвращаемся к исходному уравнению Бюргера

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad w(z, \tau = 0) = \hat{v}_0(z). \quad (21)$$

Заметим, что переход к новому времени τ учитывает упомянутое выше ослабление нелинейности и вязкости на расширяющемся фоне.

Объединив все предыдущие преобразования, окончательно для пекулярной скорости получим

$$\hat{v}(x, t) = \frac{1}{1 + \alpha t} w \left(\frac{x}{1 + \alpha t}, \frac{t}{1 + \alpha t} \right). \quad (22)$$

Из формулы (22) видно, что взаимодействие возмущения $\hat{v}(x, t)$ с расширяющимся при $\alpha > 0$ фоном приводит к уменьшению амплитуды поля и росту пространственного масштаба. Именно за счет этого расширение Хаббла замедляет развитие пекулярного поля, равного в отсутствие расширения $w(x, t)$. Поэтому за бесконечное время $t \in (0, \infty)$ реализуется лишь часть эволюции поля $w(x, t)$, соответствующая интервалу $(0, t^*)$, где $t^* = 1/\alpha$.

Когда $\alpha < 0$, происходит лавинный рост амплитуды пекулярного поля и сжатие масштабов начального возмущения – имеет место глобальная катастрофа. За конечное время $t \in (0, t^*)$, где $t^* = 1/\alpha$, возмущение $w(x, t)$ проходит все стадии возмущения на бесконечном интервале времени.

Такова неожиданная связь явления космического масштаба с частным решением одного из эталонных уравнений нелинейной динамики.

1929 И. Ленгмюр и Л. Тонкс ввели понятия плазмы и плазменной частоты (см. очерк «Ирвинг Ленгмюр – 125 лет со дня рождения» в книге [3, стр. 58–61]).

1934 Павел Алексеевич Черенков, исследуя люминесценцию урановых солей под действием гамма-лучей, открыл новое явление, получившее название эффекта Вавилова–Черенкова [4]. Уже результаты первых опытов привели С.И. Вавилова к выводу, что обнаруженное явление не есть люминесценция. Он же высказал предположение, что источником излучения служат быстрые электроны, создаваемые гамма-лучами. Сегодня под эффектом Вавилова–Черенкова понимают излучение, возникающее при движении в веществе заряженных частиц, когда их скорость превышает фазовую скорость волн в этой среде. Отличительным свойством излучения является его направленность. Излучение возникает только в направлениях, составляющих вполне определенный острый угол θ с траекторией частицы, то есть вдоль образующих конуса, ось которого совпадает с направлением скорости частицы v . При этом имеет место соотношение

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n},$$

фото

φωτο

где $\beta = v/c$, c – скорость света в вакууме, n – показатель преломления среды; $v > u = c/n$ или $\beta n > 1$. Заметим, что такой же конус получается при равномерном движении тела в газе со сверхзвуковой скоростью. Он называется в этом случае конусом Маха. Если лодка равномерно движется по поверхности воды со скоростью, превышающей скорость волн на воде, то образуется аналогичная ударная волна, расходящаяся от носа лодки.

В том же 1934 году американский физик П.У. Бриджмен разработал методы и приборы, позволившие увеличить максимальную величину давления от 1200 МПа до 10000 МПа. Подвергая действию высокого давления различные вещества, он впервые открыл изменение их кристаллической структуры.

В 1946 году П.У. Бриджмен удостоен Нобелевской премии «За исследования и открытия в физике высоких давлений».

Читатель наверняка заметил, что любимый аппарат автора при изложении теории во всех статьях о датах нелинейной динамики – анализ размерностей. При этом автор неоднократно пользовался как учебником книгой П.У. Бриджмена «Анализ размерностей» [5], которая впервые была издана на русском языке в том же 1934 году. В предисловии к русскому изданию С.И. Вавилов писал: «Книга Бриджмена, насколько нам известно, является первой удачной попыткой в этом направлении. Достоинства книги – в ее простоте, конкретности и увлекательности. Помимо оригинального, критического изложения теоретических основ метода, читателю предлагается большое число очень искусно подобранных несложных примеров, разобранных в подробностях; в конце книги, кроме того, приложено 32 задачи на анализ размерностей... П. Бриджмен настойчиво полемизирует со старыми и новыми физиками, пытавшимися усмотреть в формулах размерности откровения о "предельной сущности" физических величин. Анализ размерностей может дать очень много, кроме, однако, того, что в нем заведомо не может содержаться».

Заметим, что в [5] напечатана также Нобелевская лекция П.У. Бриджмена «Общий обзор некоторых результатов в области физики высоких давлений».

1939 Получен патент СССР на радар.

Опубликована статья [6], в которой описывались генераторы и усилители сверхвысоких частот, названные клистронами. История их создания весьма интересна и описана в статье [7]², а также в разделе «100\$ идея братьев Вариан и Хансена» книги [8] и в §5 главы 3 книги [9].

Заметим, что во многих книгах о нелинейных волнах рассматривается простая модель – возмущенный поток невзаимодействующих частиц (см., например, §1 главы 2 книги [10]). В одномерном приближении скорость частиц удовлетворяет уравнению

$$\frac{dv(x,t)}{dt} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0. \quad (23)$$

В электронике уравнение (23) описывает в рамках так называемой кинематической теории поведение электронного потока в трубе дрейфа (в ней отсутствуют какие-либо поля) приборов клистронного типа (простейший двухрезонаторный клистрон

²Название статьи определяется тем, что Станфордский университет выделил на исследования братьев Вариан и Хансена 100 долларов.

обсуждается в [8] и [9]). За счет предварительного возмущения на входе в трубу дрейфа электроны имеют разные скорости, что приводит в трубе дрейфа к образованию электронных уплотнений – группированию электронного потока. Внешне уравнение (23) совпадает с уравнением нелинейной волны, хотя, конечно, поток невзаимодействующих частиц не является нелинейной средой. Решения уравнения (23) известны, и их называют простыми волнами или волнами Римана. В электронике идеальному группированию электронов (в некоторой точке плотность объемного заряда пучка обращается в бесконечность) в волновой модели соответствует такое укручение, скажем, первоначально синусоидальной волны, при котором на ее переднем фронте производная $\partial u/\partial x$ обращается в бесконечность. Далее происходит опрокидывание волны, то есть образуются встречные пучки (детали см., например, в [10]).

Прошли годы... И появилась еще одна почти 100\$ идея, экспериментальная реализация которой принадлежит профессорам Ю.Д. Жаркову, Б.С. Дмитриеву и инженеру В.Н. Скороходову (все из Саратовского государственного университета). Думаю, что в масштабах наших дней финансовая поддержка этой группы была порядка тех же 100\$ 1937 года.

Эти авторы исследовали автогенераторы с запаздывающей обратной связью на основе многорезонаторных клистронов, обладающих высоким уровнем мощности и КПД [11–13]³. Особое внимание уделялось режимам динамического хаоса в таких автогенераторах. Подобные источники представляют интерес для ряда практических приложений, таких как ускорение заряженных частиц, сверхвысокочастотный нагрев плазмы, создание технологических установок и современных систем передачи и обработки информации с использованием динамического хаоса.

Экспериментально исследованы также различные виды синхронизации для двух связанных клистронных автогенераторов. В частности, показано, что в односторонне связанных клистронных автогенераторах (ведомом и ведущем) в результате реализации механизма подавления собственной хаотической динамики в ведомом клистронном автогенераторе имеет место обобщенная синхронизация, которая заключается в установлении функциональной зависимости между состояниями связанных клистронных автогенераторов.

Таким образом, семидесятилетний клистрон обрел новую жизнь.

1944 Американский математик Г.Х. Эйкен сконструировал в Гарвардском университете автоматическую вычислительную машину «MARK–1» (проект 1937 года).

1949 Созданы первые машины-переводчики (для перевода с русского на английский).

В Кембриджском университете введена в строй первая программируемая ЭВМ, сконструированная английским математиком М.В. Уилксом.

Не состоялось Всесоюзное совещание физиков, намеченное также на 1949 год, аналогичное печально известной сессии ВАСХНИЛ, что спасло советскую физику от уничтожения. Этому периоду в жизни физиков посвящена книга А.С. Сонина «Физический идеализм: История одной идеологической кампании» (М.: Физматлит, 1994, 224 с.). Предисловие к книге написал членкор РАН Сергей Михайлович Рытов. Вот несколько моментов из этого предисловия.

³Заметим, что первой теоретической работой в этом направлении была статья [14].

«Книга А.С. Сонины возвращает читателя к тем периодам нашей истории, когда догматизированный и вульгаризированный "диамат" вел активное наступление на науку. Официальная идеология вознамерилась подчинить себе самое антидогматическое из всего, что создал человеческий разум, – науку. Подчинить не удалось. Потому что наука – это всепобеждающий процесс познания реального мира, поднимающий человеческий разум ко все более высокому совершенству. Однако удалось нанести тяжкие удары по свободе научной мысли, надолго задержать в нашей стране развитие новых научных идей и создать отставание даже в тех направлениях, в которых мы были на переднем крае научного фронта. Последствия этих "побед" мы ощущаем до сих пор.

Книга актуальна и современна. Она подробно и конкретно рассказывает о фактах истории физики в нашей стране и выразительно рисует возникавшие в определенные периоды попытки превратить физику в "служанку идеологии", подобно тому, как в давние времена и в других странах религиозная догматика стремилась сделать науку "служанкой богословия"⁴... Книга не призвана доставить читателю удовольствие или развлечь его, но прочитать ее и знать об имеющихся документальных первоисточниках полезно и необходимо не только ученым разных специальностей, в том числе физикам и историкам, но и широкому кругу читателей. Это сделает ретроспективный взгляд на пройденный путь более правильным и точным. Пройдут годы, и то, что еще не так давно было общеизвестным, может потускнеть в результате вольных или невольных умолчаний. В том, чтобы так не случилось, я вижу ценность и интерес исторических поисков автора и его книги».

1954 Н.Г. Басов, А.М. Прохоров и независимо от них Ч.Х. Таунс разработали проекты квантовых генераторов (усилителей) электромагнитного излучения. В 1954–1955 годах Ч.Х. Таунс сконструировал простой молекулярный генератор (мазер) на аммиаке.

1959 50 лет назад была опубликована статья Бориса Павловича Белоусова «Периодически действующая реакция и ее механизм» в «Сборнике рефератов по радиационной медицине за 1958 г.» (М.: Медгиз, 1959, с. 145). В ней был приведен пример колебательной реакции – реакции, которую лауреат Нобелевской премии Илья Романович Пригожин определил как один из важнейших экспериментов ушедшего XX века. О реакции сейчас написано много. Гораздо меньше известно о судьбе ее автора. Есть только две крупные работы [16] и [17], материалами из которых мы далее воспользуемся. Начнем с большой цитаты из книги [17].

«...Вы смотрите на стакан с красно-лиловой жидкостью, а он вдруг становится ярко-синим. А потом снова красно-лиловым. И снова синим. И вы невольно начинаете дышать в такт колебаниям. А когда жидкость налита тонким слоем, в ней распространяются волны изменения окраски. Образуются сложные узоры, круги, спирали, вихри или все обретает совершенно хаотический вид».

Эта реакция известна уже более 50 лет. В 1951 году открыл ее Б.П. Белоусов, а Анатолию Марковичу Жаботинскому принадлежит ее детальное изучение и то, что она стала общедоступным достоянием [18].

⁴К сожалению, Русская православная церковь после краха СССР, получив свободу, занялась реставрацией своего былого могущества в царской России. В частности, делаются противозаконные попытки внедрения в образование идеи креационизма в противовес эволюционной теории (см. заявление Inter Academy Panel о преподавании эволюции: Изв. вузов. ПНД, 2009, т. 17, № 5, с. 112–113) и введения в государственную среднюю школу «Закона Божьего» под видом предмета «Основы православной культуры». В этом плане для читателей интересна книга академика В.Л. Гинзбурга [15].

«Реакция именуется особо почетным образом – двумя инициалами: BZ-reaction. Открытие Белоусова практически завершило почти 150-летний поиск колебательных режимов в химических процессах. Периодические процессы вообще, по-видимому, одна из основ для построения теорий в самых различных отраслях. Периодичность – регулярное повторение чего-либо во времени и (или) в пространстве – убеждает нас в познаваемости мира, в причинной обусловленности явлений. В сущности, периодичность – основа мировоззрения детерминизма. Понимание ее природы позволяет предсказывать события, скажем, затмения или появление комет. А такие предсказания – главное доказательство силы науки.

История BZ-reaction – яркая иллюстрация старой загадки: что было раньше – курица или яйцо? Что первично – феномен, требующий теоретического объяснения, или теория, предсказывающая появление известного феномена? На самом деле, это – ”порочный круг”... Инерция ”здорового смысла” – причина множества трагических судеб, печальной традиции ”посмертной славы”, когда замечательные открытия оказываются преждевременными, непризнанными при жизни авторов. Открытие Белоусова в этом ряду».

Но начнем издалека, с конца девятнадцатого века [16, 17]. В семье банковского служащего Павла Николаевича Белоусова было шесть детей – все сыновья. Детями занималась мать, Наталья Дмитриевна, сумевшая воспитать людей глубокой порядочности и глубокой внутренней дисциплины.

Старший сын Александр в 17 лет – уже революционер с планами взрывать, стрелять, скрываться во имя идей мировой справедливости. Конечно, он увлекает этими идеями и младших братьев, включая Бориса, которому 12 лет. Чтобы делать бомбы, нужна химическая лаборатория, которую братья и соорудили на чердаке московского дома на Малой Полянке.

«Братья были увлечены по-настоящему. Делать бомбы в 12 лет – это же наслаждение! Да еще испытывать их! И чтобы не знала мама! Детство Белоусова – это мечта (для Тома Сойера и Гекльберри Финна)» [17, с. 280].

После подавления революции 1905 года Александру, возглавлявшему группу боевиков, удалось скрыться; его арестовали через год, но он бежал из сибирской ссылки. Арестованный Сергей назвал себя именем какого-то члена партии большевиков, который был ценнее для подполья, чем он, и погиб в Сибири. Арестовали и четырнадцатилетнего Владимира и двенадцатилетнего Бориса, который в те годы еще спал в обнимку с плюшевым медведем (жандармы принесли его юному революционеру в тюрьму).

«Матери вскоре предложили: либо всех сошлем в Сибирь, либо отправляйтесь в эмиграцию. Естественно, она предпочла Швейцарию. Выехали в большевистскую колонию, ведь брат был большевиком. Борис оказался в окружении большевиков там, где ”в тяжелых условиях эмиграции” они готовили то, что потом устроили.

Веселое воспоминание Бориса Павловича, как он играл в шахматы с Лениным. Ленин, чтобы победить, всячески поносил своего противника, пытаясь его деморализовать. Это очень обижало Бориса: что же он так ругается... Таким было его единственное соприкосновение с вождями.

Больше он никогда не занимался революционно-политической деятельностью. И в партию никогда не вступал. Как ему удалось при этом достичь больших военных чинов в Советском Союзе? Но может быть поэтому он остался жив в 37-м – большевики тогда чаще убивали своих» [17, с. 281].

Старший брат стал экономистом. Он умер в Ленинграде во время блокады.

К началу войны он окончил писать книгу по экономике, но в блокаду погибла и его книга.

Борис в Цюрихе блестяще окончил гимназию и поступил в Политехникум, где нужно было платить за обучение, причем самый большой денежный взнос полагалось делать при получении диплома. Борис Павлович закончил обучение без диплома, что в дальнейшем стало причиной многих неприятностей.

Братья вернулись в Россию во время Первой Мировой войны. Борис пытался добровольцем уйти на фронт, но его не взяли «по малости веса», настолько худым он был. Он стал работать на металлургическом заводе Гужона (в советское время завод «Серп и молот») в химической лаборатории, которой идейно руководил великий химик Ипатьев⁵ – создатель теоретических основ промышленной химии. Лаборатория Ипатьева занималась военной химией, где Борис Павлович разрабатывал особые составы для противогазов, способы борьбы с отравляющими веществами. После гражданской войны он стал военным, преподавал химию в ряде военных учебных заведений, дослужился до высокого военного звания комбрига, равного генерал-майору-инженеру.

Но главным делом его жизни остаются научные исследования. «Он автор множества научных трудов. Но в силу их специфики ни одной строчки трудов Белоусова, даже их краткого изложения, никогда и нигде не было опубликовано. Все шло в виде закрытых инструкций, приказов с грифом “совершенно секретно.” ...Есть копия некогда секретного отзыва академика Александра Николаевича Теренина, где он называет Бориса Павловича выдающимся химиком. Отзыв был написан в связи с возможностью присуждения ему степени доктора химических наук без защиты диссертации... Но Б.П. ничего не хотел, никаких дипломов – “от этого не становятся умнее”» [16, с. 283–284].

В 1935 году Белоусов ушел из армии в долгосрочный отпуск, а потом, после 1938 года – в отставку. Может быть, это спасло его от массовых репрессий 1937–1938 годов, когда погибли многие сослуживцы и друзья Белоусова.

К военному периоду жизни Белоусова относится легенда, которая в повести В. Полищука «На общих основаниях» [16] изложена в главе «Фольклор». Вот ее суть. «Возник однажды в случайной компании спор: с какого момента в нашей стране появилась бриллиантовая зелень, в просторечии зеленка, которой смазывали все – от тяжелых солдатских ран до аллергических прыщиков на детских физиономиях? Казалось, зеленка существовала испокон веку. Но один из спорщиков, незнакомый мне человек старшего поколения, твердил: нет, она появилась не так давно. Только перед войной, мол, засияли ярко-зеленые пятна вокруг мальчишеских порезов, болячек. И предъявил сей незнакомец невесть откуда взявшийся у него документ.

”Руководство Наркомздрава выражает благодарность тов. Белоусову за успешную разработку и внедрение в массовое производство фармакопейно чистого препарата “Бриллиантовый зеленый”... Благодаря оригинальной разработке тов. Белоусова отпала необходимость импорта препарата, а обеспеченность бойцов Красной Армии и гражданского населения антисептическими средствами достигла необходимой нормы.

... марта 1938 года”.

По строгому счету, заключать это в кавычки нельзя: документ приведен не дословно, по памяти. Потому, кстати, и дата не вполне точная. Инициалы человека, одарившего нашу страну знаменитым антисептиком, были невняты – то ли Б.Н., то ли В.Н. Тускло печатали старые машинки. Фамилия, однако, запомнилась».

Что ж, если и легенда, то красивая.

⁵С.Э. Шноль пишет [17, с. 282]: «Сейчас говорят, в России было три великих химика: Ломоносов, Менделеев и Ипатьев. Ипатьев... в 30-м году, предвидя арест, сумел уехать за границу и поселился в США. В Америке ему посвящены труды, симпозиумы и т.п. В России же его почти не знают».

Борис Павлович стал работать заведующим лабораторией в секретном медицинском институте, где главным образом занимались токсикологией. Однако вскоре вспомнили, что у него нет университетского диплома, и перевели на должность старшего лаборанта с сохранением обязанностей заведующего лабораторией.

И еще одна замечательная цитата.

«Директор института тем не менее понимал, с кем имеет дело. Сейчас этого не постичь, но тогда главные и не очень главные бумаги имели подпись Сталина. На это же имя было написано письмо о том, что в секретном нашем учреждении работает заслуженный человек, зарплата у него низкая, как у старшего лаборанта, поскольку не имеет диплома о высшем образовании, а на самом деле он заведует лабораторией. На этом письме Сталин начертил: "Платить как заведующему лабораторией, доктору наук, пока занимает должность". Толстым синим карандашом. Недруги приумолкли: сам Сталин велел платить. Длилось это, правда, недолго – Сталин вскоре умер» [16, с. 284–285].

Мы уже упоминали, что главное дело жизни Белоусова – периодическая химическая реакция – была открыта в 1951 году. К этому времени был открыт цикл Кребса – периодические биохимические реакции, когда одно вещество превращается во второе, второе – в третье, третье – в четвертое и т.д., а потом опять образуется первое. Возможно, Белоусов подумал: «А почему бы не создать химическую аналогию биологических циклов?» Шноль считает, что Борис Павлович вспомнил «химию детства», когда в 1905 году он брал бертолетову соль для изготовления бомб, а аналогом соли является $KBrO_3$ (там хлор, а здесь бром). Тогда можно создать реакцию, в которой лимонная кислота – исходный компонент цикла Кребса – будет окисляться этим аналогом бертолетовой соли. Когда бром выделится в ходе реакции, то он будет виден, поскольку окрашен.

«Это была удача. Чтобы ускорить реакцию, Борис Павлович добавил в раствор каталитические количества соли церия. Церий – элемент переменной валентности, он катализирует окисление, переходя из четырех- в трехвалентное состояние. В растворе, в довольно концентрированной серной кислоте, сначала действительно появилась желтая окраска, но потом почему-то исчезла и вдруг возникла снова, а потом опять исчезла... Так была открыта колебательная химическая реакция в растворе (а желтый цвет, как позднее показал Жаботинский, не от брома, а от церия)» [16, с. 285–286].

Далее события развивались так. Коллега и друг Белоусова Софронов предложил ему добавить в уже идущую реакцию железо-фенантролин. Вот как этот эпизод и дальнейшее описывается в повести [20, с. 198–199].

«Долго ли, коротко ли – натывается Белоусов на сочетание концентраций, при котором раствор в колбе желтеет раз, другой и, подмигнув дружески, гаснет... И вот наконец Борис Павлович нападает на золотую жилу: колба включается всерьез и надолго. Мерцает, родимая, и по двадцать раз и по сорок, а интервалы между тактами – хоть по секундомеру проверяй. Только к концу, когда исходных веществ в растворе становится мало, мерцания реже. "Стареет реакция", – определяет для себя Белоусов и звонит Пигалеву (друг и сотрудник Белоусова. – *Д.И.Т.*). По телефону, однако, никаких сенсаций не преподносит, а говорит слова обыденные: "Старик, иди пить чай". Иван Александрович слегка удивляется: до привычного времени чаепития еще добрых полчаса, – однако идет. В белоусовской комнате он застаёт Софронова. Тот вместе с хозяином созерцает колбочку, в которой бурлит пена, возносящая лохмотья какого-то осадка, а раствор в колбе время от времени желтеет... А молчун Софронов срывается с места, выходит и

отсутствует минут пять. Возвращается с крошечным бумажным кулечком, содержащим несколько кристаллов. "Подсыпь-ка этого", – только и говорит. Борис Павлович подсыпает – и бледно-желтая окраска внезапно сменяется ярчайшей синью. Синь резко, будто щелкнул выключатель, переходит в красноту. Потом снова, будто щелкнуло, синь. И так много раз. "Железо-фенантролин", – односложно отвечает Софронов на невысказанный вопрос... Показывается и совсем иной фокус. Запустив на полный ход сине-красное чередование, Белоусов осторожно подливает поверх раствора чистую воду. Она понемногу разбавляет слои, лежащие ниже, время пульсации в каждом становится свое, и окраски начинают не просто чередоваться, а пробегать снизу вверх волнами, полосами. "Колба-зебра" – шепчет счастливчик новое, тут же придуманное слово...»

Однако статьи Белоусова, посланные в 1951 и 1955 годах, были отвергнуты на том основании, что описанная автором реакция принципиально невозможна. А журналы были очень солидные – «Журнал общей химии» и «Кинетика и анализ».

Но был ли Белоусов первым? Многим популярность VZ-reaction кажется несправедливой, а значимость Белоусова – преувеличенной [19]. При этом ссылаются на более ранние работы (в частности, на удивительно полную обзорную монографию [20]). Знал ли Белоусов о предшественниках? Не мог не знать, особенно книгу [20]. Пожалуй, в плане работ-предшественников представляет интерес лишь работа [21], на которую есть ссылка в [20]. Сюжет ее обнародования носит детективный налет.

Итак, Дрезден, 22 мая 1906 года, 9 часов утра. На заседании в главной аудитории химической лаборатории Политехнического института Роберт Лютер (Лейпциг) читает лекцию, в которой впервые демонстрируется существование движущихся волн в однородной жидкофазной химической системе. Основная цель лекции – дать на основе аналогии с волнами в химической системе возможную интерпретацию распространения нервного импульса.

Не менее важным было лишь упоминание Р. Лютером того, что скорость распространения химических волн выражается простой формулой $v = \alpha\sqrt{kD}$ где D – коэффициент диффузии, k – абсолютная скорость автокаталитической реакции, α – константа пропорциональности. Именно этот результат вызвал дискуссию, отрывок из которой мы приводим.

«Вальтер Нернст⁶ (Берлин): "...Мне бы хотелось напомнить Вам, что распространение нервного импульса происходит со скоростью порядка 30 м·с⁻¹ (выкрики из зала: 50!). Это от 100 до 130 км·ч⁻¹, что быстрее, чем самый быстрый поезд. Однако, наблюдая Ваш красивый эксперимент, мы убедились, что скорость распространения – величина совершенно другого порядка. С Вашего позволения, это одна сотысячная или одна миллионная от скорости, необходимой в нерве. Мне бы хотелось спросить Вас сейчас, и думаю, это ключевой момент, возможно ли получить такие большие скорости Вашим способом?"

Роберт Лютер (Лейпциг): "...Для автокаталитической реакции применима формула второго порядка, которую я уже выписывал. Скорость v равна $\alpha\sqrt{KCD}$, где α – численная безразмерная константа между 2 и 10. Константа D не может быть возрастающей по смыслу. Концентрация C не может быть возрастающей по смыслу. Однако, константа скорости K автокаталитической реакции может, в принципе, принимать любое большое

⁶Из комментариев переводчика к статье [21]: «Вальтер Нернст, открывший третий закон термодинамики, был в это время профессором химической физики в Берлине. В 1904 году он был назначен Geheimrat, то есть личным советником. Нернст был ассистентом Оствальда в Лейпциге с 1887 по 1890 год. Лютер стал ассистентом Оствальда в 1896 году и продолжал им быть в 1906 году, заведующим лабораторией в Лейпциге.

значение (в формуле, приведенной выше, $k = KC$. – Д.И.Т.)⁷. Поэтому возможность, что у нас будут чрезвычайно быстрые автокаталитические реакции и что нервы используют подобные реакции в своих целях, не может быть не принята в расчет.”

Вальтер Нернст (Берлин): ”Кто вывел эту формулу?”

Роберт Лютер (Лейпциг): ”Я”.

Вальтер Нернст (Берлин): ”Но вывод ее еще не был опубликован?”

Роберт Лютер (Лейпциг): ”Нет, но это лишь простое следствие из соответствующего дифференциального уравнения”.

Вальтер Нернст (Берлин): ”Откровенно говоря, я не могу понять, как достичь таких больших скоростей, но мы будем ждать с большим интересом полной публикации”.

Роберт Лютер (Лейпциг): ”Я хочу добавить, что экспериментально мы безусловно не способны достичь высоких скоростей. Так как мы всегда замечаем, что чем больше K , тем неустойчивей, ненадежней эксперимент, и смесь легче реагирует. Мы вынуждены ограничиться относительно медленными реакциями и малыми скоростями распространения”».

В статье [22], которая посвящена открытию и анализу химических волн Роберта Лютера, приведен следующий комментарий этой дискуссии. «Замечание Р. Лютера, что данная формула является ”простым следствием из соответствующего дифференциального уравнения”, могло быть колкостью в сторону Нернста, так как подробное решение едва ли тривиально. Возможно, Р. Лютер имел в виду метод размерностей. Если, как удобно предположить, скорость распространения v [LT^{-1}] химических волн зависит только от коэффициента диффузии D [L^2T^{-1}] и k [T^{-1}] – абсолютной скорости автокаталитической реакции, тогда $v = \alpha\sqrt{kD}$, где α – безразмерная константа (использована система единиц LT). Но метод размерностей едва ли гарантирует, что α – это число между 2 и 10, как отмечал Р. Лютер».

Авторы [22] строго выводят соотношение Р. Лютера для скорости и указывают также, что «попытки воспроизвести некоторые из экспериментов Лютера имели ограниченный успех». Заметим, что, хотя предположения Лютера о том, что нервные импульсы представляют собой распространяющиеся химические волны, не подтвердилось, подобие химических волн и нервных импульсов не случайно: оно прослеживается в подобии математического описания. Интересно, что Р. Лютер указывает и на аналогию распространения химических волн и волн горения. Кстати, вывод своей формулы Лютер так и не опубликовал.

Вернемся к вопросу о приоритете. Б.П. Белоусов мог знать о работе Р. Лютера, поскольку, как уже указывалось, была книга [20] – энциклопедия того времени по физико-химическим периодическим процессам, а в ней была ссылка на работу Р. Лютера [21, на немецком языке]. Наверняка знали книгу [20] и другие работы по периодическим реакциям и высокообразованные рецензенты работ Б.П. Белоусова.

Почему же статьи были отвергнуты? С.Э. Шноль видит причину в следующем.

«Дело, видимо, в ”инерции предыдущего знания”. Все, наблюдавшиеся до этого случаи колебаний в химических реакциях можно объяснить пространственными эффектами, например, перепадом температур на стенках колбы или диффузионными ограничениями скоростей реакции...

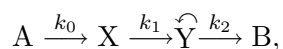
⁷Из комментариев переводчика к статье [25]: «Константа скорости второго порядка не превышает $10^{11} \text{ M}^{-1}\text{s}^{-1}$, что является скоростью соударения с ограниченной диффузией. Для обычной константы диффузии $D = 10^{-6} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ и $C = 1 \text{ M}$. Формула Лютера предполагает максимальные скорости $10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Не известны химические волны, распространяющиеся так быстро, обычные скорости составляют $10^{-4} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ($6 \text{ мм} \cdot \text{мин}^{-1}$)».

Но главным препятствием было... знание равновесной термодинамики. Не мог образованный человек представить себе в беспорядочном тепловом движении огромного числа молекул макроскопическую упорядоченность – все молекулы то в одном, то в другом состоянии! Будто признать существование вечного двигателя. И в самом деле не может этого быть. Не может быть вблизи состояния равновесия, а только его и рассматривала термодинамика тех лет. Однако никаких ограничений на сложные, в том числе колебательные, режимы нет для неравновесных химических систем, когда реакции еще не завершились и концентрации реагентов не достигли равновесного уровня. Но это обстоятельство ускользнуло от внимания химиков. Всем ясно, термодинамика – не просто раздел физики. Триумф равновесной термодинамики, созданной гигантами – Карно, Майером, Гельмгольцем, Больцманом, Планком, Гиббсом, Нернстом, определил мировоззрение нескольких поколений исследователей.

Потребовалось чрезвычайное интеллектуальное напряжение, чтобы вырваться из "железных оков полного знания" и исследовать поведение систем вдали от равновесия, чтобы создать термодинамику неравновесных процессов. В этом жизненный подвиг Онзагера и Пригожина» [17, с. 287–288].

Заметим, что к описываемому времени уже существовало общее доказательство возможности колебаний в однородной гомогенной системе. Гомогенность системы чрезвычайно важна. Напомним, что гомогенной называется система, внутри которой отсутствуют поверхности раздела, отделяющие друг от друга части системы, отличающиеся по составу и свойствам. Причем указанные части должны быть достаточно велики, чтобы были применимы понятия температуры, концентрации и т.п.

В 1910 году Альфред Лотка [23] предложил гипотетическую химическую реакцию, состоящую в следующем. Предположим, что в избыточном состоянии имеется некоторое вещество А, которое с определенной скоростью переходит в вещество Х. В «избыточном состоянии» – означает, что количество вещества А практически не изменяется. Вещество Х со скоростью k_1 превращается в вещество Y. Чем больше вещества Y, тем эффективнее превращается в него Х. Наконец, вещество Y со скоростью k_2 превращается в вещество В. Символическая запись реакции Лотки выглядит так:



k_0, k_1, k_2 – абсолютные скорости реакций; стрелочка над Y соответствует тому, что вещество тем эффективнее превращается в Y, чем больше вещества (мы уже упоминали об этом).

Обозначим концентрации взаимодействующих веществ через X, Y, A, B . Тогда символической записи реакции соответствует система уравнений

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = k_0 - k_1XY, \\ \frac{dY}{dt} = k_1XY - k_2Y, \\ \frac{dB}{dt} = k_2Y. \end{cases}$$

Для того чтобы скорость образования вещества В была постоянной ($dB/dt = 0$), необходимо, чтобы концентрации веществ X и Y не зависели от времени ($dX/dt =$

$= dY/dt = 0$). Тогда из первых двух уравнений, выписанных выше, находим, что

$$\begin{cases} k_0 - k_1XY = 0, \\ k_1XY - k_2Y = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, определяем так называемые равновесные значения концентраций

$$\bar{X} = \frac{k_2}{k_1}, \quad \bar{Y} = \frac{k_0}{k_2}.$$

Решение $\bar{Y} = 0$, следующее из последнего уравнения исходной системы, интереса не представляет.

Зададим малые отклонения $x(t)$ и $y(t)$ от равновесных значений, полагая

$$X(t) = \bar{X} + x(t), \quad Y(t) = \bar{Y} + y(t).$$

Предположим, что $x(t) \ll \bar{X}$, $y(t) \ll \bar{Y}$, и всеми величинами, содержащими произведения x и y , вторые и более высокие степени x и y , можно пренебречь. Подставляя выражения $X(t)$ и $Y(t)$ в исходную систему уравнений и пренебрегая слагаемыми с xy , получим линеаризованную систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_2y - \frac{k_1k_0}{k_2}x, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{k_1k_0}{k_2}x. \end{cases}$$

Продифференцируем по времени первое уравнение из последней системы и подставим в получившееся второе из этой системы. Окончательно получим уравнение маятника с затуханием

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $(k_1k_0)/k_2 = 2\gamma$, $k_1k_0 = \omega_0^2$.

В 1920 году А. Лотка, а позднее, независимо, в 1931 году и В. Вольтерра, предложили систему с двумя последовательными актокаталитическими реакциями, в которой колебания могли быть уже незатухающими [24].

«Сложилась характерная для жизни нового знания ситуация: есть старая теория Лотки–Вольтерры – колебания в гомогенных химических системах возможны, и есть общее мнение – они невозможны, так как противоречат основам науки. Вот почему экспериментальное, бесспорное доказательство существования колебательных режимов в гомогенных растворах, в системах перемешивания приобрело такое большое значение» [17, с. 289].

Как справедливо замечает С.Э. Шноль, позиции химиков и физиков при этом кардинально различаются. Именно в это время школой академика Л.И. Манделштама создается теория колебаний. Один из ярких результатов получен А.А. Андроновым. Он состоит в установлении связи между теорией автоколебаний и предельными циклами Пуанкаре. Замечательные результаты о периодических процессах в кинетике окислительных реакций (см., например, [25]) получены Д.А. Франк-Каменецким.

К этому же времени относятся работы И.Е. Сальникова, выполненные под руководством Д.А. Франк-Каменецкого, в частности, его кандидатская диссертация «К теории периодического протекания гомогенных химических реакций», которая была отвергнута в Институте химической физики и успешно защищена в Горьком, в институте А.А. Андропова.

Завершая этот краткий экскурс в историю, заключим его словами С.Э. Шноля. «В 1951 году генерал Белоусов послал статью об открытой им колебательной реакции в "Журнал общей химии". И получил обидную отрицательную рецензию: "Такого быть не может"» [21, с. 290].

В этом же 1951 году в истории периодической химической реакции Б.П. Белоусова появляется новый герой – Симон Эльевич Шноль, который как раз закончил университет и получил диплом с отличием. Его участие в белоусовской истории он описал сам [17, с. 290–303], поэтому мы не будем подробно писать об этом, осветив лишь самые важные моменты.

Симон Эльевич – действительно герой российской науки, поскольку именно благодаря ему Б.П. Белоусов опубликовал заметку 1959 года (см., например, Приложение к книге [26]) и именно благодаря ему (под его руководством) А.М. Жаботинским были проведены исследования, которые привели к тому, что BZ-reaction стала всемирно известной, именно благодаря ему в 1980 году Борису Павловичу присудили Ленинскую премию (посмертно).

«К 1963 году основной качественный этап изучения реакции Белоусова был завершен. Борис Павлович об этом знал, Толя ему звонил. Аспиранту Жаботинскому нужно было написать статью. И он написал весьма ценную первую статью [27]... Статья произвела такой неожиданный эффект, что восхищенное человечество назвало реакцию именами Белоусова и Жаботинского» [17, с. 299].

В 1967 году была предложена первая модель колебательной реакции белоусовского типа с тремя динамическими переменными [28] (см. также [18, с. 107–113]):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = k_1 x_1 (C - x_2) - k_0 x_1 x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = k_1 x_1 (C - x_2) - k_2 x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = k_2 x_2 - k_3 x_3, \end{cases}$$

где $x_2 = [\text{Ce(IV)}], [\text{Ce(III)} + [\text{Ce(IV)}]] = C$, x_1 – концентрация автокатализатора, $x_3 = [\text{Br}^-]$. Предполагалось, что после реакции $x_1 + x_3$ ионы Br^- полностью регенерируются. Были обнаружены автоколебания.

Наиболее полная сводка результатов о колебаниях и волнах в химических системах имеется в [26, 29]⁸.

В книге [17, с. 302] есть замечательный эпизод о демонстрации реакции Белоусова Президенту АН СССР Мстиславу Всеволодовичу Келдышу 16 декабря 1964 года.

«Жаботинский кратко изложил суть: Келдыш свирепел, если говорили долго. В стакане пошли колебания, мы думали, что Келдышу этого достаточно, но он зло посмотрел на стакан и сказал: "Вы от меня скрываете самое главное?" А самым главным были

⁸Современное изложение анализа простейших нелинейных кинетических моделей дано в монографии [30].

цветные волны, которые начинались у дна и шли вверх. Келдыш был специалистом по пространственным эффектам колебаний. Жаботинский пространственные волны, конечно, заметил, но еще в этом не разобрался и решил не рассказывать о них Келдышу. Не тут-то было! Президент ужасно рассердился, решив, что ему просто не хотят рассказывать... Реплика была чрезвычайной важности. А потом мы узнали, что это видел и Белоусов. Даже назвал колбу "зеброй". И полагал это наиважнейшим» (мы упоминали об этом). От «зебры» пошла новая часть науки – распространение волн в активных средах.

И вновь – слово С.Э. Шнолю.

«Итак, преувеличено ли значение открытой Белоусовым реакции? Нисколько. Справедлива ли его посмертная слава? Без сомнения. И она нисколько не умаляет заслуг множества исследователей, на протяжении почти трех столетий изучавших эти проблемы.

Осталось сказать, что, пока человечество узнавало про Бориса Павловича Белоусова, его выгнали из института... "поскольку он стар и часто болеет". Он в самом деле был стар, но его творческая активность оставалась очень высокой. Он не вынес жизни без лаборатории и умер 12 июня 1970 года» [17, с. 303].

1959 50 назад Ричард Фейнман прочитал в Калифорнийском Технологическом институте рождественскую лекцию под названием «Внизу полным-полно места: приглашение войти в новый мир физики – мир миниатюризации», в которой обозначил перспективы будущей микроминиатюризации электроники. Фейнман высказал идею о том, что для перехода за определенный предел миниатюрности следует отказаться от известных технологий, рассчитанных на макротехнику. И вот в настоящее время мы становимся свидетелями построения нанотехнологической цивилизации.

Не удержимся от изложения одного забавного факта, приведенного в книге [31].

«Любопытно, что впервые термин «нано» был введен в науку довольно давно, например, для описания объектов, размер которых в миллиарды раз превышает 1 нм – в терминологии динозавров. Так, длина нанотиранозавра (*nanotyrannus*) и нанозавра (*nanosaurus*)..., составляет, соответственно, 5 и 1.3 м. Не раз перед началом своих лекций я спрашивал студентов (и на конференциях – более "остепененных" слушателей), всегда ли "нано" означает 10^{-9} ? Правильного ответа я пока не получил».

1964 Академик Р. Сагдеев открыл бесстолкновительные ударные волны в плазме. В случае достаточно малых амплитуд волн ему удалось построить ламинарную теорию в предположении, что обычная диссипация из-за парных столкновений частиц отсутствует, а роль бесстолкновительной диссипации играет эффект отражения ионов от переднего фронта волны (теория бесстолкновительных ударных волн изложена, например, в книге [32, с. 130–133; §2.20]).

В том же году Н.Г. Басову и А.М. Прохорову, а также Ч.Х. Таунсу присуждена Нобелевская премия «За фундаментальные исследования в области квантовой электроники, которые привели к созданию генераторов нового типа – мазеров и лазеров».

1989 8 сентября 1989 года, 20 лет назад, скончался член-корреспондент Академии Наук СССР (теперь РАН) Лев Альбертович Вайнштейн. Основные его работы собраны в книге [33]. Болезнь и преждевременная смерть не позволили ему реализовать многие интересные идеи. Вот одно из его последних писем автору этих строк.

17.1.1989

Дорогой Дмитрий Иванович!

Вчера приступил к работе после отпуска и прочел (вместе с женой) Ваше письмо. Спасибо за пожелания. Со своей стороны желаю Вам успехов в 1989 году, в том числе по подготовке школы-90. Надеюсь Вас видеть у себя дома, будете в Москве, обязательно заходите. И письма лучше адресуйте на домашний адрес.

К сожалению, мое физическое состояние ухудшается с каждым месяцем. По состоянию здоровья я был вынужден отказаться от поездки на Чистопольскую школу по дифракции в августе, хотя я был председателем оргкомитета, много занимался чужими лекциями и должен был прочесть с С.М. Журавом свою. Жена собиралась ехать и меня опекать. Все отменилось – школа прошла без меня. Мне представляется несомненным, что через год в январе я поехать в Саратов не смогу.

Сейчас я работаю вместе с А.И. Клеевым. Это – молодой (30 л.) кандидат, мы с ним занимаемся сейчас кооперативным (коллективным спонтанным) изучением электронов-осцилляторов и кроме того он начал применять связь между спонтанным и индуцированным излучением для расчета более сложных моделей ЛСЭ (лазеров на свободных электронах. – *Д.И.Т.*).

Таким образом, можно было бы подготовить два небольших курса, которые он и прочтет на школе-90.

Первый – это дополнения и комментарии к моей статье, о которой Вы столь тепло отзываетесь. Здесь можно, кроме повторения основных положений, рассмотреть а) более подробно приборы типа О, включая пространственный заряд и режим малого усиления; б) новые примеры, относящиеся к ЛСЭ; в) классический вывод двух последних примеров, рассмотренных в разд. 4 статьи без доказательства и противоречащих основной формуле.

Второй посвящен кооперативному излучению. Летом я начал писать (в основном для себя) полуобзорную работу "Кооперативное излучение из малых объемов в квантовой и классической (вакуумной) электронике". Это совершенно новая вещь и даже резко полемическая. Она не закончена: Клеев получил численные результаты, но они не систематизированы. Новые результаты, относящиеся к вакуумной электронике, мы предполагаем подготовить для печати в "Доклады АН СССР", более подробное изложение поместить в конце второго курса. Это – сейчас первоочередная задача, которую во что бы ни стало надо решить.

На горизонте также задача о конкуренции между кооперативным и индуцированным излучением, но это – следующий этап.

Вы видите, что я много работал последние годы, работал, в частности, во время пребывания в клинике Онкологического центра, и сейчас надо это все успеть оформить и послать в печать, в том числе к Вам.

В письме много не напишешь. Приезжайте, у меня еще много интересного.

Сообщите, в какой мере это будет интересно для школы-90. Я надеюсь дожить до следующего января, но если нет – можете школу посвятить моей памяти.

Ваш Л. Вайнштейн»

Увы, Лев Альбертович не дожил до школы. Ниже приведена страница из книги «Лекции по электронике СВЧ и радиофизике» (8-я зимняя школа-семинар инженеров, книга 1, изд-во Саратовского университета, 206 с.). Школа была посвящена учителям.

Памяти учителей

Уже десять лет минуло с тех пор, как ушел из жизни Владимир Николаевич Шевчик. Два с небольшим года назад не стало Виктора Тимофеевича Овчарова. А в сентябре 1989 года после тяжелой мучительной болезни умер Лев Альбертович Вайнштейн.

У поэта Бориса Слуцкого есть пронзительные строки:

Умирают мои старики –
Мои боги, мои педагоги,
Пролагатели торной дороги,
Где шаги мои были легки.

Да, Боги, Педагоги, Учителя, но, увы, не старики...

Вы, прикрывшие грудью наш возраст
От ошибок, угроз и прикрас,
Неужели дешевая хворость
Одолела, осилила Вас?

Для пишущих эти строки Учителя были близки. И не раз прикрывали они нас от непредполагаемых нами бед и открывали путь в настоящую науку. Все они были причастны к рождению школ: без Владимира Николаевича школ могло и не быть, а без Виктора Тимофеевича и Льва Альбертовича они не были бы такими, какими были. Все основные курсы школы были блистательно прочитаны Львом Альбертовичем. Во всех жарких дискуссиях в центре событий были все трое. Учителя дружили. Они всегда с теплотой и любовью говорили друг о друге, хотя часто спорили по научным вопросам.

Угасают большие огни
И гореть за себя поручают.
Орден не дождался они –
Сразу памятники получают.

Пусть эта школа и будет памятником Учителям.

Оргкомитет

1994 Крупный оборонный подрядчик, компания «Е-Системс» покупает «АРКО Пауэр Технолоджиз Инк.» – правообладателя патентов Иствуда⁹ – и заключает контракт на постройку самого большого в мире ионосферного нагревного стенда «Арфа».

В том же году Конгресс США замораживает финансирование проекта «Арфа», концентрируя внимание разработчиков на создании установки для томографии земной коры. Данная область применения предназначена для решения задач по контролю за нераспространением ядерного оружия. Под решение этих задач Конгресс выделяет 10 млн. долларов.

В 1994–1996 годах продолжается первый этап испытаний установки «Арфа», несмотря на то, что финансирование заморожено. Предполагаемый срок запуска установки – 2001–2017 год. На ранней стадии разработок – полностью работоспособный прототип «Арфы». Что же такое «Арфа»?

⁹Уникальная особенность разработки Иствуда – фокусировка пучка излучения на ограниченном участке ионосферы, в отличие от других нагревных стендов, которые испускают расширяющийся пучок излучения.

«Арфа» – авроральная резонансная фазированная решетка – совместный проект Военно-воздушных сил и Военно-морского флота США, базирующихся на Аляске. Это исследовательская программа по изучению ионосферы с целью создания новых видов вооружений.

Воздействие на ионосферу (слой атмосферы в 50 км над земной поверхностью) осуществляется с помощью установленного на Земле передатчика, представляющего антенну с фазированной решеткой – обширное поле, уставленное синхронно работающими антеннами. Эффективная мощность излучения установки на первой стадии проекта составит около 1 миллиарда ватт. Установка будет применяться для зондирования геологических формаций на предмет обнаружения подземных комплексов или залежей полезных ископаемых, радиосвязи с подводными лодками, воздействия на каналы связи вероятного противника, создания искусственных участков плазмы (плазмодов) в ионосфере, управления погодой и передачи электроэнергии в разные регионы планеты. Ее можно использовать в качестве загоризонтного радара и даже как противоспутниковое оружие.

Детали об установке «Арфа» и специальной американской программе HAARP (High frequency Active Auroral Research Program), которую считают глобальной опасностью для всего мира, можно найти в книге [34]. В аннотации к книге сформулированы все угрозы человечеству со стороны HAARP.

«...При ее применении:

- полностью нарушается морская и воздушная навигация;
- прекращается радиосвязь и радиолокация;
- выходит из строя бортовая электронная аппаратура космических аппаратов, ракет, самолетов и наземных боевых систем;
- возникают масштабные аварии в электросетях, нефте- и газопроводах;
- перестает нормально функционировать психика людей и животных;
- происходят техногенные катастрофы; тайфуны, бури, смерчи, наводнения;
- возникают непреодолимые препятствия для летательных аппаратов – самолет или ракета попадает буквально в эпицентр смерча и разрушается.

Фантастика? Реальность! На все работы в рамках HAARP с 1997 года наложен самый строгий гриф секретности».

Библиографический список

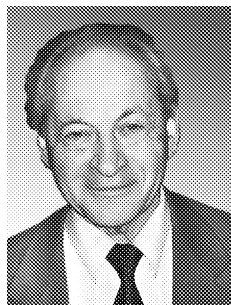
1. *Гурбатов С.Н., Саичев А.И.* Введение в теорию нелинейных волн гидродинамического типа. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета, 2003. С. 105.
2. *Черепашук А.М., Чернин А.Д.* Вселенная, жизнь, черные дыры. Серия «Наука для всех». Фрязино: «Век-2», 2003. 320 с.
3. *Трубецков Д.И.* Две тысячи шестой год в датах нелинейной динамики // В кн. Даниил Семенович Данин и его кентавристика. Серия «След вдохновений и трудов упорных...» Лекции. Вып. 3 Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2007. 108 с.
4. *Черенков П.А.* Видимое свечение чистых жидкостей под действием γ -радиации // ДАН СССР. 1934. Т. 2, № 8. С. 451.
5. *Бриджмен П.* Анализ размерностей. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 148 с.

6. *Varian R., Varian S.* High frequency oscillator and amplifier // *Journal of Appl. Phys.* Vol. 10. P. 321.
7. *Ginston E.* The \$100 idea // *IEEE Spectrum.* 1975. Vol. 12. P. 30.
8. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В 2-х томах. Т.1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 496 с.
9. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Колебания и волны. Серия «Синергетика: от прошлого к будущему» / Предисловие Ю.А. Данилова, Г.Г. Малинецкого. Послесл. Г.Г. Малинецкого. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Едиториал УРСС, 2003. 224 с.
10. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры. Серия «Синергетика: от прошлого к будущему» / Предисл. Г.Г. Малинецкого. Изд.2-е испр. и доп. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.
11. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Рыскин Н.М., Шигаев А.М.* Теоретическое и экспериментальное Исследование хаотических колебаний клистронного автогенератора с запаздыванием // *Радиотехника и электроника.* 2001. Т. 46, № 5. С. 604.
12. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Кижяева К.К., Клокотов Д.В., Рыскин Н.М., Шигаев А.М.* Сложная динамика многорезонаторных клистронных автогенераторов с запаздывающей обратной связью // *Изв. ПНД.* 2002. Т. 10, № 5. С. 37.
13. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Клокотов Д.В., Рыскин Н.М.* Экспериментальное исследование сложной динамики в многорезонаторном автогенераторе с запаздывающей обратной связью // *ЖТФ.* 2003. Т. 73, вып. 7. С. 105.
14. *Афанасьева В.В., Лазерсон А.Г.* Динамический хаос в двухрезонаторных клистронных автогенераторах с запаздывающей обратной связью // *Изв. вузов. ПНД.* 1995. Т. 3, № 4. С. 88.
15. *Гинзбург В.Л.* Об атеизме, религии и светском гуманизме. М.: Российское гуманистическое общество. ЗАО «Московские учебники–СиДипресс», 2008. 158 с.
16. *Полищук В.* На общих основаниях // *Новый мир,* 1984, № 4. С. 83.
17. *Шноль С.Э.* Борис Павлович Белоусов (1893–1970) и его колебательная реакция // В кн. «Герои, злодеи, конформисты российской науки: 2-е изд. М.: КРОН-ПРЕСС, 2001. С. 278.
18. *Жаботинский А.М.* Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974. 178 с.
19. *Вольтер Б.В.* Легенда и быль о химических колебаниях // *Знание – сила.* 1988, № 4. С. 33.
20. *Шемякин Ф.М., Михалев П.Ф.* Физико-химические периодические процессы. М.;Л.: 1938.
21. *Luter R.* Raumliche Fortpflanzung chemischer Reaktionen // *Z. Elektrochem* (32), 12, (1906). P. 596. English translation in *J.Chem. Ed.* 1987. 64. P. 740.
22. *Showalter K. and Tyson J.J.* Luter's discovery and analysis of chemical waves // *J. Chem. Ed.* 1987. 64. P. 742.
23. *Lotka A.J.* Contribution to the theory of periodic reactions // *J. Phys. Chem.* 1910. Vol. 14. P. 271.
24. *Lotka A.J.* Undamped oscillations derived from the law of mass action // *J.Amer. Chem. Soc.* 1920. Vol. 42. P. 1595.

25. *Франк-Каменецкий Д.А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987. 502 с.
26. Колебания и бегущие волны в химических системах / Пер. с англ. / Под ред. Р. Филда, М. Бургер. М.: Мир, 1988. 720 с.
27. *Жаботинский А.М.* Периодический ход окисления малоновой кислоты в растворе (исследование кинетики реакции Белоусова) // Биофизика. 1964. Т. 9. С. 306.
28. *Жаботинский А.М., Корзухин М.Д.* Математическое моделирование кинетики гомогенных химических систем. Колеб. проц. в биол. и хим. сист. / Под ред. Г.М. Франка. М.: Наука, 1967. С. 223.
29. *Гарел Д., Гарел О.* Колебательные химические реакции / Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 148 с.
30. *Темкин О.Н.* Гомогенный металлокомплексный катализ. Кинетические аспекты. М.: ИКЦ «Академкнига», 2008. 918 с. (глава 6).
31. *Кац Е.А.* Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры: Родословная форм и идей. Серия «Науку всем! Шедевры научно-популярной литературы». М.: Издательство ЛКИ, 2008. 296 с.
32. *Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З.* Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979. 320 с.
33. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции. Электроника СВЧ. М.: Радио и связь, 1995. 600 с.
34. *Бегич Н., Мэннинг Д.* Программа «НААРП». Оружие Армагеддона. Серия «Битва за космос» / Пер с англ. К.Козырева. М.: Яуза, ЭКСМО, 2007. 384 с.

Саратовский государственный университет

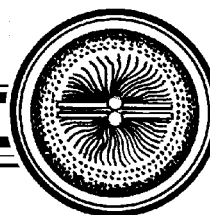
Поступила в редакцию 27.11.2009



Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

E-mail: TrubetskovDI@nonlin.sgu.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83



Синергетика: от прошлого к будущему

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КАТАСТРОФ

Ю.К. Алексеев, А.П. Сухоруков

©Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009

Изд. 2-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 184 с.

ISBN 978-5-397-00237-0

Настоящая книга написана на основе лекций, читаемых авторами в течение ряда лет для студентов старших курсов физического факультета МГУ. Курс лекций ставит своей целью ознакомить студентов с относительно новым разделом математической физики – теорией особенностей отображений множеств, называемой также иногда теорией катастроф, и ее приложениями в физике. Теория особенностей лежит на стыке таких областей математики, как дифференциальные уравнения, математический анализ, топология, геометрия, абстрактная алгебра, и представляет собой вполне самостоятельную дисциплину, вооружающую исследователя мощным, хорошо развитым и строго обоснованным аппаратом исследования различных физических явлений в наиболее интересных, «критических» ситуациях.

Для студентов, аспирантов, инженеров и научных сотрудников физических специальностей.

Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям «Физика», «Прикладная математика» и специальности «Физика»

От редакции

Издательство URSS продолжает новую серию книг «Синергетика: от прошлого к будущему».

Синергетика, или теория самоорганизации, сегодня представляется одним из наиболее популярных и перспективных междисциплинарных подходов. Термин «синергетика» в переводе с греческого означает «совместное действие». Вводя такое название, Герман Хакен вкладывал в него два смысла. Первый – теория возникновения новых свойств у целого, состоящего из взаимодействующих объектов. Второй – подход, требующий для своей разработки сотрудничества специалистов из разных областей.

Но это привело и к замечательному обратному эффекту – синергетика начала оказывать все большее влияние на разные сферы деятельности и вызывать все больший интерес. Сейчас этим подходом интересуются очень многие – от студентов до политиков, от менеджеров до исследователей, активно работающих в различных областях.

Синергетика прошла большой путь. Тридцать лет назад на нее смотрели как на забаву физиков-теоретиков, увидевших сходство в описании многих нелинейных явлений. Двадцать лет назад, благодаря ее концепциям, методам, представлениям, были экспериментально обнаружены многие замечательные явления в физике, химии, биологии, гидродинамике. Сейчас этот междисциплинарный подход все шире используется в стратегическом планировании, при анализе исторических альтернатив, в поиске путей решения глобальных проблем, вставших перед человечеством.

Название серии «Синергетика: от прошлого к будущему» тоже содержательно. Как говорил один из создателей квантовой механики, при рождении каждая область обычно богаче идеями, чем в период зрелости. Видимо, не является исключением и синергетика. Поэтому мы предполагаем переиздать часть «синергетической классики», сделав акцент на тех возможностях и подходах, которые пока используются не в полной мере. При этом мы надеемся познакомить читателя и с рядом интересных работ, ранее не издававшихся на русском языке.

«Настоящее» – как важнейший элемент серии – тоже понятно. В эпоху информационного шума и перманентного написания то заявок на гранты, то отчетов по ним даже классики синергетики очень мало знают о последних работах коллег и новых приложениях. Мы стараемся восполнить этот пробел, представив в серии исследования, которые проводятся в ведущих научных центрах страны.

«Будущее» – это самое важное. От того, насколько ясно мы его представляем, зависят наши сегодняшние усилия и научная стратегия. Прогнозы – дело неблагодарное, хотя и совершенно необходимое. Поэтому ряд книг серии мы надеемся посвятить и им.

В редакционную коллегию нашей серии любезно согласились войти многие ведущие специалисты в области синергетики и нелинейной динамики. В них не следует видеть «свадебных генералов». В их задачу входит анализ развития нелинейной динамики в целом и ее отдельных областей, определение приоритетов нашей серии и подготовка предложений по изданию конкретных работ. Поэтому мы указываем в книгах серии не только организации, в которых работают эти исследователи, но и важнейшие области их научных интересов.

И конечно, мы надеемся на диалог с читателями. При создании междисциплинарных подходов он особенно важен. И так, вперед – в будущее.

В нашей серии уже вышло более сорока книг общим тиражом около ста тысяч экземпляров. Серия начала издаваться на испанском языке. Однако мы уверены, что и самые глубокие проблемы синергетики, и самые интересные книги серии впереди.

*Редакционная коллегия серии
«Синергетика: от прошлого к будущему»*

Оглавление

От редакции

Синергетика, теория катастроф, курсы лекций (*Г.Г. Малинецкий*)

Лекция 1. Машина катастроф Зимана

Лекция 2. Критические точки и критические значения

Лекция 3. Эквивалентность и структурная устойчивость отображений

Лекция 4. Леммы Морса о расщеплении

Лекция 5. Орбиты струй и касательные пространства

Лекция 6. Теоремы о конечной определенности

Лекция 7. Коразмерность и деформации

Лекция 8. Геометрия каспидных катастроф

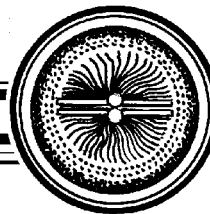
Лекция 9. Геометрия омбилических катастроф

Лекция 10. Примеры катастроф

Лекция 11. Примеры катастроф (продолжение)

Упражнения и задачи

Литература

**АВТОКОЛЕБАНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ***П.С. Ланда*

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009
Изд. 2-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 320 с.
ISBN 978-5-397-01105-1

Книга посвящена исследованию автоколебательных процессов в системах с распределенными параметрами. Изложены основные методы теории волн и приведены различные примеры, на которых продемонстрированы возможности этих методов. Рассмотрены задачи возбуждения волн в ограниченных средах. Находятся условия возбуждения и стационарные режимы. В качестве примеров рассмотрены лазеры, акустические и плазменные генераторы, генераторы Ганна, автоколебания крыльев самолета, волны в плазме и жидкости, а также некоторые химические и биологические системы. Приведен ряд сведений из области расчета флуктуации в распределенных системах.

Книга предназначена для специалистов в области нелинейных колебаний и волн, научных работников и инженеров, связанных с исследованием и использованием распределенных автоколебательных систем, а также для аспирантов и студентов старших курсов физических и механико-математических факультетов университетов, специализирующихся в области теории колебательных и волновых процессов.

Оглавление**Предисловие**

ВВЕДЕНИЕ. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

Глава I. Линейные одномерные колебательные системы с распределенными параметрами

1. Продольные колебания стержней и поперечные колебания струн. 2. Поперечные колебания стержня (балки). 3. Электромагнитные колебания в двухпроводной линии. 4. Оптические резонаторы. 5. Основные сведения из общей теории линейных однородных краевых задач. 6. Устойчивость состояния равновесия линейных распределенных систем. Абсолютная и конвективная неустойчивости.

Глава II. Метод фундаментальных решений

1. Описание метода. 2. Связь между методом фундаментальных решений и частотными методами анализа сосредоточенных колебательных систем. 3. Собственные изгибные колебания неоднородной консольной балки. 4. Изгибно-крутильные колебания однородной балки. 5. Крыло самолета как потенциально автоколебательная система. Изгибно-крутильный флаттер.

Глава III. Приближенные методы определения собственных значений и собственных форм колебаний линейных распределенных систем

1. Метод последовательных приближений. 2. Асимптотический метод. 3. Примеры применения асимптотического метода.

Глава IV. Примеры двумерных распределенных колебательных систем

1. Колебания мембраны. 2. Колебания пластин

ЧАСТЬ I. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

Глава V. Методы сведения распределенных систем к сосредоточенным моделям

1. Метод Бубнова–Галеркина. 2. Метод разложения решения по собственным формам линейной системы. 3. Метод коллокации.

Глава VI. Асимптотические методы исследования нелинейных распределенных систем

1. Метод эквивалентной линеаризации. 2. Метод медленно меняющихся амплитуд. 3. Асимптотический метод для квазилинейных систем. 4. Метод усреднения по стационарным волнам для квазиконсервативных систем. 5. Метод Уизема.

ЧАСТЬ II. ПРИМЕРЫ ГЕНЕРАТОРОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Глава VII. Оптические квантовые генераторы (лазеры)

1. Исходные уравнения. 2. Уравнения для трех мод кольцевого лазера. Одно-модовый режим генерации и его устойчивость. 3. Самосинхронизация мод в кольцевых лазерах с однородным уширением линии усиления. 4. Самосинхронизация мод в кольцевых лазерах с нелинейным поглотителем.

Глава VIII. Пьезополупроводниковые генераторы ультразвука

1. Основные уравнения. 2. Линейное приближение. Дисперсионное уравнение. 3. Условия самовозбуждения звуковых волн. Форма колебаний вблизи границы самовозбуждения. 4. Уравнения для амплитуд звуковых волн вблизи нижней границы самовозбуждения. 5. Режим самосинхронизации мод.

Глава IX. Генераторы Ганна

1. Исходные уравнения. Условия самовозбуждения. 2. Стационарный режим генерации.

Глава X. Плазменные усилители и генераторы электромагнитного излучения

1. Исходные уравнения. 2. Линейная теория плазменных усилителей и генераторов. 3. Укороченные уравнения для одной моды плазменного волновода. 4. Нелинейная теория плазменного усилителя и генератора.

ЧАСТЬ III. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН В ПЛАЗМЕ И ЖИДКОСТИ

Глава XI. Ионизационные волны (страты) в низкотемпературной плазме

1. Исходные уравнения. 2. Стационарное состояние. Одномерное приближение. 3. Условия самовозбуждения страт. 4. Стационарный режим генерации

бегущих страт вблизи порога возбуждения. Условия мягкого и жесткого возбуждения. 5. Асинхронное подавление бегущих страт. 6. Стоячие страты в инертных и молекулярных газах.

Глава XII. Страты в плазме электроотрицательных газов

1. Исходные уравнения. Стационарное состояние и его устойчивость. 2. Развитые страты.

Глава XIII. Электротермические волны в плазме, помещенной в магнитное поле

1. Исходные уравнения. 2. Устойчивость стационарного состояния. 3. Стационарные волны.

Глава XIV. Автоколебания в потоке жидкости (турбулентность и конвекция)

1. Основные уравнения. 2. Термоконвекция в слое жидкости (проблема Бенара). 3. Потеря устойчивости ламинарного течения и условие возникновения турбулентности. 4. Уравнение для амплитуды колебаний при малых превышениях над порогом самовозбуждения.

ЧАСТЬ IV. АВТОКОЛЕБАНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ХИМИЧЕСКИХ И БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Глава XV. Химические системы

1. Экспериментальные данные. 2. Математическая модель автоколебательной химической реакции. 3. Устойчивость состояния равновесия. 4. Стационарные волны вблизи порога возбуждения в двухкомпонентной системе. 5. О волновых решениях в неоднородных двухкомпонентных и однородных трехкомпонентных системах. 6. Стационарные периодические в пространстве распределения веществ в модели Тьюринга. Влияние граничных условий.

Глава XVI. Автоколебательные процессы в сообществах организмов

1. Уравнения динамики сообщества водных организмов. 2. Явление биоконвекции.

ЧАСТЬ V. ФЛУКТУАЦИИ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Глава XVII. Методы расчета флуктуаций в распределенных квазилинейных системах

1. Расчет флуктуаций методом разложения по собственным функциям порождающей линейной системы. 2. Расчет флуктуаций асимптотическим методом. Флуктуационные уравнения в частных производных.

Глава XVIII. Флуктуации в кольцевых лазерах с однородным уширением линии усиления

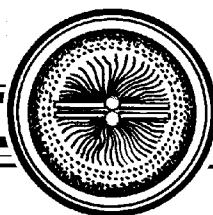
1. Спектр флуктуаций амплитуды в одномодовом режиме. 2. Флуктуации фазы и частоты. Спектр лазерного излучения и ширина линии.

Приложение 1. Метод Релея–Ритца

Приложение 2. Метод конечных разностей

Приложение 3. Метод конечных элементов

Литература



АВТОКОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

П.С. Ланда

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009
Изд. 2-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 360 с.
ISBN 978-5-397-01090-0

В книге излагаются основные методы исследования автоколебательных систем с сосредоточенными параметрами; приводится множество примеров как иллюстрирующих работу этих методов, так и представляющих самостоятельный научный и практический интерес.

Рассматриваются динамические и статистические процессы, происходящие в автоколебательных системах с одной и более степенями свободы. Изложение ведется в основном на примерах механических и радиофизических систем, однако приводятся и некоторые примеры автоколебаний в биологических и химических системах.

Книга предназначена для специалистов в области теории нелинейных колебаний, научных работников и инженеров, занимающихся исследованием и использованием автоколебательных систем, а также для аспирантов и студентов старших курсов механико-математических и физических факультетов университетов, специализирующихся в области теории колебаний.

Оглавление

Предисловие

ВВЕДЕНИЕ

Глава I. Общие свойства автоколебательных систем

1. Определение и примеры автоколебательных систем.
2. Фазовая плоскость.
3. Мягкое и жесткое возбуждение колебаний.

Глава II. Устойчивость стационарных состояний линейных и нелинейных колебательных систем

1. Устойчивость по Ляпунову. Критерий Рауса–Гурвица.
2. Второй метод Ляпунова. Функция Ляпунова.

ЧАСТЬ I. АВТОКОЛЕБАНИЯ В КВАЗИКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Глава III. Основные методы исследования автоколебаний в системах, близких к консервативным

1. Метод малого параметра. 2. Метод ван дер Поля. 3. Асимптотический метод Крылова–Боголюбова. 4. Метод усреднения. 5. Метод усреднения в системах, содержащих быстрые и медленные движения. 6. Метод эквивалентной линеаризации.

Глава IV. Автономные автоколебательные системы с одной степенью свободы

1. Уравнения колебаний в системах с одной степенью свободы. Условия самовозбуждения. Мягкий и жесткий режим генерации. 2. Уравнения для амплитуды и фазы. Стационарные состояния и их устойчивость. 3. Переходной процесс.

Глава V. Внешние воздействия на автоколебательные системы с одной степенью свободы

1. Явление синхронизации на основном тоне. 2. Режим биений при выходе из области синхронизации на основном тоне. Асинхронное подавление автоколебаний. 3. Синхронизация на унтертонах (субгармониках). 4. Синхронизация на обертонах (гармониках). 5. Воздействие внешней силы на генератор с жестким возбуждением. Асинхронное возбуждение автоколебаний. 6. Синхронизация генератора при модуляции его собственной частоты.

Глава VI. Автоколебательные системы с инерционной нелинейностью

1. Некоторые схемы генераторов с инерционной нелинейностью и основные уравнения. 2. Стационарные состояния и их устойчивость. 3. Воздействие внешней силы на генератор с инерционной нелинейностью. 4. Пример химической системы, аналогичной генератору с инерционной нелинейностью. 5. Вибрационные машины.

Глава VII. Автоколебательные системы с двумя степенями свободы

1. Генератор с дополнительным колебательным контуром. 2. Два связанных генератора. 3. Взаимная синхронизация двух связанных генераторов с близкими частотами при слабой связи. 4. Взаимная синхронизация двух связанных генераторов при сильной связи. 5. Синхронизация генераторов с кратными частотами. 6. Синхронизация двух генераторов с разными частотами при параметрическом воздействии внешней силы.

Глава VIII. Автоколебательные системы с тремя и более степенями свободы

1. Синхронизация трех связанных генераторов при близких частотах. 2. Синхронизация трех связанных генераторов на комбинационных частотах. 3. Синхронизация N связанных генераторов с близкими частотами. 4. Синхронизация N связанных генераторов при параметрическом воздействии внешней силы. 5. Синхронизация маятниковых часов, висящих на общей балке. 6. Автоколебания роторов.

ЧАСТЬ II. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИКОНСЕРВАТИВНЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Глава IX. Основные методы исследования случайных воздействий на автоколебательные системы

1. Флуктуационные уравнения. 2. Метод линеаризации и корреляционная теория. 3. Квазистатистический метод. 4. Процессы Маркова. Метод уравнения Эйнштейна–Фоккера–Планка. 5. Методы решения задач, связанных с достижением границ.

Глава X. Естественные и технические флуктуации в ламповых генераторах

1. Источники флуктуаций в генераторе и флуктуационные уравнения. 2. Естественные флуктуации. Корреляционное приближение. 3. Естественные флуктуации у порога генерации. 4. Технические флуктуации. 5. Исследование устойчивости стационарных состояний при наличии случайных воздействий.

Глава XI. Синхронизация генератора при наличии случайных возмущений

1. Синхронизация генератора узкополосной случайной силой. 2. Синхронизация генератора на основном тоне (корреляционное приближение). 3. Синхронизация генератора на основном тоне при малой амплитуде внешней силы. 4. Синхронизация генератора на обертонах и унтертонах внешней силы.

Глава XII. Флуктуации в автоколебательных системах с полутора и более степенями свободы

1. Флуктуации в генераторах с инерционной нелинейностью. 2. Флуктуации в системе двух связанных генераторов. 3. Флуктуации в системе трех и более связанных генераторов.

ЧАСТЬ III. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Глава XIII. Общие методы исследования автоколебательных систем. Методы исследования релаксационных систем

1. Метод точечных отображений. 2. Метод электрического моделирования. 3. Метод усреднения для релаксационных систем. 4. Асимптотический метод Дородницына.

Глава XIV. Некоторые примеры релаксационных систем

1. Исследование автоколебаний в модели гликолиза. 2. Синхронизация тиратронного генератора внешней силой. 3. Взаимная синхронизация двух тиратронных генераторов. 4. Взаимная синхронизация двух релаксационных генераторов, описываемых уравнениями Релея. 5. Взаимная синхронизация многих релаксационных генераторов.

Приложения

Приложение I. Некоторые методы построения функций Ляпунова

Приложение II. Методы исследования автоколебаний в квазиконсервативных системах

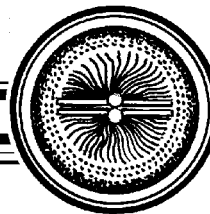
Приложение III. Расчет корреляционной функции колебаний

Приложение IV. Вывод формулы Найквиста

Приложение V. Вывод формулы Шоттки

Приложение VI. Приближенное определение параметров предельного цикла в модели гликолиза для релаксационного режима

Литература



Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 1, 2010

МЕДИЦИНСКИЙ ТРУЭНТИЗМ И КЕНТАВРИСТИКА

Д.И. Трубецков

Настоящая заметка – своеобразное послесловие к книге Д.И. Трубецкого «Даниил Семенович Данин и его кентавристика» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2007) и маленькая рецензия на интересную книгу А.П. Зильбера.

В книге А.П. Зильбера «Этика и закон в медицине критических состояний» (Этюды критической медицины. Т. 4. Петрозаводск: Издат. ПетрГУ, 1998, 560 с.) приведено следующее определение: «Медицинский труэнтизм – это плодотворное устремление врачей к полезной творческой деятельности вне медицины». И далее: «Труэнт – это человек, занимающийся другим делом помимо профессии, для которой он был предназначен, и этим делом он занимается высококомпетентно, внося в него огромный вклад, благодаря своей заинтересованности, самообразованию или даже дополнительной фундаментальной подготовке».

По мнению Зильбера, врачи – чуть ли не главные поставщики труэнтов для самых разных отраслей деятельности человека. Анатолий Петрович Зильбер свыше полувека собирает коллекцию врачей-труэнтов, разбив её на 18 классов, 50 подклассов и свыше 90 специальностей, в которых прославились врачи-труэнты, входящие в коллекцию. На момент издания книги в его коллекции было более 2000 выдающихся политических лидеров, глав государств и правительств, философов, теологов, дипломатов, историков, археологов, филологов и лингвистов, географов и пиратов, литераторов, музыкантов, певцов и актеров, художников и архитекторов, юристов, математиков, астрономов, физиков (вспомните Томаса Юнга), геологов, военачальников и др. Как пишет Зильбер, «...только в 19–20 веках в самых различных странах мира главами государств и правительств были и есть сегодня свыше 150 врачей, в том числе в таких странах, как Франция, Китай, Австралия, Австрия, Бразилия, Норвегия и др. – многие ли из нас знают об этом?... Около 10% коллекции составляют материалы о наших современниках, а 20% врачей-труэнтов жили в России и республиках бывшего СССР».

В коллекции Зильбера есть немногочисленный подкласс, обозначенный словом Нелюди, куда отнесены врачи – серийные убийцы, создатели и пропагандисты члoвеконенавистнических теорий и систем. По его мнению, они «...возникли вследствие отсутствующего или извращенного гуманитарного образования».

В цитируемой книге есть прямое указание на совпадение труэнтизма и кентавризма во многих отношениях, хотя, по мнению Зильбера, они «...едва ли отражают идентичные явления». Приведем далее длинную цитату из «Этики».

«Главный постулат кентавризма – сочетание несочетаемого – не столь абсолютен для труэнтизма, который, если следовать точному переводу термина *truant*, начинается

тогда, когда кончается кентавр (победа одной части кентавра над другой). Но мы договаривались называть труэнтами врачей, которые занимались медициной до-, во время или после своего второго занятия, чтобы только не пользоваться термином дилетант.

Как профессор Д.С. Данин* считает хобби и кентавриз разными понятиями, так и мы полагаем, что труэнтизм может начинаться с хобби, но по сути он совсем иной феномен».

К данинским «4К» Зильбер добавляет пятое – консолидацию (консолидация от лат. *con* – с, вместе, и *solidare* – скреплять, сращивать, сплотить). По его мнению, кентавриз заставляет сближать мнения разных людей, делающих вместе общее дело. Далее следует замечательный тезис: «Не может быть и даже *не должно быть* абсолютного совпадения во взглядах – тогда люди превратятся в *панургово стадо*, и любой хитроумный деятель поведет их туда, куда он захочет, даже если это будет противоречить интересам большинства».

Имеется в виду эпизод из «Гаргантюа и Пантагрюэля» Ф.Рабле, когда Панург наказал на корабле заносчивого владельца стада баранов. Он купил за большую цену вожак стада и выбросил его за борт, после чего все стадо последовало за вожаком. Раздел «Кентавриз и кентавристика» заканчивается в «Этике» так:

«Но главное в кентавризме и труэнтизме, – что эти социологические феномены требуют разносторонности, взаимотерпимости и взаимоуважения. Это, собственно говоря, и есть основа этики...»

Совершенно справедливо Зильбер пишет о том, что в древности образование ученых было всесторонним, хотя выделялись и запоминались они чем-то одним. Он приводит впечатляющий список примеров. Вот некоторые из них.

Поэт Омар Хайям был врачом, астрономом, математиком, государственным деятелем.

Таджикский *врач* Авиценна – одновременно ещё и физик, химик, математик, музыкант, государственный деятель.

Астроном Николай Коперник был и врачом (рецепты его до сих пор распространены в Польше), и математиком, и известным теологом.

Механик Д.Кардано – замечательный врач, математик, философ.

Писатель Ф.Рабле был врачом, историком, археологом, юристом.

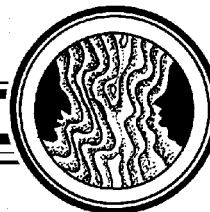
Антрополог Ф.Гальтон – известный врач, социолог, путешественник, юрист, создатель евгеники, биометрии, дактилоскопии и словесного портрета, послужившего основой создания фоторобота.

К группе врачей-труэнтов – универсальных гениев – Зильбер относит русского врача Александра Александровича Богданова, немецкого врача Альберта Швейцера и английского врача Томаса Юнга, о котором упоминалось выше. «Это о них сказал, – пишет Зильбер, – замечательные слова один военный врач, чья медицинская диссертация была посвящена различию между воспалительными и гнилостными лихорадками, а историческая – особенностям революции в Нидерландах. Он сказал: ”Для хорошего актера не бывает плохих ролей”. Этот врач имел право так говорить: он был не только врачом, но и издателем журналов, профессором истории Йенского университета, великим поэтом и драматургом, основоположником мирового романтизма – это был Фридрих Шиллер...»

Всё возрастающая узость образования, умения, мышления суживает гуманистическую сущность любой деятельности, делает её высокоэффективной работой хороших специалистов, лишенной одухотворенности и порождающей равнодушие к окружающим. Поэтому кентавры и труэнты нужны миру.

Автор выражает признательность А.Д. Трубецкову, познакомившему его с книгой А.П. Зильбера.

*В одном из выступлений А.П. Зильбер назвал Д.С. Данина своим другом. – Д.И.Т.



Изв. вузов «ПНД», т. 17, № 1, 2009



«НЕДОСТИЖИМЫХ ЦЕЛЕЙ НЕТ, НУЖНО ПРОСТО РАБОТАТЬ»*

Ф.М. Митенков родился 25 ноября 1924 г. Окончил среднюю школу в 1941 г. и поступил в Саратовский государственный университет на физический факультет, который окончил в 1950 г. В 1948 г. окончил также Всесоюзный заочный юридический институт в Саратове. С 1942 г. по 1946 г. служил в Советской армии – участник Великой Отечественной войны.

Производственную деятельность начал в 1950 г. в Конструкторском бюро машиностроительного завода в Горьком, где вначале занимался теоретическим обоснованием проектов диффузионных машин для получения обогащенного урана. Позднее участвовал как ведущий исполнитель в создании уникального оборудования для атомной промышленности и энергетики. С 1964 г. работает в Опытном конструкторском бюро машиностроения (ОКБМ), где прошел путь от начальника отдела до директора и генерального конструктора (с 1969 по 1997 гг.). В настоящее время – советник директора по научным вопросам Федерального научно-производственного центра открытого акционерного общества «Опытное конструкторское бюро машиностроения» (ОАО «ОКБМ Африкантов»).

* © Газета «Поиск-НН», № 12 (115), декабрь 2009 г.

Известный ученый, руководитель работ в области атомного энергетического машиностроения, Ф.М. Митенков внес значительный вклад в разработку и создание ядерных реакторов для атомных электростанций, гражданского и военно-морского флота. Под руководством Ф.М. Митенкова в ОКБМ были созданы атомные паро-производящие установки для атомных ледоколов «Арктика», «Сибирь», «Россия», «Советский Союз», «Таймыр», «Вайгач», «Ямал»; лихтеровоза «Севморпуть», атомных подводных лодок и надводных кораблей ВМФ; реакторы на быстрых нейтронах БН-350, БН-600, ядерные реакторы для атомных станций теплоснабжения и проекты реакторных установок для малой атомной энергетики.

Действительный член АН СССР (РАН) по отделению механики и процессов управления (1990 г.).

Инициатор создания, один из основателей и ведущих преподавателей (с 1968г. – профессор) физико-технического факультета Горьковского политехнического института (ныне – НГТУ). Председатель ученого совета по защите кандидатских и докторских диссертаций при НГТУ. Автор (соавтор) около 300 публикаций и докладов, более 40 изобретений. Заслуженный деятель науки и техники. В 1992–1993 гг. – президент Российского ядерного общества. Герой Социалистического труда, лауреат Ленинской премии и Государственных премий СССР и Российской Федерации, Почетный член Европейского ядерного общества (ENS Honoris Member), Почетный гражданин Нижнего Новгорода.

Большой личный вклад в развитие отечественной и мировой атомной энергетики отмечен присуждением Ф.М. Митенкову в 2004 г. престижной международной энергетической премии «Глобальная энергия» «За разработку физико-технических основ и создание энергетических реакторов на быстрых нейтронах» (совместно с американским ученым Л.Кохом). В декабре 2005 г. Ф.М. Митенков избран председателем Международного комитета по присуждению премии «Глобальная энергия».

22 января 2005 г. указом Президента Российской Федерации № 63 от 22 января 2005 г. Ф.М. Митенков награжден орденом «За заслуги перед Отечеством IV степени» с формулировкой «за большой личный вклад в развитие атомной энергетики и многолетний доблестный труд»

Газета «Поиск-НН» предлагает читателям текст интервью, взятого у Ф.М. Митенкова накануне его юбилея.

– Федор Михайлович, в книге «Творцы ядерного века» Вы вспоминаете свое детство и родителей, которые, несмотря на тяжелые и голодные времена, смогли дать Вам с сестрами и братом не только хорошее образование, но и воспитали стремление к познанию. Что еще повлияло на Ваше профессиональное самообразование?

– В вашем вопросе заключен очень важный момент – значение семьи в становлении человека. Наша большая семья, где длительное время кормильцем был один отец, в те тяжелые 30-е годы жила далеко не в идеальных условиях, особенно материальных. Однако родители прививали детям стремление к знаниям. Отец, Михаил Сергеевич, от природы был наделен неплохими способностями, но окончить смог только церковно-приходскую школу, потому что большие крестьянские семьи в то время не могли дать хорошего образования своим детям из-за бедности, да и крестьянский труд этого не требовал. Когда отца призвали в царскую армию (а в то время в армии занимались образованием солдат по необходимому для нее специальностям, и это отнюдь не изобретение советской власти), его направили на обучение в медицинское училище. Он с большой заинтересованностью начал изучать медицин-

ское дело и после демобилизации стал работать фельдшером в большой сельской больнице Саратовской области, с хорошими и опытными руководителями. Отец с уважением вспоминал персонал больницы. Его рекомендовали на дальнейшее обучение, но он не захотел и не мог оставить семью.

Многому меня научила и сама жизнь. Жилось в ту пору всем очень трудно, но мне врезалось в память бедственное положение голодающих лошадей, которых в результате коллективизации отобрали у крестьян. Их собрали в одной конюшне и оставили практически без ухода, и лошади просто голодали. Школа, в которой я начал учиться, по просьбе руководства колхоза взяла шефство над лошадьми, и я принял в нем участие. Однажды конюх показал мне жеребчика, который уже несколько дней не мог встать на ноги от голода. Я взял над ним шефство: где сена добуду, где соломы, а когда и свой недоеденный кусок принесу. Как он меня встречал! Стремился лизнуть и выражал всячески свою благодарность. И конь, благодаря такой маленькой заботе, все-таки встал.

Учиться я начал очень рано, а случилось это так. Когда моя старшая сестра отправилась в первый класс, я увязался за ней. И, что удивительно, директор школы, заметив такого «Филиппка» в школе, сначала стала меня расспрашивать, что я здесь делаю. Я сказал, что в первом классе учится моя сестра и я тоже очень хочу учиться. Видимо, я так искренне говорил о своем желании, что она отвела меня в класс, думая, как потом она рассказывала моему отцу, что это желание у меня быстро пройдет. Но этого не случилось. Так в пять лет я начал свое школьное образование.

Несмотря на то, что быт нашей семьи был как-то устроен, а у нас была казенная квартира при больнице и огород, отец все же принял решение переехать в город, где были лучшие условия для обучения детей. Я тогда перешел уже в четвертый класс. Мне до сих пор непонятно, как отец мог на это решиться, имея четверых детей, трое из которых были совсем маленькими.

В городской школе я столкнулся с новой для меня жизненной ситуацией, когда пришлось, что называется, отстаивать «свое место под солнцем». От природы я был достаточно замкнутым человеком, и стремления занимать какие-то лидерские позиции у меня не было, к тому же я был младше всех в классе, чем и воспользовались городские мальчишки, начавшие меня поначалу донимать. А поскольку отец с раннего детства привлекал меня к посильной физической работе по хозяйству, «силенки» у меня кое-какие были, так что спуску я им не давал, и со временем мы даже сдружились. Школа, помимо добротных знаний (а я окончил ее на «отлично»), воспитала во мне важное во всех отношениях качество – уверенность в том, что недостижимых целей нет, нужно просто работать. Я очень много читал. Читал все, что попадалось под руку, причем даже при лунном свете, за что мне попадало от матери. Любовь к книге идет со мной по всей жизни.

Сказать, что в выборе профессии мне кто-либо давал рекомендации, не могу, но отец очень хотел, чтобы я пошел по медицинской линии. А мною в то время, как и большинством мальчишек, руководила романтика. Чтобы удовлетворить двум этим требованиям, учась еще в 10-м классе, я направил свои документы в Ленинградскую военно-медицинскую академию. Но меня не приняли, так как мне было тогда только 16 лет, а в академию брали только по достижении призывного возраста – 18 лет. Моему огорчению не было границ. А тут началась война, и сразу после получения свидетельств об окончании школы мы с друзьями побежали в военкомат записываться добровольцами. К тому времени двое из наших «мушкетеров» успели окончить аэроклуб и уже даже летали, поэтому их сразу направили в летное учи-

лице, а мне дали от ворот поворот по возрасту. Настроение было военное, но отец настоял, чтобы я не обивал пороги военкомата, а продолжил обучение.

В университет меня брали без экзаменов, но я никак не мог определиться с выбором факультета: историко-филологический (много романтики) или физико-математический (логика, мышление), но в результате долгих раздумий выбрал логику и мышление – физмат. Обучение в университете началось с уборки урожая. Помню, как три дня пришлось есть одну кукурузу, с тех пор не выношу ее вида.

В августе 1942 г. меня призвали в армию, где после окончания училища среднего состава войск НКВД я прослужил до июня 1946 г. Армия воспитала во мне дисциплину и привычку не обсуждать приказы.

После войны я с интересом продолжил обучение в Саратовском университете. А к исследовательской работе меня привлек профессор Александр Давыдович Степухович. Помню, он с таким увлечением читал нам курс по статической физике, что ему никогда не хватало времени. Он назначал дополнительное время для завершения темы после занятий, и, представьте себе, мы приходили. Он-то и предложил мне принять участие в работах, выполняемых в его лаборатории. Сам он был химик, и его исследования лежали в той области, где методами физики решали химические задачи. Он ориентировал меня на разработку алгоритмов, которые могут позволить ввести полученные результаты в какую-то формализованную математическую схему. В результате двух лет работы в лаборатории у меня появился вкус к исследовательской деятельности и мною под руководством А.Д. Степуховича были подготовлены две статьи, которые в 1950 г. Александр Давыдович направил в журнал «Доклады Академии наук». Правда, увидел я их напечатанными, уже работая в Горьком, только в 1953 году. Дипломную работу по кинетике химических реакций я делал тоже по тематике А.Д. Степуховича. После защиты дипломной работы меня приняли в аспирантуру. Полный решительности, я намеревался продолжить исследовательскую работу под руководством А.Д. Степуховича. Но примерно за полгода до окончания 5-го курса в университет приезжала комиссия из Москвы, которая изучала все анкетные данные выпускников и отбирала кандидатов, не подлежащих распределению. Я об этом не знал и приступил к обучению по программе в аспирантуре, в которую, как оказалось, официально не был зачислен по причине решения той комиссии. В ноябре 1950 г. я получил указание ехать на работу в город Горький, куда и прибыл 7 ноября в большом разочаровании.

–Увлекаясь в университете химической физикой, Вы стали физиком-ядерщиком. Как это случилось?

– Я все же настойчиво хотел вернуться к своему учителю, дошел даже до первого заместителя министра оборонной промышленности с просьбой разрешить мне вернуться в аспирантуру, но в результате долгих разговоров с ним он предложил мне выбор: либо возвращение в Горький, либо по распределению в город Урга в Северном Казахстане. И я выбрал ту отрасль знаний, в которой была возможность освоения нового, тем более что от развития этой отрасли зависела оборона страны. Для нас, людей, прошедших войну, это было определяющим. Большую роль тогда сыграла переведенная на русский язык книга одного американского ученого-химика, лауреата Нобелевской премии, которая была посвящена задаче использования квантовой физики в исследовании кинетики химических реакций. Ведь изучение цепных реакций впервые началось в химии. Академик Н.Н. Семенов, основоположник хи-

мической физики, создал теорию цепных реакций, за что позже был удостоен Нобелевской премии, а это исходная база для физики ядерных реакторов.

Начал я с разработки диффузионных машин и их каскадов, которые обеспечили разделение изотопов урана, что было необходимо для создания урановой атомной бомбы. Промышленные реакторы позволяли получать плутоний для так называемой плутониевой бомбы. Для меня было важным выполнение поставленных задач. В диффузионных машинах использовалась газообразная среда UF_6 (гексафторид урана). И в компрессоре половинного расхода нам удалось, причем только экспериментальным путем, достичь скоростей звуковых и сверхзвуковых (о которых еще в мире не сообщалось), что позволило существенно снизить потребляемую мощность компрессоров. Это было важное достижение, т.к. в промышленных каскадах использовались сотни и тысячи таких машин. Втянувшись в эту работу, я уже и не думал расставаться с ОКБМ.

– **Чем же оно стало для вас?**

– ОКБМ фактически «породило» меня как специалиста и ученого, а я, в какой-то мере, «породил» ОКБМ, оно стало просто органической частью меня самого. Уникальность наших разработок и внимание к ним в мире очень высоки до сих пор. Расскажу вам один интересный случай. Когда мы доложили о результатах одной своей работы на конференции в Лионе в 1984 г., то со мной изъявил желание встретиться в Париже руководитель комиссариата по атомной энергии Франции. Я согласился, и мы встретились. Причиной их интереса к нашей разработке было то, что в наших ядерных энергетических установках долгое время критическим видом оборудования был парогенератор, который проектировался в ЦКБ в Ленинграде совместно с Балтийским заводом. Они по многим параметрам нас не устраивали, и я принял решение о проектировании парогенератора у нас в ОКБМ. Для нас это было новым направлением, многие выражали свое беспокойство, но несмотря ни на что мы приступили к проектированию. В результате удалось создать совершенно новый тип парогенератора, который по мощности превосходил имеющийся образец в два с лишним раза при тех же габаритах, что позволяло использовать на установке вместо четырех парогенераторов только два. Так вот это и заинтересовало французскую сторону, и они предложили нам создать совместное производство парогенераторов для малой ядерной энергетики. Мы были не против, но при одном условии, что конструкторской и технологической документации на наше изделие мы не передаем. На этом разговор был закончен, поскольку французы, по-видимому, рассчитывали таким образом получить наши ноу-хау. С демонстрацией и приемкой нашего парогенератора было много разных интересных историй, но всего не расскажешь. Жаль только, что перестройка практически уничтожила налаженное серийное автоматизированное на 85% производство таких парогенераторов в нашей стране.

– **Вы лауреат премии «Глобальная энергия», которой по всёму миру награждены единицы ученых. За что она была Вам присуждена?**

– Природа, создавая человека, позаботилась о нем и в плане энергетических ресурсов. Дело в том, что в природном уране на тепловых нейтронах делится только изотоп урана-235 (которого содержится 0.7%). Если энергетический спектр нейтронов будет достаточно «жестким», то будет делиться изотоп урана-238, что во много раз увеличивает энергетические возможности естественного урана. Еще в 40-х годах прошлого столетия выдающийся итальянский физик Энрико Ферми теоретиче-

ски показал, что можно использовать уран-238 полностью, но для его деления нужна большая энергия и большая скорость нейтронов, которые «бомбардируют» ядра урана-238. Он даже построил первый экспериментальный реактор на быстрых нейтронах. Быстрыми реакторами занимались в США и многих ведущих странах мира. В Советском Союзе еще в конце 40-х годов академик А.И. Лейпунский независимо выдвинул ту же идею и обосновал важность строительства быстрых реакторов. Решение этой задачи и было поручено ОКБМ. Мы спроектировали и построили на полуострове Мангышлак (Казахстан) реактор БН-350. Его отличительной характеристикой был «жесткий» энергетический спектр нейтронов. Теплоносителем в нем являлся натрий, потому что он слабо замедляет нейтроны и не поглощает их. Поскольку натрий очень энергично взаимодействует с воздухом и водой, были усилены меры по предупреждению аварий с течью натрия, в частности, мы применили на этом реакторе трехконтурную схему передачи тепла. Отработал этот реактор 25 лет, что на пять лет больше проектного срока эксплуатации. Одновременно с БН-350 мы начали работу над интегральным реактором большей мощности БН-600, где весь натриевый теплоноситель первого контура был сосредоточен в одном корпусе. Таким образом, реализовав идею реакторов на быстрых нейтронах, мы получили возможность использовать весь природный уран путем преобразования урана-238 в новое ядерное топливо – плутоний. Таким образом, реактор на быстрых нейтронах способен при одной загрузке урана-238 вырабатывать электроэнергию за счет деления урана и производить новый делящийся материал – плутоний, который тоже является топливом. С использованием наработанного таким образом избыточного делящегося материала может работать еще один реактор. Таким образом, быстрые реакторы позволяют не только сами обеспечивать себя топливом, но и дополнительно нарабатывать топливо для работы других реакторов.

Так вот, когда анализируешь возможности самовоспроизводящегося и саморегулируемого природного материала – урана-238, начинаешь невольно «петь гимн» природе, высшему ее разуму и невольно задумываешься над местом и ролью человека в природе. Создание реактора на быстрых нейтронах и получило столь высокую оценку в мире. Конечно, решение такой сложной научной, инженерной и организационной задачи стало результатом работы большого количества ученых и специалистов в нашей стране и за рубежом.

– Федор Михайлович, проводя аналогию человеческой жизни с рекой, полнота которой зависит от количества ручьев и ручейков, ее питающих, что бы Вы могли посоветовать молодежи, идущей в науку?

– Вопрос молодежи в науке очень важный, но я не позволяю себе давать советы. Практика показывает, что проторенных дорог в науку нет. И в этом случае я бы не советы давал, а попытался подчеркнуть ряд факторов, которые очень важны на этом пути. В первую очередь, необходимо хорошо знать себя и верить в себя. При этом важно понимать, что научная стезя не приемлет каких-либо раздвоений и сомнений. Если чувствуешь, что не способен на такую самоотдачу, то лучше и не тратить время, а найти себя в чем-то другом. Следующий фактор – это постоянное пополнение своих знаний в самых разных областях, потому что в науке очень большое значение имеет эрудиция, от которой, собственно, зависит и интуиция. В этом смысле следует подражать природе. Ведь зачем-то придумала природа человека, несмотря на то, что он не только полезен, но и опасен природе, даже, например,

в плане отходов, которые человек оставляет, к сожалению, следующим поколениям. Многие замечательные ученые заявляют, что человечество подошло к той критической черте, за которой может начаться обратный эволюционный процесс. У меня есть глубокое убеждение, что в России талантов рождается больше, чем в других странах, но главный враг российского таланта – неумение самоорганизоваться. Зачастую наш ученый получил результат, а на его использование желания и настойчивости не хватает. Вот о чем нужно бы подумать, о воспитании и, в первую очередь, в семье.

– Вы по жизни активный спортсмен и большой любитель книг, особенно философии, а какие новые увлечения волнуют вас сегодня?

– Для чтения и спорта я всегда находил время. Занимался не только лыжами, хотя я, наверное, с ними родился, но и плаванием, и волейболом. В последнее время занимаюсь ходьбой и немного бегом. Спорт для меня не только физическое здоровье, но в какой-то мере «очищение мозгов». У меня были очень тяжелые заболевания, из которых мне помогли выйти физическая культура и вера в себя.

Продолжаю много читать и слушать музыку, в детстве я любил народные песни, а в нашей семье их всегда любили; отец хорошо пел, а мама была просто домашней песенной энциклопедией. Мы очень часто с сестрами и отцом пели, причем отец всегда обращал наше внимание на слова песни и возмущался, если наши интонации не соответствовали смыслу слов. Можно только выразить сожаление по поводу того, что сейчас отдается предпочтение иноязычным песням, которые исключают из воспитания человека слово. Через русскую песню смысл жизни входит в сознание человека сам собой, фоном. Но это тема отдельного разговора. Сейчас же меня больше привлекает опера, и я рад, что среди лучших голосов в мире много российских певцов, люблю и симфонические произведения. У меня дома хорошая фонотека. Очень привлекает философия, и когда я читаю какого-либо автора, то нахожу ему аналогию в конкретном музыкальном произведении.

– Большое спасибо!

Беседовала И.Н. Тихонова

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Рукописи, объемом не более 16 стр. и 8 рис. принимаются в редакцию в 2 вариантах: бумажном и электронном.

1. **Бумажный вариант** должен быть напечатан через 1,5 интервала и распечатан в 2-х экз. Если рисунки (только черно-белые!) не вставлены в текст, то они выполняются на отдельных страницах также в 2-х экз. Под рисунком указывается его номер, фамилии авторов, название статьи; подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.

Требования к оформлению текста. На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, краткая аннотация статьи с ключевыми словами, составленная по форме удобной для непосредственного включения ее в РЖ, издаваемые ВИНТИ.

К статье прилагаются в 1 экз.:

- перевод на английский язык названия статьи, инициалов и фамилий авторов, аннотации, **ключевых слов.**

- краткие сведения об авторах с фотографиями в графических форматах JPG, GIF и т.д., или сканированные с разрешением не менее 300dpi без дополнительной компьютерной обработки, **e-mail каждого автора и почтовый адрес организации.**

- *Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме:*

Сидоров Петр Иванович – родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИАН заведующим отделом. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1964) и доктора физико-математических наук (1977) в области теории колебаний и волн. Автор монографии «Детерминированный хаос и экономика» и учебника «Волны в экологии» (в соавторстве с...). Опубликовал 120 научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала International Journal of Chaos Theory и член редакционной коллегии журнала «Физика и жизнь».

В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке указываются:

а) для книг – фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;

б) для журнальных статей – фамилия автора, инициалы, название статьи, название журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;

в) для депонированных статей – название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;

г) для препринта – фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;

д) для материалов конференций, школ, семинаров – фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

В конце статьи авторы должны указать наименование программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.

2. **Электронный вариант.** Статья оформляется с использованием макропакета $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$. Рекомендуется пользоваться компилятором MiKTeX (MiKTeX2.4), так как именно им пользуются в редакции. В редакцию присылать только TEX-файл (с англ. аннотацией и ав. сведениями) без стилевых файлов и PDF статьи. Все иллюстрации, включенные в оригинал-макет, предоставляются в виде отдельных файлов, записанных в любом из форматов: TIFF, GIF, JPEG, EPS. Название файла должно соответствовать номеру рисунка в тексте.

В виде исключения принимаются статьи, подготовленные с помощью текстового редактора Microsoft Word (все формулы должны быть набраны при помощи Equation или MathType).

Все публикации в журнале, в том числе и публикации аспирантов, бесплатные.

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете $L^A T_E X$

Подписка на 2010 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498,
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2010 год 600 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 1.02.2010. Подписано к печати 15.03.2010
Формат 70x108/16. Бумага «Балет». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 13,65(9,75). Уч.-изд. л. 13,0. Тираж 200. Заказ 419

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2010
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2010