Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 5, 2007 УДК 530.182:577.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В АНСАМБЛЯХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ СО СВЯЗЬЮ ЧЕРЕЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА

Часть 1: Динамические режимы авторегуляции кровотока в васкулярном дереве нефронов

Д.Э. Постнов, А.В. Шишкин, П.А. Щербаков

Исследованы характерные колебательные режимы и нелинейные эффекты, возникающие в условиях особого типа связи, который широко распространен в природе. А именно, во многих случаях взаимодействие в ансамбле осцилляторов осуществляется посредством потребления и распределения некоего энергонесущего ресурса. Динамика таких систем имеет ряд особенностей. В первой части работы показано, как детализация модели авторегуляции почечного кровотока приводит к системе интересующего нас класса и каковы ее типичные динамические режимы.

Введение

Классический подход к изучению явления синхронизации [1–3] широко использует парадигму, согласно которой взаимодействующие автоколебательные системы имеют каждая свой собственный источник энергии, тогда как наличие относительно слабой связи между ними ответственно за подстройку частот и фаз (а при сильной связи – и амплитуд) колебаний.

Разумеется, конкретный тип связи во многом определяет поведение ансамбля осцилляторов. Хорошо изученные типы связи включают, например, локальную связь [4], когда осцилляторы в решетке (или иной структуре) взаимодействуют лишь с ближайшими соседями, а также глобальную связь [5, 6], когда каждый осциллятор ансамбля связан со всеми остальными его элементами. Для живых систем примером первого типа связи может служить взаимодействие в кластере бета-клеток поджелудочной железы посредством щелевых контактов [7]. Примерами систем с глобальной связью могут служить системы электрохимических осцилляторов [8] или же колонии дрожжевых клеток [9]. В последние годы популярным обьектом исследования становятся так называемые small-world networks [10, 11] как системы, сочетающие в себе свойства локальных и дальних взаимодействий.

Для всех перечисленных выше типов связи математическая формулировка задачи предполагает, что нелинейные свойства каждого элемента ансамбля осцилляторов (собственная частота колебаний, чувствительность к возмущениям) управляются

его собственными параметрами, тогда как взаимодействие между осцилляторами задается отдельным набором параметров, характеризующих структуру и силу связи. Таким образом, всегда возможно разделить индивидуальный колебательный режим осциллятора и его поведение в ансамбле как результат действия связи.

Однако имеется обширный класс задач физики, химии или биологии, которые не могут успешно решаться в рамках этой парадигмы, поскольку связь между осцилляторами возникает в процессе распределения энергии (в виде несущего ее ресурса), без которой автоколебательная динамика попросту невозможна. Примером может служить связь (как правило, паразитная) нескольких электронных схем, питающихся от общего источника, или же конкуренция популяций бактерий в питательном растворе [12].

Поскольку потребление энергии (ресурса) одним из элементов ансамбля так или иначе влияет на остальные, такой тип связи формально может быть отнесен к глобальному, или локальному в зависимости от конкретной реализации. Однако его специфика заключается в том, что такие параметры, как частота и амплитуда колебаний, как правило, напрямую зависят от количества потребляемой энергии и по этой причине также зависят от характеристик связи! Если, например, геометрия системы близка к линейной (цепочка осцилляторов), то количество ресурса (энергии, питательных веществ) будет убывать по мере удаления от его источника. В результате даже изначально идентичные осцилляторы могут оказаться в различных режимах функционирования, с различными частотами и амплитудами.

В первой части работы изучаются особенности подобной связи через распределение ресурса на примере авторегуляции почечного кровотока в васкулярном дереве нефронов.

Почка играет существенную роль в регуляции давления крови и ее состава. Нефрон как мельчайшая функциональная единица почки представляет собой фильтрующее устройство с обратной связью, которая контролирует входящий в него поток крови с целью поддержания оптимального режима фильтрации. С момента экспериментального обнаружения колебательных режимов в динамике отдельных нефронов [13] предпринимаются попытки математического моделирования соответствующих процессов на уровне описания изменений давления в потоке крови и фильтрата [14–19]. Эти модели более или менее успешно воспроизводят сам процесс авторегуляции, лежащий в основе возникновения колебаний давления в отдельно взятом нефроне. Однако в живой почке каждый нефрон составляет часть сложно организованного ансамбля. А именно, группы по 10–20 нефронов образуют структуру *васкулярного дерева*, так как имеют общий кровеносный сосуд, доставляющий кровь в этот ансамбль и разветвляющийся на пары, тройки и одиночные нефроны подобно дереву [20]. В свою очередь, васкулярные деревья включены в аналогичную структуру более высокого уровня и так далее, вплоть до единственной артерии, входящей в почку.

Очевидно, все экспериментальные результаты следует трактовать как измерения активности нефрона, включенного, по меньшей мере, в ансамбль из 10–20 подобных единиц. При этом некоторые предположения и упрощения, использованные при моделировании одиночного нефрона, становятся неадекватными. В частности, необходимо отказаться от предположения о постоянстве артериального давления на входе в нефрон. Следует также заметить, что современные экспериментальные мето-

дики не позволяют получать информацию о режиме функционирования глубинных нефронов, расположенных у основания васкулярного дерева. Эти глубинные нефроны отличаются от корковых прежде всего параметрами петли Генле (см. ниже), что существенно влияет на характеристики (задержка в цепи обратной связи и ее глубина) процесса авторегуляции.

В данной работе модифицирована наиболее известная модель нефрона [16] путем включения в нее описания процессов реабсорбции в петле Генле, что улучшает соответствие с результатами экспериментов и позволяет в перспективе моделировать различия в динамике корковых и глубинных нефронов. Использование артериального давления на входе в нефрон в качестве управляющего параметра позволяет получить дополнительную информацию, важную для интерпретации результатов моделирования васкулярного дерева простейшей конфигурации (одномерная цепочка нефронов). По результатам исследования динамики васкулярного дерева обнаружены пространственно неоднородные состояния (кластерная осцилляция), возникновение которых обусловлено структурой связи нефронов. В заключение приводятся результаты численного эксперимента в условиях, когда входное артериальное давление принималось флуктуирующим относительно среднего уровня. Такой шаг в сторону приближения к реальным условиям представляется необходимым с точки зрения сопоставления с данными экспериментов.

1. Модифицированная модель авторегуляции кровотока в одиночном нефроне

Структура одиночного нефрона с некоторыми упрощениями приведена на рис. 1. Основные его части, участвующие в фильтрации и авторегуляции давления крови, это: гладкие мышечные клетки, расположенные на стенках афферентной артериолы и меняющие ее радиус, капсула Боумана, содержащая glomerulus (клубочек), петля Генле и клетки macula densa (плотное пятно).

Входящий поток крови проходит через афферентную артериолу к капиллярной системе клубочка, где происходит первичная фильтрация. Далее фильтрат проходит через проксимальную трубку и попадает в петлю Генле. В петле Генле происходит окончательная фильтрация, играющая важную роль в авторегуляции внутринефронного давления крови. Петлю условно можно разделить на две части: тонкий ниспадающий и толстый восходящий участки. В тонком ниспадающем участке происходит отделение воды, в то время как в толстом восходящем преимущественно реабсорбируются ионы Na^+ и Cl^-, тогда как обьем жидкости меняется мало. Прежде чем покинуть систему трубок, жидкость проходит через специализированные клетки macula densa, которые реагируют на изменения в концентрации NaCl и вырабатывают сигнал обратной связи электрической природы, который управляет диаметром афферентной артериолы путем сокращения гладких мышечных клеток, расположенных на стенках артериолы. Этот механизм получил название тубуло-гломерулярной обратной связи, которая обеспечивает поддержание основных функций нефрона в условиях внешних изменений, например, давления крови. При этом нелинейный характер процессов, протекающих в системе трубок, и наличие существенной задержки в цепи обратной связи (порядка 10–20 с для нефрона крысы) приводят к

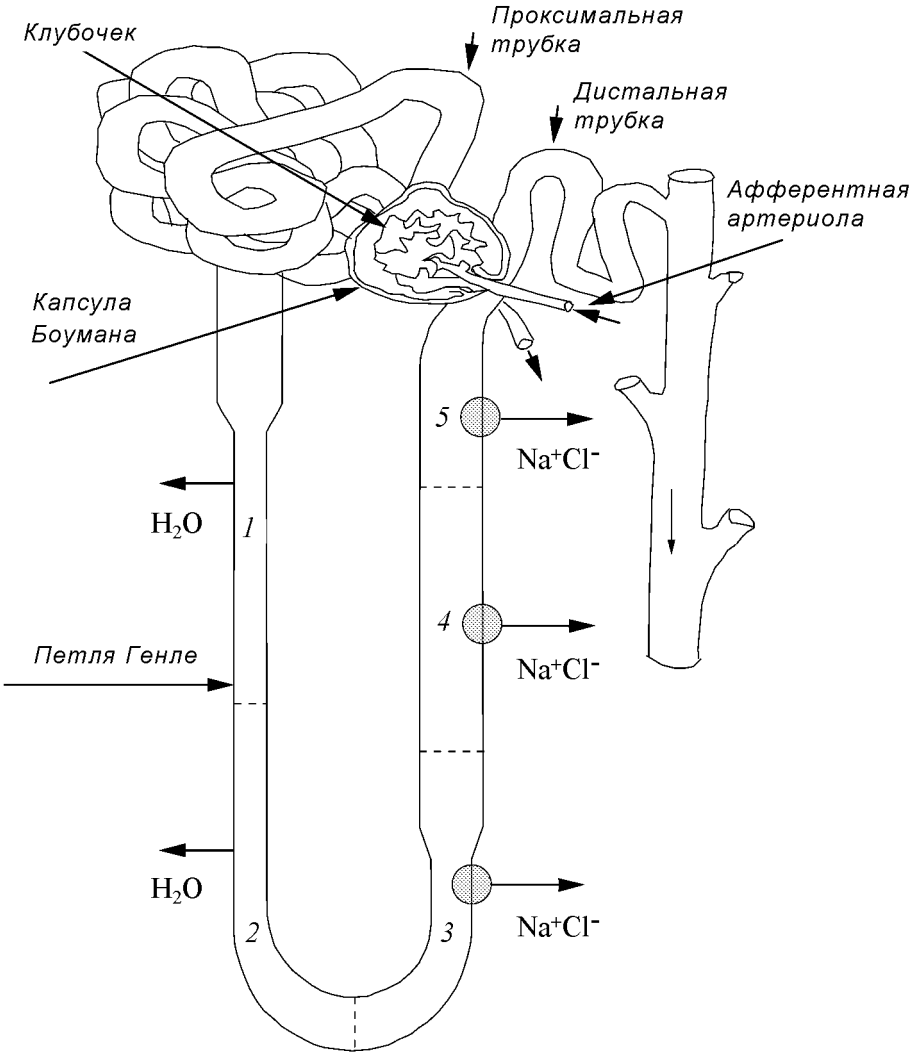


Рис. 1. Строение одиночного нефрона. Отображено условное разделение петли Генле на сегменты

возникновению осцилляций давления, потоков и концентраций ионов с периодом 20–40 с. Было обнаружено, что такие колебания могут носить почти регулярный, либо (в других случаях) сильно нерегулярный характер [21–23].

В настоящей работе использована в качестве прототипа наиболее известная модель одиночного нефрона [16]. Она содержит шесть дифференциальных уравнений, полный вид которых приведен в Приложении. Все уравнения можно разделить на три группы: уравнения для системы трубок (проксимальной и петли Генле), уравнения для клубочка и уравнения, описывающие авторегуляцию диаметра афферентной артериолы. Три линейных уравнения учитывают необходимый сдвиг фаз в цепи обратной связи. Однако эта модель дает неудовлетворительную оценку параметров обратной связи, при которых нефрон переходит в хаотический режим. Кроме того, для целей нашего исследования представляется важным более детальный учет процессов фильтрации и реабсорбции. В рамках предложенной нами модификации были заменены уравнения, описывающие процессы в петле Генле.

На выходе из капсулы Боумана давление P_t в проксимальной трубке определяется балансом притока от клубочка F_{filt}, оттока в петлю Генле F_{h1} и потоком реабсорбции F_{reab} сквозь стенки.

$$\frac{dP_t}{dt} = \frac{1}{B_{tub}}[F_{filt}(P_a, P_t, r) - F_{reab} - F_{h1}], \tag{1}$$

где F_{filt} определяется скоростью фильтрации в клубочке и зависит как от артериального давления P_a, так и от радиуса артериолы r; F_{reab} составляет, примерно, постоянную часть от общего количества фильтрата (порядка 70%); F_{h1} соответствует потоку жидкости, втекающему в первый сегмент петли Генле; B_{tub} – параметр эластичности проксимальной трубки.

Попытка усовершенствования модели [16] в части описания процессов, происходящих в петле Генле, была предпринята в работах [19, 24] с помощью связанных нелинейных уравнений в частных производных. Это позволило дать более детальное описание процессов, однако, создало ряд новых проблем таких, как адекватность применяемых методов численного интегрирования. При построении модифицированной модели нами была поставлена цель выдержать баланс между детальностью модели, с одной стороны, и простотой ее численного исследования и интерпретации результатов, с другой стороны.

В рамках предлагаемой модели петля Генле условно делится на пять сегментов (см. рис. 1). В первых двух – имеет место интенсивная реабсорбция воды, тогда как в последних трех – меняется баланс ионов NaCl. Такое деление соответствует современнным представлениям о физиологии нефрона, а с точки зрения использования модели позволяет, например, отдельно менять степень реабсорбции воды в первых сегментах, что на качественном уровне воспроизводит действие некоторых медикаментов, регулирующих артериальное давление.

Для каждого из сегментов записываются дифференциальные уравнения для давления P, для количества Q и A вещества NaCl, а также алгебраическое уравнение для концентрации C ионов NaCl. Так, для первого сегмента уравнения для давления записываются в виде

$$\dot{P}_1 = \frac{1}{B_{h1}}[F_{h1} - F_{h2} - F_{abs1}], \tag{2}$$

$$F_{h1} = \frac{P_t - P_1}{R_{h1}}, \tag{3}$$

$$F_{h2} = \frac{P_1 - P_2}{R_{h2}}, \tag{4}$$

$$F_{abs1} = \delta_1 F_{h1}, \tag{5}$$

где F_{h1} и F_{h2} описывают втекающий и вытекающий для данного сегмента потоки жидкости, соответственно; F_{abs1} отражает процесс реабсорбции воды; B_{h1} – константа, описывающая эластичность стенок сегмента; R_{h1} и R_{h2} – гидродинамическое сопротивление первого и второго сегмента, соответственно; δ_1 – коэфициент реабсорбции воды в первом сегменте; здесь и далее P_i, $i = 1...5$ – давление в конце i-го сегмента.

Уравнения для количества Q, A и концентрации C вещества NaCl в пределах первого сегмента записываются в виде

$$\dot{Q}_1 = C_0 F_{h1} - \frac{Q_1}{\tau_{h1}}, \tag{6}$$

$$\dot{A}_1 = \frac{Q_1}{\tau_{h1}} - C_1 F_{h2}, \tag{7}$$

$$C_1 = \frac{A_1}{B_{h1} P_1}, \tag{8}$$

где уравнение для Q_1 в линейном приближении моделирует конечную скорость распространения NaCl по сегменту, а уравнение для A_1 определяет количество вещества в конце первого сегмента с учетом реабсорбции. Параметр τ_{h1} характеризует время прохождения сегмента фильтратом. C_0 есть концентрация ионов NaCl в начале сегмента, тогда как C_1 – в его конце. Аналогично уравнениям (2), (6)–(8) записываются уравнения для второго сегмента петли Генле

$$\begin{aligned}
\dot{P}_2 &= \frac{1}{B_{h2}}[F_{h2} - F_{h3} - F_{abs2}], \\
\dot{Q}_2 &= C_1 F_{h2} - \frac{Q_2}{\tau_{h2}}, \\
\dot{A}_2 &= \frac{Q_2}{\tau_{h2}} - C_2 F_{h3}, \\
C_2 &= \frac{A_2}{B_{h2} P_2},
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$F_{h2} = \frac{P_1 - P_2}{R_{h2}}, \tag{10}$$

$$F_{h3} = \frac{P_2 - P_3}{R_{h3}}, \tag{11}$$

$$F_{abs2} = \delta_2 F_{h2}. \tag{12}$$

Здесь F_{h2} и F_{h3} описывают входящий в сегмент поток и выходящий, соответственно; F_{abs2} описывает процесс поглощения воды.

В отличие от тонкого ниспадающего участка петли Генле в толстом восходящем сегменте практически отсутствует реабсорбция воды, в то же время происходит поглощение NaCl. Соответственно уравнения для давления не содержат член, отвечающий за реабсорбцию воды, но в уравнениях для количества NaCl добавляется слагаемое, описывающее поглощение NaCl.

При этом уравнения для третьего сегмента принимают вид

$$\begin{aligned}
\dot{P}_3 &= \frac{1}{B_{h3}}[F_{h3} - F_{h4}],\\
\dot{Q}_3 &= C_2 F_{h3} - \frac{Q_3}{\tau_{h3}},\\
\dot{A}_3 &= \frac{Q_3}{\tau_{h3}} - C_3 F_{h4} - f(C_3)\frac{\tau_3}{\tau_0},\\
C_3 &= \frac{A_3}{B_{h3} P_3},
\end{aligned} \tag{13}$$

где τ_0 есть общее время прохождения фильтратом петли Генле, а нелинейная функция $f(C) = M_0 C/(C_m + C)$ описывает интенсивность процесса реабсорбции NaCl. В уравнениях (13) входящий и выходящий потоки определяются как $F_{h3} = (P_2 - P_3)/R_{h3}$ и $F_{h4} = (P_3 - P_4)/R_{h4}$, соответственно. Аналогично с (13) записываются уравнения и для следующего, четвертого сегмента.

Для последнего, пятого сегмента уравнения претерпевают изменение, связанное с возможностью обратного тока ионов NaCl в фильтрат на этом участке, и принимают вид

$$\begin{aligned}
\dot{P}_5 &= \frac{1}{B_{h5}}[F_{h5} - F_d],\\
\dot{Q}_5 &= C_4 F_{h5} - \frac{Q_5}{\tau_{h5}},\\
\dot{A}_5 &= \frac{Q_5}{\tau_{h5}} - C_5 F_d - [f(C_5) - L(C_i - C_5)]\frac{\tau_3}{\tau_0},\\
C_5 &= \frac{A_5}{B_{h5} P_5}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $F_{h5} = (P_4 - P_5)/R_{h5}$ и $F_d = (P_5 - P_d)/R_d$; F_d описывает поток фильтрата на выходе из нефрона; дистальное давление P_d принято постоянным и оценено из данных эксперимента.

Специализированные клетки macula densa измеряют концентрацию C_5 ионов NaCl и вырабатывают сигнал обратной связи Ψ (электрической природы), который влияет на сокращение мышц афферентной артериолы,

$$\Psi = \psi_{\max} - \frac{\psi_{\max} - \psi_{\min}}{1 + \exp[\alpha(C_5/C_{eq} - 1)]}. \tag{15}$$

В этом соотношении, вид нелинейности которого взят из [16], величины $\psi_{\max}$ и $\psi_{\min}$ определяют максимальную и минимальную активацию мышечных клеток, α определяет наклон кривой обратной связи, C_{eq} – равновесную концентрацию ионов NaCl.

Оставшаяся часть модели одиночного нефрона [16] нами не изменялась. Она содержит уравнения для регуляции радиуса атериолы, которые записываются в виде

$$\dot{r} = v_r, \qquad \dot{v}_r = \frac{1}{\omega}\left\{P_{av}\left(P_t, r\right) - P_{eq}\left(r, C_5, \alpha, T\right) - \omega d v_r\right\}, \tag{16}$$

где r – радиус активной части артериоллы, v_r – скорость его изменения, ω определяет эластичность стенки артериолы, α определяет силу обратной связи. Величины F_{filt}, P_{av}, P_{eq} находятся из алгебраических соотношений, которые должны решаться

вместе с интегрированием всей системы. Детальное описание нелинейных функций P_{av}, P_{eq} и рекомендации по моделированию процессов в этой части нефрона можно найти в работах [14–19]. Значения, размерность и смысл параметров математической модели нефрона в рамках предлагаемой модификации приведены в таблице 1.

Таблица 1

Параметры модели одиночного нефрона

C_0	150 м·моль/л	Начальная концентрация ионов NaCl
R_{h1}	1.0 кПа·с/(н·л)	Гидродинамическое сопротивление в первом сегменте
R_{h2}	2.0 кПа·с/(н·л)	Гидродинамическое сопротивление во втором сегменте
R_{h3}	0.8 кПа·с/(н·л)	Гидродинамическое сопротивление в третьем сегменте
R_{h4}	0.8 кПа·с/(н·л)	Гидродинамическое сопротивлениее в четвертом сегменте
R_{h5}	0.7 кПа·с/(н·л)	Гидродинамическое сопротивление в пятом сегменте
R_d	1.0 кПа·с/(н·л)	Гидродинамическое сопротивление в дистальной трубке
B_{tub}	1.9 н·л/кПа	Эластические свойства проксимальной трубки
M_0	90 м·моль/(с·л)	Максимальная реабсорбция NaCl
C_m	35 м·моль/л	Константа половинной скорости для реабсорбции в 3, 4, 5 сегментах
B_{h1}	0.8 н·л/кПа	Эластичность стенок первого сегмента
B_{h2}	0.7 н·л/кПа	Эластичность стенок для второго сегмента
B_{h3}	0.2 н·л/кПа	Эластичность стенок для третьего сегмента
B_{h4}	0.2 н·л/кПа	Эластичность стенока для четвертого сегмента
B_{h5}	0.2 н·л/кПа	Эластичность стенок для пятого сегмента
τ_{h1}	0.6 с	Временная задержка в первом сегменте
τ_{h2}	0.6 с	Временная задержка во втором сегменте
τ_{h3}	2.8 с	Временная задержка в третьем сегменте
τ_{h4}	2.8 с	Временная задержка в четвертом сегменте
τ_{h5}	2.8 с	Временная задержка в пятом сегменте
C_{eq}	42.0 м·моль/л	Равновесная концентрация NaCl
L	0.38 $с^{-1}$	Диффузионная константа обратного тока NaCl
C_i	45.0 м·моль/л	Концентрация NaCl вне петли Генле
δ_1	0.35	Коэфициент поглощения воды в первом сегменте
δ_2	0.27	Коэфициент поглощения воды во втором сегменте
τ_0	12 с	Время задержки в петле

2. Колебательные режимы модели одиночного нефрона

Модель одиночного нефрона имеет большое количество параметров. Для сопоставления с данными эксперимента имеет смысл выбрать в качестве основных один-два, интервал значений которых известен и/или оценка которых представляет интерес. Такими параметрами были выбраны величина артериального давления P_a и параметр крутизны кривой обратной связи α.

Необходимым шагом после разработки модифицированной модели нефрона было ее тестирование: выявление характерных режимов функционирования и значений основных переменных и сопоставления с экспериментальными оценками. Следует отметить, что при разработке модели в работе [16] выбор вида и количества (в данном случае трех) дифференциальных уравнений, описывающих динамику петли, осуществлялся чисто эмпирически, путем подгонки получаемых результатов под экспериментальные. В нашей модели, основанной на более поздних экспериментальных оценках большего количества параметров, количественные характеристики колебаний должны бы находиться в разумных пределах без дополнительных подстроек.

На рис. 2 приведены временные реализации и проекции фазового портрета динамических режимов модели (2)–(16) при $P_a = 13.3$ кПа. Во-первых, отметим сам факт наличия автоколебаний при выбранных значениях параметров петли Генле. Это означает, что данная совокупность значений, как минимум, правдоподобна. Более тонкой деталью является наличие мелкомасштабных осцилляций на вершине каждого максимума, ожидаемых с точки зрения механизма регуляции и экспериментальных данных, но слабо выраженных в динамике прежней модели [16]. Экспе-

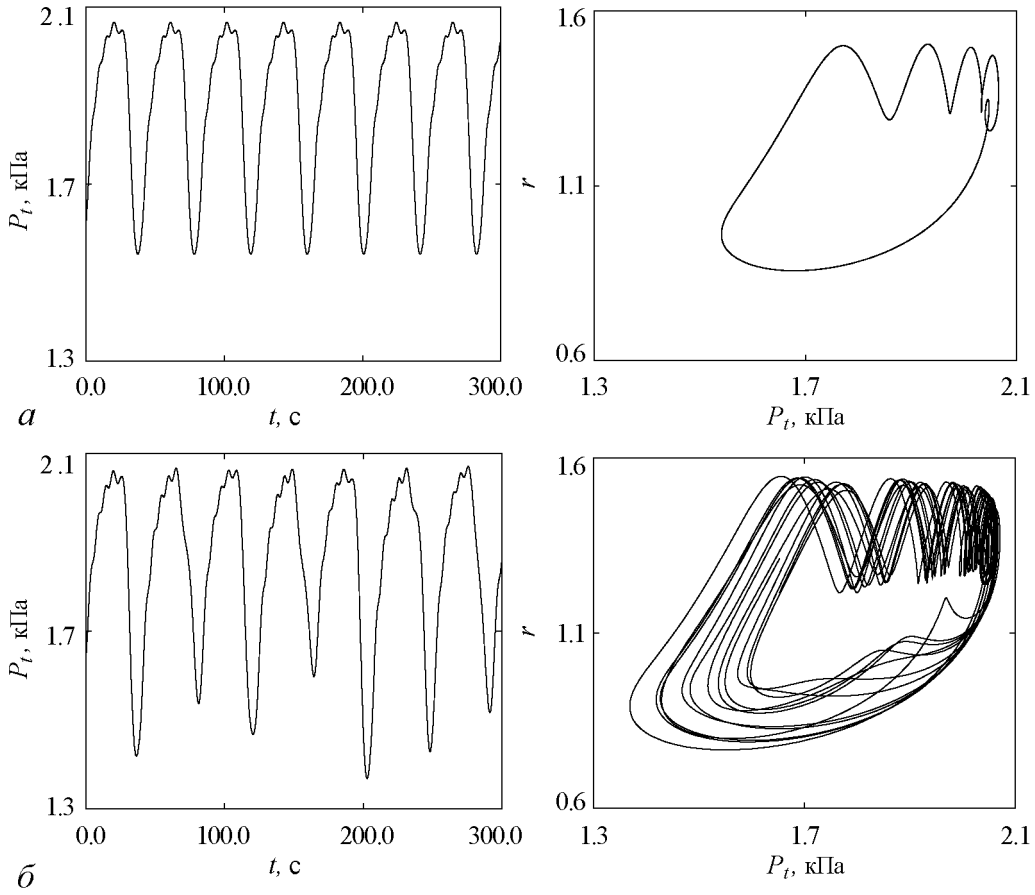


Рис. 2. Временная реализация и проекция фазового портрета колебаний в модифицированной модели нефрона при $P_a = 13.3$ кПа: *а* – периодические колебания при $\alpha = 10.5$; *б* – хаотические колебания при $\alpha = 12.5$

риментальные измерения P_t дают интервал 1.5–2.0 кПа. Таким образом, диапазон изменения P_t для модели находится в пределах экспериментальной оценки.

Более сложная ситуация с временными характеристиками. Использованная нами аппроксимация распространения фильтрата вдоль петли Генле подразумевает, что в пределах каждого из пяти сегментов распределение давления и концентраций близко к линейному. Адекватность такого представления трудно оценить заранее. В нашем случае, совместное действие всех параметров временных масштабов дает период колебаний порядка 40 с, что укладывается в рамки экспериментальных оценок, хотя и выглядит несколько завышенным.

Особый интерес представляет сопоставление значений параметра α и типа колебательного режима. Как было показано в экспериментальных работах [13], колебания становятся существенно нерегулярными для лабораторных крыс с повышенным кровяным давлением. При этом, оценки дают $\alpha \approx 12 \ldots 15$ против $\alpha < 12$ для крыс с нормальным кровяным давлением. Интересно, что в модели [16] эти оценки воспроизвести не удается, там переход к хаотическому режиму наблюдается лишь при $\alpha \approx 26$. Как следует из рис. 2, в модифицированной модели при $P_a = 13.3$ кПа увеличение α до значения 12.5 приводит к развитию хаотического режима с характерной структурой фазового портрета, в котором мелкие петли отражают относительно быстрые колебания радиуса артериолы.

В целом, можно сказать, что предложенная модификация модели по ряду характеристик лучше соответствует экспериментальным данным и потому может быть использована для целей моделирования динамики более крупной структуры нефронов.

При использовании модели (2)-(16) в качестве элемента группы взаимодействующих нефронов принципиальную роль играет ее реакция на изменение артериального давления P_a на входе в афферентную артериолу. На рис. 3 приведены однопараметрические бифуркационные диаграммы, полученные следующим образом. Для текущего значения P_a при интегрировании уравнений модели фиксируются значения P_t в момент их локального минимума или максимума. Таким образом, единственная линия значений P_t для некоторого значения P_a означает отсутствие колебаний (минимум и максимум P_t совпадают). Наличие двух или более четко

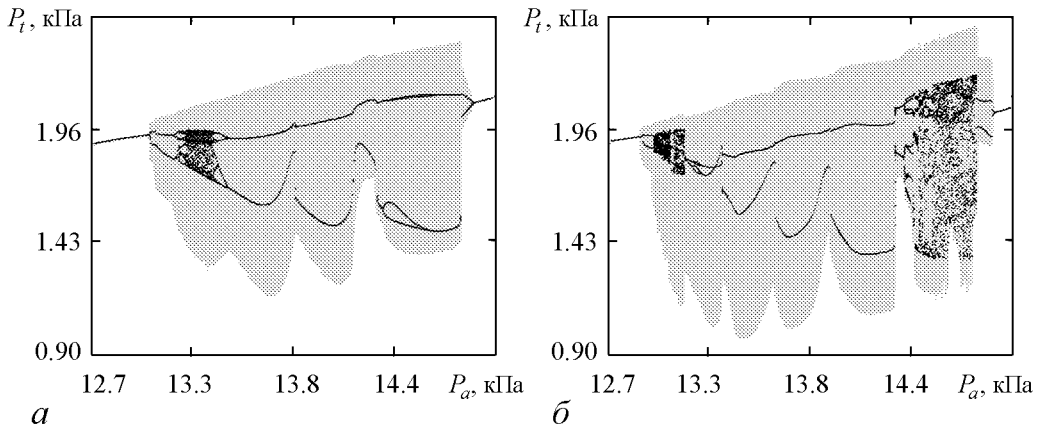


Рис. 3. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма при $\alpha = 12.5$ (*а*) и при $\alpha = 22.0$ (*б*). Серым фоном дан размах колебаний по переменной P_t

выраженных линий означает наличие периодических колебаний. Неупорядоченная структура значений P_t соответствует хаотическому режиму.

Как можно видеть из рис. 3, имеется ограниченный диапазон значений артериального давления $12.90\,\text{кПа} < P_a < 14.86\,\text{кПа}$, в пределах которого модель демонстрирует колебания. При этом области как низких, так и высоких значений артериального давления из этого диапазона соответствуют области хаотической динамики, тогда как при промежуточных значениях P_a наблюдаются периодические колебания.

3. Одномерная аппроксимация структуры васкулярного дерева нефронов

Кровеносные сосуды почки в целом образуют сложную, ветвящуюся, многоуровневую структуру (см., например, недавние работы [25], где эта структура визуализирована без нарушения целостности обьекта). Расположение нефронов также привязано к этой структуре. Как уже упоминалось во Введении, типичной структурой, которую образуют нефроны, является «дерево» из 12–20 единиц. По мере продвижения от «основания» дерева к его «верхушке» падение давления на входе нефронов может составлять до 5.32 кПа. Очевидно, изменения кровотока на входе в отдельный нефрон в большей или меньшей степени скажутся на режиме работы остальных нефронов дерева.

Несмотря на то, что реальная пространственная структура нефронного дерева нерегулярна (нефроны могут располагаться как поодиночке, так и парами или тройками), на начальном этапе моделирования разумной аппроксимацией представляется простейшая линейная геометрия дерева, где нефроны расположены поодиночке, последовательно и через равные расстояния (рис. 4).

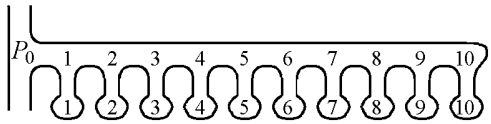


Рис. 4. Схематическое изображение упрощенной структуры васкулярного дерева. Десять нефронов расположены последовательно и через равные расстояния. P_0 – артериальное давление в основании дерева.

В рамках такой упрощенной модели дерева предполагается, что каждый нефрон связан с соответствующей точкой ветвления интерлобулярной артерии через артериолу с гемодинамическим сопротивлением R_j^a, $j = 1...10$. Артериальное давление P_a, входящее в модель одиночного нефрона, теперь становится давлением крови в конкретной точке ветвления P_j^a. Участки между точками ветвления интерлобулярной артерии характеризуются их гемодинамическими сопротивлениями R_j^b, $j = 1...10$. Тогда, изменение давления крови в каждой из точек ветвления васкулярного дерева описывается уравнением

$$B_j^a \frac{dP_j^a}{dt} = \frac{P_{j-1}^a - P_j^a}{R_j^b} - \frac{P_j^a - P_{j+1}^a}{R_{j+1}^b} - \frac{P_j^a - P_j^g}{R_j^a}, \tag{17}$$

где $B_j^a = 1.1, j = 1...10$, характеризует эластичность стенок артерии, а P_j^g есть аналог давления в клубочке P_g для модели одиночного нефрона. Таким образом, васкулярная модель дерева нефронов состоит из набора уравнений, описывающих одиночные нефроны, а также набора уравнений вида (17), которые определяют ди-

намику давления в каждой из точек ветвления. Общее число дифференциальных уравнений модели составляет 190.

В качестве управляющих параметров были выбраны P_0 и набор гемодинамических сопротивлений R_j^b, $j = 1...10$. Так как наша основная цель состоит в выявлении основных свойств такого типа связи в ансамбле, все 10 нефронов были взяты идентичными. Приведенные ниже результаты численного моделирования получены для случая равных сопротивлений сегментов интерлобулярной артерии, $R_j^b = 0.035$ кПа·с/(н·л), $j = 1...10$.

4. Индуцированная связью неоднородность режимов

На рис. 5 приведена амплитуда колебаний по переменной P_t в каждом из десяти нефронов дерева при различных значениях артериального давления P_0. Как можно видеть, при $P_0 = 15.3$ кПа (рис. 5, *а*) амплитуды колебаний отличны от нуля только у основания дерева (точки ветвления 1, 2, 3, 4). Нефроны, расположенные у этих точек ветвления, находятся в автоколебательном режиме, в то время как расположенные дальше по дереву нефроны поддерживают постоянное (отличное от нуля) значение давления в проксимальной трубке P_t. При большем $P_0 = 18.3$ кПа (рис. 5, *б*) ситуация иная: амплитуда колебаний плавно нарастает от первого к третьему нефрону; далее резкий скачок: нефроны с номерами 4, 5 и 6 имеют значительно больший размах колебаний. Далее амплитуда резко снижается, в 7-м нефроне она примерно такая же, как и в 3-м, и продолжает плавно убывать до верхней оконечности дерева. Таким образом, в одномерном массиве нефронов образуется кластер элементов, находящихся в автоколебательном режиме, тогда как остальные находятся в пассивном состоянии.

Дополнительную информацию о таком режиме функционирования исследуемой системы дает рис. 6, где приведены проекции фазового портрета на плоскости переменных P_t и r каждого из 10 нефронов при $P_0 = 18.3$ кПа. Четко видно, что фазовая проекция для 4, 5 и 6 нефронов существенно отличается не только большим размером, но и структурой петель траектории. На трех вставках внизу рисунка

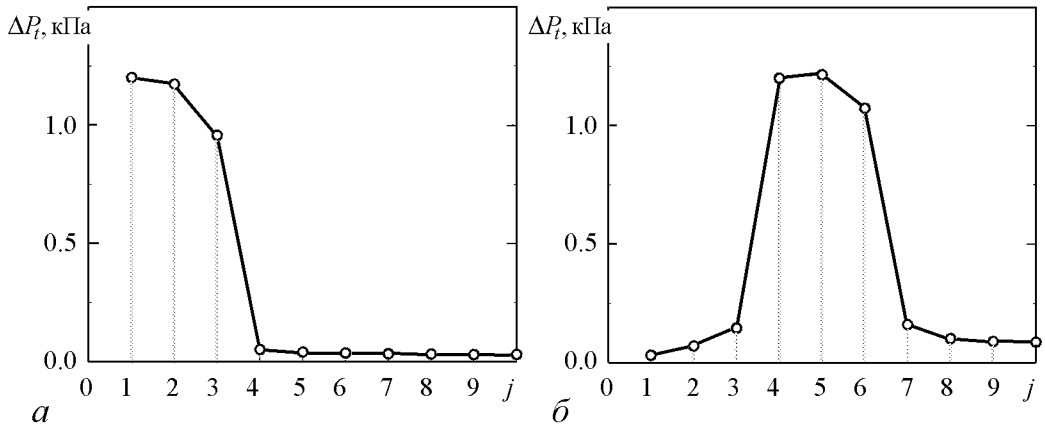


Рис. 5. Амплитуда колебаний по переменной P_t для каждого из нефронов в зависимости от их расположения в дереве j. Давление в основании дерева P_0 составляло: *а* – 15.3 кПа, *б* – 18.3 кПа

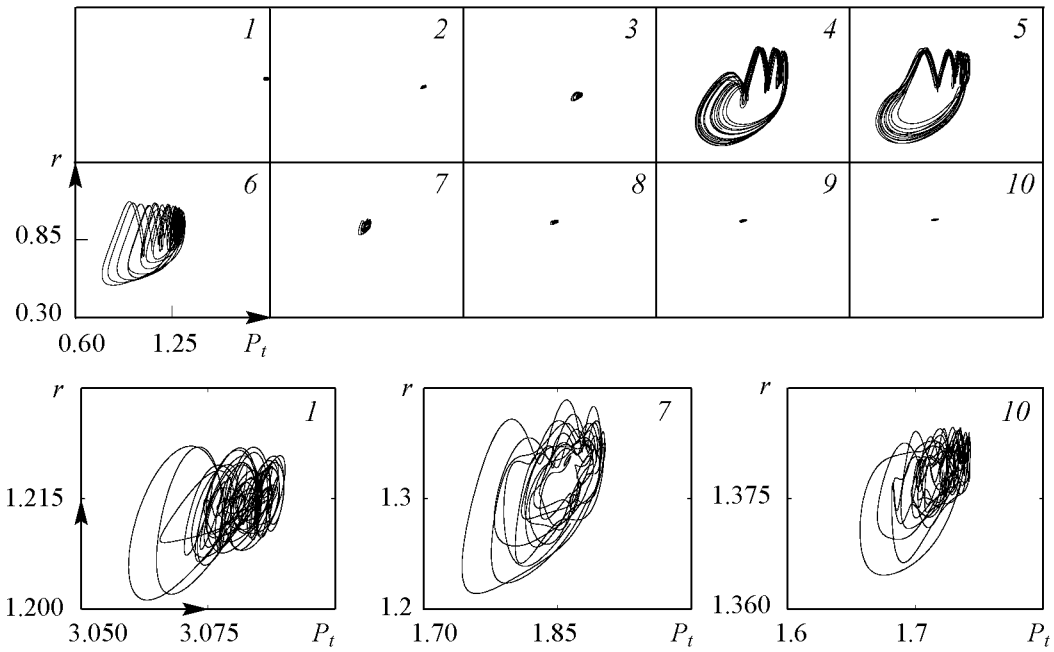


Рис. 6. Фазовые проекции колебаний во всех нефронах дерева. На вставках внизу показана структура аттракторов для 1,7 и 10 нефронов. Значение артериального давления $P_0 = 18.3$ кПа

приведены в укрупненном масштабе фазовые проекции для тех нефронов, где не наблюдаются колебания большой амплитуды. Вид фазовой проекции в них объясняется тем, что вызванные другими нефронами колебания P_j^a на входе в нефрон играют роль сигнала воздействия сложной формы, вызывая непрерывную подстройку P_t и r.

Качественное объяснение наблюдаемого эффекта может быть предложено на основе информации о динамике модели одиночного нефрона. Как мы уже видели на рис. 3, область его автоколебательной динамики ограничена в интервале между значениями артериального давления 12.9 кПа и 14.86 кПа. Разумно предположить, что за образование кластеров генерации отвечает величина среднего значения артериального давления в точках ветвления для каждого из нефронов. Другими словами, если среднее значение артериального давления P_j^a пересекает пределы зоны, где возможна автоколебательная динамика, происходит смена режима, в котором находится нефрон. Таким образом, появление осцилляторного кластера объясняется в терминах падения давления от одной точки ветвления к другой, вызывающего изменения динамического режима, в котором находится нефрон.

Одно из существенных упрощений модели одиночного дерева нефронов заключается в том, что давление P_0 в его основании принято постоянным. Очевидно, в живой системе это не так. Помимо неизбежного влияния на его величину соседних деревьев постоянно меняется артериальное давление в организме в целом, отзываясь на любое изменение его активности. Для режима функционирования дерева нефронов существенным может оказаться не только модуляция давления в точках ветвления элементами осцилляторного кластера, но и сходное по действию изменение P_0. Мы провели отдельный численный эксперимент по выяснению влияния флуктуаций артериального давления на режим кластерной осцилляции. При этом,

поскольку флуктуации артериального давления обусловлены не только случайными событиями, но и наложением многих ритмических процессов (сердцебиение, дыхание и др.), они не отвечают популярной у исследователей идеализированной модели δ-коррелированного (белого) шума.

Не претендуя на то, чтобы детально воспроизвести характер природных флуктуаций, мы пользовались следующим методом для изготовления суррогатных данных. По экспериментальным данным оценивалась верхняя граничная частота $f_{\max}$ сигнала артериального давления в сосудах почки крысы. Затем использовался компьютерный генератор гауссова белого шума, последовательность значений которого подвергалась фильтрации, при которой отбрасывались все частотные составляющие, превосходящие $f_{\max} = 1$Гц. Полученный шумовой сигнал с нулевым средним и интенсивностью D, кПа^2 смещался на величину 18.3 кПа и использовался в качестве временной реализации при интегрировании уравнений системы методом Рунге–Кутты четвертого порядка с фиксированным временным шагом.

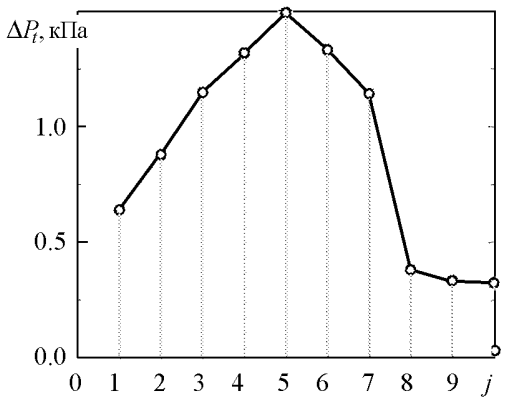


Рис. 7. Показаны максимальная амлитуда P_t для каждого из нефронов в дереве в присутствии шума. В сравнении с рис. 5, *б* хорошо заметно расширение кластера в сторону основания нефронного дерева

Рис. 7 показывает, как меняется положение и размер кластера в присутствии шума по отношению к рис. 5, *б*. Несмотря на то, что среднее значение артериального давления в обоих случаях одинаково, видно, что в присутствии шума кластер расширяется, одновременно меняя профиль амплитуд. Интересно, что нефроны у вершины дерева находятся вне кластера, их амплитуда колебаний отражает действие флуктуаций, но практически совпадает для 8, 9 и 10 нефронов.

По всей видимости, действие шума на исследуемую систему, в первую очередь, определяется тем, что флуктуирующее P_j^a на какую-то долю времени оказывается в зоне автоколебаний даже для нефронов, далеких от автоколебательного режима. Можно предположить, что наиболее важную роль при этом играют низкочастотные составляющие шумового сигнала, так как нефроны просто не успевают среагировать на скачки артериального давления на интервалах времени много короче, чем характерный период колебаний индивидуального нефрона. Такой вывод подтверждается тем, что выбор различных оценок $f_{\max}$ в диапазоне $1 \ldots 3$ Гц не оказывает видимого влияния на результаты.

Обсуждение результатов и выводы

Нами предложена модификация модели одиночного нефрона, заключающаяся в значительно более детальном описании процессов распространения, фильтрации и реабсорбции в петле Генле. Подход, по сути, является компромиссом между, с одной стороны, реалистичной моделью в виде системы связанных нелинейных уравнений в частных производных [24], которая чрезвычайно сложна и неудобна для компьютерного счета и бифуркационного анализа, и, с другой стороны, чрезмерно упрощен-

ным феноменологическим описанием в модели [16], которое не вызывает проблем в численном моделировании, однако априори не допускает вариации некоторых существенных параметров, таких, например, как степень реабсорбции, или особенности геометрии петли Генле для глубинных нефронов. По результатам тестирования модифицированная модель показала хорошее соответствие данным экспериментов, в частности, по значениям параметра обратной связи α.

Разработанная модификация модели использована при построении структуры более высокого уровня – нефронного дерева. Заметим, что на данный момент авторам известно крайне небольшое число работ, где предприняты такого рода попытки [20, 26]. Наша модель является наиболее детальной, во всяком случае, по числу дифференциальных уравнений.

В данной работе мы не ставили задачу детального исследования динамических режимов столь сложной системы, сосредоточившись на первом этапе на наиболее общих закономерностях, к числу которых, в первую очередь, относится эффект индуцированной связью неоднородности режимов: изначально идентичные элементы нефронного дерева оказываются в различных режимах функционирования в силу особенностей такого рода связи, а именно, падения артериального давления от одной точки ветвления к другой. В результате возникает осцилляторный кластер, то есть группа элементов системы, в которых устанавливается автоколебательный режим.

Несмотря на вполне однозначную трактовку результатов в целом, можно задавать целый ряд более тонких вопросов, например:

• Как более точно определить границы осцилляторного кластера? Как следует из рис. 3, зона хаотической динамики при малых P_{in} характеризуется относительно малым размахом колебаний, сравнимым с величиной модуляции артериального давления соседними элементами. Возможно ли диагностировать переход элемента системы в активный режим методами теории устойчивости?

• При каких условиях колебания в элементах осцилляторного кластера могут синхронизоваться, а при каких – нет? Ведь изменение степени связи соседних элементов одновременно меняет и характеристики колебаний в них, в том числе, частоту. Таким образом, привычный при решении задач синхронизации анализ плоскости параметров (расстройка частот – сила связи) попросту невозможен!

• Каков механизм активации шумом колебаний в элементах на границах кластера? Как он соотносится с интенсивно изучаемым в последнее время эффектом когерентного резонанса? Какую роль при действии шума играет модуляция режима, вызванная активностью элементов осцилляторного кластера?

Заметим, что сформулированные выше вопросы, по сути, относятся не конкретно к авторегуляции почечного кровотока, но к свойствам более общего класса систем, где автоколебательные элементы объединены в структуру распределения некоего ресурса. К решению таких задач разумно подходить с использованием по возможности более общей и простой модели, сохраняющей наиболее существенные для исследуемых эффектов свойства. Подобный подход и будет развит во второй части данной работы.

Авторы благодарят О.Сосновцеву и Э.Мозекильде (Датский технический университет) за плодотворные обсуждения и консультации при разработке модифицированной модели нефрона.

Статья написана по материалам исследований, проведенных в рамках работ по гос. контракту 02.512.11.2111.

Приложение

Модель одиночного нефрона по работе [16]

Физический (биологический) смысл переменных модели [16] следующий:
P_t – давление в проксимальной трубке;
r – текущий радиус артериолы;
v_r – скорость изменения текущего радиуса артериолы;
X_1 – вспомогательная переменная 1;
X_2 – вспомогательная переменная 2;
X_3 – вспомогательная переменная 3.

В приведенной ниже системе первое уравнение описывает процесс фильтрации в капсуле Боумана. Второе и третье уравнения моделируют процесс регуляции радиуса сосуда под воздействием потенциала активации Ψ, который, помимо прочего, управляется переменной X_3. Три оставшихся уравнения для переменных X_1, X_2, X_3 обеспечивают задержку сигнала на время T при распространении по петле Генле. Уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
&\dot{P}_t = \frac{1}{C_{tub}}\{F_{filt} - F_{reab} - (P_t - P_d)/R_{Hen})\},\\
&\dot{r} = v_r,\\
&\dot{v_r} = \frac{1}{\omega}\{P_{av} - P_{eq} - \omega d v_r\},\\
&\dot{X}_1 = P_t/R_{Hen} - P_d/R_{Hen} - (3/T)X_1,\\
&\dot{X}_2 = \frac{3}{T}(X_1 - X_2),\\
&\dot{X}_3 = \frac{3}{T}(X_2 - X_3),
\end{aligned} \tag{18}$$

где F_{filt} есть скорость фильтрации в клубочке, C_{tub} определяет эластичность стенок проксимальной трубки. Скорость клубочковой фильтрации определяется из соотношения

$$F_{filt} = (1 - H_a)(1 - \frac{C_a}{C_e})\frac{P_a - P_g}{R_a}, \tag{19}$$

где H_a – гематокрит крови в афферентной артериоле, C_a и C_e – концентрация протеинов в афферентной и эфферентной плазме, R_a – гидродинамическое сопротивление афферентной артериолы, P_a – артериальное давление и P_g – давление в клубочке. Обратная связь через *macula densa* описывается сигмоидным соотношением между функцией активации мышечных клеток артериолы и потоком X_3 из петли Генле

$$\Psi = \psi_{\max} - \frac{\psi_{\max} - \psi_{\min}}{1 + \exp(\alpha(\frac{3X_3}{TF_{Hen0}} - 1))}. \tag{20}$$

В этом соотношении $\psi_{\max}$ и $\psi_{\min}$ определяют максимальную и минимальную активацию мышечных клеток, α определяет наклон кривой обратной связи.

Афферентная артериола разделена на две части. Первая – имеет постоянное гидродинамическое сопротивление, в то время как во второй части диаметр может меняться и, следовательно, гидродинамическое сопротивление зависит от обратной связи

$$R_a = R_{a0}[\beta + (1-\beta)r^{-4}], \tag{21}$$

где R_{a0} есть начальная величина сопротивления, а r – радиус активной части артериолы. В уравнении для скорости изменения радиуса v_r среднее давление в активной части артериолы определяется как

$$P_{av} = \frac{1}{2}\left[P_a - (P_a - P_g)\beta\frac{R_{a0}}{R_a} + P_g\right]. \tag{22}$$

Величина давления при котором артериола находится в равновесии с данным радиусом и величиной мышечной активации определяется как

$$P_{eq} = 2.4e^{10.0(r-1.4)} + 1.6(r-1.0) + \Psi[\frac{4.7}{1+e^{13.0(0.4-r)}} + 7.2(r+0.9)]. \tag{23}$$

Полный набор всех констант, параметров, вычисляемых величин и промежуточных функций по модели (18) вынесен в таблицу 2.

Таблица 2

Параметры модели одиночного нефрона по работе [16]

P_a	13.3 кПа	Артериальное давление крови
P_v	1.3 кПа	Венозное давление крови
P_d	1.3 кПа	Давление в дистальной трубке
R_{a0}	2.3 кПа·с/(н·л)	Гидродинамическое сопротивление афферентной артериолы
R_e	1.9 кПа·с/(н·л)	Гидродинамическое сопротивление эфферентной артериолы
R_{Hen}	5.3 кПа·с/(н·л)	Гидродинамическое сопротивление в петле Генле
C_{tub}	3.0 н·л/кПа	Эластические свойства проксимального канальца
F_{Hen0}	0.2 н·л/с	Поток в петле Генле
F_{reab}	0.3 н·л/с	Поглощение в проксимальном канальце
H_a	0.5	Артериальный гематокрит
C_a	54 г/л	Концентрация протеинов в плазме
a	$22\cdot10^{-3}$ кПа·л/г	Линейный осмотический коэффициент
b	$0.39\cdot10^{-3}$ кПа·(л/г)^2	Нелинейный осмотический коэффициент
$\psi_{\min}$	0.20	Минимальный уровень активации
$\psi_{\max}$	0.44	Максимальный уровень активации
ψ_{eq}	0.38	Равновесный уровень активации
d	0.04 с$^{-1}$	Коэфициент затухания
ω	20 кПа·с^2	Параметр контролирующий частоту колебаний радиуса артериолы
β	0.67	Относительная часть пассивного куска артериолы
T	16 с	Временная задержка в петле Генле
α	12	Коэффициент обратной связи

Библиографический список

1. *Winfree T.* The geometry of biological time. 2nd ed. New York: Springer, 2001.
2. *Strogatz S.H.* Sync: the emerging science of spontaneous order. New York: Hyperion, 2003.
3. *Pikovsky A., Rosenblum M. and Kurths J.* Synchronization: A universal concept in nonlinear science. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
4. *Afraimovich V.S. and Nekorkin V.I.* Chaos of traveling waves in a discrete chain of diffusively coupled maps // Int. J. Bifurcation and Chaos. Appl. Sci. Eng. 1994. Vol. 4. P. 631.
5. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer, 1984.
6. *Kaneko K.* Globally coupled circle maps // Physica D. 1991. Vol. 54. P 5.
7. *Meda P., Atwater I., Goncalves A., Bangham A., Orci L. and Rojas E.*The topography of electrical synchrony among β-cells in the mouse islet of Langerhans // Q. J. Exp. Psychol. 1984. Vol. 69. P. 719.
8. *Kiss Z., Zhai Y. and Hudson J.L.* Emerging coherence in a population of chemical oscillators // Science. 2002. Vol. 296. P. 1676.
9. *Dano F. Hynne, De Monte S., d'Ovidio F., Sorensen P.G., and Westerhoff H.* Synchronization of glycolytic oscillations in a yeast cell population // Faraday Discuss. 2002. Vol. 120. P. 261.
10. *Watts J.* Small Worlds: The dynamics of networks between order and randomnes. Princeton: Princeton University Press, 1999.
11. *Mathias N. and Gopal V.* Small worlds: How and why // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. P. 021117.
12. *Mosekilde E., Maistrenko Y. and Postnov D.* Chaotic synchronization // Application to living systems, World Scientific, 2002.
13. *Holstein-Rathlou N.-H. and Leyssac P.P.* TGF-mediated oscillations in the proximal intratubular pressure: Differences between spontaneously hypertensive rats and Wistar-Kyoto rats // Acta Physiol. Scand. 1986. Vol. 126. P. 333.
14. *Jensen K.S., Mosekilde E. and Holstein-Rathlou N.-H.* Selfsustained oscillations and chaotic behavior in kidney pressure regulation // Mondes Develop. 1986. Vol. 54/55. P. 91.
15. *Holstein-Rathlou N.-H. and Marsh D.J.* A dynamic model of the tubuloglumerular feedback mechanism // Am. J. Physiol. 1990. Vol. 258. F1448-F1459.
16. *Barfred M., Mosekilde E. and Holstein-Rathlou N.-H.* Bifurcation analysis of nephron pressure and flow regulation // Chaos. 1996. Vol. 6. P. 280.
17. *Holstein-Rathlou N.-H. and Marsh D.J.* A dynamic model of renal blood flow autoregulation // Bull. Math. Biol. 1994. Vol. 56. P. 441.
18. *Young D.K. and Marsh D.J.* Pulse wave propagation in rat renal tubules: Implications for GFR autoregulation // Am. J. Physiol. 1981. Vol. 240. P. F446-F458.
19. *Marsh D.J., Sosnovtseva O.V., Chon K.H. and Holstein-Rathlou N.-H.* Nonlinear interactions in renal blood flow regulation // Am. J. Physiol. 2005. Vol. 288. P. R1143.
20. *Oien A.H. and Aukland K.* A multinephron model of renal blood flow autoregulation

by tubuloglomerular feedback and myogenic response // Acta Physiol. Scand. 1991. Vol. 143. P. 71.

21. *Holstein-Rathlou N.-H. and Leyssac P.P.* TGF-mediated oscillations in the proximal intratubular pressure: Differences between spontaneously hypertensive rats and Witstar-Kyoto rats // Acta Physical. Scand. 1986. Vol. 126. P. 333.
22. *Holstein-Rathlou N.-H. and Marsh D.J.* Oscillations of tubular pressure, flow and distal chloride concentration in rats // Am. J. Physiol. 1989. Vol. 256. P. F1007.
23. *Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H. and Marsh D.J.* Chaos in blood flow control in genetic and renovascular hypertensive rats // Am. J. Physiol. 1991. Vol. 261. P. F400.
24. *Holstein-Rathlou N.-H. and Marsh D.J.* A dynamic model of renal blood flow autoregulation // Bulletin of Mathematical Biology. 1994. Vol. 563. P. 411.
25. *Casellas D., Dupont M., Bouriquet N., Moore L.C., Artuso A. and Mimran A.* Anatomic pairing of afferent arterioles and renin cell distribution in rat kidneys // Am. J. Physiol. 1994. Vol. 267. P. F931.
26. *Postnov D.E., Sosnovtseva O.V. and Mosekilde E.* Oscillator clustering in resource distribution chain // Chaos. 2005. Vol. 15. P. 1.

Саратовский государственный университет

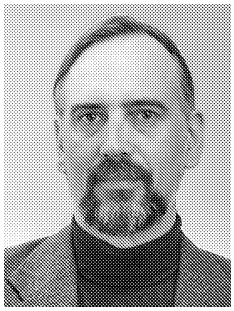
Поступила в редакцию *12.05.2006*
После доработки *15.05.2007*

NONLINEAR EFFECTS IN ENSEMBLES OF OSCILLATORS WITH RESOURCE DISTRIBUTION COUPLING

Part 1: Dynamical regimes of blood flow autoregulation in vascular nephron tree

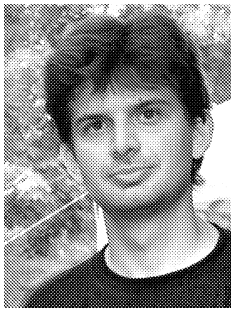
D.E. Postnov, A.V. Shishkin, P.A. Shcherbakov

We study the typical oscillatory regimes and nonlinear affects related to the specific but widely distributed in nature type of coupling. Namely the interaction in an ensemble of oscillators occurs due to the consumption and distribution of some energy-related resource. Such systems manifest the number of specific features. In the first part of our work we show that the detailed model of kidney blood flow autoregulation delivers such resource sharing system that belongs to such class and investigate its typical regimes.



Постнов Дмитрий Энгелевич – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Доктор физико-математических наук (2001). Область научных интересов - сложная динамика математических моделей биологических систем, индуцированные шумом эффекты в нелинейных динамических системах. Автор 67 научных статей и книг «Chaotic Synchronization. Application to Living Systems» (World Scientific, 2002) и «Synchronization: from Simple to Complex» (Springer, 2007).
E-mail: postnov@chaos.ssu.runnet.ru

Шишкин Александр Владиславович – окончил Саратовский государственный университет, кафедру радиофизики и нелинейной динамики. Кандидат физико-математических наук (2007, СГУ). Область научных интересов - сложная динамика математических моделей нефронного дерева, индуцированные шумом эффекты, наблюдаемые в нефронном дереве. Автор 7 научных статей.
E-mail: alex@chaos.ssu.runnet.ru



Щербаков Павел Александрович – окончил Саратовский государственный университет, кафедру радиофизики и нелинейной динамики (2004). В настоящее время является аспирантом второго года обучения. Научные интересы - динамика автоколебательных систем со связью посредством распределения ресурсов, радиофизическое моделирование.
E-mail: scherbakov@chaos.ssu.runnet.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 5, 2007 УДК 530.182

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В АНСАМБЛЯХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ СО СВЯЗЬЮ ЧЕРЕЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА

Часть 2: Колебательные режимы одномерного массива автогенераторов со связью через общий источник питания

Д.Э. Постнов, А.В. Шишкин, П.А. Щербаков

Предложена модель ансамбля осцилляторов со связью через потребление ресурса в виде одномерного массива автогенераторов с нелинейностью N-типа. Проанализированы механизм возникновения осцилляторных кластеров, основные типы внутрикластерной синхронизации и влияние флуктуаций энергонесущего параметра.

Введение

Как было показано в [1], а также в первой части данной работы, связь осцилляторов через цепь распределения некоторого ресурса, влияющего на возбуждение автоколебаний, приводит к тому, что часть элементов ансамбля может демонстрировать автоколебания, тогда как остальные находятся в демпфированном режиме. Этот эффект кластерной осцилляции был обнаружен в относительно сложных и многомерных моделях авторегуляции почечного кровотока [2,3] и ансамблях микробиологических осцилляторов [4,5]. Однако сам эффект связан во многом с особенностями типа связи, а потому может и должен изучаться на примере по возможности простой и обобщенной модели, отвечающей, однако, определенным требованиям. Таких требований два:

- все осцилляторы ансамбля «подключены» к сети распределения некоторой расходуемой величины (количество жидкости, концентрация питательных веществ, электрическая энергия и т.п.);
- динамика каждого элемента ансамбля зависит от упомянутой величины как от управляющего параметра, влияющего на подкачку энергии в автоколебательную систему.

Таким образом, уравнения связи в системе с распределением ресурса представляют собой уравнения баланса (притока и оттока), как, например, первый закон Кирхгофа для разветвленной электрической цепи. Что касается второго требования,

то ему отвечает модель осциллятора на фазовой плоскости с достаточно общим типом нелинейности и влияния управляющих параметров. Такой моделью, например, является осциллятор с нелинейностью N-типа, конкретные реализации которого включают такие широкоизвестные модельные системы, как уравнение ван дер Поля в радиотехнике [6, 7] или модель FitzHugh–Nagumo в биофизике [8, 9]. Отметим, что не все подобные модели одинаково хорошо отвечают условиям нашего исследования. Так, при выводе уравнения ван дер Поля в его классической форме начало координат переносится на середину падающего участка нелинейной характеристики, что уменьшает число управляющих параметров, но тем самым исключает возможность, например, анализа влияния напряжения питания или сдвига рабочей точки по нелинейной характеристике. Модель типа FitzHugh–Nagumo не имеет такого ограничения.

В данной работе используются модельные уравнения, полученные для одномерного массива ячеек, каждая из которых представляет собой RLC-цепь с туннельным диодом в качестве нелинейного элемента. Режим работы каждого из таких осцилляторов зависит от напряжения в точке его подключения к общей цепи. Как будет показано, в такой системе:

• наблюдается эффект кластерной осцилляции, причем изменению напряжения источника питания отвечает перемещение кластера вдоль по цепи;

• при изначально идентичных парциальных осцилляторах имеет место сложная зависимость частотной структуры кластера от параметров цепи распределения энергии;

• на размер и частотные свойства кластера существенно влияет наличие флуктуаций источника питания. При этом действие шума не сводится в «размыванию» существующего автоколебательного режима, но выражается в индуцированных шумом колебаниях в элементах по краям кластера.

1. Модель

На рис. 1, *а* представлена схема RLC-цепи с туннельным диодом и способ ее включения в общую цепь. Заметим, что малая емкость C_2 в точке подключения введена из соображений общности модели, а именно: она отвечает за конечное время распространения возмущений напряжения вдоль одномерного массива осцилляторов. При $C_2 \to 0$ потенциалы цепи в точках подключения индивидуальных осцилляторов связаны алгебраическим соотношением. Используя законы Киргхофа, можно перейти к безразмерной форме уравнений

$$\begin{aligned} \dot{U}_j &= I_j - f(U_j), \\ \varepsilon \dot{I}_j &= E_j - RI_j - U_j, \\ \gamma \dot{E}_j &= -I_j + \tfrac{1}{r}(E_{j-1} - 2E_j + E_{j+1}), \end{aligned} \tag{1}$$

где точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = t/R_* C_1$ ($R_* = 1$ Ом); все напряжения нормированы на величину $U_* = 1$ В; ток i_L нормирован на величину U_*/R_*. U_j и I_j есть безразмерные аналоги u_C и i_L (см. рис. 1);

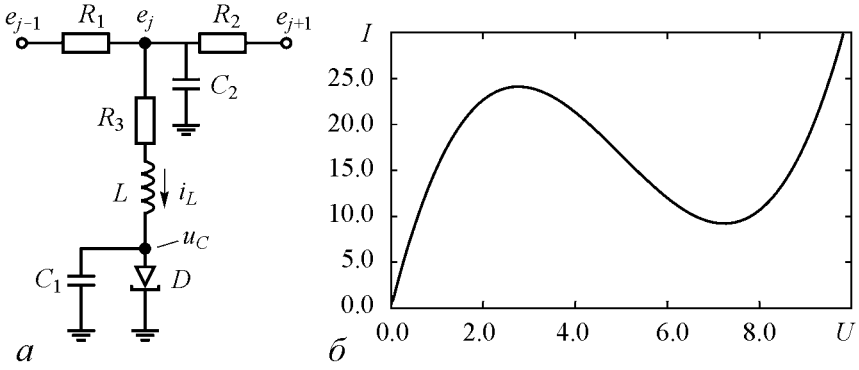


Рис. 1. *а* – электронная схема RLC-цепи с туннельным диодом; *б* – нелинейная функция, на качественном уровне воспроизводящая вольт-амперную характеристику туннельного диода

E_j – нормированное на величину U_* значение потенциала e_j на емкости C_2; E_{j-1} и E_{j+1} – соответствующие потенциалы для предыдущего и последующего осцилляторов цепи. Параметры $r = R_{1,2}/R_*$ и $R = R_3/R_*$ пропорциональны резисторам $R_1 = R_2$ и R_3 в исходной модели, $\varepsilon = L/R_*^2C_1$ и $\gamma = C_2/C_1$ отвечают за соотношение масштабов времени уравнений. $f(U)$ – упрощенное представление вольт-амперной характеристики туннельного диода в виде кубического полинома (рис. 1, *б*)

$$f(U) = U^3/3 - 5U^2 + 20U. \tag{2}$$

По сути, безразмерный потенциал в точке подключения к цепи E_j играет роль источника питания для парциального осциллятора, включающего элементы R_3, L, C_1 и туннельный диод.

Очевидно, в пределе $r << R$ можно пренебречь током I_j, тогда $E_j = E$ постоянно и не зависит от режима осциллятора. Это позволяет рассмотреть индивидуальную динамику RLC-цепи, считая E управляющим параметром. Заметим, что такой осциллятор на фазовой плоскости подобен модели FitzHugh–Nagumo и отличается лишь способом введения управляющих параметров E и R. Разбиение плоскости параметров на области различных режимов определяется двумя перекрещивающимися линиями бифуркации Андронова–Хопфа. Между этими линиями для $R < 0.3$ наблюдается режим автоколебаний, тогда как для больших R система имеет два устойчивых состояния равновесия (бистабильный режим). Выше и ниже линий бифуркации Андронова–Хопфа при $R < 0.3$ система переходит в возбудимый режим, характеризуемый наличием одного устойчивого состояния и псевдоорбиты – почти замкнутой траектории [10]. В рамках нашего исследования интерес представляет изменение динамики системы (1) в области $R < 0.3$ при вариации E_j. Для всех описанных ниже результатов $\varepsilon = 10.0$, $\gamma = 0.01$.

Для построения одномерного массива систем (1) положим $j = 1...N$, где j – номер осциллятора в цепи, а N общее их количество. Напряжение источника питания, подключенного к началу цепи, равно E_0, а на конце цепи выполнено условие $E_{N+1} = E_N$ (свободный конец правого резистора на рис. 1).

2. Образование осцилляторных кластеров

Рассмотрим цепь из десяти осцилляторов, $N = 10$. Очевидно, вариация напряжения источника питания E_0 должна влиять на устойчивость состояний равновесия парциальных осцилляторов, которые, однако, теперь не независимы, а входят в фазовое пространство системы размерностью $3N$. На рис. 3 представлены результаты расчета $2N$ наибольших собственных чисел единственного состояния равновесия системы.

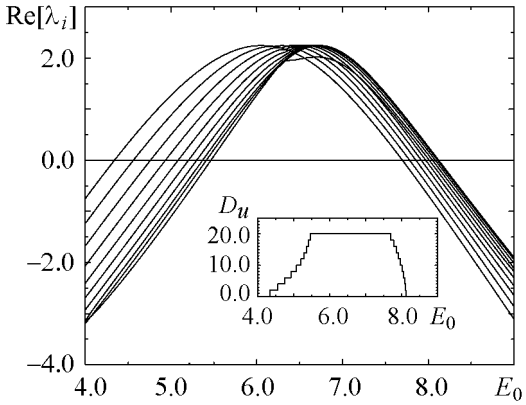


Рис. 2. Зависимость величин действительных частей 10 комплексно сопряженных пар собственных значений состояния равновесия от параметра E_0. По мере изменения напряжения питания E_0, происходят изменения в характере устойчивости глобального состояния равновесия: в фазовых подпространствах индивидуальных осцилляторов происходят бифуркации Андронова–Хопфа. $R = 0.05$, $r = 0.01$

Каждая кривая отображает изменение действительной части пары комплексно сопряженных собственных чисел. Таким образом, ее переход через нулевое значение соответствует бифуркации Андронова–Хопфа в двумерном фазовом подпространстве. Хорошо видно, что начиная с $E_0 \approx 4.35$ все десять кривых последовательно переходят в область положительных значений. Соответственно, размерность D_u неустойчивого многообразия состояния равновесия системы ступенчато возрастает до 20 (вставка на рис. 3). При дальнейшем росте E_0 кривые вновь уходят в область отрицательных значений, причем те кривые, которые первыми приняли положительные значения, первыми же и уходят в отрицательную область.

Интерпретация рис. 3 с точки зрения колебательных режимов системы позволяет объяснить механизм возникновения осцилляторного кластера – группы элементов, находящихся в автоколебательном режиме. Заметим, что для исследуемой системы затруднительно указать точное соответствие между парой собственных чисел и конкретным осциллятором массива[1]. Однако знание индивидуальной динамики позволяет соотнести наблюдаемые бифуркации с изменением значения E_j в точках подключения осцилляторов. При этом очевидно, ближайший к источнику питания осциллятор первым переходит в автоколебательный режим и первым же выходит из него при дальнейшем повышении E_0. При наличии хотя бы одного источника автоколебаний в системе все E_j более не постоянны во времени и наши рассуждения теряют строгость. Однако ими можно руководствоваться в предположении, что при не слишком сильной модуляции E_j определяющую роль играет его среднее значение, а быстрые изменения (как мы увидим далее) важны с точки зрения синхронизации колебаний в соседних элементах. Рис. 4 построен для цепи из 50 осцилляторов и наглядно показывает, что происходит с амплитудой колебаний. При $E_0 = 8.0$ первые восемь элементов массива находятся в автоколебательном режиме, причем амплитуда колебаний в первом осцилляторе уже заметно меньше, чем в остальных семи,

[1] Это было бы возможно в случае строго однонаправленной связи.

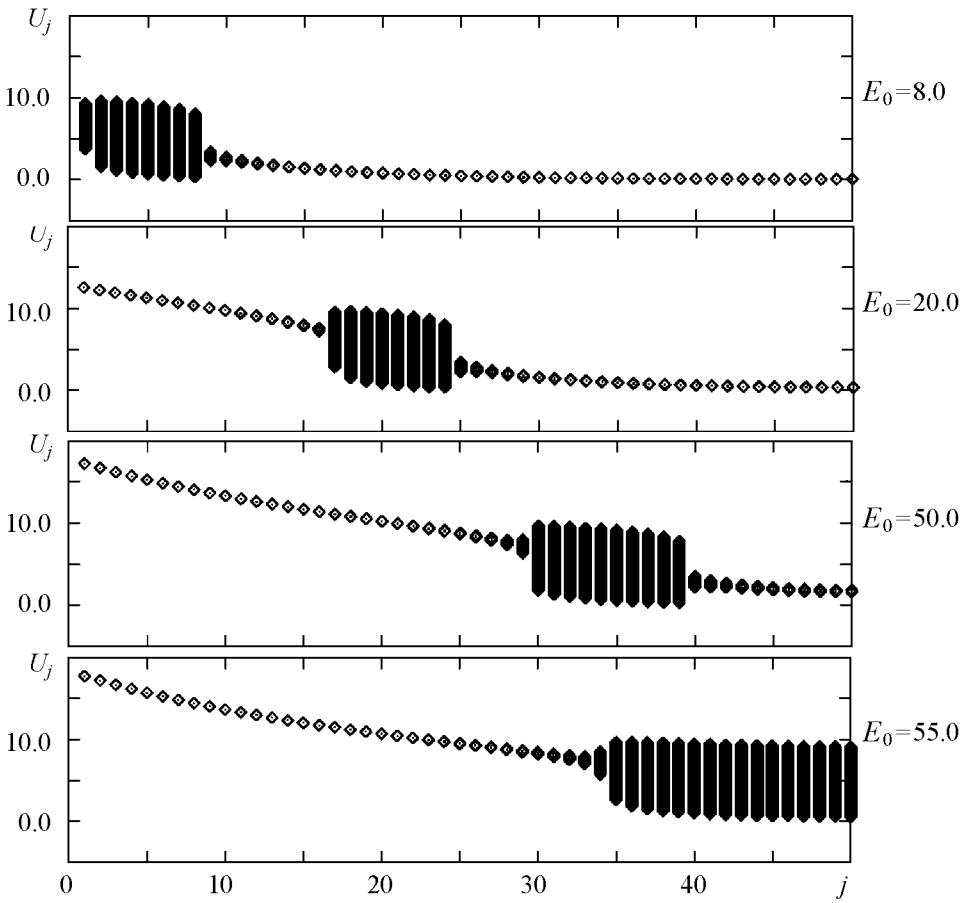


Рис. 3. С изменением напряжения питания E_0 количество и положение осцилляторов, генерирующих автоколебания, меняется. $R = 0.05$, $r = 0.01$

так как уровень E_0 для этого осциллятора выше оптимального. Незначительные по амплитуде колебания в девятой–одиннадцатой ячейках следует, очевидно, рассматривать как пассивный отклик на вариацию E_j предшествующими элементами. По мере увеличения E_0 до значения 20.0 образовавшийся кластер смещается вниз по потоку, не меняясь в размере. Однако дальнейший рост напряжения питания E_0 до значения 50.0 позволяет увидеть его расширение до 10 ячеек. При еще больших значениях E_0 кластер еще больше удлиняется, захватывает конец цепи осцилляторов и, наконец, исчезает: все элементы массива переходят в демпфированный режим вследствие избыточности напряжения источника питания.

Таким образом, смещение рабочей точки осциллятора по мере падения напряжения вдоль цепи приводит к формированию осцилляторного кластера, положение и размер которого определяются как напряжением питания источника, как и его падением от одного элемента массива к другому (чем больше R или меньше r, тем медленнее падает E_j вдоль цепи и тем больше ширина кластера). До этого момента нас интересовал только сам механизм образования такого кластера. Однако очевидно, что взаимная модуляция напряжения E_j в точках подключения элементов должна существенным образом влиять на характеристики и взаимоподстройку временных масштабов этих колебаний.

3. Внутрикластерная синхронизация

При идентичности объединенных в цепь парциальных осцилляторов интуитивно ожидается, что возникающие в них автоколебания также должны иметь совпадающие (или очень близкие) частоты. Однако это не всегда так. Как показали результаты численного эксперимента, возможны самые разнообразые ситуации: от синхронизации колебаний в пределах кластера до многочастотных режимов без тенденции к синхронизации при вариации параметров. Причина этого – в двойственной природе связи, а именно: из-за падения напряжения E_j вдоль цепи изначально идентичные осцилляторы оказываются в разных режимах. При этом вследствие неизбежной неизохронности смещается также и собственная частота автоколебаний. При не очень большой расстройке колебания в пределах кластера могут синхронизоваться. Однако изменение параметра r одновременно меняет и степень расстройки по частотам и силу взаимовлияния осцилляторов. Типичные ситуации, которые при этом возникают, охарактеризованы ниже.

3.1. Случай слабой связи. На рис. 5, *а* приведены зависимости периода автоколебаний[2] T осциллятора от положения k внутри кластера для $r = 0.01$. Величина k определялась следующим образом: первому осциллятору, входящему в кластер, соответствовало $k = 1$, второму – $k = 2$ и так далее. Таким образом, можно было сопоставлять характеристики колебаний в пределах кластера вне зависимости от его локализации в цепи. Как можно видеть, при вариации E_0 от 10.0 до 40.0 размер кластера практически не меняется и, что более важно, сохраняется распределение периодов колебаний: крайние элементы кластера имеют период $T \approx 2.2, \ldots 2.4$, тогда как следующие за ними к центру кластера – заметно больший $T \approx 2.7$. По мере приближения к центру кластера, период вновь уменьшается до $T \approx 2.3$. Отметим отсутствие видимых «полочек» графиков, которые говорили бы о захвате частот

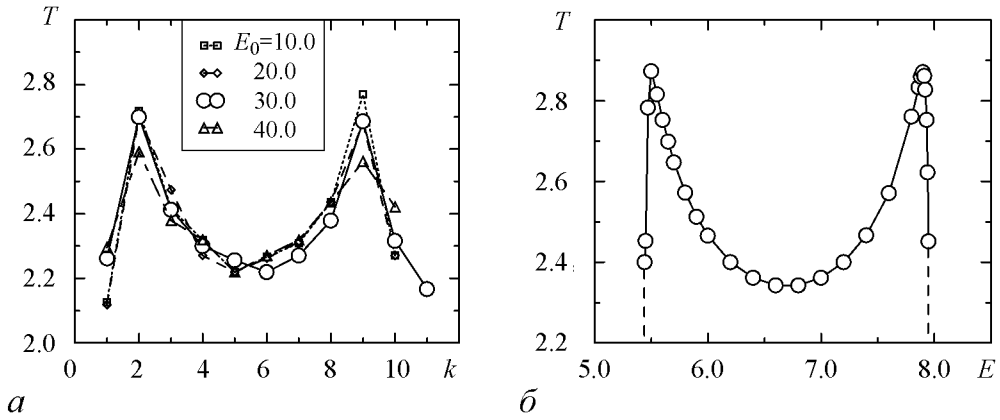


Рис. 4. *а* – распределение периодов колебаний T в пределах кластера для различных напряжений питания E_0 при относительно слабой связи ($r = 0.01$, $R = 0.05$); *б* – зависимость периода колебаний T от напряжения питания E для одиночного осциллятора

[2]Период автоколебаний определялся как среднее время возврата в секущую Пуанкаре в выбранной плоскости фазовых переменных

колебаний. Несмотря на мелкие различия для разных значений E_0, все кривые следуют одному типу зависимости. Его природу позволяет понять график на рис. 5, *б*, где приведена зависимость периода колебаний одиночного осциллятора от значения E. Очевидно наблюдаемый на рис. 5, *а* шаблон распределения периодов автоколебаний внутри кластера порожден плавным спадом напряжения E_j в точках подключения осцилляторов при движении вдоль цепи. Таким образом, выбору $r = 0.01$ соответствует ситуация, когда имеется *индуцированная связью неоднородность режимов*, при этом влияние связи слишком слабо для проявления синхронизации колебаний. В результате имеет место многочастотный (квазипериодический или хаотический) режим, мало меняющийся при перемещении осцилляторного кластера вдоль по цепи.

Случай сильной связи. На рис. 6 приведены диаграммы режимов в зависимости от параметров E_0 и r для случая относительно сильной связи. Режимы колебаний в выбранных точках диаграмм охарактеризованы с помощью фазовых проекций на вставках. На рис. 5, *а* дана зависимость расположения области генерации от напряжения питания E_0 при $r = 0.274$. Темно-серым отмечены осцилляторы, находящиеся в режиме автоколебаний. Как можно видеть, при таком большом r размер кластера уменьшился до 2–3-х осцилляторов. Как и при слабой связи, он перемещается по цепи с изменением E_0 (см. рис. 5, *а*). Изменение r (см. рис. 5, *б*) оказывает аналогичное действие с той разницей, что изменение размера кластера более выражено. Меньшим значениям r соответствует меньшее падение потенциала E_j вдоль цепи, что и приводит к расширению кластера.

При выбранных значениях параметров связь между осциллирующими элементами может приводить к синхронизации колебаний в них. Как видно из вставок на рис. 6, в ряде случаев (как правило, в середине области устойчивости конкретного кластера) фазовая проекция имеет вид предельного цикла. Отметим, что характерным является значительный сдвиг фаз между колебаниями в соседних осцилляторах,

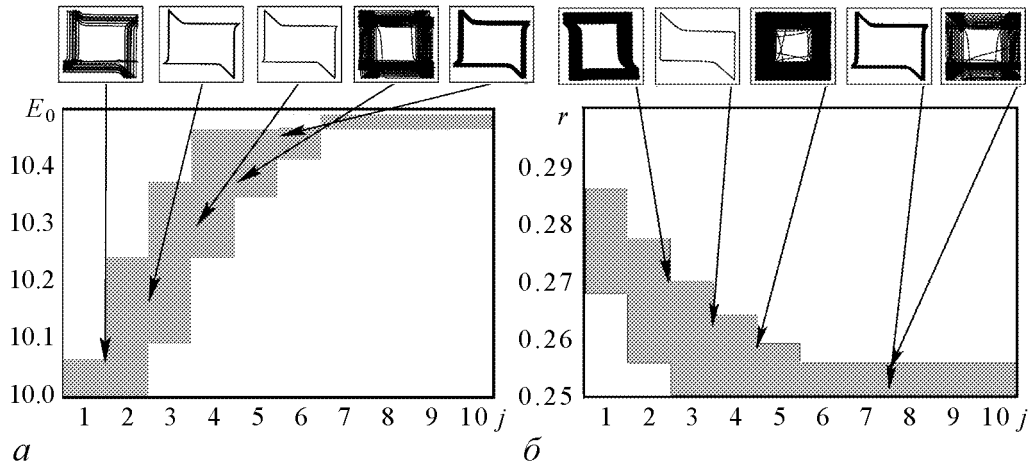


Рис. 5. Зависимость расположения области генерации от напряжения питания E_0 при $r = 0.274$ (*а*) и от значения сопротивления связи r при $E_0 = 10.0$ (*б*). Темно-серым отмечены осцилляторы, находящиеся в режиме автоколебаний. Вверху на вставках – примеры перекрестных фазовых проекций колебаний на плоскость $(U_j, U_j + 1)$ в точках, отмеченных стрелками

тогда как синфазного (или близкого к нему) поведения не наблюдалось. Областям параметров, при которых кластер перемещается вдоль цепи (или расширяется, захватывая новые элементы), соответствует несинхронное поведение.

Перечисленные выше наблюдения согласуются с зависимостью на рис. 5, *б*, из которой видно, что случаю, когда оба элемента кластера находятся в центральной части области генерации $E \approx 6, \ldots 7.5$, отвечает относительно небольшая разница периодов колебаний. В то же время ситуации, когда один из осцилляторов находится на границе области, с чем и связано перемещение кластера, соответствует значительный скачок периода колебаний. Это приводит к рассинхронизации колебаний в элементах кластера при его перемещении.

Подводя итоги раздела, можно заключить, что в зависимости от выбора управляющих параметров характер колебаний в пределах осцилляторного кластера может существенно различаться. Режимы синхронизации наблюдаются при относительно сильной связи вдали (по параметрам) от точек перемещения кластера по цепи. Вблизи (по параметрам) от точек перемещения кластера, а также во всей области параметра E_0 при слабой связи (малые значения r), колебания в пределах кластера не обнаруживают тенденции к синхронизации, имеют место многочастотные (квазипериодические либо хаотические) режимы.

4. Влияние шума

Можно интуитивно ожидать, что наличие шума в автоколебательной системе должно приводить лишь к «ухудшению» характеристик колебаний: уширению спектральной линии генерации и сбоям фазы. Однако результаты недавних исследований показывают, что это далеко не всегда так. В нелинейных системах действие шума может приводить к возникновению новых колебательных мод [11, 12], к повышению чувствительности к слабому периодическому воздействию [13] или же способствовать синхронизации [14, 15]. В нашем случае наиболее выраженное влияние шума ожидается для элементов на границах осцилляторного кластера, режим которых близок к точке бифуркации.

Для учета влияния флуктуаций в модели (1) уравнение для U_j модифицировалось следующим образом:

$$\dot{U}_j = I_j - f(U_j) + D\xi(t), \tag{3}$$

где $\xi(t)$ – гауссов белый шум, параметр D отвечает за интенсивность. Такое включение шума можно трактовать как внутренние флуктуации тока нелинейного элемента или же некий дополнительный внешний ток в точку соединения C_1, L и туннельного диода.

На рис. 6, *а* приведена диаграмма режимов в зависимости от интенсивности шума D. В исходном состоянии при $D = 0$ колебания наблюдаются только во 2 и 3 осцилляторах цепи. Как можно видеть, увеличение интенсивности шума приводит к вовлечению в колебательный режим все большего числа осцилляторов. При $D > 0.05$ колебания наблюдаются начиная с первого элемента цепи, а при $D > 0.25$ в осцилляторный кластер вовлечены все десять элементов. Вставки в верхней части диаграммы позволяют визуально оценить степень зашумленности колебаний. Как

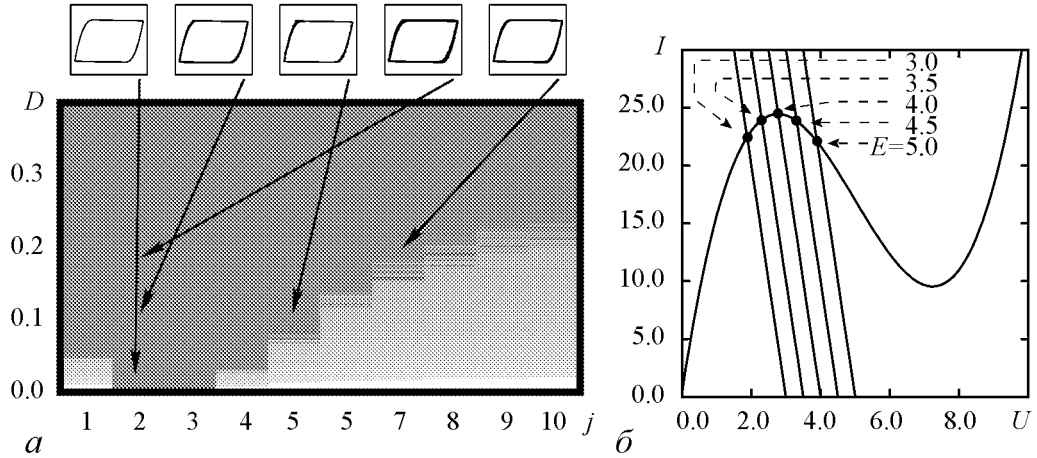


Рис. 6. *а* – зависимость области генерации от интенсивности шума D. Темно-серым отмечены осцилляторы, находящиеся в режиме колебаний. В белой области колебаний не наблюдается. При $D = 0$ в режиме автоколебаний находятся только осцилляторы 2 и 3. Колебания во всех остальных осцилляторах индуцированы либо шумом (темно-серая область), либо колебаниями в кластере (светло-серый). Вверху представлены примеры фазовых портретов колебаний. Напряжение питания $E = 10.174$, сопротивление связи $r = 0.274$. *б* – взаиморасположение нульклин для индивидуального осциллятора иллюстрирует смещение рабочей точки при выходе из кластера

можно видеть, в тех элементах, что изначально находились в автоколебательном режиме, предельный цикл остается четко выраженным. То есть, интенсивность шума не настолько велика, чтобы разрушить собственную динамику системы. При этом во вновь вовлеченных в колебательный режим элементах геометрия предельного цикла практически неотличима от той, что имеет место во 2 и 3 осцилляторах. Таким образом, шум указанной на диаграмме интенсивности не столько «размазывает» и «дезорганизует» динамику системы, сколько индуцирует колебания в элементах на границах осцилляторного кластера! Каков механизм наблюдаемого эффекта? Чтобы понять это, вернемся к свойствам одиночного осциллятора. На рис. 6, *б* приведены нульклины, характеризующие положение состояния равновесия (рабочей точки) отдельного элемента на плоскости (U, I) при $R = 0.05$ в зависимости от потенциала E в точке подключения. Уравнение кубической параболы задает условие $\dot{U} = 0$, что дает $I = f(U)$ (см. (2)), тогда как прямые определяются в предположении $\dot{I} = 0$, то есть $I = (E - U)/R$. Прямые и соответствуюшие точки их пересечения с кубической параболой соответствуют убыванию E от 5.0 до 3.0, что на качественном уровне соответствует передвижению вдоль цепи с выходом из зоны осцилляторного кластера.

Как можно видеть, точки пересечения для $E = 5.0$ и $E = 4.5$ расположены на падающем участке параболы. На языке исходной радиофизической модели это означает наличие отрицательного дифференциального сопротивления и наличие автоколебаний. Соответственно, такое состояние равновесия неустойчиво. Точке пересечения $E = 4.0$ на вершине параболы соответствует смена устойчивости состояния равновесия (бифуркация Андронова–Хопфа). Точкам $E = 3.5$ и $E = 3.0$ отвечает устойчивое состояние равновесия, в отсутствие шума такие элементы находятся вне осцилляторного кластера. Однако такое взаиморасположение кривых отвечает другому случаю, хорошо известному, например, в нейродинамике, а именно: осцил-

лятор находится в *возбудимом режиме*, когда небольшое возмущение относительно состояния равновесия приводит к генерации одиночного полноразмерного импульса-отклика. Реакция таких систем на шум интенсивно изучалась в последние годы как пример проявления когерентного резонанса [11,16–18]. Известно, что шум некоторой оптимальной интенсивности приводит к генерации почти регулярной последовательности импульсов. Таким образом, элементы на границах осцилляторного кластера наиболее восприимчивы к действию шума в силу наличия псевдоорбиты – траектории, проходящей вблизи устойчивого состояния равновесия и возвращающейся в него же после петли относительно большого размера.

Индуцированные шумом колебания принято характеризовать их частотой (средним количеством циклов в единицу времени) и так называемой регулярностью, то есть близостью процесса к периодическому. Согласно [11], регулярность β может быть оценена как нормированная вариабельность интервалов времени τ между импульсами (или между повторяющимися состояниями колебаний)

$$\beta = \langle\tau\rangle / \sqrt{\langle\tau^2\rangle - \langle\tau\rangle^2}, \tag{4}$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по всей временной реализации. На рис. 7 показано изменение средней частоты $\langle f_0 \rangle$ и степени регулярности β для каждого осциллятора для различных значений интенсивности шума D. Как можно видеть, по мере увеличения D растет число осцилляторов с ненулевой $\langle f_0 \rangle$. Заметим, что в ячейках 2 и 3, которые изначально находились в автоколебательном режиме, частота также несколько растет. Механизм этого эффекта заключается в том, что шум «помогает» траектории преодолеть участок медленного движения вблизи состояния равновесия и тем самым уменьшает период колебаний.

С увеличением интенсивности шума частота индуцированных шумом колебаний в ячейках $1, 4 \ldots 10$ быстро растет, и при $D = 0.8$ режим становится практически однородным по всей цепи. Поэтому, судя лишь по частоте колебаний, невозможно с уверенностью выделить элементы, изначально находившиеся в автоколебательном режиме.

Величина регулярности β (рис. 7, *б*) может быть рассчитана лишь при ненулевом шуме, так как β становится бесконечно большим в режиме автоколебаний и не определена при их полном отсутствиии. При малых $D = 0.05, 0.1, 0.2$ налицо значительная разница между ячейками в автоколебательном режиме и теми, где колебания индуцированы шумом. Однако с ростом D регулярность индуцированных шумом колебаний быстро растет (эффект когерентного резонанса), тогда как в ячейках 2 и 3 – падает. При $D = 0.8$ регулярность колебаний во всех элементах цепи практически одинакова. При дальнейшем росте интенсивности шума собственная динамика осцилляторов вносит все меньший вклад и «тонет» во флуктуациях. Регулярность β во всех ячейках при этом вновь уменьшается (кривая для $D = 5.0$ на рис. 7, *б*).

Итак, результаты, приведенные на рис. 7, показывают, что наличие собственных некореллированных источников шума в осцилляторах цепи приводит к увеличению размеров осцилляторного кластера за счет активации элементов на границах кластера. Эти элементы, в силу механизма образования кластера, находятся в возбудимом режиме, их динамика под действием шума определяется эффектом когерентного резонанса. Рассматривая процесс в целом по всей цепи осцилляторов, можно

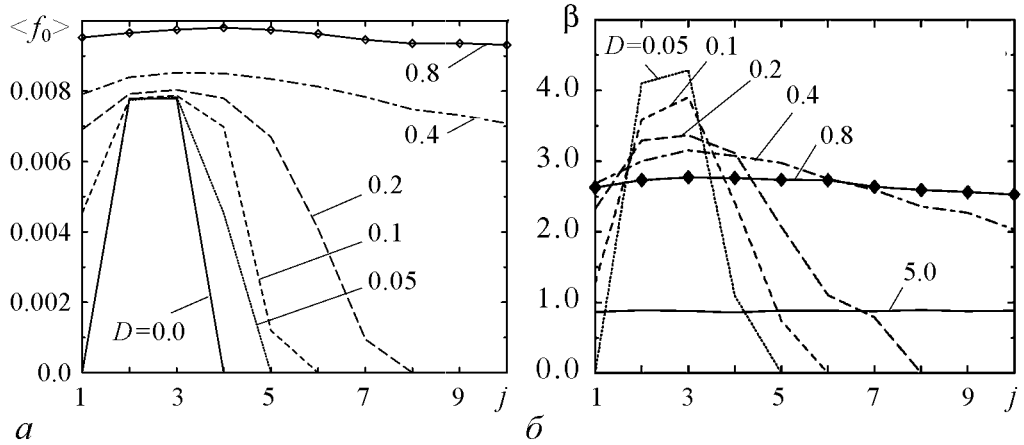


Рис. 7. Частота (*а*) и регулярность (*б*) для осцилляторов в цепи при различных значениях интенсивности шума

сказать, что шум вызывает фазовый переход – при его достаточной интенсивности (в нашем случае $D = 0.8$) уже невозможно различить, каким был режим того или иного элемента цепи в отсутствие шума.

Выводы

Несмотря на радиофизический характер системы, которую мы ради конкретности изложения использовали для построения и анализа модели одномерного ансамбля осцилляторов с распределением ресурса, полученные результаты можно считать достаточно общими. В самом деле, к модели осциллятора с нелинейностью N-типа сводится большое число самых разнообразных прикладных задач. При этом возникновение автоколебаний через бифуркацию Андронова–Хопфа, как правило, связано со смещением рабочей точки по нелинейной характеристике, что и лежит в основе образования осцилляторного кластера в изученном нами случае.

На примере рассмотренной модельной системы нам удалось показать следующее.

• Механизм возникновения осцилляторного кластера связан с последовательностью бифуркаций Андронова–Хопфа глобального состояния равновесия системы, что добавляет новые плоскости неустойчивости в многомерном фазовом пространстве.

• Даже в случае идентичности осцилляторов цепи при относительно слабой связи ($r = 0.01$) реализуется многочастотный колебательный режим. Механизм его появления заключается в индуцированной связью неоднородности режимов – падение потенциала от одной точки подключения к другой порождает расстройку по частотам. При этом двойственный характер такой связи (изменение r влияет одновременно и на силу взаимодействия и на индуцированную расстройку частот) обеспечивает структурную устойчивость такого режима при перемещении кластера вдоль цепи. При сильной связи и малых размерах кластера возможны синхронные режимы колебаний, которые, как правило, разрушаются при перемещении кластера.

• Наличие в каждом из осцилляторов цепи источника шума не столько разрушает колебательный режим, сколько меняет его структуру: осцилляторный кластер расширяется, частоты составляющих его элементов выравниваются. Причина такого действия шума в том, что элементы на границах кластера неизбежно находятся в возбудимом режиме, а в таком случае, как показано в целом ряде работ по когерентному резонансу, шум индуцирует колебания, регулярность которых максимальна в некотором оптимальном диапазоне интенсивностей шума и мало отличается от соответствующего параметра для автоколебаний при той же интенсивности шума.

Следует отметить, что за рамками исследований, проведенных в данной работе, остался ряд небезинтересных вопросов. Так, не рассматривалось влияние инерционности системы распределения ресурса (в модели она определяется емкостью C_2, которая принималась постоянной и много меньше C_1). Не проводился детальный анализ механизма перемещения кластера и связанных с этим бифуркаций аттрактора, в то время как есть основания ожидать там хаотические режимы и эффекты, связанные со скачком потребления тока отдельным осциллятором при возбуждении/гашении автоколебаний. При наличии в системе шума интерес представляют не только автоколебательные режимы, но и область бистабильности при $R > 0.3$. Все перечисленные вопросы входят в программу дальнейших исследований.

Статья написана по материалам исследовательских работ, поддержанных гос. контрактом 02.512.11.2111.

Библиографический список

1. *Postnov D.E., Sosnovtseva O.V. and Mosekilde E.* Oscillator clustering in resource distribution chain // Chaos. 2005. Vol. 15. P. 1.
2. *Barfred M., Mosekilde E. and Holstein-Rathlou N.-H.* Bifurcation analysis of nephron pressure and flow regulation // Chaos. 1996. Vol. 6. P. 280.
3. *Holstein-Rathlou N.-H. and Marsh D.J.* A dynamic model of renal blood flow autoregulation // Bull. Math. Biol. 1994. Vol. 56. P. 441.
4. *Postnov D.E., Balanov A.G. and Mosekilde E.* Synchronization phenomena in an array of population dynamic systems // Advances in Complex Systems. 1998. Vol. 1. P. 181.
5. *Mosekilde E., Maistrenko Yu. and Postnov D.* Chaotic synchronization // Application to living systems. World Scientific, 2002.
6. *van der Pol B. and van der Mark J.* The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart // Phil. Mag. Suppl. 1928. Vol. 6. P. 763.
7. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. Москва: Изд-во физ.-мат. литературы, 2002.
8. *FitzHugh R.A.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. 1961. Vol. 1. P. 445.
9. *Keener J., Sneyd J.* Mathematical Physiology. New York: Springer-Verlag, 1998.

10. *Izhikevich Eugene M.* Neural exctability, spiking and bursting // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10, № 6. P. 1171.
11. *Pikovsky A. and Kurth J.* Coherence resonance in a noise-driven excitable systems // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 775.
12. *Postnov D.E., Sosnovtseva O.V., Han S.K. and Kim W.S.* Noise-induced multimode behavior in excitable systems // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. P. 016203.
13. *Анищенко В.С., Нейман А.Б., Масс Ф., Шиманский-Гайер Л.* Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // УФН. 1999. Т. 169, № 1. С. 7.
14. *Shulgin B.V., Neiman A.B. and Anishchenko V.S.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by a periodic force // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 4157.
15. *Han S.K., Yim T.G., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V.* Interacting coherence resonance oscillators // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 1771.
16. *Postnov D., Han S.K., Yim T.G. and Sosnovtseva O.* Experimental observation of coherence resonance in cascaded excitable systems // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59, № 4. P. 3791.
17. *Постнов Д.Э., Сосновцева О.В., Сецинский Д.В., Борисов В.С.* Генерация и синхронизация стохастических колебаний в связанных возбудимых системах // Изв. вузов. ПНД. 2001. Т. 9, № 3.
18. *Сецинский Д.В., Постнов Д.Э.* Индуцированная шумом когерентность в возбудимой системе с частотно-зависимой обратной связью // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 7. С. 70.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию *12.05.2006*
После доработки *15.05.2007*

NONLINEAR EFFECTS IN ENSEMBLES OF OSCILLATORS WITH RESOURCE DISTRIBUTION COUPLING

Part 2: Oscillatory regimes of one-dimension array of self-sustained oscillators coupled via common power supply

D. Postnov, A. Shishkin, P. Shcherbakov

We suggest the model of ensemble of resource sharing oscillators in the form of one-dimension array of self-sustained systems with N-type nonlinearity. We analyze the mechanism of oscillatory cluster formation, study the intra-cluster synchronization, and show the effect of energy fluctuations.

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 5, 2007 УДК 621.373.1

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ НЕЙРОННОЙ АКТИВНОСТИ

В.И. Некоркин, Л.В. Вдовин

В работе представлена новая модель, описывающая хаотические спайк-берстовые колебания нейронов, заданная в виде двумерного разрывного отображения. Модель получена на основе дискретной модификации модели нейрона ФитцХью – Нагумо и разрывного отображения типа Лоренца. Исследована динамика модели, найдены значения параметров, при которых в системе возникает хаотический аттрактор, соответствующий спайк-берстовым колебаниям, изучены его свойства и характеристики. Показано, что модель позволяет описывать и другие режимы нейронной активности: подпороговые колебания, одиночные периодические и хаотические спайки.

Введение

Нервная клетка (или нейрон) является [1] базовым элементом мозга. Посредством электрических и химических синапсов разной полярности нейроны формируют разнообразные пространственно распределенные крупномасштабные сети, состоящие из большого числа элементов. Поэтому изучение ключевых функциональных свойств мозга тесно связано с исследованием коллективной активности разнообразных нейронных сетей. Одним из эффективных подходов исследования такой активности является моделирование нейронных сетей с помощью нелинейных динамических систем [2]. Очевидно, что при таком подходе прежде всего необходимо построить подходящие динамические системы, описывающие отдельный нейрон. Предъявляемые к таким моделям требования отчасти являются противоречивыми. С одной стороны, они должны описывать сложные многокомпонентные физико-химические процессы в клетке, вызывающие разнообразные формы активности (например, подпороговые, спайковые и берстовые колебания), наблюдаемые в «живых» нейронах. Благодаря этому, модели, достаточно подробно описывающие процессы в нервной клетке, представляют собой сложные нелинейные системы. Классическим представителем моделей такого типа является система Ходжкина – Хаксли [3], основанная на детальном анализе ионного транспорта через мембрану клетки. С другой стороны, в реальных нейронных сетях число элементов, охваченных многочисленными синаптическими связями, достигает сотен тысяч. Поэтому при моделировании таких сложных систем приходится упрощать модели индивидуальных нейронов, насколько это возможно в рамках рассматриваемой задачи. Например, в искусственных нейронных сетях используются так называемые формальные нейроны – элементы с простейшей бинарной логикой [4]. Для разрешения отмеченного противоречия при

моделировании нейронных сетей очень часто используют феноменологические модели, описывающие основные особенности динамики нейронов, однако, детально не учитывающие действие ионных каналов мембраны. К таким моделям относятся, например, системы ФитцХью – Нагумо [5], Хиндмарш – Розе [6], Морриса – Лекара [7] и др. Эти модели представляют собой системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В последнее время получил популярность и другой класс феноменологических моделей – системы с дискретным временем в виде нелинейных точечных отображений [8–11]. Высокую эффективность такие модели показали при исследовании коллективных процессов в крупномасштабных нейронных сетях. Например, в [12,13] проведено исследование одномерных и двумерных многоэлементных динамических сетей точечных отображений, моделирующих процессы активации и коллективных колебаний кортикальных нейронных сетей. Установлено хорошее качественное соответствие между динамическими структурами в этих сетях и режимами активности, полученными ранее с помощью различных вариантов модели Ходжкина – Хаксли.

В широком ареале режимов нейронной активности важное место занимают так называемые спайк-берстовые колебания – последовательности из трех и более потенциалов действия (спайков), обычно возникающих на волне деполяризации. Во-первых, такие колебания достаточно широко представлены в природе – они характерны для пирамидальных нейронов гиппокампа [14], кортикальных CH [15] и IB [16] нейронов, таламокортикальных и других нейронов. Во-вторых, считается [17,18], что спайк-берстовые колебания играют ключевую роль в процессах обработки информации нейронными сетями. Наиболее известной моделью, описывающей такую колебательную активность, является модель Хиндмарш – Розе, которая задается системой дифференциальных уравнений третьего порядка, включающей две нелинейные функции. Спайк-берстовые колебания также моделировались и с помощью нелинейных точечных отображений. В работе [19] для одномерных и двумерных отображений достаточно общего вида проведена классификация возможных бифуркационных механизмов возникновения берстовых колебаний. В [20] рассматривается кусочно-линейное одномерное разрывное точечное отображение. Показано, что с помощью такой модели можно описывать спайк-берстовую хаотическую активность нейронов. Кроме того, для взаимодействующей пары отображений проведено исследование различных режимов синхронизации, включая режим хаотической синхронизации. В [11] двумерное точечное отображение было использовано для исследования динамических механизмов рождения и регуляризации хаотических берстов в ансамбле элементов, находящихся в режиме синхронных берстовых колебаний. Еще одна модель в виде двумерного точечного отображения была введена в [21]. Отображение содержит быструю и медленную переменную и две линии разрыва. Изучены [21,22] динамические механизмы генерации спайков, берстов, и режимы их синхронизации в случае системы двух взаимосвязанных отображений. Дальнейшее развитие эта модель получила в [23, 24]. В работе [25] изучена синхронизация и распространение берстов в сети отображений [21], моделирующей нейронную сеть, состоящую из нейронов в режиме берстовой генерации, связанных посредством химических и электрических синапсов. В [24] представлена некоторая модификация модели [21] в виде дополнительной квадратичной нелинейности, введенной в отображение. С помощью модифицированного отображения стало возможным моделировать так называемые подпороговые колебания – колебания ниже порога возбуждения потенциала

действия. Подобные колебания наблюдаются, например, в оливомозжечковой системе, отвечающей за формирование универсального ритма (около 10 Гц) в центральной нервной системе [26, 27].

В данной работе предлагается новая, достаточно универсальная, дискретная модель нейронной активности. Модель представляет собой двумерное точечное отображение с одной линией разрыва, реализующее динамические механизмы, характерные для канонического в теории динамических систем отображения Лоренца и для широко известной в нейродинамике модели ФитцХью – Нагумо. Будет показано, что, несмотря на сравнительную простоту, модель позволяет описывать многие режимы нейронной активности: спайк-берстовые колебания, в том числе хаотические, подпороговые колебания, режим одиночной, периодической и хаотической генерации спайков. Однако главное внимание уделяется моделированию хаотических спайк-берстовых колебаний.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 вводится исследуемая модель. В разделе 2 рассматривается релаксационная динамика модели. Исследуются быстрые и медленные движения и доказывается существование хаотического релаксационного аттрактора, соответствующего спайк-берстовым колебаниям модели. Раздел 3 посвящен исследованию модели в случае, когда динамика модели не является релаксационной. Получены условия существования инвариантной области, содержащей хаотический аттрактор, определяющий спайк-берстовые колебания модели. В разделе 4 обсуждаются другие возможные аттракторы модели и отвечающие им режимы нейронной активности. В Заключении дается краткое обсуждение полученных результатов.

1. Модель

Обозначим через $f : R^2 \to R^2$ отображение $(x, y) \to (\overline{x}, \overline{y})$, задаваемое следующей системой:

$$\begin{cases} \overline{x} = x + F(x) - y - \beta H(x - d), \\ \overline{y} = y + \varepsilon(x - J), \end{cases} \tag{1}$$

где x-переменная качественно описывает динамику мембранного потенциала нервной клетки, y – совокупное действие всех ионных токов, проходящих через мембрану нейрона и отвечающих за восстановление покоя мембраны, а функции $F(x)$ и $H(x - d)$ имеют вид

$$F(x) = x(x - a)(1 - x), \quad 0 < a < 1, \tag{2}$$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Параметр ε ($\varepsilon > 0$) определяет характерный временной масштаб изменения восстанавливающей переменной y, параметр J контролирует уровень деполяризации мембраны ($J < d$), а параметры β ($\beta > 0$) и d ($d > 0$), как будет показано далее, характеризуют порог возбуждения берстовых колебаний.

В случае $\beta = 0$ система (1) представляет собой дискретную версию модели ФитцХью – Нагумо. Поэтому некоторые черты динамики этой модели характерны

и для системы (1). С другой стороны, очевидно, что при $\beta > 0$ за счет наличия пороговой функции $H(x-d)$ при подходящем выборе параметров d и β, в динамике системы (1) могут появляться принципиально новые свойства. Потребуем, чтобы параметры d и β удовлетворяли следующим условиям:

$$J_{\min} < d < J_{\max}, \tag{4}$$

$$\beta > F(J_{\max}) - F(J_{\min}), \tag{5}$$

где

$$J_{\min} = \frac{1 + a - \sqrt{1 - a + a^2}}{3},$$

$$J_{\max} = \frac{1 + a + \sqrt{1 - a + a^2}}{3}.$$

При таком выборе d линия разрыва $x = d$ расположена на возрастающем участке функции $F(x)$, что, как будет показано ниже, имеет принципиальное значение для хаотизации отображения f. Условие (5) устанавливает взаимное расположение ветвей изоклины вертикальных наклонов слева и справа от линии разрыва $x = d$. Поскольку система (1) содержит функцию H, отображение f является разрывным. Множество точек разрыва имеет вид

$$\Delta = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}\delta, \quad \delta = \{(x, y) : x = d\}. \tag{6}$$

Поскольку для всех $\varepsilon \geq 0$

$$\det \frac{D(\overline{x}, \overline{y})}{D(x, y)} = 1 + F^{'}(x) + \varepsilon > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{+}, \tag{7}$$

где

$$\mathbb{R}^{+} = \left\{x : r^{-} \leq x \leq r^{+}\right\},$$

$$r^{\pm} = \frac{1 + a \pm \sqrt{4 - a + a^2}}{2},$$

отображение f является [28] взаимно-однозначным, если $x \in \mathbb{R}^{+}$. Будем рассматривать траектории отображения f, не имеющие общих точек с Δ и целиком расположенные в области

$$P^{+} = \left\{(x, y) : x \in \mathbb{R}^{+}, \quad x \neq d, \quad y > F(J_{\max}) - \beta\right\}.$$

Заметим, что ограничение по y, присутствующее в P^{+}, введено с целью устранения несущественного описания поведения траекторий на фазовой плоскости вне этой области.

Для удобства изложения представим отображение f в виде

$$f = \begin{cases} f_1, & x < d, \\ f_2, & x > d, \end{cases}$$

где

$$f_1 \ : \ (x, y) \to (x + F(x) - y, \quad y + \varepsilon(x - J)),$$

$$f_2 \ : \ (x, y) \to (x + F(x) - y - \beta, \quad y + \varepsilon(x - J)).$$

2. Релаксационная динамика системы и спайк-берстовые колебания

Рассмотрим динамику отображения f при $\varepsilon << 1$. В этом случае переменная y с течением времени изменяется медленно по сравнению с переменной x. Поэтому в системе (1) присутствует два разных масштаба времени и скорости. Быстрые движения определяются, главным образом, «замороженной» системой, в которой параметр $\varepsilon = 0$. Медленные же движения описываются уравнением для переменной y при $\varepsilon \neq 0$, зависящим, однако, от состояния быстрой переменной, которое является квазиравновесным. В результате под действием медленной и быстрой систем в (1) может возникнуть режим, состоящий из чередующихся временных интервалов, в течение которых система находится в квазиравновесном состоянии, и «мгновенных» скачков, переводящих систему из одного квазиравновесного состояния в другое. Такие режимы называются релаксационными колебаниями. Изучим такие колебания в системе (1).

2.1. Быстрые движения. В первом приближении быстрые движения в отображении f (1) описываются следующей системой

$$\overline{x} = g(x), \quad y = y_0 = \text{const}, \tag{8}$$

где

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = x + F(x) - y_0, & x < d, \\ g_2(x) = x + F(x) - y_0 - \beta, & x > d. \end{cases}$$

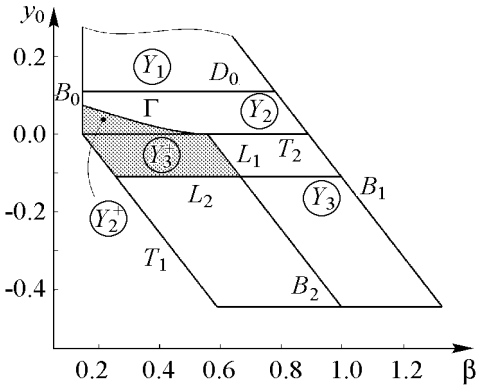


Рис. 1. Разбиение плоскости параметров (β, y_0) на области, соответствующие различной динамике отображения (8) для $d = 0.45$, $a = 0.01$. Серым тоном выделена область Y^L

Заметим, что в отображении (8) y_0 играет роль нового параметра. Зафиксируем в (8) параметры a и d, а параметры y_0 и β будем рассматривать как контрольные. Найдем условия, при которых для значений y_0, удовлетворяющих неравенству

$$y_0 > F(J_{\max}) - \beta, \tag{9}$$

из условия $x(0) \in \mathbb{R}^+$, $(x(0) \neq d)$ следует, что $x(n) \in \mathbb{R}^+$ для $n \in \mathbb{Z}_+$. Анализируя вид функции последования, устанавливаем, что это будет иметь место, если

$$\lim_{x \nearrow d} g_1(x) < r^+, \quad \lim_{x \searrow d} g_2(x) > r^-. \tag{10}$$

Неравенства (5), (9) и (10) выделяют на плоскости (β, y_0) некоторую область Y (рис. 1), имеющую следующие границы:

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \{(\beta, y_0) : \beta = F(J_{\max}) - F(J_{\min}), \\
&\quad F(J_{\min}) \le y_0 \le d + F(d) - r^- - F(J_{\max}) + F(J_{\min})\}, \\
B_1 &= \{(\beta, y_0) : y_0 = d + F(d) - r^- - \beta, \\
&\quad F(J_{\max}) - F(J_{\min}) \le \beta \le r^+ - r^-\}, \\
B_2 &= \{(\beta, y_0) : y_0 = d + F(d) - r^+, \\
&\quad F(J_{\max}) - d - F(d) + r^+ \le \beta \le r^+ - r^-\}, \\
T_1 &= \{(\beta, y_0) : y_0 = F(J_{\max}) - \beta, \\
&\quad F(J_{\max}) - F(J_{\min}) \le y_0 \le F(J_{\max}) - d - F(d) + r^+\}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим динамику отображения (8) для $(\beta, y_0) \in Y$. Прежде всего, заметим, что функция последования отображения g является монотонно возрастающей при всех $x \in \mathbb{R}^+$, $x \neq d$.

2.1.1. Неподвижные точки. Для значений параметров из области Y отображение (1) в области $x > d$ неподвижных точек не имеет, а в области $x < d$ может иметь одну или две неподвижные точки. Прямые

$$
\begin{aligned}
D_0 &= \{(\beta, y_0) : y_0 = F(d), \\
&\quad F(J_{\max}) - F(J_{\min}) \le \beta \le d - r^-\}, \\
T_2 &= \{(\beta, y_0) : y_0 = F(J_{\min}), \\
&\quad F(J_{\max}) - F(J_{\min}) \le \beta \le d - r^- + F(d) - F(J_{\min})\}
\end{aligned}
$$

делят Y на три подобласти – Y_1, Y_2, Y_3 (см. рис. 1), где

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= Y \bigcap \{y_0 > F(d)\}, \\
Y_2 &= Y \bigcap \{F(J_{\min}) < y_0 < F(d)\}, \\
Y_3 &= Y \bigcap \{y_0 < F(J_{\min})\}.
\end{aligned}
$$

Для $(\beta, y_0) \in Y_2$ отображение (8) имеет две неподвижные точки $x = x_1^0$ и $x = x_2^0$, где

$$
x_1^0 = \frac{1+a}{3} - \frac{2(1-a+a^2)^{1/2}}{3} \cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right),
$$
$$
x_2^0 = \frac{1+a}{3} - \frac{2(1-a+a^2)^{1/2}}{3} \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right),
$$
$$
\cos\alpha = -\frac{27}{2(1-a+a^2)^{3/2}} \left[y_0 - \frac{(1+a)(2a^2-5a+2)}{27} \right].
$$

Неподвижная точка $x = x_1^0$ является устойчивой, а $x = x_2^0$ – неустойчивой. При переходе из Y_2 в подобласть Y_1 неподвижная точка $x = x_2^0$ исчезает, попадая на линию

разрыва $x = d$ при $(\beta, y_0) \in D_0$. Так что в Y_1 существует единственная устойчивая неподвижная точка $x = x_1^0$. Переход из Y_2 в подобласть Y_3 сопровождается касательной бифуркацией, при которой неподвижные точки $x = x_1^0$ и $x = x_2^0$ сливаются при $(\beta, y_0) \in T_2$ и исчезают. В подобласти Y_3 отображение (8) неподвижных точек не имеет.

2.1.2. Динамика отображения (8) для подобласти Y_1. В случае $(\beta, y_0) \in Y_1$ отображение (8) имеет единственную устойчивую неподвижную точку $x = x_1^0$. При этом справедливы неравенства

$$g_2(d) < g_1(d) < d. \tag{11}$$

Из условия (11) и монотонного роста функции последования $g(x)$ следует, что для $(\beta, y_0) \in Y_1$ все траектории отображения стремятся к неподвижной точке $x = x_1^0$ (рис. 2, *а*).

2.1.3. Динамика отображения (8) для подобласти Y_2. Прежде всего, заметим, что для $(\beta, y_0) \in Y_2$ отображение (8) имеет две неподвижные точки, а функция $g(x)$ удовлетворяет условиям

$$g_1(d) > d, \quad g_2(d) < d. \tag{12}$$

Положим для краткости $b = g_2(d)$, $c = g_1(d)$. Рассмотрим образы точек $x = b$ и $x = c$ под действием (8). Поскольку при $x > d$ отображение (8) не имеет непо-

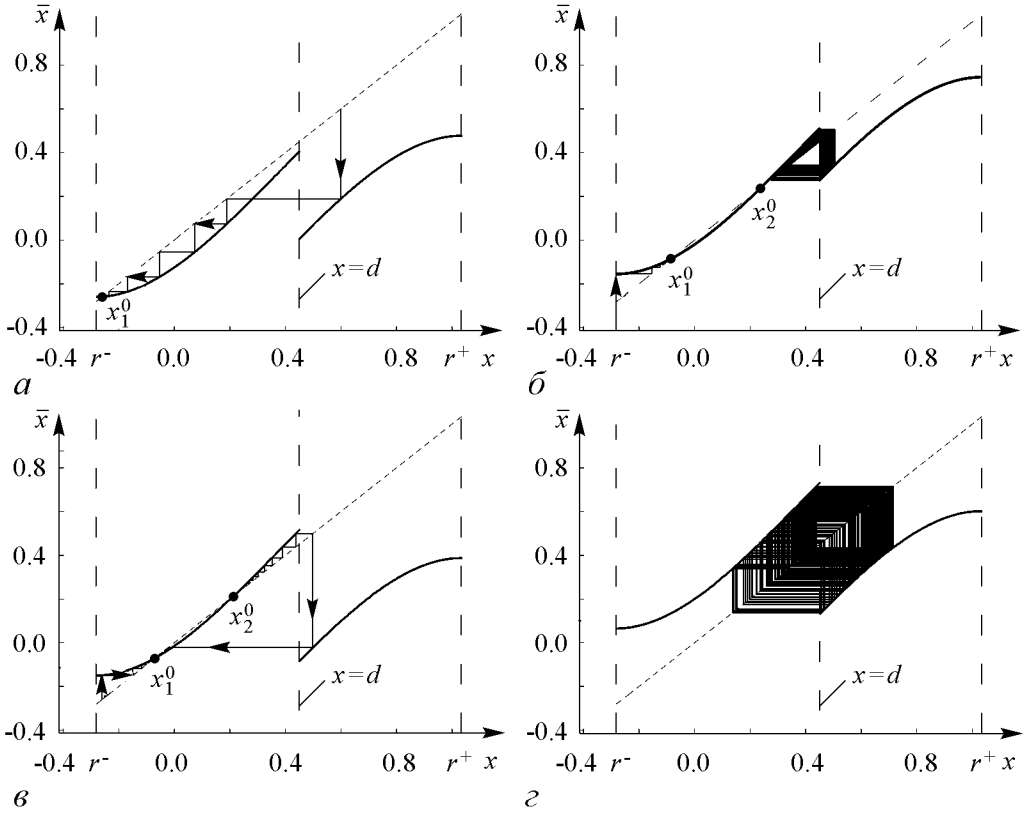


Рис. 2. Динамика отображения (8) при $a = 0.125$, $d = 0.45$ для различных подобластей Y_i: *а* – $(\beta, y_0) \in Y_1$: $\beta = 0.4$, $y_0 = 0.125$; *б* – $(\beta, y_0) \in Y^+$: $\beta = 0.24$, $y_0 = -0.2$; *в* – $(\beta, y_0) \in Y_2 \backslash \{Y_2^+\}$: $\beta = 0.6$, $y_0 = 0.015$; *г* – $(\beta, y_0) \in Y_3$: $\beta = 0.5$, $y_0 = 0.2$

движных точек, а функция $g_2(x)$ является монотонно возрастающей, то $g_2(x) < x$ и, следовательно,

$$g_2(c) < c. \tag{13}$$

При $x < d$ имеем $g_1(x) > x$, если $x \in (x_2^0, d]$ и поэтому

$$g_1(b) > b, \quad b > x_2^0. \tag{14}$$

Неравенство (14) выделяет в Y_2 некоторую подобласть Y_2^+, граница которой задается прямыми T_2, B_0 (см. рис. 1) и линией Γ

$$\Gamma = \{(\beta, y_0) : d + F(d) - y_0 - \beta - x_2^0(y_0) = 0\}.$$

Для $(\beta, y_0) \in \Gamma$ отображение (8) имеет гомоклиническую к $x = x_2^0$ траекторию [29]. Для точек области Y_2^+ одновременно выполняются условия (13), (14) и, следовательно, интервал $I = \{x : b < x < c\}$ является инвариантным для отображения (8). Таким образом, для $(\beta, y_0) \in Y_2^+$ отображение (8) обладает бистабильными свойствами – все траектории с начальными условиями $x < x_2^0$ стремятся к неподвижной точке $x = x_2^0$, а с начальными условиями $x_2^0 < x \leq b$ приходят с течением времени в интервал $I(y_0)$ и никогда его не покидают (рис. 2, *б*).

2.1.4. Динамика отображения (8) для подобласти Y_3. При переходе из Y_2 в Y_3 через прямую T_2 (см. рис.1) неподвижные точки $x = x_1^0$ и $x = x_2^0$ исчезают через касательную бифуркацию, и, следовательно, для $(\beta, y_0) \in Y_3$ неравенства (14) автоматически выполняются. Отсюда, поскольку (13) для Y_3 также выполняется, вытекает существование инвариантного интервала $I(y_0)$ для $(\beta, y_0) \in Y_3$. Для этой области параметров отображение (8) теряет свойство бистабильности и все его фазовые траектории с начальными условиями вне I с течением времени приходят в этот интервал и остаются в нем (рис. 2, *г*).

Таким образом, отображение (8) имеет инвариантный интервал $I(y_0)$ для значений параметров из области $Y_2^+ \bigcup Y_3$.

2.1.5. Инвариантное множество интервала I. Рассмотрим структуру инвариантного множества, содержащегося в $I(y_0)$. Покажем, что в $Y_2^+ \bigcup Y_3$ существует подобласть, для точек которой отображение (8) на интервале $I(y_0)$ действует подобно известному отображению Лоренца. Согласно [28], отображение (8) на $I(y_0)$ будет отображением типа Лоренца, если выполняются следующие условия:

1. $g'(x) > 0$ для всех $x \in I(y_0) \backslash \{d\}$;
2. множество прообразов точки разрыва $x = d$, $D = \bigcup\limits_{n \geq 0} g^{-n}(d)$ принадлежит $I(y_0)$;
3. $\lim\limits_{x \searrow d} g(x) = b, \lim\limits_{x \nearrow d} g(x) = c.$

Из отмеченных выше свойств функции $g(x)$, очевидно, следует, что условия (1), (3) выполняются. В [28] показано, что условие (2) будет выполненным, если

$$g'(x) \geq q > 1, \quad x \in I(y_0). \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что условие (15) для отображения (8) выполняется при β, y_0, удовлетворяющих следующим неравенствам:

$$\begin{cases} y_0 < d + F(d) - \beta - J_{\min}, \\ y_0 > d + F(d) - J_{\max}. \end{cases} \tag{16}$$

На плоскости (β, y_0) неравенства (16) выделяют некоторую область, границы которой задаются двумя прямыми

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(\beta, y_0) : y_0 = d + F(d) - \beta - J_{\min}, \\ &\quad d + F(d) - r^+ < y_0 < F(J_{\min})\}, \\ L_2 &= \{(\beta, y_0) : y_0 = d + F(d) - J_{\max}), \\ &\quad F(J_{\max}) - d - F(d) + J_{\max} < \beta < -r^- + J_{\max}\}. \end{aligned}$$

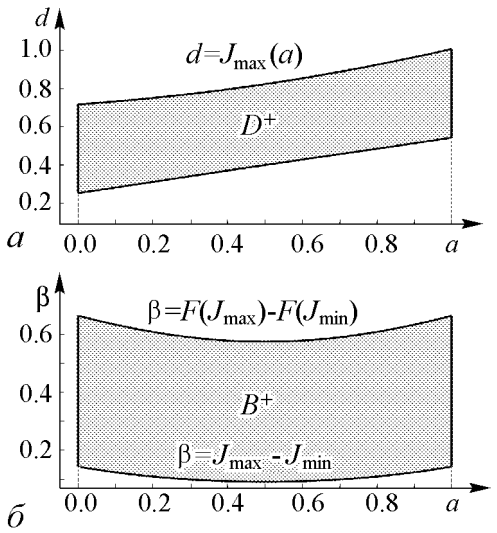


Рис. 3. Области параметров D^+ (*а*) и B^+ (*б*), соответствующие существованию Y^L

Для рассматриваемых значений параметра d (см. (4)) прямая L_2 на плоскости (β, y_0) расположена между прямыми T_2 и B_2, а прямая L_1 параллельна прямой B_1 и расположена левее этой прямой (см. рис. 1). Потребуем, чтобы прямая L_1 на плоскости (β, y_0) была расположена правее прямой T_1. Это требование будет выполнено для значений параметров, удовлетворяющих неравенству

$$d + F(d) - F(J_{\max}) - J_{\min} > 0. \tag{17}$$

При выполнении (17) в области Y существует подобласть Y^L, включающая в себя Y_2^+ и часть подобласти Y_3 (на рис. 1 подобласть Y^L отмечена серым фоном). Для $(\beta, y_0) \in Y^L$ отображение (8) на $I(y_0)$ действует подобно отображению Лоренца. Неравенства (4), (17) выделяют на плоскости (a, d) область D^+ (рис. 3, *а*), соответствующую существованию Y^L. При этом параметр β должен удовлетворять (см. рис. 1) условиям

$$F(J_{\max}) - F(J_{\min}) < \beta < J_{\max} - J_{\min}, \tag{18}$$

которые определяют на плоскости (a, β) некоторую область B^+ (рис. 3, *б*).

Обозначим через $\Omega_q(y_0)$ инвариантное множество отображения (8) на $I(y_0)$. Структура множества Ω_q существенно зависит от величины параметра q [28]. Нетрудно показать, что

$$q = \begin{cases} g'(c), & y_0 \le d + F(d) - \beta/2 - (1+a)/3, \\ g'(b), & y_0 \ge d + F(d) - \beta/2 - (1+a)/3 \end{cases}$$

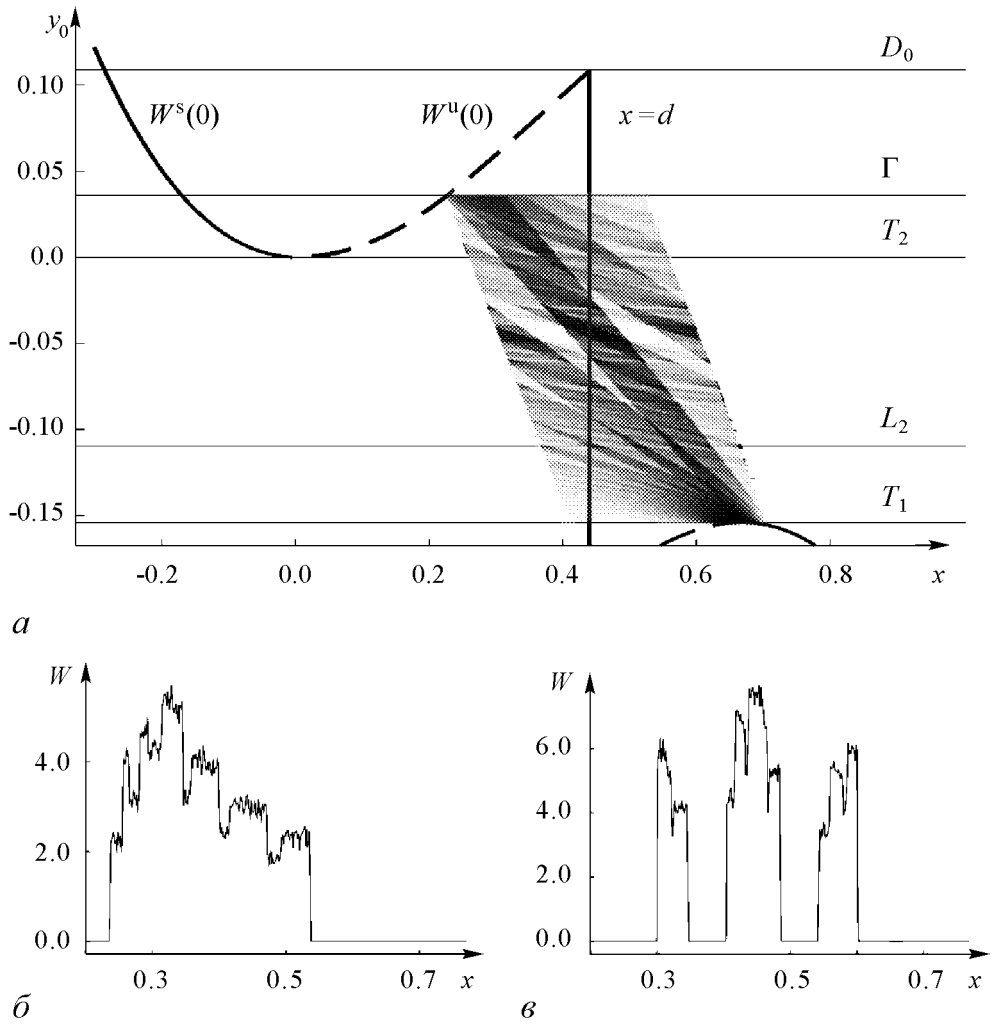


Рис. 4. *а* – Бифуркационная диаграмма отображения (8); цветом показано распределение изображающих точек внутри инвариантного интервала для $d = 0.45$, $a = 0.1$, $\beta = 0.3$. *б, в* – Распределение точек внутри инвариантного интервала для различных значений y_0: 0.022 (*б*); -0.043 (*в*)

и, в свою очередь, зависит от параметров отображения (8) и, в частности, от параметра y_0. Следовательно, при изменении y_0 структура $\Omega_q(y_0)$ также меняется. На рис. 4, *а* представлена бифуркационная диаграмма отображения (8) где параметр y_0 играет роль контрольного. Плотность вероятности распределения траекторий множества Ω_q показана градациями серого цвета. Интенсивность цвета пропорциональна значению плотности вероятности. Диаграмма показывает, что структура $\Omega_q(y_0)$ существенно зависит от y_0. При некоторых y_0 траектории множества $\Omega_q(y_0)$ полностью покрывают интервал $I(y_0)$ (рис. 4, *б*), а при других y_0 – локализованы в нескольких непересекающихся интервалах (рис. 4, *в*). В первом случае (см. рис. 4, *б*) отображение (8) на $I(y_0)$ является строго транзитивным [28], поскольку для любого интервала $I_0 \subset I(y_0) \setminus \{d\}$ существует $k \geq 0$ такое, что $\bigcup\limits_{i=0}^{k} g^i I_0 \supset \mathrm{Int} I(y_0)$. Следовательно [28], в этом случае периодические точки плотны в $I(y_0)$. Множество Ω_q является хаотическим аттрактором, поскольку все его траектории являются неустойчивыми $(q > 1)$ и не покидают $I(y_0)$.

2.2. Медленные движения. Рассмотрим систему (1) в области

$$J > J_{\min}, \tag{19}$$

в которой неподвижная точка $O(x = J, y = F(J))$ отображения f является неустойчивой. Уравнение медленного движения системы (1) представляет собой уравнение эволюции медленной переменной y при условии, что быстрая переменная x поддерживается в квазиравновесном состоянии, то есть

$$\overline{y} = y + \varepsilon(x - J), \tag{20}$$

$$y = F(x). \tag{21}$$

Уравнение (21) задает на фазовой плоскости (x, y) так называемую кривую медленных движений [30], являющуюся множеством неподвижных точек для различных y_0 отображения (8), определяющего быстрые движения. Кривая медленных движений системы (1) состоит из двух компонент. Одна из них,

$$W_1^{\mathrm{s}}(0) = \{(x, y) : y = F(x), \quad x < J_{\min}\},$$

образована семейством устойчивых неподвижных точек $x = x_1^0(y_0)$ отображения (8) (рис. 5, *a*) и, следовательно, является устойчивой относительно быстрых движений. Вторая компонента

$$W_1^{\mathrm{u}}(0) = \{(x, y) : y = F(x), \quad J_{\min} < x < d\}.$$

образована семейством неустойчивых неподвижных точек отображения (8) $x = x_2(y_0)$ и является неустойчивой относительно быстрых движений. Поскольку компонента $W_1^{\mathrm{s}}(0)$ целиком расположена в полуплоскости $x < J$, переменная y на $W_1^{\mathrm{s}}(0)$ под действием отображения (20) монотонно убывает, что приводит к монотонному возрастанию переменной x при движении по кривой $W_1^{\mathrm{s}}(0)$.

2.3. Релаксационные хаотические спайк-берстовые колебания. Пусть параметры системы (1) принадлежат областям D^+ и B^+ (см. рис. 3). Кроме того, выберем параметр J таким, чтобы для всех y_0 интервал $I(y_0)$ на плоскости (x, y_0) был целиком расположен правее прямой $x = J$. Нетрудно показать, что это требование выполняется в случае выполнения условия

$$J + F(J) - d - F(d) + \beta < 0. \tag{22}$$

При $0 < \varepsilon << 1$ характерные черты разбиения фазовой плоскости (x, y) на траектории в значительной степени сохраняются по отношению к случаю $\varepsilon = 0$, однако в случае $\varepsilon \neq 0$ медленные движения происходят не только на кривых медленных движений, но и в тонких слоях порядка ε^{α}, $0 < \alpha < 1$, в окрестностях этих кривых. Быстрые движения имеют место вне слоев медленных движений. Обозначим через $M^{\mathrm{s}}(\varepsilon)$ слой, образованный траекториями медленных движений в окрестности кривой

$$W_1^{\mathrm{s}}(\varepsilon) = \left\{(x, y) : y = F(x) + \frac{\varepsilon(x - J)}{F'(x)} + \ldots, \quad x < J\right\},$$

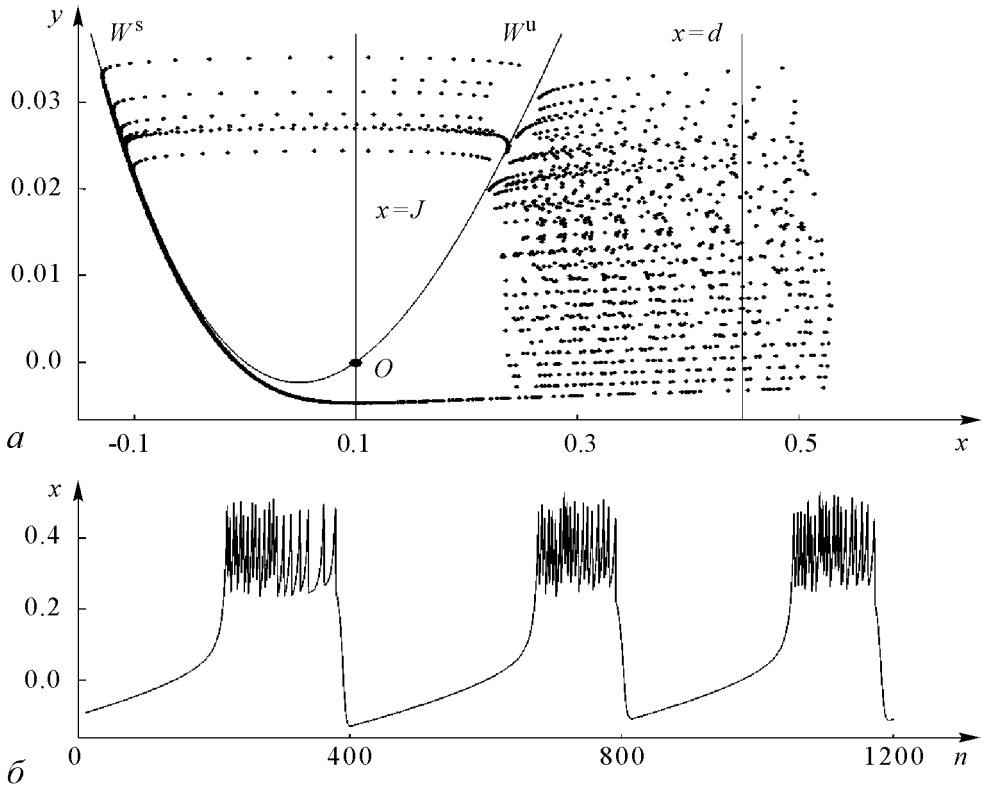


Рис. 5. *а* – Хаотический аттрактор A; *б* – хаотические берстовые колебания. Параметры: $J = 0.1$, $\varepsilon = 0.001$, $\beta = 0.3$, $d = 0.45$, $a = 0.1$

вид которой был получен стандартными методами теории возмущений. Заметим, что кривая $W_1^s(\varepsilon)$ является устойчивой по отношению к быстрым движениям и, следовательно, быстрые траектории притягиваются слоем $M^s(\varepsilon)$.

Рассмотрим поведение траекторий системы (1) с начальными условиями из слоя $M^s(\varepsilon)$. Пусть L – одна из таких траекторий. Сначала эволюция L определяется, в основном, медленными движениями, которые, главным образом, описываются уравнениями (20), (21). Поэтому траектория L движется в слое $M^s(\varepsilon)$ до тех пор, пока она не достигнет окрестности точки $C(x = J_{\min}, \quad y = F(J_{\min}))$. В этой точке многообразие $W_1^s(\varepsilon)$ теряет устойчивость, и далее движение траекторий L задается системой быстрых движений. При этом эволюция переменной x в значительной степени определяется отображением (8), а переменная y медленно увеличивается в соответствии со вторым уравнением в системе (8). При выходе из окрестности точки C в отображении (8) параметр $y_0 \approx F(J_{\min})$ и, следовательно, $(\beta, y_0) \in Y^L$ (см. рис. 1). Поэтому динамика переменной x соответствующей траектории L подчиняется отображению, представленному либо на рис. 2, *в*, либо на рис. 2, *г*. Следовательно, после прохождения окрестности точки C переменная x, соответствующая L, «быстро» (скачкообразно) попадает в интервал $I(y_0)$, в котором эволюционирует подобно траекториям множества Ω_q, а переменная y изменяется незначительно. Далее переменная y начинает медленно и монотонно расти, поскольку для всех y_0 интервал $I(y_0)$ расположен в области $x > J$. При этом для каждого y переменная x

остается локализованной в интервале, близком к $I(y_0)$. Это сохраняется до тех пор, пока переменная y не превысит значение, соответствующее линии Г. После чего в отображении (8) параметр y_0 переходит в область $Y_2 \setminus Y_2^+$ и динамика переменной x соответствует отображению, представленному на рис. 2, *в*. Согласно этому отображению, переменная x асимптотически приближается к устойчивой неподвижной точке. При этом переменная y незначительно меняется на фоне значения y_0. Такая эволюция переменных x и y означает, что траектория L возвращается в слой $M^{\mathrm{s}}(\varepsilon)$ и продолжает свое движение в этом слое. Многократное повторение описанных выше быстрых и медленных движений приводит к формированию аттрактора A (см. рис. 5, *а*) на фазовой плоскости (x, y). На рис. 5, *б* представлена временная реализация одной из траекторий этого аттрактора, имеющая форму спайк-берстовых колебаний.

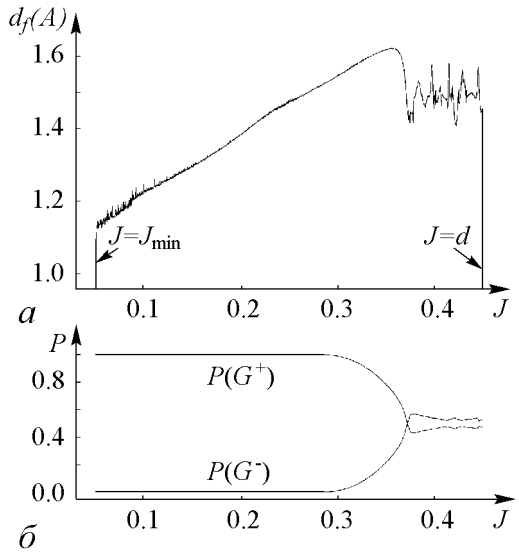


Рис. 6. Зависимость от параметра J фрактальной размерности аттрактора A (*а*) и вероятности попадания точек аттрактора в области G^- и G^+ (*б*). Параметры: $\varepsilon = 0.001$, $\beta = 0.2$, $d = 0.45$, $a = 0.1$

Для понимания структуры аттрактора была вычислена его фрактальная размерность $d_f(A)$ (рис. 6, *а*), которая для различных J изменяется в пределах от 1.12 до 1.6, что свидетельствует о хаотичности этого аттрактора. При увеличении J от значения $J_{\min}$ фрактальная размерность $d_f(A)$ монотонно возрастает и при $J = J_d$, $J_d = 0.35$ достигает максимального значения, $d_f(A) = 1.6$. Это возрастание связано с тем, что увеличение J сопровождается уменьшением скорости изменения переменной y внутри «лоренцева» участка аттрактора. Обозначим для удобства этот участок через G^L. Дальнейшее увеличение J приводит к резкому уменьшению фрактальной размерности $d_f(A)$ и потере монотонности ее изменения. Это объясняется тем, что при достижении некоторого значения $J_{\mathrm{c}} > J_d$ происходит нарушение условия (22). При этом участок G^L будет разбит на две подобласти: $G^- = \{(x, y) : (x, y) \in G^L, x < J\}$, внутри которой векторное поле будет направлено в сторону убывания переменной y, и $G^+ = \{(x, y) : (x, y) \in G^L, x > J\}$, внутри которой переменная y возрастает. Вероятность попадания точек аттрактора в эти подобласти в зависимости от параметра J представлена на рис. 6, *б*. При $J < J_d$ вклад области G^- в динамику системы будет незначителен по сравнению с вкладом области G^+, и поэтому фрактальная размерность продолжает возрастать. Однако при достижении критического значения параметра J_d этот баланс нарушается и переменная y начинает совершать хаотические колебания вблизи некоторого значения. В этом случае большинство точек аттрактора будет локализовано в полосе, принадлежащей G^L. Поскольку распределение точек внутри G^L является неравномерным (см. рис. 4), фрактальная размерность $d_f(A)$ чувствительна к изменению J при $J > J_d$.

3. Хаотический аттрактор и спайк-берстовые колебания

Покажем, что отображение f имеет хаотический аттрактор не только при $\varepsilon << 1$, но и в некотором конечном интервале значений параметра ε. Для этого построим на фазовой плоскости (x, y) область S, инвариантную относительно отображения f.

3.1. Инвариантная область. Напомним, что S будет f-инвариантной областью в том случае, если из условия

$$(x, y) \in S, \quad (x, y) \notin \Delta \tag{23}$$

следует, что $(\overline{x}, \overline{y}) \in S$. Пусть Γ_S – граница области S. Будем искать Γ_S в виде кусочно-линейного замкнутого контура.

Прежде всего потребуем, чтобы векторное поле (1) на Γ_S было ориентировано внутрь S и область $S \subset \mathbb{R}^+$ (см. (7)). Из этих условий находим уравнения прямых, образующих Γ_S,

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \{(x, y): \quad y = -aJ, \quad J \le x \le J_{\max}\}, \\
\Gamma_2 &= \{(x, y): \quad y = -k(x - J) - aJ, \quad -J_0 \le x \le J\}, \\
\Gamma_3 &= \{(x, y): \quad x = -J_0, \quad k(J_0 + J) - aJ \le y \le F(J_{\max})\}, \\
\Gamma_4 &= \{(x, y): \quad y = F(J_{\max}), \quad -J_0 \le x \le J\}, \\
\Gamma_5 &= \{(x, y): \quad y = -\sqrt{\varepsilon}(x - J) + F(J_{\max}), \quad -J \le x \le J_{\max}\}, \\
\Gamma_6 &= \{(x, y): \quad x = J_{\max}, \quad -aJ \le y \le \sqrt{\varepsilon}(J_{\max} - J) + F(J_{\max})\},
\end{aligned}$$

где

$$k = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \varepsilon}, \quad J_0 = \frac{2\sqrt{1 - a + a^2} - (1 + a)}{3}. \tag{24}$$

Заметим, что введенная таким образом область S определена при выполнении (4), (19) и

$$\varepsilon \le a^2/4. \tag{25}$$

Найдем, какими должны быть параметры, чтобы выполнялось условие (23). Представим S в виде объединения трех областей, то есть $S = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3$ (рис. 7). Пусть $(x, y) \in S_1$. Потребуем, чтобы $(\overline{x}, \overline{y}) \in S$. Это требование эквивалентно условиям

$$-J_0 < \overline{x} < J_{\max}, \tag{26}$$

$$\overline{y} < \min\{F(J_{\max}), \quad \sqrt{\varepsilon}(x - J) + F(J_{\max})\}, \tag{27}$$

$$\overline{y} > \max\{-aJ, \quad -k(x - J) - aJ\}. \tag{28}$$

Рассмотрим условие (26). Подставляя $\overline{x}, \overline{y}$ из (1) в (26), получим

$$y < x + F(x) + J_0, \tag{29}$$

$$y > x + F(x) - J_{\max}. \tag{30}$$

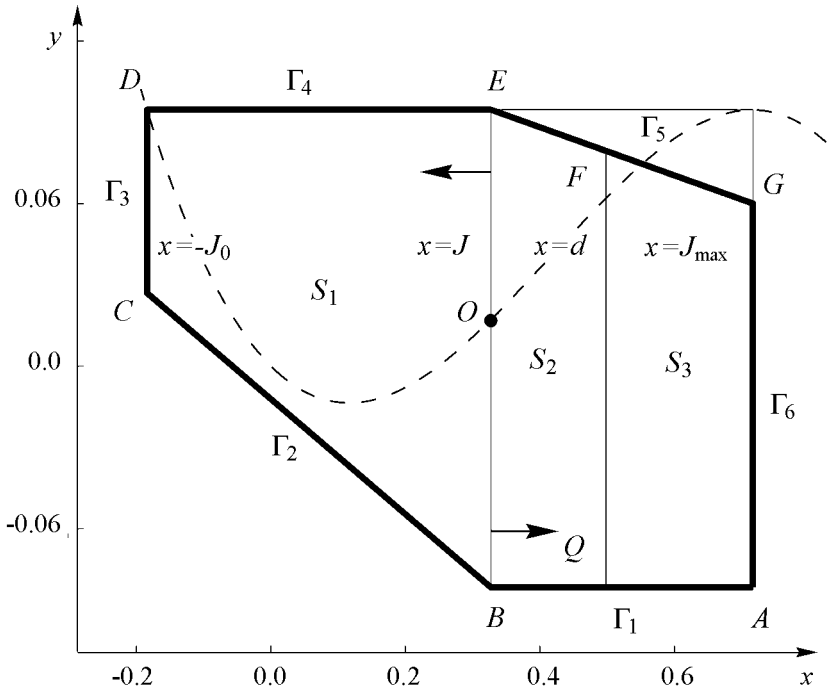


Рис. 7. Инвариантная область для значений параметров $J = 0.327$, $\varepsilon = 0.008$, $\beta = 0.196$, $d = 0.5$, $a = 0.25$

Неравенства (29) и (30) определяют на фазовой плоскости (x, y) область, граница которой задается прямыми $x = -J_0$, $x = J$ и двумя монотонными линиями

$$K_1 = \{(x, y) : y = x + F(x) + J_0, \quad -J_0 \le x < J\},$$
$$K_2 = \{(x, y) : y = x + F(x) - J_{\max}, \quad -J_0 \le x < J\}.$$

Линия K_1 проходит через точку D (см. рис. 7) и, следовательно, неравенство (29) выполняется для всех точек области S_1. Потребуем теперь, чтобы линия K_2 была расположена ниже прямой Γ_2. Очевидно, что это условие будет выполнено, если K_2 либо пересечет прямую $x = J$ ниже точки B, либо пройдет через эту точку. Эти требования приводят к следующим условиям на параметры:

$$J + F(J) - J_{\max} \le -aJ. \tag{31}$$

Следовательно, в области параметров, выделенной условиями (31), неравенство (26) выполняется.

Рассмотрим неравенства (27), (28), из которых при учете (1) получаем

$$y < -\varepsilon(x - J) + F(J_{\max}), \tag{32}$$

$$y > \max\left\{\frac{-(\varepsilon + k)(x - J) - kF(x) - aJ}{1 - k}, \quad -aJ + \varepsilon(x - J)\right\}. \tag{33}$$

На фазовой плоскости этим условиям удовлетворяют точки, заключенные между линией

$$K_3 = \{(x, y) : y = \varepsilon(x - J) + F(J_{\max}) \quad -J_0 \le x \le J\}$$

и ближайшей к ней одной из линий

$$\begin{aligned} K_4 &= \{(x,y) : y = \varepsilon(x-J) - aJ \quad -J_0 \le x \le J\}, \\ K_5 &= \{(x,y) : (1-k)y = -(\varepsilon+k)(x-J) - kF(x) - aJ, \\ & \quad -J_0 \le x \le J\}. \end{aligned}$$

Линия K_3 – отрезок прямой, проходящей через точку E (см. рис. 7), расположенный над прямой Γ_4. Следовательно, для любой точки области S_1 неравенство (32) выполняется. Аналогично, K_4 также представляет собой отрезок прямой, проходящей через точку B, расположенный ниже Γ_2. Рассмотрим теперь расположение K_5 относительно S_1. Потребуем, чтобы K_5 на плоскости (x,y) располагался ниже S_1, то есть ниже прямой Γ_2. Нетрудно убедиться, что это условие будет выполнено, если

$$\varphi(x) \le 0, \quad -J_0 \le x \le J, \tag{34}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{k^2+\varepsilon}{k}(x-J) + F(x) + aJ.$$

При $x \in (-J_0, J)$ функция $\varphi(x)$ имеет единственный минимум в точке $x = 0$, ордината которого $\varphi(0) = 0$. Следовательно, условие (34) выполняется и, значит, неравенства (27), (28) также справедливы.

Таким образом, для значений параметров, удовлетворяющих (31), выполняется условие

$$f_1(S_1) \subset S, \quad (x,y) \notin \Delta. \tag{35}$$

Совершенно по аналогичной схеме устанавливаются условия на параметры, при которых образы областей S_2 и S_3 принадлежат S. Опуская соответствующие выкладки, представим здесь лишь сами условия, а именно

$$f_1(S_2) \subset S,$$

если

$$\begin{cases} d + F(d) + aJ < J_{\max}, \\ \sqrt{\varepsilon} < F(J_{\max})/(2(d-J)), \\ \sqrt{\varepsilon} < (F(J_{\max}) - F(d))/(2(d-J)), \end{cases} \tag{36}$$

и

$$f_2(S_3) \subset S,$$

если

$$\begin{cases} \beta \le F(J_{\max}) + aJ, \\ \beta \le d + F(d) - (1-a)J, \\ \sqrt{\varepsilon} < (F(J_{\max}) - F(d) + \beta)/(2(d-J)), \\ \sqrt{\varepsilon} < \beta/(2(J_{\max} - J)). \end{cases} \tag{37}$$

Наконец, рассматривая совместно условия (4), (19), (25), (36) и (37), устанавливаем область параметров, для которой область S является f-инвариантной,

$$J_{\min} < J < \min\left\{\frac{\beta - F(J_{\max})}{a},\quad \frac{d + F(d) - \beta}{1-a},\quad \frac{J_{\max} - d - F(d)}{a}\right\}, \tag{38}$$

$$\sqrt{\varepsilon} < \min\left\{\frac{a}{2},\quad \frac{F(J_{\max})}{2(d-J)},\quad \frac{F(J_{\max}) - F(d) + \beta}{2(d-J))},\quad \frac{\beta}{2(J_{\max} - J)}\right\},$$

$$\begin{cases} aJ_{\min} + F(J_{\max}) < \beta < d + F(d) - (1-a)J_{\min}, \\ d + F(d) < J_{\max} - aJ_{\min}. \end{cases} \tag{39}$$

3.2. Хаотический аттрактор. Для каждого фиксированного $a \in (0,1)$ неравенства (39) на плоскости (d, β) выделяют область A^+ (рис. 8, *а*), существующую при $d > d^0(a)$ ($J_{\min} < d^0(a)$). Зафиксируем параметры d и β, выбрав их из области A^+. Для этих d и β неравенства (38) определяют на плоскости $(J, \sqrt{\varepsilon})$ область E^+, для точек которой S является инвариантной областью. Рассмотрим поведение траекторий отображения f с начальными условиями из области S. Изоклина горизонтальных наклонов – прямая $x = J$ – делит S на две части: S_1 и $S_2 \bigcup S_3$ (см. рис. 7). В силу второго уравнения в системе (1) в области S_1 выполняется неравенство $\overline{y} < y$, а в $S_2 \bigcup S_3$ – неравенство $\overline{y} > y$. Поэтому переменная y вдоль любой траектории с начальными условиями из области S_1 монотонно убывает и траектория покидает S_1. После попадания траектории в $S_2 \bigcup S_3$, наоборот, переменная y начинает монотонно возрастать до тех пор, пока траектория не покинет эту область. Затем процесс повторяется и в области S возникает вращательное движение вокруг неподвижной точки O. В результате на фазовой плоскости (x, y) возникает аттрактор A (рис. 9, *а*). На рис. 9, *б* представлена зависимость фрактальной размерности от параметра ε. При $\varepsilon < 0.036$ фрактальная размерность является дробной величиной (максимальное значение равно 1.4). Заметим, что при увеличении ε от нуля значение $d_f(A)$ резко изменяется. Это свидетельствует о том, что динамика переменной y существенно влияет на структуру аттрактора A. Начиная с $\varepsilon = 0.036$, аттрактор A перестает быть хаотическим, $d_f(A) = 1$. Это объясняется тем, что с увеличением ε увеличивается скорость прохождения «лоренцева» участка аттрактора, и «времени жизни» на этой части аттрактора недостаточно для хаотизации колебаний.

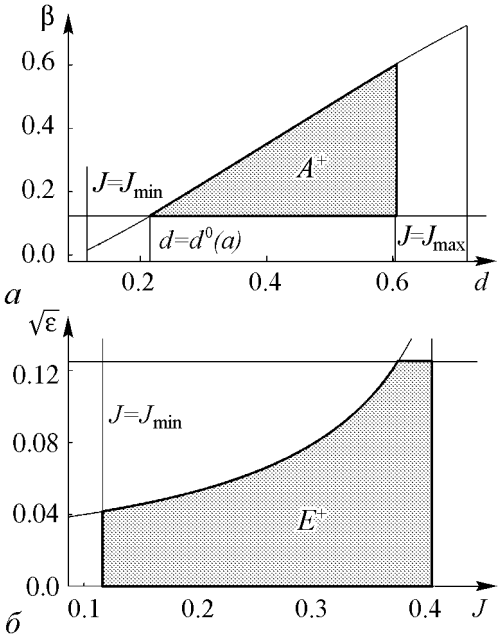


Рис. 8. Области параметров, соответствующие существованию Г: *а* – A^+ ($a = 0.25$); *б* – E^+ ($a = 0.25$, $\beta = 0.19547$, $d = 0.5012$)

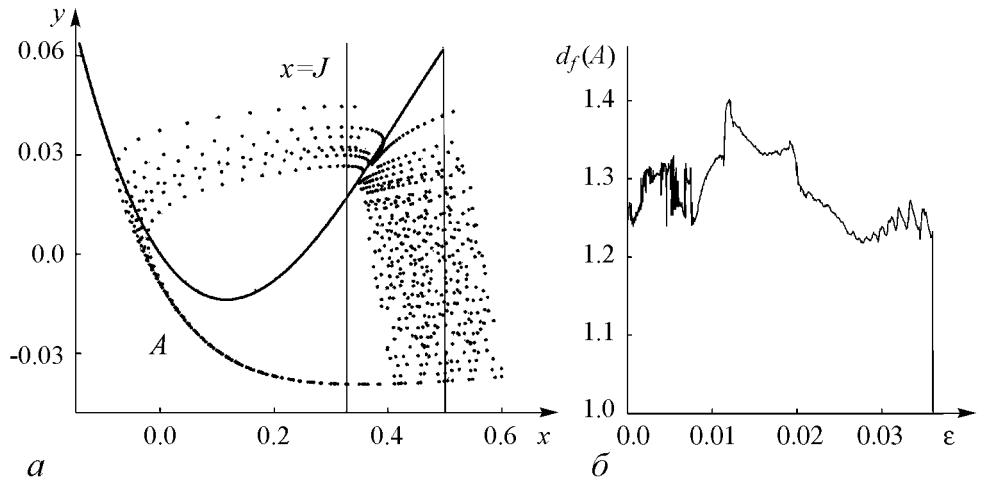


Рис. 9. *а* – Хаотический аттрактор A для значений параметров $a = 0.25$, $J = 0.327$, $\varepsilon = 0.00793$, $\beta = 0.19547$, $d = 0.5012$, принадлежащих областям A^+ и E^+; *б* – Зависимость фрактальной размерности $d_f(A)$ от параметра ε для значений параметров $a = 0.2$, $J = 0.14$, $\beta = 0.265$, $d = 0.45$

4. Галерея других аттракторов и режимов нейронной активности

Покажем, что с помощью отображения f кроме спайк-берстовых колебаний можно моделировать многие другие режимы нейронной активности. Для этого откажемся от ограничений, задаваемых неравенствами (5), (18) и условием $y > F(J_{\max}) - \beta$ (см. раздел 2).

4.1. Генерация одиночных спайков и берстов. Как известно [1], одним из основных свойств нейронов, изначально находящихся в состоянии покоя, является их способность к генерации потенциала действия при превышении некоторого порога в результате действия внешнего стимула. Состоянию покоя нейрона в системе (1) отвечает неподвижная точка O, которая является устойчивой в области параметров, выделяемой неравенством

$$J < \frac{1 + a\sqrt{1 - a + a^2 + 3\varepsilon}}{3} = H(a, \varepsilon). \tag{40}$$

Рассмотрим отклик нейрона на внешнюю стимуляцию достаточно короткими одиночными импульсами. В системе (1) представим действие такого стимула в виде аддитивного неавтономного слагаемого $e(n)$ в первом уравнении (рис. 10, *а*). Предположим,что $\varepsilon << 1$ и, следовательно, динамика системы (1) является релаксационной. Кроме того, считаем, что длительность внешних импульсов настолько мала, что их действие сводится к мгновенному изменению переменной x на величину, равную амплитуде импульса. Обозначим через $x = x^e$, $y = y^e$ ($y^e \approx F(J)$) значения переменных x, y после окончания действия стимула, а через E – траекторию системы (1), соответствующую этим начальным условиям (x^e, y^e).

(i) Если амплитуда стимула является недостаточной (рис. 10, *а* (i)) для преодоления первого порога, определяемого слоем медленных траекторий в окрестности

неустойчивой инвариантной кривой

$$W_1^{\mathrm{u}}(\varepsilon) = \left\{ (x, y) : y = F(x) + \frac{\varepsilon(x - J)}{F'(x)} + \ldots, \quad J_{\min} < x < d \right\},$$

то наибольшее значение переменной $x(n)$ вдоль траектории E незначительно превосходит амплитуду стимула (рис. 10, *в* (i)). В этом случае генерации потенциала действия не происходит (рис. 10, *б* (i)).

(ii) Увеличим амплитуду (см. рис. 10, *а* (ii)) внешнего стимула так, чтобы был преодолен первый порог, но не достигнут второй порог, определяемый слоем медленных траекторий в окрестности инвариантной кривой

$$W_2^{\mathrm{u}}(\varepsilon) = \left\{ (x, y) : y = F(x) + \frac{\varepsilon(x - J)}{F'(x)} - \beta + \ldots, \quad d < x < J_{\max} \right\}.$$

В этом случае быстрые движения системы (1) близки к траекториям отображения g на интервале $I(y_0)$, где $y_0 \in Y^L$. Поэтому траектория E совершает некоторое количество нерегулярных колебаний около прямой $x = d$ (см. рис. 10, *в* (ii)) и возвращается к неподвижной точке O. Такой траектории отвечает режим возбуждения одиночного берста с нерегулярной последовательностью спайков (см. рис. 10, *б* (ii)).

(iii) Если амплитуда внешнего стимула достаточна для преодоления второго порога, то точка $x = x^e$, $y = y^e$ попадает в область притяжения устойчивой инвариантной кривой

$$W_2^{\mathrm{s}}(\varepsilon) = \left\{ (x, y) : y = F(x) + \frac{\varepsilon(x - J)}{F'(x)} - \beta + \ldots, \quad x > J_{\max} \right\}.$$

и траектория E приходит в слой медленных движений в окрестности этой кривой (см. рис. 10, *в* (iii)). Движение траектории E в окрестности $W_2^{\mathrm{s}}(\varepsilon)$ заканчивается в окрестности точки $(x \approx J_{\max}, \quad y = F(J_{\max}) - \beta)$ и далее продолжается в соответствии с быстрой системой, близкой к (8), с $y_0 \in Y_1$. Достигнув окрестности $W_1^{\mathrm{s}}(\varepsilon)$, траектория E продолжает свое движение в этой окрестности и асимптотически приближается к неподвижной точке O. Такому поведению траектории E соответствует режим генерации одиночного спайка (см. рис. 10, *б* (iii)).

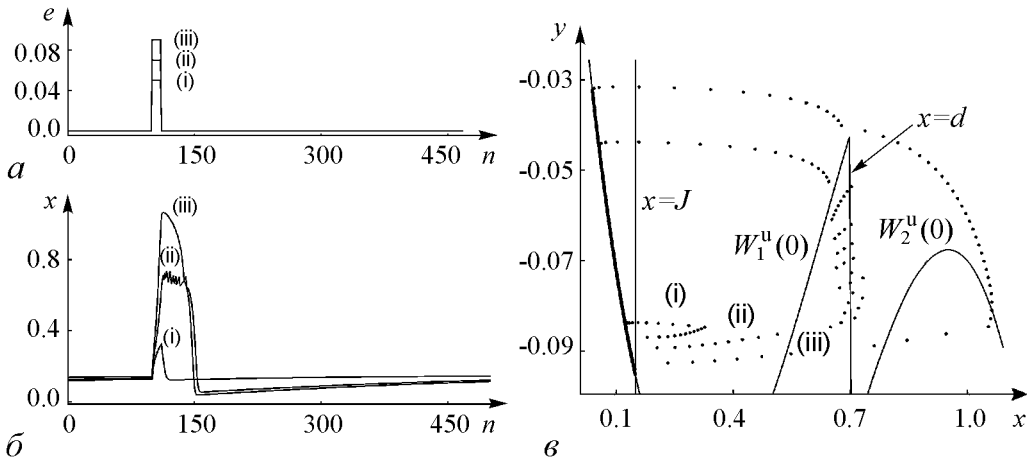


Рис. 10. Режим однократной нейронной активности для трех внешних стимулов: *а* – внешняя стимуляция; *б* – отклик системы на внешний стимул; *в* – фазовая плоскость системы (1). Параметры $J = 0.15$, $\varepsilon = 0.002$, $\beta = 0.07$, $d = 0.7$, $a = 0.9$

4.2. Колебательные режимы нейронной активности.

4.2.1. Замкнутая инвариантная кривая и подпороговые колебания. При нарушении неравенства (40) неподвижная точка O теряет устойчивость. Нетрудно видеть, что при $J = H(a, \varepsilon)$ ее мультипликаторы равны

$$\mu_{1,2} = e^{\pm i\omega}, \quad \omega = \sqrt{\varepsilon - \frac{(F'(J))^2}{4}}.$$

Следовательно, смена устойчивости точки O происходит через бифуркацию Андронова–Хопфа–Неймарка–Сакера [28]. Приводя систему (1) при $\omega \neq 0$, π, $2\pi/3$, $\pi/2$ в окрестности O к соответствующей этой бифуркации нормальной форме, устанавливаем, что первая ляпуновская величина задается следующим образом:

$$L_1|_{J=H(a,\varepsilon)} = -\frac{3}{2\varepsilon(4-\varepsilon)} - \frac{1 - a + a^2 + 3\varepsilon}{\varepsilon(4-\varepsilon)}.$$

При $\varepsilon < 4$ первая ляпуновская величина является отрицательной и, следовательно, смена устойчивости точки O сопровождается рождением устойчивой замкнутой инвариантной кривой $C_{\rm th}$ (рис. 11, *а*). Колебания, соответствующие $C_{\rm th}$, происходят ниже порога возбуждения потенциала действия и потому называются подпороговыми (рис. 11, *б*).

4.2.2. Хаотический «двухрусловый» аттрактор и хаотические спайковые колебания. Рассмотрим релаксационную ($\varepsilon << 1$) динамику системы (1) в случае, когда неподвижная точка O является неустойчивой, то есть $J > H(a, \varepsilon)$, и выполнены также следующие условия на параметры

$$F(J_{\min}) > F(d) - \beta, \tag{41}$$

$$F(J_{\max}) > F(d). \tag{42}$$

В этом случае в окрестности прямой разрыва $x = d$ инвариантная кривая $W_2^{\rm u}(\varepsilon)$ разделяет быстрые траектории системы (8) на два потока (рис. 11, *в*). Первый поток образуют траектории, совершающие колебаний в окрестности $x = d$. Их динамика близка к динамике системы (8) на инвариантном интервале $I(y_0)$ с $y_0 \in Y^L$ (см. раздел 2). Второй поток состоит из траекторий, преодолевших второй порог и движущихся затем в окрестности кривой $W_2^{\rm s}(\varepsilon)$ (рис. 11, *д*). При этом траектория системы (1), стартующая, например, из окрестности $W_1^{\rm s}(\varepsilon)$, хаотически переходит из одного потока в другой. В результате такой динамики на фазовой плоскости формируется хаотический аттрактор $A_{\rm th}$. Аттрактору $A_{\rm th}$ соответствует режим нейронной активности, при котором на фоне подпороговых колебаний возникают хаотические спайковые колебания. (рис. 11, *г*).

4.2.3. Замкнутая инвариантная кривая и периодические спайковые колебания. Пусть параметры системы (8) удовлетворяют тем же условиям, что и в п. 4.2.2, за исключением неравенства (41). Кроме того, предположим, что выполняется неравенство, противоположное (41). В этом случае параметр β относительно мал и траектории с начальными условиями из окрестности $W_{1,2}^{\rm s}(\varepsilon)$ не меняют своего направления движения при прохождении прямой разрыва (см. рис. 11, *д*). Поэтому

в системе (1) возможны движения между слоями медленных движений локализованных около кривых $W^{\mathrm{s}}_{1,2}(\varepsilon)$. В результате таких движений на фазовой плоскости формируется замкнутая инвариантная кривая C_{sp} (см. рис. 11, *д*), определяющая режим периодической спайковой активности.

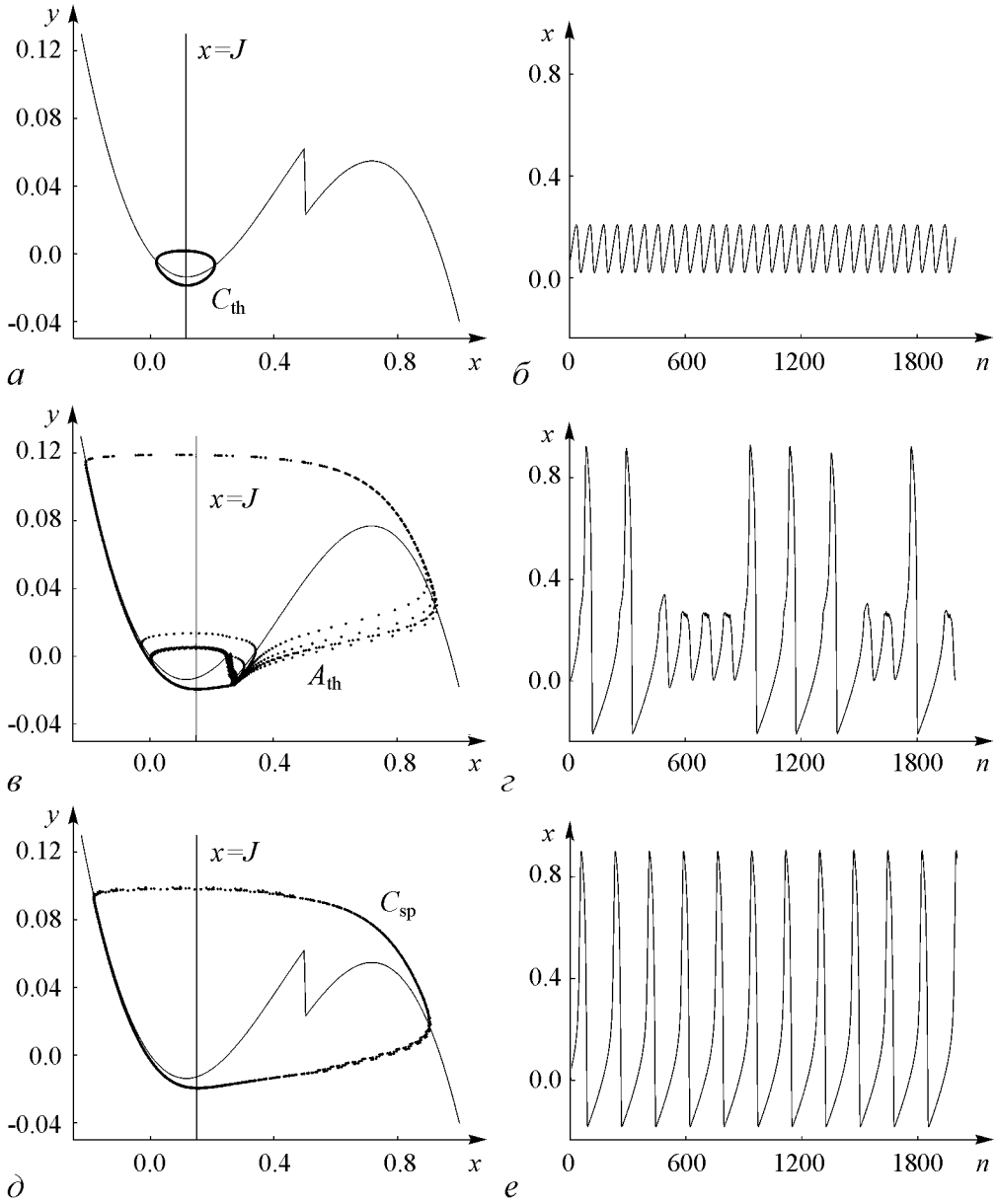


Рис. 11. *а* – Замкнутая инвариантная кривая C_{th}, *б* – подпороговые колебания, соответствующие C_{th}, параметры: $J = 0.115$, $\varepsilon = 0.01$, $\beta = 0.04$, $d = 0.5$, $a = 0.25$. *в* – «Двухрусловый» хаотический аттрактор A_{th}, $d_f(A_{\mathrm{th}}) = 1.1544$, *г* – спайк-подпороговые колебания, параметры: $J = 0.15$, $\varepsilon = 0.005$, $\beta = 0.018$, $d = 0.26$, $a = 0.25$. *д* – Замкнутая инвариантная кривая C_{sp}, *е* – периодические спайковые колебания, параметры: $J = 0.15$, $\varepsilon = 0.005$, $\beta = 0.04$, $d = 0.5$, $a = 0.25$

Заключение

В работе предложена новая дискретная модель нейрона в виде двумерного точечного отображения, построенная на основе дискретной версии системы ФитцХью – Нагумо. Проведено исследование динамики модели и показано существование как хаотических, так и регулярных аттракторов различных видов. Построена зависимость фрактальной размерности хаотических аттракторов от основных управляющих параметров. В основе динамического механизма хаотизации колебаний модели лежат свойства широко известного отображения типа Лоренца. С одной стороны, предложенная модель обладает относительно простой и ясной структурой, а с другой – описывает достаточно большое число сложных режимов нейронной активности и, на наш взгляд, представляется достаточно универсальной.

Несмотря на идеализации, принятые при построении модели, описываемые ею режимы находятся в хорошем качественном соответствии с их прототипами, полученными в реальных нейрофизиологических экспериментах. Например, подпороговые квазисинусоидальные колебания типичны для нейронов нижних олив [31], входящих в оливомозжечковую систему, которая в значительной степени определяет процесс координации движений, осуществляемый нервной системой. Для некоторых видов нейронов нижних олив морской свинки характерна [32] спайковая активность на фоне хаотических подпороговых колебаний (см. рис. 11, *г*). Спайк-берстовую активность демонстрируют многие нейроны, в частности, пирамидальные нейроны гиппокампа [34], таламические нейроны [35] и другие. Модель (1) позволяет не только воспроизводить широкий спектр спайк-берстовых колебаний, но и осуществлять «настройку» специфических свойств этих колебаний, характерных для различных типов нейронов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 06-02-16137) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ-7309.2006.2).

Библиографический список

1. *Kandel E.R., Schwartz J.H., Jessell T.M.* Principles of neural science. Prentice-Hall Int. Inc., 1991.
2. *Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I., Abarbanel H.D.I.* Dynamical principles in neuroscience // Reviews of Modern Physics. 2006. Vol. 78, 4. P. 1213.
3. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane current and application to conduction and excitation in nerve // J. Physiol. Vol. 117. P. 500.
4. *Потапов А.Б., Али М.К.* Нелинейная динамика обработки, используемая в нейронных сетях // В кн. Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие. М.: Наука, 2002.
5. *FitzHugh R.* Mathematical models of the threshold phenomena in the nerve membrane // Bull. Math. Biophys. 1955. Vol. 17. P. 257.
6. *Hindmarsh J.L., Rose R.M.* A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // Philos. Trans R. Soc. London, Ser. B221. 1984. P. 87.

7. *Morris C., Lecar H.* Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber // Biophys. J. 1981. Vol. 25. P. 87.
8. *Chialvo D.R.* Generic excitable dynamics on the two-dimensional map // Chaos Solutions Fract. 1995. Vol. 5. P. 461.
9. *Kinouchi O., Tragtenberg M.* Modeling neurones by simple maps // Int. J. Bifurcation Chaos. 1996. Vol. 6, № 12a. P. 2343.
10. *Kuva S., Lima G., Kinouchi O. Tragtenberg M., Roque A.* A minimal model for excitable and bursting element // Neurocomputing 2001. Vol. 38-40. P. 255.
11. *de Vries G.* Bursting as an emergent phenomenon in coupled chaotic maps // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 051914.
12. *Bazhenov M., Rulkov N.F., Fellous J.-M., Timofeev I.* Role of network dynamics in shaping spike timing reliability // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 041902.
13. *Rulkov N.F., Timofeev I., Bazhenov M.* Oscillations in large-scale cortical networks: map-based model // J. of Computational Neuroscince. 2004. Vol. 17. P. 203.
14. *Su H., Alroy G., Kirson E.D., Yaari Y.* Extracellular calcium modulates persistent sodium current-dependent burst-firing in hippocampal pyramidal neurones // Journal of Neuroscience. 2001. Vol. 21. P. 4173.
15. *Gray C.M., Mc Cormick D.A.* Chattering cells: superficial pyromidal neurones contributing to the generation of synchronous oscillations in the visual cortex // Science. 1996. 274 (5 284). P. 109.
16. *Connors B.W., Gutnick M.J.* Intrinsic firing patterns of diverse neocortical neurones // Trends in Neuroscience. 1990. Vol. 13. P. 99.
17. *Lisman J.* Bursts as a unit of neural information: making unreliable synapses reliable. Trends in Neuroscience. 1997. Vol. 20. P. 38.
18. *Izhikevich E.M., Desai N.S., Walcott E.C., Hoppensteadt F.C.* Bursts as s unit of neural information: selective communication via resonance // Trends in Neuroscience. 2003. Vol. 26. P. 161.
19. *Izhikevich E.M., Hoppensteadt F.* Classification of bursting mappings // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, № 11. P. 3847.
20. *Cazellis B., Courbage M., Rabinovich M.* Anti-phase regularization of coupled chaotic maps modeling bursting neurons // Europhysics Letters. 2001. Vol. 56 (4). P. 504.
21. *Rulkov N.F.* Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. P. 0.41922.
22. *Shilnikov A.L., Rulkov N.F.* Origin of chaos in a two dimensional map modeling spiking-bursting neural activity // Int. J. Bifurc. Chaos. 2003. Vol. 13, № 11. P. 3325.
23. *Rulkov N.F.* Regularization of synchronized chaotic bursts // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. p. 183.
24. *Shilnikov A.L., Rulkov N.F.* Subthreshold oscillations in a map-based neuron model // Physics Letters A. 2004. Vol. 328. P. 177.
25. *Tanaka G.* Synchronization and propagation of bursts in networks of coupled map neurons. Chaos, 16, 2006, 013113
26. *Llinas R.* I of vortex. From Neurones to Self.The MIT Press, Massachusettes, 2002.

27. *Llinas R. and Yarom Y.* Oscillatory properties of guinea-pig inferior olivary neurones and their pharmacological modulation: An in vitro study // J. Physol., Lond. 1986. Vol. 315. P. 569.
28. *Afraimovich V.S., Sze-Bi Hsu.* Lectures on Chaotic Dynamical Systems. American Mathematical Society. Int. Press, 2003, 354 p.
29. *Afraimovich V.S., Shilnikov L.P.* Strange attractors and quasiattractors // In the book «Nonlinear Dynamics and Turbulence» / eds. G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph. Pitam, Boston, 1983. P. 1.
30. *Arnold V.I., Afraimovich V.S., Ilyashenko Yu.S., Shilnikov L.P.* Bifurcation Theory, Dyn. Sys. V. Encyclopaedia Mathematics Sciences, Springer, Berlin, 1994.
31. *Llinas R.* Rebound excitation as the physiological basis for tremor: a biological study of the oscillatory properties of mammalian central neuron in vitro. Movements Disorders: Tremor / Eds L.J. Findley and R. Capildeo. London: Macmillan, 1984. P. 135.
32. *Bernardo L.S., Foster R.P.* Oscillatory behavior in inferior olive neurones: mechanism, modulation, cell aggregates // Brain Res. Bull. 1986. Vol. 17. P. 773.
33. *Traub R.D., Jefferys J.G.R., Whittington M.A.* Fast Oscillations in Cortical Circuits. The MIT Press, Massachusetts, 1999.
34. *R.S.K. Wang and Prince D.A.* Afterpotential generation in hippocampal pyramidal cells // J. Neurophysiol. 1981. Vol. 45. P. 86.
35. *Deschenes M., Roy J.P. and Steriade M.* Thalamic bursting mechanism: an inward slow current revealed by membrane hyperpolarization // Brain Res. 1982. Vol. 239. P. 289.

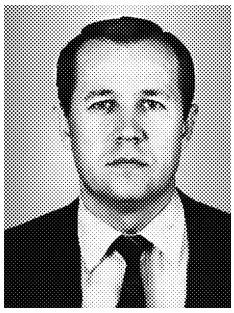
Институт прикладной физики РАН, Н.Новгород

Поступила в редакцию 05.06.2007

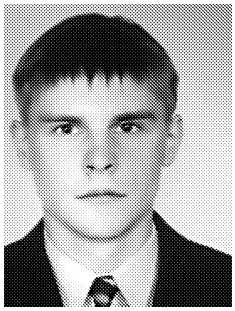
MAP-BASED MODEL OF THE NEURAL ACTIVITY

V.I. Nekorkin, L.V. Vdovin

A two-dimensional model exhibiting the chaotic spiking-bursting activity of real neurons is proposed. The model is given by the discontinuous two-dimensional map. It is constructed on the basis of the discrete modification of the FitzHugh–Nagumo model and one-dimensional Lorenz-type map. We have studied the dynamics of the system, found the conditions on the parameters under which chaotic attractor exists. The structure and properties of the attractor is studied. This attractor mimics spiking-bursting oscillations. We have also showed that map is applicable for simulation of other regimes of neural oscillatory activity such as subthreshold oscillations and periodic and chaotic spiking or it could be used for modeling of threshold excitability property of the neurons.



Некоркин Владимир Исаакович – родился на Украине (1948), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1981, ННГУ) и доктора физико-математических наук (1992, СГУ). С 1971 года работал в Нижегородском институте прикладной математики, с 1983 по 1986 год – в Нижегородском политехническом институте, с 1986 года и по настоящее время работает на радиофизическом факультете ННГУ, профессор. Область научных интересов – теория колебаний и волн, структурообразование и нелинейные волны в непрерывных и дискретных средах, синхронизация и пространственно-временной хаос. Имеет более 100 научных публикаций в указанных направлениях, в том числе двух монографий (в соавторстве). В качестве приглашенного профессора читал лекции в Мадридском и Стэнфордском университетах. Работал в Калифорнийском университете. E-mail: vnekorkin@appl.sci-nnov.ru



Вдовин Лев Вячеславович – родился в 1983. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (2006). Аспирант первого года обучения ИПФ РАН. Область научных интересов – теория нелинейных колебаний и волн, нейродинамика.

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 5, 2007 УДК 517.9

ВЛИЯНИЕ ЗАДЕРЖКИ В КАНАЛЕ СВЯЗИ НА РЕЖИМЫ ПОЛНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В.В. Астахов, Е.И. Неходцева, С.В. Астахов, А.В. Шабунин

Изучается влияние задержки в канале связи на режимы полной синхронизации хаоса во взаимодействующих системах с дискретным временем. Рассмотрено поведение системы в зависимости от величины коэффициента связи и времени задержки. Установлено, что связь с задержкой по времени препятствует появлению полной синхронизации хаоса, но допускает существование синхронизации периодических и квазипериодических колебаний.

Введение

Исследование явления синхронизации хаоса является актуальной проблемой, имеющей большое фундаментальное и прикладное значение. Для взаимодействующих хаотических систем выделяют следующие виды синхронизации: полную, фазовую, обобщенную синхронизацию, а также синхронизацию с задержкой. Возможность реализации грубых, устойчивых режимов синхронизации хаоса существенным образом зависит от типа и величины связи. Часто для многих задач естествознания является принципиальным учет времени задержки в каналах связи. Установлено, что задержка при взаимодействии систем существенным образом влияет на их динамику [1–3]. Задержка может индуцировать подавление колебаний во взаимодействующих идентичных осцилляторах [1, 2] или вызывать бистабильность между синхронными и несинхронными состояниями [3]. Задержка в цепочке локально связанных осцилляторов может приводить к уменьшению областей существования сложных хаотических пространственно-временных состояний [4]. При изучении динамики ансамблей систем с задержкой в каналах связи используются как осцилляторы или генераторы, описываемые дифференциальными уравнениями, так и различные отображения с дискретным временем [5].

В настоящей работе показано, что задержка в канале связи между двумя взаимодействующими системами с дискретным временем разрушает режим полной синхронизации хаоса, но допускает существование синхронизации периодических и квазипериодических колебаний.

1. Исследуемая система

Рассмотрим систему двух связанных кубических отображений с запаздывающей связью в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + \varepsilon\left[f(y_{n-k}) - f(x_n)\right], \\ y_{n+1} &= f(y_n) + \varepsilon\left[f(x_{n-k}) - f(y_n)\right], \\ f(x) &= (a-1)\,x - ax^3. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x_n, y_n – динамические переменные первой и второй подсистемы, a – управляющий параметр парциальной системы, ε – коэффициент связи, индексы n и k характеризуют дискретное время и интервал задержки, соответственно.

Каждое из отображений (1) в интервале значений a от 2 до 3.6 представляет собой нелинейную бистабильную систему с дискретным временем, которая при увеличении параметра a демонстрирует усложнение колебательных режимов и переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. В закритической области наблюдается каскад бифуркаций слияния лент хаотического аттрактора и объединение двух симметричных хаотических множеств в один аттрактор.

Поведение системы (1) в случае $k = 0$, когда взаимодействие между подсистемами происходит без задержки, детально исследовано и описано в работах [6, 7]. В частности, показано, что существуют интервалы значений коэффициента связи, где наблюдается явление полной синхронизации хаоса. Формирование синхронного хаотического аттрактора происходит через каскад бифуркаций удвоения периода симметричных орбит. При выходе из области синхронизации происходит формирование фазовой мультистабильности. Потеря синхронизации и формирование мультистабильности происходит в результате последовательности бифуркаций на базе седловых периодических орбит, встроенных в синхронный хаотический аттрактор. Следует отметить, что в данном случае ($k = 0$) система связанных отображений хорошо описывает перечисленные явления в двух диссипативно связанных, синфазно возбуждаемых гармонической силой осцилляторах Дуффинга [8]. В радиофизической интерпретации это соответствует двум резистивно связанным нелинейным колебательным контурам при синфазном гармоническом воздействии, где сопротивление связи соответствует коэффициенту ε, а амплитуда гармонического сигнала – параметру a системы (1).

2. Влияние задержки на режимы синхронизации хаоса

Динамика системы (1) является довольно сложной и разнообразной. В данной работе будем исследовать режимы полной синхронизации, то есть такие режимы, когда в каждый момент времени состояния парциальных систем полностью совпадают. Это условие задает в фазовом пространстве системы инвариантное, симметричное подпространство $I:\ x_{n-j} = y_{n-j}\ (j = 0, ..., k)$, которому принадлежат синхронные движения. Исследования будем проводить в зависисмости от времени задержки k и коэффициента связи ε при фиксированном значении параметра $a = 3.34$, что соответствует хаотическому режиму индивидуальной системы.

На рис. 1 на плоскости параметров $(k - \varepsilon)$ построена карта режимов в области значений ε от 0 до 0.5 и k от 0 до 6. При взаимодействии без задержки $(k = 0)$ в симметричном подпространстве $I : x_n = y_n$ полного фазового пространства системы существует синхронное хаотическое двухленточное множество $2A$, фазовый портрет которого представлен на рис. 2, *а*. Оно является хаотическим седлом (притягивающим внутри I и отталкивающим в трансверсальном к I направлении) в интервале значений коэффициента связи от 0 до 0.098, и превращается в синхронный хаотический аттрактор при значениях параметра $\varepsilon > 0.098$. На рис. 1 интервалы существования различных видов движений в симметричном подпространстве без учета трансверсальной устойчивости показаны штриховыми линиями. Интервалы существования трансверсально устойчивых движений (синхронных аттракторов) изображены сплошными линиями.

При введении задержки поведение системы меняется существенным образом, причем происходят изменения не только трансверсальной устойчивости синхронных движений, но меняется и сам характер движений в симметричном подпространстве, что не наблюдается при связях без задержки. В отсутствие связи $(\varepsilon = 0)$ в симметричном подпространстве существует хаотическое множество $2A$. Для времени задержки $k = 1$ с увеличением коэффициента связи ε в симметричном подпространстве наблюдается обратный каскад бифуркаций удвоения периода, который завершается циклом периода один $(1C)$. Однако большинство циклов данного каскада являются неустойчивыми по отношению к несимметричным возмущениям, то есть в трансверсальном направлении к синхронному многообразию. Трансверсально неустойчивыми являются также и хаотические предельные множества. Из рис. 1 видно, что существуют небольшие интервалы значений коэффициента связи, в которых при данной задержке наблюдаются устойчивые режимы полной синхронизации периодических движений, соответствующих устойчивым циклам $2C$, $4C$, $8C$. Интервал существования устойчивого синхронного цикла периода восемь окружен интервалами неустойчивости синхронных движений. Примеры характерных синхронных движений представлены на рис. 2.

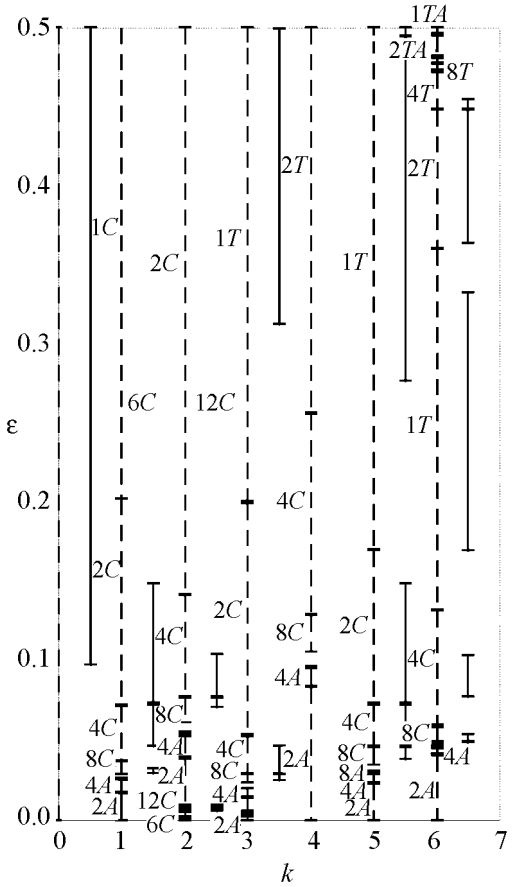


Рис. 1. Карта синхронных движений на плоскости управляющих параметров k – ε. Штрихами показаны области существования седловых синхронных предельных множеств, отрезками сплошных линий – области существования синхронных аттракторов (C – периодическая орбита, T – замкнутая инвариантная кривая, A – хаотическое предельное множество)

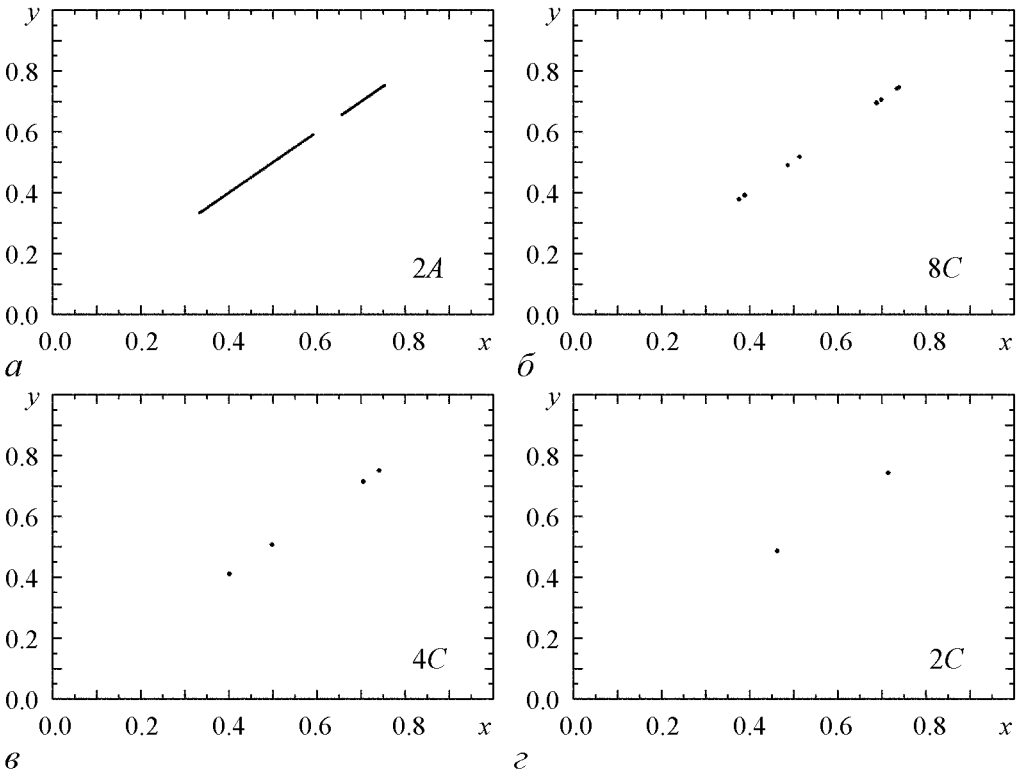


Рис. 2. Характерные синхронные режимы в системе (1): $2A$ – синхронное хаотическое множество (*а*), $8C, 4C, 2C$ – синхронные орбиты периода 8, 4, 2, соответственно (*б*,*в*,*г*)

Для времени задержки $k = 2$ поведение системы остается почти таким же, как и при $k = 1$. Различие состоит в том, что в симметричном подпространстве обратная последовательность бифуркаций удвоения периода завершается не циклом периода 1, а циклом периода 2. В области существования хаотического множества наблюдаются окна устойчивости периодических орбит ($6C$ и $12C$). Здесь также возможны устойчивые режимы синхронизации периодических движений, но их интервалы устойчивости по параметру ε меньше, чем при $k = 1$. Области существования устойчивых синхронных режимов разделены областями существования неустойчивых синхронных режимов.

При дальнейшем увеличении задержки ($k = 3, 4, 5, 6$), поведение системы меняется существенным образом. Во-первых, при величине задержки связи $k = 4$ устойчивых режимов синхронизации не наблюдается во всем исследуемом интервале значений коэффициента связи. Во-вторых, при значениях $k = 3, 5, 6$ помимо устойчивых режимов синхронизации периодических движений наблюдаются устойчивые режимы полной синхронизации квазипериодических колебаний (рис. 3, *а–в*). В симметричном подпространстве полного фазового пространства связанных систем с дискретным временем рождается устойчивая инвариантная замкнутая кривая. При увеличении коэффициента связи ε наблюдается каскад бифуркаций удвоения инвариантной замкнутой кривой ($1T$, $2T$, $4T$, $8T$) и формирование синхронного хаоти-

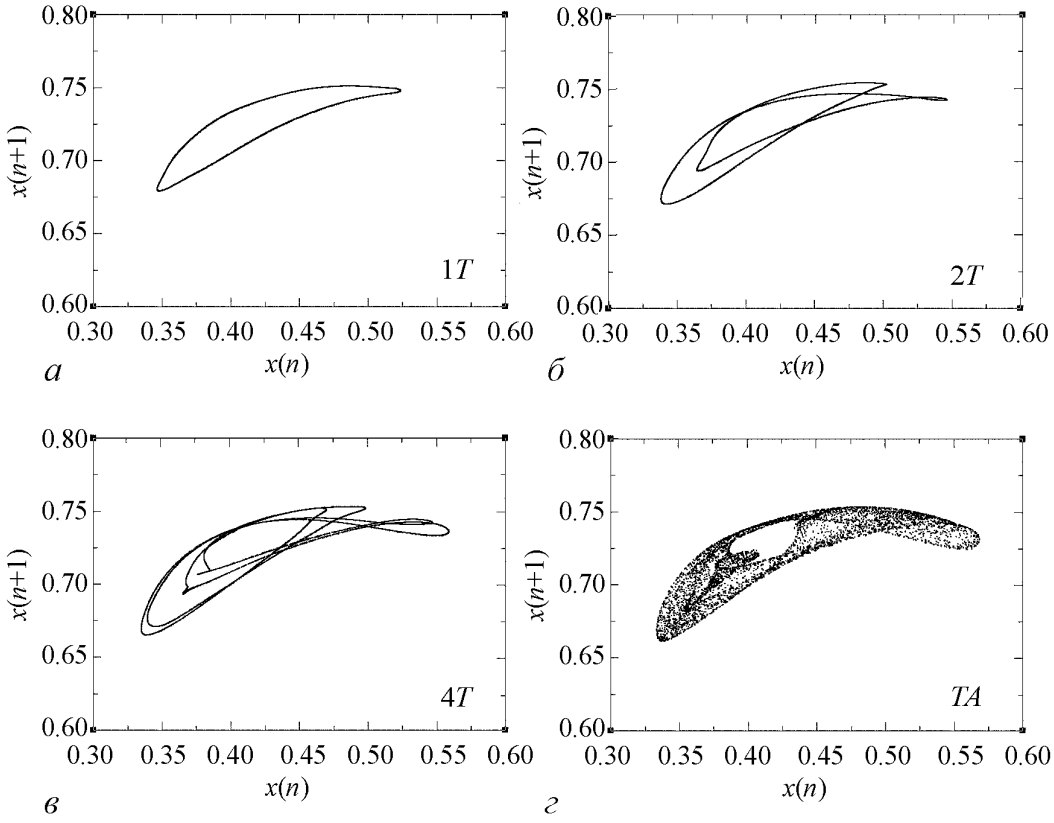


Рис. 3. Бифуркации удвоения инвариантной замкнутой кривой (*а–в*) и синхронное хаотическое множество (*г*), сформированное в симметричном подпространстве I при разрушении квазипериодических движений

ческого множества $2TA$ и $1TA$ (см. на рис. 1 сечение $k = 6$ и фазовые портреты на рис. 3). Однако, как видно из карты режимов, при этом происходит потеря устойчивости синхронных движений. Образовавшееся синхронное хаотическое множество становится трансверсально неустойчивым. Устойчивого режима полной синхронизации хаоса не наблюдается.

Заключение

Таким образом, проведенные исследования показывают, что задержка в канале связи существенным образом влияет на режимы полной синхронизации во взаимодействующих кубических отображениях. Введение задержки устраняет устойчивые режимы полной синхронизации хаоса. При связи с задержкой существуют устойчивые режимы полной синхронизации периодических колебаний и квазипериодических движений. Взаимодействие с задержкой в системе двух кубических отображений приводит к более сложной картине бифуркационных переходов для синхронных движений в симметричном подпространстве. При изменении коэффициента связи не только происходят бифуркации удвоения периодических колебаний, но и появляют-

ся квазипериодические движения, наблюдаются бифуркации удвоения инвариантной замкнутой кривой и формирование синхронного тор-аттрактора. При движении по параметру интервалы устойчивости режимов синхронизации чередуются с интервалами неустойчивости синхронных движений.

В системе связанных отображений с задержкой (1) проведено детальное исследование устойчивых и трансверсально неустойчивых регулярных и хаотических синхронных движений, построены их области существования на плоскости управляющих параметров, исследованы переходы между ними. Однако ряд важных и интересных вопросов остались открытыми. Например, не выявлены причины, приводящие к трансверсальной неустойчивости и регулярных, и хаотических синхронных движений при некоторых величинах задержки в канале связи, чем обусловлено чередование интервалов устойчивости с интервалами трансверсальной неустойчивости синхронных движений. Выявление механизма этих эффектов требует детального бифуркационного анализа седловых периодических орбит, расположенных как внутри, так и в окрестности синхронного симметричного подпространства и отвечающих за трансверсальную устойчивость синхронных движений. Эта задача не ставилась в рамках данной работы, и ее решение планируется провести в дальнейшем.

Данная работа была частично поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 годы)».

Библиографический список

1. *Raddy D.V.R., Sen A., Johnston G.L.* Time delay induced death in coupled limit cycle oscillators // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. P. 5109.
2. *Raddy D.V.R., Sen A., Johnston G.L.* Experimental evidence of time-delay-induced death in coupled limit-cycle oscillators // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 3381.
3. *Yeung M.K.S., Strogatz S.H.* Time delay in the Kuramoto model of coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82. P. 648.
4. *Chung T.-H., Kim S.* Spatio-temporal dynamics in locally coupled Ginzburg-Landau oscillator chain with time delay // CP501. Stochastic Dynamics and Pattern Formation in Biological and Complex Systems / Edited by S. Kim, K.J. Lee, W. Sung. P. 67.
5. *Jiang Y.* Globally coupled maps with time delay interactions // Physics Letters A. 2000. Vol. 267. P. 342.
6. *Astakhov V., Shabunin A., Klimshin A., Anishchenko V.* In-phase and anti-phase complete chaotic synchronization in symmetrically coupled discrete maps // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2002. Vol. 7. P. 215.
7. *Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С.* Механизмы разрушения хаотической синхронизации в системе связанных кубических отображений // Изв. вузов: Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7. № 2,3. С. 3.
8. *Коблянский С.А.* // В сборнике «Нелинейные дни для молодых в Саратове. 2007» (в печати).

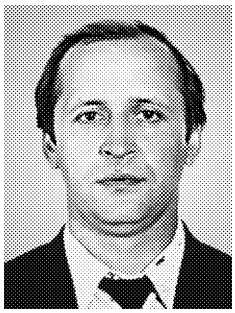
Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию *29.03.2007*
После доработки *29.06.2007*

INFLUENCE OF TIME DELAY COUPLING ON THE COMPLETE SYNCHRONIZATION OF CHAOS IN CHAOTIC SYSTEMS WITH DISCRETE TIME

V.V. Astakhov, E.I. Nekhodtseva, S.V. Astakhov, A.V. Shabunin

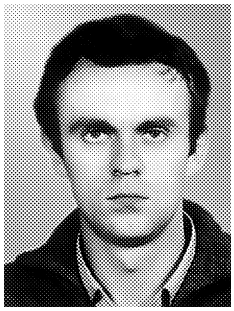
In the work the influence of time delay of coupling on the complete synchronization of chaos in an interacting systems with discrete time is studied. The system's behavior is considered in dependence on coupling coefficient value and delay time value. It is established that coupling with time delay prevents appearance of the complete synchronization of chaos, however it allows the synchronization of periodic and quasi-periodic oscillations.



Астахов Владимир Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1980). Доктор физико-математических наук (1999), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.
E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru

Неходцева Екатерина Игоревна родилась в Саратове (1986). В настоящее время является студенткой факультета нелинейных процессов Саратовского Государственного университета. Область научных интересов: динамика связанных хаотических систем с задержкой в канале связи.

Астахов Сергей Владимирович родился в Саратове (1984). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (2006). В настоящее время работает инженером на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: хаос в сосредоточенных и распределенных системах, статистические характеристики хаоса, динамика систем с задержкой.



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, кандидат физико-математических наук (1998). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций.
E-mail:alexey@chaos.ssu.runnet.ru

Детерминированный хаос

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 5, 2007 УДК 517.9

ДИАГНОСТИКА ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОСА ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ

А.В. Шабунин, В.В. Астахов

Трудности описания фазовой синхронизации хаоса связаны с неоднозначностью определения мгновенной фазы, а также с ограниченностью ее области применения режимом когерентного хаоса. В данной работе показано, что для диагностики и количественного анализа этого явления может быть использована функция когерентности, которая не имеет подобных ограничений.

Введение

Хаотическая синхронизация, то есть взаимное подстраивание колебаний в связанных хаотических осцилляторах, проявляется разными способами, что позволяет говорить о разных типах синхронизации. Так, при сильной диффузионной связи хаотические осцилляторы стремятся к полной согласованности колебаний, выражающейся либо в их идентичности (так называемая «полная синхронизация хаоса» [1, 2]), либо в некоторой детерминированной взаимосвязи между ними («обобщенная синхронизация» [2, 5], «синхронизация с задержкой» [6]). При слабой связи наблюдается согласованность базовых временных масштабов колебаний, что может быть описано на языке спектров как захват базовой частоты в спектре одного из осцилляторов близкой базовой частотой в спектре второго («частотная синхронизация» [3]), или в терминах временной динамики как захват мгновенной фазы колебаний фазой второго осциллятора («фазовая синхронизация» [4]). Для фазовой синхронизации можно ввести формальное определение в виде неравенства

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < M, \tag{1}$$

где φ_1, φ_2 – мгновенные фазы первого и второго осцилляторов, а M – некоторая положительная константа. Формула (1) означает, что разность фаз двух осцилляторов остается ограниченной во времени, то есть средние «периоды» колебаний одинаковы. Слабым местом указанного определения является само понятие мгновенной фазы $\varphi(t)$ в применении к хаотическим колебаниям. Если в случае периодических колебаний, когда аттрактор одномерен, фаза однозначно характеризует установившееся состояние системы (что собственно и является основанием для использования термина «фаза» как синонима термина «состояние»), то уже при квазипериодических колебаниях можно говорить о нескольких независимых фазах (например, фаза несущей и фаза огибающей). Что касается хаотических колебаний, то, хотя

формальное введение мгновенной фазы тем или иным способом возможно, ее физическая интерпретация остается неясной. Поэтому на сегодняшний день концепция мгновенной фазы хорошо работает лишь для «слабого», то есть когерентного, хаоса, который близок к периодическим колебаниям, и не работает для развитого хаоса, при котором спектр не содержит выраженных пиков. Кроме того, условие (1) автоматически выполняется, если рассматриваемые осцилляторы имеют равные характерные периоды колебаний, а значит, оно не может служить критерием синхронизации для идентичных осцилляторов. В 1985 году А. Пиковский [7] предложил рассматривать явление фазовой синхронизации хаоса с точки зрения подавления диффузии текущей фазы, что может быть диагностировано как переход от непрерывного спектра, характерного для осцилляторов с непрерывным временем, к линейчатому спектру, подобному спектру в отображениях последования. Однако этот способ пригоден только для вынужденной синхронизации под действием периодической силы. В работе [8] для диагностирования фазовой синхронизации предлагается исследовать захват фаз вейвлет-спектров колебаний подсистем. Вейвлет-анализ хаотических колебаний – новый многообещающий инструмент исследователя. Однако к настоящему времени он не столь хорошо разработан, как традиционный спектральный анализ, и его результаты менее наглядны и привычны для радиофизики. В настоящей работе для диагностики фазовой синхронизации предлагается использовать функцию когерентности как альтернативу мгновенной фазы. Ее преимуществом являются ясная физическая интепретация, однозначность и корректность определения вне зависимости от рассматриваемых колебательных режимов, простые и хорошо разработанные алгоритмы расчета. Кроме того, она позволяет исследовать явление фазовой синхронизации как в системах с расстройкой, так и в идентичных осцилляторах.

1. Диагностика и измерение синхронизации на основе функции когерентности

Взаимная когерентность σ_{xy} двух колебательных процессов $x(t)$ и $y(t)$ определяется как:

$$\sigma_{xy}(\omega) = \left| \frac{C_{xy}(\omega)}{\sqrt{P_x(\omega)P_y(\omega)}} \right|,$$

где $C_{xy}(\omega) = \left\langle F_x(\omega)F_y^*(\omega) \right\rangle$ – взаимный спектр, $P_i(\omega) = \langle F_i(\omega)F_i^*(\omega)\rangle$ – собственный спектр мощности на частоте ω, $F_i(\omega)$ – преобразование Фурье от сигнала $i(t)$. Функция когерентности принимает значения в интервале $[0;1]$, при этом $\sigma_{xy} = 0$ на тех частотах, для которых фурье-фазы ($\theta(\omega) = \mathrm{Arg}(F(\omega))$) двух сигналов принимают независимое друг от друга значение ($\Delta\theta$ равномерно распределено в интервале $[-\pi;\pi]$), и $\sigma_{xy} = 1$, если фазы полностью захвачены ($\rho(\Delta\theta) = \delta(\Delta\theta - \Delta\theta_0)$, ρ – плотность вероятности, δ – дельта функция). Усреднив σ_{xy} по всем частотам с учетом вклада каждой составляющей спектра в общую мощность сигнала и нормировав на полную мощность колебаний, можно получить суммарную количественную характеристику когерентности колебаний на всех частотах

$$S_{xy} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty (P_x(\omega) + P_y(\omega))\,\sigma_{xy}(\omega)d\omega}{\displaystyle\int_0^\infty (P_x(\omega) + P_y(\omega))d\omega}. \qquad (2)$$

Из (2) легко видеть, что $S_{xy} \in [0; 1]$, причем $S_{xy} = 1$ тогда и только тогда, когда колебания полностью когерентны на всех частотах, и $S_{xy} = 0$, если когерентность полностью отсутствует. Величина S_{xy} определяет относительную мощность когерентных колебаний в общей мощности сигналов. Она может служить количественной мерой хаотической синхронизации, в частности, как было показано в работах [9, 10], может характеризовать процесс постепенного разрушения полной синхронизации хаоса. В настоящей работе величина S_{xy} использована для анализа фазовой синхронизации в связанных осцилляторах.

2. Анализ фазовой синхронизации в связанных осцилляторах Ресслера

Рассмотрим два связанных осциллятора Ресслера как классическую систему, демонстрирующую явление фазовой синхронизации

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -y_1 - z_1, \\
\dot{y}_1 &= x_1 + 0.2y_1, \\
\dot{z}_1 &= 0.2 + z_1(x_1 - c), \\
\dot{x}_2 &= -(1+\Delta)y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2), \\
\dot{y}_2 &= (1+\Delta)x_2 + 0.2y_2, \\
\dot{z}_2 &= 0.2 + z_2(x_2 - c),
\end{aligned} \tag{3}$$

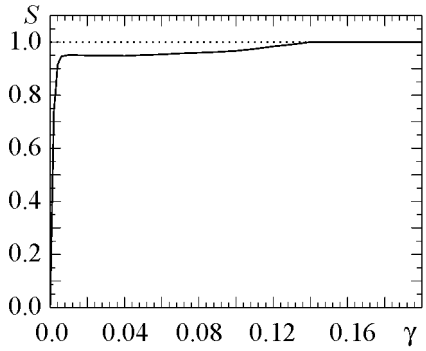


Рис. 1. Зависимость степени когерентности колебаний от связи

где Δ характеризует расстройку между подсистемами по собственной частоте, γ – коэффициент связи, параметр c управляет колебаниями в одиночном осцилляторе. При изменении c каждый из осцилляторов демонстрирует переход от периодических колебаний к хаотическим через каскад бифуркаций удвоения периода. Выберем $c = 4.6$, соответствующее режиму одноленточного хаотического аттрактора с ярко выраженным пиком в спектре (когерентный хаос). Рассмотрим сначала случай идентичных осцилляторов ($\Delta = 0$). При сильной связи ($\gamma > 0.14$) система демонстрирует полную синхронизацию хаоса, когда $x_1(t) = x_2(t)$, $y_1(t) = y_2(t)$, $z_1(t) = z_2(t)$. Уменьшение связи от $\gamma = 0.14$ к $\gamma = 0$ ведет к постепенной десинхронизации колебаний. Рассмотрим этот процесс с точки зрения степени синхронизации (2). На рис. 1 приведена зависимость степени синхронизации колебаний от связи. Видно, что с уменьшением связи S монотонно уменьшается от 1 для полностью синхронных колебаний ($\gamma > 0.14$) до 0 для полностью несинхронных ($\gamma = 0$). При этом данная зависимость разбивается на два участка с разным поведением: область $0.005 < \gamma < 0.14$ относительно медленного изменения степени когерентности при ее общем высоком уровне ($S > 0.95$) и область $0 < \gamma < 0.005$ резкого падения суммарной когерентности практически до нуля. Для того чтобы разобраться, в чем причина такого различия, рассмотрим поведение функции когерентности для значений параметра связи из первой и второй области (рис. 2). Из рисунков видно, что основные отличия заключаются в

значении когерентности на базовых частотах спектра. В первом интервале значений связи когерентность на основной частоте ω_0 и всех ее гармониках строго равна единице, оставаясь достаточно малой на остальных частотах спектра. Во втором случае когерентность на базовой частоте и гармониках начинает разрушаться. Таким образом, можно говорить о том, что в интервале значений связи $0.005 < \gamma < 0.14$ реализуется фазовая синхронизация хаотических колебаний, понимая под этим захват «фурье-фаз» базовых частот в спектрах колебаний осцилляторов. Будет ли при этом наблюдаться фазовая синхронизация в ее «классическом» понимании? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо рассмотреть осцилляторы с расстройкой по собственным частотам ($\Delta \neq 0$). Выберем значения коэффициента связи из указанных выше областей и рассмотрим, как степень синхронизации колебаний зависит от расстройки осцилляторов Δ. Для того чтобы определить области значений параметров, в которых наблюдается захват мгновенных фаз, будем также наблюдать за значениями средних характерных «периодов» колебаний

$$\langle T_x \rangle = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\tau}{M},$$

где τ – время наблюдения за процессом $x(t)$, M – число переходов переменной x от положительных значений к отрицательным. Такое определение характерного периода, как интервала между двумя последовательными пересечениями траекторией секущей Пуанкаре ($x = 0$) можно связать с определением для мгновенной фазы, как

$$\varphi(t) = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n,$$

где n – число пересечений секущей, t_n – время n-го пересечения. Данное определение для фазы представляет ее линейную интерполяцию и, как показывают исследования (см., например, [11]), в случае когерентного хаоса приводит к тем же качественным результатом, что и использование преобразования Гильберта. На рис. 3, *а* построена зависимость среднего периода колебаний во втором осцилляторе $\langle T_2 \rangle$ от расстройки Δ при трех характерных значениях параметра связи. Видно, что в первом случае, который соответствует области высокого уровня синхронизации, существует широкая зона захвата среднего периода колебаний, где он не меняется ($-0.007 < \Delta < 0.065$) и в точности равен среднему периоду колебаний в первом осцилляторе (обозначен штриховой линией). В этой зоне неравенство (1) будет выполнено, а следовательно, будет наблюдаться захват мгновенных фаз колебаний. Во втором случае, соответствующем граничному значению связи, зона захвата существует, но она становится очень узкой, стягиваясь к значению $\Delta = 0$. Наконец, при

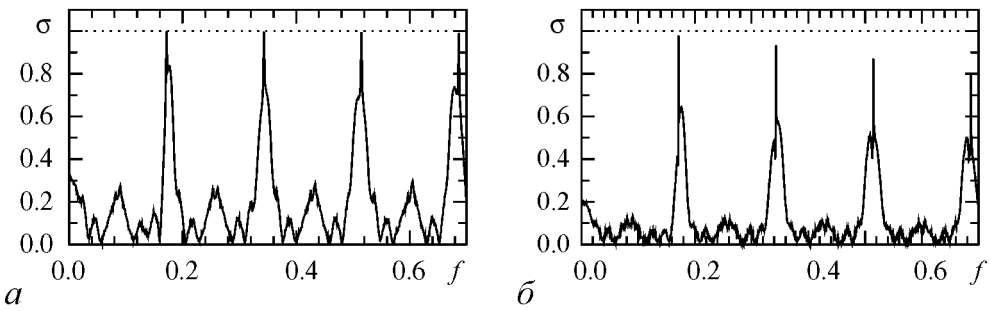


Рис. 2. Функция когерентности при $\gamma = 0.01$ (*а*) и при $\gamma = 0.004$ (*б*)

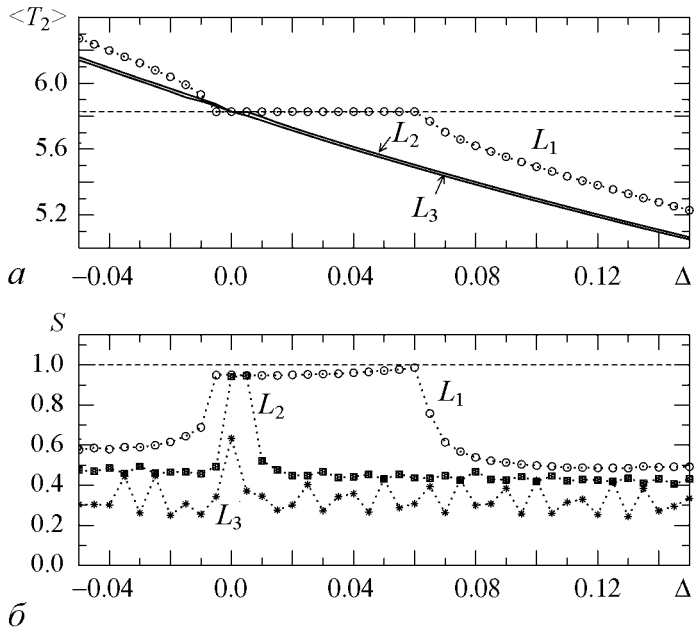


Рис. 3. *а* – график зависимости среднего периода колебаний во втором осцилляторе от величины расстройки Δ при разных значениях параметра связи: $\gamma = 0.05$ (линия L_1), $\gamma = 0.005$ (L_2), $\gamma = 0.001$ (L_3); *б* – зависимость уровня синхронизации от расстройки для тех же значений γ

значении связи из области низкого уровня синхронизации, зона захвата отсутствует. Существует лишь точка $\Delta = 0$, в которой средние периоды совпадают. Таким образом, при тех значениях связи, где существует фазовая синхронизация в смысле захвата фурье-фаз, существует также и фазовая синхронизация в традиционном смысле захвата мгновенных фаз колебаний. Если построить для сравнения зависимость уровня когерентности S в системе от расстройки при тех же параметрах связи (рис. 3, *б*), то налицо полное совпадение между зонами захвата среднего периода и зонами высокого ($S > 0.95$) уровня когерентности. Причем в области захвата степень синхронизации для разных значений связи практически не отличается (см. линии L_1 и L_2). При выходе из фазовой синхронизации уровень когерентности резко уменьшается и выходит на некоторое «стационарное» значение, соответствующее своему значению параметра связи.

Выводы

Таким образом, в случае когерентного хаоса наличие фазовой синхронизации можно диагностировать по поведению функции когерентности. Режиму захвата мгновенной фазы соответствует высокий уровень суммарной когерентности S, приближающийся к своему максимальному значению $S = 1$. При этом на базовой частоте спектра и всех ее гармониках наблюдается полная когерентность колебаний. Разрушение фазовой синхронизации начинается с уменьшения когерентности на частотах, кратных базовой частоте спектра, завершаясь потерей когерентности на основной частоте. Применение функции когерентности как критерия фазовой синхронизации позволяет рассматривать это явление и в том случае, когда у исследователя нет доступа к управляющим параметрам системы, то есть когда он не может отслеживать захват среднего периода колебаний при увеличении отстройки одного

осциллятора от другого. Данный метод также может быть перенесен на колебательные режимы с развитым хаосом, когда понятие мгновенной фазы и среднего периода становятся бессодержательными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (программа «Развитие научного потенциала высшей школы»).

Библиографический список

1. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Progr. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. P. 32.
2. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 1050.
3. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* Synchronization of chaos // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
4. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 1804.
5. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4528.
6. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 4193.
7. *Пиковский А.С.* Фазовая синхронизация стохастических автоколебательных систем внешним периодическим сигналом // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 85. С. 1970.
8. *Короновский А.А., Куровская М.К., Храмов А.Е.* О соотношении фазовой синхронизации хаотических осцилляторов и синхронизации временных масштабов // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 19. С.76.
9. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Николаев В.В., Шабунин А.В.* Исследование хаотической синхронизации в системе симметрично связанных генераторов // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45, № 2. С. 196.
10. *Shabunin A., Astakhov V., Kurths J.* Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 016218.
11. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Instantaneous phase method in studing chaotic and stochastic oscillations and its limitations // Fluctuations and Noise Letters. 2004. Vol. 4, № 1. P. L219.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 02.04.2007
После доработки 18.06.2007

DIAGNOSTICS OF PHASE SYNCHRONIZATION BY MEANS OF COHERENCE

A.V. Shabunin, V.V. Astakhov

Problems in describing chaotic phase synchronization are connected with ambiguity of definition of istantaneous phase as well as with limiting of its applicability by the coherent chaos regime. We demonstrate that this phenomenon can be analysed by means of function of mutual coherence which has not these restrictions.

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 5, 2007 УДК 537.86:621.373

СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС, СТОХАСТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ И ИНДУЦИРОВАННЫЙ ШУМОМ ХАОС В ОСЦИЛЛЯТОРЕ ДУФФИНГА

В.С. Маляев, Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко

Исследуются эффекты стохастического резонанса, стохастической синхронизации и индуцированного шумом хаоса в нелинейном осцилляторе с конечными потерями. Показано, что стохастический резонанс и стохастическая синхронизация при конечных потерях подчиняются тем же закономерностям, что и в случае передемпфированного осциллятора, но наблюдаются при меньшем уровне шума. На основании численно полученных зависимостей частоты Крамерса от интенсивности шума вводятся эквивалентные характеристики потенциального профиля, позволяющие применить к исследуемой модели аналитические соотношения, полученные для передемпфированного осциллятора. Установлено, что вызванный шумом переход к хаотической динамике в осцилляторе с конечными потерями не может оказать влияние на эффекты стохастического резонанса и стохастической синхронизации, так как наблюдается в другой области значений параметров.

Введение

Возможность с помощью шума управлять поведением нелинейной системы вызывает все больший интерес со стороны исследователей во многих отраслях науки. Ряд не так давно обнаруженных явлений, таких как стохастический резонанс [1–5], когерентный резонанс [5–7], стохастическая синхронизация в бистабильных и возбудимых осцилляторах [5, 8–10], показывают конструктивную роль шума, который может привести к росту порядка в поведении системы. С другой стороны, шум может привносить в систему некоторую степень неупорядоченности и даже индуцировать переход самой системы к хаотической динамике, проявляющейся в экспоненциальной неустойчивости траекторий [11, 12]. Двумерный нелинейный осциллятор с двухъямным потенциалом (каким является осциллятор Дуффинга), находящийся под действием белого гауссова шума и гармонического сигнала, может служить примером системы, демонстрирующей сразу несколько вызванных шумом эффектов – стохастического резонанса (СР), стохастической синхронизации (СС) и индуцированного шумом хаоса.

Первые два эффекта, хотя и наблюдались экспериментально во множестве систем различной природы, включая распределенные среды и живые организмы

[4,5,13–19], однако, детально исследованы лишь для передемпфированного осциллятора, который моделирует движение броуновской частицы в двухъямном потенциале с бесконечным трением и задается стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) первого порядка,

$$\dot{x} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} + s(t) + \xi(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ – безразмерная координата частицы, $U(x)$ – потенциальная функция, $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$ – гауссов белый шум интенсивности D, $s(t)$ – регулярная (обычно гармоническая) внешняя сила. Если рассматривать стохастический осциллятор с конечным трением, то он описывается безразмерным СДУ второго порядка

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} + s(t) + \xi(t), \tag{2}$$

где γ – безразмерный коэффициент трения. Сделав в (2) замену времени $t_1 = t/\gamma$, получаем

$$\frac{\ddot{x}}{\gamma^2} + \dot{x} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} + s_1(t_1) + \xi_1(t_1), \tag{3}$$

где $s_1(t_1) = s(\gamma t_1)$, $\xi_1(t_1) = \sqrt{2D}n(\gamma t_1)$. При $\gamma \to \infty$ слагаемым, содержащим вторую производную, можно пренебречь. Тогда приходим к модели (1), но с другим масштабом времени.

Можно указать две работы, в которых эффект СР рассмотрен для осциллятора с конечным трением [20, 21]. Аналитические результаты этих работ получены в квазиконсервативном приближении, то есть относятся к случаю очень малых потерь и очень слабого шума. Они пока не сопоставлялись с данными численных или натурных экспериментов, и о правильности сделанных выводов трудно судить. В данной работе, однако, не ставится цель численной проверки результатов, полученных в [20, 21]. Ниже рассмотрен двумерный стохастический осциллятор (2) в режимах, когда коэффициент трения остается значительно больше частоты Крамерса, и поэтому сравнивать результаты с приведенными в указанных работах не допустимо.

Проведенные исследования имели своей целью выяснение зависимости характеристик СР и СС в бистабильном осцилляторе (2) от уровня потерь γ и установление взаимосвязи эффектов СР и СС с индуцированным шумом переходом к хаосу.

1. Эффект стохастического резонанса

Исследуем численно стохастический осциллятор (2) с квадратичным потенциалом

$$U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4. \tag{4}$$

При данной форме потенциала уравнение (2) без источника шума описывает широко известный в нелинейной динамике осциллятор Дуффинга. На осциллятор воздействует гармонический сигнал $s(t) = A\sin\omega_0 t$ с амплитудой $A = 0.05$ и часто-

той $\omega_0 = 0.01$. Данное значение амплитуды является достаточно малым и не превосходит по величине потенциальный барьер ΔU. Таким образом, сигнал в отсутствие шума не вызывает переходов между потенциальными ямами. Параметр потерь γ и интенсивность шума D не связаны между собой известным флуктуационно-диссипативным соотношением, так как допускается, что шум может быть не только внутренним (тепловым), но и результатом внешних случайных воздействий.

Прежде чем обратиться к эффекту СР, рассмотрим переключения стохастического осциллятора без внешнего сигнала ($A = 0$). Для передемпфированного случая (1) при относительно слабом шуме и высоком потенциальном барьере средняя скорость выхода из потенциальной ямы r_{K} (скорость Крамерса) задается известной формулой [22]

$$r_{\mathrm{K}} = \nu \exp\left(-\frac{\Delta U}{D}\right). \tag{5}$$

Коэффициент перед экспонентой зависит от формы потенциальной функции

$$\nu = \frac{\sqrt{|U''(x_{\min})U''(x_{\max})|}}{2\pi}, \tag{6}$$

где под корнем стоят вторые производные функции $U(x)$ в точках минимума и максимума. В случае потенциала (4) коэффициент $\nu = 1/(\sqrt{2}\pi) \approx 0.225$, а высота потенциального барьера $\Delta U = 1/4$. Средняя круговая частота переключений (частота Крамерса) связана со скоростью Крамерса как $\omega_{\mathrm{K}} = \pi r_{\mathrm{K}}$.

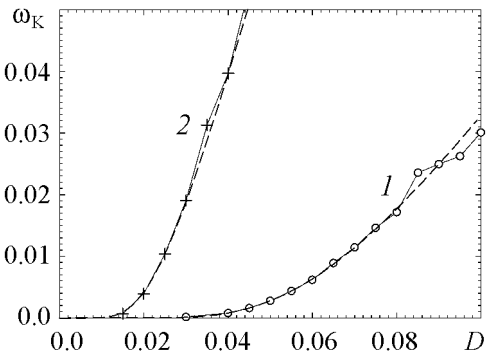


Рис. 1. Зависимости средней частоты переключений стохастического осциллятора от интенсивности шума: для модели (2) при $\gamma = 1.0$ (кривая *1*) и при $\gamma = 0.4$ (кривая *2*). Штриховой линией изображены аппроксимации зависимостей по формуле (8). Частота Крамерса выражается в безразмерных единицах, поскольку использовано безразмерное время

Численно были получены зависимости средней частоты переключений ω_{K} от интенсивности шума для модели (2) при различных значениях параметра γ. Вычисления производились следующим образом. Рассчитывалась зависимость $x(t)$ на большом интервале времени T (порядка 2–5 миллионов единиц безразмерного времени). Для исключения влияния негладкости процесса $x(t)$ на расчет переходов через границу вводился граничный слой $[-\varepsilon;\ \varepsilon]$. Считалось, что система находится в первом состоянии (в правой потенциальной яме) до тех пор, пока значение x не станет меньше $-\varepsilon$, и затем она пребывает во втором состоянии (в левой потенциальной яме), пока x не станет больше ε. Вычислялось число $M(T)$ переходов из одного состояния в другое в одном направлении, происшедших за время наблюдения T. Круговая частота переключений оценивалась как

$$\omega_{\mathrm{K}} \approx 2\pi \frac{M(T)}{T}. \tag{7}$$

Результаты, полученные при $\gamma = 1.0$ и $\gamma = 0.4$, представлены на рис. 1.

Из представленных результатов видно, что при одном и том же шуме меньшим потерям соответствуют более «быстрые» переключения, то есть уменьшение γ приводит к тому же результату, что и уменьшение потенциального барьера. Причиной этого является отличная от нуля кинетическая энергия системы, находящейся на дне потенциальной ямы. Средняя кинетическая энергия увеличивается с уменьшением потерь. Полученные в численном эксперименте зависимости ω_{K} от интенсивности шума D позволяют предположить, что на начальном этапе (при сравнительно слабом шуме) рост средней частоты переключений носит экспоненциальный характер и может быть выражен формулой, аналогичной (5), но с другим коэффициентом перед экспонентой и другим инкрементом. Таким образом, хотя потенциальная функция по-прежнему задается выражением (4), можно ввести некоторый эквивалентный потенциал, которому будут соответствовать эквивалентные величины $\nu_{\text{э}}$ и $\Delta U_{\text{э}}$ такие, что

$$\omega_{\mathrm{K}} = \pi\nu_{\text{э}} \exp\left(-\frac{\Delta U_{\text{э}}}{D}\right). \tag{8}$$

По полученным численным данным были определены величины $\nu_{\text{э}}$ и $\Delta U_{\text{э}}$, а именно: для $\gamma = 1$ имеем $\nu_{\text{э}} = 0.123 \pm 10^{-3}$ и $\Delta U_{\text{э}} = 0.247 \pm 10^{-3}$; для $\gamma = 0.4$ имеем $\nu_{\text{э}} = 0.118 \pm 10^{-3}$ и $\Delta U_{\text{э}} = 0.089 \pm 10^{-3}$. Эквивалентный потенциальный барьер уменьшился в обоих случаях по сравнению с передемпфированным осциллятором (особенно это заметно при меньших потерях). Графики зависимостей, рассчитанные по формуле (8) с найденными значениями $\nu_{\text{э}}$ и $\Delta U_{\text{э}}$, приведены на рис. 1 штриховыми линиями. При слабом шуме они достаточно хорошо соответствуют кривым *1* и *2*, построенным численно.

Теперь обратимся к случаю, когда на стохастический осциллятор поступает слабый гармонический сигнал с заданной амплитудой и частотой. Эффект СР проявляется в резонансном характере следующих кривых: зависимости выходного отношения мощностей сигнала и шума (SNR) от интенсивности шума D и зависимости коэффициента передачи мощности сигнала η от D. Теоретические результаты, полученные для модели (2) двумя различными приближенными методами (методом линейного отклика и методом двух состояний [4, 5]) дают следующие формулы для $\mathrm{SNR}(D)$ и $\eta(D)$:

$$\mathrm{SNR} = C_1 \frac{A^2 r_{\mathrm{K}}(D)}{D^2}, \tag{9}$$

$$\eta = C_2 \frac{r_{\mathrm{K}}^2(D)}{D^2(4r_{\mathrm{K}}^2(D) + \omega_0^2)}, \tag{10}$$

где C_1 и C_2 – константы, которые несколько отличаются для двух различных методов анализа СР. Из (9) легко получить, что максимальное значение SNR соответствует интенсивности шума $D_{m1} = \Delta U/2$ и никак не зависит от частоты сигнала ω_0. Максимальное значение коэффициента передачи η наблюдается при интенсивности D_{m2}, которая, как следует из (10), зависит от ω_0 и должна удовлетворять соотношению

$$4D_{m2}(4r_{\mathrm{K}}^2(D_{m2}) + \omega_0^2) - \omega_0^2 = 0. \tag{11}$$

С учетом формы потенциала (4) для модели (1) получаются следующие значения: $D_{m1} = 0.125 \pm 10^{-3}$, $D_{m2} = 0.074 \pm 10^{-3}$.

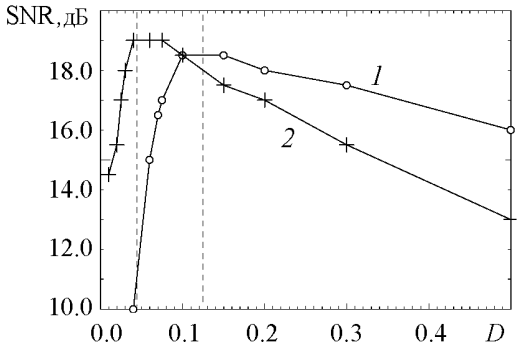


Рис. 2. Зависимости SNR стохастического осциллятора (2) от интенсивности шума: при $\gamma = 1.0$ (кривая *1*) и при $\gamma = 0.4$ (кривая *2*). Пунктиром отмечены оценки значений интенсивности шума D_{m1}, соответствующих максимуму SNR, полученные на основе эквивалентного потенциала $U_э(x)$

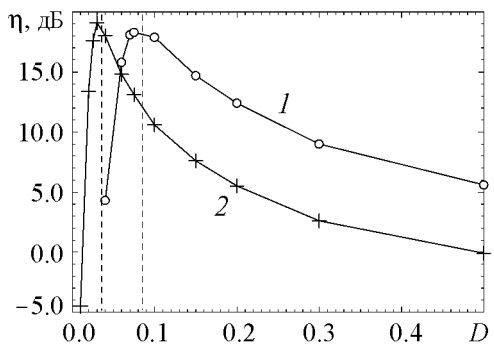


Рис. 3. Зависимости коэффициента передачи η по мощности от интенсивности шума для сигнала, подаваемого на стохастический осциллятор (2), при $\gamma = 1.0$ (кривая *1*) и при $\gamma = 0.4$ (кривая *2*). Пунктиром отмечены оценки значений интенсивности шума D_{m2}, соответствующих максимуму η, полученные на основе эквивалентного потенциала $U_э(x)$

Предположим, что для осциллятора с конечными потерями справедливы соотношения, аналогичные (9) и (10), но с учетом замены $U(x) \to U_э(x)$ и пересчета скорости Крамерса. В этом случае для интенсивности шума D_{m1}, соответствующей максимуму SNR, получаем следующие значения: $D_{m1} = 0.123 \pm 10^{-3}$ при $\gamma = 1.0$ и $D_{m1} = 0.044 \pm 10^{-3}$ при $\gamma = 0.4$. То есть максимум SNR в системе с потерями наблюдается при меньших значениях интенсивности шума, чем в передемпфированном осцилляторе, причем D_{m1} тем меньше, чем меньше потери. На рис. 2 представлены зависимости $\mathrm{SNR}(D)$, полученные численно для $\gamma = 1.0$ и $\gamma = 0.4$. Обе носят резонансный характер, аналогичный характеру данной зависимости для передемпфированного осциллятора. Приведенные выше оценки D_{m1}, полученные для $U_э(x)$, отмечены на рис. 2 вертикальными пунктирными линиями. Можно видеть, что они достаточно точно соответствуют численным результатам.

Были аналогичным образом оценены значения D_{m2}, при которых имеет место максимум коэффициента передачи: $D_{m2} = 0.086 \pm 10^{-3}$ при $\gamma = 1.0$ и $D_{m2} = 0.038 \pm 10^{-3}$ при $\gamma = 0.4$. Построенные в результате численных экспериментов зависимости η от D изображены на рис. 3. Пунктирные вертикальные линии отмечают оценки значений D_{m2}. Они достаточно хорошо совпадают с численными результатами. Интересно отметить следующее: если максимум коэффициента передачи для $\gamma = 0.4$ смещен влево по сравнению с моделью (1), то для $\gamma = 1.0$ он смещен вправо.

Таким образом, при конечных потерях эффект стохастического резонанса сохраняется. Для меньшего γ резонансные значения SNR и η даже несколько возрастают (см. кривые *2* на рис. 2 и 3).

2. Эффект стохастической синхронизации

Эффект СС наблюдается при более значительных амплитудах сигнала, чем СР. Однако, по-прежнему, сигнал в отсутствие шума не должен вызывать переключения. Синхронизация проявляется в следующем: если амплитуда сигнала превышает неко-

торое пороговое значение, то зависимость средней частоты переключений ω_K от интенсивности шума имеет характерный пологий участок. То есть в некоторой области значений D параметр ω_K меняется слабо и остается близким к частоте сигнала ω_0. Этот эффект изучался на примере модели передемпфированного осциллятора (1). Однако проведенные нами численные эксперименты показали, что область стохастической синхронизации наблюдается и в модели с конечными потерями (2). Разумеется, синхронизация стохастических колебаний не является строгой – мы можем говорить только о близости, но не о равенстве частот в пределах рассматриваемой области. По этой причине границы области синхронизации определяются достаточно условно. Положим в качестве условия синхронизации выполнение следующего неравенства

$$\frac{\omega_K - \omega_0}{\omega_0} < 0.1. \qquad (12)$$

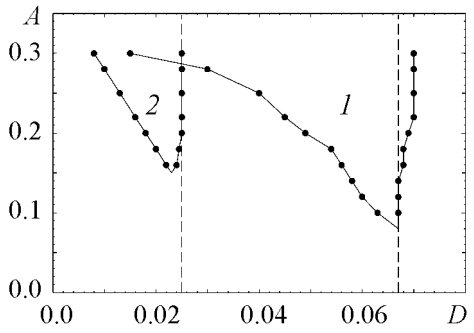


Рис. 4. Области стохастической синхронизации в модели (2) при $\gamma = 1.0$ (область *1*) и $\gamma = 0.4$ (область *2*). Пунктирными линиями отмечены значения интенсивности шума, при которых частота ω_K, рассчитанная по формуле (8), совпадает с частотой сигнала ω_0

В соответствии с этим условием в численном эксперименте были построены области синхронизации на плоскости параметров $(D,\ A)$ для двух значений параметра потерь: $\gamma = 1.0$ и $\gamma = 0.4$. Они приведены на рис. 4 (соответственно область *1* и область *2*). По сравнению с моделью (1) область СС для модели (2) сдвигается в сторону меньших интенсивностей шума, причем тем более меньших, чем меньше γ.

Подчеркнем, что основание каждого из «клювов» синхронизации соответствует значению D, близкому к значению, при котором частота ω_K, рассчитанная по формуле (8), совпадает с частотой сигнала ω_0 (это значения – $D \approx 0.067$ и $D \approx 0.025$, отмеченные пунктирными линиями). Таким образом, синхронизация происходит на частоте сигнала и обусловлена близостью частоты сигнала к частоте Крамерса (в отличие от эффекта СР).

3. Индуцированный шумом хаос

Снова рассмотрим стохастический осциллятор без внешнего сигнала. При увеличении интенсивности шума в модели (2) может наблюдаться возникновение экспоненциальной неустойчивости траекторий, то есть переход к хаосу [11, 12]. Хаос легко диагностируется по значению максимального ляпуновского показателя, которое становится положительным. Переходу к хаотической динамике соответствует возникновение так называемого хаотического случайного аттрактора [12, 23]. Случайный (стохастический) аттрактор может быть визуализирован следующим образом. Берется ансамбль динамических систем, идентичных исследуемой системе, но с различными начальными состояниями, и на каждую из них подается одна и та же реализация случайной силы. Спустя период установления ансамбль изображающих точек попадает на предельное множество, называемое случайным аттрактором динамической системы с шумом. Хотя координаты изображающих точек будут и дальше

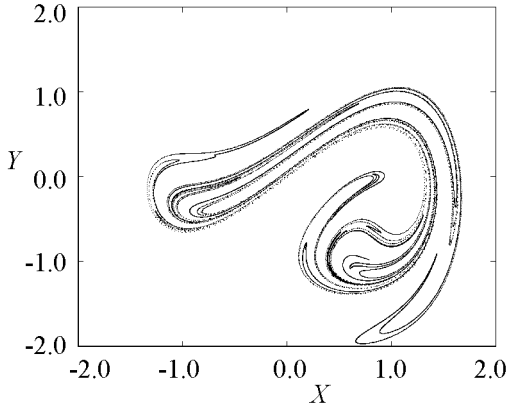


Рис. 5. Пример случайного аттрактора в модели (2) при $A = 0$

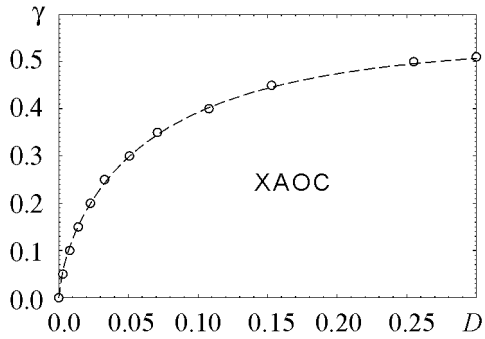


Рис. 6. Область индуцированной шумом хаотической динамики в модели (2) при $A = 0$. Кружками отмечены точки перехода к хаосу, полученные численно. Штриховой линией нанесена аппроксимация границы по формуле (13)

изменяться во времени, топологическая структура множества в установившемся режиме будет неизменной. Если в системе (2) шум не вызвал перехода к хаосу, то случайный аттрактор является точкой. В режиме хаотической динамики случайный аттрактор представляет собой фрактальное множество (рис. 5).

На рис. 6 приведена область хаотической динамики для модели (2) при $A = 0$ и независимом изменении параметров D и γ. Кружками отмечены полученные численно точки границы. Штриховая линия соответствует аппроксимации границы хаотической динамики по следующей формуле, полученной на основании численных данных:

$$\gamma_{\text{гр}} = 0.54\left(1 - \exp\left(-6.5D^{0.7}\right)\right). \tag{13}$$

Основываясь на аппроксимации (13), можно оценить максимальное значение параметра потерь, для которого еще возможен переход к хаотической динамике. Это $\gamma_{\text{гр}} \approx 0.54$. Для $\gamma > \gamma_{\text{гр}}$ хаотическая динамика не наблюдается ни при каком значении интенсивности шума. Воздействие на систему слабого сигнала ($A \leq 0.3$) не изменяет данной ситуации. Таким образом, как в модели (1), так и в модели (2) при $\gamma = 1$ эффекты СР и СС не могут сопровождаться переходом от устойчивого режима к хаотической динамике или обратно. При $\gamma = 0.4$ хаотическая динамика может возникнуть. В отсутствие сигнала для этого необходим шум с интенсивностью $D > D_{\text{гр}} \approx$ ≈ 0.106, что значительно превосходит те значения D, при которых наблюдаются СР и СС. Воздействие на систему гармонического сигнала влияет на границу хаоса, сдвигая ее в область более сильного шума. Для иллюстрации этого утверждения на рис. 7 на плоскости параметров (D, A) одновременно изображены область синхронизации и область хаоса в модели (2) при $\gamma = 0.4$. Можно видеть, что они располагаются на значительной дистанции друг от друга.

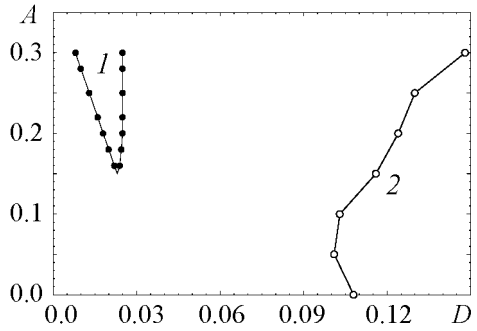


Рис. 7. Область стохастической синхронизации *1* и область хаотической динамики *2* в модели (2) при $\gamma = 0.4$

Заключение

В результате проведенных исследований показано, что закономерности стохастического резонанса и стохастической синхронизации, установленные в ряде работ для модели передемпфированного осциллятора, справедливы и для осциллятора с конечными потерями, но проявляются при меньшей интенсивности шума. Осциллятор с конечными потерями (2) может быть сведен к передемпфированной модели (1) с помощью эквивалентных характеристик потенциального профиля $\nu_э$ и $\Delta U_э$, зависящих от параметра потерь γ. Для двух рассмотренных значений γ эти характеристики определены на основании численно полученных зависимостей частоты Крамерса от интенсивности шума. С использованием аналитических соотношений, полученных для передемпфированного осциллятора, характеристики $\nu_э$ и $\Delta U_э$ позволяют дать хорошие оценки значений интенсивности шума, при которых наблюдается максимум коэффициента усиления по мощности и максимум отношения «сигнал/шум» в модели (2).

Установлено, что хаотическое поведение нелинейного осциллятора (2), вызванное внешним шумом, возможно только при небольших значениях параметра потерь: $\gamma < \gamma_{гр} \approx 0.54$. Таким образом, переход к хаосу никак не связан с явлениями стохастической синхронизации и стохастического резонанса, которые могут наблюдаться при сколь угодно больших значениях γ. Даже в том случае, когда потери невелики и в системе (2) возможны все три эффекта, область хаотической динамики соответствует значительно более сильному шуму, чем тот, при котором имеют место эффекты стохастического резонанса и стохастической синхронизации.

Работа выполнена при поддержке МОРФ в рамках программы «Развитие потенциала высшей школы».

Библиографический список

1. *Benzi R., Sutera A., Vulpiani A.* The mechanism of stochastic resonance // J. Phys. A: Math. Gen. 1981. Vol. 14. P. L453.
2. *Moss F.* Stochastic resonance: From the Ice Ages to the Monkey Ear // In: Contemporary Problems in Statistical Physics / ed. by G.H. Weiss. P. 205 (SIAM, Philadelphia, 1994).
3. *Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichella-Saetta E., Santucci S.* Stochastic resonance in bistable systems // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62. P. 349.
4. *Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л.* Стохастический резонанс: индуцированный шумом порядок // УФН. 1999. Т. 42, № 1. С. 7.
5. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
6. *Pikovsky A., Kurths J.* Coherence resonance in a noisy driven excitable system// Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 775.
7. *Neiman A. Saparin P., Stone L.* Coherence resonance at noisy precursors of bifurcatuons in nonlinear dynamical systems // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56, № 1. P. 270.

8. *Neiman A.B.* Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 3484.
9. *Shulgin B.V., Neiman A.B., Anishchenko V.S.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by periodic force // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 4157.
10. *Han S.K., Yim T.G., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V.* Interacting coherence resonance oscillators // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83, № 9. P. 1771.
11. *Schimansky-Geier L. and Herzel H.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator // Journal of Statistical Physics. 1993. Vol. 70. P. 141.
12. *Arnold L., Imkeller P.* Stochastic bifurcation of the noisy Duffing oscillator. Report. Institut für Dynamische Systeme. Universität Bremen, 2000.
13. *Lindner J.F., Meadows B.K., Ditto W.L., Inchiosa M.E., Bulsara A.R.* Array enhansed stochastic resonance and spatiotemporal synchronization// Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 3.
14. *Levin J.E., Miller J.P.* Broadband neural encoding in the cricket cercal sensory system enhanced by stochastic resonance // Nature. 1996. Vol. 380. P. 165.
15. *Gailey P.C., Neiman A., Collins J.J., Moss F.* Stochastic resonance in ensembles of non-dynamical elements. The role of internal noise // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79. P. 4701.
16. *Zhang Y., Hu G., Gammaitoni L.* Signal transmission in one-way coupled bistable systems: Noise effect // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, № 3. P. 2952.
17. *Pei X., Wilkens L., Moss F.* Noise-mediated spike timing precision from aperiodic stimuli in an array of Hodgkin–Huxley-type neurons // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77, № 2. P. 4679.
18. *Neiman A., Pei.X, Russel D.F. et.al* Synchronization of the noisy electrosensitive cells in the paddlefish // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82, № 3. P. 660.
19. *Hu B., Zhou Ch.* Phase synchronization in coupled nonidentical excitable systems and array-enhanced coherence resonance // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61, № 2. P. R1001.
20. *Климонтович Ю.Л.* Что такое стохастическая фильтрация и стохастический резонанс? // УФН. 1999. Т. 169, № 1. С. 39.
21. *Kovaleva A.* Upper and lower bounds of stochastic resonance and noise-induced synchronization in a bistable oscillator // Phys Rev. E. 2006. Vol. 74. P. 011126(1-5).
22. *Hänggi P., Thomas H.* Stochastic processes: time evolution, symmetries and linear response // Phys. Rep. 1982. Vol. 88. P. 209.
23. *Arnold L.* Random dynamical systems. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1998.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 19.04.2007

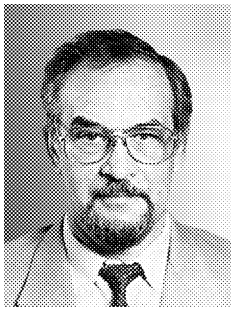
STOCHASTIC RESONANCE, STOCHASTIC SYNCHRONIZATION AND NOISE-INDUCED CHAOS IN THE DUFFING OSCILLATOR

V.S. Malyaev, T.E.Vadivasova, V.S. Anishchenko

In present paper the following effects in nonlinear oscillator with final dissipation are studied: stochastic resonance, stochastic synchronization and noise-induced chaos. It is shown that stochastic resonance and stochastic synchronization at final dissipation have the same regularities as in the case of overdamped oscillator but are observed at a lower noise level. Equivalent characteristics of potential profile are introduced on the basis of numerically obtained Kramers frequency dependence on noise intensity that allow to apply to considered model the analytical relations, obtained for a overdamped oscillator. It is found that noise-induced transition to chaos in the oscillator with final dissipation can not influence on the stochastic resonance and stochastic synchronization as it is observed in other region of parameter values.

Маляев Владимир Сергеевич – родился в ноябре 1980 года в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет по специальности радиофизика (2002). С 2003 года является аспирантом кафедры радиофизики СГУ. Основные научные интересы – стохастические процессы. Автор нескольких научных публикаций.

Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии. E-mail: tanya@chaos.ssu.runnet.ru



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999). E-mail:wadim@chaos.ssu.runet.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 5, 2007 УДК 517.977-519.71

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ РАЗРАБОТКЕ ГАЗОВОЙ ЗАЛЕЖИ И ФУНКЦИОНИРОВАНИИ ПОДЗЕМНОГО ХРАНИЛИЩА ГАЗА

В.А. Черных

Впервые газовая залежь и подземное хранилище газа моделируются как нелинейные динамические системы. Впервые разработаны физические основы и математические модели колебаний плотности газа при разработке газовой залежи и функционировании подземного хранилища газа. Показано, что возникновение колебаний связано с неоднородностью коллектора, перетоками газа между элементами неоднородности и конечностью скорости распространения возмущений давления газа в пласте-коллекторе.

Введение

Разработка газовой залежи или эксплуатация подземного хранилища газа представляет собой некоторую систему управляющих воздействий на пласт путем отбора или закачки различных флюидов. Результатом таких воздействий является изменение поля давлений газа и возникновение фильтрационных течений в пласте. В однородной породе давление и скорости движения газа монотонно уменьшаются при разработке залежи, а при функционировании подземного хранилища эти параметры изменяются в соответствии с темпами закачки или отбора пластового газа. Однако в подавляющем большинстве случаев порода является неоднородной на всех масштабных уровнях. Любой, даже очень малый элемент породы имеет элементы неоднородности, характеризующиеся высокой и низкой проницаемостью. Вся порода пронизана трещинами и проводящими каналами (рис. 1). Любой элементарный объем породы содержит в себе свои «ручейки», питающиеся из низкопроницаемых зон (рис. 2). При этом обычно имеется основной проводящий канал; в него поступает флюид из менее проницаемых зон, которые, в свою очередь, содержат свои проводящие каналы. Эта закономерность имеет место на всех масштабных уровнях.

Как следует из вышесказанного, фильтрация флюида в реальной породе представляет собой совокупность движений флюида во всех зонах неоднородности, между которыми происходит интенсивный массообмен. Ниже будет показано, что эти факторы играют основную роль при возникновении колебательных процессов в газовой залежи и подземном хранилище газа. Как известно, газовая залежь, так же как и подземное хранилище газа, представляет собой динамическую систему, то

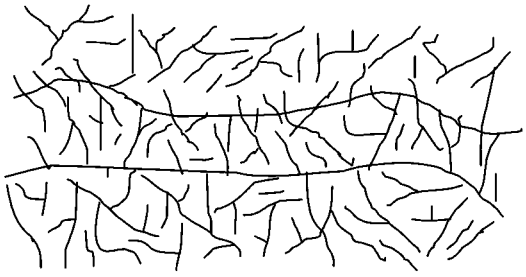


Рис. 1. Схема трещин и проводящих каналов в породе

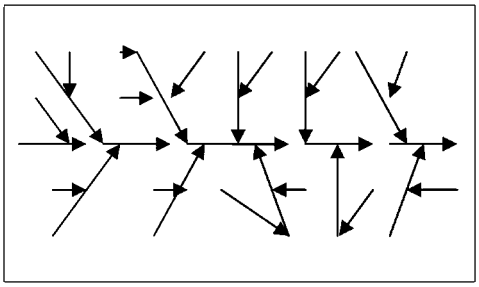


Рис. 2. Схема движения флюида в неоднородной породе

есть объект, состояние которого определяется совокупностью значений некоторых параметров (давление, температура и т.д.) в конкретный момент времени и законом изменения этих параметров с течением времени. В качестве такого закона в данном случае выступает система уравнений состояния, сохранения массы и количества движения пластового флюида. Газовую залежь будем рассматривать как линейную колебательную систему, в которой вынужденные колебания давления флюида возникают при его отборе или закачке. Свободные колебания пластового давления возможны и в отсутствие отбора или закачки флюида, но при условии конечности скорости распространения возмущения давления флюида.

Под динамической моделью газовой залежи будем понимать ее математическую модель, в которой учитываются колебательные движения системы, а также влияние неоднородности (мезонеоднородности) пород на эволюцию газовой залежи в процессе ее разработки.

В работе автора [1] было предложено различать в рамках газовой залежи три уровня неоднородностей: микро, мезо и макро. На микроуровне неоднородности представлены отдельными порами, каналами, мелкими кавернами и трещинами. Макроуровень характеризуется элементами неоднородности, соизмеримыми или равными размерам залежи в целом. На мезоуровне размеры неоднородностей на 2–3 порядка выше, чем на микроуровне, и на 2–3 порядка меньше макроуровня. Между элементами неоднородности на всех масштабных уровнях имеют место перетоки газа. Как было показано автором, уравнение фильтрации газа в таких средах имеет вид [1]:

$$m\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho+\tau\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)+\vec{\nabla}\cdot\vec{q}=I\left(p_{\text{н}}-p\right), \tag{1}$$

где m – пористость; t – время; ρ – плотность флюида; I – коэффициент внутрипластового массопереноса; $p_{\text{н}}$, p – давление флюида в низкопроницаемых и высокопроницаемых зонах, соответственно. В дальнейшем уравнение (1) будем использовать в виде

$$m\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho+\tau\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)+\vec{\nabla}\cdot\vec{q}=I'(\rho_{\text{н}}-\rho), \tag{2}$$

где $I'=IZRT$, Z – коэффициент сверхсжимаемости газа, T – пластовая температура, R – газовая постоянная; $\vec{q}$ – вектор массовой скорости, точка между векторами означает скалярное произведение, $\vec{q}=-(k/\mu)\vec{\nabla}P$, $P=\int\limits_0^p\rho dp$ – функция Лейбен-

зона, $\vec{\nabla} = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{l}\dfrac{\partial}{\partial z}$ – оператор Гамильтона, x, y, z – оси координат, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{l}$ – единичные векторы вдоль осей x, y, z, соответственно; $\vec{q} = \rho\vec{v}$, $\vec{v}$ – вектор линейной скорости фильтрации, k – проницаемость породы-коллектора, μ – коэффициент динамической вязкости флюида в пластовых условиях, $\tau = L/C$, $C = c'p\sqrt{k}/\mu$, L – характерный размер элемента неоднородности породы, C – скорость распространения возмущения поля давления, c' – безразмерный эмпирический коэффициент.

Исходное уравнение фильтрации (2) является гиперболическим и его решения описывают колебательные процессы, происходящие в газовой залежи и подземном хранилище газа.

1. Математическая модель колебаний пластового давления и плотности газа

Основное уравнение колебаний средневзвешенной плотности газа находим после осреднения уравнения (2) по всему газонасыщенному объему пласта-коллектора.

$$m\tau\ddot{\tilde{\rho}} + m\dot{\tilde{\rho}} + \tilde{q_*} = I'\left(\tilde{\rho}_{\text{н}} - \tilde{\rho}\right), \tag{3}$$

где $\tilde{\rho} = (1/V)\int\limits_V \rho dV$, $\tilde{q_*} = q_*/V$, V – объем пласта-коллектора, q_* – текущий массовый расход (дебит) флюида, точка над функцией означает дифференцирование по времени.

Если в низкопроницаемых зонах содержится основная часть запасов флюида, то функцию $\tilde{\rho}_{\text{н}}$ можно определить из уравнения баланса массы флюида по формуле

$$\tilde{\rho}_{\text{н}} = \rho_0 - \frac{1}{\tilde{m}V}\int\limits_0^t q_*(t)dt, \tag{4}$$

где ρ_0 – начальная плотность флюида, $\tilde{m}$ – средняя проницаемость коллектора. После подстановки (4) в (3) находим основное уравнение динамики осредненной по газонасыщенному объему пласта плотности газа

$$\ddot{\tilde{\rho}} + a\dot{\tilde{\rho}} + b\tilde{\rho} = f\left(t\right), \tag{5}$$

где

$$a = \frac{1}{\tau}; \qquad b = \frac{I'}{\tilde{m}\tau};$$

$$f\left(t\right) = \frac{I'\rho_0}{\tilde{m}\tau} - \frac{1}{\tilde{m}\tau V}\Big(q_* + \frac{I'}{\tilde{m}}\int\limits_0^t q_*\left(t\right)dt\Big). \tag{6}$$

С помощью уравнения состояния газа $\rho = p/\left(ZRT\right)$ уравнение (5) можно выразить через приведенное средневзвешенное по газонасыщенному объему пласта давление газа

$$\ddot{\tilde{p}}_{\text{пр}} + a\dot{\tilde{p}}_{\text{пр}} + b\tilde{p}_{\text{пр}} = f'\left(t\right), \tag{7}$$

где $p_{\text{пр}} = (p/Z)$, $f'\left(t\right) = f\left(t\right)RT$.

Общее решение уравнения (5) имеет вид:
при $\lambda^2 = a^2 - 4b > 0$

$$\tilde{\rho} = c_1 \exp \frac{-a+\lambda}{2} t + c_2 \exp \frac{-a-\lambda}{2} t + \frac{2}{\lambda} \int\limits_0^t f(\zeta) \exp\left(a \frac{\zeta - t}{2}\right) \operatorname{sh} \frac{\lambda}{2} (t - \zeta)\, d\zeta, \quad (8)$$

при $\lambda^2 = 4b - a^2 > 0$

$$\tilde{\rho} = \exp\left(-\frac{at}{2}\right)\left(c_1 \cos \frac{\lambda t}{2} + c_2 \sin \frac{\lambda t}{2}\right) + \frac{2}{\lambda} \int\limits_0^t f(\xi) \exp\left(a \frac{\xi - t}{2}\right) \sin \frac{a}{2} (t - \xi)\, d\xi, \quad (9)$$

при $a^2 = 4b$

$$\tilde{\rho} = \exp\left(-\frac{at}{2}\right)(c_1 t + c_2) + \int\limits_0^t f(\varsigma)\,(t - \varsigma)^{a\frac{\varsigma - t}{2}}\, d\varsigma, \quad (10)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий:

$$\text{при } t = 0 \quad \tilde{\rho} = \rho_0; \quad \dot{\tilde{\rho}} = \dot{\tilde{\rho}}(0). \quad (11)$$

2. Колебательные процессы при разработке газовой залежи

При разработке газовой залежи в режиме постоянного отбора ($q_* = q_c = \text{const}$) решение (8) принимает вид

$$\begin{gathered}\tilde{\rho} = \frac{\tilde{p}_{\text{пр}}}{RT} = c_1 \exp\left(\frac{-a+\lambda}{2} t\right) + c_2 \exp\left(\frac{-a-\lambda}{2}\right) t - \\ -\frac{2}{\lambda(a+\lambda)}\left(A + \frac{2B}{a+\lambda}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{a+\lambda}{2} t\right)\right] + \\ +\frac{2}{\lambda(a-\lambda)}\left(A + \frac{2B}{a-\lambda}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{a-\lambda}{2} t\right)\right] - \frac{4B}{a^2 - \lambda^2} t,\end{gathered} \quad (12)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a+\lambda}{2}\rho_0 + \dot{\tilde{\rho}}(0)\right), \quad c_2 = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{-a+\lambda}{2}\rho_0 - \dot{\tilde{\rho}}(0)\right). \quad (13)$$

Аналогично, после подстановки $q_* = q_c$ в уравнение (9) находим

$$\begin{gathered}\tilde{\rho} = \frac{\tilde{p}_{\text{пр}}}{RT} = \left(c_1 \cos \frac{\lambda t}{2} + c_2 \sin \frac{\lambda t}{2}\right) \exp\left(-\frac{at}{2}\right) + \\ +\frac{4A}{\lambda(a^2+\lambda^2)}\left[\lambda - \left(a \sin \frac{\lambda t}{2} + \lambda \cos \frac{\lambda t}{2}\right) \exp\left(-\frac{at}{2}\right)\right] - \\ -\frac{8B}{\lambda(a^2+\lambda^2)}\left\{\frac{\exp(-at/2)}{a^2+\lambda^2}\left[\left(a^2 - \lambda^2\right) \sin \frac{\lambda t}{2} + 2a\lambda \cos \frac{\lambda t}{2}\right] + \frac{\lambda t}{2} - \frac{2a\lambda}{a^2+\lambda^2}\right\},\end{gathered} \quad (14)$$

где

$$c_1 = \rho_0, \quad c_2 = \frac{2}{a}\left(\dot{\tilde{\rho}}\,(0) + \frac{a}{2}\rho_0 + \frac{4Aa}{a^2+\lambda^2}\right). \tag{15}$$

В обоих случаях $A = \dfrac{I'\rho_0}{\tilde{m}\tau} - \dfrac{q_c}{\tilde{m}\tau V}$, $B = \dfrac{I'q_c}{\tilde{m}^2\tau V}$, $\tilde{p}_{\text{пр}} = \dfrac{p}{Z}$.

Из уравнения (14) следует, что колебательные процессы в газовой залежи возможны и при постоянном темпе отбора или закачки флюида. Нетрудно видеть из уравнения (14), что амплитуда колебаний пластового давления возрастает с уменьшением параметров a и λ, а следовательно, и с уменьшением пористости и проницаемости, а также с увеличением коэффициента внутрипластового массопереноса I. При этом свободные колебания давления флюида в процессе разработки газовой залежи практически полностью затухают на достаточно большом интервале времени.

Наиболее явно колебательный характер процессов падения пластового давления проявляется в низкопроницаемых, низкопористых, резко неоднородных коллекторах.

3. Колебательные процессы при эксплуатации подземного хранилища газа

При эксплуатации подземного хранилища газа имеет место чередование отбора и закачки газа по заданному закону, например $q_* = q_c \sin\omega t$, где $q_c = \text{const}$. Уравнение (5) в этом случае принимает вид

$$\ddot{\tilde{\rho}} + a\dot{\tilde{\rho}} + b\tilde{\rho} = A' + B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t, \tag{16}$$

где

$$A' = \frac{I'}{\tilde{m}\tau}\left(\rho_0 - \frac{q_c}{\tilde{m}V\omega}\right), \quad B_1 = \frac{q_c I'}{\tilde{m}^2\tau V\omega}, \quad B_2 = \frac{q_c}{\tilde{m}\tau V}. \tag{17}$$

Общее решение уравнения (16) при $\lambda^2 = a^2 - 4b > 0$ имеет вид

$$\begin{gathered}\tilde{\rho} = \frac{\tilde{p}_{\text{пр}}}{RT} = \frac{A'}{b} + c_1\exp\frac{-a+\lambda}{2}t + c_2\exp\frac{-a-\lambda}{2}t + \\ + \frac{2}{\lambda}\int\limits_0^t (B_1\cos\omega\zeta - B_2\sin\omega\zeta)\exp\frac{a(\zeta-t)}{2}\,\mathrm{sh}\frac{\lambda(t-\zeta)}{2}d\zeta.\end{gathered} \tag{18}$$

После интегрирования правой части уравнения (18) получаем

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{p}_{\text{пр}}}{RT} = \frac{A'}{b} + c_1 \exp\frac{-a+\lambda}{2}t + c_2 \exp\frac{-a-\lambda}{2}t +$$

$$+\frac{2}{\lambda}\left[\frac{B_1(a-\lambda)+2B_2\omega}{(a-\lambda)^2+4\omega^2} - \frac{B_1(a+\lambda)+2B_2\omega}{(a+\lambda)^2+4\omega^2}\right]\cos\omega t -$$

$$-\frac{2}{\lambda}\left[\frac{B_2(a-\lambda)-2B_1\omega}{(a-\lambda)^2+4\omega^2} - \frac{B_2(a+\lambda)-2B_1\omega}{(a+\lambda)^2+4\omega^2}\right]\sin\omega t - \tag{19}$$

$$-\frac{2}{\lambda}\frac{B_1(a-\lambda)+2B_2\omega}{(a-\lambda)^2+4\omega^2}\exp\left(\frac{-a+\lambda}{2}t\right) + \frac{2}{\lambda}\frac{B_1(a+\lambda)}{(a+\lambda)^2+4\omega^2}\exp\left(\frac{a+\lambda}{2}t\right) +$$

$$+\frac{4}{\lambda}\frac{B_2\omega}{(a+\lambda)^2+4\omega^2}\exp\left(\frac{-a-\lambda}{2}t\right),$$

где произвольные постоянные c_1, c_2 определяются из граничных условий (11)

$$c_1 = \rho_0 - \frac{A'}{b} - c_2,$$

$$c_2 = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{a-\lambda}{2}\left(\frac{A'}{b} - \rho_0\right) - \dot{\tilde{\rho}}(0) + \frac{2}{\lambda}\frac{B_1(a+\lambda)^2}{(a+\lambda)^2+4\omega^2}\right]. \tag{20}$$

При $\beta^2 = b - a^2/4 > 0$ можно воспользоваться решением Дж. Стокера [2]. Представим для этого уравнение (16) в следующем виде:

$$\ddot{\tilde{\rho}} + a\dot{\tilde{\rho}} + b\tilde{\rho} = A' + B_0\cos(\omega t + \varphi), \tag{21}$$

где $B_0^2 = B_1^2 + B_2^2$, $(B_1/B_0) = \cos\varphi$, $(B_2/B_0) = \sin\varphi$, $\varphi = \operatorname{arctg}(B_2/B_1)$. Общее решение уравнения (21) имеет вид [2]

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{p}_{\text{пр}}}{RT} = \frac{A'}{b} + (c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t)\exp\left(-\frac{at}{2}\right) +$$

$$+\frac{B_0\cos(\omega t + \varphi - \delta)}{\sqrt{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}}, \tag{22}$$

где $\delta = \operatorname{arctg}\dfrac{a\omega}{b-\omega^2}$; $p_{\text{пр}} = p/(Z)$; c_1, c_2 – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий (11),

$$c_1 = \rho_0 - \frac{A'}{b} - \frac{B_0\cos(\varphi-\delta)}{\sqrt{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}},$$

$$c_2 = \frac{1}{a}\left[\dot{\tilde{\rho}}_0 + \frac{a}{2}c_1 + \frac{B_0\omega\sin(\varphi-\delta)}{\sqrt{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}}\right]. \tag{23}$$

Как видно из уравнения (22), свободные колебания пластового давления затухают экспоненциально по времени и достаточно быстро практически полностью прекращаются. В этом случае частота вынужденных колебаний пластового давления становится равной частоте колебаний темпа отбора (закачки) флюида. Нетрудно также видеть, что максимальное значение амплитуды колебаний плотности, а значит, и приведенного пластового давления газа, достигается при $b = \omega^2$. При выполнении этого равенства наступает резонанс пластовой системы и при достаточно небольших значениях параметра a даже малые величины колебаний темпов отбора или закачки газа могут оказать значительное влияние на амплитуду колебаний пластового давления, а следовательно, и на механическое воздействие на скелет породы. Как отмечено в работе [3], колебательные процессы в пластовой системе приводят к «расшатыванию» горных пород. В этом случае разрушение пород приствольной зоны происходит при значениях напряжений, меньших критических, определяемых при статических нагрузках.

4. Колебания пластового давления флюида в квазиоднородном коллекторе

Под квазиоднородным будем понимать коллектор, для которого коэффициент внутрипластового массопереноса равен нулю, то есть $I = 0$. В этом случае исходное уравнение колебаний пластового давления флюида (3) примет вид

$$\ddot{\tilde{\rho}} + a\dot{\tilde{\rho}} + \frac{q_*}{\tilde{m}\tau V} = 0, \tag{24}$$

где $a = (1/\tau)$. Если функцию темпа отбора или закачки флюида можно представить в виде

$$q_* = \sum_{n=0,1,\ldots}^{\infty} [a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)], \tag{25}$$

то общее решение уравнения принимает вид

$$\tilde{\rho} = \rho_0 - \frac{c}{a}\left(e^{-at} - 1\right) +$$

$$+\frac{1}{\tilde{m}\tau V} \sum_{n=0,1,\ldots}^{\infty} \frac{1}{a^2 + \omega_n^2} \left\{ a_n \left[\frac{a}{\omega_n} - \frac{a}{\omega_n} \cos(\omega_n t) - \sin(\omega_n t) \right] + \right. \tag{26}$$

$$\left. + b_n \left[1 - \cos(\omega_n t) + \frac{a}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right] \right\},$$

где

$$c = \dot{\tilde{\rho}}(0) - \frac{1}{\tilde{m}\tau V} \sum_{n=0,1,\ldots}^{\infty} \frac{a b_n - \omega_n a_n}{a^2 + \omega_n^2}. \tag{27}$$

В этом случае отсутствуют периодические свободные колебания, а частота колебаний пластового давления полностью совпадает с частотой колебаний темпов отбора или закачки флюида. При постоянном темпе отбора или закачки флюида, то есть при

$q_* = q_c = \text{const}$, общее решение уравнения (24) имеет вид

$$\tilde{\rho} = \rho_0 + \frac{q_c'}{a}t - \frac{1}{a^2}\left(\dot{\tilde{\rho}}\,(0) - \frac{q_c'}{a}\right)\left(e^{-at} - 1\right), \tag{28}$$

где $q_c' = -q_c/\left(\tilde{m}\tau V\right)$. Из уравнения (28) следует, что при постоянном темпе отбора (закачки) флюида из квазиоднородного коллектора периодические колебания пластового давления не возникают.

В случае чередования отборов и закачки газа по закону $q_* = q_c \sin(\omega t)$ общее решение уравнения (24) может быть представлено в следующем виде:

$$\tilde{\rho} = \rho_0 - \frac{c_1}{a}\left(e^{-at} - 1\right) + \frac{q_c'}{a^2 + \omega^2}\left[\frac{a}{\omega} - \frac{a}{\omega}\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\right], \tag{29}$$

$$\dot{\tilde{\rho}} = c_1 e^{-at} + \frac{q_c'}{a^2 + \omega^2}\left[a\sin(\omega t) - \omega\sin(\omega t)\right], \tag{30}$$

где $c_1 = \dot{\tilde{\rho}}\,(0) + \dfrac{q_c'\omega}{a^2 + \omega^2}$.

В соответствии с решениями, полученными в работе [2], уравнения (29) и (30) могут быть представлены в виде

$$\dot{\tilde{\rho}} = e^{-at}\left(\dot{\tilde{\rho}}\,(0) + \frac{\omega q_c'}{a^2 + \omega^2}\right) + \frac{q_c'}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}\sin(\omega t - \gamma), \tag{31}$$

$$\tilde{\rho} = \rho_0 - \frac{1}{a}\left(\dot{\tilde{\rho}}\,(0) + \frac{\omega q_c'}{a^2 + \omega^2}\right)\left(e^{-at} - 1\right) - \frac{q_c'}{\omega\sqrt{a^2 + \omega^2}}\left[\cos(\omega t - \gamma) - \cos\gamma\right], \tag{32}$$

где $\gamma = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{a}$.

Нетрудно видеть, что и в этом случае частота колебаний пластового давления полностью совпадает с частотой колебаний темпов отбора и закачки флюида.

Как показывают полученные выше результаты, задание вида функции отбора и закачки флюида $q_*(t)$ в решающей степени определяет частоту и амплитуду колебаний пластового давления в газовой залежи.

На практике дебит скважины часто назначается не как заданная функция времени, то есть $q_*(t)$, а как постоянная или переменная доля абсолютно свободного дебита (обычно 10–20%). В первом приближении можно считать, что и депрессию на пласт можно задавать как определенную часть депрессии, соответствующей абсолютно свободному дебиту. Поскольку депрессия на пласт при абсолютно свободном дебите скважины намного больше забойного давления, то дебит скважины можно назначать как функцию, пропорциональную давлению (плотности) флюида на контуре питания скважины, которое, как было показано Лапуком Б.Б. [4], с высокой степенью точности можно принять равным значению средневзвешенного пластового давления (плотности) флюида. Таким образом, в основу технологического режима работы скважины можно положить равенство

$$q_* = b\tilde{\rho}, \quad (b = \text{const}). \tag{33}$$

Соответствующее этому режиму уравнение колебаний пластового давления получается после подстановки (33) в (24)

$$\ddot{\tilde{\rho}} + a\dot{\tilde{\rho}} + b\tilde{\rho} = 0. \tag{34}$$

Уравнение (34) представляет собой хорошо известное в механике уравнение свободных колебаний, общее решение которого имеет вид
при $\lambda^2 = a^2 - 4b > 0$

$$\tilde{\rho} = c_1 \exp\left(\frac{-a+\lambda}{2}t\right) + c_2 \exp\left(\frac{-a-\lambda}{2}t\right), \tag{35}$$

при $\lambda^2 = 4b - a^2 > 0$

$$\tilde{\rho} = e^{-at/2}\left(c_3 \cos\frac{\lambda t}{2} + c_4 \sin\frac{\lambda t}{2}\right), \tag{36}$$

при $a^2 = 4b$

$$\tilde{\rho} = e^{-at/2}\left(c_5 + c_6\right), \tag{37}$$

где $c_1, ...c_6$ находим из граничных условий (11).

Таким образом, в рассматриваемом случае затухающие свободные апериодические колебания возможны только при условии (36).

Наглядное представление о поведении системы, описываемой уравнением (34), можно получить в геометрической форме с использованием фазовой плоскости. В теории колебаний под фазовой плоскостью понимается координатная плоскость, на которой осями координат являются параметры, определяющие состояние системы. В данном случае такими параметрами являются функции $\tilde{\rho}$, $\dot{\tilde{\rho}}$. При этом состояние системы в текущий момент времени определяется положением точки с координатами $\tilde{\rho}$, $\dot{\tilde{\rho}}$ на фазовой плоскости. В свою очередь, развитие системы будет определяться движением этой точки по соответствующей траектории на фазовой плоскости. Совокупность этих траекторий называется фазовым портретом данной системы. Как показано в работе [5], фазовый портрет системы, описываемой уравнением (34), представляет собой при $a^2 < 4b$ семейство фазовых траекторий в виде логарифмических спиралей, каждая из которых соответствует определенным начальным значениям. Все фазовые траектории при $t \to \infty$ асимптотически приближаются к началу координат на фазовой плоскости, которое в этом случае как бы притягивает к себе все траектории движения, из каких бы точек они ни исходили. Такие точки на фазовой плоскости называются аттракторами.

5. Динамическая модель газовой залежи при переменной скорости распространения возмущения давления газа в пласте

При переменной скорости распространения возмущений давления в пласте имеет место соотношение $C = L\rho/c''$, где $c'' = L\mu/(c'\sqrt{k}Z_{\text{ср}}RT)$. В этом случае уравнение фильтрации газа (1) принимает вид

$$\tilde{m}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho + c''\frac{\partial \ln \rho}{\partial t}\right) + \vec{\nabla}\cdot\vec{q} = 0. \tag{38}$$

После осреднения уравнения (38) по объему газовой залежи получаем уравнение колебаний пластового давления

$$\ddot{\tilde{\rho}} - \frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\dot{\tilde{\rho}}\right)^2 + \frac{1}{c''}\tilde{\rho}\dot{\tilde{\rho}} + \frac{q_*}{\tilde{m}c''V} = 0. \tag{39}$$

Если в качестве технологического режима работы скважины принять режим, определяемый равенством (33), то уравнение (39) с помощью подстановки $w(\tilde{\rho}) = \dot{\tilde{\rho}}$ можно представить в виде

$$ww' + f_1(\tilde{\rho})\, w^2 + f_2(\tilde{\rho})\, w + f_3(\tilde{\rho}) = 0, \tag{40}$$

где

$$w' = dw/d\tilde{\rho}, \quad f_1(\tilde{\rho}) = -\frac{1}{\tilde{\rho}}, \quad f_2(\tilde{\rho}) = \frac{1}{c''}\tilde{\rho}, \quad f_3(\tilde{\rho}) = \frac{b\tilde{\rho}^2}{\tilde{m}c''V}. \tag{41}$$

Далее уравнение (40) с использованием подстановки

$$w = (1/v), \quad w' = -\left(v'/v^2\right), \tag{42}$$

где штрих означает производную по $\tilde{\rho}$, преобразуется к виду

$$v' = f_3(\tilde{\rho})\, v^3 + f_2(\tilde{\rho})\, v^2 + f_1(\tilde{\rho})\, v. \tag{43}$$

Функцию $v(\tilde{\rho})$ представим в виде

$$v(\tilde{\rho}) = \frac{1}{\tilde{\rho}}\zeta(\xi), \quad \left(\xi = \tilde{\rho}/c''\right). \tag{44}$$

Теперь, после подстановки (44) в (43) находим расчетное уравнение колебаний пластового давления в газовой залежи

$$\zeta'(\xi) = \frac{b}{\tilde{m}V}\zeta^3(\xi) + \zeta^2(\xi). \tag{45}$$

Общее решение уравнения (45) имеет вид

$$\xi = \int \frac{d\zeta}{\zeta^2\left(\dfrac{b}{\tilde{m}V}\zeta + 1\right)} + \mathrm{C}, \quad (\mathrm{C} = \mathrm{const}). \tag{46}$$

Уравнение (46) с учетом (44) может быть представлено в виде

$$\begin{gathered}\tilde{\rho}(\zeta) = -\frac{c''}{\zeta}\left(1 + \frac{b\zeta}{\tilde{m}V}\right) + \frac{2bc''}{\tilde{m}V}\ln\left|\frac{1}{\zeta}\left(1 + \frac{b\zeta}{\tilde{m}V}\right)\right| + \\ + \left(\frac{b}{\tilde{m}V}\right)^2 c''\frac{\zeta}{1 + (b\zeta)/(\tilde{m}V)} + \mathrm{C},\end{gathered} \tag{47}$$

где C – постоянная, определяемая из граничных условий.

С другой стороны, из соотношений (42)–(44) следует, что

$$\dot{\tilde{\rho}} = \frac{\tilde{\rho}}{\zeta(\tilde{\rho})}, \tag{48}$$

и, следовательно,

$$\zeta_0 = \zeta(\tilde{\rho}_0) = \frac{\tilde{\rho}_0}{\dot{\tilde{\rho}}(0)}, \tag{49}$$

где $\tilde{\rho}_0, \dot{\tilde{\rho}}(0)$ заданы в качестве граничных условий при $t = 0$.

Из уравнений (47)–(49) находим постоянную C в виде

$$\begin{gathered}\mathrm{C} = \tilde{\rho}_0 + \frac{c''}{\zeta_0}\left(1 + \frac{b\zeta_0}{\tilde{m}V}\right) - \frac{2bc''}{\tilde{m}V}\ln\left|\frac{1}{\zeta_0}\left(1 + \frac{b\zeta_0}{\tilde{m}V}\right)\right| - \\ - \left(\frac{b}{\tilde{m}V}\right)^2 c''\frac{\zeta_0}{1 + (b\zeta_0)/(\tilde{m}V)}.\end{gathered} \tag{50}$$

Таким образом, решение задачи получено в неявной форме.

Заключение

Впервые представлены математические модели колебаний осредненных по газонасыщенному объему параметров (давления и плотности газа) газовой залежи и подземного хранилища газа. Показано, что физической причиной этих колебаний является неоднородность пласта, перетоки газа между элементами неоднородности пород и конечность скорости распространения возмущений давления и плотности газа в пласте. При гидродинамических исследованиях скважин эти колебания являются физической причиной разброса точек вокруг индикаторной линии, что обычно считается результатом некачественных и ошибочных замеров дебитов и давлений.

Библиографический список

1. *Черных В.А.* Гидрогазодинамика горизонтальных газовых скважин. М.: ВНИИГАЗ. 2000. 189 с.
2. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механике и электрических системах. М.: Иностранная литература. 1953. 256 с.
3. *Мирзаджанзаде А.Х., Шахвердиев А.Х.* Динамические процессы в нефтегазодобыче. М.: Наука. 1997. 255 с.
4. *Лапук Б.Б.* Теоретические основы разработки месторождений природных газов. М.; Л.: Гостоптехиздат, 1948. 295 с.
5. *Мирзаджанзаде А.Х., Керимов З.Г., Копейкин М.Г.* Теория колебаний в нефтепромысловом деле. Баку: Элм, 1976. 363 с.

Институт проблем нефти и газа, РАН, Москва

Поступила в редакцию 7.04.2007

OSCILLATION PROCESSES IN THE GAS POOL DEVELOPMENT AND IN OPERATION OF UNDERGROUND GAS STORAGE FACILITY

V.A. Chernykh

The gas pool and underground gas storage facility are simulated as nonlinear dynamic systems. For the first time the basic physic and mathematical models of gas density oscillations during the development of a gas pool and operation of an underground gas storage facility have been worked out. It is shown that the occurrence of oscillations is connected with heterogeneity of the reservoir, gas cross-flows between heterogeneity elements, and finiteness of velocity of gas pressure disturbances propagation in the reservoir bed.

Нелинейнпя динамика в действии

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 5, 2007 УДК 517.977-519.71

БИФУРКАЦИИ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ГАЗОВОЙ ЗАЛЕЖИ И ПОДЗЕМНОГО ХРАНИЛИЩА ГАЗА

В.А. Черных

Разработка газовой залежи и эксплуатация подземного хранилища газа впервые исследуются как динамические системы с использованием понятий нелинейной динамики. Впервые построены бифуркационные диаграммы для нелинейных динамических моделей газовой залежи и подземного хранилища газа. Исследованы условия устойчивости процессов разработки газовой залежи и функционирования подземного хранилища газа.

Введение

Разработка залежи представляет собой процесс отбора газа из порового пространства продуктивного пласта, как это показано на рис. 1 на примере нижележащей залежи. Отборы газа из скважин определяются их добывными возможностями и сравнительно мало изменяются в течение года. В то же время потребление газа характеризуется значительной сезонной неравномерностью, зимой потребление газа иногда в несколько раз больше, чем летом. В связи с этим часть летних отборов газа закачивается обратно в высокопроницаемые пласты, как это показано на рис. 1 на примере вышележащей залежи, и затем отбирается в зимний период. Эти пласты выявляются вдоль трассы газопровода вдали от газовой залежи и называются подземными хранилищами газа. Необходимо отметить, что и в процессе разработки также возможны ситуации, когда в часть скважин производится закачка газа, например, для поддержания пластового давления в газоконденсатной залежи, как это показано на рис. 1. Принципиальная разница между разработкой газовой залежи и эксплуатацией подземного хранилища газа состоит также в том, что в первом случае из залежи отбирается ежегодно 3–5% от начальных запасов, а из хранилища в течение зимы более 50% запасов, которые затем восполняются в летний период. Эти особенности эксплуатации подземного хранилища газа предъявляют повышенные требования к устойчивости его работы. Соответствующие оценки можно получить на основе динамической модели залежи и подземного хранилища. Качественный анализ поведения залежи можно провести с использование бифуркационных диаграмм. Динамической моделью газовой залежи или подземного хранилища газа будем называть математическую модель эволюции (изменения) средневзвешенного по объему пор плотности газа во времени.

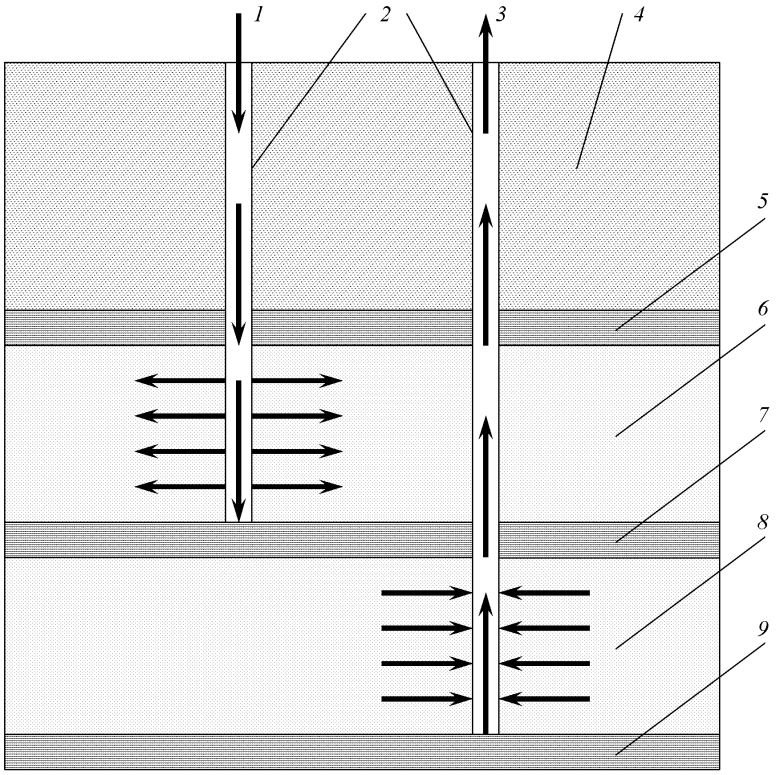


Рис. 1. Схема эксплуатации газовой залежи или подземного хранилища газа: *1* – закачка газа; *2* – скважины; *3* – отбор газа; *4* – массив вышележащих пород; *5*, *7*, *9* – низкопроницаемые пласты; *6* – вышележащая газовая залежь или подземное хранилище газа; *8* – нижележащая газовая залежь

Состояние газовой залежи определяется набором величин, называемых координатами (динамическими параметрами) системы, а именно: средневзвешенной по объему пор $V_{\text{пор}}$ плотностью газа $\rho(t)$ и скоростью ее изменения по времени $d\rho/dt$, которая называется также фазовой скоростью.

В рамках нелинейной динамики под бифуркацией понимается структурная перестройка фазового портрета динамической системы, происходящая при определенных значениях ее внешних параметров. Физическая сущность бифуркации динамической системы состоит в том, что система переходит от одного режима функционирования к другому. Это означает, что предшествующий режим потерял устойчивость и система начинает работать в новом устойчивом режиме, который может принципиально отличаться от предшествующего. Таким образом, исследование бифуркации сводится к изучению устойчивости динамической системы. Устойчивость динамической системы (в данном случае газовой залежи) определяется тем, как будет изменяться с течением времени плотность газа, если начальные условия или физические параметры системы претерпят некоторые малые изменения (возмущения).

1. Одномерные нелинейные динамические модели газовой залежи

Во многих случаях поведение газовой залежи как динамической системы может быть описано обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно одной искомой функции. Такие динамические системы будем считать

одномерными по аналогии с механическими системами.

$$\frac{d\rho}{dt} = F(\rho), \tag{1}$$

где ρ – осредненная по газонасыщенному объему пласта плотность газа. Для невозмущенного состояния газовой залежи это уравнение имеет вид

$$\frac{d\rho^0}{dt} = F\left(\rho^0\right). \tag{2}$$

Вычитая (2) из (1), получаем уравнение динамики возмущения системы

$$\frac{d\Delta\rho}{dt} = F(\rho) - F\left(\rho^0\right), \tag{3}$$

где $\rho = \rho^0 + \Delta\rho^0$ – плотность газа при возмущенном состоянии системы, $\Delta\rho = \rho - \rho^0$ – возмущение плотности газа.

Разложим функцию $F(\rho)$ в ряд Тейлора

$$F(\rho) = F\left(\rho^0\right) + \Delta\rho \cdot F'\left(\rho^0\right) + \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 F''\left(\rho^0\right) + ..., \tag{4}$$

где F', F'' – производные функции $F(\rho)$ по ρ в точке ρ^0. После подстановки (4) в (3) находим

$$\frac{d\Delta\rho}{dt} = \Delta\rho \cdot F'\left(\rho^0\right) + \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 F''\left(\rho^0\right) + ... \tag{5}$$

В силу малости возмущения $\Delta\rho$ уравнение (5) можно представить в виде

$$\frac{d\Delta\rho}{dt} \approx F'(\rho^0) \cdot \Delta\rho. \tag{6}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Delta\rho = \exp\left[F'(\rho^0) \cdot t\right].$$

Если $\left[F'(\rho^0) \cdot t\right] < 0$, то возмущение плотности газа с течением времени уменьшается, и следовательно, динамическая система в этой точке является устойчивой. Если же $\left[F'(\rho^0) \cdot t\right] > 0$, то возмущение $\Delta\rho$ с течением времени будет расти и состояние системы будет неустойчивым. Таким образом, устойчивость системы полностью зависит от знака функции $\left[F'(\rho^0) \cdot t\right]$.

Рассмотрим устойчивость процессов функционирования подземного хранилища газа, если одни скважины работают с постоянным темпом закачки, другие – с темпом закачки, пропорциональным пластовому давлению, а третьи – с темпом, пропорциональным абсолютно свободному деби́ту. Динамическая модель такой системы имеет вид*

$$\frac{d\rho}{dt} = F(\rho) = \alpha_* \rho^2 + c_* \rho + \tilde{q}, \tag{7}$$

где $\tilde{q} = q_*/V_{\text{пор}} = \text{const}$, q_* – темп закачки газа, $\alpha_* = \text{const} > 0$, $c_* = \text{const} > 0$. Аналитическое решение этого уравнения имеет вид:

*Здесь и далее см. Черных В.А. Нелинейная динамика газовой залежи. М.: ВНИИГАЗ. 2002. 203 с.

при $4\alpha_*\tilde{q} > c_*^2$

$$\frac{2}{\sqrt{4\alpha_*\tilde{q} - c_*^2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2\alpha_*\rho_0 + c_*}{\sqrt{4\alpha_*\tilde{q} - c_*^2}} - \operatorname{arctg}\frac{2\alpha_*\rho + c_*}{\sqrt{4\alpha_*\tilde{q} - c_*^2}}\right) = t,$$

при $c_*^2 > 4\alpha_*\tilde{q}$

$$\frac{1}{\sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}}}\left[\ln\left|\frac{2\alpha_*\rho_0 + c_* - \sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}}}{2\alpha_*\rho_0 + c_* + \sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}}}\right| - \ln\left|\frac{2\alpha_*\rho + c_* - \sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}}}{2\alpha_*\rho + c_* + \sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}}}\right|\right] = t,$$

при $t = 0$, $\rho = \rho_0$.

Решение получено в неявной форме и его неудобно использовать для анализа поведения системы, поэтому обратимся к методам нелинейной динамики.

Определение точек равновесия системы. Устойчивость системы харктеризуется ее поведением в точках равновесия. Из условия стационарности $F(\rho) = 0$ системы (7) находим аналитические выражения для этих точек

$$\rho_{1,2}^* = \frac{1}{2\alpha_*}\left[-c_* \pm \sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}}\right]. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что при $c_*^2 > 4\alpha_*\tilde{q}$ система имеет две точки равновесия, а при $c_*^2 < 4\alpha_*\tilde{q}$ – ни одной. Режим функционирования системы в точке равновесия определяется знаком функции $F'(\rho)$ в этой точке.

В первой точке равновесия системы ρ_1^* имеем

$$F'(\rho_1^*) = 2\alpha_*\rho_1^* + c_* = +\sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}} > 0,$$

то есть в первой точке равновесия система неустойчива.

Во второй точке равновесия ρ_2^* имеет место неравенство

$$F'(\rho_2^*) = 2\alpha_*\rho_2^* + c_* = -\sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}} < 0,$$

и следовательно, система в этой точке устойчива.

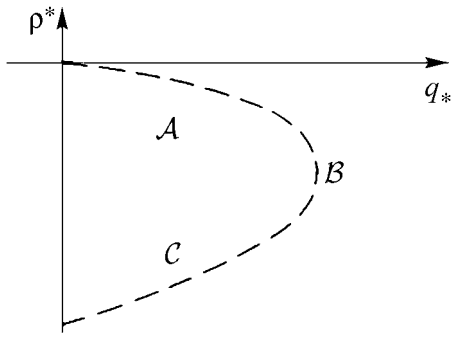


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для уравнения (8)

Бифуркационная диаграмма этой системы, то есть геометрическое представление зависимости ρ^* от q_*, приведена на рис. 2. Здесь кривые $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ являются геометрическим местом точек равновесия системы ρ_1^* и ρ_2^*, соответственно. В точке $\mathcal{B}$ эти кривые сливаются, и вместо двух состояний равновесия имеет место только одно. С увеличением $\tilde{q}$ стационарные состояния исчезают вовсе. В то же время при уменьшении $\tilde{q}$ имеет место раздвоение (бифуркация) пути эволюции системы, и развитие возможно как по кривой $\mathcal{A}$, так и по кривой $\mathcal{C}$. Однако в рассматриваемом случае точки равновесия системы располагаются в области отрицательных значений плотности газа, что физически нереально. Следовательно, динамическая система (7) не имеет стационарных точек в области реальных значений плотности газа.

Случай, когда все типы скважин являются добывающими. Динамическая модель такой системы имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = F(\rho) = -\alpha_*\rho^2 - c_*\rho - \tilde{q}, \tag{9}$$

где $\tilde{q}$ – абсолютное значение приведенного темпа отбора газа. Из условия стационарности системы $F(\rho) = 0$ следует, что система имеет два стационарных состояния (см. (8)). Для определения режима функционирования системы в точке равновесия находим выражение для функции $F'(\rho)$ в этой точке.

$$F'(\rho^*) = -2\alpha_*\rho^* - c_*. \tag{10}$$

Из уравнений (8) и (9) следует, что

$$F'(\rho_1^*) = -2\alpha_*\rho_1^* - c_* = +\sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}} > 0,$$
$$F'(\rho_2^*) = -2\alpha_*\rho_2^* - c_* = -\sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}} < 0.$$

Видно, что система неустойчива в точке ρ_1^* и устойчива в точке ρ_2^*. Бифуркационная диаграмма рассматриваемой системы совпадает с предшествующей.

Случай, когда нагнетательные скважины работают с постоянным темпом закачки $\tilde{q} = \mathrm{const} > 0$, *а добывающие скважины – с деби́том, составляющим заданную постоянную долю от абсолютно свободного деби́та.* Эта ситуация имеет место при *cycling*-процессе, когда газ, добытый из залежи, закачивается обратно после его обработки. Динамическая модель такого процесса имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = F(\rho) = \tilde{q} - \alpha_*\rho^2, \quad \tilde{q} > 0,\ \alpha_* > 0. \tag{11}$$

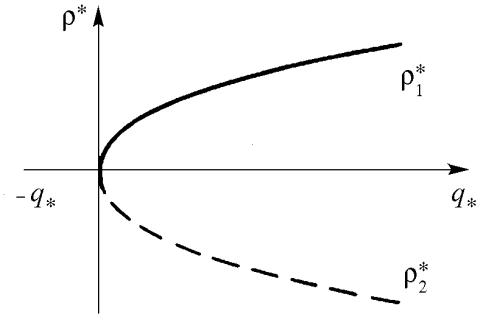


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для уравнения (11)

Так же, как в предыдущем случае, найдем точки стационарности системы и исследуем их устойчивость. Из условия стационарности $d\rho/dt = F(\rho) = 0$ получаем

$$\rho_{1,2}^* = \pm\sqrt{(\tilde{q}/\alpha_*)}. \tag{12}$$

После подстановки (11) и (12) в (6) находим уравнение динамики возмущения системы. В частности, для точки равновесия системы ρ_1^* имеем

$$\frac{d\Delta\rho}{dt} = \lambda\Delta\rho, \quad \lambda = -2\sqrt{\alpha_*\tilde{q}}. \tag{13}$$

Решение этого уравнения имеет вид $\Delta\rho = \exp(\lambda t)$. Поскольку для первой точки равновесия $\lambda < 0$, то возмущение плотности газа $\Delta\rho$, вызванное малыми отклонениями внешних параметров системы, экспоненциально уменьшается во времени. Следовательно, этот режим функционирования системы является устойчивым в точке ρ_1^*. Для второй точки равновесия $\lambda > 0$, и возмущение $\Delta\rho$ с течением времени экспоненциально возрастает, что свидетельствует о неустойчивости системы в точке ρ_2^*.

Бифуркационная диаграмма системы построена в соответствии с формулой (11) и представлена на рис. 3. Видно, что для каждого $\tilde{q} > 0$ имеют место две точки равновесия ρ_1^*и ρ_2^*, в которых $d\rho/dt = 0$. Для каждого $\tilde{q} < 0$ такие точки отсутствуют. При переходе параметра $\tilde{q}$ через бифуркационное значение $\tilde{q} = 0$ справа налево устойчивое состояние равновесия внезапно исчезает, а при переходе слева направо появляются одно устойчивое и одно неустойчивое состояния равновесия. Значение $\tilde{q} = 0$ соответствует бифуркации рождения двух состояний равновесия с ростом $\tilde{q}$ или их гибели при уменьшении $\tilde{q}$. Для газовой залежи физически реальной является только первая точка равновесия ρ_1^*.

Случай, когда на части добывающих скважин деби́т устанавливается пропорционально абсолютно свободному деби́ту, а на других скважинах – пропорционально плотности газа ρ. Динамическая модель эволюции газовой залежи в этом случае принимает вид*

$$\frac{d\rho}{dt} = F(\rho) = -\alpha_*\rho^2 - c_*\rho + \tilde{q}, \qquad \alpha_* > 0,\ \ c_* > 0,\ \ \tilde{q} > 0. \tag{14}$$

Точки равновесия системы определяются из условия стационарности $F(\rho) = 0$

$$\rho_{1,2}^* = \frac{1}{2\alpha_*}\left(-c_* \pm \sqrt{c_*^2 + 4\alpha_*\tilde{q}}\right). \tag{15}$$

В первой из этих точек система устойчива, поскольку

$$F'(\rho_1^*) = -2\alpha_*\rho_1^* - c_* = -\sqrt{c_*^2 + 4\alpha_*\tilde{q}} < 0.$$

Во второй точке система неустойчива, поскольку

$$F'(\rho_2^*) = -2\alpha_*\rho_2^* - c_* = +\sqrt{c_*^2 + 4\alpha_*\tilde{q}} > 0.$$

Бифуркационные диаграммы для моделей (15) и (11) аналогичны.

Если темп закачки для части нагнетательных скважин устанавливается пропорционально абсолютно свободному деби́ту, то динамическая модель такой системы принимает вид

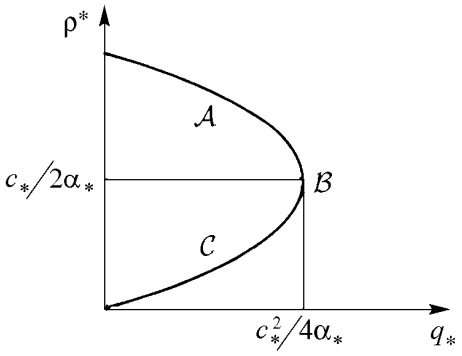


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма для уравнения (16)

$$\frac{d\rho}{dt} = F(\rho) = \alpha_*\rho^2 - c_*\rho + \tilde{q}, \qquad \alpha_* > 0,\ c_* > 0,\ \tilde{q} > 0. \tag{16}$$

Находим точки равновесия системы из условия стационарности $F(\rho) = 0$ в виде

$$\rho_{1,2}^* = \frac{1}{2\alpha_*}\left(c_* \pm \sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}}\right). \tag{17}$$

В первой из этих точек система неустойчива, поскольку

$$F'(\rho_1^*) = 2\alpha_*\rho_1^* - c_* = +\sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}} > 0.$$

Во второй точке система устойчива, поскольку

$$F'(\rho_2^*) = 2\alpha_*\rho_2^* - c_* = -\sqrt{c_*^2 - 4\alpha_*\tilde{q}} < 0.$$

Бифуркационная диаграмма для динамической модели (16) представлена на рис. 4. Нетрудно видеть, что при $\tilde{q} > c_*^2/(4\alpha_*)$ стационарные состояния системы отсутствуют. При $\tilde{q} = c_*^2/(4\alpha_*)$ в точке $\mathcal{B}$ имеется одно стационарное состояние, а при $\tilde{q} < c_*^2/(4\alpha_*)$ – два стационарных состояния. Кривая $\mathcal{A}$ представляет собой неустойчивую, а $\mathcal{C}$ – устойчивую ветвь функции $\rho^*(\tilde{q})$.

2. Двумерные нелинейные динамические модели газовой залежи

Рассмотрим теперь уравнения динамики газовой залежи, описывающие две взаимодействующие между собой зоны дренирования. Динамическая модель такой залежи имеет вид*

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = F(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}}), \quad \frac{d\bar{\bar{\rho}}}{dt} = \Phi(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}}). \tag{18}$$

Здесь $\bar{\rho}$ относится к 1-й зоне, а $\bar{\bar{\rho}}$ – к 2-й зоне дренирования.

Уравнения (18) выражают собой закон сохранения массы, в соответствии с которым изменение общей массы газа должно быть равно результирующей закачке и отбору газа из скважин. Входящие в уравнения (18) функции $F(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})$ и $\Phi(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})$ определяют зависимость темпов закачки и отбора газа от внешних параметров системы, а также от плотности газа в обеих зонах дренирования.

Функции $F(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})$ и $\Phi(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})$ в общем случае являются нелинейными и поэтому для исследования устойчивости системы в окрестности точки равновесия $(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)$ разложим их в ряд Тейлора вблизи этой точки

$$\begin{aligned} F(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}}) &= F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*) + \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}}\Delta\bar{\rho} + \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}}\Delta\bar{\bar{\rho}}, \\ \Phi(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}}) &= \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*) + \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}}\Delta\bar{\rho} + \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}}\Delta\bar{\bar{\rho}}, \end{aligned} \tag{19}$$

где $\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)/\partial\bar{\rho}$ есть значение производной $\partial F(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})/\partial\bar{\rho}$ в точке$(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)$ и т.д., $\Delta\bar{\rho} = \bar{\rho} - \bar{\rho}^*$, $\Delta\bar{\bar{\rho}} = \bar{\bar{\rho}} - \bar{\bar{\rho}}^*$. После подстановки (19) в (18) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\rho}^*}{dt} + \frac{d\Delta\bar{\rho}}{dt} &= F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*) + \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}}\Delta\bar{\rho} + \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}}\Delta\bar{\bar{\rho}}, \\ \frac{d\bar{\bar{\rho}}^*}{dt} + \frac{d\Delta\bar{\bar{\rho}}}{dt} &= \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*) + \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}}\Delta\bar{\rho} + \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}}\Delta\bar{\bar{\rho}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку уравнения (18) имеют силу и в точке стационарности (равновесия) системы, то из (20) получаем линейную систему для возмущения в окрестности точки равновесия

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\bar{\rho}}{dt} &= \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}}\Delta\bar{\rho} + \frac{\partial F(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}}\Delta\bar{\bar{\rho}}, \\ \frac{d\Delta\bar{\bar{\rho}}}{dt} &= \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\rho}}\Delta\bar{\rho} + \frac{\partial \Phi(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)}{\partial \bar{\bar{\rho}}}\Delta\bar{\bar{\rho}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Решение системы уравнений (21) ищем в виде

$$\Delta\bar{\rho} = c_1 e^{\lambda t}, \qquad \Delta\bar{\bar{\rho}} = c_2 e^{\lambda t}, \qquad c_1, c_2, \lambda - \mathrm{const}. \tag{22}$$

После подстановки (22) в (21) находим

$$\begin{gathered} c_1 \left(\frac{\partial F\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\rho}} - \lambda \right) + c_2 \frac{\partial F\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} = 0, \\ c_1 \frac{\partial \Phi\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\rho}} + c_2 \left(\frac{\partial \Phi\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} - \lambda \right) = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Система уравнений (23) имеет тривиальное нулевое решение $c_1 = c_2 = 0$. Нетривиальное решение получаем, если определитель системы равен нулю, то есть

$$\left(\frac{\partial F\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\rho}} - \lambda \right) \left(\frac{\partial \Phi\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} - \lambda \right) - \frac{\partial F\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} \frac{\partial \Phi\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\rho}} = 0. \tag{24}$$

Из уравнения (24) получаем характеристическое уравнение для параметра λ

$$\begin{gathered} \lambda^2 - \lambda \left(\frac{\partial F\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\rho}} + \frac{\partial \Phi\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} \right) + \frac{\partial F\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \Phi\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} - \\ - \frac{\partial F\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} \frac{\partial \Phi\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\rho}} = 0. \end{gathered} \tag{25}$$

Нетрудно видеть, что устойчивость нелинейной динамической системы в точке равновесия полностью определяется параметром λ, который получается из линеаризованной системы уравнений (24). Так же, как и для линейных динамических систем, здесь имеются следующие варианты:

– если действительные части параметра $\lambda_{1,2}$ меньше нуля, то точка стационарности системы асимптотически устойчива;

– если хотя бы в одном из параметров $\lambda_{1,2}$ действительная часть больше нуля, то точка равновесия динамической системы неустойчива;

– если параметры $\lambda_{1,2}$ чисто мнимые, то точка равновесия нейтрально устойчива;

– если действительная часть одного из параметров $\lambda_{1,2}$ равна нулю, а другая отрицательна, то точка равновесия системы также нейтрально устойчива.

Уравнение (25) позволяет классифицировать точки равновесия нелинейной динамической системы в зависимости от параметров $\lambda_{1,2}$. Запишем для этого уравнение (25) в виде

$$\lambda^2 - A\lambda + B = 0,$$

где

$$A = \frac{\partial F\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\rho}} + \frac{\partial \Phi\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\bar{\rho}}},$$

$$B = \frac{\partial F\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \Phi\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} - \frac{\partial F\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} \frac{\partial \Phi\left(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*\right)}{\partial \bar{\rho}}.$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(A \pm \sqrt{A^2 - 4B} \right).$$

В зависимости от параметров $\lambda_{1,2}$ различают следующие типы точек стационарности динамической системы.

1. Узел, если параметры $\lambda_{1,2}$ действительны и одного знака: $\lambda_{1,2} < 0$ – устойчивый узел, $\lambda_{1,2} > 0$ – неустойчивый узел.

2. Седло, если $\lambda_{1,2}$ действительные и разных знаков.

3. Фокус, если $\lambda_{1,2} = a \pm bi$: $a < 0$ – устойчивый фокус, $a > 0$ – неустойчивый фокус.

Использованный выше метод исследования устойчивости системы называется первым методом Ляпунова и основан на том, что локальные фазовые портреты нелинейной и линейной систем топологически эквивалентны в точке равновесия при линейном приближении функций $F(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})$ и $\Phi(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})$ в соответствии с уравнением (19).

Решающее значение при построении фазового портрета системы имеет конкретный вид функций $F(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})$ и $\Phi(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})$. При достаточной гладкости эти функции могут быть разложены в ряд Тейлора в окрестности произвольной точки ξ, η в виде

$$f(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}}) = f(\xi, \eta) + (\bar{\rho} - \xi)\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\rho}} + (\bar{\bar{\rho}} - \eta)\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\bar{\rho}}} +$$

$$+\frac{1}{2}\left[(\bar{\rho} - \xi)^2\frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\rho}^2} + 2(\bar{\rho} - \xi)(\bar{\bar{\rho}} - \eta)\frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\rho}\partial \bar{\bar{\rho}}} + (\bar{\bar{\rho}} - \eta)^2\frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\bar{\rho}}^2}\right] +$$

$$+\frac{1}{3 \cdot 2}\left[(\bar{\rho} - \xi)^3\frac{\partial^3 f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\rho}^3} + 3(\bar{\rho} - \xi)^2(\bar{\bar{\rho}} - \eta)\frac{\partial^3 f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\rho}^2\partial \bar{\bar{\rho}}} + 3(\bar{\rho} - \xi)(\bar{\bar{\rho}} - \eta)^2\frac{\partial^3 f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\rho}\partial \bar{\bar{\rho}}^2} +\right.$$

$$\left. + (\bar{\bar{\rho}} - \eta)^3\frac{\partial^3 f(\xi, \eta)}{\partial \bar{\bar{\rho}}^3}\right] + \ldots \tag{26}$$

В соответствии с этой формулой получим разложения функций $F(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})$ и $\Phi(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}})$ в ряд Маклорена.

$$F(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}}) = a_{00} + a_{10}\bar{\rho} + a_{01}\bar{\bar{\rho}} + a_{20}\bar{\rho}^2 + a_{11}\bar{\rho}\bar{\bar{\rho}} + a_{30}\bar{\rho}^3 + a_{21}\bar{\rho}^2\bar{\bar{\rho}} +$$

$$+a_{12}\bar{\rho}\bar{\bar{\rho}}^2 + a_{03}\bar{\bar{\rho}}^3 + ..., \tag{27}$$

где

$$a_{00} = F(0,0), \quad a_{10} = \frac{\partial F(0,0)}{\partial \bar{\rho}}, \quad a_{01} = \frac{\partial F(0,0)}{\partial \bar{\bar{\rho}}}, \quad a_{20} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial \bar{\rho}^2},$$

$$a_{11} = \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial \bar{\rho}\partial \bar{\bar{\rho}}}, \quad a_{02} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial \bar{\bar{\rho}}^2}, \quad a_{30} = \frac{1}{3 \cdot 2}\frac{\partial^3 F(0,0)}{\partial \bar{\rho}^3},$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 F(0,0)}{\partial \bar{\rho}^2\partial \bar{\bar{\rho}}}, \quad a_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 F(0,0)}{\partial \bar{\rho}\partial \bar{\bar{\rho}}^2}, \quad a_{03} = \frac{1}{3 \cdot 2}\frac{\partial^3 F(0,0)}{\partial \bar{\bar{\rho}}^3}.$$

$$\Phi\left(\bar{\rho},\bar{\bar{\rho}}\right)=b_{00}+b_{10}\bar{\rho}+b_{01}\bar{\bar{\rho}}+b_{20}\bar{\rho}^2+b_{11}\bar{\rho}\bar{\bar{\rho}}+b_{30}\bar{\rho}^3+b_{21}\bar{\rho}^2\bar{\bar{\rho}}+b_{12}\bar{\rho}\bar{\bar{\rho}}^2+b_{03}\bar{\bar{\rho}}^3+..., \quad (28)$$

где

$$b_{00}=\Phi\left(0,0\right), \quad b_{10}=\frac{\partial\Phi\left(0,0\right)}{\partial\bar{\rho}}, \quad b_{01}=\frac{\partial\Phi\left(0,0\right)}{\partial\bar{\bar{\rho}}}, \quad b_{20}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi\left(0,0\right)}{\partial\bar{\rho}^2},$$

$$b_{11}=\frac{\partial^2\Phi\left(0,0\right)}{\partial\bar{\rho}\partial\bar{\bar{\rho}}}, \quad b_{02}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi\left(0,0\right)}{\partial\bar{\bar{\rho}}^2}, \quad b_{30}=\frac{1}{3\cdot 2}\frac{\partial^3\Phi\left(0,0\right)}{\partial\bar{\rho}^3},$$

$$b_{21}=\frac{1}{2}\frac{\partial^3\Phi\left(0,0\right)}{\partial\bar{\rho}^2\partial\bar{\bar{\rho}}}, \quad b_{12}=\frac{1}{2}\frac{\partial^3\Phi\left(0,0\right)}{\partial\bar{\rho}\partial\bar{\bar{\rho}}^2}, \quad b_{03}=\frac{1}{3\cdot 2}\frac{\partial^3\Phi\left(0,0\right)}{\partial\bar{\bar{\rho}}^3}.$$

Все рассмотренные ранее динамические модели представляют собой частные случаи системы уравнений (18), (27), (28). Метод расчета точек бифуркации этой системы покажем на примере функций

$$\begin{aligned} F\left(\bar{\rho},\bar{\bar{\rho}}\right)&=a_{00}+a_{10}\bar{\rho}+a_{11}\bar{\rho}\bar{\bar{\rho}},\\ \Phi\left(\bar{\rho},\bar{\bar{\rho}}\right)&=b_{00}+b_{01}\bar{\bar{\rho}}+b_{11}\bar{\rho}\bar{\bar{\rho}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Уравнения (29) соответствуют случаю, когда в зонах дренирования одни скважины работают с постоянным деби́том или темпом закачки газа ($a_{00}=q_{*1}$, $b_{00}=q_{*2}$, $q_*=\mathrm{const}$ – приведенный массовый темп отбора или закачки газа), а другие – с темпом отбора или закачки газа, пропорциональным пластовому давлению (плотности) газа $(a_{10}\bar{\rho},b_{01}\bar{\bar{\rho}})$; третьи члены $(a_{11}\bar{\rho}\bar{\bar{\rho}},b_{11}\bar{\rho}\bar{\bar{\rho}})$ отражают влияние перетоков между зонами дренирования.

Как и прежде, точки $(\bar{\rho}^*,\bar{\bar{\rho}}^*)$ равновесия (стационарности) системы определяем из уравнений $F\left(\bar{\rho},\bar{\bar{\rho}}\right)=0$ и $\Phi\left(\bar{\rho},\bar{\bar{\rho}}\right)=0$, то есть

$$q_{*1}+a_{10}\bar{\rho}^*+a_{11}\bar{\rho}^*\bar{\bar{\rho}}^*=0, \quad (30)$$

$$q_{*2}+b_{01}\bar{\bar{\rho}}^*+b_{11}\bar{\rho}^*\bar{\bar{\rho}}^*=0. \quad (31)$$

Исключая из этих уравнений функцию $\bar{\bar{\rho}}^*$, находим

$$\bar{\rho}^{*2}+A\bar{\rho}^*+B=0, \quad (32)$$

где $A=1/(a_{10}b_{11})\left(a_{10}b_{01}+b_{11}q_{*1}-a_{11}q_{*2}\right)$, $B=(b_{01}q_{*1})/(a_{10}b_{11})$. После исключения произведения $\bar{\rho}^*\bar{\bar{\rho}}^*$ из уравнений (30) и (31) получаем выражение для $\bar{\bar{\rho}}^*$

$$\bar{\bar{\rho}}^*=\frac{1}{b_{01}a_{11}}\left(b_{11}q_{*1}-a_{11}q_{*2}+b_{11}a_{10}\bar{\rho}^*\right). \quad (33)$$

Корни уравнения (32) определяют точки стационарности системы относительно функции $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho}^*_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-A\pm\sqrt{A^2-4B}\right). \quad (34)$$

После подстановки (34) в (33) находим точки стационарности для функции $\bar{\bar{\rho}}$

$$\bar{\bar{\rho}}^*_{1,2}=\frac{1}{b_{01}a_{11}}\left(b_{11}q_{*1}-a_{11}q_{*2}+b_{11}a_{10}\bar{\rho}^*_{1,2}\right). \quad (35)$$

Уравнения (34) и (35) определяют бифуркацию системы (29), то есть зависимость координат стационарной точки системы $(\bar{\rho}^*, \bar{\bar{\rho}}^*)$ от q_{*1}, q_{*2} и других параметров системы. Нетрудно видеть, что при $A^2 < 4B$ точки равновесия отсутствуют. Точка $A^2 = 4B$ является точкой бифуркации, в которой возникают два состояния стационарности, устойчивое и неустойчивое. Анализ устойчивости в точках равновесия проводится аналогично предыдущему.

Заключение

Полученные выше результаты необходимо использовать при выборе систем разработки газовых месторождений и эксплуатации подземных хранилищ газа, поскольку они позволяют прогнозировать, а следовательно, и предотвращать нарушения устойчивости режимов разработки и эксплуатации промысловых объектов.

Институт проблем нефти и газа РАН
Москва

Поступила в редакцию *07.04.2007*
После доработки *06.09.2007*

BIFURCATIONS IN NONLINEAR DYNAMIC MODELS OF A GAS POOL AND AN UNDERGROUND GAS STORAGE FACILITY

V.A. Chernykh

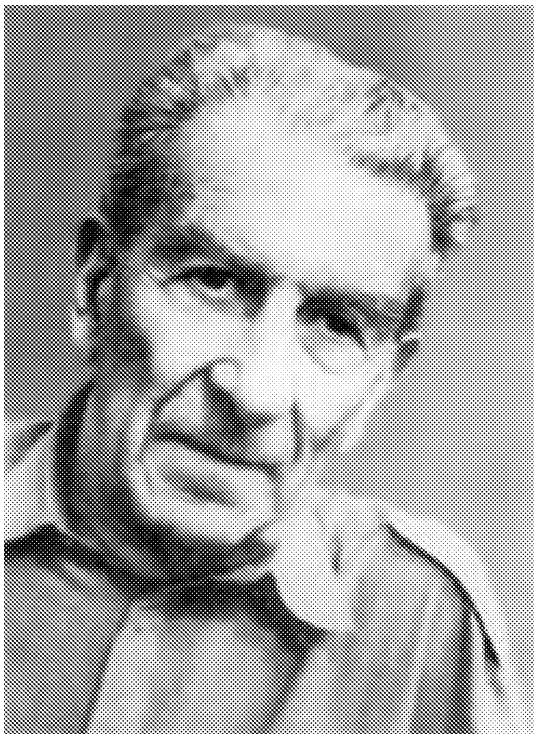
The development of a gas pool and operation of an underground gas storage facility are studied as dynamic systems with use of concepts and terms of nonlinear dynamics. For the first time bifurcation diagrams have been constructed for nonlinear dynamic models of a gas pool and an underground gas storage facility. Stability conditions of the processes of the gas pool development and of the underground gas storage facility functioning have been studied.

Черных Виктор Александрович – родился в Воронеже (1937), окончил Куйбышевский индустриальный институт (1961). После окончания института работал в Татарском нефтяном научно-исследовательском институте (ТатНИИ, Бугульма), затем во Всесоюзном научно-исследовательском институте природных газов (ВНИИГАЗ, Москва), в настоящее время работает в Институте проблем нефти и газа РАН (Москва). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук во ВНИИГАЗе (1967) и доктора технических наук (2000) по специальности «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений». Автор монографий: «Упругость и прочность цилиндрических тел» М.: Высшая школа, 1975. 526 с.; «Гидрогазодинамика горизонтальных газовых скважин» М.: ВНИИГАЗ, 2000. 189 с.; «Гидрогеомеханика нефтегазодобычи» М.: ВНИИГАЗ, 2001. 249 с.; «Нелинейная динамика газовой залежи» М.: ВНИИГАЗ, 2002. 203 с. Научные интересы: теория упругости, нелинейная динамика процессов разработки нефтяных и газовых месторождений, синергетика процессов добычи нефти и газа, фрактальная механика процессов фильтрации, приложения дробного исчисления к задачам разработки нефтяных и газовых месторождений. Опубликовал более 150 работ по направлениям указанным выше. E-mail:vict@gazsvyz.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 5, 2007

27 июня 2007 года выдающемуся российскому физику и философу Евгению Львовичу Фейнбергу (1912–2005) исполнилось бы 95 лет. Мы перепечатываем из журнала «Здравый смысл» его завещание человеку под названием «Credo»*.

Д.И. Трубецков



CREDO

(в чем смысл жизни человека)

Евгений Фейнберг

1. Существует мир, вселенная (а может быть, множество вселенных) – мир мертвый, себя не сознающий, неорганический, безграничный. Но в какой-то его ничтожной части физические обстоятельства случайно сложились так, что оказалось возможным возникновение жизни в разных формах, вплоть до высшей из известных нам форм – человека с его сознанием, эмоциями, сверхсознанием. Для этого чуда было необходимо, чтобы в достаточно значительной (пусть относительно ничтожной) области мира достаточно долго существовали достаточно благоприятные температурные, радиационные, химически-ядерно-составные и т.д. и т.п. условия (многого из того, что было в действительности необходимо, мы, быть может, еще и не знаем).

Возможно, что подобные обстоятельства осуществились еще где-то во вселенной, быть может, в других сочетаниях и потому породили не обязательно такие же формы жизни. Но на это мы не можем рассчитывать

*Фейнберг Е.Л. Credo (в чем смысл жизни человека)//Здравый смысл. Зима 2006/07, № 1(42), с. 8–9.

как на необходимость. Вполне возможно, что есть другие вселенные, принципиально недоступные связи с ними, но тоже содержащие сознательную жизнь, но это не обязательно. В любом случае мы должны исходить из того, что мы одиноки, единственное исключение, в некотором смысле действительно чудо.

Мы все больше узнаем о том, как именно может возникнуть жизнь в неорганическом мире и развиться до появления человека. Но чем больше мы узнаем, тем более поразительной оказывается сложность, утонченность согласования элементов этой системы, тем более поразительным оказывается факт, что все это успело, сумело сложиться, возникнуть, быть. Это поразительно, но мы раскрываем все новые механизмы этого процесса и все более видим его причинную обусловленность.

Таким образом мы, человечество, оказываемся носителями, реализацией уникального явления природы, следствием уникального (быть может, уникального в буквальном смысле слова, – единственного) сочетания обстоятельств (что, однако, из-за безграничности мира представляется маловероятным; но для того, что сказано ниже, это нельзя принимать в расчет).

Сохранение, сбережение этого явления, этого «чуда» – на ответственности человечества и каждого человека. И оно накладывает много обязательств на нас (конечно, исчезновение человечества и жизни вообще ничего не изменит в огромной безграничности мира самого по себе, но уж если такое удивительное явление осуществилось, оно изменило лик мира, и возвращение к мертвой безразличной материи было бы печальным фактом).

2. Чтобы это чудо сохранилось, от человека требуется многое.

Во-первых, нужно очень хотеть сохранить человечество, как феномен природы. Для этого нужно любить жизнь, наслаждаться ее проявлениями как таковой, очень хотеть жить. И не случайно именно способные ко всему этому особи образуют человечество в подавляющем большинстве.

Поэтому человечество выжило, несмотря на огромные внешние препятствия и на не меньшие «внутренние» препятствия, порожденные самими людьми, именно самой способностью людей сознавать, действовать по своей воле и в частности создавать горестные ситуации. Но любовь к жизни и непосредственное наслаждение жизнью, не мешающее, не вредящее остальному человечеству – обязательное условие, которое нужно осознавать, чтобы не впадать в ошибку, считая его чем-то недостаточным.

Во-вторых, трудность выполнения основной задачи не позволяет рассчитывать, что ее можно выполнить в одиночку. Поэтому человек должен искать сотоварищества других людей, быть способным любить других и помогать слабым, то есть необходима доброта. И не случайно именно способные к этому особи образуют человечество в подавляющем большинстве. Это необходимо сознавать, чтобы способность к доброте не считалась недостойной и <не> распространялась только на ближайшее и очень ограниченное окружение каждого человека.

В-третьих, для реализации в трудных объективных и субъективных обстоятельствах основной задачи – ответственности должны быть мобилизованы все потенции человечества. Высшими потенциями обладают духовные способности человека. Поэтому не случайно, что такие способности человечество в своем подавляющем большинстве совершенствует. Это биологически осуществляется в любознательности, инстинкте бескорыстной поисковой активности, а социально – во взаимообогащении духовной культурой от самых простых («низких») ее форм до деятельности

мыслителей, художников и ученых. Только преобладание духовных способностей человека над примитивными формами (инстинктами, условными рефлексами), свойственными и остальному живому миру, позволило человечеству выжить.

Из сказанного, если говорить совсем кратко и огрубленно, и вытекает то, что можно назвать «смыслом жизни».

В обобщенном плане смысл жизни человечества – в сохранении чуда жизни, в выполнении высокой ответственности перед природой, случайно одарившей нас этим чудом.

Конкретно же это реализуется в «смысле жизни» или, лучше сказать, высшей задаче жизни каждого человека, а ее, если говорить совсем кратко и упрощая, можно сформулировать в трех пунктах:

– любить жизнь и наслаждаться ею;

– быть добрым и уж во всяком случае, социабельным – не вредить другим, помогать слабым и быть терпимым, помогать созидателям и препятствовать разрушителям;

– жить максимально возможной духовной жизнью, достойной высоты, на которую небрежно вознесла человека «бессмысленная» природа и которую нужно сохранить.

3. Все сказанное о назначении человека, вероятно, примет и религиозно верующий человек. Только слово «чудо», употребленное выше, он примет в прямом смысле, как сотворение жизни Богом, высшим духом и т.п. Я не понимаю, зачем это нужно.

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете L^AT_EX

Подписка на 2008 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2008 год 450 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail:and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 24.10.07. Подписано к печати 12.11.07
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 9,45(6,75). Уч.-изд. л. 9,4. Тираж 200. Заказ 399

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2007
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2007