Детерминированный хаос

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 4, 2008 УДК 514.8; 517.938; 530.182

КОНКУРЕНЦИЯ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЕЙ

С.В. Слипушенко, А.В. Тур, В.В. Яновский

В работе изучены перемежаемые режимы в двупараметрическом семействе одномерных отображений при наличии нейтрально неустойчивой неподвижной точки на границе фазового пространства. Построена фазовая диаграмма в пространстве параметров, определяющая возможные сценарии перехода к хаосу с изменением параметров. Обнаружен необычный режим конкуренции перемежаемостей, изучены функции распределения длительности ламинарных фаз, показатель Ляпунова и топологическая энтропия этого семейства отображений.

Введение

Перемежаемость является одним из часто встречающихся типов перехода к хаосу в одномерных системах. Такие режимы характеризуются наличием участков сильно выраженного хаотического поведения, чередующихся с участками регулярного поведения динамической системы. Эти регулярные участки обычно называют ламинарными фазами. Статистические свойства ламинарных фаз являются одними из важнейших характеристик перемежающихся режимов, реализующихся в динамической системе. Они позволяют определить степень хаотичности поведения системы при определенном значении управляющего параметра r. Величина управляющего параметра, при которой неподвижная точка отображения x_0 теряет устойчивость, называется критическим значением внешнего параметра r_{c}. Если потеря устойчивости происходит путем касательной бифуркации, то в фазовом пространстве на месте неподвижной точки x_0 образуется «коридор», в котором поведение системы является практически регулярным. Во всем остальном фазовом пространстве поведение системы хаотично. Эту часть фазового пространства называют областью реинжекции, потому что динамика системы в этой области рано или поздно приводит к возврату в «коридор» и началу новой ламинарной фазы. С ростом параметра «надкритичности» $\varepsilon = r - r_{\mathrm{c}}$ время прохождения коридора уменьшается, поэтому хаотичность системы возрастает. Величина ε обычно связана со средней длиной ламинарных фаз степенным законом $< l > \sim \varepsilon^{-\alpha}$. Это является одним из проявлений скейлинговой инвариантности в перемежаемых режимах.

Впервые свойства перемежающихся режимов были исследованы Помо и Манневилем в работе [1]. Они же предложили классификацию перемежаемых режимов, выделив три основных типа перемежаемости. Главное различие между ними заключается в том, каким образом мультипликатор в точке x_0 пересекает единичную

окружность. Существует три возможных варианта этого процесса [2]. Если мультипликатор μ пересекает единичную окружность в точке $\mu = 1$, то в системе наблюдается перемежаемость I рода. В случае, если на единичной окружности $\mu = -1$, то наблюдается перемежаемость III рода. Для двумерных систем имеется возможность одновременного перехода мультипликатора и его комплексного значения через окружность $|\mu| = 1$, в этом случае наблюдается перемежаемость II рода. Применяя метод нормальных форм [3] к отображению, которое может быть разложено в ряд Тейлора в точке x_0, можно показать, что такая классификация перемежающихся режимов, возникающих в гладких отображениях, является полной. В последующих работах [4–6] было указано на существование дополнительных типов перемежаемости в отображениях, характеризующихся отсутствием непрерывности или дифференцируемости в точке x_0. Таким образом, наложение дополнительных условий на процесс приведения отображения к линейной нормальной форме может привести к появлению резонансных слагаемых нового вида. Это будет означать возможность возникновения в динамической системе перемежаемости нового рода. Одним из таких дополнительных условий может являться требование расположения бифуркационной точки x_0 на границе фазового пространства. Целью статьи является описание свойств и характеристик нового типа перемежаемости, возникающего в этом случае.

1. Двупараметрическое семейство отображений

Рассмотрим широкий класс непрерывных отображений конечного интервала действительной оси (например, $[0, 4]$) с неподвижной нейтрально неустойчивой точкой на границе фазового пространства ($x = 0$). Такое отображение в окрестности неподвижной точки имеет асимптотику $x_{n+1} = x_n + x_n^{\alpha}$, где $\alpha > 1$. С точки зрения существования перемежаемых режимов, это свойство является антагонистическим. Действительно, обычно принято связывать появление перемежаемых режимов с прохождением обратной касательной бифуркации в некоторой точке внутри фазового пространства и образованием узкого «коридора» [2]. Такой коридор и формирует ламинарные фазы. Таким образом, исходное требование нарушает сразу два важных свойства. Во-первых, отсутствует коридор и неподвижная точка сохраняется (обратная касательная бифуркация не происходит). Во-вторых, она расположена на границе фазового пространства. Запрет на возможность касательной бифуркации на границе связан с дополнительным ограничением на отображение, следующим из физических соображений. Например, для всех моделей эволюции популяций насекомых [7] это ограничение отражает невозможность размножения насекомых при их полном отсутствии. Очевидно, что это свойство не может быть нарушено для всех этих моделей. Поэтому случай общего положения для них отличается от общего положения других, более общих систем. Это означает изменение классификации режимов перемежаемости в этих случаях. Такую классификацию можно построить, используя метод нормальных форм [3]. Вид разложения отображения в окрестности $x = 0$ влияет на характеристики ламинарных фаз. Ниже покажем, что при определенных условиях в таких системах возникают перемежаемые режимы, обладающие специфическими особенностями.

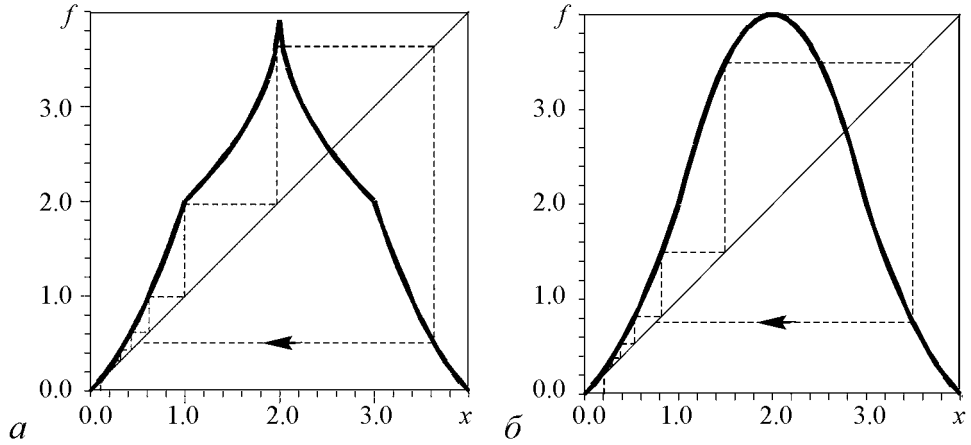


Рис. 1. Диаграмма демонстрирует закон эволюции $f(x)$ при $\alpha = 2$, $\beta = 0.5$ (*а*) и при $\alpha = 2$, β=2 (*б*). Характер касания кривой к диагонали определяется величиной α, а поведение в максимуме – величиной β. Показаны несколько шагов движения, начиная с некоторого начального условия

Для демонстрации этих особенностей перемежаемых режимов используем двупараметрическое семейство непрерывных отображений, удовлетворяющее приведенному выше условию,

$$f(x) = \begin{cases} x + x^{\alpha} & 0 \le x < 1, \\ 4 - 2\,|x-2|^{\beta} & 1 \le x \le 3, \\ 4 - x + (4-x)^{\alpha} & 3 < x \le 4. \end{cases} \tag{1}$$

Фазовое пространство таких отображений – отрезок действительной оси $[0, 4]$. Параметры $\alpha > 1$ и β положительны. Вид отображения для различных значений параметров приведен на рис. 1. Характерной особенностью этих отображений является наличие двух неподвижных точек. Одна из них $x = 0$ лежит непосредственно на границе фазового пространства. При любых значениях параметров ($\alpha > 1$ и $\beta > 0$) эта неподвижная точка является нейтрально неустойчивой, и её мультипликатор равен единице

$$\lim_{x \to +0} f'(x) = 1 + 0.$$

Вторая неподвижная точка находится в области $2 < x < 3$ и ее положение определяется решением трансцендентного уравнения

$$4 - 2\,(x^* - 2)^{\beta} - x^* = 0.$$

Легко проверить, что при $0 < \beta < \beta^*$ неподвижная точка x^* ($2 < x^* < 3$) устойчива, а при $\beta > \beta^*$ – теряет устойчивость и при значении параметра $\beta = \beta^* \approx 0.26$ ее мультипликатор пересекает единичную окружность в точке $\mu = -1$. При этом в гладких отображениях обычно происходит переход к хаосу по сценарию перемежаемости III рода [2].

2. Инвариантная функция распределения

Обсудим теперь характерные черты инвариантной функции распределения отображения (1). Численное моделирование позволяет установить ее вид при различных значениях параметров. В качестве примера на рис. 2 приведена инвариантная функция распределения при определенных значениях параметров. Легко заметить, что в точке максимума отображения (1) инвариантная функция распределения претерпевает скачок, по крайней мере при выбранных значениях α и β. Справа и слева от разрыва функция распределения локально постоянна. Такой характер ее поведения и позволяет вычислить функцию распределения ламинарных фаз.

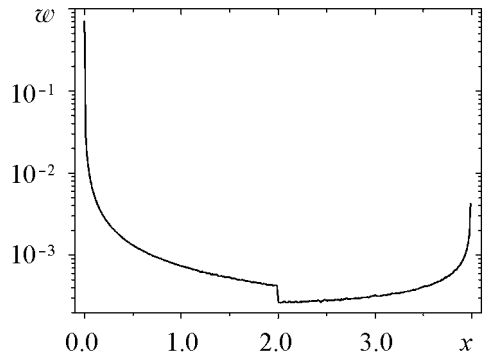


Рис. 2. Инвариантная функция распределения отображения (1) при значениях параметров $\alpha = 1.5$, $\beta = 2$, полученная численно

Величина скачка связана с общими свойствами отображения, но определяющую роль играет «негладкость» отображения в точках $x = 1$ и $x = 3$. Действительно, используя уравнение Фробениуса–Перрона, определяющее инвариантную функцию распределения $F(x)$

$$F(x) = \int_0^4 F(y)\delta(x - f(y))dy, \tag{2}$$

легко получить прямой подстановкой значения инвариантной функции справа и слева от разрыва в формальном виде

$$F(2+0) = \frac{1}{4\beta}(F(1) + F(3)),$$

$$F(2-0) = \frac{1}{2(1+\alpha)}(F(1) + F(3)).$$

Таким образом, величина скачка Δ инвариантной функции распределения в точке $x = 2$ равна

$$\Delta \equiv F(2-0) - F(2+0) = \frac{(F(1) + F(3))}{2} \cdot \frac{(2\beta - 1 - \alpha)}{2\beta(1+\alpha)}$$

и зависит от значений инвариантной функции распределения в точках $x = 1$, $x = 3$ и значений параметров α, β. Учитывая положительную определенность функции распределения, легко заметить, что скачок исчезает только при следующем выборе параметров:

$$2\beta - 1 - \alpha = 0.$$

Сравнивая значения производных отображения (1) в окрестности точек $x = 1$, $x = 3$, можно заметить, что условие исчезновения разрыва эквивалентно условию непрерывности производной в этих точках ($f'(1-0) = f'(1+0)$ и $f'(3-0) = f'(3+0)$).

Другими словами, причина возникновения разрыва инвариантной функции распределения в точке $x = 2$ – в негладкости отображения (1) в точках $x = 1$, $x = 3$. Используя уравнение Фробениуса–Перрона, можно также оценить характер расходимости инвариантой функции распределения в окрестностях границ фазового пространства. Рассмотрим уравнение (2) в области $(4 - x) \ll 1$. В этой области оно принимает вид

$$F(x) = \int\limits_1^3 F(y)\delta(x - 4 + 2|y - 2|^\beta)dy.$$

Выполняя интегрирование по y и используя приближенное значение корней выражения, стоящего в δ-функции, получим

$$F(x) \approx \frac{F(2+0) + F(2-0)}{2^{1/\beta}\beta} \frac{1}{(4-x)^{\frac{\beta-1}{\beta}}}.$$

Учитывая конечность значений функции распределения на скачке, легко оценить степень расходимости вблизи правой границы

$$F(x) \sim \frac{1}{(4-x)^{\frac{\beta-1}{\beta}}} \quad \text{при} \quad x \approx 4. \tag{3}$$

Аналогично оценивается степень расходимости в окрестности левой границы интервала $x \ll 1$.

$$F(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}x^{\frac{\beta-1}{\beta}}} \sim \frac{1}{x^\delta} \quad \text{при} \quad x \ll 1.$$

Здесь $\delta = \alpha - 1/\beta$.

Необходимо также отметить, что при определенных значениях параметров поведение инвариантной функции распределения вблизи границ изменяется с расходящегося на сходящееся. Так, например, при $\beta < 1$ исчезает расходимость на правой границе. А при $\alpha < 1/\beta$ инвариантная функция сходится и на левой границе.

Интересно отметить, что степень расходимости инвариантной функции распределения на концах интервала разная. Расходимость в области ламинарных фаз выше, что физически выглядит естественным. Разумеется для некоторых значений параметров α и β, при которых реализуется марковское разбиение [8] интервала, функция распределения может быть вычислена и точно.

Степенное поведение инвариантной функции распределения в областях $x \ll 1$ и $(4 - x) \ll 1$ хорошо подтверждается результатами численного моделирования. Полученные данные позволяют установить численно зависимость показателя степени δ от параметров α и β и сравнить их с ранее полученными теоретическими зависимостями (рис. 3). Показатель асимптотики функции распределения в области $(4 - x) \ll 1$ также хорошо согласуется с численными данными в этой области.

Таким образом, инвариантная функция распределения двупараметрического семейства (1) обладает степенными расходимостями на границах фазового пространства и разрывом при $x = 2$ (при $2\beta - 1 - \alpha \neq 0$). Также для нее типична асимметрия, несмотря на симметричность самого семейства отображений.

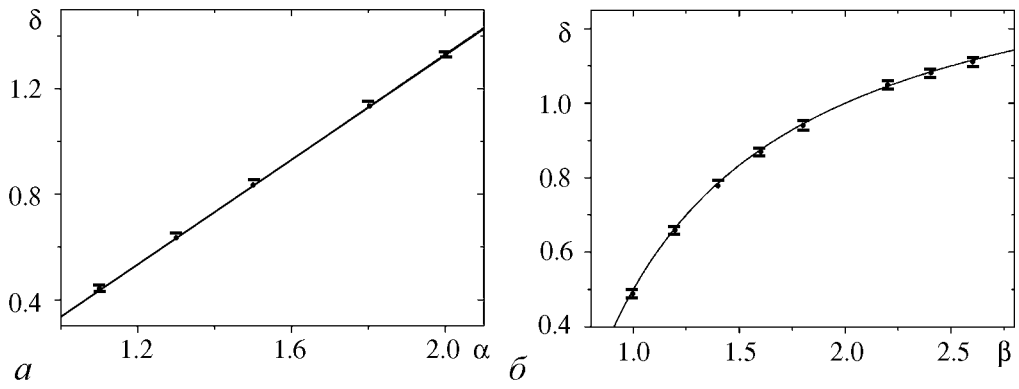


Рис. 3. Графики зависимостей δ от параметров отображения: α при фиксированном $\beta = 1.5$ (*а*) и β при фиксированном $\alpha = 1.5$ (*б*) по данным численного моделирования (точки) и их сравнение с аналитически полученными оценками (сплошные линии)

3. Статистика ламинарных фаз

Исследуемое отображение имеет две неподвижные точки. Анализ динамики отображения показал, что в окрестности каждой из них возможно образование области ламинаризации, то есть области, в которой движение частицы будет регулярным. Неподвижные точки отображения имеют различные свойства, поэтому при различных значениях параметров в системе наблюдаются различные перемежаемые режимы.

Первая область ламинаризации связана с нейтрально неустойчивой точкой на границе фазового пространства ($x \ll 1$). Естественно, что при существенной потере устойчивости внутренней неподвижной точки возникает механизм возврата в эту область ламинаризации. При этом возникает перемежаемость необычного типа. Типичный пример траектории отображения (1) соответствующего типа перемежаемости приведен на рис. 4, *в*. Аналогичный механизм ранее привлекался к описанию фликер-шумов [9]. В этой работе возврат обеспечивался введением заданной вероятности возврата в область ламинаризации без использования вида отображения.

Кроме такого режима перемежаемости, в исследуемом отображении может возникать и классический режим перемежаемости III рода [10]. Этот режим возникает непосредственно после потери устойчивости внутренней неподвижной точкой. При этом в ее окрестности формируется вторая зона ламинаризации. В этом случае возврат в нее уже обеспечивается нейтрально неустойчивой неподвижной точкой, лежащей на границе фазового пространства. Типичный пример траектории такого типа показан на рис. 4, *а*.

Естественно, возможна ситуация, при которой в системе одновременно существуют две области ламинаризации. При этом возврат в ламинарную область одного типа происходит через вторую область ламинаризации. Такой динамический режим можно назвать режимом конкуренции этих типов перемежаемости (рис. 4, *б*). В определенном смысле режим конкуренции можно рассматривать и как другой тип перемежаемости, в котором и возврат в зону ламинаризации и зона ламинаризации

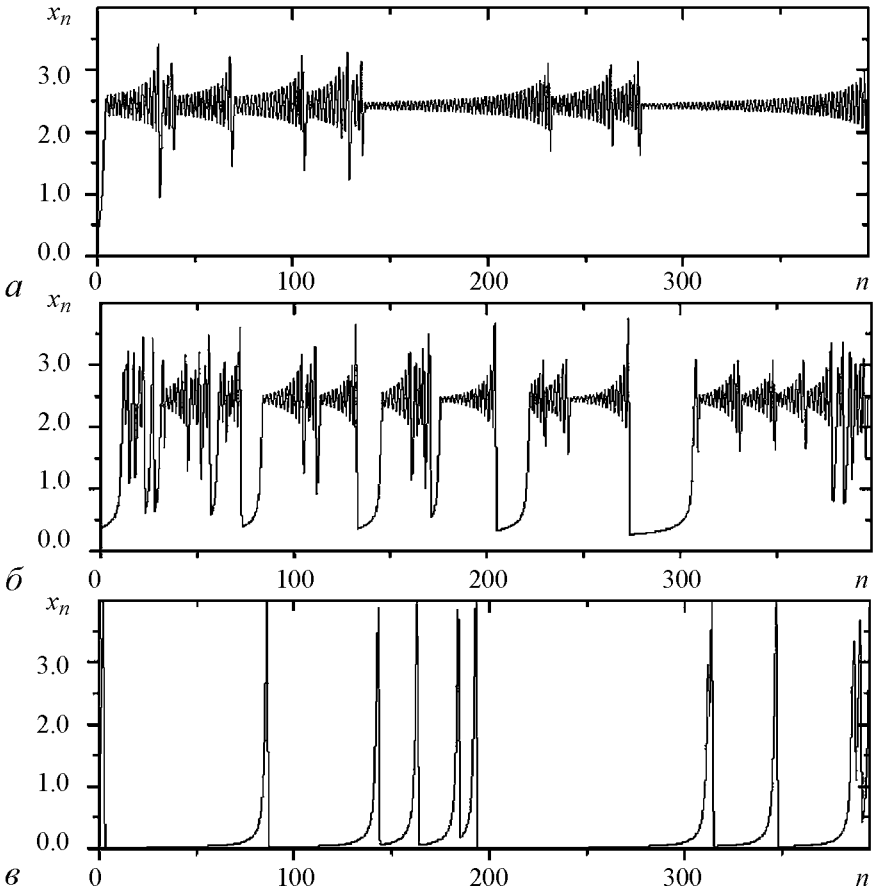


Рис. 4. Типичные орбиты отображения (1) при различных динамических режимах: *а* – $\alpha = 4.5$, $\beta = 0.267$ – перемежаемость III рода; *в* – $\alpha = 4.5$, $\beta = 2$ – перемежаемость на граничной точке; *б* – $\alpha = 4.5$, $\beta = 0.32$ – режим конкуренции перемежаемостей (перемежаемость с двумя типами ламинарных фаз)

имеют одинаковую ламинарную природу. Хаотическими являются лишь переходы от одной ламинарной фазы к другой.

Типичные примеры траекторий при разных значениях параметров показаны на рис. 4. Хорошо заметна зависимость вида ламинарных фаз от значений параметров отображения.

Перейдем теперь к анализу важной характеристики перемежаемых режимов – функции распределения длин ламинарных фаз при различных значениях параметров. В определенном смысле при различных значениях параметров в динамике может присутствовать два типа ламинарных фаз. Ламинарная фаза одного типа связана с неподвижной точкой на границе фазового пространства, другого – со второй неподвижной точкой вблизи перехода ее мультипликатора через (-1). Таким образом можно ввести функции распределения длин ламинарных фаз для каждого типа ламинарной фазы. Начнем с функции распределения длин ламинарных фаз, определяемых граничной неподвижной точкой.

Напомним, что отображение (1) содержит три важных участка, определяющих поведение системы: окрестность точки $x = 0$, максимума отображения $x = 2$ и

правой границы фазового пространства $x = 4$. Первый участок – область фазового пространства вблизи $x = 0$. Этот участок ламинаризации определяет динамику системы на ламинарных участках траектории. Он характеризуется параметром α. В этой области уравнение в конечных разностях

$$x_{n+1} = x_n + x_n^{\alpha}$$

можно приближенно заменить на дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^{\alpha}.$$

Решение этого уравнения определяет длину ламинарной фазы по координате ее начальной точки x_0

$$l(x) \approx \frac{1}{(1-\alpha)\, x_0^{\alpha-1}}. \tag{4}$$

Однако знания динамики системы на ламинарных участках траектории недостаточно для определения статистических свойств ламинарных фаз. Используем асимптотику инвариантной функции распределения для $x \ll 1$, см. уравнение (3), и оценим вероятность соответствующих начальных значений для ламинарных фаз

$$dw \sim x_0^{\frac{1-\beta}{\beta}}\, dx_0.$$

Теперь, с учетом выражения длин ламинарных фаз (4), установим асимптотики функции распределения длин ламинарных фаз в области $l \gg 1$

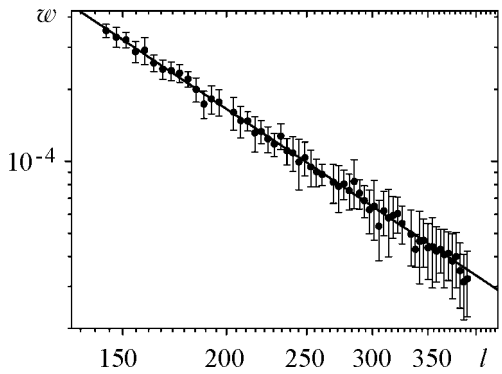


Рис. 5. Функция распределения ламинарных фаз при $\alpha = 1.5$, $\beta = 1.5$ в двойном логарифмическом масштабе. Численные значения обозначены точками с указанием погрешности. Результат аппроксимации степенной функцией с показателем $\gamma = 2.31 \pm 0.07$ – сплошная линия. Видно хорошее согласие значения показателя γ, вычисленного теоретически, с наблюдаемым при численном моделировании. Рост погрешности с длиной ламинарной фазы связан с уменьшением количества статистических данных.

$$dw \sim \frac{1}{l^{1+\frac{1}{(\alpha-1)\beta}}} dl = \frac{1}{l^{\gamma}} dl. \tag{5}$$

Показатель $\gamma > 1$ при $\alpha > 1$ и $\beta > 0$. Следует отметить медленное степенное спадание функции распределения длин ламинарных фаз $\rho(l)$ при $l \gg 1$ как $\rho(l) \sim l^{-\gamma}$, что является характерным признаком устойчивых распределений или распределений Леви [11]. Степенной скейлинг функции распределения ламинарных фаз (рис. 5) в крупномасштабной области приводит к ряду аномальных статистических свойств, связанных с расходимостью моментов длин ламинарных фаз. Результаты численного моделирования отображения (1) подтверждают наличие такого степенного спадания $\rho(l) \sim l^{-\gamma}$. В таблице приведены значения α, β, для которых вычислены значения γ согласно теоретической зависимости, и γ_{num}, полученные непосредственно из численного эксперимента.

В отличие от перемежаемостей I и III рода, для которых характерен степенной скейлинг с показателем 2, рассматриваемые режимы характеризуются широким спектром показателей скейлинга. Все моменты найденной функции степени выше либо равной $1/[(\alpha-1)\beta]$ расходятся. Если величина $1/[(\alpha-1)\beta] \geq 1$, то расходится первый момент функции распределения, то есть средняя длина ламинарных фаз стремится к бесконечности $< l > \to \infty$. Однако при определенных значениях параметров в системе могут возникать ламинарные фазы, связанные с другим механизмом. В области параметров, при которых вторая неподвижная точка теряет устойчивость, ее мультипликатор близок к (-1) и появляется ламинарная фаза, соответствующая перемежаемости III рода. В этом случае реализуется режим конкуренции между ламинарными фазами обеих неподвижных точек (см. рис. 4, *б*).

Таблица

α	β	γ	$\gamma_{\rm num}$
1.5	1	3	3.04 ± 0.11
1.5	1.5	2.33	2.37 ± 0.08
1.5	2	2	1.97 ± 0.04
2	1	2	2.03 ± 0.04
2	1.5	1.66	1.62 ± 0.07
2	2	1.5	1.59 ± 0.12

Что же касается перемежаемости, связанной со второй неустойчивой точкой, то ее можно классифицировать как перемежаемость III рода. Устройство ламинарных фаз подобных режимов хорошо исследовано [2]. Функция распределения ламинарных фаз имеет вид

$$dw = \rho(l)dl = \sim \frac{\varepsilon^{3/2} e^{4\varepsilon l}}{(e^{4\varepsilon l}-1)^{3/2}} dl.$$

Здесь ε – параметр надкритичности, определяемый асимптотикой отображения вблизи неустойчивой точки

$$x_{n+1} = -(1+\varepsilon)x_n + o(x_n^2),$$

где параметр ε определяется выражением $\varepsilon = 2\beta(x^* - 2)^{\beta-1} - 1$ (x^* – координата неподвижной точки).

Следует отметить, что можно выделить две области характерного поведения функции распределения ламинарных фаз: $x \ll \varepsilon^{-1}$ и $x > \varepsilon^{-1}$. В первой области $\rho(l) \sim l^{-3/2}$, то есть наблюдается степенной скейлинг. Во второй области функция распределения ламинарных фаз III рода экспоненциально спадает $\rho(l) \sim \exp(-2l\varepsilon)$. С ростом параметра надкритичности ε перемежаемый характер поведения системы постепенно сходит на нет из-за того, что вероятность реализации достаточно длинных участков ламинарности становится экспоненциально малой. Поэтому граница существования перемежаемости III рода определяется соотношением $2l_{\min}\varepsilon_{\rm crit} \approx 1$. Это соотношение позволяет численно оценить верхнюю границу существования перемежаемости III рода. Принимая минимальную длину ламинарной фазы $l_{\min} \sim 4$, получим значение верхней границы для параметра отображения $\beta_{\rm crit} \sim 0.5$.

Обсудим теперь функцию распределения ламинарных фаз в режиме конкуренции перемежаемостей. Как было показано выше, статистика ламинарных фаз зависит от динамики отображения в области ламинаризации и от функции распределения начальных координат ламинарных фаз. Выше были получены функции распределения ламинарных фаз разных типов в предположении полностью хаотического механизма

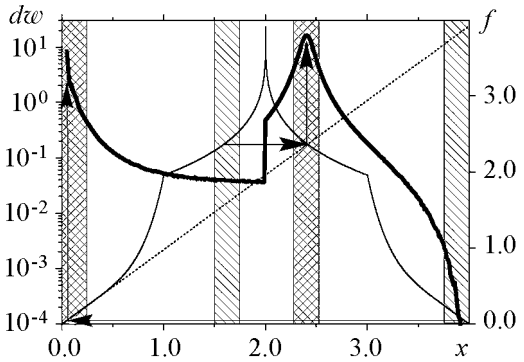


Рис. 6. Рисунок иллюстрирует взаимную независимость функций распределения для перемежаемости III рода и перемежаемости на граничной точке. Видно, что участки инвариантной функции распределения (жирная линия), определяющие функцию распределения начальных координат ламинарных фаз (косая штриховка), лежат вдали от тех участков инвариантной функции распределения, которые определяются функциями распределения ламинарных фаз разных типов (перекрестная штриховка)

возврата. Однако в случае одновременного существования двух различных типов ламинарных фаз, их статистические свойства не будут оказывать друг на друга взаимного влияния, так как области фазового пространства, соответствующие начальным координатам ламинарных фаз обоих типов, лежат вдалеке от областей ламинаризации (рис. 6). Соответственно функции распределения ламинарных фаз останутся неизменными даже в случае конкуренции перемежаемостей.

4. Показатель Ляпунова

Перейдем теперь к анализу степени хаотичности орбит отображения (1). Начнем с вычисления показателя Ляпунова. Показатель Ляпунова для одномерных отображений определяется как

$$\Lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \ln \left| f'(x_n) \right|. \tag{6}$$

Сумма в правой части содержит вклады от ламинарных и хаотических участков траектории. Физически удобно разделить эти вклады и анализировать их отдельно. Оценим вклад, вносимый в показатель Ляпунова одним ламинарным участком траектории. Для этого перейдем от отображения к дифференциальному уравнению на участке ламинарной фазы. Тогда для переменной x и её вариации δx получим

$$\dot{\delta x} = \alpha x^{\alpha-1} \delta x,$$
$$\dot{x} = x^{\alpha}.$$

Разделив первое уравнение на второе и проинтегрировав, получим

$$\ln\left(\frac{\delta x}{\delta x_0}\right) = \alpha \ln\left(\frac{x}{x_0}\right).$$

Величина $\ln[(\delta x)/(\delta x_0)]$ представляет собой вклад в сумму (6), вносимый одним ламинарным участком траектории.

Теперь, собрав в сумме вклады ламинарных участков и хаотических отдельно, перейдем формально к усреднению по ламинарным фазам

$$\Lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{\tilde{N}(N)}{N} \left(\frac{1}{\tilde{N}(N)} \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \alpha \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + \frac{1}{\tilde{N}(N)} \sum_{2<x_n<4} \ln\left|f'(x_n)\right| \right).$$

Здесь $\tilde{N}(N)$ обозначено количество ламинарных фаз, возникших за N итераций системы. Первое слагаемое в скобках представляет собой показатель Ляпунова ламинарных фаз, усредненный по большому количеству ламинарных фаз

$$\lambda_{\text{lam}} = \frac{1}{\tilde{N}(N)} \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \alpha \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \text{ при } N \to \infty.$$

Физический смысл этого показателя – это средний вклад в показатель Ляпунова на одну ламинарную фазу. Второе слагаемое – вклад, вносимый хаотическими всплесками. Длина хаотических фаз зависит от интенсивности отталкивания неустойчивой точки в области $2 < x < 4$, которая определяется параметром β. Число хаотических фаз при больших N совпадает с числом ламинарных $\tilde{N}(N)$, так как каждая ламинарная сменяется хаотической и наоборот. Аналогично можно ввести показатель Ляпунова на одну хаотическую фазу

$$\lambda_{\text{chaos}} = \frac{1}{\tilde{N}(N)} \sum_{2<x_n<4} \ln\left|f'(x_n)\right| \text{ при } N \to \infty.$$

Теперь остается обсудить величину $N/\tilde{N}(N)$. Ясно, что эта величина определяет среднюю длительность одной ламинарной и одной хаотической фазы. Тогда

$$\langle l \rangle + \langle l_{\text{chaos}} \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{\tilde{N}(N)}.$$

Где $< l_{\text{chaos}} >$ – средняя длительность одной хаотической фазы, а $\langle l \rangle$ – средняя длительность одной ламинарной фазы.

Таким образом, показатель Ляпунова можно оценить согласно общему соотношению

$$\Lambda \approx \frac{\lambda_{\text{lam}} + \lambda_{\text{chaos}}}{\langle l \rangle + \langle l_{\text{chaos}} \rangle}.$$

Это соотношение явно демонстрирует важность определения характера распределений длин ламинарных фаз. В случае, если величина $< l >$ конечна, это выражение можно преобразовать к виду

$$\Lambda \approx \frac{\Lambda_{\text{lam}} \langle l \rangle + \Lambda_{\text{chaos}} \langle l_{\text{chaos}} \rangle}{\langle l \rangle + \langle l_{\text{chaos}} \rangle} = \frac{\langle l \rangle}{\langle l \rangle + \langle l_{\text{chaos}} \rangle} \Lambda_{\text{lam}} + \frac{\langle l_{\text{chaos}} \rangle}{\langle l \rangle + \langle l_{\text{chaos}} \rangle} \Lambda_{\text{chaos}}, \qquad (7)$$

где величины Λ_{lam} и Λ_{chaos} представляют собой «парциальные» вклады ламинарных и хаотических участков траектории в показатель Ляпунова на одну итерацию. Величины Λ, Λ_{lam} и Λ_{chaos} могут быть определены непосредственно из численных экспериментов. Обратим внимание, что соотношение (7) объясняет роль средних длин ламинарных и хаотических фаз и их влияние на величину показателя Ляпунова и

указывает физический механизм его изменения при изменении относительных длин ламинарных и хаотических фаз. В случае нескольких типов ламинарных фаз соотношение (7) обобщается очевидным образом. Для выяснения значений показателя Ляпунова при различных значениях параметров α и β важно установить ограниченность показателей $\lambda_{\rm lam}$ и $\lambda_{\rm chaos}$.

Среднее значение вкладов в сумму от ламинарных фаз может быть вычислено с использованием предположения об эргодичности рассматриваемой системы. При этом усреднение по реализации может быть заменено усреднением по ансамблю

$$\lambda_{\rm lam} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\tilde{N}(N)} \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \alpha \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \alpha \left\langle \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right\rangle = \alpha \int\limits_0^\infty \ln\left(\frac{x(l)}{x_0(l)}\right) w(l) dl.$$

Учитывая ранее рассмотренные свойства функции распределения, можно доказать, что подобные средние существуют и конечны.

При усреднении вкладов хаотических фаз необходимо учитывать, что инвариантная функция распределения имеет особенность в точке $x \to 4$. Это означает, что значения из этой области будут намного чаще остальных встречаться в хаотических фазах. Проведем оценку вклада таких итераций

$$\lambda_{\rm chaos}\big|_{x\sim 4} \sim \int^4 \ln|f'(x)|\, F(x)\, dx \sim \int^4 \ln\left|1+\beta\,(4-x)^{\beta-1}\right| (4-x)^{\frac{1-\beta}{\beta}}\, dx \sim$$

$$\sim \int^4 \beta\,(4-x)^{\beta+\frac{1}{\beta}-2}\, dx \sim \left((4-x)^{\frac{1}{\beta}+\beta-1}\right)\Big|^4 \to 0.$$

Таким образом, и вклад хаотических фаз

$$\lambda_{\rm chaos} = \left\langle \ln\left|f'(x_n)\right|\right\rangle < \infty$$

можно считать конечным при любых значениях параметров отображения. Следовательно, основная зависимость показателя Ляпунова определяется величиной $< l >$, и показатель Ляпунова связан со средней длиной ламинарных фаз соотношением

$$\Lambda \sim \frac{\rm const}{< l > + < l_{\rm chaos} >}.$$

Для перемежаемости I рода это соотношение получено в [12]. Из этого соотношения ясно, что режимы в двупараметрическом семействе отображений (1), при которых $\langle l\rangle \to \infty$, обладают нулевым показателем Ляпунова $\Lambda = 0$. Условие $1/[(\alpha-1)\,\beta] = 1$ является границей, отделяющей множество хаотических режимов, для которых $\langle l\rangle < \infty$, от режимов с показателем Ляпунова, равным нулю (рис. 7). В этих условиях при $\Lambda = 0$ в системе реализуется состояние слабого хаоса. Под слабым хаосом естественно понимать такое поведение системы, при котором выполняется только часть свойств хаотического поведения. Иерархия свойств, расположенных в порядке усиления хаотичности, хорошо известна и приведена в [13]. В рассматриваемой системе выполняются такие свойства, как наличие инвариантной меры, эргодичность и перемешивание. При этом не выполняется самое сильное свойство – экспоненциальное затухание корреляций, и соответственно экспоненциальное разбегание траекторий.

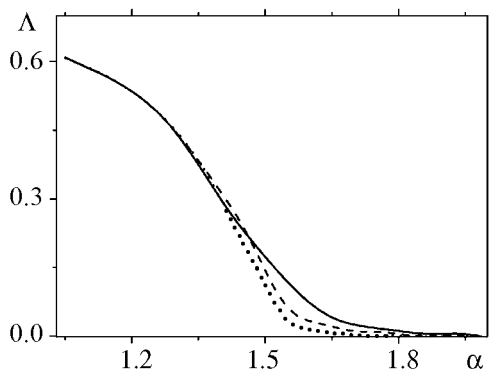


Рис. 7. Показатель Ляпунова уменьшается ростом параметра α. При некоторой величине $\alpha > \alpha_{\rm crit}$ показатель Ляпунова стремится к нулю. Показана тенденция приближения результатов численного моделирования к теоретически предсказанному результату с ростом числа итераций, использованных при вычислении показателя Ляпунова (сплошная линия – 10^6, штриховая – 10^8, пунктирная – 10^9 итераций)

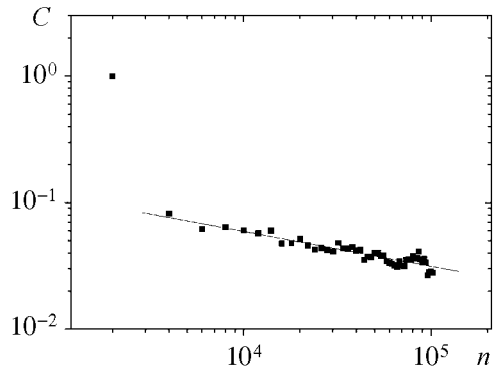


Рис. 8. График автокорреляционной функции выбранной реализации в двойном логарифмическом масштабе. Линейная аппроксимация численных данных на этом графике указывает на степенной характер затухания корреляций. Результат аппроксимации имеет вид $C(n) = An^{-\delta}$

В нашем случае корреляционная функция спадает степенным образом (рис. 8) и потеря памяти о начальном состоянии происходит медленнее, чем в режиме детерминированного хаоса с положительным показателем Ляпунова. В теории биллиардов также известны режимы, соответствующие слабому хаосу (см., например, [14]). Так, для треугольных биллиардов топологическая энтропия и показатель Ляпунова всегда нулевые, но при несоизмеримых углах в таких биллиардах обнаружено перемешивание [15] и, как следствие, слабый хаос.

Для демонстрации качественных изменений в поведении исследуемых динамических систем при переходе величины $1/[(\alpha-1)\,\beta]$ через 1, на рис. 7 приведен график зависимости показателя Ляпунова Λ от величины параметра α при фиксированном β, полученный численно. Величина $1/[(\alpha-1)\,\beta]$ достигает 1, например, при $\alpha = 1.5$ и $\beta = 2$. Рис. 7 демонстрирует наличие перехода от сильного хаоса ($\Lambda > 0$) в системе при $\alpha < 1.5$ к слабой хаотизации ($\Lambda = 0$) при $\alpha > 1.5$. Для наглядной демонстрации качественных изменений в системе на рис. 4 приведен график итераций отображения (1) при различных значениях управляющего параметра β.

В рассматриваемом случае двупараметрического семейства отображений область параметров $(\alpha,\ \beta)$ делится на три качественно различные области (рис. 9). Переход из области развитого хаоса в область слабой хаотизации (линия *2*) соответствует специфическому фазовому переходу. В качестве параметра порядка выберем показатель Ляпунова. Тогда в системе реализуется фазовый переход от положительного параметра порядка к его нулевому значению, причем непрерывный характер изменения параметра порядка соответствует фазовому переходу II рода.

Переход от регулярного поведения к сильному хаосу (линия *1*) происходит по сценарию перемежаемости III рода, возникающей при пересечении мультипликатором неподвижной точки x^* значения (-1) при параметре $\beta = \beta^* \approx 0.26$. Об этом свидетельствует численный анализ поведения показателя Ляпунова вблизи $\beta = \beta^*$ (рис. 10). Отсутствие каскада удвоения периода, который обычно наблюдается в од-

номерных отображениях при переходе мультипликатора через (-1), связано с отсутствием гладкого экстремума вблизи неподвижной точки и существованием механизма реинжекции. Реинжекция в исследуемом отображении тесно связана с негладкостью его формы в точке $x = 2$.

Кроме этого из рис. 9 следует, что при определенных значениях параметров α и β становится возможным непосредственный переход от регулярной динамики к слабому хаосу, минуя промежуточную фазу с положительным показателем Ляпунова (линия *3*). Граница такого перехода определяется такими значениями параметров:

$$\alpha \geq 4.86,$$
$$\beta \approx 0.26.$$

Наблюдаемый при этом переход выходит за границы обычной классификации пере-

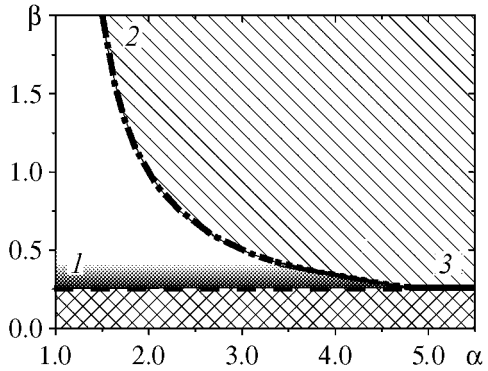


Рис. 9. Фазовая диаграмма. Область параметров (α, β) с фазой, обладающей нулевым показателем Ляпунова (заштрихована косыми линиями) и с положительным (белая). Область параметров, заштрихованная косой клеткой, соответствует фазе регулярной динамики (показатель Ляпунова отрицателен). Серая область на фазовой диаграмме соответствует перемежаемости III рода

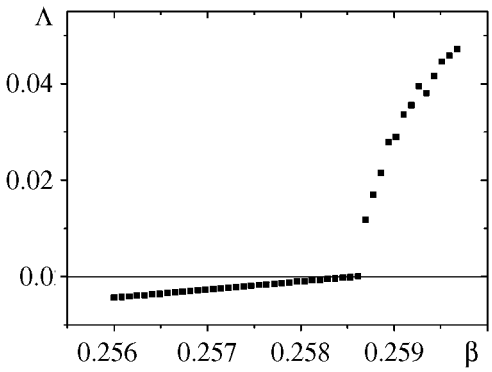


Рис. 10. Поведение показателя Ляпунова вблизи точки бифуркации $\beta = \beta^*$. Переход к хаосу происходит не через каскад удвоения периода, а через перемежаемость III рода

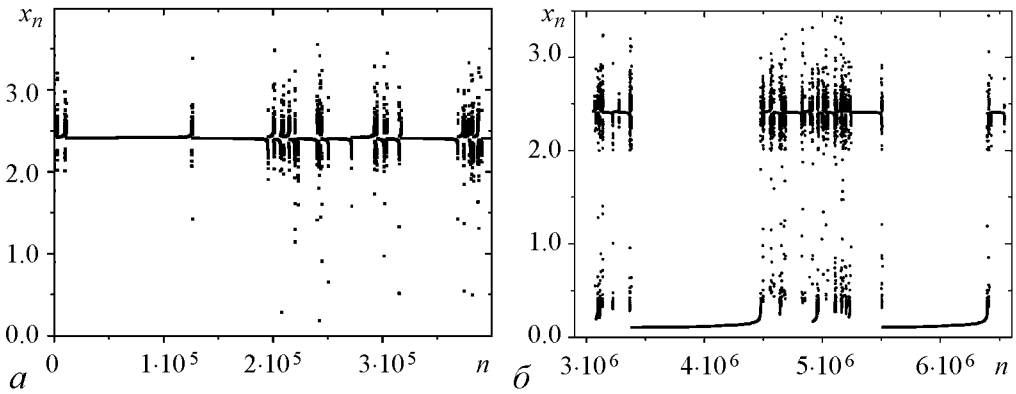


Рис. 11. *а* – типичный график итераций отображения при переходе через линию *1* (перемежаемость III рода, см. рис. 9); *б* – график итераций отображения при переходе через линию *3* (порядок – слабый хаос, см. рис. 9), при этом наблюдается конкуренция ламинарных фаз

межаемых режимов из-за наличия двух различных типов ламинарных фаз (рис. 11). Возникает конкуренция между перемежаемостью III рода и перемежаемостью граничной точки. С увеличением параметра β средняя длина ламинарных фаз в окрестности x^* уменьшается, однако при значении параметра $\alpha \geq 4.86$ статистические свойства ламинарных фаз вблизи $x = 0$ обеспечивают зануление показателя Ляпунова. Такой процесс является примером перехода порядок – слабый хаос.

Проявления хаотических свойств при нулевом показателе Ляпунова является не типичным для классических типов перемежаемости. Такой качественно новый вариант поведения, как слабый хаос в перемежающихся системах, демонстрируют лишь отображения с биффуркационной точкой на границе фазового пространства.

Докажем теперь, что топологическая энтропия каждого представителя двупараметрического семейства отображений (1) – положительная величина, не зависящая от параметров. В определенном смысле положительность этой величины говорит о сложном поведении траекторий отображения. Для определения топологической энтропии (см. например [16, 17]) необходимо построить два нидинг-ряда (*kneading sequence*) $Q_+(t)$ и $Q_-(t)$ в окрестности максимума $x = 2$. Первый нидинг-ряд будет иметь вид: $Q_+(t) = -1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \ldots$. В исходном отображении $x = 2$ являлся максимумом, поэтому первый член нидинг-последовательности является отрицательным, при дальнейших итерациях $f^k(2) = 0$ и, так как $f^k(2) \geq 0$, то точка $x = 2$ будет являться минимумом, поэтому все остальные члены нидинг-ряда имеют знак «плюс». Соответственно $Q_-(t) = -Q_+(t)$. Уравнение для нахождения топологической энтропии будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} t^k - 1 = 0.$$

Ближайшим к нулю положительным корнем этого уравнения является $t_0 = 0.5$. Таким образом, топологическая энтропия для всех отображений вида (1) равна

$$h_{\text{top}} = -\ln(t_0) = \ln(2) \simeq 0.693.$$

Для рассматриваемого семейства отображений величина топологической энтропии не совпадает с показателем Ляпунова, который меняется с изменением параметров отображения и даже обращается нуль. Поэтому часто цитируемый (см., например, [2]) вывод о совпадении показателя Ляпунова с топологической энтропией для одномерных отображений не выполняется в рассмотренных режимах перемежаемости.

Заключение

В рассмотренном семействе отображений обнаружены необычные переходы между различными типами перемежаемости. Показано, что в случае граничного положения точки бифуркации система начинает демонстрировать существенно новые варианты поведения, совершенно не характерные для классических типов перемежаемости. Обнаружен интересный режим конкуренции, при котором перемежаемая траектория состоит из случайных участков различных типов ламинарных фаз. Фазовая диаграмма таких переходов указывает на несколько возможных механизмов

перехода к хаосу в этом семействе отображений. Интересно отметить, что распределение длительности ламинарных фаз относится к устойчивым распределениям. Такие распределения неизбежно приводят к ряду аномальных транспортных явлений с широким спектром скейлинговых законов.

Библиографический список

1. *Manneville P., Pomeau Y.* Intermittency and Lorentz model // Phys. Lett. 1979. Vol. 75A. P. 1.
2. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988.
3. *Арнольд В.И.* Геометрические методы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000, 400 с.
4. *Naydenov S.V., Tur A.V., Yanovsky A.V., Yanovsky V.V.* New scenario to chaos transition in the mappings with discontinuities // Phys. Letters A. 2003. Vol. 320. P. 160
5. *Bauer M., Habip S., He D.R., and Martienssen W.* New type of intermittency in discontinuous maps // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 68. P. 1625.
6. *Hugo L.D., de Cavalcante S. and Rios Leite J.R.* Logarithmic periodicities in the bifurcations of type-I intermittent chaos // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 92. P. 254102.
7. *May R.M.* Simple mathematical models with very complicated dynamics // Nature. 1976. Vol. 261. P. 459.
8. *Наймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
9. *Ben-Mizrache A., Procaccia I., Rosenberg N., Schmidt A., Schuster H.G.* Real and apparent divergencies in low-frequency spectra of nonlinear dynamical systems // Physical Review A. 1985. Vol. 31. P. 1830.
10. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. О детерминированном подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.
11. *Zolotarev V.M.* One-dimensional stable distributions. Mathematical Monograph. American Mathematical Society, Providence, RI. 1986. Vol. 65.
12. *Кузнецов С.П.* Детерминированный хаос. М.: Физматлит, 2001.
13. *Синай Я.Г.* Стохастичность гладких динамических систем. Элементы теории КАМ, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 2. Динамические системы – 2. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 115.
14. *Zaslavsky G.M., Edelman M.* Weak mixing and anomalous kinetics along filamented surfaces // Chaos. 2001. Vol. 11, № 2. P. 295.
15. *Casati G., Prosen T.* Mixing property of triangular billiards // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 4729.
16. *Collet P., Crutchfield J.P., Eckmann J.P.* Computing the Topological Entropy of Maps // Math. Phys. 1983 Commun. Vol. 88. P. 257.
17. *Болотин Ю.Л., Тур А.В., Яновский В.В.* Конструктивный хаос. Харьков: Институт монокристаллов, 2005.

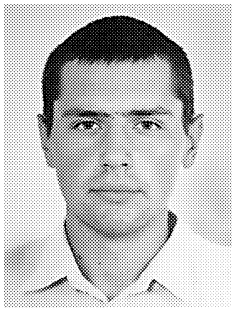
Институт монокристаллов
Национальной Академии Наук Украины
Center D'etude Spatiale
Des Rayonnements, CNRS-UPS.

Поступила в редакцию *25.06.2007*
После доработки *10.06.2008*

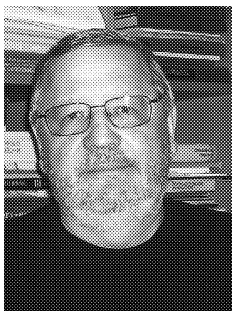
INTERMITTENCY CONCURRENCE

S.V. Slipushenko, A.V. Tur, V.V. Yanovsky

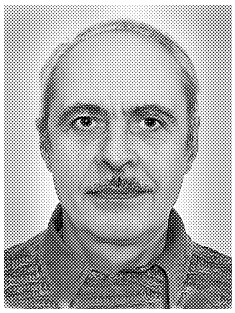
In this paper we studied intermittent modes in the two-parametric set of one-dimensional maps with the neutral unstable point at a phase space boundary. We built the phase diagram in a space of parameters. It defines possible transitions to chaos with a parameter change. We showed the unusual mode of the intermittency concurrence. We studied the laminar length distribution function, Lyapunov exponent and topological entropy of this maps set.



Слипушенко Сергей Васильевич – родился в 1984 году в Харькове, окончил физико-технический факультет Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина в 2007 году. После окончания ХНУ им. В.Н. Каразина поступил в аспирантуру Института монокристаллов Национальной Академии Наук Украины.



Тур Анатолий Валентинович – родился в 1949 году в Петропавловске, окончил Харьковский государственный университет в 1972 году. После окончания ХГУ работал в Физико-техническом институте (Харьков), а затем в Институте космических исследований. В настоящее время работает в Национальном центре научных исследований Франции (CNRS), Университете Пауля Сабатини, обсерватории Миди-Пиринеи, Центре космического исследования излучения (CESR) Тулуза. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандитата физико-математических наук в Институте космических исследований (1978) и доктора физико-математических наук (1988) в области теоретической физики. Область научных интересов – нелинейная динамика, теория турбулентности, физика плазмы, хаос и нелинейная физика. Автор более 130 научных публикаций и монографии «Конструктивный хаос» (в соавторстве с Ю.Л. Болотиным и В.В. Яновским).



Яновский Владимир Владимирович – родился в 1950 году в Полтаве, окончил Харьковский государственный университет в 1973 году. После окончания ХГУ работал в Физико-техническом институте (Харьков). В настоящее время работает в Институте монокристаллов (ИМ) НАН Украины. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандитата физико-математических наук в Институте космических исследований (1983) и доктора физико-математических наук в ИМ НАНУ (1996) в области теоретической физики. Область научных интересов – теоретическая физика, хаос и теория турбулентности, нелинейная физика. Автор более 220 научных публикаций.

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 4, 2008 УДК 621.372; 537.86; 537.87

ВЫТЕКАЮЩИЕ МОДЫ В МНОГОСЛОЙНОМ ВОЛНОВОДЕ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИЭЛЕКТРИКАМИ

А.Б. Маненков

Исследованы характеристики вытекающих мод, распространяющихся в планарных слоистых волноводах с нелинейными средами. Рассчитаны фазовые постоянные мод и их коэффициенты затухания. Показано, что в нелинейных структурах зависимости полей от продольной координаты отличаются от экспоненциальной зависимости, которая типична для линейных задач. Это свойство приводит к эффекту трансформации различных мод даже для регулярной геометрии волновода.

Введение

Нелинейные материалы широко используются в оптических системах, в том числе, в схемах интегральной оптики и в системах на основе фотонных кристаллов [1–4]. В настоящее время исследуются различные нелинейные структуры с разнообразными свойствами. В частности, большой интерес для практических приложений представляют композиционные материалы, изготовленные с помощью имплантации наночастиц в диэлектрики [5–7]. В таких структурах могут возникать различные резонансные явления, которые приводят к сильному изменению свойств композиционных материалов, включая изменения нелинейных характеристик.

Многие задачи нелинейной оптики связаны с исследованием распространения волн в открытых многослойных диэлектрических волноводах, в том числе, в брэгговских волноводах [3, 4]. Заметим,что слоистые структуры исследовались достаточно давно, причем как для систем с линейными, так и с нелинейными диэлектриками [3, 4, 8, 9]. Многослойные структуры перспективны для создания различных элементов интегральной оптики и оптических датчиков. Они также могут рассматриваться как простейшие модели более сложных систем, например, фотонных кристаллов. В основном в литературе изучались направляемые (поверхностные)

моды. В настоящей работе будем исследовать случай, когда моды являются вытекающими [8, 10]. В работе показано, что ряд свойств, присущих именно системам с вытекающими модами (ВМ), может представлять интерес как для теории, так и для различных практических приложений.

1. Исходные уравнения

Рассматриваемый волновод (рис. 1) представляет собой многослойную планарную структуру: центральный волноведущий слой, окруженный сверху и снизу в общем случае нелинейными диэлектрическими слоями. Толщину центрального слоя обозначим через $2d$, а его постоянную проницаемость – через n_g. Предполагаем, что проницаемость окружающей среды (сверху и снизу покрывающих слоев) также равна n_g. Общее число слоев (включая два полубесконечных слоя снаружи волновода) обозначим через M_l. Будем рассматривать частный случай симметричного волновода, когда характеристики слоев при $y > 0$ и $y < 0$ совпадают. Толщины покрывающих слоев с нечетными номерами обозначим через d_1 (см. рис. 1), а толщины четных слоев – через d_2. В дальнейшем предполагаем, что слои изготовлены из нелинейных материалов с кубической нелинейностью [3, 11, 12].

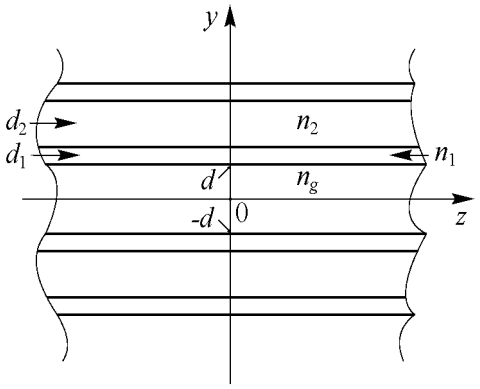


Рис. 1. Геометрия планарного волновода (показана только центральная часть структуры)

В работе изучен случай, когда электрическое поле имеет только одну компоненту E_x, то есть рассмотрим ТЕ-волны. Будем исследовать гармонические процессы, когда временная зависимость имеет вид $\exp(-i\omega t)$, где ω – частота, а t – время. В дальнейшем считаем, что среды таковы, что высшие временные гармоники подавляются. Такое приближение оправдано в случае, когда затухание волн на таких гармониках велико, что наблюдается, в частности, в оптическом диапазоне, когда частоты третьих гармоник лежат в ультрафиолетовом диапазоне.

Поле мод, распространяющихся вдоль оси z, должно удовлетворять уравнению [11, 12]

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon(y, |E_x|^2) E_x = 0, \tag{1}$$

где ε – диэлектрическая проницаемость, которая зависит от координаты y, а в нелинейных средах – и от квадрата модуля поля $|E_x|^2$. Для простоты предполагаем, что параметры всех нечетных, а также четных слоев, одинаковы (волновод с чередующимися слоями). В слоях, изготовленных из нелинейных диэлектриков с кубической нелинейностью, проницаемости материалов нечетных и четных слоев равны соответственно

$$\varepsilon = \begin{cases} n_1^2 + \alpha_1 |E_x|^2, \\ n_2^2 + \alpha_2 |E_x|^2, \end{cases} \tag{2}$$

где положительные постоянные n_1 и n_2 – линейные части (n_1, n_2 – показатели преломления[1]), а постоянные вещественные коэффициенты α_1 и α_2 могут быть как положительными, так и отрицательными.

2. Локальные характеристики вытекающих мод

Рассматриваемая планарная структура может направлять моды разных типов, включая направляемые и вытекающие. Для направляемых мод (НМ) в случае отсутствия диэлектрических потерь (когда $\mathrm{Im}\ \varepsilon = 0$) решение уравнения (1) имеет вид бегущих волн

$$E_x = A\Phi(y)\exp\left[i(\beta z - \omega t)\right], \tag{3}$$

где β – постоянная распространения НМ, A – вещественный амплитудный множитель; для простоты начальную фазу поля положили равной нулю. Функция $\Phi(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi'' + \{k^2\varepsilon(y, A^2|\Phi|^2) - \beta^2\}\Phi = 0, \tag{4}$$

в котором проницаемость $\varepsilon(y, |\Phi|^2)$ зависит от поперечного распределения поля, но не зависит от координаты z. Это свойство объясняется тем, что для НМ постоянная распространения β вещественна, а значит модуль поля не зависит от координаты z и поэтому $|E_x| = |\Phi|$. В этом случае в уравнении (1) переменные разделяются, что и позволило искать решение задачи в виде (3). Как будет показано ниже, для вытекающих мод переменные *не разделяются*, что существенно усложняет решение задачи.

Для определенности будем рассматривать случай, когда $n_1 < n_g$. Парциальные лучи вытекающих мод, распространяющихся в такой системе, в линейном случае (при $\alpha_j = 0$, $j = 1, 2$) испытывают внутреннее отражение на границах $y = \pm d$. При конечной толщине d_1 эти парциальные лучи туннелируют через покрывающие слои и мода является вытекающей, то есть имеет радиационные потери. При анализе ВМ в уравнении (1) следует считать диэлектрические проницаемости зависящими от z, поскольку для ВМ имеем $|E_x| \sim \exp\left(-z\ \mathrm{Im}\ \beta\right)$, причем $\mathrm{Im}\ \beta \neq 0$ (здесь и ниже β – комплексная постоянная распространения ВМ). Для определенности далее исследуем прямые моды, у которых $\mathrm{Im}\ \beta > 0$. Ниже будем изучать слабо вытекающие моды, для которых $\mathrm{Im}\ \beta \ll kn_g$. Для определенности исследуем структуру основной ВМ типа TE_0. При указанных выше условиях решение уравнения (1) можно записать в следующей приближенной форме:

$$E_0 = A_0(z)\Phi_0(y, A_0(z))\exp\left\{i[\phi_0(z) - \omega t]\right\} + O(\mathrm{Im}\ \beta_0), \tag{5}$$

где $A_0(z)$ – вещественная амплитудная функция, $\phi_0(z)$ – вещественная фаза (фазовый набег), $\beta_0 = \beta_0(z)$ – комплексная постоянная распространения. Функция $\Phi_0(y, A_0(z))$ описывает распределение поля ВМ в поперечной плоскости при фиксированном значении z. В силу медленности спадания модуля поля $|E_x|$ можно разбить рассматриваемый интервал продольной оси z на малые подинтервалы длины Δz, на которых амплитуду ВМ можно считать постоянной (при условии $\Delta z \mathrm{Im}\ \beta_0 \ll 1$). На

[1]Предполагаем, что магнитная проницаемость всех сред равна единице.

каждом таком подинтервале решение (1) можно искать в виде выражения (3), в котором $A = A_0$. Таким образом, в окрестности любой плоскости $z = \mathrm{const}$ можно считать амплитуду $A_0(z)$ приближенно постоянной и определить в этой окрестности локальные характеристики ВМ, в частности, фазовую скорость, считая $\phi_0(z) \sim \mathrm{Re}\,\beta_0 z$, и коэффициент затухания $\mathrm{Im}\,\beta_0$. Ниже будут выведены приближенные представления для функций $A_0(z)$ и $\phi_0(z)$, которые определяют зависимость полей от продольной координаты z на больших участках волновода.

В силу симметрии геометрии ниже будем рассматривать лишь верхнюю половину системы, изображенной на рис. 1 (при $y > 0$). Для основной моды TE_0 решение (4), то есть функцию Φ, внутри и вне волновода можно представить в виде

$$\Phi_0 = \begin{cases} \cos(\kappa y), \text{ при } |y| < d, \\ A_e \exp[i\kappa(|y| - d_c)], \text{ при } |y| > d_c, \end{cases} \tag{6}$$

где d_c – координата самой верхней границы раздела сред, A_e – амплитуда вытекающей волны в окружающей среде. Волновые числа моды TE_0 связаны соотношениями

$$\beta_0^2 = k^2 n_1^2 + p_1^2 = k^2 n_g^2 - \kappa^2, \tag{7}$$

где p_1 – поперечное волновое число в первом покрывающем слое. При выводе этих формул учтена четность моды TE_0, условия излучения и нормировки ($\Phi(0) = 1$).

3. Численная методика

Для численного решения уравнения (4), будем использовать вариант метода пристрелки (стрельбы) [13]. Согласно этой методике интегрируем уравнение второго порядка (4), используя начальные значения

$$\Phi_0(0) = 1, \quad \Phi_0'(0) = 0. \tag{8}$$

Интегрирование ведется до точки $y = d_c$, при этом величина поперечного волнового числа κ задается численной процедурой поиска корней дисперсионного соотношения (ДС). Само ДС получается из условия непрерывности поля и его производной в точке $y = d_c$. Слева от этой точки поле вычисляется численно, а справа – исходя из явного представления в виде уходящей из волновода волны (6). Сшивая эти поля получаем ДС, которое можно записать в виде

$$\Phi_0'(d_c)/\Phi_0(d_c) = i\kappa. \tag{9}$$

Корни этого уравнения находились модифицированным методом Пауэлла [14], который предназначен для поиска нулей системы действительных нелинейных уравнений. Такая система получается, если в (9) разделить действительные и мнимые части.

Для простейшей геометрии, когда волновод представляет собой диэлектрическую пластину, зажатую между двумя полубесконечными слоями из линейного диэлектрика, то есть при $\alpha_1 = 0$ и $d_1 = \infty$, получаем хорошо известное ДС

$$\kappa d = V \cos(\kappa d), \quad V = kd\sqrt{n_g^2 - n_1^2}, \tag{10}$$

где V – безразмерная частота. В такой системе, когда $n_1 < n_g$ и $d_1 \to \infty$, радиационные потери отсутствуют, рассматриваемая мода становится направляемой. Для нее вещественный корень уравнения (10) находится стандартными методами [14]. При решении общего уравнения (9) значения корней (10) удобно использовать в качестве начального приближения для κ, поскольку для слабо вытекающих мод корни уравнений (9) и (10) близки. Заметим, что при больших значениях параметра $|p_1|d_1$ рассматриваемая задача Коши для уравнения (4) относится к классу так называемых жестких задач и решается модифицированным методом Гира [14, 15].

При условии $n_1 < n_g$, когда параметр $\tau = \exp(-2p_1d_1)$ мал, для поперечного волнового числа κ основной моды TE_0 можно получить следующее приближенное ДС:

$$\frac{\kappa d}{\cos \kappa d} = V + \left[\alpha_1 A_0^2 \frac{(kd)^2(\kappa d)^2}{4V^3} + \tau \frac{2(p_1 d)^2}{V} \frac{p_1 + i\kappa}{p_1 - i\kappa}\right]. \tag{11}$$

В случае, когда малы как параметр τ, так и амплитуда поля A_0, уравнение (11) можно решить итерациями.

Фазовый параметр $\mathrm{Re}\ \beta_0$ можно вычислить из соотношения $\beta_0 = \sqrt{k^2 n_g^2 - \kappa^2}$, используя выражения для κ, которое находится из ДС. Коэффициент затухания $\mathrm{Im}\ \beta_0$ пропорционален параметру τ и для слабо вытекающих мод, когда $|p_1|d_1 > 1$, он мал ($\mathrm{Im}\ \beta_0 \ll kn_g$). Нелинейность покрывающих слоев изменяет комплексную постоянную распространения β_0. Сдвиг фазовой постоянной $\mathrm{Re}\ \beta_0$ за счет нелинейности диэлектрика пропорционален параметру $|\alpha_1 A_0^2|$. При малых значениях амплитуды поля A_0 оценку этого сдвига можно сделать с помощью уравнения (11). В отличие от сдвига $\mathrm{Re}\ \beta_0$ сдвиг величины $\mathrm{Im}\ \beta_0$ за счет нелинейности существенно меньше, он пропорционален $|\alpha_1 A_0^2 \exp(-2p_1d_1)|$.

Опишем результаты численного анализа локальных характеристик ВМ типа TE_0 на одном частном примере. Рассматриваем 17-слойную структуру ($M_l = 17$) – волноведущий слой, который покрыт с каждой стороны семью слоями конечных толщин с чередующимися параметрами. Первый и последующие покрывающие слои с нечетными номерами имеют показатель преломления $n_1 < n_g$, а для четных слоев – $n_2 = n_g$. Для простоты будем считать, что четные слои и окружающая волновод среда изготовлены из линейных диэлектриков (в частности, $\alpha_2 = 0$).

На рис. 2 изображена зависимость безразмерного фазового параметра $\mathrm{Re}\ \beta_0/(kn_g)$ от амплитуды электрического поля A_0 моды TE_0. Расчеты проводились для волновода с параметрами: $kd = 1.4612$, $d_1/d = 0.5$, $n_g = 3.6$, $n_1 = 3.42$ и $n_2 = n_g$. На рис. 3 показаны зависимости относительных потерь $\mathrm{Im}\ \beta_0/(kn_g)$ моды TE_0 от амплитуды A_0 для этого же волновода. Как следует из рис. 2 и 3, фазовая скорость и потери моды TE_0 существенно зависят от передаваемой мощности.

Как видно из приведенных данных, зависимости $\mathrm{Re}\ \beta_0$ и $\mathrm{Im}\ \beta_0$ от амплитуды A_0 похожи: при $\alpha_1 > 0$ значения этих величин растут, а при $\alpha_1 < 0$ – убывают. Эти результаты можно пояснить на основе соображений геометрической оптики, используя решение задачи о туннелировании плоских волн сквозь нелинейный слой (барьер) [16]. Для определенности, будем рассматривать зависимости для коэффициента затухания, предполагая, кроме того, что $V \gg 1$, то есть исследуя область высоких частот. Как известно, ВМ образована суперпозицией парциальных лучей,

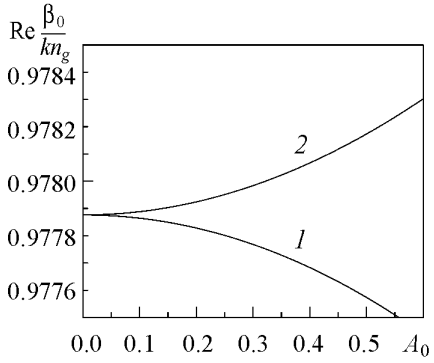


Рис. 2. Зависимость фазовой постоянной основной вытекающей моды от амплитуды поля для различных значений параметра α_1: -0.1 (*1*), 0.1 (*2*)

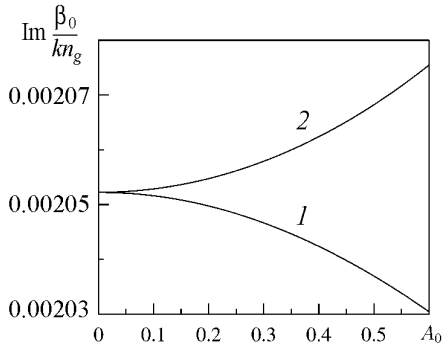


Рис. 3. Зависимость коэффициента затухания основной вытекающей моды от амплитуды поля для различных значений параметра α_1: -0.1 (*1*), 0.1 (*2*)

которые распространяются вдоль волновода и попеременно отражаются от покрывающих слоев, при этом лучи частично туннелируют сквозь них. Используя закон сохранения энергии, можно показать, что для структуры без диэлектрических потерь ($\mathrm{Im}\ \varepsilon = 0$) коэффициент радиационного затухания равен [8]

$$\mathrm{Im}\ \beta_0 \approx (|T|^2 \mathrm{Re}\ \kappa)/[4\mathrm{Re}\ (\beta_0 d)]. \tag{12}$$

Здесь через T обозначен коэффициент прохождения парциальных лучей, падающих на границу $y = d$. Коэффициент T может быть рассчитан так же, как в работе [16].

Зависимость T от амплитуды A_0 можно объяснить, если ввести усредненные значения показателей преломления нелинейных слоев, заменяя во вторых членах формул (2) точные значения E_x средними величинами. При этом следует учесть, что для рассматриваемой структуры значения T определяются, в основном, разностью диэлектрических проницаемостей в центральном и первом покрывающем слое. При $\alpha_1 > 0$ электрическое поле в первом слое увеличивает проницаемость ε, что приводит к увеличению T, по крайней мере, до тех пор, пока проницаемости в волноведущем и первом слоях не сравняются.

Из результатов статьи [16] и формулы (12) следует, что при определенных значениях параметров слоев и при достаточно большой амплитуде поля стенка, изготовленная из нелинейных диэлектриков, может стать почти прозрачной. В этом случае затухание ВМ будет велико. Заметим, что эти рассуждения не учитывают эффекты преобразования мод (см. ниже), поэтому оценка потерь по формуле (12) может быть только качественной.

4. Распространение волн вдоль оси

В этом и следующем разделах рассмотрим зависимости полей ВМ от продольной координаты z. Как указывалось выше, диэлектрическая проницаемость в нелинейных слоях волновода оказывается зависящей от этой координаты, причем эта зависимость слабая. Решаемая задача похожа на задачу о распространении волн

в волноводах с линейными средами, у которых профиль показателя преломления медленно меняется вдоль оси z. Для анализа таких задач в случае линейных сред наиболее эффективными являются подходы, которые основаны на разложениях полей по полям собственных мод и теории возбуждения (например, на методе поперечных сечений), а также на неполном методе Галеркина и методе приближенного разделения переменных [17–19].

Заметим, что есть ряд принципиальных различий между указанными двумя классами задач. В линейных задачах изменение показателя преломления вдоль оси z происходит за счет «внешнего» изменения параметров диэлектриков, например, при изготовлении волновода (за счет внедрения примесей, изменения плотности материалов и т. д.) или за счет изменения «управляющего» постоянного магнитного поля, как, например, в устройствах, использующих эффект Фарадея. В нелинейной задаче изменение эффективного значения диэлектрической проницаемости происходит за счет самого поля (см. соотношения (2)), поскольку оно спадает вдоль оси z. Без модификации применить указанные выше методы для анализа рассматриваемой задачи не удается из-за особенностей исследуемой структуры. В частности, большинство указанных методов базируется на свойствах ортогональности собственных мод; для нелинейных задач условия ортогональности мод разных типов в той форме, в какой они выводятся для линейных структур, по-видимому, записать нельзя. Следует также учесть, что даже в линейном случае изучение процесса распространения ВМ в волноводе с переменным профилем ε наталкивается на ряд трудностей, которые связаны в основном с тем, что ВМ не являются собственными и они не могут возбуждаться отдельно от других мод [10,20]. Любой источник с конечной мощностью возбуждает одновременно как ВМ, так и пространственную волну. Поэтому многие результаты анализа зависят от вида источника (в отличие от случая НМ) [20]. Кроме того, поля ВМ растут на бесконечности при $y \to \pm\infty$, из-за чего возникают проблемы при применении, например, методов возмущений.

Ниже будем искать приближенное решение задачи, предполагая, что нелинейные эффекты малы (то есть $|\alpha_j E_x^2| \ll n_j^2$, $j = 1, 2$). В этом случае в уравнении (1) в первом приближении в малых слагаемых $\alpha_j |E_x|^2$, которые определяют нелинейную зависимость проницаемости ε от поля, можно заменить E_x на E_0. В результате вместо (1) для полей в нелинейных слоях получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + [k^2(n_j^2 + \alpha_j |E_0|^2)]E_x = 0, \quad j = 1, 2. \tag{13}$$

Поле основной моды E_0 будем искать в виде (5). Отбросим в представлении полного поля E_x поля всех высших ВМ, встречных мод, а также поля мод непрерывного спектра, то есть положим $E_x \approx E_0$ и подставим (5) в (13). В итоге приходим к системе уравнений

$$\frac{d\phi_0}{dz} = \mathrm{Re}\,\beta_0, \tag{14}$$

$$\frac{dA_0}{dz} = -\left[\frac{1}{2\mathrm{Re}\,\beta_0}\frac{d(\mathrm{Re}\,\beta_0)}{dz} + \mathrm{Im}\,\beta_0\right] A_0. \tag{15}$$

Напомним, что в формуле (5) функция Φ_0 является точным решением «поперечного» уравнения (4), в котором амплитуда A_0 при фиксированном значении координаты z является параметром, так что комплексная постоянная распространения β_0 зависит от A_0 (а в итоге и от z).

Формальное решение системы (14)–(15) можно записать в виде соотношений, которые похожи на хорошо известные формулы ВКБ-приближения

$$\phi_0(z) = \int_0^z \mathrm{Re}\,\beta_0(A_0(z))dz + \phi_i, \tag{16}$$

$$A_0(z) = \frac{B_i}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\beta_0(A_0(z))}} \exp\left[-\int_0^z \mathrm{Im}\,\beta_0(A_0(z))dz\right], \tag{17}$$

где константы ϕ_i и B_i определяются из начальных условий при $z = 0$. При выводе этих формул считали, что ВМ возбуждается в сечении $z = 0$. Заметим, что в отличие от ВКБ-формул, соотношения (16)–(17) на самом деле являются нелинейными интегральными уравнениями относительно $A_0(z)$, поскольку входящая в правые части этих соотношений постоянная распространения β_0 является функцией $A_0(z)$. Строго говоря, для рассматриваемой задачи величину β_0 нельзя называть постоянной распространения, так как она меняется при распространении моды вдоль волновода; о ней, как о постоянной, можно говорить только при исследовании локальных характеристик ВМ (на небольших интервалах оси z).

Приведенное соотношение определяет неявную зависимость амплитуды A_0 от продольной координаты z. В малоамплитудном приближении можно получить более простые формулы для амплитуды и фазы, учитывая, что приближенно

$$\beta_0 = \beta_{0l} + (\xi_1 + i\xi_2)\alpha A_0^2, \tag{18}$$

где β_{0l} – значение постоянной распространения в линейном случае (при $\alpha_j = 0$), а ξ_1 и ξ_2 – некоторые вещественные константы, причем $|\xi_1| \sim 1$, а $|\xi_2| \ll |\xi_1|$. В этом приближении получаем соотношение для амплитудной функции

$$\ln\left[\frac{A_0(z)}{A_i}\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{Re}\,\beta_0(A_i)}{\mathrm{Re}\,\beta_0(A_0(z))} - \int_0^z [\mathrm{Im}\,\beta_{0l} + \xi_2\alpha A_0^2(z)]dz, \tag{19}$$

где A_i – значение амплитуды ВМ при $z = 0$. Приведенное соотношение также является нелинейным интегральным уравнением для амплитудной функции $A_0(z)$. Для вычисления $A_0(z)$ можно использовать итерационную технику. Для оценки закона спадания поля при распространении ВМ вдоль оси z в правую часть последней формулы вместо $A_0(z)$ можно подставить приближенное выражение $A_{0l} = A_i \exp[-z\mathrm{Im}\,\beta_{0l}]$, то есть использовать в качестве нулевого приближения зависимость для $A_0(z)$ для линейной задачи. Это приближение можно получить сразу из (13), если в выражениях для ε использовать приближенное выражение для поля E_{0l} для линейной задачи.

Приведенные зависимости полей от координаты z можно получить иными способами, например, исходя из описанной выше процедуры разбиения интервала оси z волновода на малые подинтервалы, на которых функцию $A_0(z)$ можно считать постоянной. Сшивая затем поля на концах указанных подинтервалов, получаем формулы (14)–(15).

Полученные выше приближенные соотношения позволяют достаточно просто описать поведение амплитуды $A_0(z)$ при увеличении координаты z. При любом знаке параметров α_j поле E_x затухает по мере роста z, но спадание $A_0(z)$ происходит не с постоянным коэффициентом затухания $\mathrm{Im}\ \beta_0$, как это было бы в линейном случае, а с переменным. В зависимости от параметров покрывающих волновод слоев, в частности, от знака α_j, коэффициент затухания $\mathrm{Im}\ \beta_0$ может как увеличиваться, так и уменьшаться по мере спадания амплитуды $A_0(z)$. То же происходит и с фазовой скоростью ВМ. Можно сказать, что значения $\mathrm{Re}\ \beta_0$ и $\mathrm{Im}\ \beta_0$ изменяются так, что «рабочая точка» движется налево по кривым, изображенным на рис. 2 и 3, когда амплитуда поля $A_0(z)$ постепенно уменьшается (по мере распространения волны вдоль волновода). В пределе, когда амплитуда $A_0(z)$ уменьшиться настолько, что нелинейными эффектами можно будет пренебречь, дальнейшее затухание волны будет происходить с постоянным коэффициентом затухания $\mathrm{Im}\ \beta_{0l}$, как в линейной системе. Заметим, что в пределе, когда $z \to \infty$ фазовый набег будет изменяться линейно по закону $\mathrm{Re}\ \beta_{0l} z + \phi_s$ (ϕ_s – некоторая постоянная).

Используя геометрооптический подход, можно качественно объяснить полученные выше результаты. Для этого для расчета ВМ применим приближенные импедансные граничные условия: $Z_e = E_x/H_z$, где импеданс Z_e определяется из решения задачи о падении плоской волны на слоистую диэлектрическую стенку [8]. Для стенки из нелинейного диэлектрика импеданс зависит от амплитуды поля, то есть $Z_e = Z_e(A_0)$. При распространении ВМ вдоль волновода импеданс будет меняться из-за уменьшения A_0. При этом будет изменяться и комплексная постоянная распространения β_0. В результате, как нетрудно показать, фазовый набег будет определяться интегралом от функции $\mathrm{Re}\ \beta_0(z)$.

5. Возбуждение мод высших типов

Изменение эффективных проницаемостей нелинейных сред за счет поля ВМ приводит дополнительно к эффекту возбуждения высших мод. Качественно этот эффект можно описать, используя теорию возбуждения волноводов: изменение диэлектрической проницаемости формально можно трактовать как возникновение стороннего тока, величина которого пропорциональна произведению поля на вариацию ε [10]. Заметим, что основная ВМ трансформируется не только в другие ВМ, но также и в пространственную волну (интеграл по радиационным модам). Кроме того, происходит и обратное преобразование мод. Здесь мы оставляем в стороне вопрос о системе мод открытого волновода с нелинейными средами. При малой нелинейности в первом приближении будем считать, что в модальном разложении присутствуют НМ, ВМ разных типов, а также пространственная волна. Ниже мы не будем рассматривать подробно все детали процесса трансформации мод, а ограничимся лишь оценкой преобразования вытекающей моды TE_0 в ближайшую («паразитную») моду

TE_2. Как правило, все указанные выше эффекты весьма малы и во многих случаях подобные оценки достаточно информативны.

Как и выше считаем, что нелинейности малы ($|\alpha_j E_x^2| \ll n_j^2$, $j = 1, 2$). Представим поле рассматриваемых волн в виде

$$E_x = E_0 + E_2 + \ldots, \tag{20}$$

где первое слагаемое описывает поле моды TE_0, которое уже было определено выше (см. (5)), а второе слагаемое – моды TE_2. Точками в формуле (20) обозначены поля других ВМ высшего типа, НМ (если они есть), а также поле пространственной волны (моды непрерывного спектра [10]). Заметим, что как поле моды TE_2, так и все остальные члены в (20), имеют близкий порядок величины; они все пропорциональны $\mathrm{Im}\ \beta_0$. Однако, как правило, амплитуды полей высших ВМ убывают с увеличением их номера. Этот факт будет понятен из формул, приведенных ниже.

Для расчета процесса трансформации можно использовать схему вывода уравнений связанных мод, которая похожа на схему, применяемую в методе поперечных сечений, но с некоторыми, достаточно очевидными модификациями. Вывод приближенных выражений проводится исходя из уравнения (13), то есть полагаем, что ε не зависит от полей высших мод, а определяется только полем основной ВМ. Более того, считаем, что в выражениях для проницаемостей (2) во вторых (нелинейных) членах можно заменить поле E_x решением линейной задачи E_{0l}. Таким образом, задача расчета высших ВМ в этом приближении формально подобна линейной задаче (с заданной зависимостью ε от z). Отметим еще раз, что указанные предположения справедливы только при малой амплитуде основной ВМ и малости амплитуд высших мод по сравнению с амплитудой моды TE_0 (то есть когда $|\alpha_j E_0^2| \ll n_j^2$ и $|E_2| \ll |E_0|$). Поле второй моды будем искать в виде

$$E_2 = A_2(z)\Phi_2(y, A_0(z)) \exp\{i[\phi_2(z) - \omega t]\}, \tag{21}$$

где $A_2(z)$ и $\phi_2(z)$ – вещественные амплитуда и фаза, $\beta_2(z)$ – комплексная постоянная распространения моды, а функция $\Phi_2(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi_2'' + \{k^2\varepsilon(y, |E_{0l}|^2) - \beta_2^2\}\Phi_2 = 0. \tag{22}$$

В этом приближении выполнены условия ортогональности мод, которые используются для вывода основных уравнений, при условии, что поля ВМ являются решениями (13) с заданным распределением поля E_{0l}. Отметим, что для вывода выражений для норм ВМ и условий ортогональности следует использовать методы регуляризации, описанные в [20].

В результате стандартных выкладок приходим к уравнению для комплексной амплитуды $C_2 = A_2 \exp(i\phi_2)$ второй ВМ

$$\frac{dC_2}{dz} - i\beta_2 C_2 = \frac{k^2}{2\beta_2(\beta_2 - \beta_0)N_2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(y)\Phi_0\Phi_2 \frac{\partial}{\partial z}|E_0|^2 dy, \tag{23}$$

где N_2 – норма моды TE_2, Φ_0 и Φ_2 – поперечные распределения полей ВМ в сечении волновода (см. выше), а интеграл берется по сечению $z =$const. Для точек, лежащих

в нечетных слоях, кусочно постоянная функция $\alpha(y)$ равна α_1, а для точек в четных слоях – α_2. Отметим, что уравнение для амплитуды поля моды TE_2 отличается от уравнения для моды TE_0; распространение моды TE_2 происходит в структуре, у которой эффективная диэлектрическая проницаемость не зависит от амплитуды этой моды, а определяется полем основной ВМ типа TE_0. Из (23) получаем оценку

$$C_2 \sim \alpha_1 \mathrm{Im}\, \beta_0/(\beta_2 - \beta_0). \tag{24}$$

Заметим, что для рассматриваемой задачи возникает дополнительный малый множитель в выражении для C_2, который определяется интегралом (см. (23)) по области покрывающих слоев, где $\alpha(y) \neq 0$ и где обычно поля ВМ малы, по крайней мере, если $V \gg 1$. Таким образом, хотя параметры (в том числе геометрия) рассматриваемой структуры не зависят от координаты z (то есть волновод регулярный), тем не менее из-за нелинейности происходит перекачка энергии из основной ВМ в моды других типов.

Как видно из (24), трансформация основной ВМ в паразитную моду мала; она может быть заметна только в том случае, когда постоянные распространения мод близки (случай вырождения мод). В знаменатель формулы (24) входит разность постоянных распространения в волноводе с учетом нелинейных эффектов. В такой системе нелинейность может сблизить значения β_2 и β_0, что приведет к сильной связи двух мод. При возрастании амплитуд паразитных ВМ выписанные формулы, конечно, перестанут работать и необходим более точный анализ. Отметим также, что, как правило, разность постоянных распространения основной ВМ и высших мод TE_n ($n > 0$) растет с ростом номера n, поэтому трансформация моды TE_0 в высшие ВМ уменьшается с ростом их номера. Уменьшение коэффициента связи с ростом номера n происходит также за счет уменьшения интеграла в формуле (23). Из аналогичной формулы следует, что трансформация во встречную моду TE_0 также мала, так как постоянные распространения встречных мод имеют разные знаки, поэтому в знаменателе соответствующей формулы для амплитуды встречной моды величина $(\beta_2 - \beta_0)$ заменяется существенно большей величиной $2\beta_0$.

Заключение

В работе проанализированы характеристики вытекающих мод, распространяющихся в многослойных волноводах, изготовленных из нелинейных диэлектриков. Показано, что в подобных структурах возможно появление ряда новых эффектов. В частности, фазовые скорости и коэффициенты затухания ВМ не являются постоянными. В процессе распространения ВМ вдоль волновода происходит их трансформация в моды других типов, включая встречные моды. Такая трансфомация происходит даже в регулярной геометрии, когда параметры волновода не зависят от продольной координаты. Указанные эффекты обусловлены тем, что за счет радиационных потерь амплитуда ВМ постепенно уменьшается и это приводит к зависимости эффективных значений диэлектрической проницаемости от осевой координаты. Заметим, что подобные эффекты будут наблюдаться и при распространении направляемых мод, если волноводные среды имеют диэлектрические потери (в том числе, и в случае, когда потери обусловлены нелинейными членами в выражениях для ε, то есть если $\mathrm{Im}\, \alpha_j \neq 0$).

При большой мощности, передаваемой по волноводу, слоистая стенка из нелинейных диэлектриков может стать почти прозрачной для падающих на нее парциальных лучей. В этом случае затухание ВМ будет велико, то есть волновод практически не будет канализировать мощность. Подбирая параметры стенки, на основе такой системы можно изготовить, например, ограничители мощности. По-видимому, этот эффект может быть также использован для измерения характеристик нелинейных диэлектриков и при конструировании различных датчиков.

Автор признателен С.Н. Власову, И.А. Молоткову и А.Г. Рожневу за ценные обсуждения вопросов, связанных с данной работой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 06-02-16805, 08-02-00621 и 08-02-90002).

Библиографический список

1. *Ахмедиев Н.Н., Анкевич А.* Солитоны. М.: Физматлит, 2003.
2. *Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. М.: Физматлит, 2005.
3. *Ogusu K.* Analysis of non-linear multilayer waveguides with Kerr-like permittivities // Opt. Quantum Electron. 1989. Vol. 21, № 2. P. 109.
4. *Trutschel U., Lederer F., Golz M.* Nonlinear guides waves in multilayer systems // IEEE J. Quantum Electron. 1989. Vol. 25, № 2. P. 194.
5. *Ryasnyansky A.I., Palpant B., et al.* Nonlinear optical properties of copper nanoparticles synthesized in indium tin oxide matrix by ion implantation // J. Opt. Soc. Am. B. 2006. Vol. 23, № 7. P. 1348.
6. *Виноградова О.П., Марухина М.С., Сидоров А.И.* Самофокусировка излучения в композитном материале с наночастицами // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 12. С. 79.
7. *Enkrich C., Wegener M., et al.* Magnetic metamaterials at telecommunication and visible frequencies // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95, № 20. P. 3901.
8. *Маненков А.Б.* Затухание быстрых волн в диэлектрических трубах // Радиотехника и электроника, 1977. Т. 22, № 10. С. 2043.
9. *Адамс М.* Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984.
10. *Маненков А.Б.* Возбуждение открытых однородных волноводов // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 5. С. 739.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
12. *Власов С.Н., Таланов В.И.* Самофокусировка волн. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997.
13. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982.
14. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998.
15. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / ред. Холл Дж., Уатт Дж. М.: Мир, 1979.

16. *Молотков И.А., Маненков А.Б.* О нелинейных туннельных эффектах // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 7. С. 799.
17. *Каценеленбаум Б.З.* Теория волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: АН СССР, 1961.
18. *Никольский В.В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967.
19. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции. Электроника СВЧ. М.: Радио и связь, 1995.
20. *Маненков А.Б.* Условия ортогональности вытекающих мод // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. Т. 48, № 5. С. 388.

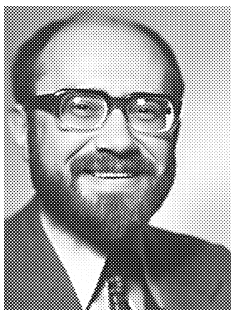
Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН, Москва

Поступила в редакцию 25.03.2008

THE LEAKY MODES OF MULTILAYERED WAVEGUIDE WITH NONLINEAR DIELECTRICS

A.B. Manenkov

Characteristics of the leaky modes, propagating along the planar layered waveguides with nonlinear media, are studied. The mode phase constants and attenuation coefficients are calculated. In nonlinear structures the dependencies of the mode field distributions on the longitudinal coordinate are shown to differ from exponential ones which are typical for the linear problems. This property results in the effect of the different modes transformation even for the regular geometry of the waveguide.



Маненков Александр Бенционович – родился в Москве (1943). Окончил Московский физико-технический институт (1965), к.ф.-м.н. (1973), д.ф.-м.н. (1996). С 1965 года работает в Институте физических проблем РАН. В физической лаборатории ИФП под руководством П.Л. Капицы экспериментально и теоретически занимался разработкой микроволновой аппаратуры для плазменных исследований. Совместно с Л.А. Вайнштейном построил общую теорию возбуждения открытых волноводов. В настоящее время – ведущий научный сотрудник ИФП РАН. Область научных интересов – анализ задач возбуждения, распространения и дифракции волн в открытых электродинамических структурах, численное исследование различных задач радиофизики (включая оптику) и электроники.

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 4, 2008 УДК 517.9

ОТОБРАЖЕНИЯ С УДВОЕНИЯМИ ПЕРИОДА С МОДУЛЯЦИЕЙ УПРАВЛЯЮЩЕГО ПАРАМЕТРА ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А.П. Кузнецов, Е.В. Новиков, А.В. Савин

Показано, что введение модуляции управляющего параметра с использованием запаздывания может рассматриваться как физически мотивированный метод построения двумерных отображений с нефиксированным якобианом. Представлены примеры таких двухпараметрических и трехпараметрического отображений. Получены условия бифуркаций Неймарка–Сакера, удвоения периода и резонанса 1:2. Исследуется устройство пространства параметров методом карт динамических режимов. С его помощью выявлены области квазипериодических режимов и различных синхронных режимов.

Введение

Двумерные отображения представляют собой один из наиболее важных объектов для изучения в теории динамических систем и теории бифуркаций [1, 2]. Они интересны как сами по себе, так и по той причине, что могут выступать как сечения Пуанкаре трехмерных потоков [2]. Поэтому характерные для двумерных отображений типы поведения, фактически, переносятся на дифференциальные системы с размерностью фазового пространства, равной трем.

Двумерные отображения разбиваются на два класса: отображения с фиксированным и нефиксированным якобианом. Первые характеризуются постоянной диссипацией. Простейшим и наиболее популярным примером такой системы является отображение Эно [1, 2]

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 - \varepsilon y_n, \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Физической системой, приводящей к отображению Эно, может служить диссипативный осциллятор под действием внешней силы, величина которой нелинейным (квадратичным) образом зависит от координаты осциллятора [2]. Основные феномены, которые демонстрируют отображения с постоянным якобианом, – это возможности хаоса и удвоений периода. В этом, однако, нет существенных отличий от более простого случая одномерных отображений.

Двумерные отображения с нефиксированным якобианом демонстрируют заметно более богатую динамику: возможность бифуркации Неймарка–Сакера рождения инвариантной кривой, картину разрушения инвариантной кривой, наличие квазипериодического поведения и эффектов синхронизации.

Одним из известных примеров отображений с нефиксированным якобианом может быть возмущенное нелинейным образом отображение Эно, предложенное Гонченко и др. [3, 4] для описания ситуаций вблизи гомоклинической петли:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 - \varepsilon y_n + \gamma x_n y_n + \mu x_n^3, \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Авторы называют его «обобщенное отображение Эно» (generalized Hénon map). Недавние публикации, посвященные отображению (2) [3, 4], говорят о возможности различных интересных особенностей поведения таких систем[1]. Естественно ожидать, что соответствующие черты динамики будут интересны не только с математической точки зрения, а будут важными и для приложений. Однако в этом плане ощущается недостаточная физическая мотивация аналогичных моделей. Достаточно сказать, что в работе [4] только выводу отображения (2) посвящено около 10 страниц сугубо математического текста, включающего емкие выкладки, имеющие вид традиционных математических доказательств.

Итак, возникает задача формирования физически мотивированных и допускающих физическую реализацию моделей, приводящих к обобщению отображения Эно на случай систем с нефиксированным якобианом. С другой стороны, желательно, чтобы они были максимально просты и допускали аналитическое исследование хотя бы основных бифуркаций. В настоящей статье предлагается применить для этой цели идеи управления хаосом [6] за счет введения запаздывания в управляющий параметр. Это дает некоторую исследовательскую программу продвижения от одномерных моделей к двумерным. Таким образом, задача управления выступает как способ построения новых существенных моделей[2]. В качестве простейшего «генератора» новых отображений используется логистическое отображение (в различных формах). Это важно с позиций физических приложений, поскольку известно огромное количество примеров с соответствующим типом поведения. Затем аналогичный подход распространен на двухпараметрическое отображение с удвоениями периода.

1. Схема построения двумерных отображений. Простейший пример – отображение Эно

Итак, пусть задано одномерное отображение

$$x_{n+1} = F(x_n, \lambda), \tag{3}$$

где λ – параметр, управляющий удвоениями в системе. Теперь допустим, что значение переменной на предыдущем шаге x_{n-1} влияет на эволюцию системы таким

[1] Укажем в связи с этим также PhD диссертацию Мейджера (2006) [5], в которой анализу отображения (2) посвящен специальный раздел.

[2] Заметим, что, хотя мы используем идеи управления, наша цель, в определенном смысле, противоположна: мы хотим построить системы с более сложным поведением, чем исходная система.

образом, что осуществляется модуляция управляющего параметра по закону

$$\lambda \to \lambda + \varepsilon(x_n - x_{n-1}), \tag{4}$$

где ε – параметр, отвечающий за запаздывающее воздействие. В результате получим новое отображение с двумя параметрами

$$x_{n+1} = F(x_n, \lambda + \varepsilon(x_n - x_{n-1})). \tag{5}$$

Если ввести новую переменную $y_{n+1} = x_n$, то получим двумерное отображение

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= F(x_n, \lambda + \varepsilon(x_n - y_n)), \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \tag{6}$$

Применим описанную процедуру к логистическому отображению в виде

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2. \tag{7}$$

При введении запаздывающего воздействия с помощью соотношения (4) приходим к отображению

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda + \varepsilon(x_n - y_n) - x_n^2, \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \tag{8}$$

Заменой переменной типа сдвига $x \to x + \varepsilon/2$, $y \to y + \varepsilon/2$ отображение (8) приводится точно к виду (1).

Таким образом, модуляция параметра, отвечающего за удвоения периода, с использованием задержанного сигнала приводит к отображению Эно. При этом амплитуда модуляции выступает как параметр диссипации. На рис. 1 воспроизведена полученная численно карта динамических режимов отображения Эно.

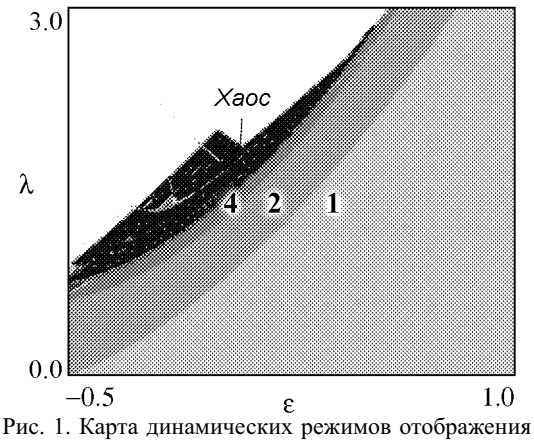


Рис. 1. Карта динамических режимов отображения (8). Цифрами обозначены периоды некоторых циклов

Стоит сказать несколько слов о методе построения карт динамических режимов, являющемся одним из эффективных компьютерных методов исследования многопараметрических нелинейных систем [2, 7]. При его применении в каждой точке плоскости параметров проводится следующая процедура. После выполнения большого числа итераций выделяется стадия процесса, для которой переходный процесс уже завершен. Затем численным образом определяется период колебаний, для чего выбранное значение переменной последовательно сравнивается с последующим. После этого «точка» плоскости (пиксель на экране компьютера) окрашивается в определенный цвет, соответствующий данному периоду колебаний. В отдельные цвета окрашиваются также области непериодических режимов (квазипериодическое поведение и хаос) и области «убегания» траекторий в бесконечность.

(Для черно-белых иллюстраций можно выбирать разные оттенки серого цвета.) В результате после сканирования плоскости параметров она оказывается «окрашенной» в цвета, соответствующие определенным режимам колебаний.

Если говорить с позиций управления, то можно видеть, что при положительных значениях параметра модуляции ε значения параметра λ, отвечающие потере устойчивости циклов, увеличиваются. Таким образом, осуществляется стабилизация режимов. С методической же точки зрения для дальнейшего важно, что указанная процедура приводит к одному из «эталонных» отображений нелинейной динамики. Поэтому можно ожидать, что она будет эффективна и в других случаях.

Отображение Эно – это отображение с постоянным якобианом. Поэтому перейдем к другим способам введения управляющего параметра.

2. Отображение с переменным якобианом. Общий случай

В представленном примере «опорное» логистическое отображение выбрано в форме (7), когда управляющий параметр входит *аддитивным* образом. При введении запаздывающего управления с помощью соотношений (4) можно использовать и другие формы логистического отображения. Например, вариант

$$x_{n+1} = \lambda(1 - x_n^2), \tag{9}$$

или

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n). \tag{10}$$

В этих случаях управляющий параметр λ входит не аддитивно, а *мультипликативно*. Именно это отличие от описанного выше случая приводит к отображениям с нефиксированным якобианом.

Отображения (7), (9) и (10) в автономном режиме эквиваленты. Все они превращаются друг в друга заменой типа сдвига переменной. Но если мы модулируем управляющий параметр λ по закону (4), то они порождают *разные двумерные отображения*, причем, в отличие от системы (8), с нефиксированным якобианом. Имея в виду эту тонкость, приступим к реализации схемы построения новых моделей.

Отображения (9) и (10) могут быть представлены в виде

$$x_{n+1} = \lambda f(x_n). \tag{11}$$

Это позволяет провести простейший анализ в общем виде.

Модуляция параметра в (11) запаздывающим воздействием по закону (4) приводит к следующему двумерному отображению:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (\lambda + \varepsilon(x_n - y_n))f(x_n), \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \tag{12}$$

Обсудим его свойства.

Неподвижные точки. Неподвижные точки отображения (12) получаются при подстановке $x_{n+1} = x_n$ и $y_{n+1} = y_n$, что приводит к уравнению

$$x = \lambda f(x), \tag{13}$$

тождественному случаю автономной системы в отсутствие модуляции параметра.

Для анализа бифуркаций неподвижной точки нужно найти матрицу монодромии (матрицу Якоби) системы (12). Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x}, & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon f(x) + \lambda f'(x), & -\varepsilon f(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Соответственно, якобиан этой матрицы

$$J = \varepsilon f(x). \tag{15}$$

Таким образом, при $\varepsilon \neq 0$ мы действительно приходим к отображению с нефиксированным якобианом. Далее, для следа матрицы получаем

$$S = \varepsilon f(x) + \lambda f'(x). \tag{16}$$

Бифуркация Неймарка–Сакера. Эта бифуркация ответственна за возникновение инвариантной кривой. Как известно, ей отвечает значение якобиана равное единице $J = 1$. В соответствии с (15) получаем $\varepsilon f(x) = 1$. Дополнив это соотношение уравнением для поиска неподвижных точек (13), приходим к параметрическому уравнению для линии бифуркации Неймарка–Сакера

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{x}, \quad x = \lambda f(x). \tag{17}$$

Бифуркация удвоения периода. Этой бифуркации отвечает равенство одного из мультипликаторов минус единице, то есть $\mu_1 = -1$. В свою очередь, по свойствам матрицы возмущений, $\mu^2 - S\mu + J = 0$. Таким образом, ей отвечает условие $1 + S\mu + J = 0$. Используя выражения для следа и якобиана, (15) и (16), получаем

$$1 + 2\varepsilon f(x) + \lambda f'(x) = 0. \tag{18}$$

С использованием (13) приходим к следующему параметрическому уравнению линии удвоений:

$$\varepsilon = -\lambda \frac{1 + \lambda f'(x)}{2x}, \quad x = \lambda f(x). \tag{19}$$

Резонанс 1:2. Линии удвоения периода и бифуркации Неймарка–Сакера пересекаются в точке коразмерности два, которой отвечают значения мультипликаторов $\mu_1 = -1$ и $\mu_2 = -1$. (Точка резонанса 1:2, по терминологии [1].) Мы легко можем теперь записать уравнение для поиска этих точек, совмещая (17) и (19),

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{x}, \quad \lambda f'(x) + 3 = 0, \quad x = \lambda f(x). \tag{20}$$

Перейдем теперь к конструированию и обсуждению конкретных отображений с нефиксированным якобианом.

3. Отображение с нефиксированным якобианом. Система 1

Используем в качестве автономной системы логистическое отображение в форме (9), так что $f(x) = 1 - x^2$. В этом случае приходим к двумерному отображению

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (\lambda + \varepsilon(x_n - y_n))(1 - x_n^2), \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \tag{21}$$

Устойчивой может быть только одна неподвижная точка этого отображения, для которой из (13) находим $x = (\sqrt{1 + 4\lambda^2} - 1)/(2\lambda)$. Соотношения (17) для системы (21) позволяют получить аналитическое выражение для линии бифуркации Неймарка–Сакера

$$\varepsilon = \frac{2\lambda^2}{\sqrt{1 + 4\lambda^2} - 1}, \tag{22}$$

а соотношения (19) – для линии бифуркации удвоения периода

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{1 + 4\lambda^2} - 2}{\sqrt{1 + 4\lambda^2} - 1}. \tag{23}$$

С помощью уравнений (20) находим общие точки этих линий – точки резонанса 1:2

$$\varepsilon = \frac{5}{2}, \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}. \tag{24}$$

Найденные бифукационные линии на плоскости параметров (ε, λ) показаны на рис. 2, *а*. На рис. 2, *б* представлена карта динамических режимов, на которой оттенками серого цвета обозначены области устойчивости циклов различных периодов.

Из вида карты можно заключить, что мы действительно получили интересующие нас свойства отображения с нефиксированным якобианом. На плоскости (ε, λ) имеется линия бифуркации Неймарка–Сакера и область квазипериодических режимов. Увеличенный фрагмент карты на рис. 3 демонстрирует систему языков Арнольда, встроенную в область квазипериодических режимов. Фазовые портреты в

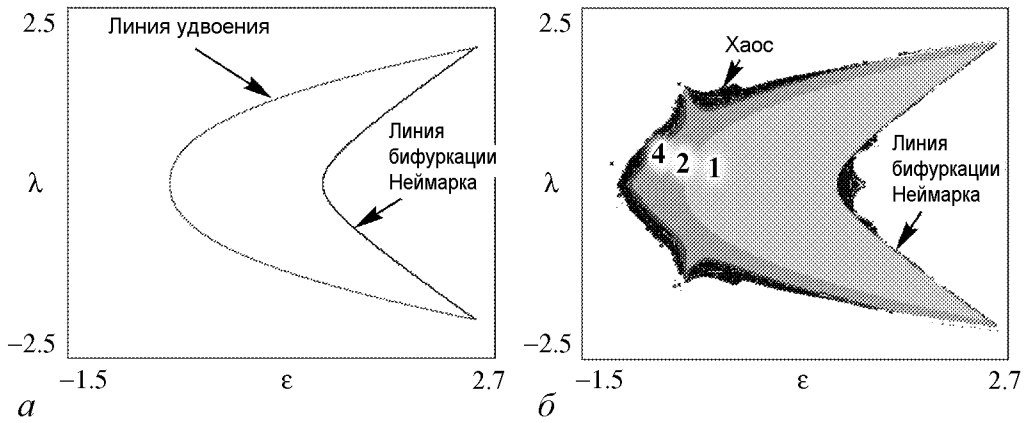


Рис. 2. *а* – аналитически найденные линии удвоения периода и Неймарка–Сакера для системы (21); *б* – карта динамических режимов этой системы

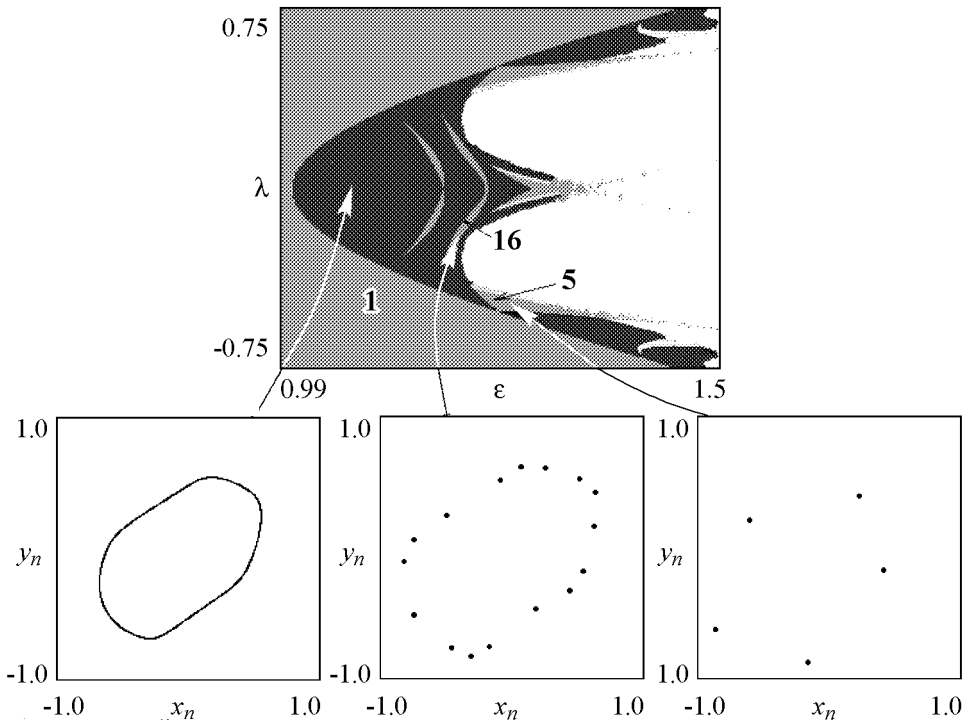


Рис. 3. Фазовые портреты отображения (21), построенные в различных точках области квазипериодических режимов

избранных точках карты иллюстрируют существование инвариантной кривой и резонансных циклов разных периодов.

С точки зрения задачи управления можно констатировать следующее. При возрастании параметра глубины модуляции ε порог устойчивости неподвижной точки повышается. Однако с ростом ε может произойти возникновение квазипериодического поведения и синхронных режимов, отвечающих резонансам на инвариантной кривой. Можно отметить «пороговый» характер этого эффекта: квазипериодическое поведение возникает, если параметр ε больше единицы. (Или, говоря иными словами, зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$ (22) имеет минимум, которому отвечает значение $\varepsilon = 1$.) Повышая одновременно оба параметра ε и λ, можно добиться существенного увеличения порога устойчивости, но он ограничен точкой резонанса 1:2 (24).

4. Отображение с нефиксированным якобианом. Система 2

Перейдем теперь к анализу двумерной системы, возникающей на базе логистического отображения (10). В этом случае получаем

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (\lambda + \varepsilon(x_n - y_n))x_n(1 - x_n), \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \tag{25}$$

Уравнение (13) для неподвижных точек для данной системы имеет два решения $x = (\lambda - 1)/\lambda$ и $x = 0$. Для первой из них соотношения (17), (19) и (20) приводят

к следующим аналитическим выражениям для бифуркации Неймарка–Сакера

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2}{\lambda - 1} \tag{26}$$

и для бифуркации удвоения периода

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2(\lambda - 3)}{2(\lambda - 1)}. \tag{27}$$

Для точек резонанса 1:2 находим

$$\varepsilon = \frac{25}{4}, \quad \lambda = 5. \tag{28}$$

Карта динамических режимов отображения (25) показана на рис. 4, *а*. Можно видеть, что в области небольших значений параметра модуляции ε система демонстрирует поведение, аналогичное отображению Эно (ср. рис. 4, *а* в области значений $-3 < \varepsilon < 3$, $2 < \lambda < 5$ и рис. 1). При превышении некоторого порогового значения параметра ε также становятся возможными квазипериодические режимы (рис. 4, *б*). Максимально возможный уровень управления по параметрам также ограничен точкой резонанса 1:2 (28).

В отличие от системы (21), в этом случае может быть устойчивой и вторая неподвижная точка $x = 0$ при $\lambda < 1$. Выше линии $\lambda = 1$ для отображения (25) точка $x = y = 0$ является седлом, а ниже ее – она устойчива. Для нее линия удвоения периода задается соотношением

$$\lambda = -1. \tag{29}$$

Бифуркация Неймарка–Сакера для этой точки невозможна. Линию (29) можно видеть на рис. 4, *а*, а также (при уменьшении параметра λ) – соответствующий каскад удвоений и области хаоса. Заметим, что с точки зрения управления эта ситуация неэффективна, поскольку параметр λ не чувствителен к вариации глубины модуляции.

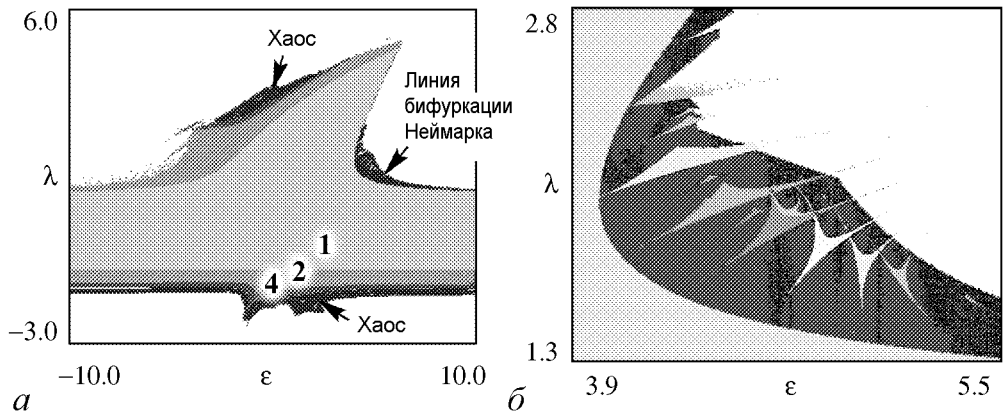


Рис. 4. *а* – карта динамических режимов отображения (25); *б* – увеличенная область квазипериодических режимов и система языков Арнольда

И система 1, и система 2 демонстрируют исчезновение квазипериодических режимов с переходом к ситуации «убегания» траектории на бесконечность. Эту особенность объясняет рис. 5, который показывает картину сосуществования инвариантной кривой и устойчивого и неустойчивого многообразий седловой (для данной области значений параметров) неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (25). Можно видеть, что при возрастании параметров инвариантная кривая и многообра-

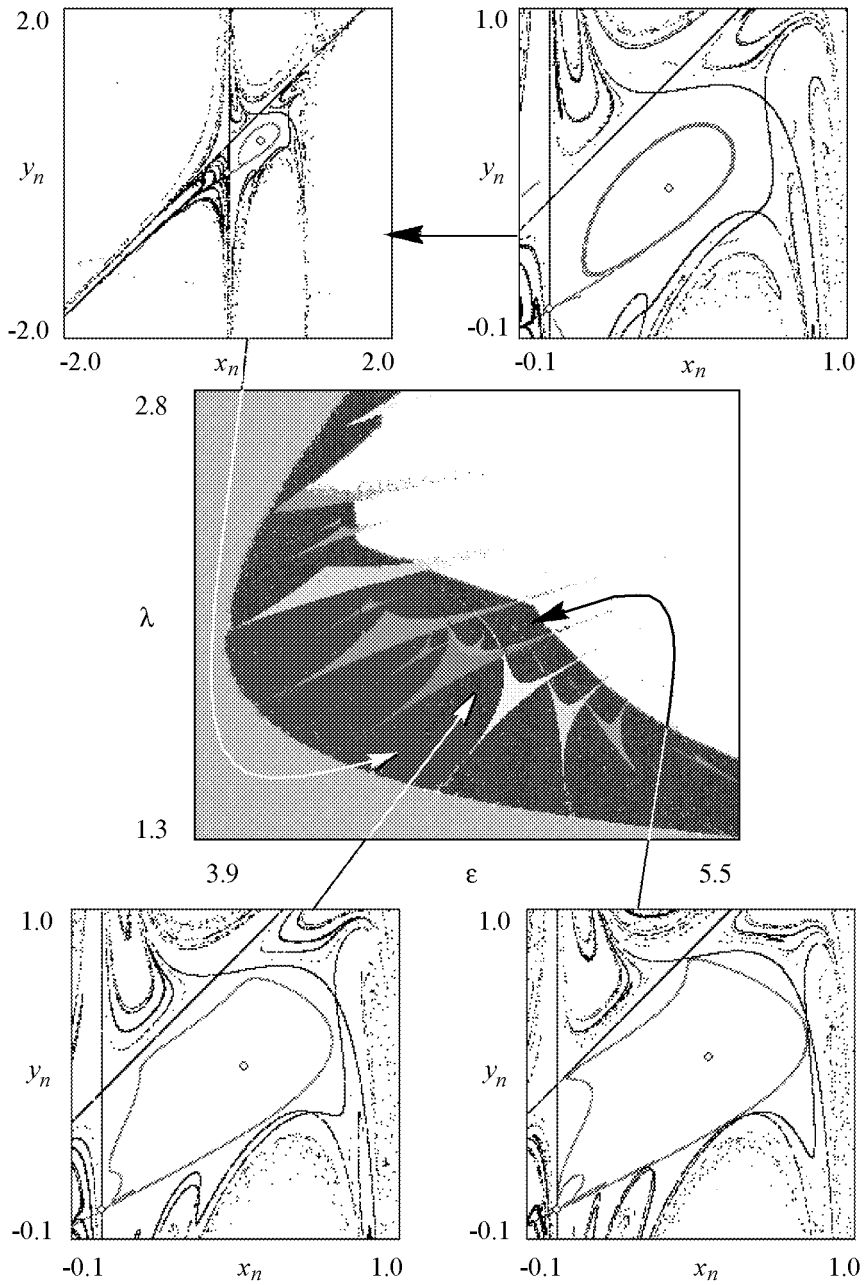


Рис. 5. Многообразия седловой неподвижной точки отображения (25) и аттрактор в виде инвариантной кривой, построенные в разных точках области квазипериодических режимов. Маленькими кружками обозначены неподвижные точки отображения (25)

зия сближаются и могут коснуться друг друга. Это и отвечает моменту, когда квазипериодический режим исчезает и сменяется «убеганием» изображающей точки вдоль соответствующего многообразия на бесконечность.

5. Оценка качества управления

Выше были проиллюстрированы некоторые особенности поведения представленных отображений с нефиксированным якобианом с позиций управления с помощью карт динамических режимов. Однако можно дать и соответствующие аналитические оценки.

Понятно, что возможность (невозможность) стабилизации и ее эффективность определяются наклоном линии удвоения периода при $\varepsilon = 0$ (см. рис. 2 и 4). Этот наклон легко определить в общем случае. Положим для этого $x = x_0 + \xi$ и $\lambda = \lambda_0 + \delta$, где значения, отмеченные индексом «ноль», соответствуют точке удвоения периода автономной системы, то есть

$$x_0 = \lambda_0 f(x_0), \quad -1 = \lambda_0 f'(x_0). \tag{30}$$

Тогда из $x = \lambda f(x)$ с точностью до первого порядка по возмущениям получаем

$$\xi = \lambda_0 f'(x_0)\xi + f(x_0)\delta. \tag{31}$$

Откуда с учетом (30) следует, что

$$\xi = \frac{1}{2} f(x_0)\delta. \tag{32}$$

С другой стороны, имеем

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)\xi. \tag{33}$$

Подставляя (33) в первое из уравнений (12) для линии удвоения, после некоторых преобразований и с учетом (30), с точностью до членов первого порядка по возмущениям, получаем

$$\varepsilon = \gamma\delta, \quad \text{где } \gamma = \frac{1}{2x_0} - \frac{\lambda_0}{4} f''(x_0). \tag{34}$$

Например, для системы 1 точка удвоения в автономном режиме отвечает $\lambda_0 = \sqrt{3}/2$ и $x_0 = 1/\sqrt{3}$ и $f''(x_0) = -2$, откуда находим $\gamma = 3\sqrt{3}/4$. Для системы 2 имеем $\lambda_0 = 3$, $x_0 = 2/3$ и, соответственно, $\gamma = 9/4$.

Таким образом, в обоих случаях параметр γ, задающий наклон линии удвоения при $\varepsilon = 0$, положителен. Это значит, что для стабилизации режимов следует использовать модуляцию с положительным значением ε. При этом эффективность стабилизации для системы 1 выше.

Как видно из соотношений (34), смена знака ε отвечает переходу от стабилизации к дестабилизации. Поэтому знак γ не существенен: если он отрицательный, то для достижения стабилизации нужно просто изменить знак параметра модуляции ε.

Наконец, отметим, что при $\gamma = 0$ имеет место вырожденная ситуация, когда стабилизация не возникает. Такой случай имеет место на рис. 4 в области отрицательных значений управляющего параметра λ.

Определим теперь пороговое значение параметра глубины модуляции, начиная с которого возможны квазипериодические режимы. Как мы видели, пороговой ситуации отвечает минимум функции $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$ или условие $d\varepsilon/d\lambda = 0$. Дифференцируя по λ соотношение (17), отвечающее бифуркации Неймарка–Сакера, получаем

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{x - \lambda\dfrac{dx}{d\lambda}}{x^2}. \tag{35}$$

В соответствии с этим, условие минимума $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$ можно записать в виде $x = \lambda(dx/d\lambda)$. С другой стороны, дифференцируя по λ соотношение $x = \lambda f(x)$, получаем

$$\frac{dx}{d\lambda}(1 - \lambda\frac{df}{dx}) = f(x). \tag{36}$$

Подставляя сюда $x = \lambda(dx/d\lambda)$ и $x = \lambda f(x)$, приходим к условию

$$\frac{df}{dx} = 0. \tag{37}$$

Таким образом, мы получили замечательный результат: пороговой ситуации возникновения квазипериодических режимов отвечает значение управляющего параметра λ, соответствующее *сверхустойчивому режиму автономной системы*, то есть режиму с нулевым мультипликатором. Само пороговое значение параметра глубины модуляции ε_0 определяется как

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{f(x)}, \quad \frac{df}{dx} = 0. \tag{38}$$

Так, для системы 1 при $f(x) = 1 - x^2$ сверхустойчивый режим отвечает, очевидно, $x = 0$, $f(x) = 1$ и, в соответствии с (38), $\varepsilon_0 = 1$, что и видно из рис. 2.

Для системы 2 в случае $f(x) = x - x^2$, получаем $df/dx = 0$. Поэтому для сверхустойчивого режима $x = 1/2$, $f(x) = 1/4$ и, соответственно, $\varepsilon_0 = 4$ (см. рис. 4, *б*).

6. Стабилизация в двухпараметрическом отображении с удвоениями периода. Система 3

Выше рассмотрены примеры, когда процедура построения отображений с нефиксированным якобианом за счет модуляции управляющего параметра запаздывающим сигналом применяется к простейшему однопараметрическому отображению с удвоениями периода. Известно, однако, что системы с удвоениями периода демонстрируют достаточно характерную картину *двухпараметрических* бифуркаций и перехода к хаосу. Возможным примером такого поведения является отображение

$$x_{n+1} = \lambda\cos(x_n + \varphi). \tag{39}$$

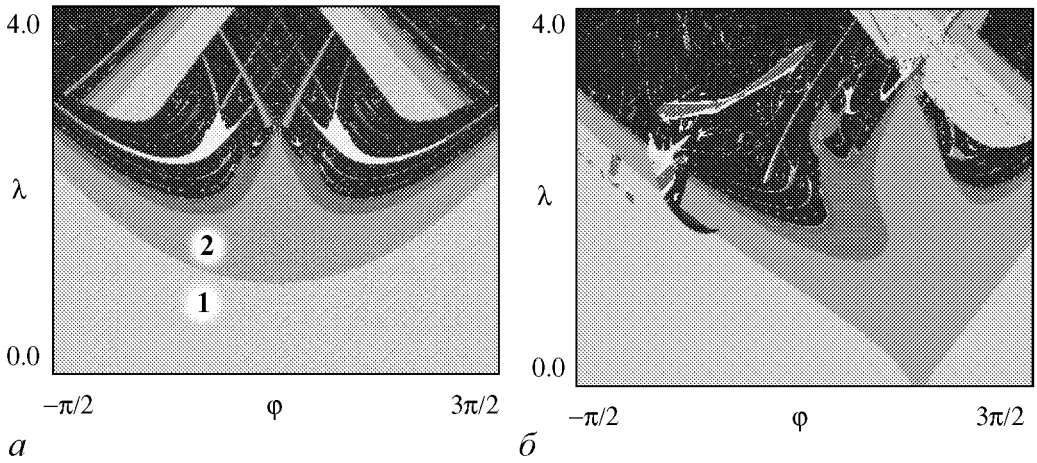


Рис. 6. Карты динамических режимов отображения (40) на плоскости (φ, λ) в случаях отсутствия запаздывания и небольшом значении параметра запаздывания ε: *а* – 0.0; *б* – 0.5

К этому отображению в случае сильной диссипации приводится задача о воздействии импульсного сигнала на нелинейный осциллятор Дуффинга [8, 9], известная система Икеды в виде возбуждаемого лазером кольцевого оптического резонатора с нелинейной средой [10, 11], а также акустооптическая система, рассмотренная в [12].

На рис. 6, *а* приведена карта отображения (39) на плоскости параметров (φ, λ). Можно видеть области удвоенного периода, характерные бифуркационные структуры crossroad area и т.д. Соответствующая картина характерна не только для перечисленных выше примеров, но и для многих систем с удвоениями периода (включая дифференциальные системы) [2].

Нетрудно видеть, что отображение (39) также относится к рассмотренному нами классу $x_{n+1} = \lambda f(x_n)$, где функция $f(x) = \cos(x + \varphi)$ зависит от дополнительного параметра φ. Тогда, предполагая модуляцию управляющего параметра λ по закону (4), получаем двумерное трехпараметрическое отображение

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (\lambda + \varepsilon(x_n - y_n)) \cos(x_n + \varphi), \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \tag{40}$$

Эволюцию карты динамических режимов системы (40) на плоскости параметров автономной системы (φ, λ) при увеличении глубины модуляции ε от 0.0 до значения 0.5 иллюстрирует рис. 6. Можно видеть, что конфигурации crossroad area на базе цикла периода 2 испытали определенные трансформации. Еще более существенные метаморфозы произошли с областью периода 3 и соответствующими областями удвоенного периода[3].

Если говорить о стабилизации неподвижной точки, то, сравнивая рис. 6, *а* и рис. 6, *б*, можно видеть, что результат зависит от второго параметра автономной системы φ. Так, в диапазоне, примерно, $-\pi/2 < \varphi < 0$ порог удвоений для непо-

[3]Периоду 3 обычно соответствует максимальное «окно» в области хаоса.

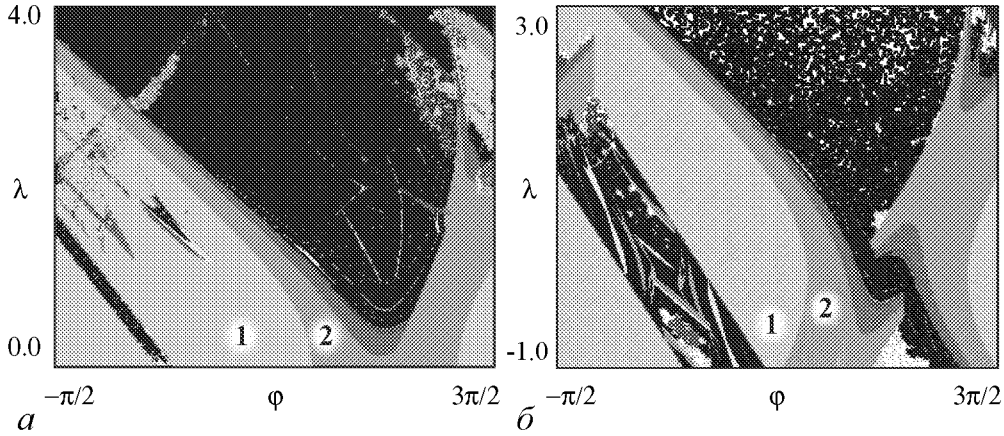


Рис. 7. Карты динамических режимов отображения (40) на плоскости (φ, λ) в случае больших значений параметра запаздывания ε: *а* – 1.0; *б* – 1.2

движной точки и 2-цикла несколько повышается. Это особенно заметно на карте динамических режимов на плоскости (ε, λ)для $\varphi = 0$ (см. ниже). С другой стороны, в окрестности точки $\varphi \approx \pi$ порог устойчивости неподвижной точки существенно понижается, и начинает доминировать область периода 2.

На рис. 7 представлены карты для случая еще больших значений параметра запаздывания $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 1.2$. Такие значения выбраны не случайно. Действительно, в соответствии с соотношениями (38), куда подставляем для анализируемой системы $f(x) = \cos(x + \varphi)$ и $df/dx = -\sin(x + \varphi)$, пороговому значению возникновения квазипериодических режимов отвечает как раз $\varepsilon = 1$.

Обсудим устройство области квазипериодических режимов. В соответствии с обсуждением, приведенным в разделе 4, квазипериодические режимы возникают в окрестности сверхустойчивого режима автономного отображения. В случае исследуемого отображения $x_{n+1} = \lambda \cos(x_n + \varphi)$ для сверхустойчивого режима периода 1 имеем $x = \lambda \cos(x + \varphi)$, $\mu = -\lambda \sin(x + \varphi) = 0$, что приводит к соотношению

$$\lambda = -\varphi. \tag{41}$$

Этому уравнению отвечает линия на плоскости двух параметров автономной системы (39). Таким образом, квазипериодические режимы должны появиться сразу в виде некоторой полосы в окрестности линии (41) существования сверхустойчивого режима. Именно эту ситуацию и иллюстрирует рис. 7. На рис. 7, *а* при $\varepsilon = 1$ можно видеть «предвестник» квазипериодического поведения в виде узкой полосы долгопериодических режимов. На рис. 7, *б* при $\varepsilon = 1.2$ мы видим уже сформировавшуюся полосу квазипериодических режимов в окрестности линии $\lambda = -\varphi$ со встроенной системой языков синхронизации. Более того, внутри этой полосы уже появились области убегания траекторий, которые при дальнейшем увеличении глубины модуляции ε начинают доминировать.

Разбегание траекторий возникает и в «основной» области хаоса на рис. 7, *б*. Оно проявляется в форме «изрешечивания» области хаоса, что сигнализирует об изрешечивании бассейнов притяжения хаотических аттракторов.

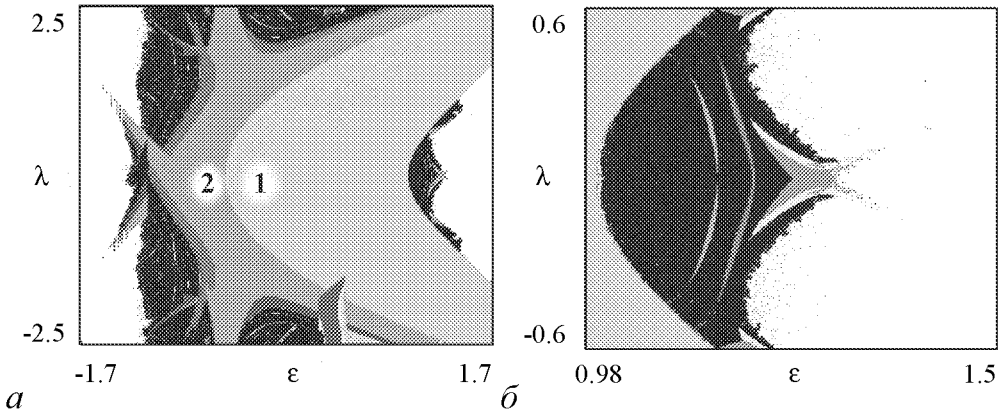


Рис. 8. Карта динамических режимов отображения (40) на плоскости (ε, λ) при φ=0 (*а*) и ее увеличенный фрагмент (*б*)

Наконец, на рис. 8 показаны карта динамических режимов отображения (40) на плоскости (ε, λ) при φ=0 и ее увеличенный фрагмент. Этот рисунок интересно сравнить с рис. 2 и рис. 3 для системы (21). Можно видеть некоторые общие черты, особенно в форме и внутреннем устройстве области квазипериодического поведения. Это легко объяснимо, поскольку разложение в ряд Тейлора отображения (40) при $\varphi = 0$ приводит к форме системы (21)

$$x_{n+1} = \lambda \cos x_n \approx \lambda(1 - \frac{x_n^2}{2}). \tag{42}$$

Можно видеть, однако, и существенные отличия: например, сложнее устроены области периода 2 и периода 4 на их базе, гораздо более существенны области хаоса и др.

Заключение

В настоящей работе показано, что введение модуляции управляющего параметра с использованием запаздывания может рассматриваться как физически мотивированный метод построения двумерных отображений с нефиксированным якобианом. Представлены примеры таких двухпараметрических и трехпараметрического отображений. В общем случае получены условия бифуркаций Неймарка–Сакера, удвоения периода и резонанса 1:2. Методом карт динамических режимов иллюстрируется существование областей квазипериодических режимов со встроенной системой языков синхронизации. Выявлена характерная ситуация возникновения «полосы» квазипериодических режимов при вариации параметра запаздывания в окрестности линии существования сверхустойчивой неподвижной точки в автономной системе.

Работа поддержана грантами РФФИ 06-02-16773 и Программой целевых расходов Президиума РАН «Поддержка молодых ученых».

Библиографический список

1. *Kuznetsov Yuri A.* Elements of applied bifurcation theory. Springer-Verlag, 1998. P. 593.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. С. 356.
3. *Gonchenko V.S., Kuznetsov Yu.A., Meijer H.G.E.* Generalized Hénon map and bifurcations of homoclinic tangencies //Preprint 1296, Department of Mathematics, Utrecht University, 2004. P. 24.
http://www.math.uu.nl/publications/preprints/1296.pdf
4. *Гонченко С.В. Стенькин О.В., Шильников Л.П.* О существовании счетного множества устойчивых и неустойчивых инвариантных торов у систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2, № 1. С. 3.
5. *Meijer H.G.E.* Codimension 2 bifurcations of iterated maps // Physica D. 2006. Thesis Utrecht University.
http://igitur-archive.library.uu.nl/ dissertations/2006-1204-200716/index.htm.
6. *Pyragas K.* Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 170. P. 421.
7. *Богданов Н.С., Кузнецов А.П.* «Атлас» карт динамических режимов эталонных моделей нелинейной динамики и радиофизических систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 1. С. 80.
8. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Динамические системы разных классов как модели нелинейного осциллятора с импульсным воздействием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 2. С. 31.
9. *Kuznetsov A.P., Turukina L.V. and Mosekilde E.* Dynamical systems of different classes as models of the kicked nonlinear oscillator // Int. J. of Bif. & Chaos. 2001. Vol. 11, № 4. P. 1065.
10. *Ikeda K., Daido H., Akimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Phys. Rev. 1980. Vol. 45. P. 709.
11. *Carr Y., Eilbech Y.C.* One-dimensional approximations for a quadratic Ikeda map // Phys. Lett. 1984. Vol. A104. P. 59.
12. *Vallee R., Delisle C., Chrostowski J.* Noise versus chaos in an acousto-optic bistability // Phys. Rev. 1984. Vol. A30, № 1. P. 336.

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
Саратовский государственный университет

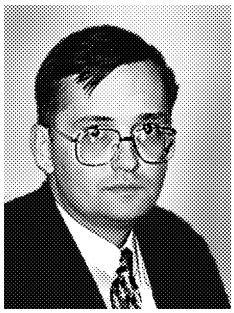
Поступила в редакцию *29.12.2007*
После доработки *19.06.2008*

PERIOD DOUBLING MAPS WITH DRIVING PARAMETER MODULATED BY DELAYED FEEDBACK

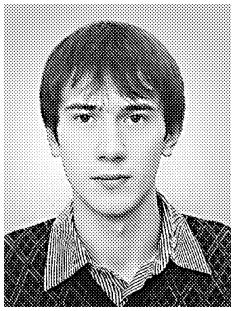
A.P. Kuznetsov, E.V. Novikov, A.V. Savin

It was shown that addition of modulation of driving parameter with using delay can be considered as physically reasoned method of construction two-dimensional maps

with nonfixed Jacobian. The examples of such two-parameter and three-parameter maps were presented. The conditions of Neumark–Sacker's bifurcation, period doubling and resonance 1:2 were obtained. The structure of parameter space was studied by dynamical regimes maps method and the regions of quasiperiodic regimes and different synchronous regimes were revealed.



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.narod.ru



Новиков Евгений Вячеславович – родился в Пугачеве Саратовской области (1987). Студент 5-го курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета базовой кафедры динамических систем. Участник научных конференций «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (2004, 2007), «Нанофотоника, наноэлектроника, нелинейная физика – 2008» с публикациями тезисов докладов. Область научных интересов: особенности критического поведения в связанных нелинейных системах и поведения модельных систем при введении «запаздывания».

Савин Алексей Владимирович – родился в Саратове в 1980 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ. Кандидат физико-математических наук (2005). Доцент факультета нелинейных процессов СГУ, научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН. Имеет более 20 научных публикаций в центральных и международных журналах. Область научных интересов: особенности перехода к хаосу и критического поведения, в том числе в связанных слабодиссипативных нелинейных системах.

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 4, 2008 УДК 530.182(075)

ДВЕ ТЫСЯЧИ СЕДЬМОЙ ГОД В ДАТАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Д.И. Трубецков

370 лет назад Галилео Галилей сформулировал зависимость периода колебаний маятника от его длины. Изучением законов движения маятника Галилей занимался с 1583 года, когда он наблюдал, как раскачивается лампада в Пизанском соборе. Интересен путь, которым шел Галилей к открытию изохронности колебаний (см. «Лекции» Л.И. Мандельштама [1]). Изучая движение точки по наклонной плоскости, Галилей установил, что ускорения при движении по гипотенузе и при свободном падении относятся друг к другу, как катет CB к гипотенузе AC (рис. 1). Иначе говоря, при движении точки вдоль хорды AD ускорение $a_{AD} = g\cos\alpha$ (рис. 2, *а*).

Если у верхней точки A окружности пустить шарик по секущей (см. рис. 2, *а*), то он попадет на окружность через промежуток времени, который не зависит от выбора секущей (это естественно, так как длина секущей AD равна $2l\cos\alpha$, где l – радиус окружности). Кроме того, шарик, пущенный с окружности по секущей, идущей в нужную точку B (рис. 2, *б*; этот рисунок – просто перевернутый рис. 2, *а*), попадет в нее через промежуток времени, который также не зависит от того, какую секущую выбрали. Следующий шаг в рассуждениях: при небольших отклонениях от

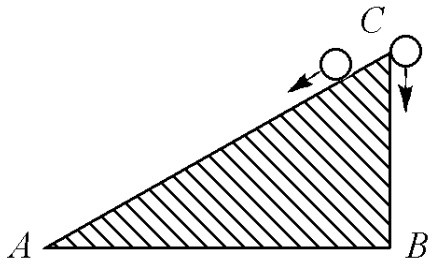


Рис. 1.

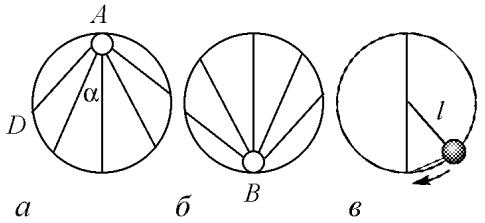


Рис. 2.

положения равновесия дугу можно заменить хордой, и маятник движется по хорде, как по наклонной плоскости. Тогда, очевидно,

$$2l = \frac{gt^2}{2}, \quad t = 2\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где t – время падения шарика через вертикальный диаметр окружности (рис. 2, *в*). Следовательно, период T малых колебаний равен учетверенному времени падения по хорде, независимо от того, откуда пущен маятник, то есть

$$T = 8\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Изохронность из формулы следует, но коэффициент в ней неверный.

350 лет назад, в 1657 году, Христиан Гюйгенс сконструировал маятниковые часы со спусковым механизмом, ставшие основой точной экспериментальной техники. Проект соединения маятника со счетчиком предлагал еще Галилей в 1636 году.

Макс Лауэ в своей «Истории физики» считает главным не использование периода колебаний маятника как меры времени, а идею «обратной связи». Действительно, в часах Гюйгенса впервые «сам источник колебаний определяет моменты времени, когда требуется доставка энергии», то есть энергия доставляется, не нарушая периода колебаний. В часах Гюйгенса это достигается с помощью простого и остроумного устройства с косо срезанными зубцами, периодически подталкивающего маятник.

Заметим, что уже при построении первых часов Гюйгенс с некоторым удивлением понял, что утверждение Галилея об изохронности колебаний маятника справедливо лишь для малых его отклонений. Удивление было связано с тем, как Галилей пропустил это обстоятельство в опытах, описанных Вивиани. По словам Вивиани в его письме принцу Леопольду Медичи, Галилей, открыв изохронность, «...чтобы надежнее в этом удостовериться, решил сделать следующее <...> Он привязал два свинцовых шара на нитях совершенно одинаковой длины так, чтобы они могли свободно раскачиваться... и, отклоняя их от вертикали на разное число градусов, например, один шар на 30, другой на 10, он отпускал их в одно и то же мгновение. С помощью товарища он наблюдал, что, пока один маятник делал такое-то число колебаний по большим дугам, другой делал столько же по малым дугам». В этих опытах Галилей мог бы увидеть отклонение от изохронности колебаний при увеличении отклонения хотя бы на 60°. Несмотря на то, что известная приближенная формула для оценки периода колебаний маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\left[\frac{1}{2}\varphi\right] + \frac{9}{64}\sin^4\left[\frac{1}{2}\varphi\right] + ...\right)$$

(φ – угол отклонения маятника от положения равновесия) не была известна, Гюйгенс получил удивительно точные оценки периода. До сих пор неизвестно, как он проводил расчеты.

fig

fig

365 лет назад Блез Паскаль изобрел счетную машину. В 1647 году он начал проводить свои опыты по изучению давления воздуха, в которых доказал зависимость давления воздуха от высоты над уровнем моря.

Изобретение машины во многом связано с назначением отца Блеза Паскаля – Этьена Паскаля королевским финансистом в Руанском округе. Переформирование налогов и их распределение между приходами требовало больших объемов вычислений. Блез принимал активное участие в этой работе и был неудовлетворен традиционными методами вычислений. Последние сводились к следующему: все операции осуществлялись либо в уме с последующей записью результатов на бумаге, либо с помощью жетонов, заменявших запоминание цифр[1]. В 1642 году Паскаль приходит к идее счетной машины, лишенной очевидных при использовании традиционных методов сложностей (в одном легко допустить ошибку, в другом теряется много времени на отбор и распределение жетонов) и выполняющей арифметические действия «без пера и жетонов» способом «столь новым, сколь и удобным».

Позволим себе большую и важную цитату.

«Блез Паскаль был фактически первым изобретателем арифметической машины, хотя и имел предшественника в области механизации счета. (К слову сказать, потребность в упразднении и убыстрении вычислений стала весьма насущной в XVII веке, и уже в начале столетия создана логарифмическая линейка.) В 1623 году профессор ориенталистики в Тюбингене, любитель астрономии и математики Шиккард, безвременно скончавшийся в одну из чумных эпидемий, нередко поражавших Европу, писал Кеплеру, что он сконструировал счетную машину, автоматически выполняющую сложение и вычитание, умножение и деление. Схемы и чертежи, относящиеся к этой машине, были найдены в 1957 году в одной из библиотек ФРГ. Единственный ее опытный экземпляр сгорел в 1642 году, так что ученые ее не видели, и она не повлияла на дальнейшее развитие механизации счета.

Нет никаких данных, позволяющих считать, что сведения о немецкой машине дошли до французских любителей науки. Поэтому Паскаль – подлинный и вполне самостоятельный изобретатель арифметической машины, вложивший в ее создание много тяжелого и последовательного труда, сил, здоровья. Создать ее проект, замечает Блез, ему позволили те знания в геометрии, физике и механике, которые он приобрел в отроческие годы.

Эта машина, состоящая из сложной системы зацеплений зубчатых колес, совершает сложение и вычитание. Ее существенная и принципиальная особенность заключается в том, что с помощью своеобразного рычажка каждое колесо того или иного разряда (единиц, десятков, сотен), "совершая движение на десять арифметических цифр, заставляет двигаться следующее только на одну цифру". (Этот принцип счетчика оборотов используется и в настоящее время в таксометре)» [2, с. 80].

В своей книге «Мысли» [3] Паскаль так пишет о своем изобретении: «Арифметическая машина осуществляет действия, которые ближе к действиям мысли, чем все, производимые животными; но она не делает ничего такого, что указывало бы на то, что у нее есть воля, как она есть у животных».

Машина принесла Паскалю славу, к которой он был неравнодушен. В тех же «Мыслях» он пишет: «Слава так приятна, что мы ее любим, с чем бы она ни соеди-

[1]Например, если при сложении получалось десять, то специальный жетон откладывали в сторону, и счет начинался с единицы. По окончании счета жетоны разных цветов и достоинств (20, 50, 100 и т.д. единиц) складывали вместе и подсчитывали результат.

нялась, даже хоть со смертью». Но особых доходов он не получил из-за высокой цены машины, трудностей, связанных с изготовлением и серийным производством различных запасных деталей.

320 лет назад вышел в свет труд Исаака Ньютона (1643–1727) «Математические начала натуральной философии» («Начала»), содержащие основные понятия и аксиоматику механики, в частности, три основные ее закона (законы Ньютона) и закон всемирного тяготения.

О Ньютоне написано очень много. И, казалось бы, все о нем известно, но одна тема не закрыта и, может быть, не будет закрыта никогда – история с яблоком.

Напомню, что в части нашего повествования «Код да Винчи и числа Фибоначчи» мы обращались к роману Дэна Брауна. Кроме использованного нами, в нем есть описание гробницы Ньютона, с которой связана кульминация сюжета.

«...На массивном саркофаге из черного мрамора стояла скульптура великого ученого в классическом костюме. Он гордо опирался на внушительную стопку собственных трудов – "Математические начала натуральной философии", "Оптика", "Богословие", "Хронология" и прочие. У ног Ньютона два крылатых мальчика разворачивали свиток. Прямо за его спиной высилась аскетически простая и строгая пирамида. И, хотя пирамида выглядела здесь довольно неуместно, не она сама, но геометрическая фигура, находившаяся примерно в середине ее, привлекала особо пристальное внимание... Шар.

Массивный шар выступал из пирамиды в виде барельефа, на нем были изображены всевозможные небесные тела – созвездия, знаки Зодиака, кометы, звезды и планеты. А венчало его аллегорическое изображение богини Астрономии под целой россыпью звезд» [4, с. 476–477].

По сюжету, для разгадки тайны Грааля нужно было найти слово, которое открыло бы устройство, в котором спрятан папирус, открывающий тайну. Намек был – шар на могиле Ньютона. «...Ну, конечно же! Шар, который должен был украшать могилу Исаака Ньютона, представлял собой не что иное, как яблоко, которое, упав с ветки на голову ученому, навело его на мысль о законе всемирного тяготения» [4, с. 509].

Так было ли яблоко? Ответить на этот вопрос сделал попытку автор статьи [5], которая представляет интерес для наших читателей. В указанной статье история яблони Ньютона излагается «...в форме исследования со времен жизни ученого до наших дней». Пересказывать статью бессмысленно, поэтому, дабы заинтриговать читателя, приведем полностью аннотацию к ней и отрывки из Введения и раздела «Комментарии, резюме и заключение» в моем переводе.

«**Аннотация.** Статья содержит предисловие о юности Ньютона, за которым следует краткое изложение мнений об известной истории открытия закона всемирного тяготения, ставшего возможным после падения яблока в 1665/6.

Далее говорится о яблоне, посаженной зажиточной йоркширской семьей в начале 18 века как доказательство дружбы с Ньютоном, а также в честь открытия ученым закона. В статье представлено немало новых, ранее не публиковавшихся художественных и документальных материалов, имеющих отношение к особому дереву-яблоне, которое росло в поместье Вулсторп (место рождения Ньютона) и было сломано во время шторма в 1816 году.

Представленные в статье результаты дендрохронологического изучения образцов деревьев, растущих в саду Вулсторпа, проводившегося в университете Оксфорда, позволяют сделать вывод о том, что яблоня, растущая в поместье и известная как "яблоня Ньютона", является деревом, тождественным тому, которое росло в середине 18 века и

которому сейчас могло бы быть 350 лет. Здесь же Вы найдете сведения, объясняющие, почему именно эта яблоня сыграла важную роль в научном открытии.

При попытке определить происхождение деревьев использовались генетические дактилоскопические исследования яблонь. В результате этого эксперимента было выделено два различных сорта. Одно можно сказать точно: не все учения о "яблоне Ньютона" имеют отношение к подлинному дереву, растущему в поместье Вулсторп».

«**Введение.** Кто не знает имени Ньютона, неразрывно связанного с... яблоком? Эта история часто пересказывается и часто опровергается. Но те, кто связан с ней, так или иначе будут ее изучать. Как считает профессор астрономии из Оксфордского университета, это зависит от уважения к великому ученому и в большей мере... от яблони, свидетельствующей о знаменательном событии в науке ("Эдинбургское обозрение", 1843:419).

История Ньютона, поведавшая о падении яблока и об открытии закона всемирного тяготения, передается из поколения в поколение и уже успела стать легендой. Услышав ее в первый раз, я решил, что это всего лишь забавный анекдот. Случилось так, что во время моего посещения в 1976 поместья Вулсторп (место рождения Ньютона) в Линкольншире, я был удивлен, узнав, что это было больше, чем забавная история, которую я мог себе представить. Более удивительным оказалось то, что в саду рос саженец, взятый от настоящей яблони Ньютона. Вспоминаю, как я желал узнать доказательство всему этому, с изумлением и недоверием глядя на деревце, растущее у дверей дома.

С годами я с трудом собрал большое количество документов, описывающих происхождение этой истории о чудесном дереве. Речь идет о двух полностью непредвиденных случаях, без которых это расследование не сдвинулось бы с мертвой точки.

Весной 1977 года во время визита к отставному майору Тернору (варианты записи: Turner, Turnor. – *Д.И.Т*), последнему владельцу поместья (Терноры управляли поместьем со времен Ньютона), был найден рисунок яблони, сделанный 150 лет назад. После стольких лет поисков этот документ остается самым важным доказательством идентификации дерева, с которого на Ньютона упало яблоко.

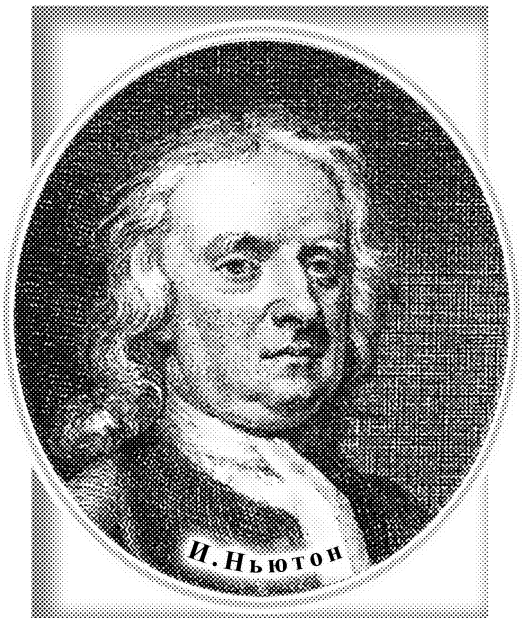
Второй случай произошел во время поездки в поместье в сентябре 1977 года. Я пятился назад, фотографируя сцены рисунка Тернора, когда осознал, что лежу на земле. Встав на ноги, я осмотрелся и был удивлен, обнаружив, что споткнулся о дерево, изображенное на рисунке. Даже сейчас, говоря об этом происшествии, я вспоминаю свое замешательство от непонимания, где я, в 1820 или в 1977 году. Удивление возросло еще и потому, что во время первого визита смотритель поместья не упомянул о существовании этого дерева.

Различные версии этих событий будут представлены в исторической последовательности...»

«**Комментарии, резюме, заключение.** Годами некоторые авторы выражали сомнения касательно достоверности причины, которой Ньютон объяснил свое открытие гравитации.

<...> С моей стороны, я заявляю, что я готов принять Ньютоновскую причину, так как мне кажется маловероятным, что такой маститый, известный математик и ученый своего времени, который испытывал благоговейный трепет перед карой Божьей, подвергал бы свою бессмертную душу опасности фабрикованием такой ненужной лжи.

Существенные прямые и косвенные доказательства указывают на место события так же, как сад в Вулсторпском поместье. Нет подтверждения тому, какое именно дерево указал Ньютон; однако в пределах нескольких десятилетий после смерти Ньютона дерево ассоциировалось с высказыванием Ньютона и лелеялось как "яблоневое дерево". Причиной этому, возможно, стало то, что оно было единственным в саду. К 1806 году, когда Э.Тернер впервые упомянул его, дерево насчитывало 150 лет, а в следующее десятилетие оно сломалось во время шторма. К этому времени оно было размножено на несколь-

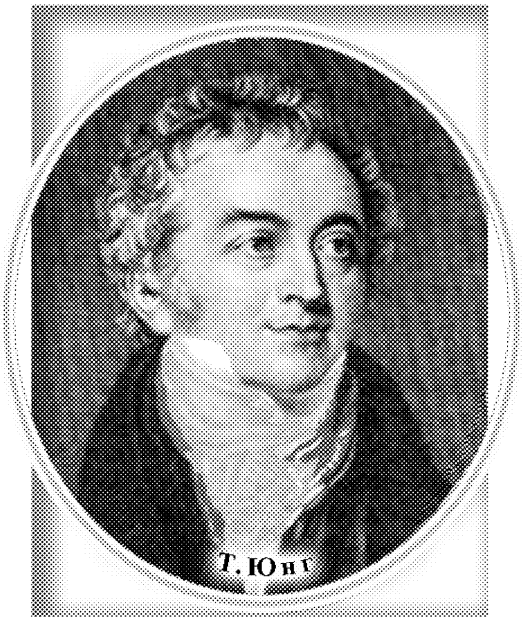


ких участках. Хотя Джорджем Форбсом было установлено, что дерево было убрано его владельцами, существующие данные указывают, что только часть дерева была убрана и использована для изготовления стула. Об этом мы знаем по Брюстерскому кусочку материала, взятого из его корня в 1830 г. Позже, в своей вступительной части цитаты, Риквод указывал, что стул, изготовленный из части древесины, находился затем в Вулсторпе в 1843 г. Кажется сомнительным, что дерево, которое росло в лежачем положении 25 лет, могло быть убрано, распилено, высушено и использовано для изготовления стула, и все это выполнено всего за два года. Учитывая все эти факты, я бы хотел предположить, что лежачий дуплистый ствол, который пустил корни с каждого конца и который до настоящего момента все еще растет в Вулсторпском поместье, и есть тот ствол ветви того дерева, которое изобразил Чарльз Тернер в 1820, и является тем же деревом, которое было определено как дерево, с которого Ньютон наблюдал падение яблока в 1665/6 г. Если это так, то этой яблоне сейчас 350 лет».

290 лет со дня рождения Жана Лерона Д'Аламбера (1717–1783).

260 лет назад Д'Аламбер дал полное решение задачи о струне на основе волнового уравнения.

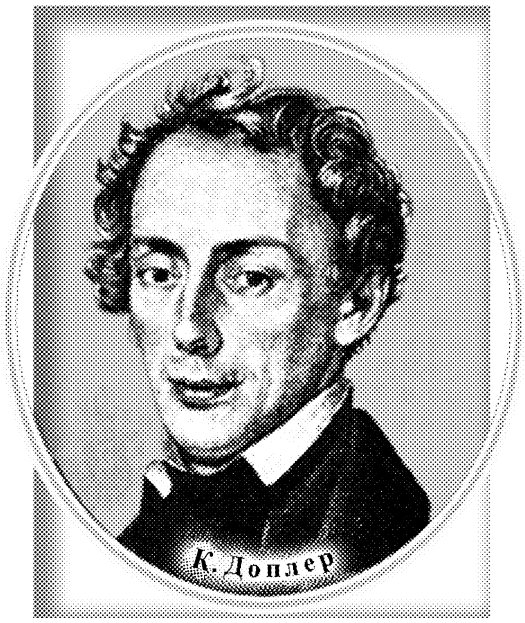
300 лет назад родился Леонард Эйлер (1707–1783). Его жизнеописание на фоне исторических и научных событий в мире приведено в докладе А.А. Князева [7] на научной школе-семинаре «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2007».



200 лет назад Томас Юнг (1773–1829) ввел понятие модуля упругости (модуль Юнга). Краткие сведения о Юнге как удивительном кентавре в смысле Даниила Данина приведены в книге [8, с. 28–29]. Его подробная биография принадлежит перу Ф. Араго [9, с. 37–63]. Вот один эпизод тоже двухсотлетней давности из книги Араго.

«В 1816 году вместе с моим ученым другом Гей-Люссаком я был в Англии. Тогда Френель блистательно вышел на ученое поприще со своей запиской "О дифракции" или погнутии света. Этот труд, по нашему мнению, содержал в себе капитальный опыт, который нельзя было согласовать с Ньютоновой теорией света, и, естественно, что он был первым предметом нашей беседы с Юнгом. С удивлением мы услыхали от него возражения на наши похвалы; и еще более удивились, когда он сказал, что хвалимый нами опыт описан в его книге, изданной в 1807 году. Это показалось нам несправедливым, и завязался продолжительный спор, в котором госпожа Юнг не принимала никакого участия, потому что английские дамы боятся прослыть синими чулками в глазах иностранцев; наконец она вышла из терпения и оставила нас. Мы начали извиняться перед ее мужем в нашей неловкости, как она возвратилась с огромным томом под мышкой, положила его на стол, развернула и, не говоря ни слова, на 787-й странице пальцем указала фигуру, на которой изображено криволинейное движение цветных полос дифракции, определенное теоретически» [9, с. 63].

165 лет назад Кристиан Доплер (1803–1853) теоретически предсказал и обосновал явление изменения частоты звуковых и световых колебаний, воспринимаемой наблюдателем, от относительной скорости движения наблюдателя и источника колебаний (эффект Доплера)[2].



К. Доплер родился в Зальцбурге (Австрия) в семье каменотеса. Будучи хилым от рождения (это привело впоследствии к болезни легких), он не мог продолжить дело отца. Но у него были способности к математике, к языкам, к вырезанию силуэтов из бумаги. Доплер окончил Политехнический институт в Вене, работал профессором в Пражском университете, в Горной академии в Хемнице, в Венском университете в Институте Физики. Интересно, что его основополагающая статья называлась «О цвете двойных звезд и некоторых других небесных явлениях». Для объяснения изменения цвета двойных звезд Доплер обобщил выведенное им для звука соотношение на источники света: если две звезды, скажем, обе желтого цвета, вращаются вокруг друг друга, то звезда, приближающаяся к нам, должна казаться излучающей свет большей частоты (посинеет или позеленеет), а удаляющаяся – меньшей (покраснеет).

В книге [10, с. 290–291] указано, что эта статья Доплера и последующие не принесли ему славы. «Зато он запомнился как декан университета, отказавший в зачислении будущему основателю генетики Грегору Менделю (1822–1884) ("Очевидно, что у кандидата хорошее образование, но в физических науках он не поднялся

[2]Заметим, что Арман Ипполит Луи Физо (1819–1896) опубликовал теоретическую работу, в которой, независимо от К. Доплера, сформулировал идею о зависимости частоты света, воспринимаемой наблюдателем, от относительного движения источника и наблюдателя.

выше самого элементарного уровня"), а потом сделавший его одним из своих самых любимых учеников. Между тем, проблемы с дыханием усугублялись, и он, бросив в Вене жену и двоих детей, уехал умирать в Венецию».

С проверкой эффекта Доплера связан забавный голландский музыкально-железнодорожный эксперимент, который проводил профессор физики Кристоф Бейс Баллот (1817–1890). Вот красочное описание этого эксперимента.

«3 июня 1845 года... Все готово: линия, соединяющая Утрехт с Маарсеном, перекрыта в научных целях по приказу министра внутренних дел, трое музыкантов, расположившись в открытом вагоне, настраивают свои корнет-а-пистоны, и несколько групп наблюдателей, обладающих абсолютным слухом и снабженных карандашом и блокнотом, распределены вдоль путей через четко определенные интервалы. Как только поезд разовьет свою максимальную скорость 70 км/ч, музыканты заиграют в унисон и что есть мочи, чтобы перекрыть шум локомотива, ноту "ля", а наблюдатели вдоль путей будут стараться оценить в половинах и четвертях тона ее искажение из-за движения поезда...[3] Проверка, проводимая с такими затратами, была бесполезной: никто не сомневался в "эффекте Доплера". В конце концов на своем локомотиве Бейс Баллот докажет – и с какой помпой! – то, что все и так уже считали доказанным... Но в действительности Бейса Баллота интересовал не сам звуковой эффект Доплера. Стоило только исторические завывания корнет-а-пистонов перевести в цифры и математически обработать, как пошел серьезный разговор: приложение эффекта к цвету двойных звезд...

...Едва покинув поезд, Баллот открыл огонь по теории двойных звезд... Бейс Баллот утверждал, что движущаяся звезда должна была бы так посинеть или так покраснеть, что стала бы совсем невидимой. Это выражение довольно веское, оно указывает на одну из слабых сторон рассуждения Доплера, считавшего, что все звезды белые, а цвет всегда указывает на их приближение или удаление. В действительности же цвет прямо связан с температурой звезды, причем он представлен не одной световой частотой, а целым спектром, простирающимся от инфракрасного излучения до ультрафиолетового. Но нельзя сказать, что Доплер совсем неправ: среди различных типов двойных звезд спектрально-двойные и в самом деле распознаются только с помощью эффекта Доплера, значение которого признано во всех разделах астрономии» [10, с. 287–292].

Нарушим хронологию и перенесемся в 1947 год, когда В.Л. Гинзбург опубликовал две работы по теории излучения при сверхсветовом движении в среде [11, 12], в которых также фигурирует эффект Доплера.

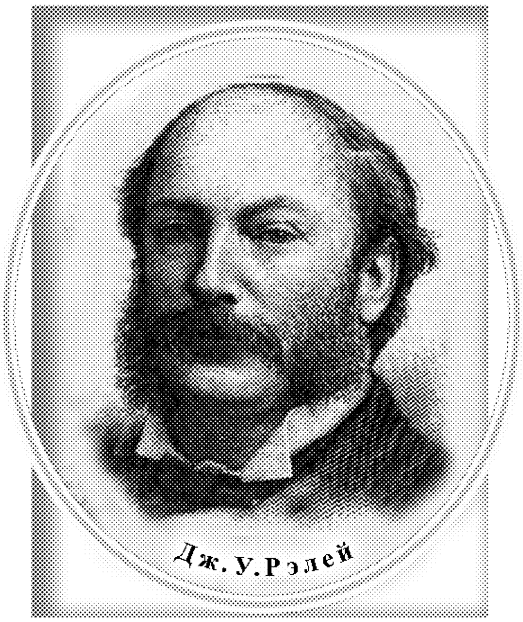
Если излучатель (заряженная частица, электрический диполь и т.д.) движется в среде с показателем преломления n, то вследствие эффекта Доплера в системе координат, связанной с неподвижной средой, излучение имеет частоту

$$\omega(\theta) = \frac{\omega_0}{|1 - \beta n \cos\theta|},$$

где ω_0 – частота излучения в системе координат, в которой излучатель покоится, $\beta = \sigma_0/c$, σ_0 – скорость излучателя, c – скорость света, θ – угол между $\vec{\sigma}_0$ и направлением наблюдения. При $\beta n < 1$ эффект Доплера называют нормальным, а при $\beta n > 1$ – аномальным [13] (эффект Доплера в преломляющей среде детально обсуждается в статье [14]). Особенно важным является то обстоятельство, что характер

[3] В книге [10, с. 289] есть замечательная реплика: «Что бы подумал Моцарт о железнодорожном концерте?» Ведь и Доплер и Моцарт из Зальцбурга.

аномального эффекта Доплера не меняется и тогда, когда поле заключено в узких каналах или щелях в среде, или сосредоточено вблизи границ [11–13]. Излучение, связанное с нормальным эффектом Доплера, приводит к затуханию волн, а с аномальным – к усилению.



Показано (см., например, [15, с. 172–173]), что существует физическая аналогия между индуцированным нормальным и аномальным эффектом Доплера и синхронным взаимодействием замедленной электромагнитной волны, соответственно, с «электронной» волной с положительной энергией (например, быстрая волна пространственного заряда) и с отрицательной энергией (медленная волна пространственного заряда).

165 лет назад, 12 ноября 1842 года, родился Джон Уильям Стрэтт (лорд Рэлей). Умер он 30 июня 1919 года. Жизнь и творчество Рэлея трудно описать даже в большой статье. Укажем лишь, что в свое время он, пожалуй лучше, чем кто-либо другой, разглядел родственные проблемы в динамике, акустике, оптике и теории электричества. Для него язык теории колебаний уже был «интернациональным». Из четырехсот сорока шести известных статей Рэлея около двухсот касаются оптики. Общеизвестна его «Теория звука». Большой вклад внес Рэлей в гидродинамику, в учение о капиллярах, поверхностных силах и практически во все области классической физики. Как пишет автор статьи [16, с. 160]: «Его интересы в физике были универсальны: "в каждой области" он "беспорядок приводил в порядок". Он был последним из плеяды "ученых-индивидуалистов", работающих с "воском и веревочками", интересы которых охватывали всю физику».

150 лет назад родился выдающийся немецкий физик Генрих Герц (1857–1894). Мировая слава пришла к нему после публикации результатов опытов по обоснованию теории Максвелла. Именно волны Герца привели в дальнейшем к изобретению и радио, и телевидения. Герцу принадлежит обобщение уравнений

Максвелла для движущихся тел. Он восхищался теорией Максвелла, непрерывно развивая ее: «Нельзя изучать эту чудесную теорию без того, чтобы порою не возникало ощущение, что математическим формулам присущи самостоятельная жизнь и собственный разум, что они умнее нас, умнее даже открывшего их, что они дают больше, чем в них было ранее вложено» (цитируется по [17, с. 898]).

Подробный анализ трудов Герца дан в книге [18]. Представляет интерес параграф 4 из второй главы этой книги «Применение электромагнитных волн», где на примере открытия электромагнитных волн обсуждается граница между физикой и техникой, разница между исследователем и изобретателем, сравниваются две великие фигуры в истории радио – А.С. Попов (1859–1906) и Г. Маркони (1874–1937).

В советской исторической литературе история изобретения радио часто искажалась безудержным восхвалением «нашего». Об этом замечательно написал М.А. Миллер в своей лекции «Об изобретении радио... и не только».

«В народе то "движение" окрестили девизом: "Россия – родина слонов!" (даже не мамонтов, заметьте, а слонов!). Вредоносность подобных "национальных потех" очевидна: "Единожды солгавши, да кто тебе поверит!.." В результате люди перестали почитать истинных своих "передовиков", и заслуги Попова, в частности, были незаслуженно принижены их непомерным вознесением – известный в психологии феномен, который я называю "недоверием из-за передозировки внушения" (наверное, существует и более точный термин, но я его подзабыл, а такая расшифровка отлично воспринимается жертвами осточертевших телерекламных повторов)» [19, с. 118]. В этой же лекции есть раздел под названием «Мытарства профессора Попова», где изложена правда о нем.

В СССР о Маркони писали только плохо, на Западе – только хорошо. Какова правда о Гульельмо Маркони? Пожалуй, ответ можно найти в длинной цитате из книги [18] и в статье [20].

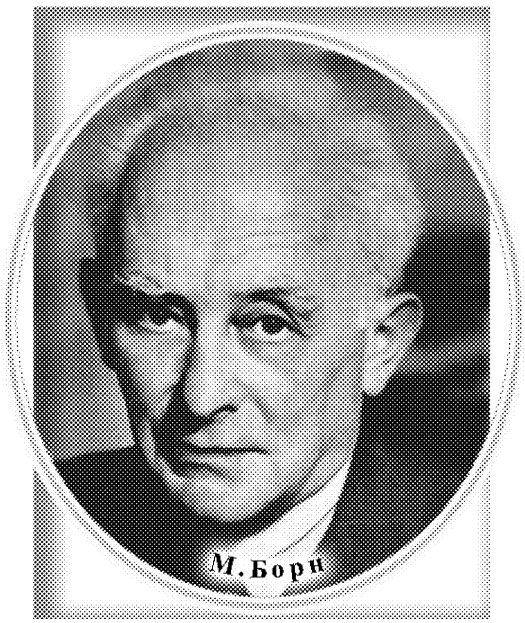
«Неутомимая изобретательская деятельность Маркони делает его уникальной фигурой в истории радио... Повторив год спустя открытие Попова, он как одержимый отдался делу пропаганды и развития своего детища, в частности, 60 раз пересек Атлантический океан.

Объективная оценка деятельности Маркони затрудняется той несимпатичной формой, которую придал своей работе сам изобретатель. До Маркони работа в области изучения и применения электромагнитных волн производилась исключительно в рамках науки; Маркони круто перевел ее в рамки коммерции... То, что прежде рассматривалось как объект научного исследования, он сделал объектом личного обогащения. Поскольку сам он в полной мере воспользовался плодами трудов своих многочисленных предшественников, объективно получилось так, что их гений и труд стали для него средством наживы. Работали все, а золото потекло в карманы одного Маркони. Конечно, это до глубины души возмутило всех честных людей, и общественное мнение окружило Маркони стеной презрения и антипатии...

Таким образом, этот человек сочетал в одном лице неутомимого изобретателя и корыстного стяжателя, талантливого организатора и ловкого дельца» [18, с. 179–180].

О себе Маркони в 1907 году сказал следующее: «Я известен как человек, имеющий дело с научными фактами и возможными выгодами, а не с утопическими фантазиями... Если говорить о пределе насыщения, границах прогресса радио, то не существует ограничений для расстояния, и поэтому предела развития радио не существует» [Цитируется по 20, с. 123].

135 лет назад в Фордербрюле близ Вены родился польский физик Мариан Смолуховский (1872–1917). Он окончил Венский университет, работал во Львовском университете, а затем в Краковском, где в последний год жизни был ректором. Основные работы посвящены молекулярной физике, термодинамике, статистической физике. Так, он создал теорию броуновского движения, которое 180 лет назад открыл английский ботаник Р. Броун, наблюдавший хаотическое движение мелких частиц, взвешенных в растворе. Эта теория доказала справедливость кинетической теории теплоты, способствуя ее окончательному утверждению. Им создана теория термодинамических флуктуаций, которая нанесла удар гипотезе «Тепловой смерти» Вселенной, следовавшей из классической трактовки второго начала термодинамики. М. Смолуховский объяснил «рэлеевское рассеяние», показав, что молекулярное рассеяние света вызывается тепловыми флуктуациями показателя преломления среды, которые делают среду оптически мутной.



125 лет назад родился Макс Борн (1882–1970) – немецкий физик-теоретик, один из создателей квантовой (матричной) механики.

Для нелинейной динамики важным является определение детерминированности, данное М. Борном. Обсудим его (см., например, [21]).

Каждое физическое состояние системы измеряется всегда с малой, но конечной неточностью ε. Поэтому оно определяется не числом, а некоторым вероятностным распределением. Задача состоит в том, чтобы на основе известного начального распределения предсказать распределение в момент времени t. Если данное решение устойчиво, то любое последующее состояние предсказуемо и система может считаться детерминированной. Такое определение детерминированности по М. Борну отличается от традиционного определения изменением последовательности предельных переходов при $\varepsilon \to 0$ и $t \to \infty$. Обычно сначала область начального рассеяния стягивается в точку, а затем смотрится поведение при $t \to \infty$. Конечно, получается полная предсказуемость. Этот путь является нефизичным и заменяется другим: сначала при заданном ε определяются поведение траекторий и область конечного рассеяния при любом t, в том числе область рассеяния при $t \to \infty$, а затем уже начальное рассеяние устремляется к точке. Если область конечного рассеяния при $t \to \infty$ нарастает, то поведение системы непредсказуемо.

Этому, как известно, соответствует неустойчивость всех или почти всех траекторий системы, что приводит к тому, что даже самое малое воздействие достигает макроскопических размеров. Экспоненциальная неустойчивость траекторий – одно из основных свойств хаоса.

70 лет назад И.Е. Тамм и И.М. Франк разработали теорию эффекта Вавилова–Черенкова. Индуцированное излучение Вавилова–Черенкова лежит, в частности, в основе объяснения нелинейных процессов взаимодействия электронных потоков с бегущими электромагнитными волнами.

Возможно, читатель заметил, что стиль подачи материала в статьях о датах 2006 и 2007 годов несколько изменился: какой-то дате уделяется много места, другим меньше, нет практически уже простого перечисления дат. Выбор дат по-прежнему на совести автора. Главным героем 2007 года стал Леонардо да Винчи. Кстати, уже после написания статьи появились интересные книги [22] и [23].

Авторы книги [22] считают, ссылаясь на историка Карло Макканьи, что Леонардо был «...человеком средней образованности, то есть находился примерно посередине между эрудитом и невеждой», что он скорее маг, чудотворец, прорицатель, чем мудрец, что он – великий миф непобедимого рыцаря и героя науки, необходимый человечеству.

Книга [23] знакомит читателя с литературными и философскими построениями Леонардо да Винчи. Вот одна из аллегорий Леонардо, которой уместно закончить статью.

«Заметила бумага, что вся она испещрена строками черных чернил, и стала кручиниться, а те ей в ответ: да тебя ведь и сохранят только из-за слов, на тебе нанесенных» [цитируется по 23, с. 24].

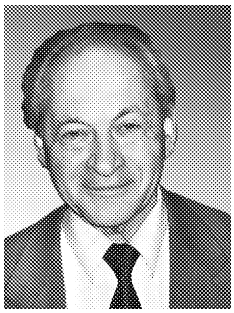
Библиографический список

1. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
2. *Тарасов Б.Н.* Паскаль. М.: «Молодая гвардия», 1979. 334 с.
3. *Паскаль Б.* Мысли. М.: 1888.
4. *Браун Дэн.* Код да Винчи. Роман. М.: Изд-во «Матадор», 2006.
5. *Keising R.Y.* The history of Newton's apple tree (Being an investigation of the story of Newton and the apple and the history of Newton's apple tree and its propagation from the time of Newton to present day) // Contemporary Physics. 1998. Vol. 39, № 5. P. 377.
6. *Гиндикин С.Г.* Рассказы о физиках и математиках. 3-е изд., расширенное. М.: МЦНМО, 2001. 448 с.
7. *Князев А.А.* Леонард Эйлер – 300 лет со дня рождения // Изв. вузов. ПНД, (принята к печати).
8. *Трубецков Д.И.* Даниил Семенович Данин и его кентавристика. Сер. «След вдохновений и трудов упорных...» Лекции. Вып. 3, Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2007. 108 с.
9. *Араго Ф.* Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров. Том II, III. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 464 с.
10. *Витковски Н.* Сентиментальная история науки. М.: Колибри, 2007. 448 с.
11. *Гинзбург В.Л.* Об излучении электрона, движущегося вблизи диэлектрика // ДАН СССР. 1947. Т. 6. С. 145.
12. *Гинзбург В.Л.* Об излучении микроволн и их поглощении в воздухе // Изв. АН СССР (Физ.). 1947. Т. 11. С. 165.
13. *Гинзбург В.Л.* Некоторые вопросы теории излучения при сверхсветовом движении в среде // УФН. 1959. Т. 69. С. 537.
14. *Франк И.М.* Эйнштейн и оптика // УФН. 1979. Т. 129. С. 694.
15. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 432 с.
16. *Говард Дж.* Джон Уильям Стрэтт (лорд Рэлей) // УФН. 1966, январь, Т. 88, вып. 1. С. 148.
17. *Щербаков Р.Н.* «Я принадлежу к избранным, которые живут мало, но все же достаточно». К 150-летию со дня рождения Генриха Герца // Вестник российской академии наук. 2007. Т. 77, № 10. С. 896.
18. *Григорьян А.Т., Вяльцев А.Н.* Генрих Герц. М.: Наука, 1968. 309 с.
19. *Миллер М.* Всякая и не всякая всячина, посвященная собственному 80-летию. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. 480 с.
20. Train times, irish whiskey, bad weather, potage and Poldhu. History of physics // Europhysics News. 1997, July/August. P. 119.
21. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.

22. *Ортоли С., Витковски Н.* Ванна Архимеда. Краткая мифология науки. М.: Колибри, 2007. 240 с.
23. *Жуков А.Н.* Неизвестный Леонардо: притчи, аллегории, фацеции. Ростов н/Д.: Феникс, 2007. 157 с.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 16.01.2008



Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 4, 2008 УДК 517.9

СИНХРОНИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ЦЕПОЧКИ ГЕНЕРАТОРОВ С ФАЗОВОЙ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬЮ

В.В. Астахов, М.Г. Щербаков, С.А. Коблянский, А.В. Шабунин

Проведено исследование вынужденной синхронизации периодических колебаний в кольце автогенераторов периодической внешней силой. Обнаружено, что разным мультистабильным состояниям, сосуществующим в системе, соответствуют различающиеся области синхронизации. Показано, что периодическое воздействие определенной частоты на один из генераторов позволяет «затянуть» ансамбль в другое устойчивое состояние.

Введение

Синхронизация колебаний связанных автогенераторов – одно из традиционных направлений радиофизики, важное как для понимания фундаментальных закономерностей естествознания, так и для практических приложений. Данное явление имеет множество разнообразных проявлений в природе, технике, экономике и обществе, поэтому ему трудно дать достаточно строгое и полное определение. Наиболее удачным представляется определение, данное в монографии И.И. Блехмана [1]: «синхронизацию можно определить как свойство материальных объектов самой различной природы вырабатывать единый ритм совместного существования, несмотря на различие индивидуальных ритмов и на подчас крайне слабые взаимные связи». Выработка единого ритма заключается в том, что при синхронизации:

– происходит «захват собственных частот» автоколебаний, когда система N генераторов, каждый из которых имеет свою индивидуальную частоту $\omega_i\,(i = 1, 2, ..., N)$, при наложении связей начинает колебаться с некоторой единой для всех частотой ω;

– устанавливаются определенные стационарные значения разностей текущих фаз между колебаниями генераторов $\varphi_i(t) - \varphi_j(t) = \Delta_{i,j} = \mathrm{const}$, не зависящие в определенных пределах от начальных условий – «захват мгновенных фаз».

При синхронизации периодических колебаний генератора может существовать несколько значений стационарных разностей фаз, соответствующих разным устойчивым синхронным состояниям. Выбор между сосуществующими синхронными со-

стояниями определяется начальными условиями. Мультистабильность данного вида обычно называют фазовой. Типичным примером фазовой мультистабильности можно считать сосуществование пространственно-периодических колебательных режимов в цепочках локально связанных автогенераторов – автоволн, бегущих вдоль ансамбля с постоянной фазовой скоростью [2–5]. При этом колебания в соседних генераторах имеют равную амплитуду и отличающуюся на постоянное значение фазу колебаний. В работе [6] было проведено детальное исследование таких мультистабильных состояний, выявлена характерная структура пространства параметров для цепочки автогенераторов с диссипативной связью, продемонстрирована возможность переключений между различными режимами под действием шума.

Одной из особенностей пространственно-периодических режимов в ансамбле генераторов является зависимость характеристик периодических колебаний (амплитуда и частота) от пространственного периода. Она приводит к тому, что, если подать на систему генераторов внешнее периодическое воздействие, области синхронизации для разных автоволновых режимов окажутся разнесены в пространстве параметров «частота – амплитуда воздействия». Это дает возможность управлять переключениями между пространственно-периодическими режимами посредством «затягивания» цепочки в нужный режим, синхронизуя ее внешним сигналом. Вынужденная синхронизация периодических колебаний цепочки генераторов в разных мультистабильных состояних, а также переключение под действием синхронизующего воздействия из одного состояния в другое составляют содержание настоящей работы.

1. Исследуемая система и ее поведение в автономном режиме

Классической моделью автоколебательной системы, на примере которой можно исследовать как закономерности возникновения и развития автоколебаний, так и их вынужденную синхронизацию, является осциллятор ван дер Поля. Рассмотрим цепочку генераторов ван дер Поля с периодическими граничными условиями

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = y_1,\\
&\dot{y}_1 = (\varepsilon - x_1^2)y_1 - x_1 + \gamma(y_2 - 2y_1 + y_N) + A\sin(\omega t),\\
&\dot{x}_i = y_i,\\
&\dot{y}_i = (\varepsilon - x_i^2)y_i - x_i + \gamma(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}),\\
&x_{1+N} = x_1,\\
&y_{1+N} = y_1,
\end{aligned} \tag{1}$$

где x_i, y_i, – динамические переменные парциальных генераторов, нижний индекс указывает номер элемента цепочки ($i = 2, ..., N$), N – число элементов цепочки; ε – параметр возбуждения; γ – коэффициент связи. Ансамбль генераторов находился под внешним гармоническим воздействием, прикладываемым на первый элемент цепоч-

ки (он выделен в отдельную группу уравнений), A, ω – амплитуда и частота вынуждающей силы. Исследования проводились при $\varepsilon = 2.5$. При этом в отдельном генераторе наблюдаются негармонические колебания большой амплитуды с собственной частотой $\omega_0 = 0.7635$. В работе рассматривалась цепочка из 30 генераторов.

В автономной цепочке генераторов в зависимости от величины связи могут наблюдаться различные пространственно–периодические режимы. Каждому такому режиму соответствует определенное стационарное значение разности фаз между колебаниями соседних генераторов $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$. Здесь мы ограничимся рассмотрением таких режимов, для которых разность фаз постоянна вдоль цепочки: $\Delta\varphi_i = \Delta\varphi$. В силу периодических граничных условий полный набег фазы вдоль кольца $N\Delta\varphi$ должен быть кратен 2π: $N\Delta\varphi = 2\pi k$, где k – некоторое целое число. Нетрудно видеть, что пространственный период (длина волны Λ) связан с индексом k посредством формулы: $\Lambda = N/k$. Из дискретного характера цепочки следует, что длина волны должна равняться целому числу, а значит, индекс k может принимать значения делителя числа N. Таким образом, для ансамбля из 30 генераторов k принимает значения: 0, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15. Случай $k = 0$ соответствует пространственно-однородному режиму, когда колебания всех генераторов синфазны.

В зависимости от параметра связи указанные пространственно–периодические состояния могут быть устойчивыми и соответственно наблюдаться в эксперименте. В работе [6] было показано, что при положительной связи могут быть устойчивыми только те колебания, у которых сдвиг фаз между соседними генераторами не превосходит $\pi/2$. То есть из всего отмеченного набора волн будут устойчивыми волны с $k \leq 6$. Причем область устойчивости более коротковолновых режимов «прижимается» к значению $\gamma = 0$. Тем самым реализуется вложенная структура пространства параметров: области устойчивости коротковолновых режимов находятся внутри областей устойчивости длинноволновых режимов. При слабой связи ($\gamma \simeq 0$) все волны с $0 \leq k \leq 6$ будут устойчивыми. В этом случае конкретный пространственный режим можно задать, выбрав начальное распределение фаз генераторов близким к требуемому для данного режима. Таким образом, можно говорить о фазовой мультистабильности в кольце генераторов. Количество и характер мультистабильных режимов, демонстрируемых системой, зависят от значений параметров генераторов и связи между ними. Два характерных автоволновых режима представлены на рис. 1. На левой стороне этого рисунка для волн с $k = 2$ и $k = 6$ показаны «мгновенные снимки» распределения значений переменной x вдоль кольца, когда значение переменной y_1 переходит через ноль (сечение Пуанкаре). На правой стороне того же рисунка представлена картина распределения соответствующих мгновенных фаз вдоль ансамбля.

Взаимодействие генераторов в ансамбле приводит к тому, что их собственные частоты (так же, как и амплитуды) автоколебаний отличаются от частоты колебаний одиночного осциллятора ван дер Поля. Они зависят теперь также и от вида пространственно-периодического режима, то есть от установившегося $\Delta\varphi$. Исключение здесь составляет лишь пространственно-однородный режим с $\Delta\varphi = 0$, для которого все характеристики автоколебаний совпадают с соответствующими характеристиками одиночного генератора. Таким образом, каждой волновой моде

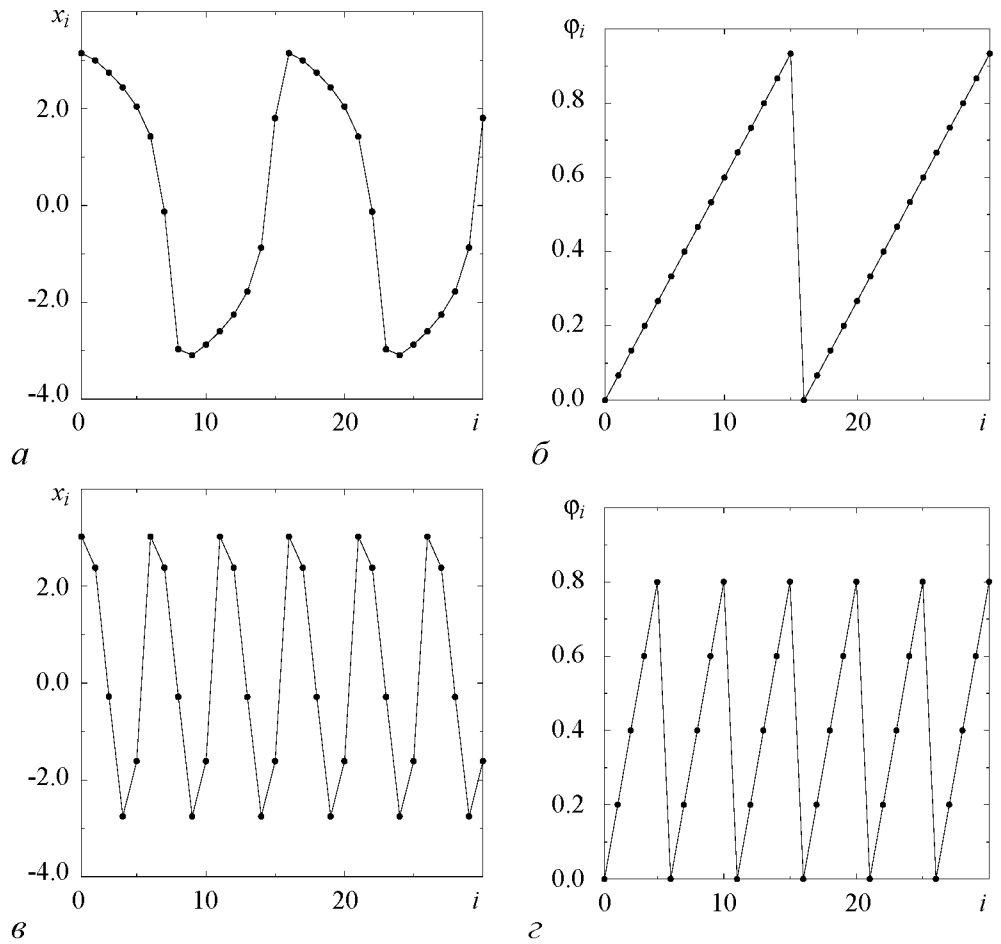


Рис. 1. Распределения амплитуды (слева) и фазы (справа) генераторов вдоль кольца для пространственных режимов с $k = 2$ (*а, б*) и $k = 6$ (*в, г*) при $\varepsilon = 2.5$, $\gamma = 0.05$, $A = 0$, $N = 30$

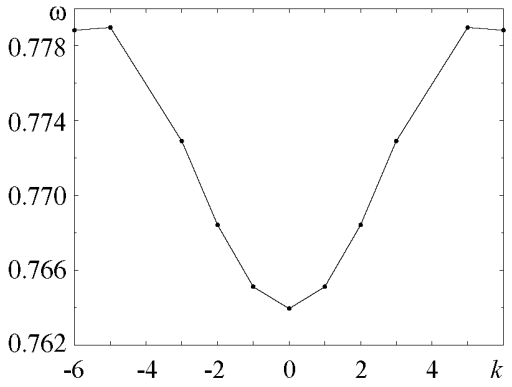


Рис. 2. Зависимость частоты колебаний генераторов от индекса k ($\varepsilon = 2.5$, $\gamma = 0.05$, $A = 0$, $N = 30$)

соответствует определенная собственная частота, с которой происходят колебания генераторов во всей цепочке, эта частота минимальна для синфазного режима ($k = 0$) и увеличивается с уменьшением длины волны (с ростом k). Зависимость собственной частоты колебаний от индекса k (дисперсионная характеристика) показана на рис. 2.

Из рисунка видно, что собственные частоты, хотя и незначительно, но отличаются друг от друга. Это различие дает возможность раздельной синхро-

низации разных сосуществующих автоволновых режимов внешним периодическим воздействием. Можно ожидать, что выбирая воздействие, близкое к той или иной собственной частоте, можно будет осуществить управляемый переход к синхронному состоянию с данной собственной частотой, то есть к режиму с другим пространственным периодом.

2. Вынужденная синхронизация цепочки локальным гармоническим воздействием

Рассмотрим, как происходит синхронизация цепочки под действием внешней периодической силы. Выберем значение параметра связи достаточно малым, чтобы все указанные волновые режимы были устойчивыми, например, $\gamma = 0.05$. Периодическое воздействие будем прикладывать к первому генератору цепочки. Поскольку система является мультистабильной, а также, как показано на рис. 2, собственные частоты разных мультистабильных состояний несколько отличаются друг от друга, следует ожидать и различия в расположении областей синхронизации. Для исследования зон синхронизации разных пространственно-периодических режимов предварительно выбирались соответствующие данным режимам начальные условия. После этого к цепочке осцилляторов прикладывалось локальное внешнее воздействие, как это показано в системе уравнений (1). Изменяя частоту и амплитуду вынуждающей силы, можно построить картину взаимного расположения зон синхронизации на плоскости параметров «частота воздействия – амплитуда воздействия». Результаты двупараметрического исследования синхронизации представлены на рис. 3.

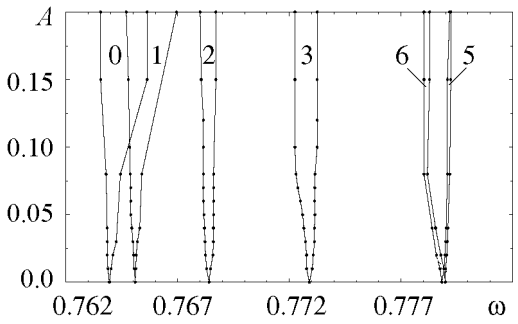


Рис. 3. Области синхронизации пространственно-периодических режимов при $\varepsilon = 2.5$, $\gamma = 0.05$, $N = 30$

Подчеркнем, что все области на этом рисунке соответствуют синхронизации $1 : 1$, то есть в этих областях частота автоколебаний во всех генераторах цепочки «следует» за частотой внешнего воздействия, подаваемого на первый генератор. Видно, что «языки синхронизации» чрезвычайно узкие. Это может быть объяснено распределенным характером автономной системы, что затрудняет ее синхронизацию точечным воздействием. Каждый из языков синхронизации опирается на свое значение собственной частоты колебаний, соответствующее тому или иному пространственному режиму. Области синхронизации не пересекаются (при малых значениях амплитуды воздействия). Соответственно, можно выбрать значение амплитуды и частоты воздействия из области синхронизации желаемого режима для того, чтобы «затянуть» цепочку в желаемое состояние.

Попробуем теперь перевести систему из одного стационарного состояния в другое, «затягивая» ее в этот режим посредством синхронизации на частоте собственных колебаний целевого режима. В эксперименте осуществлялись управляемые переходы с более коротковолновых режимов на более длинноволновые. Рассмотрим это на примере переключения из режима с $k = 3$ в режим с $k = 2$. При выборе

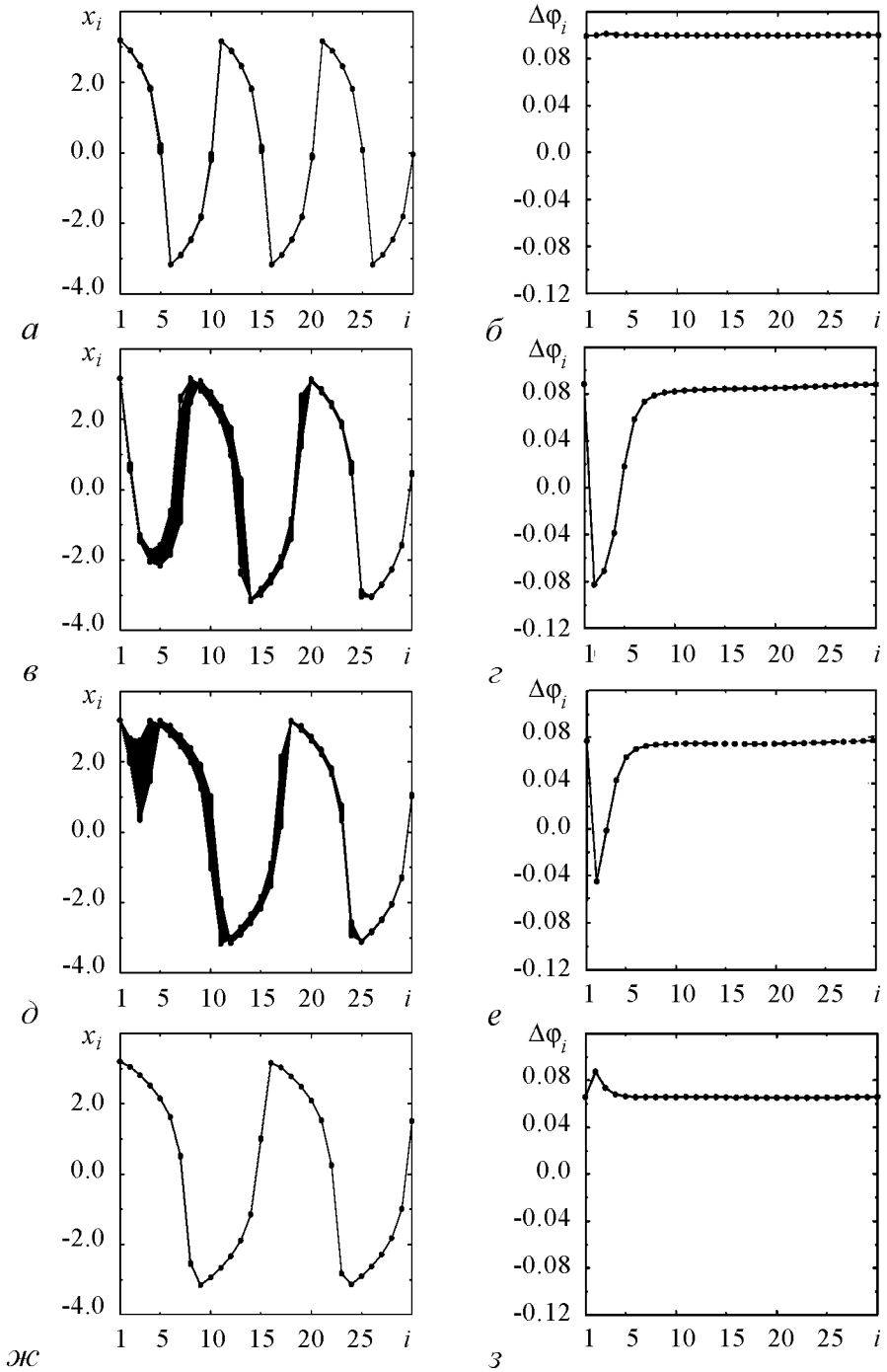


Рис. 4. Распределения мгновенных координат и разностей фаз вдоль цепочки при переключении пространственных режимов с изменением частоты внешнего воздействия в случае $\varepsilon = 2.5$, $\gamma = 0.05$, $N = 30$, $A = 0.15$ при различных частотах ω: 0.773 (*а*, *б*), 0.7715 (*в*, *г*), 0.77 (*д*, *е*), 0.7685 (*ж*, *з*)

начальных условий таким образом, чтобы в кольце существовал режим с $k = 3$, и параметрами воздействия $A = 0.15$, $\omega = 0.773$ (внутри языка синхронизации $k = 3$, см. рис. 3), уменьшая частоту с шагом 0.00005 до значения $\omega = 0.7685$ (что соответствует языку с $k = 2$), пронаблюдаем за распределением координат и фаз генераторов цепочки. На рис. 4 показаны волны в кольце для различных значений частот воздействия.

Для исходного режима (рис. 4, *а*, *б*) характерно стационарное распределение разностей фаз $\Delta\varphi = 0.6286$, суммарный набег фазы вдоль кольца составляет 6π. Данное распределение сохраняется до тех пор, пока частота воздействия не выходит за границы области синхронизации режима с $k = 3$ (см. рис. 2). При пересечении границы зоны синхронизации распределение разностей фаз вдоль цепочки перестает быть постоянным, в нем появляется характерный провал, который далее будем называть фазовым сбоем (рис. 4, *в*, *г*). Этот фазовый сбой располагается вблизи генератора с $i = 1$, на который подается внешнее воздействие. Одновременно с появлением фазового сбоя сумма разностей фаз вдоль всей цепочки становится равной 4π. Такое значение характерно для другого пространственно-периодического режима, соответствующего $k = 2$. Таким образом, в области параметров между языками 2 и 3 на рис. 3 наблюдаются квазипериодические режимы (см. рис. 4, *в*, *г*, *д*, *е*), однако суммарная разность фаз генераторов для этих режимов постоянна и равна 4π. С уменьшением частоты воздействия и приближением к области синхронизации пространственного режима с $k = 2$ наблюдается перераспределение разностей фаз между элементами кольца (см. рис. 4). Величина фазового сбоя уменьшается, разность фаз между соседними генераторами выравнивается для всех i, и при попадании в область синхронизации режима с $k = 2$ в кольце снова наблюдается пространственно-периодический режим. Снятие внешнего воздействия не приводит к каким-либо дальнейшим изменениям этого режима. Более того, при отключении воздействия в области параметров A, ω, где наблюдается фазовый сбой и суммарная разность фаз уже равна 4π, система сама перейдет к пространственно-периодическому режиму с $k = 2$.

Заключение

В работе исследовалось поведение цепочки автогенераторов под внешним гармоническим воздействием. В качестве исходных режимов выбирались пространственно-периодические колебания с различными длинами волн. Как оказалось, каждое из сосуществующих мультистабильных состояний характеризуется своей собственной частотой автоколебаний и соответственно, для него существует своя область синхронизации 1:1. При малых амплитудах воздействия эти области синхронизации не пересекаются. Вынужденная синхронизация ансамбля генераторов с частотой воздействия, соответствующей частоте сосуществующего колебательного режима, позволяет перевести систему из одного пространственно-периодического режима в другой пространственно-периодический режим.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (программа «Развитие научного потенциала высшей школы на 2006–2008 гг.»).

Библиографический список

1. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
2. *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983.
3. *Васильев В.А., Романовский Ю.М.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
4. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику (от маятника до турбулентности и хаоса). М.: Гл. ред. ФМЛ,1988.
5. *Cross M.G., Hohenberg P.C.* Pattern formation outside of equilibrium // Rev. Mod. Phys. 1993. Vol. 65, № 3. P. 851.
6. *Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 4. С. 37.

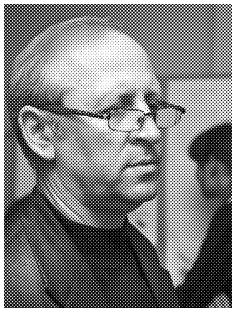
Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию *11.12.2007*
После доработки *13.03.2008*

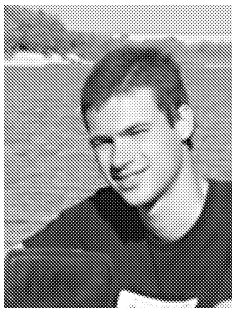
SYNCHRONIZATION OF SPATIAL-PERIODIC MODES IN THE RING OF OSCILLATORS WITH PHASE MULTYSTABILITY

V.V. Astakhov, M.G. Scherbakov, S.A. Koblyansky, A.V. Shabunin

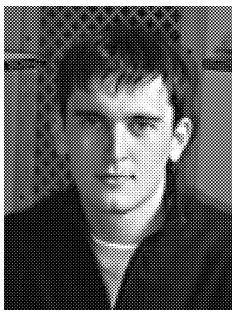
We study external synchronization of periodic oscillations in a ring of oscillators driven by periodic force. It is shown that each multistable state that co-exists in the system possesses its own synchronization region. We find that the periodic force with a certain frequency applied to one of the oscillators enables to switch the ring to another stable regime.



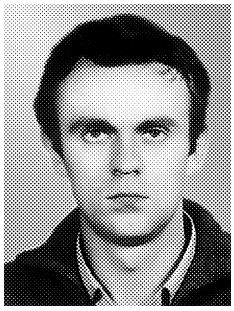
Астахов Владимир Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1980). Доктор физико-математических наук (1999), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях. E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru



Щербаков Павел Александрович – окончил Саратовский государственный университет, кафедру радиофизики и нелинейной динамики (2004). В настоящее время является аспирантом второго года обучения. Научные интересы - динамика автоколебательных систем со связью посредством распределения ресурсов, радиофизическое моделирование.
E-mail: scherbakov@chaos.ssu.runnet.ru



Коблянский Сергей Андреевич – окончил Саратовский государственный университет (2006), аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы: управление хаосом и мультистабильностью в сосредоточенных и распределенных динамических системах с помощью регулярных и шумовых воздействий.
E-mail:sergeyk@chaos.ssu.runnet.ru



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, кандидат физико-математических наук (1998). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций.
E-mail:alexey@chaos.ssu.runnet.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 4, 2008 УДК 531.39

ОЦЕНКА СКОРОСТИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

М.Ю. Логунов, О.Я. Бутковский

В работе рассматривается явление перемешивания фазовых траекторий хаотических систем. Даны полуаналитические оценки динамики перемешивания в дискретных и непрерывных хаотических системах. Описан простой алгоритм экспериментального вычисления локальных и средних по аттрактору степени и скорости перемешивания. Обсуждаются результаты применения этого алгоритма для отображения Эно и системы Чуа.

Введение

Явление перемешивания фазовых траекторий, наряду с положительными ляпуновскими показателями, является одним из немногих фундаментальных свойств детерминированных хаотических систем и вместе с экспоненциальным разбеганием траекторий определяет конечность времени их предсказуемости. Однако это интуитивно понятное явление практически не поддается аналитическому исследованию для хаотических систем, интересных с физической точки зрения. Существующие результаты по оценке скорости перемешивания (см. обзор [1]) позволяют установить скорость перемешивания (а также связать ее с ляпуновскими показателями) лишь для определенных классов дискретных отображений [2,3]. При этом, несмотря на некоторые опубликованные работы (например, [4–6]), аналитическое вычисление скорости перемешивания для более широких классов динамических систем (например, задаваемых в виде систем ОДУ) является еще не решенной задачей.

В этой статье описан простой алгоритм оценки степени и скорости перемешивания, пригодный для исследования как дискретных, так и непрерывных динамических систем. С помощью этого алгоритма оценивается распределение локальных по аттрактору скоростей перемешивания двух известных хаотических систем – отображения Эно и системы Чуа.

В разделе 1 дается определение перемешивающего оператора, а в разделе 2 описан алгоритм оценки локальной скорости перемешивания, основанный непосредственно на определении перемешивающего оператора, и выводится полуаналитическая оценка изменения средней степени перемешивания траекторий со временем. В разделе 3 обсуждаются результаты применения этого алгоритма для отображения Эно и системы Чуа и их согласование с полуаналитической оценкой.

1. Перемешивание в динамических системах

Сформулируем математически понятие перемешивания в хаотической системе, как это сделано в работе [7]. Для этого рассмотрим аттрактор G некоторой системы, на котором задан оператор эволюции системы $S(G)$ и инвариантная мера μ. Выберем на аттракторе G две произвольные области B и W. Отношение меры точек из области B, которые через n итераций оператора эволюции S попали в область W по отношению к мере самой области W, можно записать следующим образом:

$$D_n = \frac{\mu(S^n(B) \cap W)}{\mu(W)}. \tag{1}$$

Оператор S является *перемешивающим*, если при $n \to \infty$ значение D_n в (1) не зависит от конкретного выбора области W, а определяется отношением $\mu(B)/\mu(G)$:

$$\frac{\mu(S^n(B) \cap W)}{\mu(W)} \to \frac{\mu(B)}{\mu(G)}, \quad \text{при } n \to \infty. \tag{2}$$

Отметим, что это определение верно не только для диссипативных (и, в частности, хаотических), но также и для консервативных систем. Особенность его применения для консервативных систем состоит лишь в том, что множество G является не аттрактором, а энергетической гиперповерхностью системы.

С физической точки зрения, формула (2) описывает «размывание» любой области начальных условий B по всему аттрактору G. Эту формулу можно интерпретировать следующим образом: в пределе $n \to \infty$ мера образов точек множества B во множестве W равна мере множества B на аттракторе G для произвольных множеств B и W.

Формула (2) дает возможность оценить скорость перемешивания в хаотической системе. Для этого естественно положить $\mu(G) = 1$ и определить корреляционную функцию $C_n(f, g)$ в виде

$$C_n(f, g) = \left| \int g(f \circ S^{-n}) d\mu - \int g d\mu \int f d\mu \right|, \tag{3}$$

где f и g обычно представляют собой *скалярное поле* – некоторые функции от позиции точки на аттракторе [7, 8].

При наличии перемешивания из (2) следует, что $C_n(f, g) \to 0$ при $n \to \infty$, таким образом, происходит *спадание корреляций скалярного поля*. При этом считается, что скорость спадания корреляций характеризует скорость перемешивания [7].

2. Алгоритм оценки скорости перемешивания

В этом разделе предложен алгоритм оценки скорости перемешивания, основанный на непосредственном вычислении отношения, подобного отношению (1).

Введем на аттракторе хаотической системы множество G_0 из N начальных условий, заданных естественной инвариантной мерой. На каждом n-м шаге эволюции будем задавать окрестность W_n некоторой точки x_n, лежащей на этом аттракторе, как множество из N_1 ближайших к x_n точек множества $S^n(G_0)$. Также

введем множество B_0 как следующую разность множеств: $B_0 = G_0 \backslash W_0$, где W_0 – окрестность произвольной точки x_0 в начальный момент эволюции. Зафиксируем начальное условие x_0 и будем следить за динамикой $x_n = S(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$ и отношением числа точек из B_0, попавших с течением времени в W_n, к полному числу точек N_1, формирующих множество W_n.

Очевидно, что при данном выборе областей W_n и B_0 это отношение находится по формуле, сходной с (1),

$$M_n = \frac{\mu(S^n(B_0) \cap W_n)}{\mu(W_n)}. \tag{4}$$

Следует отметить, что, в отличие от (1), в данном случае область W_n перемещается по аттрактору на каждом шаге эволюции. Тем не менее вероятностные меры множеств B_0, G и W_n в этом алгоритме остаются постоянными и, по определению перемешивающего оператора, сходимость M_n к значению $\mu(B_0)/\mu(G_0)$ не зависит от конкретного выбора области W_n, поэтому можно предположить, что характер изменения зависимости (4) от n определяется, как и для последовательности (1), именно перемешивающими свойствами хаотической системы.

Выражение (4) естественно назвать *степенью перемешивания* точек области W_n за n итераций оператора эволюции, поскольку оно показывает относительную степень обновления окрестности заданной точки за определенный интервал времени или вероятность появления в окрестности данной точки тех точек, которые на начальном этапе эволюции не входили в ее окрестность.

Благодаря определенному выше выбору множеств W_n и B_0, значение M_n будет возрастать от 0 при $n = 0$ до некоторого стационарного значения M_∞, которое можно установить из (2),

$$M_\infty = (N - N_1)/N.$$

Следует ожидать, что усредненная по локальным областям W_0 зависимость $\overline{M}_n$ будет монотонно возрастающей, скорость роста которой характеризует скорость перемешивания на аттракторе G.

Чтобы получить полуаналитические выражения для оценки изменения степени перемешивания со временем, предположим, что для данной хаотической системы выполняются два условия:

1) скорость перемешивания одинакова на всех участках аттрактора;

2) если произвольная точка аттрактора x_k выходит в некоторый момент времени n из окрестности W_n заданной точки x_n, ее образ в течение дальнейших наблюдений на произвольном конечном интервале времени уже не может вернуться в окрестность образа точки x_n:

$$\text{если } \; S^{-1}(x_k) \in W_{n-1} \; \text{ и } \; x_k \notin W_n, \; \text{ то } \; S^t(x_k) \notin W_{n+t} \; \forall t \in [0, T].$$

Первое условие не выполняется для большинства интересных, с физической точки зрения, систем, а второе, вообще говоря, противоречит свойству транзитивности, входящему в само определение хаотической системы [9]. Однако это свойство требует выполнения в бесконечном пределе по времени, а характерные времена перемешивания относительно невелики, поэтому такое предположение может оказаться разумным. Ниже, при описании численного эксперимента с системой Чуа,

показано, к каким различиям между полуаналитической и экспериментальной оценкой динамики степени перемешивания $M(t)$ приводит пренебрежение возвратами траекторий в те или иные окрестности. Что касается первого условия, погрешность полуаналитической оценки, определяемая им, существенно зависит от конкретного распределения локальных скоростей перемешивания на аттракторе, но по-крайней мере для некоторых хаотических систем она может быть достаточно малой (см. ниже, пункт 3.1).

Пусть относительное число точек, не покинувших некоторую окрестность W_1 на протяжении одной итерации оператора эволюции S, составляет V_1. Тогда, с учетом двух описанных условий, достаточно очевидно, что относительное число точек V_n, входящих в ту же окрестность на протяжении всего времени эволюции n, составит

$$V_n = V_1^n. \tag{5}$$

Из определений величин M_n и V_n следует соотношение $M_n = 1 - V_n$, поэтому изменение степени перемешивания со временем описывается уравнением

$$M_n = 1 - (1 - M_1)^n.$$

Для последующего анализа удобнее пользоваться рекуррентной оценкой степени перемешивания, которую нетрудно получить из (5),

$$M_n = M_{n-1} + (1 - M_{n-1})M_1. \tag{6}$$

Скорость роста функции M_n в этом случае характеризуется слагаемым $(1 - M_{n-1})M_1$, где множитель M_1 может служить критерием быстроты роста M_n, а значит, и критерием скорости перемешивания, поэтому в дискретном случае усредненную по аттрактору величину $\overline{M}_1$ естественно интерпретировать как скорость перемешивания в отображении. Бóльшие значения $\overline{M}_1$ соответствуют более быстрому перемешиванию, и, наоборот, чем меньше значение $\overline{M}_1$, тем меньше средняя скорость перемешивания на аттракторе.

Для непрерывных систем выражения (4) и (6) можно переписать в виде

$$M(t) = \frac{\mu(S(t, B_0) \cap W(t))}{\mu(W)} \tag{7}$$

и

$$M(t + \tau) = M(t) + (1 - M(t))M(\tau),$$

откуда при $\tau \to 0$ можно получить

$$\frac{dM}{dt} = (1 - M(t))K, \tag{8}$$

где K – значение правой производной от $M(t)$ в нуле.

Решение уравнения (8) с учетом начального условия $M(0) = 0$ можно записать как

$$M(t) = 1 - e^{-Kt}. \tag{9}$$

Экспоненциальная скорость роста величины $M(t)$ в этом случае характеризуется параметром K, который определяет среднюю за бесконечно малое время τ скорость

перемешивания и поэтому неудобен для вычисления. В качестве оценки скорости перемешивания в непрерывной системе, по аналогии с дискретным случаем, будем использовать среднее значение степени перемешивания $\overline{M}(1)$.

В следующем разделе приведены примеры вычисления средних и локальных скоростей перемешивания для двух хаотических систем: отображения Эно и системы Чуа.

3. Примеры

3.1. Перемешивание в отображении Эно. Отображение Эно задается уравнениями

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2,$$
$$y_{n+1} = bx_n$$

и при заданных значениях параметров $a = 1.4$ и $b = 0.3$ является хаотическим.

Для этого отображения была экспериментально рассчитана с помощью описанного в разделе 2 алгоритма динамика изменения степени перемешивания $\overline{M}_n$ со временем n, а также построена ее оценка по формуле (6). Вычисления проводились для аттрактора размером 50000 точек, а размер окрестности выбирался равным 100 точкам (0.2% от размера аттрактора). Результаты вычислений показаны на рис. 1. Как видно из этого рисунка, уже приблизительно на 20-м шаге эволюции отображения Эно все фазовые точки практически полностью обновляют свою окрестность. Отметим также полное совпадение полуаналитической и экспериментальной кривых $\overline{M}_n$, которое может говорить об обоснованности двух сделанных в разделе 2 предположений о динамике траекторий на аттракторе.

Также было вычислено распределение величин M_1 на аттракторе Эно, которое позволяет обнаружить сильно и слабо перемешивающие области на этом аттракторе (рис. 3). Вид этого распределения говорит о том, что области сильного и слабого перемешивания достаточно четко локализованы. Интересно отметить, что почти на всей «внутренней» дуге аттрактора перемешивание существенно меньше, чем на «внешней» дуге.

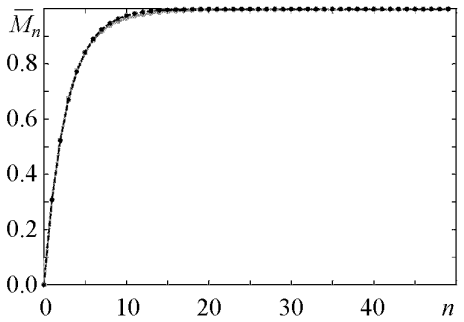


Рис. 1. Динамика степени перемешивания $\overline{M}_n$ в отображении Эно. Полуаналитическая и экспериментальная кривые

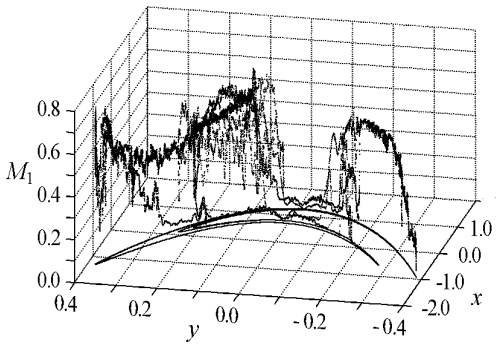


Рис. 2. Локальная скорость перемешивания в отображении Эно. Значения M_1 отложены по оси z над аттрактором отображения

Известно, что, по крайней мере для простых хаотических систем, существует близкая связь ляпуновских показателей и скорости перемешивания [8,10,11]. Эту связь для ляпуновских показателей отображения Эно и средней скорости перемешивания $\overline{M}_1$, вычисляемой по предлагаемому алгоритму, иллюстрирует рис. 4. Как и следовало ожидать, в режиме регулярных колебаний (окнах прозрачности) перемешивание в отображении пропадает, а в хаотическом режиме значение средней скорости перемешивания сильно коррелирует со значением старшего ляпуновского показателя отображения.

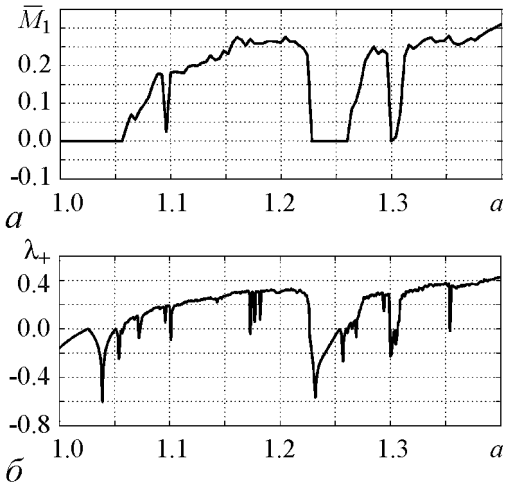


Рис. 3. Зависимость от параметра a средней скорости перемешивания $\overline{M}_1$ на аттракторе отображения Эно и старшего показателя Ляпунова λ_+

Очевидно, что обоснованности оценок скорости перемешивания следует ожидать только при наличии достаточно репрезентативного набора начальных условий G_0, выявляющего тонкую структуру аттрактора. Вместе с тем представляет интерес вопрос об устойчивости предлагаемого алгоритма к вариациям размера локальной окрестности W_n. Чтобы получить ответ на этот вопрос, была построена гистограмма локальных скоростей M_1 для разных размеров локальной окрестности (рис. 5, *а*), а также зависимость среднего значения $\overline{M}_1$ от размера локальной окрестности (рис. 5, *б*).

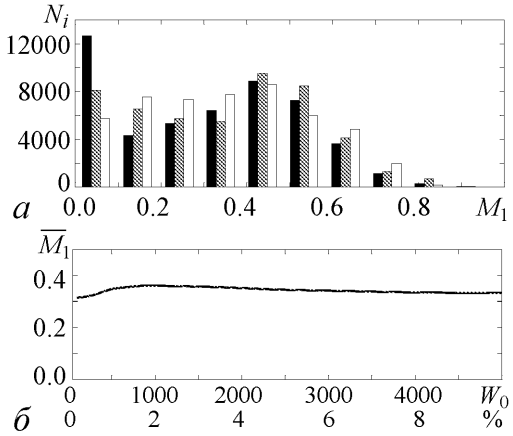


Рис. 4. *а* – трехкомпонентная гистограмма локальных скоростей перемешивания M_1 для различных размеров локальной окрестности W_n. Черные столбики – относительный размер окрестности 0.2% от размера аттрактора (100 точек), серые столбики – 1% (500 точек) и белые – 5% от размера аттрактора (2500 точек); *б* – средняя скорость перемешивания $\overline{M}_1$ на аттракторе в зависимости от размера локальной окрестности (в точках и в % относительно размера аттрактора)

Из рис. 5, *а* видно, что с изменением размера локальной окрестности распределение значений скорости перемешивания M_1 претерпевает некоторые изменения, однако эти изменения существенны только для области $M_1 < 0.2$ и практически не влияют на среднюю скорость перемешивания $\overline{M}_1$, которая, как показано на рис. 5, *б*, очень слабо реагирует на изменение размера локальной окрестности.

3.2. Перемешивание в системе Чуа. Система Чуа задается уравнениями

$$\dot{x} = 9(y - 2/7x + 3/14(|x+1| - |x-1|)),$$
$$\dot{y} = x - y + z,$$
$$\dot{z} = -14.286y.$$

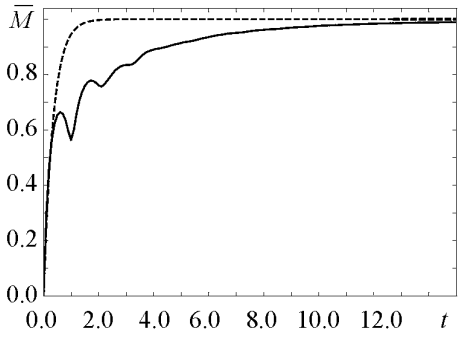


Рис. 5. Динамика средней степени перемешивания $\overline{M}(t)$ на аттракторе. Сплошная линия – экспериментальная кривая, штриховая – полуаналитическая оценка (9)

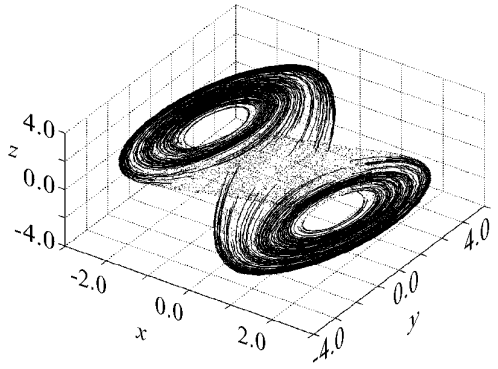


Рис. 6. Локальная степень перемешивания $M(1)$ на аттракторе. Линиями изображены траектории, на которых $M(1) < 0.5$, точками показана область, в которой $M(1) > 0.5$

При данных значениях параметров аттрактор системы представляет собой двойной завиток (double scroll), а динамика является хаотической.

Для этой системы были проведены аналогичные расчеты по вычислению распределения локальных скоростей перемешивания траекторий на аттракторе и оценке средней степени перемешивания. Результаты вычисления зависимости средней степени перемешивания $\overline{M}(t)$ от времени эволюции показаны на рис. 5.

В отличие от отображения Эно, в данном случае наблюдается значительно худшее согласие экспериментальных и полуаналитических оценок средней степени перемешивания. Это объясняется тем, что в системе Чуа сильно проявляется явление выхода траекторий из заданной окрестности, а затем их возврата в нее. Такое поведение фазовых траекторий было запрещено нами при выводе аналитического выражения для степени перемешивания и оно приводит к заниженной, по сравнению с полуаналитической (9), экспериментальной оценке $M(t)$ на среднем интервале времени ($1 < t < 10$), на котором и происходит возврат траекторий в их «родительскую» окрестность. Этот возврат отражается на рис. 6 как участки спада либо более медленного роста зависимости $M(t)$. На интервале времени $t \gg 10$ этот эффект перестает проявляться из-за полного разрушения всех начальных областей W_0.

Как и в случае с отображением Эно, локальная степень перемешивания на аттракторе Чуа не постоянна. Распределение значений $M(1)$ для этой системы показано на рис. 6. Из рисунка видно, что области слабой перемешиваемости четко расположены вокруг неустойчивых положений равновесия. Фазовые траектории вокруг них раскручиваются, двигаясь в почти плоских лентах, где их перемешивание затруднено, но при выходе траекторий в пространство между завитками они подвергаются гораздо более сильному перемешиванию. Среднее время движения траекторий в этом пространстве составляет приблизительно 1 ед. Затем траектории снова попадают на один из завитков и в этот момент происходит описанный выше возврат траекторий в их «родительские» окрестности. Этим объясняется существование локальных минимумов в зависимости $M(t)$, изображенной на рис. 6.

Заключение

В работе описан метод построения распределения локальных скоростей и средней скорости перемешивания в хаотических системах и показано его применение при анализе отображения Эно и системы Чуа.

Полученная идеализированная полуаналитическая оценка динамики степени перемешивания указывает только на экспоненциальный характер ее роста. Будучи весьма точной для отображения Эно, она существенно отклоняется от экспериментально полученных значений для системы Чуа, в которой значительно проявляется описанное в п. 3.2 явление возврата траекторий.

Предлагаемый алгоритм оценки скорости перемешивания прост и устойчив к вариациям его параметров (в частности, размера локальной окрестности) и дает обоснованные оценки распределения локальных скоростей перемешивания, подтверждением правильности которых могут служить: сам вид распределения, который можно визуализировать для малоразмерных систем (см. рис. 3 и рис. 7) – положение быстро и медленно перемешивающих областей аттракторов на них совпадает с интуитивными представлениями о перемешивании; схожесть экспериментальной и полуаналитической оценок изменения средней степени перемешивания $M(t)$ со временем (см. рис. 1 и рис. 6); сильная корреляция между средней скоростью перемешивания и старшим показателем Ляпунова (см. рис. 4).

Этот алгоритм может быть полезен при анализе и изучении перемешивания как в непосредственно экспериментальных наблюдениях, так и в математических моделях динамических систем с известным оператором эволюции.

Библиографический список

1. *Baladi V.* Decay of correlations // in Smooth Ergodic Theory and its Applications. Proc. Symp. Pure Mathematics, Providence, RI: American Mathematical Society. 1999. Vol. 69. P. 297.
2. *Collet P., Eckmann J.* Liapunov multipliers and decay of correlations in dynamical systems // Journal of Statistical Physics. 2004. Vol. 115. P. 217.
3. *Wonhas A., Vassilicos J.C.* Mixing in fully chaotic flows // Physical Review E. 2002. 66.
4. *Casati G., Prosen T.* Mixing property of triangular billiards // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 4729.
5. *Peifer M., Schelter B., Winterhalder M. et al.* Mixing properties of the Ressler system and consequences for coherence and synchronization // Physical Review E. 2005. 72.
6. *Анищенко В.С., Астахов С.В.* Относительная энтропия как мера степени перемешивания зашумленных систем // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, вып. 21. С. 1.
7. *Wiggins S., Ottino J.M.* Foundations of chaotic mixing // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 2004. Vol. 362. P. 937.
8. *Badii R., Heinzelmann K., Meier P., Politi A.* Correlation function and generalized Lyapunov exponents // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 37, 4.
9. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
10. *Alves J.F., Luzzatto S., Pinheiro V.* Lyapunov exponents and rates of mixing for one-dimensional maps // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2004. Vol. 24. P. 637.

11. *Niu X., Lee Y.* Efficient spatial-temporal chaotic mixing in microchannels // J. Micromech. Microeng. 2003. Vol. 13. P. 454.

Владимирский государственный университет

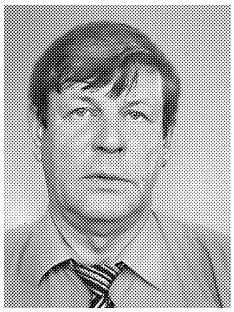
Поступила в редакцию *30.10.2007*
После доработки *31.03.2008*

ESTIMATION OF MIXING VELOCITY IN CHAOTIC SYSTEMS

M.Yu. Logunov, O.Ya. Butkovskii

In the paper an effect of phase space trajectories mixing in chaotic systems is considered. Approximate analytic estimations are given of mixing dynamics in discrete and continuous chaotic systems. Easy algorithm is developed for experimental calculation of mixing degree and mixing velocity, both local and average over the attractor. Results of this algorithm application to Henon map and to Chua system are discussed.

Логунов Максим Юрьевич – родился во Владимире (1982). Окончил Владимирский государственный университет (2004). Инженер научно-исследовательского сектора ВлГУ. Область научных интересов – методы анализа и моделирования динамических систем, реконструкция динамических систем.
E-mail: mulogunov@mail.ru



Бутковский Олег Ярославович – родился в Магнитогорске (1949). Окончил Магнитогорский педагогический институт (1973). После окончания работал в лаборатории физико-химических исследований МПИ. Защитил кандидатскую диссертацию в Московском педагогическом государственном университете по специальности радиофизика, в области теории колебаний и волн (1987). С 1987 года работает во Владимирском государственном университете. Защитил докторскую диссертацию в ИРЭ РАН (2005). Область научных интересов – нелинейная динамика, нелинейная акустика, моделирование нелинейных явлений в медико-биологических системах.
E-mail: olegb@vlsu.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 4, 2008 УДК 577.38

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ КОГЕРЕНТНЫЕ РЕЖИМЫ ГЕНЕРАЦИИ В МАЛЫХ АНСАМБЛЯХ НЕЙРОНОВ С ИОННОЙ СВЯЗЬЮ

Д.Э. Постнов, Р.А. Жирин, Ю.А. Сердобинцева

Методами математического моделирования и вычислительного эксперимента изучаются свойства особого типа межнейронного взаимодействия, обусловленного изменением межклеточной концентрации калия в результате активности самих нейронов (ионная связь). Предложена простейшая модификация модели типа Ходжкина–Хаксли, позволяющая учесть указанный механизм. Исследовано поведение малых ансамблей из 2, 4 и 8 возбудимых нейронов в условиях их активации шумовым сигналом. Выявлены основные эффекты, обусловленные наличием ионной связи, включающие появление новых временных масштабов, а также пространственно упорядоченную генерацию импульсов-спайков.

Введение

Общеизвестно, что передача информации между нейронами осуществляется посредством синапсов, в числе которых выделяют электрические и химические [1,2]. В математических моделях электрический синапс обычно учитывают как омическое сопротивление между клетками, посредством разностного члена в уравнении для трансмембранного потенциала. Такая форма записи совпадает с хорошо изученной в различных областях физики диффузионной связью, действие которой всегда направлено на выравнивание перепада концентраций, разности потенциалов и т.д.

Химический синапс описывают, как минимум, одним дополнительным дифференциальным уравнением, обычно с пороговой активацией. Такая связь нейронов носит: во-первых, однонаправленный характер; во-вторых, она нелинейна; в-третьих, она характеризуется наличием задержки и интегрирующими свойствами по отношению к быстроменяющимся сигналам; в-четвертых, синаптическая связь мультипликативна, ее действие непосредственно зависит от текущего состояния постсинаптического нейрона.

Однако возможные пути взаимовлияния нейронов этим далеко не исчерпываются. В условиях близкого расположения большого количества нейронов (например, в тканях мозга) важную роль играет состав межклеточной жидкости, окружающей нейроны. На состояние каждого нейрона существенно влияет как наличие в ней в заметных концентрациях различных химических агентов (нейромедиаторы), так и

изменение концентраций основных ионов. Если первый из двух упомянутых факторов часто можно рассматривать как медленно меняющийся параметр окружающей среды, то второй – изменение ионного состава межклеточной жидкости – напрямую обусловлен активностью самих нейронов.

Следует заметить, что не каждый тип ионов может быть агентом такого рода взаимодействия. Внеклеточные концентрации натрия, хлора и кальция много выше, чем их содержание в цитоплазме клетки [1, 3]. Соответственно, и изменение их концентраций много заметней внутри клетки, нежели снаружи. Обратная ситуация имеет место для ионов калия, внутриклеточная концентрация которого в 14-20 раз больше, нежели внеклеточная. За последние десятилетия биологами и нейрофизиологами накоплено немало фактов, свидетельствующих о том, что как патологические, так и физиологически нормальные состояния могут сопровождаться значительным ростом межклеточной концентрации калия. Так, установлено, что продолжительная активность нейрона приводит к росту внеклеточной концентрации калия (ВКК) до величин порядка 10 ммоль/л [4]. Показано, что гигантская глиальная клетка ганглия медицинской пиявки активируется ростом ВКК в 2.5 раза от нормы [5]. Большой рост ВКК наблюдается при ишемии тканей, в отдельных случаях – до величин порядка 80 ммоль/л [6–8]. Наконец, резкий рост ВКК рассматривается в настоящее время как один из важных факторов развития эпилептического припадка [9, 10].

Таким образом, представляется актуальным вопрос о том, каковы характеристики такого рода взаимовлияния электрически активных клеток? Приводит ли оно к синхронизации генерации импульсов нейронами или блокирует нормальную их работу? Может ли существенно влиять на обработку шумоподобных информационных сигналов? Ранее, в статье [11], нами рассматривался первый из перечисленных вопросов. Однако наиболее типичным для нейронов является возбудимый режим, при котором генерация импульса-спайка инициируется неким внешним воздействием. На практике это – тот самый информационный сигнал, который обрабатывают и передают нейроны. Он имеет сложную структуру и, как неоднократно отмечалось, подобен по своим свойствам шумовому сигналу. Зачастую даже близко расположенные нейроны имеют существенно различную топологию синаптических контактов. Это означает, что различные нейроны возбуждаются различными (некоррелированными) шумоподобными сигналами.

В данной работе мы попытаемся охарактеризовать действие связи посредством модуляции межклеточной концентрации ионов калия (ниже для краткости – ионная связь) в описанных выше условиях, когда каждый из нейронов находится в возбудимом режиме под воздействием флуктуаций приложенного тока.

Следует заметить, что различные аспекты индуцированной шумом генерации спайков нейронами интенсивно изучались в последнее десятилетие в контексте эффекта когерентного резонанса [12, 13]. Как было показано, в пределах некоторого оптимального диапазона значений интенсивности шумового воздействия, возбудимый нейрон способен генерировать достаточно регулярную последовательность спайков, как если бы он находился в пейсмейкерном (автоколебательном) режиме. Исследовалась и динамика малых ансамблей возбудимых систем под воздействием флуктуаций [14–16]. Как было показано, индуцированные шумом колебания в режиме когерентного резонанса во многом подобны детерминированным автоколебаниям. Они демонстрируют эффект синхронизации, можно говорить о многомодовых режимах и фазовых соотношениях.

Таким образом, наличие выраженного ритма генерации спайков на частоте, определяемой как параметрами модели нейрона, так и интенсивностью шума, равно как и наличие синхронных индуцированных шумом колебаний являются ожидаемыми и в контексте нашей задачи.

1. Уравнения математической модели

Для решения поставленных задач необходимо, чтобы уравнения математической модели позволяли включить в них внеклеточную концентрацию калия как переменную величину. Этого не позволяют сделать простейшие модели качественного уровня, такие как модели Хиндмарш–Розе или ФитцХью–Нагумо. В то же время, детальные количественные модели, используемые для моделирования конкретных нейрофизиологических объектов, содержат множество уравнений и параметров, значительная часть которых несущественна для целей нашего исследования. Разумным компромиссом представляется адаптация одного из вариантов широкоизвестной модели Ходжкина–Хаксли [17], описывающей динамику ионных токов натрия и калия.

В качестве прототипа нами была использована четырехмерная система уравнений для P-нейрона пиявки, описание которой имеется в литературе [18, 19]. Ее уравнения близки к модели Ходжкина–Хаксли, небольшие отличия заключаются в виде нелинейных функций α, β и значительно более низкой калиевой проводимости в сравнении с натриевой проводимостью. Таким образом, можно было ожидать, что добавление в модель зависимости от ВКК не изменит кардинально ее динамику.

Уравнение для трансмембранного потенциала V_i нейрона имеет вид

$$C_{\mathrm{m}}\frac{dV_i}{dt} = -I_{i,\mathrm{K}} - I_{i,\mathrm{Na}} - I_{i,\mathrm{l}} + I + I_{i,\mathrm{g}}, \tag{1}$$

$$I_{i,\mathrm{K}} = g_{\mathrm{K}}(n_i)^2(V_i - V_{i,\mathrm{K}}), \tag{2}$$

$$I_{i,\mathrm{Na}} = g_{\mathrm{Na}}(m_i)^4 h_i(V_i - V_{\mathrm{Na}}), \tag{3}$$

$$I_{i,\mathrm{l}} = g_{\mathrm{l}}(V_i - V_{\mathrm{l}}), \tag{4}$$

где индекс i обозначает номер клетки; C_{m} – удельная емкость мембраны нейрона; $I_{i,\mathrm{K}}$, $I_{i,\mathrm{Na}}$, $I_{i,\mathrm{l}}$ – калиевый и натриевый токи и ток утечки (leakage), соответственно; I – внешний приложенный ток; g_{K}, g_{Na}, g_{l} – проводимости по ионам калия, натрия, по остальным ионам, вносящим вклад в изменение трансмембранного потенциала, соответственно.

Как уже обсуждалось во Введении, важной особенностью модели является учет изменения внеклеточной концентрации калия как новой переменной модели. А именно, равновесный потенциал по калию (потенциал Нернста) определяется соотношением (см., например, [2, 3])

$$V_{i,\mathrm{K}} = \frac{RT}{F}\ln\frac{[K]}{[K]_i}, \tag{5}$$

где $[K]$ – внеклеточная концентрация калия, $[K_i]$ – внутриклеточная концентрация калия i-го нейрона, R – универсальная газовая постоянная, T – температура, F – число Фарадея.

Безразмерные переменные активации модели удовлетворяют стандартной кинетике Ходжкина–Хаксли

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha_\xi(V_i)(1-\xi) - \beta_\xi(V_i)\xi, \tag{6}$$

где $\xi = n_i, m_i, h_i$. Конкретный вид нелинейных функций $\alpha_\xi(V_i)$ и $\beta_\xi(V_i)$ приведен в таблице.

Таблица

ξ	α_ξ	β_ξ
n_i	$0.024(V_i-17)/(1-e^{-(V_i-17)/18})$	$0.2e^{-(V_i+48)/35}$
m_i	$0.03(V_i+28)/(1-e^{-(V_i+28)/15})$	$2.7e^{-(V_i+53)/18}$
h_i	$0.045e^{-(V_i+58)/18}$	$0.72/(1+e^{-(V_i+23)/14})$

В простейшем случае, когда межклеточный объем принимается небольшим и пространственно однородным, баланс внеклеточной концентрации калия описывается одним уравнением

$$W\frac{d[K]}{dt} = \frac{1}{F}\sum_i^N I_{i,\mathrm{K}} + \gamma([K]_0 - [K]), \tag{7}$$

где W – удельная величина внеклеточного объёма на единицу площади мембраны клетки; $I_{i,\mathrm{K}}$ – калиевые токи каждого из N нейронов; $\gamma([K]_0 - [K])$ – выражение, описывающее диффузионный процесс выравнивания концентрации калия с окружающей средой. Структура моделируемого ансамбля для случая двух и четырех нейронов схематически показана на рис. 1. Моделирование более сложного случая, когда распределение ионов калия в межклеточном пространстве неоднородно, обсуждается в разделе 4.

Воздействие шумоподобного информационного сигнала на нейрон моделировалось с помощью шумовой добавки в токе I, характеризуемой интенсивностью D,

$$I_i = I_{i,0} + \sqrt{D}\xi_i(t), \tag{8}$$

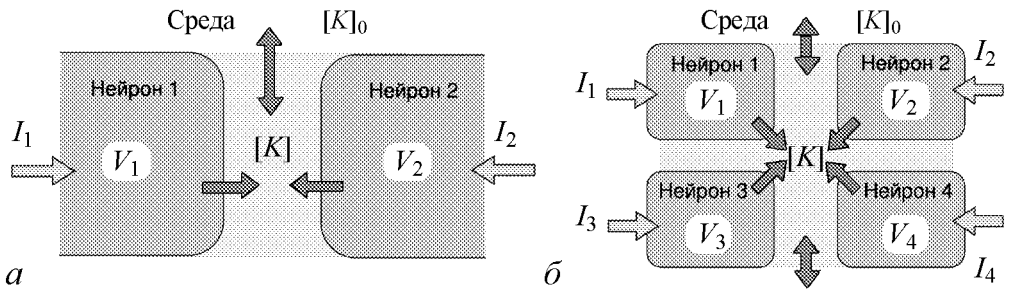


Рис. 1. Схематическое представление ионной связи по калию между близко расположенными клетками: *а* – базовая конфигурация для двух клеток; *б* – малый ансамбль с глобальной связью, состоящий из четырех клеток

где $I_{i,0}$ есть среднее значение приложенного тока; $\xi_i(t)$ – Гауссов белый шум, свой источник для каждого нейрона.

В приведенных выше уравнениях математической модели V_i, $V_{i,\mathrm{K}}$, $V_{\mathrm{Na}} = 60.5$, $V_{\mathrm{l}} = -49.0$ измеряются в мВ, $n_{1,2}$, $m_{1,2}$, $h_{1,2}$ – безразмерные переменные. $C_{\mathrm{m}} = 1.0$ мкФ/см^2, g_{K}, g_{Na} и g_{l} принимались равными $6.0, 350.0$ и 0.5 мСм/см^2, соответственно; $R = 8.315$ Дж/(моль К), $T = 293.15$ К, $F = 96.49$ кКл/моль, $[K_{1,2}] = 60.0$ ммоль/л, $[K]_0 = 4.0$ ммоль/л, $[K]$ – переменная модели, измеряется в ммоль/л; W имеет размерность нл/см ^{2}, γ – нл/(мс·см^2), интенсивность флуктуаций тока D измеряется в мкА^2/см^4.

Ниже по тексту опущена размерность параметров и переменных модели, указаны только их значения.

В порядке тестирования модели изучалась динамика модели одиночной клетки [11] при изменении приложенного тока I и равновесной концентрации калия $[K]_0$ как управляющих параметров (рис. 2). Технически, это достигается выбором больших значений $\gamma \to \infty$.

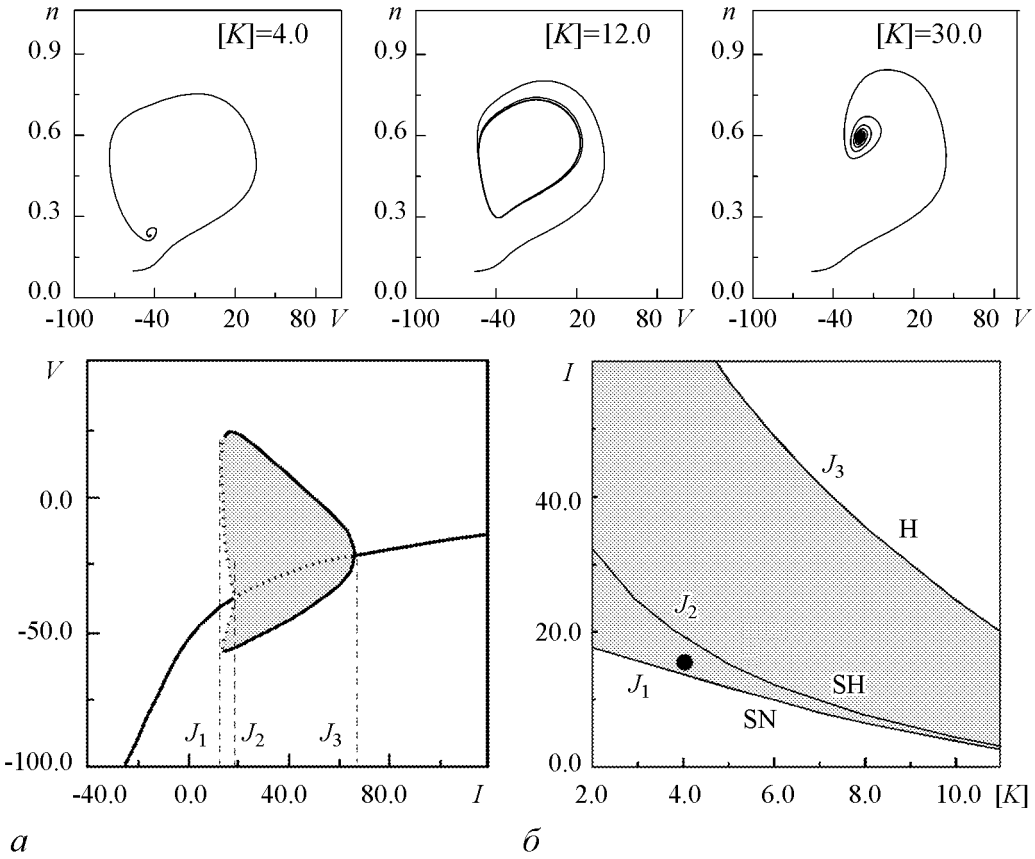


Рис. 2. Фазовые проекции (вверху) и бифуркационные диаграммы для индивидуальной модели нейрона: *а* – при изменении параметра внешнего тока система демонстрирует возбудимый и автоколебательный (закрашенная область) режимы: *б* – аналогичная последовательность бифуркаций наблюдается при изменении концентрации калия. Черная точка указывает выбор управляющих параметров, используемых в качестве типичных

При $[K]_0 = 4$ ммоль и $D = 0$ увеличение I_0 позволяет наблюдать рождение пары (устойчивого и седлового) предельных циклов в точке седлоузловой бифуркации (SN) при $I_0 = J_1 \approx 14.2$, в то время как состояние равновесия претерпевает субкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа (SH) при несколько большем $I_0 = J_2 \approx 18.6$ (рис. 2, *а*). Дальнейший рост I_0 сопровождается постепенным уменьшением амплитуды спайков (сужение закрашенной области на диаграмме), а при $I_0 = J_3 \approx 65.2$ автоколебательный режим исчезает посредством инверсной суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа (H). В области $I_0 \leq J_1$, модель нейрона находится в возбудимом режиме.

При увеличении $[K]_0$ как управляющего параметра, бифуркационные значения J_1, J_2, J_3 смещаются в сторону меньших величин I_0 при сохранении последовательности бифуркаций (рис. 2, *б*). Фазовые проекции в верхней части рис. 2 дают представление о том, каким образом модель нейрона ведет себя при нормальной (4 ммоль/л), повышенной (12 ммоль/л) и высокой (30 ммоль/л) внеклеточной концентрации калия при $I = 16.0$. А именно, в первом случае траектория, сделав одну петлю, достигает состояния равновесия при $V \approx -40$ мВ (возбудимый режим). Во втором случае – траектория выходит на предельный цикл (непрерывная генерация спайков нейроном). В третьем случае – вновь достигается состояние равновесия, однако, характерная для возбудимого режима нейрона петля траектории отсутствует. В этом состоянии калиевый ток практически блокирован, нейрон сильно деполяризован и не способен генерировать потенциал действия.

Таким образом, динамика изучаемой модели качественно соответствует хорошо известной модели Ходжкина–Хаксли, а увеличение внеклеточной концентрации калия оказывает деполяризующее воздействие, уменьшая порог возбуждения нейрона, переводя его в автоколебательный режим, либо даже подавляя колебания в зависимости от выбора значения приложенного тока I_0. В дальнейшем будем использовать значение $I_0 = 12.2$ как стандартное. При этом модель нейрона находится в возбудимом режиме, а рост $[K]$ уменьшает величину порога возбуждения.

2. Индуцированные шумом спайк-берст колебания

На рис. 3 проиллюстрированы индуцированные шумом колебания в ансамбле из двух нейронов как при исчезающе слабой (*а*), так и при конечной силе ионной связи (*б*). Как можно видеть, в отсутствие взаимодействия выбранная интенсивность шума приводит лишь к спорадической генерации отдельных импульсов-спайков и их небольших групп, появляющихся независимо в первом и втором нейронах. Наличие ионной связи приводит к существенному увеличению частоты генерации спайков при той же интенсивности шума. Более того, в обоих нейронах они теперь организованы в четко различимые группы (берсты). Очевидна корреляция между индуцированными шумом процессами в первом и втором нейроне: периоды активной генерации и молчания двух нейронов практически совпадают во времени. Во временной реализации для межклеточной концентрации калия (нижний график на рис. 3, *б*) различима специфическая структура: пики концентрации калия выглядят двойными (см. вставку). Такая структура наблюдается для подавляющего большинства всплесков концентрации калия и связана с особенностями взаимодействия нейронов.

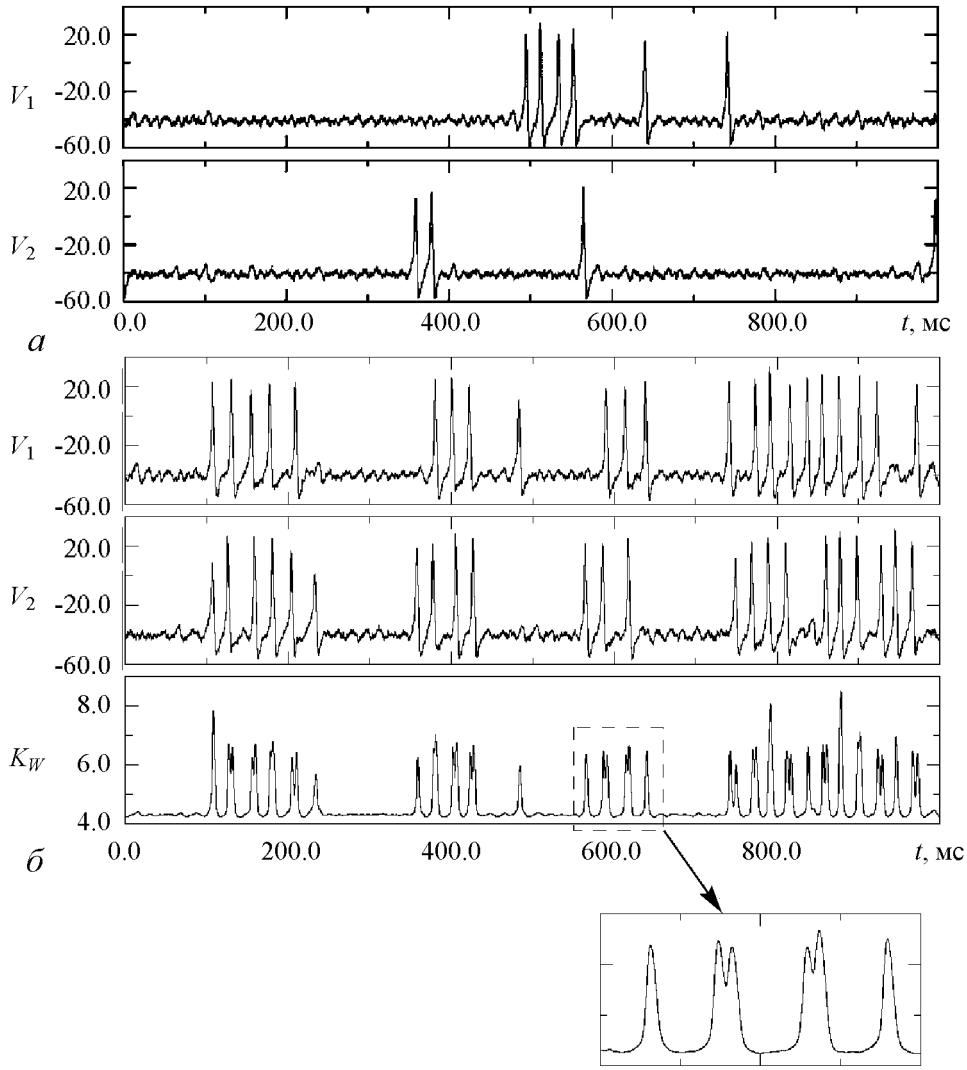


Рис. 3. *а* – временные реализации трансмембранных потенциалов V_1 и V_2 при отсутствии связи; *б* – те же временные реалицации, но при наличии связи (два верхних графика) и изменение внеклеточной концентрации калия (нижний график и укрупненно – вставка) при $W = 0.5$. Для обоих случаев $D = 1.8$

Более детальная информация о характерных временных масштабах изучаемой системы может быть получена путем расчета функции плотности распределения межспайковых интервалов (ISI). Результаты расчета для различных интенсивностей шума приведены на рис. 4, *а*. Как можно видеть, имеется два выраженных пика на значениях ISI около 20 мс и около 30 мс. Значительно менее выраженный пик имеется также на больших значениях ISI.

Временной интервал в 20 мс соответствует типичному времени между спайками при спонтанной генерации нейрона. Как уже упоминалось во Введении, при возбуждении шумом подходящей интенсивности, частота индуцированных шумом колебаний приближается к частоте спонтанной генерации и характеризуется высокой степенью регулярности (эффект когерентного резонанса). Интерпретация остальных

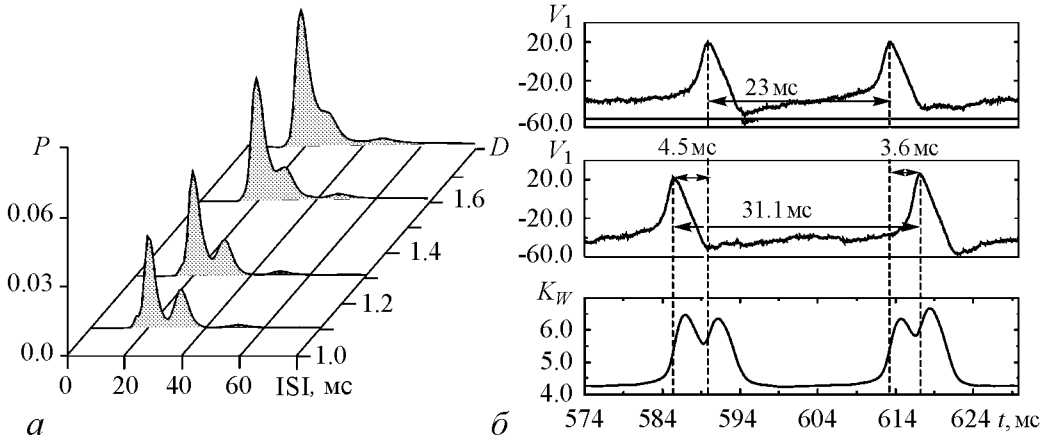


Рис. 4. *а* – распределение плотности вероятности межспайковых интервалов для каждого из нейронов при различной интенсивности шума D и постоянном межклеточном объеме $W = 0.5$. Наблюдаются два выраженных пика на ISI$\approx$ 20 и ISI$\approx$ 30. *б* – к объяснению структуры распределения на рис. *а*: отрезки временных реализаций мембранных потенциалов нейронов и величины внеклеточной концентрации калия

временных масштабов не столь очевидна. Для анализа механизма появления пика на 30 мс было рассчитано распределение интервалов времени между моментами генерации спайков в первом и втором нейроне, как некий аналог сдвига фаз. Как выяснилось, в широком диапазоне интенсивностей шума временная задержка между импульсами двух нейронов имеет величину около 5 мс. Очевидно, это связано с существенной инерционностью механизма взаимодействия нейронов: выброс калия из нейрона несколько отстает от пика трансмембранного потенциала. В свою очередь, межклеточная концентрация калия также возрастает не мгновенно. Индуцированный первым нейроном рост межклеточной концентрации калия деполяризует второй нейрон и способствует генерации спайка под воздействием шума через некоторое характерное время, зависящее от интенсивности шума. Вся эта цепочка событий и обеспечивает задержку во времени величиной порядка 5 мс.

Описанный механизм играет определяющую роль в формировании временного масштаба 30 мс, что проиллюстрировано на рис. 4, *б*. При взаимной обусловленности появления спайков в первом и втором нейроне, возможны два основных варианта их последовательности. Предположим, индуцированный шумом спайк первого нейрона «провоцирует» генерацию спайка вторым нейроном. В дальнейшем, каждый из нейронов с определенной вероятностью сгенерирует спайк примерно через 20 мс после «своего» спайка. Если это будет вновь первый нейрон – то ситуация повторится и оба нейрона внесут вклад в формирование пика распределения ISI на 20 мс. В случае (как это проиллюстрировано на рис. 4, *б*), если второй нейрон сгенерирует спайк, то межспайковый интервал для первого нейрона составит как раз величину порядка 30 мс, что и соответствует второму по величине пику распределения ISI на рис. 4, *а*.

Наконец, невысокий подъем в правой части распределения на рис. 4, *а* (времена около 45 мс) связан с ритмичностью пачечной генерации нейронов, которая хорошо прослеживается на рис. 3. Механизм ее возникновения следующий. На больших

временных масштабах описанная выше причинно-следственная цепочка генерации импульсов нейронами имеет продолжение. А именно, активность любого из нейронов повышает уровень межклеточной концентрации калия и тем самым деполяризует оба нейрона, поддерживая их дальнейшую активность. Таким образом реализуется положительная обратная связь: активность нейронов ансамбля способствует поддержанию генерации. В случае если (в силу случайного характера воздействия) генерация спайка не произошла в течение времени, достаточного для релаксации концентрации калия к ее равновесному значению, порог возбуждения обоих нейронов увеличивается, тем самым увеличивая среднее время до следующего индуцированного шумом превышения порога и генерации спайка. Таким образом, характерное время, связанное с индуцированной шумом пачечной активностью, оказывается зависимым как от скорости релаксации межклеточной концентрации калия к равновесному состоянию, так и от интенсивности шума.

3. Индуцированный шумом коллективный разряд нейронов в ансамбле с глобальной связью

Увеличение числа нейронов в ансамбле не меняет механизма их взаимодействия, но приводит к значительному усложнению соотношения моментов генерации спайков. Для ансамбля из четырех связанных нейронов наблюдаются самые разнообразные шаблоны генерации, то есть различные варианты взаимообусловленных событий генерации спайков. Для анализа такого кооперативного поведения нейронов вычислялись межспайковые интервалы по сигналу так называемого коллективного отклика, содержащего времена срабатывания всех нейронов, входящих в ансамбль. Построенное таким образом распределение приведено на рис. 5, *а*. Обращает на себя внимание максимум вблизи нуля, что соответствует практически синхронному появлению импульсов. Такое поведение не наблюдалось для ансамбля из двух нейронов и требует дополнительного исследования. С этой целью был проведен численный эксперимент, который заключался в следующем. Из всех нейронов ансамбля выбирался один в качестве «ведущего». Действующий на систему шум выключался, в результате чего все нейроны релаксировали к невозбужденному состоянию. Далее на ведущий нейрон подавался возбуждающий импульс и одновременно включался шум, действующий на все нейроны ансамбля. В результате действия возбуждающего импульса, первый нейрон генерировал спайк. В процессе численного эксперимента вычислялась статистика временного интервала до спайков в остальных нейронах ансамбля. Результат приведен на рис. 5, *б*. Как можно видеть, имеется четко выраженный временной масштаб: подавляющее большинство спайков генерируется через время от 4 до 6 мс после спайка «ведущего» нейрона, генерация импульса которым вызывает небольшое повышение межклеточной концентрации калия, а это деполяризует остальные нейроны ансамбля. Как и в случае ансамбля двух нейронов, рассмотренном выше, характерное время, через которое деполяризованный нейрон сгенерирует спайк по действием шума, составляет примерно 5.5 мс, однако, теперь это условие выполняется для всех нейронов ансамбля, кроме «ведущего». В результате они генерируют спайки почти одновременно.

Теперь можно проанализировать результаты, представленные на рис. 5 *а*. Очевидно, максимум в нуле соответствует почти одновременному «разряду» нейронов ансамбля, тогда как более слабо выраженный подъем функции распределения, при-

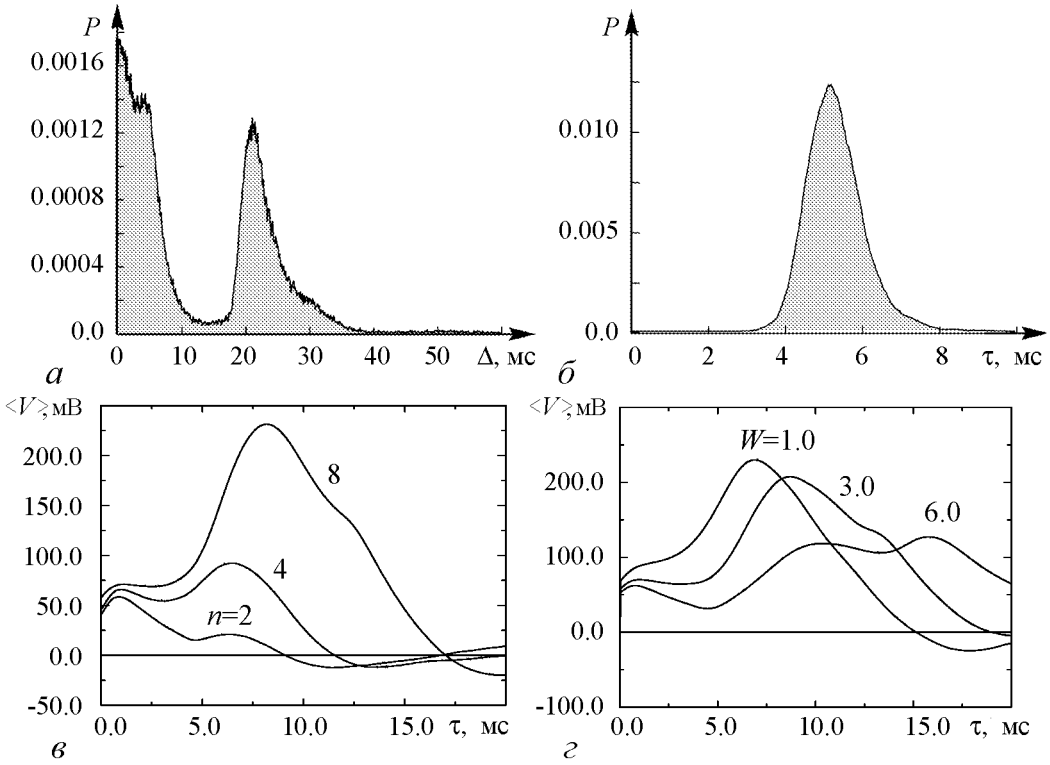


Рис. 5. *а* – распределение межспайковых интервалов для ансамбля их четырех нейронов выявляет три временных масштаба: $\Delta \approx 0$ (почти синфазное поведение нейронов), $\Delta \approx 5.5$ и $\Delta \approx 20$. *б* – численный эксперимент с нейроном-лидером; пик распределения на 5.5 мс выявляет почти синхронную генерацию импульсов остальными нейронами ансамбля, $D = 1.2$, $W = 1.0$, $\gamma = 0.8$. *в, г* – усредненные временные реализации трансмембранных потенциалов в ответ на возбуждение одного из нейронов. *в* – увеличение размера ансамбля усиливает коллективный отклик. Три кривые соответствуют двум, четырем и восьми нейронам в ансамбле, соответственно. *г* – при вариации величины удельного внеклеточного объема (параметр W) происходит значительное изменение усредненного отклика ансамбля из восьми нейронов при $D = 0.8$

мерно, на 5 мс соответствует разряду того нейрона, который играл роль ведущего. Как и для ансамбля из двух клеток, максимум на временном масштабе в 20 мс соответствует наиболее вероятному интервалу времени между спайками одного нейрона.

Таким образом, стохастическая динамика малого ансамбля нейронов с глобальной ионной связью характеризуется неравномерным процессом генерации спайков, которые с большей вероятностью появляются сразу группами. Интересно проследить, к чему приводят описанные эффекты с точки зрения амплитудного сигнала коллективного отклика, представляющего собой сумму потенциалов всех нейронов. С точки зрения нейрофизиологического эксперимента, такой сигнал соответствует записи внеклеточного потенциала, когда спайки, продуцированные всеми нейронами ансамбля, вносят вклад в колебания усредненного электрического потенциала, измеряемого аппаратно. На рис. 5, *в* приведен усредненный по большому числу событий вид зависимости сигнала коллективного отклика от времени. Для случая двух нейронов первый максимум соответствует генерации спайка ведущим нейроном. Он жестко привязан к сигналу возбуждения и потому четко выражен в усредненном сигнале, в то время как генерация спайка вторым нейроном носит вероятностный характер, а потому максимум «размазан» и имеет меньшую амплитуду.

Для случая четырех и восьми нейронов ситуация существенно иная. Как можно видеть, амплитуда усредненного отклика последующих нейронов значительно превышает амплитуду пика, соответствующего генерации спайка ведущим нейроном. Таким образом, в амплитудном сигнале коллективного отклика ансамбля формируются всплески большой интенсивности, что делает, по сути, невозможным разделение спайков от различных нейронов.

На рис. 5, *г* показаны изменения в сигнале коллективного отклика, связанные с вариацией параметра, определяющего межклеточный объем. Как можно видеть, с увеличением этого параметра, максимум реакции всех нейронов сначала растягивается во времени, а затем, при еще больших величинах межклеточного объема формируется вторичный пик, отстающий по времени от пика первой реакции. Интерпретация наблюдаемого эффекта следующая. Чем больше межклеточный объем, тем менее выражена индуцированная «ведущим» нейроном деполяризация остальной части ансамбля. В результате, не все нейроны могут среагировать на нее генерацией спайка. Предположим, в ансамбле из восьми нейронов таких нейронов окажется три. Далее, их активация вызовет более сильную деполяризацию остальных четырех нейронов, и те с высокой вероятностью сгенерируют потенциал действия спустя, примерно, 5 мс после упомянутых трех нейронов. Таким образом, наблюдается своеобразный каскад индуцированных шумом спайков – коллективный разряд нейронов ансамбля оказывается растянутым во времени.

4. Учет неоднородности распределения ионов калия в межклеточном пространстве. Генерация упорядоченных последовательностей спайков

Очевидно, что по мере увеличения числа нейронов в ансамбле, допущение однородности ионного состава межклеточного пространства становится неадекватным. К тому же самому приводит и попытка учета взаимодействия на относительно протяженном участке мембраны: расстояние между мембранами нейрона, а значит, и удельный объем W различны в различных точках. По этой причине естественным следующим шагом усложнения моделей является учет геометрии (пространственной структуры) ансамблей нейронов с ионной связью. При этом и распределение ВКК становится пространственно неоднородным. Для решения подобных задач нами была разработана специализированнная программа [20]. Принцип аппроксимации нейронного ансамбля с нерегулярной геометрией проиллюстрирован на рис. 6. Как можно видеть, пространственная структура представлена в виде набора дискретных элементов различных типов. Элементы N_i представляют фрагмент мембраны нейрона и описываются уравнениями (1)–(4). Для придания группе таких элементов свойств цельного отрезка мембраны между уравнениями (1) соседних элементов вводится сильная диффузионная связь, что обеспечивает быструю передачу потенциала действия от одного элемента N_i к другому. Элементы K_i представляют внеклеточную среду с переменной концентрацией калия и описываются уравнением вида (7) каждый, причем, суммарный ток калия определяется вкладом соседних элементов N_i, а диффузионный член уравнения описывает взаимодействие с каждым из соседних элементов K_i. При большом числе аппроксимирующих элементов такая модель способна воспроизвести достаточно сложную геометрию исследуемой системы.

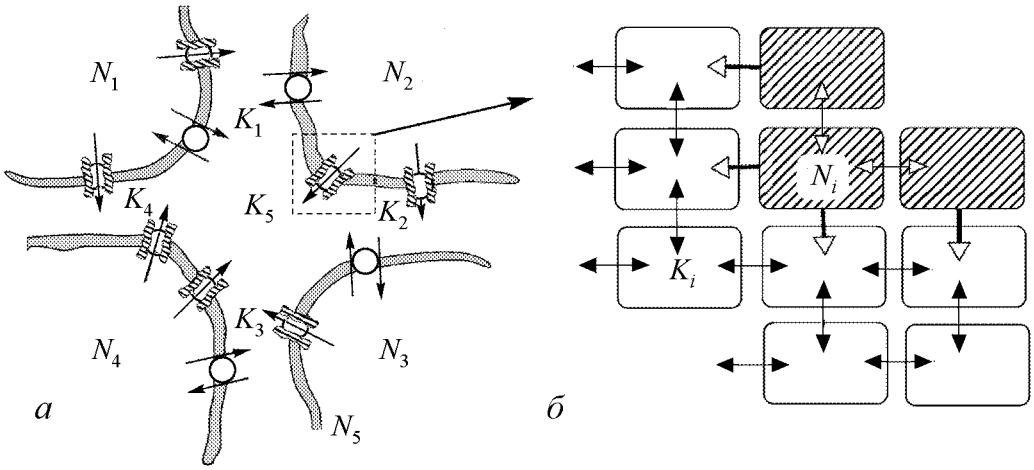


Рис. 6. К построению математической модели в случае пространственно- неоднородного распределения внеклеточной концентрации калия: *а* – пример взаиморасположения мембран четырех нейронов; *б* – схематическое представление структуры математической модели

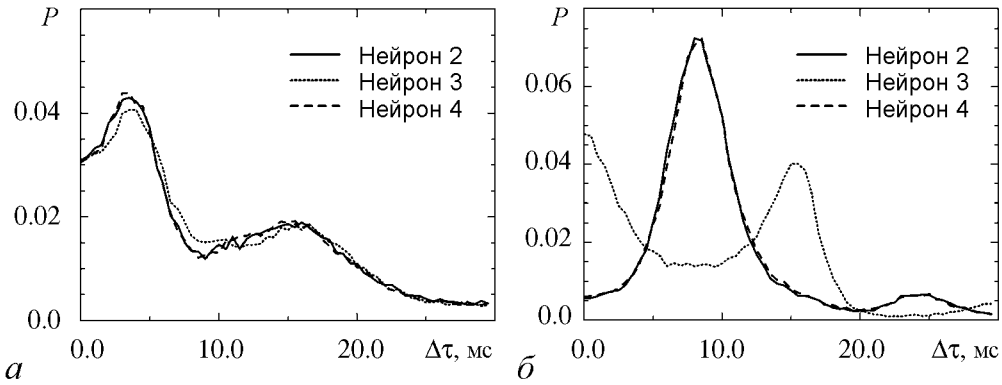


Рис. 7. Распределение плотности вероятности временного сдвига между импульсом опорного нейрона и остальными тремя нейронами в случаях, когда: *а* – ионная связь слаба ($\gamma = 30.0$, $W = 0.4$, $D = 45$); *б* – ионная связь заметно влияет на динамику ансамбля ($\gamma = 0.8$, $W = 0.5$, $D = 12$)

Численное исследование поведения различных моделей ансамблей с ионной связью показало: с одной стороны, описанные в предыдущих разделах эффекты сохраняют свое значение; с другой стороны, появляется ряд новых особенностей, таких как локализация областей с высокой ВКК и их неупорядоченное перемещение в пределах большого ансамбля близкорасположенных нейронов. В рамках данной работы рассмотрим эффект пространственно упорядоченной генерации импульсов ансамблем из четырех нейронов вида, приведенного на рис. 6, при его аппроксимации небольшим числом элементов N_i (четыре на нейрон) и K_i (два на межклеточное расстояние).

На рис. 7 приведены графики плотности распределения интервалов времени $\Delta\tau$ между моментами генерации импульса первым нейроном и остальными тремя (см. подобные результаты на рис. 5, *б*). Рис. 7, *а* соответствует случаю слабой ионной связи, что достигалось выбором больших значений коэффициента диффузии $\gamma = 30.0$. Из графиков можно заключить, что поведение ансамбля в целом подоб-

но уже обсуждавшемуся выше: имеет место коллективный разряд нейронов ансамбля, при котором кривые для различных нейронов совпадают (нет пространственной неоднородности) и наблюдается глобальный максимум на времени, примерно, 3.5 мс, которое обусловлено задержкой в выбросе калия нейроном и временем роста концентрации калия в межклеточном пространстве. Однако при более сильной ионной связи ($\gamma = 0.8$) ситуация кардинально меняется. Рис. 7, *б* показывает, что распределение времен генерации импульсов третьим нейроном (по отношению к первому) существенно иное, нежели для первого и четвертого нейронов. В то время как кривые для второго нейрона и четвертого нейрона практически совпадают и имеют максимум, примерно, на 8 мс, кривая для третьего нейрона имеет два, примерно, равнозначных максимума: один – в районе нуля, а второй – примерно, на 16 мс. Такое различие кривых говорит о том, что статистика моментов генерации спайков нейронами зависит от их расположения относительно первого нейрона: третий нейрон наиболее удален, в то время как второй и четвертый расположены на одинаковом расстоянии от первого. Это может свидетельствовать о наличии неких «предпочтительных» последовательностей при генерации спайков ансамблем нейронов. Их можно попытаться выявить при визуальном анализе режимов генерации на относительно коротких временах.

Рис. 8 содержит три диаграммы, на которых градациями серого дан уровень концентрации калия в областях $K_1 - K_5$ (см. рис. 6), а белыми вертикальными штри-

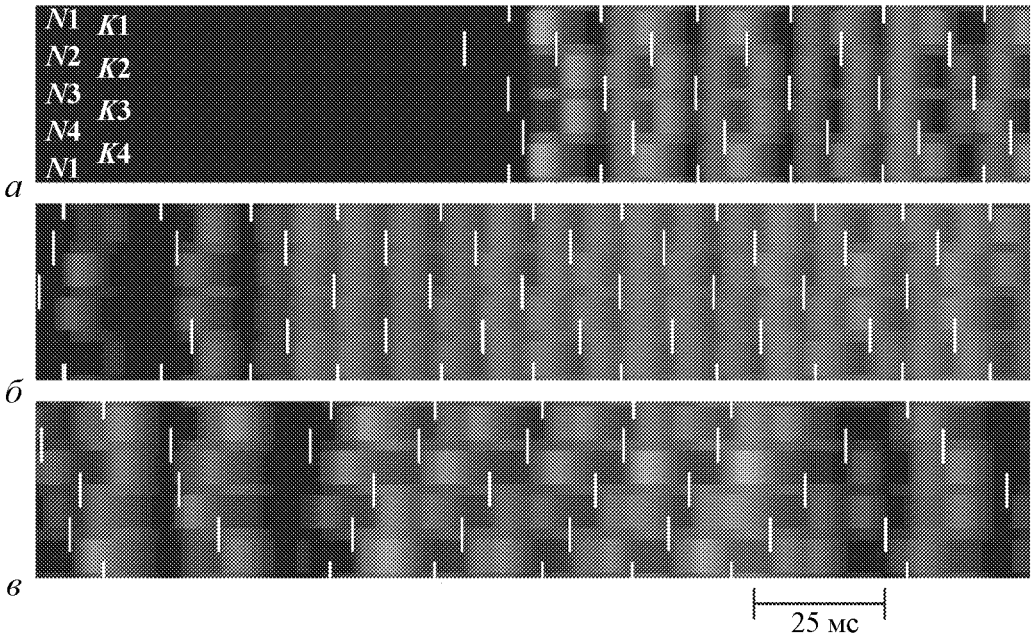


Рис. 8. Схематическое представление шаблонов индуцированной шумом генерации импульсов ансамблем из четырех нейронов с ионной связью. Белые поперечные штрихи указывают моменты генерации спайков нейронами $N_1 - N_4$. Полосами $K_1 - K_4$ в градации серого представлено изменение концентрации калия в соседней с нейроном области. Интенсивность серой заливки в узкой полосе по центру штрихов каждого нейрона отражает изменение концентрации калия в центральной области K_5 (см. рис. 6). Черный цвет заливки соответствует концентрации калия 8 ммоль/л, белый цвет – 20 ммоль/л. Значения параметров: *а* – $\gamma = 1.2$, $W = 0.4$, $D = 9.9$; *б* – $\gamma = 0.8$, $W = 0.5$, $D = 12$; *в* – $\gamma = 1.2$, $W = 0.4$, $D = 20$

хами отображены моменты генерации спайков нейронами. Диаграмма (*а*) иллюстрирует характер возникновения генерации в такой системе: а именно, черная область «молчания» всех четырех нейронов резко сменяется областью с интенсивной генерацией, что соответствует обсуждавшемуся в разделе 2 механизму с самоподдерживающейся деполяризацией. Стоит одному из нейронов сгенерировать спайк под действием шумового сигнала, как повышенная концентрация калия в межклеточном пространстве облегчает генерацию остальных нейронов.

Анализ диаграмм на рис. 8, *а–в* позволяет объяснить результат расчета распределения межспайковых интервалов. На диаграмме (*б*) хорошо видно, как случайно появляющиеся спайки нейронов (слева) преобразуются в упорядоченную структуру (остальная часть диаграммы), в которой нейроны срабатывают парами: N_1 и N_3, затем – N_2 и N_4, затем снова N_1 и N_3. В исходной геометрии ансамбля такой шаблон генерации выглядит как последовательное срабатывание пар нейронов, расположенных по диагоналям. Диаграмма (*в*) выявляет еще более интересную закономерность: «лесенка» поперечных штрихов означает, что нейроны срабатывают по кругу $N_1 \to N_4 \to N_3 \to N_2 \to N_1$.

Таким образом, два максимума для нейрона N_3 на графике рис. 7, *б* соответствуют двум различным пространственно упорядоченным режимам генерации импульсов ансамблем. Максимум вблизи нуля соответствует почти синхронному срабатыванию нейронов N_1 и N_3, которое имеет место при диагональном шаблоне генерации, в то время как максимум на 16 мс отвечает противофазному срабатыванию N_1 и N_3 в случае вращательного шаблона генерации.

На качественном уровне возникновение индуцированных шумом пространственно упорядоченных шаблонов генерации можно интерпретировать следующим образом. Предположим, в изначально молчащем ансамбле срабатывает нейрон номер 4 (рис. 9, *а*). Выброс им калия обеспечивает более сильную деполяризацию для нейронов 1 и 3, тогда как нейрон 2, более удаленный, испытывает более слабое воздействие. Предположим, что следующим срабатывает нейрон 3. Теперь более

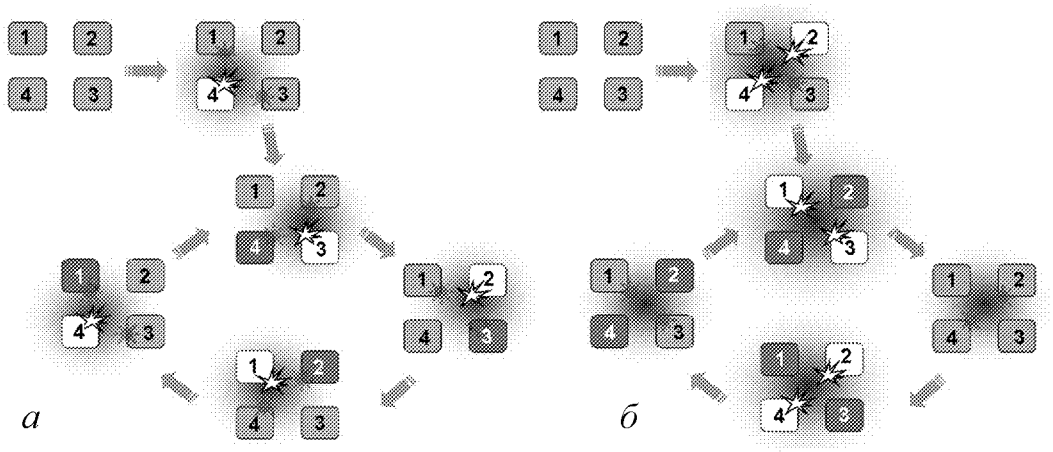


Рис. 9. Схематическое представление последовательности событий при вращательном (*а*) и диагональном (*б*) шаблонах генерации спайков ансамблем из четырех нейронов

сильная деполяризация распространяется на нейроны 4 и 2. Но нейрон 4 находится в состоянии рефрактерности и не способен генерировать спайк. Таким образом, с наиболее высокой вероятностью, следующий спайк будет сгенерирован нейроном 2. Далее ситуация повторяется со сдвигом против часовой стрелки. Все вместе приводит к формированию вращательного шаблона генерации импульсов нейронами.

Диагональный шаблон генерации (рис. 9, *б*) объясняется еще проще и, предположительно, более стабилен. При близком во времени срабатывании двух диагонально расположенных нейронов, они обеспечивают значительную деполяризацию двум оставшимся нейронам, а сами переходят в состояние рефрактерности. Если к моменту их возвращения в состояние покоя индуцированная спайками двух остальных нейронов деполяризация еще не затухла, то последующая парная генерация ими импульсов имеет высокую вероятность, а это означает поддержание диагонального шаблона генерации.

Заключение

В данной работе исследованы основные свойства взаимодействия возбудимых нейронов посредством модуляции внеклеточной концентрации калия (ионная связь) в условиях их активации некоррелированными шумовыми сигналами. Основные полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

• Наличие ионной связи существенно увеличивает частоту генерации нейронов вследствие деполяризации (уменьшения порога возбуждения), вызванной их собственной активностью. Этот эффект носит характер положительной обратной связи (выброс калия поддерживает деполяризацию, а деполяризация способствует генерации последующего импульса и новому выбросу калия), он проявляется для одиночного нейрона и усиливается в случае их ансамбля. С учетом случайного характера возбуждения нейронов шумовым сигналом, указанный выше механизм приводит к формированию нерегулярной пачечной активности (индуцированная шумом спайк-берст динамика).

• Инерционный характер ионной связи выражается в наличии заметного отставания роста внеклеточной концентрации калия от генерации импульса нейроном. Эта временная задержка (в рассмотренных выше случаях она составляла 3.5–8 мс) лежит в основе механизма формирования нового временного масштаба процесса генерации импульсов ансамблем из двух нейронов, а также эффекта индуцированного шумом коллективного разряда ансамбля нейронов с глобальной связью.

• Учет пространственной неоднородности распределения внеклеточной концентрации калия в случае малого ансамбля из четырех нейронов позволяет наблюдать эффект индуцированной шумом генерации пространственно упорядоченных шаблонов импульсов. А именно, изначально симметричный ансамбль не связанных синаптически нейронов при подходящих значениях управляющих параметров и интенсивностей шума способен генерировать повторяющиеся последовательности спайков, как если бы его элементы были изначально организованы в структурированную сеть. Обнаруженный эффект, на наш взгляд, представляет несомненный ин-

терес и должен учитываться при интерпретации результатов нейрофизиологических экспериментов в условиях, когда внеклеточная концентрация калия может меняться значительно.

Авторы выражают благодарность профессору Максимову Г.В., кандидатам биологических наук Браже Н.А. и Браже А.Р. (МГУ) за заинтересованное обсуждение работы и ценные рекомендации.

Библиографический список

1. *Николлс Дж.Г., Мартин А.Р., Валлас Б.Дж.,Фукс П.А.* От нейрона к мозгу. М.: УРСС, 2003. 672 с.
2. *Рубин А.Б.* Биофизика. М.: Высш. шк., 1987.
3. *Keener J., Sneyd J.* Mathematical Physiology, Springer, New York, Inc, 2001.
4. *Sykov E.* Extracellular K^+ accumulation in the central nervous system // Prog. Biophys. Mol. Biol. 1983. Vol. 42 P. 135.
5. *Deitmer J.W., Rose C.R., Munsch T., Schmidt J. Nett, W., Schneider H.-P., Lohr C.* Leech giant glial cell // Functional Role in a Simple Nervous System GLIA. 1999. Vol. 28. P. 175.
6. *Hansen A.J.* The extracellular potassium concentration in brain cortex following oschemia in hypo- and hyperglycemic rats //Acta Physiol. Scand. 1978. Vol. 102. P. 324.
7. *Yan G.X., Chen J., Yamada K.A., Kleber A.G. and Corr P.G.* Contribution of shrinkage of extracellular space to extracellular K^+ accumulation in myocardial ischemia at the rabbit // J.Physiol. 1996. Vol. 490. P. 215.
8. *Yi C.-S., Fogelson A.L., Keener J.P. and Peskin C.S.* A mathematical study of volume shifts and ionic concentration changes during ischemia and hypoxia // Journal of Theoretical Biology. 2003. Vol. 220, № 1. P. 83.
9. *Bazhenov M., Timofeev I., Steriade M. and Sejnowski T.J.* Potassium model for slow (2-3 Hz) neocortical paroxysmal oscillations in vivo // Journal of Neurophisiology. 2004. Vol. 92 (2): 1116-32.
10. *Eun-Hyoung Park and Durand D.M.*. Role of potassium lateral diffusion in non-synaptic epilepsy: A computational study // Journal of Theoretical Biology. 2006. Vol. 238, Issue 3. P. 666.
11. *Postnov D.E., Ryazanova L.S., Sosnovtseva O.S., Mosekilde E.* Neural synchronization via potassium signalling // International Jouranal of Neural Systems. 2006. Vol. 16, №. 2. P. 99.
12. *Lee S.G., Neiman A., Kim S.* Coherence resonance in a Hodgkin–Huxley neuron // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 3292.
13. *Pikovsky A., Kurth J.* Coherence resonance in a noise–driven excitable systems //Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 775.
14. *Han S.K., Yim T.G., Postnov D.E., and Sosnovtseva O.V.* Interacting coherence resonance oscillators // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 1771.

15. *Postnov D.E., Sosnovtseva O.V., Han S.K., and Kim W.S.* Noise-induced multimode behavior in excitable systems // Phys. Rev. 2002. Vol. 66. P. 016203.
16. *Mosekilde E., Sosnovtseva O.V., Postnov D., Braun H.A., and Huber M.T.* Noise-activated and noise-induced rhythms in neural systems // Nonlinear Science. 2004. Vol. 11. P. 449.
17. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in a nerve // J. Physiol. London. 1952. Vol. 117. P. 500.
18. *Guantes R. and de Polavieja G.G.* Variability in noise-driven integrator neurons // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. 011911(1-4).
19. *Baccus S.A.* // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1998. Vol. 95, 8345.
20. *Постнов Д.Э., Жирин Р.А.* Моделирование колебательных и волновых процессах в двумерных средах произвольной геометрии. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ 2007614145 от 28.09.2007.

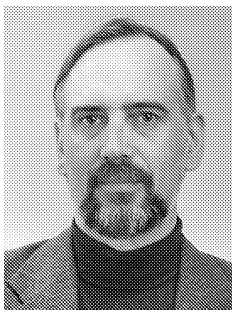
Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию *11.12.2007*
После доработки *13.03.2008*

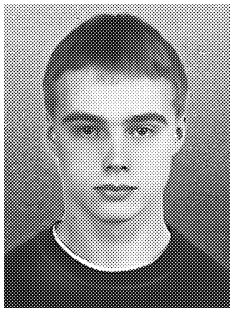
NOISE-INDUCED COHERENT FIRING PATTERNS IN SMALL NEURAL ENSEMBLES WITH IONIC COUPLING

D.E. Postnov, R.A. Zhirin, Y.A. Serdobintseva

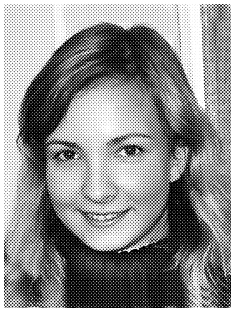
By means of modeling and numeric simulation we consider, how the rise of extracellular potassium concentration due to the neuronal activity can affect the firing patterns of the neighboring neurons. To take into account mentioned above effects, we suggest simple extension of Hodgkin-Huxley model. We consider the behavior of 2, 4, and 8 excitable neurons being forced by external noisy stimulus. We reveal the main effects being the attributes of ionic coupling that are include the emergence of new time scales and spatially-ordered firing patterns.



Постнов Дмитрий Энгелевич – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Доктор физико-математических наук (2001). Область научных интересов - сложная динамика математических моделей биологических систем, индуцированные шумом эффекты в нелинейных динамических системах. Автор 67 научных статей и книг «Chaotic Synchronization. Application to Living Systems» (World Scientific, 2002) и «Synchronization: from Simple to Complex» (Springer, 2008).
E-mail: postnov@chaos.ssu.runnet.ru



Жирин Роман Андреевич – выпускник кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета 2007 года. Область научных интересов – моделирование динамики живых систем. Участник грантов, студенческих и международных конференций. Соавтор нескольких публикаций.



Сердобинцева Юлия Александровна – родилась в 1985 году. Окончила физический факультет СГУ в 2007. В настоящее время является инженером кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов – математическое моделирование биологических систем. Участница студенческих и международных научных конференций.

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 4, 2008 УДК 517.9

СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ ВАН ДЕР ПОЛЯ И ВАН ДЕР ПОЛЯ–ДУФФИНГА: ФАЗОВАЯ ДИНАМИКА И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

А.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич, Л.В. Тюрюкина

Обсуждается синхронизация в системе связанных неидентичных, неизохронных осцилляторов ван дер Поля с диссипативной и инерционной связью. Получено и исследовано обобщенное уравнение Адлера в присутствии всех перечисленных факторов. Выявлены характерные симметрии уравнения, приводящие к эквивалентности некоторых физических факторов. Проведено численное исследование устройства пространства параметров исходной дифференциальной системы методом построения карт динамических режимов. Результаты двух подходов сопоставляются и обсуждаются.

Введение

Система связанных автоколебательных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга является базовой моделью теории колебаний, иллюстрирующей явление синхронизации и сопутствующие эффекты. Однако задача синхронизации в системе связанных осцилляторов характеризуется большим количеством физических параметров и непростой картиной бифуркаций в пространстве этих параметров [1–12]. Соответственно, обнаруживается множество интересных и взаимосвязанных колебательных эффектов. К настоящему времени стало понятно, что в методическом плане эта задача оказывается существенно более сложной, чем задача о вынужденной синхронизации осциллятора внешним сигналом [1, 15]. Большой интерес представляет вопрос о соотношении фаз взаимодействующих осцилляторов [1, 3]. При этом оказывается, что разные физические факторы ведут к синхронизации с различными фазовыми условиями. В то же время при некоторых условиях результаты воздействия разных факторов оказываются эквивалентными.

В части 1 работы данный круг вопросов обсуждается в рамках следующих ограничений. Во-первых, используется метод медленно меняющихся амплитуд. Во-вторых, возмущения орбит осцилляторов считаем слабыми, что позволит, как и в классической теории вынужденной синхронизации, перейти к уравнению для разности фаз осцилляторов. Оно будет представлять собой некоторое обобщение известного уравнения Адлера [1, 15].

В качестве факторов, которые оказывают влияние на динамику разности фаз, рассмотрим:

- диссипативную связь,
- инерционную связь,
- неизохронность осцилляторов, то есть зависимость скорости изменения фазы от радиуса орбиты осциллятора,
- неидентичность осцилляторов по управляющим параметрам, отвечающим за бифуркацию Андронова–Хопфа в подсистемах.

Как показано ниже, определенная тонкость состоит в том, что для описания динамики фазы при наличии каждого из этих факторов, за исключением диссипативной связи, необходим учет эффектов второго порядка. Поэтому соответствующий анализ требует тщательного обсуждения.

Конечно, связанным осцилляторам ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга посвящена обширная литература. Прежде всего следует отметить фундаментальную монографию [1], а также [2–12] и цитированную там литературу. Однако в силу очень большого числа параметров охватить общую картину очень сложно. Поэтому обычно описываются лишь ее отдельные фрагменты. Например, в известной и часто цитируемой работе [2] в рамках укороченных уравнений анализируется случай диссипативно связанных идентичных по управляющим параметрам осцилляторов. В работе [3] обсуждение идет в контексте обобщения уравнения Адлера и предполагается комбинированная связь, но осцилляторы считаются идентичными и изохронными. Вообще, идентичность осцилляторов – это одно из традиционных ограничений. Определенное исключение составляет недавняя работа [12]. Однако в ней не учтена неизохронность осцилляторов, которая, согласно [1], обеспечивает один из механизмов синфазной или противофазной синхронизации («притягивающие» и «отталкивающие» взаимодействия). Таким образом, ощущается необходимость в некоторой систематизации и осмыслении имеющихся результатов. Замечательной особенностью рассматриваемой задачи является также наличие целого ряда симметрий относительно фазы, которые приводят к симметриям относительно физических факторов и также обсуждаются в настоящей работе. Заметим также, что проведенный анализ имеет некоторые черты, характерные для теории катастроф [13–14, 21]. Это позволяет надеяться на определенную общность представленных результатов и их обсуждения.

Фазовая динамика, хотя и дает четкую физическую картину и механизмы синхронизации, но, конечно, не позволяет описать важный «атрибут» картины синхронизации любой колебательной системы – структуру языков синхронизации и особенности их внутреннего устройства. Поэтому после обсуждения фазовой динамики, в части 2 работы обращаемся к иллюстрациям для исходной системы дифференциальных уравнений. Используем метод карт динамических режимов [16], который позволяет изучать систему в «стиле» компьютерного эксперимента. Соответствующий программный инструментарий не столь сложен, а преимущество состоит в том, что автоматически визуализируется вся система языков синхронизации, включая их внутреннее устройство, которое может быть достаточно сложно и тонко организовано. Выявляются, например, даже особенности картины синхронизации, связанные с существованием бифуркации Неймарка–Сакера и пр. При этом результаты аналитических исследований фазовой динамики дают некоторую методологию проведения компьютерных экспериментов, без которой очень сложно ориентироваться в этой многопараметрической задаче.

Часть 1. Фазовая динамика

1.1. Обобщенное уравнение для фазы. Исходная система дифференциальных уравнений, описывающая взаимодействие осцилляторов указанного типа, имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\lambda_1 - x^2\right)\frac{dx}{dt} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \beta x^3 + \varepsilon(x-y) + \mu\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) = 0,\\
&\frac{d^2y}{dt^2} - \left(\lambda_1 - y^2\right)\frac{dy}{dt} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \beta y^3 + \varepsilon(y-x) + \mu\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь λ_1 и λ_2 – параметры, отвечающие за бифуркации Андронова–Хопфа в автономных осцилляторах; Δ – относительная частотная расстройка осцилляторов; β – параметр, введенный по аналогии с осциллятором Дуффинга и ответственный за неизохронность малых колебаний [1, 2, 17]; μ и ε – коэффициенты связи, причем μ отвечает за диссипативную связь, а ε – за инерционную[1].

Применим для анализа уравнений (1.1) метод медленно меняющихся амплитуд [15]. С этой целью представим динамические переменные в виде

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}(ae^{it} + a^*e^{-it}),\\
y &= \frac{1}{2}(be^{it} + b^*e^{-it}),
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ – комплексные амплитуды первого и второго осцилляторов. Накладывая стандартные дополнительные условия

$$\dot{a}e^{it} + \dot{a}^*e^{-it} = 0, \quad \dot{b}e^{it} + \dot{b}^*e^{-it} = 0,$$

имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = \frac{1}{2}(iae^{it} - ia^*e^{-it}), \quad y = \frac{1}{2}(ibe^{it} - ib^*e^{-it}). \tag{1.3}$$

Подставим соотношения (1.2), (1.3) в уравнения (1.1), умножим полученные выражения на e^{-it} и проведем усреднение для исключения быстро осциллирующих членов. После соответствующих преобразований получаем уравнения для комплексных амплитуд

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{\lambda_1 a}{2} - \frac{|a|^2 a}{8} + \frac{3i\beta\,|a|^2 a}{8} + \frac{i\varepsilon}{2}(a-b) - \frac{\mu}{2}(a-b) - \frac{i\Delta a}{4},\\
\frac{db}{dt} &= \frac{\lambda_2 b}{2} - \frac{|b|^2 b}{8} + \frac{3i\beta\,|b|^2 b}{8} + \frac{i\varepsilon}{2}(b-a) - \frac{\mu}{2}(b-a) + \frac{i\Delta b}{4}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

[1]Разные авторы для двух типов связи используют разные термины. В [3] оба они названы диффузионными, в [12] – диссипативным и консервативным, в [1] – диссипативным и реактивным, в [2] – скалярным и нескалярным. Мы используем термин инерционная связь [23], который отражает как «перекрестный» нескалярный характер связи (см. обсуждение в [1, с. 297]), так и влияние связи на собственные частоты системы даже в отсутствие диссипации.

Удобно ввести замены переменных: $\tau = t/2$, $z = a/2$, $w = b/2$, $\chi = 3\beta$. Тогда уравнения (1.4) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= \lambda_1 z - |z|^2 z + i\chi |z|^2 z + i\varepsilon(z-w) + \mu(w-z) - \frac{i\Delta z}{2}, \\ \frac{dw}{d\tau} &= \lambda_2 w - |w|^2 w + i\chi |w|^2 w + i\varepsilon(w-z) + \mu(z-w) + \frac{i\Delta w}{2}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Положим теперь $z = Re^{i\varphi_1}$ и $w = re^{i\varphi_2}$, где R, r и φ_1, φ_2 – действительные амплитуды и фазы осцилляторов. Подставим эти выражения в (1.5) и умножим первое уравнение на $e^{-i\varphi_1}$, а второе – на $e^{-i\varphi_2}$. Отделяя в полученных соотношениях действительную и мнимую части, приходим к уравнениям для действительных амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \varepsilon r \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \frac{dr}{d\tau} &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon R \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= \chi R^2 + \varepsilon - \frac{r}{R}\varepsilon\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{r}{R}\mu\sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{\Delta}{2}, \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= \chi r^2 + \varepsilon - \frac{R}{r}\varepsilon\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{R}{r}\mu\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{\Delta}{2}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Замечательно, что в уравнения для амплитуд входит лишь разность фаз осцилляторов. Поэтому можно вычесть из первого уравнения для фазы второе и получить уравнения, содержащие только относительную фазу осцилляторов $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r\cos\varphi + \varepsilon r \sin\varphi, \\ \frac{dr}{d\tau} &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R\cos\varphi - \varepsilon R \sin\varphi, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \Delta + \chi(r^2 - R^2) + \varepsilon\left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r}\right)\cos\varphi - \mu\left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r}\right)\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1.7}$$

В уравнениях (1.7) один из управляющих параметров может быть убран перенормировкой. Удобнее всего это сделать, используя среднее значение параметров. Для этого положим

$$\lambda_1 = \lambda + \delta \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \lambda - \delta.$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ – среднее значение управляющего параметра, а $\delta = (\lambda_1 - \lambda_2)/2$ – параметр неидентичности. Выполним также замену переменных

$$R = \sqrt{\lambda}\vec{R}, \quad r = \sqrt{\lambda}\vec{r}, \quad t = \vec{t}/\lambda,$$

и параметров

$$\delta = \lambda\vec{\delta}, \quad \varepsilon = \lambda\vec{\varepsilon}, \quad \mu = \lambda\vec{\mu}, \quad \Delta = \lambda\vec{\Delta}. \tag{1.8}$$

Тогда приходим к окончательной форме искомых укороченных уравнений [12]

$$\frac{dR}{d\tau} = R(1+\delta-\mu) - R^3 + \mu r\cos\varphi + \varepsilon r\sin\varphi,$$

$$\frac{dr}{d\tau} = r(1-\delta-\mu) - r^3 + \mu R\cos\varphi - \varepsilon R\sin\varphi, \tag{1.9}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta + \chi(r^2 - R^2) + \varepsilon(\frac{r}{R} - \frac{R}{r})\cos\varphi - \mu(\frac{r}{R} + \frac{R}{r})\sin\varphi.$$

Для сокращения записи мы опустили черту, которой обозначены «новые» параметры и переменные в укороченном уравнении (1.9). В случае идентичных по управляющему параметру систем уравнения (1.9) совпадают с полученными в [1].

В укороченных уравнениях (1.9) амплитуды осцилляторов и разность их фаз взаимосвязаны. Однако, используя определенный прием, предложенный в [1, 3], можно получить независимое уравнение для фазы φ. Для этого необходимо, чтобы коэффициенты связи μ, ε и параметры неизохронности χ и неидентичности δ были малыми. (По сравнению с единицей в принятой нормировке или по сравнению с λ в исходных уравнениях.) В этом случае в «нулевом» приближении для амплитуд осцилляторов из первых двух уравнений (1.9) имеем

$$\frac{dR}{d\tau} = R - R^3,$$

$$\frac{dr}{d\tau} = r - r^3.$$

Этим уравнениям отвечает установившееся движение по одинаковым орбитам единичного радиуса $R = r = 1$.

Перейдем теперь к возмущенным движениям. В первом приближении можно положить $R = 1 + \tilde{R}$ и $r = 1 + \tilde{r}$, где тильдой отмечены малые возмущения соответствующих переменных. Подставим сначала эти соотношения в первые два уравнения (1.9). Пренебрегая членами высшего порядка, получаем

$$\frac{d\tilde{R}}{d\tau} = -2\tilde{R} + \mu(\cos\varphi - 1) + \varepsilon\sin\varphi + \delta,$$

$$\frac{d\tilde{r}}{d\tau} = -2\tilde{r} + \mu(\cos\varphi - 1) - \varepsilon\sin\varphi - \delta.$$

Вслед за [1] обращаем внимание, что возмущения амплитуды сильно демпфированы, поэтому их значения очень быстро выходят на стационарный уровень. Этот факт позволяет вычислить возмущения, определяющие стационарные орбиты осцилляторов

$$\tilde{R} = \frac{1}{2}[\mu(\cos\varphi - 1) + \varepsilon\sin\varphi + \delta],$$

$$\tilde{r} = \frac{1}{2}[\mu(\cos\varphi - 1) - \varepsilon\sin\varphi - \delta]. \tag{1.10}$$

Из выражений (1.10) видно, что присутствие диссипативной связи уменьшает орбиты обоих осцилляторов, причем одинаковым образом. В свою очередь, инерционная связь влияет иначе. Например, при сдвиге фаз между осцилляторами $\pi/2$ и $\varepsilon > 0$ радиус орбиты первого осциллятора возрастает, а второго – уменьшается. Эти особенности оказываются существенными при обсуждении отличия в поведении систем с разным типом связи.

Подставим теперь выражения $R = 1 + \tilde{R}$ и $r = 1 + \tilde{r}$ в третье уравнение (1.9). После некоторых преобразований имеем

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta + 2\chi(\tilde{r} - \tilde{R}) - 2\mu\sin\varphi + 2\varepsilon(\tilde{r} - \tilde{R})\cos\varphi. \tag{1.11}$$

Теперь мы можем получить обобщенное уравнение Адлера для нашей задачи. Для этого подставим соотношения (1.10) для возмущений радиусов в уравнение (1.11). После некоторых преобразований получим

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta - 2\chi\delta - 2(\mu + \chi\varepsilon)\sin\varphi - \varepsilon^2\sin 2\varphi - 2\varepsilon\delta\cos\varphi. \tag{1.12}$$

Это и есть искомое фазовое уравнение[2]. Его анализ позволяет выяснить характер динамики относительной фазы слабо связанных осцилляторов в зависимости от всех существенных факторов: диссипативной связи μ, инерционной связи ε, а также параметров неидентичности по управляющим параметрам δ и неизохронности χ.

Сделаем еще одно замечание, касающееся нормировки. При выводе уравнений (1.9) можно было использовать нормировку не на среднее значение управляющих параметров, а на один из них, λ_2, как это сделано, например, в [12]. Нетрудно показать, что в этом случае мы приходим все равно точно к тому же фазовому уравнению (1.12), но тогда фактор пересчета параметров исходной системы (1.1) и фазового уравнения (1.12) будет $\lambda = \lambda_2$. Таким образом, взаимосвязь параметров не вполне однозначна, что связано с приближенным характером уравнения (1.12). Эта неоднозначность, однако, не столь существенна, поскольку в соответствии с (1.8) приводит лишь к одновременному изменению масштабов всех параметров. Представляется, что использованная при выводе (1.9) нормировка предпочтительнее, поскольку учитывает симметрию осцилляторов при смене знака δ. Однако, чтобы минимизировать проблемы, связанные с пересчетом параметров, в компьютерных расчетах в части 2 мы будем выбирать либо среднее значение λ, либо величину λ_2 всегда равными единице.

[2]При сопоставлении (1.12) и (1.9) и их обсуждении с другими работами [1, 3, 12] следует иметь в виду, что разные авторы используют различные варианты выбора знаков параметров и относительной фазы осцилляторов. Так, в [1] использованы противоположные знаки параметров неизохронности χ и инерционной связи ε. В [12] при получении уравнения, аналогичного (1.9), нормировка осуществлена не по среднему значению управляющих параметров, а по одному из них и т.д.

1.2. Качественное обсуждение влияния различных факторов на динамику фазы. Каждый из перечисленных в п. 1.1 факторов влияет на динамику фазы по-своему. Обсудим сначала их влияние на качественном уровне. С этой целью удобно ввести эффективный потенциал $U(\varphi)$ [15, 24]

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi}. \tag{1.13}$$

Тогда устойчивым режимам синхронизации (захвата фазы) отвечает минимум потенциала $U(\varphi)$. Максимумам отвечают неустойчивые состояния равновесия. В нашем случае, в соответствии с (1.12), имеем

$$U(\varphi) = -(\Delta - 2\chi\delta)\varphi - 2(\mu + \chi\varepsilon)\cos\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos 2\varphi + 2\varepsilon\delta \sin\varphi. \tag{1.14}$$

Обсудим влияние каждого фактора.

Диссипативная связь. Диссипативная связь стремится сблизить фазы осцилляторов. Отвечающий ей член в эффективном потенциале

$$U(\varphi) = -2\mu\cos\varphi + ... \tag{1.15}$$

(в изохронном случае) имеет минимум в точке $\varphi = 0$. Таким образом, диссипативная связь стремится синхронизовать осцилляторы в фазе. Случаю $\varphi = \pi$ отвечает неустойчивое состояние равновесия.

Инерционная связь. Инерционная связь приводит к синхронизации во втором порядке по параметру связи. В соответствии с вкладом в общий потенциал

$$U(\varphi) = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos 2\varphi + ... \tag{1.16}$$

может быть выявлена особенность инерционной связи – наличие фазовой бистабильности. Действительно, соотношению (1.16) отвечают два устойчивых состояния равновесия: $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Таким образом, инерционная связь может синхронизовать осцилляторы как в фазе, так и в противофазе в зависимости от начальных условий. Между устойчивыми положениями равновесия располагаются два неустойчивых, так что общее число равновесий – четыре.

Неизохронность. Неизохронность приводит к «добавке» в члене, соответствующем диссипативной связи

$$U(\varphi) = -2(\mu + \chi\varepsilon)\cos\varphi + ... \tag{1.17}$$

Это тоже эффект второго порядка, связанный с комбинированным воздействием неизохронности и инерционной связи. Соответствующий механизм фазировки осцилляторов описан в [1] и состоит в следующем. Пусть второй осциллятор опережает первый по фазе на $\pi/2$. В соответствии с (1.10), он будет иметь орбиту меньшего радиуса, а первый – большего. За счет неизохронности, в соответствии с двумя последними уравнениями (1.6), у первого осциллятора угловая скорость вращения возрастет, а у второго – уменьшится. В результате осцилляторы начнут сближаться по угловой координате. Это и приводит к тому, что изохронность в комбинации с инерционной связью действует аналогично диссипативной связи, что видно формальным образом из (1.17).

Если же параметр неизохронности χ отрицателен, то у отстающего по фазе первого осциллятора угловая скорость уменьшится, а у второго – увеличится. Осцилляторы начнут «расходиться» по фазе. Это пример «отталкивающего» взаимодействия, которое приводит к противофазной синхронизации. В соответствии с (1.17) эта ситуация аналогична отрицательному значению параметра μ. Последние соображения говорят о том, что для общности картины имеет смысл вводить в рассмотрение и случай $\mu < 0$, который можно назвать *активной связью*[3]. В случае активной связи в соответствии с (1.17) будет наблюдаться противофазная синхронизация.

Неидентичность. Малая неидентичность по управляющим параметрам действует тоже как эффект второго порядка в системе с инерционной связью. Член в эффективном потенциале

$$U(\varphi) = 2\varepsilon\delta \sin\varphi + ... \tag{1.18}$$

отвечает устойчивому режиму синхронизации со сдвигом фаз между вторым и первым осцилляторами на $3\pi/2$. Точке $\pi/2$ соответствует неустойчивое состояние равновесия. Смена знака связи или изменение знака добавки к управляющим параметрам меняет характер устойчивости этих состояний равновесия на противоположный.

Неидентичность в неизохронной системе дает еще и аддитивную добавку к частотной расстройке, поскольку теперь

$$U(\varphi) = -(\Delta - 2\chi\delta)\varphi + ... \tag{1.19}$$

Итак, в общем случае есть несколько механизмов, которые стремятся привести к синхронизации с разным фазовым сдвигом $(0,\ \pi/2,\ \pi, 3\pi/2)$ между осцилляторами. Кроме того, в системе с инерционной связью возможна фазовая мультистабильность.

Заметим, что полученное нами фазовое уравнение (1.12) образует своего рода «нормальную» форму для фазовой динамики связанных осцилляторов. Действительно, оно имеет вид

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta + A\sin\varphi + B\cos\varphi + C\sin 2\varphi. \tag{1.20}$$

Понятна его «организация»: постоянный член (дрейф фазы), члены с осцилляциями в виде синуса и косинуса и их произведение, обусловленное эффектом второго порядка[4].

Уравнение (1.20) характеризуется целым рядом симметрий. Например, оно переходит в себя при замене $\varphi \to -\varphi$, $\Delta \to -\Delta$, $B \to -B$. Такого рода симметрии, как мы увидим ниже, приводят к соответствующим симметриям в устройстве языков синхронизации.

---

[3]Представление об «активной» связи кажется логичным с формальной точки зрения (см. в этой связи уравнение (1.20)). В современной радиотехнике, однако, создание «отрицательного сопротивления» в цепи связи не представляет проблем, например, с использованием операционного усилителя. Таким образом, включение в анализ только положительных констант диссипативной связи отчасти является исторической традицией.

[4]Может показаться, что в общем случае мы «упустили» член $\cos 2\varphi$. Этот член, однако, можно убрать сдвигом фазы на постоянную величину. Так что уравнение (1.20) в определенной мере универсально. С его вариантом, $B = 0$, можно встретиться, например, в теории солитонов для так называемого двойного синус-уравнения Гордона [18], правда, следует использовать не первую, а вторую производную.

Периодичность фазы предоставляет в этом плане новые интересные возможности. Пусть, например, в (1.20) «включены» только два члена

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta + A\sin\varphi + C\sin 2\varphi.$$

Выполним замену переменной $\varphi = \pi/2 - \theta$. Тогда это уравнение приводится к

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -[\Delta + A\cos\theta + C\sin 2\theta].$$

Оно эквивалентно (1.20), в котором нужно положить $A = 0$, выполнить замену $B \to A$ и обратить время. Следовательно, картина бифуркаций в этих двух случаях будет полностью эквивалентной, но устойчивые равновесия заменятся на неустойчивые и наоборот. С такими симметриями мы встретимся при обсуждении влияния неидентичности и неизохронности осцилляторов.

1.3. Диссипативная связь. Система с чисто диссипативной связью приводит к фазовому уравнению

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta - 2\mu\sin\varphi. \tag{1.21}$$

Это классическое уравнение Адлера [1, 15]. Положения равновесия (ситуации захвата фазы) в соответствии с (1.21) ищутся из уравнения

$$\frac{\Delta}{2\mu} = \sin\varphi. \tag{1.22}$$

На плоскости частотная расстройка – величина связи (Δ, μ) им отвечает область внутри языка синхронизации с «изломом» при вершине, ограниченная линиями $\mu = \pm\Delta/2$ (рис. 1.1).

Внутри языка наблюдается синфазная синхронизация, причем при нулевой расстройке $\Delta = 0$ фаза точно равна нулю. На рис. 1.1 показана только область диссипативной связи $\mu > 0$. Для «активной» связи, когда $\mu < 0$, в соответствии с (1.22) картина получается симметричной относительно оси частотных расстроек, при этом синфазный режим сменяется противофазным.

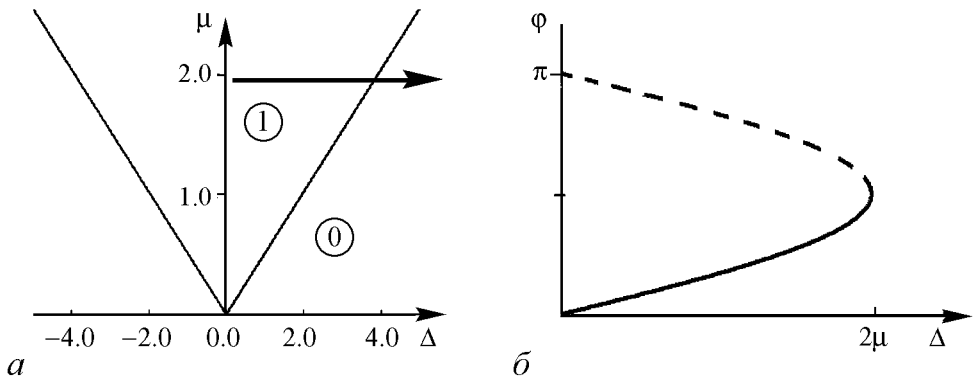


Рис. 1.1. *а* – Язык синхронизации в системе с диссипативной связью, в кружочке указано число устойчивых состояний равновесия фазы; *б* – бифуркационная диаграмма при пересечении языка по указанной на левом рисунке стрелке

Введение малой неидентичности по управляющим параметрам δ в системе с чисто диссипативной связью в соответствии с (1.12) не сказывается на форме языка. Точно так же в этом приближении введение неизохронности χ не меняет картины, поскольку диссипативная связь изменяет орбиты одинаковым образом и скорость изменения фазы оказывается одинаковой для обоих осцилляторов. А вот одновременное введение и неидентичности и неизохронности, согласно выражению (1.12), приводит к появлению в фазовом уравнении постоянной добавки к частотной расстройке. Это, в свою очередь, означает сдвиг языка синхронизации вправо или влево на величину этой добавки. Однако наиболее интересные и многообразные эффекты наблюдаются при наличии инерционной связи.

1.4. Инерционная связь. Инерционная связь и неидентичность. Перейдем теперь к случаю инерционно связанных осцилляторов. Для идентичных изохронных осцилляторов имеем

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta - \varepsilon^2 \sin 2\varphi. \tag{1.23}$$

В этом случае границы языка синхронизации задаются соотношением

$$\Delta = \pm\, \varepsilon^2. \tag{1.24}$$

Таким образом, язык имеет очень узкое острие в виде корневой особенности (рис. 1.2, *а*). Этот факт связан с тем, что синхронизация осцилляторов в этом случае, как мы уже говорили – эффект «второго порядка». Однако язык очень быстро расширяется с ростом ε и вполне выявляется компьютерным моделированием (см. часть 2). На рис. 1.2 представлен случай положительных значений параметра связи ε; для отрицательных ε картина получается зеркальным отражением относительно оси частотной расстройки.

Существенная особенность задачи в анализируемом случае – фазовая бистабильность внутри языка, что формально связано с удвоенным аргументом синуса в соотношении (1.23). Бистабильные состояния одновременно рождаются и одновременно исчезают при переходе через границу языка. Соответствующая бифуркационная диаграмма при движении по выделенной на рис. 1.2, *а* линии показана на

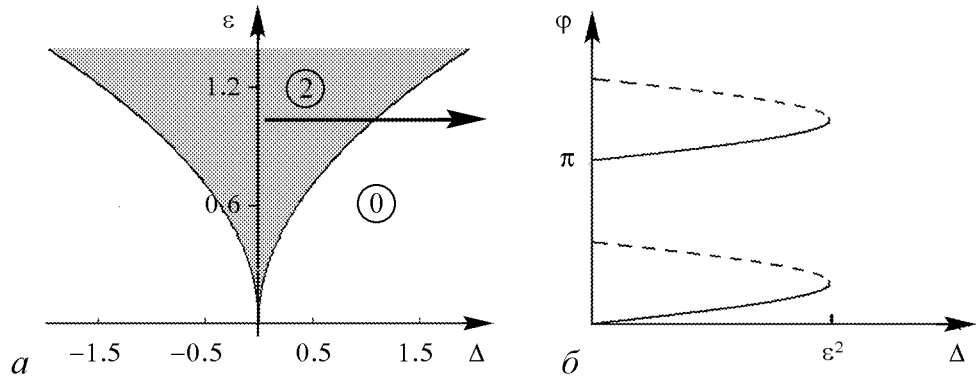


Рис. 1.2. *а* – Язык синхронизации в системе с инерционной связью, в кружочке – число устойчивых состояний равновесия фазы, серым цветом выделена область бистабильности; *б* – бифуркационная диаграмма при пересечении языка по указанной на левом рисунке линии

рис. 1.2, *б*. На рис. 1.2 и далее цифрами в кружочке показано число устойчивых состояний равновесия фазы, а серым цветом выделена область бистабильности.

Рассмотрим теперь влияние неидентичности по управляющим параметрам в системе с инерционной связью. В этом случае фазовое уравнение имеет вид

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta - \varepsilon^2 \sin 2\varphi - 2\varepsilon\delta \cos\varphi, \tag{1.25}$$

и мы приходим к следующему уравнению для определения положений равновесия фазы:

$$\Delta = \varepsilon^2 \sin 2\varphi + 2\varepsilon\delta \cos\varphi. \tag{1.26}$$

Заметим, прежде всего, что введение неидентичности «исправляет» форму языка у его основания: при очень малых ε первым членом можно пренебречь, и язык будет иметь традиционный вид с изломом $\varepsilon = \pm\Delta/(2\delta)$. При этом с ростом неидентичности язык становится все более широким.

Полезно проанализировать случай нулевой расстройки $\Delta = 0$ (середина языка синхронизации). Из (1.26) имеем соотношение

$$0 = \cos\varphi(\varepsilon \sin\varphi + \delta). \tag{1.27}$$

Оно распадается на два:

$$\cos\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon \sin\varphi + \delta = 0. \tag{1.28}$$

Из первого мы видим, что имеются два положения равновесия, которые не зависят от величины связи: $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$. При малых ε первое неустойчиво, а второе устойчиво.

В свою очередь, при выполнении второго условия (1.28) возможны еще два положения равновесия. Они возникают при $\varepsilon = \delta$ для фазы $\varphi = 3\pi/2$ и с ростом ε расходятся, стремясь в асимптотике к значениям $\varphi = \pi$ и $\varphi = 2\pi$. Общая бифуркационная диаграмма показана на рис. 1.3, *б*. В соответствии с эти рисунком, при $\varepsilon = \delta$ наблюдается бифуркация типа «вилка», когда положение равновесия $\varphi = 3\pi/2$

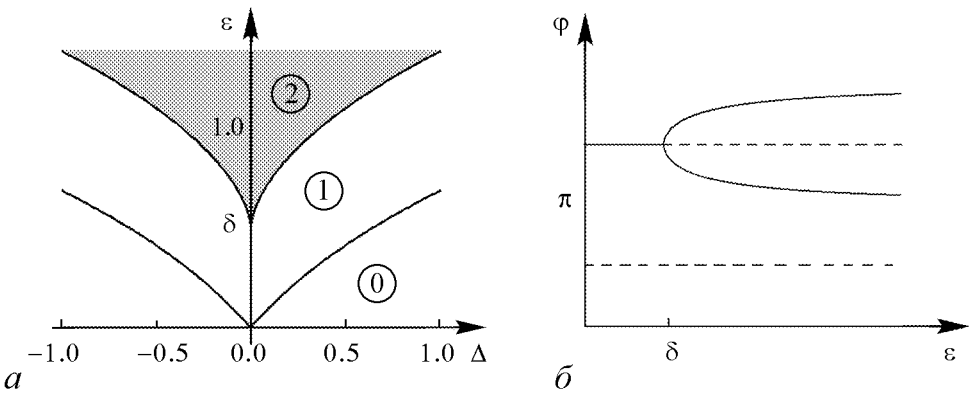


Рис. 1.3. *а* – Язык синхронизации в системе с инерционной связью в присутствии неидентичности ($\delta = 0.5$) по управляющим параметрам; *б* – бифуркационная диаграмма при пересечении языка по линии нулевой частотной расстройки $\Delta = 0$

теряет устойчивость, и от него отделяются симметричным образом два новых устойчивых. До этой бифуркации бистабильность невозможна – она возникает при $\varepsilon > \delta$. Таким образом, неидентичность осцилляторов разрушает общую границу синхронизации бистабильных состояний – теперь у каждого из них она своя.

Определим теперь границы областей синхронизации. Для этого надо продифференцировать соотношение (1.26) по φ и приравнять производную нулю, что отвечает ситуации слияния корней. Соответствующие линии на плоскости параметров, по терминологии теории бифуркаций [1, 15], являются линиями седло-узловых бифуркаций или линиями складок, по терминологии теории катастроф [14, 21]. В результате получаем

$$0 = \varepsilon \cos 2\varphi - \delta \sin \varphi. \tag{1.29}$$

Соотношения (1.26), (1.29) задают границы областей синхронизации на плоскости частотная расстройка – величина связи (рис. 1.3, *а*) в параметрической форме

$$\begin{gathered} \Delta = \varepsilon^2 \sin 2\varphi + 2\varepsilon\delta \cos \varphi, \\ \varepsilon = \frac{\delta \sin \varphi}{\cos 2\varphi}. \end{gathered} \tag{1.30}$$

На рисунке видим, что, действительно, границы седло-узловых бифуркаций для состояний с разными положениями равновесия для фазы не совпадают.

Заметим, что наличие бифуркации типа вилка «сигнализирует» о существовании точки сборки на плоскости (Δ, ε) в точке $(0, \delta)$. Несложно показать, что в этой точке располагается вершина полукубического острия. Для этого положим $\varphi = 3\pi/2 + x$. Тогда из (1.29) получаем

$$\varepsilon = \frac{\delta \cos x}{\cos 2x} = \delta \left(1 + \frac{3}{2}x^2 + ...\right). \tag{1.31}$$

В свою очередь, из (1.30) и (1.31) следует

$$\Delta = \delta^2(-\sin 2x + 2\sin x) = \delta^2(x^3 + ...).$$

Комбинируя эти соотношения, действительно получаем полукубическую параболу

$$\Delta = \pm \left[\frac{2}{3}\,\delta^{1/3}(\varepsilon - \delta)\right]^{3/2}.$$

Рассматриваемая задача характеризуется тремя параметрами $(\Delta, \varepsilon, \delta)$. Поэтому полезно изобразить и сечение плоскостью (Δ, δ). Соответствующая область (язык) синхронизации и бифуркационная диаграмма при движении внутри языка снизу вверх показаны на рис. 1.4. В этом случае также имеется точка сборки, но обращенная острием вверх, так что область бистабильности расположена в нижней части языка.

Итак, наш анализ в рассматриваемом случае выявил две характерные конфигурации областей (языков) синхронизации, показанные на рис. 1.3, *а* и рис. 1.4, *а*.

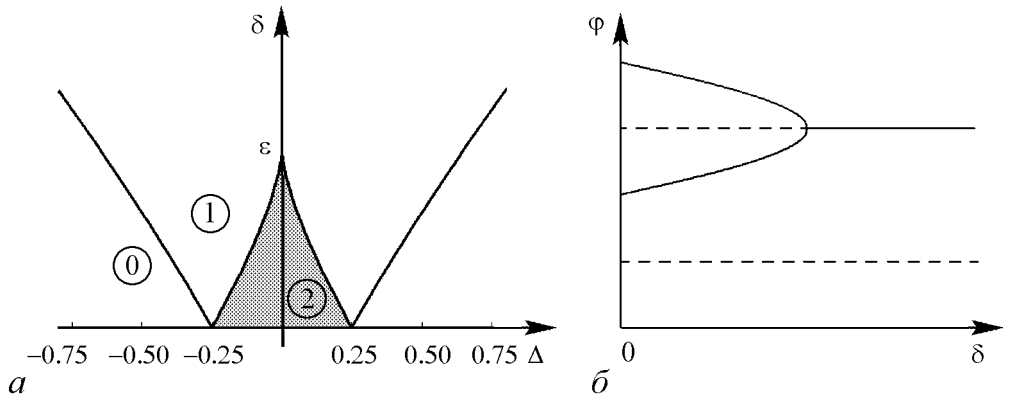


Рис. 1.4. *а* – Язык синхронизации в системе неидентичных осцилляторов с инерционной связью на плоскости параметров частотная расстройка Δ – параметр неидентичности осцилляторов δ в случае ε=0.5; *б* – бифуркационная диаграмма при пересечении языка по линии нулевой частотной расстройки $\Delta = 0$

1.5. Эквивалентные случаи: инерционная связь и неизохронность, комбинированная связь. В предыдущем разделе мы добавили к системе с инерционной связью неидентичность осцилляторов по управляющим параметрам. Вновь возьмем систему с инерционной связью, но добавим другой фактор – неизохронность осцилляторов. Тогда из (1.12) получаем

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta - 2\chi\varepsilon\sin\varphi - \varepsilon^2\sin 2\varphi. \tag{1.32}$$

Выполним в этом соотношении замену переменной $\varphi = \pi/2 - \theta$:

$$-\frac{d\theta}{d\tau} = \Delta - \varepsilon^2\sin 2\theta - 2\chi\varepsilon\cos\theta. \tag{1.33}$$

Если положить $\chi = \delta$, (1.33) с точностью до знака производной от фазы совпадает с соотношением (1.25) для неидентичной изохронной системы, Таким образом, в рассматриваемом приближении неидентичность и неизохронность приводят к эквивалентной картине бифуркаций с точностью до сдвига фаз осцилляторов на $\pi/2$ и смене неустойчивых равновесий на устойчивые и наоборот. Это одно из проявлений симметрии, о которой мы говорили при обсуждении соотношения (1.20). Следовательно, конфигурация бифуркационных линий в системе с инерционной связью и неидентичностью оказывается такой же, как в системе с инерционной связью и неизохронностью.

В определенной мере, то же самое относится и к ситуации, когда имеется комбинированная связь – диссипативная и инерционная, а остальные возмущающие факторы не включены. Действительно, для этого случая уравнение фазовой динамики имеет вид

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta - 2\mu\sin\varphi - \varepsilon^2\sin 2\varphi. \tag{1.34}$$

При фиксированном уровне инерционной связи $\varepsilon = 1$ (1.34) совпадает с (1.32), если положить $\mu = \chi$. Таким образом, для неизохронной системы устройство языка

синхронизации на плоскости (Δ, χ) точно совпадает с устройством языка для комбинированной связи на плоскости (Δ, μ).

Картина будет аналогичной и при других значениях инерционной связи, необходимо только пересчитывать ее величину по определенному правилу. Действительно, если выполнить в выражении (1.32) замены вида

$$\Delta \to \varepsilon^2\Delta, \quad \varepsilon \to \varepsilon^2, \quad \chi \to \mu\ ,$$

то оно с точностью до изменения масштаба времени на фактор ε^2 перейдет в (1.34). Таким образом, картина бифуркаций будет эквивалентна при пересчете уровня инерционной связи по правилу $\varepsilon \to \varepsilon^2$.

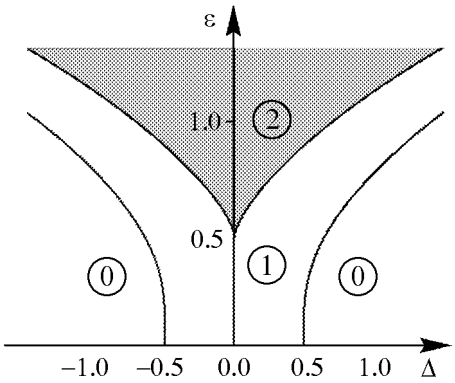


Рис. 1.5. Язык синхронизации в системе с комбинированным типом связи на плоскости параметров частотная расстройка Δ – параметр инерционной связи ε в случае $\mu = 0.25$

Итак, неизохронность, диссипативная связь и неидентичность, добавляемые поодиночке к инерционной связи, дают одинаковую геометрию бифуркационных линий в соответствующих сечениях пространства параметров. В этом плане рис. 1.3, *а* и рис. 1.4, *а* выступают как «эталонные» варианты устройства языков синхронизации. Правда, неизохронность и неидентичность различаются реализацией сдвига фаз между осцилляторами на $\pi/2$ и сменой устойчивых равновесий на неустойчивые и наоборот.

В заключение этого раздела представим на рис. 1.5 для случая комбинированной связи вид области синхронизации на плоскости параметров (частотная расстройка Δ – величина инерционной связи ε). В этом случае язык синхронизации опирается на конечный интервал частотных расстроек $\Delta = 4\mu$, который легко находим из (1.34), полагая $\varepsilon = 0$ и $\sin\varphi = \pm 1$.

1.6. Инерционная связь, неидентичность и неизохронность. С позиций уравнения фазовой динамики (1.12) рассмотренные выше случаи отвечают «включению» двух существенных членов. Теперь следует перейти к более общей ситуации, когда нужно учитывать все три. При этом эквивалентность между разными физическими факторами нарушится, потому что решения, отвечающие, например, сдвигу фазы на $\pi/2$, оказываются уже неэквивалентными.

Для того чтобы сохранить физическую интерпретацию, рассмотрим конкретный пример. Так, логичным продолжением пункта 1.3 может служить ситуация, когда системе с чисто инерционной связью и неидентичностью добавляют неизохронность. Естественно рассмотреть, как меняется устройство «типичных» языков рис. 1.3, *а* и рис. 1.4, *а* при введении дополнительного существенного фактора. В этом случае имеем следующее уравнение для равновесия фазы:

$$\Delta = 2\chi\delta + 2\chi\varepsilon\sin\varphi + \varepsilon^2\sin 2\varphi + 2\varepsilon\delta\cos\varphi. \tag{1.35}$$

Здесь проявляется еще одна особенность неизохронности, которая отвечает постоянной добавке к частотной расстройке, тем большей, чем более неидентичными являются осцилляторы. Для поиска границ областей синхронизации приравниваем нулю производную по фазе

$$\chi \cos \varphi + \varepsilon \cos 2\varphi - \delta \sin \varphi = 0. \tag{1.36}$$

Откуда

$$\delta = \frac{\varepsilon \cos 2\varphi + \chi \cos \varphi}{\sin \varphi}. \tag{1.37}$$

Используя соотношения (1.35) и (1.37), изучим сначала трансформации языка на плоскости (Δ, δ) при вариации параметра неизохронности χ. Соответствующие перестройки показаны на рис. 1.6. Заметим, что теперь, в отличие от рис. 1.4, мы представляем области как положительных, так и отрицательных значений δ, поскольку это существенно с точки зрения происходящих перестроек.

Из рисунка хорошо видно, что с ростом неизохронности χ язык становится асимметричным (рис. 1.6, *б*). Две ветви линий складок сближаются и при $\chi = 0.5$ сливаются (рис. 1.6, *в*), так что от начала координат отделяются две новые сборки, которые затем постепенно расходятся (рис. 1.6, *г*). Соответствующая перестройка в терминах теории катастроф называется «клюв к клюву» [21]. (См. в этом контексте характерное расположение двух наиболее близких сборок на рис. 1.6, *г*.) Ее пороговое значение может быть найдено аналитически из тех соображений, что на плоскости параметров при $\delta = 0$ сливаются и исчезают две точки пересечения линий складок с осью Δ (переход от рис. 1.6, *б* к рис. 1.6, *г*). Поэтому, полагая в (1.37)

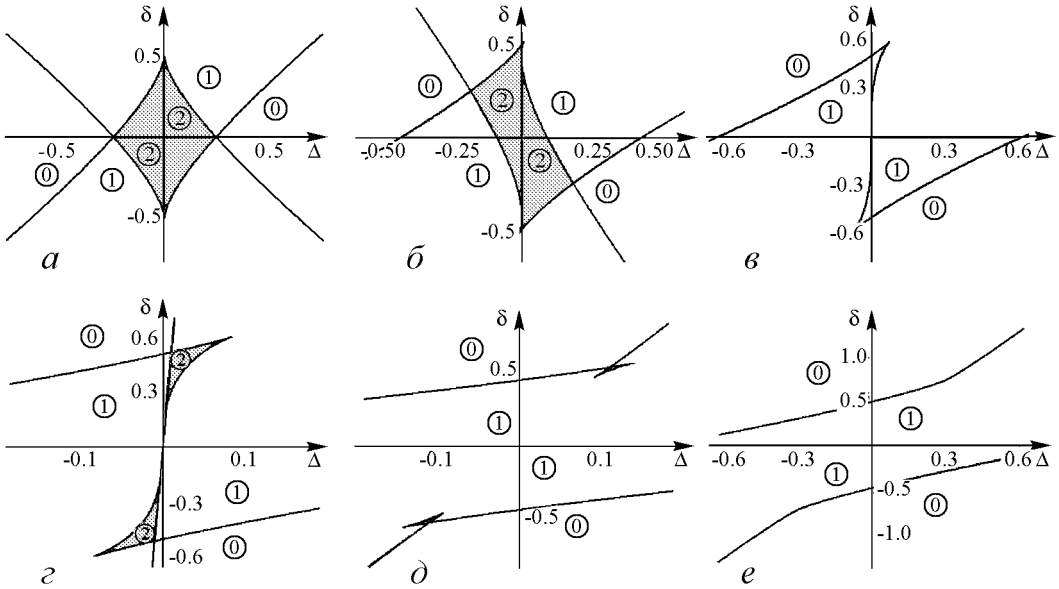


Рис. 1.6. Метаморфозы бифуркационных линий системы с инерционной связью в присутствии неидентичности и неизохронности на плоскости параметров (Δ, δ). Параметр инерционной связи $\varepsilon = 0.5$. Параметр неизохронности χ: 0 (*а*); 0.25 (*б*); 0.5 (*в*); 0.51 (*г*); 0.6 (*д*); 0.75 (*е*)

$\delta = 0$, получаем

$$\varepsilon \cos 2\varphi = -\chi \cos \varphi.$$

Условия исчезновения корней, очевидно, $\cos \varphi = \pm 1$; при этом получаем $\chi = \pm\varepsilon$, что находится в соответствии с рис. 1.6, *в*.

Далее, одна «новая» и одна «старая» сборки попарно образуют на рис. 1.6, *г, д* характерные конфигурации, известные в теории катастроф как «ласточкин хвост» [13, 14, 21]. Входящие в них точки сборки, в свою очередь, сближаются и, как видно из рис. 1.6, *д, е*, сливаются и исчезают. Соответствующую бифуркационную ситуацию коразмерности три ищем, приравнивая нулю три производные по φ от выражения (1.35):

$$\begin{aligned} &\chi \cos \varphi + \varepsilon \cos 2\varphi - \delta \sin \varphi = 0, \\ &\chi \sin \varphi + 2\varepsilon \sin 2\varphi + \delta \cos \varphi = 0, \\ &\chi \cos \varphi + 4\varepsilon \cos 2\varphi - \delta \sin \varphi = 0. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Из первого и третьего соотношений следует, что $\cos 2\varphi = 0$ и $\chi \cos \varphi - \delta \sin \varphi = 0$. Первое уравнение имеет два корня, $\varphi_1 = \pi/4$ и $\varphi_2 = 3\pi/4$, и поэтому $\chi = \pm\delta$. Подставляя этот результат во второе уравнение (1.38), после некоторых преобразований получаем

$$\chi = \mp\sqrt{2}\varepsilon,$$

что при $\varepsilon = 0.5$ дает $\chi = \mp 0.707...$ и находится в соответствии с рис. 1.6, *д, е*.

На плоскости параметров (Δ, δ) моменту катастрофы «ласточкин хвост» отвечают точки с координатами $\Delta = \chi^2/2$, $\delta = \chi$, а также $\Delta = -\chi^2/2$, $\delta = -\chi$. Таким образом, на плоскости параметров две особенности типа «ласточкин хвост» появляются одновременно симметричным образом, в первой и третьей четверти графика, на разных ветвях бифуркационных линий (рис. 1.6, *д*). Это одно из проявлений симметрии, присущей системе.

Эволюция языка синхронизации на плоскости (Δ, ε) при фиксированном параметре неидентичности $\delta = 0.5$ и добавлении все возрастающей неизохронности представлена на рис. 1.7. В этом случае линии седло-узловых бифуркаций даются соотношениями (1.35) и (1.37), причем последнее следует представить в следующем виде:

$$\varepsilon = \frac{\delta \sin \varphi - \chi \cos \varphi}{\cos 2\varphi}. \tag{1.39}$$

Анализ соответствующих иллюстраций показывает, что введение неизохронности приводит к асимметрии языка и смещению его вершины в область положительных расстроек на величину $\Delta = 2\chi\delta$, тем большую, чем больше неизохронность. Из рисунка мы видим, что имеется особая ситуация при $\chi = \delta$. В этом случае $\varphi = \pi/4$ и соотношение (1.39) приводит к неопределенности, поэтому на рис. 1.7, *в* показан «почти» бифуркационный случай. Как видно из рис. 1.7, *в, г*, при превышении значения $\chi = \delta$ «сценарий» изменения внутреннего устройства языка повторяется в обратном порядке.

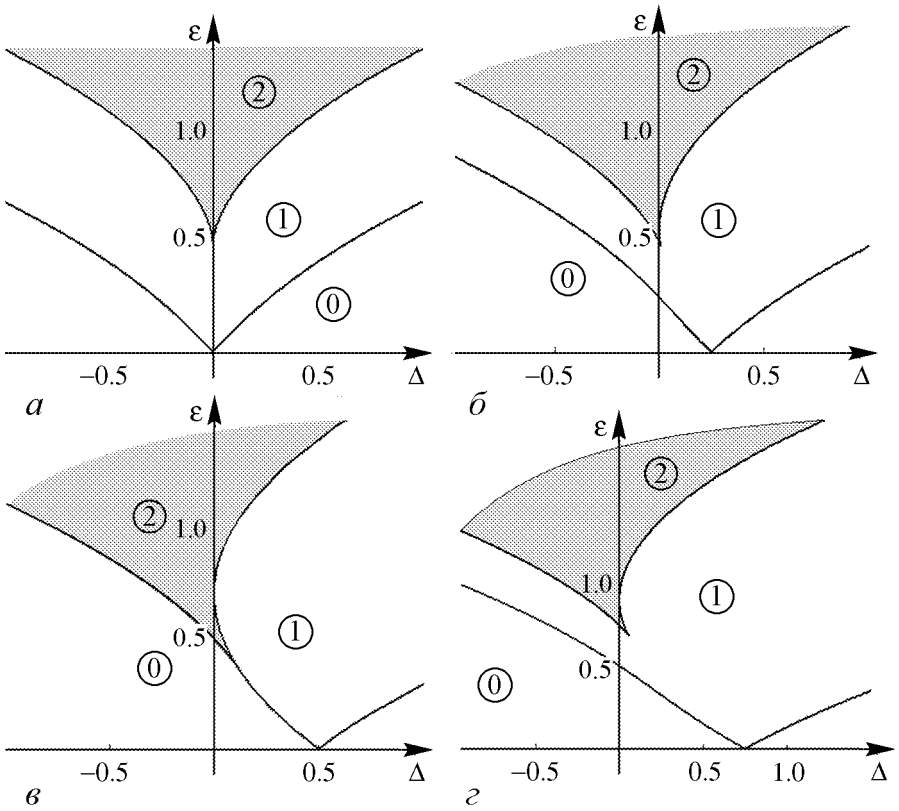


Рис. 1.7. Метаморфозы бифуркационных линий системы с инерционной связью в присутствии неидентичности и неизохронности на плоскости параметров (Δ, ε). Параметр неидентичности $\delta = 0.5$. Параметр неизохронности χ: 0 (*а*); 0.25 (*б*); 0.4999 (*в*); 0.75 (*г*)

1.7. Инерционная связь, диссипативная связь, неидентичность и неизохронность. «Включим» теперь все возможные физические факторы. Тогда, в соответствии с (1.12) имеем

$$\Delta = 2\chi\delta + 2(\mu + \chi\varepsilon)\sin\varphi + \varepsilon^2 \sin 2\varphi + 2\varepsilon\delta\cos\varphi. \tag{1.40}$$

Продифференцировав это соотношение по φ, можно прийти к соотношению

$$\delta = \frac{\varepsilon\cos 2\varphi + (\mu/\varepsilon + \chi)\cos\varphi}{\sin\varphi}. \tag{1.41}$$

Совместно с (1.40) оно задает вид языка синхронизации на плоскости (Δ, δ). Его устройство и перестройки иллюстрирует рис. 1.8, на котором показана конфигурация бифуркационных линий при $\chi = 0.75$ и $\varepsilon = 0.5$. Это случай «большой» неизохронности, параметр $\chi = 0.75$ соответствует рис. 1.6, *е*. Параметр диссипативной связи μ на серии рисунков 1.8 постепенно уменьшается от 1.5 до -0.75.

«Стартовая» ситуация отвечает языку синхронизации в виде наклоненной «полосы», которая не имеет особенностей и вершин. Области бистабильности отсутствуют (рис. 1.8, *а*). Обсудим наблюдаемые перестройки при уменьшении уровня диссипативной связи. Для этого заметим, что соотношение (1.41) эквивалентно (1.37)

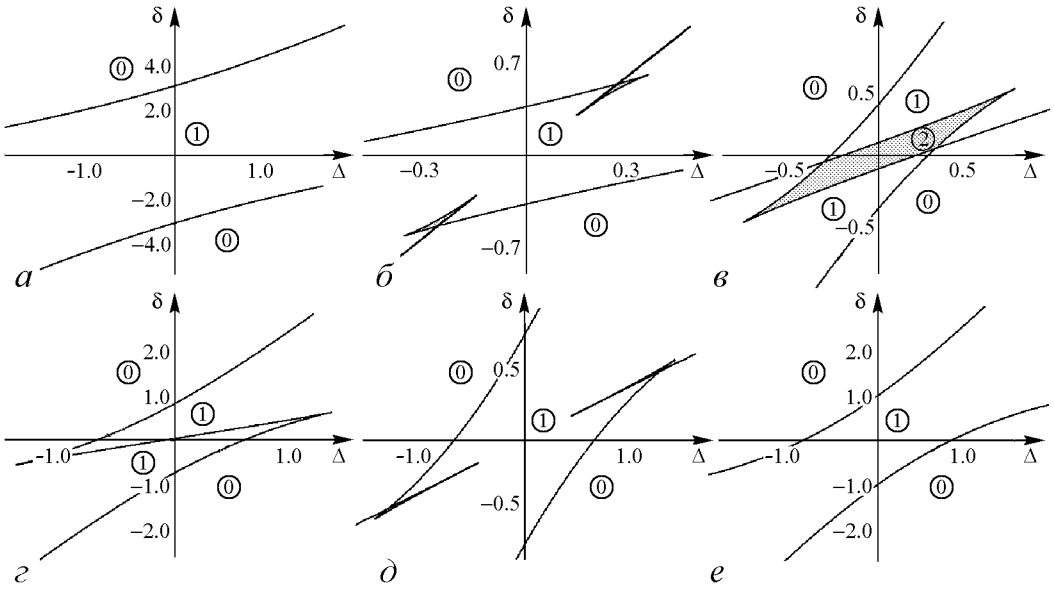


Рис. 1.8. Метаморфозы бифуркационных линий системы с инерционной и диссипативной связью в присутствии неидентичности и неизохронности на плоскости параметров (Δ, δ) при уменьшении параметра диссипативной связи μ: 1.5 (*а*); -0.11 (*б*); -0.4 (*в*); -0.625 (*г*); -0.63 (*д*); -0.75 (*е*). Случай $\mu = 0$ представлен на рис. 1.6, *е*. Параметры инерционной связи $\varepsilon = 0.5$ и неизохронности $\chi = 0.75$

при замене $(\mu/\varepsilon + \chi) \to \chi$. Поэтому можно использовать результаты раздела 1.5. Действуя таким образом, заключаем, что при $\mu/\varepsilon + \chi = \pm\,\varepsilon$ или $\mu = \varepsilon(\pm\,\varepsilon - \chi)$ имеют место перестройки «клюв к клюву». В свою очередь, при $\mu/\varepsilon + \chi = \pm\sqrt{2}\varepsilon$ или $\mu = \varepsilon(\pm\sqrt{2}\varepsilon - \chi)$ наблюдаются катастрофы типа «ласточкин хвост».

Если мы фиксируем χ и ε, и уменьшаем μ, как на рис. 1.8, то последовательно имеем следующие перестройки. При $\mu_1 = \varepsilon(\sqrt{2}\varepsilon - \chi)$ происходит катастрофа «ласточкин хвост» и образуются две небольшие области бистабильности (рис. 1.8, *б*). Затем при $\mu_2 = \varepsilon(\varepsilon - \chi)$ имеет место перестройка «клюв к клюву» и области бистабильности объединяются в одну (рис. 1.8, *в*).

При дальнейшем уменьшении параметра μ, при $\mu_3 = -\varepsilon(\varepsilon + \chi)$ происходит вторая перестройка «клюв к клюву», а при $\mu_4 = -\varepsilon(\sqrt{2}\varepsilon + \chi)$ – «ласточкин хвост» (рис. 1.8, *г, д*). В результате при $\mu < -\varepsilon(\sqrt{2}\varepsilon + \chi)$ мы приходим к конфигурации рис. 1.8, *е*, аналогичной «стартовой», рис. 1.8, *а*. В представленном примере все перестройки происходили при $\mu < 0$, то есть в случае активной связи. Однако две первые перестройки могут отвечать и случаю диссипативной связи, если только параметр неизохронности не превышает параметр инерционной связи, то есть $\chi < \varepsilon$.

Чтобы выявить конфигурацию языка на плоскости (Δ, ε), следует разрешить соотношение (1.41) относительно коэффициента инерционной связи ε, в результате чего придем к квадратному уравнению

$$\varepsilon^2 \cos 2\varphi - \varepsilon(\delta \sin\varphi - \chi\cos\varphi) + \mu\cos\varphi = 0.$$

Решая его, получаем

$$\varepsilon = \frac{\delta\sin\varphi - \chi\cos\varphi \pm \sqrt{(\delta\sin\varphi - \chi\cos\varphi)^2 - 4\mu\cos\varphi\cos 2\varphi}}{2\cos 2\varphi}. \qquad (1.42)$$

Мы видим, что даже малое введение диссипативной связи по сравнению с (1.39) приводит к появлению новой ветви решения, которой отвечает знак «минус» перед квадратным корнем. (При $\mu = 0$ этой ветви отвечала ось $\varepsilon = 0$.)

Несколько характерных иллюстраций для этого случая показаны на рис. 1.9. Параметры неидентичности и неизохронности фиксированы и равны значениям $\delta = 0.5$, $\chi = 0.75$. Как и на рис. 1.8, «стартовая» ситуация отвечает достаточно большой диссипативной связи $\mu = 1$, а затем величина связи убывает.

На рис. 1.9, *а* можно видеть конфигурации, аналогичные рис. 1.7. Однако в области отрицательных значений инерционной связи $\varepsilon < 0$ две разные ветви бифуркации седло-узел пересекаются, формируя несколько иную картину областей бистабильности. С уменьшением параметра диссипативной связи (переход от рис. 1.9, *а* к рис. 1.9, *б*) расположенная в нижней полуплоскости точка сборки приближается ко второй линии бифуркации седло-узел. Вслед за этим в ее окрестности происходят перестройки, которые в увеличенном масштабе иллюстрирует рис. 1.10.

На рис. 1.10, *а* показан увеличенный фрагмент рис. 1.9, *б*. Можно видеть точку сборки и две близко расположенные ветви линий седло-узловых бифуркаций. С уменьшением параметра диссипативной связи μ, эти ветви сближаются, касаются друг друга, и происходит «разрыв» в результате перестройки «клюв к клюву» (переход от рис. 1.10, *а* к рис. 1.10, *б*). При этом возникает характерная для катастрофы ласточкин хвост конфигурация, которую иллюстрирует в еще большем масштабе правый рисунок 1.10, *б*.

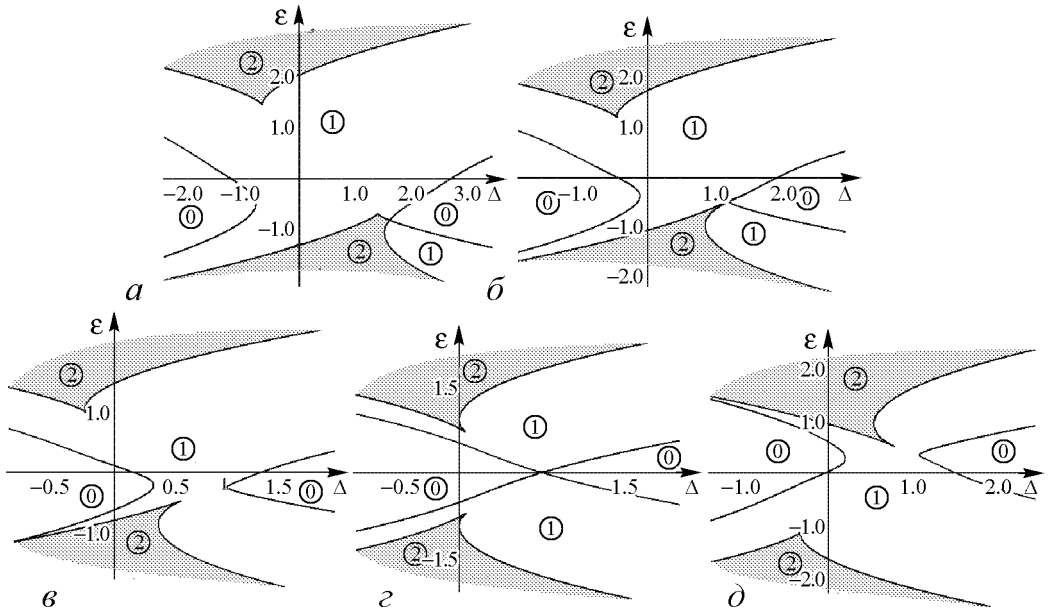


Рис. 1.9. Метаморфозы бифуркационных линий системы с инерционной и диссипативной связью в присутствии неидентичности и неизохронности на плоскости параметров (Δ, ε) при уменьшении параметра диссипативной связи μ: 1.0 (*а*); 0.6 (*б*); 0.3 (*в*); 0 (*г*); -0.4 (*д*). Параметры неидентичности $\delta = 0.5$ и неизохронности $\chi = 0.75$

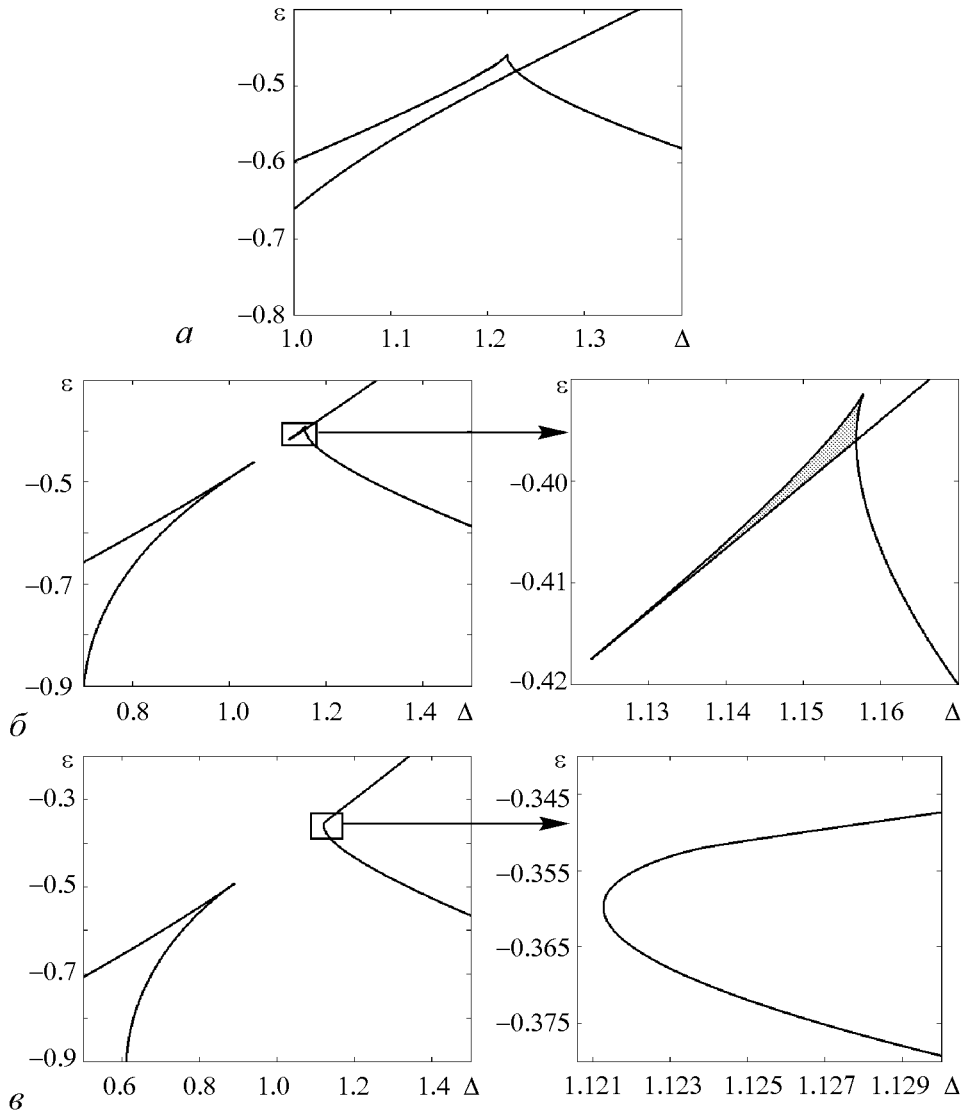


Рис. 1.10. *а* – увеличенная окрестность точки сборки, представленной на рис. 1.9, *б* и построенной для $\mu = 0.6$; *б, в* – перестройка «ласточкин хвост» при переходе от $\mu = 0.495$ к $\mu = 0.44$

По аналогии с анализом п. 1.5, без труда получаем условия катастрофы «ласточкин хвост»

$$\mu = \frac{\delta(\chi + \delta)}{\sqrt{2}}. \tag{1.43}$$

Для данных значений параметров $\delta = 0.5$, $\chi = 0.75$, имеем $\mu = 0.4419417...$ Переход через это бифуркационное значение можно наблюдать на увеличенных правых фрагментах рис. 1.10, *б* и рис. 1.10, *в*[5].

[5]Еще одна перестройка имеется при $\mu = \dfrac{\delta(\chi - \delta)}{\sqrt{2}}$.

Полезно указать также точки на плоскости параметров (Δ, ε), которым отвечает катастрофа «ласточкин хвост»

$$\Delta = 2\chi\delta - \frac{3}{2}\delta^2, \quad \varepsilon = -\frac{\delta}{\sqrt{2}}. \tag{1.44}$$

Вернемся к рис. 1.9. С дальнейшим уменьшением параметра диссипативной связи (рис. 1.9, *в*) возникает структура бифуркационных линий, аналогичная рис. 1.5, но не обладающая соответствующей симметрией. Язык синхронизации имеет «основание» в виде отрезка конечной ширины по частотной расстройке, края которого даются соотношением $\Delta = 2\chi\delta \pm 2\mu$. С уменьшением величины диссипативной связи ширина «основания» уменьшается, и при $\mu = 0$ обращается в ноль. Возникает симметричный относительно оси расстроек язык с характерным острием (рис. 1.9, *г*). При дальнейшем уменьшении параметра μ в отрицательную сторону вновь наблюдается появление «основания» конечной ширины и асимметрии картины (рис. 1.9, *д*).

Часть 2. Компьютерное моделирование системы связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга

2.1. Общая методика. Обратимся теперь к компьютерному исследованию исходной системы связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга (1.1). Эта задача характеризуется пятью параметрами, оказывающими влияние на динамику фазы и картину синхронизации в соответствии с представленным выше обсуждением. Для исходной системы (1.1) количество значимых параметров возрастает, поскольку оказываются существенными уже оба параметра λ_1 и λ_2, а не только их разность $\delta = (\lambda_1 - \lambda_2)/2$.

Использованный в первой части работы метод медленно меняющихся амплитуд применим в случае малых значений λ_1 и λ_2. Теперь мы будем выбирать их примерно равными единице. Такой выбор, с одной стороны, дает возможность хотя бы на качественном уровне выявить особенности, характерные для фазовой динамики, а с другой – иллюстрирует феномены исходной системы связанных осцилляторов, которые оказываются, конечно, существенно богаче. В конкретных расчетах для идентичных систем полагаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, а для неидентичных – либо $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$, если неидентичность фиксирована, либо $\lambda_1 = 1+\delta$, $\lambda_2 = 1-\delta$, если неидентичность является изменяемым параметром (см. также замечание о нормировке в конце п. 1.1).

Для иллюстрации колебательных режимов и картины синхронизации использовался метод карт динамических режимов [16]. На таких картах белым цветом и оттенками серого показаны найденные численно области, соответствующие различным периодам колебаний (рис. 2.1). Черный цвет обозначает хаотические и квазипериодические режимы. Периоды циклов при построении карт динамических режимов определялись с использованием метода сечений Пуанкаре. После достаточно длительного переходного процесса, когда можно считать фазовую траекторию вышедшей на предельный цикл, определялись точки ее пересечения с секущей плоскостью. При этом рассматривались только траектории, пересекающие сечение Пуанкаре в одном направлении. Количество точек пересечения секущей плоскости принималось за период предельного цикла. В качестве сечения Пуанкаре удобно выбрать гиперповерхность в четырехмерном фазовом пространстве, соответствующую обращению в

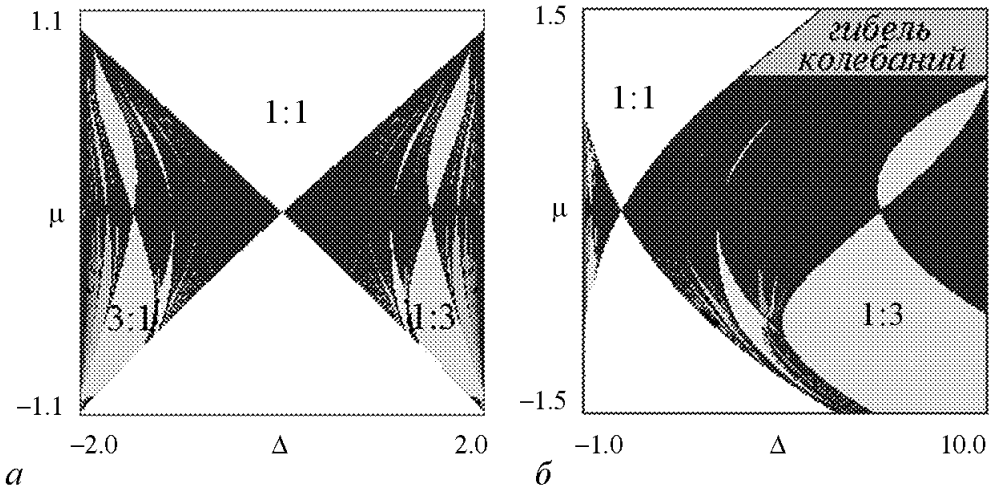


Рис. 2.1. Языки синхронизации и области квазипериодических режимов на плоскости параметров частотная расстройка осцилляторов – величина связи (Δ, μ): *а* – для системы (1.1), *б* – для системы (2.1). Параметры: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$

ноль скорости одного из осцилляторов, например, $\dot{y} = 0$. Цвет на карте выбирался в соответствии с периодом в таком сечении.[6]

Прежде чем перейти к иллюстрациям, сделаем еще два замечания. Во-первых, укороченная система (1.7) получена из (1.1) с помощью некоторых приближений. Поэтому отвечающая ей форма полной дифференциальной системы может быть подобрана неоднозначно. Поясним это. Если вместо (1.1) использовать, например,

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x + \beta x^3 + \varepsilon(x - y) + \mu(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}) = 0, \\ &\frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - y^2)\frac{dy}{dt} + (1 + \Delta)y + \beta y^3 + \varepsilon(y - x) + \mu(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}) = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

то придем тем не менее к тому же укороченному уравнению (1.7). Хотя (2.1) и отличается от (1.1) всего лишь перенормировкой, эти отличия оказываются существенными. Например, система (1.1) при $\Delta > 2$ описывает ситуацию, когда первый осциллятор характеризуется двухъямным потенциалом, а (2.1) – нет; на плоскости параметров может «исчезнуть» область гибели колебаний при одинаковых значениях параметра λ (см. ниже) и т.д. Мы выберем для дальнейших иллюстраций именно систему (1.1), поскольку для нас важны характерные симметрии задачи, а они в этой форме максимально представлены.

Во-вторых, для компьютерных экспериментов знак коэффициентов в уравнениях не является (с точки зрения расчетов) существенным моментом. В этом отличие от реальной системы, когда изменение знака связи может потребовать использования

[6]Поскольку осцилляторы равноправны, при таком выборе только одна из систем языков синхронизации по одну сторону от основного языка оказывается окрашенной, а вторая – фиксируется как область периода 1 (например, языки с числами вращения 3:1 и 1:3, соответственно). Чтобы сделать картину более информативной, мы учитываем равноправие осцилляторов и окрашиваем такие языки в одинаковый цвет.

совершенно другого радиотехнического элемента. Мы уже отмечали, что полезно выбирать разные варианты знаков, и не будем делать в компьютерных экспериментах никаких ограничений.

2.2. Чисто диссипативная связь. Будем следовать структуре первой части работы. Поэтому, прежде всего, представим карту динамических режимов для чисто диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля (1.1) в случае идентичных по управляющему параметру систем при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (рис. 2.1, *а*). В соответствии с нашими замечаниями, «разрешаем» константе связи принимать и отрицательные значения. По частотной расстройке масштаб рисунка ограничен точками $\Delta = \pm 2$, вне которого изображающие точки при компьютерном моделировании убегают на бесконечность. Для иллюстрации «проблемы» выбора дифференциальной системы на рис. 2.1, *б* показана аналогичная карта для системы (2.1). Заметны определенные различия, например, с точки зрения реализации эффекта гибели колебаний[7] и симметрии картины.

Вернемся к системе (1.1). На рис. 2.1, *а* видим четко выраженный, симметричный относительно вертикальной оси язык, границы которого с высокой точностью даются полученным в п. 1.2 соотношением $\mu = \pm\dfrac{\Delta}{2}$. Языки для случаев диссипативной и активной связи на рисунке визуально идентичны, как и предсказывает анализ фазовой динамики.

На рис. 2.2 показаны две проекции четырехмерного фазового пространства системы (2.1): фазовый портрет первого осциллятора на плоскости $(x, \dot{x})$ и своего рода «фигуры Лиссажу» на плоскости переменных (x, y). Выбрана очень маленькая частотная расстройка и представлены случаи диссипативной и активной связи. Из рассмотрения рисунков хорошо видно, что в первом случае (диссипативной связи) осцилляторы синхронизовались практически точно в фазе, а во втором – в противофазе. Хорошо видно также, что при диссипативной связи радиус орбиты уменьшается, а при активной – увеличивается. Физически это совершенно понятно, поскольку активная связь подкачивает дополнительную энергию в систему, а формально это следует из (1.10). В последнем случае цикл искажается еще и по форме с ростом λ [15] так же, как и в автономной системе.

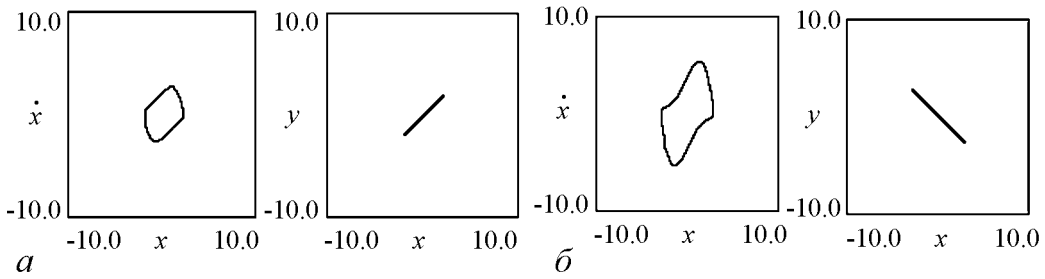


Рис. 2.2. Проекции аттракторов на плоскости $(x, \dot{x})$ и «фигуры Лиссажу» на плоскости (x, y) для системы (1.1). Параметры: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\Delta = 0.01$; $\mu = 0.5$ – диссипативная связь (*а*) и $\mu = -0.5$ – активная связь (*б*)

[7]Эффект гибели колебаний состоит в том, что положение равновесия в начале координат становится устойчивым из-за значительной величины диссипативной связи и колебания исчезают [1, 2].

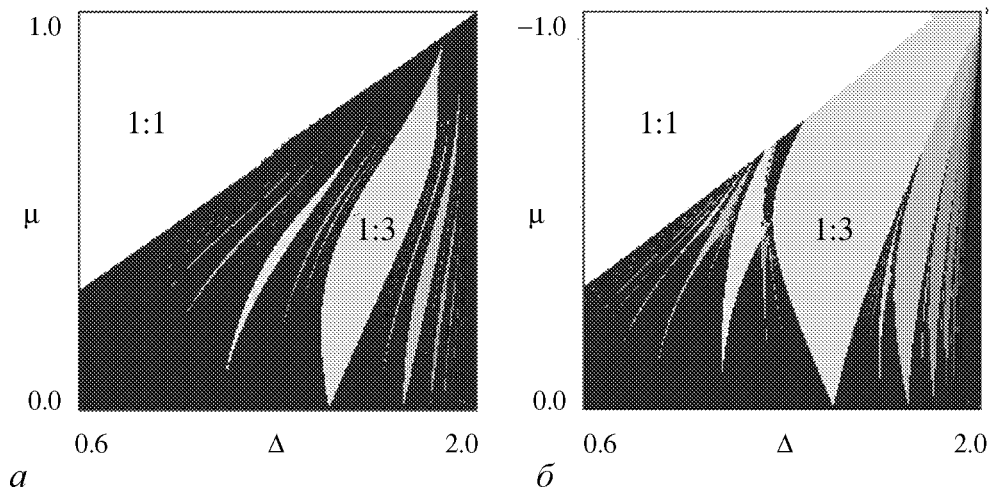


Рис. 2.3. Увеличенные фрагменты рис. 2.1 в случае диссипативной (*а*) и активной (*б*) связи. Значения параметров те же, что и на рис. 2.1

На плоскости параметров на рис. 2.1 мы видим также целую систему высших языков синхронизации, из которых наиболее значительный отвечает соотношению частот осцилляторов 3:1 (и 1:3). Эти языки уже не описываются укороченными уравнениями (1.7).

Увеличенные фрагменты карты режимов на рис. 2.3, *а, б* показывают, что при рассмотрении всей системы языков, в отличие от уравнения фазовой динамики, диссипативная и активная связь уже не эквиваленты. Действительно, для активной связи языки заполняют более широкую частотную полосу и характеризуются более развитым внутренним устройством. Это объясняется тем, что, в соответствии с (1.7), диссипативная связь несколько понижает «эффективный» управляющий параметр, а активная – повышает. Поэтому в системе с активной связью колебания в некотором смысле отвечают большему превышению значения «эффективного» управляющего параметра над пороговым.

2.3. Диссипативная связь, неидентичность и неизохронность. Добавим теперь к диссипативной связи последовательно неидентичность, а затем – неизохронность. Уравнение фазовой динамики (1.12) говорит о том, что введение этих факторов в отсутствие инерционной связи не сказывается на картине синхронизации. Посмотрим, что будет в случае, когда управляющий параметр λ уже не мал.

Сначала добавим только неидентичность осцилляторов, выбрав $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Карта динамических режимов на плоскости параметров $(\Delta,\ \mu)$ для данного случая представлена на рис. 2.4. Хорошо видно, что в области малых расстроек язык остается симметричным, как и предсказывает анализ на основе фазового уравнения, но в области больших расстроек он становится асимметричным. При этом порог синхронизации при отрицательных расстройках существенно ниже, чем при положительных. В рамках уравнения фазовой динамики (1.12) этот эффект уже нельзя объяснить[8].

[8]Здесь представлен случай, когда отсутствует эффект гибели колебаний. В его присутствии неидентичность осцилляторов оказывается более существенной, соответствующие вопросы обсуждаются в [22].

Добавим теперь к диссипативной связи неизохронность осцилляторов, то есть положим в (1.1) $\beta \neq 0$ (рис. 2.5). В этом случае вершина языка располагается точно при нулевой расстройке, и язык строго симметричен. Видно, однако, что система высших языков синхронизации испытала очень существенные метаморфозы. Теперь они имеют развитое внутреннее устройство, более характерное для традиционного синусотображения окружности [1, 16]. На увеличенном фрагменте (рис. 2.5, *б*) можно видеть характерные структуры *crossroad area* [16], каскады удвоений и области хаоса. На рис. 2.5, *б* граница основного языка синхронизации (показанного белым цветом) является линией седло-узловой бифуркации. В соответствии с этим высшие языки выстраиваются вдоль этой линии.

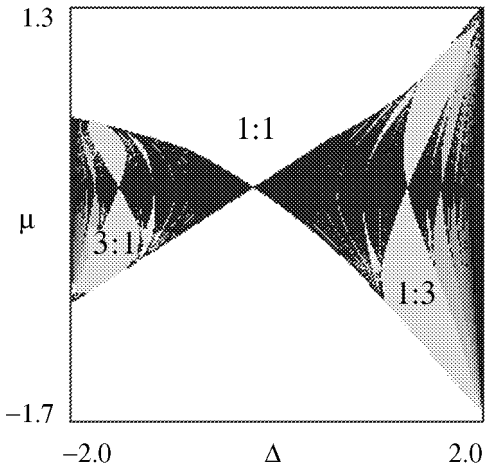


Рис. 2.4. Карта динамических режимов неидентичных по управляющему параметру систем с диссипативной связью, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\beta = 0$

Следует отметить, однако, что система (1.1) с учетом нелинейности вида βx^3 может демонстрировать и режимы, которые уже не имеют никаких аналогов в рамках укороченных уравнений. Действительно, несвязанным осцилляторам с помощью (1.1) можно сопоставить потенциал

$$U(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4, \quad U(y) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)y^2 + \frac{1}{4}\beta y^4. \qquad (2.2)$$

Если $\Delta > 2$ или $\Delta < -2$, то либо первый, либо второй осциллятор имеет вблизи начала координат не минимум, а максимум потенциала. В этом случае они при $\beta > 0$ характеризуются «двухъямным» потенциалом. Тогда вблизи начала координат нет движения с некоторой собственной частотой, которое можно было бы

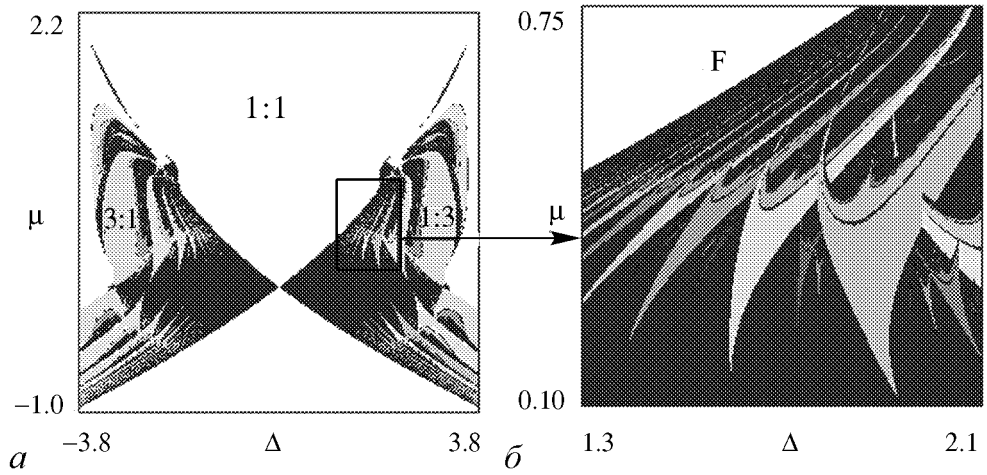


Рис. 2.5. Карта динамических режимов неизохронных систем с диссипативной связью и ее увеличенный фрагмент. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$, $\beta = 0.5$. F – линия седло-узловой бифуркации

использовать как «опорное» в методе медленно меняющихся амплитуд, и укороченная система уравнений (1.9) не применима. В то же время система (1.1) может быть решена численно и в этом случае. Как видно из (2.2), даже при малых β за счет члена $\frac{1}{4}\beta x^4$ исчезает разбегание траекторий при любых величинах параметра Δ. Соответственно, диапазон Δ может быть увеличен (сравните рис. 2.4 и рис. 2.5,*а*).

Фрагмент карты динамических режимов в окрестности точки $\Delta = 2$, отвечающей «фазовому переходу» от одноямного к двухъямному потенциалу в первом осцилляторе, представлен на рис. 2.6. На этом рисунке в области $\Delta > 2$ граница языка устроена сложнее, чем мы видели ранее. Можно видеть, например, жесткий переход для области периода 1 (в левой части рис. *а*), который возникает при сканировании плоскости параметров в ходе построения карты. Кроме того, в области периода 1 выделяются некоторые дополнительные линии.

Для более ясного понимания устройства плоскости параметров на рис. 2.6, *б* показаны найденные численно бифуркационные линии. На этом рисунке наряду с линией седло-узловой бифуркации можно видеть две линии бифуркации Неймарка–Сакера. Именно переход между линиями седло-узловой бифуркации и Неймарка–Сакера и фиксируется как «скачок» на карте рис. 2.6, *а*. Одна из линий бифуркации Неймарка–Сакера имеет концевую точку на линии седло-узловой бифуркации, которая является бифуркацией коразмерности два – резонанс 1:1 [17]. Вторая линия бифуркации Неймарка–Сакера кончается в точке резонанса 1:2 на линии бифуркации удвоения периода. Соответственно, в правой части рис. 2.6 при уменьшении величины связи имеют место удвоения периода. Имеется некоторая особая точка – точка слияния двух линий бифуркации Неймарка–Сакера при $\mu = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Это некоторая вырожденная ситуация. Природа вырождения понятна: при $\mu = \lambda_1 = \lambda_2$ в системе, в соответствии с (1.1) и (1.7), диссипативная связь точно компенсирует отрицательное трение в автоколебательной системе.

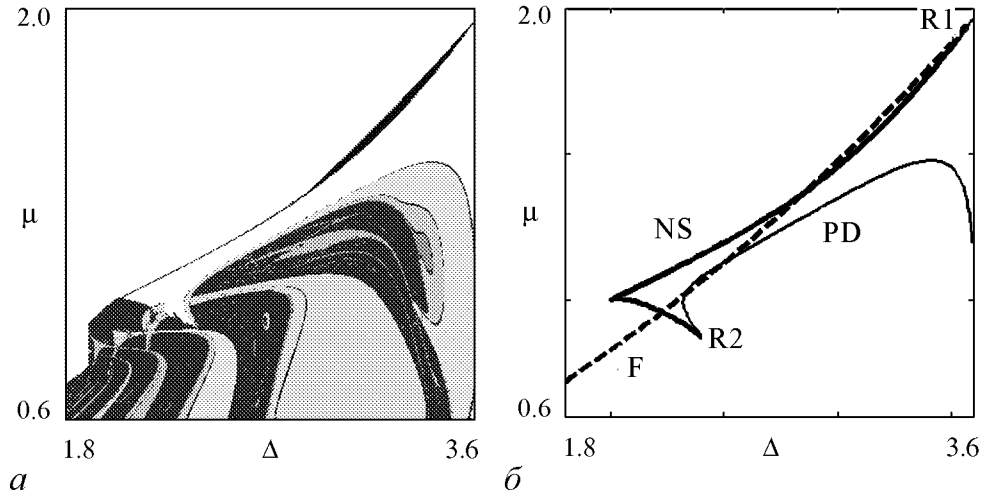


Рис. 2.6. *а* – Фрагмент карты динамических режимов, показанной на рис. 2.5, *а*, в окрестности точки $\Delta = 2$. *б* – Линии и точки бифуркаций: NS – линии бифуркации Неймарка–Сакера, F – линия седло-узловой бифуркации, PD – линия бифуркации удвоения периода, R1 – точка резонанса 1:1, R2 – точка резонанса 1:2

Теперь добавим и неидентичность и неизохронность одновременно (рис. 2.7). В этом случае основной язык очень сильно смещается в область положительных расстроек. В рамках фазового уравнения (1.12) получаем оценку $\Delta = 2\chi\delta = 6\beta\delta \approx 3$. Смещение настолько велико, что вершина языка оказывается вне области $-2 < \Delta < 2$, которой соответствуют положительные коэффициенты, отвечающие за собственные колебания в исходной системе (1.1). По сравнению с изохронным случаем, видна резко выраженная асимметрия картины относительно вершины основного языка.

Выделенный фрагмент на рис. 2.7, *б* демонстрирует систему языков, содержащих острова удвоенного периода. Четко фиксируется мультистабильность и возможность перекрытия языков синхронизации. На карте это выглядит как система перекрывающихся своеобразных «колец», принадлежащих разным языкам синхронизации.

Вершины языков на рис. 2.7, *б* выстраиваются весьма характерным образом вдоль линии бифуркации Неймарка–Сакера NS. (Сравните с альтернативным слу-

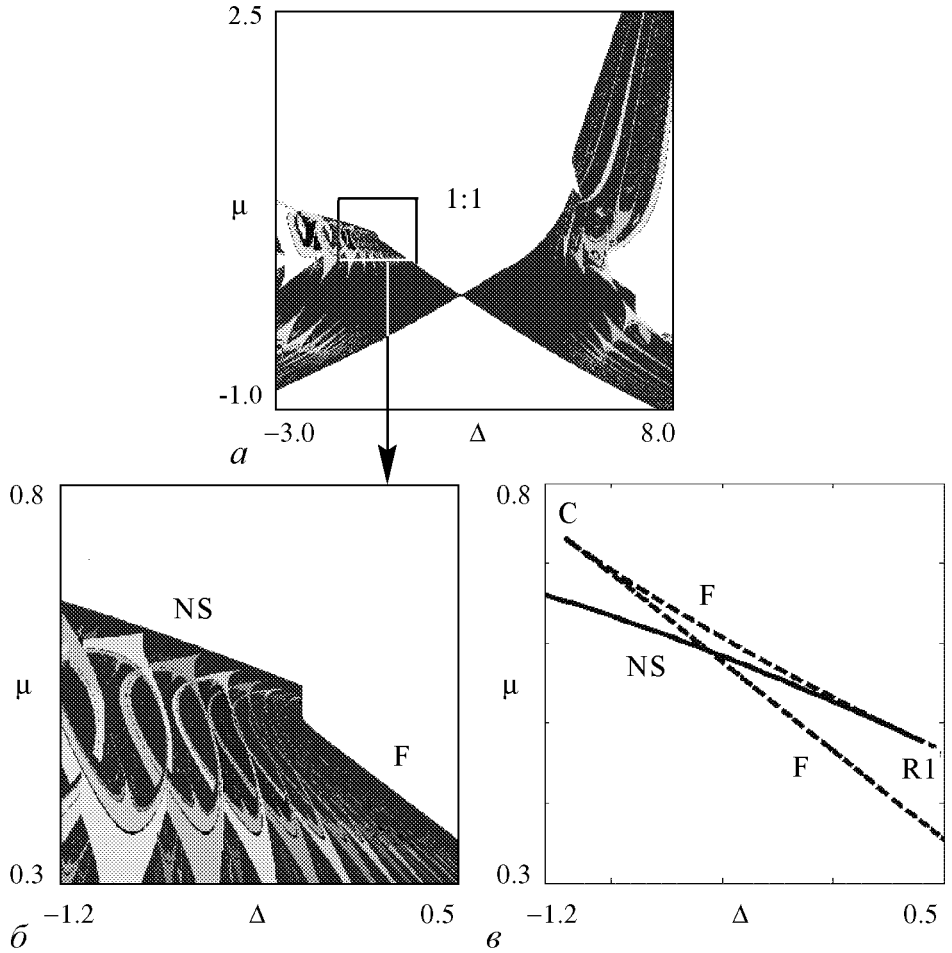


Рис. 2.7. Карта динамических режимов (*а*) и ее увеличенный фрагмент (*б*) для неизохронной неидентичной системы с диссипативной связью: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, ($\delta = 0.5$) и $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Линии и точки бифуркаций на границе основного языка синхронизации (*в*): NS – линия бифуркации Неймарка–Сакера, F – линии седло-узловой бифуркации, R1 – точка резонанса 1:1, C – точка сборки

чаем седло-узловой бифуркации рис. 2.5, *б*.) В правой части рисунка границей основной области синхронизации вновь является линия седло-узловой бифуркации. В окрестности точки $\Delta = -0.2$ можно видеть жесткий переход с линии седло-узловой бифуркации на линию Неймарка–Сакера.

На рис. 2.7, *в* показаны найденные с помощью численного бифуркационного анализа основные линии и точки. Можно видеть, что линия седло-узловой бифуркации имеет острие с точкой сборки, а линии седло-узловой бифуркации и Неймарка–Сакера имеют общую точку бифуркации коразмерности два, резонанс 1:1. Представленная конфигурация весьма характерна для задач синхронизации и выявляется и в системе ван дер Поля с гармоническим воздействием [19].

2.4. Чисто инерционная связь. Обратимся теперь к случаю инерционной связи. На рис. 2.8, *а* показана соответствующая карта для идентичных ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) изохронных осцилляторов. При построении рисунка масштабы изменения связи и частотной расстройки выбирались так, чтобы в «поле зрения» оказалась вся система основных языков синхронизации. В отличие от случая диссипативной связи это требует существенно больших значений параметров.

Прежде всего, отметим, что основной язык синхронизации имеет ярко выраженное острие (корневую особенность), как и следует из анализа фазовой динамики. С другой стороны, в выбранных нами масштабах частоты и связи случаи отрицательной и положительной связи резко различаются. Можно видеть также область «убегания» траекторий на бесконечность своеобразной формы. Ее границы можно найти аналитически. Действительно, в случае чисто инерционной связи система уравнений (1.1) в изохронном случае может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = 0, \\ &\frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - y^2)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где потенциал задается соотношением

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\left[(1 - \frac{\Delta}{2} + \varepsilon)x^2 - 2\varepsilon xy + (1 + \frac{\Delta}{2} + \varepsilon)y^2\right]. \tag{2.4}$$

Таким образом, в отличие от диссипативной связи, инерционная связь изменяет форму потенциала так, что он становится функцией обеих координат. Нетрудно показать, что выражение (2.4) отвечает двумерному минимуму при условии

$$\varepsilon > \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta^2}{4} - 1\right). \tag{2.5}$$

Если же неравенство имеет противоположный знак, минимум превращается в седло. В этом случае наблюдается убегание траекторий. Граница области убегания дается соотношением

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta^2}{4} - 1\right). \tag{2.6}$$

Эту границу и можно видеть на рис. 2.8. Пороговое значение связи, при которой еще возможны колебания, $\varepsilon = -\frac{1}{2}$.

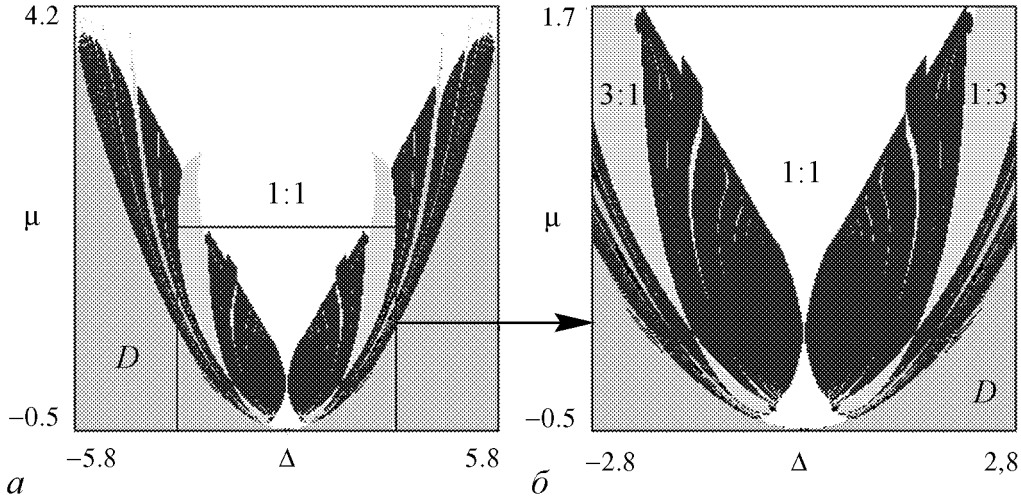


Рис. 2.8. *а* – Система языков синхронизации для системы с чисто инерционной связью при $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\beta = 0$. *б* – увеличенный фрагмент в области острия основного языка синхронизации. Здесь и далее D обозначает область, в которой траектории системы убегают на бесконечность

На рис. 2.8, *б* показан фрагмент рис. 2.8, *а*, демонстрирующий в увеличенном виде острие основного языка. Видно, что в этих масштабах случаи положительных и отрицательных параметров связи уже почти эквивалентны, как и предсказано анализом динамики фазы. Более того, в области отрицательных ε можно видеть и всю систему высших языков синхронизации.

2.5. Инерционная связь и неидентичность. На рис. 2.9, *а* представлена карта для случая инерционной связи с добавлением неидентичности осцилляторов. Анализ фазовой динамики предсказывал бистабильность внутри основного языка синхронизации (см. рис. 1.2 и его обсуждение). Компьютерные эксперименты также обнаруживают бистабильность, которая проявляется в перекрытии разных «листов» карты. (Вообще говоря, разные листы карты, отвечающие разным начальным условиям, но одному, периоду, формально не должны визуализироваться. Однако на краях листа, когда имеет место седло-узловая бифуркация, процессы во времени резко замедляются, и при компьютерном исследовании линия бифуркации проявляется отдельными точками или даже целой линией [16], как и видно на рис. 2.9. (Для более точного описания многолистной структуры карты, однако, нужно использовать бифуркационный анализ.)

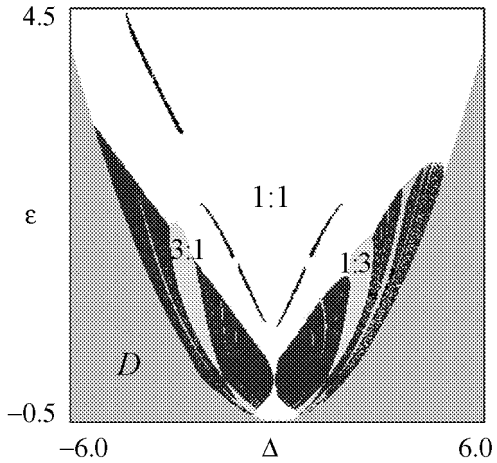


Рис. 2.9. Плоскость параметров частотная расстройка – величина связи для неидентичных систем с инерционной связью; $\delta = 0.5$ ($\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$).

При обсуждении фазовой динамики обращалось внимание на две харак-

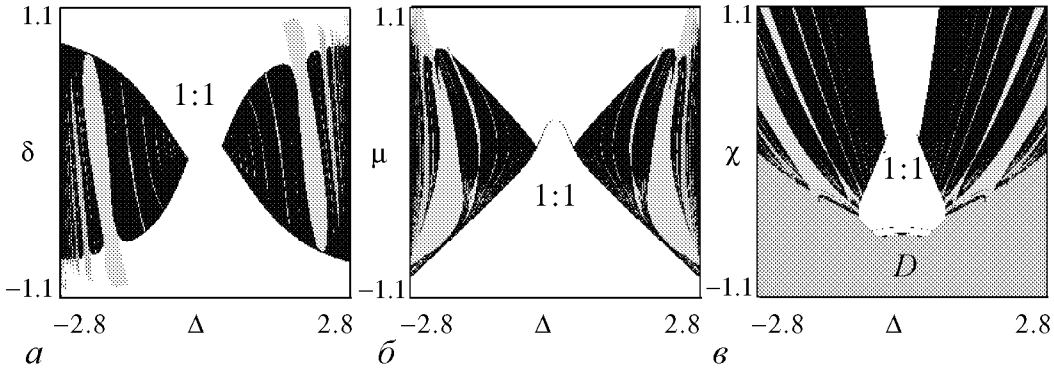


Рис. 2.10. Карты динамических режимов для случаев: *а* – инерционная связь и неидентичность; *б* – комбинированная связь; *в* – инерционная связь и неизохронность. Все карты построены для $\varepsilon = 0.5$

терные «базовые» конфигурации языков, которые реализуются соответственно на плоскостях параметров частотная расстройка – сила связи $(\Delta,\ \varepsilon)$ и частотная расстройка – параметр неидентичности $(\Delta,\ \delta)$. На рис. 2.10, *а* показана карта режимов, представляющая второй характерный тип языка синхронизации, которую следует сравнивать с рис. 1.4. Как и в рамках фазовой динамики, в этом случае язык опирается на конечный интервал частотных расстроек. Можно видеть и два листа карты динамических режимов, «нависающие» друг над другом, что отвечает бистабильности и соответствует рис. 1.4.

2.6. Исследование симметрий, предсказанных в рамках уравнения фазовой динамики. В первой части работы, анализируя возможные симметрии обобщенного уравнения Адлера (1.12) относительно сдвига фазы, мы установили эквивалентность трех случаев: наличие инерционной связи и неидентичности, комбинированной связи, инерционной связи и неизохронности. На рис. 2.10 показаны карты динамических режимов, отвечающие второму «типу» языка синхронизации для этих трех вариантов. Можно видеть хорошее соответствие пары инерционная связь и неидентичность (рис. 2.10, *а*) паре диссипативная и инерционная связь (рис. 2.10, *б*). Это соответствие касается не только формы основного языка синхронизации, но отчасти и устройства всей системы языков. Существенно хуже соотносится с этими двумя ситуациями случай инерционная связь и неизохронность (рис. 2.10, *в*). Различия, однако, касаются, в первую очередь, системы высших языков синхронизации.

2.7. Инерционная связь с добавкой неидентичности, неизохронности и диссипативной связи. Обратимся теперь к системе с инерционной связью и неизохронностью. На рис. 2.11 показано устройство системы языков синхронизации в такой системе в широком диапазоне изменения параметров. Иллюстрации даны на плоскости частотная расстройка и один из параметров: величина связи ε (рис. 2.11, *а*) и параметр неизохронности $\chi = 3\beta$ (рис. 2.11, *б*). Можно видеть, что добавление неизохронности существенно влияет на систему высших языков синхронизации. На рис. 2.11, *а* наблюдаются острова удвоенного периода внутри высших языков в области положительных значений константы связи. В области отрицательных значений ε, в нижней части карты, можно видеть еще более сильные метаморфозы: возникают развитые структуры *crossroad area* и картина перекрытия языков, характерная для традиционного синус-отображения окружности [1, 16].

На плоскости параметров частотная рассстройка Δ – параметр неизохронности χ (рис. 2.11, *б*) высшие языки синхронизации имеют совершенно другую, весьма специфическую конфигурацию. В нижней части карты можно видеть области разбегания траектории. Это понятно: при отрицательных значениях параметра неизохронности соответствующий потенциал (2.2) характеризуется обращенными «вниз» ветвями параболы четвертой степени. Интересно отметить, что доминирующие высшие языки 1:3 при приближении к границе разбегания заметно расширяются и внутри них наблюдаются удвоения периода и структуры *crossroad area*.

На следующем рис. 2.12 показаны карты динамических режимов, представляющие собой модификацию рис. 2.11 при введении нового фактора: существенной

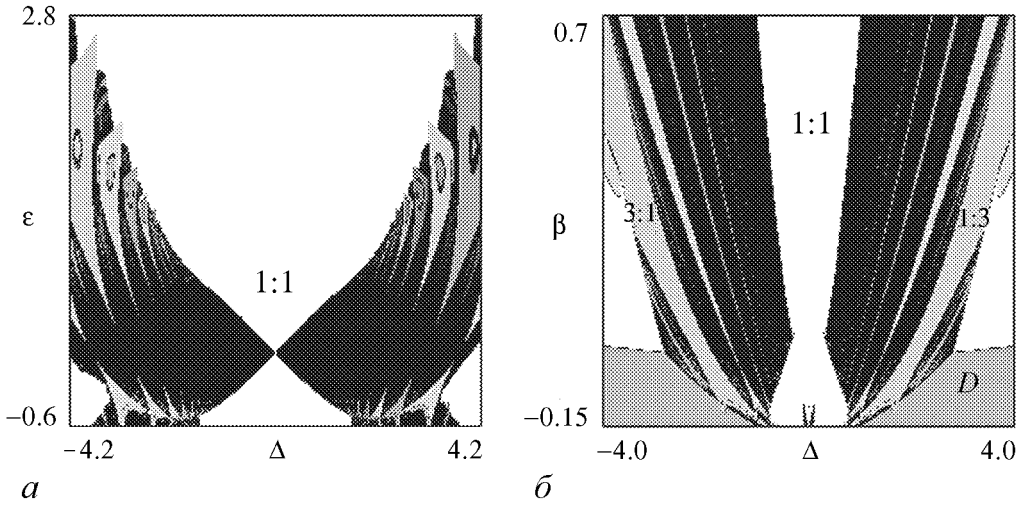


Рис. 2.11. Карты динамических режимов для системы с инерционной связью и неизохронностью, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$: *а* – $\beta = 1$, *б* – $\varepsilon = 0.5$

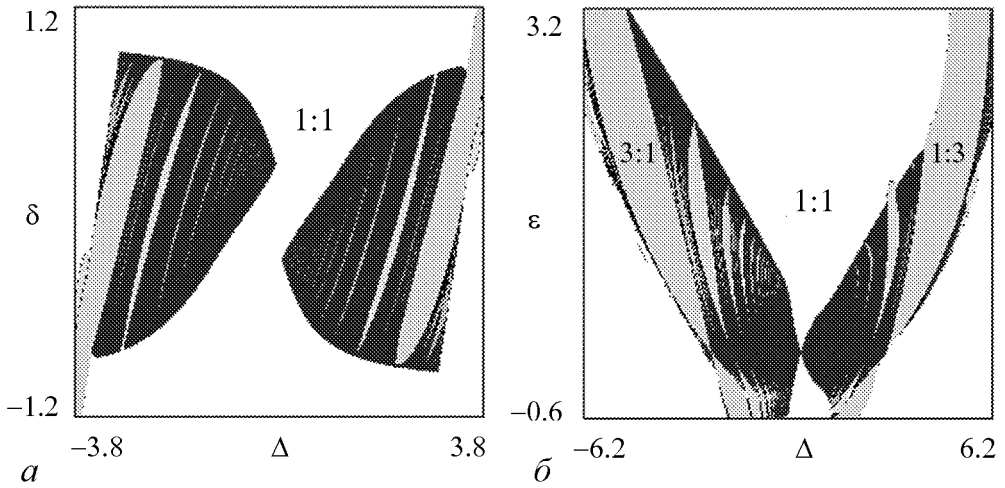


Рис. 2.12. Карты динамических режимов для неидентичных неизохронных систем с инерционной связью: *а* – на плоскости (δ, Δ) при фиксированном значении $\varepsilon = 0.5$; *б* – на плоскости (ε, Δ) при фиксированном значении $\delta = 0.5$ ($\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$). Параметр неизхронности в обоих случаях $\chi = 0.75$ ($\beta = 0.25$)

неидентичности. При обсуждении соответствия со случаем фазовой динамики, левый рисунок рис. 2.12 нужно сопоставить с рис. 1.6, *е*. (При этом следует только иметь в виду разные масштабы по осям координат на этих рисунках.) Можно видеть, что предсказанная в рамках фазовой динамики характерная «наклонная» структура области периода 1, выявляется и на карте динамических режимов. При этом четко фиксируются и характерные «изломы» на ее краях, связанные, как мы видели при обсуждении в п.1.6, с катастрофой типа «ласточкин хвост». Рис. 2.12, *б* также демонстрирует появление асимметрии в устройстве плоскости параметров частотная расстройка – величина связи.

На рис. 2.13 и 2.14 можно видеть карты динамических режимов, представляющие собой дальнейшую модификацию рис. 2.12 при введении в неидентичной неизо-

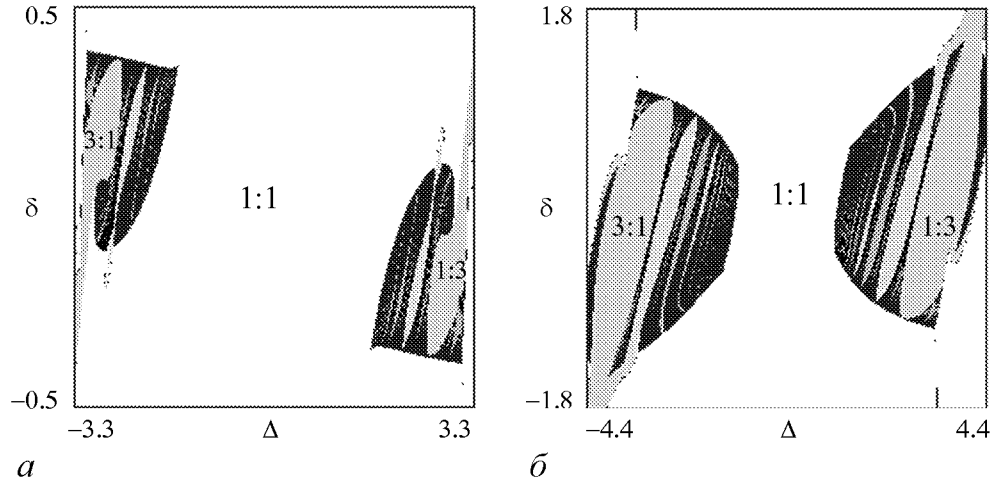


Рис. 2.13. Карты динамических режимов для неидентичных неизохронных систем с диссипативной и инерционной связью на плоскости (Δ, δ) для $\chi = 0.75$, $\varepsilon = 0.5$, $\mu = 0.6$ (*а*) и $\mu = -0.4$ (*б*)

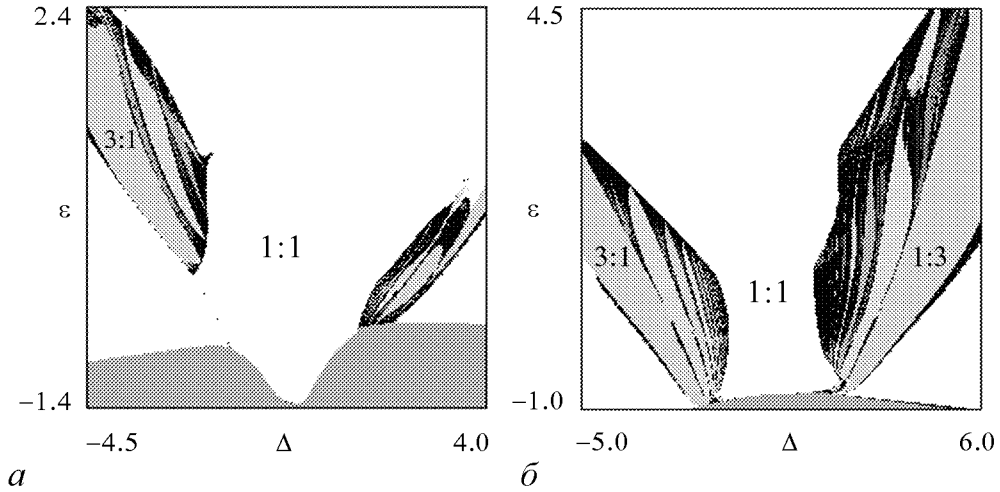


Рис. 2.14. Карты динамических режимов для неидентичных неизохронных систем с диссипативной и инерционной связью на плоскости (Δ, ε) для $\chi = 0.75$, $\delta = 0.5$ ($\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$), $\mu = 0.6$ (*а*), и $\mu = -0.4$ (*б*)

хронной системе с инерционной связью добавки диссипативной связи. На рис. 2.13 представлены карты на плоскости частотная расстройка – параметр неидентичности, а на рис. 2.14 – частотная расстройка – величина инерционной связи. При этом рисунки (*а*) соответствуют диссипативной связи ($\mu > 0$), а рисунки (*б*) – активной ($\mu < 0$). Это случай, когда существенны все четыре фактора, оказывающие влияние на поведение системы связанных осцилляторов ван дер Поля (1.1).

Из рис. 2.13, *а* можно видеть, что резко увеличивается область основной синхронизации 1:1 при $\mu > 0$. Несколько меньшее уширение имеется и для случая $\mu < 0$, однако, для него характерно заметное уширение высших языков синхронизации, которые на рис. 2.13, *б*, фактически, смыкаются краями. На плоскости частотная расстройка – величина инерционной связи на рис. 2.14 также увеличивается и меняет конфигурацию область синхронизации 1:1, и весьма характерным является уширение высших языков синхронизации.

Заключение

В настоящей работе получено обобщенное уравнение Адлера, описывающее фазовую динамику связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга с учетом всех существенных факторов: неидентичности, неизохронности, диссипативной и инерционной связи. Показано, что все они, за исключением диссипативной связи, для описания динамики фазы требуют учета эффектов второго порядка. Поэтому, например, введение неидентичности или неизохронности проявляется лишь в присутствии инерционной связи как комбинированный эффект.

В рамках фазового уравнения условия основных бифуркаций, ответственных за конфигурацию областей синхронизации, находятся аналитически. При этом типичными являются перестройки «клюв к клюву» и «ласточкин хвост». Проведенное рассмотрение наглядно показало продуктивность подхода, основанного на рассмотрении случаев произвольных знаков всех параметров системы, включая величину диссипативной связи.

Фазовое уравнение обладает определенными симметриями, которые за счет преобразования сдвига фазы приводят к одинаковой картине бифуркационных линий в случае совместного действия некоторых факторов: инерционная связь и неидентичность, комбинированная связь, а также инерционная связь и неизохронность.

Методом карт динамических режимов выявлено устройство пространства параметров дифференциальной системы осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга в случае не малых управляющих параметров с учетом неидентичности, неизохронности, диссипативной и инерционной связи. При этом обнаруживаются как черты поведения, предсказанные в рамках фазовой динамики (форма основного языка у его основания, наличие областей бистабильности и др.), так и существенно отличающиеся моменты (например, исчезновение областей гибели колебаний). В общем случае система характеризуется большим числом параметров и ее полный численный анализ очень объемен. Исследование фазовой динамики облегчает его, давая некоторый «путеводитель» в пространстве параметров.

К числу достоинств метода карт динамических режимов можно отнести выявление всей структуры языков синхронизации и их внутреннего устройства, кото-

рое, особенно в неизохронном случае, оказывается достаточно сложным и включает острова удвоенного периода, структуры *crossroad area* и области хаоса. Весьма наглядно выявляются два типа организации высших языков: в окрестности линии седло-узловой бифуркации, ограничивающей основной язык синхронизации, и линии бифуркации Неймарка–Сакера.

Компьютерное исследование подтверждает также связанную с симметрией фазового уравнения эквивалентность некоторых типов поведения. При этом случаи инерционная связь плюс неидентичность и комбинированная связь демонстрируют не только сходство формы основного языка синхронизации, но и похожую структуру высших языков синхронизации.

Авторы выражают благодарность Сатаеву И.Р. и Кузнецову С.П. за полезное обсуждение.

Работа поддержана грантом РФФИ (грант № 06-02-16773).

Библиографический список

1. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация, фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003, 508 с.
2. *Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N.* Amplitude response of coupled oscillators // Physica D. 1990. Vol. 41. P. 403.
3. *Rand R.H., Holmes P.J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1980. Vol. 15. P. 387.
4. *Storti D.W., Rand R.H.* Dynamics of two strongly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1982. Vol. 17, № 3. P. 143.
5. *Chakraborty T., Rand R.H.* The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1988. Vol. 23, № 5/6. P. 369.
6. *Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W.* Chaos and nonisochronism in weakly coupled nonlinear oscillators // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44. P 3452.
7. *Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W.* Hysteresis of synchronous – asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43. P. 5638.
8. *Pastor I., Perez-Garcia V.M., Encinas-Sanz F., Guerra J.M.* Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48. P. 171.
9. *Camacho E., Rand R.H., Howland H.* Dynamics of two van der Pol oscillators coupled via a bath // Int. J. of Solids and Structures. 2004. Vol. 41. P. 2133.
10. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* О динамике двух связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга с диссипативной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6. С. 48.
11. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Особенности устройства пространства параметров двух неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 4. С. 3.

12. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Physica D. 2004. Vol. 189, № 1-2. P. 8.
13. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.
14. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
15. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. Сер. Современная теория колебаний и волн. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006.
16. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Сер. Современная теория колебаний и волн. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
17. *Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005. 415 с.
18. Солитоны / Под ред. Р. Буфала и Ф. Кодри. М.: Мир, 1983. 408 с.
19. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.; Ижевск; Москва: РХД, 2002. 560 с.
20. *Mettin R., Parlitz U., Lauterborn W.* Bifurcation structure of the driven van der Pol oscillator // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3, № 6.
21. *Арнольд В.И.* Эволюция волновых фронтов и эквивариантная лемма Морса // В кн.: В.И. Арнольд. Избранное–60. М.: Фазис, 1997. С. 289.
22. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Ю.П. Роман.* Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 4. С. 3.
23. *Кузнецов А.П, Кузнецов С.П.* Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса (обзор) // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 10–12. С. 1079.
24. *Anishchenko V.S. et al.* Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems. Springer, 2001. 374 p.

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию *11.01.2008*
После доработки *25.03.2008*

COUPLED VAN DER POL AND VAN DER POL–DUFFING OSCILLATORS: DYNAMICS OF PHASE AND COMPUTER SIMULATION

A.P. Kuznetsov, N.V. Stankevich, L.V. Turukina

Synchronization in the system of coupled nonidentical and nonisochronous van der Pol oscillators with dissipative and inertial type of coupling is discussed. Generalized Adler equation is obtained and investigated in the presence of all factors. Basic symmetry of the equation, with leads to equivalence of some physical factors, is displayed. Numerical investigation of parameters space of initial differential system is realized. Results of two methods are compared and discussed.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).
E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.narod.ru

Станкевич Наталия Владимировна – родилась в 1985 году, окончила (с отличием) Саратовский госуниверситет, факультет нелинейных процессов (2007). В настоящее время аспирант факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается исследованием особенностей синхронизации короткими импульсами в многомерных автоколебательных системах. Автор 15 публикаций, в том числе 6-ти статей в российских и международных журналах.

Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор более 50 научных публикаций, из них около 20 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.
E-mail:ludmila@forpost.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 4, 2008 УДК 517.9

АСИМПТОТИКА СЛОЖНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СТРУКТУР В СИСТЕМАХ С БОЛЬШИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.А. Кащенко, И.С. Кащенко

Работа посвящена локальной динамике дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями. Рассмотрена ситуация, когда одно из запаздываний является асимптотически большим. При этом условии критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия имеют бесконечную размерность. Показано, что роль нормальных форм играют семейства уравнений типа Гинзбурга–Ландау. Их нелокальная динамика и определяет локальное поведение решений исходных уравнений.

Введение

Дифференциальные уравнения с запаздыванием служат математическими моделями для многих прикладных задач [1–4]. Одним из простейших и в то же время наиболее часто встречающихся в прикладных задачах [4–5] уравнением с запаздыванием является скалярное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} + x = F(x, x(t-T)), \quad T > 0.$$

В ряде работ отмечалась важность исследования динамики этого уравнения при условии

$$T \gg 1.$$

В настоящей работе при таком условии исследуется динамика более сложного объекта – уравнения с двумя запаздываниями

$$\dot{x} + x = ax(t-T) + bx(t-T_1) + f(x, x(t-T), x(t-T_1)), \tag{1}$$

где $0 < T < T_1$, а достаточно гладкая функция $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ имеет в нуле порядок малости выше первого. Уравнение (1) является естественным обобщением уравнения с одним запаздыванием.

Для упрощения дальнейших вычислений считаем, что нелинейность f зависит только от первого аргумента, то есть $f(x,y,z) \equiv f(x) = f_2x^2 + f_3x^3 + \dots$.

Ситуация, когда f зависит от $x(t-T)$ и от $x(t-T_1)$, разбирается полностью аналогично.

Центральное место исследования занимает изучение поведения корней характеристического квазиполинома

$$\lambda + 1 = a\exp(-\lambda T) + b\exp(-\lambda T_1), \tag{2}$$

линеаризованного в нуле уравнения (1).

Критический случай в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия (1) реализуется, когда характеристическое уравнение (2) имеет корни с нулевой вещественной частью и не имеет с положительной. Интерес представляет выявление тех особенностей, которые, во-первых, возникают при достаточно большом параметре T_1, характеризующем запаздывание, и, во-вторых, специфичны для уравнения с двумя запаздываниями.

Изучим динамику уравнения (1) в окрестности нулевого состояния равновесия при условии, что параметры a, b и T как-то фиксированы, а для параметра T_1 выполнено условие

$$T_1 \gg 1. \tag{3}$$

Необходимо отметить, что численное исследование (1) наталкивается на значительные сложности вычислительного характера.

Произведем нормировку времени $t \to tT_1$. В итоге получим другую форму записи уравнения (1)

$$\varepsilon\dot{x} + x = ax(t - \varepsilon T) + bx(t-1) + f(x), \tag{4}$$

где $0 < \varepsilon = T_1^{-1} \ll 1$.

1. Линейный анализ

Характеристический квазиполином для линеаризованного в нуле уравнения (4) имеет вид

$$\varepsilon\lambda + 1 = a\exp(-\varepsilon\lambda T) + b\exp(-\lambda). \tag{5}$$

Для формулировки результатов введем несколько обозначений. Пусть $P(\omega)$ – комплексная функция вещественного аргумента ω, такая что

$$P(\omega) = i\omega + 1 - a\exp(-i\omega T) = \rho(\omega)\exp(i\varphi(\omega)).$$

Здесь $\rho(\omega) \geq 0$ и $\varphi(\omega)$ – вещественнозначные функции. Обозначим через b_0 минимум функции $\rho(\omega)$

$$b_0 = \min_{0\leq\omega<\infty} \rho(\omega) = \rho(\omega_0).$$

Отметим, что ω_0 определяется единственным образом.

Кроме этого, обозначим через $\omega(T)$ наименьший положительный корень уравнения

$$-\omega = \operatorname{tg}\omega T$$

и определим значение $a_0(T) = -\sqrt{1+\omega^2(T)}$.

Сформулируем несколько простых промежуточных утверждений. Через q ниже обозначена некоторая положительная и не зависящая от ε постоянная, точное значение которой несущественно.

Лемма 1. *Пусть либо $a > 1$ либо $a < a_0(T)$. Тогда при всех достаточно малых ε уравнение (5) имеет корень $\lambda(\varepsilon)$, удовлетворяющий неравенству $\mathrm{Re}\lambda(\varepsilon) \geq q$.*

Тем самым в условии Леммы 1 задача о динамике уравнения (4) становится нелокальной: в достаточно малой (но не зависящей от ε) окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (4) не может существовать аттрактор. Поэтому предполагаем, что выполнено неравенство

$$a_0(T) \leq a \leq 1.$$

Отметим, что в случае $a = a_0(T)$ или $a = 1$ параметр $b_0 = 0$. Этот случай рассмотрен ниже. Здесь же считаем, что

$$a_0(T) < a < 1. \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть $|b| > b_0$. Тогда при всех достаточно малых ε существует такой корень $\lambda(\varepsilon)$ уравнения (5), для которого $\mathrm{Re}\lambda(\varepsilon) \geq q$.*

Лемма 3. *Пусть $|b| < b_0$. Тогда при всех достаточно малых ε все корни уравнения (5) удовлетворяют неравенству $\mathrm{Re}\lambda \leq -q$.*

В условии Леммы 2 задача о динамике уравнения (4) снова является нелокальной, а в условии Леммы 3 – тривиальной: все решения из достаточно малой (но не зависящей от ε) окрестности нулевого решения стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Таким образом, в изучении нуждается ситуация, когда параметр b близок по модулю к b_0. Положим

$$b = b_0(1 + \mu b_1), \quad 0 < \mu \ll 1.$$

Случай, когда b близок к $-b_0$, совпадает с этим в пределах точности вычислений, поэтому разбирать его мы не будем.

Легко показать, что в данном случае квазимногочлен (5) имеет бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси, вида

$$\lambda_k = \frac{\omega_0}{\varepsilon} i + (\theta_0(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k)i + \varepsilon\tilde{\lambda}_{k1} + \varepsilon^2\tilde{\lambda}_{k2} + \mu b_1 + o(\varepsilon^2 + \mu), \tag{7}$$

где $\theta_0(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ такое, что $\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_0(\varepsilon)$ является целым кратным 2π; $\Omega \in [0, 2\pi)$ определяется уравнением

$$b_0 \exp(-i\Omega) = i\omega_0 + 1 - a\exp(-i\omega_0 T);$$

а для λ_{k1} и λ_{k2} справедливы формулы

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_{k1} &= -\varphi'(\omega_0)(\theta_0(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k)i, \\
\tilde{\lambda}_{k2} &= -\frac{1}{2}(\varphi'(\omega_0)^2 + \frac{\rho''(\omega_0)}{b_0^{-1}})(\theta_0(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k)^2 - \\
&\quad - (\varphi'(\omega_0))^2(\theta_0(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k)i - \frac{1}{2}\varphi''(\omega_0)(\theta_0(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k)^2 i.
\end{aligned}$$

Формула (7) дает асимптотическое представление корней, которые непрерывно зависят от малого параметра ε. Снимем требование непрерывности. Тогда мы можем записать корни (5) следующим образом.

Фиксируем $0 < \gamma < 1$ и выберем произвольно положительное число ω. Аналогично θ_0 обозначим через $\theta(\varepsilon)$ такое число из полуинтервала $[0, 2\pi)$, что $\omega\varepsilon^{-\gamma} + \theta(\varepsilon)$ является целым кратным 2π.

Тогда можно показать, что характеристический многочлен (5) имеет набор корней вида

$$\lambda_k(\varepsilon) = \left(\frac{\omega_0}{\varepsilon} + \frac{\omega k}{\varepsilon^\gamma} + \theta_0(\varepsilon) + k\theta(\varepsilon) + \Omega\right) i + \varepsilon^{1-\gamma} i(\lambda_{k1} + o(1)) + \varepsilon^{2-2\gamma}\lambda_{k2} + \\ + \mu b_1 + o(\varepsilon^{2-2\gamma} + \mu),$$

где θ_0, $\theta \in [0, 2\pi)$ и дополняют до целого кратного 2π величины $\omega_0\varepsilon^{-1}$ и $\omega\varepsilon^{p/2-1}$, соответственно. А коэффициенты λ_{k1} и λ_{k2} определяются по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_{k1} &= -i\omega k\varphi'(\omega_0), \\ \lambda_{k2} &= -\frac{\omega^2 k^2}{2}((\varphi'(\omega_0)^2 + \rho''(\omega_0)b_0^{-1}). \end{aligned}$$

Ниже рассмотрены две ситуации:

$$b = b_0(1 + \varepsilon^2 b_1), \text{ то есть } \mu = \varepsilon^2 \tag{8}$$

и

$$b = b_0(1 + \varepsilon^p b_1), \text{ то есть } \mu = \varepsilon^p, \quad 0 < p < 2. \tag{9}$$

2. Нелинейный анализ

Изучим локальную динамику (4) в окрестности нуля при условиях (8) и (9). Случай (8) подробно разобран в [6]. Основной результат состоит в том, что при условии (8) локальную динамику исходного уравнения (4) определяет поведение решений комплексного уравнения типа Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + d_2 \frac{\partial u}{\partial r} + d_3 u + du|u|^2, \quad u(\tau, r) = u(\tau, r+1), \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2}((\varphi'(\omega_0)^2 + \rho''(\omega_0)b_0^{-1} + i\varphi''(\omega_0)), \\ d_2 &= -(\varphi'(\omega_0))^2 + 2id_1(\theta_0 + \Omega), \\ d_3 &= b_1 - d_1(\theta_0 + \Omega)^2 - (\varphi'(\omega_0))^2(\theta_0 + \Omega), \\ d &= 3f_3 e^{i\Omega} + 2f_2[P(2\omega_0) - b_0 e^{-2i\Omega}]^{-1}. \end{aligned}$$

Задача (10) играет роль нормальной формы для уравнения (4).

Коэффициенты уравнения (10) через θ_0 зависят от малого параметра ε. При $\varepsilon \to 0$ функция $\theta_0(\varepsilon)$ принимает бесконечное количество раз каждое значение из

промежутка $[0, 2\pi)$. Обозначим через $\varepsilon_n(\alpha)$ такую последовательность, что $\varepsilon_n(\alpha)\to 0$ и $\theta_0(\varepsilon_n(\alpha)) \equiv \alpha$ ($\alpha \in [0, 2\pi)$).

Теорема 1. *Пусть при* $\theta_0 = \alpha$ *уравнение (10) имеет периодическое орбитально устойчивое (неустойчивое) решение* $u_*(\tau, r)$. *Тогда исходное уравнение (4) при* $\varepsilon=\varepsilon_n(\alpha)$ *имеет быстро осциллирующее асимптотическое по невязке решение*

$$\begin{aligned} x_*(t) = \varepsilon \Big(& e^{(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta_0+\Omega-\varepsilon\varphi'(\omega_0)(\theta_0+\Omega))it} u_*(\varepsilon^2 t, t(1-\varepsilon\varphi'(\omega_0)) + \\ & + e^{-(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta_0+\Omega-\varepsilon\varphi'(\omega_0)(\theta_0+\Omega))it} \overline{u}_*(\varepsilon^2 t, t(1-\varepsilon\varphi'(\omega_0))\Big) + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь и далее асимптотическим по невязке решением называется такое решение, которое удовлетворяет уравнению с некоторой асимптотически малой невязкой.

Пусть теперь выполнено условие (9). Положим $\gamma = 1 - p/2$.

Произведем в (4) замену

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) &= \varepsilon^{p/2} e^{(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta_0+\Omega)ti} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{\omega i k t_1} + \\ &+ \varepsilon^{p/2} e^{-(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta_0+\Omega)ti} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\xi}_k(\tau) e^{-\omega i k t_1} + \varepsilon^p x_2 + \varepsilon^{3p/2} x_3 + \dots \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $t_1 = (\omega\varepsilon^{-\gamma} + \theta - \varepsilon^{p/2}\varphi'(\omega_0))t$, $\tau = \varepsilon^p t$, а функции $x_j = x_j(t\varepsilon^{-1}, t_1, \tau)$ периодичны по первым двум аргументам. Действуя стандартным образом, то есть приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим, что амплитуды ξ_k должны удовлетворять бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \lambda_{k2}\xi_k + \left(3 f_3 e^{i\Omega} + 2 f_2 \left[P(2\omega_0) - b_0 e^{-2i\Omega}\right]^{-1}\right) \Psi_k(\xi). \tag{13}$$

Здесь через $\Psi_k(\xi)$ обозначен коэффициент при $\exp(2\pi i k t)$ в разложении функции

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(\tau) e^{2\pi i m t} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\xi}_m(\tau) e^{-2\pi i m t} \right)^3$$

в ряд Фурье.

Система (13) может быть представлена в виде одного комплексного параболического уравнения типа Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + b_1 u + d|u|^2, \quad u(\tau, r) = u\left(\tau, r + \frac{2\pi}{\omega}\right), \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2}((\varphi'(\omega_0)^2 + \rho''(\omega_0) b_0^{-1} + i\varphi''(\omega_0)), \\ d &= 3 f_3 e^{i\Omega} + 2 f_2 [P(2\omega_0) - b_0 e^{-2i\Omega}]^{-1}. \end{aligned}$$

Это следует из того, что, разложив функцию $u(t,x)$ в ряд по собственным функциям рассматриваемой краевой задачи для определения соответствующих коэффициентов разложения, приходим в точности к системе (13).

Теорема 2. *Пусть краевая задача (14) имеет решение $u_*(\tau, r)$. Тогда у исходного уравнения (4) существует асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{3p/2})$ решение вида*

$$x_*(t,\varepsilon) = \varepsilon^{p/2}\Big(e^{(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta_0+\Omega)ti}u_*(\varepsilon^p t, (\omega\varepsilon^{p/2-1}+\theta-\varepsilon^{p/2}\varphi'(\omega_0))t) +$$

$$+ e^{-(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta_0+\Omega)ti}\overline{u}_*(\varepsilon^p t, (\omega\varepsilon^{p/2-1}+\theta-\varepsilon^{p/2}\varphi'(\omega_0))t)\Big) + o(\varepsilon^{p/2}).$$

Заметим, что мы не можем сделать вывод о существовании у (4) точного решения с приведенной асимптотикой. Однако, если u_* неустойчиво, то даже если точное решение существует – оно неустойчиво. Таким образом, нам достаточно рассматривать только устойчивые решения (14).

3. Роль малых возмущений

Изучим роль малых возмущений в уравнениях с большим запаздыванием. Предположим, что выполняется одно из равенств

$$a = 1 \quad \text{или} \quad a = a(T).$$

Тогда, как было сказано выше, критическим является случай $b_0 = 0$. При этом в уравнении (4)

$$b = \mu b_1, \quad 0 < \mu \ll 1.$$

Ситуация, когда μ меньше по порядку, чем ε, является тривиальной. Поэтому уделим внимание тем случаям, когда $\varepsilon\mu^{-1} \le c$, где константа c не зависит ни от μ, ни от ε.

Тогда уравнение (4) записывается в виде

$$\varepsilon\dot{x} + x = ax(t-\varepsilon T) + \mu b_1 x(t-1) + f(x). \tag{15}$$

Первый случай. Положим

$$a = 1 + \mu a_1.$$

Рассмотрим вопрос о поведении корней уравнения (5). Если $a_1 > 0$, то у (5) существует корень $\lambda_+(\varepsilon,\mu) = a_1\mu\varepsilon^{-1}(1+o(1))$. Понятно, что при малых ε этот корень имеет положительную вещественную часть и отделен от нуля. Следовательно, в некоторой окрестности нулевого решения уравнения (4) нет устойчивых решений.

Если $a_1 < 0$, то положим в (4) $\lambda = \mu\varepsilon^{-1}\lambda_1(\varepsilon,\mu) + \ldots$ Выделяя главную часть уравнения, получим, что $\lambda_1(\varepsilon)$ должно удовлетворять уравнению

$$(1+T)\lambda_1(\varepsilon) = a_1 + b_1\exp(-\mu\varepsilon^{-1}\lambda_1(\varepsilon)). \tag{16}$$

Уравнение (16) является характеристическим квазиполиномом для уравнения с запаздыванием

$$(1+T)\dot{x} = a_1 x + b_1 x(t-\mu\varepsilon^{-1}).$$

Обозначим через λ_{1k} ($k = 0, 1 \dots$) все корни (16) (занумеруем в порядке убывания вещественных частей).

Перейдем теперь к рассмотрению нелинейного уравнения (15). Положим в нем

$$x(t, \varepsilon, \mu) = \mu\xi(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \dots, \tag{17}$$

где $\tau = \mu\varepsilon^{-1}t$, а функция $x_2(\tau)$ ограничена при $\tau \to \infty$.

Подставим (17) в (15) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. На первом шаге приходим к верному тождеству, а на втором – получим уравнение для нахождения $\xi(\tau)$

$$(1 + T)\frac{d\xi}{d\tau} = a_1\xi(\tau) + b_1\xi(\tau - \mu\varepsilon^{-1}) + f_2\xi^2. \tag{18}$$

Основной результат состоит в том, что в рассматриваемом случае уравнение (18) играет роль нормализованной формы для исходного уравнения (15).

Отметим, что, если $\varepsilon\mu^{-1} \ll 1$, то уравнение (18) является уравнением с большим запаздыванием. Для исследования его динамики применимы методы, изложенные в [7, 8].

Теорема 3. *Пусть уравнение (18) имеет орбитально устойчивое периодическое решение* $\xi_*(\tau)$. *Тогда уравнение (15) имеет устойчивое решение с асимптотикой*

$$x(t, \varepsilon) = \mu\xi_*(\mu\varepsilon^{-1}(1 + o(1)t) + o(\mu)).$$

Второй случай. Пусть

$$a = a_0(T)(1 + \mu a_1), \tag{19}$$

где $a_0(T)$ такое, как было определено выше.

Стандартными методами легко показать, что при условии (19) квазимногочлен

$$\lambda + 1 = ae^{-\lambda T}$$

имеет пару комплексно-сопряженных корней $\lambda_\pm(\mu)$ вида

$$\lambda_+(\mu) = i\omega_0(T) + \mu\lambda_1 + O(\mu^2), \tag{20}$$

где λ_1 описывается выражением

$$\lambda_1 = \frac{a_1(i\omega_0(T) + 1)}{1 + T(i\omega_0(T) + 1)}.$$

При этом все остальные корни этого квазимногочлена имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при малых μ.

Положим $\theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ таким, что выражение $\omega_0(T)\varepsilon^{-1} + \theta(\varepsilon)$ является целым кратным 2π. Затем в (4) положим

$$\lambda = \lambda(\varepsilon, \mu) = \frac{i\omega_0(T)}{\varepsilon} + \frac{\mu}{\varepsilon}\lambda_1(\mu) + \dots$$

Собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε и μ, приходим к уравнению для определения $\lambda_1(\mu)$

$$\lambda_1 = A + B\exp(-\lambda_1\mu\varepsilon^{-1}), \tag{21}$$

в котором

$$A = \frac{a_1(i\omega_0(T)+1)}{1+(i\omega_0(T)+1)T},$$

$$B = \frac{b_1}{1+(i\omega_0(T)+1)T}\exp(i\theta(\mu)).$$

Уравнение (21) имеет счетное множество корней λ_{1k} ($k = 1, 2, \dots$), которые можно занумеровать в порядке убывания их вещественных частей. Важно отметить, что это уравнение является характеристическим квазиполиномом уравнения с запаздыванием

$$\dot{x} - Ax = Bx(t - \mu\varepsilon^{-1}).$$

Все остальные корни характеристического квазиполинома (4) имеют отрицательные вещественные части, которые при $\varepsilon, \mu \to 0$ находятся в левой комплексной полуплоскости и отделены от мнимой оси.

Вернемся к исходному нелинейному уравнению (15). Положим в нем

$$x(t,\varepsilon,\mu) = \mu^{1/2}\left[\xi(\tau)e^{i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t} + \overline{\xi}(\tau)e^{-i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t}\right] + \mu x_2(t,\tau) + \mu^{3/2}x_3(t,\tau) + \dots, \tag{22}$$

где $\tau = \mu\varepsilon^{-1}t$, а функции $x_j(t,\tau)$ являются $(2\pi\varepsilon/\omega_0(T))$-периодическими по первому аргументу. Подставим (22) в (15) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε и μ. На первом шаге получится верное тождество, а на втором, то есть для коэффициентов при μ, получим уравнение для нахождения $x_2(t,\tau)$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} + x_2 - a_0(T)x_2(t-T) = f_2\left(\xi^2(\tau)e^{2i\omega_0\varepsilon^{-1}t} + 2|\xi(\tau)|^2 + \overline{\xi}^2(\tau)e^{-2i\omega_0\varepsilon^{-1}t}\right). \tag{23}$$

Из (23) находим функцию $x_2(t,\tau)$

$$x_2(t,\tau) = x_{21}\xi^2(\tau)e^{2i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t} + x_{22}|\xi(\tau)|^2 + \overline{x}_{21}\overline{\xi}^2(\tau)e^{-2i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t},$$

где

$$x_{21}(\tau) = \frac{f_2 a_0(T)}{(1+i\omega_0(T))^2 + a_0(1+2i\omega_0(T))},$$

$$x_{22}(\tau) = \frac{2f_2}{1-a_0(T)}.$$

После этого, собирая коэффициенты при $\mu^{3/2}$, приходим к уравнению для определения функции $x_3(t,\tau)$, условие разрешимости которого в классе $(2\pi\varepsilon/\omega_0)$-периодических функций состоит в выполнении равенства

$$\frac{d\xi}{d\tau} - A\xi = B\xi(\tau - \mu\varepsilon^{-1}) + \sigma_1|\xi|^2\xi, \tag{24}$$

где

$$\sigma_1 = 2f_2(x_{21} + x_{22}) + 3f_3.$$

Уравнение (24) играет роль нормальной формы для уравнения (15) в случае (19). Так же, как и выше, если $\varepsilon\mu^{-1} \ll 1$, то это уравнение является уравнением с большим запаздыванием, для исследования которого можно применять методы, описанные в [7, 8].

Теорема 4. *Пусть уравнение (24) имеет решение* $\xi_*(\tau)$. *Тогда уравнение (15) имеет асимптотическое по невязке решение с точностью* $O(\mu)$ *вида*

$$x_*(t,\varepsilon) = \mu^{1/2}\left(\xi_*(\mu\varepsilon^{-1}t)e^{i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t} + \overline{\xi}_*(\mu\varepsilon^{-1}t)e^{-i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t}\right)(1+o(1)).$$

Выводы

Сделаем некоторые выводы относительно влияния второго запаздывания на динамику системы.

Если параметр $a = 0$, то исходное уравнение (4) является уравнением с одним большим запаздыванием, которое может быть записано в виде

$$\varepsilon\dot{x} + x = bx(t-1) + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots$$

Принципиальное упрощение этого случая состоит в том, что введенный выше параметр $\omega_0 = 0$. То есть критические случаи могут реализоваться на асимптотически небольших модах. Если же $a \neq 0$, то есть мы имеет дело с уравнением с двумя запаздываниями, то все критические случаи реализуются только на асимптотически больших модах.

Нормализованные формы для уравнения с одним запаздыванием будут, в отличие от задач (10) и (14), не комплексными, а действительными. Динамика таких уравнений проще, хотя и остается достаточно богатой.

Присутствие в нормализованной форме зависящего от ε коэффициента $\theta_0 = \theta_0(\varepsilon)$ позволяет сделать вывод о чувствительности динамики даже к небольшим вариациям параметра T_1.

Таким образом, добавление второго запаздывания T делает динамику системы существенно сложнее.

Библиографический список

1. *Ланда П.С.* Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983.
2. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
3. *Кузнецов С.П.* Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью (обзор) // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, №12. С. 1410.
4. *Kilias T., Kutzer K., Moegel A., Schwarz W.* Electronic chaos generators – design and applications // International Journal of Electronics. 1995. Vol. 79. №. 6. P. 737.
5. *Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Н., Шарковский А.Н.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1986.
6. *Кащенко С.А.* Бифуркационные особенности сингулярно возмущенного уравнения с запаздыванием // Сибирский математический журнал. 1999. Т. 40, №3. С. 567.

7. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, №8. С. 1448.
8. *Кащенко И.С.* Динамические свойства уравнений первого порядка с большим запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. Яросл. гос. ун-т. Ярославль. 2007. Т. 14, № 2. С. 58.

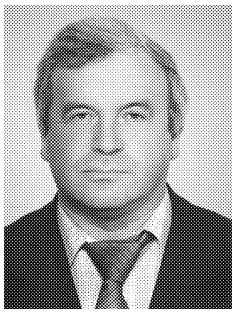
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 14.01.2008

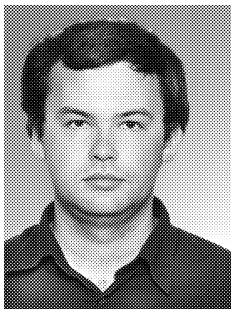
ASYMPTOTICS OF COMPLEX SPATIO-TEMPORAL STRUCTURES IN THE SYSTEMS WITH LARGE DELAY

S.A. Kaschenko, I.S. Kaschenko

The local dynamics is considered of differential equations with two delays in the case of one delay is asymptotically large. Under this condition, critical cases have infinite dimension. As the normal form equations the Ginzburg–Landau equations have been. Their nonlocal dynamics defines local behavior of solutions of initial equations.



Кащенко Сергей Александрович – родился в 1953 году в Ярославле, окончил Ярославский государственный университет в 1975 году. После окончания ЯрГУ работает в там же. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1990) в области теории нелинейных колебаний. Автор 4х монографий. Опубликовал 200 научных статей по направлению, указанном выше.



Кащенко Илья Сергеевич – родился в 1982 году в Ярославле, окончил Ярославский государственный университет в 2004 году. После окончания ЯрГУ работает там же. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ЯрГУ (2007) в области нелинейной динамики уравнений с запаздыванием. Является автором 20 научных и научно-методических трудов.

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 4, 2008 УДК 530.182

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ ПРИ АНАЛИЗЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ДИСКРЕТНОЙ СИММЕТРИЕЙ

К.Г. Жуков, Г.М. Чечин

В настоящей работе подробно описан разработанный авторами теоретико-групповой метод, который позволяет в ряде случаев существенным образом упростить исследование устойчивости динамических режимов в нелинейных физических системах с дискретной симметрией. Суть метода состоит в расщеплении линеаризованной в окрестности данного режима исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений на некоторое число независимых подсистем малой размерности. Применение метода иллюстрируется на примере анализа устойчивости нескольких колебательных режимов в простой октаэдрической структуре.

Введение

Исследование устойчивости динамических режимов в нелинейных системах представляет собой достаточно сложную задачу. Это особенно ощутимо в тех случаях, когда изучаемая система описывается большим числом степеней свободы, а рассматриваемый динамический режим не является периодическим.

Стандартный подход к исследованию устойчивости предполагает линеаризацию исходной системы в окрестности данного динамического режима и дальнейший анализ устойчивости нулевого решения полученной системы линейных дифференциальных уравнений с переменными во времени коэффициентами. В работе [1] нами был предложен теоретико-групповой метод упрощения анализа устойчивости динамических режимов в произвольных системах (консервативных и диссипативных) с дискретной симметрией, который в ряде случаев позволяет существенным образом упростить анализ устойчивости за счет *расщепления* вышеупомянутой линеаризованной системы на отдельные *независимые подсистемы* малой размерности.

В настоящей работе рассмотрено применение этого метода для анализа устойчивости трех различных колебательных режимов в нелинейной октаэдрической системе. Изложению развиваемого теоретико-группового подхода предпошлем описание некоторых понятий, идей и результатов теории нелинейных динамических систем с дискретной симметрией (более подробное их рассмотрение можно найти в предыдущих работах [2–5]).

1. Симметрия нормальных мод

Все возможные динамические режимы в нелинейной системе с дискретной группой симметрии G можно классифицировать по ее подгруппам $G_j \subseteq G$ [2, 4]. В качестве группы G может фигурировать группа симметрии равновесной конфигурации системы, группа симметрии ее гамильтониана (для гамильтоновых систем) или группа симметрии описывающих данную систему динамических уравнений.

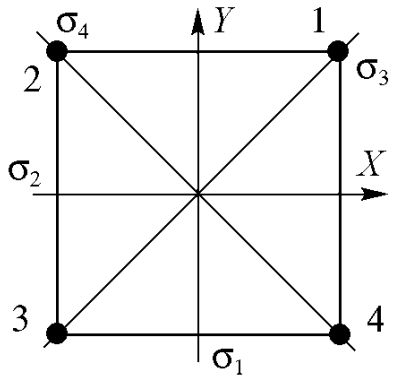


Рис. 1. Механическая модель плоской четырехатомной молекулы

В разделах 1 и 2 вышесказанное иллюстрируется на простейшем примере. Рассмотрим механическую модель плоской четырехатомной молекулы, равновесная конфигурация которой представляет собой изображенный на рис. 1 квадрат. Эта равновесная конфигурация атомов, расположенных в узлах квадрата, обладает группой симметрии $G = C_{4v}$. Здесь и далее мы будем использовать обозначения точечных групп симметрии по Шенфлису (см., например, [6]). Эта группа состоит из восьми элементов симметрии. В нее входят повороты на углы $0°$, $90°$, $180°$, $270°$ вокруг оси Z, проходящей через центр квадрата и перпендикулярной к плоскости рисунка, и четыре плоскости зеркального отражения (σ_1, σ_2, σ_3, σ_4), которые также перпендикулярны плоскости рисунка и проходят через центр квадрата.

Зная силы взаимодействия между атомами нашей модельной молекулы[1], можно с помощью гармонического приближения, предлагаемого теорией малых колебаний механических систем (см., например, [7]), построить систему линейных нормальных мод (нормальных колебаний).

Будем далее рассматривать колебания атомов около своих положений равновесия лишь в плоскости XY. Таким образом, динамика исследуемой механической системы описывается восемью степенями свободы, и, стало быть, имеем восемь нормальных мод.

Каждая из нормальных мод описывает некоторый колебательный режим молекулы и обладает определенной *группой симметрии*. На рис. 2 стрелками показаны атомные смещения в некоторый момент времени, которые соответствуют четырем из этих нормальных мод. Заметим, что в пределах каждой конфигурации длины стрелок, то есть величины атомных смещений *одинаковы*.

В любой момент времени конфигурация атомов, соответствующая первой нормальной моде (рис. 2, *а*), представляет собой квадрат, причем ребро этого квадрата осциллирует во времени. Атомная конфигурация, отвечающая второй моде (рис. 2, *б*), представляет собой ромб, который в процессе колебаний вытягивается то вдоль одной, то вдоль другой своей диагонали. Третья нормальная мода (рис. 2, *в*), описывает

[1]Например, они могут характеризоваться парным центральным потенциалом типа Леннарда–Джонса или Морзе.

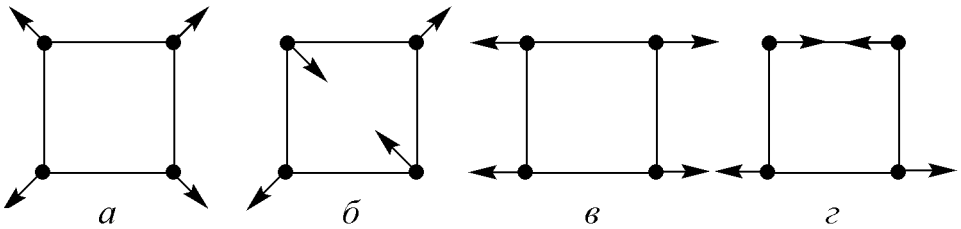


Рис. 2. Некоторые нормальные моды квадратной молекулы: *а* – квадрат, *б* – ромб, *в* – прямоугольник, *г* – трапеция

колебательный режим, соответствующий *прямоугольной* атомной конфигурации (в процессе колебаний этот прямоугольник вытягивается попеременно вдоль осей X и Y), а четвертой моде (рис. 2, *г*) отвечает мгновенная атомная конфигурация в форме трапеции.

Существенно, что каждая из нормальных мод обладает некоторой группой симметрии, которая является *подгруппой* G_j группы симметрии $G = C_{4v}$ равновесной конфигурации рассматриваемой четырехатомной молекулы. Действительно, произвольные *малые* смещения атомов из положения равновесия в вершинах квадрата на рис. 1 приводят к исчезновению, по крайней мере, одного из элементов симметрии этой квадратной конфигурации, и только смещения, указанные на рис. 2, *а*, не приводят к понижению симметрии колебательного состояния ($G_1 = G = C_{4v}$). Например, симметрия колебательного состояния на рис. 2, *б*, отвечающая ромбической конфигурации, имеет симметрию $G_2 = C_{2v}^d$. Последняя группа симметрии состоит из четырех элементов: поворотов на $0°$ и $180°$ вокруг оси Z и отражений в двух зеркальных плоскостях, которые проходят через диагонали ромба. Таким образом, при переходе от группы симметрии равновесной конфигурации $G = C_{4v}$ к ромбической колебательной конфигурации (см. рис. 2, *б*) исчезают повороты на $90°$, $270°$, а также отражения в «координатных» зеркальных плоскостях (то есть в плоскостях, перпендикулярных координатным осям X и Y).

Аналогично, прямоугольной конфигурации колебательного состояния нашей молекулы (см. рис. 2, *в*) также отвечает группа симметрии C_{2v}, но в нее, наряду с поворотами на $0°$ и $180°$, входят *другие* плоскости отражения, а именно, те, которые проходят через координатные оси. Для того, чтобы различать эти две разные подгруппы введем дополнительный верхний индекс d или c, который определяет, является ли «установка» рассматриваемой подгруппы в исходной группе симметрии $G = C_{4v}$ диагональной или координатной. Иными словами, этот индекс определяет, какие плоскости зеркального отражения входят в группу C_{2v} – проходящие через координатные оси или проходящие через диагонали ромба. Итак, нормальным модам на рис. 2, *б* и *в* отвечают группы симметрии $G_2 = C_{2v}^d$ и $G_3 = C_{2v}^c$, соответственно.

Наконец, четвертой моде (см. рис. 2, *г*) отвечает группа симметрии $G_4 = C_S$, которая также является подгруппой исходной группы симметрии $G = C_{4v}$ и содержит кроме тождественного элемента симметрии лишь отражение в плоскости, перпендикулярной оси X.

Итак, каждой нормальной моде отвечает вполне определенная группа точечной симметрии G_j, которая является подгруппой группы симметрии $G = C_{4v}$ рассматриваемой молекулы в состоянии равновесия.

Заметим, что приведенные на рис. 2 картинки атомных смещений для нормальных мод в системах с *разными* законами межчастичного взаимодействия (потенциал Леннарда–Джонса, Морзе и др.) оказываются *одинаковыми*. Этот факт связан с тем, что в нашем случае нормальные координаты являются одновременно и *симметрическими*, то есть *базисными векторами неприводимых представлений* группы симметрии $G = C_{4v}$ (см. далее).

Нахождение нормальных координат в сложных молекулярных и кристаллических структурах обычно проводят в два этапа. На первом этапе с помощью теоретико-групповых методов находят симметрические координаты, в результате чего матрица силовых постоянных, фигурирующая в теории малых колебаний механических систем, приводится к некоторому блочно-диагональному виду, который определяется рассматриваемой в разделе 3 теоремой Вигнера. На этом этапе исследования знание конкретного закона межатомного взаимодействия не требуется. На втором этапе нужно привести к диагональному виду каждый из вышеупомянутых блоков, для чего уже необходимо знание силовых постоянных (то есть этот этап вычислений существенным образом зависит от закона межатомного взаимодействия). На этом этапе мы переходим от симметрических координат к нормальным координатам.

В заключение заметим, что симметрия *колебательного состояния* (G_j) *сохраняется* во времени в том смысле, что если в данный момент рассматриваемое состояние обладало некоторым элементом симметрии, то этот элемент *не может* спонтанно исчезнуть. Приведенное утверждение является прямым следствием принципа *классического детерминизма*. Однако следует иметь в виду, что *потеря* колебательным режимом *устойчивости* обычно влечет за собой спонтанное понижение его симметрии.

2. Буши колебательных мод

В *линейных* динамических системах, которые отвечают гармоническому приближению, нормальные моды являются независимыми друг от друга. В нелинейной же системе между обычными нормальными модами имеются определенные взаимодействия, в результате чего они перестают быть точными решениями соответствующих динамических уравнений. Тем не менее, оказывается, что в нелинейных системах могут существовать некоторые их аналоги.

Попытаемся, например, возбудить колебательный режим типа «*a*» (см. рис. 2) в исходной *нелинейной* динамической системе с помощью задания соответствующих начальных условий: все атомы отклоняются в начальный момент времени $t = t_0$ вдоль диагоналей квадрата на одинаковые расстояния из своих положений равновесия, а их начальные скорости полагаются равными нулю. Можно показать, что такой режим (ему отвечает группа симметрии $G_1 = C_{4v}$) будет существовать бесконечно долго и в нелинейной системе, но временная зависимость отклонений атомов молекулы из своих положений равновесия, оставаясь периодической, уже не будет синусоидальной, как это имеет место в случае линейных нормальных мод. Такой колебательный режим представляет собой *нелинейную нормальную моду* Розенберга[2] [8, 9].

[2]Сам Розенберг называет такие динамические режимы «similar nonlinear normal modes».

Любой динамический режим, возникающий в рассматриваемой нами нелинейной системе, можно описать с помощью задания восьмимерного «конфигурационного вектора»

$$\mathbf{X}(t) = \{x_1(t), y_1(t) \,|\, x_2(t), y_2(t) \,|\, x_3(t), y_3(t) \,|\, x_4(t), y_4(t)\},$$

где $x_i(t)$ и $y_i(t)$ суть смещения i-го атома вдоль координатных осей X и Y, соответственно. Поскольку нормальные координаты $\{\boldsymbol{\phi}_j \mid j = 1, ..., 8\}$ образуют базис в восьмимерном пространстве всех возможных атомных смещений, конфигурационный вектор $\mathbf{X}(t)$ можно разложить по этому базису

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{j=1}^{8} \mu_j(t)\boldsymbol{\phi}_j. \tag{1}$$

Явный вид базисных векторов $\boldsymbol{\phi}_j$ легко восстановить по рисункам типа «*а*»–«*в*» (см. рис. 2), например,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi}_1 &= \{\ \ 1,\ \ 1 \ \mid\ -1,\ \ \ 1 \ \mid\ -1,\ -1 \ \mid\ \ 1,\ -1\},\\
\boldsymbol{\phi}_2 &= \{\ \ 1,\ \ 1 \ \mid\ \ 1,\ -1 \ \mid\ -1,\ -1 \ \mid\ -1,\ \ 1\},\\
\boldsymbol{\phi}_3 &= \{\ \ 1,\ \ 0 \ \mid\ -1,\ \ \ 0 \ \mid\ -1,\ \ 0 \ \mid\ \ 1,\ \ 0\},\\
\boldsymbol{\phi}_4 &= \{\ -1,\ \ 0 \ \mid\ \ 1,\ \ \ 0 \ \mid\ -1,\ \ 0 \ \mid\ \ 1,\ \ 0\},
\end{aligned}$$

и т. д.

Если возбудить колебательный режим $\mathbf{X}(t)$ с помощью начальных условий $\mathbf{X}(t_0) = \boldsymbol{\phi}_1$, $\dot{\mathbf{X}}(t_0) = 0$, то в разложении (1) справа останется только одно слагаемое

$$\mathbf{X}(t) = \mu_1(t)\boldsymbol{\phi}_1, \tag{2}$$

где $\mu_1(t)$ удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению второго порядка (отличному от уравнения для гармонического осциллятора), которое можно получить, зная явный вид межчастичных взаимодействий в рассматриваемой нами системе.

Если же возбудить «ромбический» колебательный режим с помощью начальных условий $\mathbf{X}(t_0) = \boldsymbol{\phi}_2$, $\dot{\mathbf{X}}(t_0) = 0$, то можно показать, что в разложении (1) останется два члена

$$\mathbf{X}(t) = \mu_1(t)\boldsymbol{\phi}_1 + \mu_2(t)\boldsymbol{\phi}_2. \tag{3}$$

В первом случае (см. формулу (2)) возникающий динамический режим $\mathbf{X}(t)$ представляет собой нелинейную нормальную моду Розенберга, а во втором случае (см. формулу (3)) – *двумерный буш* (куст), состоящий из двух колебательных мод [2,4]. Последний результат означает, что возбуждение от первоначально возбужденной в нелинейной системе второй нормальной моды (в любой момент времени она пропорциональна вектору $\boldsymbol{\phi}_2$) может передаться *только* первой моде (пропорциональной вектору $\boldsymbol{\phi}_1$), но не другим колебательным модам. В работе [2], где нами было введено понятие бушей мод, с помощью теоретико-групповых методов доказывается, что возбуждение от колебательной моды $\mu_j(t)\boldsymbol{\phi}_j$ с группой симметрии G_j

может передаться только тем модам, симметрия которых *не ниже* симметрии исходно возбужденной моды. Таким образом, в нелинейных системах с дискретной симметрией существуют определенные теоретико-групповые *правила отбора* для передачи возбуждения между модами различной симметрии. Эти правила отбора могут существенным образом ограничить *размерность* динамического режима, то есть число характеризующих его независимых степеней свободы. Таким образом, размерность динамического режима $\mathbf{X}(t)$ определяется *числом слагаемых* в правой части формулы (1), а функции $\mu_j(t)$ являются новыми динамическими переменными рассматриваемой нами системы. Коллективные переменные $\mu_j(t)\boldsymbol{\phi}_j$ мы для краткости будем называть *колебательными модами*.

Для наших дальнейших целей более удобно делать разложения типа (1) не по нормальным координатам (нахождение которых предполагает, вообще говоря, знание сил взаимодействия между частицами системы), а по *симметрическим* координатам, которые являются базисными векторами неприводимых представлений соответствующих групп симметрии (см. далее). Дело в том, что симметрические координаты (мы будем их также обозначать символами $\boldsymbol{\phi}_j$) можно построить, исходя из чисто симметрийных соображений, то есть без знания явного вида взаимодействия между элементами нашей динамической системы.

Полный комплект независимых колебательных мод, определяющих данный динамический режим, называется бушем (кустом) мод [2, 4]. Состав буша мод, то есть совокупность тех m мод, которые дают в него вклад в разложении типа (1), можно найти с помощью соответствующих теоретико-групповых методов без знания характера межчастичного взаимодействия. Это – «геометрический аспект» буша мод.

С другой стороны, *динамика* m-мерного буша определяется m дифференциальными уравнениями второго порядка, вид которых уже существенным образом зависит от вышеупомянутого характера межчастичных взаимодействий. Например, ромбический динамический режим в рассматриваемой нами квадратной молекуле имеет вид

$$\mathbf{X}(t) = \{a, a\,|\,-b, b\,|\,-a, -a\,|\,b, -b\}, \tag{4}$$

где введены обозначения $a = \mu_1(t)+\mu_2(t)$ и $b = \mu_1(t)-\mu_2(t)$, а зависящие от времени функции $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ определяются дифференциальными уравнениями вида

$$\ddot{\mu}_1(t) = F_1(\mu_1(t),\, \mu_2(t)),$$
$$\ddot{\mu}_2(t) = F_2(\mu_1(t),\, \mu_2(t)).$$

Явный вид такого типа уравнений будет обсужден далее на примере октаэдрической молекулы с потенциалом взаимодействия Леннарда–Джонса (см. раздел 4 настоящей работы).

Заметим, что, с позиций теории бушей мод, нелинейные нормальные моды Розенберга являются *одномерными* бушами мод.

Существенно, что во многих N-частичных механических системах могут существовать буши мод достаточно малой размерности: одномерные, двумерные, трехмерные, четырехмерные и т. д. [2–4, 10–13].

Дадим следующее строгое математическое определение. Буши мод представляют собой *инвариантные многообразия* рассматриваемой динамической системы,

разложенные по базисным векторам неприводимых представлений группы симметрии этой системы[3].

Подробное изложение теории бушей мод можно найти в наших предыдущих работах, в частности, в [4].

Из формулы (1) очевидно, что каждый буш мод характеризуется некоторой группой симметрии, которая является *пересечением* групп симметрии всех входящих в него мод. В свою очередь, эти группы симметрии являются *подгруппами* группы симметрии исходной нелинейной динамической системы.

Подведем итоги всего вышесказанного.

Динамические режимы в нелинейной системе, характеризующейся группой симметрии G, можно классифицировать по ее подгруппам G_j ($G_j \in G$). Таким образом, каждый динамический режим обладает некоторой группой симметрии G_j. В частности, могут быть и такие режимы, которым соответствует лишь тривиальная группа симметрии (состоящая только из единичного элемента) – это есть случай «отсутствия всякой симметрии». Каждый из таких режимов (бушей мод) имеет вполне определенную размерность – число независимых степеней свободы, которое может быть определено с помощью теоретико-групповых методов.

3. Проблема устойчивости бушей мод

Поскольку понятие устойчивости является весьма разноплановым, необходимо точно определить, что мы понимаем под этим термином, говоря об устойчивости бушей мод.

Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ в механической системе был возбужден некоторый m-мерный буш мод с группой симметрии G_j. При малых амплитудах входящих в него мод он может быть устойчивым динамическим объектом, в том смысле, что с течением времени сохраняется его размерность (m) и группа симметрии (G_j) (при этом, разумеется, соответствующие ему динамические переменные $\mu_j(t)$ эволюционируют во времени). При увеличении амплитуд мод буша, которые мы определяем с помощью задания некоторых начальных условий, он может потерять устойчивость: при $t > t_0$ число входящих в него мод (то есть размерность буша) может *увеличиться*, и, как следствие этого явления, происходит спонтанное понижение симметрии колебательного состояния рассматриваемой системы.

Будучи *точным* нелинейным возбуждением, каждый буш имеет свою собственную область устойчивости в пространстве всех возможных амплитуд его мод и их скоростей. Вне области устойчивости имеет место явление, аналогичное параметрическому резонансу (более подробно см. [4]), которое и приводит к потере его устойчивости и возникновению в системе *нового буша* большей размерности с группой симметрии G_k ($k \neq j$), которая является подгруппой группы симметрии G_j исходного буша ($G_k \in G_j$).

В настоящей работе будем рассматривать устойчивость динамических режимов в консервативных механических системах, динамика которых описывается N

[3]Такое разложение имеет вполне определенный физический смысл, поскольку разным неприводимым представлениям отвечают, вообще говоря, разные физические характеристики рассматриваемой системы (см. [6]).

автономными дифференциальными уравнениями вида

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}). \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{X} = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)\}$ есть конфигурационный вектор, компоненты которого задают отклонения частиц из своих положений равновесия (равновесному состоянию отвечает вектор $\mathbf{X} = 0$), а вектор-функция $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \{f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \ldots, f_N(\mathbf{X})\}$ определяет правые части рассматриваемых уравнений движения.

Пусть G_0 есть группа таких преобразований (g) N-мерного пространства, которые оставляют систему уравнений (5) инвариантной. Это условие инвариантности может быть записано в виде $\mathbf{F}(g\mathbf{X}) = g\mathbf{F}(\mathbf{X})$ (см., например, [1]). Иными словами, в результате преобразования

$$\tilde{\mathbf{X}} = g\mathbf{X} \qquad (g \in G_0) \tag{6}$$

система уравнений (5) в новых переменных $\{\tilde{x}_1(t), \ldots, \tilde{x}_N(t)\}$ будет эквивалентна исходной (например, преобразование (6) может привести просто к перестановке отдельных уравнений системы (5)).

Динамический режим $\mathbf{X}(t)$, подлежащий исследованию на устойчивость, будем определять N-мерным вектором $\mathbf{C}(t)$, зависящим лишь от m независимых функций времени. Этот вектор определяет *инвариантное многообразие* рассматриваемой динамической системы, и может быть найден из решения системы линейных алгебраических уравнений вида

$$g\mathbf{X} = \mathbf{X} \quad \forall\, g \in G, \tag{7}$$

где группа симметрии G данного динамического режима является *подгруппой* группы симметрии G_0 системы уравнений движения (5). Таким образом, $\mathbf{C}(t)$ получается из произвольного конфигурационного вектора $\mathbf{X}(t)$ в результате *наложения симметрийных ограничений* (7), что приводит к определенной *функциональной связи* между его компонентами (см., например, формулу (4), где приведен восьмимерный вектор $\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{C}(t)$, зависящий лишь от двух произвольных функций времени $a(t)$ и $b(t)$).

Согласно известной схеме исследования локальной устойчивости, линеаризуем исходную систему динамических уравнений (5) в окрестности рассматриваемого нами динамического режима (буша мод). Для этого положим

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{C}(t) + \boldsymbol{\delta}(t), \tag{8}$$

где $\boldsymbol{\delta}(t)$ – инфинитезимальный конфигурационный вектор, и сохраним после подстановки (8) в уравнение (5) лишь линейные по компонентам вектора $\boldsymbol{\delta}(t)$ члены. В результате получим систему N линейных дифференциальных уравнений

$$\ddot{\boldsymbol{\delta}} = \mathrm{J}\left[\mathbf{C}(t)\right] \cdot \boldsymbol{\delta}, \tag{9}$$

где $\mathrm{J}\left[\mathbf{C}(t)\right]$ есть матрица Якоби системы (5)

$$\mathrm{J}\left[\mathbf{C}(t)\right] = \left\| \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{X}(t)=\mathbf{C}(t)} \right\|.$$

Подчеркнем, что элементы этой матрицы (коэффициенты системы (9)) являются функциями времени и определяются видом исследуемого динамического режима $\mathbf{C}(t)$. Для краткости будем в дальнейшем называть систему уравнений (9) «линеаризованной системой».

Основным результатом работы [1] является разработка теоретико-группового метода, с помощью которого систему N связанных линеаризованных уравнений (9) можно *расщепить* на некоторое число *независимых подсистем* меньшей размерности, что может существенным образом упростить анализ устойчивости рассматриваемого динамического режима. Этот подход основан на доказанной нами в работе [1] теореме о симметрии линеаризованной системы (9):

Теорема 1. *Матрица* $\mathrm{J}[\mathbf{C}(t)]$ *системы дифференциальных уравнений, линеаризованных в окрестности буша мод* $\mathrm{B}[G]$*, определяемого конфигурационным вектором* $\mathbf{C}(t)$*, коммутирует со всеми матрицами* $\mathrm{M}(g)$ *(*$g \in G$*) механического представления группы симметрии* G *рассматриваемого буша:*

$$\mathrm{M}(g) \cdot \mathrm{J}[\mathbf{C}(t)] = \mathrm{J}[\mathbf{C}(t)] \cdot \mathrm{M}(g). \tag{10}$$

Напомним, что механическим называется представление, построенное на некотором базисе $\{\mathbf{e}_i \,|\, i = 1, \dots, N\}$ конфигурационного пространства (пространства всех возможных атомных смещений). Обычно базисные векторы такого базиса удобно выбирать в форме последовательных векторов-столбцов единичной N-мерной матрицы, то есть у вектора $\mathbf{e}_i$ отличной от нуля является только одна компонента, которая стоит на i-ом месте и равна единице.

Поскольку набор векторов $\{\mathbf{e}_i \,|\, i = 1, \dots, N\}$ образует базис, вектор $g\mathbf{e}_j$ можно представить в виде определенной линейной комбинации векторов $\mathbf{e}_i$. Совокупность всех коэффициентов такой линейной комбинации образует некоторую матрицу, в силу чего имеем

$$g\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{M}_{ji}(g) \cdot \mathbf{e}_j \qquad (i = 1, \dots, N).$$

Тогда, в соответствии со стандартным определением представления группы, элементу симметрии $g \in G$ можно сопоставить квадратную матрицу $\mathrm{M}(g) = \|M_{ij}(g)\|$ (см., например, [14]). Полная совокупность матриц $\mathrm{M}(g)$ ($\forall g \in G$) и образует механическое представление группы G.

Теорема 1 открывает возможность применения теоремы Вигнера [15] для приведения матрицы Якоби $\mathrm{J}\,[\mathbf{C}(t)]$ к вполне определенному блочно-диагональному виду. Ниже эта теорема приведена в той формулировке, которая является наиболее удобной для наших дальнейших целей.

Пусть имеется приводимое представление Γ группы G, которое может быть разложено на неприводимые представления (НП) Γ_j этой группы

$$\Gamma = \sum_{j}^{\oplus} m_j \Gamma_j. \tag{11}$$

Здесь m_j есть число раз, которое НП Γ_j входит в прямую сумму (11). Обозначая через n_j размерность неприводимого представления Γ_j, можем сформулировать теорему Вигнера следующим образом.

Теорема 2 (теорема Вигнера). *Любая матрица* H*, коммутирующая со всеми матрицами представления* Γ *группы* G*, может быть определенным унитарным преобразованием приведена к блочно-диагональной форме*

$$\mathrm{H} = \sum\nolimits^{\oplus} \mathrm{D}_j, \tag{12}$$

такой, что

• *размерность каждого блока* D_j *равна произведению* $m_j \cdot n_j$*;*

• *блок* D_j *состоит из подблоков, представляющих собой матрицы, пропорциональные единичной матрице* I_{n_j} *размерности* n_j*, которые* m_j *раз повторяются вдоль строк и столбцов блока* D_j*.*

Таким образом, блок $\mathrm{D}_j = \mathrm{D}$, характеризуемый числами $n_j = n$ и $m_j = m$, имеет следующий вид

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \mu_{11}\mathrm{I}_n & \mu_{12}\mathrm{I}_n & \dots & \mu_{1m}\mathrm{I}_n \\ \mu_{21}\mathrm{I}_n & \mu_{22}\mathrm{I}_n & \dots & \mu_{2m}\mathrm{I}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{m1}\mathrm{I}_n & \mu_{m2}\mathrm{I}_n & \dots & \mu_{mm}\mathrm{I}_n \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где μ_{ij} суть некоторые скалярные величины.

Применим теперь теорему Вигнера к задаче о расщеплении обсуждаемой нами системы (9) линеаризованных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которую для краткости будем далее записывать в виде $\ddot{\boldsymbol{\delta}} = \mathrm{J}(t) \cdot \boldsymbol{\delta}$, где $\mathrm{J}(t) \equiv \mathrm{J}[\mathbf{C}(t)]$. Для этого достаточно считать, что фигурирующая в теореме Вигнера матрица H есть матрица Якоби $\mathrm{J}(t)$, а (приводимое) представление Γ является механическим представлением группы G того буша мод (динамического режима), в окрестности которого была проведена линеаризация исходной системы дифференциальных уравнений (5).

Для того чтобы осуществить вышеуказанное расщепление системы $\ddot{\boldsymbol{\delta}}{=}\mathrm{J}(t) \cdot \boldsymbol{\delta}$ необходимо сделать переход от выбранного ранее базиса $\boldsymbol{\Phi} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_N\}$ к новому базису $\boldsymbol{\Phi}_{\text{нов}} = \{\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_N\}$, орты которого суть *базисные векторы неприводимых представлений* группы G. Пусть нам известна унитарная матрица S, осуществляющая переход от старого базиса к новому в соответствии с формулой $\boldsymbol{\Phi}_{\text{нов}} = \mathrm{S} \cdot \boldsymbol{\Phi}$. Тогда унитарное преобразование

$$\mathrm{J}_{\text{нов}}(t) = \mathrm{S}^{+} \cdot \mathrm{J}(t) \cdot \mathrm{S} \tag{14}$$

приводит матрицу $\mathrm{J}(t)$ к блочно-диагональной форме, определяемой теоремой Вигнера, а исследуемая линеаризованная система приобретает вид $\ddot{\boldsymbol{\delta}}_{\text{нов}} = \mathrm{J}_{\text{нов}}(t) \cdot \boldsymbol{\delta}_{\text{нов}}$, где $\boldsymbol{\delta}_{\text{нов}} = \mathrm{S}^{+} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\text{нов}}$.

Исследование устойчивости буша мод теперь сводится к анализу устойчивости нулевых решений тех *независимых* подсистем, на которые была расщеплена система $\ddot{\boldsymbol{\delta}} = \mathrm{J}(t) \cdot \boldsymbol{\delta}$.

Согласно теореме Вигнера, с каждым НП Γ_j размерности n_j, которое входит в состав механического представления m_j раз, связан блок D_j размерности $n_j m_j$ в матрице $\mathrm{J}_{\text{нов}}(t)$ преобразованной линеаризованной системы. С другой стороны, из структуры (13) этого блока, которая опять же определяется теоремой Вигнера, видно,

что система $n_j m_j$ линеаризованных уравнений, связанных с НП Γ_j, расщепляется на n_j одинаковых подсистем, состоящих из m_j уравнений каждая.

Очевидно, наибольшее упрощение линеаризованной системы получается в том случае, когда данное НП Γ_j входит в состав механического представления один раз ($m_j = 1$). В этом случае блок D_j становится *диагональным*, и, как следствие, неприводимому представлению Γ_j отвечают n_j *независимых*, причем, *одинаковых* уравнений вида

$$\ddot{\boldsymbol{\delta}}_k = \gamma(t) \cdot \boldsymbol{\delta}_k \qquad (k = 1 \,..\, n_j), \tag{15}$$

где $\gamma(t)$ – соответствующий элемент диагональной матрицы $\mathrm{J}_{\text{нов}}(t)$.

Если же, например, некоторое трехмерное ($n_j = 3$) НП входит в механическое представление дважды ($m_j = 2$), ему отвечают три линейные подсистемы, каждая из которых содержит по два уравнения, причем все эти подсистемы имеют одну и ту же зависящую от времени двумерную матрицу.

Явное расщепление исходной линеаризованной системы $\ddot{\boldsymbol{\delta}} = \mathrm{J}(t) \cdot \boldsymbol{\delta}$ на независимые подсистемы может оказаться весьма трудоемкой процедурой, связанной с построением базисных векторов неприводимых представлений группы симметрии исследуемого на устойчивость буша мод. Можно, однако, предложить достаточно простую процедуру построения «схемы расщепления» [1], используя лишь *теорию характеров* неприводимых представлений конечных групп. Говоря о построении схемы расщепления, мы имеем ввиду определение, на какое количество независимых подсистем и каких именно размерностей может быть расщеплена исходная линеаризованная система. Для нахождения такой схемы необходимо для каждого НП Γ_j размерности n_j определить кратность его вхождения m_j в механическое представление группы симметрии данного буша.

В разных учебных пособиях (см., например, [14]) и справочниках для всех точечных групп симметрии можно найти списки неприводимых представлений, их размерности и характеры[4]. В вышеупомянутой теории характеров хорошо известна формула

$$m_j = \frac{1}{\|G\|} \sum_{g \in G} \chi_\Gamma(g) \bar{\chi}_j(g), \tag{16}$$

которая определяет кратность вхождения m_j НП Γ_j в приводимое представление Γ группы G. Здесь $\|G\|$ есть порядок конечной группы G (число ее элементов), а $\chi_\Gamma(g)$ и $\chi_j(g)$ суть следы матриц приводимого представления Γ и неприводимого представления Γ_j, которые соответствуют элементу $g \in G$. Черта над следом $\chi_j(g)$ означает операцию комплексного сопряжения. В нашем случае в качестве приводимого представления Γ выступает механическое представление группы симметрии рассматриваемого буша мод.

Как уже отмечалось, $\chi_j(g)$ для всех НП Γ_j групп точечной симметрии можно найти в справочной литературе. С другой стороны, следы $\chi_\Gamma(g)$ матриц механического представления Γ, которые существенным образом зависят от структуры исследуемой механической системы, можно вычислить, не прибегая к явному нахождению самих этих матриц. Такая процедура описана, например, в [16] в связи с задачей о симметрийной классификации малых колебаний многоатомных молекул. Главная

[4]Напомним, что характером представления называется вектор, образованный из следов всех матриц данного представления.

идея заключается в том, что для данного элемента $g \in G$ вклад в $\chi_\Gamma(g)$ дают только те атомы, положения которых не изменяются под действием этого элемента симметрии. При этом, если g определяет поворот на угол ϕ вокруг некоторой оси, то каждый лежащий на ней атом дает вклад в $\chi_\Gamma(g)$ равный $(1 + 2\cos(\phi))$, в то время как для зеркального поворота аналогичный вклад равен $(-1 + 2\cos(\phi))$.

Чтобы построить искомую схему расщепления, для каждого НП Γ_j достаточно знать два числа: его размерность (n_j) и кратность вхождения (m_j) в механическое представление Γ группы симметрии исследуемого буша.

Будем записывать схемы расщепления в виде

$$N_1(M_1) \oplus N_2(M_2) \oplus N_3(M_3) \oplus \ldots, \tag{17}$$

где N_i определяет число независимых подсистем размерности M_i. Знание схемы расщепления позволяет получить некоторое представление о целесообразности используемой в дальнейшем (обычно достаточно громоздкой) процедуры *явного разбиения* линеаризованной системы $\ddot{\boldsymbol{\delta}} = \mathrm{J}(t) \cdot \boldsymbol{\delta}$ на независимые подсистемы для анализа устойчивости исследуемого буша мод.

4. Устойчивость бушей мод для октаэдрической молекулы

Рассмотрим далее устойчивость нескольких колебательных режимов (бушей мод) в октаэдрической молекуле, изображенной на рис. 3. В состоянии равновесия она представляет собой правильный октаэдр с ребром a_0, в вершинах которого находятся одинаковые атомы, и характеризуется точечной группой симметрии O_h. Начало координат выбрано в центре октаэдра. Четыре атома (с номерами 2, 3, 4, 5) лежат в плоскости XY и образуют квадрат, а два других атома (с номерами 1 и 6) расположены на оси Z.

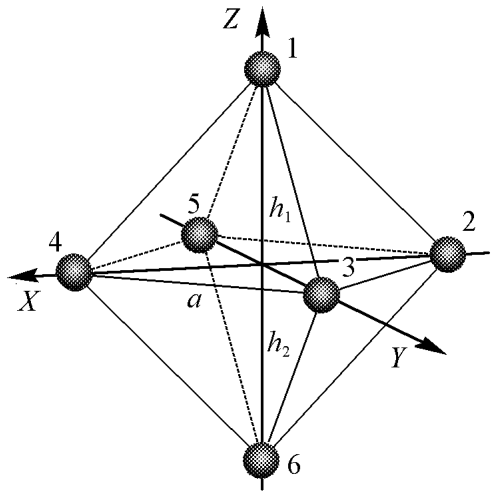


Рис. 3. Октаэдрическая структура с группой симметрии O_h

Все типы колебательных бушей мод для такой молекулы были рассмотрены в работе [13], и, как уже неоднократно отмечалось, они определяются исходя только из симметрийных соображений. С другой стороны, свойства их устойчивости уже существенным образом зависят от сил взаимодействия между атомами рассматриваемой динамической системы. Будем считать, что эти силы определяются некоторым парным сферически-симметричным потенциалом $u(r)$, где r – расстояние между двумя взаимодействующими атомами.

Ниже обсуждается устойчивость трех из возможных бушей мод $\mathrm{B}[O_h]$, $\mathrm{B}[D_{4h}]$, $\mathrm{B}[C_{4v}]$, которым отвечают точечные группы симметрии O_h, D_{4h} и C_{4v}, соответственно.

В связи с ограниченным объемом статьи приводим далее лишь некоторые результаты исследования устойчивости этих динамических режимов, для того что-

бы продемонстрировать эффективность развиваемого теоретико-группового аппарата упрощения линеаризованной системы $\ddot{\boldsymbol{\delta}} = \mathrm{J}(t) \cdot \boldsymbol{\delta}$ (детали этого анализа и дальнейшие примеры будут рассмотрены в отдельной публикации).

Начнем со схем расщепления (17) линеаризованной системы (9) для трех указанных выше бушей

$$\mathrm{B}[O_h] \ : 15(1), \tag{18а}$$

$$\mathrm{B}[D_{4h}] : 5(1) \oplus 5(2), \tag{18б}$$

$$\mathrm{B}[C_{4v}] \ : 2(1) \oplus 1(2) \oplus 1(3) \oplus 2(4). \tag{18в}$$

(Уравнения, соответствующие поступательному движению молекулы как целого, из рассмотрения исключены.)

В режиме, соответствующем первому бушу $\mathrm{B}[O_h]$, мгновенная атомная конфигурация является правильным октаэдром, ребро которого $a = a(t)$ эволюционирует во времени. Это колебательное состояние представляет собой «дыхательную» нелинейную нормальную моду (октаэдр то увеличивается, то уменьшается в размерах относительно своего равновесного состояния с ребром a_0), уравнение движения которой имеет вид [13]

$$\ddot{a} = -4u'(a) - \sqrt{2}u'(\sqrt{2}a), \tag{19}$$

где $u'(r)$ есть производная от потенциала взаимодействия $u(r)$.

В соответствии со схемой (18а), линеаризованная система $\ddot{\boldsymbol{\delta}} = \mathrm{J}(t) \cdot \boldsymbol{\delta}$ для буша $\mathrm{B}[O_h]$ расщепляется на 15 *независимых уравнений*. Все эти уравнения имеют вид

$$\ddot{\delta}_j = \left\{ \left[\alpha_j \phi(a) + \beta_j \phi(\sqrt{2}a) \right] a^2 + \gamma_j \psi(a) + \lambda_j \psi(\sqrt{2}a) \right\} \delta_j, \tag{20}$$

где функции $\phi(r)$ и $\psi(r)$ определены выражениями $\phi(r) = u''(r)/r^2 - u'(r)/r^3$, $\psi(r) = u'(r)/r$, $a = a(t)$ есть решение уравнения (19), а коэффициенты α_j, β_j, γ_j и λ_j, зависящие от входящих в механическое представление неприводимых представлений группы O_h, приведены в таблице.

Таблица

Значения коэффициентов α_j, β_j, γ_j, λ_j, b, q
и границы устойчивости $\mu_{\text{мин}}$ для разных НП группы O_h

НП	n_j	α_j	β_j	γ_j	λ_j	b	q	$\mu_{\text{мин}}$
$\Gamma_1 = A_1$	1	-4	-4	-4	-2	4	21.700 μ_0	
$\Gamma_5 = E$	2	-1	-4	-4	-2	0.906	4.498 μ_0	0.0206
$\Gamma_7 = F_2$	3	-2	0	-4	-2	2.063	10.435 μ_0	0.126
$\Gamma_8 = F_2'$	3	-1	0	-6	0	1.005	4.135 μ_0	0.00119
$\Gamma_9 = F_1'$	3	0	0	-4	-2	0	-1.033 μ_0	0.879
$\Gamma_{10} = F_1$	3	-3	0	-6	0	3.068	15.604 μ_0	0.219

В первом столбце этой таблицы даны обозначения неприводимых представлений группы O_h, использованные в работе [13], и соответствующие им обозначения из книги [16] (все указанные НП входят в механическое представление один раз, то есть $m_j = 1$, $j = 1, 5, 7, 8, 9, 10$). Во втором столбце приведены размерности (n_j)

этих НП, а в последующих четырех столбцах – входящие в уравнения (20) коэффициенты.

Последующий анализ устойчивости зависит от явного вида потенциала $u(r)$, в силу чего будем далее полагать, что межатомное взаимодействие в рассматриваемой молекуле описывается потенциалом Леннарда–Джонса

$$u(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}. \tag{21}$$

Более того, не ограничивая общности рассмотрения, будем считать, что $A = B = 1$ (выполнение этого условия достигается с помощью соответствующей замены переменных в динамических уравнениях системы [13]).

Уравнения (20) с учетом того, что входящий в них параметр $a = a(t)$ определяется уравнением движения (19) исследуемого буша, являются достаточно сложными. Однако эти уравнения можно существенным образом упростить, принимая во внимание, что граница устойчивости буша B$[O_h]$, которая была найдена в работе [13] с помощью прямого численного моделирования (то есть без использования обсуждаемого нами сейчас метода расщепления линеаризованной системы), оказалась весьма малой величиной. Именно, минимальное значение $\mu_{\text{мин}}$ амплитуды колебательной моды $\mu(t) = \sqrt{3}[a(t) - a_0]$, при которой уже наступает потеря ее устойчивости, удовлетворяет соотношению $\mu_{\text{мин}} \sim 0.001$.

Здесь уместно сделать следующее существенное замечание. Известные нам октаэдрические молекулярные структуры, в отличие от той, которая изображена на рис. 3, являются *центрированными*: они имеют еще один атом в центре октаэдра, отличный от атомов в его вершинах. Наличие такого дополнительного атома может существенным образом расширить область устойчивости рассматриваемого буша B$[O_h]$. Например, если взаимодействие центрального атома с периферийными атомами описывается также потенциалом Леннарда–Джонса (21), но с параметрами $A = 1$, $B = 5.5$, минимальная амплитуда A_m, при которой происходит потеря устойчивости, составляет, согласно [13], величину порядка единицы (то есть область устойчивости увеличивается на три порядка по сравнению со случаем рассматриваемой нами сейчас нецентрированной октаэдрической структуры).

Воспользовавшись тем, что в нашем случае $\mu_{\text{мин}} \sim 0.001$, можно разложить коэффициенты уравнений (19) и (20) в степенные ряды по малой величине $\mu(t) = \sqrt{3}(a(t) - a_0)$. В результате этой процедуры уравнения движения буша (19) и уравнения (20) линеаризованной системы (после ее расщепления) принимают вид

$$\ddot{\mu} = -4\mu + 21.70\mu^2 - 66.03\mu^3 + \dots, \tag{22}$$

$$\ddot{\delta}_j + (a_j + b_j\mu + c_j\mu^2 + d_j\mu^3 + \dots)\delta = 0, \quad j = 1, ..., 15, \tag{23}$$

где a_j, b_j, c_j, d_j суть некоторые постоянные коэффициенты[5]. Здесь через $\mu = \mu(t)$ обозначена «активная» мода, определяющая наш одномерный буш B$[O_h]$, а через $\delta_j(t)$ $(j = 1, ..., 15)$ – «спящие» моды, то есть те, которые были равны нулю до потери бушем своей устойчивости. Заметим, что одна из этих мод, а именно, $\delta_1(t)$,

[5]При переходе от уравнений (19), (20) к уравнениям (22), (23) был изменен масштаб временной переменной таким образом, чтобы частота колебаний рассматриваемого буша в гармоническом приближении была равна 2.

соответствующая НП Γ_1, дает возмущение «вдоль» активной моды $\mu(t)$ (то есть просто увеличивает или уменьшает на бесконечно малую величину ее амплитуду) и не имеет, таким образом, отношения к исследованию устойчивости рассматриваемого буша.

В силу условия $|\mu(t)| \ll 1$ в уравнениях (22), (23) можно ограничиться лишь линейными по $\mu(t)$ членами. Тогда уравнение для буша (22) превращается в уравнение гармонического осциллятора, с общим решением $\mu(t) = \mu_0 \cos(\omega t + \phi_0)$ ($\omega = 2$)[6]. Подстановка этого решения в уравнения (23) превращает каждое из них в уравнение Матье, которое в стандартной своей форме [17] может быть записано в виде

$$\ddot{z} + [b - 2q\cos(2t)]z = 0. \qquad (24)$$

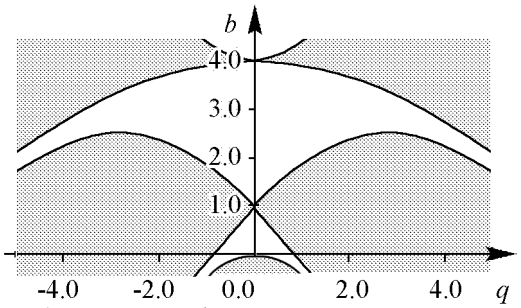


Рис. 4. Диаграмма областей устойчивого и неустойчивого движения для уравнения Матье (24)

Таким образом, все индивидуальные уравнения (20), на которые расщепляется линеаризованная система, могут быть приближенно сведены к уравнению Матье (24), но с различными[7] коэффициентами b и q. Значения этих коэффициентов мы приводим в седьмом и восьмом столбцах таблицы.

Воспользуемся теперь хорошо известной диаграммой устойчивости уравнения Матье (24) в плоскости двух его параметров (b, q), которая изображена на рис. 4. Если параметры b и q таковы, что попадают в одну из заштрихованных зон (зон неустойчивого движения), нулевое решение уравнения (24) теряет свою устойчивость, и происходит быстрое нарастание модуля переменной $z(t) \equiv \delta_j(t)$ во времени. В свою очередь, это будет означать, что в рассматриваемой механической системе происходит спонтанное возбуждение некоторой ранее «спящей» (нулевой) моды. Значение параметра b для всех НП, приведенных в таблице, является фиксированным, а величина q линейным образом зависит от амплитуды μ_0 рассматриваемого буша $\mathrm{B}[O_h]$. Поэтому для каждого их этих НП можно определить минимальную величину $\mu_{\text{мин}}$ амплитуды μ_0, при которой параметры b и q оказываются в зоне неустойчивого движения[8]. Значения $\mu_{\text{мин}}$ приведены в последнем столбце таблицы.

Таким образом, дальнейший анализ устойчивости одномерного буша $\mathrm{B}[O_h]$ сводится к установлению того минимального значения $\mu_{\text{мин}}$ его амплитуды μ_0, при котором начинается возбуждение *хотя бы одной* из спящих мод $\delta_j(t)$ ($j = 2, ..., 15$). Такой анализ позволяет выделить именно ту из ранее спящих мод, которая возбуждается первой, приводя тем самым к потере устойчивости буша. Как уже говорилось, при этом происходит переход рассматриваемого одномерного буша в некото-

[6]Начальная фаза ϕ_0 не влияет на проводимый ниже анализ устойчивости, в силу чего далее полагаем $\phi_0 = 0$.

[7]Значения b и q для мод, отвечающих одному и тому же НП группы симметрии $G = O_h$ рассматриваемого буша, одинаковы.

[8]Границы изображенных на рис. 4 областей устойчивого и неустойчивого движения могут быть заданы соответствующими степенными рядами (см., например, [17]), которые и были нами использованы для нахождения значений $\mu_{\text{мин}}$.

рый другой буш большей размерности и более низкой (по сравнению с O_h) группой симметрии.

Каждому из неприводимых представлений, приведенных в таблице, отвечает некоторое инвариантное относительно группы O_h подпространство полного 18-мерного пространства атомных смещений

$$\Gamma_1: \quad a\boldsymbol{\phi}_1^{(1)} = \{0,0,a\,|\,-a,0,0\,|\,0,a,0\,|\,a,0,0\,|\,0,-a,0\,|\,0,0,-a\}, \tag{25а}$$

$$\begin{gathered}\Gamma_5: \quad a\boldsymbol{\phi}_1^{(5)} + b\boldsymbol{\phi}_2^{(5)} = \\ \{0,0,-2a\,|\,b-a,0,0\,|\,0,a+b,0\,|\,a-b,0,0\,|\,0,-a-b,0\,|\,0,0,2a\},\end{gathered} \tag{25б}$$

$$\begin{gathered}\Gamma_7: \quad a\boldsymbol{\phi}_1^{(7)} + b\boldsymbol{\phi}_2^{(7)} + c\boldsymbol{\phi}_3^{(7)} = \\ \{b,a,0\,|\,0,-c,-b\,|\,c,0,a\,|\,0,c,b\,|\,-c,0,-a\,|\,-b,-a,0\},\end{gathered} \tag{25в}$$

$$\begin{gathered}\Gamma_8: \quad a\boldsymbol{\phi}_1^{(8)} + b\boldsymbol{\phi}_2^{(8)} + c\boldsymbol{\phi}_3^{(8)} = \\ \{a,-b,0\,|\,0,b,-c\,|\,-a,0,c\,|\,0,b,-c\,|\,-a,0,c\,|\,a,-b,0\},\end{gathered} \tag{25г}$$

$$\begin{gathered}\Gamma_9: \quad a\boldsymbol{\phi}_1^{(9)} + b\boldsymbol{\phi}_2^{(9)} + c\boldsymbol{\phi}_3^{(9)} = \\ \{-b,a,0\,|\,0,c,-b\,|\,c,0,-a\,|\,0,-c,b\,|\,-c,0,a\,|\,b,-a,0\},\end{gathered} \tag{25д}$$

$$\begin{gathered}\Gamma_{10}: \quad a\boldsymbol{\phi}_1^{(10)} + b\boldsymbol{\phi}_2^{(10)} + c\boldsymbol{\phi}_3^{(10)} = \\ \{a,b,-2c\,|\,-2a,b,c\,|\,a,-2b,c\,|\,-2a,b,c\,|\,a,-2b,c\,|\,a,b,-2c\},\end{gathered} \tag{25е}$$

где a, b и c – произвольные постоянные, $\boldsymbol{\phi}_i^{(j)}$ $(i = 1,...,n_j)$ – базисные векторы (см. [13]) неприводимого представления Γ_j размерности n_j $(j = 1,5,7,8,9,10)$, компоненты которых суть смещения атомов рассматриваемой молекулы из своих положений равновесия вдоль координатных осей X, Y и Z. Каждое из этих подпространств определяет особый тип деформаций октаэдра, изображенного на рис. 3. Например, неприводимому представлению Γ_1 отвечает «дыхательная» мода: атомы в процессе колебаний в каждый момент времени по-прежнему образуют октаэдр, но с ребром, отличным от a_0. Возмущения, принадлежащие подпространству (25а), являются возмущениями «вдоль» рассматриваемого буша и, как уже говорилось, не имеют отношения к потере его устойчивости. Деформация октаэдра (25б), соответствующая НП Γ_5, происходит за счет смещения всех пар атомов, лежащих на координатных осях, вдоль этих осей навстречу друг другу (причем, лежащие на данной оси атомы имеют одинаковые по величине, но противоположно направленные смещения). Аналогичным образом можно представить себе характер деформаций октаэдра, соответствующих каждому из других подпространств (25).

При потере устойчивости буша $\mathrm{B}[O_h]$ должно происходить возбуждение колебаний в одном или нескольких из вышеописанных инвариантных подпространств (25б)–(25е). Возбуждение колебаний, принадлежащих тому или другому подпространству, происходит при амплитуде μ_0 рассматриваемого буша, превышающей значение $\mu_{\text{мин}}$, которое *существенно различно* для разных НП его группы симметрии. Очевидно, *порог* потери устойчивости буша $\mathrm{B}[O_h]$ определяется тем из подпространств (25б)–(25е), которому отвечает наименьшее значение амплитуды $\mu_{\text{мин}}$, при котором происходит возбуждение колебаний внутри данного подпространства. Из последнего столбца таблицы находим, что таким «критическим» для потери устойчивости буша $\mathrm{B}[O_h]$, по мере увеличения от нуля его амплитуды, является трехмерное подпространство (25г), отвечающее неприводимому представлению Γ_8.

Подчеркнем еще раз, что обсуждаемый в настоящей работе теоретико-групповой аппарат позволяет (по крайней мере, в случае буша $\mathrm{B}[O_h]$) не только найти границу устойчивости, но и обнаружить «основного виновника» потери устойчивости (в рассматриваемом случае это – взаимодействие буша $\mathrm{B}[O_h]$ с модами, преобразующимися по неприводимому представлению Γ_8), что важно для выяснения физической природы этого явления. Как уже отмечалось в работе [13] маленькая величина порога устойчивости буша $\mathrm{B}[O_h]$ ($\mu_{\text{мин}} \sim 0.001$) связана с близостью механической системы к *внутреннему резонансу* $\omega_1 = 2\omega_8$, где ω_1 и ω_8 суть частоты линейных нормальных мод, отвечающих неприводимым представлениям Γ_1 (это НП описывает дыхательную моду) и Γ_8, соответственно.

Перейдем к исследованию устойчивости двумерного буша $\mathrm{B}[D_{4h}]$. Из схемы расщепления (18б) ясно, что исследование устойчивости теперь оказывается не столь простым, как в случае буша $\mathrm{B}[O_h]$, поскольку кроме индивидуальных уравнений обсуждаемого выше типа (см. формулу (20)) появляются *двумерные* системы уравнений. С помощью разложения по малым амплитудам входящих в буш мод[9], все эти системы могут быть сведены к единому виду

$$\begin{aligned} &\ddot{y} + f_{11}y + f_{12}z = 0, \\ &\ddot{z} + f_{12}y + f_{22}z = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

где $f_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\cos(t) + c_{ij}\cos(\omega t + \phi_0)$, а a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, ω и ϕ_0 – некоторые постоянные величины.

Для систем (26) нам неизвестны готовые диаграммы устойчивости типа той, которую мы имеем для уравнения Матье. Тем не менее устойчивость нулевого решения систем (26) может быть исследована численными методами. Заметим, что уравнения (26) не подпадают под стандартное исследование устойчивости с помощью метода Флоке, поскольку бушу $\mathrm{B}[D_{4h}]$ отвечает не периодическое, а *квазипериодическое* движение.

[9]Согласно [13] граница устойчивости этого буша также достаточно мала ($\mu_{\text{мин}} \sim 0.01$), в силу чего такое разложение оправдано.

В случае буша В$[D_{4h}]$ также можно выделить то НП, по отношению к модам которого теряется его устойчивость в первую очередь по мере увеличения амплитуд колебаний. Разумеется такой анализ более прост и информативен, по сравнению с исследованием устойчивости исходной линеаризованной системы (9), состоящей из 15 связанных друг с другом уравнений.

Заключение

Разработан теоретико-групповой метод, который позволяет в ряде случаев существенным образом упростить исследование устойчивости динамических режимов в системах с дискретной симметрией за счет расщепления линеаризованной (в окрестности рассматриваемого режима) системы нелинейных дифференциальных уравнений на некоторое число независимых подсистем малой размерности. При изложении метода предполагается, что исходная физическая система описывается автономными дифференциальными уравнениями второго порядка (5). Поскольку были использованы лишь теоретико-групповые соображения, основанные на том, что любой динамический режим характеризуется некоторой подгруппой группы симметрии уравнений движения, описывающих исследуемую физическую систему, достаточно ясно, что предлагаемый метод можно обобщить на гораздо более широкий класс динамических систем, в частности, диссипативных. Такое обобщение, однако, выходит за рамки настоящей работы.

Авторы выражают свою благодарность В. П. Сахненко за многогранную помощь и плодотворные «нелинейные» дискуссии.

Настоящая работа выполнена в рамках гранта Южного Федерального Университета (2008 г.).

Библиографический список

1. *Chechin G. M., Zhukov K. G.* Stability analysis of dynamical regimes in nonlinear systems with discrete symmetries // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. P. 36216.
2. *Сахненко В. П., Чечин Г. М.* Симметрийные правила отбора в нелинейной динамике атомных систем // ДАН. 1993. Т. 330. С. 308.
3. *Сахненко В. П., Чечин Г. М.* Кусты мод и нормальные колебания для нелинейных динамических систем с дискретной симметрией // ДАН. 1994. Т. 338. С. 42.
4. *Chechin G. M., Sakhnenko V. P.* Interactions between normal modes in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry. Exact results // Physica D. 1998. Vol. 117. P. 43.
5. *Chechin G. M., Ryabov D. S., Sakhnenko V. P.* Bushes of normal modes as exact excitations in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry. In: «Nonlinear Phenomena Research Perspectives», p. 225, ed. C.W. Wang, Nova Science Publishers, NY, 2007.

6. *Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1975.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. I. Механика. М.: Наука, 1988.
8. *Rosenberg R. M.* The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems // J. Appl. Mech. 1962. Vol. 29. P. 7.
9. *Rosenberg R. M.* On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom // Adv. Appl. Mech. 1966. Vol. 9. P. 155.
10. *Chechin G. M., Novikova N. V., Abramenko A. A.* Bushes of vibrational modes for Fermi–Pasta–Ulam chains // Physica D. 2002. Vol. 166. P. 208.
11. *Chechin G. M., Ryabov D. S., Zhukov K. G.* Stability of low dimensional bushes of vibrational modes in the Fermi–Pasta–Ulam chains//Physica D. 2005. Vol. 203. P. 121.
12. *Chechin G. M., Sakhnenko V. P., Stokes H. T., Smith A. D., Hatch D. M.* Non-linear normal modes for systems with discrete symmetry // Int. J. Non-Linear Mech. 2000. Vol. 35. P. 497.
13. *Chechin G. M., Gnezdilov A. V., Zekhtser M. Yu.* Existence and stability of bushes of vibrational modes for octahedral mechanical systems with Lennard–Jones potential // Int. J. Non-Linear Mech. 2003. Vol. 38. P. 1451.
14. *Эллиот Дж., Добер П.* Симметрия в физике. М.: Мир, 1983.
15. *Петрашень М. И., Трифонов Е. Д.* Применение теории групп в квантовой механике. М.: Наука, 1967.
16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. III. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974.
17. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Наука, 1979.

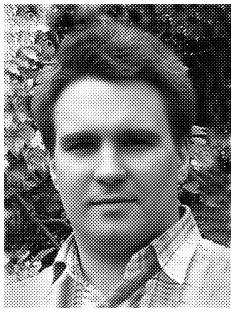
Южный Федеральный Университет
НИИ физики, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию *19.03.2008*
После доработки *18.04.2008*

GROUP-THEORETICAL METHODS FOR SIMPLIFICATION OF STABILITY ANALYSIS OF DYNAMICAL REGIMES IN NONLINEAR SYSTEMS WITH DISCRETE SYMMETRY

K.G. Zhukov, G.M. Chechin

We present a detailed description of the group-theoretical method which has been published in 2006 by the authors. This method can frequently simplify the study of the stability of different dynamical regimes in nonlinear physical systems with discrete symmetry since it allows one to split the set of the linearized (near a considered regime) nonlinear differential equations into a number of independent subsets of small dimensions. The above method is illustrated with the case of stability analysis of some dynamical regimes in the simple octahedral structure.



Жуков Константин Геннадьевич – родился в Ростове-на-Дону (1982), окончил магистратуру физического факультета РГУ (2005). Аспирант НИИ физики Южного федерального университета. Область научных интересов – нелинейная динамика, теоретико-групповые методы в физике, вычислительная физика. Автор 5 научных публикаций.
E-mail: kgz@inbox.ru

Чечин Георгий Михайлович – родился в Новочеркасске (1937), окончил РГУ (1960), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и вычислительной физики Южного федерального университета. Научный руководитель студенческой «Лаборатории нелинейной кристаллофизики» при НИИ физики ЮФУ, Соросовский доцент. Читает лекции по теории групп, численным методам, вычислительной и нелинейной физике. Область научных интересов – теоретико-групповые методы в физике, теория фазовых переходов, нелинейная динамика и вычислительная физика. Автор более 100 научных публикаций.
E-mail: chechin@aaanet.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 4, 2008 УДК 517.929

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ОДНОГО КЛАССА ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ

Д.В. Глазков

Изучаются две модели полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью. Рассматривается случай большого параметра, наличие которого приводит к сингулярно возмущенным задачам. Строятся и исследуются квазинормальные формы моделей в случаях, близких к критическим.

Введение

Модели, описывающие динамику лазерных систем, в последнее время вызывают все больший интерес [1,2]. В первую очередь, это связано с их непосредственным прикладным значением. Однако эта причина не единственная. Как отмечено в [1], лазер принадлежит к числу систем, которые не только способны демонстрировать сложное поведение, но и более многих других пригодны для исследования общих закономерностей нелинейной динамики. Действительно, в целом ряде случаев лазеры функционируют в существенно нелинейных режимах. В наибольшей степени это замечание касается так называемой полуклассической теории лазера, которая предлагает целую иерархию нелинейных уравнений, надежно обоснованных с позиций квантовой электродинамики и количественно подтвержденных экспериментами.

Особый класс моделей лазерных систем представляют собой модели, учитывающие воздействие запаздывающей оптической обратной связи. Их сложность обусловлена тем, что этот класс задач описывается в терминах дифференциальных уравнений с запаздыванием, которые обладают бесконечным числом степеней свободы. Кроме того, динамические системы с запаздыванием демонстрируют различные типы неустойчивостей, обусловленные воздействием задержки. Например, для полупроводниковых лазеров с оптической обратной связью наблюдаются различные пути перехода к хаосу: квазипериодический [3], через каскад бифуркаций удвоения периода [4], сценарий Икеды [5], перемежаемость и кризис аттракторов [6, 7].

За последние 30 лет как численно, так и экспериментально обнаружен целый ряд новых сложных режимов генерации лазерных систем, обусловленных воздействием отраженного излучения на резонатор. В их числе отметим такие явления как

колебания Петермана–Тейгера [8, 9], регулярные импульсные пакеты [10, 11], низкочастотные флуктуации [2, 7, 12, 13], когерентный коллапс [2–4, 7, 12]. Глубокое понимание механизмов их возникновения открывает новые способы для управления режимами генерации, а значит, и новые возможности в приложениях. В таких областях, как хранение данных или оптические и оптоволоконные коммуникации отражения и связанные с ними сложные сопутствующие эффекты неизбежны. Например, искажения сигнала при передаче данных нередко обусловлены неминуемыми отражениями от торцов волноводов. Поэтому изучение влияния оптической запаздывающей обратной связи на работу лазеров разных типов представляет собой важную прикладную задачу.

В настоящей работе предпринимается попытка математически упростить исходные динамические уравнения с целью исследования феномена когерентного коллапса с новых позиций. Суть этого феномена заключается в дестабилизации лазера, приводящей к резкому уширению (в сотни и тысячи раз) спектра излучения. Как отмечается в [2, 3, 12], состояние когерентного коллапса достигается, когда ток накачки заметно превосходит первую пороговую величину и интенсивность отраженного излучения достигает некоторого критического значения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель динамики одномодового лазера, которая учитывает воздействие отраженного излучения на резонатор и основана на уравнениях Ланга–Кобаяши [14]

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma e^{-i\omega_0 h}E(t-h), \\ \dfrac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)\,|E|^2. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $E(t)$ – комплексная амплитуда электрического поля; $Z(t)$ – инверсия носителей; $\gamma>0$ и $(-\omega_0 h)$ – сила и фаза обратной связи; ω_0 – оптическая частота генерации в отсутствие обратной связи; Q – превышение током накачки первой пороговой величины; v – отношение времен затухания инверсии носителей и фотонов в резонаторе; α – коэффициент уширения линии, отвечающий за нелинейное взаимодействие между амплитудой и фазой поля; h – время прохода излучения по внешнему резонатору, нормированное в единицах времени затухания инверсии.

Наряду с системой (1) рассмотрим более сложную модель, дополненную еще одним уравнением, которое описывает воздействие оптического фильтра [15],

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma f, \\ \dfrac{df}{dt} = i\Delta f + \Lambda[E(t-h)e^{-i\omega_0 h} - f], \\ \dfrac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)\,|E|^2. \end{cases} \tag{2}$$

В этой системе $f(t)$ – комплексная амплитуда электрического поля на выходе из фильтра, Λ – ширина спектра, Δ – расстройка между частотой излучения уединенного лазера и несущей частотой фильтра.

Система (1) при больших значениях параметров изучалась в работах [13, 16]. Другие исследования такого рода автору не известны.

Поставим задачу математического исследования систем (1), (2) в случае, когда параметр Q асимптотически велик. Используя такое предположение, удается уменьшить число уравнений и параметров в моделях (1), (2), тем самым существенно упрощая исходную задачу.

Методы построения систем с фазовым пространством бесконечной размерности, играющих роль нормальных форм, были предложены в работах [17–21].

Наличие в системе большого параметра приводит к необходимости рассматривать сингулярно возмущенную задачу. Задачи этого типа [22] не могут быть качественно исследованы регулярными методами. Главное преимущество используемой в работе методики состоит в переходе от сингулярно возмущенной задачи к регулярным уравнениям, которые больших параметров уже не содержат.

2. Уравнения Ланга–Кобаяши при $Q \gg 1$

Рассмотрим уравнение (1) при условии $Q{=}\varepsilon^{-1}$, где ε – малый положительный параметр. Нормируя переменные следующим образом:

$$t = \varepsilon s, \qquad E = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot e^{-i\omega s} E_1,$$

сведем исходную систему к частному случаю следующего векторного уравнения:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathrm{F}(\mathbf{x}) + \varepsilon \cdot \Phi\left(\mathbf{x},\, \mathbf{x}(s{-}h\varepsilon^{-1})\right). \tag{3}$$

Общая методика исследования его динамики была разработана в [18, 19]. В соответствии с алгоритмами, представленными в этих статьях, в малой окрестности некоторого периодического решения системы «нулевого приближения» $d\mathbf{x}/ds = \mathrm{F}(\mathbf{x})$ строится нормализующая замена, позволяющая получить асимптотические оценки системы (3). Эта замена имеет следующий вид:

$$\mathbf{V}(s,\varepsilon) = \mathbf{V}_0(\tau) + \varepsilon \mathbf{V}_1(t,\tau) + \varepsilon^2 \mathbf{V}_2(t,\tau) + \ldots, \tag{4}$$

$$\frac{d\tau}{ds} = 1 + \varepsilon\varphi(t) + \varepsilon^2\psi(t) + \ldots\ . \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{V}_j(t,\tau)$ являются T-периодичными по τ, причем $\mathbf{V}_0(s)$ есть периодическое решение системы ОДУ $d\mathbf{x}/ds = \mathrm{F}(\mathbf{x})$, $\varphi(t)$ – скалярная почти периодическая функция.

Отметим, что из (5) можем получить

$$\tau(s{-}h\varepsilon^{-1}) \approx \tau(s) - y, \quad \text{где} \quad y = h\varepsilon^{-1} + \int\limits_{-h}^{0} \varphi(t{+}r)dr.$$

Стандартная линеаризация $d\mathbf{x}/ds = \mathrm{F}(\mathbf{x})$ на $\mathbf{V}_0(s)$ приводит к системе

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathrm{A}(s)\,\mathbf{u}, \tag{6}$$

где $\mathrm{A}(s)$ есть матрица Якоби $D\mathrm{F}/D\mathbf{x}$ при $\mathbf{x}(s) = \mathrm{V}_0(s)$. Таким образом, $\mathrm{A}(s)$ является T-периодической. Обозначим через $\mathbf{H}_j(s)$ линейно независимые периодические решения сопряженной к (6) системы $d\mathbf{w}/ds = -\mathrm{A}^*(s)\,\mathbf{w}$.

Подставляя ряды (4), (5) в (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим цепочку уравнений вида

$$\frac{d\mathbf{V}_k}{d\tau} = \mathrm{A}(\tau)\mathbf{V}_k + \mathbf{f}_k(t, \tau, \tau - y), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

где через $\mathbf{f}_k(t, \tau, \tau - y)$ обозначена неоднородность дифференциального уравнения. На первом шаге из условий периодичности функции $\mathbf{V}_1$ по τ получим систему уравнений

$$\big\langle \mathbf{f}_1(t, \tau, \tau - y), \mathbf{H}_j(\tau) \big\rangle = 0, \tag{8}$$

где угловыми скобками $\langle\ \rangle$ обозначено скалярное произведение

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \frac{1}{T} \int\limits_0^T (\mathbf{X}(\tau), \mathbf{Y}(\tau)) d\tau.$$

Полученные уравнения (8) играют роль нормальной формы в задаче о локальной динамике уравнения (3) в некоторой окрестности решения $\mathbf{V}_0(s)$ системы «нулевого приближения» $d\mathbf{x}/ds = \mathrm{F}(\mathbf{x})$. Отыскав решение $\mathbf{V}_1$ системы (7) в указанном классе функций, можно последовательно найти любое число элементов рядов (4), (5).

В случае уравнений Ланга–Кобаяши при $Q \gg 1$ система ОДУ вида $d\mathbf{x}/ds = \mathrm{F}(\mathbf{x})$ является консервативной и имеет семейство периодических решений, которое в форме вектора с вещественными компонентами может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{V}_0(s) = (c\cos(\omega s),\ c\sin(\omega s),\ c^{-2} - 1)^T.$$

Матрица системы (6) имеет вид

$$\mathrm{A}(s) = \frac{D\mathrm{F}}{D\mathbf{x}}(\mathbf{V}_0(s)) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ -2\,c^{-1}\cos(\omega s) & -2\,c^{-1}\sin(\omega s) & -c^2 \end{pmatrix}.$$

Для системы (6) легко находятся все линейно независимые решения, два из которых можно выбрать периодическими

$$\mathbf{K}_0(s) = \begin{pmatrix} \cos(\omega s) \\ \sin(\omega s) \\ -2\,c^{-3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_1(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega s) \\ \cos(\omega s) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-c^2 s} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, мультипликаторы системы (6) имеют вид: $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu_3 = e^{-\frac{2\pi}{\omega}c^2} < 1$.

Линейно независимые периодические решения сопряженной к (6) системы выберем таким образом, чтобы $\langle \mathbf{K}_i, \mathbf{H}_j \rangle = \delta_{ij}, i, j = 0, 1$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Таким условиям удовлетворяют вектор-функции вида

$$\mathbf{H}_0(s) = \begin{pmatrix} \cos(\omega s) \\ \sin(\omega s) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega s) \\ \cos(\omega s) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим свободную постоянную c как функцию «медленного» времени: $t{=}\varepsilon s$. В соответствии с изложенной методикой, собирая коэффициенты при первой степени ε, придем к системе

$$\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial c}\,\frac{dc(t)}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial \tau}\varphi(t) + \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial \tau} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{V}_1 + \Phi(\mathbf{V}_0(\tau), \mathbf{V}_0(\tau{-}y)). \tag{9}$$

Условие существования $2\pi/\omega$-периодического (по τ) решения уравнения (9) состоит в ортогональности его неоднородной части функциям $\mathbf{H}_0(\tau), \mathbf{H}_1(\tau)$. Выполнив ряд преобразований и переобозначив $\omega\varphi{\to}\varphi$, получим следующую систему интегрально-дифференциальных уравнений, которую мы будем называть квазинормальной формой модели Ланга–Кобаяши в случае $Q{\gg}1$:

$$\begin{cases} \dfrac{dc(t)}{dt} = v\left(\dfrac{1}{c(t)} - c(t)\right) + \gamma\cos\left(\omega_0 h + \int\limits_{-h}^{0} \varphi(t{+}r)dr\right)c(t{-}h)\,, \\ \varphi(t) = v\alpha\left(\dfrac{1}{c^2(t)} - 1\right) - \gamma\sin\left(\omega_0 h + \int\limits_{-h}^{0} \varphi(t{+}r)dr\right)\dfrac{c(t{-}h)}{c(t)}\,. \end{cases} \tag{10}$$

Заметим, что система (10) заменами

$$\varphi(t) = \frac{d\theta}{dt}, \quad c(t)e^{i\theta(t)} = E(t)$$

может быть преобразована к одному комплексному уравнению следующего вида:

$$\frac{dE}{dt} = v(1{+}i\alpha)\left(|E|^{-2}{-}1\right)E + \gamma e^{-i\omega_0 h}E(t{-}h), \tag{11}$$

которое, очевидно, связано с (1).

Таким образом, при достаточно больших значениях накачки Q оказывается возможно исключить из системы (1) уравнение для инверсии Z, упростив первоначальную задачу.

Стационарные решения системы (10) определяются из трансцендентного уравнения относительно φ

$$\varphi = -\gamma\left[\alpha\cos\big(\omega_0 h{+}\varphi h\big) + \sin\big(\omega_0 h{+}\varphi h\big)\right].$$

Обозначая $\eta{=}\omega_0 h{+}\varphi h$, придем к хорошо известному соотношению для определения числа мод внешнего резонатора [7, 23]

$$\eta - \omega_0 h = -\gamma h\sqrt{1{+}\alpha^2}\sin\big(\eta + \mathrm{arctg}(\alpha)\big), \tag{12}$$

которое, имеет, по крайней мере, одно решение. Легко видеть, что, чем больше значение $\gamma h\sqrt{1+\alpha^2}$, тем больше решений имеет уравнение (12).

Отметим, что по η_k можно однозначно определить φ и c. Устойчивость каждого из состояний равновесия системы (10) определяется расположением в комплексной плоскости корней характеристического уравнения

$$\begin{aligned}&\lambda^2+2\lambda\gamma\cos\eta_k(1-e^{-\lambda h})+\gamma^2(1-e^{-\lambda h})^2+\\&+2(v-\gamma\cos\eta_k)[\lambda+\gamma(\cos\eta_k-\alpha\sin\eta_k)(1-e^{-\lambda h})]=0.\end{aligned}\tag{13}$$

В случае $\cos\eta_k=1$ для моды с максимальным усилением [23] уравнение (13) сводится к следующей простой совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\lambda+\gamma(1-e^{-\lambda h})=0\,,\\[2ex]\lambda+\gamma(1-e^{-\lambda h})+2(v-\gamma)=0\,.\end{array}\right.\tag{14}$$

При $0<\gamma<v$ у каждого из уравнений (14) отсутствуют корни с положительной вещественной частью. Следовательно, мода с максимальным усилением в случае асимптотически большой накачки является устойчивой. Этот результат хорошо согласуется с выводами, сделанными в работе [23].

Мода с минимальной шириной линии достигается при $\eta_k=-\operatorname{arctg}(\alpha)$. Достаточным условием ее устойчивости является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $\eta_k=-\operatorname{arctg}(\alpha)$ *и* $\gamma\le\gamma_1=v/\sqrt{1+\alpha^2}$. *Тогда все корни уравнения (13) имеют неположительные действительные части.*

Критерием устойчивости моды с минимальной шириной линии в случае большого запаздывания $h=\mu^{-1}$, где μ – малый параметр, является следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть* $\eta_k=-\operatorname{arctg}(\alpha)$ *и* $\gamma<\gamma_2=(2v\sqrt{1+\alpha^2})/(2+\alpha^2)$. *Тогда все корни уравнения (13) имеют неположительные действительные части. В случае* $\gamma>\gamma_2$ *существует корень с положительной действительной частью.*

Непосредственной подстановкой несложно проверить, что корней с асимптотикой $i\omega\mu^{-p}$, где $p>0$, у уравнения (13) в случае $\eta_k=-\operatorname{arctg}(\alpha)$ нет. Раскладывая λ в ряд по степеням малого параметра μ, так что $\lambda=\lambda_0+\mu\lambda_1+\mu^2\lambda_2+\ldots$, получаем $\operatorname{Re}\lambda_0=\operatorname{Re}\lambda_1=0$, а знак $\operatorname{Re}\lambda_2$ определяет знак выражения $\gamma(2+\alpha^2)-2v\sqrt{1+\alpha^2}$.

Основные результаты относительно динамических свойств системы (10) получены численным моделированием. При этом исследовалась не сама система (10), а система дифференциальных уравнений с запаздыванием, получаемая заменой $\varphi(t)=d\theta(t)/dt$. Тем не менее, в качестве основных характеристик модифицированной таким образом квазинормальной формы выступали функции $c(t)$, $d\theta(t)/dt$.

Численное интегрирование выполнялось с помощью схемы Рунге–Кутты 4-го порядка, адаптированной для систем с запаздыванием. В качестве начальных условий выбирались функции из класса тригонометрических полиномов, заданных на отрезке $[-h,0]$. Были обнаружены явления мультистабильности (рис. 1), кризиса аттракторов, последовательного удвоения периода циклов, определены области с хаотической и сложной нехаотической динамикой.

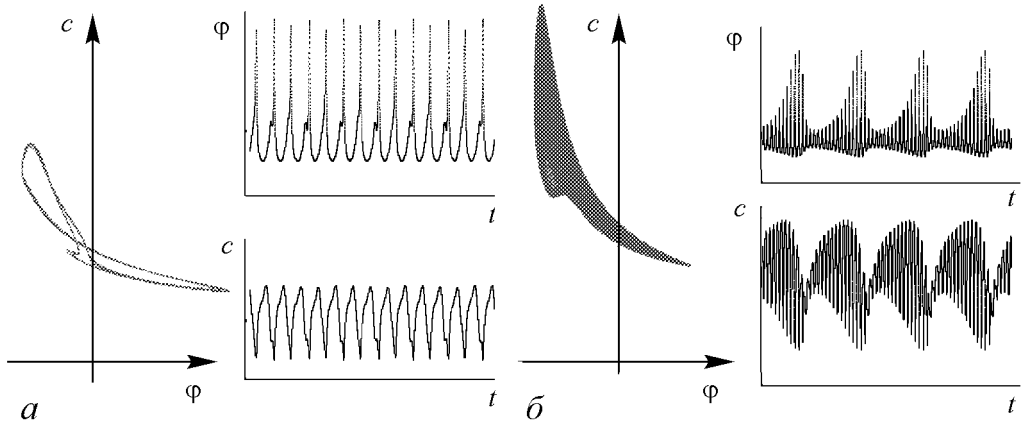


Рис. 1. Иллюстрация явления мультистабильности. При значениях параметров $v{=}100, \alpha{=}5, \omega_0 h{=}1, \gamma{=}97.9, h{=}0.04$ найдено 3 различных устойчивых режима: мода, близкая к состоянию с максимальным усилением, цикл удвоенного периода (*а*) и режим, известный как регулярный импульсный пакет (regular pulse package, RPP [10, 11]) (*б*)

Важные особенности динамики квазинормальной формы (10) отражает бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 2. Выбраны следующие значения параметров $v{=}100, \alpha{=}5, \omega_0 h{=}1$. Цифрами обозначены области: *1* – состояние равновесия; *2* – цикл, рождающийся в результате бифуркации Андронова–Хопфа; *3* – сценарий Фейгенбаума – каскад бифуркаций удвоения периода (штриховой линией отмечены первые две бифуркации удвоения); *4* – нефейгенбаумовские переходные режимы (в некоторых случаях интерпретировались как квазипериодические или двухчастотные на основе анализа временного ряда стандартной функцией FFT пакета Maple); *5* – хаос. Штрихпунктиром обозначены первые две бифуркации седло-узла, в которых происходит рождение пары мода–антимода. Правее первой из них существуют области мультистабильности. Изменение бассейнов притяжения лежит в основе перехода (при возрастании параметров h, γ) от все усложняющихся режимов из области *3* к области *2*. Область, отмеченная цифрой *4* на верхней части диаграммы имеет сложную струк-

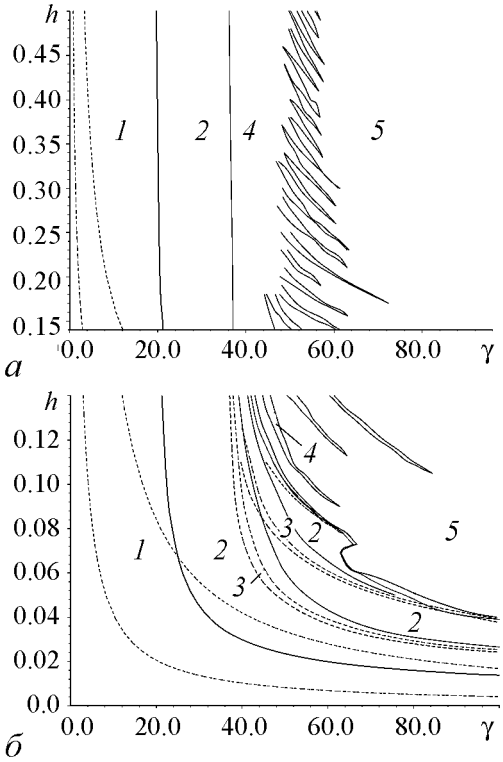


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма системы (10) на плоскости (γ, h), разделенная на две части с разным масштабом по параметру h. Отметим существование областей мультистабильности

туру и содержит многочисленные участки типа *2* и *5* малых размеров. Отметим, что существование устойчивого состояния равновесия, близкого к моде с максимальным усилением, подтверждается численно. При $\gamma > v\sqrt{1+\alpha^2}$ система (1), вообще говоря, теряет свойство диссипативности. Это объясняется тем, что столь большие значения γ физически недостижимы, поскольку величину $v^{-1}\gamma$ следует понимать как ту долю отраженного излучения, которая возвращается в резонатор. Граница области динамического хаоса определялась на основе вычисления корреляционной размерности [24, 25]. Расчет старшего показателя Ляпунова [26], в целом, подтверждает полученные оценки.

Подчеркнем связь между установившимися режимами в квазинормальной форме и в исходной модели: устойчивым состояниям равновесия и циклам системы (10) соответствуют устойчивые предельные циклы и торы в (1).

Следует также обратить внимание на то, что известные о когерентном коллапсе факты [2–4, 7, 12] хорошо согласуются с наблюдаемой динамикой системы (10).

3. Модель с фильтром при v, $Q \gg 1$

Введем в рассмотрение малый положительный параметр ε так, что

$$v = \varepsilon^{-1}, \quad Q = q\varepsilon^{-1},$$

и выполним замену переменных

$$t = \varepsilon s, \quad E = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot e^{-i\omega s} E_1, \quad f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot e^{-i\omega s} f_1.$$

Это приводит к системе, которая является частным случаем (3).

Решение системы «нулевого приближения» представимо в форме

$$\mathbf{V}_0(s) = \sqrt{q} \cdot (\exp(i\omega s),\ c\exp(i\omega s),\ 0)^T.$$

Матрица линеаризованной на V_0 системы имеет вид

$$\mathbf{A}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 & \sqrt{q} \cdot [\cos(\omega s) - \alpha \sin(\omega s)] \\ \omega & 0 & 0 & 0 & \sqrt{q} \cdot [\sin(\omega s) + \alpha \cos(\omega s)] \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 & 0 \\ -2\sqrt{q} \cdot \cos(\omega s) & -2\sqrt{q} \cdot \sin(\omega s) & 0 & 0 & -q \end{pmatrix}.$$

Система (6) и сопряженная к ней имеют по три (с точностью до константы) периодических решения и им соответствующих единичных мультипликатора. Выберем эти решения следующим образом:

$$\mathbf{K}_0(s) = \sqrt{q} \cdot (-\sin(\omega s),\ \cos(\omega s),\ 0,\ 0,\ 0)^T,$$

$$\mathbf{H}_0(s) = -\frac{1}{\sqrt{q}} \cdot (\sin(\omega s) + \alpha \cos(\omega s),\ -\cos(\omega s) + \alpha \sin(\omega s),\ 0,\ 0,\ 0)^T,$$

$$\mathbf{K}_1(s) = \mathbf{H}_1(s) = (0,\ 0,\ \cos(\omega s),\ \sin(\omega s),\ 0)^T,$$

$$\mathbf{K}_2(s) = \mathbf{H}_2(s) = (0,\ 0,\ -\sin(\omega s),\ \cos(\omega s),\ 0)^T,$$

чтобы выполнялось условие $\langle \mathbf{K}_i, \mathbf{H}_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j{=}0...2$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

В данном случае замена (4), (5) несколько модифицируется, а именно:

$$\mathbf{V}(s,\varepsilon) = \mathbf{V}_0(\tau_1,\tau_2) + \varepsilon \mathbf{V}_1(t,\tau_1,\tau_2) + \varepsilon^2 \mathbf{V}_2(t,\tau_1,\tau_2) + \ldots,$$

$$\frac{d\tau_1}{ds} = 1 + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\psi_1(t) + \ldots \quad ,$$

$$\frac{d\tau_2}{ds} = 1 + \varepsilon\varphi_2(t) + \varepsilon^2\psi_2(t) + \ldots \quad .$$

Здесь $\mathbf{V}_0(\tau_1,\tau_2) = \sqrt{q} \cdot (\exp(i\omega\tau_1),\ c\exp(i\omega\tau_2),\ 0)^T$. Кроме того,

$$\tau_2(s) - \tau_1(s) = \varepsilon \int\limits_{s_0}^{s} \big[\varphi_2(\varepsilon r) - \varphi_1(\varepsilon r) + \ldots\big] dr = \int\limits_{t_0}^{t} \big[\varphi_2(r) - \varphi_1(r)\big] dr + O(\varepsilon).$$

По аналогии с предыдущим пунктом введем в рассмотрение y_1 и y_2. Тогда, собирая коэффициенты при первой степени ε, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial c}\frac{dc(t)}{dt} + \varphi_1(t)\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial \tau_1} + \varphi_2(t)\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial \tau_2} + \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial \tau_2} = \\ &\quad = \mathrm{A}\mathbf{V}_1 + \Phi(\mathbf{V}_0\big(\tau_1,\tau_2\big), \mathbf{V}_0(\tau_1 - y_1, \tau_2 - y_2)). \end{aligned} \tag{15}$$

Из условий периодичности функции $\mathbf{V}_1$ по τ_1, τ_2 получим следующие уравнения, которые будем называть квазинормальной формой системы (2) в выбранной области пространства параметров,

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = -c(t)\gamma\sqrt{1+\alpha^2}\sin(\int\limits_{t_0}^{t}(\varphi_1(r) - \varphi_2(r))dr + \mathrm{arctg}(\alpha)), \\ \dfrac{dc(t)}{dt} = \Lambda[\cos(\omega_0 h + \int\limits_{-h}^{0} \varphi_1(t+r)dr + \int\limits_{t_0}^{t}(\varphi_2(r) - \varphi_1(r))dr) - c(t)], \\ \varphi_2(t) = \Delta - \dfrac{\Lambda}{c(t)}\sin(\omega_0 h + \int\limits_{-h}^{0} \varphi_1(t+r)dr + \int\limits_{t_0}^{t}(\varphi_2(r) - \varphi_1(r))dr). \end{cases} \tag{16}$$

Здесь и далее без ограничения общности считаем, что $\theta_1(t_0){=}\theta_2(t_0)$, где $\dfrac{d\theta_j(t)}{dt}{=}\varphi_j(t)$.

Отметим, что при численном моделировании системы (16) других аттракторов, кроме состояний равновесия, обнаружить не удалось. Такой же результат был получен в работе [27] для уравнений (1) в случае $v, Q{\gg}1$. Исходя из принципов работы фильтра, можно предположить, что характер излучения на выходе из фильтрующего устройства не должен оказаться сложнее, чем на входе, поэтому сформулированный результат выглядит естественно.

Подчеркнем связь между установившимися режимами в квазинормальной форме и в исходной модели: устойчивому состоянию равновесия системы (16) соответствует устойчивый предельный цикл в (2).

4. Большая накачка $Q{\gg}1$ в системе с фильтром

Пусть параметр Q достаточно велик. В данном случае считаем, что $v{=}O(1)$. Положим $Q{=}\varepsilon^{-1}$, где $\varepsilon{\ll}1$. Выполним следующее преобразование переменных:

$$t=\varepsilon s,\quad E=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot e^{-i\omega s}E_1,\quad f=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot e^{-i\omega s}f_1.$$

Полученная в результате система также сводится к уравнению общего вида (3).

Решение системы «нулевого приближения» можно записать следующим образом:

$$\mathbf{V}_0(s)=\left(c_1\exp(i\omega s),\ c_2\exp(i\omega s),\ c_1^{-2}{-}1\right)^T.$$

Стандартная линеаризация $d\mathbf{x}/dt{=}\mathrm{F}(\mathbf{x})$ на $\mathbf{V}_0(s)$ в соответствии с изложенной методикой приводит к системе (6), $2\pi/\omega$-периодическая матрица которой имеет вид

$$(\mathrm{A}_0(s))=\frac{D\mathrm{F}}{D\mathbf{x}}(\mathbf{V}_0(s))=\begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 & 0\\ \omega & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0\\ 0 & 0 & \omega & 0 & 0\\ -2\,c_1^{-1}\cos(\omega s) & -2\,c_1^{-1}\sin(\omega s) & 0 & 0 & -c_1^2 \end{pmatrix}.$$

По аналогии с процедурой, изложенной в предыдущем разделе, несложно установить, что в данном случае система (6) и сопряженная к ней имеют по четыре линейно независимых периодических решения.

В соответствии с изложенной методикой, собирая коэффициенты при первой степени ε, придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial c_1}\frac{dc_1(t)}{dt}+\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial c_2}\frac{dc_2(t)}{dt}+\varphi_1(t)\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\tau_1}+\varphi_2(t)\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\tau_2}+\frac{\partial\mathbf{V}_1}{\partial\tau_1}+\frac{\partial\mathbf{V}_1}{\partial\tau_2}=\\ =\mathrm{A}\mathbf{V}_1+\Phi(\mathbf{V}_0(\tau_1,\tau_2),\mathbf{V}_0(\tau_1{-}\mathrm{y}_1,\tau_2{-}\mathrm{y}_2)).\end{aligned}\tag{17}$$

Условие существования периодического (по τ) решения уравнения (17) состоит в ортогональности его неоднородной части функциям $\mathbf{H}_0(\tau_1),\mathbf{H}_1(\tau_1),\mathbf{H}_2(\tau_2),\mathbf{H}_3(\tau_2)$. Отметим, что, выполнив замену $\omega\varphi\to\varphi$, можно избавиться от ω.

Следующая система интегрально-дифференциальных уравнений выступает в роли нормальной формы в задаче о локальной динамике уравнений (2) в окрестности решения $\mathbf{V}_0$ невозмущенной предельной системы при $Q{\to}\infty$:

$$\begin{cases}\dfrac{dc_1(t)}{dt}=v\left(\dfrac{1}{c_1(t)}-c_1(t)\right)+\gamma\cos\left(\int\limits_{t_0}^{t}\big(\varphi_2(r){-}\varphi_1(r)\big)dr\right)c_2(t)\,,\\ \varphi_1(t)=v\alpha\left(\dfrac{1}{c_1^2(t)}-1\right)+\gamma\sin\left(\int\limits_{t_0}^{t}\big(\varphi_2(r){-}\varphi_1(r)\big)dr\right)\dfrac{c_2(t)}{c_1(t)}\,,\\ \dfrac{dc_2(t)}{dt}=\Lambda\left[c_1(t{-}h)\cos\left(\omega_0h+\int\limits_{-h}^{0}\varphi_1(t{+}r)dr+\int\limits_{t_0}^{t}\big(\varphi_2(r){-}\varphi_1(r)\big)dr\right)-c_2(t)\right],\\ \varphi_2(t)=\Delta-\Lambda\sin\left(\omega_0h+\int\limits_{-h}^{0}\varphi_1(t{+}r)dr+\int\limits_{t_0}^{t}\big(\varphi_2(r){-}\varphi_1(r)\big)dr\right)\dfrac{c_1(t{-}h)}{c_2(t)}\,.\end{cases}\tag{18}$$

Заметим, что квазинормальная форма (18) при выполнении замен

$$E(t) = c_1(t)\, e^{i\theta_1(t)}, \quad f(t) = c_2(t)\, e^{i\theta_2(t)}, \quad \frac{d\theta_1(t)}{dt}{=}\varphi_1(t), \quad \frac{d\theta_2(t)}{dt}{=}\varphi_2(t)$$

допускает более компактную запись в терминах исходной системы (2)

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = v(1{+}i\alpha)\left(|E|^{-2}{-}1\right)E + \gamma f, \\ \dfrac{df}{dt} = i\Delta f + \Lambda[E(t{-}h)e^{-i\omega_0 h} - f]. \end{cases} \tag{19}$$

Численный анализ показывает, что динамика (18) оказывается существенно проще, чем (10). В пределах точности вычислений при $\gamma{<}v$ и $0{<}h{<}10$ вне зависимости от значений других параметров удавалось обнаружить лишь один аттрактор – устойчивое состояние равновесия, которому соответствует простой периодический режим в системе (2).

5. Нормализация в неавтономном случае

Полученные результаты распространяются на случай, когда параметры уравнений (1), (2) являются гладкими ограниченными периодическими функциями времени t, амплитуда и период колебаний которых не зависят от малого параметра. Сформулируем основной результат для системы (1). Пусть параметры уравнений Ланга–Кобаяши имеют вид [28, 29]

$$\alpha = \alpha(t), \qquad \gamma = \gamma(t), \qquad h = h(t), \qquad Q = \varepsilon^{-1}q(t).$$

Если $v{=}\varepsilon^{-1}v_*(t)$ есть большой параметр, то соответствующая квазинормальная форма уравнений (1) записывается следующим образом:

$$\varphi(t) = -\gamma(t)\sqrt{1{+}\alpha^2(t)}\sin\left(\omega_0 h(t) + \int\limits_{-h(t)}^{0} \varphi(t{+}r)dr + \operatorname{arctg}(\alpha(t))\right). \tag{20}$$

В случае, когда $v{=}v(t)$ есть величина порядка единицы, нормализованная система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dc(t)}{dt} = v(t)(\dfrac{q(t)}{c(t)} - c(t)) + \gamma(t)\cos(\omega_0 h(t) + \int\limits_{-h(t)}^{0} \varphi(t{+}r)dr)c(t{-}h(t))\,, \\ \varphi(t) = v(t)\alpha(t)(\dfrac{q(t)}{c^2(t)} - 1) - \gamma(t)\sin(\omega_0 h(t) + \int\limits_{-h(t)}^{0} \varphi(t{+}r)dr)\dfrac{c(t{-}h(t))}{c(t)}\,. \end{cases}$$

Детальное изучение этой модели представляет собой отдельную задачу.

Исследуем уравнение (20) в случае, когда его параметры представимы в виде

$$\alpha{=}\alpha_0{+}\alpha_1\sin(\omega_\alpha t), \quad \gamma{=}\gamma_0{+}\gamma_1\sin(\omega_\gamma t), \quad h{=}h_0{+}h_1\sin(\omega_h t),$$

где $\alpha_0{>}|\alpha_1|$, $\gamma_0{>}|\gamma_1|$, $h_0{>}|h_1|$. Если частоты $\omega_\alpha, \omega_\gamma, \omega_h$ соизмеримы, то в системе (20) устанавливается периодический режим. Такой эффект связан с пульсацией эллипса [2, 7, 9], который соотносят с модами внешнего резонатора. При этом возможны

переходы с одной моды на другую. Соответственно такие «медленные» изменения параметров могут приводить к усложнению динамики исходной модели. Однако, как отмечено, например, в [30], физически в модели Ланга–Кобаяши проще всего управлять параметрами h и Q.

Особый практический интерес представляет изучение двух случаев. Это учет влияния параметрического резонанса и быстро осциллирующих слагаемых на квазинормальную форму. Поскольку у системы «нулевого приближения» есть пара единичных мультипликаторов, то параметры с резонансными слагаемыми имеют вид $Q{=}\varepsilon^{-1}{+}q_1\sin(\varepsilon\Omega_q t)$, $\gamma{=}\gamma_0{+}\varepsilon\gamma_1\sin(\varepsilon\Omega_\gamma t)$ и так далее. Из построения нормализованной системы можно установить, что резонансные слагаемые не влияют на вид уравнений (10). То есть реализовать параметрический резонанс в данном случае невозможно.

Наличие быстро осциллирующих составляющих приводит к несколько более содержательным результатам. Пусть параметры системы (1) имеют вид

$$\gamma = \gamma_0{+}\gamma_1\sin(t\varepsilon^{-2}), \quad h = h_0{+}h_1\sin(t\varepsilon^{-2}), \quad \alpha = \alpha_0{+}\alpha_1\sin(t\varepsilon^{-2}),$$

$$v = v_0{+}v_1\sin(t\varepsilon^{-2}), \quad Q = \varepsilon^{-1}[q_0{+}q_1\sin(t\varepsilon^{-2})].$$

Выполняя стандартные замены в уравнениях (1), усредняя их по «быстрому» времени $s\varepsilon^{-1}{=}t\varepsilon^{-2}$, и действуя далее в соответствии с изложенным алгоритмом нормализации, получим следующую систему с распределенным запаздыванием:

$$\begin{cases} \dfrac{dc(t)}{dt} = v_0(\dfrac{q_0}{c(t)}{-}c(t)) + \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{\gamma_0{+}\gamma_1 r}{\sqrt{1{-}r^2}}\cos(\omega_0 h(r) + \int\limits_{-h(r)}^{0}\varphi(t{+}u)du)c(t{-}h(r))\,dr\,, \\ \varphi(t) = p_0(\dfrac{q_0}{c^2(t)}{-}1) - \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{\gamma_0{+}\gamma_1 r}{\sqrt{1{-}r^2}}\sin(\omega_0 h(r) + \int\limits_{-h(r)}^{0}\varphi(t{+}u)du)\dfrac{c(t{-}h(r))}{c(t)}\,dr\,. \end{cases} \tag{21}$$

Здесь

$$p_0 = v_0\alpha_0{+}\frac{v_1\alpha_1}{2}, \quad h(r) = h_0{+}h_1 r.$$

Таким образом, при асимптотически больших значениях параметра Q модуляция тока накачки (параметр q_1) уже не оказывает серьезного влияния на динамику уравнений (1).

Рассмотрим систему (21) в случае $v_1{=}\gamma_1{=}\alpha_1{=}0$. В терминах исходной задачи (1) это ситуация быстро осциллирующего запаздывания. Численный анализ системы (21) показывает, что уже при соотношении $h_1/h_0{=}0.01$ происходит ощутимый сдвиг вправо по параметру γ всех границ между областями, изображенными на рис. 2. При $h_1/h_0{=}0.2$ в системе (21) практически всюду в рассматриваемой на рис. 2 области параметров устанавливается стационарный режим, которому соответствует простой периодический режим в усредненной системе (1).

Аналогичные результаты справедливы и для модели с фильтром.

Заключение

Методом большого параметра исследованы две модели полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью. Изучение динамики полученных эволюционных уравнений, так называемых квазинормальных форм, позволяет сделать выводы о поведении исходных систем при достаточно больших значениях параметра

накачки. Заметим, что аттракторы модельных задач (1), (2) и нормализованных уравнений связаны между собой стандартным образом: устойчивому состоянию равновесия или циклу, наблюдаемому в квазинормальной форме, соответствует устойчивый цикл или тор в исходной системе.

Главным достоинством подхода, использованного в данной работе, является исключение «быстрых» движений. В результате остаются только уравнения для «медленных» амплитуд, которые определяют «в главном» поведение решений исходных систем, что серьезно облегчает дальнейшие аналитические исследования и численный счет.

В случае большой величины накачки модель с фильтром, несмотря на кажущуюся сложность, демонстрирует более простую динамику, нежели исходная система Ланга–Кобаяши. Вне зависимости от интенсивности запаздывающей оптической обратной связи в системе (2) устанавливается простой периодический режим, соответствующий стабильному рабочему режиму генерации. Аналогичные выводы можно сделать, исследуя динамику квазинормальной формы системы (1) при быстро осциллирующем запаздывании. Соответственно фильтрование отраженного электромагнитного излучения и высокочастотная вибрация отражающих поверхностей представляют собой действенные механизмы преодоления феномена когерентного коллапса, которому на языке модели Ланга–Кобаяши отвечает явление детерминированного динамического хаоса. Отмеченный стабилизирующий эффект от использования оптического фильтра или быстро вибрирующих зеркал может быть принят во внимание в различных приложениях лазерных систем.

Автор выражает благодарность С.А. Кащенко и С.Д. Глызину за постановку задачи, помощь и внимание к работе, а также Е.В. Григорьевой за полезные консультации.

Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП.2.1.1.630).

Библиографический список

1. *Ханин Я.И.* Основы динамики лазеров // М.: Наука, Физматлит, 1999. 368 с.
2. *Van Tartwijk G.H.M. and Agrawal G.P.* Laser instabilities: A modern perspective // Progress in Quantum Electronics. 1998. Vol. 22. P. 43.
3. *Grigorieva E.V.* Quasiperiodicity in Lang–Kobayashi model of lasers with delayed optical feedback // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2001. Vol. 4, № 4. P. 333.
4. *Ye J., Li H., McInerny J.M.* Period-doubling route to chaos in a semiconductor laser with weak optical feedback // Phys. Rev. A. 1993. Vol. 47, № 3. P. 2249.
5. *Fischer I., Hess O., Elsässer W. and Göbel E.* High-dimensional chaotic dynamics of an external cavity semiconductor laser // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 73, № 16. P. 2188.
6. *Sacher J., Elsässer W., Göbel E.O.* Intermittency in the coherence collapse of a semiconductor laser with external feedback // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 63, № 20. P. 2224.

7. *Sano T.* Antimode dynamics and chaotic itinerancy in the coherence collapse of semiconductor lasers with optical feedback // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 50, № 3. P. 2719.
8. *Tager A.A., Petermann K.* High-frequency oscillations and self-mode locking in short external-cavity laser diodes // IEEE J. Quantum Electron. 1994. Vol. 30, № 7. P. 1553.
9. *Wolfrum M., Turaev D.* Instabilities of lasers with moderately delayed optical feedback // Opt. Commun. 2002. Vol. 212. P. 127.
10. *Heil T., Fischer I., Elsässer W., Krauskopf B., Green K., Gavrielides A.* Delay dynamics of semiconductor lasers with short external cavities: Bifurcation scenarios and mechanisms // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67. 066214.
11. *Tabaka A., Panajotov K., Veretennicoff I., Sciamanna M.* Bifurcation study of regular pulse packages in laser diodes subject to optical feedback // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70. 036211.
12. *Heil T., Fischer I., and Elsässer W.* Influence of amplitude-phase coupling on the dynamics of semiconductor lasers subject to optical feedback // Phys. Rev. A. 1999. Vol. 60, № 1. P. 634.
13. *Pieroux D., Mandel P.* Bifurcation diagram of a complex delay-differential equation with cubic nonlinearity // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67. 056213.
14. *Lang R., Kobayashi K.* External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // IEEE J. Quantum Electron. 1980. Vol. 16, №1. P. 347.
15. *Green K., Krauskopf B.* Mode structure of semiconductor laser subject to filtered optical feedback // Opt. Commun. 2006. Vol. 258. P. 243.
16. *Alsing P., Kovanis V., Gavrielides A. and Erneux T.* Lang and Kobayashi phase equation // Phys. Rev. A. 1996. Vol. 53, № 6. P. 4429.
17. *Kaschenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // International Journal of Bifurcations and chaos. 1996. Vol. 6, № 7. P. 1093.
18. *Кащенко С.А.* Бифуркации цикла в сингулярно возмущенных нелинейных автономных системах // Изв. РАЕН, серия МММИУ. 1998. Т.2, № 4. С. 5.
19. *Кащенко С.А.* Локальная динамика нелинейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1999. Т.35, № 10. С. 1343.
20. *Кащенко С.А.* Бифуркации в окрестности цикла при малых возмущениях с большим запаздыванием // Журнал выч. матем. и матем. физ. 2000. № 4.
21. *Kaschenko S.A.* Bifurcational features in systems of nonlinear parabolic equations with weak diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, № 11.
22. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
23. *Levine A.M., Tartwijk G.H.M., Lenstra D. and Erneux T.* Diode lasers with optical feedback: Stability of the maximum gain mode // Phys. Rev. A. 1995. Vol. 52, № 5. P. 3436.

24. *Grassberger P., Procaccia I.* Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 28, № 4. P. 2591.
25. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D. 1983. Vol. 9, №1,2. P. 189.
26. *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D. 1985. Vol. 16, № 3. P. 285.
27. *Глазков Д.В.* Простейшие устойчивые режимы в модели Ланга–Кобаяши с большим запаздыванием // Труды XXVII Конференции молодых ученых ММФ МГУ им. М.В. Ломоносова. 2005. С. 27.
28. *Колесов Ю.С., Майоров В.В.* Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти-периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10, № 10. С. 1778.
29. *Кащенко С.А., Майоров В.В.* Алгоритм исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с последействием и быстро осциллирующими почти периодическими коэффициентами // Сборник статей. Исследования по устойчивости и теории колебаний. 1977. С. 70.
30. *Mendez J.M., Laje R., Giudici M., Aliaga J. and Mindlin G.B.* Dynamics of periodically forced semiconductor laser with optical feedback // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. 066218.

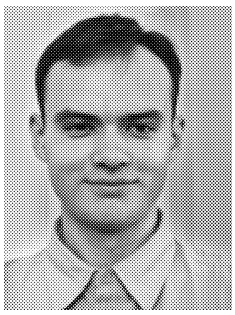
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Поступила в редакцию *29.03.2008*
После доработки *02.07.2008*

QUALITATIVE ANALYSIS OF ONE CLASS OF OPTOELECTRONIC SYSTEMS SINGULARLY PERTURBED MODELS

D.V. Glazkov

Two models of semiconductor laser with delayed optical feedback are studied. We consider singularly perturbed problem because of the large parameter presence. We construct and discuss quasinormal forms of models in trancritical cases.



Глазков Дмитрий Владимирович – родился в 1982 году в Ачинске Красноярского края. Окончил с отличием математический факультет Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова (2004). В настоящее время является ассистентом кафедры математического моделирования ЯрГУ. Область научных интересов – дифференциальные уравнения с запаздыванием, метод нормальных форм, модели динамики лазеров. Автор 5 статей по данной тематике.
E-mail: glazkov_d@mail.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 4, 2008 УДК 533.9

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ФОРМИРОВАНИЕ И ДИНАМИКУ ВИРТУАЛЬНОГО КАТОДА

С.А. Куркин, А.А. Короновский, А.Е. Храмов

Приведены результаты исследования в рамках двумерной численной модели механизмов формирования и динамики виртуального катода в сплошном и трубчатом электронных потоках во внешнем магнитном поле. Обнаружены два качественно различных типа динамики пространственного заряда в области виртуального катода, которые конкурируют между собой; преобладание в системе того или иного типа динамики определяется величиной внешнего магнитного поля. Последнее приводит к зависимости величины критического тока пучка, при котором в системе образуется нестационарный виртуальный катод, от величины внешнего магнитного поля.

Введение

Исследование физических процессов, происходящих в интенсивных пучках заряженных частиц с виртуальным катодом (ВК), на сегодняшний день является весьма актуальной задачей и привлекает большое внимание исследователей [1–3]. Хорошо известно, что влияние пространственного заряда в интенсивных пучках может приводить к сложной хаотической динамике [4–6]. Поэтому системы с виртуальным катодом представляют большой интерес, с одной стороны, из-за того что они демонстрируют сложную нетривиальную динамику (под которой подразумеваются эффекты хаотической генерации, образования структур, сложная перестройка режимов при изменении управляющих параметров и т.д.), что делает подобные системы весьма интересными объектами исследований с точки зрения нелинейной физики и теории самоорганизации. С другой стороны, интерес обусловлен важностью систем с виртуальным катодом (или, как их часто называют, виркаторов) в практических приложениях, которые заключаются в создании источников сверхмощного СВЧ-излучения, ускорении ионов, применении нерелятивистких генераторов на виртуальном катоде в качестве маломощных источников сверхширокополосного СВЧ-излучения.

Как показывает ряд экспериментальных и теоретических исследований приборов с виртуальным катодом, характеристики генерации виркаторов сильно зависят от внешнего магнитного поля. В частности, были получены экспериментальные и численные результаты влияния внешнего магнитного поля на частоту и мощность генерации виртуального катода [7–12], выявлена зависимость ширины полосы генерации низковольтного виркатора от магнитного поля [12, 13], обнаружена сильная

зависимость критического тока пучка от фокусирующего магнитного поля [14]. Однако систематического планомерного исследования вопросов влияния магнитного поля на динамику виртуального катода в потоке заряженных частиц не проводилось, так что процессы, происходящие в электронных пучках со сверхкритическим током во внешнем магнитном поле, остаются плохо изученными. Их понимание позволит продвинуться в изучении систем с виртуальным катодом, что является весьма важной и актуальной задачей нелинейной динамики пучково-плазменных и электронно-волновых систем.

В представленной работе приведены результаты исследования влияния величины внешнего магнитного поля на условия и механизмы формирования виртуального катода в сплошном и трубчатом электронных пучках, рассматривается влияние внешнего магнитного поля на критический ток электронного потока. Также в работе рассматриваются особенности нелинейной динамики электронного потока с виртуальным катодом при изменении магнитного поля.

1. Исследуемая модель

В качестве исследуемой модели рассмотрена классическая модель для изучения динамики виртуального катода [15]. Пространство дрейфа электронного потока представляет собой замкнутый отрезок цилиндрического волновода длиной L и радиусом R, закрытый с торцов сеточными электродами. Аксиально-симметричный моноскоростной на входе сплошной электронный пучок со скоростью v_0, током I и радиусом R_b инжектируется в пространство взаимодействия через левую (входную) сетку и выводится через правую (выходную), а также может оседать на боковой стенке пространства взаимодействия. Вдоль оси системы прикладывается внешнее однородное фокусирующее магнитное поле с индукцией B.

Рассмотрена нестационарная двумерная модель динамики электронного потока в пространстве взаимодействия, которая представляет собой самосогласованную систему уравнений движения заряженных частиц для моделирования динамики электронного пучка, и уравнение Пуассона для нахождения самосогласованного поля пространственного заряда [16, 17]. Ограничимся рассмотрением в работе только нерелятивистских и слаборелятивистских электронных потоков, то есть потоков с $\beta_0 = v_0/c \leq 0.5$, где v_0 – статическая (невозмущенная) скорость потока на входе в систему, c – скорость света.

В уравнениях, описывающих динамику электронного пучка, используются следующие безразмерные величины: потенциал φ, напряженность E поля пространственного заряда, индукция B внешнего магнитного поля, плотность ρ, скорость v и импульс P электронов, а также пространственные координаты z, r и время t

$$\begin{gathered}\varphi' = \frac{v_0^2}{\eta_0}\varphi, \quad E' = \frac{v_0^2}{L\eta_0}E, \quad B' = \frac{v_0}{L\eta_0}B, \quad \rho' = \rho_0\rho, \\ v' = v_0 v, \quad P' = m_e v_0 P, \quad z' = Lz, \quad r' = Lr, \quad t' = \frac{L}{v_0}t,\end{gathered} \tag{1}$$

где штрихом обозначены соответствующие размерные величины, $\eta_0 = e/m_e$ – удельный заряд покоящегося электрона; v_0 и ρ_0 – не зависящие от радиуса статические

(невозмущенные) скорость и плотность электронного потока на входе в систему; L – длина пространства взаимодействия.

Численное моделирование нестационарных процессов в электронном пучке при инжекции его в пространство дрейфа проводилось методом крупных частиц. Он заключается в том, что электронный поток представляется в виде совокупности крупных частиц, которые в цилиндрической системе координат имеют вид заряженных колец. Для каждой заряженной частицы решались уравнения движения, записанные через компоненты ее импульса. В цилиндрических координатах в безразмерных величинах (1) уравнения движения записываются в следующем виде:

$$\frac{dP_{ri}}{dt} - \gamma(z_i, \theta_i, r_i) r_i \left(\frac{d\theta_i}{dt}\right)^2 = -E_r - r_i B \frac{d\theta_i}{dt}, \tag{2}$$

$$\frac{dP_{\theta i}}{dt} + \gamma(z_i, \theta_i, r_i) r_i \frac{dr_i}{dt}\frac{d\theta_i}{dt} = B\frac{dr_i}{dt}, \tag{3}$$

$$\frac{dP_{zi}}{dt} = -E_z, \quad i = 1, \ldots N_0, \tag{4}$$

где γ – релятивистский фактор; с учетом слабого релятивизма

$$\gamma(z_i, \theta_i, r_i) = \left(1 - \frac{\beta_0^2}{2}\left[\left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2 + \left(r_i\frac{d\theta_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]\right). \tag{5}$$

Здесь z_i, r_i и θ_i – соответственно продольная, радиальная и азимутальная координаты заряженных частиц; $P_{zi} = \gamma\dot{z}_i$, $P_{ri} = \gamma\dot{r}_i$ и $P_{\theta i} = \gamma r_i\dot{\theta}_i$ – соответственно продольная, радиальная и азимутальная компоненты импульсов заряженных частиц; E_z и E_r – продольная и радиальная компоненты электрического поля; $B = B_z = \mathrm{const}$ – продольная компонента внешнего магнитного поля (предполагается, что радиальная и азимутальная составляющие внешнего магнитного поля равны нулю: B_r=B_θ=0). Индексом i обозначены номера частиц, N_0 – полное число заряженных частиц, моделирующих электронный поток.

Частицы при влете в пространство дрейфа имеют ненулевую азимутальную скорость, пропорциональную продольному магнитному полю в пространстве дрейфа. Эта скорость определяется из теоремы Буша, записанной для случая экранированного от внешнего магнитного поля катода ($B_k = 0$) [18, 19]

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\eta_0 B_z}{2\gamma_0},$$

где $\gamma_0 = 1/\sqrt{1-\beta_0^2}$.

Уравнения движения (2)–(4) для каждой крупной частицы интегрировались численно методом «с перешагиванием». Уравнение (3) может привести к неустойчивости азимутальной скорости частицы $\dot{\theta}_i$, так как из него следует, что $\dot{\theta}_i \sim 1/r_i$, и при малых r_i и больших временных шагах численного интегрирования частица «нефизично» быстро раскручивается. Для корректного решения уравнений движения для частиц, близко подошедших к оси симметрии, интегрирование уравнений производится с повышенной точностью. Шаг интегрирования уменьшается до значения, при котором численная схема становится устойчивой, и результат интегрирования

уравнений движения частиц начинает сходиться с уменьшением шага интегрирования.

Распределение потенциала в пространстве взаимодействия рассчитывалось с помощью уравнения Пуассона, которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \alpha^2\rho, \tag{6}$$

где

$$\alpha = L\left(\frac{|\rho_0|}{\varphi_0\varepsilon_0}\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Здесь $\alpha = \eta_0|\rho_0|L/(\varepsilon_0 v_0)$ – безразмерный управляющий параметр (критерий подобия задачи [20]), пропорциональный току пучка как $\alpha \sim \sqrt{I}$ и длине пространства взаимодействия как $\alpha \sim L$. Уравнение Пуассона решается при следующих граничных условиях, учитывающих влияние стенок на поток:

$$\varphi(z=0,r)=0, \quad \varphi(z=1,r)=0, \quad \varphi(z,r=R)=0, \tag{8}$$

$$\left.\frac{d\varphi}{dr}\right|_{r=0} = 0. \tag{9}$$

Условие (9) на оси симметрии $r = 0$ определяется аксиальной симметрией пространства взаимодействия. Для решения уравнение Пуассона (6) используется метод сеток. На пространство распространения электронного потока (цилиндрический волновод) накладывается пространственная сетка с шагами Δr и Δz по радиальной и продольной координатам, соответственно. Затем в узлах этой сетки вычисляются плотности пространственного заряда с использованием снижающей сеточный шум процедуры билинейного взвешивания крупных частиц на пространственной сетке в цилиндрической системе координат (PIC-метод) [17]. Определенные процедурой билинейного взвешивания величины пространственных зарядов в узлах сетки $\rho(k\Delta z, j\Delta r)$ используются для нахождения распределения потенциала пространственного заряда, то есть его значений в узлах сетки, с помощью уравнения Пуассона. После этого дифференцированием определяются величины напряженности электрического поля в узлах сетки.

Положение крупных частиц, используемых для моделирования пучка электронов, определяется непрерывными координатами, поэтому необходимо найти значения напряженностей электрического поля в этих координатах. Это делается с помощью процедуры, аналогичной билинейному взвешиванию.

2. Формирование и динамика ВК в сплошном электронном потоке во внешнем магнитном поле

Формирование ВК в электронном потоке связано с появлением в пространстве дрейфа потенциального барьера, отражающего к плоскости инжекции и на боковые поверхности рабочей камеры виркатора часть электронного потока. Виртуальный катод, формирующийся в электронном потоке со сверхпредельным током, принципиально ведет себя нестационарным образом, совершая колебания как во времени, так

и в пространстве [2, 12, 21–26]. Картина формирования и динамики ВК достаточно подробно описана в литературе [13, 21, 22, 27, 28] для случая одномерного движения электронов пучка (полностью замагниченного потока). Величина критического тока для этого случая была впервые аналитически определена в работах [1, 15, 29]:

$$I_0 = \frac{c^3}{\eta_0} \frac{\left(\gamma_0^{2/3} - 1\right)^{3/2}}{\Delta/R_b + 2\ln\left(R/R_b\right)}, \tag{10}$$

где R_b – средний радиус пучка, а Δ – его толщина.

Введение в систему с виртуальным катодом внешнего магнитного поля оказывает сильное влияние на динамику пучка и особенности формирования и динамики ВК в виркаторной системе. Рассмотрим их более подробно, используя для анализа механизмов формирования и динамики ВК в пучке заряженных частиц описанную в разделе 1 двумерную математическую модель.

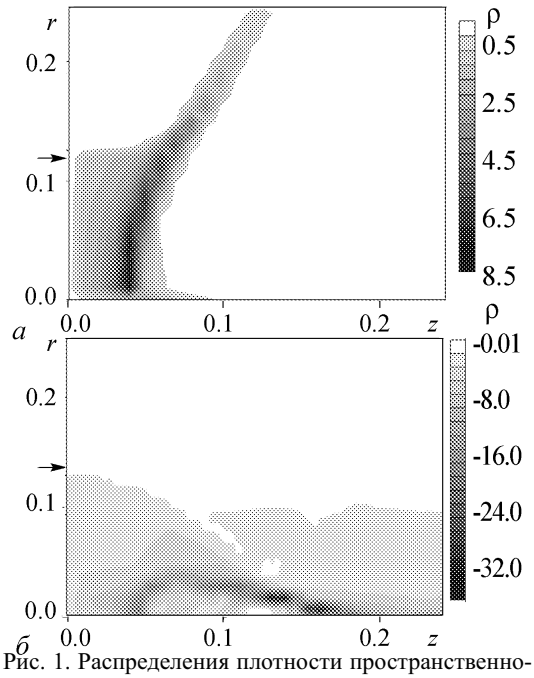


Рис. 1. Распределения плотности пространственного заряда в области виртуального катода, усредненные за характерный период колебаний ВК при $\sigma = 0.5$, $\beta_0 = 0.1$, $B = 42$ Гс, $\alpha = 11$ (*а*) и $B = 170$ Гс, $\alpha = 7$ (*б*). Стрелкой показан начальный радиус сплошного цилиндрического потока

Наиболее часто используемыми в реальных приборах являются цилиндрические сплошной и трубчатый электронные пучки. Поэтому важной задачей является исследование пучков именно с такой геометрией. В данном разделе будет рассмотрен сплошной поток электронов, находящийся во внешнем магнитном поле, причем параметр заполнения пучком канала пространства дрейфа $\sigma = R_b/R$ предполагается фиксированным и равным 0.5. Ниже, в разделе 3 приведены результаты исследования трубчатого пучка.

Для иллюстрации процессов, протекающих в сплошном электронном потоке с виртуальным катодом, находящимся во внешнем магнитном поле, на рис.1 приведены распределения плотности пространственного заряда в области виртуального катода для случаев малой и большой индукции магнитного поля при токе пучка, превышающем критическое значение, когда в системе образуется колеблющийся нестационарный ВК. Величина усредненной за характерный период колебаний ВК плотности пространственного заряда $\rho(r, z)$ в различных точках (r, z) пространства дрейфа пропорциональна интенсивности серого цвета. Максимум на распределении плотности пространственного заряда (темная область на рисунке) соответствует области виртуального катода, где электроны останавливаются и начинают двигаться обратно от ВК либо к входному электроду, либо к боковой стенке пространства дрейфа в зависимости от величины магнитного поля. Из рисунка видно, что в случае малой величины внешнего магнитного поля (рис. 1, *а*)

виртуальный катод растянут вдоль радиального направления на расстояние, превышающее начальный радиус пучка (начальный радиус пучка обозначен стрелкой). Это является следствием малой величины внешнего магнитного поля, которое не может удержать частицы от движения в радиальном направлении, вызванного силами пространственного заряда. Динамика пучка с ВК в данном случае преимущественно проходит в поперечном направлении. В случае большей величины внешнего магнитного поля (рис. 1, *б*) движение крупных частиц, в основном, происходит в продольном направлении. Такое поведение объясняется влиянием внешнего магнитного поля, которое не позволяет пучку расширяться и двигаться в поперечном направлении, поэтому виртуальный катод в этом случае сосредоточен около оси системы и имеет поперечный размер, не превышающий начальный радиус пучка. Более того, при больших магнитных полях поперечный размер области, отражающей от себя электроны (то есть ВК, которому также соответствует наиболее плотный сгусток электронов), значительно меньше начального радиуса пучка за счет сильного сжатия потока во внешнем магнитном поле. Основная часть пространственного заряда в системе, как в случае малого, так и в случае большого магнитного поля, сосредоточена в области ВК, что является следствием потери электронами энергии при приближении к ВК за счет торможения в потенциальной яме, образованной ВК.

На рис. 2 приведены зависимости нормированного числа крупных частиц, покидающих пространство дрейфа, от безразмерного тока пучка α. Кривая *1* на рисунках, соответствующая числу частиц, покидающих систему через входной электрод, ведет себя одинаково как в случае малого (рис. 2, *а*), так и в случае большого (рис. 2, *б*) магнитного поля. При токе пучка меньшем критического значения $\alpha < \alpha_{кр}$, при котором в системе образуется нестационарный ВК (величина $\alpha_{кр}$ обозначена стрелкой на рисунке), частицы не отражаются к входной плоскости; при $\alpha > \alpha_{кр}$ количество частиц, отражающихся обратно к плоскости инжекции, монотонно возрастает с увеличением тока пучка, асимптотически приближаясь к постоянному значению.

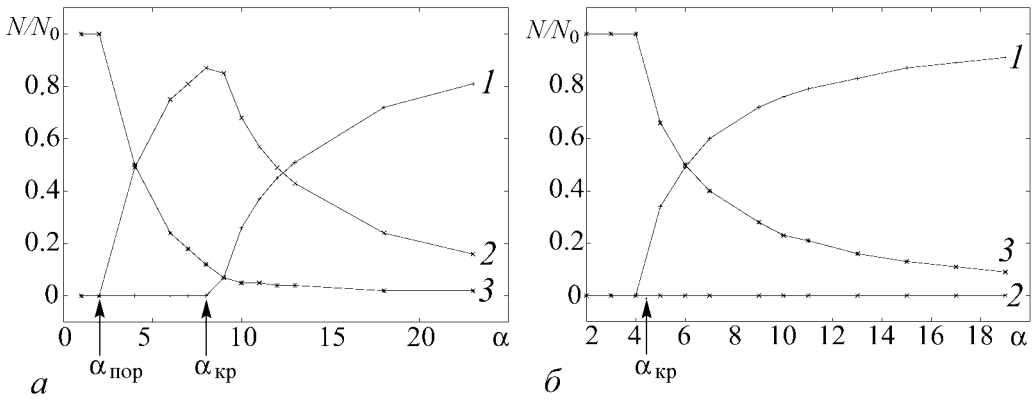


Рис. 2. Зависимости нормированного числа частиц N/N_0, покидающих пространство дрейфа через боковую поверхность (кривая *2*), через входной (кривая *1*) и выходной (*3*) электроды, от безразмерного тока пучка α при $B = 0$ Гс (*а*) и $B = 256$ Гс (*б*); N_0 – полное число инжектированных в систему частиц

Кривая *3* на рисунках, соответствующая числу частиц, покидающих систему через выходной электрод, монотонно спадает с увеличением тока пучка. В случае большого магнитного поля (см. рис. 2, *б*) это уменьшение начинается при токе $\alpha > \alpha_{кр}$, так как при этом значении тока электронного пучка в системе образуется ВК, отражающий от себя часть потока к входному электроду и приводящий к уменьшению токопрохождения в системе. Поперечная динамика частиц, которой соответствует кривая *2*, в этом случае отсутствует, и при любых значениях тока пучка число частиц, отражающихся к боковой поверхности пространства дрейфа, равно нулю. Таким образом, при большом магнитном поле частицы покидают систему через входной и выходной электроды, а количественное соотношение между ними определяется величиной тока инжектируемого пучка.

При малой величине внешнего магнитного поля (см. рис. 2, *а*) количество частиц, покидающих систему через выходной электрод (кривая *3*), начинает монотонно уменьшаться при токе пучка меньшем критического значения, но большем некоторого порогового значения (обозначено на рисунке стрелкой): $\alpha_{пор} < \alpha < \alpha_{кр}$. При данном токе в системе начинается токооседание на боковую поверхность пространства дрейфа, которому соответствует кривая *2* на рис. 2, *а*, и не все заряженные частицы доходят до выходного электрода. Кривая *2* имеет два характерных участка: при $\alpha_{пор} < \alpha < \alpha_{кр}$ наблюдается монотонное увеличение числа частиц, покидающих систему через боковую поверхность; при $\alpha > \alpha_{кр}$ – монотонное уменьшение. Как следствие, существует некоторое значение тока пучка, при котором число частиц, уходящих через боковую поверхность, максимально. Увеличение числа частиц, оседающих на боковую поверхность при $\alpha < \alpha_{кр}$, объясняется следующим. С увеличением тока пучка в области вблизи плоскости инжекции, где тормозятся электроны и, как следствие, накапливается пространственный заряд, наблюдается рост суммарного заряда и увеличивается сила расталкивания электронов в поперечном направлении. Это приводит к возрастанию числа частиц, отражающихся к боковой поверхности пространства дрейфа и к уменьшению токопрохождения (кривая *3*). При этом число частиц, отражающихся к плоскости инжекции, равно нулю, так как силы пространственного заряда оказываются недостаточными для того, чтобы отражать электроны обратно к плоскости инжекции, а достаточными только для существенного изменения их траекторий в пространстве дрейфа. Однако при достижении током пучка критического значения $\alpha_{кр}$ в системе формируется нестационарный ВК, который начинает отражать электроны к входному электроду. Это приводит к уменьшению токооседания на боковую поверхность пространства дрейфа и к еще более значительному уменьшению токопрохождения к выходной сетке. В конечном итоге, при больших токах пучка ($\alpha \gg \alpha_{кр}$) и малых магнитных полях практически все частицы отражаются к входному электроду, и лишь небольшая часть оседает на боковой поверхности пространства дрейфа, не удерживаясь малым магнитным полем.

На рис. 3 изображены конфигурационные портреты электронного потока для случаев малой и большой величин внешнего магнитного поля, построенные при токе пучка, превышающем критическое значение $\alpha_{кр}$. Следуя работе [21], точками показаны координаты и скорости частиц потока в некоторый фиксированный момент времени. Данная характеристика оказывается удобной и наглядной при рассмотрении процессов в электронном потоке в режиме формирования виртуального катода.

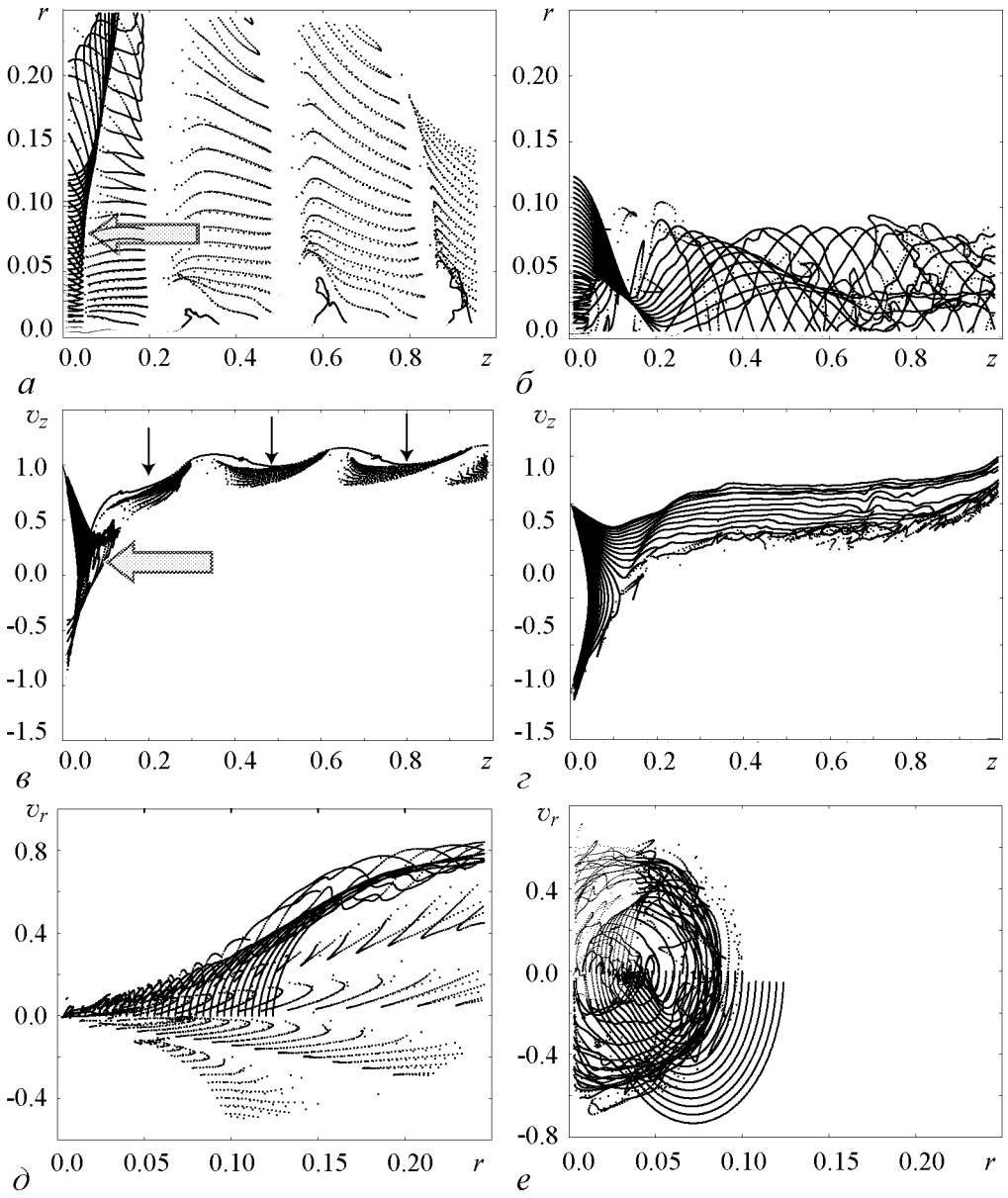


Рис. 3. Конфигурационные портреты сплошного электронного потока в безразмерных координатах при $B = 42$ Гс, $\alpha = 11$ (*а*, *в*, *д*) и $B = 170$ Гс, $\alpha = 7$ (*б*, *г*, *е*).

На рис. 3, *а* и рис. 3, *б* хорошо прослеживаются различия в динамике ВК при малом и значительном внешнем магнитном поле. На рис. 3, *а*, соответствующем слабому магнитному полю, частицы в области ВК (обозначен стрелкой) двигаются как в поперечном направлении, оседая на боковой поверхности пространства дрейфа, так и в продольном, либо отражаясь к входному электроду, либо проходя ВК и создавая пролетный ток (см. рис. 2, *а*). Наличие ВК в системе в случае малого магнитного поля демонстрирует также рис. 3, *в*, представляющий собой конфигурационный портрет пучка в координатах (v_z, z), где v_z – продольная скорость электронов в си-

стеме. При приближении к плоскости ВК (обозначена толстой стрелкой) происходит торможение частиц в поле пространственного заряда ВК, а затем – отражение заряженных частиц от ВК. Таким образом, плотность пространственного заряда в области ВК максимальна, а слева от плоскости ВК существуют частицы как с положительной продольной скоростью, так и с отрицательной, что также прослеживается на рис. 3, *в*. Некоторые частицы способны преодолевать потенциальный барьер ВК в моменты времени, когда он минимален. Результатом является глубокая модуляция пролетного электронного потока по плотности за счет колебаний глубины потенциальной ямы ВК. Этот факт также иллюстрируют рис. 3, *а* и рис. 3, *в* в виде последовательности сгустков справа за плоскостью ВК (сгустки обозначены тонкими стрелками на рис. 3, *в*).

Для анализа поперечной динамики ВК на рис. 3, *д* и рис. 3, *е* приведены конфигурационные портреты пучка в безразмерных координатах (v_r, r) (где v_r – радиальная скорость заряженных частиц в системе) для малых и больших магнитных полей, соответственно. В случае слабого магнитного поля основная доля частиц имеет положительные поперечные скорости, возрастающие с ростом радиальной координаты. Плотность пространственного заряда в области ВК вдоль всего радиального направления приблизительно одинакова. Такой вид конфигурационного портрета (v_r, r) свидетельствует о высокой роли поперечной динамики заряженных частиц в формировании и динамике нестационарного ВК в слабом внешнем магнитном поле.

В случае большого магнитного поля (рис. 3, *б*) частицы либо отражаются от ВК к плоскости инжекции, либо проходят потенциальный барьер в продольном направлении к выходному электроду (см. рис. 2, *а*). Таким образом, поперечная динамика пространственного заряда в области ВК играет меньшую роль, чем в случае малого магнитного поля, а сам ВК сосредоточен около оси симметрии системы. Последнее определяется сильным сжатием пучка в большом магнитном поле при его инжекции в пространство дрейфа. Как следствие, основная часть проходящих через ВК частиц принадлежит внешним слоям сплошного пучка, в то время как частицы из внутренних слоев практически полностью отражаются от ВК обратно к плоскости инжекции.

За счет действия сильного магнитного поля в системе наблюдаются существенно нерегулярные пульсации проходящего пучка, но их амплитуда не превышает его начального радиуса. Нерегулярность пульсаций определяется сильным разбросом электронов по скоростям после прохождения нестационарного ВК. Этот факт хорошо отражает конфигурационный портрет пучка в координатах (v_r, r) (см. рис. 3, *е*). Из этого рисунка следует, что в системе приблизительно одинаковое число частиц с положительными и отрицательными поперечными скоростями, а радиус пучка в пространстве дрейфа ограничен, что свидетельствует о наличии циклотронного вращения электронов в пространстве дрейфа. Также на данном конфигурационном портрете наблюдается ВК – сгусток частиц, расположенный рядом с осью симметрии.

Формирование ВК также иллюстрирует рис. 3, *г*, на котором показан конфигурационный портрет пучка в координатах (v_z, z) при большом магнитном поле. Хорошо видно формирование ВК вблизи плоскости инжекции пучка. Также видно, что при большом магнитном поле, в отличие от слабого магнитного поля, не происходит

сильной модуляции потока по плотности, и в проходящем потоке электронных сгустков не наблюдается, в системе присутствует достаточно однородное распределение частиц вдоль продольной координаты. Это свидетельствует о наличии постоянного токопрохождения в системе.

Для иллюстрации процесса конкуренции двух типов динамики пространственного заряда в пучке электронов при увеличении магнитного поля на рис. 4 приведены зависимости нормированного числа частиц N/N_0, покидающих пространство дрейфа через боковую поверхность и через входной и выходной электроды, от величины внешнего магнитного поля B. В случае слабого магнитного поля $B < 85.0$ Гс большое число частиц покидает систему через боковую поверхность пространства дрейфа, причем их количество монотонно уменьшается с увеличением величины магнитного поля. Одновременно монотонно возрастает число частиц, покидающих систему через входной и выходной электроды. При большой величине магнитного поля $B > 85.0$ Гс число частиц, выходящих из системы в поперечном направлении, близко к нулю; электроны преимущественно покидают систему через входной электрод, и в меньшей степени – через выходной.

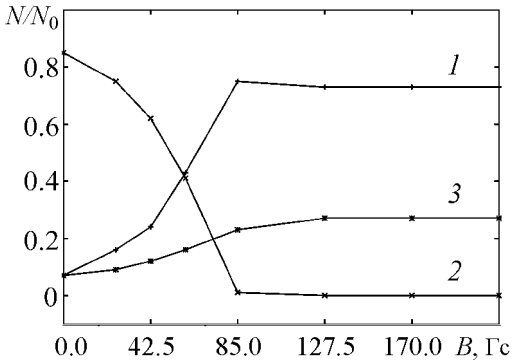


Рис. 4. Зависимости нормированного числа частиц N/N_0, покидающих пространство дрейфа через боковую поверхность (кривая *2*), через входной (кривая *1*) и выходной (кривая *3*) электроды, от величины внешнего магнитного поля B при $\alpha = 9$

На рис. 5 изображен конфигурационный портрет пучка в координатах (r, z) при значении индукции магнитного поля $B = 85.0$ Гс. Видно, что частицы из-

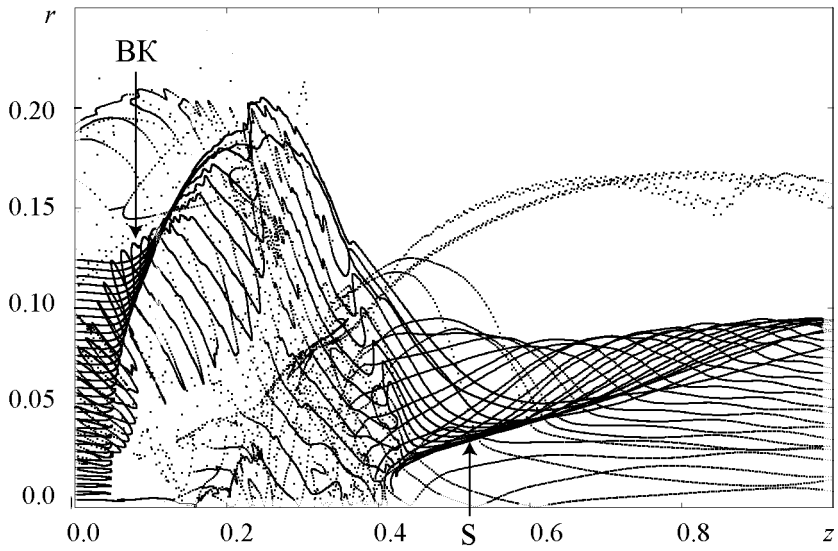


Рис. 5. Конфигурационный портрет сплошного электронного потока в безразмерных координатах при $B = 85.0$ Гс, $\alpha = 9$. За ВК справа наблюдается вторичный сгусток (S)

за действия магнитного поля не достигают боковой поверхности – это определяет отсутствие токооседания на нее. Однако ВК сильно растянут вдоль радиального направления, что говорит о все еще важной роли поперечной динамики пространственного заряда в области ВК при данном значении магнитного поля. При дальнейшем увеличении магнитного поля поперечная динамика будет все менее существенной; в случае, изображенном на рис. 3, *б* динамика пространственного заряда преимущественно протекает в продольном направлении.

На рис. 6 приведены зависимости нормированного числа частиц N/N_0, покидающих пространство дрейфа через входной электрод, от безразмерного тока пучка α, построенные при трех значениях магнитного поля. Анализ кривых, полученных при различных магнитных полях показывает, что величина критического тока пучка, когда начинаются отражения частиц к входному электроду (образование ВК), существенно зависит от величины внешнего магнитного поля. Самый большой ток $\alpha_{\text{кр}1}$ для образования в системе ВК требуется при малом магнитном поле (кривая *1*), а самый маленький $\alpha_{\text{кр}2}$ – при среднем (кривая *2*). С дальнейшим увеличением магнитного поля критический ток возрастает, но остается меньше $\alpha_{\text{кр}1}$: $\alpha_{\text{кр}3} < \alpha_{\text{кр}1}$ (кривая *3*). Более подробное исследование зависимости величины критического тока пучка от величины внешнего магнитного поля проведено в разделе 4.

При формировании ВК в рассматриваемой системе возможно появление вторичного сгустка электронов в пролетном потоке (показан на рис. 5 буквой S). Ранее данный эффект формирования вторичного сгустка был обнаружен для модели диода Пирса [30,31]. Образование вторичного сгустка связано с модуляцией электронов по скоростям в поле колеблющегося ВК, однако учет двумерных эффектов несколько изменяет картину его образования. Возникающий ВК начинает замедлять инжектируемые в систему электроны, а также изменять направления их скоростей. Наличие магнитного поля приводит к фокусировке электронов. Совместно с модуляцией скоростей электронов в поле ВК это приводит к модуляции электронов по плотности в пространстве дрейфа, что отражается в появлении вторичного сгустка электронов за ВК. Из-за действия сил пространственного заряда этот сгусток разрушается через некоторый интервал времени.

На плоскости параметров «внешнее магнитное поле B – безразмерный ток

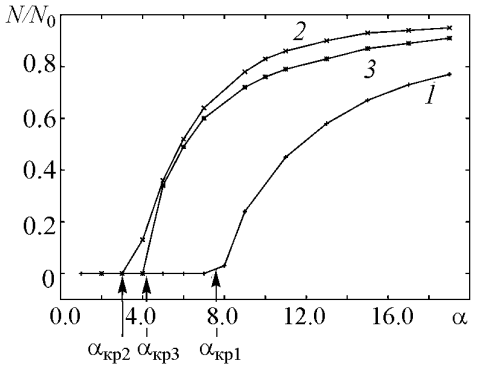


Рис. 6. Зависимости нормированного числа частиц N/N_0, покидающих пространство дрейфа через входной электрод, от безразмерного тока пучка α при $B = 42.0$ Гс (кривая *1*), $B = 128.0$ Гс (кривая *2*) и $B = 256.0$ Гс (кривая *3*)

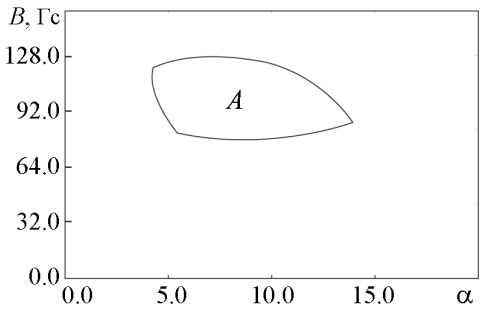


Рис. 7. Плоскость параметров «внешнее магнитное поле B – безразмерный ток пучка α». Буквой A обозначена область, где наблюдается вторичный сгусток

пучка α» (рис. 7) была найдена область параметров системы, где справа за плоскостью ВК образуется вторичный сгусток. Наличие нижней границы области объясняется тем, что при малых величинах внешнего магнитного поля в системе преобладает поперечная динамика частиц и их движение к боковой поверхности, что не позволяет образоваться вторичному сгустку электронов (пролетный ток мал). Сильное магнитное поле, которому соответствует верхняя граница, приводит к значительным пульсациям пучка, которые мешают образованию вторичного сгустка. Левая граница области появляется вследствие того, что сгусток может сформироваться только за счет модуляции электронов по скоростям виртуальным катодом, но сам ВК образуется при превышении током критического значения; этот факт отражает левая граница. Вторичный сгусток разрушается вследствие действия сил пространственного заряда, возникающих в его области. Эти силы возрастают с ростом тока пучка, и при некотором значении тока, которому соответствует правая граница области, не позволяют сгустку сформироваться.

3. Формирование и динамика виртуального катода в трубчатом электронном потоке во внешнем магнитном поле

Рассмотрим теперь динамику ВК в трубчатом пучке электронов, находящемся во внешнем магнитном поле. Пучки с такой геометрией представляют большой интерес, так как наиболее часто используются на практике при экспериментах с генераторами на ВК. Поэтому важно провести исследования для трубчатого электронного потока, аналогичные проведенным для сплошного пучка, и выявить особенности, связанные с его геометрией. Будем рассматривать здесь пучок фиксированной толщины с помощью модели, описанной в разделе 1.

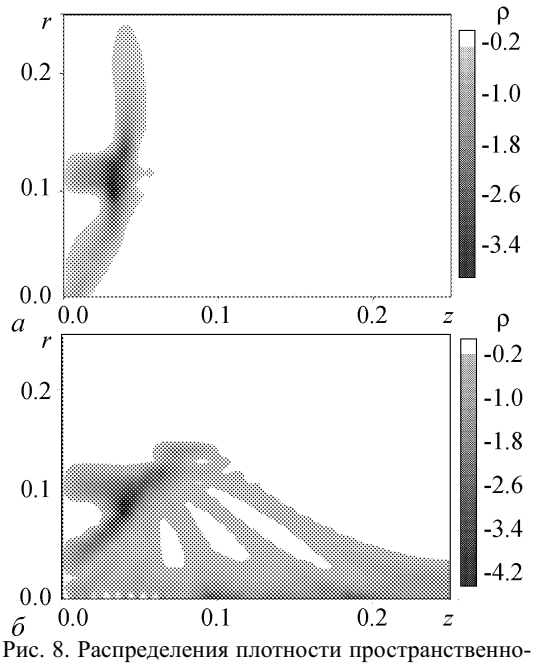


Рис. 8. Распределения плотности пространственного заряда в области виртуального катода, усредненные за характерный период колебаний ВК при $\beta_0 = 0.1$, $B = 42.0$ Гс, $\alpha = 24$ (*а*) и $B = 128.0$ Гс, $\alpha = 18$ (*б*).

На рис. 8 приведены распределения плотности пространственного заряда в области виртуального катода, усредненные за характерный период колебаний виртуального катода, в случаях малой и большой величины внешнего магнитного поля при токе пучка, превышающем критическое значение. Как и в случае сплошного пучка, величина плотности пространственного заряда $\rho(r, z)$ в различных точках (r, z) пространства дрейфа пропорциональна интенсивности серого цвета. Максимум на распределении плотности пространственного заряда (темная область на рисунке) соответствует области виртуального катода. В слабом магнит-

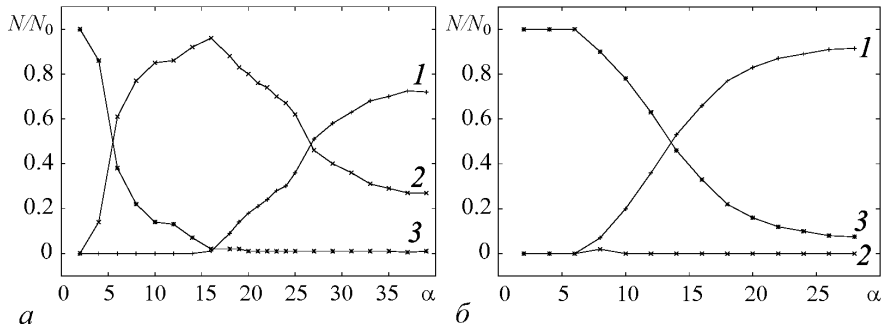


Рис. 9. Зависимости нормированного числа частиц N/N_0, покидающих пространство дрейфа через боковую поверхность (кривая *2*), через входной (кривая *1*) и выходной (кривая *3*) электроды, от безразмерного тока пучка α при $B = 0$ Гс (*а*) и $B = 128.0$ Гс (*б*); N_0 – полное число инжектированных в систему частиц

ном поле в трубчатом пучке (рис. 8, *а*), как и в случае сплошного пучка, ВК растянут вдоль всего радиального направления, причем его максимум сосредоточен в области инжекции пучка в пространство дрейфа. Также наблюдается разделение потока электронов на две части, одна из которых движется к боковой поверхности пространства дрейфа, а другая – по направлению к оси симметрии системы. С увеличением величины внешнего магнитного поля ограничивается поперечная динамика частиц в направлении боковой стенки системы (рис. 8, *б*). Как следствие, уменьшается токооседание на боковую поверхность пространства дрейфа, и динамика ВК начинает преимущественно проходить в продольном направлении, а также в направлении к оси симметрии системы. Сам виртуальный катод за счет сжатия пучка магнитным полем начинает прижиматься к оси симметрии системы.

На рис. 9 приведены зависимости нормированного числа крупных частиц N/N_0, покидающих пространство дрейфа через боковую поверхность и через входной и выходной электроды, от безразмерного тока пучка α. Как и в случае сплошного пучка, в трубчатом электронном потоке с увеличением тока пучка уменьшается число частиц, покидающих систему через выходной электрод (кривые *3* на рис. 9). При малом магнитном поле до образования ВК в системе с ростом тока пучка увеличивается число частиц, оседающих на боковую поверхность пространства дрейфа, а после образования ВК – отражающихся обратно к плоскости инжекции (кривые *1* и *2* на рис. 9, *а*). В случае большого магнитного поля частицы покидают систему преимущественно через входной или выходной электроды в зависимости от величины тока пучка (рис. 9, *б*). Следует заметить, что зависимости нормированного числа частиц, покидающих пространство дрейфа через боковую поверхность и через входной и выходной электроды, от безразмерного тока пучка α и от величины внешнего магнитного поля B для трубчатого пучка имеют вид, аналогичный тем же зависимостям для сплошного пучка (см. раздел 2, рис. 2 и рис. 4). Это говорит о схожих механизмах конкуренции двух различных типов динамики в сплошном и трубчатом пучках.

На рис. 10 показаны конфигурационные портреты электронного потока в случаях малой и значительной величин внешнего магнитного поля при токе пучка, превышающем критическое значение $\alpha_{\text{кр}}$. Из сравнения конфигурационных портретов

пучка в координатах (r, z) для различных величин внешнего магнитного поля обнаруживается описанная выше зависимость динамики пучка от магнитного поля (см. рис. 8), а также эффекты, связанные с геометрией рассматриваемого потока. Вследствие трубчатой формы пучка с увеличением магнитного поля он сильнее прижимается к оси. Если в отсутствие магнитного поля он разделялся на две приблизительно равные части (рис. 10, *а*), одна из которых стремилась к боковой поверхности (верхняя стрелка на рисунке), а другая – к оси системы (нижняя стрелка на рисунке), то

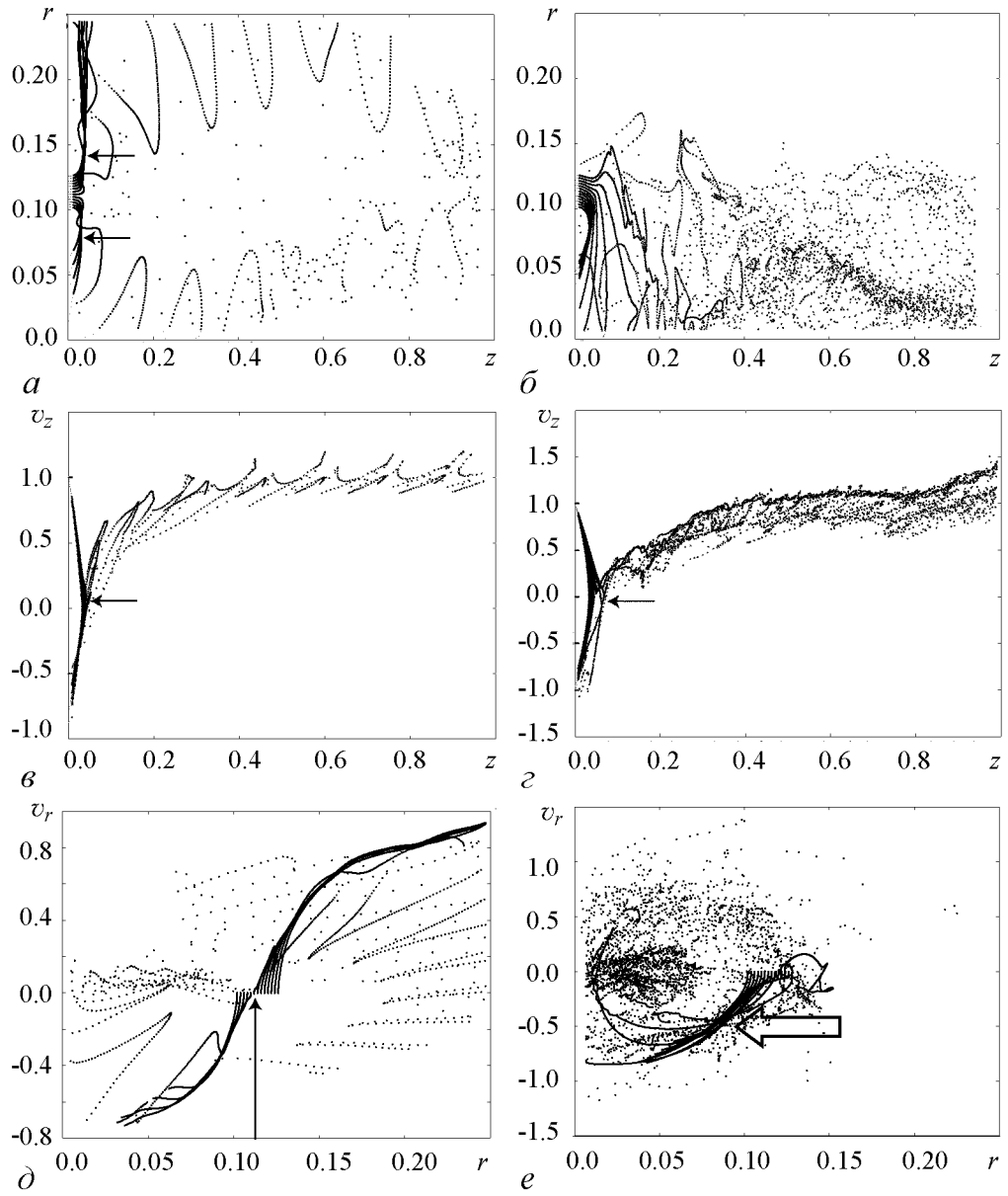


Рис. 10. Конфигурационные портреты трубчатого электронного потока в безразмерных координатах при $B = 42.0$ Гс, $\alpha = 24$ (*а*, *в*, *д*) и $B = 128.0$ Гс, $\alpha = 18$ (*б*, *г*, *е*)

с увеличением магнитного поля все большая часть пучка начинает стремиться к оси (рис. 10, *б*). Такое поведение трубчатого пучка при небольших величинах внешнего магнитного поля приводит к сложному распределению ВК вдоль радиальной оси и к его разделению на две части, а также – к усложнению формы потенциального барьера ВК. С увеличением величины магнитного поля при том же токе пучка плотность нижней части ВК начинает возрастать, и, в конце концов, верхняя часть исчезает, переходя полностью в нижнюю. Описанное поведение пучка является следствием его формы, а также наличия поперечной динамики частиц в системе. При больших величинах внешнего магнитного поля, когда поперечная динамика отсутствует, разделения пучка не наблюдается.

На рис. 10, *д*, представляющем собой конфигурационный портрет находящегося в слабом магнитном поле пучка в координатах (v_r, r), также наблюдается разделение пучка и ВК на две части (координата разделения r обозначена стрелкой). Справа от точки разделения частицы пучка движутся с положительными поперечными скоростями, а слева – с отрицательными. При большом магнитном поле (рис. 10, *е*) основная часть частиц движется с $v_r < 0$, а сам пучок по радиальной координате не выходит за границу, которую он имел на входе в систему. Это приводит к формированию ВК ближе к оси симметрии системы (обозначен стрелкой на рисунке).

Конфигурационные портреты пучка в координатах (v_z, z) при различных величинах магнитного поля (рис. 10, *в* и рис. 10, *г*) имеют схожий вид. На них наблюдается наличие плоскости ВК, слева от которой частицы имеют продольные скорости разных знаков (плоскости ВК обозначены стрелками на рисунках). Однако при малом магнитном поле (см. рис. 10, *в*), по сравнению с большим, значительно меньше величина токопрохождения в системе, поэтому справа за плоскостью ВК имеется незначительное число частиц, двигающихся к выходному электроду, что также наблюдается и на рис. 10, *а*. Это является следствием преимущества поперечной динамики частиц в системе при малом магнитном поле. При большом магнитном поле (см. рис. 10, *г*) токопрохождение в системе гораздо существеннее (см. также рис. 9, *б*). Как и в случае сплошного электронного пучка, в трубчатом потоке при малом магнитном поле за плоскостью ВК наблюдается модуляция проходящего потока по плотности (см. рис. 10, *в*).

4. Критический ток сплошного и трубчатого пучков во внешнем магнитном поле

Критический ток электронного пучка, при котором в системе образуется нестационарный ВК, является экспериментально легко измеряемой и практически важной величиной. Только при превышении током пучка критического значения в СВЧ-приборах, основанных на колебаниях ВК, возможна генерация СВЧ-излучения. Напомним, что под критическим током электронного потока полагается такой ток, при котором в системе начинаются отражения частиц от плоскости ВК, а сам ВК начинает совершать колебания во времени. В предыдущих разделах была обнаружена зависимость величины тока пучка, при котором формируется ВК, от величины внешнего магнитного поля. В данном разделе проводится более подробное исследование обнаруженной зависимости, характерный вид которой определяется вышеописанными физическими процессами в пучке с ВК.

На рис. 11 приведены зависимости нормированной величины критического тока сплошного и трубчатого электронных пучков от величины внешнего магнитного поля. Видно, что качественно эти зависимости имеют подобный вид. На них наблюдается две различные характерные области изменения тока пучка при увеличении магнитного поля. В первой области, соответствующей малым величинам магнитного поля, наблюдается монотонное уменьшение критического тока пучка при увеличении индукции B. Во второй области, при больших внешних магнитных полях, критический ток электронного пучка монотонно растет с увеличением магнитного поля, асимптотически приближаясь к постоянной величине, которая определяется формулой (10). Как следствие, существует некоторое значение магнитного поля $B_{\min}$, при котором критический ток пучков минимален. Такое поведение зависимостей является результатом конкуренции двух типов динамики пучков, описанных в разделе 2 и 3 [32].

При малых индукциях магнитного поля $B < B_{\min}$, когда оно слабо удерживает электроны пучка, в системе преобладает поперечная динамика заряженных частиц. Такое поведение электронов приводит к существенному расширению пучка в радиальном направлении и является причиной уменьшения величины плотности пространственного заряда в области виртуального катода. Как следствие, при этом происходит увеличение тока пучка (критического тока), необходимого для достижения величины плотности заряда в пространстве взаимодействия, обеспечивающей начало поворота и отражения частиц в пучке,то есть формирование колеблющегося нестационарного виртуального катода. В трубчатом пучке дополнительное влияние на уменьшение плотности пространственного заряда в области ВК оказывает также его разделение на две части при малых индукциях магнитного поля. При магнитных полях $B \sim B_{\min}$ поведение системы определяется как поперечной, так и продольной динамикой заряженных частиц в области виртуального катода, что приводит к возникновению минимума на зависимости критического тока пучка от величины внешнего магнитного поля. Когда магнитное поле становится значительным ($B > B_{\min}$), поперечная динамика частиц практически ограничивается, а их отражение и поворот от ВК затрудняется, поэтому требуется некоторое увеличение тока пучка для начала формирования нестационарного ВК в системе.

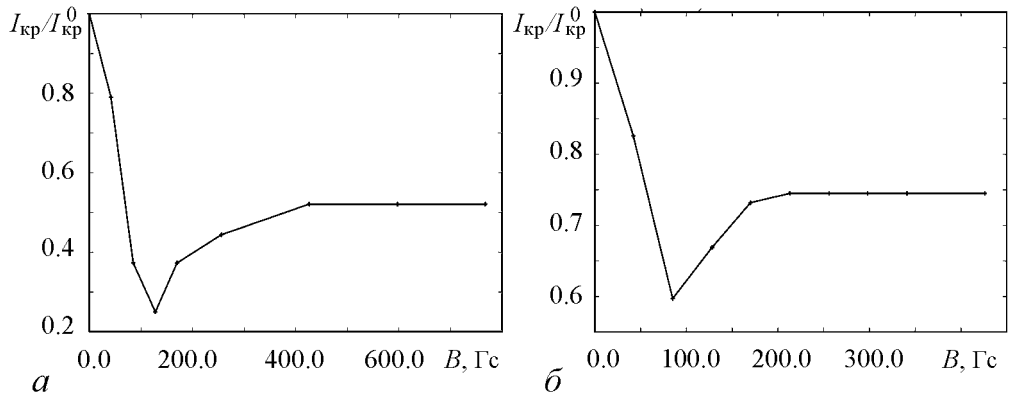


Рис. 11. Зависимости нормированной величины критического тока сплошного (*а*) и трубчатого (*б*) пучков $I_{\text{кр}}/I^0_{\text{кр}}$ (нормировка осуществляется на величину тока пучка при $B = 0$) от индукции внешнего магнитного поля

Заключение

Было проведено исследование формирования и динамики виртуального катода в сплошном и трубчатом электронных пучках во внешнем магнитном поле. Обнаружено сильное влияние внешнего магнитного поля на механизмы формирования, конфигурацию и динамику виртуального катода. Это объясняет зависимость различных характеристик генерации приборов, использующих колебания виртуального катода, от величины внешнего магнитного поля.

Обнаружено два качественно различных типа динамики виртуального катода, причем преимущество того или иного типа определяется величиной индукции внешнего магнитного поля. При малых магнитных полях в системе преобладает поперечная динамика, а при больших – продольная. Поведение сплошного электронного пучка во внешнем магнитном поле во многом подобно поведению трубчатого пучка, однако у последнего есть свои особенности. Они связаны со спецификой его геометрии, которая во внешнем магнитном поле приводит к разделению трубчатого пучка на две части, а следовательно, и к расщеплению виртуального катода.

Обнаруженная конкуренция двух типов динамики приводит к характерной зависимости критических токов сплошного и трубчатого электронных пучков от величины внешнего магнитного поля. При малых магнитных полях наблюдается монотонное уменьшение критических токов пучков с увеличением индукции, а при больших – монотонный рост. Как следствие, имеется оптимальная величина магнитного поля, при которой критические токи пучков минимальны.

Работа поддержана РФФИ (проект 07-02-12071-офи), CRDF (проект REC–006), Президентской программой поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-355.2008.2) и программой поддержки молодых докторов наук (проект МД-1884.2007.2), а также ФНП «Династия».

Библиографический список

1. *Granatstein V.L., Alexeff I.* High Power Microwave Sources. Artech House Microwave Library. 1987.
2. *Дубинов А.Е., Селемир В.Д.* Электронные приборы с виртуальным катодом // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. С. 575.
3. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В 2 т. Т. 2. М.: Физматлит, 2004.
4. *Афанасьева В.В., Лазерсон А.Г., Чемичев Г.В.* Пространственный хаос в системе электронный пучок – периодическое магнитное поле // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1992.
5. *Афанасьева В.В., Лазерсон А.Г.* Пространственный хаос и подавление параметрической неустойчивости в системе «электронный пучок – периодическое магнитное поле» // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20, вып. 12. С. 19.
6. *Калинин Ю.А., Лазерсон А.Г., Чемичев Г.В.* Сложная динамика непараксиальных электронных потоков в периодическом магнитном поле // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 4. С. 32.

7. *Nikolov N.A., Kostov K.G., Spassovsky I.P., Spassov V.A.* High-power microwave generation from virtual cathode in foilless diode (vircator) // Electronics Letters. 1988. Vol. 24. P. 1445.
8. *Kostov K.G., Nikolov N.A., Spassovsky I.P., Spassov V.A.* Experimental study of virtual cathode oscillator in uniform magnetic field // Appl. Phys. Lett. 1992. Vol. 60. P. 2598.
9. *Kostov K.G., Nikolov N.A., Spassov V.A.* Excitation of transverse electric modes in axially extracted virtual cathode oscillator // Electronics Letters. 1993. Vol. 29. P. 1069.
10. *Kostov K.G., Nikolov N.A.* Microwave generation from an axially extracted virtual cathode oscillator with a guide magnetic field // Phys. Plasmas. 1994. Vol. 1. P. 1034.
11. *Kostov K.G., Yovchev I.G., Nikolov N.A.* Numerical investigation of microwave generation in foilless diode vircator // Electron Letters. 1999. Vol. 35. P. 1647.
12. *Егоров Е.Н., Храмов А.Е.* Исследование хаотической динамики в электронном пучке с виртуальным катодом во внешнем магнитном поле // Физика плазмы. 2006. Т. 32. С. 742.
13. *Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е., Егоров Е.Н., Филатов Р.А.* Экспериментальное и теоретическое исследование хаотических колебательных явлений в нерелятивистском электронном потоке с виртуальным катодом // Физика плазмы. 2005. Т. 31. С. 1009.
14. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Morozov M., Mushtakov A.V.* Effect of external magnetic field on critical current for the onset of virtual cathode oscillations in relativistic electron beams // Phys. Lett. A. 2008. Vol. 372. P. 876.
15. *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990.
16. *Рошаль А.С.* Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979.
17. *Birdsall C.K., Langdon A.B.* Plasma physics, via computer simulation. NY: McGraw–Hill, 1985.
18. *Алямовский И.В.* Электронные пучки и электронные пушки. М.: Сов. радио, 1966.
19. *Tsimring S.E.* Electron beams and microwave vacuum electronics. John Wiley and Sons. Inc., Hoboken, New Jersey, 2007.
20. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В 2 т. Т. 1. М.: Физматлит, 2003.
21. *Селемир В.Д., Алёхин Б.В., Ватрунин В.Е., Дубинов А.Е., Степанов Н.В., Шамро О.А., Шибалко К.В.* Теоретические и экспериментальные исследования СВЧ-приборов с виртуальным катодом // Физика плазмы. 1994. Т. 20. С. 689.
22. *Jiang W., Masugata K., Yatsui K.* Mechanism of microwave generation by virtual cathode oscillation // Phys. Plasmas. 1995. Vol. 2. P. 982.
23. *Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е.* К вопросу о механизме возникновения хаотической динамики в вакуумном СВЧ генераторе на виртуальном катоде // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. XLI. С. 1137.

24. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Исследование когерентных структур в электронном пучке со сверхкритическим током с помощью вейвлетной бикогерентности // Физика плазмы. 2002. Т. 28. С. 722.
25. Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Левин Ю.И., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Вакуумные генераторы широкополосных хаотических колебаний на основе нерелятивистских электронных пучков с виртуальным катодом // Изв. РАН, сер. физич. 2005. Т. 69. С. 1724.
26. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Процессы образования и нестационарная динамика виртуального катода в нерелятивистском электронном пучке в тормозящем поле (двумерное приближение) // Известия вузов. Радиофизика. 2006.
27. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Левин Ю.И., Храмов А.Е.* Исследование образования структур и хаотической динамики в нерелятивистском электронном пучке с виртуальным катодом в тормозящем поле // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51. С. 1.
28. *Диденко А.Н. Ращиков В.И.* Генерация мощных СВЧ колебаний в системах с виртуальным катодом // Физика плазмы. 1992. Т. 18. С. 1182.
29. *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских пучков. М.: Атомиздат, 1980.
30. *Анфиногентов В.Г.* Хаотические колебания в электронном потоке с виртуальным катодом // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2. С. 69.
31. *Анфиногентов В.Г.* Взаимодействие когерентных структур и хаотическая динамика в электронном потоке с виртуальным катодом // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. С. 70.
32. *Морозов М.Ю., Храмов А.Е.* Влияние внешнего магнитного поля на величину критического тока электронного пучка, при котором формируется виртуальный катод // Физика плазмы. 2007. Vol. 33. С. 610.

Саратовский государственный университет

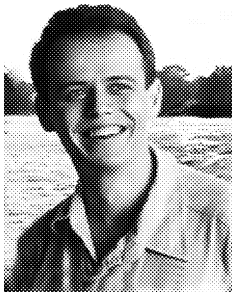
Поступила в редакцию *4.02.2008*
После доработки *24.06.2008*

EXTERNAL MAGNETIC FIELD INFLUENCE ON THE FORMING AND DYNAMICS OF VIRTUAL CATHODE

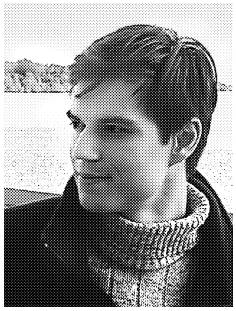
S.A. Kurkin, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov

The results of investigation of virtual cathode mechanisms forming and its dynamics in the context of 2-dimensional model are presented. There were considered entire and tubular electron beams in external axial magnetic field. Two different types of virtual cathode dynamics were discovered. The value of external magnetic field determines a dominant type of dynamics. Therefore the current critical value (when virtual cathode arises in a beam) depends on external magnetic field value.

Куркин Семён Андреевич – родился в Саратове (1986). Окончил с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского по специальности радиофизика и электроника (2008). В данный момент является аспирантом и ассистентом кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Имеет 2 публикации в центральных реферируемых журналах, участник Всероссийских и Международных конференций. Область научных интересов – исследование систем с интенсивными пучками заряженных частиц, изучение нелинейной динамики виртуального катода, а также генераторов, основанных на колебаниях виртуального катода (виркаторов).
E-mail:KurkinSA@nonlin.sgu.ru



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), кандидат физико-математических наук (1997). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж».
E-mail:alkor@nonlin.sgu.ru



Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал в соавторстве с чл.-корр. РАН, профессором Д.И. Трубецковым книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004) и в соавторстве с доцентом А.А. Короновским монографии «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003) и «Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002).
E-mail: aeh@nonlin.sgu.ru