МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА
научно-технический журнал
издается с 1993 года
Выходит 6 раз в год Том 14, № 2, 2006, Саратов

С О Д Е Р Ж А Н И Е

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

Кузнецов А.П., Паксютов В.И. Динамика двух неидентичных связанных автоколебательных систем с удвоениями периода на примере осцилляторов Ресслера 3

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С. Аналитическое решение спектральной задачи для оператора Перрона – Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений 16

Кузнецов А.П., Мозекилде Э., Тюрюкина Л.В. Синхронизации в системе с двухмодовой динамикой 35

АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

Ефимов А.В., Шабунин А.В. Формирование и развитие пространственных структур в системе химических реакций на каталитической решетке: моделирование методом Монте-Карло 47

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ДЕЙСТВИИ

Иванов А.В., Короновский А.А., Минюхин И.М., Яшков И.А. Определение фрактальной размерности овражно-балочной сети города Саратова 64

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

Трубецков Д.И. Канонические модели нелинейной динамики в экономике 75

Кузнецов А.П., Савин А.В., Савин Д.В. Отображение Икеды: от диссипативного к консервативному случаю 94

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA

Малинецкий Г.Г. Воплощение одной мечты 107

DEPARTMENT OF EDUCATION OF RUSSIAN FEDERATION
Izvestiya VUZ
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS
scientific-technical journal
published since 1993

Published 6 times a year Vol. 14, № 2, 2006, Saratov

C O N T E N T S

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

Kuznetsov A.P., Paksyutov V.I. Dynamics of two nonidentical coupled self-sustained systems with period doublings on the example of Rössler oscillators 3

DETERMINISTIC CHAOS

Anikin V.M., Arkadaksky S.S., Remizov A.S. Analytical solution of spectral problem for the Perron – Frobenius operator of piece-wise linear chaotic maps 16

Kuznetsov A.P., Mosekilde E., Turukina L.V. Synchronization in systems with bimodal dynamics 35

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

Efimov A.V., Shabunin A.V. Formation and evolution of the spatial structures in the system of chemical reactions on the catalityc surface: Monte Carlo simulation 47

NONLINEAR DYNAMICS IN ACTION

Ivanov A.V., Koronovskii A.A., Minyuhin I.M., Yashkov I.A. Definition of the fractal dimension of Saratov ravine network 64

METHODICAL PAPERS IN NONLINEAR DYNAMICS

Trubetskov D.I. Canonical models of nonlinear dynamics in economics 75

Kuznetsov A.P., Savin A.V., Savin D.V. Conservative and dissipative dynamics of Ikeda map 94

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

Malinetskii G.G. The dream realization 107

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 2, 2006 УДК 517.9

ДИНАМИКА ДВУХ НЕИДЕНТИЧНЫХ СВЯЗАННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С УДВОЕНИЯМИ ПЕРИОДА НА ПРИМЕРЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ РЕССЛЕРА

А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов

Рассматривается система, состоящая из двух связанных осцилляторов Ресслера. Проводится подробное исследование устройства плоскости параметров, управляющих бифуркациями удвоения периода подсистем. Определяются режимы динамики в различных областях данной плоскости при помощи методов построения карт динамических режимов и карты старшего ненулевого ляпуновского показателя. Проводится сравнение картины синхронизации на плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов Ресслера с аналогичными картинами для более простых систем: связанных осцилляторов Ван дер Поля и связанных логистических отображений. При помощи расчета мультипликаторов исследуется устройство границ областей синхронизации, производится поиск последовательности точек бифуркаций коразмерности два.

Введение

В последнее время сложная динамика связанных систем исследовалась в большом количестве работ. Существенное место среди них занимают работы, в которых изучаются связанные осцилляторы либо отображения, демонстрирующие переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода при изменении некоторого управляющего параметра [1-7]. На сегодняшний день наиболее полно изучена динамика таких систем с идентичными по значению параметров подсистемами. Для них определены все возможные режимы динамики и сценарии перехода к хаосу [1,2,5,6]. Возможен, однако, альтернативный подход к исследованию систем, демонстрирующих удвоения периода. Действительно, каждая из подсистем характеризуется некоторым управляющим параметром, ответственным за удвоения. Будем теперь независимо регулировать каждый из этих параметров. Тогда естественным образом возникает задача об устройстве плоскости этих параметров. Одной из первых, выполненных в таком контексте, была работа [3], в которой изучалась система связанных неидентичных логистических отображений. Было показано, что в окрестности диагонали на плоскости управляющих параметров линии удвоений обрываются и возникает область квазипериодических движений. Более детально устройство этой области с

обсуждением особенностей языков синхронизации было проведено в [4]. Там же показано, что на плоскости управляющих параметров неидентичных связанных логистических отображений имеются специфические критические точки коразмерности два, к которым накапливаются точки обрыва линий удвоения периода. Представлены также плоскости параметров, управляющих удвоениями для связанных осцилляторов Дуффинга под внешним гармоническим воздействием. Для автоколебательных систем третьего порядка аналогичный подход был развит в работе [7], в которой было обнаружено, что в этом случае острова квазипериодичности располагаются вдали от диагонали на плоскости параметров, управляющих удвоениями. Однако детальное изучение возможных бифуркаций, типов критического поведения и обсуждение природы возникновения островов квазипериодичности проведено не было. В настоящей работе проводится подробный анализ режимов динамики в различных областях плоскости управляющих параметров системы связанных осцилляторов Ресслера, исследуется устройство картины бифуркаций, проводится сравнение плоскостей управляющих параметров связанных осцилляторов Ресслера, осцилляторов Ван дер Поля и системы связанных логистических отображений.

1. Устройство плоскости управляющих параметров

Система Ресслера является одним из классических объектов нелинейной динамики. Это искусственно сконструированная модель, которая имеет достаточно простой вид и при этом может демонстрировать хаотическое поведение [8]. Динамика автономного осциллятора Ресслера задается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay, \\ \frac{dz}{dt} &= b + (x - c)z, \end{aligned} \tag{1}$$

где x, y, z – динамические переменные; a, b, c – параметры. Чтобы организовать связь двух осцилляторов Ресслера, были введены дополнительные слагаемые, пропорциональные некоторому коэффициенту μ, во вторые уравнения систем автономных осцилляторов. Связь осуществляется по второй переменной $y_{1,2}$. В результате получили систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -y_1 - z_1, \\ \frac{dy_1}{dt} &= x_1 + a_1 y_1 + \mu(y_2 - y_1), \\ \frac{dz_1}{dt} &= b + (x_1 - c)z_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -y_2 - z_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= x_2 + a_2 y_2 + \mu(y_1 - y_2), \\ \frac{dz_2}{dt} &= b + (x_2 - c)z_2. \end{aligned} \tag{2}$$

В данном разделе статьи численно изучается динамика системы при различных значениях управляющих параметров a_1 и a_2, которые могут быть как близкими друг другу, так и сильно различающимися. Параметры b и c остаются неизменными. Выбраны такие их значения, для которых с увеличением управляющего параметра a динамика автономного осциллятора Ресслера (1) демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периода.

Начнем обсуждение с карт динамических режимов (рис. 1), полученных численно для плоскости управляющих параметров системы связанных осцилляторов Ресслера (2). Цифрами и соответствующими оттенками серого цвета обозначены периоды циклов, которые определялись в каждой точке плоскости параметров как количество пересечений аттрактора с сечением Пуанкаре. Белый цвет означает хаотическое либо квазипериодическое поведение системы.

Область синхронизации на карте динамических режимов имеет три части (назовем их «ветви»), две вытянуты вдоль координатных осей, одна – вдоль диагонали. Благодаря тому, что одиночный осциллятор Ресслера при увеличении управляющего параметра проходит полный каскад бифуркаций удвоения периода, переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода наблюдается также при движении вдоль любой из ветвей области синхронизации. Под термином «синхронизация» мы подразумеваем в данном случае такие режимы динамики, при которых частоты колебаний двух связанных осцилляторов совпадают либо кратны, а также режим хаотической синхронизации систем.

На карте динамических режимов (см. рис. 1) между ветвями области синхронизации расположены области белого цвета, режим динамики внутри которых (хаотический либо квазипериодический) неизвестен. С целью определения типа поведения системы внутри этих белых участков была построена карта старшего ненулевого ляпуновского показателя для той же плоскости управляющих параметров (рис. 2). На ней оттенками серого цвета показана величина старшего отличного от нуля ля-

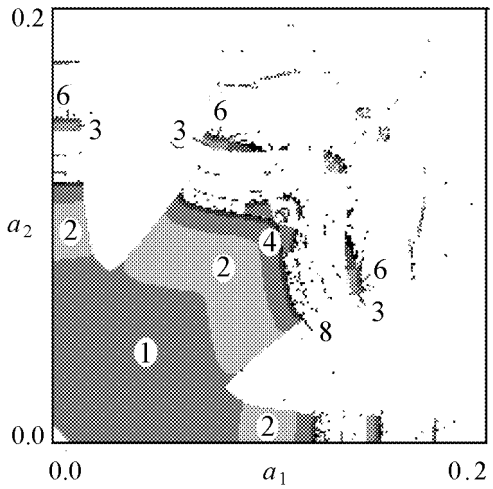


Рис. 1. Карта динамических режимов плоскости управляющих параметров системы связанных осцилляторов Ресслера (2), построенная при $\mu = 0.02$, $b = 0.1$, $c = 8.5$

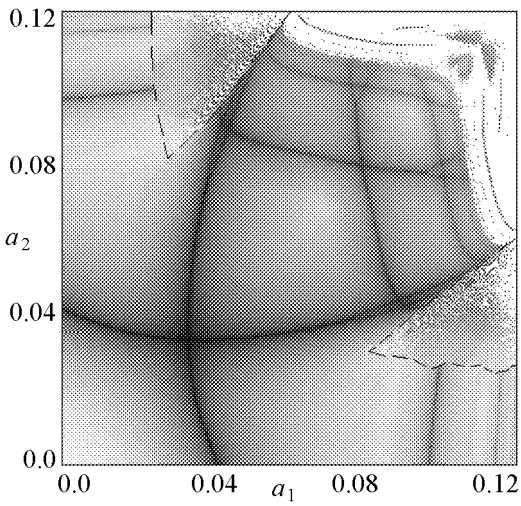


Рис. 2. Карта наибольшего ненулевого ляпуновского показателя системы (2). Значения параметров $\mu = 0.02$, $b = 0.1$, $c = 8.5$

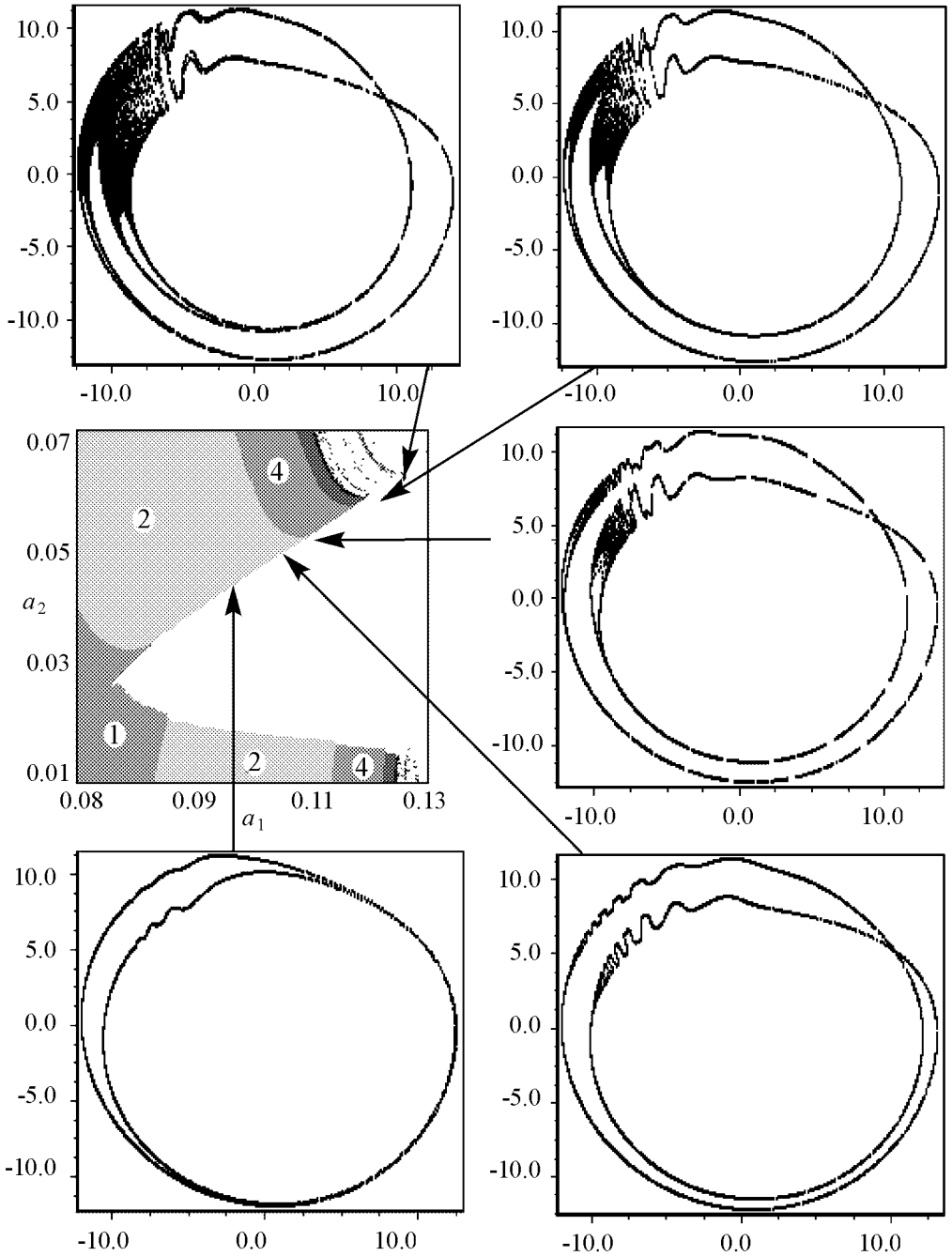


Рис. 3. Увеличенный фрагмент карты динамических режимов системы (2), содержащий область квазипериодических движений, и инвариантные кривые, построенные для различных точек плоскости управляющих параметров

пуновского показателя системы (2) при условии, что все показатели не больше нуля. Таким образом, понятно, что серый цвет соответствует периодическому или квазипериодическому аттрактору системы. Белый цвет означает, что, по крайней мере, один из показателей положителен и имеет место сложное поведение системы. Мы

не определяем, соответствует ли оно хаосу или гиперхаосу [9,10]. Границы области синхронизации на рис. 2, обозначенные штриховыми линиями, совпадают с границами, полученными методом построения карт динамических режимов (см. рис. 1).

На рис. 2 между ветвями области синхронизации можно видеть серый цвет, если значения управляющих параметров невелики. В то же время, анализ карты динамических режимов показывает, что в этих областях нет периодических движений. Таким образом, это могут быть только области квазипериодического поведения системы. Это, соответственно, приводит к выводу, что на боковых границах ветвей синхронизации, обозначенных штриховыми линиями на рис. 2, имеет место бифуркация перехода от периодического движения к квазипериодическому. Однако устройство этих границ требует проведения более тщательного исследования.

Ветви области синхронизации ограничены со стороны больших значений управляющих параметров белым цветом, где имеет место сложное поведение системы. Примечательно, что и области квазипериодики также ограничены сверху белым цветом, следовательно, на границе происходит переход к хаосу через разрушение квазипериодического движения. Этот сценарий перехода к хаосу не наблюдался для одиночного осциллятора Ресслера, однако стал возможен для связанной и существенно несимметричной системы. На рис. 3 приведены инвариантные кривые системы связанных осцилляторов Ресслера, построенные в сечении Пуанкаре для различных точек плоскости управляющих параметров, в которых динамика системы является квазипериодической или хаотической. Инвариантная кривая при увеличении управляющих параметров меняет свою форму, образуя «складки», которые затем становятся более плотными, происходит переход к хаосу, инвариантная кривая разрушается. Из рисунка можно заключить, что в системе возможна бифуркация удвоения разрушившихся торов, условия которой описываются в работе [11].

2. Сравнение с более простыми случаями

Бифуркационная картина на плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов Ресслера имеет общие черты как с устройством плоскости параметров, управляющих бифуркацией Андронова – Хопфа в связанных осцилляторах Ван дер Поля – Дуффинга, так и с устройством плоскости параметров связанных логистических отображений.

Устройство плоскости управляющих параметров системы, состоящей из двух осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга, связанных диссипативной связью, подробно исследовалось в работе [12]. На рис. 4, *а* приведена карта динамических режимов такой системы:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x + \beta x^3 + \mu(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}) = 0, \\ &\frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - y^2)\frac{dy}{dt} + y + \beta y^3 + \mu(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

На плоскости управляющих параметров λ_1 и λ_2, которые в этих осцилляторах отвечают за бифуркацию Андронова – Хопфа, за появление и размер предельного цикла подсистем, существует три ветви области синхронизации типа 1/1, а между ними – область квазипериодического поведения и множество узких языков кратной

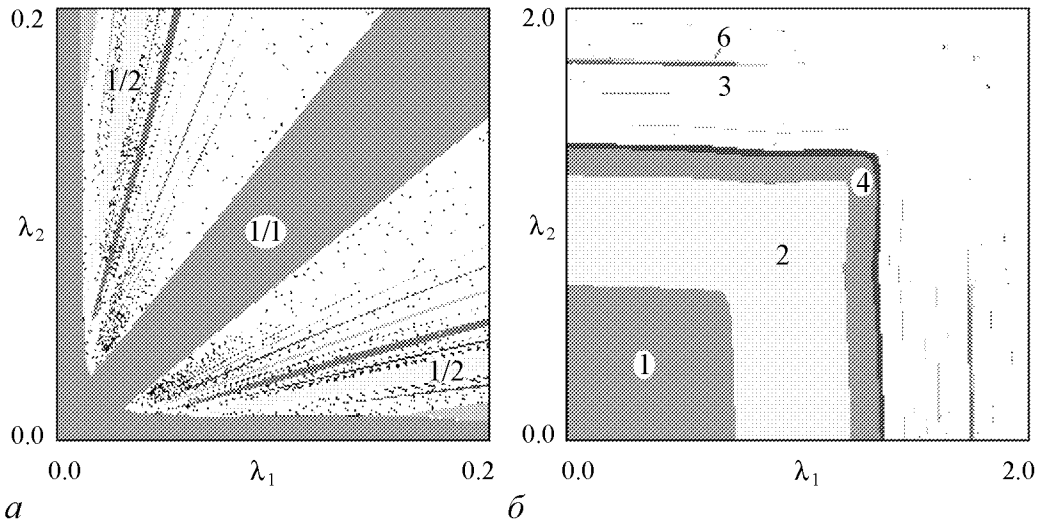


Рис. 4. Карты динамических режимов на плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга (3) для $\beta = 1$, $\mu = 0.3$ (*а*) и связанных логистических отображений (4) для значения коэффициента связи отображений $\varepsilon = 0.03$ (*б*)

синхронизации типа m/n, где m и n – целые числа. Ветви области синхронизации системы (3) не имеют внутренней структуры и представляют собой «лучи», уходящие на бесконечность. На представленной карте динамических режимов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга областей хаотического поведения нет. Сравнивая рис. 1 и рис. 4, *а* можно заключить, что появление областей квазипериодичности в связанных системах Ресслера обусловлено наличием в системе предельных циклов и аналогично механизму появления квазипериодичности в неидентичных связанных осцилляторах Ван дер Поля – Дуффинга.

Обратимся теперь к плоскости управляющих параметров связанных логистических отображений:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda_1 x_n^2 + \varepsilon(y_n - x_n), \\ y_{n+1} &= 1 - \lambda_2 y_n^2 + \varepsilon(x_n - y_n). \end{aligned} \tag{4}$$

На рис. 4, *б*, отвечающем небольшой связи $\varepsilon = 0.03$, имеет место единая область, в которой существует цикл периода 1. Она ограничена со стороны больших значений управляющих параметров линией бифуркации удвоения периода и областью существования цикла периода 2, которая, в свою очередь, ограничена областью цикла периода 4, и т.д. Линии бифуркаций удвоения периода накапливаются к линии Фейгенбаума, за которой поведение системы (4) становится хаотическим.

На плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов Ресслера (см. рис. 1), так же как для связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга (см. рис. 4, *а*), область синхронизации разделена на три ветви, однако они не являются лучами бесконечной длины, поскольку ограничены линиями Фейгенбаума аналогично случаю связанных логистических отображений (см. рис. 4, *б*). Внутри ветвей области синхронизации на плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов Ресслера имеет место каскад бифуркаций удвоения периода, также характерный для системы связанных логистических отображений. Следует отметить

тот факт, что при увеличении параметра связи осцилляторов Ресслера ветви области синхронизации расширяются и за счет своей конечной длины полностью сливаются друг с другом. Таким образом, линии Фейгенбаума, ограничивающие ветви, также сливаются в одну, и устройство плоскости параметров [7] становится полностью идентичным устройству плоскости параметров связанных логистических отображений, изображенному на рис. 4, *б*.

3. Устройство границ области синхронизации

Для описания устройства границ ветвей области синхронизации на рис. 5 представлены линии различных бифуркаций, которые найдены численно путем расчета мультипликаторов системы (2). На диаграмме показана только диагональная ветвь.

Для получения значений мультипликаторов проводился поиск точек пересечения траектории с сечением Пуанкаре $x_1 = 0$. Таким образом, мы изучали некое отображение пятого порядка, которое имеет в точности пять мультипликаторов, являющихся собственными значениями матрицы монодромии этого отображения. Чтобы вычислить значения производных, из которых составлена матрица монодромии, с течением времени отслеживались изменения величин набора малых возмущений траектории движения, заданных изначально в плоскости некоторого сечения Пуанкаре, путем решения системы (2) совместно с набором уравнений для флуктуаций (5) вплоть до следующего пересечения траектории с данным сечением Пуанкаре, и так далее несколько раз в зависимости от периода цикла.

$$
\begin{aligned}
\frac{d\tilde{x}_1}{dt} &= -\tilde{y}_1 - \tilde{z}_1,\\
\frac{d\tilde{y}_1}{dt} &= \tilde{x}_1 + a_1\tilde{y}_1 + \mu(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1),\\
\frac{d\tilde{z}_1}{dt} &= \tilde{x}_1 z_1 + \tilde{z}_1 x_1 - c\tilde{z}_1,\\
\frac{d\tilde{x}_2}{dt} &= -\tilde{y}_2 - \tilde{z}_2,\\
\frac{d\tilde{y}_2}{dt} &= \tilde{x}_2 + a_2\tilde{y}_2 + \mu(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2),\\
\frac{d\tilde{z}_2}{dt} &= \tilde{x}_2 z_2 + \tilde{z}_2 x_2 - c\tilde{z}_2.
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

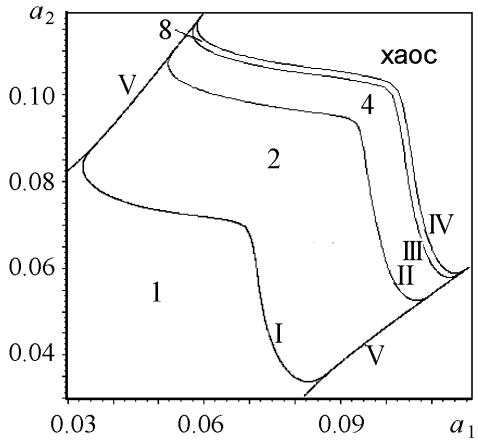


Рис. 5. Линии бифуркаций на плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов Ресслера. I, II, III, IV – линии бифуркаций удвоения периода. V – линии бифуркации жесткого перехода от периодического поведения к квазипериодическому. Арабские цифры обозначают периоды циклов. Значения параметров $\mu = 0.02$, $b = 0.1$, $c = 8.5$

Для устойчивости предельного цикла необходимо, чтобы все его мультипликаторы по модулю были меньше единицы. Суперкритическая бифуркация удвоения периода имеет место, когда наименьший действительный мультипликатор становится меньше минус единицы. Для бифуркации перехода от периодического движения к квазипериодическому необходимо, чтобы наибольший действительный мультипликатор обратился в единицу.

На рис. 5 цифрами I, II, III и IV обозначены линии бифуркаций удвоения периода циклов, имеющих периоды 1,2,4 и 8, соответственно. Если увеличивать од-

новременно оба управляющих параметра, наблюдается каскад этих бифуркаций и переход к хаосу. На линиях, обозначенных цифрой V, имеет место суперкритическая бифуркация жесткого перехода, если двигаться из области синхронизации. Если пересекать эти линии в противоположном направлении, происходит синхронизация через захват частоты. Необходимо отметить, что во всех областях на представленном участке плоскости управляющих параметров все пять корней соответствующего характеристического уравнения, являющиеся мультипликаторами, действительные.

На рис. 6, *а* и *б* показаны увеличенные фрагменты рис. 5, на рис. 6, *в* – схема, эквивалентная рис. 6, *б*. Цифрой I обозначена линия бифуркации удвоения периода цикла периода 1, которая пересекает в точках T_1 и T_2 линию перехода к квазипериодическому движению от циклов периода 1 (линия II) и периода 2 (линия III), соответственно. Внутри треугольника MT_1T_2 оба предельных цикла периода 1 и 2 устойчивы. Они реализуются при различных начальных условиях. В этой области наблюдается мультистабильность. На всем протяжении линии I на рис. 6, за исключением отрезка T_1T_2, происходит суперкритическая бифуркация удвоения периода. На отрезке T_1T_2 происходит субкритическая бифуркация удвоения периода.

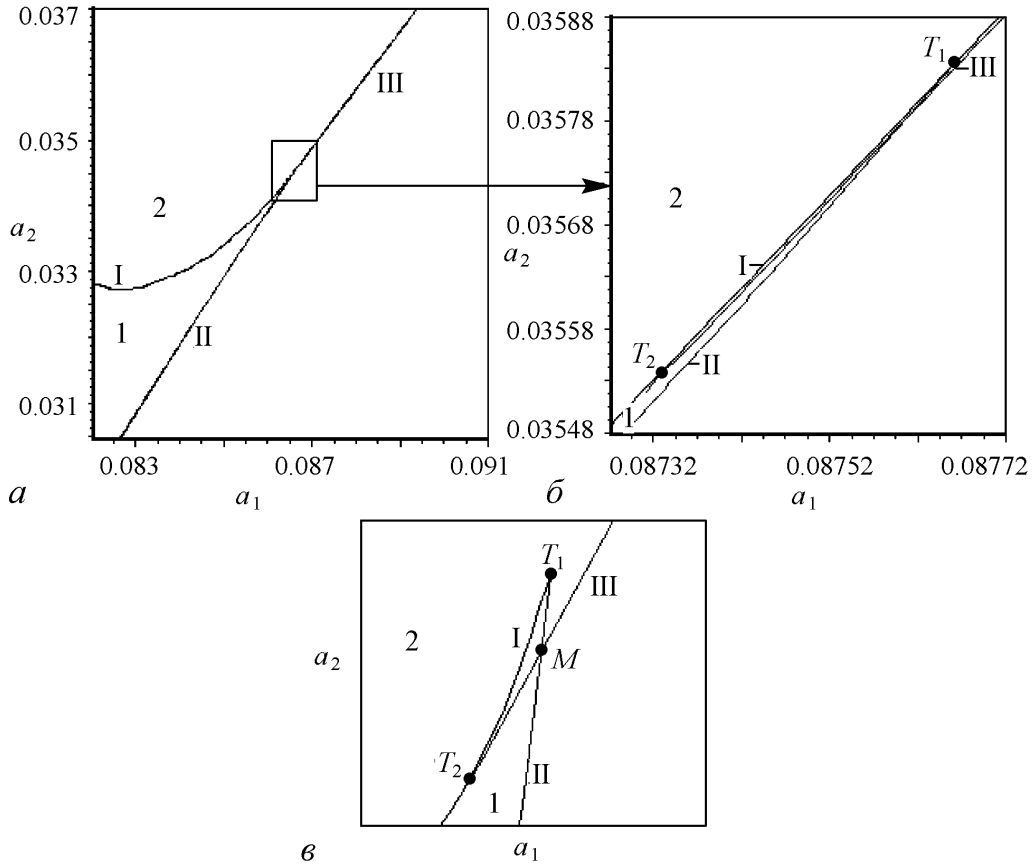


Рис. 6. Линии бифуркаций на плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов Ресслера: *а*, *б* – построенные численно с различным масштабом; *в* – показанные схематически в окрестности точек T_1 и T_2 бифуркаций коразмерности 2. I – линия бифуркации удвоения периода. II, III – линии бифуркаций перехода от периодических движений с периодами циклов 1 и 2, соответственно, к квазипериодическому поведению. Значения параметров $\mu = 0.02$, $b = 0.1$, $c = 8.5$

Устройство бифуркационной картины вблизи пересечения линий удвоения периода 2 и линий бифуркации жесткого перехода оказывается идентичным структуре, показанной на рис. 6. Отчасти аналогичное устройство бифуркационной картины было обнаружено для системы Ресслера под внешним гармоническим воздействием [13].

В точке T_1 на рис. 6 имеет место бифуркация коразмерности 2, где наибольший мультипликатор цикла периода 1 обращается в единицу, а наименьший равен минус единице. Численно найдена последовательность точек типа T_1 для циклов с периодами 1,2,4,8 и 16, представленная в таблице. (Значения параметров $\mu = 0.02$, $b = 0.1$, $c = 8.5$.)

Таблица

Период цикла	Значения управляющих параметров	
	a_1	a_2
1	0.87617	0.035816
2	0.109722	0.053413
4	0.116812	0.058778
8	0.118244	0.059874
16	0.118394	0.059987

В пределе эта последовательность точек сходится к критической точке, которая, как и в случае неавтономной системы Ресслера, является точкой так называемого С-типа критичности [13]. Она является концевой для фейгенбаумовской линии, располагающейся внутри области синхронизации. (К сожалению, из-за погрешности компьютерного счета, возрастающей с ростом периода цикла, невозможно определить бифуркационные точки высокого порядка и обосновать свойства универсальности в данном случае.)

4. Мультистабильность на плоскости управляющих параметров осцилляторов

Авторы работы [5,6] показали, что любая система, состоящая из двух идентичных связанных осцилляторов, демонстрирующих переход к хаосу через удвоение периода, имеет два аттрактора: симметричный и несимметричный, соответствующие синфазной и противофазной синхронизации системы. Оба аттрактора возникают, когда некий управляющий параметр превышает значение, соответствующее бифуркации Хопфа или бифуркации удвоения периода рассматриваемых осцилляторов в несвязанном состоянии. При слабой связи и постепенном увеличении управляющего параметра несимметричный аттрактор становится хаотическим через квазипериодический переход к хаосу, в то время как симметричный аттрактор – через каскад бифуркаций удвоения периода, как и в несвязанных осцилляторах. Несимметричный аттрактор может также становиться хаотическим через последовательность бифуркаций удвоения периода, однако доказано, что такое поведение не является всеобщим.

Появление этих двух аттракторов может быть продемонстрировано, в частности, и на примере симметричной системы связанных осцилляторов Ресслера (2) с равными по значению управляющими параметрами двух подсистем $a_1 = a_2 = a$. На рис. 7, *а* и *б* приведены бифуркационные деревья, иллюстрирующие эволюцию симметричного и несимметричного аттракторов этой системы при увеличении управляющего параметра. Эти диаграммы получены численно путем достаточно длительного наблюдения за динамикой системы для каждого значения управляющего параметра и выбора последней полученной точки аттрактора в качестве начальных значений для расчета при немного измененном значении параметра a. При расчете

диаграммы на рис. 7, *а* мы стартовали от наименьшего значения управляющего параметра и постепенно его увеличивали, а для получения бифуркационного дерева на рис. 7, *б*) – от наибольшего значения параметра и его уменьшали. Бифуркационное дерево на рис. 7, *а*, которое полностью идентично бифуркационному дереву для одиночного осциллятора Ресслера, демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периода системы, поскольку при синфазной синхронизации после длительного переходного процесса устанавливается ситуация, когда $y_1 = y_2$, и, следовательно, осцилляторы не могут влиять друг на друга. Для асимметричного решения (см. рис. 7, *б*) напротив, не наблюдаются удвоения для циклов периода 2 и выше. Вместо этого при увеличении a происходит бифуркация Хопфа предельного цикла, и плотно заполненная точками часть бифуркационного дерева на рис. 7, *б* соответствует квазипериодическому поведению системы (2). Этот сценарий перехода к хаосу в связанных системах различной природы был детально изучен [5]. Для меньших значений управляющих параметров цикл периода 2 асимметричного решения является неустойчивым, и единственным устойчивым решением становится симметричный аттрактор.

Таким образом, численное исследование идентичных связанных систем Ресслера демонстрирует, что симметричное и несимметричное решения могут быть

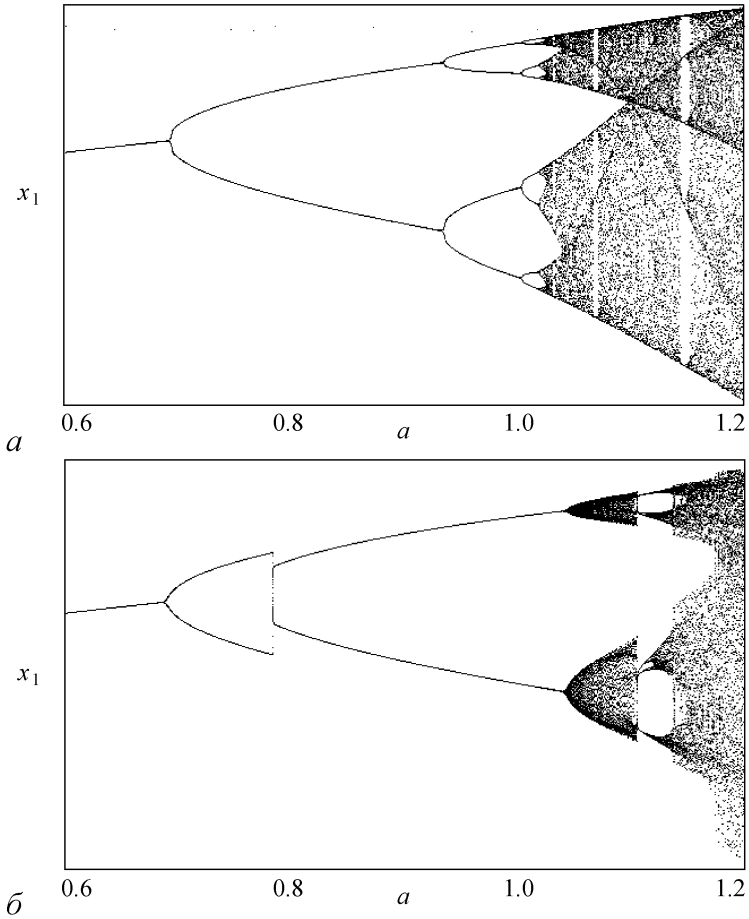


Рис. 7. Бифуркационные деревья системы связанных осцилляторов Ресслера. Значения параметров $\mu = 0.02$, $b = 0.1$, $c = 8.5$

устойчивыми для одних и тех же значений управляющего параметра и могут быть получены путем выбора различных начальных условий.

Обратимся теперь к ситуации, когда $a_1 \neq a_2$ и формы предельных циклов двух связанных осцилляторов различны даже при синфазной синхронизации. В этом случае уже нельзя говорить о симметричном и асимметричном решениях. Тем не менее может иметь место синфазная синхронизация либо фазовая синхронизация с отличной от нуля разностью фаз (несинфазная синхронизация). На рис. 8 приведена карта динамических режимов системы связанных осцилляторов Ресслера на плоскости управляющих параметров и увеличенный фрагмент ее центральной части. Она построена на той же плоскости и для тех же значений параметров, что и на рис. 1, однако карты на рис. 1 и рис. 8 различны, поскольку иллюстрируют два различных «слоя», соответствующие двум сосуществующим аттракторам системы (2). Аттрактор на рис. 1 характеризуется синфазным типом синхронизации и в случае равных управляющих параметров осцилляторов становится симметричным. Второй аттрактор (см рис. 8) характеризуется несинфазным типом фазовой синхронизации и соответствует асимметричному решению при $a_1 \neq a_2$.

Штриховыми линиями на рис. 8, *б* обозначены линии, на которых асимметричный аттрактор становится неустойчивым при движении в сторону уменьшения управляющих параметров a_1 и a_2. Это линии складок и они пересекаются в точке сборки.

Белый цвет в середине области противофазной синхронизации соответствует квазипериодическому поведению системы и можно видеть, что для связанных осцилляторов с немного различными управляющими параметрами может иметь место квазипериодический переход к хаосу, если эти параметры одновременно возрастают. (Стоит отметить, что именно такой тип квазипериодического поведения наблюдался в [3,4] на примере связанных логистистических отображений.) Однако, если управляющие параметры будут различаться сильнее, появляется фейгенбаумовский каскад, поскольку область, соответствующая асимметричному аттрактору, частично ограничена снаружи линиями Фейгенбаума (см. рис. 8, *б*).

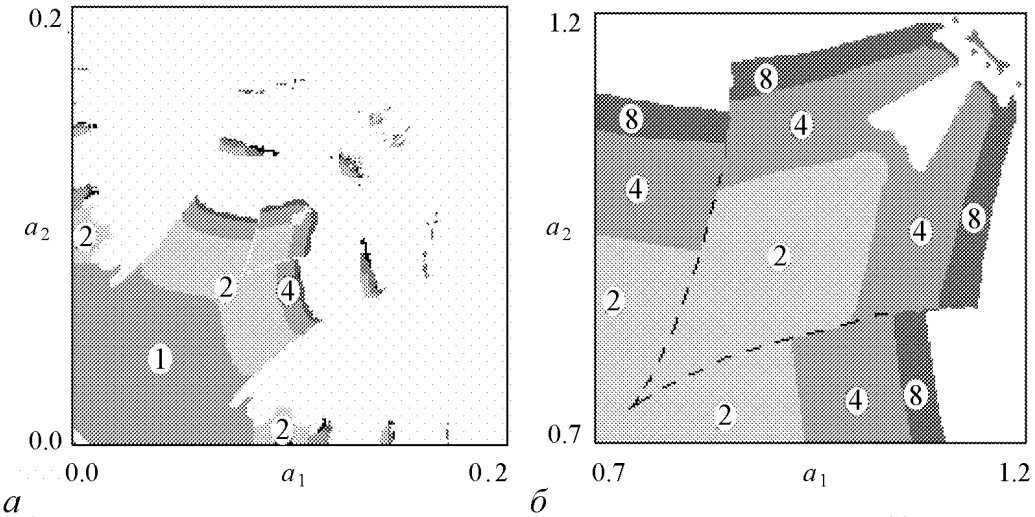


Рис. 8. Карта динамических режимов на плоскости управляющих параметров системы (2) и ее увеличенный фрагмент. Значения параметров $\mu = 0.02$, $b = 0.1$, $c = 8.5$

5. Заключение

Проведено исследование плоскости управляющих параметров неидентичных связанных осцилляторов Ресслера, являющихся классическими в нелинейной динамике системами третьего порядка, способными демонстрировать переход к хаосу через удвоения периода. Обнаружены общие черты устройства бифуркационных картин связанных осцилляторов Ресслера, а также связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга и связанных логистических отображений. Исследование границ области синхронизации показало наличие сложной структуры линий и точек бифуркаций в окрестностях критических точек коразмерности два, являющихся концевыми для фейгнебаумовских линий. Можно ожидать, что аналогичные элементы устройства плоскости управляющих параметров будут характерны для других систем связанных осцилляторов третьего порядка.

Работа поддержана грантами CRDF REC-006, РФФИ – 03-02-16074.

Библиографический список

1. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999.
2. *Mosekilde E., Maistrenko Y., Postnov D.* Chaos synchronization. Application to living systems // World Scientific Series on Nonlinear Science. 2002. Series A. Vol. 42. P. 440.
3. *Jian-Min Yuan, Mingwhei Tung, Da Hsuan Feng, and Lorenzo M. Narducci.* Instability and irregular behaviour of coupled logistic equations // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 28, № 3. P. 1662.
4. *Кузнецов А.П., Седова Ю.В., Сатаев И.Р.* Устройство пространства управляющих параметров неидентичных связанных систем с удвоениями периода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 5. С. 46.
5. *Reike C., Mosekilde E.* Emergence of quasiperiodicity in symmetrically coupled, identical period-doubling systems // Phys. Rev. E52. 1995. P. 1418.
6. *Rasmussen J., Mosekilde E., Reick C.* Bifurcations in two coupled Rössler systems // Mathematics and Computers in Simulation. 1996. Vol. 40. P. 247.
7. *Иванченко М.В., Осипов Г.А., Шалфеев В.Д.* Иерархии регулярной и хаотической синхронизации в системе связанных осцилляторов Ресслера // Труды (шестой) научной конференции по радиофизике / Ред. А.В. Якимов. Н. Новгород, 2002. С.114.
8. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
9. *Yanchuk S., Maistrenko Y., Mosekilde E.* Loss of synchronization in coupled Rössler systems // Physica D. 2001. Vol. 154. P. 26.
10. *Yanchuk S., Kapitaniak T.* Chaos-hyperchaos transition in coupled Rössler systems // Physics Letters A. 2001. Vol. 290. P. 139.
11. *Stagliano J., Wersinger J., Slaminka E.* Doubling bifurcations of destroyed tori // Physica D. 1996. Vol. 92. P. 164.
12. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Особенности устройства пространства параметров двух неидентичных связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 4. С. 3.

13. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Universality and scaling for the breakup of phase synchronization at the onset of chaos in a periodically driven Rössler oscillator // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, № 4, 046214.

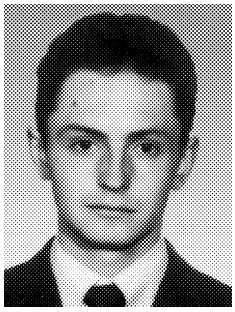
Саратовский филиал ИРЭ РАН *Поступила в редакцию* *28.11.2005*
После доработки *25.02.2006*

DYNAMICS OF TWO NONIDENTICAL COUPLED SELF-SUSTAINED SYSTEMS WITH PERIOD DOUBLINGS ON THE EXAMPLE OF RÖSSLER OSCILLATORS

A.P. Kuznetsov, V.I. Paksyutov

The system of two coupled Rössler oscillators is considered. Detailed investigation is carried out on the plane of parameters which control the period-doubling bifurcations in the subsystems. Dynamical regimes in different points of the control parameter plane are determined using the methods of the bifurcation plot and the highest nonzero Lyapunov exponent plot computation. The synchronization picture of two coupled Rössler oscillators is compared with synchronization pictures of more simple systems: two coupled Van der Pol oscillators and coupled logistic maps. The boundary structure of synchronization areas is investigated by calculation of the system multiplicators, and the sequence of codimension-two points is found.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики». E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.tserv.ru



Паксютов Владимир Игоревич – родился в Саратове (1982). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского в 2004 году. Аспирант кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается научной работой по направлению: динамические режимы и синхронизация в автоколебательных системах различной природы. С 2000 года – постоянный участник ежегодной научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых», принял участие в нескольких международных конференциях. Имеет 10 научных публикаций.

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 2, 2006 УДК 531.19

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ПЕРРОНА – ФРОБЕНИУСА КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В.М. Аникин, С.С. Аркадакский, А.С. Ремизов

Исследуются спектральные свойства линейного несамосопряженного оператора Перрона – Фробениуса для кусочно-линейного пилообразного отображения, ветви которого имеют одинаковый по модулю тангенс угла наклона и переводят отрезок своего определения на единичный интервал. Показано, что для произвольного числа ветвей отображения полиномиальные собственные функции оператора представляются (в зависимости от четности или нечетности числа ветвей) многочленами Бернулли, Эйлера или их линейной комбинацией. Соответствующие собственные числа выражаются через отрицательные степени числа ветвей отображения. Для отображения с нечетным числом ветвей и нулевым значением итеративной функции в нуле собственные числа являются кратными. Переход к инверсному отображению устраняет кратность собственных чисел оператора. Результаты получены методом, основанным на построении специальной аналитической производящей функции для собственных функций оператора Перрона – Фробениуса. Знание решения спектральной задачи для кусочно-линейного отображения автоматически позволяет записать точное решение спектральной задачи для любых топологически сопряженных отображений, а также найти аналитическое представление для автокорреляционной функции траекторий и корреляционных функций связанных с ними наблюдаемых.

Введение

Как известно, одномерные отображения являются простейшими моделями динамического хаоса [1–7]. Со временем они не утратили своего и научного, и методологического значения для нелинейной науки. Собственно, первые серьезные шаги на пути ее изучения и начинаются со сценария М. Фейгенбаума перехода к хаосу, обнаруженного впервые именно для одномерных отображений. Второй важный пример связан с развивавшейся коллективом авторов во главе с И.Р. Пригожиным

фундаментальной концепцией определяющей роли хаоса в возникновении «стрелы времени» (необратимости физических процессов при наличии обратимого характера уравнений движения) с привлечением в качестве базового объекта теории простейшего диадического отображения (сдвига Бернулли) [6]. Интересен, далее, тот факт, что парадигма детерминированного хаоса заняла свою нишу в общей теории относительности, когда была открыта хаотическая осцилляция компонент метрического тензора согласно одномерному отображению Гаусса в однородной анизотропной космологической модели типа IX по Бианки вблизи особенности Mixmaster Universe – «перемешанный мир» [8, 9].

Привлекательные черты «малоразмерной нелинейной динамики» не исчерпываются конкретными применениями соответствующих моделей для описания нерегулярных процессов. Специфика отображений малой размерности заключается и в том, что в ряде случаев возможно *точное (аналитическое)* вычисление основных траекторных, вероятностных и спектральных характеристик отображений, включая нахождение точного решения задачи о скорости установления равновесного состояния в динамической системе, скорости расцепления корреляций траекторий отображения и корреляций возможных наблюдаемых, соотнесенных с этой траекторией. Аналитические решения для хаотических динамических систем, характеризуемых чувствительностью к начальным условиям и параметрам, отличаются высшей степенью достоверности, поскольку могут быть подвергнуты соответствующим проверкам вплоть до подстановки решений в исходные уравнения и организации эквивалентных аналитических вычислений[1]. Исследование более сложных систем численными методами в связи с конечностью множества машинных чисел и ограниченной разрядностью представления чисел в компьютере[2] может сталкиваться с большими проблемами, вплоть до появления результатов, на самом деле являющихся машинными «фантомами» [11]. В этой ситуации представляет несомненный интерес глубокое математическое исследование «классики» нелинейных явлений как собственно математического объекта, так и в роли возможного инструмента для анализа новых нелинейных явлений.

Ключевым моментом при аналитическом исследовании автокорреляционных и асимптотических свойств одномерных хаотических отображений является нахождение решения спектральной задачи для оператора Перрона – Фробениуса исследуемого отображения, то есть определение собственных функций и собственных чисел этого оператора [12]. Для сдвигов Бернулли, $x_{n+1} = Gx_n \mod 1$, где G – произвольное положительное число, и инверсных сдвигов Бернулли, $x_{n+1} = 1 - Gx_n \mod 1$, решение спектральной задачи для соответствующего оператора Перрона – Фробениуса получено [13, 14], причем в [12, 14, 15] предложена регулярная процедура для решения этой задачи, основанная на построении производящих функций для полиномиальных собственных функций оператора. В данной статье рассматриваются некоторые общие свойства подобных функций и *впервые полностью* решается задача аналитического нахождения собственных функций и собственных чисел для

[1]Например, знание точного траекторного решения позволяет вычислить инвариантную плотность [2], которая, в свою очередь, является неподвижной точкой оператора Перрона – Фробениуса и т.п.

[2]Машинные числа – это конечный набор рациональных чисел, для которого не гарантировано выполнение правил арифметики, и результат существенно зависит от диапазона задания операндов (см., к примеру, [10]).

оператора Перрона – Фробениуса пилообразного и инверсного пилообразного отображений с *произвольным* коэффициентом (числом ветвей). До настоящего времени были известны лишь частные случаи решения подобной задачи – для пирамидального отображения (tent map) [16] и отображений с 3–6 кусочно-линейными составляющими итеративной функции [12, 17, 18]. В данной работе удалось унифицировать процедуру решения спектральной задачи и представить решение в виде, справедливом для отображения с любым числом кусочно-линейных участков итеративной функции «пилообразного» отображения.

1. Производящие функции для полиномиальных собственных функций и полиномиального ядра оператора Перрона – Фробениуса и их свойства

Рассмотрим одномерное отображение, определенное на единичном интервале,

$$x_{n+1} = f(x_n; \mu), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x_n \in (0, 1), \tag{1}$$

где $f(x)$ – нелинейная или кусочно-линейная итеративная функция; μ – параметр отображения, при котором (1) обладает хаотическими свойствами [1–7], в частности, характеризуемыми наличием инвариантной плотности $\psi_0(x; \mu)$. В дальнейшем явную запись параметра μ при записи траекторных, вероятностных и спектральных характеристик отображения будем опускать. Одна из форм записи соответствующего данному отображению линейного оператора Перрона – Фробениуса, характеризующего закон трансформации вероятностных распределений $\rho_n(x)$ случайных величин

$$X_n = f^n(X_0) = \underbrace{f(f(\ldots f(X_0)))}_{n\ раз}$$

под действием итераций, имеет вид [1–6, 19–22]:

$$\rho_{n+1}(x) = P\rho_n(x) = \int\limits_0^1 \delta(x - f(\xi))\rho_n(\xi)d\xi. \tag{2}$$

Для конкретного отображения интеграл в правой части (2), благодаря фильтрующим свойствам δ-функции, легко вычисляется на каждом из подынтервалов монотонного изменения итеративной функции, что дает представление для оператора в форме функционального соотношения.

Инвариантная плотность $\psi_0(x)$ является неподвижной точкой оператора Перрона – Фробениуса ($P\psi_0(x) = \psi_0(x)$), а все остальные его собственные функции по определению удовлетворяют уравнению

$$P\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x) \equiv \int\limits_0^1 \delta(x - f(\xi))\psi_n(\xi)d\xi, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где λ_n – собственное число, отвечающее собственной функции $\psi_n(x)$. Собственные функции оператора Перрона – Фробениуса подчиняются также дополнительному соотношению

$$\int\limits_0^1 \psi_n(x)dx = \delta_{n,0} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{4}$$

($\delta_{m,n}$ – символ Кронекера). В самом деле, поскольку для любого значения $\xi \in (0,1)$ итеративная функция хаотического отображения (1) не выводит точку за пределы единичного интервала ($f(\xi) \in (0,1)$), то $\int\limits_0^1 \delta\,(x - f(\xi\,))dx = 1$, и при интегрировании (3) на единичном интервале получим

$$\lambda_n \int\limits_0^1 \psi_n(x)dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \delta(x - f(\xi))\psi_n(\xi)d\xi dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \psi_n(\xi)d\xi \int\limits_0^1 \delta(x - f(\xi))dx = \int\limits_0^1 \psi_n(x)dx.$$

Отсюда (при $\lambda_n \neq 0$) и следует (4). Соотношение (4) в частных случаях удовлетворяется для полиномов Бернулли $B_n(x)$, являющихся собственными функциями для сдвигов Бернулли [6], и собственных функций отображения Гаусса $x_{n+1} = 1/x_n \mod 1, \quad x_n \in (0,1)$ [22].

Введем теперь в рассмотрение производящую функцию для собственных функций оператора Перрона – Фробениуса, то есть некоторую аналитическую функцию, разложение которой в ряд Тейлора в качестве коэффициентов эти собственные функции и имеет. Итак, будем называть производящей функцией для системы собственных функций $\psi_k(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$, оператора Перрона – Фробениуса такую функцию $\Psi(x,t)$, разложение которой в ряд по степеням t *при достаточно малых* t (обеспечивающих сходимость ряда) имеет вид:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{5}$$

Если в соотношении (5) положить $x = 0$, то получаемая функция от t

$$\Psi(0,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(0)\frac{t^n}{n!} \tag{6}$$

будет играть роль производящей функции для последовательности чисел $\psi_k(0)$[3].

Из соотношения (4) следует, что производящая функция (5) удовлетворяет условию нормировки:

$$\int\limits_0^1 \Psi(x,t)dx = 1. \tag{7}$$

Выделив из производящей функции стандартным образом четную и нечетную части (по параметру t),

$$\Psi_e(x,t) = \frac{1}{2}\left(\Psi(x,t) + \Psi(x,-t)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k}(x)\frac{t^{2k}}{(2k)!}, \tag{8}$$

[3]Употребление слова «функция» по отношению к (5) или (6) отнюдь не означает, что речь идет о вычислении (5) или (6) в какой-либо точке t_0! Переменная t здесь является формальной, и сумма ряда $\Psi(0,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \psi_n(0)\frac{t_0^n}{n!}$ смысла не имеет.

$$\Psi_o(x,t) = \frac{1}{2}\left(\Psi(x,t) - \Psi(x,-t)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k+1}(x) \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{9}$$

и учитывая, что в четную часть входит нулевая (по порядку) собственная функция (инвариантная плотность), для функций (8) и (9) получим следующие интегральные соотношения:

$$\int_0^1 \Psi_e\,(x,t)\,dx = 1, \tag{10}$$

$$\int_0^1 \Psi_o\,(x,t)\,dx = 0. \tag{11}$$

В последующих разделах статьи будут найдены собственные функции и собственные числа оператора Перрона – Фробениуса для некоторых достаточно общих разновидностей хаотических кусочно-линейных отображений с равномерным инвариантным распределением – пилообразного и инверсного к нему отображений. Линейные ветви этих отображений имеют одинаковые по модулю тангенсы угла наклона и переводят отрезок своего определения полностью на единичный интервал.

Приобретенный авторами опыт позволяет сформулировать следующий универсальный сценарий решения спектральных задач для эволюционных операторов подобных кусочно-линейных отображений.

1. Выбор в качестве собственных функций оператора Перрона – Фробениуса целых рациональных функций – алгебраических многочленов (значения их коэффициентов в последующем подлежат определению)

$$\psi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_n = 1. \tag{12}$$

Подобный выбор собственных функций обусловлен тем, что оператор Перрона – Фробениуса преобразует аргумент функции, на которую он действует, по линейному закону, что не приводит к изменению степени полинома (структуры функции) и позволяет надеяться на «восстановление» полинома с численным корректирующим множителем после действия оператора.

2. Определение структуры собственных чисел оператора в результате подстановки многочленов как собственных функций в уравнение (3). Достигается это приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях независимой переменной x в левой и правой частях (3).

3. Выдвижение предположения о структуре производящей функции для собственных функций оператора Перрона – Фробениуса. Формулировка (на основе конкретного вида оператора (3)) функциональных уравнений для компонент (8), (9) производящей функции и их решение с учетом найденных на предыдущем этапе значений собственных чисел и условий (10), (11).

Почему мы говорим о построении особой производящей функции? Естественно, коэффициенты полиномов, определяющих собственные функции оператора Перрона – Фробениуса, могут последовательно находиться из решения линейной системы уравнений, получаемых приравниванием в (3) коэффициентов при идентичных

степенных функциях. Но, во-первых, каждая собственная функция требует составления именно «своей» системы уравнений, а во-вторых, общее число таких систем является, в принципе, бесконечным. При введении производящей функции данные технические «силовые» приемы решения спектральной задачи обходятся, хотя уровень сложности в интеллектуальном плане даже, пожалуй, и повышается, поскольку успех в решении задачи связан с решением функциональных уравнений относительно четной и нечетной составляющих производящей функции.

Следует подчеркнуть, что условия (7), (10) и (11) являются общими, то есть они должны выполняться для *любого* отображения. Разумно попытаться (на основе априорного предположения о полиномиальном характере собственных функций) выбрать вполне определенный способ представления либо для производящей функции в целом, либо для ее четной и нечетной частей:

$$\Psi(x,t) = e^{xt}G(t); \tag{13}$$

$$\Psi_e\,(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{xt}G_1(t) + e^{-xt}G_1(-t)\right); \tag{14}$$

$$\Psi_o\,(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{xt}G_2\,(t) - e^{-xt}G_2\,(-t)\right) \tag{15}$$

(функции $G(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$ предполагаются дифференцируемыми). Подстановка (14)-(15) соответственно в (10) и (11) приводит к общим уравнениям, которым должны удовлетворять функции $G(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$:

$$G(t) = \frac{t}{e^t - 1}; \tag{16}$$

$$\frac{e^t - 1}{2t}\left(G_1\,(t) + e^{-t}G_1\,(-t)\right) = 1; \tag{17}$$

$$G_2(t) - e^{-t}G_2(-t) = 0 \tag{18}$$

(при исключении значения $t = 0$). Интересно, что решение (16) дает представление $\Psi(x,t)$ в форме производящей функции для полиномов Бернулли, что соответствует хаотическим отображениям в виде сдвигов Бернулли. Уравнения (17) и (18) должны использоваться при решении спектральных задач для кусочно-линейных отображений, отличных от сдвигов Бернулли, в сочетании с уравнением (3).

Представления (14) и (15) в виде произведения экспоненты $\exp(\pm xt)$ на функцию $G_1(t)$ или $G_2(t)$, зависящую только от параметра t, позволяет формулировать уравнения относительно $G_1(t)$ и $G_2(t)$, исходя из (3), в виде

$$F_1(G_1(t))F\left(e^{xt}, e^{-xt}\right) = 0, \;\; F_2(G_2(t))F\left(e^{xt}, e^{-xt}\right) = 0 \tag{19}$$

(F, F_1, F_2 – некоторые функции), то есть сводить, по существу, задачу к решению уравнений

$$F_1(G_1(t)) = 0 \;\text{ и }\; F_2(G_2(t)) = 0. \tag{20}$$

Попутно легко вычисляются возникающие суммы с помощью элементарной формулы суммирования для геометрической прогрессии.

Можно отметить, что решение уравнения (17) в виде $G_1(t) = mt/(e^{mt} - 1)$ существует для двух значений – $m = 1$ и $m = 2$:

$$G_1(t) = \frac{t}{e^t - 1}; \tag{21}$$

$$G_1(t) = \frac{2t}{e^{2t} - 1} = \frac{t}{e^t - 1} - \frac{t}{e^t + 1}. \tag{22}$$

Уравнению (17) отвечает и решение

$$G_1(t) = \frac{2t}{e^{2t} - 1} e^t = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{e^t + 1}. \tag{23}$$

Решение же уравнения (18) в форме $G_2(t) = mt/(e^{mt} - 1)$ или $G_2(t) = (m+1)/(e^{mt} + 1)$ существует только при $m = 1$:

$$G_2(t) = \frac{t}{e^t - 1}, \tag{24}$$

$$G_2(t) = \frac{2}{e^t + 1}. \tag{25}$$

2. Решение спектральной задачи для пилообразного отображения

В этом разделе мы ставим целью нахождение полиномиальных собственных функций оператора Перрона – Фробениуса (2) для кусочно-линейного пилообразного отображения, характеризуемого следующими друг за другом участками линейного возрастания и убывания итеративной функции, и для произвольного числа N ветвей монотонного изменения функции, представляемого в виде

$$x_{n+1} = f(x_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left((-1)^k N x_n + (-1)^{k+1} \left(k + \frac{1 - (-1)^k}{2} \right) \right) \Theta_k(x), \tag{26}$$

где $\Theta_k(x)$ – индикаторная функция сегмента $[k/N, (k+1)/N)$, то есть

$$\Theta_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [k/N,\ (k+1)/N), \\ 0, & x \notin [k/N,\ (k+1)/N). \end{cases}$$

На рис. 1 показан частный вид (26) для $N = 5$. Отображению (26) отвечает оператор Перрона – Фробениуса

$$P_{(N)} \varphi\,(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \varphi \left(\frac{1}{N} \left((-1)^k x + k + \frac{1 - (-1)^k}{2} \right) \right). \tag{27}$$

Неподвижной точкой этого оператора, как нетрудно убедиться, является плотность равномерного распределения $\psi_0(x) = \Theta_{0,1}(x)$, где $\Theta_{0,1}(x)$ – индикаторная (характеристическая) функция единичного отрезка.

Случаи четного и нечетного числа ветвей в отображении (27) удобнее рассматривать по отдельности.

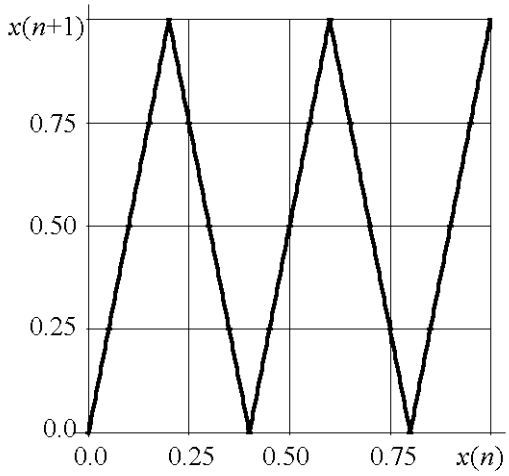


Рис. 1. Пилообразное отображение с пятью кусочно-линейными ветвями

2.1. Пилообразное отображение с четным числом ветвей. Оператор Перрона – Фробениуса (27) в этом случае переписывается как

$$P_{(N)}\varphi(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N/2-1}\varphi\left(\frac{x+2k}{N}\right) + \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N/2-1}\varphi\left(\frac{2(k+1)-x}{N}\right). \tag{28}$$

Тогда из (3) получим следующее уравнение, связывающее собственные функции $\psi_k(x)$ и собственные числа λ_k оператора:

$$\lambda_n\psi_n(x) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N/2-1}\varphi_n\left(\frac{x+2k}{N}\right) + \sum_{k=0}^{N/2-1}\varphi_n\left(\frac{2k+2-x}{N}\right)\right]. \tag{29}$$

Согласно описанной в разделе 1 схеме будем искать собственные функции оператора (29) в виде многочлена (12). Подставляя (12) в (29) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим прежде всего соотношение для собственных чисел оператора

$$\lambda_n = \frac{1}{N}\left[\sum_{l=0}^{N/2-1}\frac{1}{N^n} + \sum_{l=0}^{N/2-1}\frac{(-1)^n}{N^n}\right]. \tag{30}$$

Таким образом, собственные числа с четными индексами (отвечающие четным по порядку собственным функциям) $n = 2l,\ l = 0, 1, 2, \ldots$, выражаются как

$$\lambda_{2l} = \frac{1}{N^{2l}}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{31}$$

а в случае нечетных номеров, $n = 2l+1,\ l = 0, 1, 2, \ldots$, собственные числа равны нулю

$$\lambda_{2l+1} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \ldots. \tag{32}$$

Собственные функции с четными индексами удовлетворяют уравнению (29) с четными n; найдем уравнение для их производящей функции $\Psi_e(x,t)$. Для этого (см.

(8)) умножим (29) для $n = 2l$ на $t^{2l}/(2l)!$ и просуммируем по l от 0 до ∞. С учетом (31) получим следующее уравнение:

$$\Psi_e\left(x,t\right) = \frac{1}{N}\left[\sum_{l=0}^{N/2-1}\Psi_e\left(\frac{x+2l}{N}, Nt\right) + \sum_{l=0}^{N/2-1}\Psi_e\left(\frac{2l+2-x}{N}, Nt\right)\right]. \tag{33}$$

Производящую функцию $\Psi_e(x,t)$ будем искать в форме (14). Вспомогательная функция $G_1(t)$ должна одновременно удовлетворять уравнению (17) и уравнению, получаемому подстановкой (14) в (33),

$$G_1\left(t\right) = \frac{1}{N}\left(G_1\left(Nt\right)\frac{e^{Nt}-1}{e^{2t}-1} + G_1\left(-Nt\right)e^{-2t}\frac{e^{-Nt}-1}{e^{-2t}-1}\right). \tag{34}$$

Таким согласованным решением, как можно проверить непосредственной подстановкой, является (22).

Перед тем как записать окончательное выражение для производящей функции $\Psi_e(x,t)$, вспомним, что производящие функции для полных систем неортогональных на единичном сегменте полиномов Бернулли $B_n(x)$ и Эйлера $E_n(x)$ определяются следующим образом [25]:

$$B(x,t) = \frac{te^{xt}}{e^t-1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}, |t| < 2\pi \tag{35}$$

и

$$E\left(x,t\right) = \frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n\left(x\right)}{n!}t^n, \quad |t| < \pi. \tag{36}$$

Соответственно, можно записать и производящие функции для полиномов Бернулли и Эйлера с четными и нечетными индексами

$$B_e(x,t) = \frac{1}{2}\left(B(x,t) + B(x,-t)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}(x)}{(2n)!}t^{2n}, \tag{37}$$

$$B_o(x,t) = \frac{1}{2}\left(B(x,t) - B(x,-t)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n+1}(x)}{(2n+1)!}t^{2n+1}, \tag{38}$$

$$E_e(x,t) = \frac{1}{2}\left(E(x,t) + E(x,-t)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}E_{2n}(x)\frac{t^{2n}}{(2n)!}, \tag{39}$$

$$E_o(x,t)\frac{1}{2}\left(E(x,t) - E(x,-t)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}E_{2n+1}(x)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{40}$$

С использованием (35)–(40), можно записать выражение для производящей функции собственных функций оператора Перрона – Фробениуса пилообразного отображения с четным числом ветвей в форме линейной комбинации производящих функций для полиномов Бернулли с четными индексами и полиномов Эйлера с нечетными индексами:

$$\Psi_e\left(x,t\right) = B_e\left(\frac{x}{2}, 2t\right) = B_e(x,t) - \frac{t}{2}E_o(x,t) = B_e(x,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial E_e(x,t)}{\partial x}. \tag{41}$$

Следовательно, по определению (5) производящей функции собственные функции оператора Перрона – Фробениуса (28) могут рассматриваться как следующая комбинация полиномов Бернулли и Эйлера:

$$\psi_{2l}(x) = B_{2l}(x) - lE_{2l-1}(x) = B_{2l}(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}E_{2l}(x), \quad l = 1, 2, \ldots. \tag{42}$$

Производные от полиномов Эйлера [25] и их производящей функции введены в (41) и (42) для симметрии записи по нижним индексам.

С учетом уже известного результата (31) для собственных чисел оператора решение задачи на собственные функции оператора Перрона – Фробениуса (28) для пилообразного отображения с четным числом ветвей можно считать законченным. Интересно также выявить роль полиномов Бернулли и Эйлера в контексте исследования оператора (28). Покажем, что эти полиномиальные функции образуют ядро (нуль-пространство) линейного оператора (28). Подействовав оператором (28) на производящую функцию вида (15), получим

$$P_{(N)}\Psi_0(x,t) = \big(G_2(t) - e^{-t}G_2(-t)\big)\,\frac{1-e^t}{2N}\,\frac{e^{xt/N} + e^{(2-x)t/N}}{1-e^{2t/N}}. \tag{43}$$

Когда функция $G_2(t)$ определена формулами (24) или (25), выполняется (18) и соотношение (43) обращается в ноль. А это и означает, что производящими функциями полиномиального ядра оператора Перрона – Фробениуса (28) являются производящие функции (38) и (40) для полиномов Бернулли и Эйлера с нечетными индексами

$$P_{(N)}B_o(x,t) = 0; \quad P_{(N)}E_o(x,t) = 0. \tag{44}$$

Решение спектральной задачи в форме значений собственных чисел (31), (32) линейного оператора Перрона – Фробениуса и его полиномиальных собственных функций (42) и нуль-пространства $B_{2k+1}(x)$, $E_{2k+1}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ справедливо для произвольного четного количества ветвей отображения N. Так, для пирамидального отображения (tent map), формируемого двумя кусочно-линейными ветвями $(N = 2)$, собственные функции определяются выражениями (42), а соответствующие собственные числа равны $\lambda_{2k} = 1/2^{2k}$.

2.2. Пилообразное отображение с нечетным числом ветвей. Рассмотрим теперь отображение (26) с кусочно-линейной итерируемой функцией, имеющей нечетное число отрезков монотонности. Оператор Перрона – Фробениуса в этом случае удобно представить в виде таких двух сумм:

$$P_{(N)}\varphi\,(x) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{(N-1)/2}\varphi\left(\frac{x+2k}{N}\right) + \sum_{k=0}^{(N-1)/2-1}\varphi\left(\frac{2k+2-x}{N}\right)\right]. \tag{45}$$

Уравнение (3), определяющее собственные функции, запишется в виде

$$\lambda_n\psi_n\,(x) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{(N-1)/2}\psi_n\left(\frac{x+2k}{N}\right) + \sum_{k=0}^{(N-1)/2-1}\psi_n\left(\frac{2k+2-x}{N}\right)\right]. \tag{46}$$

В случае полиномиальных собственных функций, как и в предыдущем случае, соотношение (46) позволяет получить следующее выражение для собственных чисел оператора:

$$\lambda_n = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{(N-1)/2}\frac{1}{N^n} + \sum_{i=0}^{(N-1)/2-1}\frac{1}{(-N)^n}\right]. \tag{47}$$

При четном индексе $n = 2k$ выражение (47) сводится к результату (31), $\lambda_n = 1/N^n$, а вот нечетному индексу n отвечает значение собственного числа

$$\lambda_n = \frac{1}{N^{n+1}}, n = 2l + 1 \ (l = 0, 1, 2, \ldots). \tag{48}$$

Сравнивая (31) и (48), можно заметить, что в случае нечетного числа ветвей отображения (26) собственные числа оператора имеют кратность 2: любому собственному числу будут соответствовать две собственные функции – полином с четной нумерацией и полином с нечетной нумерацией.

Получим полиномиальное представление для собственных функций, найдя их производящие функции для четных и нечетных индексов. На основе (47) получим следующее уравнение для производящей функции собственных функций с четными индексами:

$$\Psi_e\left(x,t\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{(N-1)/2}\Psi_e\left(\frac{x+2k}{N}, Nt\right) + \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{(N-1)/2-1}\Psi_e\left(\frac{2k+2-x}{N}, Nt\right). \tag{49}$$

Для производящей функции, порождающей собственные функции с нечетными индексами, получаем несколько иное функциональное уравнение:

$$\Psi_o\left(x,t\right) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2}\Psi_o\left(\frac{x+2k}{N}, Nt\right) + \sum_{k=0}^{(N-1)/2-1}\Psi_o\left(\frac{2k+2-x}{N}, Nt\right). \tag{50}$$

Четную и нечетную производящие функции будем искать в виде (14) и (15), соответственно. Уравнение для $G_1(t)$, дополнительное к (17), получается подстановкой (14) в (49)

$$G_1\left(t\right) = \frac{1}{N}\frac{1}{e^{2t}-1}\left(G_1(Nt)\left(e^{(N+1)t}-1\right) - G_1(-Nt)\left(e^{-(N-1)t}-1\right)\right). \tag{51}$$

Уравнениям (17) и (51) удовлетворяет функция (21), то есть четной производящей функцией для собственных функций оператора (45) является производящая функция (37) для полиномов Бернулли с четными индексами

$$\Psi_e\left(x,t\right) = B_e\left(x,t\right), \tag{52}$$

а решение спектральной задачи представляется в форме

$$\psi_n(x) = B_n(x), \quad \lambda_n = \frac{1}{N^n}, \quad n = 2l, \quad l = 1, 2, \ldots. \tag{53}$$

Получим теперь явное выражение для нечетной части производящей функции $\Psi_o\,(x,t)$, подставив (18) в уравнение (45). Получим

$$G_2(t) = \frac{1}{e^{2t}-1}\left(G_2(Nt)\left(e^{(N+1)t}-1\right) + G_2(-Nt)\left(e^{-(N-1)t}-1\right)\right). \qquad (54)$$

Решение, удовлетворяющее как (18), так и (54), имеет вид (25), что дает для производящей функции следующее представление:

$$\Psi_o\,(x,t) = E_o\,(x,t)\,. \qquad (55)$$

Это означает, что собственными функциями оператора (50) являются также полиномы Эйлера с нечетными индексами

$$\psi_n(x) = E_n(x), \quad \lambda_n = \frac{1}{N^{n+1}}, \quad n = 2l-1, \quad l = 1,2,\ldots,\ . \qquad (56)$$

Так, для трехзвенного отображения $(N = 3)$ каждому собственному числу $1/3^{2n}$ оператора Перрона – Фробениуса будут отвечать две собственные функции: $B_{2n}(x)$ и $E_{2n+1}(x)$.

Кратность собственных чисел оператора Перрона – Фробениуса (50) позволяет конструировать его собственные функции посредством линейной комбинации собственных функций – полиномов с четными и нечетными номерами, которым отвечают одинаковые собственные числа, например, в форме (42) (этому результату соответствует решение (22) для уравнения (17)).

3. Решение спектральной задачи для инверсного пилообразного отображения

На единичном сегменте отображение, инверсное к некоторому отображению $x_{n+1} = f(x_n), \quad x_n \in (0,1)$, определим как

$$x_{n+1} = \tilde{f}(x_n) = 1 - f(x_n), \quad x_n \in (0,1). \qquad (57)$$

Итеративную функцию инверсного пилообразного отображения можно представить в виде

$$x_{n+1} = \tilde{f}(x_n) = \sum_{k=0}^{N-1}\left(1-(-1)^k N x_n - (-1)^{k+1}\left(k + \frac{1-(-1)^k}{2}\right)\right)\Theta_k(x) \qquad (58)$$

(на рис. 2 показано пятизвенное инверсное отображение). Оператор Перрона – Фробениуса, отвечающий (57), имеет вид

$$\tilde{P}_{(N)}\rho\,(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\rho\left(\frac{1}{N}\left((-1)^k(1-x) + k + \frac{1-(-1)^k}{2}\right)\right). \qquad (59)$$

Процесс нахождения собственных чисел и полиномиальных собственных функций оператора (59) полностью совпадает с ходом решения аналогичной задачи для «исходного» отображения, но результаты для оператора (59) будут заметно отличаться от результатов раздела 2. Рассмотрим, как и выше, случаи четного и нечетного числа ветвей N монотонности исследуемого отображения (58).

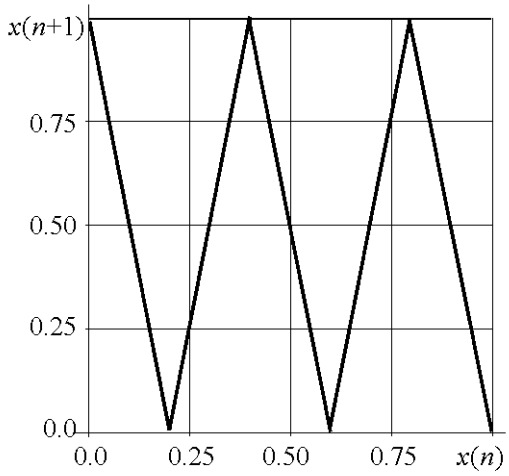


Рис. 2. Инверсное кусочно-линейное отображение с пятью ветвями

3.1. Инверсное отображение с четным числом ветвей. Для четного N оператор Перрона – Фробениуса (59) переписывается следующим образом:

$$\tilde{P}_{(N)}\rho\,(x) = \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N/2-1}\rho\left(\frac{x+2k+1}{N}\right) + \sum_{k=0}^{N/2-1}\rho\left(1-\frac{x+2k+1}{N}\right)\right), \qquad (60)$$

а уравнение (3), определяющее собственные функции, –

$$\lambda_n\psi_n(x) = \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N/2-1}\psi_n\left(\frac{x+2k+1}{N}\right) + \sum_{k=0}^{N/2-1}\psi_n\left(1-\frac{x+2k+1}{N}\right)\right). \qquad (61)$$

Как и в подразделе 2.1, в случае полиномиальных собственных функций собственные числа оператора (60) представляются формулами (31) и (32).

Последующие рассмотрения проводятся по уже введенному выше сценарию. Производящая функция для собственных функций с четными номерами, удовлетворяющая уравнению

$$\Psi_e(x,t) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=0}^{N/2-1}\Psi_e\left(\frac{x+2k+1}{N}, Nt\right) + \sum_{k=0}^{N/2-1}\Psi_e\left(1-\frac{x+2k+1}{N}, Nt\right)\right), \qquad (62)$$

ищется в виде (14). Уравнение для вспомогательной функции $G_1(t)$, дополнительное к (17), следует из (62):

$$G_1(t) = \frac{1}{N}\left(G_1(Nt)\frac{e^{(1+N)t}-e^t}{e^{2t}-1} - G_1(-Nt)\frac{e^{(1-N)t}-e^t}{e^{-2t}-1}\right). \qquad (63)$$

Решением, удовлетворяющим одновременно (17) и (55), будет функция (23), а соответствующая производящая функция будет иметь вид

$$\Psi_e(x,t) = B_e\,(x,t) + \frac{t}{2}E_0(x,t) = B_e(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial E_o(x,t)}{\partial x}. \qquad (64)$$

В качестве собственных функций производящая функция (64) дает комбинацию полиномов Бернулли и Эйлера

$$\psi_{2n}(x) = B_{2n}(x) + \frac{t}{2}E_{2n-1}(x) = B_{2n}(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial E_{2n}(x)}{\partial x}, \tag{65}$$

отличающуюся знаком от результата (42), полученного для исходного отображения (26) с четным числом ветвей.

Нуль-пространство оператора (60) в классе полиномиальных функций представляют многочлены Бернулли и многочлены Эйлера с нечетными индексами. В самом деле, действуя оператором (60) на производящую функцию вида (15), по аналогии с (43) можно получить

$$\tilde{P}_{(N)}\Psi_0(x,t) = \left(G_2(t) - e^{-t}G_2(-t)\right)\frac{1-e^t}{2N}\frac{e^{(x+1)t/N} + e^{(-x+1)t/N}}{1-e^{2t/N}}. \tag{66}$$

Для функций $G_2(t)$ в форме (24) или (25) выполняется (18), а вслед за этим (66) обращается в нуль, что и доказывает сделанное утверждение относительно нуль-пространства оператора (60). Производящими функциями для элементов нуль-пространства являются производящие функции для многочленов Бернулли и Эйлера с нечетными индексами (38) и (40).

3.2. Инверсное пилообразное отображение с нечетным числом ветвей. Рассмотрим теперь инверсное отображение (58) с нечетным числом ветвей $N \geq 3$. Оператор Перрона – Фробениуса подобного отображения представляется в виде следующих двух сумм:

$$\tilde{P}_{(N)}\rho\,(x) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{(N-1)/2-1}\rho\left(\frac{x+2k+1}{N}\right) + \sum_{k=0}^{(N-1)/2}\rho\left(\frac{2k+1-x}{N}\right)\right]. \tag{67}$$

Уравнение, соответствующее (3) и определяющее собственные функции оператора (67), запишется в виде

$$\lambda_n\psi_n\,(x) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{(N-1)/2-1}\psi_n\left(\frac{x+2k+1}{N}\right) + \sum_{k=0}^{(N-1)/2}\psi_n\left(\frac{2k+1-x}{N}\right)\right], \tag{68}$$

что в случае полиномиальных собственных функций оператора позволяет получить представление для соответствующих собственных чисел в виде

$$\lambda_n = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{(N-1)/2-1}\frac{1}{N^n} + \sum_{k=0}^{(N-1)/2}\frac{1}{(-N)^n}\right] = \frac{1}{N}\left[\frac{N-1}{2}\frac{1}{N^n} + \frac{N+1}{2}\frac{1}{(-N)^n}\right]. \tag{69}$$

То есть для четных $n = 2k$ собственные числа сугубо положительны и имеют вид (28), а для нечетных $n = 2k+1$ они являются отрицательными

$$\lambda_{2l} = \frac{1}{N^{2l}}, \quad l = 0,1,2,\ldots; \quad \lambda_{2k+1} = -\frac{1}{N^{2k+2}},\ k = 0,1,\ldots\ . \tag{70}$$

Следовательно, при инверсии пилообразного отображения с нечетным числом ветвей монотонности все собственные числа оператора Перрона – Фробениуса становятся простыми (кратности 1).

Найдем соответствующие собственные функции оператора. Уравнения для четной и нечетной составляющих производящей функции имеют вид:

$$\Psi_e(x,t) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{(N-1)/2-1} \Psi_e\left(\frac{x+2k+1}{N}, Nt\right) + \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \Psi_e\left(\frac{2k+1-x}{N}, Nt\right)\right], \tag{71}$$

$$\Psi_o(x,t) = -\sum_{k=0}^{(N-1)/2-1} \Psi_o\left(\frac{x+2k+1}{N}, Nt\right) - \sum_{k=0}^{(N-1)/2} \Psi_o\left(\frac{2k+1-x}{N}, Nt\right). \tag{72}$$

Как и выше, считаем, что эти функции ищутся в виде (14) и (15). В результате подстановки (14) в (71) с учетом (68) найдем уравнение для вспомогательной функции $G_1(t)$:

$$G_1(t) = \frac{1}{N}\frac{1}{e^{2t}-1}\left(G_1(Nt)\left(e^{Nt}-e^t\right) - G_1(-Nt)\left(e^{-Nt}-e^t\right)\right). \tag{73}$$

Согласованным решением функциональных уравнений (17) и (73) является (21), что соответствует производящей функции $\Psi_e(x,t)$ в форме производящей функции для полиномов Бернулли с четными индексами (см. (52), (53)).

В результате подстановки (15) в (72) определяется уравнение для функции $G_2(t)$:

$$G_2(t) = -\frac{1}{e^{2t}-1}\left(G_2(Nt)\left(e^{Nt}-e^t\right) + G_2(-Nt)\left(e^{-Nt}-e^t\right)\right), \tag{74}$$

решением которого является (25). Это означает, что производящей функцией для собственных функций с нечетными индексами является производящая функция для полиномов Эйлера с нечетными индексами, которые и являются решением спектральной задачи (см. (55) и (56)).

Заключение

В работе впервые аналитически найдены собственные числа и собственные функции оператора Перрона – Фробениуса для пилообразных отображений (26) и (58), инверсных друг другу (в смысле равенства (57)) в случае произвольного числа ветвей (вид отображений для $N = 5$ показан на рис. 1 и 2). Решение спектральной задачи в классе целых функций получено оригинальным методом – посредством введения аналитических производящих функций для полиномиальных собственных функций названного оператора. Краткий «путеводитель» по результатам статьи можно представить следующей табличкой:

Отображение	Число ветвей N	Собственные числа	Полиномиальные собственные функции	Полиномиальное ядро
(26)	четное	(30)-(32)	(41), (42)	нет
(26)	нечетное	(31), (48)	(52)-(56)	нет
(58)	четное	(30)-(32)	(64), (65)	(38), (40)
(58)	нечетное	(31), (70)	(52)-(56)	(38), (40)

Собственные функции оператора Перрона – Фробениуса для пилообразных отображений представляются полиномами Бернулли, полиномами Эйлера или их комбинациями. Вид собственных функций различен для отображений с четными и нечетными ветвями, но в пределах одного класса отображений (с четным или нечетным числом ветвей) число ветвей не влияет на представление собственных функций – они описываются едиными аналитическими выражениями (подобным же свойством обладает оператор Перрона – Фробениуса для сдвигов Бернулли).

Собственные числа во всех случаях представляются сходными по структуре выражениями (отрицательные степени числа ветвей отображения). Для отображения (26) в случае четного числа ветвей собственные числа являются кратными; им соответствует двумерное подпространство собственных функций. В случае инверсного отображения (58) с четным числом ветвей собственные числа, будучи знакопеременными, становятся простыми (кратности 1).

На основании существующих связей [23] между полиномами Бернулли и Эйлера найденные собственные функции операторов Перрона – Фробениуса могут быть представлены в альтернативных формах. Так, например, комбинация полиномов Бернулли и Эйлера может быть заменена полиномом Бернулли половинного аргумента (см. (41)).

Решение спектральных задач для операторов Перрона – Фробениуса кусочно-линейных отображений открывает перспективы для точного решения, по крайней мере, следующих трех классов задач:

1) нахождение собственных чисел и функций отображений, связанных с рассмотренными кусочно-линейными отображениями (26) и (58) обратимыми дифференцируемыми преобразованиями, а именно: собственные числа операторов Перрона – Фробениуса топологически сопряженных отображений совпадают, а в выражении для собственных функций соответствующим образом меняется лишь аргумент [14];

2) нахождение автокорреляционных функций орбит и корреляционных функций наблюдаемых, связанных с траекториями отображений, поскольку эти расчеты сводятся к выявлению результатов многократного действия оператора Перрона – Фробениуса на соответствующие функции независимой переменной и интегрированию этих результатов по инвариантной плотности [12];

3) аналитическое исследование перемешивающих свойств отображений на основе представления начальных распределений формулами Эйлера – Маклорена [14], в том числе и посредством замещения полиномов Бернулли в оригинальной формуле Эйлера – Маклорена на полиномы Эйлера.

Естественным обобщением рассматриваемых отображений являются кусочно-линейные отображения, в которых возрастающие и убывающие ветви чередуются в произвольном порядке, и отображения с «неполными» (не переводящими подынтервал своего определения на единичный интервал) ветвями. К аналитическому решению спектральных задач для операторов Перрона – Фробениуса подобных отображений мы обратимся в следующей работе.

Библиографический список

1. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
2. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 240 с.
3. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
4. *Малинецкий Г.Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 356 с.
5. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Курс лекций. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
6. *Пригожин И.Р., Стенгерс И.* Время, хаос, квант. К решению парадокса времени. М.: Прогресс, 1994. 272 с.
7. *Короновский А.А., Трубецков Д.И.* Нелинейная динамика в действии. Саратов: ГосУНЦ Колледж, 2002. 324 с.
8. *Лифшиц Е.М., Халатников И.М., Синай Я.Г., Ханин К.М, Щур Л.Н.* О стохастических свойствах релятивистских космологических моделей вблизи особой точки // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38. С. 79.
9. *Голубенцев А.Ф.*, *Аникин В.М.* О хаотической модели ранней эволюции Вселенной // Радиотехника. 2005. № 4. С. 50.
10. *Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И.* Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988. 456 с.
11. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. Гл. 9.
12. *Голубенцев А.Ф.*, *Аникин В.М.* Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений// Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 1-2. С. 3.
13. *Antoniou I., Tasaki S.* Generalized spectral decomposition of mixing dynamical systems // Int. J. Quantum Chemistry. 1993. Vol. 46. P. 425.
14. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Аркадакский С.С.* О некоторых свойствах оператора Фробениуса – Перрона для сдвигов Бернулли // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8. № 2. С. 67.
15. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M., and Arkadaksky S.S.* On the convergence of non-stationary solutions of the Frobenius – Perron equations to the invariant density // Proceedings of 2nd International Conference «Control of Oscillation and Chaos». 2000 / Edited by F.L. Chernousko and A.L. Fradkov. S.-Petersburg. Vol. 1. P. 142.
16. *Dörfle M.* Spectrum and eigenfunctions for the Frobenius – Perron operator of the tent map // J. Stat. Phys. 1985. Vol. 40. №1/2. P. 93.

17. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Аркадакский С.С.* Сопряженные хаотические отображения: построение, траекторные, вероятностные и спектральные характеристики // Проблемы современной физики. К 90-летию Саратовского государственного университета и 40-летию сотрудничества ОИЯИ – СГУ / Под ред. А.Н.Сисакяна и Д.И. Трубецкова. Дубна: ОИЯИ, 2000. С. 172.
18. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Барулина Ю.А.* К решению спектральной задачи для эволюционного оператора методом производящих функций // Моделирование: Сб. науч. статей / Под ред. проф. Б.Е. Железовского. Саратов: Исток-С, 2002. С. 24.
19. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.
20. *Бланк Л.М.* Устойчивость и локализация в хаотической динамике. М.:МЦНМО, 2001. 352 с.
21. *Lasota A., Mackey M.C.* Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. Ch.4.
22. *Iosifescu M., Kraaikamp C.* Metrical Theory of Continued Fractions. Kluwer Boston, Inc. 2002. Chps. 1, 2.
23. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Ред. М. Абрамовиц и И. Стиган. Пер. с англ. М.: Наука, 1979.

Саратовский государственный университет

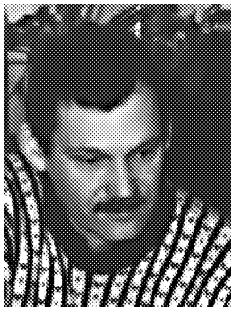
Поступила в редакцию 24.03.2006

ANALYTICAL SOLUTION OF SPECTRAL PROBLEM FOR THE PERRON – FROBENIUS OPERATOR OF PIECE-WISE LINEAR CHAOTIC MAPS

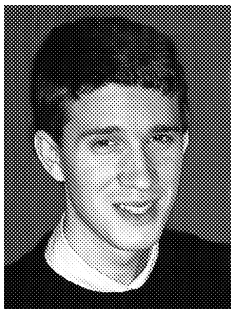
V.M. Anikin, S.S. Arkadaksky, A.S. Remizov

Spectral properties of the linear non-self-adjoint Perron – Frobenius operator of piece-wise linear chaotic maps having regular structure are investigated. Eigenfunctions of the operator are found in the form of Bernoulli and Euler polynomials. Corresponding eigenvalues are presented by negative powers of number of map brunches. The solution is obtained in general form by means of generating functions for eigenfunctions of the operator. Expressions for eigenfunctions and eigenvalues are different for original and inverse maps having even and odd number of branches. Results allow us to find analogous solution of the spectral problem for conjugate maps and to calculate analytically decay of correlations for such chaotic dynamical systems.

Аникин Валерий Михайлович – родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет СГУ (1970). Доктор физико-математических наук (2005), доцент кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ, заместитель декана физического факультета СГУ по научной работе, ученый секретарь докторского диссертационного совета по специальностям радиофизика, физическая электроника, оптика, твердотельная электроника. В 2000-2003 гг. исполнял обязанности секретаря Всемирной международной конференции по вакуумным источникам электронов (IVESC). Область научных интересов – аналитические модели хаотических и стохастических процессов. Автор 5 монографий и 80 статей.
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru; ivesc@sgu.ru



Аркадакский Сергей Сергеевич – родился в Саратове (1949). Окончил физический факультет СГУ (1971). Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ, заместитель декана физического факультета СГУ по общим вопросам. Область научных интересов – электроника СВЧ, нелинейная динамика.



Ремизов Александр Сергеевич – родился в Саратове (1980). Окончил физический факультет СГУ (2002). Ассистент кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ, аспирант заочной аспирантуры. Область научных интересов – хаотическая динамика, включая вопросы хаотической криптографии.

.

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 2, 2006 УДК 517.9

СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМЕ С ДВУХМОДОВОЙ ДИНАМИКОЙ

А.П. Кузнецов, Э. Мозекилде, Л.В. Тюрюкина

На примере простейшей модели системы с двухмодовой динамикой рассматривается синхронизация различных временных масштабов. Исследуется переход между синхронными и несинхронными хаотическими режимами. Показано, что этот переход связан с потерей синхронным хаотическим аттрактором своей многоленточной структуры.

Введение

Синхронизация – фундаментальное нелинейное явление. Она является предметом интенсивных исследований в различных областях науки и техники [2–5,25]. Наибольший интерес представляет синхронизация систем, демонстрирующих сложную, в том числе и хаотическую, динамику [6–8]. Рассматривается как взаимная [9–12], так и вынужденная синхронизация хаотических систем [7, 9, 13–15]. Оказалось, что классическая концепция синхронизации, относящаяся к захвату основных частот и мгновенных фаз регулярных осцилляторов, применима и к определенному классу хаотических систем, особенно осцилляторов, основная частота которых легко может быть определена из спектра силы [2, 8, 12, 14]. Последнее особенно характерно для систем, в которых хаотический аттрактор возникает из предельного цикла в результате каскада бифуркаций удвоения периода, как, например, в системе Ресслера.

В то время как синхронизация в системах с одномодовой динамикой относительно хорошо изучена, синхронизация в системах с двумя и более колебательными модами (временными масштабами) изучена недостаточно полно. Такого типа системы встречаются в различных областях естествознания. Например, в инженерных приложениях это системы с быстрой динамикой, подверженные медленной модуляции. Живые системы также демонстрируют большое число различных ритмов, важных для регулирования их нормальных физиологических процессов. Например, периодические колебания инсулина [16–18] или динамика нефронов [19–21]. Можно привести и другие примеры.

Детальное описание явления синхронизации в системах с многомодовой динамикой представляет собой предмет исследований теории динамических систем. В одной из последних работ [22] рассмотрена двухмодовая динамика, синхронизация быстрой и медленной колебательных мод в упрощенной модели нефрона, синхронизация двух связанных подсистем, каждая из которых индивидуально демонстрирует двухмодовую динамику, то есть достаточно сложная система связанных нелинейных осцилляторов со специфической нелинейностью и связью. Целью настоящей работы является рассмотрение особенностей синхронизации различных временных масштабов в намного более простой системе с двухмодовой динамикой, представляющей собой линейно связанные осцилляторы Уеды и Ван дер Поля. Это позволит продемонстрировать универсальность указанных выше явлений.

1. Синхронизация разных временных масштабов в системе с двухмодовой динамикой.

Рассмотрим простейшую систему, динамика которой характеризуется двумя (быстрой и медленной) колебательными модами. Она представляет собой систему двух связанных осцилляторов следующего вида:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B(y + a), \tag{1}$$

$$\ddot{y} - (\alpha - y^2)\dot{y} + y = Cx. \tag{2}$$

Здесь первое уравнение является неавтономным осциллятором Уеды с параметром диссипации k. Величина By определяет связь со второй подсистемой, а величина Ba представляет собой постоянную силу. Вторая подсистема – неавтономный осциллятор Ван дер Поля с управляющим параметром α и обратной связью Cx. Отметим, что при небольших значениях параметра C рассматриваемая система представляет собой некий аналог осциллятора Уеды под гармоническим воздействием, создаваемым осциллятором Ван дер Поля. Динамика осциллятора Уеды под внешним гармоническим воздействием достаточно хорошо изучена [23, 24]. На плоскости параметров такой системы (параметр диссипации – амплитуда внешнего воздействия) имеет место сложная структура локальных и глобальных бифуркаций, а также области сосуществующих аттракторов. В работе [24] дается грубое описание возникновения указанных структур. Согласно этому описанию, они возникают в результате серии резонансов, при которых осциллятор Уеды совершает $m = 1, 2, 3...$ собственных колебаний на один период внешней силы. При этом в результате нечетных резонансов ($m = 1, 3, 5...$) возникают симметричные аттракторы, а в результате четных ($m = 2, 4, 6, ...$) – несимметричные. В некотором смысле похожая картина возникает и в пространстве параметров связи рассматриваемой системы (1)-(2). На рис. 1 представлена полученная численно карта динамических режимов системы (1)-(2) на плоскости параметров (B, C) для $k = 0.4$, $\alpha = 1.0$ и $a = 0.8$. На карте оттенками серого цвета обозначены области существования режимов различных периодов. Так, белый цвет отвечает режиму периода 1, светло-серый – режиму периода 2 и т.д. (чем темнее цвет, тем больше период), а черный цвет отвечает хаосу и режимам больших периодов. Отметим также, что в верхней части карты, в области достаточно больших значений параметра C, расположена область «гибели колебаний» [2], то есть

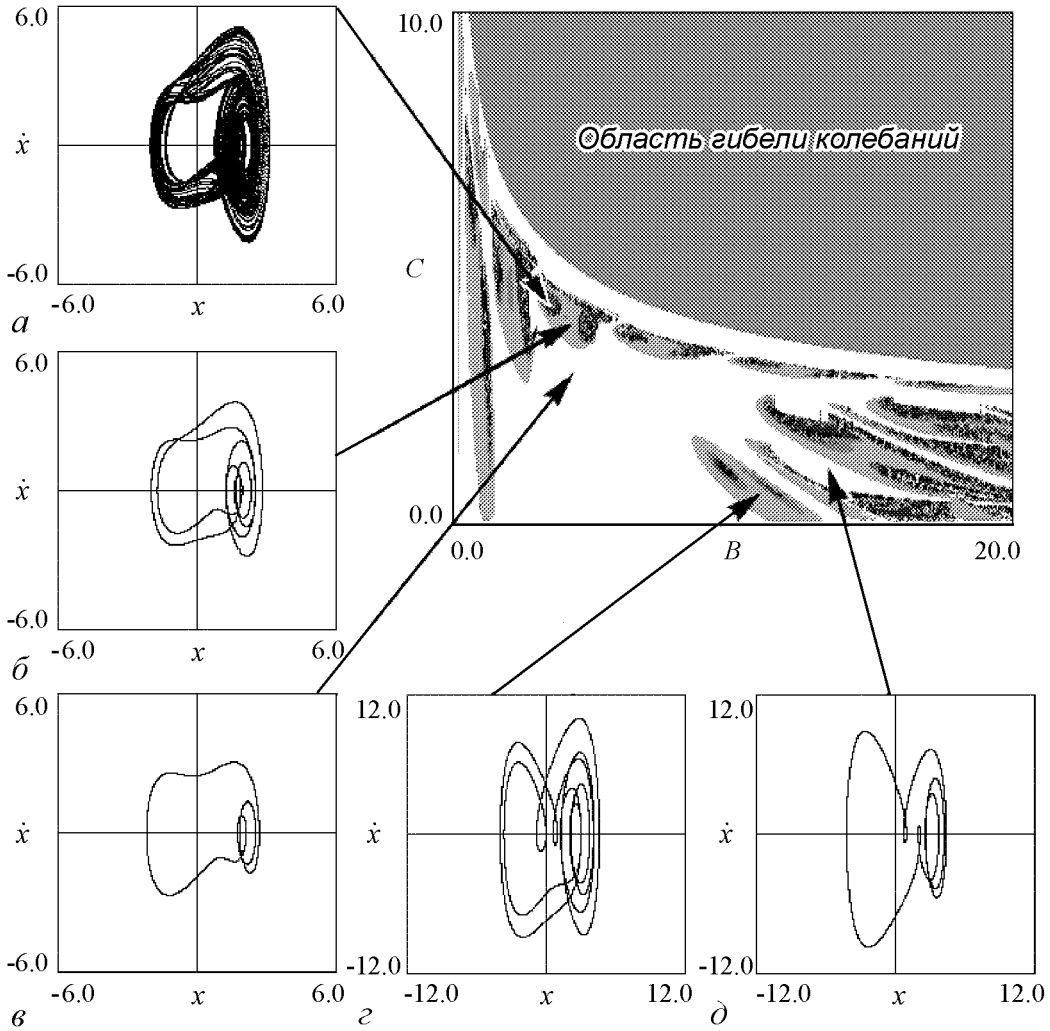


Рис. 1. Карта динамических режимов системы (1)-(2) на плоскости параметров связи (B, C) для $k = 0.4$, $\alpha = 1.0$ и $a = 0.8$. Представлены также проекции аттракторов системы на плоскость (x, $\dot{x}$). Они построены при следующих значениях параметров: $C = 0.4253$ и $B = 3.431$ (*а*); $C = 0.4099$ и $B = 3.243$ (*б*); $C = 0.3287$ и $B = 4.042$ (*в*); $C = 0.0771$ и $B = 15.28$ (*г*); $C = 0.0499$ и $B = 10.796$ (*д*)

область, в которой система не демонстрирует колебания. К подавлению колебаний в рассматриваемой системе приводит в этом случае воздействие осциллятора Уеды на осциллятор Ван дер Поля. На карте хорошо видны области, представляющие собой «острова», внутри которых система (1)-(2) демонстрирует переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. На этом же рисунке представлены проекции аттракторов на плоскость (x, $\dot{x}$). Видно, что система действительно демонстрирует двухмодовую динамику, состоящую из быстрой и медленной колебательной моды. Например, на рис. 1, *в* представлен режим, демонстрирующий три быстрых колебания за период одного медленного (такой режим будем обозначать как режим типа 1:3), на рис. 1, *б* – режим удвоенного периода, возникший из предыдущего в результате бифуркации удвоения периода. И, наконец, на рис. 1, *а* представлен хаотический режим, возникший из режима типа 1:3 в результате каскада бифуркаций

удвоения периода. При этом в системе наблюдаются как симметричные (рис. 1, *а-в*), так и несимметричные (рис. 1, *г*, *д*) аттракторы. Исследование показало, что симметричные аттракторы наблюдаются в левой части карты, а несимметричные – в правой. А расположение на плоскости параметров границы, разделяющей области симметричных и несимметричных аттракторов, зависит от величины постоянной силы, то есть от параметра a. Это связано с тем, что добавление постоянной силы в правую часть уравнения (1) приводит к смещению положения равновесия в осцилляторе Уеды. Как следствие, его потенциальная функция становится несимметричной. При построении карты динамических режимов величина и знак постоянной внешней силы выбирались такими, чтобы система (1)-(2) демонстрировала несимметричные режимы, у которых колебания, отвечающие быстрой моде, расположены в области положительных значений динамической переменной x.

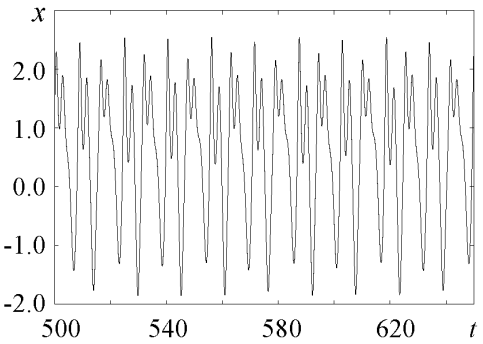


Рис. 2. Характерное изменение во времени динамической переменной x для хаотического режима, демонстрируемого системой (1)-(2) и содержащего быструю и медленную колебательные моды. $k = 0.4$, $\alpha = 1.0$, $a = 0.8$, $B = 1.66$ и $C = 0.4392$

В настоящей работе основное внимание сосредоточенно на несимметричных хаотических режимах, содержащих быструю и медленную моду и возникших в результате каскада бифуркаций удвоения периода. Поэтому при дальнейшем рассмотрении параметры k, α, a и B будут фиксированы: $k = 0.4$, $\alpha = 1.0$, $a = 0.8$, и $B = 1.66$, а параметр C будем рассматривать как контрольный. На рис. 2 представлено типичное для хаотического режима изменение во времени динамической переменной x. Эта иллюстрация также подтверждает факт, что система (1)-(2) демонстрирует двухмодовую динамику. При этом уравнение Уеды описывает колебания, отвечающие быстрой моде, а уравнение Ван дер Поля – медленной. А изменение во времени динамической переменной x (см. рис. 2) представляет собой их комбинацию.

Заменой переменных $\dot{x} = u$ и $\dot{y} = v$ система (1)-(2) может быть сведена к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений. Такая замена позволяет оценить частоты быстрой и медленной колебательных мод и исследовать синхронизацию между ними. Для этого вычислим средние времена возврата τ_u и τ_y фазовой траектории в сечения Пуанкаре, заданные уравнениями $u = 0$ и $y = 0$, соответственно. Здесь выбор секущих плоскостей определяется следующим условием: для адекватного определения времен возврата необходимо, чтобы временные реализации динамических переменных, отвечающих быстрым и медленным движениям, всегда пересекали выбранные сечения. Исследование системы (1)-(2) позволяет сделать вывод, что удобнее выбирать динамические переменные u для описания быстрой моды и y – медленной. Далее, аналогично работе [22], определим число вращения, дающее отношение частоты медленной колебательной моды к частоте быстрой, как

$$r = \frac{\langle \tau_u \rangle}{\langle \tau_y \rangle}. \tag{3}$$

Определенное таким образом число вращения r позволяет выделить так называемые синхронные и несинхронные хаотические режимы. В первом случае число вращения равно величине $r = m/n$, где m – число медленных колебаний, а n – быстрых (m, n – целые числа) и принимает рациональные значения. Во втором случае $r \neq m/n$ – иррациональное. В данной работе основное внимание будет уделено синхронным и несинхронным режимам, для которых $m = 1$. На рис. 3 представлен характерный вид зависимости числа вращения r от параметра C при фиксированном значении $B = 1.66$. Отметим, что зависимость r от параметра B при фиксированном значении C имеет аналогичный вид. На этом же рисунке представлено бифуркационное дерево – зависимость динамической переменной x, определенной в сечении Пуанкаре $y = 0$, от параметра. Размещение обеих характеристик на одном рисунке позволяет получить более точную информацию о динамике системы. А именно, соотнести значение числа вращения, определяющего синхронизацию между быстрой и медленной модами, и период наблюдаемого при этом режима. Как следствие, в явном виде можем указать области синхронного и несинхронного хаоса.

На рис. 3 можно выделить три характерные области: первая область ($0.4 < C < 0.5$) отвечает тому, что сначала число вращения $r = 1/2$, а потом начинает уменьшаться; вторая область ($0.585 < C < 0.65$) – тому, что число вращения уменьшается и в итоге принимает значение $r = 1/3$; и третья область ($0.5 < C < 0.585$) – тому, что на графике зависимости числа вращения от параметра есть две «полочки», отвечающие значениям числа вращения $r = 0.44444...$ и $r = 0.4$. Отметим, что переход между последними двумя «полочками» происходит скачком. Кроме того, если в первых двух областях в рассматриваемой системе наблюдаются как периодические, так и хаотические режимы, то есть можно говорить как о синхронном, так и о несинхронном хаосе, то в третьей области наблюдаются лишь периодические режимы. Рассмотрим указанные области более подробно.

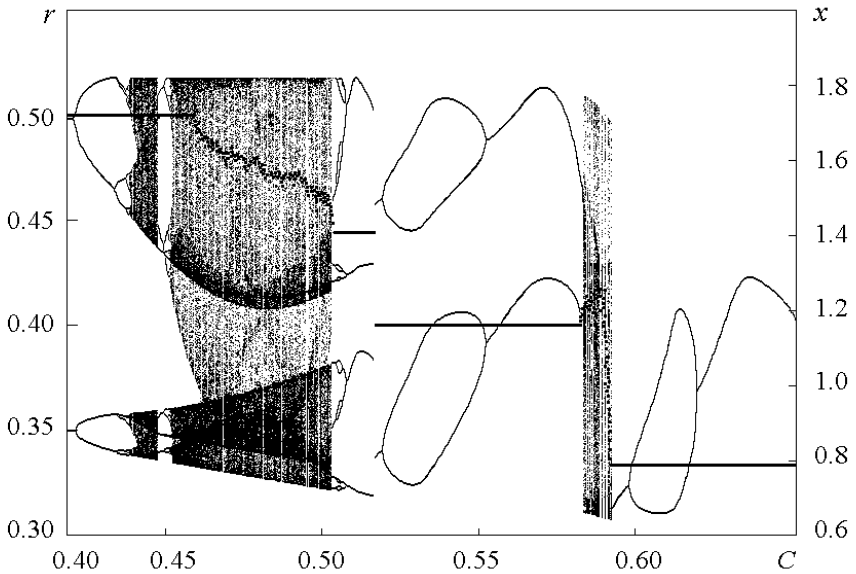


Рис. 3. Зависимость числа вращения r от параметра C (черная кривая) и бифуркационное дерево для системы (1)-(2) при $k = 0.4$, $\alpha = 1.0$, $a = 0.8$ и $B = 1.66$. «Полочки» постоянного числа вращения отвечают синхронизации между быстрой и медленной модами

На рис. 4 представлен увеличенный фрагмент предыдущего рисунка, на котором изображена первая из указанных выше областей. На том же рисунке приведены трехмерные проекции аттракторов системы (1)-(2). Видно, что в этой области имеет место каскад бифуркаций удвоения периода на базе режима периода 1, для которого число вращения $r = 1/2$, и возникает хаотический аттрактор с тем же числом вращения. Этот хаотический аттрактор имеет явно выраженную лентовидную структуру, состоящую из двух лент (рис. 4, *в*). Он представляет собой пример синхронного хаоса. Внутри области хаоса есть окна периодических режимов, самое большое из которых расположено в окрестности значения $C = 0.45$ и отвечает режиму периода 6. Отметим, что в точке A ($C_A = 0.4595...$) число вращения начинает уменьшаться. Это отвечает тому, что в аттракторе появляются дополнительные петли. Таким образом, можно сказать, что в системе возник несинхронный хаотический режим, также характеризующийся лентовидной структурой, однако теперь она содержит лишь одну ленту. Переход от одного режима к другому сопровождается объединением двух лент, из которых состоял исходный хаотический аттрактор. Очень хорошо этот процесс виден на бифуркационном дереве (см. рис. 4): с ростом параметра C верхняя ветвь дерева становится все шире и шире, пока не сольется с нижней. Это происходит как раз в точке A. Отметим, что переход от синхронного хаотического режима к несинхронному имеет еще одну особенность. Она состоит в том, что непосредственно перед точкой A существует область, в которой число вращения не строго равно $1/2$, а слегка колеблется около этого значения. Это связано с перескоком изображаю-

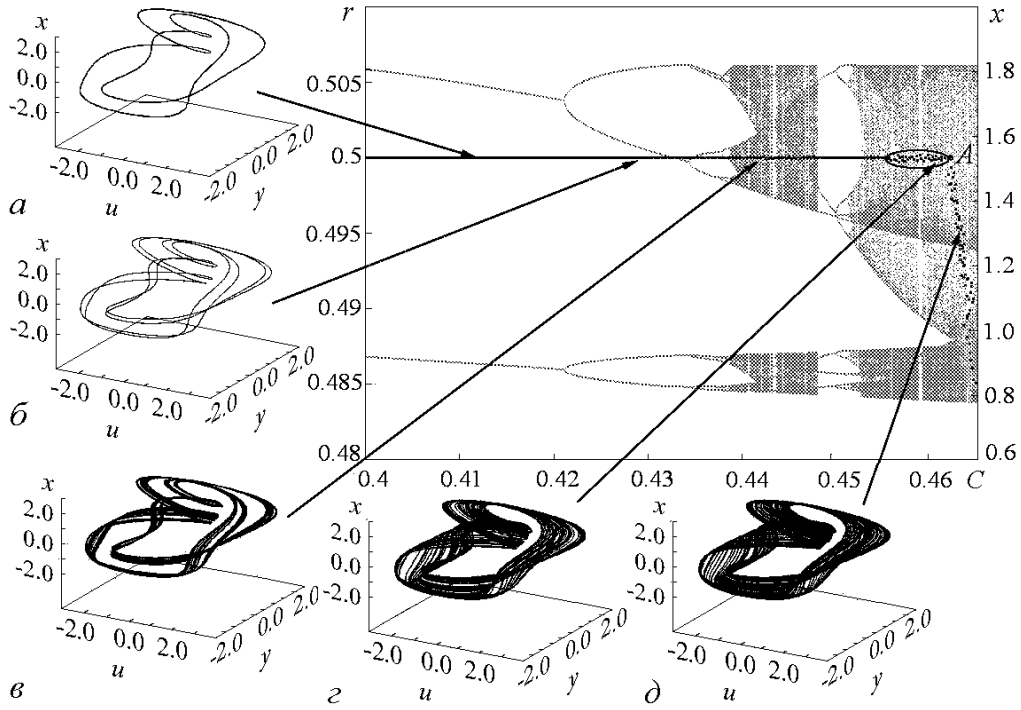


Рис. 4. Увеличенный фрагмент рис. 3, отвечающий области, где $r = 1/2$, и трехмерные проекции аттракторов. Аттракторы построены при $k = 0.4$, $\alpha = 1.0$, $a = 0.8$, $B = 1.66$ и следующих значениях параметра C: 0.4 (*а*), 0.43 (*б*), 0.4392 (*в*), 0.457 (*г*), 0.462 (*д*)

щей точки с одной ленты на другую, когда расстояние между лентами хаотического аттрактора становится достаточно малым. Фактически в этой области и происходит смена типа хаотического режима.

Теперь рассмотрим следующую область (рис. 5) – область, в которой число вращения сначала принимает значение $r = 0.44444...$, а потом скачком переходит на $r = 0.4$. Из рисунка видно, что в этой области система демонстрирует лишь периодическое поведение: при изменении параметра C имеет место конечный каскад бифуркаций удвоения периода. На рис. 6 показаны типичные для данной области изменения во времени динамической переменной x. Когда $r = 0.4444...$ (рис. 6, *а*), система демонстрирует режимы с кратными 4 периодами. Когда $r = 0.4$ (рис. 6, *б*), качественно ситуация аналогична. Однако теперь минимальный период наблюдаемого в системе режима равен 2. Отметим, что в обоих случаях имеет место синхронизация между быстрой и медленной модами. Последняя особенность рассматриваемой

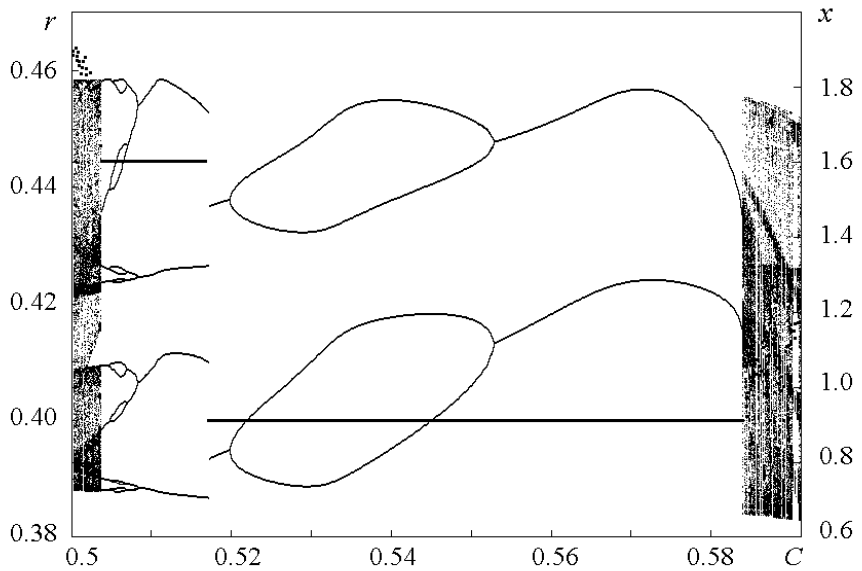


Рис. 5. Увеличенный фрагмент рис. 3, отвечающий области, где реализуются две «полочки» значений числа вращения $r = 0.444444...$ и $r = 0.4$

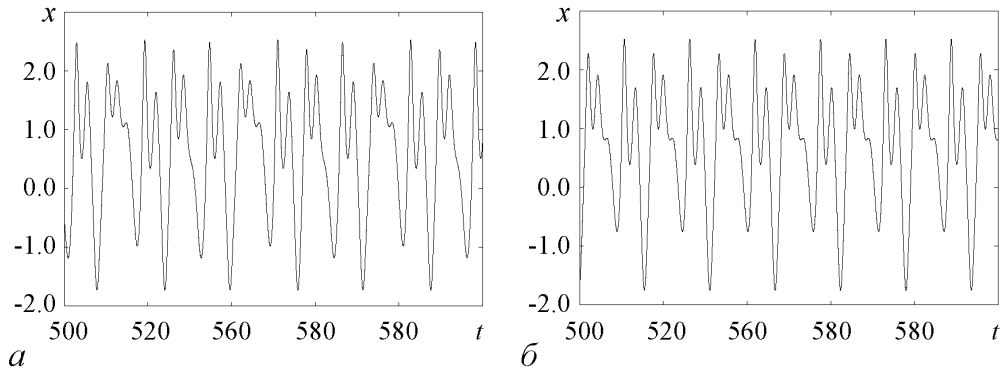


Рис. 6. Изменения во времени динамической переменной x для системы (1)-(2), отвечающие значениям числа вращения $r = 0.44444...$ (*а*) и $r = 0.4$ (*б*). Реализации построены при $k = 0.4$, $\alpha = 1.0$, $a = 0.8$, $B = 1.66$; $C = 0.51$ (*а*) и $C = 0.56$ (*б*)

области состоит в том, что в ней имеет место гистерезис (рис. 7). Если строить бифуркационное дерево в направлении уменьшения параметра C, то перескок с режимов, отвечающих $r = 0.44444...$, на режимы, отвечающие $r = 0.4$, произойдет при меньшем значении параметра. Так, в первом случае, когда бифуркационное дерево строится слева направо, перескок происходит при значении $C \approx 0.51695...$, а когда справа налево – при значении $C \approx 0.5081....$

Последняя рассматриваемая нами область характеризуется тем, что число вращения r продолжает уменьшаться, пока не достигнет значения $r = 1/3$ (рис. 8).

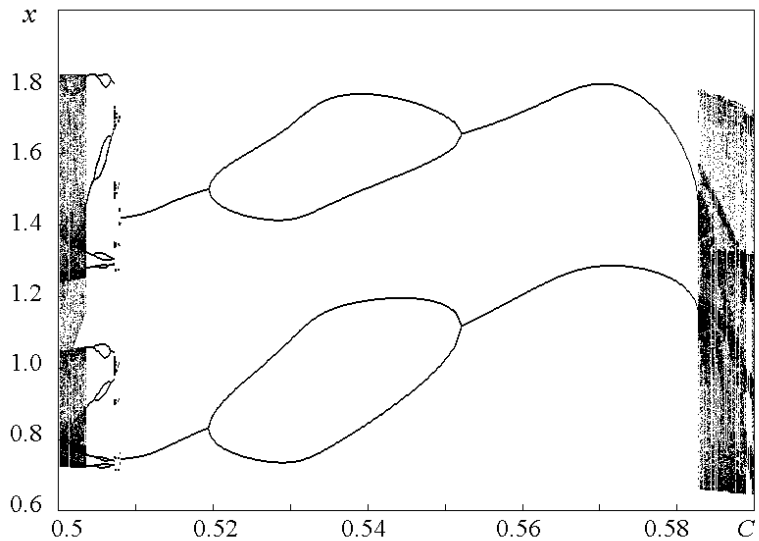


Рис. 7. Бифуркационное дерево для той же области, что и на рис. 5, в которой число вращения демонстрирует две полочки, отвечающие значениям $r = 0.44444...$ и $r = 0.4$. Сканирование производилось в направлении уменьшения параметра C. $k = 0.4$, $\alpha = 1.0$, $a = 0.8$ и $B = 1.66$

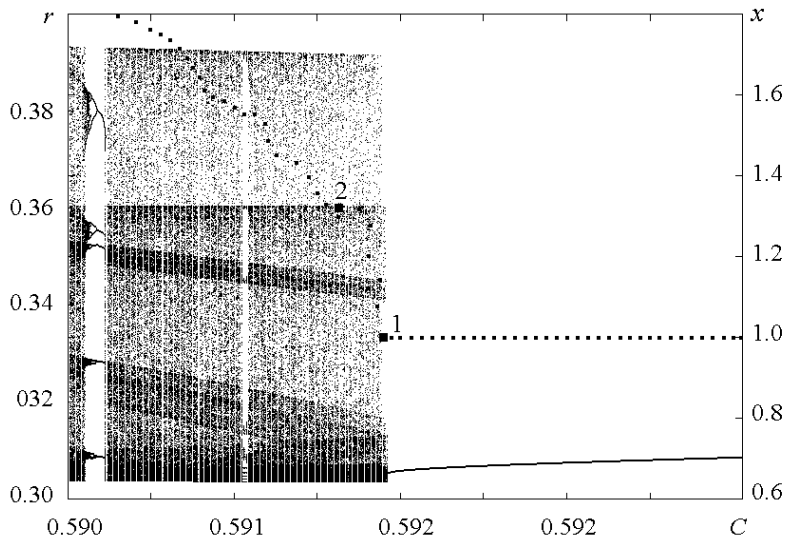


Рис. 8. Увеличенный фрагмент рис. 3, отвечающий области, где $r = 1/3$. Точки 1 ($C = 0.591885$) и 2 ($C = 0.5915$) отвечают синхронному и несинхронному хаотическим режимам, соответственно. $k = 0.4$, $\alpha = 1.0$, $a = 0.8$ и $B = 1.66$

Рассмотрим более детально две точки, взятые из этой области. Точки выбираем так, чтобы в них рассматриваемая система (1)-(2) демонстрировала хаотическое поведение, отвечающее рациональному и иррациональному значениям числа вращения. То есть рассмотрим синхронные и несинхронные хаотические режимы и сопоставим их свойства. Так, первая рассматриваемая точка ($C = 0.591885$) отвечает значению $r = 1/3$ и лежит у границы области существования хаотического режима, а вторая ($C = 0.5915$) – $r \approx 0.36$ и лежит внутри указанной выше области. На рис. 9 представлены трех- и двухмерные проекции аттракторов системы (1)-(2), построенные в указанных точках. Хорошо видно, что в первой точке действительно имеет место синхронный хаос, а во второй – несинхронный. Более того, аттрактор, построенный для значения $C = 0.591885$, имеет лентовидную структуру (рис. 9, *а*, *в*), а вот аттрактор, построенный для несинхронного хаотического режима ($C = 0.5915$), такой структурой уже не обладает (рис. 9, *б*, *г*). У него появились дополнительные петли вокруг основной части аттрактора. Таким образом, в данном случае переход от синхронного хаоса к несинхронному сопровождается появлением в структуре аттрактора дополнительных петель и мелкомасштабной структуры, а также объединением лент, образующих синхронный хаотический аттрактор (см. рис. 9, *в*, *г*).

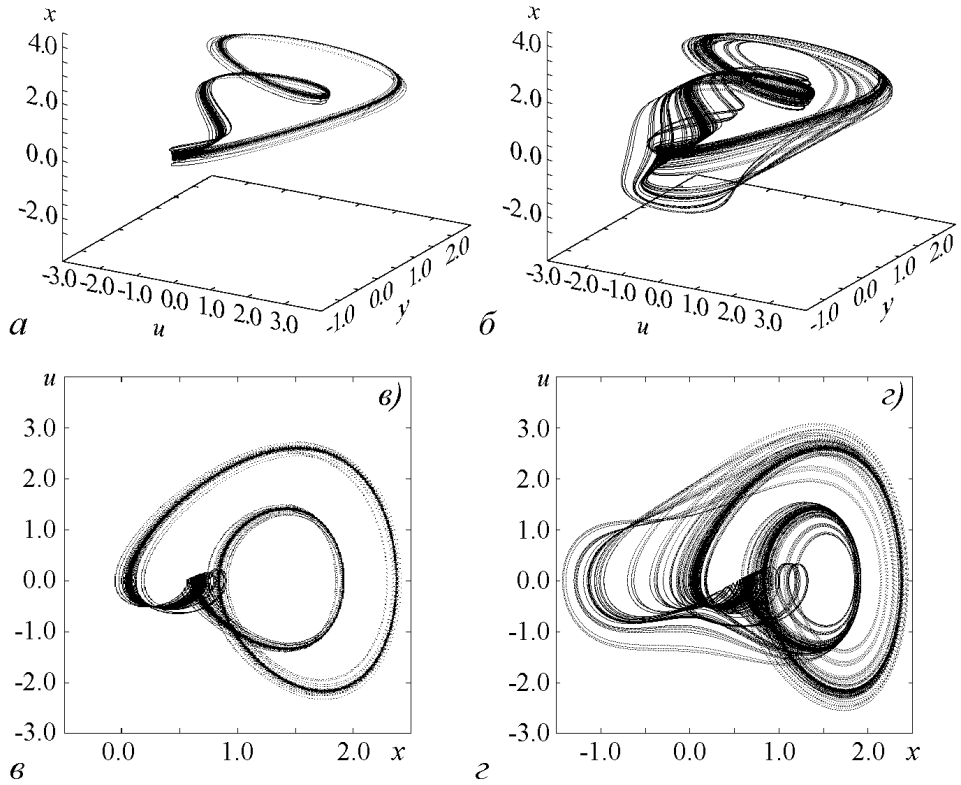


Рис. 9. Трех- и двухмерные проекции аттракторов системы (1)-(2), построенные в точках 1 ($C = 0.591885$) (*а*, *в*) и 2 ($C = 0.5915$) (*б*, *г*) показанных на рис. 8. Первая точка отвечает синхронному хаотическому режиму с числом вращения $r = 0.3333...$, а вторая – несинхронному с числом вращения $r \approx 0.36$. Остальные параметры принимают следующие значения: $k = 0.4$, $\alpha = 1.0$, $a = 0.8$ и $B = 1.66$

Заключение

В данной работе была рассмотрена простейшая система с двухмодовой динамикой, представляющая собой линейно связанные осцилляторы Уеды и Ван дер Поля. На примере указанной системы была рассмотрена синхронизация между быстрой и медленной колебательными модами (различными временными масштабами). Было показано, что на графике зависимости числа вращения (число вращения определяет отношение частоты медленной колебательной моды к частоте быстрой) от параметра связи осцилляторов имеют место «полочки». Каждая такая «полочка» отвечает своему рациональному числу вращения и, как следствие, наличию синхронизации между быстрой и медленной модами.

Сопоставление зависимости числа вращения от параметра связи с бифуркационным деревом рассматриваемой системы позволило определить в пространстве параметров системы области синхронного и несинхронного хаоса. Были исследованы свойства синхронных и несинхронных хаотических режимов, а также закономерности перехода между ними. Показано, что указанный переход связан с потерей синхронным хаотическим аттрактором своей многоленточной структуры. Пока хаотический аттрактор сохраняет многоленточную структуру, динамика системы характеризуется существенной степенью регулярности и вычисленное число вращения остается рациональным и постоянным в достаточно большом интервале изменения параметра связи. Когда многоленточная структура аттрактора разрушается, ленты сливаются друг с другом, быстрая и медленная колебательные моды также теряют синхронизацию. При этом в структуре несинхронного хаотического аттрактора появляются дополнительные петли и мелкомасштабная структура. Как следствие, вычисленное для такого аттрактора число вращения будет иррациональным. Однако важно отметить, что потере синхронизации между модами предшествуют небольшие колебания числа вращения, когда расстояние между лентами хаотического аттрактора становится достаточно малым.

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 03-02-16074, грантом CRDF BRHE REC-006 № Y2-P-06-13 и госконтрактом № 02.442.11.7457.

Библиографический список

1. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer – Verlag, 1984.
2. *Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths Y.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001.
3. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D.* Chaotic synchronization: applications to living systems. Singapore: World Scientific, 2002.
4. *Ott E.* Chaos in dynamical systems. Cambridge University press, 1993.
5. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
6. *Pecora L., Carroll T.* Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol.64. P. 821.

7. *Dykman G., Landa P. and Neimark Y.* Synchronizing the chaotic oscillations by external force // Chaos, Solitons and Fractals. 1992. Vol. 1. P. 339.
8. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E. and Safonova M.A.* Synchronization of chaos // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2. P. 633.
9. *Анищенко С.В., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А.* Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36, № 2. С. 338.
10. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos in unidirectionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 980.
11. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 4193.
12. *Anishchenko V.S., Silchenko A.N. and Khovanov I.A.* Synchronization of switching processes in coupled Lorenz systems // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 316.
13. *Ланда П.С., Рендель Ю.С., Шер В.Ф.* Синхронизация колебаний в системе Лоренца // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32, № 9. С. 1172.
14. *Rosenblum M., Pikovsky A. and Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 1804.
15. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // Physica D. 1997. Vol. 104. P. 219.
16. *Polonsky K.S., Given B.D., and Van Cauter E.* Twenty-four-hour profiles of pulsatile patterns of insulin secretion in normal and obese subjects // J. Clin. Invest. 1988. Vol. 81. P. 442.
17. *Sturis J., Polonsky K.S., Mosekilde E.& Van Cauter E.* The mechanisms underlying ultradian oscillations of insulin and glucose: A computer simulation approach // Amer. J. Physiol. 1991. Vol. 260. E801-E809.
18. *Bergsten P. and Hellmann B.* Glucose induced cycles of insulin release can be resolved into distinct periods of secretory activity // Biochem. Biophys. Res. Commun. 1993. Vol. 192. P. 1182.
19. *Barfred M., Mosekilde E., and Holstein-Rathlou N.-H.* Bifurcation analyses of nephron pressure and flow regulation // Chaos. 1996. Vol. 6. P. 280.
20. *Holstein-Rathlou N.-H., Yip K.-P., Sosnovtseva O.V., and Mosekilde E.* Synchronization phenomena in nephron interaction // Chaos. 2001. Vol. 11. P. 417.
21. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E. and Holstein-Rathlou N.-H.* Bimodal oscillations in nephron autoregulation // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. 061909.
22. *Postnov D.E., Shishkin A.V., Sosnovtseva O.V. and Mosekilde E.* Two-mode chaos and its synchronization properties // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. 056208.
23. *Ueda Y.* Strange attractors and the origin of chaos // Nonlinear Science Today. 1992. Vol.2. P. 2.
24. *Ueda Y., Thomsen J.S., Rasmussen J. and Mosekilde E.* Behavior of the solution to Duffing's equation for large forcing amplitudes // Mathematical Research. 1993. № 72. P. 149.

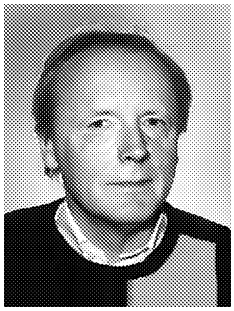
Саратовский филиал ИРЭ РАН
Technical University of Denmark

Поступила в редакцию *27.12.2005*
После доработки *3.04.2006*

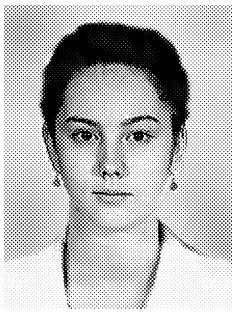
SYNCHRONIZATION IN SYSTEMS WITH BIMODAL DYNAMICS

A.P. Kuznetsov, E. Mosekilde, L.V. Turukina

Considering model with bimodal dynamics we investigate the synchronization of different time scales. Transition between mode-locked and mode-unlocked chaotic attractors is investigated. It is shown that this transition involves a situation in which the synchronized chaotic attractor loses its band structure.



Эрик Мозекилде – окончил Датский технический университет (1966). Защитил докторскую диссертацию (1977). Совершил несколько научных визитов в различные университеты Европы. Профессор физического факультета в Датском техническом университете. Автор более 200 научных публикаций и нескольких книг. Область научных интересов: моделирование сложных систем и их приложение в нелинейной динамике.



Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, ассистент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами с посредством коротких импульсов. Автор 26 научных публикаций, в том числе 7 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.
E-mail:ludmila@forpost.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 2, 2006 УДК 519.245+517.9+517.39

ФОРМИРОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУКТУР В СИСТЕМЕ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ НА КАТАЛИТИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ: МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

А.В. Ефимов, А.В. Шабунин

Рассматривается формирование пространственных структур (кластеров) в ходе циклических превращений в модели (4+1)-Lattice Lotka-Volterra. Система моделируется с помощью разновидности метода Монте-Карло на поверхности двумерной решетки. Устанавливаются закономерности в распределении кластеров по размерам и в спаде пространственной автокорреляции. Исследуются другие зависимости, характеризующие пространственную динамику модели, а также выясняется влияние кластеров на динамику системы. В работе показывается, что добавление в систему внешнего перемешивания приводит к появлению периодических автоколебаний.

Введение

Синхронизация и образование пространственных структур остается одним из основных направлений исследований в нелинейной динамике. Как правило, объектом исследования являются ансамбли взаимодействующих осцилляторов, то есть динамические системы, демонстрирующие детерминированное поведение. При этом наличие внешних шумов, хотя и играет иногда существенную роль в динамике таких систем, все же не является определяющим фактором. Однако иногда случайные процессы, протекающие на микроуровне, сами являются «строителями» сложных пространственно-временных структур, возникновение которых приводит к появлению «глобальных» колебаний на макроуровне, аналогичных колебаниям детерминированных осцилляторов. Типичным примером здесь могут являться системы, описывающие химические превращения, особое место среди которых занимают модели гетерогенного катализа на поверхности кристаллических решеток различных металлов. Такие реакции, как окисление газа CO на поверхности Pt и восстановление NO в присутствии H_2 на Pt, имеют особую важность в различных технологических процессах. Кроме того, гетерогенный катализ – это отрасль, в которой возникновение колебаний, пространственно-временных структур и различные волновые явления часто наблюдаются в натурных экспериментах [1–8].

Пожалуй, первое упоминание о колебаниях в гетерогенных системах было опубликовано еще в 1970 году. После этого регулярные и хаотические колебания были обнаружены более чем в тридцати различных реакциях, практически на всех типах катализаторов. За последние двадцать лет были предложены различные подходы к численному моделированию таких реакций [9–12] и получены новые экспериментальные результаты [3, 4, 13].

Большинство моделей вышеупомянутых систем можно условно разделить на две группы. В первой группе системы взаимодействующих частиц рассматриваются на макроуровне, например, с помощью феноменологических моделей среднего поля – «Mean Field», которые считаются вполне приемлемыми для гомогенных химических сред с сильным перемешиванием. Уравнения среднего поля дают некоторые представления о ходе химических реакций в таких системах, как брюсселятор и орегонатор [14], но не могут адекватно описывать динамику химических превращений на поверхности кристаллической решетки катализатора, так как не учитывают локальный характер взаимодействий. Ко второй группе можно отнести моделирование на более глубоком, микроуровне, позволяющее наблюдать такие интересные явления, как формирование пространственных структур, волновые процессы и сложные колебания концентраций реагентов [9, 11, 12, 15–21].

Один из широко применяемых численных методов моделирования локальных взаимодействий – метод Монте-Карло (Kinetic Monte Carlo simulation), являющийся разновидностью вероятностного клеточного автомата. Возможность моделировать локальные взаимодействия элементов ансамбля с помощью этого метода оказалась полезной для исследования гетерогенных неперемешивающихся сред и других систем, в которых локальные флуктуации имеют особое значение. Именно этот метод применяется в настоящей работе для моделирования динамики системы реакций, которая при использовании метода среднего поля описывается уравнениями, аналогичными системе Лотки – Вольтерры, но с большей размерностью фазового пространства ($D = 4$). В дальнейшем эту систему будем называть (4+1)-LLV по аналогии с системой (2+1)-Lattice Lotka–Volterra [20] (цифры в скобках означают число реагентов, принимающих участие в реакциях).

В настоящей работе ход процессов моделируется методом Монте-Карло, проводится детальное исследование пространственного поведения системы (4+1)-LLV, исследуются процессы образования и эволюции пространственных кластеров, проводится их статистический анализ, рассматривается зависимость в поведении системы от параметров и начальных условий. В работе также изучается влияние внешнего перемешивания компонентов реакций и показывается, что рост интенсивности перемешивания ведет к рождению периодических колебаний концентраций, сходному с бифуркацией Андронова – Хопфа для динамических систем.

1. Исследуемая система и ее описание методом среднего поля

Рассмотрим реакции четырех веществ X, Y, Z, U, протекающие на поверхности катализатора. Поверхность представляет собой регулярную квадратную решетку, каждая ячейка которой может содержать только одну из частиц реагентов или оставаться «пустой». Вакантное место на решетке, то есть пустая ячейка – «дырка», будет обозначаться как частица S. Взаимодействие между частицами является локальным, то есть происходит между реагентами, находящимися в соседних ячейках решетки,

и описывается следующей кинетической схемой:

$$\begin{aligned} X+Y &\xrightarrow{k_1} 2Y, \\ Y+Z &\xrightarrow{k_2} 2Z, \\ Z+U &\xrightarrow{k_3} 2U, \\ U+S &\xrightarrow{k_4} 2S, \\ X+S &\xrightarrow{k_5} 2X, \end{aligned} \tag{1}$$

где параметры k_i представляют собой кинетические константы, пропорциональные вероятностям соответствующих превращений. Так, в соответствии с первой реакцией (1), соседние частицы X и Y взаимодействуют друг с другом с вероятностью, пропорциональной k_1, при этом частица X превращается в Y. Данная реакция является автокаталитической: наличие в точке пространства вещества Y вовлекает X в реакцию, в результате которой число частиц Y увеличивается. Похожим образом взаимодействуют и остальные частицы Y, Z и U. Фактически мы имеем набор циклических превращений, в которых реагенты преобразуются друг в друга. Четвертая строка схемы (1) описывает удаление продукта реакции U с поверхности катализатора, а пятая реакция - процесс адсорбции реагента X на решетку. Важным свойством исходной схемы превращений является то, что в каждом шаге реакции участвуют две частицы и две частицы остаются после взаимодействия. Это приводит к тому, что общее число взаимодействующих частиц в ходе реакции остается неизменным.

В предыдущих работах [20–22] рассматривалась система (2+1)-LLV, содержащая два типа взаимодействующих частиц (X и Y), то есть исследовался более короткий цикл превращений. В рамках модели среднего поля ее уравнения имеют интеграл движения, то есть являются консервативными. Здесь следует отметить, что наличие этого интеграла характерно только для циклических систем типа ($2k$+1)-LLV, то есть для систем с четным числом компонентов. Системы с нечетным количеством реагентов не имеют интеграла движения и поведение их моделей среднего поля качественно отличается от поведения систем ($2k$+1)-LLV.

Минимальное усложнение системы за счет увеличения числа реагентов, не вызывающее изменения ее класса, дает систему (4+1)-LLV (1), рассматриваемую в настоящей работе. Ее детальный анализ методом среднего поля был проведен в [23], где были получены и исследованы дифференциальные уравнения для относительных концентраций x, y, z, u

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -k_1xy + k_5x(1-x-y-z-u), \\ \frac{dy}{dt} &= k_1xy - k_2yz, \\ \frac{dz}{dt} &= k_2yz - k_3zu, \\ \frac{du}{dt} &= k_3zu - k_4u(1-x-y-z-u). \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнения (2) описывают консервативный осциллятор в четырехмерном фазовом пространстве, для которого определен интеграл движения

$$x^{k_2k_4}y^{k_3k_5}z^{k_1k_4}u^{k_2k_5}(1-x-y-u-z)^{k_1k_3} = K. \tag{3}$$

Фазовое пространство осциллятора устроено следующим образом. Оно содержит:

• тривиальное состояние равновесия $P_1 = (0; 0; 0; 0)$, соответствующее системе без реагентов;

• четыре линии, образованные из состояний равновесия $P_2 = (0; 0; z; 0)$, $P_3 = (0; y; 0; 0)$, $P_4 = (0; y; 0; 1 - y)$, $P_6 = (x; 0; 1 - x; 0)$, соответствующие случаю, когда часть реагентов «вымывается» из пространства реакций, что приводит к их прекращению («отравление» решетки);

• нетривиальное состояние равновесие типа центр

$$P_7 = (\frac{k_2 k_4}{A}; \frac{k_3 k_5}{A}; \frac{k_1 k_4}{A}; \frac{k_2 k_5}{A}), \tag{4}$$

где $A = k_1 k_3 + k_2 k_4 + k_3 k_5 + k_1 k_4 + k_2 k_5$.

Интересующая нас область фазового пространства ограничена инвариантными многообразиями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 0$ и $x + y + z + u = 1$, образующими замкнутый контур. При выборе начальных условий на одном из ограничивающих многообразий траектория по нему переходит на одно из состояний равновесия P_2 - P_6, что приводит к прекращению реакций. Если начальные условия выбрать внутри контура, то в зависимости от начальных условий и параметров система (2) демонстрирует квазипериодическое или хаотическое поведение [23]. Однако описание методом среднего поля является слишком грубым, и хорошо описывает лишь некоторый средний уровень концентраций веществ, вокруг которого происходят колебания. Непосредственное моделирование реакций в каждой точке пространства методом Монте-Карло дает возможность как детального пространственного анализа процессов на катализаторе, так и получения более реалистичной динамики для усредненных концентраций.

2. Описание используемого алгоритма метода Монте-Карло

Метод Монте-Карло является разновидностью вероятностных клеточных автоматов и моделирует процесс реакции в каждой точке решетки в зависимости от находящейся там частицы и ее ближайших соседей. Используемый в работе алгоритм метода заключается в следующем. Предположим, что мы моделируем реакции (1) на двумерной квадратной решетке со стороной L, то есть содержащей $M = L^2$ элементов. Заданы значения параметров реакций (кинетические константы k_i) и начальные концентрации

$$x_0 = \frac{X_0}{M},\ y_0 = \frac{Y_0}{M},\ z_0 = \frac{Z_0}{M},\ u_0 = \frac{U_0}{M},$$

где X_0, Y_0, Z_0 и U_0 – количество частиц соответствующих реагентов на решетке в начальный момент времени. До начала моделирования решетка равномерно заполняется этими частицами в соответствии с выбранными начальными концентрациями. При моделировании реакций на каждом микрошаге алгоритма случайным образом выбирается ячейка решетки и один из ее четырех ближайших соседей. В зависимости от того, какие частицы находятся в выбранных ячейках, может осуществиться одна из пяти реакций (1) с вероятностью, пропорциональной соответствующей кинетической константе $p_i = k_i / max\{k_j\}_{j=1,\ldots,5}$. Пусть, например, в выбранной ячейке находится частица X, а в выбранной случайным образом соседней ячейке – Y. Тогда,

в соответствии с первой реакцией схемы (1), частица X с вероятностью p_1 может превратится в Y. Если же соседние ячейки оказываются заполненными частицами, реакция между которыми невозможна, то состояние решетки на данном микрошаге не изменяется. Единичный временной интервал моделирования, «Monte-Carlo step» (далее – MCS), содержит M описанных выше микрошагов, то есть в среднем каждая из ячеек посещается один раз. В результате от шага к шагу моделируется эволюция пространственного распределения на решетке, по которому можно строить различные усредненные характеристики, то есть определять макросостояния системы.

3. Общие свойства динамики системы

Проведенное моделирование системы (1) при различном выборе начальных концентраций и параметров, а также на решетках разных размеров позволило заключить, что в целом возможны два качественно различных вида эволюции системы:

а) после переходного процесса усредненные по решетке концентрации реагентов совершают установившиеся нерегулярные шумоподобные колебания с малой амплитудой или

б) происходит вытеснение одного или нескольких реагентов, в результате чего все реакции «замораживаются». При этом на поверхности решетки остаются только невзаимодействующие частицы.

Прекращение реакций после переходного процесса происходит, если:

• значения выбранных скоростей реакций k_i значительно (в несколько раз) отличаются друг от друга;

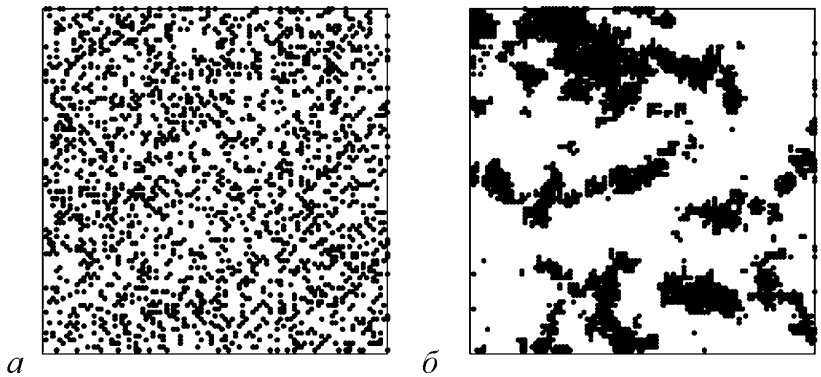
• выбран малый размер решетки. В частности, при равных значениях кинетических констант, колебания «замораживаются» на решетках меньших, чем размер $M \simeq 70 \times 70$ элементов.

При сопоставимых значениях кинетических констант и при линейных размерах решетки порядка сотен элементов колебания на ней могут наблюдаться неограниченно долго. При этом изменение параметров k_i и выбор различных начальных условий не приводит к качественным изменениям в динамике системы, за исключением описанного выше случая «замораживания» и изменения характерного временного масштаба (среднего периода) колебаний. Модель не демонстрирует фазовых переходов при вариации параметров, что вполне согласуется с отсутствием бифуркаций в модели среднего поля подобных систем [20, 23]. Интенсивность колебаний средних концентраций спадает с ростом линейного размера решетки L по закону $1/\sqrt{M}$, где $M = L^2$. Это означает, что глобальные колебания системы есть усредненный вклад множества независимых случайных процессов, протекающих локально в каждой точке поверхности решетки. В результате усреднения концентраций реагентов по ансамблю этих осцилляторов «амплитуда» глобальных колебаний стремится к нулю с ростом числа осцилляторов, а значит, и с ростом размера решетки. Фактически мы наблюдаем флуктуации вокруг средних концентраций $x_{\text{ср}}$, $y_{\text{ср}}$, $z_{\text{ср}}$ и $u_{\text{ср}}$. Значения этих средних концентраций с высокой степенью точности совпадают с координатами нетривиального состояния равновесия (4) уравнений (2). Таким образом, в среднем решетка ведет себя как набор пространственно распределенных стохастических осцилляторов, колебания в каждом из которых происходят вокруг фиксированного состояния равновесия, положение которого определяется кинетическими константами.

4. Пространственно-временная динамика модели Монте-Карло

Рассмотрим локальное распределение частиц на решетке в зависимости от времени. Характерной чертой в поведении модели Монте-Карло является наличие переходного процесса от первоначального равномерного распределения к некоторому неоднородному пространственному распределению. В предыдущей работе [23] было показано, что в пространстве взаимодействия в течение переходного процесса происходит образование кластеров – областей решетки, занятых частицами одного типа. На рис.1 представлено характерное пространственное распределение частиц реагентов на поверхности решетки катализатора в начале реакции и после переходного процесса. Для удобства мы изобразили частицы только одного вещества X. Частицы других веществ и пустые участки решетки отмечены белым цветом. Начальное распределение частиц по поверхности решетки носит случайный характер и обладает свойством пространственной однородности (рис. 1, *а*). После начала реакций, в соответствии со схемой (1), частицы разных видов взаимодействуют и образуют кластеры (рис. 1, *б*), которые постоянно «движутся» по решетке, меняя свою форму и размеры. Как будет показано дальше, возникновение кластеров оказывает сильное влияние на временную динамику системы. В силу локальности взаимодействий, частицы соседних кластеров могут реагировать только на их границах. Вследствие этого количество частиц, участвующих в реакции, после образования кластеров уменьшается. Чем больше размеры кластеров, тем меньше частиц провзаимодействуют на каждом шаге алгоритма Монте-Карло.

Рассмотрим процесс образования кластеров на решетке более подробно. Остановимся сначала на исследовании характерных размеров кластеров. На рис. 2 представлена эволюция распределения кластеров по размерам. Построена вероятность $p(N) = n_N/n$ появления на поверхности решетки X-кластера размером в N частиц в различные моменты времени. Здесь n_N – количество кластеров, содержащих N частиц X-типа, а n – общее число кластеров, содержащих частицы X. Сначала все кластеры имеют малый размер, обычно не превышающий 10 ячеек (рис. 2, *а*), что соответствует равномерному начальному распределению частиц. Затем на решетке появляются кластеры все большего размера (рис. 2, *б*). Переходный процесс, сопро-



а *б*

Рис. 1. Распределение частиц X на поверхности решетки: в начальный момент времени (*а*) и после переходного процесса (*б*)

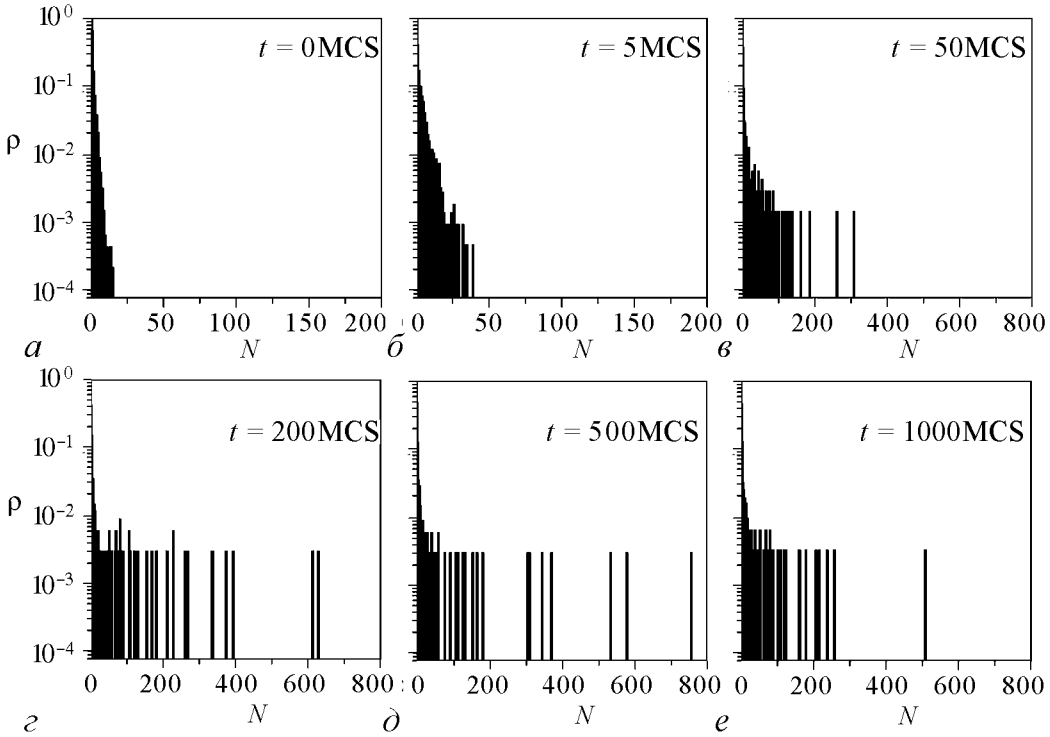


Рис. 2. Распределение кластеров по размерам. Размер решетки 200 × 200 ячеек

вождающийся формированием кластеров, завершается примерно к моменту времени $t = 200$ MCS, после чего мы имеем распределение (рис. 2, *г, д, е*) со средним размером кластеров, осциллирующим около значения 25–30 ячеек. Однако время от времени в решетке появляются кластеры, содержащие более тысячи частиц, и очень редко – кластеры размером 4000–5000 ячеек.

Для решеток малого размера распределение кластеров нестационарно. Оно изменяется соответственно с изменениями концентраций реагентов. Процесс можно рассматривать как стационарный только в предельном случае решетки бесконечного размера, когда «амплитуда» глобальных колебаний стремится к нулю. Рис. 3 демонстрирует временную эволюцию величин, характеризующих динамику кластеров. В частности, на графике 3, *б* представлена эволюция среднего размера кластеров $\langle N \rangle$, содержащих частицы X. Для сравнения на графике 3, *а* показано изме-

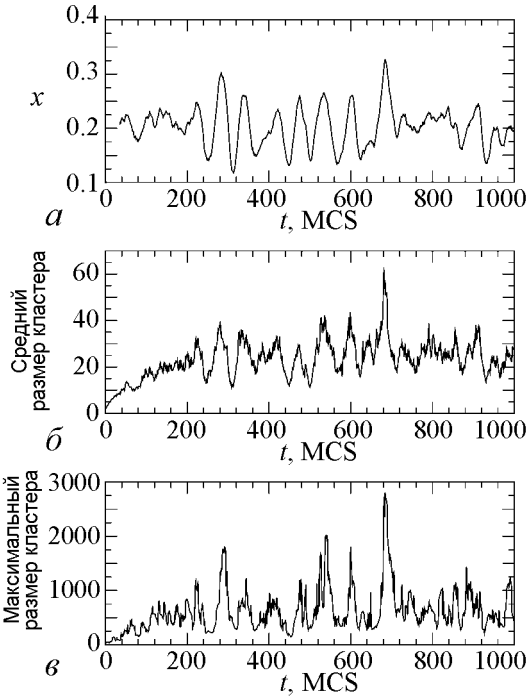


Рис. 3. Временные реализации концентрации частиц X (*а*); зависимости от времени среднего размера X-кластеров (*б*) и размера наибольшего кластера X-типа (*в*). Размер решетки $L^2 = 100 \times 100$. Параметры $k_{1,2,3,4,5} = 1$

нение средней концентрации частиц X в решетке, а на графике 3, *в* – колебания размера наибольшего кластера, состоящего из X-частиц. Начиная с первоначального одно родного распределения, с течением времени в решетке наблюдается постепенный рост среднего размера кластеров. Примерно к моменту времени $t \simeq 200$ MCS, когда процессы кластерообразования завершаются, размер кластеров перестает расти и начинает осциллировать почти с постоянной интенсивностью около своего среднего значения. Для маленьких решеток средний размер кластеров и усредненная концентрация вещества X хорошо коррелируют с размером наибольшего кластера. То есть рост концентрации веществ сопровождается увеличением размеров соответствующих кластеров, а пики на всех трех графиках примерно совпадают. Для больших решеток (когда $L \geqslant 200$) это соответствие начинает исчезать. Взаимосвязь между размером самого большого кластера и концентрацией соответствующего вещества численно можно охарактеризовать коэффициентом взаимной корреляции

$$C = \frac{\langle (n_{\max}(t) - \langle n_{\max} \rangle)(x(t) - \langle x \rangle) \rangle}{\sqrt{D_n D_x}}. \tag{5}$$

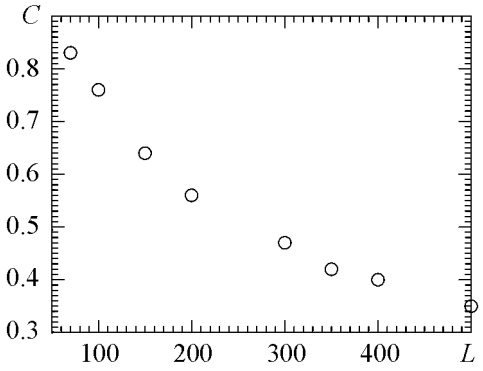


Рис. 4. Взаимная корреляция C между размером наибольшего X-кластера и средней концентрацией x частиц X как функция линейного размера решетки L

Здесь $n_{\max}$ – число частиц в самом большом кластере, а $D_{n_{\max}} = \langle (n_{\max}(t) - \langle n_{\max} \rangle)^2 \rangle$ и $D_x = \langle (x(t) - \langle x \rangle)^2 \rangle$ соответственно дисперсии $n_{\max}$ и концентрации частиц X. Зависимость коэффициента C от размера решетки представлена на рис. 4. Его значение монотонно спадает с ростом линейного размера решетки приблизительно от 0.84 для наименьшей из рассматриваемых решеток ($L^2 = 70 \times 70$) до 0.35 для решетки размером 500×500 ячеек. Для небольших решеток корреляция достаточно сильная, что свидетельствует о том, что рост концентрации того или иного компонента связан с образованием на решетке кластеров большого размера, а не с ростом числа средних кластеров. Слабая корреляция для больших решеток говорит о том, что пространственное взаимодействие на больших расстояниях очень слабое.

Происходящее на поверхности решетки образование структур можно рассматривать как смешанный процесс, включающий в себя две составляющие, имеющие различные пространственные масштабы. Первый характерный масштаб соответствует среднему размеру кластеров и определяет пространственно-временную динамику в выделенной малой области решетки. Этот масштаб тесно связан с размером и формой кластеров. Второй масштаб относится к динамике решетки как единого целого. Он определяется перемешиванием, которое происходит из-за несинхронного образования кластеров в различных частях решетки. Вследствие этого статистические свойства распределения кластеров по размерам должны отличаться для малых и больших решеток. Для больших решеток распределение кластеров должно отражать свойства обоих масштабов. Чтобы проверить это предположение, рассмотрим,

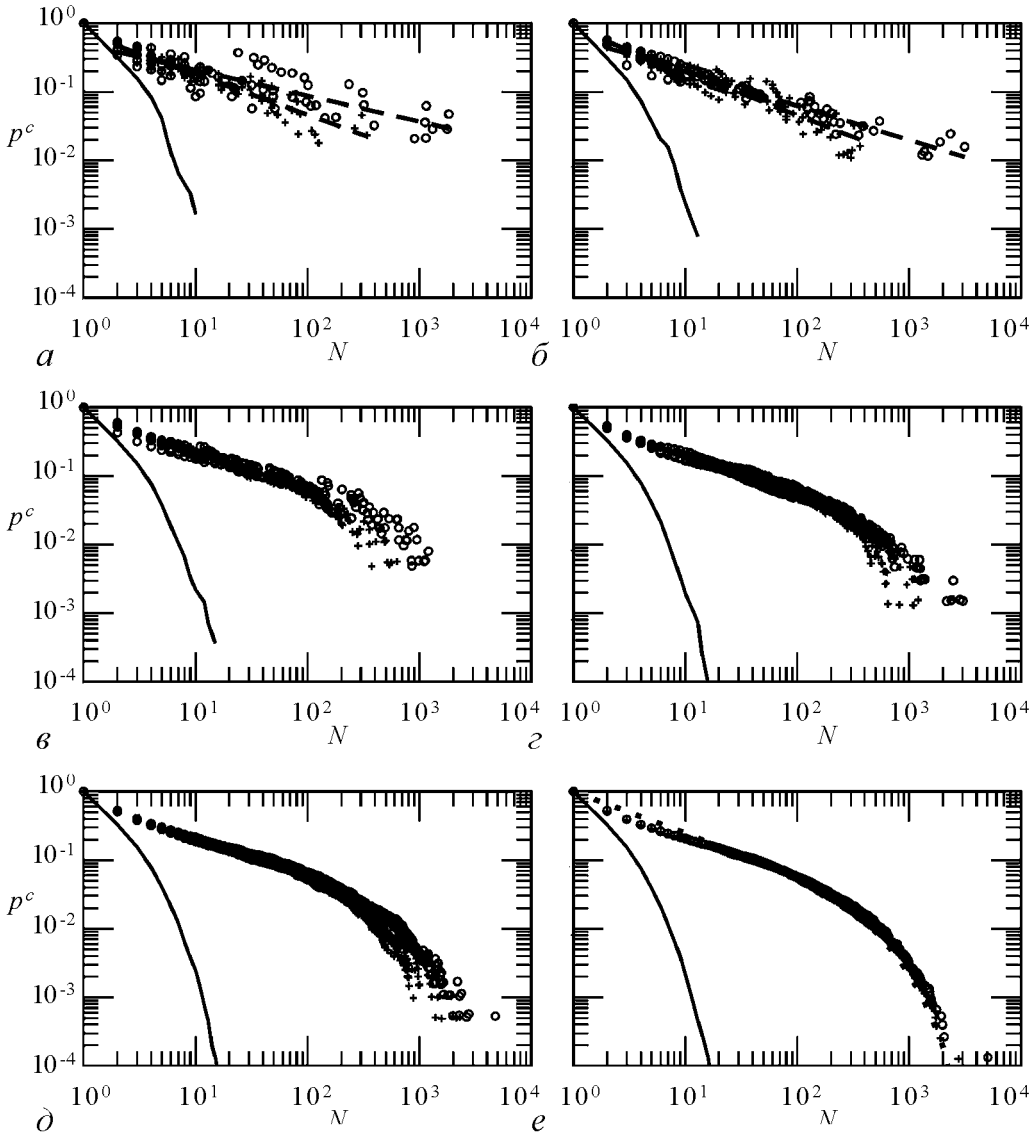


Рис. 5. Интегральная вероятность $p^c(n)$ появления на поверхности решетки X-кластера, размером не менее N, ячеек для решеток 70×70 ячеек (*а*); 100×100 ячеек (*б*); 150×150 ячеек (*в*); 300×300 ячеек (*г*); 500×500 ячеек (*д*); 1000×1000 ячеек (*е*). Кружки соответствуют максимумам X-концентрации, крестики – минимумам. Для сравнения жирной линией показано начальное равномерное распределение (для $t = 0$ MCS). Штриховой линией на рис. (*а*) и (*б*) показана аппроксимирующая функция

как изменяется распределение кластеров с ростом размера решетки. На рис. 5 в двойном логарифмическом масштабе изображены графики зависимости интегральной вероятности $p^c(n)$ появления в решетке X-кластера, состоящего не менее чем из N частиц, от размера N для решеток с разными значениями L.

$$p^c(N) = \sum_{i=N}^{\infty} p(i). \tag{6}$$

Так как процесс на поверхности решетки не является стационарным, мы проверили

поведение вероятности $p^c(n)$ для двух характерных моментов времени: когда концентрация x вещества X достигает своего максимального и минимального значения. На рис. 5 соответствующие точки графиков отмечены кружками и крестиками. Минимальный размер решетки, при котором нам удавалось наблюдать колебания – решетка 70×70 ячеек. При меньшем размере решетки происходит быстрое «вымывание» одного из реагентов и реакции прекращаются. Распределение вероятности $p^c(n)$ для такой решетки представлено на рис. 5, *а*. На графиках все точки располагаются вблизи прямых (отмечены штриховыми линиями) с наклоном от 0.35 (для максимумов x) до 0.65 (для минимумов x). Из-за малого количества точки графика сильно разбросаны относительно аппроксимирующих прямых. Для решетки размером 100×100 ячеек мы имеем хорошую статистику и отклонение от аппроксимирующих прямых становится меньше. Линейная зависимость в двойном логарифмическом масштабе соответствует степенному закону для интегральной функции распределения вероятности

$$p^c(n) \simeq n^{-\mu}, \tag{7}$$

где степень μ принимает значения от 0.4 (для максимальной концентрации данного вещества) до 0.6 (для минимальной концентрации). В итоге само распределение $p(n)$ описывается степенным законом

$$p(N) \sim N^{-1-\mu}. \tag{8}$$

Степенной закон в функции распределения кластеров по размерам говорит об их фрактальных свойствах. При увеличении размеров решетки L наблюдаются следующие особенности.

• Флуктуации вероятности становятся меньше, так как количество кластеров возрастает и статистика улучшается (рис. 5, *в-е*).

• Значения вероятности для моментов времени с различными концентрациями реагента становятся ближе друг к другу, что является следствием исчезновения колебаний на макроуровне в больших решетках. Процесс приближается к стационарному.

• Распределение кластеров по размерам для разных решеток ведет себя поразному. Для малых решеток в распределении наблюдается степенной закон, в то время как для больших размеров над степенным законом начинает доминировать экспоненциальная зависимость.

Последний эффект, по нашему мнению, связан, во-первых, с процессом формирования фрактальных кластеров в малом масштабе и, во-вторых, с процессом перемешивания в макромасштабе из-за несинхронного появления кластеров в различных частях решетки. Перемешивание приводит к экспоненциальному спаду пространственной корреляции и функции распределения кластеров по размерам. Два независимых процесса, одновременно протекающих в микро- и макромасштабе большой решетки, должны приводить к сложному виду распределения кластеров по размерам, составляющими которого будут степенной и экспоненциальный законы. На самом деле, для больших решеток (рис. 5, *е*) распределение интегральной вероятности хорошо аппроксимируется функцией

$$p^c(n) \simeq \exp(-\lambda(n-1))n^{-\mu}, \tag{9}$$

где $\lambda = 0.002$ и $\mu = 0.6$.

5. Модель (4+1)-LLV с внешним перемешиванием

Как отмечалось выше, формирование кластеров определяющим образом влияет на временную динамику системы. Ход реакций сдерживается за счет ограничения пространства взаимодействий: реакции протекают только на границах между однородными кластерами. Глобальная динамика при этом, в пределе большой решетки, представляет собой стационарное состояние с концентрациями, определяемыми состоянием равновесия (4) из уравнений среднего поля (2). Если выбрать начальные концентрации отличными от (4), то по прошествии переходного процесса концентрации придут к данному состоянию равновесия, сделав предварительно несколько витков вокруг него. Глобальное поведение системы напоминает поведение динамической системы в окрестности устойчивого фокуса, то есть системы с диссипацией. Налицо качественное различие в глобальном поведении модели Монте-Карло и в динамике модели среднего поля.

Рассмотрим теперь, как изменится поведение решетки, если мы введем управляющее воздействие, разрушающее однородные кластеры, например, путем внешнего перемешивания. Очевидно, что такое вмешательство должно стимулировать ход процессов на решетке, поскольку взаимодействие между частицами в однородной системе протекает одновременно во всех точках пространства реакций. Чтобы получить подобный эффект, мы добавили в алгоритм метода Монте-Карло на каждой временной единице перемешивание среды, которое заключается в перетасовывании содержимого ячеек решетки случайным образом. Такое перемешивание не похоже на обычную диффузию, так как частица из одной ячейки не проходит весь путь по решетке до второй, попутно взаимодействуя с окружающими частицами, а мгновенно меняется с ней местами. Подобным образом, вероятно, можно моделировать реакции в газовых и жидких фазах с принудительным перемешиванием среды, однако для семейства моделей LLV такое перемешивание возможно только если частицы всех типов будут постоянно покидать решетку и адсорбироваться из газовой фазы обратно, причем кинетические константы этих процессов должны быть значительно выше соответствующих констант для самих реакций.

Прежде чем переходить непосредственно к результатам моделирования, введем некий параметр, который будет количественно характеризовать степень перемешивания в системе,

$$p = \frac{n}{M}, \tag{10}$$

где n – число элементарных актов перемешивания (перестановок) на каждом шаге MCS, а M – общее число ячеек решетки. Этот параметр показывает, какая часть ячеек была перемешана на каждом шаге алгоритма. Если $p \geqslant 1$, это означает, что в среднем каждая частица изменила свое положение, и можно говорить о нелокальности превращений, входящих в исходную схему (1).

Обратимся теперь к результатам моделирования. На рис. 6 представлена временная реализация для концентрации частиц X при достаточно малом значении $p = 0.0056$. Несмотря на слабость перемешивания, результаты значительно отличаются от временных реализаций, представленных на графике 3, *а*. Размах колебаний заметно возрастает, так же как и степень их регулярности. Колебания становятся почти периодическими: в спектре мощности (рис. 7) появляются ярко выраженные пики на кратных частотах на фоне небольшого шумового пьедестала. Эти колебания,

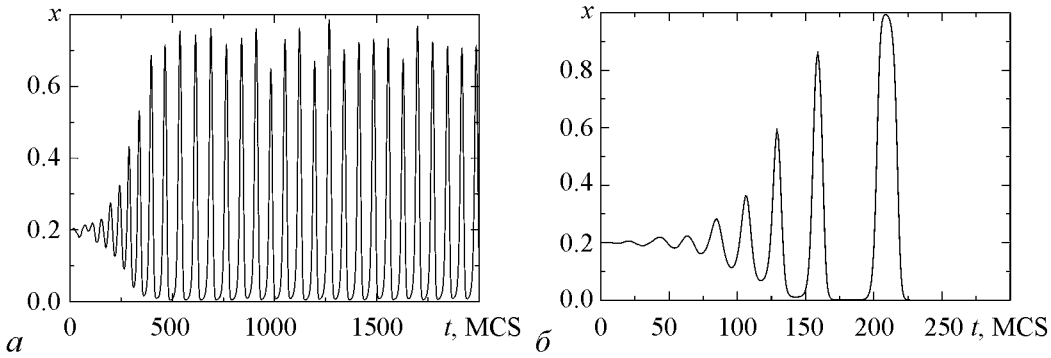


Рис. 6. Временные реализации для концентрации частиц X в системе (4+1)-LLV с перемешиванием на решетке размером 300×300 ячеек: *а* – малое перемешивание, $p = 0.0056$; *б* – большое перемешивание, $p = 1$. Начальные концентрации: $x_0 = y_0 = z_0 = u_0 = 0.2$; параметры: $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 1$

по-видимому, можно считать периодическими колебаниями с шумом, который неизбежно возникает в системе за счет вероятностного характера протекающих реакций. Косвенным подтверждением этого является тот факт, что степень «регулярности» колебаний увеличивается с ростом размера решетки. Так, спектр для решетки размером 500×500 элементов (изображен темным цветом на рис. 7) имеет более узкие пики и более низкий шумовой пьедестал, чем спектр колебаний решетки размером 300×300 элементов (показан более светлым).

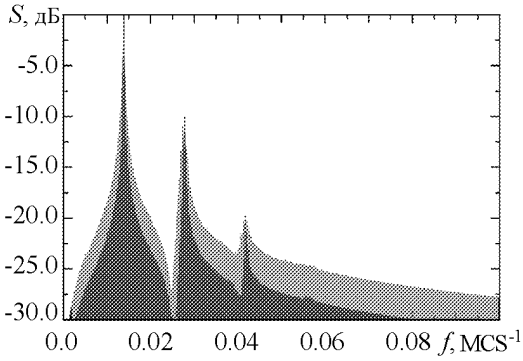
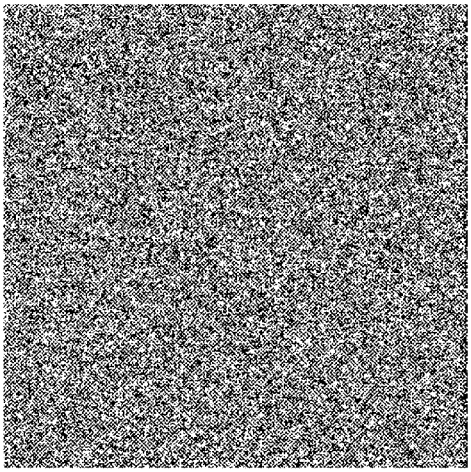


Рис. 7. Спектры мощности процесса $x(t)$. Параметры и начальные условия те же, что и на рис. 6

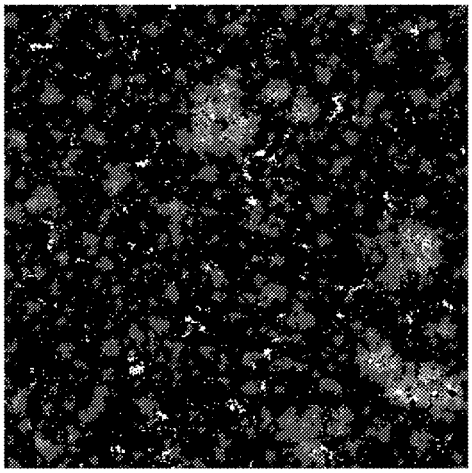
Понять причину таких изменений в поведении системы при добавлении в нее даже слабого перемешивания нетрудно, если обратиться к пространственной динамике. Как и в случае исходной модели, мы создаем однородное начальное распределение частиц с выбранными средними концентрациями реагентов (рис. 8, *а*). Так как перемешивание слабое, оно не может полностью предотвратить образование кластеров, и после переходного процесса образуется характерное распределение кластеров, «снимок» которого представлен на рис. 8, *б*. Этот рисунок сильно напоминает распределения, полученные для исходной системы (см. рис. 1). Однако есть существенное отличие. При отсутствии перемешивания после образования кластеров все взаимодействия на решетке носят граничный характер. В реакции принимают участие только частицы, находящиеся на границах соседних кластеров, заполненных реагирующими веществами, а большая часть вещества оказывается отделена (блокирована) от частиц, которые необходимы для протекания реакции. Так как формирование кластеров в различных частях решетки происходит несинхронно, то усредненные по пространству реакции концентрации веществ совершают флуктуационные колебания с амплитудой, спадающей при увеличении размера решетки. Когда в систему на каждом шаге добавляется перемешивание, часть блокированных частиц случайным образом

перебрасывается из одних кластеров в другие. При этом нарушается однородность последних. Кластеры становятся как бы испещрены отдельными частицами разных типов. Как только переброшенные частицы попадают в «благоприятную» среду, начинается быстрый рост соответствующей концентрации в этой области решетки. Естественно, что из-за вероятностного фактора в таких перебросках чаще всего будут принимать участие частицы, усредненная концентрация которых выше в данный момент. Это приводит к дальнейшему росту концентрации доминирующего вида, пока количество частиц второго вещества, принимающего участие в бимолекулярном взаимодействии, не станет слишком низким. Таким образом, даже слабое перемешивание способствует появлению пространственного синхронизма и, как следствие, росту амплитуды и регулярности колебаний. При этом, как видно из сопоставления рис. 8, *б* и 8, *в*, решетка в целом периодически «окрашивается» в разные цвета, то есть ведет себя как единое целое.

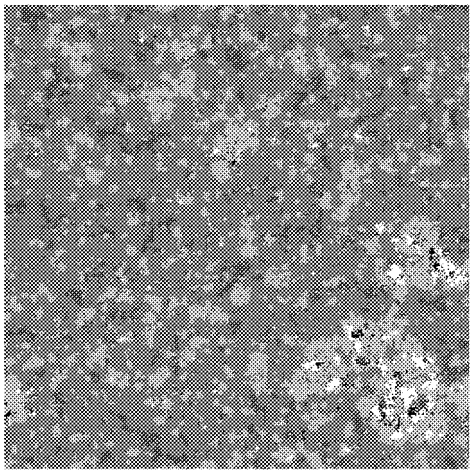
Рассмотрим теперь зависимость динамики системы от параметра перемешивания. Для этого выберем значения параметров $k_i = 1$ и будем плавно увеличивать p от нуля до единицы. При значениях p близких к нулю, система ведет себя так же, как и без перемешивания. Глобальная динамика сходна с «зашумленным» устойчи-



а



б



в

Рис. 8. Пространственные «снимки» системы с перемешиванием для разных моментов времени t: 0 MCS (*а*); 900 MCS (*б*); 1800 MCS (*в*). Оттенками серого показаны частицы различных видов. Начальные условия и параметры системы те же, что и на рис. 6

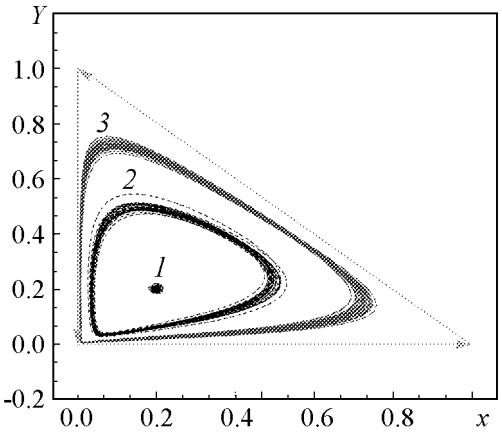


Рис. 9. Проекции «фазовых портретов» глобальных колебаний на решетке на плоскость $X - Y$ в зависимости от степени перемешивания: *1* – $p = 0$, *2* – $p = 0.0028$, *3* – $p = 0.0056$. Прямыми изображена проекция контура из инвариантных многообразий для системы среднего поля (2)

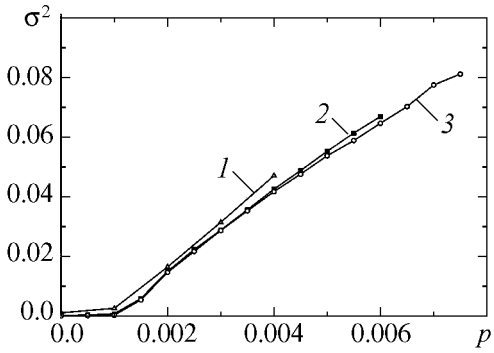


Рис. 10. Зависимость дисперсии для процесса $x(t)$ от параметра перемешивания p для решеток размером 100×100 ячеек (линия *1*), 200×200 ячеек (*2*) и 300×300 ячеек (*3*). Начальные концентрации и относительные скорости реакций выбраны такими же, как и на рис. 6

вым фокусом (рис. 9, линия *1*). Начиная с $p \simeq 0.001$, наблюдается возникновение и постепенный рост колебаний в системе. «Фазовый портрет» становится похожим на предельный цикл в динамических системах (рис. 9, линия *2*). Этот процесс проиллюстрирован на рис. 10, на котором построена зависимость дисперсии процесса от параметра p для нескольких размеров решеток. Видно, что, во-первых, «амплитуда» колебаний практически не зависит от размера решетки, во-вторых, существует пороговое «бифуркационное» значение рождения колебаний и, в-третьих, дисперсия зависит от «бифуркационного» параметра линейно, что означает рост амплитуды колебаний пропорционально квадратному кореню от надкритичного значения параметра, характерный для суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа в динамических системах. Таким образом, по своим особенностям динамика рассматриваемой стохастической системы напоминает рождение предельного цикла из состояния равновесия при потере им устойчивости через бифуркацию Андронова – Хопфа. При дальнейшем увеличении управляющего параметра происходит монотонный рост амплитуды колебаний, пока, наконец, «предельный цикл» не «влипает» в замкнутый контур, образованный многообразиями. На рис. 9 линия *3* соответствует подобной ситуации, когда «предельный цикл» располагается в непосредственной близости от контура. После этого «цикл» исчезает, и мы наблюдаем динамику, характерную для неустойчивого фокуса внутри замкнутого контура из многообразий: из любых начальных условий колебания сначала резко возрастают, а затем, достигнув некоторой максимальной амплитуды, прекращаются. Данную временную динамику можно наблюдать на рис. 6, *б*, построенном для системы с полным перемешиванием.

Заключение

В работе исследуется пространственная динамика модели Монте-Карло для системы (4+1)-LLV и рассматривается влияние внешнего перемешивания. В процессе реакций одноименные частицы образуют на поверхности двумерной решетки катализатора фрактальные структуры – кластеры. Наблюдаемые в системе колеба-

ния концентраций реагентов являются результатом граничного взаимодействия этих кластеров. Характеристики колебаний определяются формой, структурой взаимодействующих кластеров и их количеством. Законы распределения кластеров по размерам различны для решеток малого и большого размера. Для решеток малого размера характерно распределение по степенному закону, в то время как в больших решетках к степенному закону распределения кластеров по размерам добавляется экспоненциально спадающая зависимость. Такой вид распределения в больших решетках свидетельствует об одновременном протекании двух процессов на поверхности решетки: формирование и взаимодействие кластеров в малом пространственном масштабе и перемешивание и суперпозиция несинхронных колебаний различных частей решетки в больших масштабах. Добавление внешнего перемешивания в систему приводит к синхронизации колебаний различных областей решетки, что в свою очередь ведет к росту амплитуды и регулярности глобальных колебаний в системе. В зависимости от степени перемешивания можно наблюдать аналог бифуркации Андронова – Хопфа, реализующейся в динамических системах, в результате которой рождается зашумленный устойчивый «предельный цикл». Амплитуда «предельного цикла» растет с увеличением параметра перемешивания, пока значения средних концентраций не выходят за рамки пороговых значений, соответствующих в модели среднего поля инвариантным многообразиям, образующим в фазовом пространстве замкнутый контур. После этого колебания в системе прекращаются, а поверхность решетки оказывается «отравленной» одним или двумя компонентами реакций.

При добавлении в систему сильного перемешивания ($p \geqslant 1$) реакции протекают по всей поверхности катализатора, а взаимодействия на решетке становятся нелокальными. Несмотря на то, что при составлении уравнений среднего поля основным приближением является нелокальность взаимодействий, добавление перемешивания не приводит к динамике, описанной в рамках макроскопического подхода модели среднего поля: динамика системы как при наличии внешнего перемешивания, так и при его отсутствии соответствует поведению диссипативных моделей. Вопрос о причине такого расхождения остается пока открытым.

Авторы выражают свою признательность профессору Астеро Провате (Институт физической химии, научный центр «Demokritos», Афины, Греция) за проведенные плодотворные обсуждения и консультации по материалам данной работы.

Библиографический список

1. *Ertl G.* Oscillatory kinetics and spatiotemporal self-organization in reactions at solid surfaces // Science. 1991. Vol. 254. P. 1750.
2. *Wintterlin J.* Scanning tunneling microscopy studies of catalytic reactions // Adv. Catal. 2000. Vol. 45. P. 131.
3. *Ertl G., Norton P.R. and Rustig J.* Kinetic oscillations in the platinum-catalyzed oxidation of CO // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49. P. 177.
4. *Imbihl R. and Ertl G.* Oscillatory kinetics in heterogeneous catalysis // Chem. Rev. 1995. Vol. 95. P. 697.
5. *Shvartsman S.Y., Schutz E., Imbihl R. and Kevrekidis I.G.* Dynamics on microcomposite catalytic surfaces: The effect of active boundaries // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 2857.

6. *Voss C. and Kruse N.* Chemical wave propogation and rate oscillations during the NO_2 /H_2 reaction over Pt // Ultramicroscopy. 1998. Vol. 73. P. 211.
7. *Slinko M., Fink T., Loher T., Madden H.H., Lombardo S.J., Imbihl R. and Ertl G.* The NO+H_2 reaction on Pt(100) – steady-state and oscillatory kinetics // Surface Science. 1992. Vol. 264. P. 157.
8. *Hartmann N. and Madix R.J.* Dynamical rearrangements of the (2×1) O adlayer during CO oxidation on Cu(110) // Surface Science. 2002. Vol. 516. P. 230.
9. *Ziff R.M., Gulari E., Barshad Y.* Kinetic phase transitions in irreversible surface-reaction model // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 2553.
10. *Brosilow B.J., Gulari E., Ziff R.M.* Boundary effects in a surface reaction model for CO oxidation // J. Chem. Phys. 1993. Vol. 98. P. 674.
11. *Zhdanov V.P.* Surface restructuring and kinetic oscillations in heterogeneous catalytic reactions // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 7554.
12. *Zhdanov V.P.* Surface restructuring, kinetic oscillations, and chaos in heterogeneous catalytic reactions // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59. P. 6292.
13. *Voss C., Kruse N.* Field ion microscopy during an ongoing surface reaction: NO/H_2 on Pt // Applied Surface Science. 1994. Vol. 87/88. P. 127.
14. *Nicolis G. and Prigogine I.* Self-organization in Nonequilibrium Systems. New York.: Wiley, 1977.
15. *Albano E.V.* Monte Carlo simulations of surface chemical reactions: Irreversible phase transitions and oscillatory behaviour // Computer Physics Communications. 1999. Vol. 121-122. P. 388.
16. *Albano E.V. and Marro J.* Monte Carlo study of the CO- poisoning dynamics in a model for the catalytic oxidation of CO // J. Chem. Phys. 2000. Vol. 113. P. 10279.
17. *Tammaro M. and Evans J.W.* Chemical diffusivity and wave propagation in surface reactions: lattice-gas model mimicking CO-oxidation with high CO-mobility // J. Chem. Phys. 1998. Vol. 108. P. 762.
18. *Liu D.J. and Evans J.W.* Symmetry-breaking and percolation transitions in a surface reaction model with superlattice ordering // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84. P. 955.
19. *De Decker Y., Baras F., Kruse N. and Nicolis G.* Modeling the NO + H_2 reaction on a Pt field emitter tip: Mean-field analysis and Monte-Carlo simulations // J. Chem. Phys. 2002. Vol. 117. P. 10244.
20. *Provata A., Nicolis G. and Baras F.* Oscillatory dynamics in low dimensional lattices: A lattice Lotka-Volterra model // J. Chem. Phys. 1999. Vol. 110. P. 8361.
21. *Tsekouras G.A. and Provata A.* Fractal properties of the lattice Lotka-Volterra model // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. art. no 016204.
22. *Frachebourg L., Krapivsky P.L. and Ben-Naim E.* Spatial organization in cyclic Lotka-Volterra systems // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 6186.
23. *Efimov A., Shabunin A., Astakhov V. and Provata A.* Chaotic dynamics of chemical reactions in low-dimensional substrates: Mean-Field and Monte-Carlo approaches // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 2. С. 72.

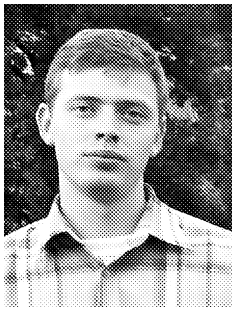
Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 12.01.2005

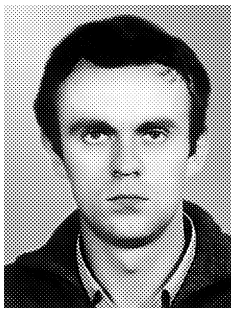
FORMATION AND EVOLUTION OF THE SPATIAL STRUCTURES IN THE SYSTEM OF CHEMICAL REACTIONS ON THE CATALITYC SURFACE: MONTE CARLO SIMULATION

A.V. Efimov, A.V. Shabunin

The cluster formation in the cyclic (4+1)-Lattice – Lotka–Volterra model is studied by Kinetic Monte Carlo simulations on a square lattice support. The features of cluster size distribution, spatial autocorrelation function and other dependences of the spatial dynamics of the system are under consideration. The role of cluster formation process and it effect on the systems dynamics is studied in this work. We show that the external mixing added to the initial scheme leads to the periodic self-oscillations appearance.



Ефимов Антон Викторович – окончил физический факультет СГУ по специальности радиофизика и электроника (2004). Работает инженером кафедры радиофизики и нелинейной динамики, с осени 2005 года – аспирант кафедры. Автор нескольких научных публикаций. Область научных интересов: нелинейная динамика, хаос, образование структур, хаотическая синхронизация, ее количественный анализ, клеточные автоматы.
E-mail:efimov@chaos.ssu.runnet.ru



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, кандидат физико-математических наук (1998). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций.
E-mail:alexey@chaos.ssu.runnet.ru

Нелинейная динамика в действии

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 2, 2006 УДК [530.182:551.4](470.44-25)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ОВРАЖНО-БАЛОЧНОЙ СЕТИ ГОРОДА САРАТОВА

А.В. Иванов, А.А. Короновский, И.М. Минюхин, И.А. Яшков

В работе рассмотрена задача вычисления фрактальной размерности самоподобных структур природного происхождения, описаны различия в подходах к фрактальному анализу абстрактных математических фракталов и реальных фракталов, для вычисления емкостной размерности которых необходимо применение численного алгоритма. Предложен метод нахождения размерности, позволяющий избежать неопределенности в выборе участка аппроксимации зависимости числа ячеек покрытия от размера ячейки. Данный метод применяется как для модельных фракталов с известным значением размерности, так и для природных фракталов (овражно-балочной сети города Саратова)

Введение

В последнее время все бóльшую актуальность приобретают междисциплинарные исследования [1]. В частности, в современной системе наук о Земле исследования все чаще проводятся на стыке различных научных направлений. Для комплексной оценки современного состояния различных природных структур необходимо проводить исследования с использованием инструмента не только классических научных методик, разработанных и апробированных в системе наук о Земле, но и новейших физических, математических, компьютерных знаний и технологий, которые позволяют моделировать и прогнозировать возможные тенденции в изменении структуры и свойств природных объектов. Одним из таких инструментов, позволяющих анализировать современное состояние природных объектов, обусловленность их развития геолого-географическими особенностями территории и антропогенной нагрузкой, является фрактальный анализ. Данный метод позволяет оценить характер самоподобия природного объекта, раскрыть его фрактальные свойства. Подобный подход может быть применен к геолого-геоморфологическим структурам (в частно-

сти, для описания овражно-балочной сети[1]), демонстрирующим свойства самоподобия в относительно широком диапазоне характерных масштабов.

Изучение овражно-балочной сети (ОБС) с позиций теории фракталов является предметом специального исследования [2]. В русскоязычной литературе изучение собственно ОБС нами не встречено, хотя подобные работы по изучению фрактальной структуры природных объектов (в частности, речных бассейнов) описаны как в отечественных [3, 4], так и в зарубежных журналах [5–7]. Среди перечисленной литературы стоит отметить работу [8], в которой описывается применение фрактального метода в изучении эрозионной сети города Рио-де-Жанейро (Бразилия). Как правило, в вышеупомянутых работах осуществляется расчет емкостной фрактальной размерности [9, 10]. Получающееся при этом число трактуют как фрактальную размерность исследуемого природного объекта и интерпретируют его с точки зрения наук о Земле. В подавляющем большинстве работ, посвященных изучению фрактальной размерности природных объектов, авторы не акцентируют особое внимание на том факте, что строгое определение фрактальной размерности применимо для абстрактных математических множеств, демонстрирующих фрактальные свойства на бесконечном интервале характерных масштабов, в то время как природные объекты, являясь естественными фракталами, демонстрируют свойства самоподобия на ограниченном интервале пространственных масштабов. Соответственно, методы расчета фрактальной размерности, которые дают корректные результаты для абстрактных математических фракталов [10, 11], могут приводить к неточным (а порой и ошибочным) результатам для естественных фрактальных объектов, встречающихся в природе.

Целью настоящей работы является изучение фрактальных свойств природных объектов на примере ОБС города Саратова. Такие исследования, помимо теоретического интереса, стимулированы практической необходимостью. В последнее время становится очевидной потребность в тщательном анализе геоэкологических опасностей, провоцируемых человеком посредством изменения геолого-географических объектов и процессов (в том числе и ОБС) на территориях городов. Саратов, к сожалению для его жителей, является показательным полигоном для таких исследований. В разделе 1 работы показано, что простое применение традиционного алгоритма вычисления емкостной размерности для природных объектов приводит к неоднозначным результатам и, как следствие, к невозможности корректного определения величины фрактальной размерности. Затем, в разделе 2 предложен метод, позволяющий корректно определить фрактальную размерность как абстрактных математических фракталов, так и природных объектов. Полученный метод использован в разделе 3 для определения фрактальной размерности ОБС города Саратова.

1. Определение фрактальной размерности для природных объектов с помощью традиционного метода

Начнем рассмотрение с определения фрактальной размерности природной пространственно самоподобной структуры. В качестве объекта исследования выберем ОБС Елшанского ландшафтного района Саратова (рис. 1).

[1]Под овражно-балочной сетью авторы понимают систему оврагов и балок, а также их более мелких аналогов – ложбин и промоин.

Из рисунка видно, что ОБС, по всей видимости, действительно обладает фрактальными свойствами, и, следовательно, можно попытаться охарактеризовать ее с помощью фрактальной размерности. Традиционный способ расчета емкостной размерности заключается в том, что исследуемый объект покрывается сеткой с размером ячейки ε и подсчитывается количество ячеек сетки $N(\varepsilon)$, покрывающих изучаемый объект. С уменьшением размера ε ячейки сетки количество ячеек $N(\varepsilon)$, покрывающих объект, увеличивается. Емкостная размерность объекта определяется как

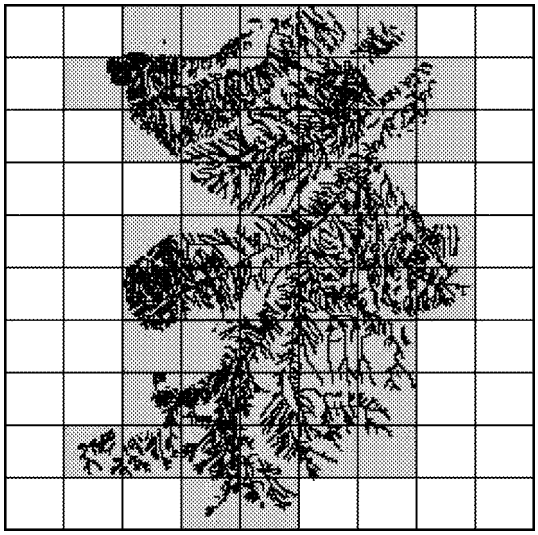


Рис. 1. Структура ОБС Елшанского ландшафтного района города Саратова [12], покрытая квадратной сеткой с размером ячейки ε (ячейки, покрывающие фрактал, показаны серым цветом)

$$D = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lg N(\varepsilon)}{\lg \varepsilon}. \qquad (1)$$

В силу того, что для природного фрактала интервал самоподобия ограничен, размер ячейки покрытия для него может варьироваться в определенном диапазоне, максимальное значение которого определяется размерами объекта, а минимальное – его элементарным структурным элементом (в случае ОБС – размерами ее оцифрованной карты и минимальным элементом изображения (пикселом), соответственно). Таким образом, формула (1) для ОБС неприменима, и для оценки ее фрактальной размерности необходимо применение численного алгоритма, который заключается в получении зависимости числа ячеек покрытия фрактала от размера ячейки, выделении на ней линейного участка (в двойном логарифмическом масштабе) и аппроксимации зависимости на этом участке линейной функцией. Параметры аппроксимирующей прямой при этом вычисляются методом наименьших квадратов, а емкостная размерность фрактала определяется угловым коэффициентом прямой. Наибольшие затруднения при этом вызывает выбор участка аппроксимации, которому соответствует степенная (в двойном логарифмическом масштабе – линейная) зависимость между размером ячейки сетки покрытия и числом ячеек. Как уже отмечалось ранее, это связано с неидеальностью природных фракталов (ограниченным пространственным интервалом самоподобия). Кроме того, природные структуры неоднородны, что также осложняет их фрактальный анализ.

При исследовании ОБС Елшанского ландшафтного района города Саратова была получена зависимость числа ячеек покрытия от размера ячейки, изображенная в двойном логарифмическом масштабе на рис. 2, *а*. Как видно из рисунка, на графике этой зависимости можно визуально выделить линейный участок (например, участок, обозначенный как *1-2*) и определить для него фрактальную размерность как модуль углового коэффициента аппроксимирующей зависимость $N(\varepsilon)$ прямой ($D_{1\text{-}2} \approx 1.66$). Однако при выборе другого участка (участок *2-3* на рисунке), внешне ничем не отличающегося по своим свойствам от первого, такого же «линейного», получается другое значение фрактальной размерности ($D_{2\text{-}3} \approx 1.59$), причем раз-

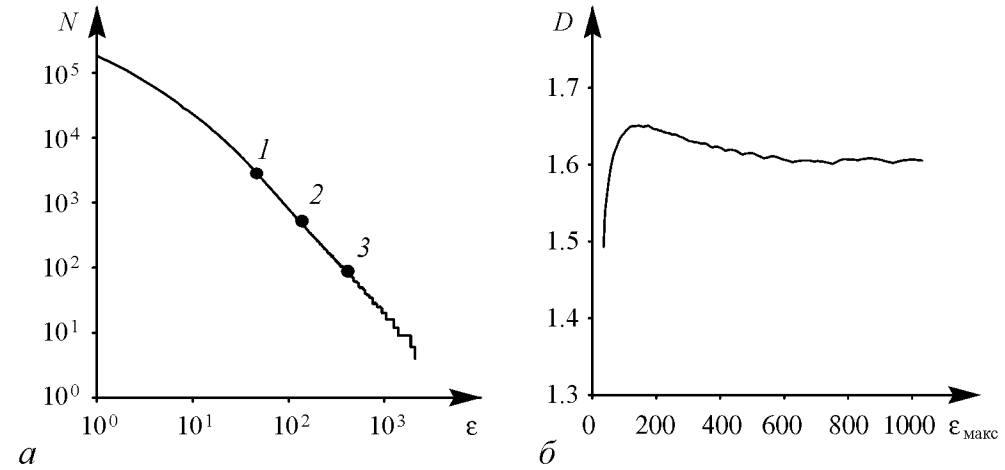


Рис. 2. Зависимость числа ячеек покрытия от размера ячейки для ОБС Елшанского ландшафтного района Саратова, построенная в двойном логарифмическом масштабе (емкостная размерность, вычисленная на участках *1-2* и *2-3*, равна соответственно 1.66 и 1.59) (*а*), и зависимость емкостной размерности ОБС от максимального значения ячейки покрытия при $\varepsilon_{\min} = 30$ (*б*)

ница значений размерностей для различных участков аппроксимации значительно превосходит погрешность метода наименьших квадратов. Это обстоятельство не позволяет однозначно определить значение размерности с точностью, достаточной для фрактального анализа ОБС, а позволяет только говорить о некотором интервале значений размерности, зависящем от выбора участков аппроксимации (то есть от выбора диапазона характерных масштабов, на котором исследуемый объект считается самоподобным). Действительно, на рис. 2, *б* показана зависимость величины фрактальной размерности D, определенной как угол наклона аппроксимирующей прямой зависимости $N(\varepsilon)$ (в двойном логарифмическом масштабе), от максимального значения участка аппроксимации $\varepsilon_{\max}$. Начальная точка линейного участка была выбрана как $\varepsilon_{\min} = 30$. Отчетливо видно, что величина фрактальной размерности существенным образом зависит от выбора используемого участка, а следовательно, традиционный метод определения фрактальной размерности (достаточно часто используемый при анализе фрактального строения ландшафтов, речных систем, овражно-балочных сетей и т.п., см. например [3, 4, 8, 13]) непригоден для природных объектов, и для их корректного фрактального анализа необходима разработка особых методик, учитывающих особенности природных самоподобных структур, о которых было сказано выше.

2. Метод расчета фрактальной размерности для природных объектов

Итак, как было показано выше, величина фрактальной размерности D существенным образом зависит от выбора участка, на котором она вычисляется. Соответственно, возникает необходимость выбора одного значения величины D из некоторого набора получающихся значений[2]. Одним из возможных вариантов является

[2]В принципе, возможен и другой вариант: можно пытаться рассматривать все множество получившихся значений величины D как некоторую характеристику фрактального объекта. Однако подобный подход существенно затрудняет анализ таких систем и тяжело реализуем на практике.

следующий: можно отыскать некоторое множество отрезков на графике зависимости $D(\varepsilon)$ в двойном логарифмическом масштабе, использование которых для определения величины фрактальной размерности позволяет получить множество значений D, не сильно отличающихся друг от друга, и использовать усредненную по этому множеству величину $\langle D \rangle$ как характеристику самоподобного объекта.

Будем характеризовать отрезок, используемый для вычисления величины фрактальной размерности, двумя числами: максимальным и минимальным размерами ячеек покрытия ($\varepsilon_{\max}$ и $\varepsilon_{\min}$, соответственно). Зафиксируем значение величины $\varepsilon_{\min}$ и будем строить зависимость величины фрактальной размерности $D(\varepsilon_{\max})$. В этом случае на графике зависимости $D(\varepsilon_{\max})$ искомый диапазон значений $\varepsilon_{\max}$, необходимый для определения величины $\langle D \rangle$, будет выглядеть как горизонтальный линейный участок[3]. Поскольку при выборе величины $\varepsilon_{\min}$ также допускается изрядная доля произвола, необходимо осуществить подобный анализ и при различных значениях $\varepsilon_{\min}$.

Таким образом, имеет смысл рассматривать график зависимости $D(\varepsilon_{\max})$ с целью нахождения на нем горизонтального участка, по которому и следует рассчитывать искомую величину $\langle D \rangle$. Применим предложенный подход последовательно к модельному фрактальному объекту (ковру Серпиньского), а затем и к природному фракталу, которым является овражно-балочная сеть Саратова.

2.1. Расчет фрактальной размерности ковра Серпиньского. Рассмотрим ситуацию, связанную с расчетом размерности модельного фрактального объекта – ковра Серпиньского (рис. 3). Аналитическое значение емкостной размерности для этого объекта известно и составляет $D \approx 1.89$. Однако при расчете емкостной размерности способом, описанным в разделе 1, возникает та же самая проблема, что и для природного фрактального объекта: получающийся результат сильно зависит от выбора линейного участка, на котором осуществляется расчет размерности. На рис. 4, *а* показана зависимость числа ячеек покрытия от размера ячейки для ковра Серпиньского, выполненная в двойном логарифмическом масштабе. Очевидно, что границы линейного участка на этой зависимости могут быть выбраны с достаточно большой степенью произвола, что, в свою очередь, ведет к разнице в значениях емкостной размерности. Например, значения размерности, вычисленные на участках *1-2* и *2-3*, равны соответственно 1.9 и 1.81, то есть выбирая произвольным образом участок аппроксимации зависимости $N(\varepsilon)$, нельзя однозначно определить размерности фрактала.

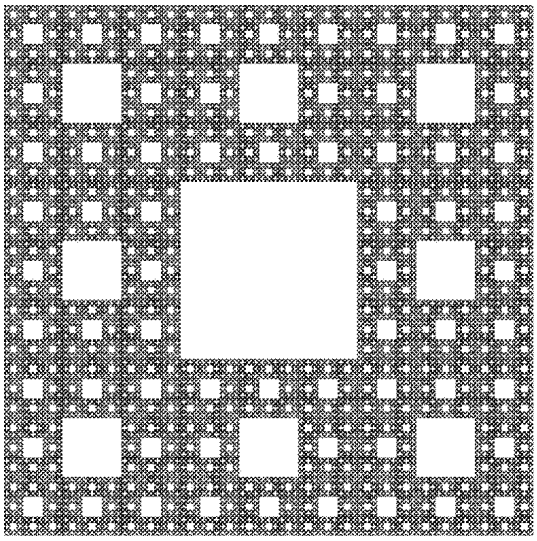


Рис. 3. Модельный фрактал – ковер Серпиньского ($D \approx 1.89$)

[3]Можно провести некоторую аналогию с методом вычисления корреляционной размерности по наблюдаемой временной реализации, используемым при анализе поведения нелинейных динамических систем, демонстрирующих хаотическую динамику [11, 14].

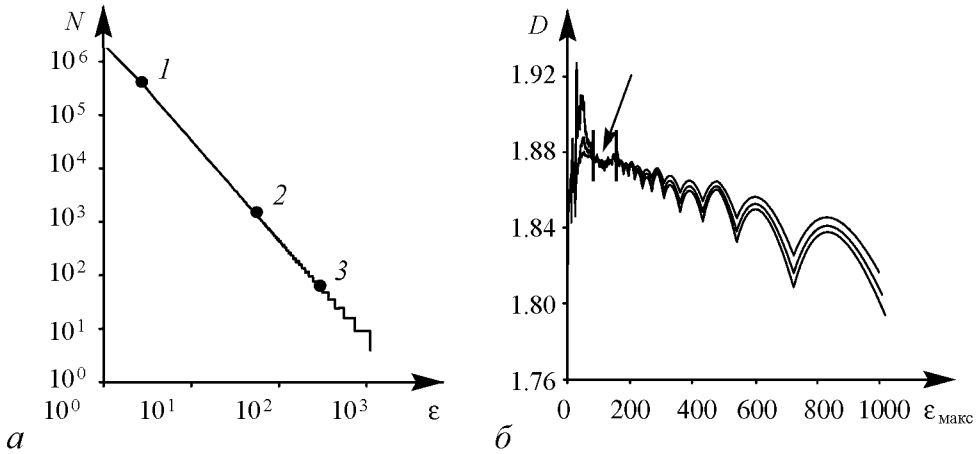


Рис. 4. Зависимость числа ячеек покрытия от размера ячейки для ковра Серпиньского $N(\varepsilon)$, выполненная в двойном логарифмическом масштабе (емкостная размерность, вычисленная на участках *1-2* и *2-3*, равна соответственно 1.90 и 1.81) (*а*), и зависимость емкостной размерности от максимального размера ячейки покрытия (различным кривым соответствуют различные значения минимального размера ячейки покрытия) (*б*). Стрелкой обозначен участок, по которому проводилось усреднение размерности (этому участку соответствует $\langle D \rangle \approx 1.88$)

На рис. 4, *б* показана зависимость емкостной размерности ковра Серпиньского от максимального размера ячейки покрытия фрактала $D(\varepsilon_{\max})$. Различным кривым соответствуют различные значения минимального размера ячейки покрытия $\varepsilon_{\min}$. Видно, что размерность существенным образом зависит от выбора линейного участка, причем разброс в значениях размерности значительно превосходит погрешность метода наименьших квадратов, при помощи которого осуществлялась аппроксимация зависимости $N(\varepsilon)$. В то же время на графике можно выделить участок, на котором размерность принимает примерно одинаковые значения вне зависимости от выбора $\varepsilon_{\min}$ и $\varepsilon_{\max}$. Проводя усреднение размерности по этому участку, можно получить ее значение $\langle D \rangle$, вычисленное с учетом ограниченности пространственного интервала самоподобия фрактала. Для ковра оно составило $\langle D \rangle \approx 1.88$, что отличается от аналитического значения менее чем на 0.5%. Таким образом, полученный результат позволил говорить о высокой эффективности предложенного метода и возможности его применения для изучения природных самоподобных объектов.

3. Расчет фрактальной размерности для овражно-балочной сети различных ландшафтных районов Саратова

Опробованный на модельном фрактале метод расчета емкостной размерности был применен для изучения ОБС города Саратова, для которой, как и для ковра Серпиньского, характерен разброс значений размерности, соответствующих различным участкам аппроксимации (см. раздел 1). При исследовании характера зависимости $D(\varepsilon_{\max})$ для ОБС при различных $\varepsilon_{\min}$ было обнаружено, что на графике этой зависимости можно также выделить участок, на котором размерность принимает примерно одинаковые значения вне зависимости от выбора $\varepsilon_{\min}$ и $\varepsilon_{\max}$ (рис. 5). Как и для

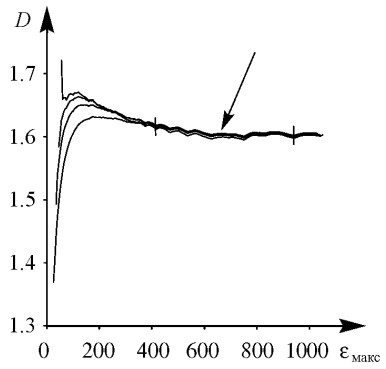


Рис. 5. Зависимость емкостной размерности ОБС Елшанского ландшафтного района Саратова от максимального размера ячейки покрытия. Стрелкой обозначен участок, по которому проводилось усреднение размерности (этому участку соответствует $\langle D \rangle \approx 1.61$)

ковра Серпиньского, проводя усреднение размерности по этому участку, можно получить характеристику фрактала, учитывающую его неоднородность и ограниченный интервал пространственного самоподобия. Для ОБС Елшанского района Саратова разброс значений размерности, соответствующих различным участкам аппроксимации, составил примерно 0.07 (см. рис. 2, *а*), в то время как участок, обозначенный на рис. 5 стрелкой (на графике зависимости $N(\varepsilon)$ в двойном логарифмическом масштабе этому участку соответствуют отрезки с приблизительно одинаковым угловым коэффициентом),

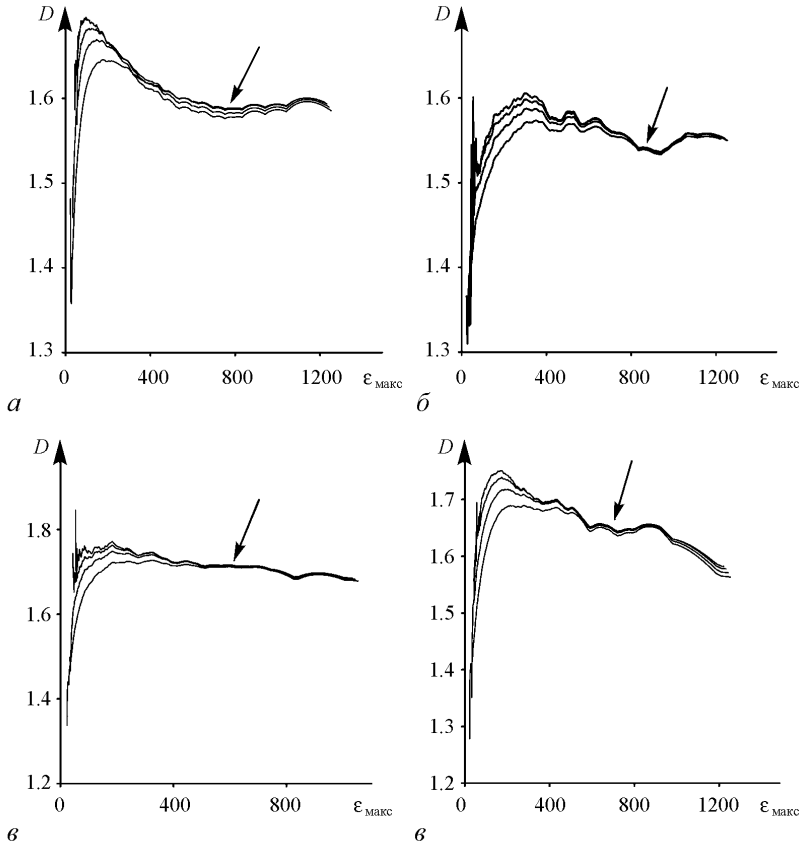


Рис. 6. Зависимость емкостной размерности от максимального размера ячейки покрытия для Гусельского (*а*), Лысогорского (*б*), северной (*в*) и южной (*г*) части Волжского ландшафтных районов. Различным кривым на графиках соответствуют различные значения минимальной ячейки покрытия. Стрелками обозначены участки, по которым проводилось усреднение размерности. Значения $\langle D \rangle$ равны, соответственно 1.59, 1.54, 1.71 и 1.65

позволил получить набор значений размерности, отличающихся друг от друга менее чем на 0.01. При вычислении размерности на этом участке было получено значение $\langle D \rangle \approx 1.61$, которое можно рассматривать как некоторую усредненную характеристику фрактала и использовать при сравнительном анализе различных самоподобных объектов природного происхождения.

Для других районов Саратова (рис. 6) вычисление фрактальной размерности описанным методом также позволило получить усредненные значения размерности, колеблющиеся в интервале от 1.54 (Лысогорский ландшафтный район) до 1.71 (Волжский ландшафтный район). Таким образом, можно сделать вывод об адекватности предложенного метода поставленной задаче и возможности его применения при исследовании как модельных, так и природных самоподобных структур.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе были рассмотрены различные подходы к фрактальному анализу природных самоподобных структур. Аналитический метод вычисления емкостной размерности абстрактных математических фракталов непригоден для реальных фракталов, интервал пространственного самоподобия которых ограничен, что приводит к необходимости применения численного алгоритма. При использовании традиционного способа вычисления размерности было обнаружено, что неопределенность в выборе участка аппроксимации зависимости числа ячеек покрытия фрактала от размера ячейки приводит к неопределенности в выборе значения размерности, которое можно трактовать как характеристику фрактальных свойств объекта. Для устранения описанного недостатка численного алгоритма было предложено проводить сравнительный анализ зависимости размерности от максимального значения участка аппроксимации $D(\varepsilon_{\max})$ для различных минимальных значений $\varepsilon_{\min}$ с целью нахождения некоторого множества отрезков на графике зависимости $N(\varepsilon)$ в двойном логарифмическом масштабе, угловой коэффициент которых (емкостная размерность фрактала) отличается незначительно. На графике зависимости $D(\varepsilon_{\max})$ этому набору отрезков соответствует горизонтальный участок. Проводя усреднение размерности по этому участку, можно получить значение размерности, вычисленное с учетом неоднородности природных фракталов и ограниченного интервала их пространственного самоподобия. Для проверки эффективности предложенного метода он был применен для вычисления размерности модельного фрактала, в качестве которого был взят ковер Серпиньского. Полученное при этом значение размерности отличалось от аналитического менее чем на 0.5%, то есть указанный алгоритм позволил с высокой точностью определить размерность модельного фрактала. Рассмотрение ОБС различных ландшафтных районов Саратова выявило тот же, что и для ковра Серпиньского, характер зависимости $D(\varepsilon_{\max})$, что позволяет сделать вывод о возможности применения предложенного в работе метода для фрактального анализа природных самоподобных структур и использования полученного этим методом усредненного значения размерности в качестве характеристики фрактальных свойств объекта.

Сегодня трудно однозначно охарактеризовать геолого-геоморфологический смысл фрактальной размерности ОБС. Накоплено пока слишком небольшое количество данных для каких-либо обобщающих интерпретаций. Значение фрактальной

размерности, по предположению Ю.Г. Пузаченко (устное сообщение), отражает в определенной мере энергетическую напряженность ОБС как геолого-геоморфологической системы на анализируемом участке. Проверяя это предположение на территории Саратовского научно-образовательного полигона, авторы планируют, в частности, подтвердить с помощью фрактального анализа ОБС наличие и очертания геоморфоблоков и энергоопасных зон, выделяемых Г.И. Худяковым [15]. Нам представляется рациональным предположить также, что ОБС, развивающаяся в более жестком, гетерогенном по вещественному составу горных пород геологическом субстрате, характеризуется более низким значением фрактальной размерности D. Так, именно ландшафтный район Лысогорского плато, сложенный наиболее разновозрастными, разнофациальными отложениями, имеет наименьший показатель $D = 1.54$. Предполагаемая закономерность, безусловно, нуждается в дальнейшей проверке на иных территориях.

Авторы выражают благодарность чл.-корр. РАН Г.И. Худякову (СГУ) и чл.-корр. РАН Д.И. Трубецкову (СГУ), профессору Ю.Г. Пузаченко (МГУ) за консультации в ходе подготовки статьи к изданию, а также ассистенту кафедры геоморфологии и геоэкологии А.В. Федорову (СГУ) за помощь в обработке картографических материалов.

Работа выполнена при поддержке научно-образовательного центра «Нелинейная динамика и биофизика» при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)), программы Федерального агентства по науке и инновациям «Проведение научных исследований молодыми учеными» (государственный контракт 02.442.11.7257). Авторы благодарят также за финансовую поддержку фонд некоммерческих программ «Династия» и Международный центр фундаментальной физики (Москва).

Библиографический список

1. *Короновский А.А., Трубецков Д.И.* Нелинейная динамика в действии: Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002.
2. *Яшков И.А., Иванов А.В.* Изучение эрозионной сети с помощью фрактального анализа // Недра Поволжья и Прикаспия. 2005. Вып. 44. С. 49.
3. *Васильев Л.Н.* Фрактальность и самоподобие природных пространственных структур // Изв. РАН. Сер. географическая. 1992. Вып. 5. С. 25.
4. *Пузаченко Ю.Г.* Приложение теории фракталов к изучению структуры ландшафта // Изв. РАН. Сер. географическая. 1997. Вып. 2. С. 24.
5. *Claps P., Oliveto G.* Reexamining the determination of the fractal dimension of river networks // Water Resour. Res. 1996. Vol. 32, №10. P. 3123.
6. *Barbera L.P., Rosso R.* On the fractal dimension of stream networks //. Water Resour. Res. 1989. Vol. 25, №4. P. 735.
7. *McNamara J.P., Kane D.L., Larry D., Hinzman L.D.* An analysis of an arctic channel network using a digital elevation model // Geomorphology. 1999. Vol. 29. P. 339.

8. *Lopes C. de O., Paula G.A. de, Vieira A.C.* Fractalidade da estrutura de drenagen do municipio do Rio de Janeiro // Revista Universidade Rural, Serie Clenclas Exalas e da Terra. 2002. Vol. 21, №2. P. 23.
9. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
10. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991.
11. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Серия «Современная теория колебаний и волн». М.: Физматлит, 2001.
12. *Артемьев С.А. и др.* Саратов: комплексный геоэкологический анализ / Под ред. А.В. Иванова. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003.
13. *Манжуров И.Л.* Фрактальная модель распределения плотности поверхностных загрязнений. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Екатеринбург, 2002.
14. *Короновский А.А., Ремпен И.С., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Переходный хаос в распределенной активной среде «винтовой электронный пучок – встречная электромагнитная волна» // Известия РАН. Сер. физическая. 2002. Вып. 66, №12. С. 1754.
15. *Худяков Г.И., Никифоров А.Н.* О геоморфоблоковом строении территории города Саратова // Проблемы геоморфологии и морфотектоники. Саратов, 1998. С. 46.

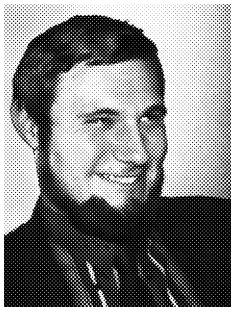
Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 21.03.2006

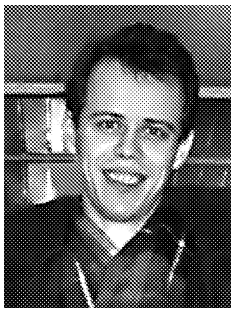
DEFINITION OF THE FRACTAL DIMENSION OF SARATOV RAVINE NETWORK

A.V. Ivanov, A.A. Koronovskii, I.M. Minyuhin, I.A. Yashkov

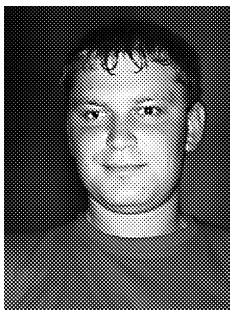
Fractal analysis of natural self-similar structures has been considered. Different approaches to the analysis of abstract mathematical fractals and natural fractals have been described. Numerical method of the fractal dimension calculation has been suggested. This method has been applied both for the model fractal (Sierpiński carpet) and natural fractals (Saratov ravine network).



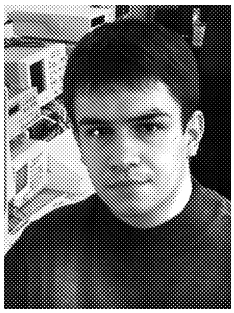
Иванов Алексей Викторович – родился в 1974 году в Саратове, окончил Саратовский госуниверситет в 1996 году по специальности «геолог-нефтяник», кандидат геолого-минералогических наук по специальности «палеонтология и стратиграфия» (1996), доцент (1999). Директор НИИ геологии Саратовского университета (1997–2004), первый заведующий новой кафедрой геоэкологии СГУ (с 2002 года), профессор СГУ (с 2003 года). Автор и соавтор более 250 работ, в том числе 18 монографий, 10 учебных пособий, двух научно-популярных книг. Трижды «Соросовский доцент», дважды лауреат Государственной научной стипендии, лауреат Потанинской стипендии. Заместитель главного редактора журнала «Недра Поволжья и Прикаспия». Область научных интересов: палеонтология, историческая геоэкология, экологическая геология.



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), кандидат физико-математических наук (1997). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в издательстве ГосУНЦ «Колледж».



Яшков Иван Александрович – родился в г. Жанатас, респ. Казахстан (1981), окончил с отличием географический факультет Саратовского госуниверситета (2003). Аспирант кафедры геоморфологии и геоэкологии географического факультета СГУ. По теме диссертационной работы опубликовано 2 научных статьи, несколько тезисов докладов Всероссийских и университетских научных конференций. Область научных интересов: применение фрактального метода в изучении эрозионных структур, эволюция и строение естественных и искусственных дренажных систем урбанизированных территорий.



Минюхин Игорь Михайлович – родился 24 января 1987 года. Студент 2 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Область научных интересов: применение методов нелинейной динамики к изучению систем различной природы, в том числе социальных, биологических, геологических и т.п. Участник студенческих конференций, автор публикации в сборнике докладов «Нелинейные дни–2005».

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 2, 2006 УДК 51–77

КАНОНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В ЭКОНОМИКЕ

Д.И. Трубецков

Статья носит обзорный характер и ее подзаголовком может быть фраза «По страницам прочитанных книг». Главная цель статьи – показать, что практически все канонические модели нелинейной динамики используются в современной математической экономике.

Что есть время? Каким образом происходят перемены? Существует ли универсальный закон, управляющий ходом перемен? А если он существует, то возможно ли его постичь? С самого начала цивилизации человечество встает перед этими вопросами. Они присущи как западной, так и восточной культуре, и не только в рамках науки. Раздумья об эволюции сами по себе представляют эволюционный процесс, как вследствие сложности проблемы, так и по причине ограниченности нашего понимания.

...Рассматриваются проблемы, связанные с динамикой экономических систем. Экономическая эволюция систематически исследовалась, начиная еще с Адама Смита, хотя единой теории так и не возникло. Встав на плечи предшественников, мы попытаемся заглянуть несколько дальше обычного.

<...>Воодушевленные современными работами математиков и представителей естественных наук в области нелинейных динамических систем, некоторые экономисты приступили к объяснению сложных экономических явлений, вводя в динамический анализ факторы неустойчивости и нелинейности. Эти исследования дали начало новому направлению в анализе экономических явлений.

В.-Б. Занг

Введение

В последние годы методы нелинейной динамики стали использоваться в экономике. Появились не только статьи, но и книги, например, книга В.-Б. Занга «Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории» (М.: Мир, 1999), цитаты из которой приведены здесь в качестве эпиграфа; книга Т. Пу «Нелинейная экономическая динамика» (Ижевск: НИЦ «РХД», 2000); книга

Э. Петерса «Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка» (М.: Мир, 2000).

Книги написаны математиками для экономистов, поэтому большую часть в них занимает математический аппарат. Книги полны оптимизма, хотя Занг пишет следующее: «Как и в вопросах прогнозирования погоды, широкая публика остается невысокого мнения об экономическом прогнозировании. И наука о прогнозировании погоды, и экономическое прогнозирование пытаются предсказать результат развития очень больших систем, компоненты которых сложнейшим образом взаимодействуют между собой. Изолирующие и упрощающие методы, которые играют центральную роль в развитии науки, для анализа таких систем малопригодны. Более того, поскольку подобные большие взаимодействующие системы часто нестабильны, предсказать поведение таких систем на больших временах практически невозможно» (С. 177).

Цель настоящего обзора – продемонстрировать, как канонические модели нелинейной динамики используются в экономике. Будут рассмотрены следующие модели:

- уравнение Ван дер Поля и его модификация;
- модель «хищник – жертва»;
- модель Лоренца;
- возникновение хаоса по сценарию Ньюхауса – Рюэля – Такенса;
- сценарий Фейгенбаума;
- модель Колмогорова – Петровского – Пискунова.

Начнем, однако, с моделей традиционной экономики, чтобы лучше понять происшедшие в ней революционные перемены из-за отказа от линейного подхода и перехода к анализу нелинейного эволюционного процесса с его неустойчивостями, разрывами, структурными изменениями. Конечно, как пишет Занг, – «основные концепции традиционной экономики – концепция рационального поведения и идеальной конкуренции играют фундаментальную роль и для развития синергетической экономики».

Теории равновесия в экономике (статическая экономика)

Идею равновесия экономика явно позаимствовала из теоретической механики. Механикам конкуренция равновесия была известна задолго до публикации в 1766 году Адамом Смитом «Благосостояния наций». Конечно, все помнят пушкинские строки:

Зато читал Адама Смита
И был великий эконом.
Что мог легко судить о том,
Как государство богатеет.
И как живет, и почему
Не нужно золота ему,
Когда простой продукт имеет.

Кстати, в «Толковом словаре живого великорусского языка» В.И. Даля находим такую информацию: «Экономъ – греч. хорошій хозяин, домострой, скопидомъ, разсчетливый, сберегающій что можно; домоправитель, домостроитель, правящій хозяйствомъ, расходомъ денегъ и припасовъ, ключникъ».

Анализ равновесий весьма полезен, несмотря на то, что нет такой экономики, которая могла бы находиться в состоянии покоя.

Смит сформулировал наиболее важный вывод теории равновесия: конкурирующая система может достигать такого распределения ресурсов, которое в определенном смысле оказывается эффективным. Полную формулировку общей теории равновесия обычно связывают с именем Вальраса, который обращал особое внимание на вопрос существования конкурентных равновесий, гарантированных равновесными ценами.

Рассмотрим в качестве примера принцип соответствия Самуэльсона и его ограничения. Его «Основы экономического анализа» базируются в целом на двух весьма общих гипотезах: 1) условия равновесия эквивалентны условиям максимизации (минимизации) некоторой величины; 2) система находится «в устойчивом» равновесии либо в движении.

Первая гипотеза в большинстве случаев означает справедливость сравнительного традиционного статического анализа, из которого можно вывести много важных теорем экономики. Из второй гипотезы следует справедливость принципа соответствия между сравнительной статикой и динамикой.

В качестве примера рассмотрим процесс, когда предложение и спрос уравновешены. Предполагается, что при любой цене, если спрос превышает предложение, цена будет расти; если предложение превышает спрос, то цена будет падать. Это можно записать в виде уравнения

$$\frac{dp}{dt} = H[D(p,a) - S(p)], \tag{1}$$

где $H(0) = 0$; $dH/dt > 0$; p – цена; α – параметр, соответствующий внешним факторам; D и S представляют соответственно спрос и предложение. Пусть для простоты $H = 1$. Вблизи точки равновесия $p = p_0$ уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{dD}{dp} - \frac{dS}{dp}\right)(p - p_0) + \ldots, \tag{2}$$

где опущены высшие степени $(p-p_0)$. Тогда решение (2) можно записать следующим образом:

$$p(t) = p_0 + [p(0) - p_0]e^{(D_p - S_p)t}, \quad \frac{dD}{dp} = D_p; \quad \frac{dS}{dp} = S_p. \tag{3}$$

Если равновесие устойчиво, то при $t \to +\infty$ $p(t) \to \mathrm{p}_0$ в том, и только в том случае, когда

$$D_p - S_p < 0. \tag{4}$$

Когда кривая предложения имеет положительный наклон, условие (4) выполняется. Если же наклон отрицательный, он должен быть менее крутым, чем у кривой спроса.

Таким образом, если выполнены условия устойчивости, то, когда растет спрос, должна расти цена, то есть результаты сравнительного статического анализа могут быть выведены из условий устойчивости.

Соотношения между условиями устойчивости и результатами сравнительной статики названы Самуэльсоном «принципом соответствия». Заметим, что справедливость принципа соответствия зависит от предварительного предположения об устойчивости экономических систем.

Рассмотрим фирму, для которой заданы функции спроса и производственных издержек. Предположим, что фирма облагается налогом величиной r на единицу продукции. Тогда доход фирмы определяется как

$$D = xp(x) - C(x) - rx, \tag{5}$$

где x, p и C – объем производства, цена продукции, минимальные суммарные производственные издержки, соответственно.

Фирма определяет уровень производства для каждой заданной величины налога. При каждой заданной налоговой ставке существует равновесный объем выпуска. Рассмотрим, как в соответствии с изменением величины налога меняется объем производства, определенный фирмой.

Пусть фирма выбирает такой объем производства, который максимизирует ее доход. Решение, максимизирующее D в уравнении (5) будет равновесной величиной. Необходимыми и достаточными условиями локального максимума являются $D_x = 0$, $D_{xx} < 0$ $\left(\dfrac{dD}{dx} = D_x,\ \dfrac{d^2D}{dx^2} = D_{xx}\right)$. Из $D_x = 0$ имеем

$$[xp(x) - C(x)]_x - r = 0, \tag{6}$$

откуда можно определить точку равновесия $x = g(r)$. Продифференцируем (6) по r. Тогда

$$[xp(x) - C(x)]_{xx}\frac{dx}{dr} = 1, \tag{7}$$

Но, поскольку $[xp(x) - C(x)]_{xx}$ должно быть меньше нуля, из (7) находим, что и

$$\frac{dx}{dr} < 0. \tag{8}$$

Это означает, что, если фирма находится в равновесии до и после налогообложения, увеличение налога всегда вызовет падение производства.

Вид функций $p(x)$ и $C(x)$ не определялся выше. Требовалось лишь, чтобы задача имела регулярное максимальное решение. Таким образом, по известной информации о том, что фирма максимизирует прибыль, можно предсказать поведение фирмы при изменении налоговой политики. Этого достаточно, для того чтобы определить направление изменения x после налогообложения.

Это – типичный пример того, что понимается под сравнительным статическим анализом.

Динамические теории роста в экономике

Экономический рост – классический предмет экономики, вклад в который на раннем этапе внесли Адам Смит, Д. Рикардо, Т.-Р. Мальтус, К. Маркс, Дж. Милль и другие. Сейчас эта теория претерпела серьезные изменения. В частности, вопреки теориям Рикардо и Мальтуса сегодня доля земледельцев не выглядит возрастающей, население не растет быстрее, чем продукты, а роль сельского хозяйства по отношению к промышленности заметно снижается.

В развитии современной теории роста важную роль сыграли работы Самуэльсона, Солоу, Моришимы, Хикса, Леонтьева и других.

В качестве примера рассмотрим модель экономического роста Солоу.

Существуют два производственных фактора: капитал K и труд L (численность населения). Технология не подвержена изменениям. Процесс производства описывается некоторой достаточно гладкой функцией

$$Y = F(K, L), \tag{9}$$

где Y – поток продукции, зависящий от конкретных значений K и L. Предполагается, что L экспоненциально возрастает с постоянным темпом роста n

$$L = L_0 e^{nt}.$$

Допускается также, что постоянная доля S общего объема производства идет на сбережение и, выпадая из сферы потребления, добавляется к суммарному капиталу. Если пренебречь процессом обесценивания капитала, то имеем $\dfrac{dK}{dt} = SY$, $K(0) > 0$. В случае, если Y определяется функцией (9), приходим к соотношению

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - nk, \quad \text{где } k = \frac{K}{L},\ f(k) = \frac{F(K, L)}{L} = F(k, 1). \tag{10}$$

Функция $f(k)$ обладает следующими свойствами:

$$f(0) = 0,\ f'(k) > 0 \text{ при } k \geq 0,\ f''(k) < 0 \text{ при } k \geq 0.$$

Если n и s удовлетворяют неравенству

$$0 < n/s < f''(0),$$

то существует единственное положительное значение k_0, такое, что $\dfrac{sf(k_0)}{n} = k_0$ (существование равновесия).

Динамику экономического развития модели Солоу можно описать следующим образом: стартуя из любой произвольной точки, экономика всегда равномерно сходится к единственному значению «капитал – труд» на больших временах. Более того, вдоль равновесной траектории роста капитал возрастает с той же скоростью, что и численность населения – это простое и красивое следствие модели роста Солоу.

Важно, что в модели Солоу после определения динамики объема капитала на душу населения может быть рассчитана динамика всех остальных переменных – K, Y, потребления, накопления, заработной платы, суммы арендных платежей.

В качестве второго примера рассмотрим знаменитую модель Леонтьева «затраты – выпуск». Василий Васильевич Леонтьев заслуживает отдельного внимания к себе как один из самых выдающихся ученых-экономистов XX столетия. «Международная «Энциклопедия общественных наук» сравнивает его вклад с той ролью, какую в теории экономики сыграли Адам Смит и Джон Мейнард Кэйнс, а этих гигантов можно, пожалуй, назвать Ньютоном и Эйнштейном этой науки» (А.В. Аникин. «Василий Леонтьев, или Экономика на шахматной доске». Природа. 2000. № 7. С. 61).

Основная идея Леонтьева достаточно проста. Экономика изображается как система отраслей с любой степенью дробности в виде таблицы наподобие шахматной доски. На пересечении каждой пары отраслей имеем цифры, выражающие продажу (передачу) продукции одной отрасли в другую, скажем угля в электроэнергетику или хлопка в текстильную промышленность. Отсюда можно исчислить коэффициенты прямых затрат (технические коэффициенты), которые показывают, сколько единиц продукции одной отрасли необходимо для производства единицы продукции другой отрасли. Эти величины могут иметь как натуральное, так и денежное выражение, каждое из которых имеет собственную ценность. Добавляя по горизонтали шахматной таблицы к материальным затратам конечное потребление и накопление (инвестиции), получаем валовой продукт по использованию. Добавляя по вертикали доходы факторов производства, получаем продукт по созданию (производству). Уже эта стадия дает очень ценную информацию.

Однако Леонтьев пошел дальше, применив к этим материалам методы линейной алгебры. Продукция каждой отрасли выражается линейным уравнением, которое суммирует прямые затраты отраслей. Теперь экономика представлена как система линейных уравнений, решение которой, возможно лишь с помощью мощных компьютеров, выглядит в виде матрицы, так называемой инверсии (или обратной матрицы) Леонтьева. Она содержит данные о полных затратах на производство продукции каждой отрасли и рисует замечательно богатую по содержанию картину экономики с ее сложной системой структурных связей.

Леонтьев показал себя выдающимся организатором. В 1948 году он создал Гарвардский центр экономических исследований, который стал ведущим в мировом масштабе учреждением по развитию метода затраты – выпуск. Вокруг Леонтьева, который около 25 лет возглавлял этот центр, сложилась группа исследователей-единомышленников, его соавторов по многим последующим публикациям, в том числе по книге «Исследования структуры американской экономики», которая вышла в 1953 году и в 1958-м появилась в русском переводе.

Такой путь прошел Леонтьев как ученый, когда впервые оказался в СССР. Приезд видных иностранных ученых-экономистов был в то время еще большой редкостью. Надо полагать, что вопрос о приглашении Леонтьева рассматривался и решался где-то на высоком уровне, и власти рассчитывали извлечь из этого визита какие-то выгоды.

Василий Леонтьев (Wassily Leontief) скончался в Нью-Йорке 5 февраля 1999 года на 93 году жизни.

Пусть экономика состоит из n секторов, не имеющих объединенных производств. Скорость роста экономики регулируется правительством. Андерссон и Занг (1988) предложили следующую модель, описывающую динамику цен и производства, соответствующую идеям Леонтьева:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= Ax + g(p,x)Bx - x, \\ \frac{dx}{dt} &= p - Ap - g(p,x)Bp. \end{aligned} \tag{11}$$

В системе уравнений (11) $p = (p_1, \ldots, p_n)$ – «нормированный» вектор цен; $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – «нормированный» выпуск продукции; $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ –

матрицы технологических коэффициентов и коэффициентов инвестиций, соответственно. Функция $g(p, x)$ в (11) описывает скорость экономического роста системы. Скорость роста, как уже указывалось, определяется правительством, которое максимизирует функцию «социальной» полезности, воздействуя на технологические мощности.

Уравнение цен в (11) означает, что, если спрос на i-й товар превышает предложение этого товара, то цена i-го товара, должна возрасти, и наоборот. Уравнение учитывает поведение потребителей. В количественном выражении это соответствует тому, что, если общая себестоимость единицы i-й продукции превышает цену продажи этого товара, то в i-м секторе объем производства должен быть уменьшен, чтобы уменьшить потери.

Экономические циклы – уравнение Ван дер Поля

Обозначим доход через Y. Сбережения S находятся в заданном соотношении s к доходу. Сохраняется неизменное соотношение между основным капиталом K и доходом, ν обозначает коэффициент пропорциональности. Инвестиции I по определению являются темпами изменения основного капитала: $I = \nu\dot{Y}$ и $S = s\dot{Y}$. Будем считать, что при равновесии $I = S$. И предположим далее, что существует адаптивный процесс, при котором доходы возрастают пропорционально разности инвестиций и сбережений, то есть $\dot{Y} \sim (I - SY)$. При этом подобная задержка происходит и при регулировании инвестиций, так что $I \sim \nu\dot{Y} - I$. Таким образом, выбрав удобную единицу измерения времени, чтобы сделать скорость регулирования единичной, имеем следующие уравнения:

$$\dot{Y} = I - sY, \tag{12}$$

$$\dot{I} = \nu\dot{Y} - I \tag{13}$$

или

$$\ddot{Y} - (v - s - 1)\dot{Y} + sY = 0. \tag{14}$$

Уравнение (14) в зависимости от знака $(\nu - s - 1)$ может описывать либо затухающие, либо неустойчивые колебания. При $\nu = s + 1$ имеем периодические колебания.

Введем теперь нелинейную функцию инвестиций в виде

$$\nu\left(\dot{Y} - \frac{1}{3}\dot{Y}^3\right).$$

Окончательно модель имеет вид

$$\dot{Y} = sY = (\nu - s)\dot{Y} - \frac{\nu}{3}\dot{Y}^3$$

или, если $\dot{Y} = z$,

$$\ddot{z} - \left[(\nu - 1 - s) - \nu z^2\right]\dot{z} + sz = 0.$$

Последнее уравнение есть уравнение Ван дер Поля, для которого существование предельного цикла доказано. Зная, что производные дохода меняются периодически, легко показать, что так же меняется и сам доход.

Моделирование региональной динамики – модифицированное уравнение Ван дер Поля

В центре исследований по этой проблеме – внезапные и непредсказуемые нарушения непрерывности развития регионов[1].

Существует гипотеза (Пиремпа, 1925), согласно которой основной причиной возрождения крупных и мелких городов Европы в эпоху позднего средневековья было появление свободной торговли и, как следствие, улучшение транспортировки товаров. Андерссон (1985), основываясь на этой гипотезе, утверждает, что фундаментальные изменения в мировой экономике последнего тысячелетия могут быть объяснены изменением структуры логистических систем, то есть систем снабжения. Иными словами, крупные структурные изменения характера производства, общественных институтов, характера труда и культуры вызываются медленными, ровными изменениями в соответствующих логистических сетях. Логистические сети – это такие пространственные системы, которые могут использоваться для движения товаров, информации, людей и денег в зависимости от производства и потребления товаров. Ниже представлена модель мировых логистических революций (Андерссон, 1986; Андерссон и Баттен, 1988).

Предполагается, что все внезапные и непредсказуемые нарушения (флуктуации), наблюдающиеся в развитии городов, могут быть охвачены или, по крайней мере, качественно аппроксимированы системой дифференциальных уравнений с кубическими нелинейностями

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -T\left(\frac{y^3}{3} - ry - x\right) && \text{– «быстрое уравнение»,} \\ \frac{dx}{dx} &= T^{-1}y && \text{– «медленное уравнение»} \end{aligned} \tag{15}$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(Ty^2 - r\right)\frac{dy}{dt} + T^{-1}y = 0, \tag{16}$$

где r – управляющий параметр; T – коэффициент, имеющий смысл скорости установления (адаптации); переменная y может быть интерпретирована, например, как емкость города в отношении товаропроизводства, x – как его доступность для транспорта и связи.

Уравнение (16) представляет собой модификацию уравнения Ван дер Поля

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \varepsilon\left(1 - y^2\right)\frac{dy}{dt} + y = 0, \quad \text{а именно}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - r\left(1 - \frac{T}{r}y^2\right)\frac{dy}{dt} + T^{-1}y = 0.$$

[1]В русском языке термин «регион» используется для обозначения достаточно крупных физико-географических, экономико-географических, геополитических и других территориальных структур. В последние годы под регионом понимается минимальный по территории административно-территориальный ареал, равный субъекту Российской Федерации.

Установлено, что разрывы величины y могут возникать и в том случае, когда величина x плавно меняется в критических интервалах параметров. На рис. 1 представлен цикл быстрых и медленных переменных, в котором могут иметь место повторяющиеся скачки.

Медленное изменение сети инфраструктуры x путем инвестиций физического капитала может привести к тому, что траектории окажутся расположенными в зоне L. Первоначально система находилась в положении A. С изменением x в конце концов достигается точка B, выше которой сама природа производительной емкости города заметно изменяется. В этой точке равновесие теряет свойство устойчивости, и имеет место резкий переход – «фазовый переход». Скорость изменений в неравновесной фазе определяется влиянием капитала, трудовых и других необходимых ресурсов, которые будут использоваться в зарождающемся режиме производства. Но главное – цикличность данного нелинейного процесса. Стоит при достижении зоны H прекратиться инвестициям, и система может «сесть» на траекторию, изображенную в зоне H, пока, наконец, не вернется к первоначальному положению D и затем «свалится» обратно в зону L. Важно осознать характер критических точек B и D. «Фазовый переход» имеет место независимо от того, как медленно увеличивается емкость сетей, а это значит, что развитие города может быть стимулировано просто добавлением в сеть одного маленького, но важного звена. То есть, если система находится вблизи критического состояния, то слабые расхождения в условиях транспортировки могут привести к огромному отличию в конечной товароемкости.

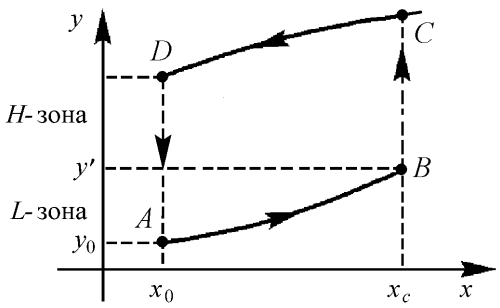


Рис. 1. Цикл быстрых и медленных переменных

По-видимому, модель может быть использована для углубления наших представлений об особенностях реальной эволюции городов.

Согласно Андерссону (1986), развитие городов и межрегиональных экономических связей в мире в период с 1000 по 2000 годы нашей эры можно представить себе в виде четырех революций:

- первая начинается в XI веке в Италии и завершается в XVI веке в Северной Европе;
- вторая берет начало в XVI веке в Испании, Португалии и Италии и оканчивается в XIX веке в Северной Европе;
- третья начинается в Англии в XVIII веке и оканчивается в развивающихся странах предположительно в XXI веке;
- четвертая начинается в Японии, Швейцарии, Западной Германии и Швеции в конце XX века.

Восстановление старых торговых путей и возобновление возможности передвижения через Европу и Азию можно рассматривать как фазы медленного улучшения сетей инфраструктуры, что находит отражение в ослаблении торговых барьеров, дорожных опасностей, стоимости транспортировки и других ограничений передвижения. Этот период соответствует первой логистической революции.

Сейчас мы – свидетели четвертой логистической революции, связанной с возрастанием объема обрабатываемой информации и расширением сетей связи, а также ростом объема научных знаний. Улучшение систем транспорта, в особенности сети транспорта воздушного, неуклонно уменьшает значение географической близости областей и регионов.

Типичный пример для анализа последней революции – Швеция (Андерссон и Баттен, 1988).

Разделим трудовые ресурсы на четыре типа по профессиям. Это профессии, связанные с наукой, с управлением и обработкой информации, с обслуживанием, с производством материальных ценностей. Выбор местоположения объектов наукоемкого производства существенно зависит от возможности привлечения специалистов с высоким уровнем образования и квалификации. Следовательно, в развитии регионов возрастает роль университетов и других высших учебных и научных учреждений. Таким образом, следует осознать, что ключевой характеристикой четвертой логистической революции является неуклонное расширение научной базы x. Соотношение между x и емкостью производства y описывается уравнениями (15). Траектория движения в этом случае аналогична представленной на рисунке.

Занг отмечает, что в промышленности уже сейчас (имеется в виду 1991 год) можно обнаружить изменения в структуре капиталовложений.

Так, в 1977 году небольшое число фирм размещало больше 17% затрат в исследования и разработки (R&D).

А в 1985 году число фирм, направляющих более 17% затрат в R&D, составило более $1/4$ совокупного производственного капитала (химическое производство, станкостроение, самолетостроение, космическая техника, оборудование для «высоких технологий», машиностроение и робототехника).

Модель классовой борьбы (модель хищник – жертва)

В нелинейной теории колебаний одна из наиболее известных моделей – модель «хищник – жертва», которая описывается системой двух дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha\,(y_1 - y)\,x, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta\,(x - x_1)\,y, \end{aligned} \tag{17}$$

где x и y – численность популяций, x_1 и y_1 – их стационарные значения, α и β – постоянные. Эта модель используется для описания динамики малых городских ареалов. В этом случае переменная x в (17) означает плотность землепользования, y – земельную ренту, α, β, x_1, y_1 – некоторые параметры.

Интересное приложение модели было дано Гудвином. Его модель построена для описания классовой борьбы. Рассмотрим два типа граждан: рабочих и капиталистов. Рабочие тратят весь свой доход wL на потребление, капиталисты накапливают свой доход $Y - wL$, где Y – продукция производства. Цена потребительских товаров отнормирована к единице. Пусть K означает капитал, $a = a_0 e^{gt} = \dfrac{Y}{L}$ –

производительность труда, возрастающую с постоянной скоростью g, $k = \dfrac{K}{Y}$ – коэффициент капиталоемкости продукции, а $N = N_0 e^{nt}$ – предложение на рынке рабочей силы, которое увеличивается с темпом роста n. Доля затрат на оплату труда по отношению к национальному доходу составляет $\dfrac{wL}{Y} = \dfrac{w}{a}$. Следовательно, доля прибыли капиталистов составляет $\left(1 - \dfrac{w}{a}\right)$. Поскольку сбережения определены как $S = Y - wL = \left(l - \dfrac{w}{a}\right) Y$, доля инвестиций составляет $\dfrac{dK}{dt} = S = \left(1 - \dfrac{w}{a}\right) Y$ или $\dfrac{dK/dt}{K} = \left(l - \dfrac{w}{a}\right) / K$, при этом выбытием капитала пренебрегаем. При постоянном значении капиталоемкости $k = \dfrac{K}{Y}$ получаем

$$Y \frac{dK}{dt} = K \frac{dY}{dt}.$$

Далее, поскольку $a_0 e^{gt} = a = \dfrac{Y}{L}$, имеем

$$g = \frac{dY}{dt} \frac{1}{Y} - \frac{dL}{dt} \frac{1}{L}.$$

Тогда окончательно получим

$$\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \left(1 - \frac{w}{\alpha}\right) \frac{1}{k} - g.$$

Введем новые переменные: $y = \dfrac{w}{a}$ – доля затрат на оплату труда; $x = \dfrac{L}{N}$ – коэффициент занятости. После простых преобразований находим

$$\frac{dx}{dt} = x \left[\frac{1-y}{k} - (g+n)\right], \tag{18}$$

$$\frac{dy}{dt} = y \left[\frac{1}{w} \frac{dw}{dt} - \frac{1}{a} \frac{da}{dt}\right]. \tag{19}$$

Будем считать ставку заработной платы быстрой переменной, удовлетворяющей условиям

$$\frac{dw}{dt} = w f(x), \quad \lim_{x \to 1} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0} f(x) < 0, \quad f'(x) > 0.$$

Линейная аппроксимация этого соотношения $\dfrac{dw}{dt} \dfrac{1}{w} = -r + bx$ приводит к уравнению

$$\frac{dy}{dt} \frac{1}{y} = -r + bx - g.$$

Таким образом получаем модель Гудвина в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \left[\frac{1}{k} - (g+n) - \frac{y}{k}\right], \\ \frac{dy}{dt} &= y \left[-(g+r) + bx\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Очевидно, что модель (20) совпадает с моделью (17), поэтому все выводы общего характера, справедливые для системы (17), справедливы и для модели Гудвина.

Формальное сходство модели Гудвина и модели Лотки – Вольтерры «хищник – жертва» позволяет установить аналогию между явлениями классовой борьбы и борьбой биологических сообществ.

Заметим, что модель Гудвина, учитывающая взаимодействие между уровнем занятости и законодательно установленной долей отчислений на оплату труда, весьма напоминает классические модели политической экономии (ее иногда называют неомарксистской). Модель вновь привлекла внимание к трудам экономистов-классиков, таких как Рикардо, Смит, Маркс.

Понятно, что модель может приводить к колебательным решениям, но она структурно неустойчива: малые изменения функциональной формы будут влиять на качественное поведение системы.

Как известно, рассмотренные нами системы (17) и (20) являются консервативными. Последние, как правило, имеют периодические решения и поэтому широко используются для моделирования явлений, подобных осцилляциям популяций хищников и жертв, взаимосвязи городской земельной ренты и интенсивности землепользования, безработицы и динамики экономического роста и т.д.

Динамика городов и модель Эдварда Лоренца

Рассмотрим в пространстве метрополии небольшую городскую систему, которая в отношении экономической деятельности «мала» по сравнению с метрополией. Это значит, что любые изменения экономических условий в городской системе не влияют на все пространство метрополии, которое остается структурно устойчивым в течение времени наблюдения. Имеем дело с краткосрочной динамикой, следовательно, пространство метрополии можно рассматривать как стационарное окружение. Очевидно, что это предположение несправедливо на больших временах.

Предполагается, что фирмы и постоянное население свободны в выборе местонахождения и в городском пространстве, и во «внешнем мире».

Поскольку городское пространство очень мало, выбор положения и распределение фирм и домохозяев в городе не может влиять на расположение других составных частей метрополии.

Предполагается, что характеристики городского пространства описываются следующими тремя переменными: X – продукция, производимая городской системой; Y – численность коренного населения; Z – земельная рента.

Продукция городской промышленности может идти на потребление населения или экспортироваться вовне.

Предполагается, что возможна следующая динамика города:

$$\frac{dX}{dt} = a_1(a_2Y - a_3X), \tag{21}$$

$$\frac{dY}{dt} = c_1(c_2X - c_3Y) - c_4XZ, \tag{22}$$

$$\frac{dZ}{dt} = d_1XY - d_2Z, \tag{23}$$

где a_i, c_i, d_i – положительные параметры. Параметр a_2 – спрос на городскую продукцию, нормированный на душу населения; a_3 – уровень предложения продукции внутри города. Эти два параметра могут зависеть от переменных, поскольку спрос жителей на городскую продукцию и предложение ее на городском рынке предполагаются зависящими от объема производства и численности населения. На небольших временных интервалах их можно считать константами.

Тогда a_2Y – общий спрос жителей на городскую продукцию, a_3X – общий поток городской продукции на городской рынок. Следовательно, уравнение (21) означает, что темп изменения городской продукции пропорционален избытку спроса. Если спрос больше предложения, то производство имеет тенденцию к расширению и наоборот. Коэффициент a_1 имеет смысл скорости установления.

Предполагаем, что изменение численности городского населения задается двумя слагаемыми $c_1(c_2X - c_3Y)$ и $-c_4XZ$. Величину c_2 мы интерпретируем как спрос на труд со стороны фирм для производства единицы продукции. Тогда c_2X – общий спрос на труд на городском рынке труда. Параметр c_3 – отношение численности городских жителей, выбирающих работу в городе, к общей численностью городского населения. Величина c_3Y – общая величина предложения труда на городском рынке. Следовательно, $(c_2X - c_3Y)$ – избыток спроса на труд в городе. Он влияет на направление миграции. Слагаемое $(-c_4XZ)$ учитывает влияние на миграцию величины земельной ренты, так как люди выбирают для проживания местности с низкой ценой на землю.

В уравнении (23) предполагается, что любое изменение величины земельной ренты отрицательно влияет на ее текущий уровень: если земельная рента очень высока, то увеличивать ее дальше трудно. Слагаемое d_1XY означает, что на изменения земельной ренты положительно влияют X и Y.

Если провести преобразование

$$\begin{gathered} t = \frac{t^*}{c_1c_3}, \quad \sigma = \frac{a_1a_3}{c_1c_3}, \quad r = \frac{a_2c_2}{a_3c_3}, \quad b = \frac{d_2}{c_1c_3}, \\ x = \left(\frac{c_4}{d_1}\right)^{1/2} \frac{d_1X}{c_1c_3}, \quad y = \left(\frac{c_4}{d_1}\right)^{1/2} \frac{d_1a_2Y}{a_3c_1c_3}, \quad z = \frac{c_4a_2Z}{a_3c_1c_3}, \end{gathered} \tag{24}$$

то (21) – (23) превращается в систему Лоренца

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = xy - bz.$$

Свойства этой системы известны: 1) траектории не являются периодическими; 2) поведение в фазовом пространстве не соответствует переходному (неустойчивому) процессу, так как в зависимости от того, как долго продолжается численное интегрирование, траектория продолжает движение, не приближаясь ни к какой периодической орбите, ни к какому стационарному состоянию; 3) топология фазового портрета не зависит от выбора начальных условий; 4) предсказать, как будет вести себя траектория в течение сколь-нибудь длительного промежутка времени, невозможно.

Хаос в модели международной экономики (сценарий Ньюхауса – Рюэля – Такенса)

Международная торговля между экономиками, в которых наблюдаются предельные циклы, может привести к хаосу (возникновению странного аттрактора). Международную торговлю в некотором смысле можно рассматривать как возмущение изолированных экономик.

Лоренцем (1987) предложена следующая модель.

Рассмотрим три экономики (национальные, региональные или городские), каждая из которых описывается упрощенными детерминированными уравнениями Кейнса:

$$\begin{aligned} \frac{dY_i}{dt} &= \alpha_i \left[I_i(Y_i, r_i) - S_i(Y_i, r_i) \right], \\ \frac{dr_i}{dt} &= \beta_i \left[L_i(Y_i, r_i) - \frac{M_i}{p_i} \right], \end{aligned} \tag{25}$$

где индекс i – номер экономики; Y – доход; r – процентная ставка; L – функция спроса на деньги; M – постоянное номинальное денежное предложение; p – фиксированные цены товаров; $I(Y, r)$ – функция спроса на инвестиции ($I_Y > 0$, $I_r < 0$); $S(Y, r)$ – функция сбережений ($S_Y > 0$, $S_r > 0$); α и β – положительные параметры установления.

Система (25) может быть записана как объединение трех независимых систем с одной степенью свободы, обладающих при соответствующих условиях предельными циклами. Если все три экономики являются осциллирующими, то общее движение системы состоит из движения по трехмерному тору T^3, который погружен в пространство R^6.

Введение в изолированные системы фактора международной торговли (экспорта и импорта) с помощью функций

$$\mathrm{Ex}_i = \mathrm{Ex}_i(Y_j, Y_k) \quad (i \neq j, k), \quad \mathrm{Im}_i = \mathrm{Im}_i(Y_i)$$

приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dY_i}{dt} &= \alpha_i \left[I_i(Y_i, r_i) - S_i(Y_i, r_i) + \mathrm{Ex}_i(Y_j, Y_k) - \mathrm{Im}_i(Y_j) \right], \\ \frac{dr_i}{dt} &= \beta_i \left[L_i(Y_i, r_i) - \frac{M_i^*}{p_i} \right], \quad i, j, k, = 1, 2, 3; \quad j, k, \neq i, \end{aligned} \tag{26}$$

где M_i^* – фиксированное предложение денег в i-й экономике, отражающее баланс платежных равновесий.

Система уравнений (26) описывает динамику трех связанных осцилляторов, когда по сценарию Ньюхауса – Рюэля – Такенса может возникнуть странный аттрактор.

Макроэкономическая модель роста (Хаавельдо, 1954) и экономический хаос в дискретной модели (сценарий Фейгенабума)

Модель имеет вид

$$\frac{dN}{dt} = N\left(a - \frac{\beta N}{Y}\right), \quad a, \beta > 0,$$
$$Y = AN^{\alpha}, \quad A > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{27}$$

где N – численность населения; Y – реальный объем производства; α, β, a, A – константы. Подстановка второго уравнения в первое приводит к уравнению

$$\frac{dN}{dt} = N\left(a - \frac{\beta N^{(1-\alpha)}}{A}\right). \tag{28}$$

Уравнение (28) аналогично логистическому, используемому в теории биологических популяций. Если ввести дискретное время и заменить производные по времени первыми разностями, то (28) примет вид

$$N_{t+1} = N_t\left[(1+a) - \frac{\beta N_t^{1-\alpha}}{A}\right]. \tag{29}$$

Введением новой переменной

$$N_t = x_t\left[\frac{A(1+a)}{\beta}\right]^{1/1-\alpha} \tag{30}$$

уравнение (29) превращается в

$$x_{t+1} = (1+a)x_t(1 - x_t^{1-\alpha}) = F(x_t, a, \alpha). \tag{31}$$

Проанализируем (31) для случая $\alpha = 1/2$, меняя a, то есть будем исследовать уравнение

$$x_{t+1} = (1+a)x_t(1 - x_t^{1/2}) = F(x_t, a, 1/2). \tag{32}$$

Очевидно, что мы придем к сценарию Фейгенбаума перехода к хаосу.

Модель популяции и ее пространственного распространения (Хотеллинг, 1921)

Обозначая плотность численности популяции через p, а плотность через s, Хотеллинг написал уравнение:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A(s-p) + B\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}\right), \tag{33}$$

где A и B – постоянные, представляющие соответственно темпы роста и распространения. Поскольку вводилось понятие насыщенной плотности популяции, то, если реальная плотность была выше, популяция уменьшалась, ниже – увеличивалась. Обоснование пространственной диффузии строилось на том, что при увеличении популяции (рабочей силы) сокращается выпуск продукции на душу населения, при этом происходит уменьшение доходов, и люди движутся из более населенных мест к менее населенным областям.

Выбирая единицы измерения численности популяции, времени и пространства так, чтобы все три постоянные (скорость роста, распространения и насыщенной плотности) стали единичными, получим уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (1-p)p + \nabla^2 p, \tag{34}$$

решения которого сейчас хорошо известны. В одномерном случае условие стационарности имеет вид

$$(1-p)p + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \tag{35}$$

Умножим уравнение (35) на $\dfrac{\partial p}{\partial x}$. Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(p^2) - \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}(p^3) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2,$$

и первый интеграл будет таким:

$$\frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 = E. \tag{36}$$

Кривые уровня «энергии» приведены на фазовой плоскости $p,\ \partial p/\partial x$ (рис. 2).

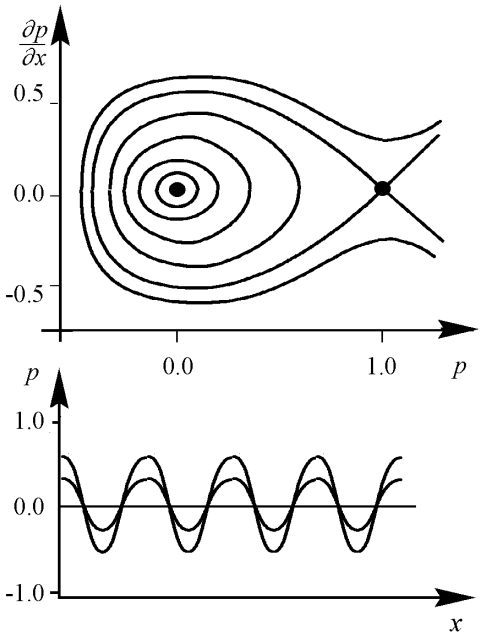


Рис. 2. Графическое представление решений (35)

То, что периодические решения захватывают отрицательные значения p, которые не имеют смысла, конечно же, абсурд (см. рис. 2). Эти решения теряют всякий смысл, когда мы рассматриваем их в неограниченном пространстве. Но кто мешает рассматривать их только над изолированными кусками пространства, где численность популяции положительна? Экологи называют такие участки «ареалами».

Один из недостатков модели Хотеллинга состоит в том, что запас средств существования принимается равным заданной постоянной, не зависящей от времени и численности населения (рабочей силы). Поэтому модель Хотеллинга больше подходит не для человеческих популяций.

Человек, в отличие от животных, может производить свои собственные средства существования, и благодаря техническому прогрессу (разделению труда и накоплению капитала) со временем это производство становится все более эффективным. В конечном счете, при уже установленном определенном запасе средств существования нет раз и навсегда фиксированного отношения между ним и «насыщенной популяцией», для которой доля изменения численности населения в точности равна нулю.

Следуя Т. Пу (1985), заменим слагаемое роста $\partial p/\partial t$ на $[p(1+q-\gamma p)]$, где введена простейшая производственная функция с возрастающим вначале, но в конечном итоге снижающимся эффектом масштаба

$$q = \alpha\left(\beta p^2 - p^3\right).$$

В результате получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} = p\left[1 + \alpha\left(\beta p^2 - p^3\right) - \gamma p\right]. \tag{37}$$

Коэффициент α определяет технологическую эффективность, а β представляет масштаб производства. Таким образом, переход от возрастающего к снижающемуся эффекту масштаба происходит при $p = \beta/2$; производительность максимальна при $p = 2\beta/3$ и сокращается при $p = \beta$ до нуля[2].

Коэффициент γ представляет приемлемый доход на душу населения, который приводит к стационарности. Введение нелинейности более высокого порядка приводит к модели с несколькими интервалами чередования роста и сокращения численности, что позволяет надеяться на получение экономически осмысленных пространственных моделей популяции с чередующимися скоплениями и разрежениями.

Как видоизменить диффузионное слагаемое в уравнении Хотеллинга? Согласно его собственному обоснованию популяция распространяется от мест с большей плотностью к местам с меньшей плотностью заселения, потому что сокращение доходов от производства на душу населения может отрицательно сказаться на численности населения. В модифицированной модели нужно использовать явную производственную функцию для введения потока переселенцев к выпуску продукции на душу населения, а не к плотности населения. Следовательно, предполагаем, что чистый поток мигрантов $p\nabla\left(q/p\right)$ имеет направление наибольшего увеличения (градиента) производства на душу населения. Его интенсивность пропорциональна максимальному отношению разницы пространственных уровней жизни, а плотность населения отвечает количеству потенциальных переселенцев, которые могут прореагировать на эти различия. Источником плотности (расходимости) этого потока является

[2]Оказалось, что последняя уменьшающаяся часть определяется без предположения о свободной реализации, но, если мы сохраним ее, можно считать, что она отвечает увеличивающимся трудностям избавления от производственных отходов. Выберем подходящие единицы измерения времени и численности населения, чтобы сделать скорость роста и стационарную популяцию (в модели Хотеллинга) единичными. Заметим, что сохранен «естественный» запас средств существования (фрукты, дичь, рыба), которые поддерживали человечество на ранних ступенях развития.

слагаемое

$$-\nabla\left(p\nabla\frac{q}{p}\right), \tag{38}$$

где знак минус означает, что мы рассматриваем силу притяжения, а не отталкивания.

Есть и другая причина диффузии (Скеллман, 1953). Нечеловеческие популяции, вообще говоря, сознательно мигрируют в более богатые пищей места. В человеческих популяциях это отвечает возрастанию радиуса передвижения, вызываемому улучшением условий перевозки как одной из составляющих увеличивающегося жизненного уровня. Таким образом, этот второй член в выражении диффузии имеет вид

$$\nabla^2\left(\frac{q}{p}p\right). \tag{39}$$

Складывая оба выражения (38) и (39), отвечающие распространению, получаем

$$\nabla^2\left(\frac{q}{p}\right)-\nabla\left(p\nabla\frac{q}{p}\right)=\nabla\left(\frac{q}{p}\nabla p\right). \tag{40}$$

Окончательно имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t}=p(1+q-\gamma p)+\nabla\left(\frac{q}{p}\nabla p\right), \tag{41}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=p(1+\alpha\left(\beta p^2-p^3\right)-\gamma p)+\frac{1}{6}\nabla^2\alpha\left(3\beta p^2-2p^3\right). \tag{42}$$

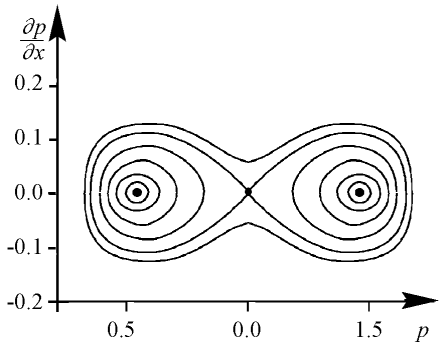


Рис. 3. Стационарные решения модифицированной модели Хотеллинга

Стационарные решения модифицированной модели Хотеллинга (замкнутые орбиты в фазовом пространстве) представлены на рис. 3. Зависимости $p(x)$ – пространственные волны двух разных уровней. В отличие от случая первоначальной модели Хотеллинга, они никогда не заходят в область с отрицательной численностью популяции.

Заключение

Эти методические заметки появились в результате прочтения книг, указанных во введении. Материалы заметок частично были изложены в виде лекций на VI Международной школе ХАОС'01 (Саратов, октябрь 2001), а также на Международной школе «Нелинейная динамика, хаос, катастрофы и управление» (Рига, Латвия, июль 2002). Примеры, приведенные в заметках, могут быть полезны при чтении

лекций как доказательство разнообразия приложений канонических моделей нелинейной динамики. Список литературы не приводится, поскольку он соответствует указанным книгам.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 27.03.2006

CANONICAL MODELS OF NONLINEAR DYNAMICS IN ECONOMICS

D.I. Trubetskov

This paper is the book review. Its main purpose is to show that practically all kinds of canonical models of nonlinear dynamics are used in the present mathematical economics.

Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 2, 2006 УДК 517.9

ОТОБРАЖЕНИЕ ИКЕДЫ: ОТ ДИССИПАТИВНОГО К КОНСЕРВАТИВНОМУ СЛУЧАЮ

А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Д.В. Савин

Рассмотрены различные методы анализа динамики диссипативных, слабо диссипативных и консервативных систем на примере отображения Икеды; предложен метод анализа консервативных систем — «карта разбегания». В ходе исследования выявлены серьезные изменения устройства плоскости параметров и фазовой плоскости при приближении к консервативному случаю. Предложены задачи, использование которых возможно на семинарах и в компьютерных практикумах.

Введение

Как известно, динамические системы разделяются на диссипативные и консервативные. Различие этих систем является настолько радикальным, что в определенной мере существуют две, в значительной степени независимые ветви нелинейной динамики, посвященные анализу свойств, бифуркаций и хаоса консервативных и диссипативных систем. В зависимости от того, к какому классу из этих двух принадлежит исследуемая система, применяются и существенно различные методы исследования. Так, благодаря тому, что в диссипативных системах существуют аттракторы, то есть предельные притягивающие множества, их исследование является центральным пунктом теории. В консервативных же системах аттракторы отсутствуют и, следовательно, связанные с их исследованием методы к таким системам неприменимы. При попытке изложения проблематики, связанной с консервативным хаосом, для студентов, уже имеющих основные представления о теории диссипативных систем, возникают определенные трудности, связанные с некоторой «автономией» теории консервативных систем. Поэтому, по нашему мнению, методически важной является демонстрация (как на лекциях, так и на семинарах, а особенно в компьютерных практикумах) физических примеров систем, имеющих ясный консервативный предел. Более того, некоторые исследования (например, [1]) сигнализируют о том, что «почти» консервативные системы образуют по сути особый – промежуточный – класс систем (характеризующихся, например, взрывным увеличением числа аттракторов и резким замедлением процессов эволюции изображающих точек в фазовом пространстве), который требует специального изучения.

В связи с этим представляется методически существенным продемонстрировать взаимосвязь и взаимное превращение диссипативного и консервативного типов поведения. В данной работе в таком контексте обсуждается отображение Икеды. В конце статьи мы приводим ряд задач, которые можно использовать на семинарах и компьютерных практикумах.

1. Отображение Икеды в диссипативном случае

Отображение

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(\imath |z_n|^2 + \psi), \tag{1}$$

получившее по имени предложившего его исследователя название отображения Икеды, было введено в работе [2] для системы типа кольцевого оптического резонатора со средой с фазовой нелинейностью, возбуждаемой лазером. Соотношение (1) дает выражение для амплитуды прошедшего через кольцевой резонатор излучения, при этом z имеет смысл безразмерной амплитуды излучения, B – безразмерной диссипации в среде, A – безразмерной интенсивности излучения лазера.

Однако оказывается [3,4], что отображение (1) может приближенно описывать и осциллятор Дуффинга под периодическим импульсным воздействием

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C\delta(t - nT). \tag{2}$$

Используемое при этом приближение состоит в том, что в промежутке между импульсами применяется метод медленно меняющихся амплитуд. Связь между параметрами осциллятора и самого отображения Икеды дается соотношениями

$$A = \frac{C}{\omega_0}\sqrt{\frac{3\beta}{8\omega_0}\frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma}},\ B = e^{-\gamma T/2},\ \psi = \omega_0 T. \tag{3}$$

В этом случае параметр A имеет смысл безразмерной амплитуды, а ψ – безразмерного периода воздействия [3,4]. (См. также задачу 1.) Параметр B отвечает за диссипацию: при $B = 0$ диссипация бесконечно велика, а при $B = 1$ – отсутствует, то есть реализуется консервативный случай.

Таким образом, отображение Икеды может рассматриваться не просто как пример некой оптической системы, а и как «эталонная» модель нелинейной динамики и теории колебаний, в силу того положения, которое в этих теориях занимает нелинейный осциллятор.

При изучении неавтономного осциллятора «естественными» параметрами являются амплитуда и период (частота) воздействия. Поэтому обратимся, прежде всего, к плоскости параметров (A, ψ). На рис. 1, *а*, *б* показаны полученные численно карты динамических режимов для отображения (1) в случае большой ($B = 0.3$) и малой ($B = 0.9$) диссипации. Оттенками серого цвета показаны циклы различных периодов. На рис. 1, *в*, *г* представлены соответствующие основные бифуркационные линии.

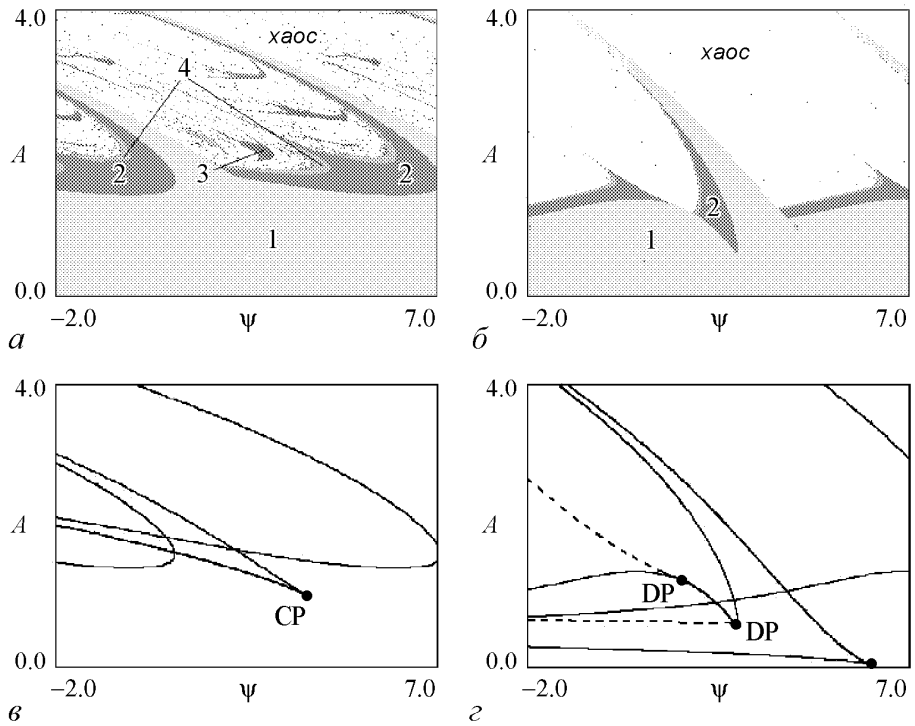


Рис. 1. Карты динамических режимов (*а*, *б*) и основные бифуркационные линии (*в*, *г*) на плоскости параметров (A,ψ) отображения (1) при изменении параметра диссипации: $B = 0.3$ (*а*, *в*); $B = 0.9$ (*б*, *г*). Построение бифуркационных линий проводилось при помощи программы *Content*

При малом B на рисунках четко видны характерные для любого осциллятора структуры «crossroad area»[1], состоящие из точки сборки с отходящими от нее линиями складок и двух линий удвоения периода, одна из ветвей которых уходит вдоль «берега» складки. При увеличении параметра B области существования устойчивых периодических режимов прижимаются к оси $A = 0$, в области хаоса становится заметно меньше периодических структур. Рис. 1, *в*, *г* демонстрируют метаморфозы бифуркационной системы «crossroad area» при увеличении параметра B. На линии, соответствующей равенству минус единице одного из мультипликаторов (линии удвоения периода), появляется участок, на котором бифуркация удвоения периода становится субкритической, то есть эта линия становится линией жесткого перехода. Она отделена от участков линии, на которых бифуркация удвоения периода является суперкритической, точками типа «вырожденный флип» (DP, по терминологии [8]). От них отходят линии касательной бифуркации (складки) для цикла периода 2 (штриховые линии на рис. 1, *г*). Эти точки появляются на линии удвоения периода при значении $B = 0.627$, а при дальнейшем уменьшении диссипации расходятся все дальше друг от друга. С увеличением параметра B структура «crossroad area» сильно деформируется. Так, одна из линий складок и точка сборки (CP) все больше приближаются к оси $A = 0$, и в консервативном случае они будут находиться прямо на этой оси (см. задачу 6).

[1]Термин «crossroad area», который можно перевести на русский язык как «область перекрестка» (см., например, [5]), для обозначения данной структуры бифуркационных линий был впервые употреблен в работах К. Мира [6, 7]. В настоящей работе, следуя сложившейся традиции, мы сохраним англоязычный вариант этого термина.

Заметим, что, чем ближе B к 1, тем сложнее построить четкую карту. Например, при $B > 0.9$ граница областей существования устойчивых периодических режимов и хаоса из-за яркого проявления мультистабильности имеет изрезанный вид, а процесс построения карты требует большего числа итераций и становится долгим из-за увеличения длительности переходного процесса.

2. Отображение Икеды в консервативном случае

Перейдем теперь к изучению чисто консервативного случая. Основным инструментом может служить построение фазовых портретов, которые в консервативных системах имеют достаточно характерный вид. Так, системы замкнутых траекторий соответствуют наличию особых точек типа центр (эллиптических точек), а «выемки» на них – наличию гиперболических особых точек (седел) снаружи [4, 9]. Фазовые портреты отображения (1) приведены на рис. 2. Их вид является типичным для фазовых портретов консервативного осциллятора под внешним воздействием: они представляют собой области, или «острова» периодичности, окруженные областями хаотического поведения системы, так называемым «хаотическим морем». Также можно видеть, что при некоторых значениях параметров «хаотическое море» наблюдается не только снаружи, но и внутри «островов периодичности». Кроме того, на фазовых портретах хорошо видны структуры, соответствующие фазовым колебаниям при нелинейном резонансе (рис. 3) [9].

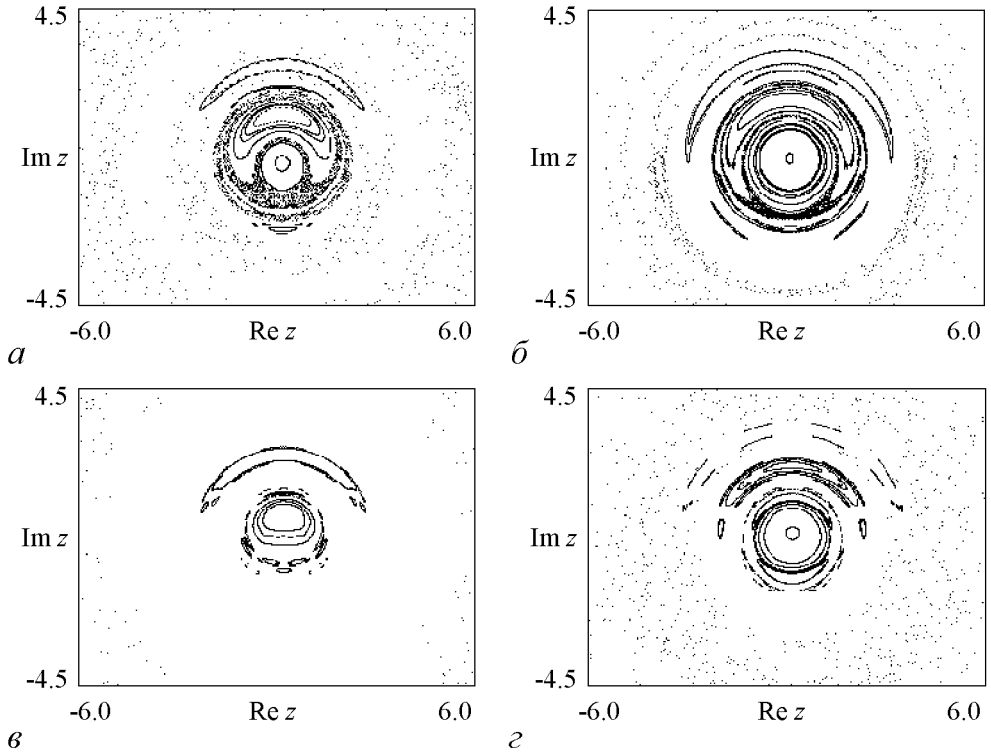
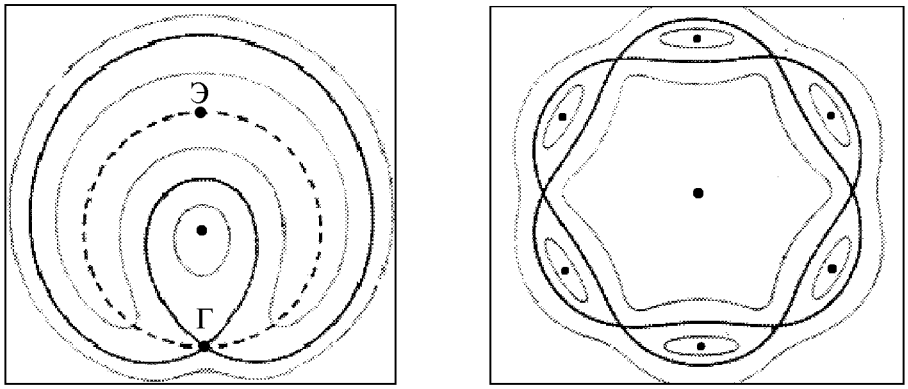


Рис. 2. Фазовые портреты отображения (1) в консервативном случае для следующих значений параметров: $A = 0.3$, $\psi = 3\pi/2$ (*а*); $A = 0.2$, $\psi = \pi$ (*б*); $A = 0.4$, $\psi = 0$ (*в*); $A = 0.3$, $\psi = \pi/2$ (*г*)



а *б*

Рис. 3. Фазовые колебания при нелинейном резонансе первого (*а*) и высшего (*б*) порядков. Пунктир – невозмущенные колебания, тонкие кривые – фазовые колебания, жирная кривая – сепаратриса. Э – эллиптическая особая точка, Г – гиперболическая. Рисунок взят из книги [9]

Для исследования системы в консервативном случае мы предлагаем своеобразный аналог карты динамических режимов – построение «карты разбегания». Она строится следующим образом: для каждой точки на плоскости параметров (A,ψ) выбирается некоторое количество начальных точек на фазовой плоскости и через большое число итераций (в нашей работе 15000) фиксируется, сколько из них осталось в конечной области пространства. Разные количества оставшихся точек соответствуют различным оттенкам серого цвета. При демонстрации этой карты на компьютере возможно создание анимации, показывающей, как происходит процесс разбегания изображающих точек, путем фиксирования числа оставшихся точек через каждые сто итераций. На рис. 4 приведены карта динамических режимов для слабо дис-

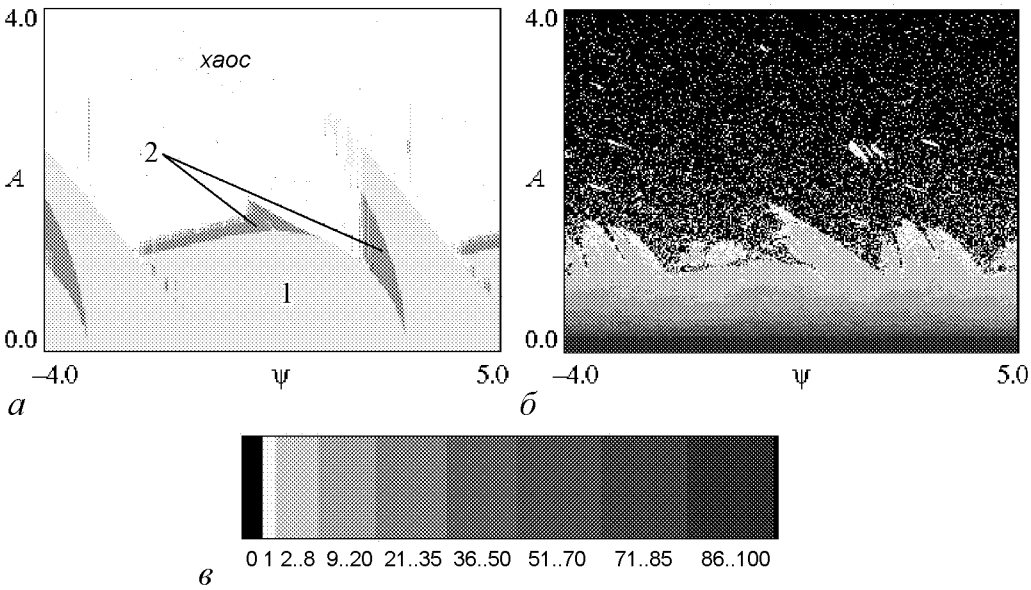


Рис. 4. Карта динамических режимов для почти консервативного $B = 0.99$ (*а*) и «карта разбегания» для консервативного отображения (1) (*б*). Таблица соответствия оттенков серого цвета числу точек, оставшихся в конечной области фазового пространства (*в*)

сипативного случая (*а*) и «карта разбегания» для консервативного (*б*). Сравнив их, можно заметить, что на плоскости параметров образуются схожие структуры, а границе хаоса в слабо диссипативном случае примерно соответствует граница области в консервативном случае, в которой все или почти все точки фазового пространства ушли на бесконечность.

3. Отображение Икеды в почти консервативном случае

Системы с очень слабой диссипацией, как уже упоминалось выше, могут рассматриваться как отдельный класс систем, характеризующийся особым типом поведения, одной из особенностей которого является резкое увеличение числа низкопериодических аттракторов системы [1]. Исследование этого класса и его связи с консервативными системами представляется достаточно важной задачей, так как консервативные системы, являясь в определенном смысле негрубыми, переходят в этот класс при очень небольшом изменении параметра, отвечающего за диссипацию.

Для исследования системы в «почти консервативном» случае интересно рассмотреть облако изображающих точек при его конденсации на аттрактор на разных стадиях эволюции и сравнить его вид с видом фазовых портретов в консервативном случае (рис. 5). На представленных рисунках видно, что достаточно долго (в течение сотен итераций) облако изображающих точек примерно повторяет вид фазового портрета в консервативной системе, затем оно становится все менее четким, и

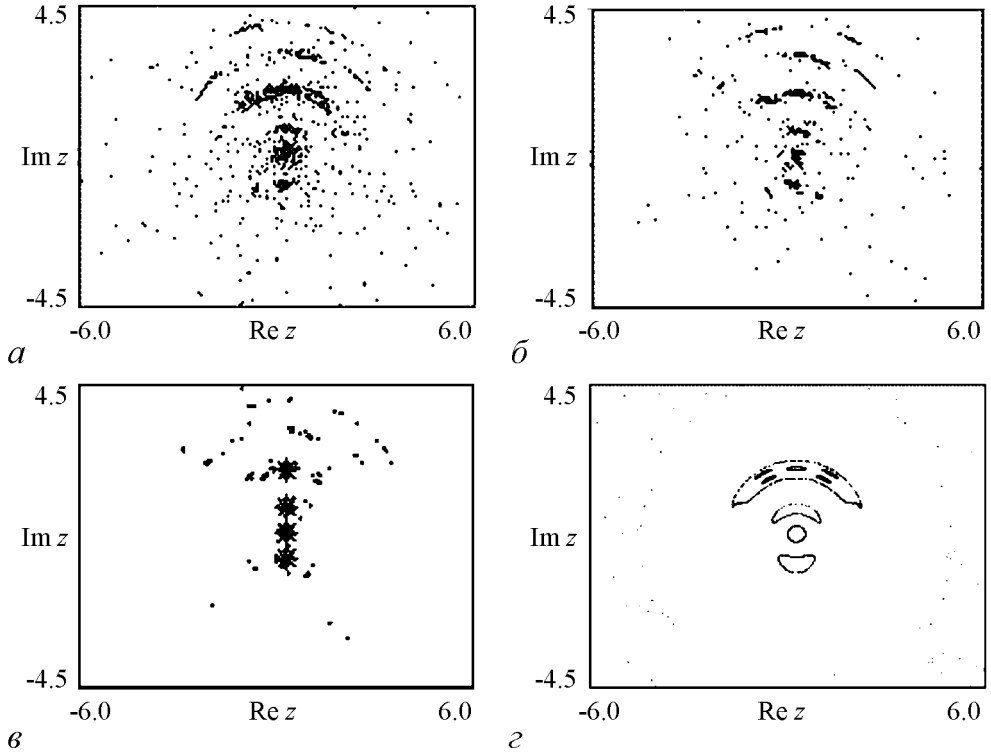


Рис. 5. Сравнение слабо диссипативного (*а–в*) и консервативного (*г*) случаев отображения (1). Число пропущенных итераций: 200 (*а*); 370 (*б*); 660 (*в*). Значения параметров: $A = 0.5$, $\psi = 3\pi/4$

в конечном итоге остаются «точечные» аттракторы. Хорошо видно, что аттракторы типа устойчивый фокус, отмеченные на рисунке звездочками, примерно повторяют положение особых точек типа центр в консервативном случае.

Несмотря на то, что на плоскости параметров данной точке соответствует область периода 1, мы видим значительно большее количество притягивающих точек. Это связано с тем, что при приближении к консервативному случаю мультистабильность начинает проявляться очень сильно. В работе [1] рассмотрено это явление для отображения ротора, задающего закон изменения фазы и угловой скорости механического маятника под внешним воздействием. Там же был предложен метод построения на одной диаграмме различных бифуркационных деревьев для набора начальных условий. Применим его к отображению Икеды. Сначала определим область, в которой сосредоточены аттракторы. Из уравнения (1) имеем соотношение

$$|z_{k+1}| \leqslant A + B|z_k|. \tag{4}$$

Если $|z_k| \geqslant A/(1-B)$, то $|z_{k+1}| \leqslant |z_k|$. В этом случае для оценки области локализации аттракторов имеем

$$|z| \leqslant \frac{A}{1-B}, \tag{5}$$

откуда вытекает

$$x_{\max} = \frac{A}{1-B}, \;\; y_{\max} = \frac{A}{1-B}, \tag{6}$$

так как при выходе траектории из этой области $|z|$ будет уменьшаться до тех пор, пока не будет удовлетворять условию (5). Тогда область в фазовом пространстве, в которой мы будем задавать начальные условия, можно выбрать на квадрате $[-x_{\max}, x_{\max}] \times [-y_{\max}, y_{\max}]$. Для каждого значения параметра A будем задавать набор начальных значений в этой области (в нашей работе использовалось 400 начальных условий), итерировать каждое из них достаточно большое число раз для перехода в установившийся режим и затем выводить некоторое количество точек на экран. В результате получаются семейства бифуркационных деревьев для переменных $x = \mathrm{Re}\ z$ и $y = \mathrm{Im}\ z$ в зависимости от параметра A (рис. 6). Изменение параметра ψ не приводит к существенному изменению вида бифуркационных диаграмм. На полученных рисунках можно наблюдать достаточно сложную структуру бифуркационных деревьев.

Рассмотрим сначала бифуркационные деревья для переменной x. Можно выделить два типа бифуркационных деревьев, соответствующих двум типам аттракторов. Аттракторы первого типа появляются при сравнительно небольших значениях параметра A и с его увеличением приближаются к «основному» аттрактору, появляющемуся при $A = 0$. Аттракторы, относящиеся к этому типу, отличает достаточно большая длина интервала по оси A, в котором они существуют. Ко второму типу можно отнести аттракторы, появляющиеся при больших значениях A, демонстрирующие достаточно сложное поведение и отвечающие сравнительно небольшим диапазонам управляющего параметра A. Следует также отметить, что среди большого множества аттракторов при визуальном исследовании бифуркационной диаграммы почти нет хаотических, что можно объяснить тем, что они имеют очень узкие бассейны притяжения с характерным размером меньше периода сетки начальных условий [1]. Каскад удвоений периода для периодических аттракторов, как правило, наблюдается лишь до цикла периода 2. Это объясняется тем, что в консервативном

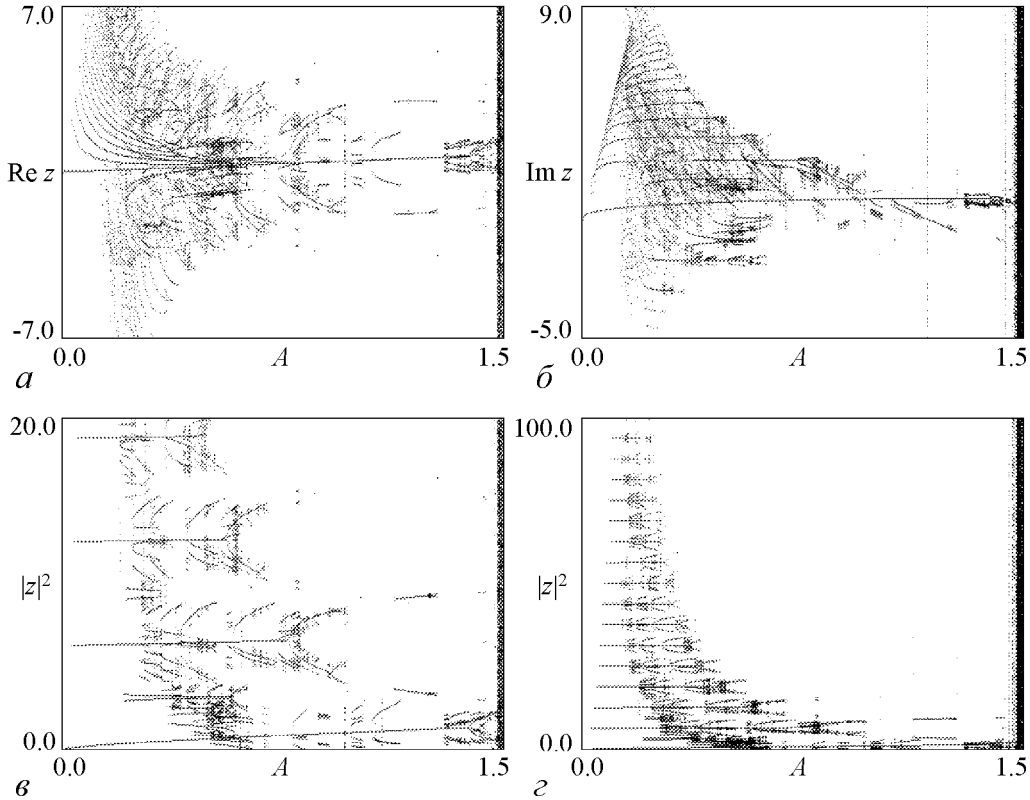


Рис. 6. Бифуркационные деревья отображения (1), построенные для набора начальных условий при $\psi = 0$, $B = 0.99$

случае расстояния между последовательными точками бифуркаций удвоения периода уменьшаются гораздо быстрее, чем в диссипативном (соответствующая константа равна $\delta_H = 8.7210972\ldots$ и существенно больше известного числа Фейгенбаума $\delta_F = 4.6692016\ldots$). Отвечающие большим периодам участки бифуркационных деревьев просто не отображаются на бифуркационной диаграмме при выбранном разрешении. Кроме того, заметно, что длина интервала на оси x, в котором заключены периодические аттракторы, уменьшается с увеличением A и резко увеличивается лишь с переходом в область хаотической динамики.

Рассмотрим теперь бифуркационные деревья для переменной y. На них также видны аттракторы двух типов, соответствующие описанным выше. Аттракторы первого типа, однако, не приближаются к «основному», а напротив, удаляются от него. Как и на диаграмме для переменной x, с ростом A наблюдается уменьшение длины интервала, содержащего аттракторы.

Наконец, были построены бифуркационные диаграммы для $|z|^2$, приведенные на рис. 6, *в*, *г*. На них также наблюдается уменьшение разброса аттракторов с ростом параметра A. Кроме того, здесь хорошо видно, что бифуркационные деревья аттракторов второго типа чаще всего рождаются парами. Это позволяет предположить, что аттракторы второго типа являются аттракторами периодов 2 и выше, что согласуется с выводами, сделанными для отображения ротора [1].

4. Отображение Икеды при добавлении вещественного шума

При проведении эксперимента в любой реальной системе невозможно абсолютно исключить воздействие случайных внешних факторов, поэтому вопрос о поведении системы при воздействии на нее шумового сигнала малой амплитуды представляется важным. При воздействии на систему Икеды вещественного шума мы приходим к отображению

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(\imath |z_n|^2 + \psi) + \varepsilon \xi_n, \tag{7}$$

где ε – амплитуда шума, а ξ_n – случайная величина, изменяющаяся в пределах от -1 до 1. Достоинство рассматриваемой системы в методическом плане очевидно – такой тип шума можно интерпретировать как случайную модуляцию величины импульсов, действующих на нелинейный осциллятор. На рис. 7 приведены фазовые портреты для отображения Икеды без шума и с шумом разной амплитуды в консервативном случае. При добавлении шума малой амплитуды крупные структуры немного расплываются, но все же остаются очень хорошо видны, однако структуры, соответствующие различным побочным особым точкам, разрушаются. При дальнейшем увеличении шума все большее число структур начинает разрушаться.

Выполним теперь очень большое число итераций (30000) в почти консервативной системе (рис. 8). В этом случае можно видеть, что при добавлении шума так же, как и в консервативном случае, исчезают аттракторы, соответствующие побочным особым точкам и обладающие, вероятно, малыми по площади бассейнами

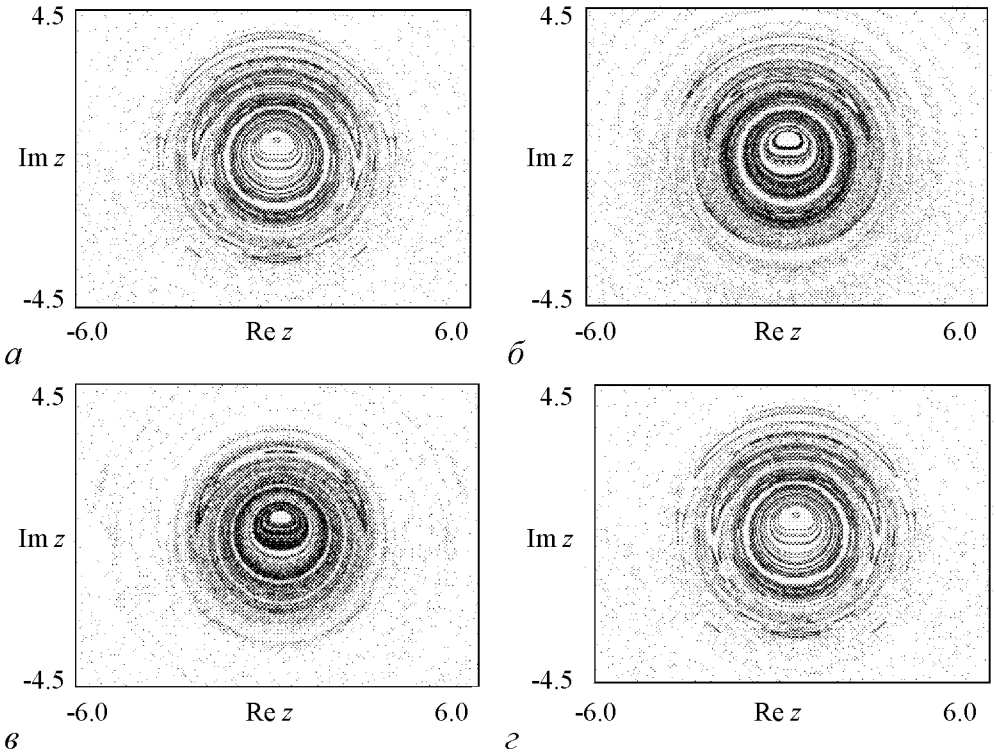


Рис. 7. Фазовые портреты отображения (7) в консервативном случае для различных амплитуд шума ε: 0 (*а*); 0.005 (*б*); 0.007 (*в*); 0.01 (*г*). Значения параметров $A = 0.2$, $\psi = 0$

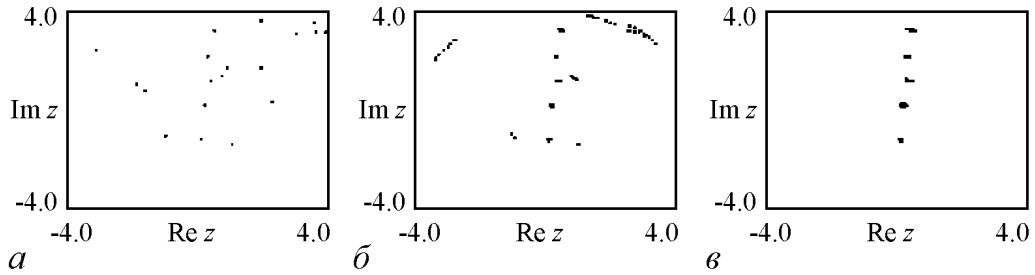


Рис. 8. Аттракторы отображения (1) при значениях параметров $A = 0.4$, $B = 0.99$, $\psi = \pi/2$ и при различных значениях амплитуды шума ε: 0 (*а*); 0.005 (*б*); 0.01 (*в*)

притяжения. Качественно это можно объяснить тем, что амплитуда шума начинает превышать характерный размер бассейна притяжения побочного аттрактора и шумовое воздействие «выбрасывает» точку из него.

Для системы Икеды с шумом были построены «карты разбегания», приведенные на рис. 9. На них можно видеть аналогичную картину: при более слабой амплитуде шума большинство структур на плоскости параметров почти не разрушены, а при увеличении шума они начинают разрушаться.

Также необходимо отметить следующее. Несмотря на то, что для построения фазовых портретов берется не одиночная точка в фазовом пространстве, а целый ансамбль, фазовые портреты при одних и тех же значениях параметров могут иметь довольно сильно отличающийся вид (рис. 10). Так, например, при $A = 0.5$ и $\psi = \pi/2$ в одном случае мы видим области сгущения изображающих точек, а в другом на этом же месте – области, которые изображающая точка вообще не посещает. Это можно объяснить следующим образом. Пусть в системе без шума точка после первой итерации попадает в область, близкую к сепаратрисе, разделяющей области двух различных режимов. Тогда при воздействии шума она может как перейти в область по другую сторону сепаратрисы, так и не перейти. В зависимости от этого она в дальнейшем будет демонстрировать различное поведение. Таким образом, при добавлении шума большей амплитуды полоса вблизи сепаратрисы, из которой точка может быть перекинута шумом в область другой динамики, шире и, следовательно, фазовые портреты при большей амплитуде шума будут различаться сильнее.

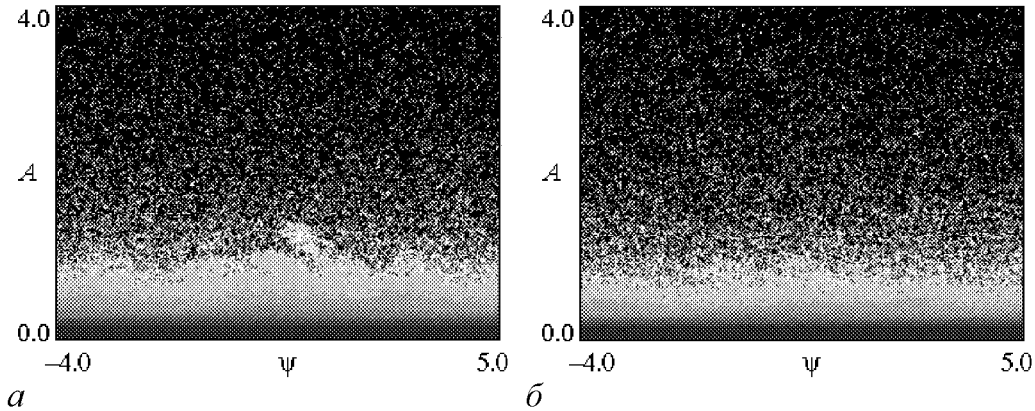


Рис. 9. «Карты разбегания» для отображения (7) в консервативном случае при различных амплитудах шума ε: 0.005 (*а*); 0.01 (*б*). Таблица соответствия оттенков серого такая же, как на рис. 4, *в*

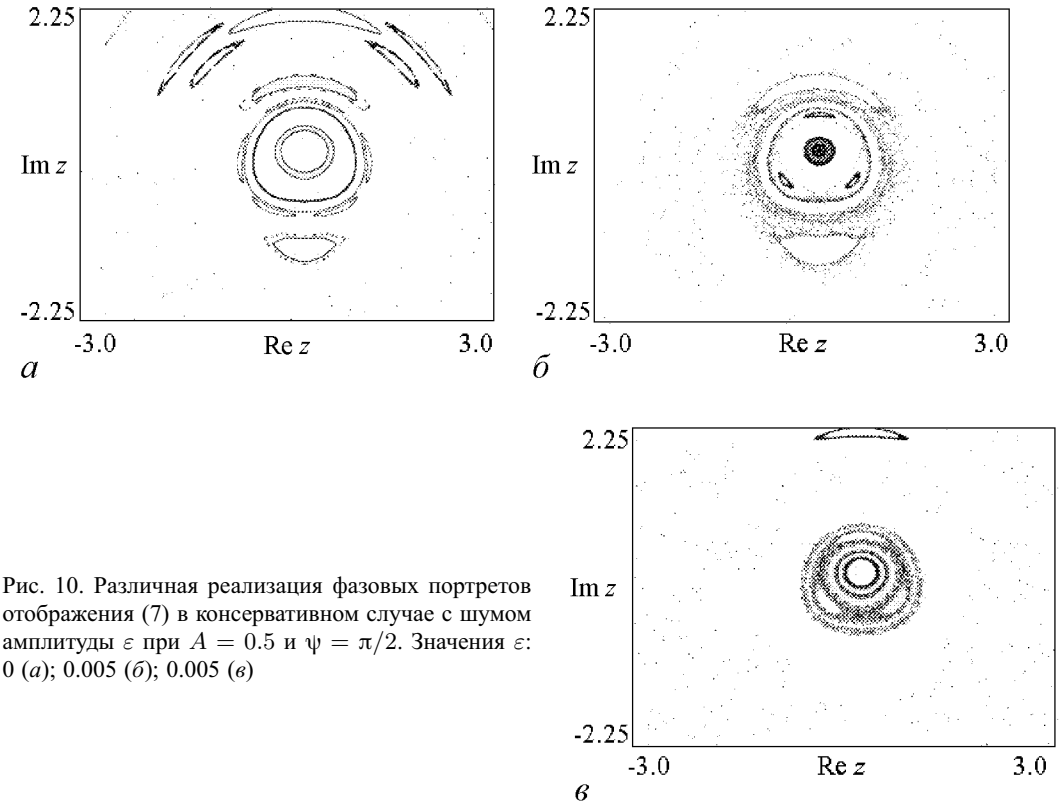


Рис. 10. Различная реализация фазовых портретов отображения (7) в консервативном случае с шумом амплитуды ε при $A = 0.5$ и $\psi = \pi/2$. Значения ε: 0 (*а*); 0.005 (*б*); 0.005 (*в*)

Заключение

В работе обсуждены методы, применяемые для исследования консервативных, почти консервативных и диссипативных систем, взаимосвязь этих типов поведения и влияние на нее шумового воздействия малой амплитуды на примере одной из модельных систем нелинейной динамики – отображения Икеды. Эта система в методическом плане очень удобна, поскольку наряду с богатым спектром поведения допускает простую физическую интерпретацию в виде нелинейного осциллятора с импульсным возбуждением. Показано, что между устройством плоскости параметров в слабо и сильно диссипативном случаях в отображении Икеды существуют значительные различия. Продемонстрирована роль малых шумов в динамике системы. Предложен новый метод анализа консервативных систем – карта «разбегания». Изучено сосуществование очень большого числа аттракторов в почти консервативном случае.

Представим несколько задач, которые можно использовать как на семинарских занятиях, так и в компьютерных практикумах.

Задачи

1. Для нелинейного осциллятора Дуффинга, находящегося под периодическим импульсным воздействием

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C\delta(t - nT),$$

используя в промежутке между импульсами решение, полученное методом медленно меняющихся амплитуд, получите отображение Икеды и соотношения (3), связывающие параметры этого отображения и исходного осциллятора.

2. Найдите якобиан отображения Икеды и покажите, что при $B = 1$ он обращается в единицу, то есть система в этом случае является консервативной.

3. Напишите программу, которая строит карту динамических режимов диссипативной системы Икеды.

4. Напишите программу, позволяющую наблюдать за эволюцией облака изображающих точек в фазовом пространстве для системы Икеды на экране в режиме компьютерной мультипликации. Проведите компьютерное моделирование для различных значений параметров. По его результатам ответьте на вопросы: консервативна или диссипативна система? Есть ли в ней аттракторы? Какого типа эти аттракторы? Изменяется ли при этом характер эволюции облака? Что происходит с аттракторами? Рассмотрите отдельно случай почти консервативной системы.

5. Исследуйте неподвижные точки диссипативной системы Икеды. Покажите, что ее плоскость параметров (A,ψ) является многолистной поверхностью, содержащей систему точек сборки с отходящими от них линиями складок. (*Указание*. Удобно использовать «полуаналитическое» исследование, для чего из (1) получите уравнение для квадрата модуля z для неподвижной точки.)

6. Выясните, как ведут себя точки сборки и линии складок, найденные в предыдущей задаче, при переходе к консервативному пределу.

7. Напишите программу, которая строит «карту разбегания» для консервативной системы Икеды, описанную в тексте настоящей статьи.

8. Напишите программу, которая при щелчке мыши на плоскости параметров консервативного отображения Икеды (A,ψ) строит фазовый портрет системы. На экране компьютера в качестве плоскости (A,ψ) можно использовать либо «карту разбегания», либо карту динамических режимов «почти» консервативной системы. Обсудите метаморфозы фазового портрета при «путешествии» по плоскости параметров.

9. В режиме компьютерной мультипликации изучите эволюцию облака изображающих точек в системе Икеды с шумом. Рассмотрите случаи диссипативной, почти консервативной и консервативной систем.

10. Напишите программу, которая позволяет визуализировать множество бифуркационных деревьев в почти консервативной системе Икеды.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-02-04011-ННИО) и Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.442.11.7457).

Библиографический список

1. *Feudel U., Grebogi C., Hunt B.R., Yorke J.A.* Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, №1. P.71.
2. *Ikeda K., Daido H., Akimoto O.* Optical turbulence: Chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P.709.
3. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Динамические системы разных классов как модели нелинейного осциллятора с импульсным воздействием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8. №2. С. 31.

4. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
5. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
6. *Carcasses J., Mira C., Bosch M., Simo C. & Tatjer J. C.* Crossroad area – spring area transition (1) Parameter plane representation // Int. J. Bifurc. & Chaos. 1991. Vol. 1. P. 183.
7. *Mira C., Carcasses J.* On the crossroad area – saddle area and spring area transition // Int. J. of Bif. and Chaos. 1991. Vol. 1, №3. P. 641.
8. *Kuznetsov Yu.A., Meijer H.G.E., van Veen L.* // Int. J. of Bif. And Chaos. 2004. Vol.14, №7. P. 2253.
9. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.

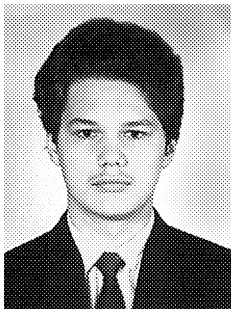
Саратовский филиал ИРЭ РАН
Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 9.12.2005

CONSERVATIVE AND DISSIPATIVE DYNAMICS OF IKEDA MAP

A.P. Kuznetsov, A.V. Savin, D.V. Savin

Different methods for investigation of dissipative, nearly conservative and conservative systems have been demonstrated on the example of Ikeda map. The method for two-parameter analysis of dynamics of conservative systems has been proposed. Significant changes in the structure of the parameter and phase space of Ikeda map when dissipation decreases have been revealed. Tasks for seminars and computer practices have been proposed.



Савин Алексей Владимирович – родился в Саратове (1980). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ. Кандидат физико-математических наук (2005). Ассистент базовой кафедры динамических систем СГУ, младший научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН. Имеет 6 научных публикаций в центральных российских и международных журналах. Область научных интересов: особенности перехода к хаосу и критического поведения в связанных нелинейных системах.

Савин Дмитрий Владимирович – родился в Саратове (1987). Окончил с золотой медалью физико-технический лицей № 1 г. Саратова (2003), студент 3 курса факультета нелинейных процессов СГУ. Имеет 3 публикации в сборниках тезисов докладов. Область научных интересов: взаимосвязь динамики слабо диссипативных и консервативных динамических систем.

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 2, 2006 УДК 510:536.7

*

ВОПЛОЩЕНИЕ ОДНОЙ МЕЧТЫ*

Г.Г. Малинецкий

Выдающийся отечественный ученый, специалист в области прикладной математики, синергетики, междисциплинарных исследований член-корреспондент РАН Сергей Павлович Курдюмов в свое время окончил физический факультет Московского государственного университета. Он окончил его в героическую эпоху, когда от работы исследователей – физиков, химиков, математиков зависела судьба нашей страны. Без преувеличения можно сказать, что и судьбы мира.

В те годы со знаменитой речи Уинстона Черчилля началась «холодная война». В 50-летний юбилей первого испытания советского ядерного устройства были опубликованы планы комитета начальников штабов США. В них всерьез планировалась в 1954–1956 годах серия ударов по советским военным и промышленным объектам, крупным городам. Было намечено 200 целей. Бомбардировка должна была обеспечить крутой поворот мировой истории.

Сергей Павлович Курдюмов

Поэтому, преодолевая огромные трудности, наша страна создавала свой ракетно-ядерный щит. В советском ядерном проекте, как утверждают недавно обнародованные данные, принимало участие более полумиллиона человек, из них 8000 исследователей. Стране для решения стратегических задач нужны были не только выдающиеся ученые, сильные инженеры, но и активная, творческая молодежь.

*Статья написана по материалам одноименного доклада, озвученного автором на Международной междисциплинарной научной конференции «Курдюмовские чтения. Идеи синергетики в естественных науках». 20–23 апреля 2006 года, Тверь, Россия.

Это создавало особую атмосферу на физическом факультете – атмосферу поисков, свершений, ощущение возможности воплотить мечту. На факультете читали лекции нынешние и будущие академики Ландау, Тамм, Тихонов, Самарский. Студенты не только занимались наукой, стремясь поскорее стать участниками большого важного общего дела. Они ходили в походы, знакомясь со всей огромной страной от Памира до Камчатки, будущее которой зависело от них. Писали поэмы, песни, устраивали «Дни физика», о которых студенты следующих поколений будут узнавать с восхищением и светлой завистью к поколению, наблюдавшему взлет страны и готовому в нем участвовать.

Это создавало и особое отношение к науке – широкое (во всем можно разобраться и все сделать!), романтичное (на «Дне физика» был сам великий Бор, да и нам пора подумать о своих будущих «нобелевках»!), конкретное (сначала дело должно быть сделано, а остальное потом!). Здесь возникала дружба, которую многие выпускники тех лет несли через всю жизнь, своеобразное братство. Среди друзей и коллег Сергея Павловича было очень много выпускников физфака – А.Г. Свешников, Ю.Н. Днестровский, Д.П. Костомаров, Т.А. Гермогенова, В.Б. Уваров, А.Ф. Никифоров, а также много-много других, и его судьба – Валентина Васильевна Мурина.

И работать Сергею Павловичу предстояло под руководством своих преподавателей, к которым он относился с любовью и глубоким уважением, которых называл Учителями – академиков Андрея Николаевича Тихонова и Александра Андреевича Самарского. К своим учителям он относил и выдающегося советского ученого, трижды Героя Социалистического Труда, академика Мстислава Всеволодовича Келдыша.

Сергей Павлович писал диплом по теоретической ядерной физике у академика Маркова. Поэтому он всегда проявлял огромный интерес к атомной физике, к квантовой механике, которую считал и непонятой по-настоящему учеными, и незавершенной. Однако вся его научная жизнь прошла в Институте прикладной математики, созданном в 1953 году для решения стратегических задач, связанных с развитием и использованием прикладной математики и вычислительной техники. В те годы это были проблемы совершенствования ядерного оружия, создания водородной бомбы, ракетной техники. Создателем Института стал М.В. Келдыш, его заместителем по науке А.Н. Тихонов, заведующим отделом математической физики, куда пришел Сергей Павлович, – А.А. Самарский. Наверно, стоит подчеркнуть молодость советской науки того времени. И руководителям крупнейших научных и технологических проектов, и их заказчикам было немногим больше сорока.

Крупные научно-технологические проекты национального масштаба, как правило, междисциплинарны. Обычно они гораздо шире одной предметной области и научной дисциплины. В таких проектах Сергей Павлович участвовал – это совершенствование ядерных вооружений, которое позволило почти полвека развиваться нашей стране без войн, разрушительных кризисов и катастроф национального масштаба. Это проект управляемого термоядерного синтеза, опередивший свое время. Он должен был снабдить человечество дешевой и чистой энергией. Сергей Павлович часто говорил, что достойная роль ученого – быть спасителем человечества. Это проект, связанный с широким внедрением вычислительного эксперимента в различные сферы науки, промышленности, управления. Может быть, этот проект, будь он реализован в полной мере, позволил бы избежать происшедшей геополитической катастрофы.

Междисциплинарность крупных проектов связана с необходимостью привлекать и координировать действия представителей разных специальностей – физиков, химиков, инженеров, управленцев, математиков. При этом приходится думать об управленческих, экономических, социальных механизмах, позволяющих воплотить замысел в реальность. И, наконец, надо заглядывать в будущее, стараясь представить последствия сделанного в дальней перспективе. Тут роль прикладной математики очень часто оказывается ключевой – для взаимодействия разных специалистов, для оценки того, что является главным, а чем можно пренебречь, необходим язык. И этим языком является *язык математических моделей*. Компьютерное же исследование моделей позволяет «заглянуть в ответ» – посмотреть, что получится в том или ином случае.

Эту широту и междисциплинарность Сергей Павлович очень любил и ценил. Он иногда вспоминал фразу Достоевского о том, что широк русский человек и хорошо бы чуть сузить его. По мысли Сергея Павловича, нынешнее и будущие поколения ученых должны быть «шире» своих предшественников. «Неплохо бы поднять голову и посмотреть, что происходит за пределами своей узкой области! Ведь и наука родилась тогда, когда человек поднял голову, взглянул на звезды и задумался», – часто повторял он.

Прошли годы. Многие крупные задачи уже были решены, а необходимость новых не осознавалась. Многие исследователи уходили в детали, в частности, в дорогие их сердцу подробности. Маячил «кризис Вавилонской башни» – утрата языка, научной стратегии, общего понимания важности тех ключевых задач, которые должны быть решены. Решены не только «для удовлетворения своего любопытства за государственный счет», но и для будущего человечества. С поколением физиков, ровесников Сергея Павловича произошло то, что в одной любимой физфаковской песне выражено в строках:

Мы разбредемся
По любимым и по улицам.
Наденем фраки
И закружимся в судьбе...

Но для одних людей проблема своя и поколения – это тяжкий крест, для других – вызов и путь в будущее.

Синергетика и междисциплинарность

Среди нехоженных путей
Один – пусть мой,
Среди невзятых рубежей
Один – за мной.

В. Высоцкий

Большая удача, когда время требует идей, результатов, усилий, созвучных внутренней структуре исследователя, его психологическому типу и темпераменту. И в этом смысле Сергей Павлович был очень счастливым человеком. Междисциплинарность была в самом его характере. В студенческие годы он ходил в консерваторию на цикл «Все симфонии Бетховена», читал Платона, Спинозу и Канта и даже

подумывал о переходе на философский факультет. Позже он мог часами беседовать с географами и психологами, биологами и медиками, философами и буддологами. Его широту и междисциплинарность отражает и «разброс» научных интересов его учеников – от нанотехнологии до качественной теории нелинейных параболических уравнений, от управляемого термоядерного синтеза до философских проблем естествознания, от управления риском до инвариантно-групповых свойств нелинейных систем.

Сергей Павлович был одним из первых советских исследователей, который занялся общими свойствами сложных нелинейных систем. Это требовало большой научной смелости – ведь сам факт существования таких свойств совсем не очевиден. По его мнению, исследование сложных нелинейных систем – это дорога в новый мир. Мир со своими понятиями, своим взглядом на реальность. При этом, двигаясь в будущее, Сергей Павлович опирался на пройденный им и коллегами путь – опыт исследования многочисленных неустойчивостей, которые изучали в физике плазмы, на результаты теории горения и взрыва. Новый мир связан с представлениями о нелинейности, неустойчивости, открытости и неравновесности.

По сходному пути шел немецкий физик-теоретик, занимавшийся статистической физикой и физикой лазеров, профессор Штутгартского университета Герман Хакен.

Близкие идеи развивал лауреат Нобелевской премии по химии 1977 года, бельгийский исследователь Илья Романович Пригожин. Лейтмотивом его научной деятельности была попытка создать нелинейную неравновесную термодинамику и проблема времени и необратимости.

Название новому подходу дал Герман Хакен. Это теория самоорганизации или *синергетика* (дословно – «теория совместного действия», в переводе с греческого). Вводя этот термин, Г. Хакен вкладывал в него два смысла. Первый – это междисциплинарный подход, занимающийся возникновением новых свойств и качеств у сложных систем, каковыми составляющие их подсистемы не обладают. Второй – это направление, развитие которого требует совместной работы представителей различных научных дисциплин. Время летит быстро. Синергетике уже 35. Наверно, ее началом следует считать статью Германа Хакена, где появился и сам термин, и были высказаны принципиальные идеи. За прошедшие три с лишним десятилетия был пройден большой путь, на котором многое было понято, многое открыто, многое создано.

Развитие этого подхода – совсем не простой и не очевидный процесс. Обычно в синергетику приходят люди, состоявшиеся в своих областях знаний. Приходят со своими задачами, идеями и методами. Приходят, чтобы выйти на новый уровень. Поэтому «научить синергетике» совсем не просто. Кроме того, все эти люди, как правило, работают в своих организациях, поэтому собрать их «под крыло», как, например, математиков в математический институт, физиков в физический, химиков в химический, обычно не удается. И это тоже проблема. Синергетика «делается» в своеобразном «незримом колледже». Делается людьми, работающими в разных областях, в разных городах, на разных континентах. И на конференции, в общем-то, эти специалисты ездят на разные.

Поэтому огромное значение в развитии синергетики сыграла в свое время серия Springer Series in Synergetics. Она в течение нескольких десятков лет выхо-

дила в издательстве Springer-Verlag под общей редакцией Германа Хакена. В ней были и учебники, и монографии, и труды конференций. Сергей Павлович высоко ценил эту серию.

На многое, в том числе и на развитие науки, Сергей Павлович смотрел с точки зрения синергетики. В построенной им совместно с учениками *теории режимов с обострением* изучается, сколько и каких структур может существовать в различных нелинейных средах. И оказывается, что этот набор структур – *спектр структур*, как называл его Сергей Павлович, – жестко связан со свойствами среды. Чтобы получить что-то более сложное, нужно не вкладывать энергию, не воздействовать каким-то другим способом, а менять свойства самой среды. И серию, подобную хакеновской, Сергей Павлович рассматривал как инструмент для изменения научной среды. А открытия, научные направления, научные школы можно рассматривать как структуры, которые на этой среде вырастают. Так же он подходил и к многочисленным конференциям, которые организовывала ассоциация «Женщины в науке и образовании», которой в течение многих лет руководит профессор биологического факультета Г.Ю. Ризниченко.

Из тех же соображений он высоко ценил огромную работу по переводу классиков естествознания и основополагающих работ по нелинейной динамике, которую в течение многих лет вел талантливый ученый, блестящий переводчик и прекрасный популяризатор науки Юлий Александрович Данилов. Этот выдающийся человек владел 20 европейскими языками и перевел на русский язык 110 книг. Много поколений физиков и математиков выросло на переведенных им работах.

Сергей Павлович уделял огромное внимание коллегам, ученикам, участникам сотен конференций, семинаров, круглых столов, телепередач, которые он организовывал или в которых принимал участие. Его неиссякаемый оптимизм, надежда, вера в будущее очень поддерживали многих в трудные для российской науки годы. И вместе с тем он ясно видел, как стремительно тает научный потенциал Института прикладной математики, в котором он прожил всю свою научную жизнь. Тает и влияние, и авторитет Российской Академии наук, научный потенциал России.

И примерно с 2000 года он начал размышлять и обсуждать с учениками, что можно и должно сделать, чтобы сохранить и развить синергетику в России. Попыток было сделано много. Тут и усилия по созданию кафедры синергетики на физическом факультете МГУ, и попытка организовать журнал, посвященный междисциплинарным проблемам, и многое другое. Сергей Павлович энергично и настойчиво раз за разом пытался сделать все, что мог и считал необходимым.

Он иногда говорил, что его мечта – направить послание в будущее, помочь следующему поколению исследователей в России и в мире решать свои задачи, опираясь на тот огромный потенциал, который уже создан. Мне как-то довелось слышать его разговор с Никитой Николаевичем Моисеевым – академиком, замечательным ученым в области прикладной математики и системного анализа, мыслителем, развившим концепцию универсального эволюционизма. Никита Николаевич сетовал на то, что некому передать эстафету. Сергей Павлович энергично возражал, убеждая, что эстафету передать можно исследователям и этого поколения, и даже следующего. Просто мы этого пока не научились делать.

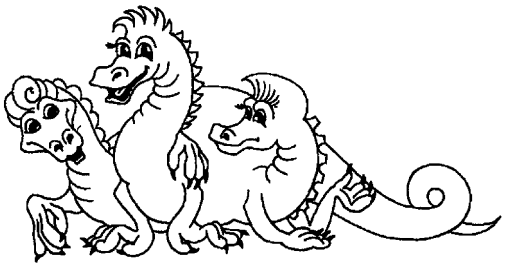
И эту мечту моего учителя о передаче эстафеты, видимо, наиболее полно и эффективно удалось воплотить в двух проектах. «Если информации нет в Сети, то ее

просто нет», – иногда говорят программисты. Поэтому Сергей Павлович постарался, чтобы идеи синергетики, книги, основополагающие работы были представлены в Сети обширно и подробно.

Одно из воплощений этого – материалы по синергетике на сайтах Института прикладной математики – http://www.keldysh.ru и http://risk.keldysh.ru. Сайт Института в прошлом году ежедневно в среднем просматривало более 4 000 человек. И, судя по статистике, многие интересовались работами, проектами и книгами по синергетике. Кроме того, был создан сайт самого Сергея Павловича http://spkurdyumov.narod.ru. На этом сайте выложено более 300 оригинальных работ, обзоров, научно-популярных статей и книг по синергетике. За несколько лет этот сайт стал одним из крупнейших научно-образовательных порталов России. Огромная заслуга в этом принадлежит самому Сергею Павловичу и его сыну – председателю центра «Стратегии динамического развития» Владимиру Сергеевичу Курдюмову[1].

Другое воплощение этого – серия книг «Синергетика: от прошлого к будущему». Этой серии Сергей Павлович придавал огромное значение, сам, несмотря на болезнь, принимал активное участие в работе редакционной коллегии. Его очень радовали первые успехи новой серии и сам ее замысел – донести до студентов, аспирантов, исследователей идеи синергетики в ее развитии. Издать и переиздать основоположников этого подхода, синергетическую классику. Создать или дать вторую жизнь учебникам, рассчитанным на разный круг читателей, желающих познакомиться с синергетическими идеями от математиков и физиков до гуманитариев и философов. Издать отечественных и зарубежных исследователей, находящихся на переднем крае синергетических исследований.

Я помню, как после решения о создании серии он возбужденно ходил по институту и радостно рассказывал друзьям (а к ним можно было отнести более половины сотрудников Института!) о важном событии. «Мы начинаем важнейшее дело. Эта серия изменит научную среду! В серии будет 100 томов! Подумай, что бы вы могли для нее предложить!» – вдохновенно говорил Сергей Павлович коллегам. Когда это говорилось, то в серии еще не было ни одной книги. И коллегам, которых направлял в связи с серией Сергей Павлович ко мне, приходилось объяснять, что все это дело далекого будущего, давать представление о больших трудностях на этом пути и огромном объеме предстоящей работы. Сам Сергей Павлович в ответ на эти слова восклицал: «Конечно, ты прав. Но я уверен, что все получится!».



Символом серии стал трехглавый дракон, замечательный рисунок которого сделала Кира Иванова. Этот дракон имеет множество интерпретаций. Например, есть такая. Одна голова смотрит в далекое будущее, занимается тем, что может изменить саму общенаучную парадигму. (Это не преувеличение. Несколько лет назад директор Института философии

[1]Представление о направлении деятельности этой организации, воплощающей идеи синергетики в социально-экономической, управленческой сфере, в области высоких технологий и государственного управления, дает книга «Будущее России в зеркале синергетики» (М.: УРСС, 2006), подготовленная под эгидой Центра.

РАН В.С. Степин, один из ведущих специалистов в мире по философии науки, выступил с тезисом о том, что именно синергетика в XXI веке окажется в центре научной картины мира.) То, что делает эта голова, витающая в небесах, может понадобиться немедленно, а может – через 50 или 100 лет.

Вторая голова занимается «нормальной наукой», как называл ее философ и историк науки Томас Кун. Тем, что популярно здесь и сейчас, что уже воплощается в конкретные технологии. Синергетика сегодня представляется развитой сложившейся областью со своими научными школами, проблемами, многочисленными приложениями. Среди них многие задачи нанотехнологии и проблемы прогноза, методы медицинской диагностики и новые подходы к защите информации, химическая технология и проблемы физики плазмы, а также многое, многое другое.

Третья голова занимается «тяжелыми задачами», тем, чем нужно заниматься, чтобы сберечь или разумно улучшить нашу реальность. Это проблемы мировой динамики, стратегический прогноз развития стран и регионов, управление риском природных и техногенных катастроф и социальных нестабильностей. Или прогноз развития высшей школы России при различных управляющих воздействиях. Этой задачей в течение ряда лет и с большим успехом занимались в отделе, которым руководил Сергей Павлович.

Другая интерпретация нашего дракона связана с тем, что синергетика требует совместных усилий естественных (наверно, это левая голова), математических («неестественных» по классификации Л.Д. Ландау) и гуманитарных («противоестественных») наук. И судя по облику дракона, все они неплохо ладят между собой.

Третья, философская, интерпретация принадлежит сотруднику Института философии РАН и научному редактору телевизионной программы А. Гордона «2030» В. Г. Буданову. В одной из недавних работ, посвященных принципам синергетики, он определил ее как междисциплинарный подход, лежащий в области пересечения трех сфер – предметного знания, математического моделирования и философской рефлексии. Именно это дает новое качество, по сравнению с другими направлениями, рождающимися на стыке наук. Может быть каждая голова дракона и олицетворяет свою сферу знания?

У дракона три головы, поэтому, наверно, и трех интерпретаций пока достаточно.

Небольшой юбилей

Зачем нужны нам юбилеи?
Чтоб жизнь бежала веселее!

Из институтского фольклора

В начале 2006 года серия «Синергетика: от прошлого к будущему» отметила юбилей – в этой серии вышло 25 книг.

1. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. 2002.

2. *Баранцев Р.Г.* Синергетика в современном естествознании. 2003.
3. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. Пер. с англ. Изд. 2. 2003.
4. *Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г.* Синергетика и прогнозы будущего. Изд. 3. 2003.
5. *Пригожин И., Николис Г.* Познание сложного. Введение. Пер. с англ. Изд. 2. 2003.
6. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. Изд. 5. 2006.
7. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Колебания и волны. Изд. 2. 2003.
8. *Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И.* Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте. 2004.
9. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. Изд. 4. 2004.
10. *Гельфанд И.М., Розенфельд Б.И., Шифрин М.А.* Очерки о совместной работе математиков и врачей. Изд. 2. 2004.
11. *Котов Ю.Б.* Новые математические подходы к задачам медицинской диагностики. 2004.
12. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры. Изд. 2. 2004.
13. *Чернавский Д.С.* Синергетика и информация. Динамическая теория информации. Изд. 2. 2004.
14. *Безручко Б.П., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях. 2005.
15. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Основания синергетики. Синергетическое мировидение. Изд. 2. 2005.
16. *Малинецкий Г.Г.* Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. Изд. 4. 2005.
17. *Пенроуз Р.* Новый Ум Короля. О компьютерах, мышлении и законах физики. Пер. с англ. Изд. 2. 2005.
18. *Пригожин И.* Неравновесная статистическая механика. Изд. 2. 2005.
19. *Пригожин И., Стенгерс И.* Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. Изд. 6, стереот. 2005.
20. *Редько В.Г.* Эволюция, нейронные сети, интеллект: Модели и концепции эволюционной кибернетики. 2005.
21. *Хакен Г.* Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. Пер. с англ. Изд. 2. 2005.
22. *Чумаченко Е.Н., Смирнов О.М., Цепин М.А.* Сверхпластичность: материалы, теория, технологии. 2005.
23. *Данилов Ю.А.* Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. Изд. 2. 2006.
24. *Суздалев И.П.* Нанотехнология: физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов. 2006.
25. Будущее России в зеркале синергетики. Ред. Г.Г. Малинецкий. 2006.

рис

Серия состоялась, в состав ее редакционной коллегии вошли многие ведущие ученые, работающие в междисциплинарной сфере и добившиеся крупных успехов в своих областях.

Председатель редколлегии:

Г.Г. Малинецкий, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (сложность, хаос, прогноз).

Члены редколлегии:

Р.Г. Баранцев, Санкт-Петербургский государственный университет (асимптотология, семиодинамика, философия естествознания).

А.В. Гусев, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (вычислительная гидродинамика, технологии, медицина).

А.С. Дмитриев, Институт радиоэлектроники РАН (динамический хаос, защита информации, телекоммуникации).

В.П. Дымников, Институт вычислительной математики РАН (физика атмосферы и океана, аттракторы большой размерности).

С.А. Кащенко, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова (асимптотический анализ нелинейных систем, образование, инновации).

И.В. Кузнецов, Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН (анализ временных рядов, вычислительная сейсмология, клеточные автоматы).

А.Ю. Лоскутов, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (эргодическая теория, биллиарды, фракталы).

И.Г. Поспелов, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН (развивающиеся системы, математическая экономика).

Ю.Д. Третьяков, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (наука о материалах и наноструктуры).

Д.И. Трубецков, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (теория колебаний и волн, электроника, преподавание синергетики).

Д.С. Чернавский, Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН (биофизика, экономика, информация).

Прежде чем говорить о книгах, наверно, стоит сказать несколько слов о людях, благодаря которым удалось воплотить мечту Сергея Павловича о серии книг по синергетике. Это сотрудники издательства УРСС. В начале девяностых группа выпускников физического факультета МГУ и ряда других вузов решили организовать издательство, чтобы переводить лучшие советские учебники на испанский язык. А может быть отсюда и пошло название, потому что URSS в переводе со всех романских языков СССР. Не стоит забывать, что испанский язык является вторым в мире по числу людей, которые говорят на нем, уступая только китайскому и заметно опережая английский.

Годы прошли, и сегодня, через 12 лет своей деятельности, издательство стало одним из ведущих в нашей стране и по числу учебных и научных изданий, и по тиражу книг в этой важной области. За это время выпущено более 3000 наименований книг. Наибольшее число работ выпущено по физике, математике, филологии. Но не оставлены без внимания и архитектура, социология, философия, экономика.

Все эти годы руководит издательством испанец, выпускник кафедры квантовой статистики физфака МГУ Доминго Марин Рикой. К счастью для издательства и для российских читателей, в Доминго сочетается неукротимая энергия, огромная работоспособность, деловая хватка и романтическое, трепетное отношение к книге и знанию. В его душе живет мечта о будущем, о времени, когда Знание и Мудрость будут занимать достойное место в нашей реальности.

Душой издательства, без которой наша серия не состоялась бы, является Виктория Малышенко, также выпускница кафедры квантовой статистики. Трудно представить, что ей удается совмещать ведение финансовых дел издательства и руководство испанской редакцией. (Переводчики издательства не раз восхищались тем, что человек, для которого язык не является родным, может владеть им в такой превосходной степени.) К слову сказать, одна из книг серии уже издана на испанском. Кроме того, Виктория является редактором перевода с английского языка нескольких блестящих книг. Среди них, в частности, работа Роджера Пенроуза «Новый ум короля», вышедшая в нашей серии – один из самых ярких научных бестселлеров последних лет. И, пожалуй, главное – благодаря Виктории выход каждой книги и для авторов, и для редколлегии, и для тех, кто трудился над печатным изданием, превращается в праздник.

Каждый раз, начиная разговор с авторами о новой книге, стараешься рассказать, как долог и тернист предстоящий путь, как много внимания потребуют детали, какие неожиданные препятствия могут возникнуть на этой дороге. Однако, говоря все это, постоянно помнишь, что пройти путь, преодолеть все поможет ангел-хранитель нашей серии Лена Ермолаева. Это удивительный человек, доброжелательности, терпению и уникальным способностям которого не устаешь удивляться. Мне до сих пор непонятно, как можно, держа в голове около сотни одновременно идущих издательских проектов, помнить о нескольких неснятых вопросах в списке литературы, туманных, но вдохновенных пожеланиях автора к обложке и еще о тысячах других вещей. Легкость, с которой это делается, постоянно вызывает мысль о чуде, которое творится у тебя на глазах. Прекрасно, что в реальности есть место чуду.

Начиная серию, мы и представить не могли, сколько заботы, настойчивости и терпения потребуют наши авторы. Мысль о том, что о некоторых деталях придется напоминать сотни раз, и занимать это будет месяцы, и что другие вещи придется решать и придумывать немедленно, здесь и сейчас, просто не приходила в голову. Кроме того, очень важно не терять перспективу и думать, какой будет серия через год, три, десять лет. Эту огромную черновую работу ведет ответственный секретарь нашей серии, сотрудник Института прикладной математики Алексей Гусев. Его профессия – вычислительная газодинамика. Работая над крупными проектами в самолетостроении, он объехал ведущие мировые исследовательские центры. Его огромная эрудиция, эмоциональность, тонкая интуиция позволяют не перелезать и даже не обходить возникающие препятствия, а перелетать через них.

Ну а теперь о книгах. В серии к настоящему времени издано 25 книг общим тиражом около 50 тысяч экземпляров. Они продаются в 50 городах России, а через интернет-магазин и по всему миру. Ежедневно в России продается в среднем 60 книг по синергетике.

Много это или мало? Здесь все зависит от масштаба. Если сравнивать с советскими временами, когда тираж журнала «Знание – сила» составлял 800 тысяч, «На-

уки и жизни» – около 3-х миллионов, а учебников по программированию – 60 тысяч, то весьма немного. Однако, если сравнивать с нынешним тиражом ведущего журнала по синергетике в России «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» – 200 экземпляров, то получается весьма неплохо. (В скобках заметим, что в мире издаются десятки журналов по синергетике: «Physica D. Nonlinear Phenomena», «Chaos», «Nonlinearity», «Physical Review E», «International Journal of Bifurcation and Chaos»и другие. Популярна эта проблематика и в ведущих физических журналах «Physical Review Letters», «Journal of Statistical Physics» и во многих других.)

В серии, как видно, обширно представлены работы одного из основоположников синергетики, Нобелевского лауреата И.Р. Пригожина. Их общий тираж более 10 тысяч экземпляров. Среди них есть и классические работы, после которых синергетика получила права гражданства в фундаментальной науке [3], и вводный курс [5], и философские размышления [6], и глубокий оригинальный курс неравновесной статистической механики [18]. В этих книгах привлекает масштаб поднимаемых проблем. Одна из наиболее глубоких – проблема времени, внутренние причины необратимости процессов в нашей реальности [19].

По мысли И.Р. Пригожина, энтропию и время следует рассматривать как операторы, а причины необратимости кроются не в нашем незнании, а в фундаментальных диссипативных процессах, играющих принципиальную роль уже на микроуровне. Обаяние этих идей очень велико – многие исследователи стремятся использовать эти подходы и методы в своих областях. Коллектив отдела математического моделирования нелинейных процессов и синергетики ИПМ РАН воочию увидел это, начав в последние годы заниматься проблемами моделирования добиологической и ранних стадий биологической эволюции в рамках программы Президиума РАН, которой руководит академик Э.М. Галимов.

Всегда важны, значимы, конкретны и популярны у читателей работы Германа Хакена [21]. В 2004 году он был в Москве, высоко оценил нашу серию и заметил, что волна интереса к синергетике и работы в этом направлении все более смещаются из Западной Европы в Россию. Наверно, это неудивительно. В годы крутого перелома, «последних вопросов», как называл их Ф.М. Достоевский, возникает тяга и к глубоким научным, мировоззренческим проблемам. Появляется желание осмыслить судьбу науки и ее приоритеты в XXI веке в целом. Это самым тесным образом связано с междисциплинарностью и синергетикой.

Сергей Павлович очень гордился своей книгой [4], вышедшей в нашей серии, которая к настоящему времени выдержала пять изданий в России и в США. Его особенно вдохновляло то, что теория режимов, которую он вместе с учениками создавал много лет, получила неожиданное приложение в демографии. В соответствии с данными палеодемографов и теорией П.С. Капицы, численность человечества в последние 100 тысяч лет росла в режиме с обострением ($\dot{N} = \alpha N^2$), и этот закон меняется на наших глазах в течение нескольких последних десятилетий. Такого крутого поворота человечество еще не знало. В этой книге была выдвинута исследовательская программа создания *теоретической истории*, которая сейчас активно воплощается в жизнь.

К счастью, наука в России не ограничивается пределами Садового кольца. В стране есть сильные научные центры и научные школы, пользующиеся мировым признанием. Одной из таких школ в синергетике является Саратовская, возглавляе-

мая членом-корреспондентом РАН Дмитрием Ивановичем Трубецковым. Эта школа сформировалась в ходе решения важных прикладных проблем, связанных с радиотехникой и СВЧ-электроникой. Саратовским коллегам удалось выстроить целостную систему обучения нелинейной науке, тесно связанную и с самостоятельной исследовательской работой, и с осмыслением ключевых задач современного естествознания. Здесь и «Лицей прикладных наук», в котором учатся талантливые школьники со всего города, и ежегодная школа-конференция для школьников и студентов «Нелинейные дни в Саратове для молодых», и серия отличных учебников по теории колебаний и теории самоорганизации, и замечательный журнал «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

Поэтому гордостью серии являются вводные курсы синергетики, созданные Д.И. Трубецковым и его учениками [7, 12, 14]. И тут стоит обратить внимание на широту, стремление связать ключевые идеи естествознания с поэзией, живописью, общим культурным контекстом. Кроме того, деятельность этого молодого, энергичного, активного коллектива показывает, что синергетика, междисциплинарность, стремление к синтезу очень близки к самой идее университета (Универсум – Вселенная!). Это прекрасно доказал глава школы Д.И. Трубецков, который многие годы возглавлял Саратовский государственный университет. В годы его ректорства ему удалось не только отстоять, сохранить и поддержать, но и начать, развить, решительно продвинуть вперед многое и в науке, и в образовании.

Синергетика – это не только новые идеи, модели, понятия, волнующий диалог с коллегами. Это новый взгляд на мир, «новое мировоззрение», как говорил Сергей Павлович. Поэтому в серии есть и работы, посвященные философским аспектам синергетики [2, 15]. Философский анализ – тонкая материя, требующая большой осторожности. За стремлением к всеобщности очень легко оторваться от реальной почвы науки и утратить видение тех границ, в пределах которых обобщения оправданны. Поэтому в одной из книг [15] С.П. Курдюмов и его ученица Е.Н. Князева, сотрудница Института философии РАН, опираются на твердую почву теории режимов с обострением.

В другой книге [2] Р.Г. Баранцев опирается на идеи *тринитарной методологии*. Тринитарность – методология, возникающая тогда, когда дуальные схемы «да – нет», «черное – белое» неприменимы. Эти идеи сформировались на основе оригинального междисциплинарного направления, которое в течение ряда лет развивалось в Ленинградском университете в рамках семинара по *семиодинамике* (дословно – «динамике смыслов»). Этим семинаром руководил крупный исследователь, специалист в области газовой динамики и асимптотического анализа, философ и мыслитель Рэм Георгиевич Баранцев. Оглядываясь назад, можно сказать, что семиодинамика – и предтеча синергетики и, вероятно, ее будущее.

Мы очень надеемся, что нашими основными читателями являются студенты и аспиранты. Ведь только тогда у синергетики есть будущее! Поэтому важную роль в нашей серии играют учебники. Среди них курс [16], который начал читаться в Московском физико-техническом институте около десятка лет назад на кафедре прикладной математики по инициативе ее заведующего Сергея Павловича Курдюмова. Старшекурсники физтеха умеют, а многие из них и любят решать хитрые задачи. И такие задачи есть в книге после каждой главы.

Однако, на мой взгляд, самый ясный, краткий и блистательный учебник, изданный в серии, принадлежит перу Юлия Александровича Данилова [23]. До этой книги трудно было представить, что нелинейную динамику можно изложить так ясно, гармонично и точно. Юлий Александрович в течение ряда лет читал лекции по синергетике на химическом факультете МГУ. Каждая из них была маленьким шедевром. У Ю.А. Данилова был редкий дар любоваться не только красотой научных идей, но и деятельностью и образами творцов науки.

Конечно, любой активно развивающийся подход, тем более такой, как синергетика, требует внимания к используемым математическим методам. Видимо, сейчас наиболее близки к духу синергетики асимптотические методы. Именно они отвечают императивам синергетики. По выражению Р.Г. Баранцева, это переход от предела к приближению, от бытия к становлению, от полноты к целостности. Генезис, сущность, области приложения «асимптотической математики» и даже биографии творцов «асимптотологии» прекрасно описаны в книге И.В. Андрианова, Р.Г. Баранцева, Л.И. Маневича [8].

Развиваясь, синергетика вбирает в себя методы и подходы, рождавшиеся вначале помимо ее проблем. Среди них *теория катастроф*. В самом деле, синергетика делает акцент на *возникновении новых качеств*, на скачках, которые могут иметь место в нелинейных системах даже при малом изменении параметров. Поэтому очень важным было издание в серии введения в теорию катастроф, написанного выдающимся математиком академиком В.И. Арнольдом [9].

Конечно, чтобы развитие шло вперед и наука не превращалась в канон, нужны книги, содержащие новые идеи, рассматривающие нерешенные, а поэтому и дискуссионные вопросы современной науки.

И в этой связи огромной удачей стала книга Д.И. Чернавского, в которой излагается развитая им *динамическая теория информации* [13]. В ней вводится и обосновывается принципиально важное понятие – *ценность информации*. Развитый подход позволяет совершенно по-новому взглянуть на многие проблемы – парадоксы квантовой механики и проблему необратимости, возникновение генетического кода и динамику исторических процессов, на сущность разных типов логики и процесс глобализации.

Чем будет заниматься синергетика завтра? Какие модели и идеи придут на смену тем, которые уже хорошо поняты и вошли в учебники? Что там, за поворотом? Анализу этих волнующих вопросов была посвящена первая книга, вышедшая в нашей серии [1].

Многие выдающиеся произведения начинают новый жанр – в литературе, музыке, живописи. Книга, начинающая жанр, есть и в серии. Это работа выдающегося английского математика Роджера Пенроуза [17]. Того самого, который придумал «плитки Пенроуза» – тип паркета, которым плоскость можно замостить *только* непериодическим образом. Эта книга находится на грани научной популяризации и описания крупного междисциплинарного проекта, направленного на то, чтобы раскрыть сущность сознания. Этот проект опирается на идеи теории вычислений и нелинейной динамики, нейробиологии и квантовой теории. По мысли Пенроуза, мышление невычислимо и не может в принципе полностью имитироваться компьютером, независимо от его параметров. Феномен сознания связан с гипотетическим квантово-механическим процессом, который Р. Пенроуз назвал «объективной редук-

цией» (в отличие от «субъективной», которая связана с актом наблюдения и превращает волну вероятности в частицу). В мире уже начались работы по экспериментальной проверке этой захватывающей теории.

Проблеме возникновения сознания и логики в ходе эволюции посвящена еще одна книга серии [20]. В ней профессор В.Г. Редько рассматривает одно из новых направлений синергетики – *искусственную жизнь*. В рамках этого подхода жизнь рассматривается прежде всего как информационный феномен, при этом первична информация и вторична «элементная база» жизни – белковые тела, кремниевые микрочипы или компьютерная программа.

Когда речь заходит о синергетике, целостности, системном подходе, то обычно очень скоро собеседники вспоминают о медицине и о таком чуде, как человеческий организм. Несколько лет назад широко обсуждался будущий российско-американский проект, связанный с «третьей медициной».

Первая – это та, которая для каждой болезни стремится найти свою пилюлю, прибор или технологию. Вторая – нетрадиционная, в которой есть набор средств и процедур, механизм действия которых не всегда понятен, но которые, тем не менее, часто помогают. Третья – «понимающая медицина» – должна опираться на целостный взгляд на организм, на междисциплинарные методы, на совместную работу физиков, врачей, биологов, математиков. Эта медицина должна была бы лечить больного, а не симптомы, а точнее, вернуть утраченное в ходе технологической гонки единство во взгляде на человека.

Проект не состоялся: видимо, научное, да и медицинское сообщества пока не готовы работать на уровне проблем завтрашнего, а не вчерашнего дня. Тем не менее одной из основ проекта должен был стать «метод диагностических игр», предложенный в научной школе академика И.М. Гельфанда [10, 11]. Суть этого подхода – выявить и использовать скрытое профессиональное знание лечащего врача. В самом деле, судя по учебникам медицинских вузов, постановка диагноза требует учета многих сотен параметров, многочисленных результатов анализов. Но психология говорит, что человек в состоянии принять во внимание не более 5–7 факторов. Но каковы они? В ходе работы врача, с накоплением опыта происходит *самоорганизация* в пространстве признаков, симптомов, клинических случаев. Именно в результате этой самоорганизации и выявляются параметры порядка, те самые 5–7 переменных, на основе которых и принимает решение опытный специалист. Этому подходу (у которого, вероятно, не только славное прошлое, но и большое будущее) посвящены две книги серии.

Ученые могут сказать, *что* может быть создано, а технологи отвечают на вопрос, *как* это следует делать.

В серии вышли две книги, посвященные технологическим проблемам. В первой [22] рассматривается *сверхпластичность* – удивительная технология, родившаяся в недрах оборонно-промышленного комплекса. Само явление состоит в том, что если нагревать различные материалы примерно до 0.8 температуры плавления и медленно растягивать образцы, то результат поражает воображение. Например, обычный кирпич можно растянуть более чем на ...1000%, то есть в 10 раз. При этом поверхность таких материалов обладает уникальными свойствами, на ней нет дефектов, которые возникли бы при резании, шлифовке, других способах обработки. Однако все это дорого. Настолько дорого, что еще недавно применение таких технологий

было оправдано лишь при создании конструкций, которым предстояло работать в экстремальных условиях – в космосе или океанских глубинах. И соответствующие производства у себя смогли развернуть только Советский Союз и Япония. Сверхпластичность самым тесным образом связана с синергетикой. Материал ломается, когда из микротрещин возникает трещина, своеобразная диссипативная структура. И усилия следует вкладывать, чтобы в этой нелинейной среде структуры *не возникали*.

Мир готовится к технологическому рывку, который, вероятно, произойдет в ближайшее десятилетие. Это переход к использованию процессов, идущих на *нанометровых масштабах* (1 нм = 10^{-9} м). Это возможность продлить продолжительность активной жизни людей на десятилетия, новые материалы, которые в несколько раз прочнее стали и в несколько раз легче ее, это сенсоры, системы мониторинга, о которых можно только мечтать. Секрет в том, что здесь структуры создаются на уровне отдельных атомов, и это дает удивительные свойства (именно примеси, дефекты, другие несовершенства на атомном уровне и определяют параметры используемых сейчас материалов).

Туннельный микроскоп позволяет оперировать с отдельными атомами. Но это совсем не то, что нужно для массового производства нанотехнологических материалов и других структур. Поэтому огромные надежды возлагаются на *самоорганизацию* и *самоформирование* на нанометровых масштабах, то есть на синергетику. Книга И.П. Суздалева [24], вероятно, первая монография в России, посвященная таким интереснейшим задачам. Эти работы ведутся в МГУ им. М.В. Ломоносова на факультете наук о материалах в научной школе академика Юрия Дмитриевича Третьякова – одного из членов нашей редакционной коллегии. В этой научной школе регулярно проводят конференции, посвященные И.Р. Пригожину. На них очень приятно выступать и видеть, во-первых, что очень высок интерес молодежи к этим проблемам, и, во-вторых, что во многих случаях синергетические идеи здесь получают конкретное экспериментальное воплощение.

Однако, наверно, самые важные проблемы связаны не с тем, что и как можно сделать, а с целями, стратегиями и желаемым образом будущего. Это, безусловно, является одной из важнейших междисциплинарных задач, и поэтому очень радостно, что и здесь синергетике есть что сказать. Книга «Будущее России в зеркале синергетики» [25] написана на основе материалов большой конференции «Стратегии динамического развития России. Единство управления и самоорганизации», которая проводилась в Российской академии государственной службы при Президенте РФ. В этой конференции приняло участие более 1 000 ведущих исследователей из России и зарубежья, использующих идеи и представления синергетики для описания, моделирования и прогноза социальных, экономических, политических, культурных процессов. В конференции приняли участие представители немецкой синергетической школы – Герман Хакен, Клаус Майнцер, Вернер Эбелинг.

Путь России в будущее – одна из ключевых проблем, которые стоят и перед исследователями и перед обществом в целом. К счастью, во многом благодаря активности нашего синергетического сообщества об этом начали говорить с экрана. Я имею в виду передачу «2030», которую ведет Александр Гордон и которая идет уже несколько месяцев со вторника на среду по первому каналу. Может быть, за этим обсуждением последуют конкретные научные работы по стратегическому прогнозу. Может быть, их результаты со временем будут использоваться в контуре управле-

ния страной... Может быть, в общественном сознании появится мечта, которая дает большие силы. Мечта всегда очень много значила для России.

Книга «Будущее России в зеркале синергетики» принадлежит сразу двум сериям книг издательства УРСС – и синергетической, о которой идет речь, и серии «Будущая Россия». Хочется надеяться, что следующих книг в ней придется ждать не очень долго – будущее слишком важная вещь.

Оглядываясь на первые 25 книг, видишь, что пропасть между тем, что получилось, и тем, что могло быть сделано, велика. Еще больше дистанция между получившимся и необходимым сейчас в России. А значит, есть огромное поле для деятельности! И все же я думаю, что Сергея Павловича очень порадовало бы это воплощение его мечты.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Поступила в редакцию 27.03.2006

Малинецкий Георгий Геннадьевич – родился в Уфе (1956), окончил физический факультет МГУ (1979), защитил кандидатскую диссертацию на тему «Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных средах» (1982) и докторскую диссертацию на тему «Диффузионный хаос и новые типы упорядоченности в нелинейных средах» (1990) в Институте прикладной математики РАН. В настоящее время работает заместителем директора ИПМ, а также профессором кафедры прикладной математики МФТИ. Автор большого количества статей в области исследования хаоса и нелинейных явлений, а также учебника «Структуры, хаос, вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику». E-mail: gmalin@spp.keldysh.ru

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Обложка художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, Н.Н. Васевой
в пакете L^AT_EX

Подписка на 2006 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты и журналы», индекс 73498
и Саратовским государственным университетом
по заключению договора между Подписчиком
(юридическим и физическим лицом) и Издателем

Стоимость подписки на 2006 год 450 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail:and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 01.05.06. Подписано к печати 31.05.06
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 10,85(7,75). Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 200. Заказ 377

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2006
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2006