

*Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,  
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций  
на соискание ученой степени доктора наук»*

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Известия высших учебных заведений  
**ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**  
*научно-технический журнал*

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 23, № 4, 2015, Саратов

---

**С О Д Е Р Ж А Н И Е**

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**

- Мустафин А. Т.* Синхронные колебания популяций двух видов, связанных прямой конкуренцией ..... 3
- Землянников А. С., Сысоев И. В.* Диагностика и коррекция систематической ошибки при оценке энтропии переноса методом  $K$ -ближайших соседей 24

**БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ**

- Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Станкевич Н. В.* Четырехмерная система с тором-аттрактором, возникающим при седло-узловой бифуркации предельных циклов, в контексте семейства катастроф голубого неба ..... 32

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА**

- Павлов Е. А., Жужома Е. В., Осипов Г. В.* Альтернативные способы контроля и подавления хаоса спиральных волн в модели сердечной мышцы ..... 40
- Касаткин Д. В., Некоркин В. И.* Динамика сети взаимодействующих фазовых осцилляторов с динамическими связями ..... 58

**НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ**

- Трубецков Д. И., Краснова Г. М.* Теория предгенерационного режима ЛОВ в рамках двумерной модели ..... 71

C O N T E N T S

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Mustafin A. T.* Synchronous oscillations of two populations of different species linked via interspecific interference competition ..... 3
- Zemlyannikov A. S., Sysoev I. V.* Diagnostics and correction of systematic error while estimating transfer entropy with  $K$ -nearest neighbours method ..... 24

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Stankevich N. V.* Four-dimensional system with torus attractor birth via saddle-node bifurcation of limit cycles in context of family of blue sky catastrophes ..... 32

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

- Pavlov E. A., Zhuzhoma E. V., Osipov G. V.* Alternative methods for spiral wave chaos control and suppressing in cardiac models ..... 40
- Kasatkin D. V., Nekorkin V. I.* Dynamics of a network of interacting phase oscillators with dynamic couplings ..... 58

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Trubetskov D. I., Krasnova G. M.* Theory of pregeneration mode in BWO in the frame of two-dimensional model ..... 71



## СИНХРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОПУЛЯЦИЙ ДВУХ ВИДОВ, СВЯЗАННЫХ ПРЯМОЙ КОНКУРЕНЦИЕЙ

*А. Т. Мустафин*

Казахский национальный исследовательский технический университет

Исследована модель конкуренции двух популяций видов, каждый из которых специализируется на своем ресурсе с постоянным притоком. Основной особенностью модели является предположение быстрой динамики потребителей и медленной – ресурсов. Виды взаимно подавляют друг друга так, что удельные потери каждого пропорциональны численности другого. Учтено плотностное самоограничение видов. Ресурсы не взаимодействуют друг с другом. В несвязанном состоянии обе популяции находятся в покое. Методом многих масштабов показано, что при сильной конкурентной связи в системе возникает бистабильность и гистерезис, а при слабой – релаксационные автоколебания популяций в противофазе.

*Ключевые слова:* Потребитель–ресурс, хищник–жертва, конкуренция, релаксационные колебания, синхронизация.

### Введение

В последнее время активно ведутся прикладные исследования синхронизации связанных нелинейных осцилляторов самой различной природы [1–5]. При этом обычно предполагается, что в несвязанном состоянии каждая из синхронизируемых единиц совершает незатухающие колебания. Однако не меньший интерес представляют собой системы, где локальная связь между индивидуально покоящимися единицами служит причиной самого возникновения глобальных колебаний, а не только средством взаимной подстройки частот и фаз.

Еще в начале 1970-х годов Смейл [6] построил противоречащий привычным представлениям пример абстрактной математической модели биологической клетки, в метаболизме которой участвуют четыре вещества с текущими концентрациями  $x_1, \dots, x_4$ . По условию, система соответствующих дифференциальных уравнений химической кинетики  $dx/dt = \mathbf{R}(x)$ , где  $x = (x_1, \dots, x_4)$ , обладает глобальным равновесием. Изолированная клетка «мертва» в том смысле, что концентрации всех метаболитов всегда стремятся к своим стационарным уровням. Однако, когда две такие клетки приводятся в контакт посредством включения линейных диффузионных членов вида  $M(x_2 - x_1)$ , где  $M$  – диагональная матрица с элементами  $\mu_k \delta_{kl}$ ,

то, как показывает анализ, в результирующей системе из восьми уравнений возникает глобально устойчивый предельный цикл. Концентрации реагентов начинают осциллировать, и система «оживает». По словам самого Смейла: «Есть нечто парадоксальное в этом примере. Берутся две мертвые (математически мертвые) клетки, связанные диффузионным процессом, который сам по себе также имеет тенденцию уравнивать концентрации. И тем не менее в присутствии связи система бесконечно пульсирует» [6, с. 282].

Кинетические уравнения, фигурирующие в модели Смейла, слишком общи, чтобы претендовать на описание какого-либо конкретного процесса. Но его пионерская работа позднее инициировала появление ряда моделей с биологически реалистичными механизмами, по которым связь между одинаковыми неосциллирующими клетками может приводить к синхронным колебаниям. В большинстве своем это модели электрически связанных клеток с возбудимой мембраной [7–9]. Саттари и Чуа [9] предложили для явления термин «пробуждение» (awakening).

Предметом настоящей статьи является изучение индуцированных связью колебаний в системе двух экологических пар потребитель–ресурс. Выбор связанных уравнений потребитель–ресурс мотивируется повсеместностью и важностью отношений такого типа.

Модели потребитель–ресурс служат строительными блоками при математическом описании и моделировании экосистем. В зависимости от конкретной природы потребителя и ресурса их отношения могут принимать формы хищник–жертва, травоядное–растение, или паразит–хозяин [10]. Однако область применения этих моделей простирается далеко за пределы собственно экологии, и их можно встретить всюду, где только имеет смысл говорить об отношениях выигрыш–проигрыш. В широком понимании ресурс – это любая субстанция, которая при увеличении ее доступности в окружающей среде способствует повышению скорости роста популяции потребителя. При этом ресурс непременно расходуется, что влечет за собой уменьшение его доступности. При внимательном анализе модели типа потребитель–ресурс можно обнаружить в таких областях, как эпидемиология (восприимчивые и инфицированные [11, ch. 10]), лазерная динамика (фотоны и электроны [12, ch. 6]), экономика труда (доля труда и уровень занятости [13, с. 52]), теоретическая иммунология (антигены и В-лимфоциты [14, с. 543]), кинетика цепных химических реакций (молекулы липидов и свободные радикалы [15]), и многих других.

Насколько нам известно, примеры перевода в колебательный режим покоящихся популяций за счет установления связи между ними до сих пор не рассматривались. В настоящей работе показано, что взаимодействие в виде взаимного подавления двух потребителей по типу эффекта «тесноты», формализованного перекрестными билинейными членами в уравнениях роста, способно вызвать в системе периодические синхронные колебания популяций.

## 1. Модель

Среди всех типов отношений между особями, принадлежащими одному виду (внутривидовые взаимодействия) или различным видам (межвидовые взаимодействия) одного трофического уровня, наиболее часто наблюдается конкуренция. В широком смысле слова конкуренция имеет место всякий раз, когда один вид (особь) оказывает угнетающий эффект на рост другого вида (особи). Под угнетающим влиянием понимается увеличение смертности или уменьшение рождаемости.

Рассмотрим ставшие уже классическими уравнения потребитель–ресурс, предложенные Макартуром [16, 17],

$$dx_j/dt = [r_j(1 - x_j/K_j) - \sum_{i=1}^n c_{ij}y_i]x_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1a)$$

$$dy_i/dt = \left( \sum_{j=1}^m c_{ij}w_jx_j - b_i \right) y_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1б)$$

Здесь  $t$  – время;  $x_j$  – общая биомасса  $j$ -го ресурса (жертвы);  $y_i$  – общая биомасса  $i$ -го потребителя (хищника);  $r_j$  – удельная скорость роста  $j$ -го ресурса;  $K_j$  – емкость среды (carrying capacity) для  $j$ -го ресурса;  $c_{ij}$  – скорость утилизации единицы  $j$ -го ресурса каждой особью  $i$ -й популяции потребителей;  $w_j^{-1}$  – экономический коэффициент, показывающий, какая доля поглощенного ресурса с номером  $j$  идет на построение биомассы  $i$ -го потребителя;  $b_i$  – частота потерь  $i$ -го потребителя вследствие естественной смертности или эмиграции. Все параметры, входящие в (1), неотрицательны.

Макартур [16] предположил, что динамика ресурсов намного быстрее динамики потребителей, и это позволило заменить величины  $x_j$  в (1б) их квазистационарными значениями, полученными приравниванием правых частей (1a) нулю. В результате ему удалось свести «медленную» подсистему уравнений (1б) к известной экологической модели Лотки–Вольтерры–Гаузе (ЛВГ) [18]

$$dy_i/dt = \left( k_i - \sum_{s=1}^n a_{is}y_s \right) y_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где  $a_{is} = \sum_{j=1}^m c_{ij}c_{sj}(w_jK_j/r_j)$  и  $k_i = \sum_{j=1}^m c_{ij}w_jK_j - b_i$  ( $i, s = 1, \dots, n$ ). Ресурсы явно не входят в уравнения ЛВГ, а параметризуются емкостями среды.

Недавно было показано, что подобную асимптотическую редукцию можно провести и для модели конкуренции среди питающихся постоянно поступающим общим ресурсом потребителей с непрерывно распределенными генетическими признаками [19].

Модель потребитель–ресурс (1) предполагает, что конкуренция между видами чисто трофическая: особи и популяции взаимодействуют не напрямую, а через посредство потребления (или присвоения) общего ресурса, находящегося в дефиците. Напротив, модель ЛВГ (2) описывает конкуренцию как прямую борьбу (direct interference), выражающуюся, например, в агрессивном поведении, при котором потребители (одного или различных видов) наносят друг другу ущерб. В связи с этим нужно подчеркнуть, что макартуровская редукция отнюдь не объявляет прямую конкуренцию неким производным понятием от «более фундаментальной» трофической конкуренции. Результат Макартура следует трактовать так, что при относительно медленной динамике потребителей трофическая конкуренция эффективно неотличима от прямой.

Большинство экологических моделей игнорируют эффекты внутри- и межвидовой прямой конкуренции среди потребителей. Действительно, эмпирические данные, подобные описанным в работе [20], указывают на то, что прямая конкуренция намного слабее трофической. Тем не менее, работы в пользу явного учета прямой конкуренции доказывают, что включение само- и взаимоограничительных членов в уравнения роста потребителей может обеспечить устойчивое сосуществование многих видов на небольшом количестве ресурсов [21], [22, с. 54], [23].

Кроме того, если сделать обратное (по отношению к макартуровскому) предположение, что количества ресурсов изменяются намного медленнее по сравнению с численностями потребителей, то, как мы увидим, учет членов прямой конкуренции в подсистеме (1б) обязателен для сохранения уравнениями биологического смысла.

Рассмотрим следующую модификацию уравнений (1), описывающую взаимодействие двух пар потребитель–ресурс:

$$dx_1/dt = p_1 - (c_1y_1 + q_1)x_1, \quad (3a)$$

$$dx_2/dt = p_2 - (c_2y_2 + q_2)x_2, \quad (3б)$$

$$dy_1/dt = (c_1w_1x_1 - b_1 - d_1y_1 - h_2y_2)y_1, \quad (3в)$$

$$dy_2/dt = (c_2w_2x_2 - b_2 - d_2y_2 - h_1y_1)y_2. \quad (3г)$$

Вместо самовоспроизводящегося ресурса, присутствующего в уравнениях Макартура, приток которого регулируется логистическим законом, в нашей модели принят «равномерный» (equable) (по Стюарту и Левину [24]) способ эксплуатации ресурса, подобный тому, что имеет место в хемостате [25]. Согласно уравнениям (3а) и (3б),  $j$ -й ресурс ( $j = 1, 2$ ) с постоянной скоростью  $p_j$  поступает в определенный объем, где потребляется, а неиспользованный ресурс покидает объем с удельной скоростью  $q_j$ . В природных условиях равномерный способ эксплуатации ресурса можно найти на первом трофическом уровне экосистем среди автотрофов, потребляющих абиотические субстраты.

Предполагается линейность функционального отклика потребителей на ресурс. Задание нелинейных (и даже неодинаковых) функциональных откликов представляется преждевременным усложнением модели. Как показали Абрамс и Хольт [26], расширение базовой модели Макартура в таком направлении может привести к интересным режимам поведения системы, включая сосуществование видов путем периодического чередования. Однако связанные колебания в их модели скорее вынужденные, чем «пробужденные», потому что одна из двух популяций способна осциллировать в свободном состоянии.

Что касается прочих параметров нашей модели, константа  $d_i$  ( $i = 1, 2$ ) в (3в) и (3г) служит мерой прямой внутривидовой конкуренции особей в  $i$ -й популяции потребителей, которая выражается дополнительными потерями  $d_i y_i$  в расчете на одну особь; константа  $h_s$  ( $s = 1, 2; s \neq i$ ) характеризует степень подавления  $i$ -го потребителя  $s$ -м потребителем при прямой межвидовой конкуренции, в результате которой  $i$ -й вид несет дополнительные потери  $h_s y_s$  в расчете на одну особь.

Уравнения (3) содержат два важных допущения. Во-первых, считается, что ресурсы не взаимодействуют между собой. На более высоких трофических уровнях, однако, ресурсы могут взаимодействовать. На возможность конкуренции среди ресурсов впервые указал Левин [27], и это эмпирически подтвердил Линч [28]. С тех пор был опубликован целый ряд теоретических работ по системам два хищника–две жертвы с прямой конкуренцией между самовоспроизводящимися видами жертв [21, 29, 30].

Как видно из (3а) и (3б), прямой внутривидовой конкуренции в популяциях ресурсов также нет (в отличие от модели Макартура). Тем не менее, проточность

системы обеспечивает конечность концентрации ресурсов даже в отсутствие потребителей.

Во-вторых, виды в системе (3) могут взаимодействовать только путем прямой конкуренции. Трофическая конкуренция между ними невозможна, поскольку каждый вид специализируется на своем ресурсе. В этом еще одно отличие нашей модели от моделей чисто трофической конкуренции как с логистическим [31], так и с равномерным [24, 32] режимами питания, в которых каждый хищник способен поедать жертвы обоих типов.

В модели также учтена возможность прямой внутривидовой конкуренции у потребителей. Благодаря этому предположению размер популяции каждого из потребителей остается конечным даже при постоянстве концентраций ресурсов.

Новизна модели (3) в том, что в ней постулирована обратная (по сравнению с классическими уравнениями потребитель–ресурс Макарута) иерархия характерных времен в предположении относительно быстрой динамики потребителей и медленной динамики ресурсов. Кроме того, в рамках этого допущения акцентируется важность механизмов прямой конкуренции.

Отличительные особенности упомянутых выше версий базовой модели Макарута, включая и рассматриваемую нами модель, представлены графически на рис. 1.

После замены переменных и параметров по формулам  $u_1 = c_1 w_1 x_1 / b_1 - 1$ ,  $u_2 = c_2 w_2 x_2 / b_2 - 1$ ,  $v_1 = c_1 y_1 / q_1$ ,  $v_2 = c_2 y_2 / q_2$ ,  $\gamma_1 = c_1 p_1 w_1 / (b_1 q_1) - 1$ ,  $\gamma_2 = c_2 p_2 w_2 / (b_2 q_2) - 1$ ,  $\delta_1 = d_1 q_1 / (b_1 c_1)$ ,  $\delta_2 = d_2 q_2 / (b_2 c_2)$ ,  $\kappa_1 = h_1 q_1 / (b_2 c_1)$ ,  $\kappa_2 = h_2 q_2 / (b_1 c_2)$ ,  $\beta = q_1 / q_2$ ,  $\varepsilon_1 = q_1 / b_1$ ,  $\varepsilon_2 = q_2 / b_2$  и  $t' = q_1 t$ , уравнения (3) принимают безразмерный вид

$$\begin{aligned} du_1/dt' &= \gamma_1 - u_1 v_1 - u_1 - v_1, \\ \beta du_2/dt' &= \gamma_2 - u_2 v_2 - u_2 - v_2, \\ \varepsilon_1 dv_1/dt' &= (u_1 - \delta_1 v_1 - \kappa_2 v_2) v_1, \\ \varepsilon_2 dv_2/dt' &= (u_2 - \delta_2 v_2 - \kappa_1 v_1) v_2. \end{aligned} \tag{4}$$

В системе (4) фигурирует безразмерное «медленное» время  $t'$ , измеряемое в единицах времени жизни ресурса  $1/q_1$ , как это определено выбранным преобразованием масштабов.

Параметры  $\beta^{-1}$ ,  $\varepsilon_1^{-1}$  и  $\varepsilon_2^{-1}$  характеризуют быстроту динамики переменных  $u_2$ ,  $v_1$  и  $v_2$  по отношению к переменной  $u_1$ . Предполагается, что  $\beta = \mathcal{O}(1)$ ,  $\varepsilon_{1,2} \ll 1$  и  $\delta_{1,2} \ll 1$ .

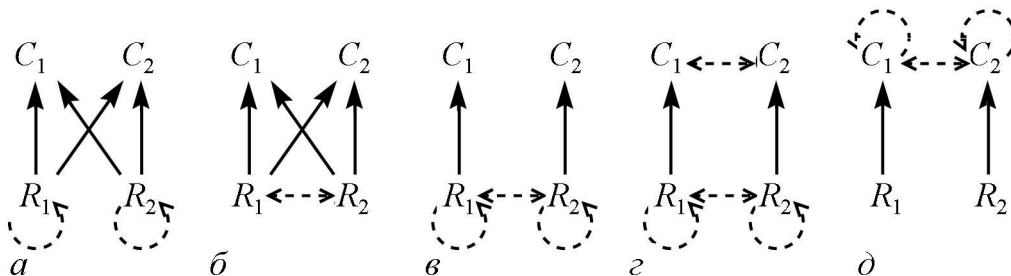


Рис. 1. Вариации на тему модели Макарута у различных авторов.  $C_1$  и  $C_2$  – потребители,  $R_1$  и  $R_2$  – ресурсы. Сплошными стрелками обозначены отношения хищничества, штриховыми – прямой конкуренции. а – [16, 31]; б – [27, 29]; в – [21, 30]; г – [21]; д – настоящая работа

Для простоты, но не в ущерб общности полагаем  $\beta = 1$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  и, кроме того, опускаем штрихи при  $t$ . В то же время оставляем притоки ресурсов  $\gamma_1, \gamma_2$  и константы связи  $\kappa_1, \kappa_2$  в качестве свободных контрольных параметров модели. Окончательно уравнения модели принимают вид

$$\begin{aligned} du_1/dt &= \gamma_1 - (u_1 + 1)v_1 - u_1, \\ du_2/dt &= \gamma_2 - (u_2 + 1)v_2 - u_2, \\ \varepsilon dv_1/dt &= (u_1 - \delta v_1 - \kappa_2 v_2)v_1, \\ \varepsilon dv_2/dt &= (u_2 - \delta v_2 - \kappa_1 v_1)v_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Нужно заметить, что переменная  $v_i$ , будучи пропорциональной своему размерному прототипу  $y_i$ , непосредственно представляет плотность популяции  $i$ -го потребителя и всегда неотрицательна. Переменная  $u_i$ , однако, не есть относительное содержание  $i$ -го ресурса в системе в подлинном смысле слова. Она по существу является аффинным преобразованием  $x_i$ , введенным в целях математического удобства. В отличие от чисто линейного преобразования, аффинное отображение не сохраняет нулевую точку, так что в уравнениях (5) действительно нулевому уровню  $i$ -го ресурса соответствует  $u_i = -1$ . Тем не менее, в дальнейшем для краткости будем называть  $u_i$  «ресурсом».

## 2. Анализ модели

**2.1. Изолированная система потребитель–ресурс.** При  $\kappa_{1,2} = 0$  потребители независимы. Несвязанная пара потребитель–ресурс описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} du/dt &= \gamma - (u + 1)v - u, \\ \varepsilon dv/dt &= (u - \delta v)v, \end{aligned} \quad (6)$$

которая имеет два неотрицательных равновесия

$$\bar{u} = \gamma, \quad \bar{v} = 0; \quad (7a)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{2}[\sqrt{1 + (4\gamma + 2 + \delta)\delta} - 1 - \delta] = \gamma\delta + \mathcal{O}(\delta^2),$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2\delta}[\sqrt{1 + (4\gamma + 2 + \delta)\delta} - 1 - \delta] = \gamma - \gamma(\gamma + 1)\delta + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (7b)$$

Точка (7a) всегда седловая. Точка (7b) – устойчивый узел/фокус. В отдельно взятой паре производитель–ресурс (6), таким образом, всегда устанавливается единственное ненулевое стационарное состояние. Анализ собственных чисел показывает, что фокус имеет место (в предположении малости  $\varepsilon$  и  $\delta$ ) при

$$\delta = o(\varepsilon^{1/2}). \quad (8)$$

Вспоминая смысл параметра  $\delta$ , можно сделать вывод, что усиление внутривидовой конкуренции способствует демпфированию собственных затухающих колебаний в системе потребитель–ресурс.



**2.2. Связанные популяции: устойчивость равновесий.** В дальнейшем будем различать два типа связи: сильную,  $\kappa_{1,2} > 1$ , и слабую,  $\kappa_{1,2} < 1$ .

Биологический смысл имеют те стационарные состояния системы (5), для которых  $\bar{v}_{1,2} \geq 0$ . Среди них могут оказаться как «смешанные», где виды сосуществуют, так и «чистые», в каждом из которых ненулевую численность имеет только один из видов. Будем обозначать «смешанное» равновесие символом  $F_{12} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ , где индексы при  $F$  указывают на соответствующих потребителях. Отсутствие какого-либо индекса в аналогичном обозначении «чистого» равновесия означает, что этот потребитель вымер. Таким образом,  $F_1 = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_1, 0)$  и  $F_2 = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, 0, \bar{v}_2)$  обозначают «чистые» стационарные состояния с доминированием соответственно первого и второго вида, тогда как  $F = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, 0, 0)$  обозначает равновесие, в котором нет ни одного из потребителей.

Модель (5) имеет четыре биологически осмысленных стационарных состояния. В нулевом порядке по  $\delta$  имеем

$$\begin{aligned}
 F & : \bar{u}_1 = \gamma_1, \quad \bar{u}_2 = \gamma_2, \quad \bar{v}_1 = 0, \quad \bar{v}_2 = 0; \\
 F_1 & : \bar{u}_1 = 0, \quad \bar{u}_2 = \gamma_2, \quad \bar{v}_1 = \gamma_1, \quad \bar{v}_2 = 0; \\
 F_2 & : \bar{u}_1 = \gamma_1, \quad \bar{u}_2 = 0, \quad \bar{v}_1 = 0, \quad \bar{v}_2 = \gamma_2; \\
 F_{12} & : \bar{u}_1 = \frac{\kappa_1\gamma_1 - \kappa_2\gamma_2 - \kappa_1\kappa_2 + 1 \pm R}{2(\kappa_1 - 1)}, \\
 & \quad \bar{u}_2 = \frac{-\kappa_1\gamma_1 + \kappa_2\gamma_2 - \kappa_1\kappa_2 + 1 \pm R}{2(\kappa_2 - 1)}, \\
 & \quad \bar{v}_1 = \bar{u}_2/\kappa_1, \quad \bar{v}_2 = \bar{u}_1/\kappa_2,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где  $R = [(\kappa_1\gamma_1 - \kappa_2\gamma_2 - \kappa_1\kappa_2 + 1)^2 + 4\kappa_2(\kappa_1 - 1)(\kappa_1\gamma_1 - \gamma_2)]^{1/2}$ . При сильной связи в формулах для  $F_{12}$  в (9) перед  $R$  берется знак «плюс», при слабой – знак «минус».

Условия существования и устойчивости равновесий (9) сведены в таблице.

Таблица

Условия существования и устойчивости неотрицательных стационарных состояний (9) системы (5)

Равновесие	Существование	Устойчивость
$F$	Всегда	Никогда
$F_1$	Всегда	$\gamma_2/\gamma_1 < \kappa_1$
$F_2$	Всегда	$\gamma_2/\gamma_1 > 1/\kappa_2$
$F_{12}$	$1/\kappa_2 < \gamma_2/\gamma_1 < \kappa_1$ при $\kappa_{1,2} > 1$ (сильная связь) $\kappa_1 < \gamma_2/\gamma_1 < 1/\kappa_2$ при $\kappa_{1,2} < 1$ (слабая связь)	Никогда $\kappa_{1,2} = o(\varepsilon^{1/2})$

**2.3. Сильная связь: бистабильность и гистерезис.** Как видно из таблицы, сильная связь между популяциями делает возможным неединственность «чистых» стационарных состояний. Когда  $F_1$  и  $F_2$  одновременно устойчивы при неустойчивом «смешанном» равновесии  $F_{12}$ , в системе (5) может наблюдаться гистерезис.

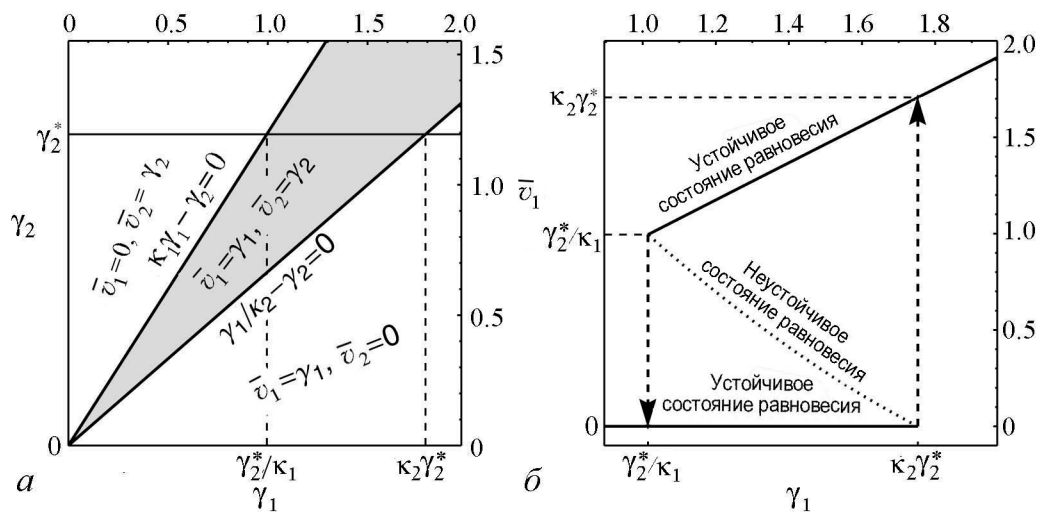


Рис. 2. Гистерезис в системе два потребителя–два ресурса (5). Эффект имеет место при сильной связи между потребителями:  $\kappa_{1,2} > 1$ . *a* – Параметрическая плоскость притоков ресурсов  $(\gamma_1, \gamma_2)$ . Вид 1 доминирует ниже линии  $\gamma_1 - \kappa_2\gamma_2 = 0$ , вид 2 – выше линии  $\kappa_1\gamma_1 - \gamma_2 = 0$ . Оба «чистых» стационарных состояния одновременно устойчивы в растворе угла, образованного указанными линиями и отмеченного серым цветом. Какой из видов доминирует в области бистабильности – зависит от начальных условий. *б* – Стационарная численность вида 1 в зависимости от притока потребляемого им ресурса. Значения констант связи:  $\kappa_1 = 1.2$ ,  $\kappa_2 = 1.5$

Рассмотрим параметрическую плоскость притоков ресурсов  $(\gamma_1, \gamma_2)$  (рис. 2, *a*). Допустим, в условиях сильной связи приток ресурса 2 поддерживается на постоянном уровне  $\gamma_2 = \gamma_2^*$ , в то время как приток ресурса 1,  $\gamma_1$ , постепенно увеличивается от некоторого значения, меньшего  $\gamma_2^*/\kappa_1$ . Вначале в системе доминирует вид 2: состояние  $F_1$  неустойчиво,  $F_2$  устойчиво, а  $F_{12}$  не существует. Внутри интервала  $\gamma_2^*/\kappa_1 < \gamma_1 < \kappa_2\gamma_2^*$  стационарное состояние  $F_1$  становится устойчивым, но оно пусто. Одновременно появляется и «смешанное» состояние  $F_{12}$ , но оно неустойчиво. Таким образом, вид 2 сохраняет доминирование. По достижении притоком ресурса 1 величины  $\kappa_2\gamma_2^*$  со стороны меньших значений стационарное состояние  $F_2$  внезапно теряет устойчивость в пользу  $F_1$ . Вид 2 вымирает; доминирование переходит к виду 1. Если теперь начать уменьшать приток  $\gamma_1$ , система будет оставаться в равновесии  $F_1$  с доминированием вида 1, пока скорость поступления ресурса 1 не упадет до критического уровня  $\gamma_2^*/\kappa_1$ , ниже которого состояние  $F_1$  не может быть устойчивым. После этого произойдет обратный скачок в равновесие  $F_2$ . Иными словами, при движении параметра  $\gamma_1$  вправо вдоль линии  $\gamma_2 = \gamma_2^*$  имеет место резкое переключение доминирования от вида 2 к виду 1 в точке  $\kappa_2\gamma_2^*$ , тогда как при обратном ходе переключение от вида 1 к виду 2 происходит в точке  $\gamma_2^*/\kappa_1$ . На рис. 2, *б* показан отклик стационарной численности вида 1 на медленное изменение притока собственного ресурса. Гистерезис возможен благодаря бистабильности обоих «чистых» состояний и неустойчивости «смешанного» состояния при  $\gamma_1 \in (\gamma_2^*/\kappa_1, \kappa_2\gamma_2^*)$ . В терминах электроники это триггер.

**2.4. Слабая связь: релаксационные колебания.** Асимптотическое условие устойчивости «смешанного» равновесия  $F_{12}$  при слабой связи, приведенное в таблице, следует из критерия Рауса–Гурвица. Если оно нарушается, то два из четырех корней соответствующего характеристического уравнения будут комплексно сопряженными с положительной действительной частью. Практически, ввиду малости

параметра  $\varepsilon$  условие  $\kappa_{1,2} = o(\varepsilon^{1/2})$  нарушено для всех, сколько-нибудь биологически значимых связей – даже очень слабых.

Согласно таблице, существование  $F_{12}$  несовместимо с устойчивостью обоих «чистых» равновесий  $F_1$  и  $F_2$ . В этих условиях в системе (5) имеются четыре неотрицательных стационарных состояния, и все они неустойчивы. Поскольку неустойчивость развивается путем колебаний с растущей амплитудой, то следует ожидать появления в четырехмерном фазовом пространстве системы (5) предельного цикла.

С прикладной точки зрения, область исчезающе слабых связей вблизи бифуркации Андронова–Хопфа, где колебания квазилинейны и квазигармоничны, намного менее интересна по сравнению с областью не слишком слабых связей, соответствующих развитым и существенно нелинейным колебаниям.

Наше предположение  $0 < \varepsilon \ll 1$  означает, что система (5) – сингулярно возмущенная. Медленными переменными являются ресурсы  $u_1$  и  $u_2$ , а быстрыми – потребители  $v_1$  и  $v_2$ . Общеупотребительным подходом к анализу подобных систем служит метод многих масштабов [33], в котором быстрые переменные адиабатически исключаются. Правомочность адиабатического исключения устанавливается в каждом конкретном случае. В частности, известная теорема Тихонова [34] требует устойчивости квазистационарных состояний быстрых уравнений.

Для расщепления полной системы (5) на быструю и медленную подсистемы введем быстрое время  $\tau = t/\varepsilon$ . Заменяя в (5)  $t$  на  $\tau\varepsilon$  и полагая  $\varepsilon = 0$ , получаем быструю подсистему

$$\begin{aligned} du_1/d\tau &= du_2/d\tau = 0, \\ dv_1/d\tau &= (u_1 - \delta v_1 - \kappa_2 v_2)v_1, \\ dv_2/d\tau &= (u_2 - \delta v_2 - \kappa_1 v_1)v_2, \end{aligned} \quad (10)$$

в которой переменные  $u_1$  и  $u_2$  заменены их начальными значениями и рассматриваются как параметры. Она дает внутреннее решение, справедливое для  $t = \mathcal{O}(\varepsilon)$ .

Полагая  $\varepsilon = 0$  в (5), получаем медленную подсистему

$$du_1/dt = \gamma_1 - (u_1 + 1)v_1 - u_1, \quad (11a)$$

$$du_2/dt = \gamma_2 - (u_2 + 1)v_2 - u_2, \quad (11б)$$

$$0 = (u_1 - \delta v_1 - \kappa_2 v_2)v_1, \quad (11в)$$

$$0 = (u_2 - \delta v_2 - \kappa_1 v_1)v_2, \quad (11г)$$

которая порождает внешнее решение, пригодное для  $t = \mathcal{O}(1)$ . В сингулярном пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  подсистема (11) определяет медленный поток на поверхности (медленном многообразии), задаваемой уравнениями (11в) и (11г). Внешнее решение справедливо для тех значений  $u_1$  и  $u_2$ , при которых квазистационарные состояния быстрой подсистемы (10) устойчивы.

Ожидается, что динамика полной системы (5) в четырехмерном фазовом пространстве  $(u_1, u_2, v_1, v_2)$  состоит из двух типов движений: быстрой «посадки» на медленное многообразие и медленного скольжения по нему до точки отрыва (где решение исчезает). Затем изображающая точка может перескочить на другую ветвь решения уравнений (11в) и (11г).

Таким образом, необходимо отыскивать все квазистационарные состояния быстрой подсистемы (10), нанести области их устойчивости на фазовую плоскость медленных переменных  $(u_1, u_2)$  и исследовать динамику медленной подсистемы (11) с помощью кусочно-непрерывных функций.

Быстрая подсистема (10) есть не что иное, как классическая модель ЛВГ. В ней четыре квазистационарных состояния: нулевое, два «чистых» и «смешанное», обозначаемые символом  $Q$  (медленные переменные считаются «замороженными»),

$$Q : \tilde{v}_1 = 0, \quad \tilde{v}_2 = 0; \quad (12a)$$

$$Q_1 : \tilde{v}_1 = u_1/\delta, \quad \tilde{v}_2 = 0; \quad (12б)$$

$$Q_2 : \tilde{v}_1 = 0, \quad \tilde{v}_2 = u_2/\delta; \quad (12в)$$

$$Q_{12} : \tilde{v}_1 = \frac{\kappa_2 u_2 - \delta u_1}{\kappa_1 \kappa_2 - \delta^2}, \quad \tilde{v}_2 = \frac{\kappa_1 u_1 - \delta u_2}{\kappa_1 \kappa_2 - \delta^2}. \quad (12г)$$

Состояния  $Q$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$  существуют при любых положительных  $u_1$  и  $u_2$ . При не слишком слабой связи, такой что  $\kappa_1 \kappa_2 > \delta^2$ , «смешанное» состояние  $Q_{12}$  существует при  $u_1$  и  $u_2$ , удовлетворяющих условию  $\delta u_1 / \kappa_2 < u_2 < u_1 \kappa_1 / \delta$ , то есть в растворе угла, образованного линиями  $\delta u_1 - \kappa_2 u_2 = 0$  и  $\kappa_1 u_1 - \delta u_2 = 0$  на рис. 3. Область существования  $Q_{12}$  сужается по мере ослабления связи.

Анализ равновесий (12) показывает, что  $Q$  – неустойчивый узел при всех положительных  $u_1$  и  $u_2$ ;  $Q_1$  и  $Q_2$  – устойчивые узлы соответственно при  $\delta u_2 < \kappa_1 u_1$  и  $\delta u_1 < \kappa_2 u_2$ , иначе это седла; точка  $Q_{12}$  всегда седловая.

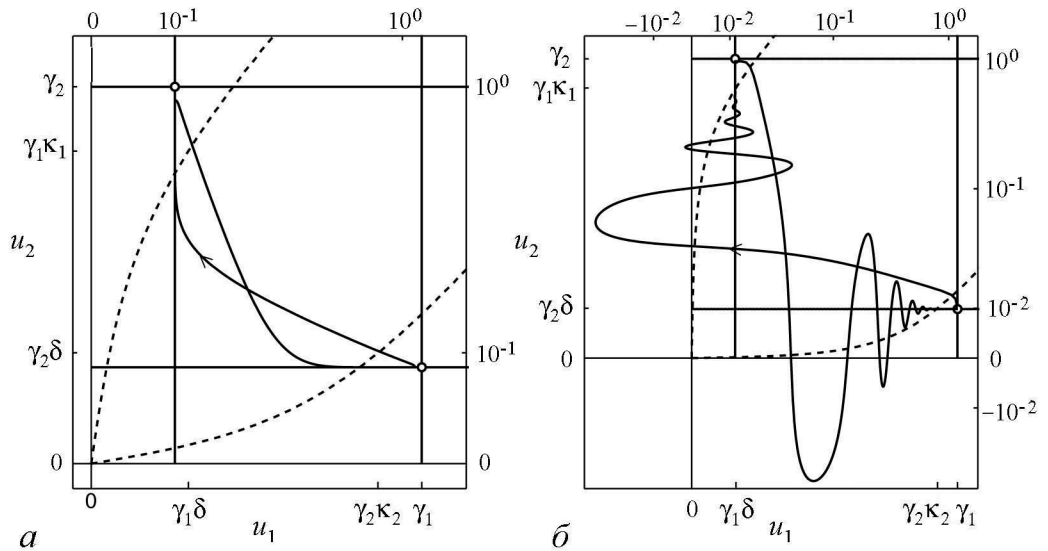


Рис. 3. Проекция предельного цикла системы (5) на плоскость ресурсов в случаях сильной (а) и слабой (б) внутривидовой конкуренции. Для наглядности использовано преобразование координат  $u_i \rightarrow \operatorname{arsinh}(u_i/(\gamma_i \delta))$  ( $i = 1, 2$ ). Направление движения показано стрелкой. Светлые кружки – особые точки (14) и (17). Потребитель 1 находится в устойчивом ненулевом квазиравновесии при любом сочетании ресурсов ниже прямой  $\kappa_1 u_1 - \delta u_2 = 0$  (верхняя штриховая линия), потребитель 2 – выше прямой  $\delta u_1 - \kappa_2 u_2 = 0$  (нижняя штриховая линия). Значения параметров модели:  $\varepsilon = 0.727273 \cdot 10^{-3}$ ,  $\gamma_1 = 1.19375$ ,  $\gamma_2 = 1$ ,  $\kappa_1 = 0.5$ ,  $\kappa_2 = 0.8$ ,  $\delta = 0.1$  (а) и  $\delta = 0.01$  (б)

Обратимся к плоскости ресурсов, показанной на рис. 3. Пусть вначале  $Q_1$  устойчиво, а  $Q_2$  неустойчиво. Доминирует потребитель 1. Это соответствует исходному положению изображающей точки  $(u_1, u_2)$  где-то ниже линии  $\delta u_1 - \kappa_2 u_2 = 0$ . Динамика ресурсов (рассматриваемых как бифуркационные параметры по отношению к потребителям) описывается системой двух независимых уравнений

$$du_1/dt = \gamma_1 - [(u_1 + 1)/\delta + 1] u_1, \quad (13a)$$

$$du_2/dt = \gamma_2 - u_2, \quad (13b)$$

которая является локальной версией медленной подсистемы (11) для (12б). Система (13) имеет устойчивое стационарное состояние

$$\begin{aligned} \hat{u}_1^{(1)} &= \frac{1}{2} [\sqrt{1 + (4\gamma_1 + 2 + \delta)\delta} - 1 - \delta] \\ &= \gamma_1 \delta + \mathcal{O}(\delta^2), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\hat{u}_2^{(1)} = \gamma_2.$$

На пути к (14) изображающая точка пересечет линию  $\delta u_1 - \kappa_2 u_2 = 0$  и войдет в область бистабильности  $Q_1$  и  $Q_2$ . Однако там по-прежнему будет сохраняться доминирование потребителя 1.

Заметим, что в силу малости параметра  $\delta$  переменная  $u_1$  в уравнениях (13) изменяется быстрее переменной  $u_2$ . Поэтому траектория приблизится к вертикальной линии  $u_1 = \hat{u}_1^{(1)} \approx \gamma_1 \delta$  раньше, чем к горизонтальной линии  $u_2 = \hat{u}_2^{(1)} = \gamma_2$ . Дальнейший характер поведения изображающей точки зависит от того, насколько сильно демпфирована индивидуальная пара потребитель–ресурс.

При заметной внутривидовой конкуренции собственные колебания в популяциях подавлены, и изображающая точка будет плавно скользить вдоль изоклины  $du_1/dt = 0$  по направлению к (14) (рис. 3, а).

Но если параметр внутривидовой конкуренции  $\delta$  мал в смысле условия (8), то каждая из связанных пар потребитель–ресурс слабо демпфирована. В непосредственной близости от  $\hat{u}_1^{(1)}$  деление переменных на медленные и быстрые утрачивает смысл, и редуцированное уравнение (13а) уже не корректно. Вместо него следует записать систему

$$du_1/dt = \gamma_1 - (u_1 + 1)v_1 - u_1, \quad (15a)$$

$$\varepsilon dv_1/dt = (u_1 - \delta v_1)v_1, \quad (15b)$$

которая идентична уравнениям (7) несвязанной пары потребитель–ресурс и имеет решение в виде затухающих колебаний. На фазовой плоскости медленных переменных  $(u_1, u_2)$  эти колебания происходят в горизонтальном направлении и наложены на независимое вертикальное движение изображающей точки вдоль нуль-изоклины  $du_1/dt = 0$  ( $u_1 = \hat{u}_1^{(1)} \approx \gamma_1 \delta$ ) по направлению к особой точке (14) (рис. 3, б).

Продолжая движение к (14), изображающая точка обязательно пересечет линию  $\kappa_1 u_1 - \delta u_2 = 0$ . В этот момент в быстрой подсистеме (10) произойдет поглощение устойчивого узла  $Q_1$  седлом  $Q_{12}$ . Единственным устойчивым квазиравновесием теперь будет  $Q_2$ , потребитель 1 исчезнет, и доминирование перейдет к потребителю 2.

Для наблюдателя в четырехмерном пространстве полной системы (5) изображающая точка окажется на другом устойчивом листе медленного многообразия, задаваемого решением (12в) уравнений (11в) и (11г). Движение по этому листу описывается локальной системой

$$du_1/dt = \gamma_1 - u_1, \quad (16a)$$

$$du_2/dt = \gamma_2 - [(u_2 + 1)/\delta + 1] u_2 \quad (16б)$$

с начальными условиями  $u_1(0) = \gamma_1 \delta$  и  $u_2(0) = \gamma_1 \kappa_1$ . Ее динамика совершенно аналогична уже описанному поведению системы (13). Система (16) имеет устойчивое равновесие

$$\begin{aligned} \hat{u}_1^{(2)} &= \gamma_1, \\ \hat{u}_2^{(2)} &= \frac{1}{2} [\sqrt{1 + (4\gamma_2 + 2 + \delta)\delta} - 1 - \delta] = \gamma_2 \delta + \mathcal{O}(\delta^2). \end{aligned} \quad (17)$$

По достижении окрестности изоклины  $du_2/dt = 0$ , задаваемой формулой  $u_2 = \hat{u}_2^{(2)} \approx \gamma_2 \delta$ , изображающая точка в зависимости от величины  $\delta$  продолжит приближение к изоклине либо монотонно (см. рис. 3, а), либо путем затухающих осцилляций согласно уравнениям

$$du_2/dt = \gamma_2 - (u_2 + 1)v_2 - u_2, \quad (18a)$$

$$\varepsilon dv_2/dt = (u_2 - \delta v_2)v_2 \quad (18б)$$

(см. рис. 3, б). Система (18) описывает собственные затухающие колебания потребителя 2 при малых значениях  $\delta$ .

В то же время переменная  $u_1$  независимо монотонно стремится к  $\hat{u}_1^{(2)} = \gamma_1$ . Поскольку точка (17) расположена ниже линии  $\delta u_1 - \kappa_2 u_2 = 0$ , то траектория непременно пересечет эту линию в точке  $(\gamma_2 \kappa_2, \gamma_2 \delta)$ , после чего в быстрой подсистеме узел  $Q_2$  будет поглощен седлом  $Q_{12}$ . Система скачком вернется на первый лист медленного многообразия. Там потребители 1 и 2 вновь поменяются ролями и начнется новый цикл незатухающих колебаний.

### 3. Результаты и обсуждение

На рис. 4 показаны результаты численного интегрирования системы (5). Связанные пары потребитель–ресурс совершают синхронные релаксационные колебания в противофазе.

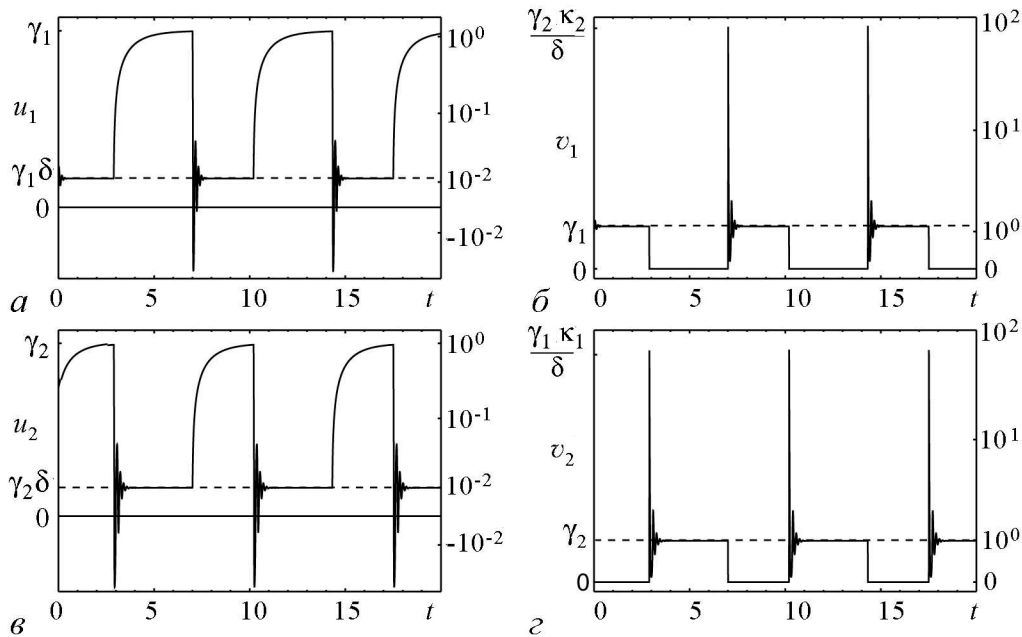


Рис. 4. Временные развертки синхронных релаксационных колебаний связанных пар производитель–ресурс при слабой внутривидовой конкуренции. *a* – ресурс 1, *б* – потребитель 1, *в* – ресурс 2, *г* – потребитель 2. Значения параметров уравнений (5) те же, что и на рис. 3, *б*

Форма колебаний ресурсов  $u_1$  и  $u_2$  напоминает пилообразную. Размах колебаний ресурсов остается конечным и, что важно, не зависит от параметра внутривидовой конкуренции  $\delta$ .

Времена движения по каждому листу медленного многообразия вносят основной вклад в период колебаний  $T$ . Эти времена определяются динамикой ресурсов и в нулевом порядке по  $\varepsilon$  и  $\delta$  могут быть найдены как решения уравнений движения (16а) и (13б) с соответствующими граничными условиями  $(0, \gamma_2 \kappa_2)$  и  $(0, \gamma_1 \kappa_1)$ . В результате получается простая оценка длительности периода

$$T = \int_0^{\gamma_2 \kappa_2} \frac{dz}{\gamma_1 - z} + \int_0^{\gamma_1 \kappa_1} \frac{dz}{\gamma_2 - z} = \ln \frac{1}{1 - \kappa_2(\gamma_2/\gamma_1)} + \ln \frac{1}{1 - \kappa_1(\gamma_1/\gamma_2)}. \quad (19)$$

Интересно, что согласно формуле (19) период является функцией отношения притоков ресурсов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , но не каждого из притоков индивидуально, и совсем не зависит от конкретной величины  $\delta$ .

Численности потребителей  $v_1$  и  $v_2$  периодически изменяются между полным исчезновением\* и соответствующими постоянными уровнями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Короткий переход от нулевого к почти горизонтальному ненулевому уровню в каждом цикле сопровождается отчетливо выраженным проскоком в виде пичка. В соответствии с формулами (12б) и (12в) при  $\delta \rightarrow 0$  высота пичка стремится к бесконечности. В зависимости от степени внутривидовой конкуренции за проскоком может последовать «хвост» быстрозатухающих высокочастотных колебаний, прежде чем пере-

\*В действительности точное решение полной системы (5) дает ненулевые  $v_1$  и  $v_2$  в любой момент времени, несмотря на то, что они могут принимать очень малые значения порядка  $\ln v \propto -\varepsilon^{-1}$ . Следует подчеркнуть, что конкурирующие виды периодически «вымирают» только в рамках использованного нами приближенного метода многих масштабов. Это не более чем удобная идеализация.

менная выйдет на плато. В обработке сигналов такой вид переходных колебаний называется «звоном» (ringing). «Звона» нет, если участвующие пары потребитель–ресурс сильно задемпфированы внутривидовой конкуренцией. «Звон» наблюдается, когда внутривидовая конкуренция слаба и динамика несвязанных сообществ характеризуется затухающими колебаниями. Частота «звона» совпадает с частотой этих собственных колебаний.

Можно заметить, что когда один из потребителей находится на грани вымирания, то связанная система ведет себя как изолированная пара потребитель–ресурс (6). Другой важной особенностью динамики является роль ресурсов в определении того, когда потребители появляются и исчезают. Например, когда  $u_1$  увеличивается выше порогового уровня (определяемого потерями  $v_1$ ), то  $v_1$  становится доминирующим, вытесняя  $v_2$ . Поэтому за исключением коротких переходных времен проскока и «звона» численности потребителей принимают только два значения – нулевое или стационарное, следуя циклическому ходу своих ресурсов.

Рассматривая цикл колебаний системы, можно выделить в нем четыре фазы.

1. Численность вида 1 практически нулевая, в то время как численность вида 2 приблизительно равна ее стационарному значению  $\gamma_2$  в несвязанном состоянии. За счет постоянного притока количество ресурса 1 возрастает, пока не будет восстановлен его запас.
2. При достаточном запасе 1-го ресурса происходит вспышка численности потребителя 1. Резкий рост популяции съедает весь доступный ресурс, так что уровень последнего снижается. Потребитель 2 «вымывается» из-за перекрестных потерь.
3. Величины  $v_1$  и  $u_1$  устанавливаются на своих стационарных значениях, как если бы никакой связи со вторым потребителем не было. Численность потребителя 2 при этом почти нулевая. Количество ресурса 2 возрастает, так же как это происходило с ресурсом 1 в фазе 1.
4. Ресурс 2 восстанавливается, «оживает» потребитель 2, и сопутствующие перекрестные потери подавляют потребителя 1. Вспышка численности потребителя 2 обедняет запасы соответствующего ресурса. Последовательность повторяется.

Представляя свою известную модель, Смейл заметил, что «труднее уменьшить число веществ в задаче до двух или даже до трех» [6, с. 282]. В отличие от примера Смейла, билинейная связь в нашей модели делает возможными колебания уже для двух переменных.

Как мы видели, изображающая точка в фазовом пространстве системы совершает циклическое движение между окрестностями неустойчивых равновесий  $F_1$  и  $F_2$ , в каждом из которых доминирует соответствующий вид. Подобный тип траектории получил название «гетероклинического цикла» [21]. Гетероклинический цикл возникает, когда выходящая сепаратриса (неустойчивое многообразие) одной седловой точки становится входящей сепаратрисой (устойчивым многообразием) другой седловой точки, и наоборот. Он тесно связан с другим понятием нелинейной динамики – гомоклиническим циклом, который появляется, когда устойчивое и неустойчивое многообразия одного и того же седла образуют замкнутую петлю.

Гомо- и гетероклинические циклы негрубы в том смысле, что малые изменения параметров системы могут их разрушить. Однако в практическом смысле любой



предельный цикл, проходящий вблизи седловых точек, неотличим от гетероклинического (рис. 5). Единственной разницей является строгая периодичность, хотя период предельного цикла в окрестности гетероклинической траектории может быть длинным. Кроме того, на пороге гомо-/гетероклинической бифуркации период сильно подвержен внешним шумам.

В контексте нашей модели, по мере усиления связи между сообществами устойчивый предельный цикл увеличивается в размерах и проходит все ближе к «чистым» неседловым равновесиям, лежащим на координатных осях. В зависимости от соотношения между параметрами цикл может «влипнуть» в одно или оба из этих равновесий, образовав соответственно гомоклинический или гетероклинический цикл. Это имеет место при  $\gamma_2/\gamma_1 = \kappa_1$  и  $\gamma_1/\gamma_2 = \kappa_2$ . При дальнейшем увеличении силы связи цикл разрушается.

Стоит отметить, что гетероклинический цикл был впервые найден Мэем и Леонардом [35] в классической системе ЛВГ трех конкурирующих видов. В их модели цикл не периодичен: со временем изображающая точка остается у каждого очередного равновесия все дольше, так что полное время на один оборот оказывается пропорциональным времени от начала движения системы. Кроме того, авторы утверждают, что феномен требует для наблюдения не менее трех конкурентов и поэтому невозможен в моделях с меньшим их числом. Это мнение разделяет и Вандермеер [36], который распространил теорию на более высокие размерности. Согласно ему, эффект имеет место для нечетного числа видов, а конкуренция четного их числа приводит к вымиранию половины участников и независимому сосуществованию остальной половины в пределах емкостей их ниш. В свете наших результатов это заключение несомненно справедливо, если оставаться в рамках классических уравнений ЛВГ, которые подразумевают относительную быстроту изменения ресурсов. В нашей модели всего лишь с двумя конкурентами относительная медленность ресурсов является обязательной предпосылкой возникновения колебаний, так как она обеспечивает необходимую инерцию системе.

Реалистичность предложенной модели (5) тесно связана с оправданностью постулированной в ней иерархии времен. В экосистемах наиболее типичным случаем является быстрое потребление пищи видами. Однако представляется резонным предположить, что модель пригодна для описания первого уровня экосистем, на котором потребители – это автотрофы, а ресурсы – минеральные субстраты. Дивергентная эволюция – это всегда появление новых видов. Вследствие мутаций от общего предшественника возникают две популяции организмов, обладающих общим генетическим кодом, но имеющих ферменты, способные к переработке различных субстратов. Если условия окружающей среды сравнительно стабильны на эволюционной шкале времени, то притоки неорганических субстратов будут примерно постоянными, а времена вымывания субстратов могут оказаться дольше продолжительности жизни видов (вспомним, что по определению  $\varepsilon = q/b$ ).

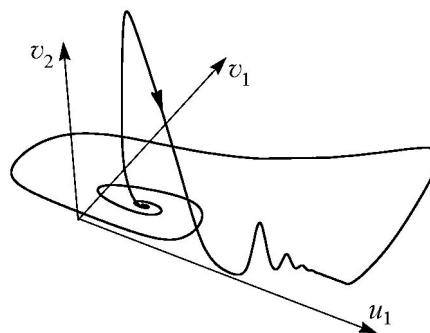


Рис. 5. Трехмерная проекция предельного цикла системы (5) при значениях параметров в окрестности гетероклинического цикла

С неэкологической точки зрения, похожие в целом отношения конкуренции имеют место между связанными продольными модами лазера с внутриврезонаторной генерацией вторичной гармоник. Баэр [37] экспериментально наблюдал противофазные колебания двух (и более) мод в мультимодовом лазере на алюмо-иттриевом гранате ( $\text{Nd}^{3+}:\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ ), легированном ионами неодима (Nd), в резонатор которого был помещен кристалл калий-титанил-фосфата ( $\text{KTiPO}_4$ ), удваивающий частоту. Он также предложил модель явления в терминах так называемых «скоростных уравнений» (например, [12, ch. 6]). В оригинальных обозначениях уравнения для инверсных заселенностей  $G_1, G_2$  и интенсивностей излучения  $I_1, I_2$  имеют следующий вид:

$$\tau_f dG_1/dt = G_1^0 - (\beta_1 I_1 + \beta_{12} I_2 + 1)G_1, \quad (20a)$$

$$\tau_f dG_2/dt = G_2^0 - (\beta_2 I_2 + \beta_{21} I_1 + 1)G_2, \quad (20б)$$

$$\tau_c dI_1/dt = (G_1 - \alpha_1 - \varepsilon I_1 - 2\varepsilon I_2)I_1, \quad (20в)$$

$$\tau_c dI_2/dt = (G_2 - \alpha_2 - \varepsilon I_2 - 2\varepsilon I_1)I_2, \quad (20г)$$

где  $\tau_f, \tau_c$  – соответственно время флуоресценции и время пролета фотонов в резонаторе;  $\beta_1, \beta_2$  – параметры самонасыщения, определяющие, насколько соответствующие интенсивности обедняют усиление;  $\beta_{12}, \beta_{21}$  – параметры перекрестного насыщения;  $G_1^0, G_2^0$  – параметры накачки;  $\alpha_1, \alpha_2$  – удельные потери в полости соответствующих мод;  $\varepsilon$  – нелинейный коэффициент связи, обусловленный наличием внутриврезонаторного кристалла. В уравнениях (20в) и (20г) квадратичные члены  $I_1^2, I_2^2$  и  $I_1 I_2$  описывают потери интенсивности излучения на фундаментальных частотах вследствие генерации второй гармоники и генерации суммарной частоты.

Очевидно, что система (20) представляет собой связанные уравнения потребитель–ресурс, где интенсивности излучения играют роль потребителей, а инверсные заселенности выступают ресурсами. В структурном отношении модель Баэра весьма близка к системе (3), рассмотренной в настоящей работе. Сходна и иерархия времен:  $\tau_c/\tau_f = (0.5\text{нс})/(0.24\text{мс}) = \mathcal{O}(10^{-6})$ , то есть «ресурсы» изменяются намного медленнее «потребителей». Есть, однако, два отличия. Во-первых, в уравнениях (20в) и (20г) параметры внутри- и межвидовой конкуренции не независимы, но оба пропорциональны силе связи. Во-вторых, в уравнениях (20а) и (20б) моды могут конкурировать за активную среду, так что пары потребитель–ресурс оказываются связанными еще и трофически.

Баэр провел численные эксперименты с уравнениями (20) для различной силы связи  $\varepsilon$  и различных начальных условий. Выяснилось, что при уменьшении  $\varepsilon$  период связанных колебаний уменьшается, приближаясь к периоду собственных колебаний мод. При дальнейшем уменьшении  $\varepsilon$  синхронные колебания пропадают, и система переходит в статическое равновесие. При увеличении  $\varepsilon$  период колебаний удлиняется, а их форма становится все более похожей на прямоугольные импульсы (как и в нашей модели). Численные расчеты верно предсказали, что колебания мод происходят в противофазе.

Впоследствии Эрнэ [38, pp. 318–325] свел систему (20) к уравнениям связанных квазиконсервативных осцилляторов и доказал существование устойчивого противофазного периодического решения для мод с одинаковыми параметрами  $G^0, \alpha$  и  $\beta$ .

Однако его результаты относятся к вопросу рождения квазигармонических колебаний малой амплитуды. Мы же исследовали развитые существенно нелинейные колебания большой амплитуды.

Интересные вопросы возникают по поводу того, как могут измениться результаты эксплуатации ресурсов и прямой конкуренции, если притоки ресурсов не постоянны, или если межвидовая конкуренция необязательно сопровождается взаимными потерями (то есть каждый потребитель несет убытки от воздействия на него конкурентов, но выигрывает от своего воздействия на них) [39]. Изучение этих вопросов может составить направление дальнейшей работы с моделью.

### Заключение

Рассмотрена модель двух пар потребитель–ресурс, связанных прямой межвидовой конкуренцией. При отсутствии связи каждая из пар находится в устойчивом равновесии. При достаточно сильной межвидовой конкуренции связанная система не осциллирует; в ней возможны бистабильность и гистерезис.

При умеренно слабой связи модель демонстрирует противофазные релаксационные колебания конкурирующих видов. Потребители не могут сосуществовать даже в динамическом режиме: в каждом из периодически чередующихся состояний доминирует один из видов, а другой находится на грани вымирания. Наиболее интригующей особенностью модели является то, что каждая из участвующих пар потребитель–ресурс сама по себе находится в покое, однако во взаимодействии, при наложении нелинейной связи в виде билинейных взаимных потерь, результирующая система превращается в релаксационный осциллятор.

### Библиографический список

1. *Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O.* Synchronization: From Simple to Complex. Berlin: Springer, 2009. 425 p.
2. *Hoppensteadt F.C., Izhikevich E.M.* Weakly Connected Neural Networks. New York: Springer, 1997. 400 p.
3. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 411 p.
4. *Strogatz S.* Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order. New York: Hyperion, 2003. 338 p.
5. *Vandermeer J.* Oscillating populations and biodiversity maintenance // *Bioscience*. 2006. Vol. 56, № 12. P. 967.
6. *Смейл С.* Математическая модель взаимодействия двух клеток, использующая уравнение Тьюринга / Марсден Дж., МакКракен М. Бифуркация рождения цикла и ее применения. М.: Мир, 1980. С. 274.
7. *Loewenstein Y., Yarom Y., Sompolinsky H.* The generation of oscillations in networks of electrically coupled cells // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2001. Vol. 98, № 14. P. 8095.
8. *Gomez-Marin A., Garcia-Ojalvo J., Sancho J.M.* Self-sustained spatiotemporal oscillations induced by membrane-bulk coupling // *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 98, № 16. Article ID 168303.

9. Szatmári I., Chua L.O. Awakening dynamics via passive coupling and synchronization mechanism in oscillatory cellular neural/nonlinear networks // *International Journal of Circuit Theory and Applications*. 2008. Vol. 36, № 5–6. P. 525.
10. Murdoch W.W., Briggs C.J., Nisbet R.M. *Consumer-Resource Dynamics*. Princeton: University Press, 2003. 462 p.
11. Murray J.D. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. New York: Springer, 2002. 553 p.
12. Carroll J.E. *Rate Equations in Semiconductor Electronics*. New York: Cambridge University Press, 1985. 177 p.
13. Чжан В.-Б. Синергетическая экономика. Время и переменны в нелинейной экономической теории. М.: Мир, 1999. 335 с.
14. Волькенштейн М.В. *Общая биофизика*. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978. 592 с.
15. Chernavskii D.S., Palamarchuk E.K., Polezhaev A.A., Solyanik G.I., Burlakova E.B. A mathematical model of periodic processes in membranes (with application to cell cycle regulation) // *BioSystems*. 1977. Vol. 9, № 4. P. 187.
16. MacArthur R. Species packing and competitive equilibrium for many species // *Theoretical Population Biology*. 1970. Vol. 1, № 1. P. 1.
17. Chesson P. MacArthur's consumer-resource model // *Theoretical Population Biology*. 1990. Vol. 37, № 1. P. 26.
18. Gause G.F., Witt A.A. Behavior of mixed populations and the problem of natural selection // *The American Naturalist*. 1935. Vol. 69, № 725. P. 596.
19. Mirrahimi S., Perthame B., Wakano J.Y. Direct competition results from strong competition for limited resource // *Journal of Mathematical Biology*. 2014. Vol. 68, № 4. P. 931.
20. Devetter M., Sedâ J. The relative role of interference competition in regulation of a Rotifer community during spring development in a eutrophic reservoir // *International Review of Hydrobiology*. 2008. Vol. 93, № 1. P. 31.
21. Kirlinger G. Permanence in Lotka–Volterra equations: Linked prey-predator systems // *Mathematical Biosciences*. 1986. Vol. 82, № 2. P. 165.
22. Базыкин А.Д. *Нелинейная динамика взаимодействующих популяций*. М.: Институт компьютерных исследований. 2003. 368 с.
23. Kuang Y., Fagan W.F., Loladze I. Biodiversity, habitat area, resource growth rate and interference competition // *Bulletin of Mathematical Biology*. 2003. Vol. 65, № 3. P. 497.
24. Stewart F.M., Levin B.R. Partitioning of resources and the outcome of interspecific competition: A model and some general considerations // *The American Naturalist*. 1973. Vol. 107, № 954. P. 171.
25. Herbert D., Elsworth R., Telling R.C. The continuous culture of bacteria: A theoretical and experimental study // *Journal of General Microbiology*. 1956. Vol. 14, № 3. P. 601.
26. Abrams P.A., Holt R.D. The impact of consumer-resource cycles on the coexistence of competing consumers // *Theoretical Population Biology*. 2002. Vol. 62, № 3. P. 281.
27. Levine S.H. Competitive interactions in ecosystems // *The American Naturalist*. 1976. Vol. 110, № 976. P. 903.

28. *Lynch M.* Complex interactions between natural coexploiters—Daphnia and Ceriodaphnia // *Ecology*. 1978. Vol. 59, № 3. P. 552.
29. *Vandermeer J.* Indirect mutualism: Variations on a theme by Stephen Levine // *The American Naturalist*. 1980. Vol. 116, № 3. P. 441.
30. *Xiang Z., Song X.* Extinction and permanence of a two-prey two-predator system with impulsive on the predator // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2006. Vol. 29, № 5. P. 1121.
31. *Hsu S.B., Hubbell S.P.* Two predators competing for two prey species: An analysis of MacArthur's model // *Mathematical Biosciences*. 1979. Vol. 47, № 34. P. 143.
32. *Tilman D.* Resource Competition and Community Structure. Princeton: Princeton University Press, 1982. 296 p.
33. *Verhulst F.* Methods and Applications of Singular Perturbations: Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics. New York: Springer, 2005. 324 p.
34. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31(73), № 3. С. 575.
35. *May R.M., Leonard W.J.* Nonlinear aspects of competition between three species // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1975. Vol. 29, № 2. P. 243.
36. *Vandermeer J.* Intransitive loops in ecosystem models: From stable foci to heteroclinic cycles // *Ecological Complexity*. 2011. Vol. 8, № 1. P. 92.
37. *Baer T.* Large-amplitude fluctuations due to longitudinal mode coupling in diode-pumped intracavity-doubled Nd:YAG lasers // *Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics*. 1986. Vol. 3, № 9. P. 1175.
38. *Erneux T., Glorieux P.* Laser Dynamics. New York: Cambridge University Press, 2010. 361 p.
39. *Amarasekare P.* Interference competition and species coexistence // *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences*. 2003. Vol. 269, № 1509. P. 2541.

## SYNCHRONOUS OSCILLATIONS OF TWO POPULATIONS OF DIFFERENT SPECIES LINKED VIA INTERSPECIFIC INTERFERENCE COMPETITION

*A. T. Mustafin*

Kazakh National Research Technical University, Almaty, Kazakhstan

A model for competition of two different species is considered. It is assumed that each consumer specializes on one resource only. The resource uptake rates are held constant. The basic feature of the model is that the dynamics of the resource is much slower than that of the consumer. The two consumers are coupled through direct reciprocal inhibition. Besides, self-limitation of the consumers due to overcrowding is also taken into account. The resources are noninteractive. When uncoupled, each population is completely nonoscillatory. The application of multiple-scale analysis yields that strong competition leads to bistability and hysteresis in the system, while weak coupling results in synchronous antiphase relaxation oscillations of the populations.

*Keywords:* Consumer-resource, predator-prey, competition, relaxation oscillations, synchronization.

## References

1. *Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O.* Synchronization: From Simple to Complex / Springer Series in Synergetics. Berlin: Springer, 2009. 425 p.
2. *Hoppensteadt F.C., Izhikevich E.M.* Weakly Connected Neural Networks. New York: Springer, 1997. 400 p.
3. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 2001. 411 p.
4. *Strogatz S.* Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order. New York: Hyperion, 2003. 338 p.
5. *Vandermeer J.* // Bioscience. 2006. Vol. 56, № 12. P. 967.
6. *Smale S.* A mathematical model of two cells via Turing's equation / Some Mathematical Questions in Biology V, ed. by Cowan J.D. Providence, RI: American Mathematical Society, 1974. P. 15. Vol. 6 of Lectures on Mathematics in the Life Sciences.
7. *Loewenstein Y., Yarom Y., Sompolinsky H.* // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2001. Vol. 98, № 14. P. 8095.
8. *Gomez-Marin A., Garcia-Ojalvo J., Sancho J.M.* // Physical Review Letters. 2007. Vol. 98, № 16. Article ID 168303.
9. *Szatmari I., Chua L.O.* // International Journal of Circuit Theory and Applications. 2008. Vol. 36, № 5–6. P. 525.
10. *Murdoch W.W., Briggs C.J., Nisbet R.M.* Consumer-Resource Dynamics. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2003. 462 p.
11. *Murray J.D.* Mathematical Biology: I. An Introduction. 3rd edition. New York: Springer, 2002. 553 p.
12. *Carroll J.E.* Rate Equations in Semiconductor Electronics. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 1985. 177 p.
13. *Zhang W.-B.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. Berlin; New York: Springer, 1991. Vol. 53 of Springer Series in Synergetics. 246 p.
14. *Volkenstein M.V.* General Biophysics. New York: Academic Press, 1983. 314 p.
15. *Chernavskii D.S., Palamarchuk E.K., Polezhaev A.A., Solyanik G.I., Burlakova E.B.* // BioSystems. 1977. Vol. 9, № 4. P. 187.
16. *MacArthur R.* // Theoretical Population Biology. 1970. Vol. 1, № 1. P. 1.
17. *Chesson P.* // Theoretical Population Biology. 1990. Vol. 37, № 1. P. 26.
18. *Gause G.F., Witt A.A.* // The American Naturalist. 1935. Vol. 69, № 725. P. 596.
19. *Mirrahimi S., Perthame B., Wakano J.Y.* // Journal of Mathematical Biology. 2014. Vol. 68, № 4. P. 931.
20. *Devetter M., Seda J.* // International Review of Hydrobiology. 2008. Vol. 93, № 1. P. 31.
21. *Kirlinger G.* // Mathematical Biosciences. 1986. Vol. 82, № 2. P. 165.
22. *Bazykin A.D.* Nonlinear Dynamics of Interacting Populations. Singapore; River Edge, NJ: World Scientific Publishing, 1998. Vol. 11 of World Scientific series on nonlinear science. Series A. 193 p.
23. *Kuang Y., Fagan W.F., Loladze I.* // Bulletin of Mathematical Biology. 2003. Vol. 65, № 3. P. 497.
24. *Stewart F.M., Levin B.R.* // The American Naturalist. 1973. Vol. 107, № 954. P. 1718.

25. *Herbert D., Elsworth R., Telling R.C.* // Journal of General Microbiology. 1956. Vol. 14, № 3. P. 601.
26. *Abrams P.A., Holt R.D.* // Theoretical Population Biology. 2002. Vol. 62, № 3. P. 281.
27. *Levine S.* // The American Naturalist. 1976. Vol. 110, № 976. P. 903.
28. *Lynch M.* // Ecology. 1978. Vol. 59, № 3. P. 552.
29. *Vandermeer J.* // The American Naturalist. 1980. Vol. 116, № 3. P. 441.
30. *Xiang Z., Song X.* // Chaos, Solitons and Fractals. 2006. Vol. 29, № 5. P. 1121.
31. *Hsu S., Hubbell S.* // Mathematical Biosciences. 1979. Vol. 47, № 34. P. 143.
32. *Tilman D.* Resource Competition and Community Structure. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1982. 296 p.
33. *Verhulst F.* Methods and Applications of Singular Perturbations: Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics. New York: Springer, 2005. 324 p.
34. *Tikhonov A.N.* // Matematicheskii Sbornik, 1952. Vol. 31(73), № 3. P. 575. (In Russian)
35. *May R.M., Leonard W.J.* // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1975. Vol. 29, № 2. P. 243.
36. *Vandermeer J.* // Ecological Complexity. 2011. Vol. 8, № 1. P. 92.
37. *Baer T.* // Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics. 1986. Vol. 3, № 9. P. 1175.
38. *Erneux T., Glorieux P.* Laser Dynamics. New York: Cambridge University Press, 2010. 361 p.
39. *Amarasekare P.* // Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences. 2003. Vol. 269, № 1509. P. 2541.

*Поступила в редакцию 4.06.2015*

*Мустафин Алмаз Тлемисович* – родился в 1955 году в Караганде (Казахстан), окончил Московский физико-технический институт в 1978 году. По окончании МФТИ поступил стажером-исследователем в ФИАН, потом аспирантом в МГУ. В 1984–2001 годах. работал в исследовательских институтах Академии Наук Казахстана, в 2001–2007 годах. преподавал на физическом факультете Мэрилендского университета (США). С 2007 года – профессор кафедры общей и теоретической физики Казахского национального исследовательского технического университета. Кандидат физико-математических наук (МГУ, 1984) по теоретической биофизике и доктор технических наук (Институт математики НАН Казахстана, 2001) по математическому моделированию. Область научных интересов – применение нелинейной динамики в физике, биологии и экономике. Опубликовал около 50 научных статей, две монографии и два учебных пособия по направлениям, указанным выше.



Казахстан, 050013, Алматы, ул. Сатпаева, 22  
 Казахский национальный исследовательский технический университет  
 E-mail: mustafin\_al@kazntu.kz



## ДИАГНОСТИКА И КОРРЕКЦИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ПРИ ОЦЕНКЕ ЭНТРОПИИ ПЕРЕНОСА МЕТОДОМ $K$ -БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ

*А. С. Землянников<sup>1</sup>, И. В. Сысоев<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

<sup>2</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН

Энтропия переноса широко используется для определения направленной связанности колебательных систем по их наблюдаемым временным рядам. При оценке энтропии переноса между связанными нелинейными системами методом  $K$ -ближайших соседей обнаружена систематическая ошибка. Предложен способ уменьшения данной ошибки: с увеличением номера соседа систематическая ошибка уменьшается. Показана возможность диагностики систематической ошибки, имея два набора измерений. Полученные результаты позволяют улучшить чувствительность и специфичность метода для нелинейных систем при малых уровнях связи.

*Ключевые слова:* Временные ряды, анализ связанности, энтропия переноса, нелинейные системы.

### Введение

Задача определения характера связи между двумя системами по временным реализациям наблюдаемых величин возникает в различных приложениях. Сложно выявлять слабую связь и определять ее направленность, особенно в случае если объем исходных данных ограничен. Среди теоретико-информационных методов оценки связей применяется энтропия переноса [1]. Классическим подходом при оценке данной меры является её реализация с помощью разбиения фазового объема на бины – ячейки фиксированного размера [2]. Существуют также другие методы оценки энтропии переноса, например, с помощью ядерной оценки плотности [3, 4], улучшенного разбиения с помощью алгоритма Darbellay–Vajda [5], корреляционных сумм [6], энтропии Реньё [8], метода  $K$ -ближайших соседей [7, 8]. Последний подход представляется наиболее перспективным в том числе благодаря тому, что предъявляет существенно меньшие требования к объёму экспериментальной выборки. В большинстве работ в качестве эталонных моделей для исследования возможностей предполагаемых методов используют линейные системы [9–14]. Целью данной работы



является проверка определения направленности связи с помощью энтропии переноса, реализованной методом  $K$ -ближайших соседей, для эталонных нелинейных систем и выявление новых возможных проблем, которые для линейных систем не наблюдались.

## 1. Описание метода

Метод оценки плотностей распределения на основе определения ближайших соседей был предложен в работе [7] для расчёта взаимной информации, но может быть легко обобщён на случай энтропии переноса, как сделано в [12, 13]. Пусть есть два временных ряда: ряд  $\{x_i\}_{i=1}^N$  от системы  $X$  и ряд  $\{y_i\}_{i=1}^N$  от системы  $Y$ , где  $i$  – дискретное время,  $N$  – длина временного ряда. Уменьшение неопределённости следующего значения  $y_{i+1}$  за счёт учёта  $x_i$  называется энтропией переноса [1] и выражается через условные энтропии Шеннона следующим образом:

$$TE_{X \rightarrow Y} = H(Y_{i+1}|Y_i) - H(Y_{i+1}|Y_i, X_i), \quad (1)$$

где ряд для сигнала  $Y_{i+1}$  получается из временного ряда  $\{y_i\}$  путём сдвига на единицу вперёд в дискретном времени. Для расчётов удобнее перейти от условных энтропий к совместным

$$\begin{aligned} H(Y_{i+1}|Y_i) &= H(Y_{i+1}, Y_i) - H(Y_i), \\ H(Y_{i+1}|Y_i, X_i) &= H(Y_{i+1}, Y_i, X_i) - H(Y_i, X_i). \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда

$$TE_{X \rightarrow Y} = H(Y_{i+1}, Y_i) - H(Y_i) - H(Y_{i+1}, Y_i, X_i) + H(Y_i, X_i). \quad (3)$$

Если ввести расстояние между трёхмерными векторами в пространстве  $(Y_{i+1}, Y_i, X_i)$  как максимум из модулей расстояний по координатам, то можно воспользоваться оценкой энтропии по Козаченко–Леоненко [15]

$$d(i, j) = \max(|y_{i+1} - y_{j+1}|, |y_i - y_j|, |x_i - x_j|). \quad (4)$$

Тогда, по аналогии с оценкой функции взаимной информации методом  $K$ -ближайших соседей [7], индивидуальные и совместные энтропии в (3) выражаются в трёхмерном случае следующим образом:

$$\begin{aligned} H(Y_i) &= \psi(N) - \langle \psi(n_{Y_i}(i) + 1) \rangle_i + \langle \log \varepsilon(i) \rangle_i, \\ H(Y_{i+1}, Y_i) &= \psi(N) - \langle \psi(n_{Y_{i+1}, Y_i}(i) + 1) \rangle_i + 2 \langle \log \varepsilon(i) \rangle_i, \\ H(Y_i, X_i) &= \psi(N) - \langle \psi(n_{Y_i, X_i}(i) + 1) \rangle_i + 2 \langle \log \varepsilon(i) \rangle_i, \\ H(Y_{i+1}, Y_i, X_i) &= \psi(N) - \psi(K) + 3 \langle \log \varepsilon(i) \rangle_i, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\psi(n)$  – дигамма-функция;  $K$  – номер соседа;  $\varepsilon(i)/2$  – расстояние от  $i$ -й точки в трёхмерном пространстве  $(Y_{i+1}, Y_i, X_i)$  до  $K$ -го ближайшего соседа, рассчитанное по формуле (4);  $n_{Y_i}(i)$  – количество элементов ряда  $Y_i$ , расстояния которых до

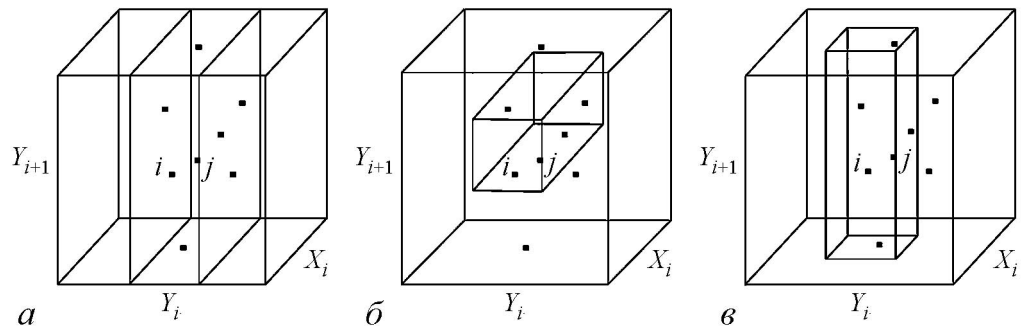


Рис. 1. Иллюстрация метода  $K$ -ближайших соседей. Изображены подпространства трёхмерного пространства  $(Y_{i+1}, Y_i, X_i)$ , в которых расположены ближайшие соседи:  $a$  – соседи по оси  $Y_i$ ,  $b$  – соседи по двум осям  $(Y_{i+1}, Y_i)$  и  $c$  – соседи по двум осям  $(Y_i, X_i)$

точки  $y_i$  строго меньше  $\varepsilon(i)/2$ ;  $n_{Y_{i+1}, Y_i}(i)$  – количество точек из двумерного пространства  $(Y_{i+1}, Y_i)$ , расстояния которых до точки  $(y_{i+1}, y_i)$  точно меньше  $\varepsilon(i)/2$ ; аналогично для  $n_{Y_i, X_i}(i)$ . Расчёт числа соседей в различных сечениях пространства  $(Y_{i+1}, Y_i, X_i)$  иллюстрирует рис. 1.

Подставляя (5) в (3), получаем окончательную формулу энтропии переноса

$$TE_{X \rightarrow Y} = \psi(K) + \langle \psi(n_{Y_i} + 1) - \psi(n_{Y_{i+1}, Y_i} + 1) - \psi \rangle_i. \quad (6)$$

## 2. Объект и методика исследования. Результаты

В качестве объекта исследования была выбрана нелинейная эталонная система двух однонаправленно связанных обобщённых отображений Эно (7). Логистическое отображение и его обобщения – отображение Эно и обобщённое отображение Эно – очень популярны как базовая модель нелинейной динамики, демонстрирующая сложное поведение при достаточно простом операторе эволюции [16]. Рассмотрение обобщённого отображения Эно важно тем, что варьируя  $m$  можно изменять размерность исходного объекта.

$$\begin{aligned} x_i &= 1 - \alpha_1 x_{i-1}^2 - \beta_1 x_{i-m} + \xi_i, \\ y_i &= 1 - \alpha_2 y_{i-1}^2 - \beta_2 y_{i-m} + \gamma x_i + \eta_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\gamma$  – коэффициент связи; параметры  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  подобраны так, чтобы в автономных системах наблюдался режим детерминированного хаоса;  $\xi_i, \eta_i$  – динамический шум с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением 0.001. В численном эксперименте коэффициент связи варьировался в диапазоне  $[0; 0.07]$  с шагом 0.01. Для каждого коэффициента связи генерировался ансамбль из 20 временных рядов  $\{x_i\}_{i=1}^N$  и  $\{y_i\}_{i=1}^N$ , длина временного ряда составляла  $N = 10000$  точек. Для каждой реализации рассчитывалась энтропия переноса методом  $K$ -ближайших соседей в заведомо верную сторону  $X \rightarrow Y$ . Исследование проводилось для систем с первого (логистическое отображение) по пятый порядок включительно, а также при  $N = 1000$ .

Зависимость оценки энтропии переноса  $TE_{X \rightarrow Y}$  при номере соседа  $K = 1$  от коэффициента связи  $\gamma$  представлена на рис. 2, а. Различные кривые соответствуют вариантам отображения (7) при различном  $m$ . Видно, что с ростом коэффициента связи оценка растёт, но при сравнительно малых  $\gamma$  наблюдается систематическая ошибка – полученные значения оказываются отрицательными, чего не может быть по определению энтропии переноса. Такого эффекта нет в случае линейных систем, например, для однонаправленно связанных процессов авторегрессии (рис. 2, б). Он также не наблюдался в работах [12, 13], что обусловлено линейностью рассмотренных там систем. Наличие систематической ошибки при оценке энтропии переноса можно исправить, увеличив длину реализации  $N$ . Однако данный способ часто неприменим на практике в силу ограниченности объёма экспериментальных данных или существенной нестационарности рассматриваемых сигналов.

Расчёт зависимости  $TE_{Y \rightarrow X}$  в заведомо ложную сторону проводился во всех рассмотренных случаях. Для линейных процессов авторегрессии среднее значение  $TE_{Y \rightarrow X}$  статистически (по ансамблю из 20 реализаций на уровне значимости 0.05) не отличается от нуля. Для связанных отображений Эно наблюдается систематическая ошибка – значения  $TE_{Y \rightarrow X} < 0$ . Отличие от нуля статистически значимо во многих случаях, то есть имеет место та же ошибка, что и при нулевой связи.

Можно предложить иной способ уменьшения ошибки, в котором вычисления проводятся при разных номерах соседа  $K$ . На рис. 3, а видно, что при увеличении номера соседа систематическая ошибка уменьшается и стремится к нулю. Численные эксперименты показали, что увеличение номера соседа при расчёте энтропии переноса методом  $K$ -ближайших соседей ведёт к уменьшению систематической ошибки при малых величинах  $\gamma$ . К сожалению, одновременно происходит занижение оценок при больших  $\gamma$ , что обусловлено излишним усреднением в слишком большой окрестности и может быть исправлено только увеличением длины ряда. Если целью исследования является обнаружение факта наличия связи и её направления, а не получение точных количественных мер силы связи, то недооценивание величины  $TE$

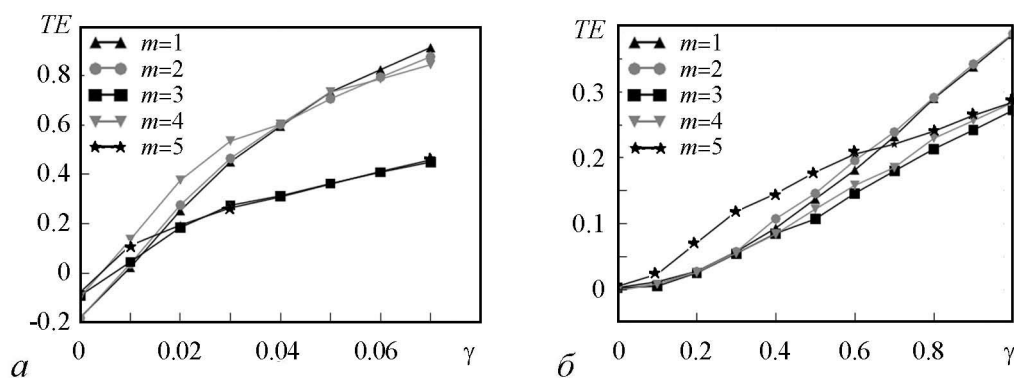


Рис. 2. а – график зависимости оценки энтропии переноса от коэффициента связи в заведомо верную сторону  $TE_{X \rightarrow Y}(\gamma)$  для однонаправленно связанных обобщённых отображений Эно при различных  $m$ :  $m = 1$  – кривая соответствует логистическому отображению;  $m = 2$  – обычному отображению Эно;  $m = 3$ ,  $m = 4$  и  $m = 5$  – соответствуют обобщённому отображению Эно;  $N = 10000$ . б – график зависимости оценки энтропии переноса от коэффициента связи в заведомо верную сторону  $TE_{X \rightarrow Y}(\gamma)$  для однонаправленно связанных процессов авторегрессии первых пяти порядков (от  $m = 1$  до  $m = 5$ ),  $N = 10000$

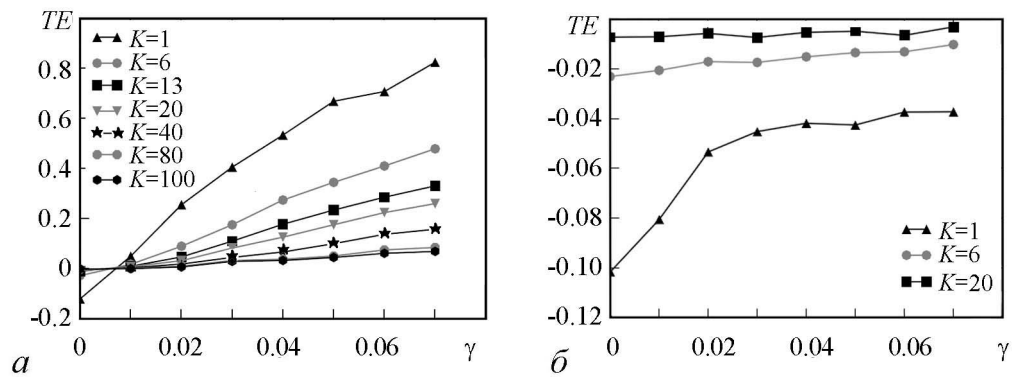


Рис. 3. *a* – график зависимости оценки энтропии переноса в заведомо верную сторону  $TE_{X \rightarrow Y}(\gamma)$  от коэффициента связи однонаправленно связанных отображений Эно 4-го порядка ( $m = 4$ ) для разных номеров соседа  $K$ ; *b* – графики зависимости оценки энтропии переноса от коэффициента связи  $TE_{X \rightarrow Y'}(\gamma)$  для разных номеров соседа  $K$

не является критическим, но тем не менее снижается чувствительность подхода. Поэтому следует искать некое компромиссное значение  $K$ , для чего необходимо уметь диагностировать имеющуюся проблему и не использовать слишком большие  $K$  в случае, когда в этом нет необходимости.

Выявить наличие нулевого сдвига и подобрать оптимальный номер соседа можно, рассчитав энтропию переноса между рядами, которые явно не связаны. Для экспериментальных данных это могут быть два набора измерений. Так, если мы имеем два набора данных: первый –  $\{x_i\}_{i=1}^N$  и  $\{y_i\}_{i=1}^N$  и второй –  $\{x'_i\}_{i=1}^N$  и  $\{y'_i\}_{i=1}^N$ , где в действительности  $X \rightarrow Y$  и  $X' \rightarrow Y'$ , то оценка энтропии переноса  $X \rightarrow Y'$  (и, аналогично,  $Y \rightarrow X'$ ) должна быть равна нулю. На рис. 3, *b* представлены результаты оценивания энтропии переноса  $TE_{X \rightarrow Y'}$  для двух сгенерированных с разными начальными условиями систем вида (7). Видно что при  $K = 1$  имеется значительная систематическая ошибка, которая уменьшается с увеличением номера соседа (кривые при  $K = 6$  и  $K = 20$ ).

### Заключение

Показана применимость метода  $K$ -ближайших соседей при оценке энтропии переноса для диагностики слабой направленной связи между двумя нелинейными колебательными системами по временным рядам систем различной размерности. На примере обобщённого отображения Эно для нелинейных систем выявлена систематическая ошибка, проявляющаяся при сравнительно малых значениях коэффициента связи при оценке энтропии переноса в направлении, в котором связь действительно присутствует. Данная ошибка может вести к тому, что метод не сможет диагностировать наличие слабой связи. Предложен практический способ её уменьшения – определено, что с ростом номера соседа  $K$  систематическая ошибка уменьшается. Однако одновременно снижается чувствительность метода: начиная с некоторого значения коэффициента связи оценка энтропии переноса существенно занижается с ростом  $K$  – происходит недооценивание. Чтобы избежать возможного недооценивания или минимизировать его последствия, предложена методика диагностики наличия систематической ошибки для произвольных нелинейных систем на осно-

ве двух наборов измерений, позволяющая подобрать оптимальный компромиссный номер соседа  $K$  и тем самым минимизировать потери в чувствительности. Представленные результаты будут полезны для оценки связи по коротким временным рядам нелинейных систем, что важно в часто встречающихся на практике условиях существенной нестационарности сигналов и дефиците данных.

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 14-12-00291.*

### **Библиографический список**

1. *Schreiber T.* Measuring information transfer // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, № 2. P. 461.
2. *Moddemeijer R.* On estimation of entropy and mutual information of continuous distributions // *Signal Processing.* 1989. Vol. 16, № 3. P. 233.
3. *Lee J., Nemati S., Silva I., Edwards B.-A., Butler J.-P., Malhotra A.* Transfer entropy estimation and directional coupling change detection in biomedical time series // *BioMedical Engineering OnLine.* 2012. 11:19.
4. *Silverman B.* Density estimation for statistics and data analysis. London: Chapman and Hall, 1986. 175 p.
5. *Darbellay A.G., Vajda I.* Estimation of the information by an adaptive partitioning of the observation space // *IEEE Transactions on Information Theory.* 1999. Vol. 45, № 4. P. 1315.
6. *Kugiumtzis D.* Transfer entropy on rank vectors // *Journal of Nonlinear Systems and Applications.* 2012. Vol. 3, № 2. P. 73.
7. *Kraskov A., Stögbauer H., Grassberger P.* Estimating mutual information // *Phys. Rev. E.* 2004. 69: 66138.
8. *Jizba P., Kleinert H., Shefaat M.* Renyi's information transfer between financial time series // *Physica A.* 2012. Vol. 391. P. 2971.
9. *Gomez-Herrero G., Wu W., Rutanen K., Soriano M.C., Pipa G., Vicente R.* Assessing coupling dynamics from an ensemble of time series // *Arxiv preprint arXiv:1008.0539v1.* 2010.
10. *Kaiser A., Schreiber T.* Information transfer in continuous process // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 2002. Vol. 166, № 1–2.
11. *Hahs D.W., Pethel S.D.* Transfer entropy for coupled autoregressive processes // *Entropy.* 2003. Vol. 15(3). P. 767.
12. *Lindner M., Vicente R., Priesemann V., Wibral M.* TRENTOOL: A Matlab open source toolbox to analyse information flow in time series data with transfer entropy // *BMC Neuroscience.* 2011. 12:119.
13. *Wibral M., Pampu N., Priesemann V., Siebenhühner F., Seiwert H., Lindner M., Lizier J.T., Vicente R.* Measuring information-transfer delays // *PLoS One.* 2013. Vol. 8(2):e55809.
14. *Smirnov D.A.* Spurious causalities with transfer entropy // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 87. 042917.

15. Козаченко Л.Ф., Леоненко Н.Н. О статистической оценке энтропии случайного вектора // Проблемы передачи информации. 1987. Т. 23:2. Р. 9.
16. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.

**DIAGNOSTICS AND CORRECTION OF SYSTEMATIC ERROR  
WHILE ESTIMATING TRANSFER ENTROPY  
WITH *K*-NEAREST NEIGHBOURS METHOD**

*A. S. Zemlyannikov<sup>1</sup>, I. V. Sysoev<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Saratov State University

<sup>2</sup>Kotel'nikov Institute of Radio-engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

Transfer entropy is widely used to detect the directed coupling in oscillatory systems from their observed time series. The systematic error is detected, while estimating transfer entropy between nonlinear systems with *K*-nearest neighbours method. The way to minimize this error is suggested: the error is decreasing with increase of the neighbour number. The possibility to detect the systematic error is shown using two sets of measured data. The achieved results make possible to rise the method sensitivity and specificity for weakly coupled nonlinear systems.

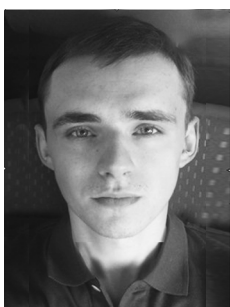
*Keywords:* Time series, coupling analysis, transfer entropy, nonlinear systems.

**References**

1. Schreiber T. Measuring information transfer // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85, № 2. P. 461.
2. Moddemeijer R. On estimation of entropy and mutual information of continuous distributions // Signal Processing. 1989. Vol. 16, № 3. P. 233.
3. Lee J., Nemati S., Silva I., Edwards B.-A., Butler J.-P., Malhotra A. Transfer entropy estimation and directional coupling change detection in biomedical time series // BioMedical Engineering OnLine. 2012. 11:19.
4. Silverman B. Density estimation for statistics and data analysis. London: Chapman and Hall, 1986. 175 p.
5. Darbellay A.G., Vajda I. Estimation of the information by an adaptive partitioning of the observation space // IEEE Transactions on Information Theory. 1999. Vol. 45, № 4. P. 1315.
6. Kugiumtzis D. Transfer entropy on rank vectors // Journal of Nonlinear Systems and Applications. 2012. Vol. 3, № 2. P. 73.
7. Kraskov A., Stögbauer H., Grassberger P. Estimating mutual information // Phys. Rev. E. 2004. 69: 66138.
8. Jizba P., Kleinert H., Shefaat M. Renyi's information transfer between financial time series // Physica A. 2012. Vol. 391. P. 2971.

9. Gomez-Herrero G., Wu W., Rutanen K., Soriano M.C., Pipa G., Vicente R. Assessing coupling dynamics from an ensemble of time series // Arxiv preprint arXiv:1008.0539v1. 2010.
10. Kaiser A., Schreiber T. Information transfer in continuous process // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2002. Vol. 166, № 1–2.
11. Hahs D.W., Pethel S.D. Transfer entropy for coupled autoregressive processes // Entropy. 2003. Vol. 15(3). P. 767.
12. Lindner M., Vicente R., Priesemann V., Wibral M. TRENTOOL: A Matlab open source toolbox to analyse information flow in time series data with transfer entropy // BMC Neuroscience. 2011. 12:119.
13. Wibral M., Pampu N., Priesemann V., Siebenhuhner F., Seiwert H., Lindner M., Lizier J.T., Vicente R. Measuring information-transfer delays // PLoS One. 2013. Vol. 8(2):e55809.
14. Smirnov D.A. Spurious causalities with transfer entropy // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 87. 042917.
15. Kozachenko L.F., Leonenko N.N. // Probl. Inf. Transm. 1987. Vol. 23. P. 95.
16. Kuznetsov S.P. Dynamical chaos. M.: Fizmatlit, 2001. 296 s. (In Russian).

*Поступила в редакцию*    4.06.2015  
*После доработки*            3.09.2015



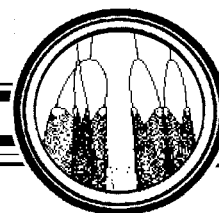
*Земляников Андрей Сергеевич* – родился в Саратове (1989), окончил Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского. В настоящее время – аспирант кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии. Участвовал в IX Всероссийской научной конференции молодых учёных «Нанoeлектроника, нанoфотоника и нелинейная физика». Работает инженером по медицинскому оборудованию в ГУЗ «Областной госпиталь для ветеранов войн», Саратов.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail: a89097z@yandex.ru



*Сысоев Илья Вячеславович* – родился в Саратове (1983), окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2004), защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2007). Доцент базовой кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии, ответственный секретарь редакционной коллегии журнала «Известия вузов. ПНД». Научные интересы – исследование сигналов биологической природы методами нелинейной динамики, исследование эффективности и модернизация подходов к анализу сигналов. Автор более 40 публикаций.

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: ivssci@gmail.com



## FOUR-DIMENSIONAL SYSTEM WITH TORUS ATTRACTOR BIRTH VIA SADDLE-NODE BIFURCATION OF LIMIT CYCLES IN CONTEXT OF FAMILY OF BLUE SKY CATASTROPHES

*A. P. Kuznetsov<sup>1</sup>, S. P. Kuznetsov<sup>1</sup>, N. V. Stankevich<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS

<sup>2</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

A new four-dimensional model with quasi-periodic dynamics is suggested. The torus attractor originates via the saddle-node bifurcation, which may be regarded as a member of a bifurcation family embracing different types of blue sky catastrophes. Also the torus birth through the Neimark-Sacker bifurcation occurs in some other region of the parameter space.

*Keywords:* Quasi-periodic dynamics, torus, attractor, blue sky catastrophe, Neimark-Sacker bifurcation.

### Introduction

Quasi-periodic oscillations represent a wide-spread type of dynamical behavior [1, 2]. One of the important aspects for understanding these regimes concerns bifurcation scenarios of appearance of the quasi-periodic self-oscillations. Most commonly, one can observe two bifurcation scenarios, which can give rise to a torus attractor, the Neimark-Sacker bifurcation and the saddle-node bifurcation of invariant curves. It seems disappointing that till now a very restricted number of simple model autonomous systems with quasi-periodic dynamics were advanced and studied. In the present work we suggest a four-dimensional dynamical system, in which the saddle-node bifurcation of invariant curves producing a two-dimensional torus may be regarded as a member of the bifurcation family of the blue sky catastrophes outlined by Turaev and Shilnikov [4, 5].

Originally, the bifurcation of the blue sky catastrophe was described in [3]. In the simplest case it can be explained as follows. The phase trajectory departs from a vicinity of a semi-stable limit cycle existing at the threshold of the saddle-node bifurcation, goes near a large-size loop along an unstable manifold, and turns back to the limit cycle from the other side. At varying a control parameter in one direction, the semi-stable cycle transforms into a pair of cycles, a stable and an unstable one. If we vary the control parameter in opposite direction, two cycles collide forming the semi-stable cycle, and then disappear, while the large-size limit cycle emerges in the domain containing the helical coils. According to analysis developed in [4], one has to consider, in fact, a family of such bifurcations distinguished by an integer index  $m$ . Actually, in general, as a phase trajectory of the system departs from the semi-stable cycle attributed with some angular coordinate  $\varphi$ ,



after a travel along the unstable manifold and subsequent return, it will be characterized by the angular coordinate expressed by a relation containing an additive term  $m\varphi$ . For three-dimensional phase space (minimal dimension where the blue-sky catastrophe may occur) the integer  $m$  may be either 0, or 1. However, at higher dimensions, any integer can occur. In particular,  $m = 2$  corresponds to a birth of a hyperbolic strange attractor represented by classic Smale–Williams solenoid.

Conditions and mechanisms of birth of limit cycles through the blue sky catastrophe are described in details in [4, 6–10]. In [11] one can find some results demonstrating transition between tonic-spiking and bursting via the blue sky catastrophe in a model of leech neuron. Also, in that paper it was mentioned that this kind of bifurcation can be considered as the main mechanism for the onset of the burst-spike dynamics. In paper [12] the bifurcation of the blue sky catastrophe has been found in binary mixture contained in a laterally heated cavity at small Prandtl numbers.

In paper [13] a four-dimensional system was suggested, in which attractor of Smale–Williams type appears as a result of the blue sky catastrophe with the Turaev–Shilnikov index  $m = 2$ . Modifying this system one can easily obtain models with other integer indices  $m$  representing various types of the blue-sky catastrophes. In this paper we concentrate on the case  $m = 1$ . It occurs that in this case the bifurcation of collision and disappearance of a pair of small-scale limit cycles leads to appearance of a torus attractor. From a point of view of formal bifurcation theory, this bifurcation does not differ from the saddle-node bifurcation of torus birth observed typically at crossing a border of an Arnold tongue in parameter space of systems manifesting both periodic and quasi-periodic behavior. In our setup, however, this bifurcation appears as a representative of the family embracing the whole assortment of blue-sky catastrophes. It is interesting both for understanding the place of the blue sky catastrophes in the whole picture of bifurcations in dynamical systems and, pragmatically, as an approach to elaboration of concrete realizable systems with definite types of dynamical behavior including quasi-periodic self-oscillations and hyperbolic chaotic attractors.

## 1. The basic model and the saddle-node torus bifurcation

The four-dimensional system with attractor of Smale–Williams type arising via the blue sky catastrophe reads [13]:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -i\omega_0 a_1 + (1 - |a_2|^2 + \frac{1}{2}|a_1|^2 - \frac{1}{50}|a_1|^4)a_1 + \frac{1}{2}\varepsilon \text{Im}(a_2^2), \\ \dot{a}_2 &= -i\omega_0 a_2 + (|a_1|^2 - \mu + \frac{1}{2}|a_2|^2 - \frac{1}{50}|a_2|^4)a_2 + \varepsilon \text{Re}(a_1). \end{aligned} \quad (1)$$

This system is composed of two coupled self-oscillators with complex amplitudes  $a_1$  and  $a_2$ ;  $\omega_0$  is the natural frequency of the oscillators, and  $\varepsilon$  is the coupling coefficient. If we set the coupling equal to zero ( $\varepsilon = 0$ ), and consider the amplitude variables, this system becomes a two-dimensional predator–prey model with some additional parameter  $\mu$ . This parameter is responsible for bifurcation of equilibrium states that creates conditions for occurrence of the blue sky catastrophe in the full system. The coupling between the subsystems is organized in some special way. In the system there occurs alternating excitation and dumping of self-oscillatory trains in each oscillator, with transformation of the angular variable representing the phases of the excitation in correspondence with the double-expanding circle map. Due to compression of the phase volume in the state

space of the system in all other directions beside the angular variable, attractor of the stroboscopic map is just the Smale–Williams solenoid. In [13] this mechanism of the system operation is explained in detail.

Let us modify the system (1) providing linear coupling between the subsystems that makes the equations even simpler:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -i\omega_0 a_1 + (1 - |a_2|^2 + \frac{1}{2}|a_1|^2 - \frac{1}{50}|a_1|^4)a_1 + \frac{1}{2}\varepsilon \text{Re}(a_2), \\ \dot{a}_2 &= -i\omega_0 a_2 + (|a_1|^2 - \mu + \frac{1}{2}|a_2|^2 - \frac{1}{50}|a_2|^4)a_2 + \varepsilon \text{Re}(a_1). \end{aligned} \quad (2)$$

Then, the mechanism responsible for formation of the blue sky catastrophe occurs in our system as well; but now it results in appearance of the two-frequency torus instead of the Smale–Williams attractor. The basic two frequencies of the motion on this torus are (i) the natural oscillation frequency  $\omega_0$ , and (ii) that of the long-period oscillatory component, controlled by parameter  $\mu$ , corresponding to motion around the large-size loop arising in the course of the bifurcation.

Let us turn to the numerical study of the system (2). In Fig. 1 the phase portraits are shown in projections on the plane of real amplitudes of coupled oscillators. Panel (a) relates to a subcritical value of  $\mu$  just before the bifurcation. The gray thin line corresponds to a transient process. The thick dark line indicates the small-scale stable limit cycle. The phase trajectory arrives there along the unstable manifold of the fixed point at the origin. With increase of the control parameter, the small-scale stable limit cycle meets the small-scale unstable limit cycle (approaching it from below in the used coordinates). After the collision both cycles disappear leaving a channel nearby the domain of their former occurrence, where the orbits pass relatively slowly, returning close to the origin and then back to the input of the channel along the unstable manifold. The result is formation of the large-size attractor represented by a two-frequency torus. Panel (b) shows this torus arisen after the catastrophe due to the collision and disappearance of the stable and unstable small-size limit cycles.

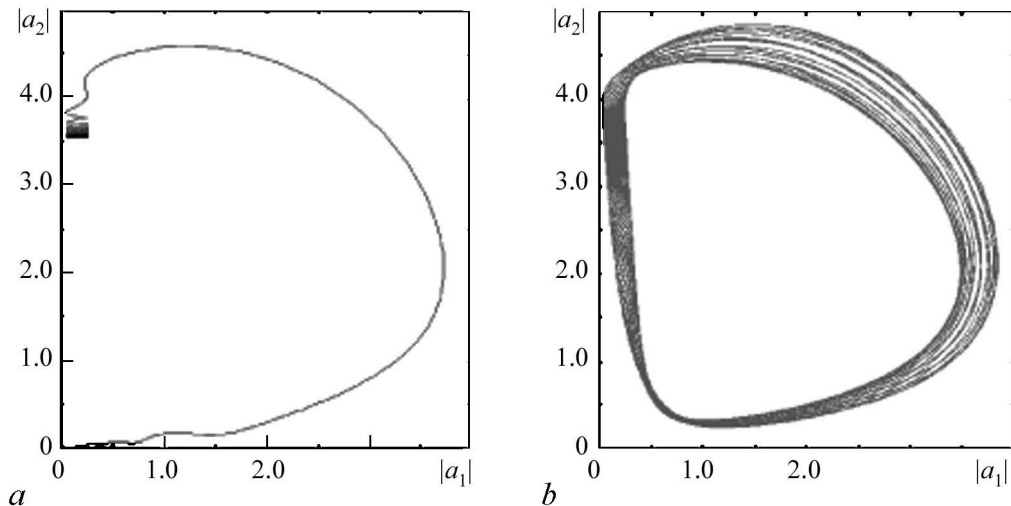


Fig. 1. Phase portraits of the system (2) at  $\varepsilon = 1$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ : *a* – limit cycle and transient process before the torus birth,  $\mu = 3.19$ ; *b* – the torus born as result of the bifurcation similar to the blue sky catastrophe,  $\mu = 3.2$

## 2. Dynamics of the system in dependence on control parameters

Let us consider some features of the dynamics of the system in dependence on parameters, and start with the one-parameter analysis.

In Fig. 2 panel (a) shows the bifurcation diagram that presents dependence of amplitude of the second subsystem on the control parameter  $\mu$ . Other parameters are fixed:  $\varepsilon = 1$ ,  $\omega_0 = 6\pi$ . Two special points are marked in the diagram:  $\mu_c = \mu^{\text{BS}}$  is the critical point of the torus birth as a result of the bifurcation similar to the blue sky catastrophe, and  $\mu_c = \mu^{\text{NS}}$  is the critical point of the torus birth as a result of the Neimark–Sacker bifurcation. Panels (b) and (c) of Fig. 2 show phase portraits corresponding to these two critical situations of the torus birth. Bold dark segment in the left diagram indicates the small-size limit cycle just at the bifurcation situation, and gray color designates the new-born torus. Qualitatively, in the diagram one can see clearly that at the blue sky catastrophe, the trajectory which is situated transversally to the small-size limit cycle is stabilized. In panel (c) the limit cycle is shown as bold closed curve, and the torus born via the Neimark–Sacker bifurcation is shown in gray.

As mentioned in [4, 5], in the vicinity of the blue sky catastrophe the characteristic time of returning of the phase trajectory in the Poincaré section depends on the control parameter as:

$$T(\mu) \sim \frac{1}{\sqrt{\mu - \mu_c}}. \quad (3)$$

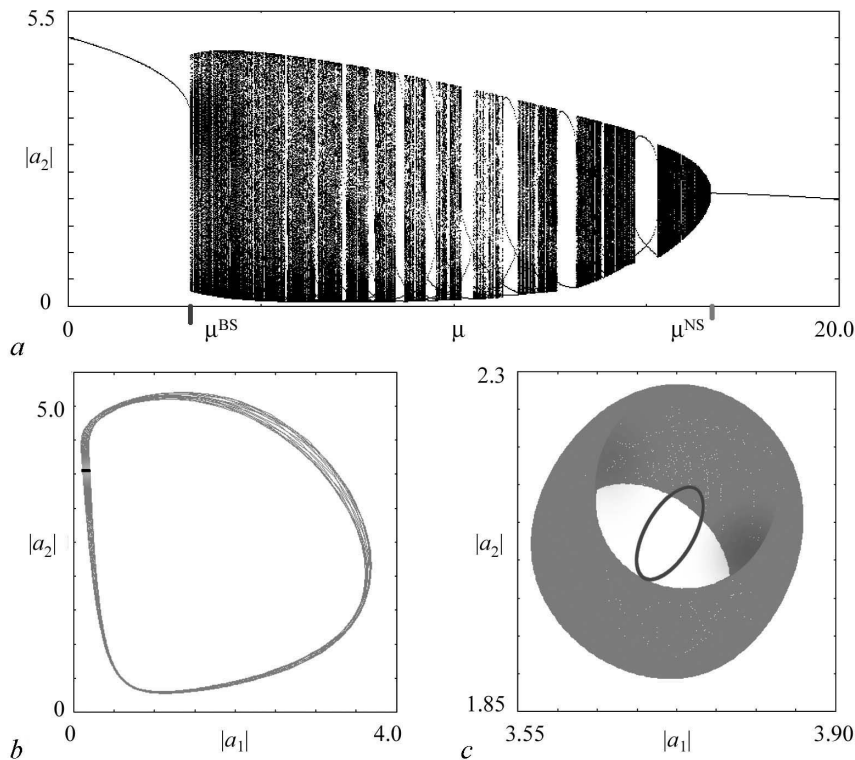


Fig. 2. *a* – Bifurcation diagram of the system (2) for  $\varepsilon = 1$ ,  $\omega_0 = 6\pi$  and phase portraits: *b* – torus birth via bifurcation similar to the blue sky catastrophe; the limit cycle before bifurcation is marked as bold dark horizontal segment ( $\mu = 3.17$ ), and the torus after bifurcation is shown in gray ( $\mu = 3.18$ ); *c* – the torus birth via Neimark–Sacker bifurcation; the bold closed curve is the limit cycle ( $\mu = 16.7$ ), and gray color indicates the torus ( $\mu = 16.65$ )

To check this relation for the system (2), the returns were calculated nearby the bifurcation point  $\mu^{\text{BS}}$ . The Poincaré section was produced by a hypersurface defined by the equation  $|a_2| = c$  with the constant chosen  $c = 2.1$ . In panel (a) of Fig. 3 we show the plot for the average return times versus  $\mu$ . As seen, in the vicinity of the critical parameter value  $\mu^{\text{BS}}$  the dependence for the squared inverse return time is linear. In contrast, nearby the Neimark–Sacker bifurcation  $\mu^{\text{NS}}$  the dependence looks in absolutely different manner, as seen from the plot on panel (b), and it does not have any pronounced intervals of linearity.

Now let us turn to two-parameter analysis of the system (2). In Fig. 4 the chart of dynamical regimes is shown obtained numerically for the system (2) on the parameter plane of the frequency of oscillations  $\omega_0$  and the coefficient controlling the passage through the blue sky catastrophe  $\mu$ . This chart was obtained in the following way. We scan the parameter plane with horizontal and vertical steps small enough, and for each point determine in computations a period of the respective sustained regime in the Poincaré section. (The hypersurface of the Poincaré section was chosen as  $\text{Re}(a_1) = 0$ .) The largest

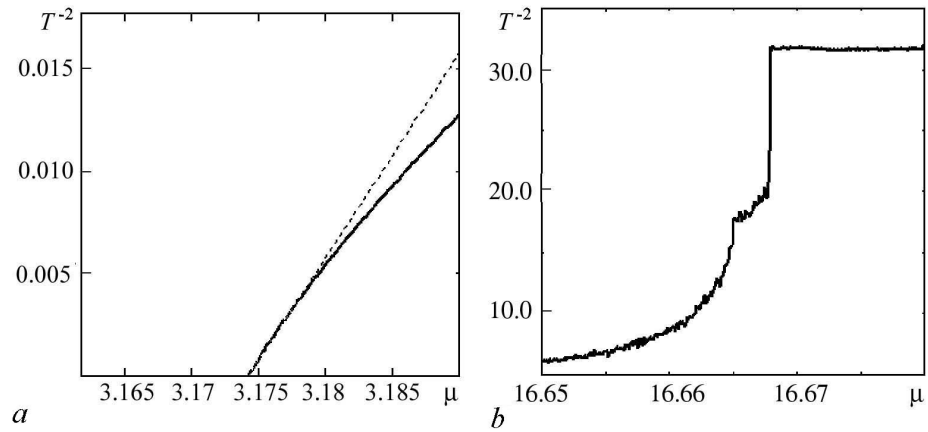


Fig. 3. The dependence of squared inverse averaged time of returns at the Poincaré section on the parameter  $\mu$  for  $\varepsilon = 1$ ,  $\omega_0 = 6\pi$ : *a* – in the vicinity of the bifurcation similar to the blue sky catastrophe, where solid line corresponds to numerical data and dotted line to the approximation (3); *b* – in the vicinity of the Neimark–Sacker bifurcation

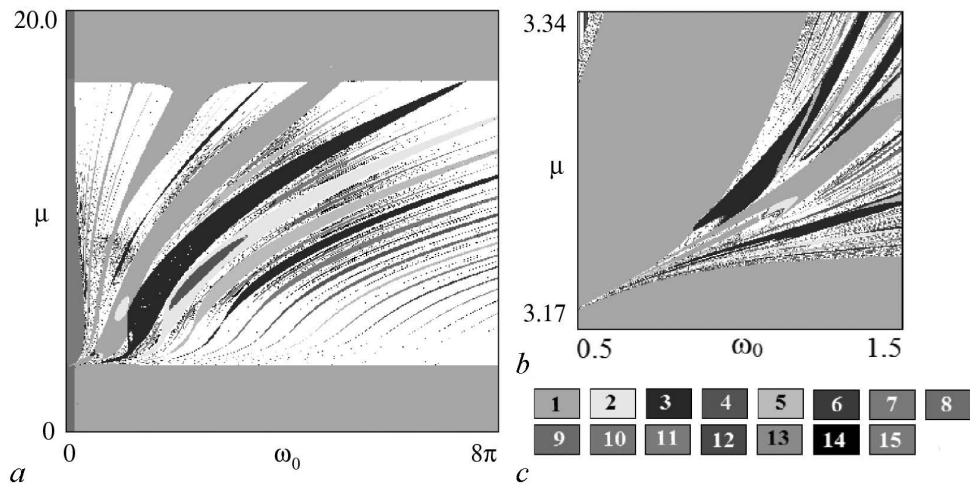


Fig. 4. Chart of dynamical regimes (a) and its magnified fragment (b) for the system (2) at  $\varepsilon = 1$ ; (c) palette establishing correspondence of colors and periods of the regimes

gray area in panels (a) and (b) correspond to the limit cycle of basic period equal to the period of return to the Poincaré section. Other periods are multiples of the basic period and are indicated in the parameter plane chart according to the palette shown in panel (c). White areas relate to regimes without recognized finite periods that may represent either quasi-periodic or chaotic oscillations.

In panel (a) one can see two bifurcation lines of disappearance of the limit cycles. As mentioned, the lower line ( $\mu \approx 3$ ) corresponds to the bifurcation of torus birth similar to the blue sky catastrophe. The upper line ( $\mu \approx 16$ ) corresponds to the Neimark–Sacker bifurcation. One more circumstance confirming the nature of these bifurcations is a characteristic intrinsic structure of the parameter plane in vicinities of the bifurcations.

Along the upper bifurcation line, the set of synchronization tongues is lined up in correspondence to the rational frequency ratios intrinsic to them. Such structure of the parameter plane is typical for situations associated with the Neimark–Sacker bifurcation. In panel (b) a magnified fragment is presented shown a region near the line of the bifurcation similar to the blue sky catastrophe. Observe that synchronization tongues approach the bifurcation line being pulled together in the narrow beam. Analogous parameter plane structures can be observed in different models of neurons, like Hindmarsh–Rose and Sherman models [14, 15].

### Conclusion

In the present paper we suggest a new system manifesting both transitions to quasi-periodic self-oscillations via the bifurcation similar to the blue sky catastrophe and via the Neimark–Sacker bifurcation. For this system main characteristics were calculated, like squared inverse averaged time of returns at the Poincaré section for orbits on the attractor which behaves in essentially different manner for both scenarios of the torus birth. Also, the structure of parameter plane has been revealed for the system.

The proposed system may serve as initial object for construction other models with blue-sky catastrophes generating attractors of various types characterized by different values of the index  $m$  in the Turaev–Shilnikov theory [4,5]. This and similar examples may be of interest for design of electronic devices generating quasi-periodic or chaotic signals, as well as for understanding a variety of dynamical behaviors e.g. in neurodynamics.

*The research was supported partially by the RFBR grant № 14-02-00085 and by the Russian Federation President Program for leading Russian research schools, grant № NSh-1726.2014.2.*

### References

1. Glazier J.A., Libchaber A. Quasi-periodicity and dynamical systems: an experimentalist's view // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1988. Vol.35, № 7. P. 790.
2. Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B. Quasi-periodic motions in families of dynamical systems: order amidst chaos. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1645. Springer, 1996. 200 p.
3. Palis J., Pugh C.C. Fifty problems in dynamical systems //Dynamical Systems-Warwick 1974. - Springer Berlin Heidelberg, 1975. P. 345–353.
4. Turaev D.V., Shilnikov L.P. Blue sky catastrophes // Dokl. Math. 1995. Vol. 51. P. 404–407.

5. *Shilnikov L.P., Turaev D.V.* Simple bifurcations leading to hyperbolic attractors // *Computers & Mathematics with Applications*. 1995. Vol. 34, № 2. P. 173.
6. *Shilnikov L. P., Turaev D. V.* A new simple bifurcation of a periodic orbit of blue sky catastrophe type // *Translations of the American Mathematical Society–Series 2*. 2000. Vol. 200. P. 165.
7. *Gavrilov N., Shilnikov A.* Example of a blue sky catastrophe // *Translations of the American Mathematical Society–Series 2*. 2000. Vol. 200. P.99.
8. *Shilnikov A. L., Shilnikov L. P., Turaev D. V.* Blue sky catastrophe in singularly perturbed systems // *Moscow Math. J.* 2005. Vol. 5. P. 205.
9. *Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V.* Showcase of Blue Sky Catastrophes // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2014. Vol. 24, № 08. P. 1440003.
10. *Shilnikov A. and Turaev D.* Blue-sky catastrophe // *Scholarpedia*. 2007. Vol.2, № 8. P. 1889.
11. *Shilnikov A., Cymbalyuk G.* Transition between tonic spiking and bursting in a neuron model via the blue-sky catastrophe // *Physical Review Letters*. 2005. Vol. 94, № 4. P. 048101.
12. *Meca E., Mercader I., Batiste O. and Ramirez-Piscina L.* Blue sky catastrophe in double-diffusive convection // *Physical Review Letters*. 2004. Vol.92, №. 23. P. 234501.
13. *Kuznetsov S.P.* Example of blue sky catastrophe accompanied by a birth of Smale–Williams attractor // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2010. Vol. 15, № 2–1. P. 348.
14. *Katayama K., Horiguchi T.* Synchronous phenomena of neural network models using Hindmarsh–Rose equation // *Interdisciplinary Information Sciences*. 2005. Vol. 11, №. 1. P. 11.
15. *Sherman A.* Anti-phase, asymmetric and aperiodic oscillations in excitable cells-I. Coupled bursters // *Bulletin of mathematical biology*. 1994. Vol. 56, № 5. P. 811–835.

*Поступила в редакцию 25.05.2015*

УДК 517.9

**ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ СИСТЕМА С ТОРОМ-АТТРАКТОРОМ,  
ВОЗНИКАЮЩИМ ПРИ СЕДЛО-УЗЛОВОЙ БИФУРКАЦИИ  
ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ, В КОНТЕКСТЕ СЕМЕЙСТВА  
КАТАСТРОФ ГОЛУБОГО НЕБА**

*А. П. Кузнецов<sup>1</sup>, С. П. Кузнецов<sup>1</sup>, Н. В. Станкевич<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина

Предложена новая четырехмерная модель с квазипериодической динамикой. Аттрактор в виде тора возникает в результате седло-узловой бифуркации, которая может рассматриваться как представитель семейства, охватывающего различные типы катастроф голубого неба. В той же системе в другой области параметров тор рождается в результате бифуркации Неймарка–Сакера.

*Ключевые слова:* Квазипериодическая динамика, тор, аттрактор, катастрофа голубого неба, бифуркация Неймарка–Сакера.

*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, заведующий базовой кафедрой динамических систем Саратовского государственного университета. Имеет звание профессора. Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 100 статей в российских и международных научных журналах. Научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний», «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны (сборник задач)» и др.



410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН  
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
www.sgtnd.narod.ru  
E-mail: apkuz@rambler.ru

*Кузнецов Сергей Петрович* – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1988). Руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор базовой кафедры динамических систем СГУ. Автор монографии «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», монографии «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», монографии «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены одиннадцать кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

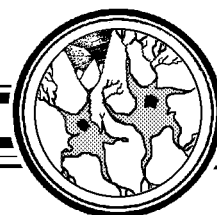


410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН  
E-mail: spkuz@yandex.ru

*Станкевич Наталья Владимировна* – родилась в Саратове (1985). Выпускница Лицея прикладных наук (2000). В 2007 году окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского. В 2011 году защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика». С 2011 года работает доцентом кафедры «Радиоэлектроника и телекоммуникации» Саратовского государственного технического университета имени Ю.А. Гагарина. Имеет более 50 научных публикаций, из которых 22 статьи в российских и зарубежных ведущих научных журналах и одна монография (в соавторстве). Область научных интересов: динамические системы, многочастотные квазипериодические колебания.



4100054 Саратов, ул. Политехническая, 77  
Саратовский государственный технический университет  
им. Ю.А. Гагарина  
E-mail: stankevichnv@mail.ru



## АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ СПОСОБЫ КОНТРОЛЯ И ПОДАВЛЕНИЯ ХАОСА СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН В МОДЕЛИ СЕРДЕЧНОЙ МЫШЦЫ

*Е. А. Павлов, Е. В. Жужома, Г. В. Осипов*

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе исследуется динамика в сетях элементов, описываемых уравнениями модели Луо–Руди. Изучается влияние различных параметров на свойства хаоса спиральных волн. Анализируется зависимость длительности отклика потенциала действия от (i) малого постоянного внешнего тока, подаваемого в систему, (ii) проводимости кальциевого канала, (iii) проводимости калиевого канала. Приводятся гистограммы средних частот элементов Луо–Руди в 2D-решетке и способы регуляризации хаоса спиральных волн с помощью изменения этих параметров. Исследуется возможность подавления спирального хаоса с помощью комбинированного воздействия. Изучается возможность подавления хаоса спиральных волн с помощью высокочастотного сигнала с экспоненциальным спаданием его амплитуды (такая форма является более близкой к реально реализуемой).

*Ключевые слова:* Сердечная динамика, модель Луо–Руди, спиральные волны, фибрилляция, высокочастотное воздействие, спиральный хаос.

### Введение

Математическое моделирование и методы нелинейной динамики играют сегодня фундаментальную роль при изучении и объяснении процессов, протекающих в разнообразных биологических системах на всех уровнях их описания. Одной из таких наиболее важных задач является исследование сердечной активности. Действительно, изучение механизмов развития различного рода аритмий, разработка методов их диагностики и способов их предотвращения и лечения являются сейчас исключительно важными вследствие того, что в экономически развитых странах сердечно-сосудистые заболевания являются основной причиной смертности. Интенсивные исследования в данном направлении ведутся медицинскими работниками, биологами, физиками, специалистами в области математического моделирования.

Сердце является динамической системой. Происходящие в нем процессы могут быть описаны как эволюция некоторых переменных состояний: электрических мембранных потенциалов, проводимостей ионных каналов, ионных токов. Такое описание можно получить, анализируя соответствующие математические модели. Упрощенно сердечную ткань можно рассматривать как среду, состоящую из автоколебательных и возбудимых элементов – клеток. При этом каждая клетка описывается феноменологическими уравнениями типа Ходжкина–Хаксли. Такие модели



строятся в форме обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и включают достаточно большое число динамических переменных. Исследование таких систем невозможно без привлечения методов параллельных вычислений и использования современной вычислительной техники.

Сейчас наступает новый этап исследований сердечной деятельности, обусловленный наличием двух факторов: существованием достаточно реалистических моделей сердечных клеток, базирующихся на новейших электрофизиологических данных, и доступностью высокопроизводительной вычислительной техники, позволяющей эффективно выполнять вычисления, необходимые при моделировании сложных пространственно-временных процессов в сердце. Считается общепринятым, что при одной из сердечных аритмий – тахикардии (а следовательно, и в ее модели) появляется вращающаяся вокруг себя спиральная волна. Частота ее вращения выше частоты нормального следования импульсов возбуждения. Результат – учащенное сердцебиение. При определенных условиях спиральная волна становится неустойчивой и распадается на несколько спиральных волн – в модели наблюдается сложная пространственно-временная динамика – спиральный хаос [1–4]. Поведение сердца становится беспорядочным – возникают различного рода мерцательные аритмии. К таковым относят трепетание и мерцание предсердий, фибрилляцию желудочков, которые в ряде случаев могут привести к смерти пациента. Очевидно, что именно аритмии, связанные с возникновением спирального хаоса, их характеристики, механизмы возникновения и способы борьбы имеют наибольшую важность.

Одним из эффективных способов купирования мерцательных аритмий является дефибрилляция – кратковременное, но очень мощное воздействие на сердце электрическим током (осуществляется с помощью как внешних, так и имплантируемых устройств – дефибрилляторов (деаритмиторов). Подаваемый ими сильный электрический импульс (напряжение 5000 В, ток 10 А, длительность 10 мс при внешней дефибрилляции) приводит к одновременному возбуждению и сокращению всех волокон сердечной мышцы, что способствует возобновлению нормальных сердечных сокращений). Такое воздействие является достаточно болезненным и способно повредить сердечную ткань. Поэтому одной из наиболее перспективных задач в области математического моделирования сердечной активности является разработка альтернативных способов подавления хаоса спиральных волн.

В нелинейной динамике известен ряд способов управления сложными, в том числе хаотическими, процессами с помощью слабых сигналов. В этой связи разработка и применение таких способов управления для сердечных аритмий сигналами, сопоставимыми с сигналами в сердце (амплитудой порядка 0.1 В) – важная современная задача. Очевидно, что протекающие в сердце электрохимические процессы обуславливают возможность трех типов внешнего воздействия: электрического, медикаментозного и их сочетания. Данные воздействия можно реализовать с помощью компьютерного моделирования, добавляя в систему ОДУ стимулирующий ток в первом случае, и изменяя параметры проводимости ионных каналов во втором.

К настоящему времени в данном направлении имеется ряд достижений. Так, в работе [5] экспериментально показано, что с помощью управления с обратной связью можно обнаружить спиральные волны и подавить их. Возможность управлять распространяющимися волнами, изменяя управление по обратной связи, также показана в [6]. Авторы [7] приводят несколько схем управления с обратной связью, позволяющих стабилизировать распространяющуюся плоскую волну в системах типа реакция–диффузия. При этом в работе [8] показано, что внешнее воздействие,

подаваемое на всю среду, будет эффективным только при минимальном количестве возбужденных элементов в сети.

Один из альтернативных способов подавления хаоса спиральных волн состоит в использовании слабого периодического [9, 10] или силового воздействия [11–15], приложенного к некоторой области среды. В частности, метод, предложенный в работе [11], основан на том, что высокочастотные волны с течением времени вытесняют из среды все волны с меньшими частотами распространения. Для достижения этого предложено прикладывать локализованное в среде внешнее периодическое воздействие с частотой выше «средней» частоты спирального хаоса [16–21]. Оказалось, что из-за эффекта бистабильности, то есть возможности сосуществования двух устойчивых решений, такое воздействие не всегда оказывается успешным. Именно так и происходило во множестве реальных экспериментов. Однако в комбинации с применением «виртуальных» лекарств – блокаторов кальциевых каналов [22, 23] (в модели это уменьшение параметра проводимости кальция) – высокочастотное воздействие давало стопроцентный положительный результат.

Эффект подавления спиральных волн в модели Алиева–Панфилова при использовании управления с задержкой в обратной связи продемонстрирован в работе [24]. Еще одним способом подавления фибрилляции [25] является использование синусоидального высокочастотного переменного тока для удержания миокарда в «заблокированном» состоянии в течение длительного промежутка времени. В работе [26] предлагается подавать последовательность из нескольких (5 или 7) электрических импульсов малой амплитуды вместо одного импульса большой амплитуды. Показано, что для достижения эффекта снижение суммарной энергии импульсов составило в среднем 84%. Способ стимуляции сердца путем малых возмущений постоянной амплитуды с чередующимися частотами изложен в работе [27]. Данный способ более устойчив к шумам, чем многие аналогичные методы и поэтому более эффективен с точки зрения реализации экспериментов и применения для лечения аритмий.

В настоящей работе изучается возможность подавления спирального хаоса с помощью комбинированного воздействия в виде слабого локализованного переменного электрического тока и одновременно с этим одного из трех вариантов: (i) слабого постоянного тока, (ii) блокаторов кальциевых каналов [11] (например, верапамил) и (iii) активаторов калиевых каналов (таких как никорандил, миноксидил и др.). Анализируется влияние параметров воздействия на длительность отклика потенциала действия и свойства хаоса спиральных волн. Рассматривается возможность использования высокочастотного сигнала со спадающей амплитудой для подавления спирального хаоса. В отличие от известных ранее способов подавления спирального хаоса, в работе предлагается несколько вариантов комбинированного воздействия для подавления спирального хаоса. Такой подход позволил получить отклик на высокой частоте при достаточно малой амплитуде внешнего воздействия, что дает возможность контролировать процессы в сердце, а в конечном итоге – эффективно бороться со спиральными волнами, а значит, и с аритмией.

## 1. Описание модели

Для моделирования процессов, происходящих в сердечной мышце, одной из наиболее известных является модель электрической активности сердечных клеток

Луо–Руди [28]. Динамика изменения мембранного потенциала ( $V_m$ ) описывается дифференциальным уравнением

$$C_m \frac{dV_m}{dt} = -(I_{\text{ion}} + I^{\text{st}} + I^{\text{ext}}) + D\nabla^2 V_m, \quad (1)$$

где параметр  $C_m = 1$  мФ/см<sup>2</sup> – емкость мембраны;  $D = 1.25$  см<sup>2</sup>/мс – коэффициент диффузии;  $I^{\text{st}}$  и  $I^{\text{ext}}$  – стимулирующие (внешние) токи, а  $I_{\text{ion}}$  – сумма шести ионных токов

$$I_{\text{ion}} = I_{\text{Na}} + I_{\text{si}} + I_{\text{K}} + I_{\text{K1}} + I_{\text{Kp}} + I_{\text{b}},$$

которые определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} I_{\text{Na}} &= G_{\text{Na}} m^3 h j (V_m - E_{\text{Na}}), \\ I_{\text{si}} &= G_{\text{si}} d f (V_m - E_{\text{si}}(V_m, c)), \\ I_{\text{K}} &= G_{\text{K}} x x_i (V_m) (V_m - E_{\text{K}}), \\ I_{\text{K1}} &= G_{\text{K1}} k_{1i} (V_m) (V_m - E_{\text{K1}}), \\ I_{\text{Kp}} &= G_{\text{Kp}} k_p (V_m) (V_m - E_{\text{Kp}}), \\ I_{\text{b}} &= G_{\text{b}} (V_m - E_{\text{b}}), \end{aligned}$$

где  $G_i$  ( $i = \text{Na}, \text{si}, \text{K}, \text{K1}, \text{Kp}, \text{b}$ ) – максимальные постоянные проводимости ионных каналов,  $E_i$  – потенциалы реверсии. Воротные переменные  $g_i = m, h, j, d, f, x$  определяются выражением вида

$$\frac{dg_i}{dt} = \alpha_{g_i}(V_m)(1 - V_m) - \beta_{g_i}(V_m)V_m.$$

Нелинейные функции  $\alpha_{g_i}(V_m)$ ,  $\beta_{g_i}(V_m)$ ,  $E_{\text{si}}(V_m, c)$ ,  $x_i(V_m)$ ,  $k_{1i}(V_m)$ ,  $k_p(V_m)$  соответствуют функциям модели Луо–Руди [28]. Наконец, дифференциальное уравнение

$$\frac{dc}{dt} = 10^{-4} I_{\text{si}}(V_m, d, f, c) + 0.07(10^{-4} - c)$$

определяет внутриклеточную концентрацию ионов кальция. В качестве начальных значений параметров взяты значения параметров оригинальной модели Луо–Руди [28]:  $G_{\text{Na}} = 23$ ,  $G_{\text{si}} = 0.09$ ,  $G_{\text{K}} = 0.282$ ,  $G_{\text{K1}} = 0.6047$ ,  $G_{\text{Kp}} = 0.0183$ ,  $G_{\text{b}} = 0.03921$ ,  $E_{\text{Na}} = 54.4$ ,  $E_{\text{si}} = 118.7$ ,  $E_{\text{K}} = -77$ ,  $E_{\text{K1}} = E_{\text{Kp}} = -87.23$ ,  $E_{\text{b}} = -59.87$ .

В уравнении (1) в зависимости от значения тока  $I^{\text{ext}}$  можно получить элемент с автоколебательной или возбудимой динамикой. На рис. 1 приведен график зависимости частоты элемента от постоянного тока  $I^{\text{ext}}$ . В данном случае при  $I^{\text{ext}} \in [-2.25, -4.00]$  элемент является

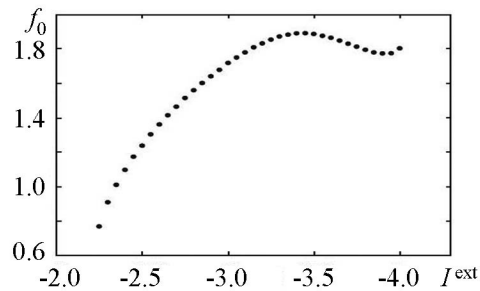


Рис. 1. Зависимость собственной частоты одного элемента Луо–Руди от постоянного тока  $I^{\text{ext}}$ . По вертикальной оси отложены значения частоты элемента ( $\Gamma$ ), по горизонтальной оси – значения тока ( $\text{мА/см}^2$ )

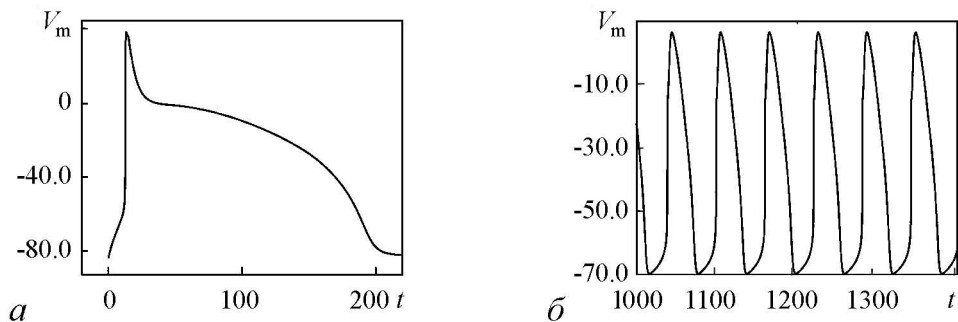


Рис. 2. Зависимости потенциала действия от времени элементов Луо–Руди при различных значениях внешнего тока:  $a - I^{\text{ext}} = 0$  (возбудимый элемент),  $b - I^{\text{ext}} = -3$  (автоколебательный элемент). По вертикальной оси отложены значения мембранного потенциала (мВ), по горизонтальной оси – значения времени

автоколебательным, а вне его – возбудимым. Для различных начальных условий этот интервал меняется, но на отрезке  $[-2.4, -3.5]$  элемент всегда является автоколебательным. Изменение границ, в которых элемент имеет собственную частоту, является следствием наличия бистабильности в системе. Соответствующие зависимости потенциала действия от времени приведены на рис. 2. Здесь рис. 2,  $a$  соответствует возбудимому элементу, а рис. 2,  $b$  – автоколебательному. Таким образом, подавая высокочастотное воздействие на систему, можно получить либо эффект вынужденной синхронизации (для автоколебательных элементов), либо вынужденные колебания (для возбудимых элементов).

## 2. Теоретическая база подхода

Приведём основные фундаментальные правила, которым подчиняются волны, взаимодействующие в однородной возбудимой среде.

- Волна с большей частотой в итоге вытесняет все остальные волны [29–31]. Это приводит к тому, что медленные волны постепенно вытесняются более быстрыми.

- Данная среда типично поддерживает взаимодействие спиральных волн одинаковой частоты [30–32]. Когда спиральные волны с различными частотами взаимодействуют в простой среде, волна с наибольшей частотой будет доминировать соответственно первому правилу. Таким образом, только волны одинаковой частоты могут в итоге сосуществовать в данной среде. Эти характеристики являются результатом основных свойств эволюции мембранного потенциала системы, особенно наличия рефрактерного периода.

- Время подавления сталкивающихся периодически волн зависит от двух факторов: разницы частот волн и скорости распространения волны с большей частотой. Таким образом, медленная волна быстрее захватывается быстрой в зависимости от частоты и/или скорости распространения быстрой волны.

Из приведенных правил следует, что частота подаваемого воздействия должна быть как можно больше частоты вращения спиральных волн в среде. Так как подаваемое внешнее воздействие локализовано в пространстве, то в качестве высокочастотной волны для подавления спиральных волн предполагается инициирование концентрических волн, следующих из точки приложения внешнего сигнала [11].

### 3. Численный анализ

Численные исследования проводились для различных ансамблей элементов – начиная от одного элемента и заканчивая двумерными решетками связанных элементов. Интегрирование правых частей уравнений производилось с использованием метода дробления шага. Граничные условия во всех описанных экспериментах – свободные концы. Связь между элементами – диффузионного типа (каждый элемент связан только с ближайшими соседями). Именно такой тип связи характерен для сердечных клеток (синцития). Частоты элементов вычислялись как частоты пересечения потенциалом действия порогового значения, принимаемого равным  $-40$  мВ, а также усреднялись на длительных интервалах времени.

**3.1. Динамика одного элемента.** Вначале исследовалась динамика одного элемента, описываемого уравнениями модели Луо–Руди. Изучалось влияние малого внешнего постоянного тока  $I^{\text{ext}}$ , блокаторов кальциевых каналов и активаторов калиевых каналов на длительность отклика потенциала действия элемента. Моделирование происходило следующим образом: (i) при исследовании влияния малого постоянного тока  $I^{\text{ext}}$  в уравнении (1) менялось его значение; (ii) при исследовании влияния проводимости кальциевых каналов менялось значение параметра  $G_{\text{si}}$  [11, 28]; (iii) при исследовании влияния проводимости калиевых каналов менялось значение параметра  $G_{\text{K}}$  [28]. Причем в случаях (ii) и (iii) параметр  $I^{\text{ext}}$  считался равным нулю. Зависимости длительности потенциала действия от тока  $I^{\text{ext}}$ , проводимостей кальциевого ( $G_{\text{si}}$ ) и калиевого ( $G_{\text{K}}$ ) каналов приведены на рис. 3. Из рисунков видно, что к уменьшению длительности потенциала действия приводят увеличение значений малого постоянного тока  $I^{\text{ext}}$  от отрицательных значений к положительным (рис. 3, а), уменьшение значений параметра  $G_{\text{si}}$  (рис. 3, б), увеличение значений параметра  $G_{\text{K}}$  (рис. 3, в). Можно также предположить, что в двумерном случае изменение указанных параметров приведет к тому, что хаос в среде станет более регулярным, что может увеличить шансы его успешного подавления.

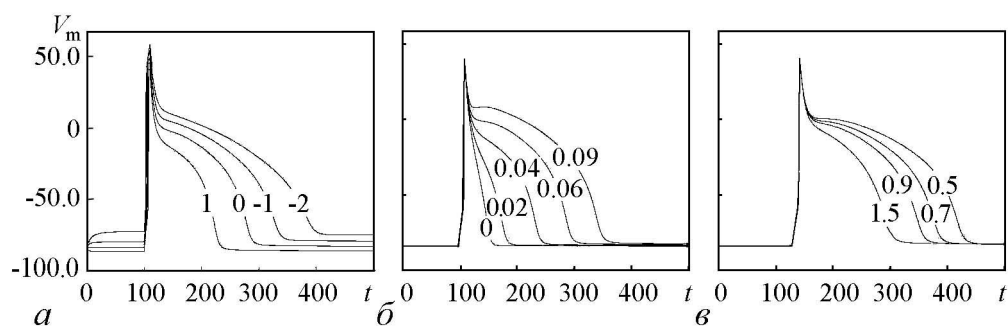


Рис. 3. Зависимость длительности отклика потенциала действия элемента Луо–Руди от малого внешнего постоянного тока  $I^{\text{ext}}$  (а); от проводимости кальциевого канала  $G_{\text{si}}$  (б); от проводимости калиевого канала  $G_{\text{K}}$  (в). Значения параметров  $I^{\text{ext}}$ ,  $G_{\text{si}}$  и  $G_{\text{K}}$  для каждого из экспериментов приведены непосредственно на графиках. По горизонтали отложены значения времени (мс), по вертикали – значения потенциала (мВ)

**3.2. Динамика двумерной решетки элементов Луо–Руди.** Рассмотрим коллективную динамику двумерной решетки ( $300 \times 300$ ) диффузионно-связанных элементов Луо–Руди. В качестве начальных условий в экспериментах загружался хаос спиральных волн. На рис. 4, а–г представлена пространственно-временная динамика

двумерной решетки (спирального хаоса) при различных значениях малого внешнего постоянного тока  $I^{\text{ext}}$ , подаваемого на систему. Из рисунков видно (левый столбец, сверху вниз), что при увеличении тока  $I^{\text{ext}}$  динамика становится более регулярной, хаос спиральных волн становится менее «размазанным», что повышает шансы успешного его подавления. Аналогичный эффект наблюдается при уменьшении проводимости кальциевого канала  $G_{\text{si}}$  (рис. 4,  $\delta$ - $з$ ) и увеличении проводимости калиевого канала  $G_{\text{K}}$  (рис. 4,  $u$ - $м$ ).

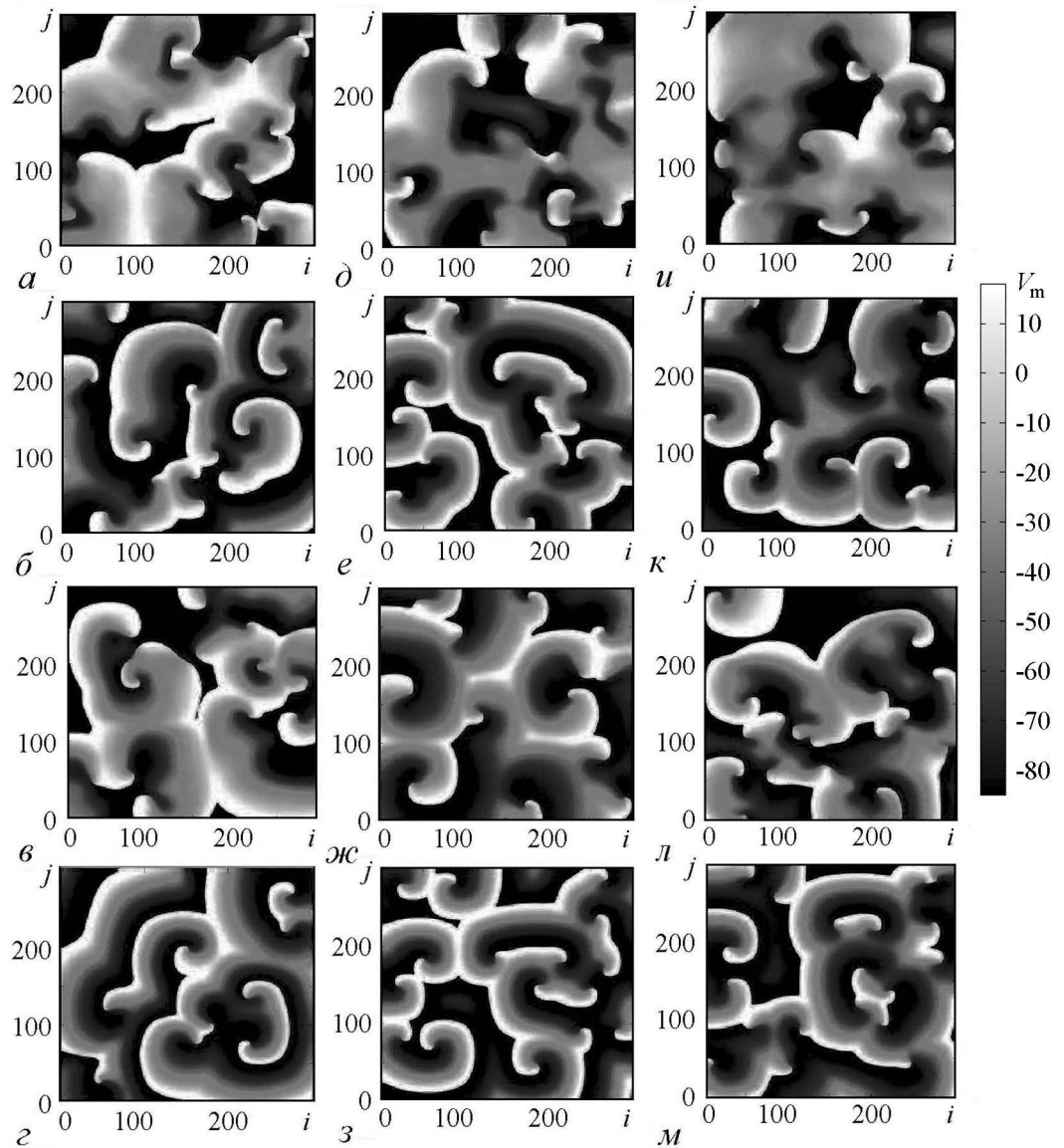


Рис. 4. Пространственно-временная динамика решетки при изменении следующих параметров: (i) малого постоянного тока  $I^{\text{ext}} = 0$  ( $a$ ), 0.4 ( $b$ ), 0.8 ( $e$ ), 1.2 ( $z$ ); (ii) проводимости кальциевого канала  $G_{\text{si}} = 0.06$  ( $\delta$ ), 0.04 ( $e$ ), 0.02 ( $ж$ ), 0 ( $з$ ); (iii) проводимости калиевого канала  $G_{\text{K}} = 0.705$  ( $u$ ), 0.9 ( $к$ ), 1.1 ( $л$ ), 1.4 ( $м$ ). Приведены мгновенные снимки распределения потенциала в среде

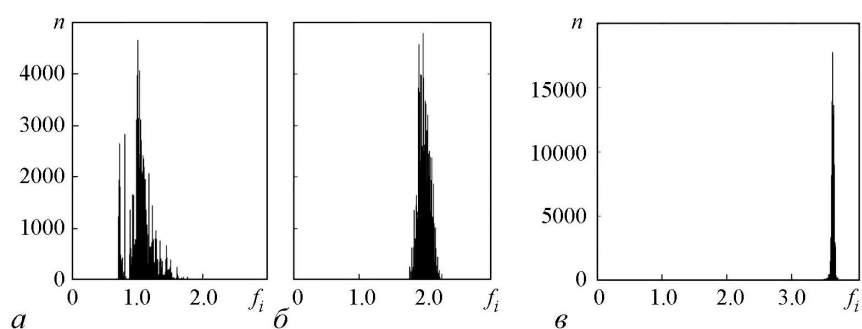


Рис. 5. Гистограммы средних частот элементов Луо–Руди в решетке в условиях существования спирального хаоса в зависимости от величины подаваемого малого постоянного тока  $I^{\text{ext}} = -0.5$  (а), 0 (б), 1.0 (в). По вертикали отложено количество элементов, по горизонтали – соответствующее ему значение частоты (Гц)

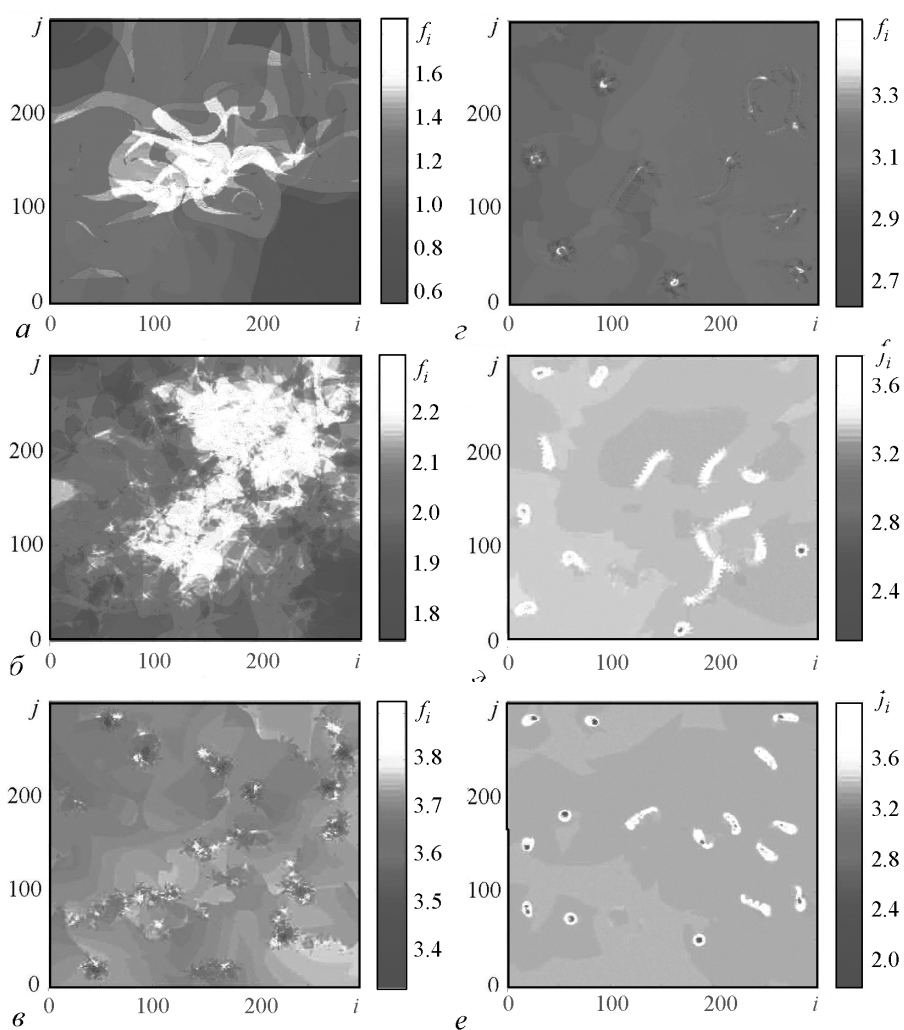


Рис. 6. Распределение средних частот элементов Луо–Руди в решетке в условиях существования спирального хаоса в зависимости от величины подаваемого малого постоянного тока  $I^{\text{ext}} = -0.5$  (а), 0 (б), 1.0 (в) и в зависимости от проводимости кальциевого канала  $G_{\text{si}} = 0.04$  (а), 0.02 (д), 0 (е). По вертикали и горизонтали представлены соответствующие элементы решетки, значения частот показаны оттенками серого цвета

Были построены гистограммы средних частот элементов для решетки, в которой существует хаос спиральных волн. На рис. 5 представлены гистограммы при изменяющемся малом постоянном токе  $I^{\text{ext}}$ . Видно, что с ростом  $I^{\text{ext}}$  разброс частот уменьшается и сдвигается в область более высоких частот. Распределение частот в решетке приведено на рис. 6, *a–в*. При эволюции параметра  $I^{\text{ext}}$  меняется пространственное распределение частот элементов, становятся более отчетливо видны области высоких частот. Как известно, таким образом можно определить движение ядра спиральной волны (ему, как правило, соответствуют области максимальных частот). С ростом параметра  $I^{\text{ext}}$  наблюдается регуляризация хаоса спиральных волн в среде.

На рис. 7 представлены гистограммы при изменяющемся параметре  $G_{\text{si}}$ . Видно, что разброс частот при уменьшении значений  $G_{\text{si}}$  также уменьшается и сдвигается в область более высоких частот. Распределение частот в решетке приведено на рис. 6, *г–е*. Аналогично предыдущему случаю, распределение частот также становится более регулярным.

Таким образом, представленные три способа влияния на свойства хаоса спиральных волн можно объединить по принципу оказываемого ими влияния на свойства потенциала действия клетки и хаоса спиральных волн в целом. А именно уменьшение длительности отклика потенциала действия элемента (вследствие подачи в систему малого постоянного тока или изменения параметров системы) ведет к «регуляризации» хаоса спиральных волн в решетке связанных элементов.

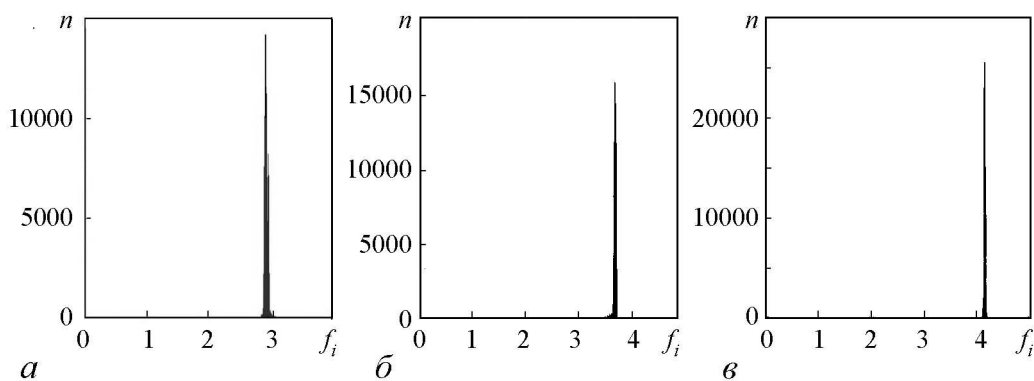


Рис. 7. Гистограммы средних частот элементов Луо–Руди в решетке в условиях существования спирального хаоса в зависимости от проводимости кальциевого канала  $G_{\text{si}}$ : 0.04 (*a*), 0.02 (*б*), 0 (*в*). По вертикали отложено количество элементов, по горизонтали – соответствующее ему значение частоты (Гц)

**3.3. Подавление хаоса спиральных волн с помощью комбинированного воздействия.** В экспериментах рассматривалась двумерная решетка  $300 \times 300$  диффузионно-связанных элементов Луо–Руди, граничные условия – свободные концы. Подавление спирального хаоса проводилось с помощью комбинированного воздействия внешнего периодического сигнала, подаваемого на область в центре решетки размером  $50 \times 50$  элементов, и эволюции одного из ключевых параметров: (i) внешнего малого постоянного тока ( $I^{\text{ext}} = 1$ ), (ii) блокирования кальциевых каналов ( $G_{\text{si}} = 0$ ), (iii) активации калиевых каналов ( $G_{\text{K}} = 1.4$ ), подаваемых на всю рассматриваемую решетку. Параметры периодического воздействия: сигнал подавался прямоугольной формы, скважность сигнала 2% либо 14% (в различных экспериментах), амплитуда  $A = -30$ .



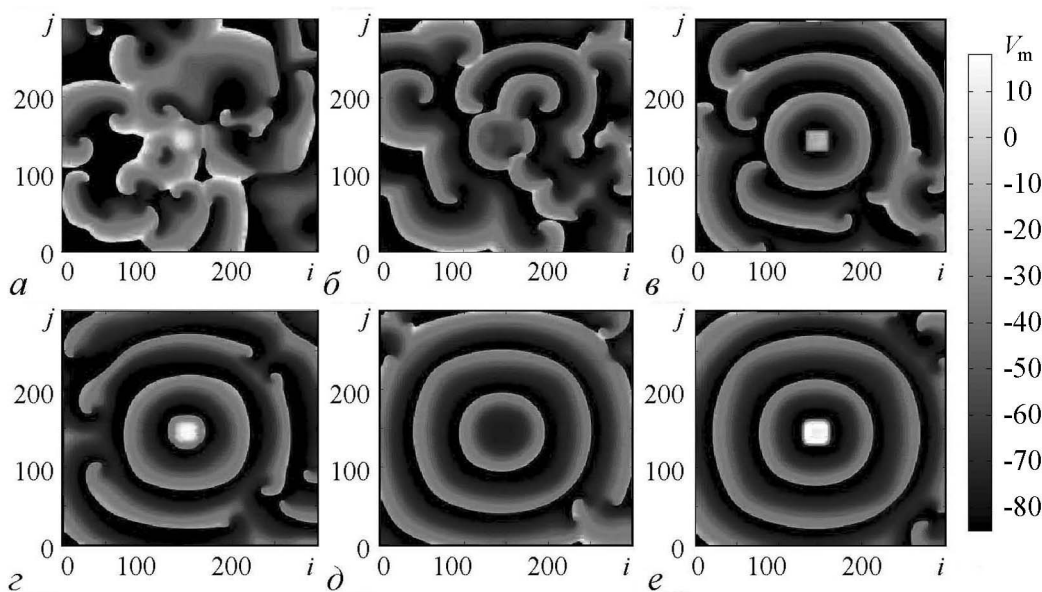


Рис. 8. Подавление хаоса спиральных волн в решетке  $300 \times 300$  элементов Луо–Руди. Внешний малый постоянный ток, подаваемый на все элементы решетки  $I^{\text{ext}} = 1$ , частота внешнего периодического воздействия  $\omega = 0.16$  (или 25.4 Гц). Амплитуда внешнего периодического сигнала  $A = -30$ , скважность сигнала 14%. Представлены мгновенные снимки распределения потенциала в среде в моменты времени  $t = 1$  (а), 601 (б), 1561 (в), 2001 (г), 3241 (д), 3961 (е)

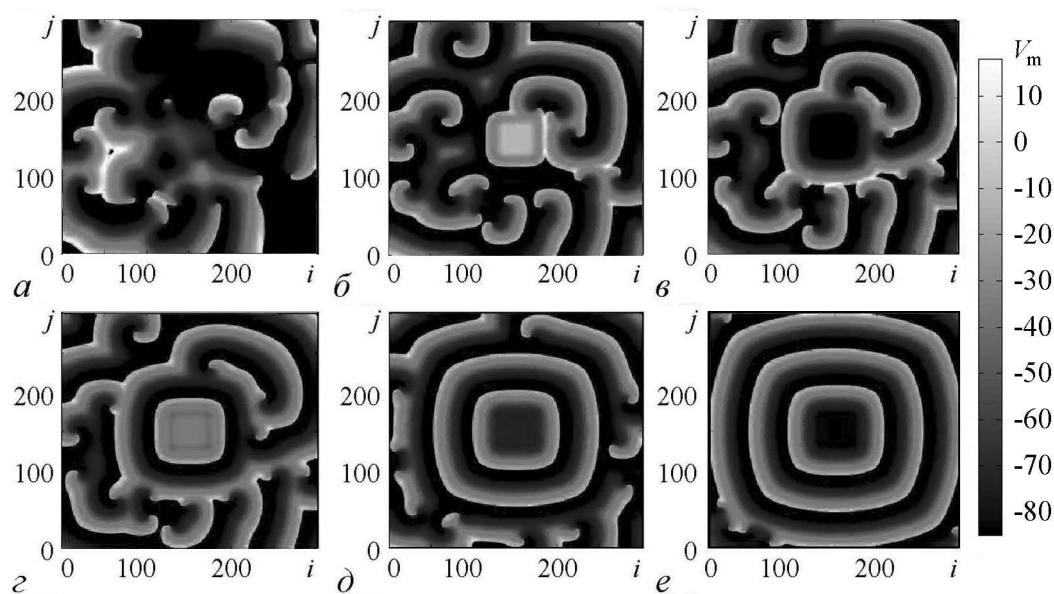


Рис. 9. Подавление хаоса спиральных волн в решетке  $300 \times 300$  элементов Луо–Руди. Параметр  $G_{\text{si}} = 0$ . Частота внешнего периодического воздействия  $\omega = 0.2$  (или 31.8 Гц). Амплитуда внешнего периодического сигнала  $A = -30$ , скважность сигнала 14%. Представлены мгновенные снимки распределения потенциала в среде в моменты времени  $t = 20$  (а), 260 (б), 1220 (в), 2180 (г), 4260 (д), 7940 (е)

На рис. 8 представлены мгновенные снимки распределения потенциала в решетке в случае подавления с использованием малого постоянного тока ( $I^{\text{ext}} = 1$ ). Подавление хаоса спиральных волн происходит за 4 секунды, частота внешнего сигнала  $\omega = 0.16$  (или  $\approx 25.4$  Гц), скважность сигнала 14%. При скважности сигнала 2% и различных частотах  $\omega \in [0.16, 0.22]$  подавление спирального хаоса не происходит.

На рис. 9 представлены мгновенные снимки распределения потенциала в решетке в случае подавления с использованием блокаторов кальциевых каналов ( $G_{\text{si}} = 0$ ). Подавление хаоса спиральных волн происходит за 8 секунд, частота внешнего сигнала  $\omega = 0.2$  (или  $\approx 31.8$  Гц), скважность сигнала 14%. Как и в предыдущем случае, подавление хаоса при скважности сигнала 2% и различных частотах  $\omega \in [0.16, 0.22]$  не происходит.

Эксперименты по подавлению хаоса спиральных волн с использованием активаторов калиевых каналов ( $G_{\text{K}} = 1.4$ ) показали, что подавление происходит примерно за 2.2 секунды при частоте внешнего сигнала  $\omega = 0.16$  (или  $\approx 25.4$  Гц). Подавление хаоса в этом случае возможно также с использованием сигнала скважности 2% и частотой  $\omega = 0.16$ .

#### 3.4. Использование сигнала с экспоненциальным спаданием амплитуды.

В реальных экспериментах высокочастотный сигнал, подаваемый на культуру сердечных клеток с целью подавления хаоса спиральных волн, имеет несколько другую структуру, чем в приведенных выше численных экспериментах. В частности, в месте прикосновения электрода амплитуда его получается больше, а по мере отдаления от этой точки уменьшается по некоторому закону. Далее приведены попытки подавления хаоса спиральных волн в решетке, если электрод – источник высокочастотного сигнала, представленного именно в таком виде. Были рассмотрены три варианта подобных электродов, спадание амплитуды в которых описывается экспоненциальным законом, и проанализированы возможности подавления хаоса спиральных волн в этих случаях в зависимости от скорости спадания амплитуды сигнала.

• Рассмотрим подаваемый высокочастотный сигнал, описываемый следующим выражением:

$$I^{\text{st}}(i, j) = \exp\left(\frac{2 \cos(2i - 300)}{100}\right) \cdot \exp\left(\frac{2 \cos(2j - 300)}{100}\right). \quad (2)$$

Здесь  $i, j$  – координаты элемента в решетке  $300 \times 300$  элементов Луо–Руди, а  $I^{\text{st}}(i, j)$  – внешний высокочастотный сигнал малой амплитуды, подаваемый на элемент с соответствующими координатами. В ходе численных экспериментов установлено, что такой сигнал не подходит для подавления хаоса спиральных волн. Воздействие, проводимое одновременно с подачей внешнего постоянного тока малой амплитуды  $I^{\text{ext}} = 1.0$ ,  $I^{\text{ext}} = 1.2$ ,  $I^{\text{ext}} = 1.5$  (в соответствии с результатами, описанными выше) для различных частот сигнала  $\omega = 0.16$ ,  $\omega = 0.18$ ,  $\omega = 0.2$  не приводило к подавлению хаоса спиральных волн. Численные эксперименты показали, что существующий в решетке хаос практически не изменяется, несмотря на внешний высокочастотный сигнал. Следовательно, такого сигнала недостаточно для подавления хаоса спиральных волн.

• Рассмотрим медленнее спадающий по амплитуде (в сравнении с предыду-

щим случаем) высокочастотный сигнал вида

$$I^{\text{st}}(i, j) = \exp\left(\frac{2 \cos(2i - 300)}{150}\right) \cdot \exp\left(\frac{2 \cos(2j - 300)}{150}\right). \quad (3)$$

Здесь  $i, j$  – координаты элемента в решетке  $300 \times 300$  элементов Луо–Руди, а  $I^{\text{st}}(i, j)$  – внешний высокочастотный сигнал малой амплитуды, подаваемый на элемент с соответствующими координатами. Для сигнала (3) амплитуда спадает медленнее относительно предыдущего случая. Здесь возможны различные варианты эволюции пространственно-временной динамики. Пример неуспешного подавления хаоса спиральных волн приведен на рис. 10 (частота воздействия  $\omega = 0.18$ ,  $I^{\text{ext}} = 1$ , скважность высокочастотного сигнала составляет 14%), когда распространяющиеся в среде спиральные волны практически не реагируют на оказываемое воздействие. Другой результат получается в случае более высоких частот ( $\omega = 0.16$ ,  $\omega = 0.2$  или  $\omega = 0.22$  и  $I^{\text{ext}} = 1.0$ ,  $I^{\text{ext}} = 1.2$ ,  $I^{\text{ext}} = 1.5$ , скважность сигнала как 14%, так и 2%). Здесь наблюдается следующий эффект: спиральная волна «зацепляется» за воздействие, и сама уже становится его частью – подавляя хаос спиральных волн, но продолжая существовать в среде. В этом случае также не удается добиться эффекта подавления хаоса спиральных волн.

- Сигнал с экспоненциальным спаданием амплитуды, с помощью которого удалось добиться желаемого результата, имеет вид

$$I^{\text{st}}(i, j) = \exp\left(\frac{2 \cos(2i - 300)}{175}\right) \cdot \exp\left(\frac{2 \cos(2j - 300)}{175}\right). \quad (4)$$

Здесь  $i, j$  – координаты элемента в решетке  $300 \times 300$  элементов Луо–Руди, а  $I^{\text{st}}(i, j)$  – внешний высокочастотный сигнал малой амплитуды, подаваемый на элемент с соответствующими координатами. Вариант успешного подавления хаоса спиральных волн приведен на рис. 11. Частота в этом случае  $\omega = 0.18$ , постоянный ток  $I^{\text{ext}} = 1.5$ , скважность сигнала 14%. При использовании других значений параметров, а именно  $\omega = 0.16$ ,  $\omega = 0.2$ ,  $\omega = 0.22$ , или  $I^{\text{ext}} = 1.0$ ,  $I^{\text{ext}} = 1.2$ , или скважность сигнала 2%, подавление хаоса спиральных волн не происходит.

Таким образом, можно отметить, что подавление хаоса спиральных волн с помощью высокочастотного сигнала с экспоненциально спадающей амплитудой возможно, однако подбор параметров такого воздействия должен быть достаточно точным для получения успешного результата.

Кроме того, изменение площади подаваемого постоянного сигнала приводит к тому, что вытеснение хаоса спиральных волн происходит только на той площади, на которую подается постоянный ток, а на остальную площадь подаваемое высокочастотное воздействие не оказывает влияния и не приводит к вытеснению хаоса спиральных волн. Отсюда, можно сделать вывод, что для успешного вытеснения хаоса спиральных волн необходимо подавать малый постоянный ток на всю область. При использовании вместо постоянного сигнала малой амплитуды ( $I^{\text{ext}}$ ) других ключевых факторов: блокаторов кальциевых каналов ( $G_{\text{si}} = 0$ ) или активаторов калиевых каналов (увеличение  $G_{\text{K}}$ ), результат будет аналогичен описанному.

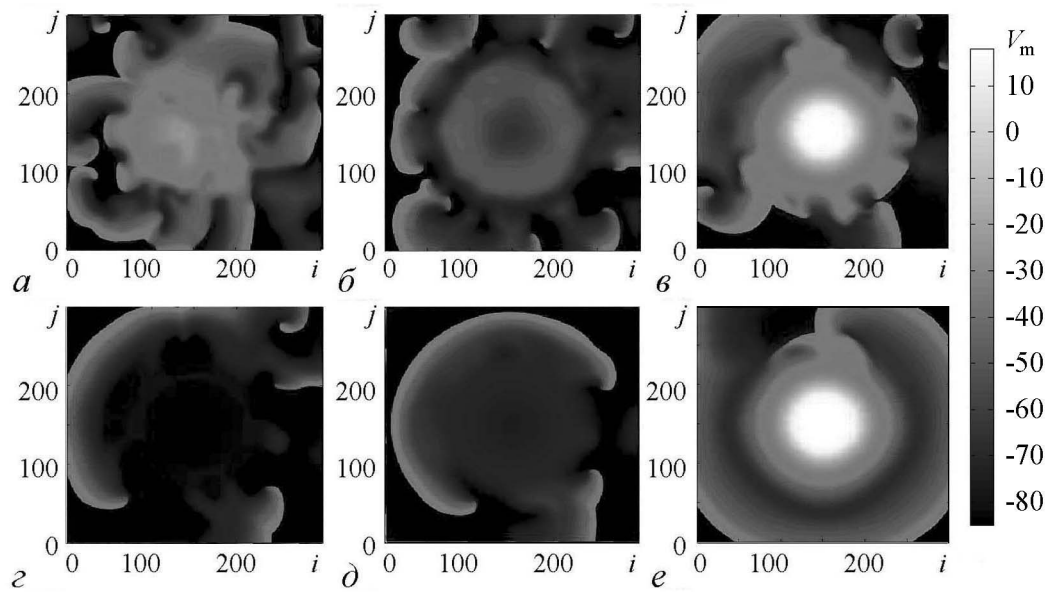


Рис. 10. Попытка подавления хаоса спиральных волн в решетке  $300 \times 300$  элементов Луо–Руди с использованием относительно медленно спадающего высокочастотного сигнала и малого постоянного тока. Малый постоянный ток  $I^{\text{ext}} = 1$  подается на все элементы решетки. А высокочастотный сигнал 14% скважности описывается выражением (7), частота  $\omega = 0.18$ . Представлены мгновенные снимки распределения потенциала в среде в моменты  $t = 10$  (а), 90 (б), 250 (в), 450 (г), 650 (д), 3810 (е)

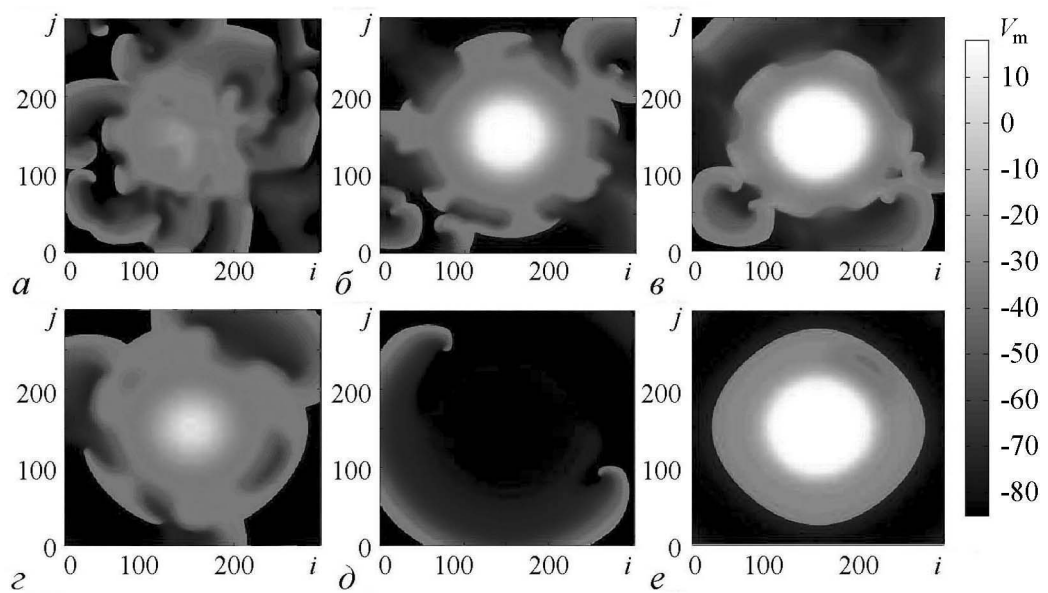


Рис. 11. Подавление хаоса спиральных волн в решетке  $300 \times 300$  элементов Луо–Руди с использованием относительно медленно спадающего высокочастотного сигнала и малого постоянного тока. Малый постоянный ток  $I^{\text{ext}} = 1.5$  подается на все элементы решетки. А высокочастотный сигнал 14% скважности описывается выражением (8), частота его  $\omega = 0.18$ . Представлены мгновенные снимки распределения потенциала в среде в моменты  $t = 10$  (а), 250 (б), 490 (в), 810 (г), 1810 (д), 3250 (е)

## Заключение

В работе показано, что существует три способа влияния на длительность отклика потенциала действия элемента: добавление в систему малого постоянного тока, блокирование кальциевых каналов, активация калиевых каналов. Соответствующий подбор параметров приводит к «регуляризации» хаоса спиральных волн в среде, что было показано с помощью как мгновенных снимков потенциала действия элементов решетки, так и на гистограммах средних частот спирального хаоса и распределении средних частот элементов. В соответствии с этим, было предложено три способа комбинированного воздействия для подавления хаоса: предлагается подавать высокочастотный сигнал малой амплитуды (overdrive pacing) и одновременно – один из трех способов воздействия: (i) подавать слабый постоянный сигнал, (ii) использовать блокаторы кальциевых каналов, (iii) использовать активаторы калиевых каналов. Рассмотрена возможность подавления хаоса спиральных волн, когда форма подаваемого высокочастотного сигнала более близка к реальной – с экспоненциально спадающей амплитудой, и показано, что в этом случае подавление хаоса также является возможным. Изменение площади подаваемого постоянного сигнала приводит к вытеснению хаоса только в той области среды, на которую данный сигнал подается. То есть для успешного подавления хаоса спиральных волн малый постоянный сигнал необходимо подавать на всю область, с которой требуется вытеснить спиральный хаос.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-12-00811, раздел 2; проект № 14-11-00693, раздел 3).*

## Библиографический список

1. *Jalife J., Gray R.A.* Drifting vortices of electrical waves underlie ventricular fibrillation in the rabbit heart // *Acta. Physiol. Scand.* 1996. Vol. 157. P. 123.
2. *Jalife J., Gray R.A., Morley G.E., Davidenko J.M.* Self-organization and the dynamical nature of ventricular fibrillation // *Chaos.* 1998. Vol. 8. P. 79.
3. *Panfilov A.V.* Spiral breakup as a model of ventricular fibrillation // *Chaos.* 1998. Vol. 8. P. 57.
4. *Witkowski F.X., Leon L.J., Penkoske P.A., Giles W.R., Spano M.L., Ditto W.L., Winfree A.T.* Spatiotemporal evolution of ventricular fibrillation // *Nature.* 1998. Vol. 392. P. 78.
5. *Guo W., Quio C., Zhang Z., Ouyang Q., Wang H.* Spontaneous suppression of spiral turbulence based on feedback strategy // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 81. 056214.
6. *Sakurai T., Mihaliuk E., Chirila F., Showalter K.* Design and control of wave propagation patterns in excitable media // *Science.* 2002. Vol. 296. P. 2009.
7. *Vilas C., Garcia M.R., Banga J.R., Alonso A.A.* Robust feedback control of distributed chemical reaction systems // *Chem. Eng. Sc.* 2007. Vol. 62. P. 2941.
8. *Yoneshima H., Konishi K., Kokame H.* Symposium on Nonlinear Theory and its applications // *Chaos.* 2008. Vol. 21. 023101.
9. *Alonso S., Sagues F., Mikhailov A.S.* Taming Winfree turbulence of scroll waves in excitable media // *Science.* 2003. Vol. 299. P. 1722.
10. *Ковалева Н.А., Лоскутов А.Ю.* Стабилизация диффузионно индуцированных

- хаотических процессов // Доклады РАН. 2004. Vol. 396. P. 68.
11. *Stamp A.T., Osipov G.V., Collins J.J.* Suppressing arrhythmias in cardiac models using overdrive pacing and calcium channel blockers // *Chaos*. 2002. Vol. 12. P. 931.
  12. *Osipov G.V., Collins J.J.* Using weak impulses to suppress traveling waves in excitable media // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60. P. 54.
  13. *Zhang H., Hu B., Hu G.* Suppression of spiral waves and spatiotemporal chaos by generating target waves in excitable media // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 68. 026134.
  14. *Лоскутов А.Ю., Черемин Р.В., Высоцкий С.А.* Стабилизация турбулентной динамики возбудимых сред внешним точечным воздействием // Доклады РАН. 2005. Vol. 404. P. 1.
  15. *Лоскутов А.Ю., Высоцкий С.А.* Новый подход к проблеме дефибрилляции: подавление спирально-волновой активности сердечной ткани // Письма в ЖЭТФ. 2006. Vol. 84. P. 616.
  16. *Allessie M., Kirchhof C., Scheffer G.J., Chorro F., Brugada J.* Regional control of atrial fibrillation by rapid pacing in conscious dogs // *Circulation*. 1991. Vol. 84. P. 1689.
  17. *Capucci R.A., Ravelli F., Nollo G., Montenero A.S., Biffi M., Villani G.Q.* Capture window in human atrial fibrillation // *J. Cardiovasc. Electrophysiol.* 1999. Vol. 10. P. 319.
  18. *Daoud E.G., Pariseau B., Niebauer M., Bogun F., Goyal F., Harvey M., Man K.C., Strickberger S.A., Morady F.* Response of type I atrial fibrillation to atrial pacing in humans // *Circulation*. 1996. Vol. 94. P. 1036.
  19. *Kalman J.M., Olgin J.E., Karch M.R., Lesh M.D.* Regional entrainment of atrial fibrillation in man // *J. Cardiovasc. Electrophysiol.* 1996. Vol. 7. P. 867.
  20. *Kirchhof C., Chorro F., Scheffer G.J., Brugada J., Konings K., Zetelaki Z., Allessie M.* Regional entrainment of atrial fibrillation studied by high-resolution mapping in open-chest dogs // *Circulation*. 1993. Vol. 88. P. 736.
  21. *KenKnight B.H., Bayly P.V., Gerstle R.J., Rollins D.L., Wolf P.D., Smith W.M., Ideker R.E.* Regional capture of fibrillating ventricular myocardium: evidence of an excitable gap // *Circ. Res.* 1995. Vol. 77. P. 849.
  22. *Bassett A.L., Chakko S., Epstein M.* Are calcium antagonists proarrhythmic? // *J. Hypertens.* 1997. Vol. 15. P. 915.
  23. *Chay T.R.* Why are some antiarrhythmic drugs proarrhythmic? Cardiac arrhythmia study by bifurcation analysis // *J. Electrocardiol.* 1995. Vol. 28. P. 191.
  24. *Sakaguchi H., Nakamura Y.* Sample entropy of GPi neurons dependence on the level of alertness in 6OHDA rats // *J. of the Phys. Soc. Jap.* 2010. Vol. 79. 074802.
  25. *Tandri H., Weinberg S.H., Chang K.C., Zhu R., Trayanova N.A., Tung L., Berger R.D.* Reversible cardiac conduction block and defibrillation with high-frequency electric field // *Sc. Trans. Med.* 2011. Vol. 102. 102ra96.
  26. *Luther S., Fenton F.H., Kornreich B.G., Squires A., Bittihn P.* Low-energy control of electrical turbulence in the heart // *Nature*. 2011. Vol. 7355. P. 235.
  27. *Sridhar S., Duy-Manh L., Yun-Chieh M., Sinha S., Pik-Yin L., Chan C.K.* Suppression of cardiac alternans by alternating-period-feedback stimulations // *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 87. 042712.

28. Luo C.H., Rudy Y. A model of the ventricular cardiac action potential // *Circ. Res.* 1991. Vol. 68. P. 1501.
29. Krinsky V.I., Agladze K.I. Interaction of rotating waves in an active chemical medium // *Physica D.* 1983. Vol. 8. P. 50.
30. Lee K.J. Wave pattern selection in an excitable system // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 2907.
31. Xie F., Qu Z., Weiss J.N., Garfinkel A. Interactions between stable spiral waves with different frequencies in cardiac tissue // *Phys. Rev. E* 1999. Vol. 59. P. 2203.
32. Zykov V.S. Spiral waves in two-dimensional excitable media // *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 1990. Vol. 591. P. 75.

## ALTERNATIVE METHODS FOR SPIRAL WAVE CHAOS CONTROL AND SUPPRESSING IN CARDIAC MODELS

*E. A. Pavlov, E. V. Zhuzhoma, G. V. Osipov*

Nizhny Novgorod State University

We investigate elements, which describes the Luo–Rudy model equations. We analyze the influence of different parameters for the spiral wave chaos properties. We analyze the effect of (i) constant current influence, (ii) calcium channels blocking, (iii) potassium channels activating. We present the histograms of the middle frequencies of elements, when the spiral wave chaos takes place. We describe the ability of using complex impact for suppressing spiral wave chaos and the ability of using high-frequency signal with exponential reverse amplitude for suppressing (which is more really for using in in-vitro experiments).

*Keywords:* Cardiac dynamics, Luo–Rudy model, spiral waves, fibrillation, overdrive pacing, spiral chaos.

### References

1. Jalife J., Gray R.A. Drifting vortices of electrical waves underlie ventricular fibrillation in the rabbit heart // *Acta. Physiol. Scand.* 1996. Vol. 157. P. 123.
2. Jalife J., Gray R.A., Morley G.E., Davidenko J.M. Self-organization and the dynamical nature of ventricular fibrillation // *Chaos.* 1998. Vol. 8. P. 79.
3. Panfilov A.V. Spiral breakup as a model of ventricular fibrillation // *Chaos.* 1998. Vol. 8. P. 57.
4. Witkowski F.X., Leon L.J., Penkoske P.A., Giles W.R., Spano M.L., Ditto W.L., Winfree A.T. Spatiotemporal evolution of ventricular fibrillation // *Nature.* 1998. Vol. 392. P. 78.
5. Guo W., Quio C., Zhang Z., Ouyang Q., Wang H. Spontaneous suppression of spiral turbulence based on feedback strategy // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 81. 056214.
6. Sakurai T., Mihaliuk E., Chirila F., Showalter K. Design and control of wave propagation patterns in excitable media // *Science.* 2002. Vol. 296. P. 2009.
7. Vilas C., Garcia M.R., Banga J.R., Alonso A.A. Robust feedback control of distributed chemical reaction systems // *Chem. Eng. Sc.* 2007. Vol. 62. P. 2941.

8. *Yoneshima H., Konishi K., Kokame H.* Symposium on Nonlinear Theory and its applications // *Chaos*. 2008. Vol. 21. 023101.
9. *Alonso S., Sagues F., Mikhailov A.S.* Taming Winfree turbulence of scroll waves in excitable media // *Science*. 2003. Vol. 299. P. 1722.
10. *Kovaleva N. A., Loskutov A. Yu.* Stabilization of diffusion-induced chaotic processes// *Doklady–Physical Chemistry*. 2004. Vol. 396, №1. P. 105.
11. *Stamp A.T., Osipov G.V., Collins J.J.* Suppressing arrhythmias in cardiac models using overdrive pacing and calcium channel blockers // *Chaos*. 2002. Vol. 12. P. 931.
12. *Osipov G.V., Collins J.J.* Using weak impulses to suppress traveling waves in excitable media // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60. P. 54.
13. *Zhang H., Hu B., Hu G.* Suppression of spiral waves and spatiotemporal chaos by generating target waves in excitable media // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 68. 026134.
14. *Loskutov A. Yu., Cheremin R. V., Vysotsky S. A.* Stabilization of turbulent dynamics in excitable media by an external point action// *Doklady–Physics*. 2005. Vol. 50, №10. P. 490.
15. *Loskutov A. Yu., Vysotsky S. A.* New approach to the defibrillation problem: Suppression of the spiral wave activity of cardiac tissue // *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*. 2006. Vol. 84, №9. P. 524.
16. *Allessie M., Kirchhof C., Scheffer G.J., Chorro F., Brugada J.* Regional control of atrial fibrillation by rapid pacing in conscious dogs // *Circulation*. 1991. Vol. 84. P. 1689.
17. *Capucci R.A., Ravelli F., Nollo G., Montenero A.S., Biffi M., Villani G.Q.* Capture window in human atrial fibrillation // *J. Cardiovasc. Electrophysiol.* 1999. Vol. 10. P. 319.
18. *Daoud E.G., Pariseau B., Niebauer M., Bogun F., Goyal F., Harvey M., Man K.C., Strickberger S.A., Morady F.* Response of type I atrial fibrillation to atrial pacing in humans // *Circulation*. 1996. Vol. 94. P. 1036.
19. *Kalman J.M., Olgin J.E., Karch M.R., Lesh M.D.* Regional entrainment of atrial fibrillation in man // *J. Cardiovasc. Electrophysiol.* 1996. Vol. 7. P. 867.
20. *Kirchhof C., Chorro F., Scheffer G.J., Brugada J., Konings K., Zetelaki Z., Allessie M.* Regional entrainment of atrial fibrillation studied by high-resolution mapping in open-chest dogs // *Circulation*. 1993. Vol. 88. P. 736.
21. *KenKnight B.H., Bayly P.V., Gerstle R.J., Rollins D.L., Wolf P.D., Smith W.M., Ideker R.E.* Regional capture of fibrillating ventricular myocardium: evidence of an excitable gap // *Circ. Res.* 1995. Vol. 77. P. 849.
22. *Bassett A.L., Chakko S., Epstein M.* Are calcium antagonists proarrhythmic? // *J. Hypertens.* 1997. Vol. 15. P. 915.
23. *Chay T.R.* Why are some antiarrhythmic drugs proarrhythmic? Cardiac arrhythmia study by bifurcation analysis // *J. Electrocardiol.* 1995. Vol. 28. P. 191.
24. *Sakaguchi H., Nakamura Y.* Sample entropy of GPi neurons dependence on the level of alertness in 6OHDA rats // *J. of the Phys. Soc. Jap.* 2010. Vol. 79. 074802.
25. *Tandri H., Weinberg S.H., Chang K.C., Zhu R., Trayanova N.A., Tung L., Berger R.D.* Reversible cardiac conduction block and defibrillation with high-frequency electric field // *Sc. Trans. Med.* 2011. Vol. 102. 102ra96.
26. *Luther S., Fenton F.H., Kornreich B.G., Squires A., Bittihn P.* Low-energy control of electrical turbulence in the heart // *Nature*. 2011. Vol. 7355. P. 235.
27. *Sridhar S., Duy-Manh L., Yun-Chieh M., Sinha S., Pik-Yin L., Chan C.K.* Suppression of cardiac alternans by alternating-period-feedback stimulations // *Phys. Rev. E*.



2013. Vol. 87. 042712.
28. Luo C.H., Rudy Y. A model of the ventricular cardiac action potential // Circ. Res. 1991. Vol. 68. P. 1501.
  29. Krinsky V.I., Agladze K.I. Interaction of rotating waves in an active chemical medium // Physica D. 1983. Vol. 8. P. 50.
  30. Lee K.J. Wave pattern selection in an excitable system // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79. P. 2907.
  31. Xie F., Qu Z., Weiss J.N., Garfinkel A. Interactions between stable spiral waves with different frequencies in cardiac tissue // Phys. Rev. E 1999. Vol. 59. P. 2203.
  32. Zykov V.S. Spiral waves in two-dimensional excitable media // Ann. N.Y. Acad. Sci. 1990. Vol. 591. P. 75.

Поступила в редакцию 24.07.2015  
После доработки 9.10.2015



*Павлов Евгений Александрович* – родился в 1985 году, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2008). Ассистент кафедры теории управления и динамики систем Института ИТММ ННГУ. Область научных интересов: математическое моделирование, нелинейная динамика и хаос, теория бифуркаций, синхронизация и управление в нелинейных активных средах. Имеет 11 научных публикаций.

603950 Россия, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
E-mail: eugene-pavlov@mail.ru



*Жужома Евгений Викторович* – родился в Дзержинске (1951), окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1973). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1981) и доктора физико-математических наук в ННГУ (2001). С 1990 года работает в ННГУ, с 2013 года – профессор кафедры Теории управления и динамики систем. Опубликовал 80 научных статей (в том числе 7 обзоров) и 2 монографии по теории динамических систем.

603950 Россия, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
E-mail: zhuzhoma@mail.ru



*Осипов Григорий Владимирович* – родился в Нижнем Новгороде (1960), окончил Нижегородский государственный университет (ННГУ) им. Н.И. Лобачевского (1982). В 1986-1988 годах учился в аспирантуре Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» (НСК) АН СССР. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НСК (1988) по математическому моделированию и доктора физико-математических наук в ННГУ (2004) по радиофизике. С 1988 года работает в ННГУ, с 2007 года в качестве заведующего кафедрой «Теории управления и динамики систем». Соавтор монографий «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации» и «Synchronization in oscillatory networks». Опубликовал 140 научных статей (в том числе 2 обзора) по теории колебаний и волн и математическому моделированию.

603950 Россия, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
E-mail: osipov@vmk.unn.ru



## ДИНАМИКА СЕТИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ДИНАМИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

*Д. В. Касаткин, В. И. Некоркин*

Институт прикладной физики РАН

Исследованы динамические состояния, формируемые в сети фазовых осцилляторов, сила взаимодействия между которыми изменяется во времени в зависимости от величины относительной разности фаз осцилляторов. Особенностью рассматриваемой системы является совместная эволюция состояний самих элементов и межэлементных связей. Установлено, что в зависимости от параметров сеть может демонстрировать несколько различных типов поведения: синхронное состояние, двухкластерные и мультикластерные состояния, различные синхронные режимы с фиксированными соотношениями фаз между осцилляторами и асинхронные состояния. Выделены области различных типов динамики в пространстве параметров.

*Ключевые слова:* Фазовые осцилляторы, динамические связи, синхронизация, мультикластерные состояния, фазовые кластеры.

### Введение

Исследование коллективной динамики сетей взаимосвязанных автоколебательных элементов является одной из актуальных задач нелинейной физики. Данная задача важна как для теоретического понимания процессов, наблюдаемых в сложных сетевых системах, так и для широкого круга приложений в различных областях физики, химии, биологии и других дисциплин [1–3]. Одним из распространённых подходов, используемых при моделировании динамики сетей автоколебательных элементов, является подход, основанный на их фазовом описании. Такое описание имеет место в случае, когда связь между элементами является слабой и можно пренебречь изменениями амплитуды колебаний, рассматривая лишь динамику их фаз. В этом случае, следуя подходу, развитому Курамото [1], можно свести задачу к изучению динамики модели в виде сети фазовых осцилляторов, имеющей вид

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{1}{N} \sum_j^N \kappa_{ij} F(\phi_i - \phi_j). \quad (1)$$

Здесь  $\phi_i$  и  $\omega_i$  характеризуют, соответственно, фазу и индивидуальную частоту  $i$ -го осциллятора сети ( $i = 1, \dots, N$ ),  $\kappa_{ij}$  описывает силу воздействия, оказываемого со стороны  $j$ -го на  $i$ -й осциллятор, а  $F(\phi)$  – функция связи, зависящая от

разности фаз взаимодействующих элементов. На сегодняшний день существует значительное количество работ (см. обзоры [4, 5] и цитированную там литературу), посвящённых изучению влияния различных факторов на процессы синхронизации сетей автоколебательных элементов в рамках моделей вида (1). В частности, изучено влияние топологии соединений в сети [6, 7], распределений собственных частот осцилляторов [8, 9], неоднородности коэффициентов силы связей между осцилляторами [10, 11], наличия временных задержек в связях [12, 13] и ряд других факторов. При этом подавляющее большинство исследований в этой области посвящены рассмотрению случая, когда коэффициенты связей между различными осцилляторами сети не изменяются во времени.

Сравнительно недавно появились работы [14–18], в которых исследуются сети фазовых осцилляторов с так называемыми динамическими связями, когда сила взаимодействия между осцилляторами эволюционирует в зависимости от состояний взаимодействующих осцилляторов, в частности, от их относительной разности фаз. Другими словами, характерной особенностью данных систем является совместная эволюция состояний самих элементов и межэлементных связей. Такие системы используются, в частности, при моделировании процессов в нейронных сетях, где связи между нейронами обладают свойством пластичности. Простейшая модель, используемая в этих работах для описания динамики коэффициентов связей  $\kappa_{ij}$ , имеет вид

$$\frac{d\kappa_{ij}}{dt} = -\varepsilon G(\phi_i - \phi_j), \quad |\kappa_{ij}| \leq 1, \quad (2)$$

где  $G(\phi)$  –  $2\pi$ -периодическая функция пластичности, определяющая характер изменения силы межэлементных связей в зависимости от состояний взаимодействующих элементов, в частности, от их относительной разности фаз. Дополнительное условие  $|\kappa_{ij}| \leq 1$  в (2) предотвращает неограниченный рост коэффициентов силы связи. В этом случае диапазон значений, которые могут принимать переменные  $\kappa_{ij}$ , ограничен интервалом  $[-1, 1]$ . Другой способ, при котором рост силы связи, в отличие от предыдущего, контролируется динамически, можно реализовать, например, посредством введения в правую часть уравнения (2) дополнительного слагаемого

$$\frac{d\kappa_{ij}}{dt} = -\varepsilon(G(\phi_i - \phi_j) + \kappa_{ij}^{2\mu+1}), \quad (3)$$

где параметр  $\mu \geq 0$  принимает целочисленные значения. Как отмечено в [14], наличие в системе (3) новых переменных  $\kappa_{ij}$  в случае  $\mu \gg 1$  не вносит существенных изменений в её динамику по сравнению с системой (2). Однако динамика системы (3) при достаточно малых значениях  $\mu$  в [14] не рассматривалась.

В настоящей работе исследуются режимы синхронного поведения в сети, состоящей из  $N$  взаимодействующих фазовых осцилляторов с динамическими связями, которая описывается уравнениями (1) и (3) при  $\mu = 0$ . Считаем, что индивидуальные частоты осцилляторов идентичны,  $\omega_i = 1$ , а функции  $F(\phi)$  и  $G(\phi)$  имеют вид  $F(\phi) = \sin(\phi + \alpha)$  и  $G(\phi) = \sin(\phi + \beta)$ , где параметр  $\alpha$  определяет набег фаз, вызванный наличием задержек передачи воздействия, а  $\beta$  контролирует характер изменения силы связи в зависимости от разности фаз взаимодействующих осцилляторов. При

сделанных предположениях система (1),(3) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d\phi_i}{dt} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \kappa_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha), \\ \frac{d\kappa_{ij}}{dt} = -\varepsilon(\sin(\phi_i - \phi_j + \beta) + \kappa_{ij}). \end{cases} \quad (4)$$

Мы предполагаем, что связи между осцилляторами изменяются во времени значительно медленнее по сравнению с изменением состояний самих осцилляторов, поэтому будем рассматривать случай  $\varepsilon \ll 1$ . Зафиксируем для определённости параметр  $\varepsilon = 0.01$  и изучим динамику системы (4) в области параметров  $D = \{\alpha, \beta : 0 < \alpha < \pi/2, 0 < \beta < 2\pi\}$ .

### 1. Ансамбль из двух фазовых осцилляторов с динамическими связями

Прежде чем переходить к обсуждению результатов, касающихся поведения большого ансамбля динамически связанных осцилляторов, рассмотрим динамику на примере двух взаимодействующих осцилляторов. Задача исследования динамики системы (4) при  $N = 2$  может быть сведена к рассмотрению системы уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= -\kappa_{12} \sin(\psi + \alpha) + \kappa_{21} \sin(-\psi + \alpha), \\ \frac{d\kappa_{12}}{dt} &= -\varepsilon(\sin(\psi + \beta) + \kappa_{12}), \\ \frac{d\kappa_{21}}{dt} &= -\varepsilon(\sin(-\psi + \beta) + \kappa_{21}), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\psi = \phi_1 - \phi_2$ . Детальное исследование динамики системы (5) проведено в [19]. Приведём здесь лишь краткое описание динамических режимов системы и их бифуркаций, которые в дальнейшем позволят объяснить эффекты, наблюдаемые в больших сетях. В [19] показано, что основным режимом системы (5), как и в случае ансамбля со статическими связями, является режим синхронизации осцилляторов, при котором частоты осцилляторов равны, а разность фаз принимает некоторое постоянное значение. В фазовом пространстве модели этому режиму отвечают устойчивые состояния равновесия. Координаты этих состояний равновесия по переменной  $\psi$  характеризуют фиксированные значения расстройки фаз осцилляторов в режиме синхронизации.

При  $\alpha + \beta \neq \pi m$ , ( $m = 1, 2$ ) система (5) имеет четыре состояния равновесия

$$O_1(\psi = -\frac{\pi}{2}, \kappa_{12} = \cos \beta, \kappa_{21} = -\cos \beta),$$

$$O_2(\psi = 0, \kappa_{12} = -\sin \beta, \kappa_{21} = -\sin \beta),$$

$$O_3(\psi = \frac{\pi}{2}, \kappa_{12} = -\cos \beta, \kappa_{21} = \cos \beta),$$

$$O_4(\psi = \pi, \kappa_{12} = \sin \beta, \kappa_{21} = \sin \beta).$$

Нетрудно заметить, что координаты состояний равновесия по переменной  $\psi$  остаются неизменными при варьировании параметров, а по переменным  $\kappa_{12}$  и  $\kappa_{21}$  зависят только от значения параметра  $\beta$ . Анализ устойчивости этих состояний равновесия показал, что изменение их типа происходит попарно для состояний равновесия  $O_1, O_3$  и  $O_2, O_4$ .

На рис. 1, а приведено разбиение плоскости параметров  $(\beta, \alpha)$  на области с различными динамическими режимами системы (5). Установлено, что в областях параметров  $S_1$  и  $S_2$  аттракторами системы (5) являются пары состояний равновесия  $O_1, O_3$  и  $O_2, O_4$ , соответственно, и все траектории фазового пространства стремятся к ним при  $t \rightarrow +\infty$ . Кривые  $h_1$  и  $h_2$  отвечают смене устойчивости соответствующих состояний равновесия в результате суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа. Кроме того, смена устойчивости состояний равновесия происходит при пересечении бифуркационных кривых  $\alpha + \beta = \pi m$ , ( $m = 1, 2$ ). В данном случае один из характеристических показателей обращается в нуль, а в фазовом пространстве системы (5) формируется линия состояний равновесия

$$L_0 = \{\psi = \psi_0, \kappa_{12} = -\sin(\psi_0 + \beta), \kappa_{21} = \sin(\psi_0 - \beta)\},$$

где  $\psi_0$  изменяется от  $-\pi$  до  $\pi$ .

В области AS (см. рис. 1, а), расположенной между бифуркационными кривыми  $h_1$  и  $h_2$ , система (5) не имеет устойчивых состояний равновесия. При значениях параметров из этой области в фазовом пространстве модели одновременно

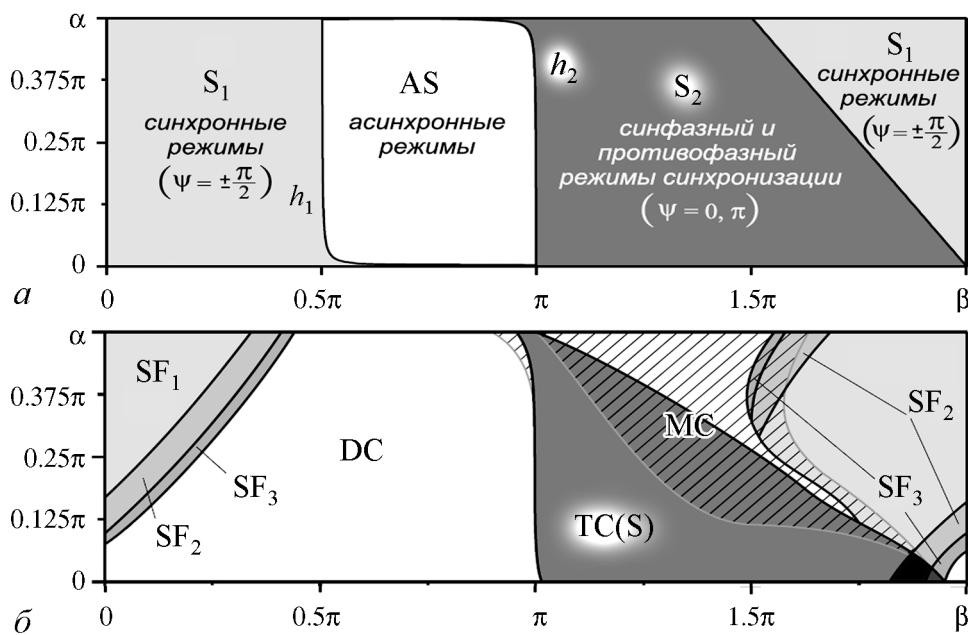


Рис. 1. Диаграммы динамических режимов системы (4) на плоскости параметров  $(\beta, \alpha)$  для различных значений числа взаимодействующих осцилляторов:  $N = 2$  (а),  $N = 200$  (б). Динамические состояния, формируемые в сети: режим глобальной синхронизации S; двухкластерное состояние TC; мультикластерные состояния MC; синхронные состояния с фиксированным соотношением фаз  $SF_i$ , где  $i$  указывает количество формируемых в сети частотных групп; асинхронные состояния DC. Значение параметра  $\varepsilon = 0.01$

существует множество различных колебательных и вращательных аттракторов<sup>1</sup>. Колебательные аттракторы отвечают квазисинхронным режимам системы, когда средняя разность частот осцилляторов равна нулю, а разность фаз колеблется в некоторых ограниченных пределах, не превышающих  $2\pi$ . Аттракторы вращательного типа определяют режимы биений, когда разность фаз непрерывно нарастает, а средняя разность частот отлична от нуля.

Таким образом, в зависимости от параметров два взаимодействующих осциллятора с динамическими связями могут демонстрировать либо синхронное поведение, либо различные асинхронные режимы. Система (5) может иметь четыре различных синхронных режима, различающиеся значениями разности фаз колебаний. При этом всегда одновременно существует пара синхронных режимов, величины относительной разности фаз которых различаются на  $\pi$ .

## 2. Синхронные режимы в сети фазовых осцилляторов с динамическими связями

Рассмотрим теперь динамику сети, состоящей из  $N = 200$  взаимодействующих фазовых осцилляторов с динамическими связями в случае, когда каждый осциллятор изначально воздействует на все остальные осцилляторы сети. При анализе коллективной динамики сети будем использовать случайные начальные условия, где значения  $\phi_i$  в начальный момент времени распределены в интервале  $[0, 2\pi)$ , а значения коэффициентов связей  $\kappa_{ij}$  – в интервале  $(-1, 1)$ .

Диаграмма динамических режимов системы (4) на плоскости параметров  $(\beta, \alpha)$  для  $N = 200$  представлена на рис. 1, б. На этой диаграмме выделены области существования различных динамических режимов, наблюдаемых в системе (4). Прежде чем перейти к подробному рассмотрению этих режимов, следует сказать несколько слов о методике построения данной диаграммы. Она получена в результате усреднения по результатам двадцати численных испытаний, проведённых для различных наборов начальных условий системы (4). В ходе каждого испытания строились двухпараметрические диаграммы ряда характеристик, позволяющих идентифицировать состояния, формируемые в сети в процессе её эволюции. В качестве таких характеристик были выбраны усреднённые по времени параметры порядка

$$\langle R_k \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T R_k dt, \quad \text{где } R_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-ik\phi_j}, \quad k = 1, 2,$$

а также распределения фаз и частот осцилляторов сети. Анализ данных характеристик проводился на интервале времени  $T = 10^5$ . Для иллюстрации техники определения состояний, формируемых в сети, на рис. 2 представлены зависимости, демонстрирующие изменение рассматриваемых характеристик с ростом параметра  $\beta$  при фиксированном значении  $\alpha = 1$  и заданных начальных условиях. В верхней

<sup>1</sup>В динамических системах с цилиндрическим фазовым пространством различают аттракторы колебательного и вращательного типов. К первым относятся аттракторы, не охватывающие фазовый цилиндр по циклической фазовой переменной (то есть набег по переменной  $\psi < 2\pi$ ). Аттракторы, охватывающие фазовый цилиндр по циклической фазовой переменной, называют вращательными.

части графика на рис. 2 изображены зависимости распределения частот и фаз осцилляторов, отвечающие финальному состоянию сети, которое регистрируется в момент времени  $T$  после завершения всех переходных процессов. При определении фазовых распределений сети анализируется количество осцилляторов сети, значение фаз которых в некоторый фиксированный момент времени принадлежит интервалу  $(\phi_{(l)}, \phi_{(l+1)})$ , где  $\phi_{(l)} = l\Delta\phi$ ,  $(l = 0, \dots, 128)$ , а  $\Delta\phi = 2\pi/128$ . Аналогично устанавливаются распределения частот осцилляторов сети, где диапазон возможных значений частот  $(\Omega_{\min}, \Omega_{\max})$  определяется в ходе предварительного анализа, а минимальный интервал  $\Delta\Omega = (\Omega_{\max} - \Omega_{\min})/100$ . Другими словами, данные характеристики определяют количество различных частотных ( $N_{\Omega}$ ) и фазовых ( $N_{\phi}$ ) групп, на которые разбивается сеть. Нижняя часть графика на рис. 2 иллюстрирует изменение усреднённых по времени параметров порядка  $\langle R_1 \rangle, \langle R_2 \rangle$ .

В совокупности рассматриваемые характеристики позволяют определить состояние, реализуемое в сети при данных значениях параметров и начальных условий. В качестве примера рассмотрим характеристики динамического режима системы, наблюдаемого в диапазоне значений параметра  $\beta \in (3.6, 4.05)$ , представленные на рис. 2. Для рассматриваемого интервала значений параметра  $\beta$  значение параметра порядка  $\langle R_1 \rangle \sim 0.05$ , а  $\langle R_2 \rangle$  варьируется в интервале от 0.75 до 0.96. Это может свидетельствовать о том, что в системе сформировался частичный двухкластерный режим. Дополнительный анализ характеристик распределения фаз и частот осцилляторов (см. рис. 2, вверху) свидетельствует о том, что в сети формируются четыре фазовых кластера ( $N_{\phi} = 4$ ), при этом частота осцилляторов может принимать одно из двух возможных значений ( $N_{\Omega} = 2$ ). Следовательно, можно утверждать, что при данных начальных условиях в рассматриваемом диапазоне параметров в системе формируется мультикластерное состояние.

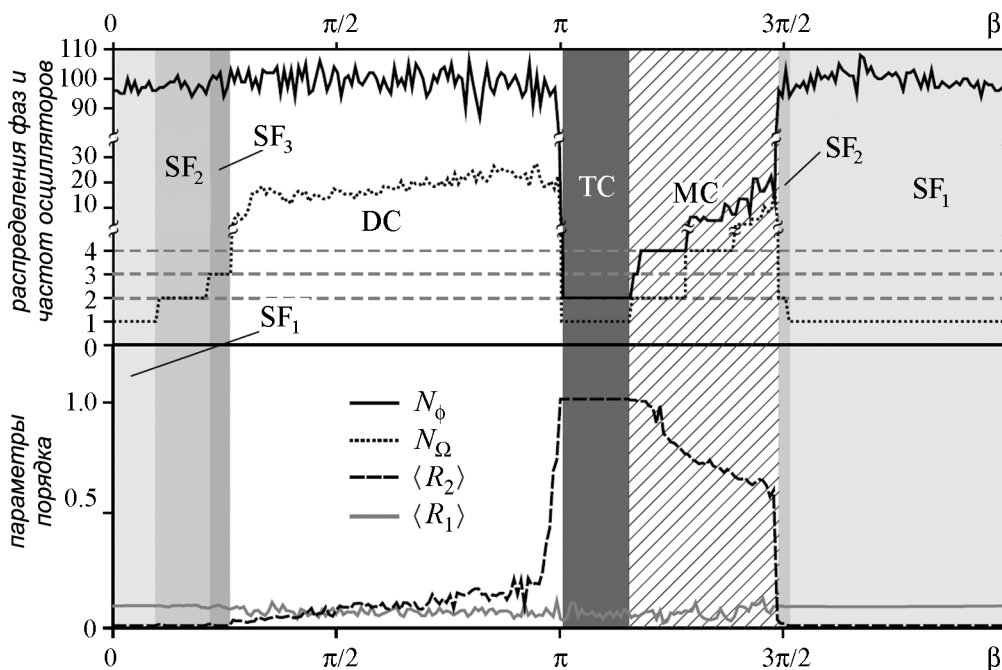


Рис. 2. Зависимости распределения частот ( $N_{\Omega}$ ) и фаз ( $N_{\phi}$ ) осцилляторов сети, а также усреднённых по времени параметров порядка  $R_1, R_2$  от параметра  $\beta$ . Значения параметров системы (4):  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 1$

В результате проведённого анализа области параметров  $D$  (см. рис. 1, б) установлено, что рассматриваемая сеть может демонстрировать несколько различных типов динамического поведения: режим глобальной синхронизации сети  $S$ , двухкластерные ТС и мультикластерные МС состояния, различные синхронные режимы ( $SF_i$ ) с фиксированным соотношением фаз между осцилляторами сети, а также асинхронное DC поведение сети. Далее рассмотрим подробнее свойства синхронных режимов, обнаруженных в ходе изучения системы (4).

Сначала рассмотрим подробнее свойства *двухкластерного состояния* сети, в котором формируются две группы (кластера) синхронизованных осцилляторов. При этом осцилляторы, принадлежащие к различным кластерам, находятся в противофазе друг относительно друга, о чем свидетельствует распределение фаз осцилляторов, приведённое на рис. 3, а. Существуют две группы синхронизованных осцилляторов с фазами  $\phi^*$  и  $\phi^* + \pi$ . Нетрудно заметить, что величины переменных силы связи между произвольными двумя осцилляторами сети  $i$  и  $j$ , находящимися внутри одного кластера, принимают некоторое положительное значение  $\kappa_{ij} = \kappa_{ji} = \kappa^* > 0$ , а для осцилляторов, принадлежащих разным кластерам – отрицательное значение  $\kappa_{ij} = \kappa_{ji} = -\kappa^* < 0$ . Соотношение числа осцилляторов, образующих различные кластеры, зависит от начальных условий.

Частным случаем данного режима является ситуация, когда формируется один кластер, то есть имеет место режим глобальной синхронизации сети. Данный режим реализуется либо в случае, когда в начальный момент времени фазы осцилляторов выбраны из некоторого ограниченного диапазона значений (почти синхронизованы), либо когда начальные значения переменных сил связи распределены преимущественно в области положительных значений, при этом распределение фаз в начальный момент времени может быть случайным.

Данный режим наблюдается в области параметров, где в случае модели двух взаимосвязанных осцилляторов одновременно существовали синфазный и противофазный режимы синхронизации (см. рис. 1, а и б). Данное поведение реализуется и на уровне большого ансамбля, то есть в зависимости от начальных условий осцилляторы распределяются таким образом, что внутри кластера между осцилляторами устанавливается состояние синфазной синхронизации, а между осцилляторами различных кластеров – состояние противофазной синхронизации.

Следует отметить, что данный режим наблюдался также в модели сети с «жёстким» ограничением значений силы межэлементных связей, рассмотренной в работе [14]. Вместе с тем, выбранная нами модель межэлементного взаимодействия позволяет получить новые состояния сети, не наблюдавшиеся в [14].

В частности, обнаружено появление *мультикластерных состояний*, при которых в сети образуется несколько групп синхронизованных осцилляторов. Среди данных групп можно выделить пары, осцилляторы которых находятся в противофазе по отношению друг к другу. При этом частоты осцилляторов, принадлежащих к различным парам синхронных групп, различаются между собой. Мультикластерные состояния сети наблюдаются на границах области существования двухкластерного режима (см. рис. 1, б). Обнаружено, что процесс формирования таких состояний сети состоит из нескольких этапов, последовательно распределённых во времени. На первом этапе часть осцилляторов сети образует две синхронные группы (находящиеся в противофазе друг относительно друга), а осцилляторы другой части сети



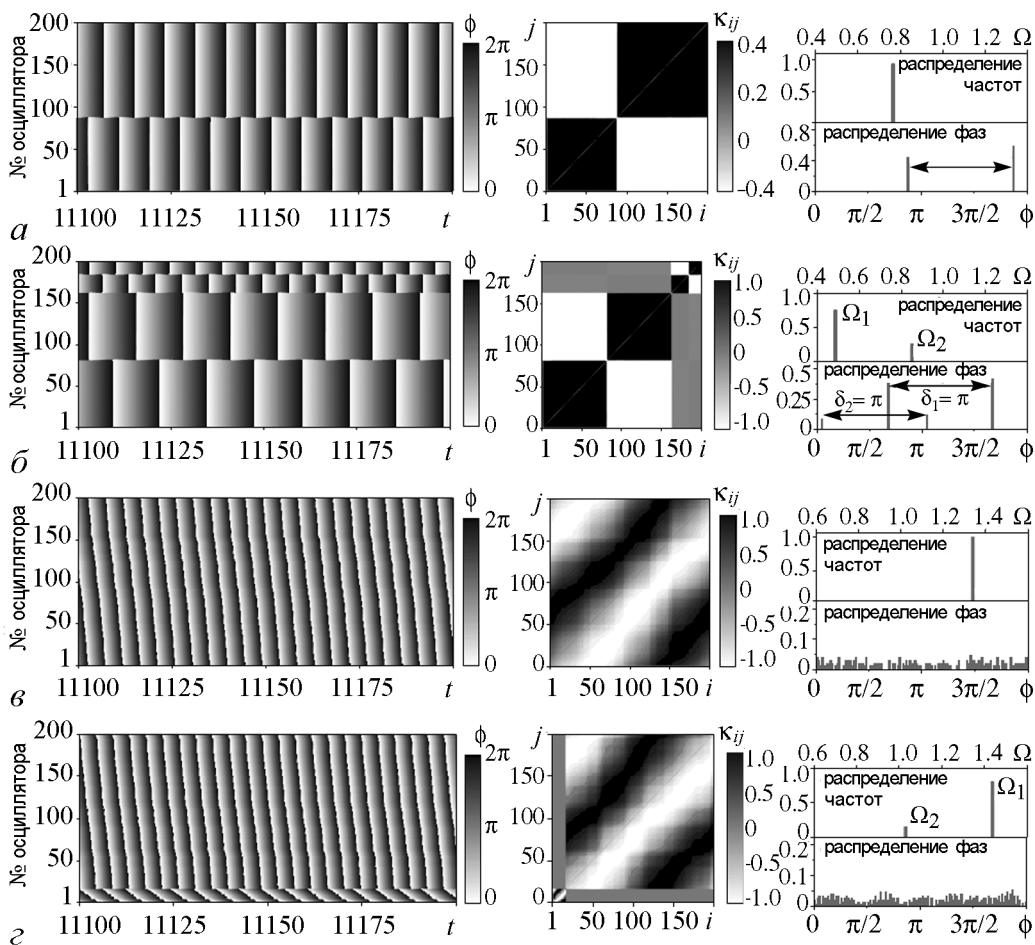


Рис. 3. Динамические состояния сети (4) для  $N = 200$ . Слева – Эволюция фаз осцилляторов сети. Индексы осцилляторов расположены в порядке возрастания значений их частот и фаз в предшествующий момент времени  $t = 10000$ . В центре – Матрица коэффициентов связей  $\kappa_{ij}$  в момент времени  $t = 11150$ . Индексы  $i$  и  $j$  расположены в порядке возрастания значений частот и фаз осцилляторов. Справа – Распределение частот и фаз осцилляторов в момент времени  $t = 11150$ . Значения параметров системы (4):  $\varepsilon = 0.01$ ;  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 3.5$  (а),  $\beta = 4.9$  (б),  $\beta = 0.2$  (в),  $\beta = 0.65$  (г)

остаются несинхронизованными. Два кластера, формируемые на первом этапе, как правило, имеют наибольшие размеры и не изменяются в процессе последующей эволюции сети. На втором этапе в «несинхронной» части сети формируется пара или несколько пар синхронных групп, а часть осцилляторов сети по-прежнему остаются несинхронизованными. При этом частоты осцилляторов, принадлежащих кластерам, сформированным на втором этапе, отличаются от частот кластеров, образованных на первом этапе. Далее описанные процессы продолжают, пока все элементы сети не синхронизируются, сформировав финальное мультикластерное состояние. На рис. 3, б приведены графики, иллюстрирующие свойства описываемых режимов на примере четырехкластерного состояния сети. Вид пространственно-временной диаграммы, а также распределения частот и фаз осцилляторов (рис. 3, б) свидетельствует о том, что в сети сформировались четыре фазовых кластера, при этом частота осцилляторов может принимать одно из двух значений  $\Omega_1$  или  $\Omega_2$ . В установившемся мультикластерном режиме часть переменных силы связей, характеризующих взаимодействие

между определёнными осцилляторами в сети, принимают значения, близкие к нулю (то есть можно считать, что данные соединения отсутствуют), тем самым модифицируя конфигурацию соединений в сети. Таким образом, особенностью данного динамического режима является то, что в результате совместной эволюции переменных, описывающих состояние осцилляторов и силу связей, в сети возникает некоторая топология соединений, отличная от изначально определённой (глобально связанная сеть). Следует также отметить, что в рассматриваемой модели мультикластерные состояния формируются в сети без какой либо дополнительной модификации функции пластичности.

Обнаружено, что исследуемая модель может также демонстрировать синхронное поведение, отличное от описанных выше, в которых осцилляторы организуются в фазовые кластеры. Один из примеров такого синхронного поведения приведен на рис. 3, в. В данном случае в сети устанавливается состояние, когда частоты всех осцилляторов одинаковы, а относительные фазовые сдвиги между различными осцилляторами сети принимают некоторые фиксированные значения, которые не изменяются в процессе последующей эволюции сети ( $\phi_i(t) - \phi_j(t) = \Delta\phi_{ij}^* = \text{const}$ ). Значения коэффициентов связей между любыми двумя осцилляторами сети  $i$  и  $j$  удовлетворяют условию  $\kappa_{ij} = -\sin(\Delta\phi_{ij}^* + \beta)$ . В дальнейшем такой режим будем называть – *синхронное состояние с фиксированным соотношением фаз*. На диаграмме, представленной на рис. 1, б, области существования данных режимов обозначены  $SF_i$ , где индекс  $i$  указывает количество формируемых в сети частотных групп. В частности, на рис. 3, в представлен случай, когда формируется одна частотная группа, то есть частоты всех осцилляторов сети идентичны. Об этом свидетельствует вид графика, иллюстрирующего распределение частот на рис. 3, в. Распределение фаз является почти равномерным и не имеет ярко выраженных пиков. Такое поведение ансамбля реализуется в области значений параметров (см. рис. 1), где в случае модели двух фазовых осцилляторов одновременно существовали режимы синхронизации с относительными фазовыми сдвигами  $\pi/2$  и  $-\pi/2$ . Для этих режимов в модели (5) характерно наличие противоположного по знаку воздействия одного осциллятора на другой (см. координаты соответствующих состояний равновесия в предыдущей главе), что объясняется свойствами функции пластичности в рассматриваемой области параметров. Так, при  $\beta = 0$  функция пластичности принимает вид  $G(\phi) = \sin(\phi)$  и, следовательно, коэффициент связи  $\kappa_{ij}$  стремится к некоторому значению  $\kappa_{ij} = -\kappa^*$  при  $\Delta\phi > 0$  и  $\kappa_{ij} = \kappa^*$  при  $\Delta\phi < 0$ , где  $\kappa^* = -\sin(\Delta\phi)$ ,  $\Delta\phi = \phi_i - \phi_j$ . Аналогичные соотношения между относительными значениями фаз осцилляторов и коэффициентами связей реализуются также для большого ансамбля (4) в окрестности значений параметра  $\beta = 0$  ( $\beta = 2\pi$ ).

На рис. 3, г приведен пример синхронного состояния с фиксированным соотношением фаз, когда в сети образуется несколько частотных групп. В частности, рис. 3, г иллюстрирует эволюцию фаз осцилляторов в случае образования двух частотных групп (см. область  $SF_2$  на рис. 1, б). В этом случае сеть разбивается на две несвязанные (или слабо связанные) между собой подсети (см. рис. 3, г). Элементы внутри каждой подсети имеют одинаковые частоты и фиксированные фазовые соотношения. Частоты осцилляторов, принадлежащих к различным подсетям, различны, а относительная разность фаз между ними непрерывно изменяется во времени. Процесс формирования частотных групп аналогичен наблюдаемому в случае мульт-

тикластерного режима. Сначала формируется высокочастотная группа ( $\Omega_1$ ), которая, как правило, имеет наибольшие размеры (см. рис. 3, з). Затем остальные элементы сети образуют вторую частотную группу ( $\Omega_2$ ). Такое поведение (режимы  $SF_i, i > 1$ ) система демонстрирует при значениях параметров в окрестности границ области существования режима  $SF_1$  (см. рис. 1, б).

В области DC (см. рис. 1, б) наблюдаются режимы *асинхронного поведения* системы (4). В этом случае в сети формируются состояния, когда частоты осцилляторов не одинаковы и относительная разность фаз между различными осцилляторами сети непрерывно изменяется во времени. Сравнение диаграмм, приведённых на рис. 1, позволяет сделать вывод, что данный режим реализуется преимущественно в области параметров, отвечающей области с мультистабильным поведением (квази-синхронные режимы и режимы биений) в случае модели двух взаимодействующих осцилляторов.

### Заключение

В работе исследованы состояния, формируемые в сети динамически связанных фазовых осцилляторов. Особенностью рассматриваемой системы является совместная эволюция состояний осцилляторов и коэффициентов силы связи между ними. Показано, что, как и в случае сети осцилляторов [14], межэлементное взаимодействие в которой описывается системой (2), рассматриваемая нами модель также может демонстрировать следующие основные режимы поведения: двухкластерное состояние, синхронное состояние с фиксированным соотношением фаз и асинхронное поведение. Установлено, что рассмотренная модификация модели (2) межэлементного взаимодействия, в которой обеспечивается динамический контроль роста силы связи, позволяет получить новые режимы, такие как мультикластерные режимы и синхронные режимы с фиксированным соотношением фаз и формированием нескольких частотных групп. Возможность формирования этих режимов объясняется более разнообразной структурой соединений, формируемых в сети в результате совместной эволюции состояний элементов и межэлементных связей. При образовании таких режимов часть переменных связей, характеризующих взаимодействие между определёнными осцилляторами в сети, принимают значения, близкие к нулю (то есть можно считать, что данные соединения отсутствуют), тем самым модифицируется конфигурация соединений в сети. По сравнению с существующими результатами исследований сетей осцилляторов с адаптивными связями, в рассматриваемой модели мультикластерные состояния формируются без какой-либо специальной модификации функции пластичности.

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН (проект № 0035-2014-0007).*

### Библиографический список

1. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer, 1984. 158 p.
2. Strogatz S.H. Exploring complex networks // Nature. 2001. Vol. 410. P. 268–276.

3. *Dörfler F., Bullo F.* Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey // *Automatica*. 2014. Vol. 50. P. 1539–1564.
4. *Acebron J.A., Bonilla L.L., Perez Vicente C.J., Ritort F. and Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Reviews of Modern Physics*. 2005. Vol. 77, № 1. P. 137.
5. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives // *Chaos*. 2015. Vol. 25, № 9. P. 097616.
6. *Gomes-Gardenes J., Moreno Y., Arenas A.* Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks // *Physical Review E*. 2007. Vol. 75, № 6. P. 066106.
7. *Stout J., Whiteway M., Ott E., Girvan M., Antonsen T.M.* Local synchronization in complex networks of coupled oscillators // *Chaos*. 2011. Vol. 21, № 2. P. 025109.
8. *Strogatz S.H., Mirollo R.E.* Stability of incoherence in a population of coupled oscillators // *J. of Statistical Physics*. 1991. Vol. 63, № 3–4. P. 613.
9. *Brede M.* Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks // *Physics Letters A*. 2008. Vol. 372, № 15. P. 2618.
10. *Hong H., Strogatz S.H.* Kuramoto model of coupled oscillators with positive and negative coupling parameters: An example of conformist and contrarian oscillators // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 106, № 5. P. 054102.
11. *Kloumann I.M., Lizarraga I.M., Strogatz S.H.* Phase diagram for the Kuramoto model with van Hemmen interactions // *Physical Review E*. 2014. Vol. 89, № 1. P. 012904.
12. *Earl M.G., Strogatz S.H.* Synchronization in oscillator networks with delayed coupling: A stability criterion // *Physical Review E*. 2003. Vol. 67, № 3. P. 036204.
13. *Nordenfelt A., Wagemakers A., Sanjuan M.A.F.* Frequency dispersion in the time-delayed Kuramoto model // *Physical Review E*. 2014. Vol. 89, № 3. P. 032905.
14. *Aoki T., Aoyagi T.* Self-organized network of phase oscillators coupled by activity-dependent interactions // *Physical Review E*. 2011. Vol. 84, № 6. P. 066109.
15. *Gutierrez R., Amann A., Assenza S., Gomes-Gardenes J., Latora V., Boccaletti S.* Emerging meso- and macroscales from synchronization of adaptive networks // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107, № 23. P. 234103.
16. *Assenza S., Gutierrez R., Gomes-Gardenes J., Latora V., Boccaletti S.* Emergence of structural patterns out of synchronization in networks with competitive interactions // *Scientific Reports*. 2011. Vol. 1. P. 1–8.
17. *Chandrasekar V.K., Sheeba J.H., Subash B., Lakshmanan M., Kurths J.* Adaptive coupling induced multi-stable states in complex networks // *Physica D*. 2014. Vol. 267. P. 36.
18. *Ren Q., He M., Yu X., Long Q., Zhao J.* The adaptive coupling scheme and heterogeneity in intrinsic frequency and degree distributions of the complex networks // *Physics Letters A*. 2014. V. 378, № 3. P. 139.
19. *Касаткин Д.В., Некоркин В.И.* Динамика фазовых осцилляторов с пластичными связями // *Известия вузов. Радиофизика*. 2015. (в печати)

## DYNAMICS OF A NETWORK OF INTERACTING PHASE OSCILLATORS WITH DYNAMIC COUPLINGS

*D.V. Kasatkin, V.I. Nekorkin*

Institute of Applied Physics, RAS

We investigate dynamical states formed in a network of coupled phase oscillators in which strength of interactions between oscillators evolve dynamically depending on their relative phases. The feature of the system is co-evolution of coupling weights and states of elements. It is ascertained that depending on the parameters the network exhibit several types of behavior: globally synchronized state, two-cluster and multi-cluster states, various synchronized states with a fixed phase relationship between oscillators and desynchronized state.

*Keywords:* Phase oscillators, dynamic couplings, synchronization, multi-cluster states, phase clusters.

### References

1. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer, 1984. 158 p.
2. *Strogatz S.H.* Exploring complex networks // *Nature*. 2001. Vol. 410. P. 268–276.
3. *Dörfler F., Bullo F.* Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey // *Automatica*. 2014. Vol. 50. P. 1539–1564.
4. *Acebron J.A., Bonilla L.L., Perez Vicente C.J., Ritort F. and Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Reviews of Modern Physics*. 2005. Vol. 77, № 1. P. 137.
5. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives // *Chaos*. 2015. Vol. 25, № 9. P. 097616.
6. *Gomes-Gardenes J., Moreno Y., Arenas A.* Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks // *Physical Review E*. 2007. Vol. 75, № 6. P. 066106.
7. *Stout J., Whiteway M., Ott E., Girvan M., Antonsen T.M.* Local synchronization in complex networks of coupled oscillators // *Chaos*. 2011. Vol. 21, № 2. P. 025109.
8. *Strogatz S.H., Mirollo R.E.* Stability of incoherence in a population of coupled oscillators // *J. of Statistical Physics*. 1991. Vol. 63, № 3-4. P. 613.
9. *Brede M.* Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks // *Physics Letters A*. 2008. Vol. 372, № 15. P. 2618.
10. *Hong H., Strogatz S.H.* Kuramoto model of coupled oscillators with positive and negative coupling parameters: An example of conformist and contrarian oscillators // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 106, № 5. P. 054102.
11. *Kloumann I.M., Lizarraga I.M., Strogatz S.H.* Phase diagram for the Kuramoto model with van Hemmen interactions // *Physical Review E*. 2014. Vol. 89, № 1. P. 012904.
12. *Earl M.G., Strogatz S.H.* Synchronization in oscillator networks with delayed coupling: A stability criterion // *Physical Review E*. 2003. Vol. 67, № 3. P. 036204.
13. *Nordenfelt A., Wagemakers A., Sanjuan M.A.F.* Frequency dispersion in the time-delayed Kuramoto model // *Physical Review E*. 2014. Vol. 89, № 3. P. 032905.

14. *Aoki T., Aoyagi T.* Self-organized network of phase oscillators coupled by activity-dependent interactions // *Physical Review E*. 2011. Vol. 84, № 6. P. 066109.
15. *Gutierrez R., Amann A., Assenza S., Gomes-Gardenes J., Latora V., Boccaletti S.* Emerging meso- and macroscales from synchronization of adaptive networks // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107, № 23. P. 234103.
16. *Assenza S., Gutierrez R., Gomes-Gardenes J., Latora V., Boccaletti S.* Emergence of structural patterns out of synchronization in networks with competitive interactions // *Scientific Reports*. 2011. Vol. 1. P. 1–8.
17. *Chandrasekar V.K., Sheeba J.H., Subash B., Lakshmanan M., Kurths J.* Adaptive coupling induced multi-stable states in complex networks // *Physica D*. 2014. Vol. 267. P. 36.
18. *Ren Q., He M., Yu X., Long Q., Zhao J.* The adaptive coupling scheme and heterogeneity in intrinsic frequency and degree distributions of the complex networks // *Physics Letters A*. 2014. V. 378, № 3. P. 139.
19. *Kasatkin D.V., Nekorkin V.I.* Dynamics of phase oscillators with plastic couplings // *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2015. (in press)

*Поступила в редакцию 10.09.2015*



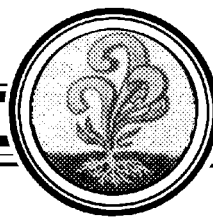
*Касаткин Дмитрий Владимирович* – родился в Нижнем Новгороде (1978), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2001). С 2002 года работает в Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2004, ННГУ). Область научных интересов – теория нелинейных колебаний и волн, теория синхронизации, динамический хаос, нейродинамика. Имеет более 50 научных публикаций по указанным направлениям.

603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
Институт прикладной физики РАН  
E-mail: [kasatkin@neuron.appl.sci-nnov.ru](mailto:kasatkin@neuron.appl.sci-nnov.ru)



*Некоркин Владимир Исаакович* – родился в 1948 году, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1971). Доктор физико-математических наук (1992), профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, заведующий отделом нелинейной динамики Института прикладной физики РАН, лауреат премии им. А.А. Андропова 2012 года. Область научных интересов – динамика нелинейных систем, нейродинамика, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структурообразование и нелинейные волны. Имеет более 250 научных публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе 4 книги и 2 патента.

603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
Институт прикладной физики РАН  
E-mail: [vnekorkin@neuron.appl.sci-nnov.ru](mailto:vnekorkin@neuron.appl.sci-nnov.ru)



## ТЕОРИЯ ПРЕДГЕНЕРАЦИОННОГО РЕЖИМА ЛОВ В РАМКАХ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ

*Д. И. Трубецков<sup>1,2</sup>, Г. М. Краснова<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского,

<sup>2</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

В рамках двумерной теории рассматриваются волновые процессы, происходящие в лампе обратной волны в предгенерационном режиме. Получены зависимости спектральной плотности мощности шума от относительного угла пролёта. Проанализировано влияние величины магнитного поля и пространственного заряда на их поведение.

*Ключевые слова:* Предгенерационный режим, ленточный пучок, магнитное поле, спектральная плотность мощности шума, генератор обратной волны.

### Введение

1. В предгенерационном режиме работы, когда ток электронного пучка меньше пускового значения ( $I_0 < I_{п}$ ) и внешний сигнал отсутствует, генератор обратной волны представляет собой усилитель флуктуаций электронного потока. В этом случае он может быть использован в качестве генератора СВЧ шума. Решение данной задачи проведено в рамках двумерной теории в приближении заданного поля и заданных начальных смещений в электронном потоке. Анализ проводится в гидродинамическом приближении в рамках следующей модели. Предположим, что бесконечно тонкий электронный поток движется в однородном магнитном поле с индукцией  $B_0 = B_x = \text{const}$ , направленном вдоль положительного направления оси  $x$ , со скоростью  $v_0$ . Поперечная координата  $y$ , координата влёта электронного потока  $y_0$ . По направлению  $z$  электронный поток считается бесконечным и изменения в этом направлении не учитываются.

2. В качестве исходного уравнения используется нерелятивистское уравнение движения электронов

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \eta \vec{E} + \eta \vec{E}_{SC} + \eta \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \vec{B} \right], \quad (1)$$

где  $\tilde{r} = \tilde{r}(x) \exp(j\omega t)$  – высокочастотное смещение электрона (знак «тильда» указывает на ВЧ переменные),  $\eta = e/m$ ,  $e$  и  $m$  – заряд и нерелятивистская масса электрона,  $\vec{E}$  – вектор напряжённости электрического поля,  $\vec{E}_{SC}$  – вектор напряжённости поля пространственного заряда. Уравнение движения (1) после линеаризации удобно представить в виде системы уравнений

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \tilde{x} = \eta(E_x + E_{xSC}), \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \tilde{y} = \eta(E_y + E_{ySC}) + \omega_c \frac{d\tilde{z}}{dt}, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 \tilde{z}}{dt^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \tilde{z} = -\omega_c \frac{d\tilde{y}}{dt}, \quad (4)$$

где  $\omega_c = \eta B_0$  – циклотронная частота. В (2)–(4) использованы следующие выражения для компонент поля пространственного заряда для случая, когда электронный поток движется ровно по центру пространства взаимодействия:

$$E_{xSC} = -j\omega_p^2 \frac{\Delta}{2\eta} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \tanh(\beta_0 y_0), \quad (5)$$

$$E_{ySC} = j\omega_p^2 \frac{\Delta}{2\eta} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \coth(\beta_0 y_0), \quad (6)$$

где  $\omega_p^2 = (\eta\sigma_0)/(\varepsilon_0\Delta)$  – квадрат плазменной частоты,  $\sigma_0$  – поверхностная плотность заряда,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\Delta$  – толщина ленточного электронного потока. Вывод указанных выражений для компонент поля пространственного заряда подробно приведён в монографии [1] для модели бесконечно тонкого ленточного потока.

Решение системы уравнений (2)–(4) проведено совместно с уравнением возбуждения электрического поля для взаимодействия с обратной электромагнитной волной

$$E(x) = E_x(0) e^{-j\beta_0 x} + \frac{1}{2} \beta_0^2 K e^{-j\beta_0 x} \int_0^x \tilde{i}(\xi) e^{j\beta_0 \xi} d\xi, \quad (7)$$

$$\tilde{i}(x) = \frac{\beta_e I_0}{2 \cosh(\beta_0 y_0)} [j\tilde{x}(x) \sinh(\beta_0 y_0) + \tilde{y}(x) \cosh(\beta_0 y_0)], \quad (8)$$

где  $K$  – сопротивление связи,  $I_0$  – постоянная составляющая тока пучка,  $\beta_0$  – фазовая постоянная холодной волны в системе. Уравнение (10) позволяет связать продольную составляющую ВЧ тока с ВЧ смещениями в электронном потоке.

**3.** При рассмотрении шумовых явлений в лампе следует учитывать, что на поверхности катода имеются флуктуации тока (дробовой шум) и флуктуации в распределении электронов по скоростям [2,3]. Так, среднеквадратичные начальные сме-



щения можно задать в виде

$$\bar{x}_0^2 = \frac{2e\Delta f}{\beta_0^2 I_0}, \quad (9)$$

$$\bar{y}_0^2 = \frac{ew^2\Delta f}{6I_0}, \quad (10)$$

где  $\Delta f$  – ширина полосы частот,  $w$  – ширина катода в направлении  $y$ .

Среднеквадратичные флуктуации скорости Рэка

$$\bar{v}_{x0}^2 = \frac{(4 - \pi) \eta k T_k \Delta f}{I_0}, \quad (11)$$

$$\bar{v}_{y0}^2 = 2.33 \bar{v}_{y0}^2, \quad (12)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T_k$  – температура катода.

Комбинируя уравнения (3) и (4) и предполагая, что во времени переменные величины изменяются как  $e^{j\omega t}$ , можем переписать систему уравнений (2)–(4) с учётом выражений (5), (6) для полей пространственного заряда следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial x^2} + (2j\beta_e + \frac{1}{2}j\beta_p^2 \Delta \tanh(\beta_0 y_0)) \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} - \beta_e^2 \tilde{x} = \frac{E_x}{2V_0}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} + (2j\beta_e - \frac{1}{2}j\beta_p^2 \Delta \coth(\beta_0 y_0)) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} - (\beta_e^2 - \beta_c^2) \tilde{y} = \frac{E_y}{2V_0}, \quad (14)$$

где поперечная и продольная компоненты электрического поля связаны соотношением  $E_y = jE_x \coth(\beta_0 y_0)$  [1],  $V_0 = v_0^2/2\eta$  – приложенное ускоряющее напряжение,  $\beta_e$  – фазовая постоянная волны в системе с электронным потоком,  $\beta_p = \omega_p/v_0$  – постоянная распространения плазменной волны,  $\beta_c = \omega_c/v_0$  – постоянная распространения циклотронной волны.

**4.** Системе уравнений (13)–(14) при равенстве правых частей нулю и в предположении, что все переменные величины изменяются как  $e^{j\omega t}$ , соответствуют следующие дисперсионные уравнения:

$$(\beta - \beta_e)^2 - \frac{1}{2} \beta \beta_p^2 \Delta \tanh(\beta_0 y_0) = 0, \quad (15)$$

$$(\beta - \beta_e)^2 + \frac{1}{2} \beta \beta_p^2 \Delta \coth(\beta_0 y_0) - \beta_c^2 = 0, \quad (16)$$

где  $\beta$  – искомая постоянная распространения. Корни дисперсионных соотношений (15) и (16), соответствующие постоянным распространения электронных волн, имеют вид

$$\beta_{1,2} = (\beta_e + \frac{1}{4} \beta_p^2 \Delta \tanh(\beta_0 y_0)) \pm \sqrt{(\frac{1}{4} \beta_p^2 \Delta \tanh(\beta_0 y_0))^2 + \frac{1}{2} \beta_e \beta_p^2 \Delta \tanh(\beta_0 y_0)}, \quad (17)$$

$$\beta_{3,4} = (\beta_e - \frac{1}{4} \beta_p^2 \Delta \coth(\beta_0 y_0)) \pm \sqrt{(\frac{1}{4} \beta_p^2 \Delta \coth(\beta_0 y_0))^2 - \frac{1}{2} \beta_e \beta_p^2 \Delta \coth(\beta_0 y_0) + \beta_c^2}. \quad (18)$$

Как видно из выражения (18), возможно появление комплексных решений  $\beta_4$  для дисперсионного уравнения (16). В этом случае решение становится нарастающим в пространстве, и поперечные ВЧ смещения электронов  $\tilde{y}(x)$  начинают быстро увеличиваться с изменением продольной координаты  $x$  [4–7]. Согласно формуле (18), этому соответствует выполнение неравенства

$$\left(\frac{1}{4}\beta_p^2\Delta \coth(\beta_0 y_0)\right)^2 - \frac{1}{2}\beta_e\beta_p^2\Delta \coth(\beta_0 y_0) + \beta_c^2 < 0. \quad (19)$$

5. Одной из основных характеристик в предгенерационном режиме является спектральная плотность мощности шума (СПМШ) на выходе ЛОВ

$$S(\Phi_0) = \frac{|E_x(0)|^2}{2\beta_0^2 K}, \quad (20)$$

где  $E_x(0)$  – искомая величина напряжённости электрического поля на выходе ЛОВ ( $x=0$ ). Для дифференциальных уравнений продольных и поперечных ВЧ смещений (13) и (14) проведено преобразование Лапласа с учетом начальных условий (9)–(12). Полученные интегральные выражения для ВЧ смещений подставлены в уравнения возбуждения электрического поля (7). В результате интегрирования получено в первом приближении выражение для напряжённости электрического поля

$$\begin{aligned} E_x(x) = & E_x(0) e^{-j\beta_0 x} + \frac{\beta_e \beta_0^2 I_0 K}{4 \cosh(\beta_0 y_0)} e^{-j\beta_0 x} \times \\ & \times \left( \frac{E_x(0) \sinh^2(\beta_0 y_0)}{2V_0} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^2 \frac{e^{j(\beta_0 - \beta_i)x} - j(\beta_0 - \beta_i)x - 1}{(\beta_k - \beta_i)(\beta_0 - \beta_i)^2} + \right. \\ & + \tilde{x}_0 \sinh(\beta_0 y_0) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^2 \frac{\beta_i (e^{j(\beta_0 - \beta_i)x} - 1)}{(\beta_i - \beta_k)(\beta_0 - \beta_i)} - \\ & - j \sinh(\beta_0 y_0) \left[ \frac{\tilde{v}_{x0}}{v_0} + j\tilde{x}_0(\beta_1 + \beta_2 - \beta_e) \right] \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^2 \frac{e^{j(\beta_0 - \beta_i)x} - 1}{(\beta_k - \beta_i)(\beta_0 - \beta_i)} + \\ & + \frac{E_x(0) \cosh^2(\beta_0 y_0)}{2V_0} \sum_{\substack{i=3 \\ i \neq k}}^4 \frac{e^{j(\beta_0 - \beta_i)x} - j(\beta_0 - \beta_i)x - 1}{(\beta_k - \beta_i)(\beta_0 - \beta_i)^2} + \\ & + \tilde{y}_0 \cosh(\beta_0 y_0) \sum_{\substack{i=3 \\ i \neq k}}^4 \frac{\beta_i (e^{j(\beta_0 - \beta_i)x} - 1)}{(\beta_i - \beta_k)(\beta_0 - \beta_i)} + \\ & \left. + \cosh(\beta_0 y_0) \left[ \frac{\tilde{v}_{y0}}{v_0} + j\tilde{y}_0(\beta_3 + \beta_4 - \beta_e) \right] \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^2 \frac{e^{j(\beta_0 - \beta_i)x} - 1}{(\beta_i - \beta_k)(\beta_0 - \beta_i)} \right). \quad (21) \end{aligned}$$

Для нахождения зависимости СПМШ (20) от относительного угла пролёта  $\Phi_0$  из уравнения (21) следует определить величину напряжённости электрического поля на выходе лампы  $E_x(0)$ . При этом в предгенерационном режиме на входе лампы

сигнал отсутствует  $E_x(l) = 0$ . Полученные аналитические выражения из-за их громоздкости здесь не приводятся. При расчётах осуществлён переход к общепринятым безразмерным переменным:  $\Phi_0 = (\beta_e - \beta_0)l$  – невозмущённый относительный угол пролёта,  $\varphi_c = \beta_c l$  – циклотронный угол пролёта,  $\theta_p = \beta_p l$  – плазменный угол пролёта.

В безразмерных переменных условие возникновения неустойчивости (19) и выражения, встречающиеся в (21) (типа  $(\beta_0 - \beta_i)$ ,  $(\beta_k - \beta_i)$ , где  $i, k = 1, 2, 3, 4$ ), примут вид

$$\left(\theta_p^2 \frac{\Delta \coth(\beta_0 y_0)}{4}\right)^2 - \beta_e l \theta_p^2 \frac{\Delta \coth(\beta_0 y_0)}{2} + \varphi_c^2 < 0, \quad (22)$$

$$(\beta_0 - \beta_{1,2})l = -\Phi_0 - \theta_p^2 \frac{\Delta \tanh(\beta_0 y_0)}{4} \mp \sqrt{\left(\theta_p^2 \frac{\Delta \tanh(\beta_0 y_0)}{4}\right)^2 + \beta_e l \theta_p^2 \frac{\Delta \tanh(\beta_0 y_0)}{2}}, \quad (23)$$

$$(\beta_0 - \beta_{3,4})l = -\Phi_0 + \theta_p^2 \frac{\Delta \coth(\beta_0 y_0)}{4} \mp \sqrt{\left(\theta_p^2 \frac{\Delta \coth(\beta_0 y_0)}{4}\right)^2 - \beta_e l \theta_p^2 \frac{\Delta \coth(\beta_0 y_0)}{2} + \varphi_c^2}, \quad (24)$$

$$(\beta_2 - \beta_1)l = -2\sqrt{\left(\theta_p^2 \frac{\Delta \tanh(\beta_0 y_0)}{4}\right)^2 + \beta_e l \theta_p^2 \frac{\Delta \tanh(\beta_0 y_0)}{2}}, \quad (25)$$

$$(\beta_4 - \beta_3)l = -2\sqrt{\left(\theta_p^2 \frac{\Delta \coth(\beta_0 y_0)}{4}\right)^2 - \beta_e l \theta_p^2 \frac{\Delta \coth(\beta_0 y_0)}{2} + \varphi_c^2}. \quad (26)$$

6. Рассмотрим случай без учёта влияния пространственного заряда. На рис. 1, 2 приведены зависимости СПМШ от относительного угла пролёта при различных значениях циклотронного угла пролёта  $\varphi_c$  и отношениях тока пучка  $I_0$  к пусковой величине  $I_n$ , то есть  $I_0/I_n$ .

С уменьшением продольного фокусирующего магнитного поля максимальное значение кривой СПМШ возрастает (см. рис. 1), а величина относительного угла пролёта, при которой это значение максимально, приближается к  $-\pi$ . Для значений циклотронного угла пролёта больше  $4\pi$  кривые совпадают со штриховой кривой.

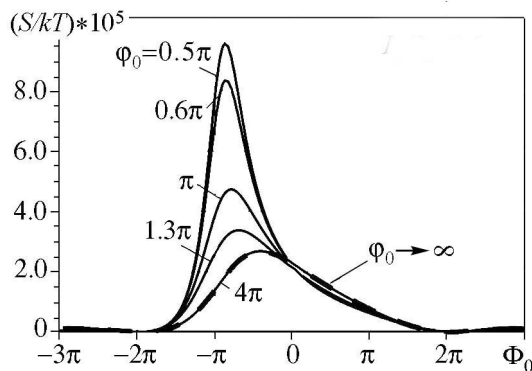


Рис. 1. Зависимость спектральной плотности мощности шума от относительного угла пролёта  $\Phi_0$  при различных значениях циклотронного угла пролёта  $\varphi_c$  ( $I_0/I_n = 0.6$ )

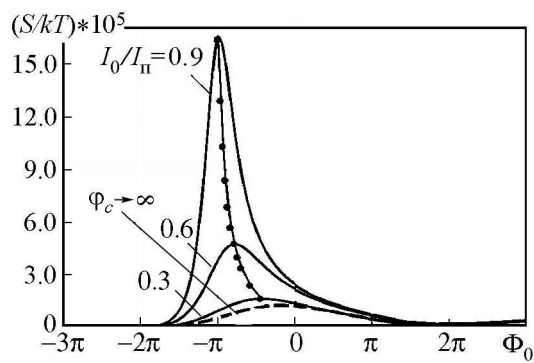


Рис. 2. Зависимость спектральной плотности мощности шума от относительного угла пролёта  $\Phi_0$  при различных значениях отношения тока пучка к пусковой величине  $I_0/I_n$  ( $\varphi_c = \pi$ )

вой, соответствующей одномерной теории [8], когда величина индукции магнитного поля считается бесконечно большой и поперечные смещения в потоке полностью подавляются. При увеличении отношения тока пучка к пусковому значению  $I_0/I_{\text{п}}$  величина СПМШ возрастает и сдвигается к плоскости  $\Phi_0 = -\pi$ , что соответствует пусковой величине для невозмущённого относительного угла пролёта в такой системе (см. рис. 2).

7. Рассмотрим случай с учётом влияния пространственного заряда. На рис. 3–5 приведены зависимости СПМШ от относительного угла пролёта с учётом влияния

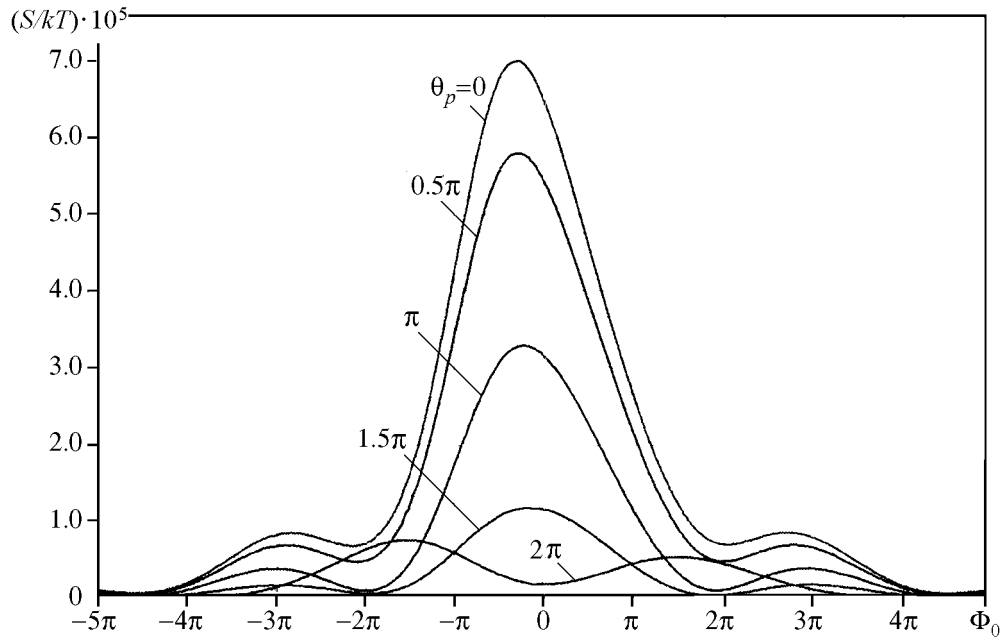


Рис. 3. Зависимость спектральной плотности мощности шума от относительного угла пролёта  $\Phi_0$  при различных значениях параметра пространственного заряда  $\theta_p$  ( $\varphi_c = 3\pi$ ,  $I_0/I_{\text{п}} = 0.3$ )

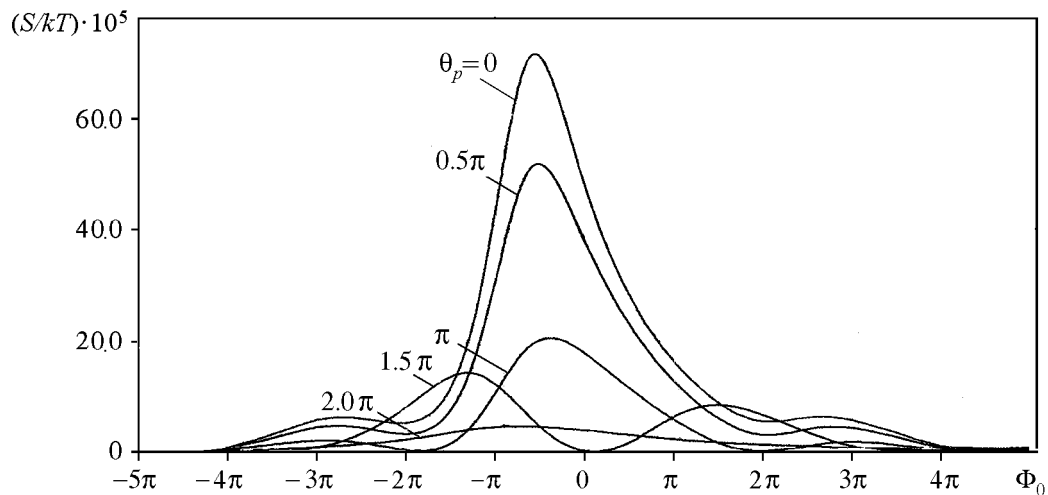


Рис. 4. Зависимость спектральной плотности мощности шума от относительного угла пролёта  $\Phi_0$  при различных значениях параметра пространственного заряда  $\theta_p$  ( $\varphi_c = 3\pi$ ,  $I_0/I_{\text{п}} = 0.8$ )

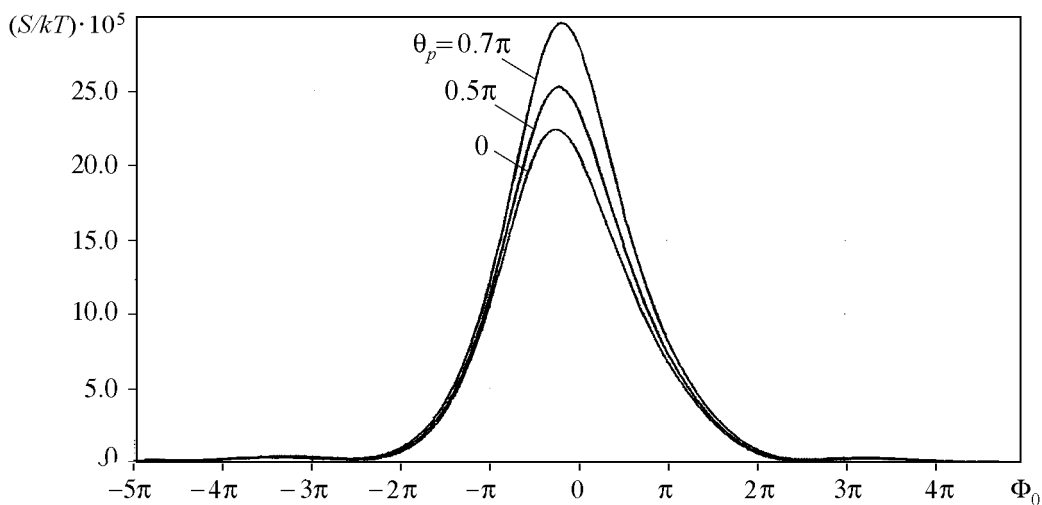


Рис. 5. Зависимость спектральной плотности мощности шума от относительного угла пролёта  $\Phi_0$  при различных значениях параметра пространственного заряда  $\theta_p$  ( $\varphi_c = \pi$ ,  $I_0/I_n = 0.3$ ). Случай неустойчивого электронного потока

поля пространственного заряда. На рис. 3, 4 кривые построены для значений параметров пространственного заряда  $\theta_p$  и циклотронного угла пролёта  $\varphi_c$ , при которых *электронный поток устойчив*. Увеличение плазменного угла пролёта  $\theta_p$  приводит к снижению наибольшего значения СПМШ аналогично тому, как циклотронный угол пролёта приводит к снижению максимальной её величины в случае, когда не учитывалось влияние пространственного заряда (см. рис. 1, 2). Зависимости на рис. 3, 4 построены при различных отношениях тока пучка к пусковому значению  $I_0/I_n$ .

На рис. 5 приведена аналогичная зависимость для случая *неустойчивого потока*. Параметры подобраны таким образом, что выполняется неравенство (22). Характер кривых СПМШ кардинально меняется. В результате дальнейшего увеличения плазменного угла пролёта  $\theta_p$  наблюдается рост наибольшего значения спектральной плотности, чего не было в случае устойчивого ленточного электронного потока.

**Заключение.** В статье приведены результаты исследования предгенерационного режима лампы обратной волны типа О с учётом влияния конечного фокусирующего магнитного поля и поля пространственного заряда. Исследовано поведение основной характеристики такого режима – спектральной плотности мощности шума. Проанализировано влияние циклотронного угла пролёта, величина которого прямо пропорциональна величине индукции магнитного поля, и плазменного угла пролёта на поведение кривых спектральной плотности мощности шума. Для случая малых значений пространственного заряда, когда его влиянием можно пренебречь, проведено сравнение полученных результатов с известными результатами одномерной теории.

*Работа выполнена в рамках Президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ 828.2014.2) и при поддержке грантов РФФИ № 13-02-01209а, № 14-02-00329.*

## Библиографический список

1. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Советское радио, 1970. 584 с.
2. Смоллин Л.Д., Хаус Г.А. Шумы в электронных приборах. М.-Л.: Энергия, 1964. 484 с.
3. Трубецков Д.И., Шараевский Ю.П., Шевчик В.Н. Шумовые явления в лучевых усилителях магнетронного типа // Обзоры по электронной технике. Серия Электроника СВЧ. 1970. № 10 (204).
4. Pierce J.R. Instability of hollow beams // IRE Trans. on Electron Devices 1956. Vol. 3, № 4. P.183.
5. Cutler C.C. Instability in hollow and strip electron beams // Jour. of Applied Physics. 1956. Vol. 27, № 9. P. 1028.
6. Krasnova G.M. Interaction of space-charge waves in a electron beam with electromagnetic waves in a longitudinal magnetic field // Physics of Wave Phenomena. 2011. Vol. 19, № 4. P. 290.
7. Трубецков Д.И., Краснова Г.М. О современном состоянии сверхвысокочастотных вакуумных электронных и микроэлектронных приборов с управляемой эмиссией // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21, № 1. С. 35.
8. Амиров Р.Ш., Безручко Б.П., Трубецков Д.И., Шевчик В.Н. Теоретическое и экспериментальное исследование предгенерационного режима ЛОВ типа О // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1974. Т. XVII, № 11. P. 52.

## THEORY OF PREGENERATION MODE IN BWO IN THE FRAME OF TWO-DIMENSIONAL MODEL

*D. I. Trubetskov<sup>1,2</sup>, G. M. Krasnova<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Saratov State University,

<sup>2</sup>National Research Nuclear University MEPHI,

Processes in backward wave oscillator in pregeneration mode have been considered in the frame of two-dimensional theory. Spectral density dependencies on the relative transit angle are presented. The influence of magnetic field and space charge on its behavior has been analyzed.

*Keywords:* Pregeneration mode, strip electron beam, magnetic field, spectral density of noise power, backward wave oscillator.

## References

1. *Shevchik V.N., Trubetskov D.I.* Analytical Methods in Microwave Electronics. Moscow: Sov.Radio, 1970. 584 p. (In Russian).
2. *Smullin L.D., Haus G.A.* Noise in Electron Devices. M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1959.

3. *Trubetskov D.I., Sharaevski Y.P., Shevchik V.N.* Shymovie yavleniya v lychevikh ysilatelyah magnetronnogo tipa // *Obzori po electronnoi tehnike. Seria Elektronika SVCh*, 1970. № 10 (204) (In Russian).
4. *Pierce J.R.* Instability of hollow beams // *IRE Trans. on Electron Devices*. 1956. Vol. 3, № 4. P.183.
5. *Cutler C.C.* Instability in hollow and strip electron beams // *Jour. of Applied Physics*. 1956. Vol. 27, № 9. P.1028.
6. *Krasnova G.M.* Interaction of space-charge waves in a electron beam with electromagnetic waves in a longitudinal magnetic field // *Physics of Wave Phenomena*. 2011. Vol. 19, № 4. P. 290.
7. *Trubetskov D.I., Krasnova G.M.* About current state high frequency vacuum electronic and microelectronic devices with field emission // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2013. Vol. 21, № 1. P. 35 (In Russian).
8. *Amirov R.Sh., Bezruchko B.P., Trubetskov D.I., Shevchik V.N.* The theoretical and experimental investigation of the type O TWT's pregeneration regime // *UHF Electronic Equipment*. 1974. Vol.XVII, № 11. P. 52 (In Russian).

*Поступила в редакцию 20.11.2015*

*Трубецков Дмитрий Иванович* – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор кафедры прикладной математики НИЯУ МИФИ, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
 115409 Москва, Каширское шоссе, 31  
 Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
 E-mail: dtrubetskov@yahoo.com

*Краснова Галина Михайловна* – родилась в 1989 году. Окончила Саратовский государственный университет (2011). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики. Принимала участие в таких конференциях, как «Нелинейные дни в Саратове для молодых», «Волновые явления в неоднородных средах», «Физика и применение микроволн», «Проблемы СВЧ электроники» и в XV Международной юбилейной зимней школе-семинаре по электронике СВЧ и радиофизике. Автор 5 статей в реферируемых журналах Списка ВАК.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
 E-mail: krasnovagm@rambler.ru