Нелинейнпя динамика в действии

Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 3, 2005 УДК 51.001.72:5

КРИЗИС ЭВОЛЮЦИИ ЖИЗНИ И КОЛЛЕКТИВНАЯ ИГРА ЛЮДЕЙ

Ю.И. Неймарк

На основе простой математической модели «производители – продукт – управленцы» выясняется причина многовекового конфликта в жизни человечества, его содержание и возможные пути преодоления.

Прежде всего я хочу пояснить, почему выступаю со столь необычной темой и как понимаю проблему человеческого общества, социальных отношений и их историй.

Историю человеческого общества я воспринимаю как продолжение эволюции жизни на Земле. Проблему эволюции общества людей – как задачу составления математических моделей, способных объяснить наблюдаемую реальность и подсказать возможные пути дальнейшего совершенствования.

Представляется, что человеческое общество настолько сложно и многообразно, а адекватная математическая модель настолько сложна и необозрима, что такой подход безнадежен. В какой-то мере это подтверждается, поскольку пока никаких результатов на этом пути получить не удавалось: все, что я читал об обществе людей и истории его развития, носит описательно-объяснительный гуманитарный характер.

В последние годы я увлекся идеей простых математических моделей достаточно сложных объектов и понял, что иногда с их помощью на очень сложные вопросы возможно просто ответить. Таковы модели кризисов сердца, двуногой ходьбы, инфекционных заболеваний, игры в отгадывание, загадок Каспийского моря и др. [1].

Человеческое общество можно описать простой моделью

$$\begin{gathered}\dot{x} = (a - bx - ly + cz)x,\\ \dot{y} = (-d - \underline{mx} - ey + fz)y,\\ \dot{z} = \begin{cases} F = g\dfrac{1+\varepsilon_1 y}{1+\varepsilon_2 y}\cdot\dfrac{\underline{\mu}x}{1+\delta z} - hx - ky & \text{при } z>0 \text{ или } z=0 \text{ и } F>0,\\ 0 & \text{при } z=0 \text{ и } F\le 0,\end{cases}\end{gathered} \qquad (*)$$

отражающей факт объединения конкурирующих людей в общество для более эффективного производства необходимого для жизни продукта [2]. Эту модель можно назвать «Производители – продукт – управленцы». Производители – это x, управленцы – y, продукт – z. Изложению результатов ее математического исследования и вытекающих из него выводов предпошлем краткое общее обсуждение проблемы зволюции жизни.

Несомненно, что многое в жизни современного общества – отдельных людей, групп, сообществ, стран и народов, и всего человечества в целом – унаследовано от предков, и поэтому, чтобы понять его сегодняшнюю жизнь и пытаться прогнозировать и повлиять на его будущее, нужно осмыслить его прошлое, прослеживая прошлую эволюцию жизни на земле от достаточно отдаленных времен. Безусловно, что зарождение и эволюция жизни таит в себе много загадочного и непознанного. Но вместе с тем можно думать, что основные факторы этой эволюции все же известны. Это наследственность, изменчивость и отбор. То, что в итоге указал Дарвин и развито в дарвинизме, и то, что удалось узнать о хромосомах и генах. Наследственность биологическая полностью определяется, как мы сегодня думаем, генами. Наследование поведения также отчасти носит генетический характер, но лишь отчасти: громадную роль играют традиция, верование, пожизненное обучение и индивидуальный опыт. Изменчивость, как мне думается, таинственна и далека от понимания. Думается, потому что поверить, что изменчивость определяется только случайными мутациями генов, трудно. Трудно поверить, что только случайность и отбор могут привести к наблюдаемому величайшему совершенству и всеобъемлющему использованию возможностей природы. Конечно, время эволюции непостижимо огромно – миллиарды лет. Но мне думается, что еще что-то нами не познано. Что, может быть, в основе лежит случайность, как некий генератор, но есть еще фильтр и какая-то направленность. Более того, если иметь в виду не только биологическую эволюцию, но и социальную, то это действительно так, и механизмы фильтрации и направленности, хотя они не выделены и не изучены нами в должной мере, безусловно, имеют место.

Отбор как таковой неизменен в том, что отбираются те, кто продолжил жизнь. И до человека именно выжившие в решающей мере определяли эволюцию. Но для человечества это уже не так. Многое определяется накопленными и освоенными человечеством знаниями, традициями, верованиями, моралью... У животных значительную роль в ускорении эволюции играет половой отбор, у человека – традиции, верования, знания, умения... Эволюция человечества как бы раздвоилась на биологическую и социальную, и они друг с другом не согласованы. Они даже подчас антагонистичны. В какой-то мере можно говорить о кризисе эволюционного совершенствования. По-видимому, достаточно обстоятельно впервые на него обратил внимание К. Лоренц в своих «Восьми смертных грехах человечества». Среди них я бы выделил генетическое биологическое вырождение и интеллектуальное оскудение, а также истощение природных ресурсов и непрекращающиеся войны и вражду.

До сих пор природа сама определяла ход эволюции и успешно решила проблему создания Homo sapiens, человека разумного. Но в эволюции человечества природа дает сбой: полезные ранее инстинкты, и прежде всего агрессия, проявляются в войнах, нескончаемой вражде, которые едва ли способствуют разумной эволюции человечества. Они заведомо не способствуют реализации наших чаяний о полноцен-

ной жизни, жизни, основанной не на прямом истреблении, подавлении и неприязни, недоброжелательстве, а на доброте и сочувствии, интересной работе. Можно думать, что такая жизнь лишь плод фантазии, и история коммунизма как бы это подтвердила. Но был не только коммунизм, был и противоположный эксперимент, давший не менее ужасный результат в виде фашизма. Эти эксперименты, по существу, – попытки реализации двух сторон эволюции человека: биологической и интеллектуальной (ранее названной социальной). Эти крайние эксперименты можно трактовать как попытки природы уйти от раздвоения. Как бы указание, что человечество должно искать выход в разумном согласовании. Нужно трансформировать инстинкт агрессии, нужно умерить требования всеобщего благоденствия. Потому что первое ведет к нечеловеческой жизни, а второе – к всеобщей апатии и застою. Едва ли сама природа может выпутаться из этого тупика. Точнее, она может из него выпутаться, используя новые возможности созданного ею человека, опираясь на его интеллект. Успешность такого подхода уже отчасти апробирована: более 200 лет тому назад интеллект небольшой группы людей создал конституцию и определил правила жизни, которые привели к расцвету и ведущей роли современной Северной Америки. Для того чтобы это произошло, потребовалось уникальное сочетание благоприятных обстоятельств. Эти уникальные обстоятельства едва ли вновь возникнут сами по себе. Более того, действия современной Америки едва ли способствуют разрешению проблемы раздвоения эволюции, едва ли предотвращают угрозы, выявленные К. Лоренцом.

Что же нужно для решения проблемы согласования, для продолжения приемлемой дальнейшей эволюции жизни человечества? Я бы сказал, нужен согласованный синтез, и ростки этого согласованного синтеза наблюдаются в современном мире. Этот согласованный синтез – в подмене борьбы за существование игровым восприятием жизни, в замене смертельной схватки игрой, которая дает удовлетворение и радость человеку, не истребляет и не порабощает его, которая сохраняет и стимулирует активность человека без того, чтобы истреблять врага или унижать, лишая интереса к жизни, игрой, которая своей увлекательностью обеспечит активность и эффективность деятельности людей. Замена смертельной схватки игрой широко представлена в животном мире и ростки ее наблюдаются в современном обществе.

После сказанного вернемся к обсуждению математической модели $(*)$, даваемого ею объяснения кризиса эволюции жизни с появлением человека, и, естественно, возникающей из него идеи игрового общества. Эта модель трехмерна и содержит 15 параметров. В первоначальной модели подчеркнутые члены отсутствовали, и последующее относится к ней до введения управления.

Удалось обнаружить, что с ростом уровня технологии g помимо производителей x возникает сначала продукт z, а затем управленцы y, и что возникновение управленцев происходит вне зависимости от параметра $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ их полезности [2].

При низком уровне технологии, $g < h$, имеется единственное устойчивое состояние равновесия $x = x^*$, $y = z = 0$, то есть общество одних производителей.

При среднем уровне технологии, $h < g < h(1 + \delta d/f)$, появляется накопленный продукт $z = z^*$.

При высоком уровне технологии, $g > h(1 + \delta d/f)$, появляются еще и управленцы.

При этом устойчивое равновесие $x = x^*$, $y = y^*$, $z = z^*$ может стать неустой-

чивым, и могут возникнуть автоколебания. Это соответствует периодическому изменению всех трех переменных, x, y и z, причем на некотором участке z может быть равным 0, что соответствует глубокому кризису.

Из сказанного видно, что возникновение управленцев не зависит от ε_1 и ε_2, то есть они возникают просто потому, что общество может их прокормить.

Я с удовлетворением воспринял выявленную зависимость состава и динамики общества от уровня технологии, но не сразу оценил значимость второго вывода. А с ним связана, на мой взгляд, многовековая трагичность истории человечества, как проявление кризиса эволюции жизни с приходом человека.

До появления человека вожак стаи – самый сильный, умный и полезный, и как только появляется более достойный, происходит замена. В человеческом обществе с некоторых пор это не так. Согласно модели $(*)$, это тоже не так: управленцы – аналог вожака – могут быть не только не полезными, но и вредными, и это не мешает их появлению и не ведет к исчезновению, если, конечно, уровень технологии g высок, $g > h(1 + \delta d/f)$.

Это, естественно, ведет к конфликту между управленцами и производителями, а возможно, и внутри управленцев. Конфликт не нашел отражения в модели, но это наблюдается в течение всей истории человечества и ведет, как правило, к действиям управленцев, способствующим их укреплению и не отстранению.

Добиться этого удается одурачиванием и подавлением силой, имитацией своей нужности, присвоением властных полномочий и их злоупотреблением. При этом используются любые средства, вплоть до уничтожения конкурентов, активизации агрессии, раздоров, ненависти, войн, террора на национальной, религиозной, классовой и других основах, изобретения внешних и внутренних врагов, а также территориальных и других претензий.

Остановить этот процесс очень трудно, поскольку он охватывает весь мир и сам себя поддерживает. В прошлом веке он привел к двум мировым всесокрушающим ужасным войнам, сегодня – к расцвету терроризма и гигантскому отставанию социального совершенствования от фантастических успехов промышленной и информационной революций. Это, по существу, кризис эволюции жизни с появлением человека. Многие видят выход, причем окончательный, в либерально-демократическом обществе. А К. Лоренц, напротив, увидел в этом обществе «устрашающие восемь смертных грехов человечества», которые могут привести человечество к катастрофе.

Причина кризиса обнаруживается моделью $(*)$, но может ли она объяснить то, что предпринимает человечество для его преодоления? В целом – нет, отчасти – да. Точнее, в той ее части, которая вызвана стремлением к материальному благополучию и достатку. При этом деятельность людей направлена на управление параметрами модели.

Это управление, в частности, можно осуществить через давление производителей на управленцев (член mxy во втором уравнении модели $(*)$). Увеличивая m, можно устранить неприемлемых управленцев или принудить их повысить свою эффективность. Этого же можно добиться, увеличивая h. Желание увеличить потребление h производителями требует увеличения эффективности как производителей (увеличение μ), так и управленцев (увеличение $\varepsilon_1/\varepsilon_2$). Сказанное следует из усло-

вия $\mu g > h\left(1+\dfrac{\delta(d+mab^{-1})}{f-mcb^{-1}}\right)$ – наличия глобально устойчивого равновесия, и надлежащей зависимости m от $\varepsilon_1/\varepsilon_2$.

Таким образом, кризис – дефект объекта, описываемого моделью $(*)$, – может быть преодолен с появлением у общества возможности управления объектом (параметрами и непосредственным воздействием) и способности им воспользоваться.

Эти возможности могут быть в двух планах: описанным давлением на управленцев, что требует соответствующих прав, и выборностью управленцев при условии достоверных сведений о них и зрелости общества.

Либерально-демократические общества по своей идее такие возможности предоставляют. Отсутствие возможности эффективного управления приводит к революционному пути его реализации.

Расширенная модель $(*)$ – это описываемый ею динамический процесс под многообразным воздействием природы и людей.

Это хаотическое случайное воздействие предсказуемо только на небольших участках времени, и то далеко не всегда. Но, наверное, можно говорить о его общих тенденциях.

Что включает в себя модель $(*)$ и что непосредственно следует из нее, было сказано. Следует то же сказать и о расширенной управлением модели $(*)$, охарактеризовать мотивы и цели управления и известные пути его реализации. Управленцы заинтересованы в эффективности производителей μ, совершенствовании технологии g, уменьшении доли производителей h в производимом продукте и увеличении своей доли k. Производители, напротив, – в увеличении своей доли h и увеличении эффективности управленцев $\varepsilon_1/\varepsilon_2$.

Реализация желаний управленцев ими исторически узурпирована: они власть. Производители реализации своих желаний и ограничения желаний управленцев должны добиваться. Это сделать можно через профсоюзы и другие общественные организации, через оппозицию, через контроль за деятельностью управленцев, опирающийся на независимые средства массовой информации и правоохранительные органы, выборность власти и досрочное ее отстранение. Ослабление узурпации власти, коррупции и сговора возможно путем разумного разделения ее полномочий.

Как уже отмечалось, либерально-демократическое общество позволяет реализовать более или менее эффективное обоюдостороннее управление объектом – моделью $(*)$, но оно в недостаточной мере удовлетворяет многогранным потребностям человека, более того, оно ведет к восьми смертным грехам человечества, указанным К. Лоренцом. Кроме того, равновесное противостояние в либерально-демократическом обществе склонно к потере устойчивости.

Что же можно предложить человечеству, желанное, удовлетворяющее его страстям, его врожденным наклонностям и устремлениям? Что больше всего любит и ценит человек, что может удовлетворять его постоянно, что сделает возможным преодоление кризиса и создание устойчивой и одновременно морально и этически приемлемой организации социальной жизни? Создать организацию общества, для которого либерально-демократическое общество – исходный плацдарм; общества, которое сможет обуздать неумеренное потребление и расточительство, обеспечить соблюдение жизненно необходимых требований экологии и уважения ко всем людям, победить необузданную тягу к власти и деньгам.

Подсказка пришла не от математики, а от великих провидцев человеческого духа и жизни. Обратимся к Достоевскому – он лучше всех понимал глубинную природу человека. Обратимся к великим поэтам и писателям Пушкину и Лермонтову. Прислушаемся, что сказал один из величайших физиков – Эйнштейн и многие другие.

Они сказали: «Игра!» Точнее и полнее – игровое восприятие жизни. Игра – это борьба, состязание, стремление к победе, величайшей радости и ощущениям полноты жизни. Подчеркнем, честная игра, игра в рамках нерушимых, соблюдаемых и уважаемых правил. Игра, в которой, даже проигрывая, человек ощущает полноту жизни. Но игра – не только это. Игровое восприятие жизни лежит в основе успеха в ней.

Я позволю себе две маленьких цитаты: «Жизнь желанная – это игра...» (Пришвин); «Успех – это неустанный труд плюс умение относиться к жизни как к игре...» (Эйнштейн).

Естественно, о жизни как игре может идти речь, когда материально человек достаточно обеспечен. Элементы игрового отношения к жизни присутствуют в современном обществе. Так что речь идет не о какой-то ломке, а о сознательном укреплении и расширении имеющихся тенденций, как о механизме дальнейшего продолжения и ускорения эволюции жизни на основе интеллектуальных и эмоциональных потребностей человека. Точнее, только о базовом уровне игрового общества, принципах его функционирования и организации, как продолжения либерально-демократического или близкого к нему. Об этом игровом обществе написано в книге [2]. Так что я буду предельно краток. Точнее, только попытаюсь вас заинтересовать.

В основу игрового общества положено следующее.

1. Стремление к возможно большему удовлетворению материальных и духовных потребностей людей.

2. Несмотря на естественность конкуренции, желание объединения с целью реализации пункта 1.

3. Стремление отдельных людей к максимальному удовлетворению своих потребностей в конечном счете должно привести к возможно большему удовлетворению потребностей всех членов общества и так, чтобы успех каждого был одновременно и успехом всех.

Первые два требования почти не отличаются от тех, на которых основана модель $(*)$, только кроме материального удовлетворения необходимо и духовное. Третье – новое.

Устройство общества должно соответствовать этим трем требованиям. Оказывается, что для этого игра должна быть близкой к идеальной, а в обществе должны соблюдаться права человека, принципы открытости и наименьшего принуждения.

Функции власти должны быть разделены без возможности содействия себе, сговора и коррупции, на основе включения их в общее игровое взаимодействие.

Напомним, что это требование относится к базовому уровню игрового общества. Все остальное создается в силу способности самоорганизации общества, обеспечиваемой этим базовым уровнем.

Я знаю, что, в основном, господствуют два мнения: • эволюция жизни, как и ранее, будет проходить в хаосе борьбы за существование; • либерально-демократическое общество – вершина и завершающий итог эволюции человека.

Я отрицаю первое, хотя в принципе это возможно, отчасти согласен со вторым, но думаю и надеюсь, что двигателем человечества после «прибыли, дохода, богатства и денег» будет интеллектуальное и эмоциональное удовлетворение, стремление к полноте и богатству жизни, к ощущению единства людей и природы.

Сейчас происходит, в целом, оскудение общества и людей, что отметил Лоренц и многие другие. Тем более притягательной может стать противоположная возможность – духовного и эмоционального обогащения жизни.

В заключение подчеркну, что формализация общественного и личного функционирования людей допускает игровое описание в силу широты его понимания математиками. Но понятие игровой модели общества предполагает еще и игровое восприятие людьми своей жизни. Это некоторое обогащенное отношение к своему я, заинтересованное и отчасти отстраненное участие в своей жизни, делающее человека проницательным и свободным, активным, с более широким взглядом на себя и мир, делающее человека частицей этого мира.

Библиографический список

1. *Неймарк Ю.И.* Математическое моделирование как наука и искусство и роль простых моделей в познании мира // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2004. Вып. 1 (27). С. 5–13.
2. *Неймарк Ю.И.* Математические модели в естествознании и технике. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2004.

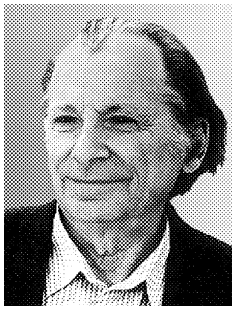
Нижегородский государственный университет

Поступила в редакцию 9.08.2005

CRISIS OF EVOLUTION AND A COLLECTIVE PEOPLE GAME

Yu.I. Neimark

On the basis of a simple mathematical model «producers-products-managers», reason, substance, and possible ways of overcoming of a centuries-old conflict in humanity life are considered.



Неймарк Юрий Исаакович – доктор технических наук, профессор ННГУ, академик РАЕН, Соросовский профессор, член Национального комитета по теоретической и прикладной механики, лауреат премий А.А. Андронова и Н. Винера. Автор 8 монографий и более 400 работ по теории колебаний, теоретической механике, теории управления и др.

Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 3, 2005 УДК 530.182+681.51+001.891.57+929 Неймарк

ЮРИЙ ИСААКОВИЧ НЕЙМАРК

24 ноября 2005 года исполняется 85 лет Юрию Исааковичу Неймарку – доктору технических наук, профессору кафедры теории управления и динамики машин факультета вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, академику РАЕН, заслуженному деятелю науки РФ, лауреату премии им. А.А. Андронова и Н. Винера, Соросовскому профессору.

Ю.И. Неймарк – выдающийся ученый с мировым именем, который внес большой вклад в развитие научной школы теории нелинейных колебаний, созданной его учителем академиком А.А. Андроновым; автор 9 монографий, 4 из которых изданы за рубежом на английском, немецком, польском и испанском языках, более 400 научных работ и 20 изобретений. Его научные интересы весьма широки. Это – теория устойчивости, теория автоматического регулирования и управления, теория колебаний и динамических систем, распознавание образов и медицинская диагностика, поисковая оптимизация, математическое моделирование, включая модели в экономике.

Характерной чертой научных подходов Юрия Исааковича является направленность его теоретических разработок для практических приложений при решении задач: о путевой устойчивости, устойчивости транспортных устройств, о возникновении вибраций при резании металлов, об устойчивости быстровращающихся центрифуг. При его участии разработаны основы конструирования и применения неконтактного магнитного подвеса в гироскопах.

Научная и педагогическая деятельность Юрия Исааковича Неймарка связана с Нижегородским государственным университетом. В 1944 году он окончил с отличием физико-математический факультет, в 1947 году защитил кандидатскую диссертацию, посвященную устойчивости линеаризованных систем, в 1956 – докторскую диссертацию по динамике релейных систем автоматического регулирования.

Юрий Исаакович – блестящий лектор. Им разработаны и прочитаны 18 общих и специальных курсов. Среди них лекции по теоретической механике, математической физике, теории вероятностей, теории колебаний, теории управления, распознавания образов, по математическим моделям в естествознании и технике.

Юрий Исаакович много внимания уделяет подготовке научных кадров высшей квалификации. В 1953 году, будучи доцентом, он получил разрешение на руководство аспирантами. С тех пор им подготовлено более 50-ти кандидатов наук, из которых 14 в дальнейшем защитили докторские диссертации и стали заведующими кафедрами, лабораториями, руководителями КБ и НИИ (Брусин В.А, Стронгин Р.Г., Фейгин М.И., Заозерский Ю.П., Федоткин М.А., Городецкий Ю.И., Васин Ю.Г. и др.).

Авторы данной публикации с большой теплотой вспоминают о городском семинаре по теории колебаний, которым руководили Ю.И. Неймарк и Е.А. Леонтович–Андронова. Заседания семинара проходили в творческой обстановке. Обсуждение докладов обычно сопровождалось дискуссиями. Участники семинара каждый раз с нетерпением ждали выступления Юрия Исааковича. Поражала легкость, с которой он расставлял акценты и делал глубокий анализ изложенного материала и, что самое главное, нацеливал коллектив молодых ученых на решение новых задач и часто намечал возможные пути их решения.

Ю.И. Неймарк является организатором кафедры вычислительной математики и динамики машин на механико-математическом факультете, одним из основных создателей двух новых подразделений в университете: факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК, 1963) и научно-исследовательского института прикладной математики и кибернетики (НИИ ПМК, 1964).

В начале 1960-х возникла острая потребность народного хозяйства в специалистах – вычислителях и кибернетиках. Такие специалисты готовились на кафедрах вычислительной математики ряда высших учебных заведений страны. Но этого было недостаточно. Горьковский университет первым в стране встал на путь создания отдельного факультета. В марте 1963 года в ГГУ состоялось расширенное заседание ученых советов механико-математического и радиофизического факультетов. С основным сообщением выступил Ю.И. Неймарк, который, отметив очевидность необходимости создания факультета кибернетики в стране, обосновал целесообразность его организации в ГГУ наличием кафедры вычислительной математики и динамики машин, наличием необходимых научных и педагогических кадров, наличием технической базы в ГИФТИ при ГГУ и острой потребностью в выпускниках данного профиля в Волго-Вятском экономическом регионе. После довольно острой дискуссии на заседании было принято решение о необходимости создания нового факультета. Оно было поддержано ректором университета профессором И.А. Коршуновым и общественными организациями. Осенью 1963 года на основании приказа Министра высшего и среднего специального образования РСФСР в ГГУ был открыт факультет ВМК.

В том же 1963 году была начата организационная работа по созданию при университете НИИ прикладной математики и кибернетики. Подготовлены «Объяснительная записка» и Приложения к ней о тематике, структуре и кадрах института, которые за подписями Н.Н. Баутина, Л.Н. Белюстиной, Е.А. Леонтович-Андроновой, Ю.И. Неймарка, А.Г. Сигалова и А.Г. Угодчикова были представлены в вышестоящие ведомственные и общественные организации. Предложения о создании института были широко обсуждены в университете и получили поддержку со стороны ректората и общественных организаций, а затем советских и партийных органов города. В результате в 1964 году был создан Институт прикладной математики и кибернетики при ГГУ.

В своей книге «Сухой остаток» Юрий Исаакович пишет: «В том, что я организовал и возглавил кафедру вычислительной математики и кибернетики, затем трансформировавшуюся в факультет ВМК, значительную, если не решающую, роль сыграла публичная лекция А.А. Андронова о кибернетике, прочитанная еще тогда, когда она официально считалась лженаукой». И далее: «Я писал о теории управления и кибернетике сегодня, о ее достижениях и возможностях, и о Н. Винере. Но это не главное, что я хочу сказать. Главное, что в своей жизни я как бы реализовал значение вычислительной математики и кибернетики, о котором я услышал от А.А. Андронова».

В последние годы Ю.И. Неймарк большое внимание уделяет вопросам построения адекватных математических моделей в различных областях науки и техники и взаимосвязи качественных и количественных оценок при использовании простых и сложных моделей. Эта идеология явно прослеживается и в его пленарном докладе «Математическое моделирование в науке и роль простых моделей в познании мира» на VI Международном конгрессе по математическому моделированию (2004).

В 2005 году Юрий Исаакович открылся и с другой стороны. Издательством Нижегородского университета был опубликован сборник его стихов «Перед закатом солнца». В нем глубокие раздумья о смысле человеческой жизни, строгая, почти исповедальная, самооценка и идея гражданственности, высокий духовный потенциал, который придает повествованию целостность восприятия.

Мы поздравляем Юрия Исааковича Неймарка со славным юбилеем, желаем крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов.

Н.Новгород, 29 июня 2005

Декан факультета ВМК Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского — *В.П. Савельев*

Профессор кафедры прикладной математики — *Ю.И.Городецкий*

Доцент кафедры прикладной математики — *Я.К. Любимцев*

Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 3, 2005 УДК 530.182+681.51+001.891.57+929 Неймарк

Ю.И. НЕЙМАРК

Московская школа теории колебаний, созданная Л.И. Мандельштамом, после отъезда А.А. Андронова в Горький следовала по пути, сильно отличающемуся от того, по которому шел Андронов и его ученики. Поэтому во время своей учебы на кафедре колебаний в МГУ и первые годы после ее окончания я почти ничего не знала о Ю.И. Неймарке, который был учеником Андронова и его последователем. Я, конечно, слышала, что у него есть работы по каким-то точечным отображениям, но что это такое, я толком не знала и не интересовалась, потому что для решения моих задач это не требовалось. Впервые я заинтересовалась работами Юрия Исааковича только в начале 1960-х годов после его докладов на конференциях по нелинейным колебаниям, регулярно организуемых в то время Ю.А. Митропольским в Киеве. В докладах говорилось о гомоклинических структурах – совершенно в то время непонятных мне вещах, – но было интересно, поскольку утверждалось, что эти структуры каким-то образом связаны со случайным поведением системы. Я как раз в то время занималась случайными процессами и была полностью уверена, что для появления случайности необходим источник. Поскольку в рассматриваемых Ю.И. системах такого источника явно не было, я ко всему сказанному относилась несколько скептически. Тем более, что, как мне казалось, Ю.И. рассказывал об этом как-то обтекаемо, так что у меня складывалось впечатление (сейчас я понимаю, ложное), что он сам не вполне во всем этом был уверен. После обзора М.И. Рабиновича в УФН, вышедшего в 1978 году, а главное, после работ Л.Н. Капцова по моделированию генератора с инерционной нелинейностью, где он при определенных параметрах наблюдал случайные изменения амплитуды и фазы колебаний без всяких случайных источников, у меня возникли некоторые сомнения. Они были связаны с тем, что мы с Л.Н. собирались написать статью об этих случайных колебаниях, но так и не написали, именно потому, что не могли понять их причины. Я пыталась разрешить свои сомнения путем разговора с Юрием Исааковичем во время конференции в Зеленом городе в 1974 году, но, к моему большому сожалению, внятного ответа я не получила. Думаю, что Юрий Исаакович просто не считал нужным тогда объяснять что-либо какой-то плохо понимающей и лезущей не в свое дело девчонке.

Тогда я решила попробовать разрешить свои сомнения самостоятельно. Я рассуждала примерно так. Если рассмотреть какую-либо простую систему, поддающуюся аналитическому решению, ввести в нее некоторый источник шума и рассчитать

распределение вероятностей, а затем стремить интенсивность этого источника к нулю, то в случае, если это распределение не будет стремиться к δ-образному, значит все правда. Я заинтересовала этой работой Р.Л. Стратоновича, показала книжечку Ю.И. Неймарка, где он описывал очень красивый пример системы с таким сложным поведением, и мы с Р.Л. решили рассмотреть именно этот пример, что и было сделано. Наши результаты были опубликованы в двух статьях. В своих лекциях студентам я до сих пор рассказываю об этом примере, называя предложенную Ю.И. систему маятником Неймарка.

После того, как я убедилась в истинности того, о чем много раз слышала в лекциях Ю.И. Неймарка, мне стало обидно за него: почему все говорят об обзоре М.И. Рабиновича и никто не говорит о работах Ю.И., которые были выполнены намного раньше. Насколько я помню, даже ссылки на работы Ю.И. в обзоре Рабиновича отсутствовали. Поэтому во время очередной нашей встречи с Ю.И. на конференции в Киеве в 1981 году я спросила его, а почему бы ему не написать обзор в УФН. На этот вопрос Ю.И. дал удивительный для меня ответ: «А меня не напечатают». Я, конечно, стала разубеждать его в этом, после чего он предложил мне соавторство. Мне было очень неудобно, хотя и лестно, принимать это предложение, поскольку я совершенно не была специалистом в данном вопросе. Я согласилась только для того, чтобы помочь Ю.И. опубликовать такой обзор. Перерыла массу литературы и написала часть обзора. Однако Ю.И. оказался прав – в УФН наш обзор отказались печатать. Но поскольку у нас было собрано очень много материала, мы решили написать вместо обзора книгу. С книгой тоже не все было гладко, так как нашлись противники ее опубликования (не буду называть их фамилии, хотя все они мне известны). Только благодаря академику Л.И. Седову наша книга увидела свет, и почти сразу же стала библиографической редкостью. Затем книга была переведена на английский язык и вышла в издательстве Kluwer Academic Publishers.

Во время конференции в Киеве в 1981 году мы несколько раз гуляли с Ю.И. вдоль Днепра, обсуждая планы предполагаемого обзора и разговаривая о жизни. В это время я убедилась, что Ю.И. является исключительно интересным человеком, обладающим большой широтой взглядов и интересов. С ним можно было разговаривать до бесконечности, причем на любую тему. Это мое впечатление сохранилось и укрепилось во время нашей совместной работы над обзором, а затем над книгой.

Я помню доклад Ю.И., сделанный им уже гораздо позднее на одной из конференций, о модели развития человеческого общества. Этот доклад вызвал исключительный интерес у слушателей. Он послужил началом целого цикла работ по математическим моделям природных и общественных процессов и создания уникального курса лекций по этим вопросам. Ю.И. много раз говорил мне, что считает себя математиком. Но, насколько я знаю, математики не занимаются разработкой моделей, они используют уже готовые модели. Это дело естествоиспытателей, причем естествоиспытателей с большой буквы. Таковым и является Юрий Исаакович.

Последние годы наши встречи с Ю.И. стали очень редкими. Но, когда во время этих встреч он рассказывает мне о своих творческих планах, это доставляет мне ни с чем не сравнимое удовольствие. Если бы записать эти беседы на пленку и дать кому-нибудь, кто не знает Ю.И., ее прослушать, я уверена, что у слушателя возникло бы впечатление, что это говорит очень молодой человек.

В заключение я хочу пожелать Юрию Исааковичу полностью осуществить свои уже намеченные планы и придумать что-нибудь еще, столь же заманчивое и интересное для всех нас.

Москва, 22.09.2005 Профессор МГУ *П.С. Ланда*

фото

фото

фото

фото

К фотографиям из архива Ю.И. Неймарка

1., 2., 4. Учителя по Горьковскому университету: А.А. Андронов, Г.С. Горелик, А.Г. Майер. Конец 1940-х годов.

3. После аспирантуры. Конец 1940-х годов.

5. Сотрудники и гости теоретического отдела Горьковского исследовательского физико-технического института (ГИФТИ, 1930), организованного и возглавляемого А.А. Андроновым, в преддверии создания Института прикладной математики и кибернетики (НИИ ПМК, 1964). Сидят, слева направо: С.В. Яблонский, Е.А. Леонтович-Андронова, Л.Н. Белюстина, Г.В. Аронович; стоят, слева направо: М.Я. Эйнгорин, Ю.И. Городецкий, Л.П. Шильников, С.Д. Киняпин, Н.Н. Леонов, Я.К. Любимцев, Ю.И. Неймарк, М.Л. Цетлин. Впоследствии Л.Н. Белюстина станет директором института, Ю.И. Городецкий – зам. директора по науке, Е.А. Леонтович-Андронова и Ю.И. Неймарк – зав. отделами и научными руководителями института. Начало 1960-х.

6. На рыбалке. Конец 1960-х – начало 1970-х годов.

7. С женой и детьми в летние каникулы, 1953 год.

8. На Волге. Конец 1960-х – начало 1970-х годов.

9. С Якубовичем В.А. на Международной конференции по нелинейным колебаниям. Киев, 1969 год.

10. На кафедре, 1980-е годы.

11. На семинаре, 1970-е годы.

12. С Айзерманом М.А., 1970-е годы.

13. У Цыпкина Я.З., 1970-е годы.

14. Сотрудники кафедры теории управления и динамики машин, 1976 год. До 1963 года именовалась кафедрой вычислительной математики и кибернетики, и на ее основе был создан первый в стране факультет вычислительной математики и кибернетики (ВМиК, 1963).

15. В лаборатории у стенда с магнитным подвесом. Конец 1970-х – начало 1980-х годов.

16. На конференции, 1980-е годы.

17. Юрии Исааковичи - учитель и аспирант (Неймарк и Городецкий), 1980-е годы.

18. В гостях у юбиляра В.В. Белецкий и И.И. Блехман, 2000 год.

19. После юбилея, слева направо: М.М. Коган, Д.В. Баландин, Ю.И. Неймарк, В.А. Брусин, В.П. Савельев, 2000 год.

Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 3, 2005 УДК 531.36

ЭФФЕКТИВНЫЕ КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГОМОКЛИНИЧЕСКИХ БИФУРКАЦИЙ В ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Г.А. Леонов

Сформулирована путевая бифуркационная задача. Проведено ее обсуждение для классического результата Ф.Трикоми о существовании гомоклинической бифуркации в диссипативной маятниковой системе. Сделан обзор результатов, решающих путевые гомоклинические бифуркационные задачи для системы Лоренца.

К 85-летию
профессора Ю.И. Неймарка

Каковы возможности аналитических методов исследования гомоклинических бифуркаций в диссипативных системах? Здесь в окрестности точки бифуркации мы, как правило, не имеем интегрируемых приближений, и поэтому методы малого параметра и теории возмущений, примененные в малой окрестности бифуркационного параметра, оказываются малопригодными для получения эффективных аналитических результатов.

Для диссипативных систем оказался плодотворным подход, восходящий к пионерской работе Ф.Трикоми [1] и его последователей [2–16].

Вначале сформулируем широко известную теорему Трикоми, затем обсудим путевую бифуркационную задачу и рассмотрим ее в некоторых случаях для системы Лоренца.

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \sin\theta = \gamma, \tag{1}$$

где α и γ – положительные параметры. Уравнение (1) описывает движение маятника в вязкой среде с постоянным внешним силовым моментом, работу синхронной электрической машины и системы фазовой автоподстройки частоты [17–23].

Эквивалентная уравнению (1) система

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= z, \\ \dot{z} &= -\alpha z - \sin\theta - \gamma \end{aligned} \tag{2}$$

при $\gamma < 1$ имеет седловое состояние равновесия $z = 0, \theta = \theta_0 + 2k\pi$, где число θ_0 удовлетворяет условиям

$$\sin\theta_0 = \gamma, \ \cos\theta_0 < 0.$$

Зафиксируем параметр $\gamma \in (0,1)$ и будем варьировать параметр $\alpha \in [0, +\infty)$. При $\alpha = 0$ система (2) интегрируема, и легко видеть, что для сепаратрисы $\theta(t)^+, z(t)^+$ седла $\theta = \theta_0, \ z = 0$, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{t\to+\infty} z(t)^+ = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \theta(t)^+ = 0,$$
$$z(t) > 0, \quad \forall\, t \in (T, +\infty)$$

(здесь T – некоторое число), существует некоторое число τ такое, что (рис. 1)

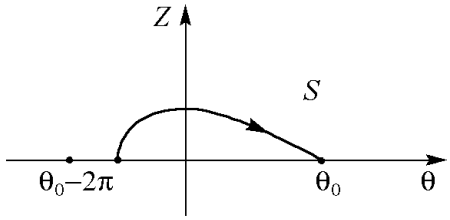


Рис. 1.

$$\begin{aligned} &z(\tau)^+ = 0, \ \ \theta^+(\tau) \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0), \\ &z(t)^+ > 0, \ \ \forall\, t > \tau. \end{aligned} \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь отрезок прямой

$$z = -K(\theta - \theta_0), \quad \theta \in [\theta_0 - 2\pi, \theta_0].$$

Легко видеть, что на этом отрезке выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &(z - K(\theta - \theta_0))^\bullet = -\alpha z + Kz - \sin\theta + \gamma = \\ &= (\theta - \theta_0)\left(-K(K - \alpha) + \frac{\gamma - \sin\theta}{\theta - \theta_0}\right). \end{aligned}$$

Используя очевидное неравенство

$$\left|\frac{\gamma - \sin\theta}{\theta - \theta_0}\right| \le 1, \quad \forall\, \theta \ne \theta_0$$

и предполагая, что

$$\alpha > 2, \ \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} < K < \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1},$$

получим оценку

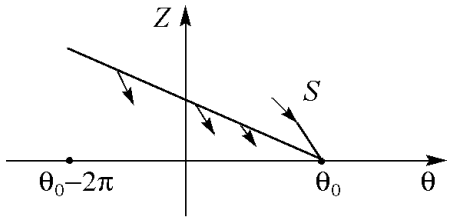


Рис. 2.

$$(z - K(\theta - \theta_0))^\bullet < 0 \qquad (4)$$

при $z = -K(\theta - \theta_0), \ \theta \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0)$. Из оценки (4) следует (рис. 2), что сепаратриса $\theta(t)^+, z(t)^+$ в полосе $\{z, \theta \,|\, \theta \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0)\}$ будет располагаться выше отрезка прямой $\{z, \theta \,|\, z = -K(\theta - \theta_0), \theta \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0)\}$. Отсюда следует, что при $\alpha > 2$ не существует числа τ, для которого выполнены соотношения (3).

Хорошо известно, что кусок траектории $S : \{z(t)^+, \theta(t)^+ \,|\, t \ge \tau\}$ непрерывно зависит от параметра α. Отсюда и из приведенных выше рассуждений вытекает следующий известный результат.

Теорема 1 (Ф.Трикоми [1]). *Для любого* $\gamma > 0$ *существует число* $\alpha(\gamma) \in (0, 2]$ *такое, что система (2) с такими параметрами* γ *и* $\alpha(\gamma)$ *имеет в цилиндрическом фазовом пространстве* $\{z, \theta \mod 2\pi\}$ *гомоклиническую траекторию*

$$\lim_{t\to+\infty} z(t) = \lim_{t\to-\infty} z(t) = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \theta_0, \ \lim_{t\to-\infty} \theta(t) = \theta_0 - 2\pi.$$

Проведем теперь некоторое обобщение рассмотренного здесь подхода. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x, d), \ x \in R^n, \ d \in R^m \tag{5}$$

с вектор-функцией $f(x, d)$. Евклидово пространство $\{x\}$ называют фазовым пространством, пространство $\{d\}$ – пространством параметров.

Пусть $\gamma(s), \ s \in [0, 1]$ – гладкий путь в пространстве параметров $\{d\}$. Сформулируем теперь обобщение подхода Ф.Трикоми.

Путевая бифуркационная задача. *Дан гладкий путь* $\gamma(s)$ *в пространстве параметров* $\{d\}$. *Существуют ли точки бифуркации на этом пути* $\{d\}$ *для системы (5)?*

В рассматриваемом нами случае точки бифуркации – это точки гомоклинической бифуркации. С точки зрения оценивания точек бифуркации – это выбор как можно более короткого пути. Чем короче путь, тем лучше оценка. Выбор пути часто диктуется рассматриваемой задачей. Приведем пример.

В теории фазовой синхронизации при рассмотрении уравнения (1) часто фиксируют α и варьируют γ (задача нахождения полосы захвата [17,18]). Заметим, что, как было показано ранее, при $\alpha > 2$ на пути $\gamma(s)$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$ не имеется точек гомоклинической бифуркации. Легко видеть, что при малых положительных α такие точки существуют.

Рассмотрим теперь систему Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь σ, b, r – положительные параметры, $r > 1$. Исследованию гомоклинических бифуркаций в системе Лоренца посвящены работы [24–31].

Рассмотрим гладкий путь $\sigma(s)$, $b(s)$, $r(s)$ в пространстве параметров системы (6). Обозначим через $x(t)^+, y(t)^+, z(t)^+$ сепаратрису седла $x = y = z = 0$, удовлетворяющую соотношениям

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty} z(t) = 0, \ x(t) > 0, \quad \forall\, t \le t_0,$$

где t_0 – некоторое число ($t_0 \ll 0$). В [31] доказан следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $2\sigma(s) > b(s)$, $\forall\, s \in [0, 1]$ *и для любого* $s \in [0, s_0)$ *существуют числа* $T(s) > \tau(s)$ *такие, что выполнены следующие соотношения:*

$$x(T)^+ = \dot{x}(\tau)^+ = 0, \tag{7}$$

$$x(t)^+ > 0,\ \forall\, t < T, \tag{8}$$

$$\dot{x}(t)^+ \neq 0,\ \forall t < T,\ t \neq \tau. \tag{9}$$

Предположим, что для $s = s_0$ не существует пары $T(s_0) > \tau(s_0)$ такой, что выполнены соотношения (7)–(9). Тогда при $s = s_0$ траектория $x(t)^+, y(t)^+, z(t)^+$ является гомоклинической

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)^+ = \lim_{t\to+\infty} y(t)^+ = \lim_{t\to+\infty} z(t) = 0.$$

При рассмотрении специального пути $b(s) \equiv b_0, \sigma(s) \equiv \sigma_0$, $r(s)\colon r(1) = 1$, $r(0) \gg 1$ ($r(0)$ – большое число) в [26,27,31] получен следующий результат.

Теорема 3. *Пусть*

$$2b_0 + 1 < 3\sigma_0. \tag{10}$$

Тогда для b_0, σ_0 существует такое s_0, что система (6) с $b = b_0, \sigma = \sigma_0, r = r(s_0)$ имеет гомоклиническую траекторию.

В [30] показано, что условие (10) является и необходимым для существования гомоклинической траектории.

Рассмотрим здесь другой специальный путь $\sigma(s) \equiv \sigma_0$, $r(s) \equiv r_0$, $b(s)$: $b(0) = 0$, $b(1) = 2\sigma_0$, $b(s) \in (0, 2\sigma_0)$, $\forall\, s \in (0,1)$.

Для применения теоремы 2 рассмотрим два предельных случая.

1) $|b(s) - 2\sigma_0| \leq \varepsilon$,

где ε – достаточно малое число,

2) $b(0) = 0$.

В первом случае хорошо известно [25,28], что сепаратриса седла $x(t)^+$, $y(t)^+$, $z(t)^+$ стремится при $t =\to +\infty$ к устойчивому состоянию равновесия и $x(t)^+ > 0$, $\forall\, t \in R^1$.

Во втором случае преобразуем систему (6) к некоторому специальному виду. Для этого сделаем следующую замену:

$$\widetilde{x} = \frac{1}{\nu}x,\ \widetilde{y} = \frac{\sigma}{\rho}(y - x),\ \widetilde{z} = \frac{1}{\kappa}(z - \frac{1}{2\sigma}x^2),\ \widetilde{t} = \frac{1}{\lambda}t,$$

$$\nu = \lambda\rho,\ \ \kappa = \frac{\rho}{\sigma\lambda\nu},\ \ \rho = \frac{\sqrt{2}}{\lambda^2},\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{\sigma(r-1)}}.$$

После такой замены система (6) с $b = 0$ примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{x}} &= \widetilde{y}, \\ \dot{\widetilde{y}} &= -A\widetilde{y} - \widetilde{x}\widetilde{z} + \widetilde{x} - \widetilde{x}^3, \\ \dot{\widetilde{z}} &= C\widetilde{x}^2, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$A = \frac{\sigma + 1}{\sqrt{\sigma - 1}},\ \ C = 2\sqrt{\frac{\sigma}{r-1}}.$$

Соотношения (7)–(9) здесь примут вид

$$\widetilde{x}(T)^+ = \widetilde{y}(\tau)^+ = 0, \tag{12}$$

$$\widetilde{x}(t)^+ > 0, \ \ \forall t < T, \tag{13}$$

$$\widetilde{y}(t)^+ \neq 0, \ \ \forall t < T, \ t \neq \tau. \tag{14}$$

При $\sigma = 10$, $r = 28$ в результате численного интегрирования сепаратрисы $\widetilde{x}(t)^+$, $\widetilde{y}(t)^+$, $\widetilde{z}(t)^+$ получено выполнение соотношений (12)–(14).

Таким образом, существует $s_0 \in (0,1)$ такое, что при $r_0 = 28$, $\sigma_0 = 10$ и $b = b(s_0)$ траектория $x(t)^+, y(t)^+, z(t)^+$ является гомоклинической.

Сформулируем следующую проблему.

Проблема. *Найти необходимые и достаточные условия выполнения условий (12)–(14) для системы (11).*

Отметим, что различные варианты путевой гомоклинической бифуркационной задачи для многомерных обобщений системы (2) решены в [32, Part 4. Existence of Homoclinic. Orbits]

Библиографический список

1. *Tricomi F.* Integrazione di unequazione differenziale presentatasi in electrotechnica // Annali della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa: Scienza Phys. e Mat. 1933. Vol. 2. P.1.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1965.
3. *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.
4. *Баутин Н.Н.* Качественные исследования одного уравнения ФАП // Прикл. математика и механика. 1970. Т.34, № 5. С.850.
5. *Белых В.Н., Некоркин В.И.* Качественные исследования системы трех дифференциальных уравнений теории фазовой синхронизации // Прикл. математика и механика. 1975. Т.39, вып. 4. С. 642.
6. *Белюстина Л.Н.* Об одном уравнении из теории электрических машин // Сборник памяти А.А.Андронова. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С.158.
7. *Белюстина Л.Н.* Исследование нелинейной системы ФАП // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т.2, № 2. С.63.
8. *Белюстина Л.Н.* О полосе захвата и численном исследовании точечных отображений в некоторых задачах синхронизации // Динамика систем. Горький: ГГУ, 1976. № 11. С.18.
9. *Белюстина Л.Н., Быков В.В., Кивелева К.Г., Шалфеев В.Д.* О величине полосы захвата системы ФАПЧ с пропорционально-интегрирующим фильтром // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т.13, № 4. С. 561.
10. *Белюстина Л.Н., Белых В.Н.* Качественное исследование динамической системы на цилиндре // Дифференц. уравнения. 1973. Т.9, № 3. С. 403.
11. *Губарь Н.А.* Исследование кусочно-линейных динамических систем с тремя параметрами // Прикл. математика и механика. 1961. Т.25, № 6. С.1011.

12. *Amerio L.* Studio asimptotika del moto un punto su una chiusa per azione diforze independenti dal tempo // Ann. R. Scuola Norm. sup. Piza, 1950. Vol. 3, № 3. P.17.
13. *Amerio L.* Determinazione della condizioni di stabilita per gli integrali di un'equazione interessante l'electrotecnica // Ann. di Matem. pura ed appl. 1949. Vol. 30, № 4. P.34.
14. *Hayes W.D.* On the equation for a damped pendulum under constant torque // Z. Ang. Math. Phys. 1953. Bd 4, № 5. S.398.
15. *Zeifert G.* On the existence of certain solutions of nonlinear differential equations // Z. Ang. Math. Phys. 1952. Bd 3, № 6. S.468.
16. *Zeifert G.* On stability questions for pendulum-like equations // Z. Ang. Math. Phys. 1956. Bd 7, № 3. S.238.
17. *Шахгильдян В.В., Белюстина Л.Н.* Системы фазовой синхронизации. М.: Радио и связь, 1982.
18. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
19. *Янко-Триницкий А.А.* Новый метод анализа работы синхронных двигателей при резкопеременных нагрузках. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1958.
20. *Гупта С.* Фазовая автоподстройка частоты // Труды Инст-та инж. электротехн. и радиотехн. 1975. Т.63, № 2. С.50.
21. *Stocker J.J.* Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems. New York: Interscience, 1950.
22. *Viterbi A.J.* Principles of coherent communications. New York: McGraw-Hill, 1966.
23. *Lindsey W.C.* Sinchronization systems in communication and control. New York : Prentice-Hall, 1972.
24. *Белых В.Н.* О бифуркации сепаратрис седла системы Лоренца // Дифференциальные уравнения. 1984. Т.20, № 10. С.1666.
25. *Leonov G.A., Reitman V.* Attraktoreingrenzung für nichtlineare systeme. Leipzig: Teubner, 1987.
26. *Леонов Г.А.* Об оценке параметров бифуркации петли сепаратрисы седла системы Лоренца // Дифференц. уравнения. 1988. Т.24, № 6. С.972.
27. *Леонов Г.А.* Об оценке бифуркационных значений параметров системы Лоренца // Успехи мат. наук. 1988. Т.43, № 3. С.189.
28. *Леонов Г.А.* О существовании гомоклинических траекторий в системе Лоренца // Вестн. СПб. ун-та. Математика, механика, астрономия. 1999, № 1. С.13.
29. *Hastings S.P., Troy W.C.* A shooting approach to chaos in the Lorenz equations // J. of Different. Equat. 1996. Vol. 127, № 1. P.41.
30. *Chen X.* Lorenz equations. Pt. 1. Existence and nonexistence of homoclinic orbits // SIAM J. Math. Analysis. 1966. Vol. 27, № 4. P.1057.
31. *Леонов Г.А.* Оценки аттракторов и существование гомоклинических орбит в системе Лоренца // Прикладная математика и механика. 2001. Т.65, вып. 1. С. 21.
32. *Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B.* Frequency-domain methods for nonlinear analysis. Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 1996.

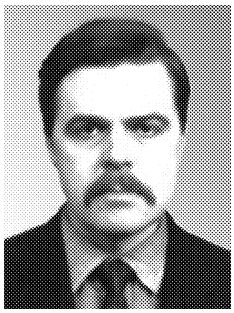
Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 2.06.2005

EFFECTIVE CRITERIA FOR THE EXISTENCE OF HOMOCLINIC BIFURCATIONS IN DISSIPATIVE SYSTEMS

G.A. Leonov

The path bifurcation problem is formulated. The application of it for the classical result of F. Tricomi on the existence of homoclinic bifurcations in a dissipative pendulum system is discussed. The survey of results concerning to the solving of the path homoclinic bifurcation problems for Lorenz system is given.



Леонов Геннадий Алексеевич – родился в Ленинграде (1947), окончил Ленинградский университет (1969). С 1971 года работает в Санкт-Петербургском государственном университете. В 1971 году защитил кандидатскую диссертацию и в 1983 году – докторскую. Область научных интересов: дифференциальные уравнения, теория управления, колебания, хаос. Опубликовал 10 монографий и 200 научных статей. Лауреат Государственной премии СССР (1986), премии технического университета Дрездена (1988). E-mail:leonov@math.spbu.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 3, 2005 УДК 517.9

БИФУРКАЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ НА ГРАНИЦЕ ХАОСА

С.П. Кузнецов, А.А. Майлыбаев, И.Р. Сатаев

Показано, что неподвижная точка уравнения ренормгруппы, отвечающая системе двух подсистем с однонаправленной связью – унимодального отображения с показателем степени экстремума κ и отображения, аккумулирующего сумму функций состояния первой подсистемы, претерпевает при изменении параметра κ бифуркацию удвоения периода, что приводит к рождению цикла периода 2 в уравнении ренормгруппы. При $\kappa = 2$ это решение отвечает ситуации на пороге возникновения хаоса, обозначаемой как критическое поведение типа C (*Kuznetsov and Sataev*, Phys. Lett., 1992, 236). На основе комбинации аналитических методов и численных расчетов построено и проанализировано асимптотическое разложение решения по степеням отклонения параметра κ от критического значения $\kappa_c = 1.984396$. Проведенное рассмотрение аналогично подходу, известному в теории фазовых переходов как ε-разложение, когда «тривиальная» неподвижная точка ренормгруппового преобразования претерпевает бифуркацию с появлением новой неподвижной точки, ответственной за универсальное критическое поведение с нетривиальными критическими индексами.

К 85-летию
профессора Ю.И. Неймарка

Введение

Одно из прогрессивных направлений в современной теоретической нелинейной динамике связано с применением для анализа перехода к хаосу метода ренормгруппы (РГ), вошедшего в обиход исследователей, начиная с классических работ Фейгенбаума [1, 2]. Этот подход позволяет вскрыть универсальные характеристики переходов к хаосу и установить законы подобия, определяющие свойства структур малого масштаба в фазовом пространстве и пространстве параметров у порога хаоса. РГ-анализ был развит, например, для каскадов удвоения периода в диссипативных и консервативных системах, для переходов через квазипериодические движения и перемежаемость [1–11].

Применение идей ренормгруппы, универсальности и скейлинга показало себя продуктивным в контексте многопараметрического анализа переходов к хаосу, разрабатываемого по аналогии с теорией бифуркаций и теорией катастроф [12–16]. В этом отношении классический каскад удвоений периода Фейгенбаума выступает как феномен коразмерности один, поскольку встречается как типичный в однопараметрических семействах нелинейных систем. Наряду с этим были обнаружены и описаны ситуации, имеющие более высокую коразмерность и допускающие анализ в терминах РГ-подхода. Поиск новых критических ситуаций на пороге хаоса представляет принципиальный интерес, хотя остается до сих пор, во многом, делом удачи. В этой связи представляется очевидной потребность выработки каких-либо общих принципов их нахождения.

Имея в виду, что идея ренормгруппы восходит к статистической физике и теории фазовых переходов, можно вспомнить, что одна из плодотворных линий рассуждения в этой области базируется на рассмотрении зависимости критических явлений от размерности пространства, трактуемой формально как непрерывный параметр [17, 18]. Во многих случаях существует критическая размерность, при которой «тривиальная» неподвижная точка РГ-преобразования претерпевает бифуркацию с появлением новой неподвижной точки, ответственной за универсальное критическое поведение с нетривиальными (неклассическими) критическими индексами, характерными для реальных фазовых переходов. В этом контексте удается развить систематический подход, основанный на теории возмущений с использованием разложения по степеням отклонения размерности от критического значения. Этот метод известен как ε-разложение и разработан К. Вильсоном (Нобелевская премия 1982 г.). По-видимому, аналогичная методика представляла бы интерес и в нелинейной динамике при анализе переходов к хаосу[1].

Данная статья посвящена рассмотрению бифуркации в уравнении РГ, описывающем удвоения периода в двумерных отображениях. Эта бифуркация отвечает рождению цикла периода два из неподвижной точки уравнения РГ и приводит к возникновению нового типа критического поведения на пороге хаоса. В разделе 1 мы формулируем двумерное обобщение уравнения Фейгенбаума – Цвитановича [5,6,14]. В разделе 2 рассматривается критическое поведение, служащее аналогом «тривиальной» неподвижной точки в теории фазовых переходов. Оно имеет место в системе двух одномерных отображений с однонаправленной связью, в которой первая подсистема представлена отображением, демонстрирующим удвоения периода по Фейгенбауму, а вторая отвечает отображению, реализующему вычисление интегральной характеристики – накапливающейся суммы функций от состояния первой подсистемы. В разделе 3 мы показываем, что модификация исходной модели с изменением показателя степени в точке экстремума отображения $\kappa = 2$ на непрерывно меняющийся параметр делает возможным бифуркационный анализ ситуации вблизи неподвижной точки, являющейся аналогом «тривиальной» неподвижной точки в теории фазовых переходов. При превышении этим параметром некоторого значения $\kappa_c = 1.984396$ (аналог критической размерности в теории фазовых переходов)

[1] В контексте нелинейной динамики, бифуркация в уравнении РГ ранее обсуждалась в другом аспекте, применительно к задаче о переходе к хаосу в модельной системе, описываемой одномерным квадратичным отображением под внешним воздействием, заданным последовательностью с фрактальными свойствами [19, 20].

неподвижная точка уравнения РГ претерпевает бифуркацию с рождением «нетривиального» решения – цикла периода два, то есть неподвижной точки двукратного РГ-преобразования. В разделе 4 мы устанавливаем природу критического поведения на пороге хаоса, связанного с этим решением. Оказывается, что оно отвечает за тип критичности, обнаруженный в двумерных необратимых отображениях и обозначенный как тип C (от слова «Cycle») [21, 22]. Представлены результаты численного решения уравнения РГ в виде асимптотического разложения по степеням отклонения параметра $\kappa = 2$ от критического значения κ_c. В заключении дается резюме результатов данной работы как примера применения бифуркационного анализа уравнения РГ и построения разложений по параметру отклонения от точки бифуркации, то есть подхода, аналогичного по своей идее методу ε-разложения в теории фазовых переходов.

1. Двумерное обобщение уравнения Фейгенбаума – Цвитановича

В контексте нелинейной динамики и анализа перехода к хаосу содержание метода ренормгруппы состоит, как известно, в следующем.

Пусть мы имеем зависящий от параметров оператор эволюции динамической системы на некотором временном интервале. Используя его, можно построить оператор эволюции на некотором большем интервале. Предположим, что удается подобрать параметры исходной системы так, что посредством масштабных замен переменных можно добиться, чтобы новый оператор эволюции совпадал или почти совпадал со старым. Процедура перехода от старого к новому оператору называется *РГ-преобразованием*, а набор значений параметров задает расположение *критической точки*. РГ-преобразование можно повторять многократно, получая тем самым последовательность операторов эволюции для все больших временных интервалов. В критической точке структура операторов эволюции на больших временах оказывается обусловленной не конкретным видом исходного оператора эволюции, а неподвижной точкой операторного уравнения, задающего РГ-преобразование (*универсальность*). Поскольку получаемые при многократном применении РГ-преобразования операторы эволюции одинаковы с точностью до масштабной замены, система демонстрирует на различных временах подобную динамику, проявляя свойство *скейлинга*.

Для перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода в классе систем, включающем одномерное квадратичное (логистическое) отображение, основное уравнение РГ представляет собой функциональное уравнение Фейгенбаума – Цвитановича

$$g(x) = \alpha g(g(x/\alpha)). \tag{1}$$

Здесь $g(x)$ есть универсальная функция, определяющая вид оператора эволюции перенормированной динамической переменной x за асимптотически большое число шагов дискретного времени 2^m, а $\alpha = -2.502907\ldots$ – это универсальная константа Фейгенбаума, характеризующая пересчет масштаба динамической переменной на каждом следующем уровне построения последовательности операторов эволюции.

Чтобы изучать типы критического поведения, присущие двумерным отображениям, необходимо иметь двумерное обобщение уравнения Фейгенбаума – Цвитановича. Выведем его в предположении, что в двумерном фазовом пространстве выбра-

на такая система координат, в которой масштабное преобразование, выполняемое по ходу РГ-анализа, является диагональным: $x \to x/\alpha$, $y \to y/\beta$. (Надо отметить, что в общем случае «скейлинговые переменные» x, y могут не совпадать с естественными переменными, в которых записано исходное исследуемое отображение.)

Пусть имеем оператор эволюции за 2^m шагов дискретного времени, заданный парой функций $G_m(x,y)$ и $F_m(x,y)$

$$\{x,\, y\} \mapsto \{G_m(x,y),\, F_m(x,y)\}, \tag{2}$$

причем полагаем, что $G_m(0,0) = 1$ и $F_m(0,0) = 1$. Применим это отображение дважды и выполним замену $x \to x/\alpha_m$, $y \to y/\beta_m$, где α_m и β_m – некоторые константы. В результате получаем новый оператор эволюции, заданный парой функций, которые обозначим $G_{m+1}(x,y)$ и $F_{m+1}(x,y)$. При этом константы α_m и β_m подберем так, чтобы новые функции также были нормированы на единицу в начале координат. Процедура перехода от старой пары функций к новой определяет РГ-преобразование

$$\begin{pmatrix} G_{m+1} \\ F_{m+1} \end{pmatrix} = RG \begin{pmatrix} G_m \\ F_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_m G_m(G_m(x/\alpha_m, y/\beta_m), F_m(x/\alpha_m, y/\beta_m)) \\ \beta_m F_m(G_m(x/\alpha_m, y/\beta_m), F_m(x/\alpha_m, y/\beta_m)) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\alpha_m = 1/G_m(G_m(0,0), F_m(0,0)), \quad \beta_m = 1/F_m(G_m(0,0), F_m(0,0)).$$

Критическое поведение может ассоциироваться с неподвижной точкой системы рекуррентных функциональных уравнений (3), для которой будут справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha G(G(x/\alpha, y/\beta), F(x/\alpha, y/\beta)) \\ \beta F(G(x/\alpha, y/\beta), F(x/\alpha, y/\beta)) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\alpha = 1/G(G(0,0), F(0,0)),\ \beta = 1/F(G(0,0), F(0,0)),$$

или с периодическим решением – циклом.

С принципиальной точки зрения, различие между ситуациями неподвижной точки и цикла не очень существенно. В самом деле, цикл периода p можно интерпретировать как неподвижную точку модифицированного преобразования РГ, которое эквивалентно p шагам преобразования удвоения и состоит в переходе от исходного оператора эволюции к оператору, отвечающему 2^p итерациям.

Система функциональных уравнений (4) или аналогичная система уравнений для цикла может быть решена численно. Для этого все фигурирующие в уравнениях функции представляются конечными полиномиальными аппроксимациями. Собственно уравнения сводятся тогда к системе конечного числа нелинейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения. Решение производится на компьютере с привлечением, например, многомерного метода Ньютона. Результатом решения служит набор коэффициентов разложения и константы перенормировки α и β.

Следующий шаг в проведении РГ-анализа – исследование малых возмущений стационарного решения – неподвижной точки или цикла $\{G_m(x,y), F_m(x,y)\}$. Такие возмущения возникают при сдвиге по одному или нескольким параметрам из критической точки. Это, по существу, задача исследования неподвижной точки или цикла на устойчивость.

Пусть $\{G_m(x,y), F_m(x,y)\}$ есть стационарное решение периода p. (В частности, неподвижной точке соответствует $p = 1$.) Выполняя в уравнениях (3) подстановку $\{G_m(x,y) + \varepsilon u_m(x,y),\ F_m(x,y) + \varepsilon v_m(x,y)\}$, где ε – малый параметр, и пренебрегая членами выше первого порядка по ε, можно получить линейное уравнение для возмущений стационарного решения $u_m(x,y), v_m(x,y)$ вида

$$\begin{pmatrix} u_{m+1} \\ v_{m+1} \end{pmatrix} = L_m \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Здесь L_m – линейные операторы, образующие последовательность периода p, вид которых определяется только функциями G_m, F_m. (Явное выражение для L_m не приводим ввиду его громоздкости.)

Решение уравнения (5) можно искать в виде $\begin{pmatrix} u_{m+pn} \\ v_{m+pn} \end{pmatrix} = \nu^n \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}$, где ν – собственное значение оператора $L = \prod_{i=1}^{p} L_i = L_p L_{p-1} ... L_1$, а набор $\begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}$, $m = 1, \ldots, p$ задает собственный вектор.

Среди собственных мод нужно выделить существенные, которые имеют собственные числа по абсолютной величине большие 1 и определяют поэтому асимптотику решения уравнения (5) при больших m. При этом следует исключить те решения, которые ассоциируются с инфинитезимальными заменами переменных. Число M оставшихся мод определяет *коразмерность* типа критичности: это минимальное количество управляющих параметров, при котором данная критическая ситуация может встретиться как типичный феномен в какой-то точке пространства параметров. (В самом деле, требуя, чтобы коэффициенты при M существенных собственных векторах обратились в ноль, мы задаем точно M условий на параметры исходного отображения.)

2. Универсальные свойства интегральных характеристик на границе хаоса

Рассмотрим динамическую систему, описываемую гладким одномерным отображением

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_n \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

и дополним ее уравнением

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n), \tag{7}$$

где y_n – новая переменная, а $f(x)$ – некоторая гладкая функция. При задании начального условия $y_0 = 0$ величина y_n в каждый момент дискретного времени n определяет, очевидно, интегральную характеристику – сумму значений функции $f(x)$ от

состояний системы (6) вида $y_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$. В физических системах такой характеристикой может быть, например, совершенная системой работа или энергия испущенного излучения.

Вместе уравнения (6) и (7) образуют двумерную динамическую систему, составленную из двух элементов с однонаправленной связью.

Предположим, что функции $g(x)$ и $f(x)$ зависят гладким образом от вещественных параметров A и B, соответственно. В уравнении (7) параметр B в простейшем случае может входить аддитивно. Относительно первой подсистемы (6) предположим, что при увеличении параметра A в ней реализуется каскад бифуркаций удвоения периода притягивающих орбит с переходом к хаосу по Фейгенбауму в точке накопления бифуркаций $A = A_c$. Известно, что в критической точке A_c система (6) обладает рядом универсальных свойств [1,2].

Покажем, что при правильном выборе параметра $B = B_c$ динамика переменной y_n также обладает универсальными свойствами. Чтобы найти критическое значение B_c, рассмотрим сходящуюся к критической точке $A = A_c$ последовательность значений параметра A_m такую, что при каждом $A = A_m$ отображение (6) имеет устойчивый цикл периода $k = 2^m$: $x_1 \to \cdots \to x_k \to x_1 = g(x_k)$. Тогда $y_{Nk} = N \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i)$. Если $\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i) \neq 0$, то значение суммы $y_{lk} \to \infty$ при увеличении N. Мы можем, однако, подобрать параметр B_m так, чтобы $\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i) = 0$. (В случае, когда параметр B входит в уравнение аддитивно, это условие сводится к элементарному уравнению для B_m.) При $A_m \to A_c$ последовательность B_m стремится к пределу B_c.

Применим для анализа системы (6), (7) ренормгрупповой подход. В нашем случае

$$G(x,y) = g(x), \quad F(x,y) = y + f(x). \tag{8}$$

Используя (3), найдем

$$RG\begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = RG\begin{pmatrix} g(x) \\ y + f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha g\left(g(x/\alpha)\right) \\ y + \beta\Big(f(x/\alpha) + f(g(x/\alpha))\Big) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Таким образом, оператор RG не меняет структуры отображения как системы двух элементов с однонаправленной связью (8). Если новые функции $\alpha g(g(x/\alpha))$ и $\beta\big(f(x/\alpha) + f(g(x/\alpha))\big)$ совпадают с исходными $g(x)$ и $f(x)$, то мы имеем неподвижную точку РГ-преобразования. Из (9) следует, что неподвижная точка может иметь вид (8), где функция $g(x)$ определяются уравнением Фейгенбаума – Цвитановича (1), а функция $f(x)$ – уравнением

$$f(x) = \beta\Big(f(x/\alpha) + f(g(x/\alpha))\Big). \tag{10}$$

Известное решение уравнения (1), полученное Фейгенбаумом, имеет вид [1–4]

$$g(x) = 1 - 1.5276x^2 + 0.1048x^4 + 0.0267x^6 - 0.0035x^8 + 0.0001x^{10} + \cdots \tag{11}$$

причем константа ренормализации равна $\alpha = -2.502908$. Численное решение функционального уравнения (11), согласно результатам проведенных нами расчетов, представляется в виде

$$f(x) = 1 - 2.4410x^2 + 0.0987x^4 + 0.1445x^6 - 0.0207x^8 + 0.0002x^{10} + \cdots , \quad (12)$$

и при этом $\beta = -4.586197$.

Анализ задачи о малых возмущениях неподвижной точки РГ-преобразования, определенной выражениями (8), (11), (12), дает четыре существенных собственных вектора с собственными значениями $|\nu| \geq 1$: [2]

$$\begin{aligned}
&\nu_1 = 2\beta = -9.1724, && u_1(x,y) = 0, && v_1(x,y) = 1 - f(x);\\
&\nu_2 = \delta = 4.6692, && u_2(x,y) = h(x), && v_2(x,y) = w(x);\\
&\nu_3 = 2, && u_3(x,y) = 0, && v_3(x,y) = y + z(x);\\
&\nu_4 = \delta/\beta = -1.0181, && u_4(x,y) = yp(x) + q(x), && v_4(x,y) = yr(x) + s(x),
\end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}
h(x) &= \ \ 1.2642x^2 - 0.1800x^4 - 0.1010x^6 + 0.0174x^8 - 0.0004x^{10} - 0.0002x^{12} + \cdots ,\\
w(x) &= \ \ 1.2183x^2 + 0.0346x^4 - 0.4959x^6 + 0.0943x^8 - 0.0007x^{10} - 0.0020x^{12} + \cdots ,\\
z(x) &= -0.8430x^2 - 0.0194x^4 + 0.1394x^6 - 0.0210x^8 + 0.0009x^{10} + \cdots ,\\
p(x) &= -2.6480 + 0.8623x^2 + 0.1339x^4 - 0.0386x^6 + 0.0025x^8 + 0.0001x^{10} + \cdots ,\\
q(x) &= \ \ 0.9500x^2 + 0.2131x^4 - 0.1843x^6 + 0.0212x^8 + 0.0001x^{10} + -0.0002x^{12} \cdots ,\\
r(x) &= -4.1186 + 1.8551x^2 + 0.7732x^4 - 0.2247x^6 + 0.0132x^8 + 0.0031x^{10} - 0.0005x^{12} \cdots ,\\
s(x) &= -1,4507x^2 + 5,4327x^4 - 1,7091x^6 + 0.0796x^8 + 0.0216x^{10} - 0.0033x^{12} + \cdots .
\end{aligned} \quad (14)$$

Охарактеризуем каждый из перечисленных типов возмущений, выводящих систему из критической точки.

Первая собственная функция, с собственным значением ν_1, отвечает за добавку во втором отображении, которая приводит к неограниченному росту y_n при больших n. Следующее собственное значение $\nu_2 = \delta = 4.6692016$ совпадает с известным из теории Фейгенбаума и, очевидно, связано с переходом к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода в первом отображении. Функция $h(x)$ представляет собой собственную функцию, известную в теории Фейгенбаума. Функция с собственным значением $\nu_3 = 2$ отвечает за изменение коэффициента при y во втором отображении. Наконец, собственная функция для $\nu_4 = \delta/\beta$ вводит зависимость от y в первое отображение.

Как можно заключить, возмущения, ассоциирующиеся с ν_1 и ν_2, не нарушают структуру отображения как системы с однонаправленной связью вида (8). Следовательно, в этом классе систем коразмерность рассматриваемого типа критичности

[2] Из этого перечня исключены собственные решения, связанные с заменами координат, в частности, $\nu_5 = \alpha = -2.5029$ ассоциируется с заменой $x \to x + \varepsilon(1 - x)$ и $\nu_6 = \beta/\alpha = 1.8323$ – с заменой $y \to y + \varepsilon(x - y)$.

равна 2. В самом деле, данный режим реализуется при подобранных надлежащим образом значениях двух параметров: $A = A_c$ и $B = B_c$. При этих значениях параметров (возможно, после линейной замены координат, связанной с несущественными собственными значениями) отображение общего вида (6), (7) при многократном действии РГ-оператора стремится к неподвижной точке, определяемой соотношениями (8), (11), (12).

Рассмотрим орбиту отображения (6) с функцией (11), стартующую из точки $x_0 = 0$. Эта орбита принадлежит аттрактору на границе хаоса [1,2]. Используя уравнение (1), находим

$$\begin{gathered} x_0 = 0, \;\; x_1 = g(0) = 1, \;\; x_1 = g^2(0) = g(0)/\alpha = 1/\alpha, \\ x_2 = g(x_2) = g(g(0)/\alpha) = g(1/\alpha), \ldots \end{gathered} \tag{15}$$

Тогда из уравнения (10) следует:

$$\begin{aligned} 1 = f(0) &= \beta(f(0) + f(g(0))) = \beta(f(x_0) + f(x_1)) \\ &= \beta^2(f(0) + f(g(0)) + f(g(0)/\alpha) + f(g(g(0)/\alpha))) \\ &= \beta^2(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) \\ &\vdots \\ &= \beta^m \textstyle\sum_{i=0}^{2^m-1} f(x_i) = \beta^m y_{2^m}. \end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом, $y_{2^m} = 1/\beta^m$, то есть функция (10) обеспечивает для больших n ограниченность y_n на аттракторе, что было принято при определении критического значения параметра $B = B_c$ в системе (6), (7).

В качестве конкретного примера рассмотрим случай, когда в первом уравнении (8) фигурирует функция $x_{n+1} = 1 - Ax_n^2$, отвечающая логистическому отображению на границе хаоса при $A = A_c = 1.401155189092$, а во втором – функция $f(x) = x - B$. Критическое значение параметра B определяется как $B_c = \lim_{m\to\infty}(1/2^m)\sum_{i=0}^{2^m-1} x_i$, где $x_0 = 0$. Расчеты показывают, что $B_c = 0.3760720508$. Для того, чтобы наблюдать сходимость двумерного отображения к универсальной форме (8), необходимо произвести замену координаты $y = \tilde{y} - x$ (для исключения неустойчивости, связанной с несущественным собственным значением ν_5). Тогда второе отображение принимает вид $\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + 1 - A_c x_n^2 - B_c = \tilde{y}_n + \tilde{x}_{n+1} - B_c$. При этом функция $1 - A_c x_n^2 - B_c$, как и универсальная функция (12), имеет экстремум при $x = 0$.

Рис. 1, *а* иллюстрирует процесс сходимости функций $f(x)$ к универсальной функции (12) под действием РГ-преобразования. Универсальная функция представлена широкой серой линией. Видно, что уже после одной или двух итераций отличие от универсальной функции едва заметно. Переменная y_n является суммой отклонений всех предшествующих состояний системы x_n от среднего значения B_c. Универсальность означает, что положение системы и сумма отклонений на 2^m-м шаге асимптотически совпадает с теми же величинами на 2^{m+1}-м шаге при ренормализации с коэффициентами $1/\alpha$ и $1/\beta$. Для больших m эти величины описываются универсальными функциями (11) и (12). На рис. 1, *б* показана сходимость к универ-

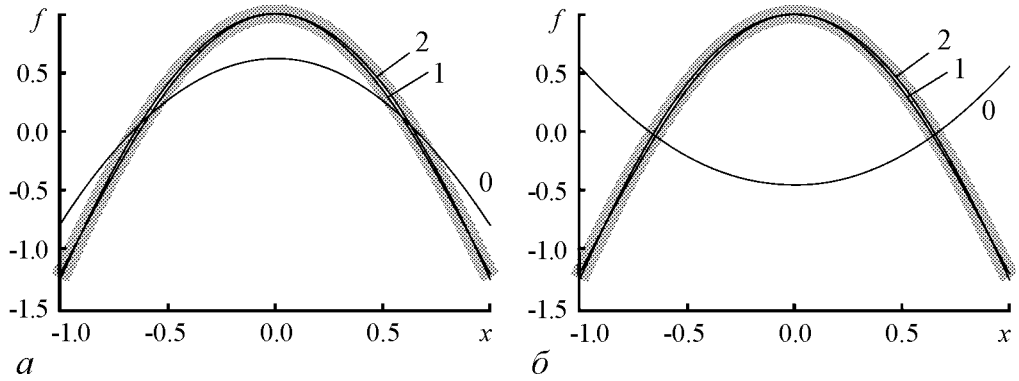


Рис. 1. Сходимость интегральных характеристик к универсальной функции для логистического отображения

сальной функции в случае $f(x) = x^2 - B$ (то есть суммируются отклонения квадратов состояний $x_1, \ldots, x_n$ от их среднего значения). Для этого случая критическое значение параметра $B_c = 0.4452953917$.

3. Бифуркация неподвижной точки ренормгруппового оператора

Если мы рассмотрим неподвижную точку преобразования РГ, заданную соотношениями (8), (11), (12), в пространстве двумерных отображений общего вида $x \mapsto G(x, y)$, $y \mapsto F(x, y)$, то с ней ассоциируется, очевидно, класс универсальности коразмерности 4. Это определяется наличием четырех существенных собственных значений (13). Обозначим данный класс универсальности FS (F означает универсальность Фейгенбаума для первого отображения, а S – правило суммирования для второго отображения).

Интересное наблюдение состоит в том, что одно из существенных собственных значений чрезвычайно близко к минус 1: $\nu_4 = \delta/\beta = -1.018$. Это указывает на близость ситуации к бифуркации удвоения периода в уравнении РГ.

Возникает идея модифицировать РГ-преобразование, введя непрерывную зависимость от некоторого параметра так, чтобы при некотором его значении достигалась точка бифуркации. Бифуркация состояла бы в возникновении около неподвижной точки типа FS периодического решения (цикла) периода 2.

Чтобы прийти к желаемой модификации, уместно вспомнить, что одно из первых получивших отражение в литературе обобщений теории Фейгенбаума состояло в рассмотрении бифуркаций удвоения периода в одномерных отображениях с экстремумом, степень которого отличалась от 2 и давалась вещественным параметром: $x_{n+1} = 1 - \lambda|x_n|^\kappa$, где $\kappa > 1$. Оказывается, что в этом случае имеет место качественно такой же переход к хаосу через последовательность удвоений периода, как в квадратичном отображении, но с другими значениями констант α и δ, зависящими от κ [23–25]. Таким образом, в качестве параметра, управляющего бифуркацией в уравнении РГ, можно взять показатель степени исходного отображения в точке экстремума.

Для введенной нами неподвижной точки двумерного уравнения РГ типа FS имеют место соотношения $G(x, y) = g(x) = \tilde{g}(x^2)$, $F(x, y) = y + f(x) = y + \tilde{f}(x^2)$,

где $\tilde{g}$, $\tilde{f}$ – гладкие функции. Рассмотрим более общую форму решения в виде:

$$G_\kappa(x,y) = \tilde{g}(|x|^\kappa), \quad F_\kappa(x,y) = y + \tilde{f}(|x|^\kappa). \tag{17}$$

Ясно, что $\kappa = 2$ отвечает рассматриваемому выше случаю. Функции $\tilde{g}(|x|^\kappa)$ и $\tilde{f}(|x|^\kappa)$ имеют экстремум при $x = 0$; они дифференцируемы по x один раз при $1 \le \kappa < 2$ и два раза при $\kappa \ge 2$. При изменении параметра κ функции, определяющие решение в виде неподвижной точки $\tilde{g}$, $\tilde{f}$, меняются. В результате изменяются и собственные значения линеаризованного ренормгруппового оператора, которые даются выражениями (13), где δ и β зависят от κ.

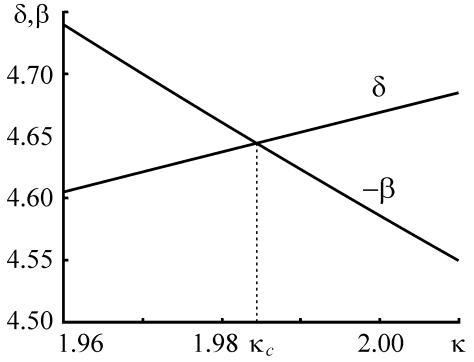


Рис. 2. Зависимость собственного значения δ и константы ренормализации β от параметра κ.

На рис. 2 представлена зависимость[3] δ и $-\beta$ от κ. При $\kappa_c = 1.984396$ мы имеем $\delta = -\beta = 4.644444$ и, следовательно, $\nu_4 = \delta/\beta = -1$. Таким образом, κ_c – это и есть искомая точка бифуркации удвоения периода для оператора RG. При меньших значениях $\kappa < \kappa_c$ собственное значение $|\nu_4| < 1$. В этой области коразмерность класса универсальности, описываемого неподвижной точкой (17), становится равной 3.

4. Рождение нового класса универсальности

Введенный параметр κ определяет тип особенности решения (17) в точке $x = 0$, в то время как преобразование РГ формально от κ не зависит. Можно перейти к математически эквивалентной формулировке задачи, модифицировав ее так, чтобы преобразование РГ зависело явно от κ и действовало в пространстве гладких двумерных отображений. Для этого введем отображения $\tilde{G}_\kappa$ и $\tilde{F}_\kappa$, связанные с G_κ и F_κ соотношениями

$$G_\kappa(x,y) = \tilde{G}_\kappa(|x|^\kappa, y), \quad F_\kappa(x,y) = \tilde{F}_\kappa(|x|^\kappa, y). \tag{18}$$

В новых обозначениях решение, отвечающее неподвижной точке (17), принимает вид

$$\tilde{G}_\kappa(x,y) = \tilde{g}(x), \quad \tilde{F}_\kappa(x,y) = y + \tilde{f}(x), \tag{19}$$

где $\tilde{g}$ и $\tilde{f}$ – гладкие функции. Подставив (18) в (3), найдем эквивалентную форму для оператора RG в терминах отображений $\tilde{G}_\kappa$, $\tilde{F}_\kappa$:

$$RG_\kappa \begin{pmatrix} \tilde{G}_\kappa \\ \tilde{F}_\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\tilde{G}_\kappa\left(\left|\tilde{G}_\kappa(x/|\alpha|^\kappa, y/\beta)\right|^\kappa,\ \tilde{F}_\kappa(x/|\alpha|^\kappa, y/\beta)\right) \\ \beta\tilde{F}_\kappa\left(\left|\tilde{G}_\kappa(x/|\alpha|^\kappa, y/\beta)\right|^\kappa,\ \tilde{F}_\kappa(x/|\alpha|^\kappa, y/\beta)\right) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\alpha = 1\Big/\tilde{G}_\kappa\left(\left|\tilde{G}_\kappa(0,0)\right|^\kappa, \tilde{F}_\kappa(0,0)\right), \quad \beta = 1\Big/\tilde{F}_\kappa\left(\left|\tilde{G}_\kappa(0,0)\right|^\kappa, \tilde{F}_\kappa(0,0)\right).$$

[3]Один способ получения этой зависимости состоит в том, чтобы провести аккуратное вычисление констант δ и β при различных κ. При этом δ вычисляется по методике Фейгенбаума, а β – по алгоритму, описанному в разделе 1. Другой, существенно более точный метод основан на численном решении уравнений РГ. Нами были реализованы оба метода и показано, что они дают одинаковые результаты.

Легко проверить, что новый оператор RG_κ переводит гладкие отображения $\tilde{G}_\kappa$, $\tilde{F}_\kappa$, взятые в некоторой окрестности неподвижной точки (19), в гладкие отображения. (Особенности, связанные с нецелой степенью κ, возникают вне существенной для рассматриваемой динамики области $|x| < 1$, $|y| < 1$.) Теперь оператор RG_κ зависит явно от κ, а отображения $\tilde{G}_\kappa$, $\tilde{F}_\kappa$ принадлежат при всех κ пространству гладких отображений.

В точке бифуркации κ_c неподвижная точка РГ-преобразования (19) задается функциями

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &= 1 - 1.5233x + 0.1038x^2 + 0.0257x^3 - 0.0033x^4 + 0.0001x^5 + \cdots, \\ \tilde{f}(x) &= 1 - 2.4366x + 0.1003x^2 + 0.1403x^3 - 0.0198x^4 + 0.0004x^5 + \cdots, \end{aligned} \tag{21}$$

которые были найдены численно. Собственные функции $\tilde{u}(x,y) = y\tilde{p}(x) + \tilde{q}(x)$ и $\tilde{v}(x,y) = y\tilde{r}(x) + \tilde{s}(x)$, отвечающие критическому собственному значению $\nu_4 = -1$ оператора RG_κ, выражаются через

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x) &= -2.6331 + 0.8555x + 0.1285x^2 - 0.0367x^3 + 0.0025x^4 + 0.0001x^5 + \cdots, \\ \tilde{q}(x) &= 0.9407x + 0.2196x^2 - 0.1802x^3 + 0.0199x^4 - 0.0002x^7 + \cdots, \\ \tilde{r}(x) &= -4.0983 + 1.8633x + 0.7482x^2 - 0.2168x^3 + 0.0145x^4 + 0.0016x^5 + \cdots, \\ \tilde{s}(x) &= -1.7429x + 5.8275x^2 - 1.7503x^3 + 0.0692x^4 + 0.0209x^5 - 0.0024x^7 + \cdots. \end{aligned} \tag{22}$$

Бифуркация удвоения периода в точке κ_c приводит к возникновению решения (цикла) периода 2:

$$(\tilde{G}^+_\kappa,\, \tilde{F}^+_\kappa) \xrightarrow{RG_\kappa} (\tilde{G}^-_\kappa,\, \tilde{F}^-_\kappa) \xrightarrow{RG_\kappa} (\tilde{G}^+_\kappa,\, \tilde{F}^+_\kappa). \tag{23}$$

Отображения $\tilde{G}^\pm_\kappa(x,y)$ и $\tilde{F}^\pm_\kappa(x,y)$ описываются асимптотическими рядами [26]

$$\begin{aligned} \tilde{G}^\pm_\kappa(x,y) &= \tilde{G}_\kappa(x,y) \pm \chi\tilde{G}^{(1)}(x,y) + \chi^2\tilde{G}^{(2)}(x,y) \pm \chi^3\tilde{G}^{(3)}(x,y) + \chi^4\tilde{G}^{(4)}(x,y) \pm \cdots, \\ \tilde{F}^\pm_\kappa(x,y) &= \tilde{F}_\kappa(x,y) \pm \chi\tilde{F}^{(1)}(x,y) + \chi^2\tilde{F}^{(2)}(x,y) \pm \chi^3\tilde{F}^{(3)}(x,y) + \chi^4\tilde{F}^{(4)}(x,y) \pm \cdots, \end{aligned} \tag{24}$$

где $\chi = \sqrt{c(\kappa - \kappa_c)}$, а c – некоторая вещественная константа. В формуле (24) функции $\tilde{G}_\kappa$, $\tilde{F}_\kappa$ берутся в точке бифуркации, а $\tilde{G}^{(1)}(x,y) = \tilde{u}(x,y)$ и $\tilde{F}^{(1)}(x,y) = \tilde{v}(x,y)$ представляют собой собственные функции, отвечающие критическому собственному значению $\nu_4 = -1$. Условие нормировки для собственных функций было выбрано в виде $\tilde{u}(1,0) = \tilde{h}(1) = 1$. С использованием (21), (22) константа c может быть вычислена методами теории возмущений (см. Приложение 1):

$$c = 1.607. \tag{25}$$

Поскольку $c > 0$, бифуркация суперкритическая, то есть цикл периода 2 действительно возникает при $\kappa > \kappa_c$.

Используя аппроксимацию первого порядка (24), (25), мы получаем отображения $\tilde{G}^\pm_\kappa$, $\tilde{F}^\pm_\kappa$ для малых положительных $\kappa - \kappa_c$. Численно, с учетом непрерывности

по κ, эти отображения могут быть найдены и при больших значениях $\kappa - \kappa_c$. На рис. 3 показана полученная на основе таких расчетов бифуркационная диаграмма, где жирная линия обозначает аппроксимацию первого порядка (24), а тонкая линия отвечает результатам численных расчетов. Производя продолжение по параметру до значения $\kappa = 2$, находим решение периода 2 для оператора РГ. С учетом замены (18) это решение можно преобразовать к изначальной форме представления: $G^{\pm}(x,y) = \tilde{G}^{\pm}_{\kappa}(x^2,y)$, $F^{\pm}(x,y) = \tilde{F}^{\pm}_{\kappa}(x^2,y)$ (рис. 4).

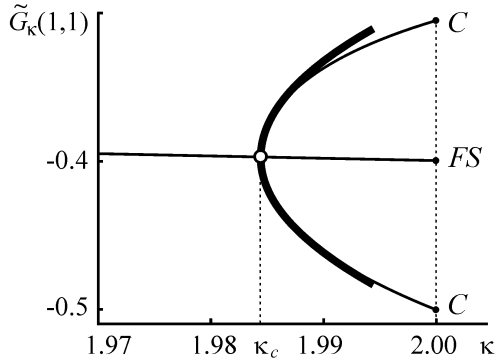


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для оператора RG_κ.

В первом порядке разложения по параметру $\sqrt{\kappa - \kappa_n}$ точность представления универсальных функций и констант при $\kappa = 2$ оказывается невысокой. С другой стороны, в рамках чисто аналитической теории получение высших членов разложения приводит к чересчур громоздким выражениям. В связи с этим нами была развита численная методика нахождения функций, фигурирующих в соотношении (24), в виде полиномиальных разложений (см. Приложение 2).

На рис. 5 приведены зависимости факторов скейлинга α_* и β_* от параметра κ для цикла периода 2 в приближении первого порядка (штрихпунктир) и четвертого порядка (пунктир). На рис. 6 показаны аналогичные данные для существенных собственных значений δ_1 и δ_2. Заметим, что результаты в приближении четвертого порядка уже хорошо согласуется с данными аккуратных численных расчетов (сплошная линия).

Сравнение данных, относящихся к случаю $\kappa = 2$, показывает, что они находятся в соответствии с результатами РГ-анализа типа критического поведения, выявленного ранее в работах [14, 21, 27] в двумерных необратимых отображениях и обозначенного как тип С (поскольку ему отвечает цикл периода 2 в уравнении

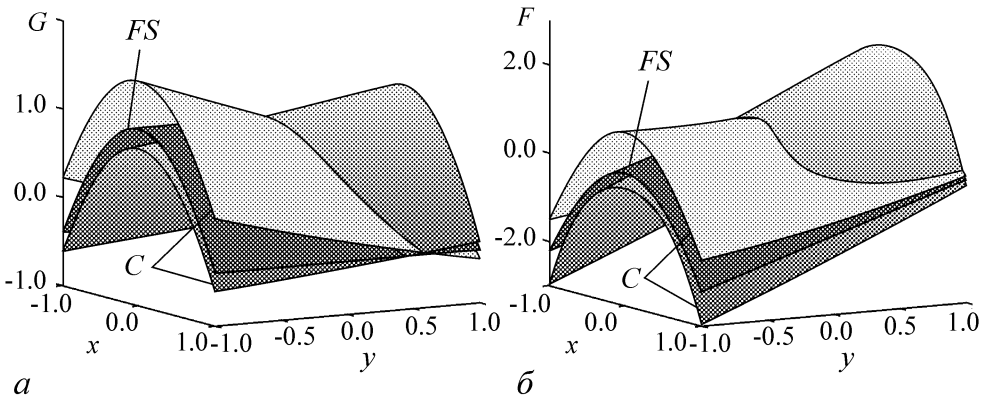


Рис. 4. Решение, отвечающее неподвижной точке FS, и цикл периода 2, соответствующий критическому поведению типа С, для оператора RG

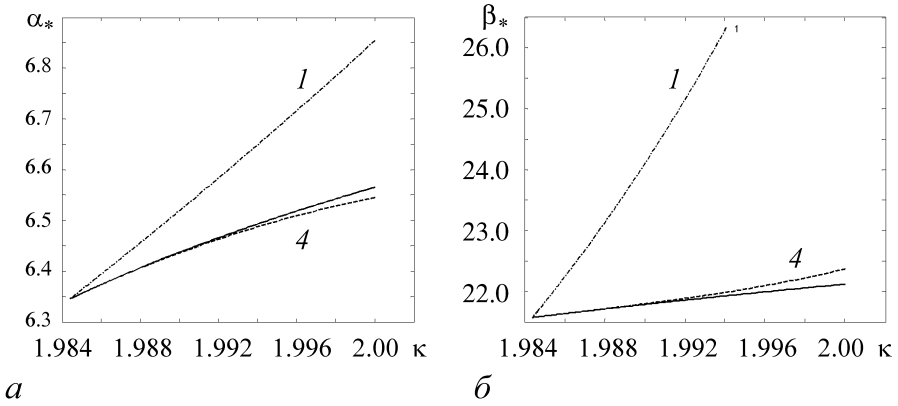


Рис. 5. Зависимости факторов скейлинга от к для 2-цикла

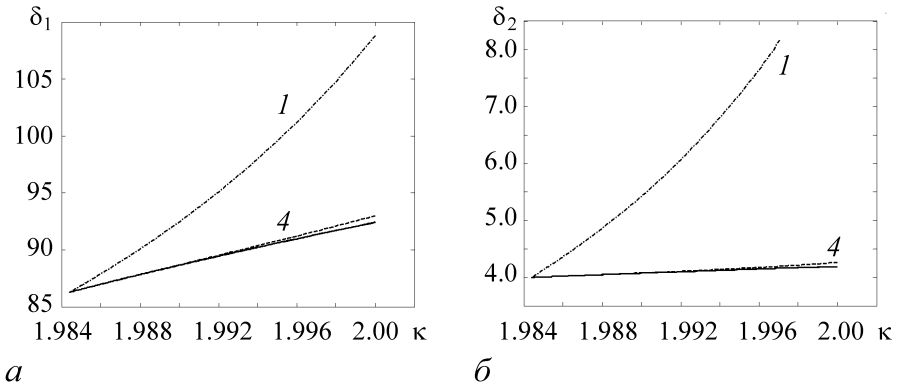


Рис. 6. Зависимости существенных собственных значений от к для 2-цикла

РГ). В табл. 1 приводятся численные данные при $\kappa = 2$ для факторов скейлинга, собственных значений, а также мультипликаторов периодических решений, реализующихся в критической точке. Результаты, полученные в приближении четвертого порядка сравниваются с результатами, относящимися к типу C [14, 21, 27].

Константы δ_1 и δ_2 появляются как собственные значения линеаризованного оператора РГ-преобразования за период цикла C. Это существенные собственные числа: поскольку они по модулю больше 1, они определяют асимптотическое поведение операторов эволюции вблизи критической точки при многократном выполнении РГ-преобразования. Наряду с ними линеаризованный оператор имеет также три несущественных собственных значения

$$\delta_3 = \beta_* = 22.1202, \quad \delta_4 = \alpha_* = 6.5653, \quad \delta_5 = \beta_*/\alpha_* = 3.3692,$$

которые, как можно показать, ассоциируются с инфинитезимальными заменами координат.

Из табл. 1 следует, что класс универсальности типа C имеет коразмерность 2. С другой стороны, выше было показано, что класс универсальности типа FS имеет коразмерность 4. Таким образом, при бифуркации удвоения периода коразмерность уменьшается на 2. Этот факт связан с разделением собственных значений на существенные и несущественные и не противоречит общей теории. Как оказывается,

Таблица 1

Значения констант, ассоциирующихся
с решением уравнения РГ-периода 2 при $\kappa = 2$

Универсальная константа	Аппроксимация 4-го порядка	Точное значение [21, 27, 15]
α_*	6.5452	6.56534993
β_*	22.3701	22.12022737
δ_1	93.0037	92.43126367
δ_2	4.2639	4.19244406
$\mu_1^{(1)}$	0.8501	0.84745051
$\mu_2^{(1)}$	-0.8150	-0.72525604
$\mu_1^{(2)}$	1.2019	1.17445893
$\mu_2^{(2)}$	-0.8667	-0.84886546

собственное значение δ_3 для класса C должно быть отнесено к несущественным. В точке бифуркации κ_c это собственное значение совпадает с квадратом собственного значения ν_2 класса FS. Таким образом, происходит метаморфоза существенного собственного значения ν_2 в несущественное собственное значения δ_3.

Этот феномен имеет следующее объяснение. Собственная функция, отвечающая несущественному собственному значению δ_3, описывает сдвиг по второй координате: $y \to y + \varepsilon$. Этот сдвиг не влияет на первые члены $\tilde{G}_\kappa$, $\tilde{F}_\kappa$ в разложениях (24), так как они имеют вид (19). В результате, возмущение отображения при рассматриваемом сдвиге по координате имеет порядок $O(\varepsilon\chi)$. Но $\chi = 0$ в критической точке κ_c. Это означает, что в точке бифуркации собственное значение δ_3 теряет связь со сдвигом по координате.

Заключение

Исследование, предпринятое в настоящей работе, представляет собой пример применения бифуркационного анализа в отношении решений уравнения РГ – двумерного обобщения уравнения Фейгенбаума – Цвитановича, которое описывает критическое поведение на пороге возникновения хаоса через последовательность бифуркаций удвоения периода.

Показано, что неподвижная точка уравнения РГ, отвечающая системе двух подсистем с однонаправленной связью – унимодального отображения с показателем степени экстремума κ и отображения, аккумулирующего сумму функций состояния первой подсистемы, претерпевает при изменении параметра κ бифуркацию удвоения периода и дает начало решению уравнения РГ в виде цикла периода два. При $\kappa = 2$ это решение отвечает ситуации на пороге рождения хаоса, введенной в рассмотрение в работах [14, 20, 21] и обозначаемой как критическое поведение типа C. Тем самым внесена определенная ясность в механизм появления данного типа поведения.[4]

[4]Примеры реалистичных моделей, демонстрирующих тип критического поведения C, обсуждаются в работах [27, 28].

На основе комбинации аналитических методов и численных расчетов построено и проанализировано асимптотическое разложение решения по степеням отклонения параметра κ от критического значения $\kappa_c = 1.984396$. Тот факт, что решению уравнения РГ, связанному с критическим поведением типа С, отвечает ситуация, близкая к точке бифуркации, позволяет объяснить ряд особенностей этого типа поведения. Это относится, в первую очередь, к самой природе решения, представляющего собой цикл периода два или, иначе говоря, неподвижную точку двукратно примененного РГ-преобразования. Кроме того, становится понятной близость соответствующих универсальных чисел, присущих типу С, к определенным комбинациям констант Фейгенбаума, а также медленность сходимости к универсальному асимптотическому режиму поведения при последовательных удвоениях периода из-за присутствия близкого к единице несущественного собственного числа.

С методологической точки зрения, проведенное рассмотрение аналогично подходу, развитому в свое время в теории фазовых переходов и известному как ε-разложение. Основой этого подхода служит анализ зависимости критических явлений от размерности пространства, трактуемой как непрерывный параметр. При этом «тривиальная» неподвижная точка РГ-преобразования претерпевает бифуркацию с появлением новой неподвижной точки, ответственной за универсальное критическое поведение с нетривиальными критическими индексами, характерное для реального фазового перехода. В нашей задаче аналогом параметра пространственной размерности выступает показатель степени экстремума в отображении, аналогом тривиальной неподвижной точки – решение уравнения РГ в виде системы двух отображений с однонаправленной связью, а нетривиальной неподвижной точки – рождающийся в результате бифуркации цикл периода два.

Как мы надеемся, бифуркационный анализ решений уравнений РГ может оказаться продуктивным общим методом для поиска и исследования разнообразных критических ситуаций, встречающихся при многопараметрическом анализе рождения хаоса и связанных не только с удвоениями периода, но также с переходами через перемежаемость и квазипериодичность.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №03-02-16074 и CRDF-BRHE Y1-M-06-03. А.А. Майлыбаев благодарит за поддержку Научно-образовательный центр нелинейной динамики и биофизики Саратовского государственного университета (REC-006).

Приложение 1

Начнем с методики построения конечномерной аппроксимации оператора РГ-преобразования. Для представления функций $\tilde{G}_\kappa, \tilde{F}_\kappa$ используем интерполяционные полиномы; при этом значения функций в узлах сетки образуют вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ (см. также Приложение 2). В рамках такого представления приходим к модифицированному преобразованию РГ, действующему в пространстве векторов конечной размерности: $\mathbf{x} \mapsto RG_\kappa(\mathbf{x})$.

Пусть $\mathbf{x}_c = RG_\kappa(\mathbf{x}_c)$ – стационарное решение преобразования РГ в точке бифуркации удвоения периода $\kappa = \kappa_c$. Следовательно, якобиан $\mathbf{L} = \partial RG_\kappa/\partial\mathbf{x}$, вычисленный при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$, $\kappa = \kappa_c$, имеет собственное значение $\nu = -1$; при этом абсолютная величина других собственных значений отлична от единицы. Правый и

левый собственные векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{l}$ для $\nu = -1$ определяются из уравнений $\mathbf{L}\mathbf{r} = -\mathbf{r}$ и $\mathbf{l}^T\mathbf{L} = -\mathbf{l}^T$. При значениях параметра κ, близких к κ_c, возникает периодическое решение – цикл периода 2 (или для краткости 2-цикл) $\mathbf{x}^+ \to \mathbf{x}^- = RG_\kappa(\mathbf{x}^+) \to \mathbf{x}^+ = RG_\kappa(\mathbf{x}^-)$, где векторы $\mathbf{x}^+$ и $\mathbf{x}^-$ представимы в виде рядов [26]:

$$\mathbf{x}^\pm = \mathbf{x}_c \pm \chi\mathbf{x}^{(1)} + \chi^2\mathbf{x}^{(2)} \pm \chi^3\mathbf{x}^{(3)} + \cdots, \quad \chi = \sqrt{c(\kappa - \kappa_c)}. \tag{26}$$

Знак вещественной константы c определяет тип бифуркации: при $c > 0$ бифуркация суперкритическая (2-цикл возникает при $\kappa > \kappa_c$), а при $c < 0$ – субкритическая (2-цикл возникает при $\kappa < \kappa_c$).

Подставим (26) в уравнение 2-цикла $RG_\kappa^2(\mathbf{x}^+) = \mathbf{x}^+$, разложим функцию RG_κ в ряд Тейлора по $\sqrt{\kappa - \kappa_c}$ и приравняем члены одного порядка. Из уравнения для членов первого порядка следует, что $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{r}$. Уравнение для членов второго порядка определяет вектор $\mathbf{x}^{(2)}$ в виде

$$\mathbf{x}^{(2)} = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}(\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_\kappa/c) + \alpha\mathbf{r}, \quad \mathbf{y}_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 RG_\kappa}{\partial x_i \partial x_j} r_i r_j, \ \mathbf{y}_\kappa = \frac{\partial RG_\kappa}{\partial \kappa}, \tag{27}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, α – неизвестный множитель, r_i – компонента вектора $\mathbf{r}$, и производные берутся при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$, $\kappa = \kappa_c$. Наконец, из уравнения для членов третьего порядка, умноженного слева на вектор $\mathbf{l}^T$, найдем неизвестную константу c в виде

$$c = -\frac{\mathbf{l}^T\left(D_2(\mathbf{r}, (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{y}_\kappa) + \mathbf{y}_{1\kappa}\right)}{\mathbf{l}^T\left(D_2(\mathbf{r}, (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{y}_2) + \mathbf{y}_3\right)}, \tag{28}$$

где

$$D_2(\mathbf{r}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 RG_\kappa}{\partial x_i \partial x_j} r_i w_j, \ \mathbf{y}_{1\kappa} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 RG_\kappa}{\partial x_i \partial \kappa} r_i, \ \mathbf{y}_3 = \frac{1}{6}\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 RG_\kappa}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} r_i r_j r_k. \tag{29}$$

В численных расчетах для линеаризации оператора RG_κ (матрицы $\mathbf{L}$) использовались аналитические соотношения, аналогичные формулам (5). Производные второго и третьего порядков определялись численно методом конечных разностей. В результате было получено значение константы $c = 1.607$.

Приложение 2

В точке удвоения периода при $\kappa_c = 1.9843964$ возникающее решение для цикла периода 2 допускает разложение в ряд по степеням параметра надкритичности $\chi = \sqrt{\kappa - \kappa_c}$:

$$\{\tilde{G}_\kappa^\pm, \tilde{F}_\kappa^\pm\} = \{\tilde{G}_\kappa, \tilde{F}_\kappa\} \pm \chi\{\tilde{G}^{(1)}, \tilde{F}^{(1)}\} + \chi^2\{\tilde{G}^{(2)}, \tilde{F}^{(2)}\} \pm \chi^3\{\tilde{G}^{(3)}, \tilde{F}^{(3)}\} + \cdots \tag{30}$$

Здесь $\{\tilde{G}_\kappa, \tilde{F}_\kappa\}$ отвечают неподвижной точке РГ для оператора RG_κ в момент бифуркации, а $\tilde{G}^{(1)}$, $\tilde{F}^{(1)}$, $\tilde{G}^{(2)}$, $\tilde{F}^{(2)}, \ldots$ – неизвестные функции. Вид разложения отличается от приведенного в основном тексте (24) лишь отсутствием множителя c.

Теория бифуркаций позволяет получить относительно простые выражения для функций первого порядка приближения, которые выражаются через собственные

функции оператора RG_k в точке бифуркации (22). Однако уже для функций второго порядка приближения выражения аналитической теории становятся слишком сложными. Поэтому нами была разработана процедура нахождения функций, фигурирующих в коэффициентах асимптотического ряда, на основе численных расчетов.

Для представления функций применялись интерполяционные полиномы Чебышева, при этом функция задавалась ее значениями в узлах сетки, определяемой нулями полинома Чебышева. Размерность сетки в наших вычислениях составляла 9×11 (по осям x и y, соответственно).

С применением метода Ньютона для системы нелинейных уравнений, сформулированных из условий равенства нулю невязки уравнений РГ в узлах интерполяции, были получены приближенные решения уравнений РГ.

Далее, с помощью стандартного метода продолжения решения по параметру была определена зависимость решений уравнений РГ от параметра κ и составлена таблица (примерно 150 точек) значений функций в узлах интерполяции в зависимости от параметра надкритичности $\chi = \sqrt{\kappa - \kappa_c}$. При этом положительные значения χ были сопоставлены одной ветви решения, а отрицательные – другой.

Затем зависимость значений функции в каждом узле интерполяции от параметра χ аппроксимировалась полиномом достаточно высокой степени (порядка 20) методом наименьших квадратов. Коэффициенты при низших степенях при этом демонстрировали сходимость к определенным величинам, которые и принимались в качестве значений функций $\tilde{G}_\kappa, \tilde{F}_\kappa, \tilde{G}^{(1)}, \tilde{F}^{(1)}, \tilde{G}^{(2)}, \tilde{F}^{(2)}, \ldots$ в соответствующих узлах интерполяции.

Полученные в результате приближенные функции, представленные в виде разложений по степеням x и y, приведены в табл. 2 и 3.

Таблица 2

Коэффициенты полиномиальных разложений (30) для отображений $\tilde{G}_\kappa^{\pm}$

$\tilde{G}_\kappa$	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
1	1.0000	-1.5233	0.1038	0.0257	-0.0033	0.0001	0.0000	0.0000
$\tilde{G}^{(1)}$	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
1	0	1.1923	0.2784	-0.2283	0.0252	0.0002	-0.0003	0.0000
y	-3.3373	1.0844	0.1627	-0.0462	0.0028	0.0003	-0.0001	0.0000
$\tilde{G}^{(2)}$	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
1	0	10.3376	-4.6218	0.1091	0.0794	-0.0144	0.0007	0.0001
y	-11.3919	3.9357	-1.1647	0.2021	-0.0014	-0.0041	0.0005	0.0000
y^2	2.1128	0.2376	-0.2247	0.0271	0.0013	-0.0006	0.0000	0.0000
$\tilde{G}^{(3)}$	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
1	0	-16.0014	-0.0440	7.1634	-1.3962	0.0647	0.0152	-0.0024
y	35.2183	-27.2956	-4.4609	2.1916	-0.2756	0.0011	0.0040	0.0000
y^2	14.4261	-2.5007	0.2422	0.0341	-0.0224	0.0033	0.0000	0.0000
y^3	-0.0629	-0.4572	0.1126	-0.0002	-0.0033	0.0000	0.0000	0.0000
$\tilde{G}^{(4)}$	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
1	0	-250.886	135.838	-14.306	-0.833	0.601	-0.093	0.0000
y	265.233	-139.381	54.163	-13.140	0.675	0.268	-0.051	0.0000
y^2	-23.228	-19.108	14.140	-2.327	-0.014	0.055	0.000	0.0000
y^3	-3.843	-0.985	0.453	-0.087	0.009	0.000	0.000	0.0000
y^4	-0.325	0.216	-0.016	-0.009	0.000	0.000	0.000	0.0000

Таблица 3

Коэффициенты полиномиальных разложений (30) для отображений $\tilde{F}_{\text{к}}^{\pm}$

$\tilde{F}_{\text{к}}$	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
1	1	-2.4366	0.1003	0.1402	-0.0197	0.0003	0.0002	0.0000
y	1	0	0	0	0	0	0	0
$\tilde{F}^{(1)}$	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
1	0	-2.2089	7.3860	-2.2184	0.0870	0.0288	-0.0041	-0.0003
y	-5.1943	2.3618	0.9470	-0.2726	0.0162	0.0035	-0.0005	0.0000
$\tilde{F}^{(2)}$	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
1	0	35.7683	-52.4970	7.6173	1.6843	-0.4273	0.0087	0.0079
y	-18.3448	33.6336	-16.3566	1.1736	0.3819	-0.0774	-0.0001	0.0019
y^2	5.0091	1.7337	-1.3104	0.1700	0.0182	-0.0060	-0.0001	0.0001
$\tilde{F}^{(3)}$	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
1	0	-34.2483	-2.2272	55.4843	-15.4733	0.7247	0.3685	-0.0673
y	60.9298	-119.6105	12.3885	19.6307	-5.6060	0.1734	0.1410	-0.0241
y^2	57.8457	-42.1787	4.6398	2.2900	-0.6054	0.0148	0.0184	-0.0031
y^3	0.4640	-2.6362	0.7223	0.0277	-0.0328	0.0014	0.0000	0.0000
$\tilde{F}^{(4)}$	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
1	0	-686.919	1226.006	-388.275	-23.576	21.866	-2.842	-0.156
y	455.974	-1033.898	675.544	-128.217	-5.386	6.657	-1.090	-0.025
y^2	-10.469	-114.529	102.617	-30.080	0.996	1.161	-0.223	0.000
y^3	-42.472	6.997	7.832	-2.673	0.128	0.100	-0.023	0.000
y^4	-1.861	1.381	-0.067	-0.101	0.013	0.000	0.000	0.000

Заметим, что полиномиальные разложения функций $\tilde{G}^{(m)}$ и $\tilde{F}^{(m)}$ содержат лишь степени y не выше m. Этот факт, обнаруженный путем численных расчетов, может быть доказан аналитически.

Константа c, полученная по аналитическим формулам теории возмущений вблизи точки бифуркации (25), в рамках описываемых численных расчетов может быть определена как $c = [h_1(1,0)]^2 = 1.6064$. Очевидна хорошая степень согласованности результатов численного и аналитического подходов.

Факторы скейлинга в фазовом пространстве рассчитываются по формулам $\alpha_* = 1/\big(\tilde{G}_{\text{к}}^{+}(1,1)\tilde{G}_{\text{к}}^{-}(1,1)\big)$ и $\beta_* = 1/\big(\tilde{F}_{\text{к}}^{+}(1,1)\tilde{F}_{\text{к}}^{-}(1,1)\big)$. Факторы δ_1 и δ_2 получаются из аппроксимаций линейного оператора $D[RG_k[\tilde{G}_{\text{к}}^{+}, \tilde{F}_{\text{к}}^{+}]]D[RG_k[\tilde{G}_{\text{к}}^{-}, \tilde{F}_{\text{к}}^{-}]]$ на сетке из 7×9 узлов интерполяции. Результаты приводятся и обсуждаются в основном тексте в разделе 4.

Библиографический список

1. *Feigenbaum M.J.* Universal behavior in nonlinear systems // Physica D. 1983. Vol. 7. P. 16–39.
2. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. 1983. Т. 141, № 2. С. 343–374.
3. *Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // УМН. 1984. Т. 39, № 3. С. 3–37.

4. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
5. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
6. *Greene J.M., MacKay R.S., Vivaldi F., and Feigenbaum M.J.* Universal behavior in families of area preserving maps // Physica D. 1981. Vol. 3. P. 468–486.
7. *Collet P., Eckmann J.-P., and Koch H.* On universality for area-preserving maps of the plane // Physica D. 1981. Vol. 3. P. 457–467.
8. *Widom M. and Kadanoff L.P.* Renormalization group analysis of area-preserving maps // Physica D. 1982. Vol. 5. P. 287–292.
9. *Hu B. and Rudnick J.* Exact solution of the Feigenbaum renormalization group equations for intermittency // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. P. 1645–1648.
10. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., and Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: A renormalization group analysis // Physica D. 1982. Vol. 5. P. 370–386.
11. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., and Siggia E.D.* Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems // Physica D. 1983. Vol. 8. P. 303–342.
12. *Collet P., Coullet P., and Tresser C.* Scenarios under constraint// J. Physique Lett. 1985. Vol. 46. P. L143–L147.
13. *Greene J.M. and Mao J.* Higher-order fixed points of the renormalisation operator for invariant circles // Nonlinearity. 1990. Vol. 3. P. 69–78.
14. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Коразмерность и типичность в контексте проблемы описания перехода к хаосу через удвоения периода в диссипативных динамических системах // Регулярная и хаотическая динамика. 1997. Т. 2, №3–4. С. 90–105.
15. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., and Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // Physica D. 1997. Vol. 109. P. 91–112.
16. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критическое поведение при переходе к хаосу через удвоения периода. Модельные отображения и ренормгрупповой анализ // В кн.: Нелинейные волны 2002 / Под ред. А.В.Гапонова-Грехова и В.И.Некоркина. Н.Новгород: ИПФ РАН, 2003. С. 395–415.
17. *Вильсон К., Когут Дж.* Ренормализационная группа и ε-разложение. М.: Мир, 1975. 255 с.
18. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. Т. 1. 405 с.
19. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P. and Sataev I.R.* Period doubling system under fractal signal: Bifurcation in the renormalization group equation // Chaos, Solitons and Fractals. 1991. Vol. 1. P. 355–367.
20. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Фрактальный сигнал и динамика систем, демонстрирующих удвоения периода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, №5. С. 64–87.
21. *Kuznetsov S.P. and Sataev I.R.* New types of critical dynamics for two-dimensional maps // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 162. P. 236–242.

22. *Kuznetsov S.P. and Sataev I.R.* Period-doubling for two-dimensional non-invertible maps: Renormalization group analysis and quantitative universality // Physica D. 1997. Vol. 101. P. 249–269.
23. *Hu B. and Mao J.M.* Period doubling: Universality and critical-point order // Phys. Rev. A. 1982. Vol. 25. P. 3259–3261.
24. *Hu B. and Satija I.I.* A spectrum of universality classes in period-doubling and period tripling // Phys. Lett. A. 1983. Vol. 98. P. 143–146.
25. *Hauser P.R., Tsallis C., and Curado E.M.F.* Criticality of rouds to chaos of the $1 - a|x|^z$ // Phys. Rev. A. 1984. Vol. 30. P. 2074–2079.
26. *Guckenheimer J. and Holmes P.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. New York, Springer, 1983.
27. *Kuznetsov S.P. and Sataev I.R.* Universality and scaling for the breakup of phase synchronization at the onset of chaos in a periodically driven Rossler oscillator // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 046214.
28. *Kuznetsov A.P., Turukina L.V., Savin A.V., Sataev I.R., Sedova J.V., and Milovanov S.V.* Multi-parameter picture of transition to chaos // Izvestiya vuz. Applied Nonlinear Dynamics (Saratov). 2002. Vol. 10, № 3. P. 80–96.

Саратовский филиал ИРЭ РАН
Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

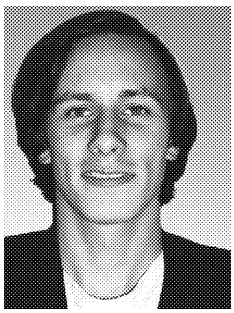
Поступила в редакцию 2.06.2005

BIFURCATION OF UNIVERSAL REGIMES AT THE BORDER OF CHAOS

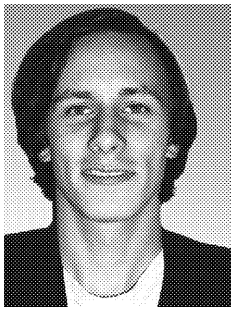
S.P. Kuznetsov, A.A. Mailybaev, I.R. Sataev

It is shown that a fixed point of the renormalization group transformation for a system of two subsystems with unidirectional coupling, one represented by a unimodal map with extremum of degree κ and another by a map accumulating a sum of terms expressed as a function of a state of the first subsystem, undergoes a period-doubling bifurcation in a course of increase of the parameter κ. At $\kappa = 2$ the respective solution (period-2 cycle of the renormalization group equation) corresponds to a situation at the chaos threshold designated as the C-type critical behavior (*Kuznetsov and Sataev*, Phys. Lett., 1992, 236). On a basis of combination of analytic considerations and numerical computations, we construct and analyze an asymptotical expansion of the solution over powers of deflection of the parameter κ from the critical value $\kappa_c = 1,984396$. The approach is analogous to that known in the phase transition theory as ε-expansion, which relates to presence of a bifurcation from a «trivial» fixed point of renormalization group transformation to a new fixed point, responsible for critical behavior with nontrivial critical indices.

Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П.Кузнецова защищены шесть кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994-1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член-корреспондент РАЕН. Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».



Майлыбаев Алексей Абаевич – родился в Вильнюсе (1975). Окончил механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (1997). После окончания МГУ работает в Институте механики МГУ. В 1999 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему «Особенности границ областей устойчивости: анализ и приложения». Автор монографии «Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications» (в соавторстве с А.П. Сейраняном), опубликованной издательством World Scientific в 2003 году. Опубликовал 44 научные статьи по направлениям прикладной математики, механики и теоретической физики. Член Американского математического общества и Международного общества по структурной и междисциплинарной оптимизации.



Сатаев Игорь Рустамович – родился в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт в 1982 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - критические явления в нелинейной динамике, моделирование динамики на пороге хаоса, применение численных методов для решения ренормгрупповых уравнений. Автор 30 научных публикаций.

.

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 3, 2005 УДК 519.21

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ЦИКЛИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ВЫХОДНЫЕ ПОТОКИ

М.А. Федоткин, Е.В. Пройдакова

Статья посвящена нетрадиционному подходу к описанию и изучению свойств выходных потоков, возникающих в циклических системах массового обслуживания. Этот подход с использованием метода имитационного моделирования позволяет решить проблему Вебстера – Алсопа о задержках в циклических системах массового обслуживания.

Посвящается 85-летию
Ю.И. Неймарка – наставника и учителя

1. Описание работы системы управления потоками на содержательном уровне

В данной работе рассматривается система массового обслуживания, которая является математической моделью управления m конфликтными транспортными потоками на пересечении магистралей в классе циклических алгоритмов.

Элементами описания таких систем [1] являются входные потоки (Π_1, Π_2, ..., Π_m), потоки насыщения (Π'_1, Π'_2, ..., Π'_m), дисциплины очередей (O_1, O_2, ..., O_m) и стратегии механизма обслуживания (δ_1, δ_2, ..., δ_m), структура обслуживающего устройства $S(\Gamma)$ и алгоритм смены состояний ($\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, ..., $\Gamma^{(2m)}$). На рис. 1 представлена схема такой системы массового обслуживания.

Циклический алгоритм работы обслуживающего устройства (автомата-светофора) используется потому, что он прост в реализации и к тому же, как правило, является оптимальным при сильной загрузке системы. Конфликтность потоков означает, что их нельзя суммировать. Это не позволяет свести задачу к более простому случаю с одним потоком. Более того, обслуживание машин (требований) из конфликтных потоков должно происходить в непересекающиеся промежутки времени.

Также допускаются промежутки переналадок, разрешающие проблему конфликтности потоков. Входные потоки Π_1, Π_2, $\ldots$, Π_m считаем независимыми пуассоновскими процессами с параметрами λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_m, соответственно. Заметим, что для каждого $j = \overline{1,m}$ интенсивность λ_j определяет число требований, поступивших к стоп-линии перекрестка за единицу времени. Каждый такой поток или случайный процесс с непрерывным временем обозначим через $\Pi_j = \{\eta_j(t); t \geq 0\}$, где $\eta_j(t)$ при каждом $j = \overline{1,m}$ определяет число заявок, поступивших за промежуток времени $[0,t)$ по потоку Π_j с интенсивностью λ_j. Заявки, пришедшие в систему, могут или сразу поступать на обслуживание или образовывать очереди O_1, O_2, $\ldots$, O_m. В качестве стратегий δ_1, δ_2, $\ldots$, δ_m механизма обслуживания выбраны экстремальные [1], которые хорошо согласуются с реальными процессами на перекрестке.

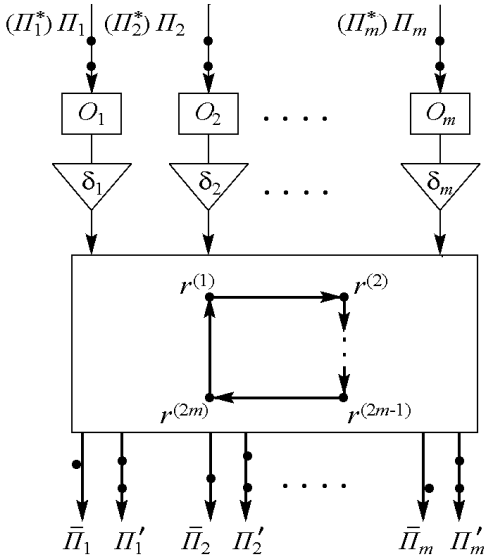


Рис. 1.

По каждому потоку разрешена очередь неограниченного объема. Так как у каждого из m потоков есть основной этап обслуживания и этап переналадки, то обслуживающее устройство должно иметь $2m$ состояний $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, $\ldots$, $\Gamma^{(2m)}$. Смена состояний осуществляется по жесткому циклическому алгоритму: $\Gamma^{(1)} \to \Gamma^{(2)} \to \to \cdots \to \Gamma^{(2m-1)} \to \Gamma^{(2m)} \to \Gamma^{(1)} \to \cdots$. В состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$, $j = \overline{1,m}$, разрешается групповое обслуживание требований только из j-го потока с интенсивностью μ_j. В состоянии $\Gamma^{(2j)}$, $j = \overline{1,m}$, пропускается группа заявок только из j-го потока с интенсивностью $\mu_j' \geq \mu_j$. Длительности состояний $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, $\ldots$, $\Gamma^{(2m)}$ равны соответственно T_1, T_2, $\ldots$, T_{2m} единиц времени. Потоки насыщения определяют выходные потоки системы при ее максимальной загрузке. Обозначим их через Π_1', Π_2', $\ldots$, Π_m' и будем считать независимыми.

В данном случае, когда дополнительно не определяются времена обслуживания отдельных заявок, функционирование системы в непрерывном времени является сложным процессом, и в общем случае не является марковским процессом. Поэтому изучать характеристики такой системы будем в дискретные моменты времени τ_i, $i = 0, 1, \ldots$ переключений состояний обслуживающего устройства или на каждом из промежутков $[\tau_i; \tau_{i+1})$. Положим, что τ_0 – момент начала функционирования системы. Пусть он совпадает с некоторым моментом переключения фазы светофора. Для реальных задач обслуживания требований и управления потоками адекватной математической моделью являются системы с переменной структурой [1, 2].

Пусть $(\Omega, F, \mathrm{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью процесса группового обслуживания требований и управления конфликтными потоками в классе циклических алгоритмов. Здесь Ω – множество описаний элементарных исходов системы, F – множество всех наблюдаемых исходов и $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ – вероятность исхода $\mathrm{A} \in F$. Для описания элементов системы на $(\Omega, F, \mathrm{P}(\cdot))$ при $j = \overline{1,m}$ и $i = 0, 1, \ldots$ зададим следующие случайные величины и элементы:

а) $\eta_{j,i}$ – число заявок потока Π_j, пришедших за время $[\tau_i;\tau_{i+1})$, каждая дискретная случайная величина $\eta_{j,i}$ принимает свои значения из множества X = {0, 1, ...};

б) $\xi_{j,i}$ – максимально возможное число заявок, которое может быть обслужено за время $[\tau_i;\tau_{i+1})$ из очереди потока Π_j; любая дискретная случайная величина $\xi_{j,i}$ принимает значения из множества $\{0, l'_j, l_j\} \subset$ X, где l_j – максимально возможное число заявок потока Π_j, которое может проехать за время T_{2j-1} работы сигнала $\Gamma^{(2j-1)}$ и $l_j = [\mu_j T_{2j-1}]$, а l'_j – это максимально возможное число требований потока Π_j, которое может проехать за время T_{2j} работы сигнала $\Gamma^{(2j)}$ и $l'_j = [\mu'_j T_{2j}]$; причем $l_j \geq l'_j$, так как $T_{2j-1} \gg T_{2j}$;

в) Γ_i – состояние светофора на промежутке $[\tau_i;\tau_{i+1})$, каждый из случайных элементов Γ_i принимает значения из набора $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}\}$ возможных состояний обслуживающего устройства;

г) $æ_{j,i}$ – длина очереди по потоку Π_j в момент времени τ_i, любая из величин $æ_{j,i}$ является дискретной случайной величиной со значениями из X;

д) $\bar{\xi}_{j,i}$ – число реально обслуженных заявок потока Π_j за промежуток времени $[\tau_i;\tau_{i+1})$, случайная величина $\bar{\xi}_{j,i}$ принимает значения из множества $\mathrm{Y}_j = \{0, 1, \ldots, l_j\} \subset$ X;

е) $\bar{\xi}_{j,-1}$ – число реально обслуженных заявок потока Π_j за $[0;\tau_0)$, причем $\bar{\xi}_{j,-1} \in \mathrm{Y}_j$.

Семейства $\{\xi_{j,i}\colon j = \overline{1,m},\ i = 0,1,\ldots\}$ и $\{\bar{\xi}_{j,i}\colon j = \overline{1,m},\ i = 0,1,\ldots\}$ определяют нелокальное описание потоков насыщения и выходных потоков соответственно. Заявки из очереди j-го потока отбираются согласно экстремальной стратегии механизма обслуживания. Для этой стратегии выполняются равенства $\bar{\xi}_{j,i} = \min\{æ_{j,i} + \eta_{j,i};\ \xi_{j,i}\}$, $j = \overline{1,m}$, $i = 0,1,\ldots$.

Пусть $U(\Gamma^{(r)})\colon \Gamma \to \Gamma$ принимает значение $\Gamma^{(1)}$ при $r = 2m$ и принимает значение $\Gamma^{(r+1)}$ в остальных случаях, то есть при $r \in \{1, 2\ldots, 2m-1\}$. Тогда при $i = 0,1,\ldots$ можно написать соотношение $\Gamma_{i+1} = U(\Gamma_i)$. Так как входные потоки являются пуассоновскими, то условная вероятность $\mathrm{P}(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)})$ запишется следующим образом:

$$\mathrm{P}(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = e^{-\lambda_j T_r}\frac{(\lambda_j T_r)^u}{u!} = \varphi_j(u, T_r), \text{ где } r = 1,\ldots,2m, j = \overline{1,m}.$$

Для $\xi_{j,i}$ при каждом $j = \overline{1,m}$ можно записать общее вырожденное условное распределение вида $\mathrm{P}(\xi_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = \beta_j(v, \Gamma^{(r)})$, где

$$\beta_j(v, \Gamma^{(r)}) = \begin{cases} 1 & \text{при } v = l_j, r = 2j-1; \\ 1 & \text{при } v = l'_j, r = 2j; \\ 1 & \text{при } v = 0, r \in \{1,2,\ldots 2m\}\backslash\{2j-1, 2j\}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Основными искомыми характеристиками изучаемой системы являются состояние обслуживающего устройства, величины очередей по потокам и выходные потоки. Состояние всей системы по потоку Π_j на промежутке $[\tau_i;\tau_{i+1})$ будем характеризовать случайным вектором $(\Gamma_i; æ_{j,i}; \bar{\xi}_{j,i-1})$. Поведение системы по потоку Π_j

описывается векторной последовательностью $\{(\Gamma_i; æ_{j,i}; \bar{\xi}_{j,i-1})\colon i \geq 0\}$. Более того, эта последовательность задает нелокальное описание выходного потока по j-му направлению. Причем за выходной поток отвечает $\bar{\xi}_{j,i-1}$, а компоненты Γ_i и $æ_{j,i}$ играют роль меток. Чаще всего выходной поток пытаются описывать аналогично входному, но при таком подходе в общем случае не удается найти конечномерные распределения выходного процесса. Почти очевидно, что выходной поток существенно зависит от системы массового обслуживания, в которой он формируется. Следовательно, в описание выходного потока необходимо включать некоторые элементы самой системы массового обслуживания. Впервые такой подход был предложен в работах [1, 2] и назван нелокальным описанием потоков требований. В силу независимости входных потоков, потоков насыщения и циклического переключения состояний обслуживающего устройства можно рассматривать процесс обслуживания требований по каждому потоку отдельно. Это обстоятельство позволило свести задачу анализа выходных потоков размерности системы $(2m+1)$ к задаче анализа размерности системы трем. Здесь и далее все рассуждения и проводятся для j-го потока. Аналогичные рассуждения можно провести и для более сложной последовательности $\{(\Gamma_i; æ_{1,i}; æ_{2,i}; \ldots æ_{m,i}; \bar{\xi}_{1,i-1}; \bar{\xi}_{2,i-1}; \ldots; \bar{\xi}_{m,i-1})\colon i \geq 0\}$. В начальный момент τ_0 задано распределение векторов $(\Gamma_0; æ_{j,0}; \bar{\xi}_{j,-1})$, $j = \overline{1,m}$, то есть фактически известны вероятности $\mathrm{P}(\Gamma_0 = \Gamma^{(s)};\ æ_{j,0} = x;\ \bar{\xi}_{j,-1} = y)$, где $\Gamma^{(s)} \in \Gamma$, $x \in \mathrm{X}$, $y \in \mathrm{Y}_j, j = \overline{1,m}$.

2. Свойства случайной векторной последовательности $\{(\Gamma_i;\ æ_{j,i};\ \bar{\xi}_{j,i-1})\colon i \geq 0\}$

Распределение каждой из случайных величин $\eta_{j,i}, \xi_{1,i-1}$ существенно зависит от выбора вектора $b = (T_1, T_2, \ldots, T_{2m})$. Назовем этот вектор управлением b потоками в циклической системе обслуживания, где b принимает значения из следующего множества $\mathrm{B} = \{(T_1, T_2, \ldots, T_{2m})\colon T_1 > 0, T_2 > 0, \ldots, T_{2m} > 0\}$. Для управляемой случайной векторной последовательности $\{(\Gamma_i;\ æ_{j,i};\ \bar{\xi}_{j,i-1});\ i \geq 0\}$, включающей в себя описание состояния обслуживающего устройства, величины очереди по потоку Π_j и выходного потока по j-му направлению, при $i = 0, 1, \ldots$ имеют место следующие рекуррентные соотношения $(\Gamma_{i+1}; æ_{j,i+1}; \bar{\xi}_{j,i}) = (U(\Gamma_i); \max\{0; æ_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\};$ $\min\{æ_{j,i} + \eta_{j,i}; \xi_{j,i}\})$.

Пусть по определению справедливы равенства $T_0 \equiv T_{2m}, T_{2m+1} \equiv T_1$, $T_{2m+2} \equiv T_2, \Gamma^{(0)} \equiv \Gamma^{(2m)}, \Gamma^{(2m+1)} \equiv \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2m+2)} \equiv \Gamma^{(2)}$. Введем следующие обозначения:

$$\Gamma(j) = \Gamma \backslash \{\Gamma^{(2j)}, \Gamma^{(2j+1)}, \Gamma^{(2j+2)}\}; \Gamma'(j) = \Gamma \backslash \{\Gamma^{(2j)}, \Gamma^{(2j+1)}\};$$

$$E_j(\Gamma^{(s)}) = \{(\Gamma^{(s)}; x; 0)\colon x \in \mathrm{X}\}, \Gamma^{(s)} \in \Gamma'(j);$$

$$E_j(\Gamma^{(2j)}) = \{(\Gamma^{(2j)}; x; l_j)\colon x \in \mathrm{X}\} \bigcup \{(\Gamma^{(2j)}; 0; y)\colon y = \overline{0, l_j - 1}\};$$

$$E_j(\Gamma^{(2j+1)}) = \{(\Gamma^{(2j+1)}; x; l'_j)\colon x \in \mathrm{X}\} \bigcup \{(\Gamma^{(2j+1)}; 0; y)\colon y = \overline{0, l'_j - 1}\};$$

$$æ_i = (æ_{1,i}, æ_{2,i}, \ldots æ_{m,i}); \bar{\xi}_{i-1} = (\bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{2,i-1}, \ldots, \bar{\xi}_{m,i-1}).$$

Был проведен анализ поведения системы при фиксированном $b \in \mathrm{B}$ и для

каждого из потоков Π_j были доказаны утверждения, приведенные ниже. Полное доказательство этих утверждений представлено в работах [3 – 5].

Лемма 1. При заданном распределении начального вектора $(\Gamma_0; æ_{j,0}; \bar{\xi}_{j,-1})$ управляемая случайная векторная последовательность $\{(\Gamma_i; æ_{j,i}; \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$ является марковской.

Теорема 1. Для одномерных распределений случайной векторной последовательности $\{(\Gamma_i; æ_{j,i}; \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$ при $j = \overline{1,m}, x \in \mathrm{X}, y \in \mathrm{Y}_j$ имеют место следующие рекуррентные по i (времени) соотношения:

$$Q_{j,1}(\Gamma^{(2j)}; x; y) = \sum_{c=0}^{l_j-1} \sum_{w=0}^{c} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j-1)}; w; g)\varphi_j(c-w, T_{2j-1})\mathrm{P}(x=0; y=c) +$$
$$+ \sum_{c=l_j}^{\infty} \sum_{w=0}^{c} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j-1)}; w; g)\varphi_j(c-w, T_{2j-1})\mathrm{P}(x=c-l_j; y=l_j);$$
$$Q_{j,1}(\Gamma^{(2j+1)}; x; y) = \sum_{c=0}^{l'_j-1} \sum_{w=0}^{c} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; w; g)\varphi_j(c-w, T_{2j})\mathrm{P}(x=0; y=c) +$$
$$+ \sum_{c=l'_j}^{\infty} \sum_{w=0}^{c} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; w; g)\varphi_j(c-w, T_{2j-1})\mathrm{P}(x=c-l'_j; y=l'_j);$$
$$Q_{j,1}(\Gamma^{(s)}; x; y) = \sum_{w=0}^{x} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(s-1)}; w; g)\varphi_j(x-w, T_{s-1})\mathrm{P}(x \geq 0; y=0),$$

где $\Gamma^{(s)} \in \Gamma'(j), x \in \mathrm{X}, y \in \mathrm{Y}_j, j = \overline{1,m}$;

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}; x; y) = \sum_{w=0}^{y} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0)\varphi_j(y-w, T_{2j-1})\mathrm{P}(x=0; y<l_j) +$$
$$+ \sum_{w=0}^{x+l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0)\varphi_j(x+l_j-w, T_{2j-1})\mathrm{P}(y=l_j), i \geq 1;$$
$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}; x; y) = \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g)\varphi_j(y, T_{2j})\mathrm{P}(x=0; y<l'_j) +$$
$$+ \sum_{w=0}^{y} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j)\varphi_j(y-w, T_{2j})\mathrm{P}(x=0; y<l'_j) +$$
$$+ \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g)\varphi_j(x+l'_j, T_{2j})\mathrm{P}(y=l'_j) +$$
$$+ \sum_{w=0}^{x+l'_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j)\varphi_j(x+l'_j-w, T_{2j})\mathrm{P}(y=l'_j), i \geq 1;$$
$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+2)}; x; 0) = \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g)\varphi_j(x, T_{2j+1}) +$$
$$+ \sum_{w=0}^{x} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; w; l'_j)\varphi_j(x-w, T_{2j+1}), i \geq 1;$$
$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(s)}; x; 0) = \sum_{w=0}^{x} Q_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; w; 0)\varphi_j(x-w, T_{s-1}), i \geq 1, \Gamma^{(s)} \in \Gamma(j).$$

Лемма 2. Для одномерного распределения $\{Q_{j,i}(\Gamma^{(s)}; x; y)\colon \Gamma^{(s)} \in \Gamma,\ x \in \mathrm{X},\ y \in \mathrm{Y}_j\}$ случайной векторной последовательности $\{(\Gamma_i; æ_{j,i}; \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$ при любом $i = 0, 1, \ldots$ выполняется условие нормировки: $\sum_{s=1}^{2m} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{l_j} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(s)}; x; y) = 1$.

Лемма 3. Следующие состояния управляемой случайной векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i; æ_{j,i}; \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$ являются несущественными:

$$(\Gamma^{(s)}; x; y), \text{ где } \Gamma^{(s)} \in \Gamma'(j),\ x \in \mathrm{X},\ y = \overline{1, l_j};$$
$$(\Gamma^{(2j)}; x; y), \text{ где } x \in \mathrm{X}\backslash\{0\},\ y = \overline{0, l_j - 1};$$
$$(\Gamma^{(2j+1)}; x; y), \text{ где } x \in \mathrm{X},\ y = \overline{l'_j + 1, l_j};$$
$$(\Gamma^{(2j+1)}; x; y), \text{ где } x \in \mathrm{X}\backslash\{0\},\ y = \overline{0, l'_j - 1}.$$

Лемма 4. Пространство состояний управляемой векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i; æ_{j,i}; \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$ разбивается на незамкнутое подмножество $\{(\Gamma^{(s)}; x; y)\colon \Gamma^{(s)} \in \Gamma'(j), x \in \mathrm{X}, y = \overline{1, l_j}\} \bigcup \{(\Gamma^{(2j)}; x; y)\colon x \in \mathrm{X}\backslash\{0\}, y = \overline{0, l_j - 1}\} \bigcup \{(\Gamma^{(2j+1)}; x; y)\colon x \in \mathrm{X}, y = \overline{l'_j + 1, l_j}\} \bigcup \{(\Gamma^{(2j+1)}; x; y)\colon x \in \mathrm{X}\backslash\{0\}, y = \overline{0, l'_j - 1}\}$ несущественных состояний и на замкнутое подмножество $\bigcup\limits_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})$ существенных периодических состояний с периодом $2m$.

Далее введем обозначения для производящих функций

$$\Phi_{j,i}(\Gamma^{(s)}; y; z) = \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(s)}; x; y) z^x, j = \overline{1, m}, i = 0, 1, \ldots, \Gamma^{(s)} \in \Gamma, y \in \mathrm{Y}_j, |z| \leq 1.$$

Теорема 2. Для производящих функций $\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z)$, $\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}; l'_j; z)$, $\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+2)}; 0; z)$, $\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(s)}; 0; z)$ при $j = \overline{1, m}, \Gamma^{(s)} \in \Gamma(j), |z| \leq 1$, выполняются следующие рекуррентные по i (времени) соотношения:

$$\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) = z^{-l_j} e^{\lambda_j T_{2j-1}(z-1)} \Phi_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; 0; z) -$$
$$- z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \sum_{k=0}^{l_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j-1}) z^k;$$
$$\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}; l'_j; z) = z^{-l_j} e^{\lambda_j T_{2j}(z-1)} \Phi_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) + z^{-l'_j} \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \times$$
$$\times \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k - z^{-l'_j} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k;$$
$$\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+2)}; 0; z) = e^{\lambda_j T_{2j+1}(z-1)} \Phi_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; l'_j; z) +$$
$$+ e^{\lambda_j T_{2j+1}(z-1)} \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) z^w;$$
$$\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(s)}; 0; z) = e^{\lambda_j T_{s-1}(z-1)} \Phi_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; 0; z).$$

Определим следующие производящие функции:

$$\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) = \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; x; l_j) z^x;$$
$$\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+1)}; l'_j; z) = \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+1)}; x; l'_j) z^x;$$
$$\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+2)}; 0; z) = \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+2)}; x; 0) z^x;$$
$$\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(s)}; 0; z) = \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(s)}; x; 0) z^x,$$

где $j = \overline{1, m}$, $i = 0, 1, \ldots$, $\Gamma^{(s)} \in \Gamma(j)$, $|z| \leq 1$.

Теорема 3. Для производящих функций $\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)};l_j;z)$, $\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+1)};l_j;z)$, $\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+2)};0;z)$, $\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(s)};0;z)$ при $j=\overline{1,m}$, $\Gamma^{(s)}\in\Gamma(j)$, $|z|\le 1$ выполняются следующие рекуррентные по i (времени) соотношения:

$$\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)};l_j;z)=z^{-l_j}z^{-l'_j}e^{\lambda_j(z-1)T}\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)};l_j;z)+$$
$$+z^{-l_j}z^{-l'_j}\prod_{k\in\{1,2,\ldots,2m\}/\{2j\}}e^{\lambda_j(z-1)T_k}\sum_{g=0}^{l_j-1}Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)};0;g)\sum_{k=l'_j}^{\infty}\varphi_j(k,T_{2j})z^k-$$
$$-z^{-l_j}z^{-l'_j}\prod_{k\in\{1,2,\ldots,2m\}/\{2j\}}e^{\lambda_j(z-1)T_k}\sum_{w=0}^{l'_j-1}Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)};w;l_j)z^w\sum_{k=0}^{l'_j-w-1}\varphi_j(k,T_{2j})z^k+$$
$$+z^{-l_j}\prod_{k\in\{1,2,\ldots,2m\}/\{2j\}}e^{\lambda_j(z-1)T_k}\sum_{g=0}^{l'_j-1}Q_{j,2mi+1}(\Gamma^{(2j+1)};0;g)-$$
$$-z^{-l_j}\sum_{w=0}^{l_j-1}Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)};w;0)z^w\sum_{k=0}^{l'_j-w-1}\varphi_j(k,T_{2j-1})z^k;$$

$$\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+1)};l'_j;z)=z^{-l_j}z^{-l'_j}e^{\lambda_j(z-1)T}\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+1)};l'_j;z)+$$
$$+z^{-l_j}z^{-l'_j}e^{\lambda_j(z-1)T}\sum_{g=0}^{l'_j-1}Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+1)};0;g)-$$
$$-z^{-l_j}z^{-l'_j}e^{\lambda_j(z-1)T_{2j}}\sum_{w=0}^{l_j-1}Q_{j,2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2j-1)};w;0)z^w\sum_{k=0}^{l_j-w-1}\varphi_j(k,T_{2j-1})z^k+$$
$$+z^{-l'_j}\sum_{g=0}^{l_j-1}Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)};0;g)\sum_{k=l'_j}^{\infty}\varphi_j(k,T_{2j})z^k-$$
$$-z^{-l'_j}\sum_{w=0}^{l'_j-1}Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)};w;l_j)z^w\sum_{k=0}^{l'_j-w-1}\varphi_j(k,T_{2j})z^k;$$

$$\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+2)};0;z)=z^{-l_j}z^{-l'_j}e^{\lambda_j(z-1)T}\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+2)};0;z)-$$
$$-z^{-l_j}z^{-l'_j}e^{\lambda_j(z-1)(T_{2j+1}+T_{2j})}\sum_{w=0}^{l_j-1}Q_{j,2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2j-1)};w;0)z^w\sum_{k=0}^{l_j-w-1}\varphi_j(k,T_{2j-1})z^k+$$
$$+z^{-l'_j}e^{\lambda_j(z-1)T_{2j+1}}\sum_{g=0}^{l_j-1}Q_{j,2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2j)};0;g)\sum_{k=l'_j}^{\infty}\varphi_j(k,T_{2j})z^k-$$
$$-z^{-l'_j}e^{\lambda_j(z-1)T_{2j+1}}\sum_{w=0}^{l'_j-1}Q_{j,2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2j)};w;l_j)z^w\sum_{k=0}^{l'_j-w-1}\varphi_j(k,T_{2j})z^k-$$
$$-e^{\lambda_j(z-1)T_{2j+1}}\sum_{g=0}^{l'_j-1}Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j+1)};0;g);$$

$$\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(s)};0;z)=z^{-l_j}z^{-l'_j}e^{\lambda_j(z-1)T}\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(s)};0;z)-$$
$$-z^{-l_j}z^{-l'_j}e^{\lambda_j(z-1)(T_{s-1}+T_{s-2}+\ldots+T_{2j+1}+T_{2j})}\sum_{w=0}^{l_j-1}Q_{j,2m(i+1)-r-3}(\Gamma^{(2j-1)};w;0)z^w\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{l_j-w-1}\varphi_j(k,T_{2j-1})z^k+$$
$$+z^{-l'_j}e^{\lambda_j(z-1)(T_{s-1}+T_{s-2}+\ldots+T_{2j+1})}\sum_{g=0}^{l_j-1}Q_{j,2m(i+1)-r-2}(\Gamma^{(2j)};0;g)\sum_{k=l'_j}^{\infty}\varphi_j(k,T_{2j})z^k-$$
$$-z^{-l'_j}e^{\lambda_j(z-1)(T_{s-1}+T_{s-2}+\ldots+T_{2j+1})}\sum_{w=0}^{l'_j-1}Q_{j,2m(i+1)-r-2}(\Gamma^{(2j)};w;l_j)z^w\sum_{k=0}^{l'_j-w-1}\varphi_j(k,T_{2j})z^k+$$
$$+e^{\lambda_j(z-1)(T_{s-1}+T_{s-2}+\ldots+T_{2j+1})}\sum_{g=0}^{l'_j-1}Q_{j,2m(i+1)-r-1}(\Gamma^{(2j+1)};0;g),$$

где $\Gamma^{(s)}\in\Gamma(j)$, $r=s-2j-2$ при $s>2j+2$ и $r=s+2m-2j-2$ при $s<2j+2$.

Теорема 4. Для существования стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i; æ_{j,i}; \bar{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$ необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\lambda_j T - l_j - l'_j < 0.$$

Теорема 5. Для существования стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i; æ_i; \bar{\xi}_{i-1}); i \geq 0\}$ необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\lambda_j T - l_j - l'_j < 0,\ j = \overline{1, m}.$$

3. Статистический анализ системы путем имитационного моделирования

Основным критерием качества управления потоками является среднее время ожидания начала обслуживания произвольной заявки в стационарном режиме работы системы. Такую характеристику называют средней задержкой требования. Для вычисления средней задержки используют приближенную формулу Вебстера – Алсопа [6 – 7], которая была найдена эмпирическим путем с применением результатов имитационного моделирования в 1958 году. В 1966 году Федоткин получил аналитическую формулу для определения средней задержки в случае постоянной длительности обслуживания требований. При больших значениях интенсивностей входных потоков средние задержки, полученные по приближенной формуле Вебстера – Алсопа, хорошо соответствуют аналитическим вычислениям. В то же время при больших значениях интенсивностей входных потоков значения средних задержек, которые даются формулой Вебстера – Алсопа, существенно больше средних наблюдаемых задержек в реальных системах. Более того, это отличие нельзя обосновать точностью вычислений, которые получены разными методами [1]. Далее, попытаемся выяснить, чем объясняется указанное выше отличие среднего времени ожидания начала обслуживания произвольной заявки (средних задержек).

Для изучаемой системы не удается аналитически получить законы распределения длин очередей, времени ожидания обслуживания заявки по потокам, выходных потоков. Чтобы получить численные оценки этих характеристик была написана программа, являющаяся имитационной моделью процесса движения двух потоков машин на крестообразном перекрестке. Это означает, что на перекрестке выбирается два наиболее интенсивных и конфликтных потока. Программа была написана с помощью средства разработки Borland Delphi 7.0. При моделировании было учтено предположение о групповом обслуживании заявок. Пользователем задаются с клавиатуры следующие параметры:

а) интенсивности λ_1 и λ_2 поступления машин на перекресток по потокам в маш/с;

б) интенсивности μ_1, μ_2 и μ'_1, μ'_2 обслуживания машин в зеленую и желтую фазу светофора по потокам, соответственно, в маш/с;

в) длительности T_1, T_2, T_3, T_4 фаз светофора в секундах;

г) длины очередей Q_{01}, Q_{02} по потокам, соответственно, в начальный момент времени в машинах.

Пусть сумма $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ является периодом работы светофора. В имитационной модели учитывались следующие два условия: $\lambda_1 T - l_1 - l'_1 < 0$,

$\lambda_2 T - l_2 - l_2' < 0$ существования стационарного движения на перекрестке. По окончании работы программа выдает следующие результаты:

а) значения оценок $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ среднего времени ожидания начала обслуживания заявки по первому и второму потокам;

б) значение оценки γ^* среднего времени ожидания начала обслуживания заявки произвольного потока (произвольной заявки), где $\gamma^* = (\overline{\gamma_1} \cdot \lambda_1 + \overline{\gamma_2} \cdot \lambda_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)$;

в) значения оценок $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ средней очереди перед зеленым светом по первому и второму направлению, соответственно.

Данные численные оценки были получены с точностью $e = 0.01$ и надежностью $\beta = 0.99$. Наряду с представленными выше оценками характеристик функционирования системы, для выходных потоков были найдены статистические законы распределения и статистические числовые характеристики. В частности, для случайной величины $\bar{\xi}_{j,i} \equiv \theta_j$, которая определяет число обслуженных заявок за время, пока обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$, вычисляются статистический ряд распределения, выборочное математическое ожидание $M^*(\theta_j)$ и выборочная дисперсия $D^*(\theta_j)$.

При получении значений численных оценок из физических соображений были зафиксированы следующие входные параметры: $T_2 = T_4 = 4$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu_1' = \mu_2' = 1.2$ и методом покоординатного спуска решалась задача оптимизации по критерию $\gamma^* \to \min$. При этом рассматривалось несколько вариантов длин периодов работы светофора. Необходимо отметить, что из физических соображений величину T периода работы светофора нельзя уменьшать ниже определенного предела. В данном случае этот предел составляет 60 с. Интенсивности λ_1 и λ_2 поступления машин на перекресток также варьировались. Полученные результаты для разных значений длин периодов T параметров $\lambda_1 = 0.4$ и $\lambda_2 = 0.1$ приведены в табл. 1. Квазиоптимальное значение оценки γ^* для каждого из рассматриваемых значений T и обеспечивающие ее параметры выделены в таблице жирным шрифтом.

Из таблицы находим, что для $\lambda_1 = 0.4$ и $\lambda_2 = 0.1$ минимальное значение оценки γ^* равно 9.6412 и оно достигается на периоде $T = 60$ при $T_1 = 40$ и $T_3 = 12$. При этих параметрах статистические числовые характеристики для выходного потока по первому направлению принимают следующие значения: $M^*(\theta_1)$ = 18.92 и $D^*(\theta_1)$ = 2.8736, а для выходного потока по второму направлению – $M^*(\theta_2)$ = 3.96 и $D^*(\theta_2)$ = 1.1984. На рис. 2 представлен полигон частот, построенный по статистическому ряду распределения числа заявок, обслуженных по первому потоку за время, пока обслуживающее устройство находилось в состоянии $\Gamma^{(1)}$. На рис. 3 изображен полигон частот, соответствующий статистическому ряду распределения количества требований, обслуженных по второму направлению за время, пока обслуживающее устройство находилось в состоянии $\Gamma^{(3)}$. На данных рисунках по оси ординат откладывается относительная частота, а по оси абсцисс – число обслуженных машин.

В разделах 1 и 2 данной статьи рассматривалась система массового обслуживания, в которой значение интенсивности потоков насыщения предполагалось равным постоянной величине в течение периода времени, когда обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ и разрешается обслуживание только заявок потока Π_j. Пусть теперь обслуживающее устройство в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ на промежутке времени $[\tau_i; \tau_{i+1})$ изменяет числовое значение интенсивности потоков насыщения и это изменение имеет кусочно-постоянный вид. В простейшем случае интенсивность μ_j

последовательно принимает значения $\mu_{j,1}$ и $\mu_{j,2}$. Это обстоятельство позволяет представить состояние $\Gamma^{(2j-1)}$ в виде объединения двух виртуальных состояний $\Gamma_1^{(2j-1)}$ и $\Gamma_2^{(2j-1)}$, следовательно, состояние $\Gamma^{(2j-1)} = \{\Gamma_1^{(2j-1)}, \Gamma_2^{(2j-1)}\}$ фактически будет являться укрупненным состоянием [8]. В состоянии $\Gamma_1^{(2j-1)}$ разрешается групповое обслуживание требований j-го потока с интенсивностью $\mu_{j,1}$. В состоянии $\Gamma_2^{(2j-1)}$ также пропускается группа заявок только из j-го потока, но уже с другой интенсивностью $\mu_{j,2}$. Алгоритм обслуживания заявок по-прежнему остается циклическим. В силу этого, для новой модели можно применять те же методы исследования, что и в предыдущем случае, только с учетом увеличения числа состояний обслуживающего устройства.

Таблица 1

$\lambda_1 = 0.4\,,\, \lambda_2 = 0.1$

T	T_1	T_3	$\bar{\gamma}_1$	$\bar{\gamma}_2$	γ^*	$\bar{Q}_1$	$\bar{Q}_2$
120	100	12	1.2545	96.1422	20.2321	3.9565	9.0435
	90	**22**	**4.3527**	**77.5088**	**18.9839**	**7.6667**	**7.8333**
	80	32	9.4349	63.578	20.2635	11.4167	6.875
	70	42	15.6653	49.6712	22.4665	15.5217	6.3913
	60	52	24.3614	35.451	26.5794	19.5652	4.913
100	86	6	0.5803	91.125	18.6893	2.4483	7.1724
	80	12	1.626	76.8	16.6608	4.2143	6.8571
	70	**22**	**5.5395**	**57.6667**	**15.965**	**7.9643**	**6.4074**
	60	32	11.7175	43.4605	18.0661	11.8276	5.2143
	50	42	19.2973	30.2297	21.4838	15.2069	4.0345
80	68	4	0.3494	73.1692	14.9134	1.5278	5.4167
	60	**12**	**2.3228**	**55.2727**	**12.9128**	**4.3947**	**5.1504**
	50	22	6.6781	39.1121	13.1649	7.5405	4.3056
	40	32	14.2016	24.5143	16.2641	11.0103	3.1622
	30	42	24.5471	14.4293	22.5235	15.2005	2.4167
60	48	4	0.5442	52	10.8353	1.76	3.4
	40	**12**	**2.996**	**36.2222**	**9.6412**	**4.3**	**3.26**
	36	16	5.793	30.7692	10.7882	6.1731	2.6923
	30	22	9.4498	20.8857	11.737	7.5962	2.5294
	20	32	20.4471	8.9032	18.1383	11.82	1.4082

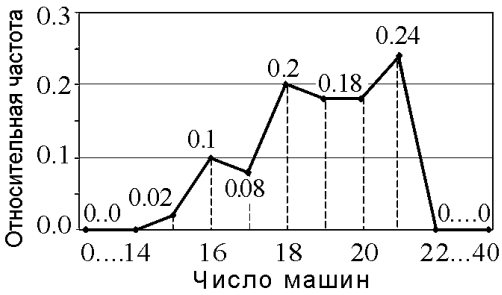


Рис. 2.

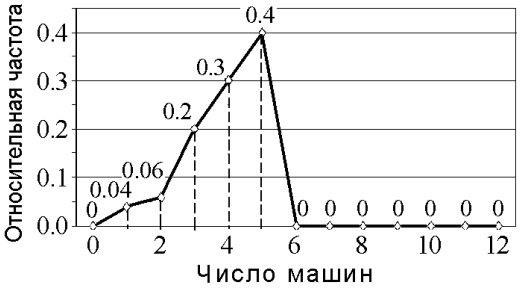


Рис. 3.

Далее, при численном моделировании рассмотрим случай двух потоков $(m = 2)$, когда интенсивность обслуживания первого потока в состоянии $\Gamma^{(1)}$ на промежутке времени T_1 имеет кусочно-постоянный вид. Тогда число состояний обслуживающего устройства становится равным 5. Длина T_1 зеленого света для первого потока разбивается на два участка длиной $T_{1,1}$ и $T_{1,2}$ единиц времени таким образом, что $T_1 = T_{1,1} + T_{1,2}$. В состоянии $\Gamma_1^{(1)}$ разрешается групповое обслуживание требований первого потока с интенсивностью $\mu_{1,1}$. В состоянии $\Gamma_2^{(1)}$ также пропускается группа заявок только из первого потока, но уже с другой интенсивностью $\mu_{1,2}$. Граф смены состояний обслуживающего устройства имеет вид, представленный на рис. 4.

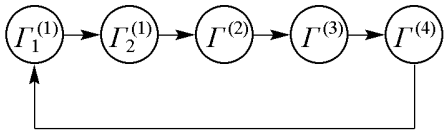


Рис. 4.

Таблица 2

$\lambda_1 = 0.4$, $\lambda_2 = 0.1$

T	$T_{1,1}$	$T_{1,2}$	T_3	$\mu_{1,1}$	$\mu_{1,2}$	$\bar{\gamma}_1$	$\bar{\gamma}_2$	γ^*	$\bar{Q}_1$	$\bar{Q}_2$
120	10	70	32	3.8	0.6	9.2146	54.3019	18.232	11.6522	6.6522
	20	**60**	**32**	**1.9**	**0.7**	**9.008**	**48.2667**	**16.8598**	**11.125**	**6.9565**
	30	50	32	1.4	0.76	9.913	47.0046	17.3314	12.125	6.6667
	40	40	32	0.8	1.2	9.9173	47.7078	17.4754	12.0417	6.75
	50	30	32	0.7	1.5	10.2114	49.8807	17.7453	11.9583	6.7083
	60	20	32	0.5	2.5	10.7241	52.4757	18.4745	11.5417	6.4167
	70	10	32	0.2	6.6	9.7431	57.5261	19.2997	12.2609	6.8261
100	10	60	22	4.0	0.5	5.6303	49.8846	14.4812	7.7667	5.3
	20	50	22	2.0	0.6	5.5252	47.2906	13.8782	7.8966	5.5172
	30	**40**	**22**	**1.3**	**0.775**	**5.3266**	**43.0777**	**12.8768**	**7.6207**	**5.3793**
	40	30	22	0.7	1.4	5.4374	47.4865	13.8472	7.5	6.3103
	50	20	22	0.4	2.5	5.6147	50.1748	14.5267	8.0345	5.6552
	60	10	22	0.2	5.8	5.6908	55.0297	15.5586	8.2759	5.6552
80	5	55	12	5.4	0.6	2.2645	50.8404	11.9797	4.3243	4.3784
	10	50	12	2.5	0.7	2.2096	46.673	11.1022	4.2973	4.7838
	20	**40**	**12**	**1.25**	**0.875**	**2.0221**	**42.6806**	**10.1538**	**3.973**	**4.4054**
	30	30	12	0.7	1.3	2.3928	43.5243	10.6191	4.5789	4.8378
	40	20	12	0.4	2.7	2.329	46.4977	11.1627	4.4474	4.8947
	50	10	12	0.2	5.0	2.1942	51.2207	12.0005	4.1579	5.0
60	5	35	12	6.6	0.2	16.0881	29.8492	18.8403	5.6981	2.5849
	10	30	12	3.1	0.3	7.3059	29.5408	11.7529	4.25	3.1373
	15	**25**	**12**	**1.4**	**0.76**	**3.0711**	**26.1333**	**7.6835**	**4.283**	**2.4151**
	20	20	12	0.75	1.25	3.0572	29.2386	8.2935	4.1887	3.1132
	25	15	12	0.4	2.0	3.3059	28.439	8.3325	4.5385	2.5192

Интенсивности обслуживания $\mu_{1,1}$, $\mu_{1,2}$ и длины интервалов $T_{1,1}$ и $T_{1,2}$ будем варьировать так, чтобы при этом средняя интенсивность обслуживания требований на интервале T_1 оставалась постоянной и равной единице. При этом, как и в предыдущем случае, фиксируем следующие параметры $T_2 = T_4 = 4$, $\mu_2 = 1$, $\mu_1' = \mu_2' = 1.2$. Изучим влияние вновь введенной нелинейности на величину квазиоптимальных значений оценки γ^*, представленных в табл. 1. Полученные численные результаты сведены в табл. 2. Жирным шрифтом в данной таблице выделены новые квазиоптимальные значения оценки γ^*, полученной в результате введения нелинейности интенсивности обслуживания требований от времени, и параметры, соответствующие каждой оценке.

Из табл. 2 очевидно, что введение нелинейности интенсивности обслуживания требований от времени даже по одному потоку приводит к заметному уменьшению величины оценки γ^* среднего времени ожидания начала обслуживания произвольной машины. Например, при $\lambda_1 = 0.4$ и $\lambda_2 = 0.1$ и значении периода $T = 60$ на квазиоптимальных значениях параметров, представленных в табл. 1, возможно уменьшение оценки γ^* со значения 9.6412 до значения 7.6835. При этом отрезок времени $T_1 = 40$ разбивается на участки $T_{1,1} = 15$ и $T_{1,2} = 25$, а интенсивности обслуживания заявок выбираются следующим образом: $\mu_{1,1} = 1.4$ и $\mu_{1,2} = 0.76$. Аналогично, для различных значений λ_1, λ_2 и T, меняя длины интервалов $T_{1,1}$, $T_{1,2}$ и интенсивности обслуживания заявок $\mu_{1,1}$, $\mu_{1,2}$, можно добиться уменьшения величины оценки γ^* для квазиоптимальных параметров.

Таким образом, по результатам применения численных методов для изучения свойств вероятностных и числовых характеристик выходных потоков системы можно сделать вывод о том, что отличие средних задержек может быть вызвано эффектом нелинейных зависимостей интенсивностей обслуживания требований от времени.

Работа выполнена в рамках госбюджетной НИР Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, проводимой по заданию Федерального агентства по образованию, по теме «Анализ дискретных управляющих систем обслуживания и систем вычисления булевых функций».

Библиографический список

1. *Федоткин М.А.* Процессы обслуживания и управляющие системы // Математические вопросы кибернетики. 1996. Вып. 6. С. 51.
2. *Федоткин М.А.* Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов // Математические вопросы кибернетики. 1998. Вып. 7. С. 332.
3. *Федоткин М.А., Пройдакова Е.В.* Изучение выходного процесса при нелинейном обслуживании автомобилей на перекрестке с помощью имитационной модели // Материалы международной конференции «Прикладная статистика в социально-экономических проблемах», 14-15 февраля 2003. Н.Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2003. Том 1. С. 97.
4. *Федоткин М.А., Пройдакова Е.В.* Нелокальное описание выходных потоков в системе с циклическим обслуживанием и переналадками. ННГУ, Нижний

Новгород, 2004 - 27с. / Деп. в ВИНИТИ, № 1856 - В2004.
5. *Федоткин М.А., Пройдакова Е.В.* Анализ свойств выходных потоков в системе с циклическим обслуживанием и переналадками. ННГУ, Нижний Новгород, 2005 - 32 с. / Деп. в ВИНИТИ, №442 - В2005.
6. *Webster F.V.* Traffic signal settings // Road Research Technical Paper. London, 1958. 39, pp. 1 - 43.
7. *Allsop Richard E.* Delay-minimizing settings for fixed-time traffic signals at a single road junction // J.Inst. Maths / Applice, 1971, vol. 8, № 2, pp. 164 - 185.
8. *Кемени Джон Дж., Снелл Дж. Лори.* Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970.

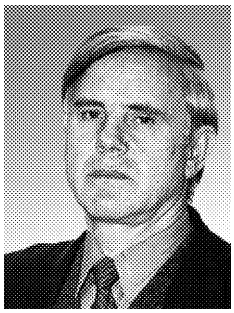
Нижегородскиий государственный университет им.Н.И.Лобачевского

Поступила в редакцию 3.07.2005

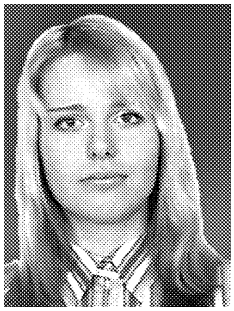
NONLINEAR MODEL OF CYCLIC SERVICE PROCESS AND OUTPUT FLOWS

M.A. Fedotkin, E.V. Projdakova

Article is devoted to the nonconventional approach to the description and properties studying of the output flows arising in cyclic systems of mass service. This approach with use of imitation method allows to solve Webster – Allsop problem about delays in cyclic systems of mass service.



Федоткин Михаил Андреевич – родился в д. Киселевка, Воскресенского района, Липецкой области (1941), окончил механико-математический факультет ГГУ (1963). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1969, ГГУ) под руководством профессора Ю.И. Неймарка в области теории управления стохастическими динамическими системами и докторскую диссертацию по специальности «Теория вероятностей и математическая статистика» (1984, МГУ). Организатор и заведующий кафедрой прикладной теории вероятностей ННГУ (с 1986). Профессор ГГУ (1988), выборщик и учредитель РАЕН по секции «Математика, информатика, кибернетика» (1991), Соросовский профессор по математике (2000, 2001). Проблематика научных исследований и подготовки кадров: стохастические динамические системы, управляемые случайные процессы, нелокальное описание маркированных точечных процессов, алгоритмическое и адаптивное управление конфликтными потоками требований в системах обслуживания с переменной структурой, кибернетический подход к построению, анализу и оптимизации вероятностных моделей эволюционных экспериментов с управлением. Член редакционных коллегий журналов «Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математика» и «Математика в высшем образовании». Автор более 220 научных работ.



Пройдакова Екатерина Вадимовна – родилась в 1980 году в Горьком. В 2002 году окончила факультет вычислительной математики и кибернетики ННГУ. В 2003 году поступила в заочную аспирантуру ННГУ. Проблематика научных исследований: управляемые случайные процессы, нелокальное описание маркированных точечных процессов, алгоритмическое и адаптивное управление конфликтными потоками требований в системах обслуживания с переменной структурой. Основные результаты были представлены на научных конференциях и в двух статьях, депонированных в ВИНИТИ.

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 3, 2005 УДК 62-50

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННОГО МАЯТНИКА

Д.В. Баландин, М.М. Коган

Для параметрически возмущенного маятника получены условия робастной устойчивости в терминах линейных матричных неравенств. Приведены численные результаты оценки радиуса робастной устойчивости.

К 85-летию
профессора Ю.И. Неймарка

Введение

Для надежного функционирования технических систем важна не только их устойчивость, но и сохранение устойчивости при возможных изменениях параметров. Это требование в более общей форме было сформулировано А.А. Андроновым как требование грубости системы или ее робастной устойчивости. Проблема робастной устойчивости в современном понимании связана с нахождением условий асимптотической устойчивости любой системы из заданного класса, определяемого на основе априорной информации о системе. В монографии Ю.И. Неймарка «Устойчивость линеаризованных систем» [1] на основе предложенного им метода D-разбиения была поставлена и решена задача о нахождении областей устойчивости линейных систем по двум параметрам. В работах [2–7] этот подход был распространен им на случай многих параметров, введено понятие меры робастной устойчивости и рассмотрен случай периодических возмущений параметров линейных систем. Теме робастной устойчивости посвящена обширная литература (ссылки можно найти, например, в [8]).

В настоящей работе на примере параметрически возмущенного маятника рассмотрена проблема робастной устойчивости при произвольных ограниченных нестационарных возмущениях параметров. В основе предлагаемого подхода лежат современные методы теории управления, такие как H_∞-оптимизация и оптимизация выпуклых функций при ограничениях, задаваемых линейными матричными неравенствами [9].

1. Постановка задачи

Рассмотрим параметрически возмущенный маятник

$$\ddot{\varphi} + \delta[1 + f_1\Omega_1(t)]\dot{\varphi} + \omega_0^2[1 + f_2\Omega_2(t)]\varphi = 0\,, \tag{1}$$

где $\delta > 0,\ \omega_0 \neq 0,\ f_i\ (i = 1, 2)$ – заданные параметры. Функции $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ определяют параметрические возмущения и удовлетворяют условиям

$$|\Omega_i(t)| \leq \eta\,, \quad i = 1, 2\,, \quad \forall t \geq 0\,, \tag{2}$$

где $\eta > 0$ – в зависимости от постановки задачи либо заданный параметр, либо неизвестный параметр, подлежащий определению.

Если в (1) функция $\Omega_1(t) = 0$, а $\Omega_2(t) = \sin t$, то это уравнение переходит в уравнение Матье с трением. Традиционно в теории колебаний исследуются области параметрического резонанса в плоскости параметров f_2 и ω_0, в которых тривиальное решение этого уравнения неустойчиво.

Целью настоящей работы является исследование асимптотической устойчивости тривиального решения дифференциального уравнения (1) при всех допустимых параметрических возмущениях, удовлетворяющих (2). В теории устойчивости такая задача относится к проблеме робастной устойчивости. В статье будут рассмотрены две задачи: получение условий робастной устойчивости и оценка радиуса робастной устойчивости, то есть максимально возможного значения величины η, при которой рассматриваемая система робастно устойчива.

2. Робастная устойчивость и линейные матричные неравенства

Обозначив $x_1 = \varphi$ и $x_2 = \dot{\varphi}$, запишем уравнение (1) в виде системы

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\omega_0^2(1 + f_2\Omega_2(t))x_1 - \delta(1 + f_1\Omega_1(t))x_2\,,$$

которая представима в матричной форме

$$\dot{x} = \hat{\mathrm{A}}x\,, \quad \hat{\mathrm{A}} = \mathrm{A} + \mathrm{F}_1\Omega_1(t)\mathrm{E}_1 + \mathrm{F}_2\Omega_2(t)\mathrm{E}_2\,, \tag{3}$$

где $x = \mathrm{col}\,(x_1, x_2)$,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\delta \end{pmatrix}, \quad \mathrm{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{E}_1 = (0 \quad -\delta)\,, \quad \mathrm{E}_2 = (-\omega_0^2 \quad 0)\,.$$

Введем матрицы $\mathrm{F} = (\mathrm{F}_1\,\mathrm{F}_2)$ и $\mathrm{E}^T = (\mathrm{E}_1^T\,\mathrm{E}_2^T)$.

Наряду с неопределенной системой (3) рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{F}_1 v_1 + \mathrm{F}_2 v_2 \,, \tag{4}$$

в которой допустимое возмущение $v = \mathrm{col}\,(v_1, v_2)$ удовлетворяет условию

$$v^T \mathrm{S} v \le \eta^2 x^T \mathrm{E}^T \mathrm{S}\mathrm{E} x \,, \tag{5}$$

где S – положительно определенная диагональная матрица с диагональными элементами s_i, $i = 1, 2$. В частном случае, когда

$$v_1 = \Omega_1(t)\mathrm{E}_1 x \,, \quad v_2 = \Omega_2(t)\mathrm{E}_2 x \,,$$

уравнения (3) и (4) совпадают. Кроме того, из условия (2) в этом случае следует неравенство (5). Следовательно, исходная неопределенная система «погружена» во вспомогательную систему (4), (5).

Пусть существует положительно определенная квадратичная функция $V(x) = x^T \mathrm{X} x$ ($\mathrm{X} = \mathrm{X}^T > 0$), для которой в силу уравнения (4) справедливо неравенство

$$\dot{V} = 2x^T \mathrm{X}(\mathrm{A}x + \mathrm{F}v) < 0 \tag{6}$$

при всех x, v, удовлетворяющих условию (5). Вместо неравенств (6), (5) рассмотрим одно неравенство

$$2x^T \mathrm{X}(\mathrm{A}x + \mathrm{F}v) + \tau(\eta^2 x^T \mathrm{E}^T \mathrm{S}\mathrm{E} x - v^T \mathrm{S} v) < 0 \quad \forall\, x, v \,, \tag{7}$$

где $\tau > 0$ – некоторый параметр. Очевидно, что из последнего неравенства следует выполнение неравенства (6) для x, v, удовлетворяющих (5). В [10] показано, что верно также и обратное утверждение, называемое неущербностью S-процедуры при одном ограничении: из выполнения неравенства (6) для x, v, удовлетворяющих (5), следует справедливость неравенства (7) при некотором $\tau > 0$. Так как нас будет интересовать вопрос о существовании матриц X и S, при которых выполняется неравенство (7), то, не умаляя общности, положим $\tau = 1$. Выражение в левой части неравенства (7) представляет собой отрицательно определенную квадратичную функцию относительно переменных x, v и, следовательно, это неравенство при $\tau = 1$ эквивалентно следующему матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}^T \mathrm{X} + \mathrm{X}\mathrm{A} + \eta^2 \mathrm{E}^T \mathrm{S}\mathrm{E} & \mathrm{X}\mathrm{F} \\ \mathrm{F}^T \mathrm{X} & -\mathrm{S} \end{pmatrix} < 0 \,. \tag{8}$$

Итак, если линейное матричное неравенство (8) при заданном значении η разрешимо относительно неизвестных матриц $\mathrm{X} > 0$ и $\mathrm{S} > 0$, то неравенство (6) выполнено для всех x, v, удовлетворяющих (5). С учетом погружения исходной неопределенной системы в вспомогательную систему это будет означать, что $V(x)$ является функцией Ляпунова, обеспечивающей асимптотическую устойчивость исходной неопределенной системы.

Отметим, что условия разрешимости линейного матричного неравенства определяют лишь достаточные условия робастной устойчивости. Поэтому, если при некотором η неравенство (8) не имеет требуемого решения, то это не означает, что система не является робастно устойчивой.

Таким образом, проблема робастной устойчивости сводится к вопросу разрешимости линейного матричного неравенства. Следует заметить, что в последнее десятилетие был достигнут значительный прогресс в разработке эффективных численных методов решения линейных матричных неравенств на основе сведения этой задачи к задаче выпуклой оптимизации. Алгоритмы решения линейных матричных неравенств реализованы в пакете прикладных программ MATLAB (LMI toolbox) [11].

3. Оценка радиуса робастной устойчивости

Расчет проводился при следующих значениях параметров маятника:

$$\omega_0 = 10\,, \quad \delta = 1\,, \quad f_1 = f_2 = 0.5\,.$$

При $\eta = 0.15$ линейное матричное неравенство (8) разрешимо, и одно из решений этого неравенства таково

$$X = \begin{pmatrix} 9.887 & 0.0479 \\ 0.0479 & 0.0987 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0.965 & 0 \\ 0 & 0.0381 \end{pmatrix}.$$

Максимальное значение η, для которого неравенство (8) разрешимо, оказалось равным 0.18. Таким образом, рассматриваемый параметрически возмущенный маятник будет асимптотически устойчивым при всех допустимых возмущениях, удовлетворяющих (2) при $\eta = 0.18$.

Численное моделирование показало, что для $\Omega_1(t) = -\mu$, $\Omega_2(t) = \mu \sin 2\omega_0 t$ в системе (1) возникает параметрический резонанс при $\mu = 0.32$. С учетом этого вычислительного эксперимента можно указать двусторонние оценки радиуса робастной устойчивости рассматриваемой системы:

$$0.18 \le \eta \le 0.32\,.$$

Заключение

На примере параметрически возмущенного маятника показано, что решение проблемы робастной устойчивости сводится к задаче разрешимости линейных матричных неравенств. Описанный подход применим к исследованию робастной устойчивости линейных систем, а также к синтезу стабилизирующих регуляторов и регуляторов, обеспечивающих оптимальное гашение внешних возмущений [12–14].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 04-01-00222, 05-01-00123 и 04-01-81009 Бел 2004а), программы «Университеты России» (проект УР.03.01.172) и INTAS (проект 03-51-5547).

Библиографический список

1. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем. Ленинград: ЛКВВИА, 1949.
2. *Неймарк Ю.И.* Робастная устойчивость линейных систем // Доклады АН СССР. 1991. Т. 319. № 3. С. 578.
3. *Неймарк Ю.И.* Мера робастной устойчивости и модальности линейных систем // Доклады АН СССР. 1992. Т. 325. № 2. С. 247.
4. *Неймарк Ю.И.* Область робастной устойчивости и робастность по нелинейным параметрам // Доклады АН СССР. 1992. Т. 325. № 3. С. 438.
5. *Неймарк Ю.И.* Робастная устойчивость и D-разбиение // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 10.
6. *Неймарк Ю.И.* Робастная устойчивость при периодических возмущениях // Автоматика и телемеханика. 1992. № 12. С. 51.
7. *Неймарк Ю.И.* Робастная интервальная матричная устойчивость // Автоматика и телемеханика. 1994. № 7. С. 132.
8. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
9. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia. SIAM, 1994.
10. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
11. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A., Chilali M.* LMI Control Toolbox. For Use with MATLAB. The Math Works Inc, 1995.
12. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Об условиях разрешимости задачи робастного H_∞-управления по выходу // Доклады РАН. 2004. Т. 396. № 1. С. 32.
13. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Линейные матричные неравенства в задаче робастного H_∞-управления по выходу // Доклады РАН. 2004. Т. 396. № 6. С. 759.
14. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц // Автоматика и телемеханика. 2005. № 1. С. 82.

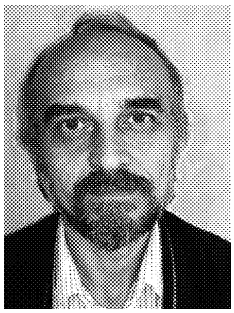
Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского
Нижегородский архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 28.06.2005

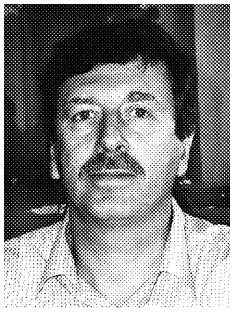
ROBUST STABILITY OF A PARAMETRICALLY DISTURBED PENDULUM

D.V. Balandin, M.M. Kogan

Robust stability conditions in terms of linear matrix inequalities for a parametrically disturbed pendulum are obtained. Numerical results for estimating radius of robust stability are given.



Баландин Дмитрий Владимирович – родился в 1957 году в Горьком, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета в 1979 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в МГУ в 1998 году. Заведующий кафедрой численного и функционального анализа Нижегородского государственного университета. Область научных интересов – теоретическая механика и теория управления. Автор более 100 научных публикаций, соавтор монографии «Optimal Protection from Shock, Impact, and Vibration», изданной «Gordon and Breach Publishers» в 2001 году. Лауреат премии РАН им. А.А. Андронова за 2003 год. E-mail: balandin@pmk.unn.runnet.ru



Коган Марк Михайлович – родился в 1951 году в Горьком, окончил факультет ВМиК Горьковского государственного университета в 1973 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в 1998 году в Институте проблем управления РАН. Заведующий кафедрой высшей математики Нижегородского архитектурно-строительного университета, профессор. Автор более 100 научных публикаций в российских и международных изданиях в области теории управления. E-mail: mkogan@nngasu.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 3, 2005 УДК 531,383

РАСКРУТКА РОТОРОВ В УСТРОЙСТВАХ С НЕКОНТАКТНЫМ ПОДВЕСОМ

В.Н. Комаров *

В работе рассматривается один из способов раскрутки роторов в устройствах с неконтактным подвесом, отличающийся тем, что для создания вращения применен фазоимпульсный способ управления полями катушек статора. Методом аппроксимации предельных циклов рядами Фурье проведено теоретическое исследование возможности осуществления предлагаемого способа раскрутки в устройствах с неконтактным подвесом. Найден алгоритм управления полями катушек и получены условия, налагаемые на параметры действующих моментов, которые позволяют получить максимальную угловую скорость ротора при минимальных энергозатратах. Исследование проведено для одной, двух и нескольких пар управляющих катушек.

К 85-летию
профессора Ю.И. Неймарка

В гироскопах нового поколения – свободных гироскопах с неконтактным подвесом сферического ротора [1], последний обладает большой угловой свободой, что позволяет осуществить его движение практически с любым углом нутации, а не только близким к нулю, как это делается в обычных механических гироскопах. В свое время группа сотрудников возглавляемого Ю.И. Неймарком отдела НИИ прикладной математики (НИИПМК, Нижний Новгород) показала теоретически и доказала экспериментально [2], что при движении ротора с углом нутации, близким к прямому, происходит существенное ослабление действия на ротор гироскопа консервативных моментов, большая часть которых преобразуется в знакопеременные функции времени, что существенно уменьшает уходы гироскопа и повышает

* Будучи студентом, я не слушал лекций Юрия Исааковича, не сдавал ему зачеты и экзамены, так как учился на другом факультете. Однако многолетняя работа в возглавляемом им отделе НИИ прикладной математики и кибернетики, общение с ним на различных семинарах и конференциях, в том числе и неформальное, а в последние годы и общение как коллег преподавателей не могли пройти бесследно, накладывая определенный отпечаток и на мою научную работу и на мироощущение в целом. Думаю, это дает мне право называть Юрия Исааковича Неймарка своим Учителем, так как Учитель не тот, кто учит, а тот, у кого учатся. Учатся ремеслу, пониманию людей, отношению к человеку и обществу.

его точность. При этом ось динамической симметрии ротора движется по сильно развернутому конусу при сохранении обычного вращения ротора вокруг этой оси. Учитывая эти особенности движения, авторы, предложившие осуществление такого движения в гироскопах с целью повышения их точности, назвали его двойным вращением.

Вне зависимости от типа и конструкции свободного гироскопа для получения его малых уходов прежде всего следует добиваться малости паразитных или уводящих моментов. Применительно к гироскопу с магнитным подвесом это условие требует, в частности, уменьшения влияния гистерезиса и вихревых токов, что ведет к необходимости использовать для ротора плохо проводящие ферромагнитные материалы. Такой ротор можно неконтактно вывесить в поле подвеса, однако трудно привести во вращение вращающимся магнитным полем, как это делается в гироскопах с электростатическим подвесом.

Преодоление этой трудности требует либо применения весьма сложных устройств, либо использования проводящих материалов для изготовления некоторых частей ротора. Обычно это поясок, охватывающий экваториальное сечение ротора [3].

Еще большие трудности встают при осуществлении двойного вращения ротора в гироскопах с магнитным подвесом. Если при обычном вращении ротора его металлический поясок, служащий для разгона вращающимся магнитным полем, всегда близок к поперечной плоскости симметрии подвеса Z_1OZ_2, где и расположен статор вращения, то при двойном вращении ни один из «экваторов» на поверхности шарового по форме ротора не сохраняет своей близости ни к одной из плоскостей подвеса.

Можно, однако, заметить, что от плоскости Z_1OZ_2 мало отклоняется ось динамической симметрии ротора OX_3, движущейся по образующей сильно развернутого конуса с углом раскрыва $2\vartheta \approx \pi$. Следовательно, если поместить на оси ротора проводящий материал, например, проводящие диамагнитные «пятаки», служащие одновременно для создания вытянутого эллипсоида инерции (рис. 1), то быстрое вращение ротора по углу ψ вокруг одной из его экваториальных осей можно создать вращающимся в плоскости Z_1OZ_2 магнитным полем.

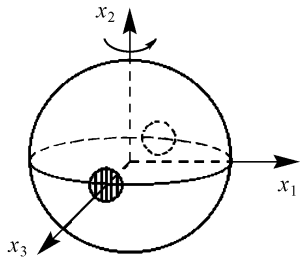


Рис. 1.

Однако такой метод раскрутки ротора не оптимален с энергетической точки зрения, так как с ротором взаимодействуют лишь катушки, мимо которых в данный момент движутся проводящие части ротора, другие же катушки статора, не внося вклада во вращающий момент, потребляют энергию и приводят к излишнему выделению тепла в рабочей камере гироскопа.

При экспериментальной проверке предложенного метода автокомпенсации консервативных моментов использовался другой, фазоимпульсный, способ осуществления необходимого движения ротора, протекающий в два этапа: на первом – ротору придавалось быстрое вращение вокруг одной из экваториальных осей, на втором – путем раскачки колебаний ротора вокруг оси симметрии он переводился в режим

медленного вращения вокруг этой оси. В настоящей работе, первой из предполагаемого цикла, рассматривается лишь придание ротору гироскопа быстрого вращения.

Не останавливаясь на технических деталях решаемой задачи, укажем лишь, что проводящие участки ротора взаимодействовали с катушками статора лишь в течение коротких промежутков времени, когда на них подавалось напряжение, причем моменты включения и выключения напряжения определялись угловым положением оси симметрии ротора относительно подвеса.

Для этого в экваториальной плоскости подвеса устанавливаются эквидистантно N-пар катушек. Легко понять, что напряжение на каждую пару катушек должно подаваться дважды за период вращения ротора, когда проводящие области будут находиться против данной пары катушек (рис. 2). Длительность импульсов управления – не более четверти периода вращения ротора. Для исключения сил притяжения или отталкивания, действующих со стороны поля катушек на ротор, их следует использовать парами, при этом взаимодействие ротора с полем будет носить моментный характер, а силовое взаимодействие будет малым и обусловленным лишь неравенством действия катушек на ротор.

Всегда имеющееся трение, тормозящие моменты токов Фуко ограничивают снизу величину поля катушек, так как создаваемый ими средний момент вращения должен быть больше (при раскрутке) или равен (при стационарном вращении) некоторому критическому, равному по величине суммарному тормозящему моменту.

Задача заключается в получении налагаемых на параметры системы условий, при которых возможен перевод ротора из состояния покоя в режим стационарного вращения и определение характеристик этого режима.

Рассмотрим процесс придания ротору быстрого вращения, опираясь на динамические уравнения Эйлера, получаемые проецированием на связанные с ротором оси OX_i основного уравнения гироскопии [4]

$$\dot{\mathbf{K}} + [\Omega \times \mathbf{K}] = \mathbf{M}, \tag{1}$$

где $\mathbf{K}$ – кинетический момент ротора, вращающегося с угловой скоростью Ω под действием момента $\mathbf{M}$.

Зададим взаимную ориентацию систем координат OX_i (ротор) и OZ_k (подвес) углами Эйлера φ, ψ, ϑ (рис. 3) [4] и при этом будем считать, что центр масс

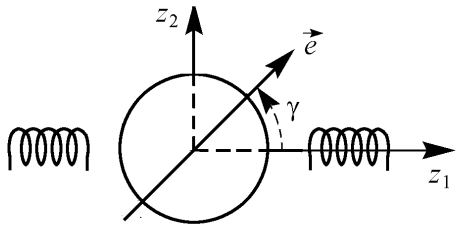


Рис. 2.

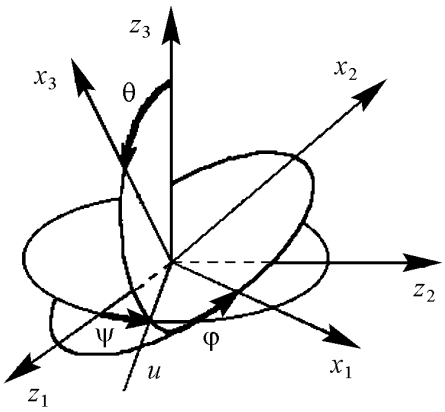


Рис. 3.

ротора неподвижен относительно подвеса, а сам ротор идеально сбалансирован и в динамическом смысле осесимметричен $\left(I_1 = I_2 = I_\perp \neq I_3 = I_{||}\right)$. При этих предположениях в проекциях на оси OX_i получим

$$\begin{aligned}
&I_\perp \left[\ddot{\psi}\sin\vartheta + \dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - \dot{\varphi}\dot{\vartheta} - \eta\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta\right)\right] = M_{x2}\sin\varphi - M_{x1}\cos\varphi,\\
&I_\perp \left[\ddot{\vartheta} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\vartheta + \eta\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta\right)\right] = M_{x2}\cos\varphi + M_{x1}\sin\vartheta,\\
&I_{||}\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\vartheta - \dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\right) = M_{x3},
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\eta = \left(I_{||}/I_\perp - 1\right)$.

Для роторов с вытянутым эллипсоидом инерции $(\eta < 0)$ при начальных условиях $\Theta(0) = \cos\vartheta(0) \approx 0$, $\omega(0) = \dot{\varphi}(0) \approx 0$ в течение всего последующего процесса раскрутки ротора по углу ψ (быстрое вращение), при и после перевода ротора в двойное вращение величины Θ, $\dot{\Theta}$ и ω будут малы, что позволяет оставить в уравнениях (2) лишь линейные по этим переменным члены.

Действующий на ротор результирующий момент складывается из подкручивающих моментов N пар катушек статора и моментов трения. Если рассматривать взаимодействие «пятаков» с полем катушек как взаимодействие «точечных магнитных зарядов» [5], то момент n-й пары катушек (они все считаются одинаковыми) можно представить выражением

$$\mathbf{M}_n = M_0\left[(1 - aC_n)^{-3/2}(1 + aC_n)^{-3/2}\right]\cdot\left[\mathbf{l}_n \times \mathbf{e}\right], \tag{3}$$

где $\mathbf{l}_n, \mathbf{e}$ – орты осей n-й пары катушек и проводящих кружков; $C_n = (\mathbf{l}_n \cdot \mathbf{e}) = \cos\gamma_n$; $a = {2rl}/{\left(r^2 + l^2\right)}$; r – расстояние от центра ротора до «магнитного заряда»; l – расстояние от центра подвеса (ротора) до полюса катушки.

Из приведенного выражения для момента видно, что $\mathbf{M}_n = 0$, когда $[\mathbf{l}_n \times \mathbf{e}] = 0$ или $C_n = 0$, то есть в тех положениях, когда угол γ_n между осями симметрии ротора и катушек равен $k\pi/2$, что позволяет представить его величину выражением $M_n = m_0 IF(\gamma_n)\sin 2\gamma_n$, где $F(\gamma_n)$ – четная неотрицательная функция угла γ_n (точнее $F(\gamma_n) = \tilde{F}(\cos\gamma_n)$).

Так как под действием приложенного момента (3), создаваемого катушками, по которым течет переменный ток, ротор будет совершать какое-то движение, при котором будет меняться магнитный поток поля катушек через проводящие области на роторе, то, следовательно, со стороны того же самого поля будет действовать и тормозящий момент, обусловленный токами Фуко

$$\mathbf{M}_{n\Omega} = \chi I m_0\, \mathbf{l}_n \times \left[\mathbf{l}_n \times \Omega\right]. \tag{4}$$

Учтем, кроме того, что рассеяние кинетической энергии ротора может происходить и под действием других тормозящих моментов, например, за счет остаточного газа в рабочей камере гироскопа. Действие этих моментов будем моделировать моментом вязкого трения.

Пользуясь произвольностью выбора осей OZ_1 и OZ_2, направим их так, чтобы ось OZ_1 совпадала с осью n-й пары катушек, создающей моменты (3) и (4).

Подставляя соответствующие проекции учитываемых моментов в правые части линеаризованных по Θ, $\dot{\Theta}$ и ω уравнений (2), получим, что при действии лишь одной, n-й, пары катушек движение ротора будет подчиняться уравнениям

$$\begin{aligned}
&\ddot{\psi} + \left(\lambda_{||}\, h_{\perp} + \chi m_0\right) \dot{\psi} = m_0\, F \sin 2\psi, \\
&\ddot{\Theta} + \left(\lambda_{\perp}\, h_{\perp} + \chi m_0 \cos^2 \psi\right) \dot{\Theta} - 2\Theta m_0 \cos^2 \psi = M_{\vartheta}\left(\psi, \dot{\psi}, \omega\right), \\
&(1+\eta)\, \dot{\omega} + \left(\lambda_{\perp}\, h_{||} + \chi m_0 \sin^2 \psi\right) \omega = M_{\omega}\left(\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}, \Theta, \dot{\Theta}\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

В этих уравнениях учтено, что момент трения зависит от того, вращается ли ротор вокруг оси симметрии подвеса $\left(\lambda_{||}\right)$ или перпендикулярно к ней $(\lambda_{\perp})$. Кроме того, момент зависит и от того, вращается ли ротор вокруг оси динамической симметрии $\left(h_{||}\right)$ или же вокруг одной из экваториальных осей $(h_{\perp})$.

Первое уравнение в (5) описывает движение ротора по углу ψ, а два других – по углам ϑ и φ, причем первое уравнение может рассматриваться независимо от остальных.

При произвольной ориентации оси катушек в плоскости Z_1OZ_2, например, под углом α_n к оси OZ_1, в правой части уравнений необходимо совершить замену $\psi \to \psi - \alpha_n$. Если же действует не одна, а несколько пар катушек, необходимо их действие просуммировать. Таким образом, окончательное уравнение, описывающее движение ротора по углу ψ, принимает вид

$$\ddot{\psi} + \left[\lambda_{||}\, h_{\perp} + \chi \sum_{n=1}^{N} m_{0n}\left(\psi\right)\right] \dot{\psi} = \sum_{n=1}^{N} m_{0n}\left(\psi\right) F_n\left(\psi - \alpha_n\right) \sin 2\left(\psi - \alpha_n\right). \tag{6}$$

Рассмотрим прежде всего движение ротора под действием лишь одной пары управляющих катушек, когда

$$\ddot{\psi} + \left[h + \chi m_0\left(\psi\right)\right] \dot{\psi} = m_0\left(\psi\right) F\left(\psi\right) \sin 2\psi = M\left(\psi\right), \tag{7}$$

где $h = \lambda_{||}\, h_{\perp}$.

Нетрудно видеть, что при постоянно включенных катушках нет никакого вращения по углу ψ и все траектории стягиваются к устойчивым состояниям равновесия $\psi_f = (2k+1)\,\pi/2$, зоны притяжения которых разделяются сепаратрисами седел с координатами $\psi_s = k\pi$. Необходимым условием существования вращения является неравенство нулю интеграла

$$\left\langle M\left(\psi\right)\right\rangle = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} m_0\left(\psi\right) F\left(\psi\right) \sin 2\psi d\psi \neq 0.$$

Если изменять величину $m_0\left(\psi\right)$ релейно по закону

$$m_0\left(\psi\right) = \begin{cases} m_1 & 0 \leq \psi \leq \gamma, \\ m_2 & \gamma \leq \psi \leq \pi, \end{cases} \tag{8}$$

то получим

$$\left\langle M\left(\psi\right)\right\rangle = \frac{4\left(m_1 - m_2\right)}{\pi a} \left[\frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{\sqrt{1+a\cos\gamma} + \sqrt{1-a\cos\gamma}}{\sqrt{1-a^2\cos^2\gamma}}\right]. \tag{9}$$

Так как m_k пропорциональна квадрату амплитуды поля катушек, то есть величина неотрицательная, то постоянная составляющая $\langle M(\psi)\rangle$ будет максимальна при $m_1 = m$, $m_2 = 0$, $\gamma = \pi/2$, то есть катушки включаются дважды за период быстрого вращения, причем их включение производится в момент совпадения осей ротора и катушек, а выключение – когда эти оси взаимно перпендикулярны.

Подставляя в уравнение (7) зависимость $M(\psi)$ при переключениях (8) с параметрами (9), приходим к уравнению с разрывной правой частью, или к двум уравнениям

$$\begin{aligned} &\ddot{\psi} + (h + \chi m(\psi))\,\dot{\psi} = m(\psi)\,F(\psi)\sin 2\psi\,, && k\pi \le \psi \le k\pi + \pi/2, \\ &\ddot{\psi} + h\dot{\psi} = 0, && k\pi + \pi/2 \le \psi \le (k+1)\,\pi, \end{aligned} \tag{7a}$$

описывающим движение ротора при переключениях управляющих катушек.

Соответствующие этим уравнениям фазовые портреты приведены на рис. 4, *а*, *б*, а полный портрет – на рис. 4, *в*.

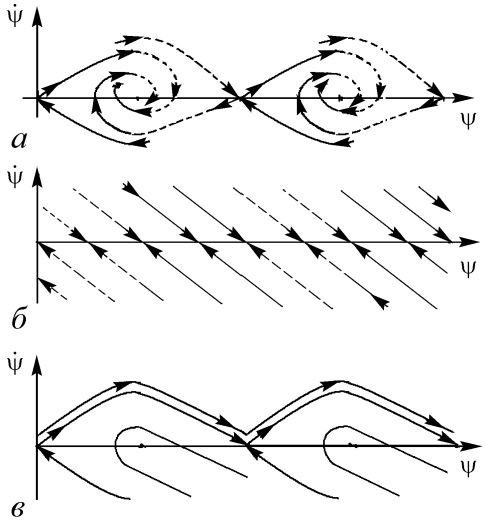


Рис. 4.

Эти рисунки соответствуют случаю малого трения, когда

$$\lambda_{\max}^2 = (h + \chi m)^2 < 36ma \tag{10}$$

и точки $\psi_f = (2k+1)\,\pi/2$ являются устойчивыми фокусами. Кроме того, рис. 4, *в* выполнен для бифуркационных значений параметров m^* и h^*, определяющих возможность существования быстрого вращения при $m > m^*$ и невозможность его при $m < m^*$.

Для фазовых траекторий $\dot{\psi} = \omega(\psi)$, соответствующих уравнению (7) или уравнениям (7а), можно записать

$$\omega\frac{d\omega}{d\psi} + \lambda(\psi)\,\omega = M(\psi)\,, \tag{11}$$

где $\lambda(\psi) = h + \chi m_0(\psi)$.

Не ставя цели исследовать все многообразие описываемых этим уравнением траекторий, ограничимся отысканием соотношения между бифуркационными значениями параметров, при которых на фазовой плоскости возникает образованная смыканием сепаратрис седел полуустойчивая траектория $\tilde{\omega}(\psi) = \tilde{\omega}(\psi + \pi)$, изображенная на рис. 4, *в*.

Так как нас интересуют условия, при которых может существовать этот предельный цикл, то необходимо составить некоторое математическое условие, обеспечивающее при наличии трения замыкание сепаратрис, из которого можно было бы получить зависимость $m^*(h)$ или $F(h, m^*) = 0$.

Для аналитического определения $F(h, m^*)$ воспользуемся предложенным в [6] методом аппроксимации предельных циклов. Рассматривая лишь интервал $[0, \pi]$ по углу ψ, можно считать, что при $0 \le \psi \le \pi$ сепаратрисный предельный цикл совпадает с нечетной функцией угла ψ и может быть представлен рядом

$$\tilde{\omega}(\psi) = \sum_{n=1}^{N} \omega_n \sin n\psi. \tag{12}$$

При таком представлении на краях рассматриваемого по ψ интервала $[0, \pi]$ устраняется разрыв производной ω'_ψ, что обеспечит быструю сходимость ряда (12) при конечном числе N его членов. Если этот ряд сходится равномерно, то его можно дифференцировать

$$\frac{d\tilde{\omega}}{d\psi} = \sum_{n=1}^{N} n\omega_n \cos n\psi. \tag{13}$$

Так как $\lambda(\psi) = h + \chi m_0(\psi)$, то на интервале $[0, \pi]$ $\lambda(\psi)$ может быть представлена четной периодической функцией ψ:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_n \lambda_n \cos n\psi. \tag{14}$$

Аналогичным образом можно записать и разложение в ряд Фурье правой части уравнения (11)

$$M(\psi) = \sum_n M_n \sin n\psi. \tag{15}$$

Коэффициенты всех приведенных выше разложений типа

$$F(\psi) = \frac{F_0}{2} + \sum_n (a_n \cos n\psi + b_n \sin n\psi)$$

находятся из соотношений

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(\psi) \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\psi \Big) d\psi,$$

как это показано на рис. 5.

Подставляя эти разложения в уравнение (11), представим его в виде $\sum\limits_n B_n \sin n\psi = 0$. Оставляя лишь члены по $n = N + 1$ включительно, получим N-е приближение для зависимости $m^* = m^*(h, \chi)$. Ввиду получающихся при этом весьма громоздких выражений ограничимся общей записью алгебраических уравнений для получения первого приближения

$$(\lambda_0 - \lambda_2)\,\omega_1 = 2M_1,$$
$$\omega_1^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)\,\omega_1 = 2M_2\,.$$

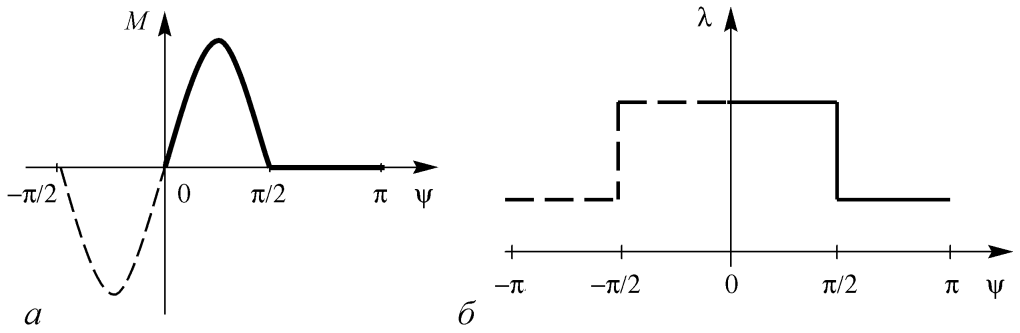


Рис. 5.

Выразив из первого уравнения ω_1 и подставив полученное выражение во второе уравнение, запишем следующее уравнение

$$M_2\left(\lambda_0-\lambda_2\right)^2-M_1\left(\lambda_1-\lambda_3\right)\left(\lambda_0-\lambda_2\right)=2M_1^2, \tag{16}$$

из которого и получим искомую зависимость $m^*=m^*\left(h,\chi\right)$.

Если воспользоваться приближением постоянного магнитного поля, когда момент (3) может быть представлен наиболее простой формулой $\mathbf{M}_n=M_0\left(\mathbf{l}_n\cdot\mathbf{e}\right)\times$ $\times\left[\mathbf{l}_n\times\mathbf{e}\right]$, функции $M(\psi)$ и $\lambda(\psi)$ будут иметь изображенный на рис. 5 вид, а разложения (14) и (15) запишутся следующим образом:

$$\lambda\left(\psi\right)=\left(h+\chi\frac{\gamma m}{\pi}\right)+\chi\frac{2m}{\pi}\sum_{k=1}\left(\frac{\sin k\gamma}{k}\right)\cos k\psi,$$

$$M\left(\psi\right)=\frac{m}{\pi}\sum_{k=1}\left[\frac{\sin\left(k-2\right)\gamma}{k-2}-\frac{\sin\left(k+2\right)\gamma}{k+2}\right]\sin k\psi.$$

Тогда для малых χ

$$m^*\left(h,\chi,\gamma\right)=\frac{9\pi\,h^2\left(\gamma-\dfrac{\sin 4\gamma}{4}\right)}{8\sin^6\gamma}\left[1+\frac{9\chi}{16h\sin^6\gamma}\left(4\gamma-2\sin 2\gamma-\frac{32}{9}\sin^6\gamma\right)\right]. \tag{17}$$

Очевидно, что минимальное значение m^* принимает при $\gamma=\pi/2$:

$$m^*\left(h,\chi,\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{3\pi h}{4}\right)^2\left[1+\frac{9\chi}{16h}\left(2\pi-\frac{32}{9}\right)\right]. \tag{18}$$

Физический смысл необходимости выполнения неравенства $m>m^*$ для осуществления вращения ротора очевиден – за время включения катушек ротор должен набрать угловую скорость, достаточную для того, чтобы при выключенных катушках подойти к следующему циклу включения с отличной от нуля скоростью.

Применяя известное соотношение Трикоми [7] для периодических решений уравнения типа (11), можно показать, что при использовании одной пары управляющих катушек возможен разгон ротора до угловой скорости

$$\langle\omega\left(N=1\right)\rangle=\frac{2m}{\pi\left(2h+\chi m\right)}, \tag{19}$$

однако, как уже сказано выше, создаваемый катушками момент при этом должен быть больше некоторого критического значения m^*.

Так как в соответствии с выражением (3) эффективное взаимодействие ротора с полем катушек происходит лишь при малом угле между их осями, то при уменьшении длительности импульса тока в 2 раза ($\gamma=\pi/4$) теряется лишь около 10% максимально возможной скорости вращения, то есть работа короткими импульсами более экономична. Очевидно, что при этом уменьшается и тепловыделение Q в полость подвеса.

Если ввести «коэффициент оптимальности»

$$k = \frac{\omega(\gamma)}{Q(\gamma)} \cdot \frac{Q(\pi/2)}{\omega(\pi/2)},$$

то можно увидеть, что существует оптимальная длительность включения катушек (по углу γ), при которой этот коэффициент максимален.

Процесс разгона ротора облегчается, если использовать включаемые попеременно две пары катушек, оси которых взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости Z_1OZ_2. Тогда даже при большом трении, когда не выполняется условие (10), на фазовой плоскости $\Pi(\psi, \omega)$ существует полуустойчивый сепаратрисный цикл, как это показано на рис. 6. Если же условие (10) выполняется и обе пары катушек включаются друг за другом на четверть периода вращения по углу ψ, режим вращения будет существовать обязательно.

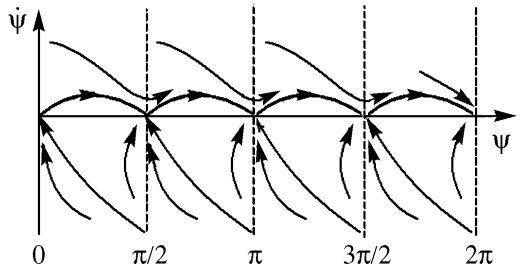


Рис. 6.

В общем случае момент, создающий быстрое вращение ротора по углу ψ, может формироваться N парами управляющих катушек, расположенных эквидистантным образом в поперечной плоскости симметрии подвеса под углами $\beta_n = \beta_0 + n\pi/N$ к оси OZ_1 $(n = 1 \div N)$ и включаемыми по одному и тому же алгоритму

$$m_n = \begin{cases} m & n\pi \le \psi - \beta_n \le n\pi + \gamma, \\ 0 & n\pi + \gamma \le \psi - \beta_n \le (n+1)\pi. \end{cases} \tag{20}$$

Так как оси соседних катушек расположены под углом π/N друг к другу, то работа статора вращения может проходить в двух режимах: когда $\gamma < \pi/N$ и когда $\pi/N \le \gamma \le \pi/2$. В первом случае имеются промежутки времени, когда ни одна из пар катушек не включена и необходимо, чтобы ротор на выбеге смог повернуться на угол $\psi = \pi/N - \gamma$ до момента включения следующей пары, а из этого следует, что создаваемый катушками момент опять должен быть больше некоторого критического m^*. Во втором случае, при $N \ge 3$, в любой момент времени оказывается включенной хотя бы одна пара катушек и, следовательно, вращающий момент всегда отличен от нуля и раскрутка ротора возможна при любой амплитуде момента, определяющей величину стационарной угловой скорости вращения, которая может достигать максимального значения, определяемого выражением

$$\langle \omega(N) \rangle = \frac{2mN}{\pi(2h + \chi mN)}. \tag{21}$$

Заметим, что и в этом случае можно подобрать оптимальную длительность включения катушек с целью уменьшения тепловых потерь.

Увеличение числа пар катушек приводит еще и к уменьшению зависимости раскручивающего момента от угла поворота ротора и, как следствие, к большей равномерности стационарного вращения.

Библиографический список

1. *Малеев П.И.* Новые типы гироскопов. Л.: Судостроение, 1971. 160 с.
2. *Денисов Г.Г., Комаров В.Н., Неймарк Ю.И. и др.* Авт. св-во № 65469, 1970.
3. *Одинцов А.А.* Магнитный гироскоп и инерциальная система на его основе // Судостроительная промышленность, сер. «Навигация и гироскопия». 1991. Вып. 1. С. 51-57.
4. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
5. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.
6. *Капранов М.В.* Метод аппроксимации предельных циклов. В кн. «Фазовая синхронизация» /Под ред. В.В. Шахгильдяна и Л.Н. Белюстиной. М.: Связь, 1975. С. 38-65.
7. *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 300 с.

Нижегородскиий государственный университет им. Н.И. Лобачевского

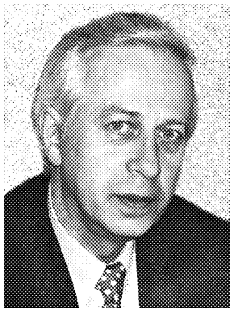
Поступила в редакцию 18.07.2005

SPINUP OF ROTORS IN DEVICES WITH NONCONTACT SUSPENSION

V.N. Komarov

In the paper one of ways of spinup of rotors in devices with noncontact suspension is considered. For the creation of rotation the pulse-position way of control the fields of stator's coils is applied.

The method of approximation of limiting cycles by the Fourier series is carried out for the theoretical investigation of an opportunity of realization of the suggested way. The algorithm of control the coils fields is found and the conditions imposed on the parameters of the working moments which allow to receive the maximal angular speed of the rotor at the minimal power inputs are received. Investigstion is carried out for one, two and several pairs of control coils.



Комаров Валентин Николаевич – родился в Арзамасе (1943), окончил Горьковский государственный университет (1966). После окончания ГГУ работал в НИИ прикладной математики и кибернетики (Нижний Новгород). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в ГГУ (1975) и доктора технических наук в МЭИ (1993) по специальности динамика, прочность, надежность машин, приборов, аппаратуры. Опубликовал около 100 научных работ в области динамики твердого тела и гироскопии. Действительный член Международной Академии навигации и управления движением, член редколлегии «Ученых записок Волго-Вятского отделения Международной Славянской Академии наук, образования, искусств и культуры», награжден Почетной медалью «За заслуги в деле возрождения науки и экономики России». В настоящее время заведует кафедрой прикладной математики на факультете ВМК Нижегородского госуниверситета. E-mail: kovn3@uic.nnov.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 3, 2005 УДК 537.86

ФОРМИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СТРУКТУР В РЕШЕТКАХ БИСТАБИЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ДВУМЯ ТИПАМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ

О.И. Канаков, В.Д. Шалфеев

Исследуются и сравниваются закономерности формирования структур в решетках из бистабильных элементов первого порядка с нелинейными связями с двумя различными видами нелинейности базового элемента. Результаты интерпретируются с точки зрения применения таких систем к задаче выделения контуров в изображениях. На рассмотренных примерах показано, что замена нелинейности базового элемента при определенных условиях не влияет существенно на функционирование такой системы обработки изображений.

Введение

Исследование динамики коллективных систем, состоящих из большого количества связанных нелинейных элементов, является одним из перспективных и бурно развивающихся направлений современной нелинейной физики. Коллективная динамика представляет интерес как в применении к исследованию известных в биологии, физике и технике сложных систем (таких как нейронные ансамбли, взаимодействующие популяции, активные среды, энергосети, фазированные антенные решетки), так и с точки зрения создания нового класса искусственных систем, ориентированных на решение задач обработки информации.

В связи с приложениями к обработке изображений за последнее десятилетие большое количество теоретических и экспериментальных исследований были посвящены динамике двумерных сетей из нелинейных элементов [1–5]. В соответствии с предложенной в [1] концепцией изображение, подлежащее обработке, может быть задано или через начальные условия, или в форме внешней силы, или обоими этими способами одновременно; результатом обработки считается структура, устанавливающаяся в системе. Основное преимущество такого способа обработки заключается в

его параллелизме: число пикселов в обрабатываемом изображении определяет сложность системы, но не влияет либо влияет слабо на время обработки.

Одной из известных моделей такого типа является двумерная решетка связанных бистабильных элементов, динамика каждого из которых описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, а связи осуществляются через нелинейную функцию. Уравнения решетки размера $K \times L$ имеют вид

$$\dot{x}_{ij} = -x_{ij} + \sum_{k,l=-m}^{m} \delta_{kl}\Phi(x_{i+k,j+l}) + \gamma_{ij}, \tag{1}$$

где $i = \overline{1,K}$, $j = \overline{1,L}$; m – максимальная дальность связей; $\Phi(x)$ – нелинейная скалярная функция, $|\Phi(x)| \leq 1$; γ_{ij} – параметры внешнего воздействия; коэффициенты δ_{kl} определяют трансляционно-инвариантную структуру связей. Используются нулевые граничные условия, то есть все величины x_{ij}, где i меньше 1 или больше K, или j меньше 1 или больше L, полагаются равными нулю.

К настоящему времени хорошо изучены свойства систем вида (1) с нелинейностью типа кусочно-линейной функции с насыщением $\Phi(x) = F(x)$, где

$$F(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|). \tag{2}$$

Такие системы известны под названием CNN (cellular neural/nonlinear networks – клеточные нейронные/нелинейные сети). Они активно изучались и в теории (как аналитически, так и с помощью численного моделирования), и в эксперименте на радиоэлектронных схемах, реализующих динамику типа (1) (см. обзор [5]).

Известно [1], что системы CNN с симметричными связями ($\delta_{kl} = \delta_{-k,-l}$ в (1) для $k, l = \overline{-m,m}$) не имеют никаких других аттракторов, кроме устойчивых состояний равновесия. Таким образом, эволюция таких систем из любых начальных условий сходится к неподвижной структуре. Существует метод [6], позволяющий найти все устойчивые состояния равновесия заданной CNN или спроектировать CNN с заданными устойчивыми состояниями равновесия [7].

Представляют интерес, однако, и свойства систем вида (1) с другими типами нелинейности. В частности, вид функции $\Phi(x)$ в (1) должен соответствовать выбранному способу технической реализации системы. Например, базовый элемент может быть реализован как автогенератор с цепью управления по частоте. Если сигнал в цепи управления инвертирован по отношению к тому, который используется в типичной системе частотной автоподстройки, то такой элемент является бистабильным. Переменная состояния в этом случае имеет смысл нормированной частоты колебаний генератора, а нелинейность базового элемента определяется характеристикой частотного дискриминатора. Типичная нелинейность в моделях таких элементов описывается функцией

$$G(x) = \frac{2x}{1+x^2}\,. \tag{3}$$

Кроме того, системы вида (1) с различными типами нелинейности представляют теоретический интерес как обширный класс решеточных систем с нелинейными недиффузионными связями.

В общем случае системы вида (1) способны демонстрировать сложную динамику, в том числе хаос [6]. Однако, с точки зрения упомянутого выше применения к обработке изображений, наибольший интерес представляет исследование стационарных структур в таких системах и закономерностей их формирования.

Настоящая работа посвящена сравнению закономерностей формирования структур в решеточных системах вида (1) с двумя типами нелинейности: $\Phi(x) = F(x)$ (2) и $\Phi(x) = G(x)$ (3) в частном случае нулевого внешнего воздействия ($\gamma_{ij} = 0$). При исследовании используются как аналитические расчеты, так и численное моделирование с опорой на аналитические результаты и эвристические соображения. В разделе 1 аналитически исследуются стационарные структуры в системах вида (1) с нелинейностью парциального элемента (3). В разделе 2 представлены результаты численного исследования стационарных структур в зависимости от начальных условий и параметров в решеточных системах с обоими типами нелинейности в случае локальных связей. В заключении обсуждаются полученные результаты и делаются выводы.

1. Стационарные структуры в решетке частотно-управляемых генераторов

В настоящем разделе уточняется используемое в этой статье понятие «стационарной структуры». Далее, достаточный критерий высокой мультистабильности, известный для системы (1) с нелинейностью (2), переносится на систему с нелинейностью (3), которая может рассматриваться как модель решетки частотно-управляемых генераторов.

Заметим, что типы аттракторов в системах (1) с нелинейностью общего вида даже в случае симметричных связей не ограничиваются только устойчивыми состояниями равновесия. В общем случае могут наблюдаться другие типы аттракторов, например, предельные циклы или хаотические аттракторы. Однако даже в таких случаях при определенных условиях можно говорить о стационарных структурах, не уточняя типа аттрактора. В этой статье термином «стационарная структура» будем обозначать такой режим в системе, при котором она совершает движение на аттракторе с неизменными во времени знаками переменных состояния. Таким образом, каждая такая структура характеризуется определенной матрицей знаков $\mathrm{Y} = (y_{ij})$ с элементами, равными 1 или (-1).

С точки зрения задач обработки изображений, представляется важным вопрос, найдется ли для любой заданной матрицы знаков $\mathrm{Y} = (y_{ij})$ соответствующая стационарная структура в системе. Если это условие выполнено, будем говорить, что система обладает высокой мультистабильностью. В этом случае решеточная система размером $K \times L$ имеет, по крайней мере, $2^{K\times L}$ аттракторов.

Известно [1], что система (1) с нелинейностью (2) и нулевым внешним воздействием $\gamma_{ij} = 0$ при условии

$$\delta_{00} - D > 1, \quad D = \sum_{k,l\neq 0} |\delta_{kl}| \tag{4}$$

имеет в фазовом пространстве $2^{K\times L}$ устойчивых состояний равновесия, соответ-

ствующих всевозможным матрицам знаков Y, и обладает, таким образом, высокой мультистабильностью.

Рассмотрим систему (1) с нелинейностью (3) и нулевым внешним воздействием. Как было упомянуто во введении, эта модель описывает динамику частот в решетке связанных автогенераторов с частотным управлением. Уравнения движения такой системы имеют вид

$$\dot{x}_{ij} = -x_{ij} + \sum_{k,l} \delta_{kl} G(x_{i+k,j+l}), \tag{5}$$

где $i = \overline{1,K}$, $j = \overline{1,L}$.

Положим, что условие (4) выполнено для системы (5). Покажем, что система в этом случае обладает высокой мультистабильностью.

Уравнение (5) можно записать в виде

$$\dot{x}_{ij} = f(x_{ij}) + \sum_{k,l\neq 0} \delta_{kl} G(x_{i+k,j+l}), \tag{6}$$

где

$$f(x) = \delta_{00} G(x) - x. \tag{7}$$

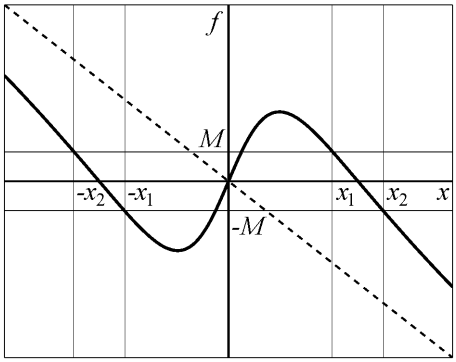


Рис. 1. График функции $f(x)$ (7) при $\delta_{00} > 0.5$

Функция $f(x)$ является нечетной, имеет асимптоту $y = -x$, и в случае $\delta_{00} > 0.5$ (в то время как условие (4) гарантирует, что $\delta_{00} > 1$) имеет два симметричных экстремума. Точки экстремума по модулю меньше 1. График функции $f(x)$ в рассматриваемом случае приведен на рис. 1.

Введем обозначения x_1 и M следующим образом:

$$x_1 = \sqrt{2(\delta_{00} - D) - 1}\,, \tag{8а}$$

$$M = f(x_1) = \frac{D\sqrt{2(\delta_{00} - D) - 1}}{\delta_{00} - D}\,. \tag{8б}$$

Заметим, что условие (4) гарантирует $x_1 > 1$, $M > 0$. Таким образом, точка x_1 расположена на падающей ветви $f(x)$, и уравнение

$$f(x) = -M \tag{9}$$

имеет три корня, причем только один из них – положительный. Обозначим этот положительный корень через x_2. Заметим также, что $x_2 > x_1$. Все три величины x_1, x_2, M отмечены на рис. 1.

Рассмотрим 2^N (где $N = K \times L$) N-мерных гиперкубов (N-кубов) $E_{\mathbf{Y}}$ в фазовом пространстве системы

$$E_{\mathbf{Y}} = \{x_{ij} \in \mathbb{R} |\, x_1 \leq y_{ij} x_{ij} \leq x_2, \quad i = \overline{1,K},\, j = \overline{1,L}\}, \tag{10}$$

где y_{ij} есть элементы матрицы знаков $\mathbf{Y}$. Покажем, что каждый из этих N-кубов содержит, по крайней мере, один аттрактор.

Рассмотрим точку в фазовом пространстве системы, лежащую на одной из граней какого-либо из N-кубов $E_{\mathbf{Y}}$. Это означает, что одна из фазовых координат данной точки (обозначим эту координату x_{ij}) равна по абсолютной величине x_1 или x_2, а значения остальных удовлетворяют неравенству

$$x_1 < |x_{mn}| < x_2, \quad m \neq i, n \neq j. \tag{11}$$

Оценим производную по времени от переменной x_{ij} в этой точке в соответствии с уравнением (6).

Функция $G(x)$ нечетна и имеет два экстремума: минимум и максимум в точках $x = -1$ и $x = 1$, соответственно. На интервале аргумента $(1, +\infty)$ эта функция, монотонно убывая, стремится к нулю. Тогда из левой половины двойного неравенства (11) с учетом того, что $x_1 > 1$ и нечетности функции $G(x)$, вытекает оценка

$$|G(x_{mn})| < G(x_1), \quad m \neq i, n \neq j. \tag{12}$$

Заметим, что то же неравенство справедливо для формальных членов суммы в (6) с индексами m и/или n, выходящими за пределы решетки. Согласно граничным условиям соответствующие величины x_{mn} полагаются равными нулю, а значит, для них имеем $G(x_{mn}) = 0$.

Теперь сумма в правой части уравнения (6) может быть оценена следующим образом:

$$\left| \sum_{k,l \neq 0} \delta_{kl} G(x_{i+k,j+l}) \right| < DG(x_1) = M, \tag{13}$$

где M задано выражением (8а). В справедливости равенства в (13) можно убедиться подстановкой выражения для x_1 (8а) в функцию $G(x)$, заданную выражением (3).

В соответствии с (8б), а также с учетом определения x_2 как корня уравнения (9) имеем

$$f(\pm x_1) = \pm M\,, \qquad f(\pm x_2) = \mp M. \tag{14}$$

Окончательно из уравнения (6) с учетом выражений (13), (14) получаем тогда следующие оценки:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ij}|_{x_{ij}=x_1} &> 0\,, \qquad \dot{x}_{ij}|_{x_{ij}=x_2} < 0\,, \\ \dot{x}_{ij}|_{x_{ij}=-x_1} &< 0\,, \qquad \dot{x}_{ij}|_{x_{ij}=-x_2} > 0\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, на каждой из граней, ортогональных к координатной оси x_{ij}, векторное поле системы направлено внутрь соответствующего куба. Поскольку приведенное рассуждение справедливо для любой пары индексов ij, векторное поле на всех гранях каждого из 2^N N-кубов $E_{\mathbf{Y}}$ направлено внутрь. Следовательно, каждый из этих N-кубов содержит, по крайней мере, один аттрактор.

Итак, система (5) при условии (4) в самом деле имеет хотя бы один аттрактор для каждой из $2^{K \times L}$ всевозможных матриц знаков, то есть обладает высокой мультистабильностью.

2. Трансформация изображений в двух решеточных системах: численные результаты

Как было упомянуто во введении, одно из основных предполагаемых приложений решеток бистабильных элементов – обработка изображений. Такая система, как правило, рассматривается как преобразователь, входом которого является профиль начальных условий на двумерной решетке, а выходом – стационарная структура, сформировавшаяся в решетке. В данном разделе численно исследуются системы вида (1) с локальными отрицательными связями и нулевым внешним воздействием с двумя типами нелинейности: (2) и (3). Далее будем обозначать эти системы буквами F и G, соответственно. Основной задачей является выяснение характера трансформации обеими системами полутоновых изображений в зависимости от параметров и сравнение свойств двух систем.

Уравнения движения исследуемых систем имеют вид

$$\dot{x}_{ij} = -x_{ij} + \delta_0\Phi(x_{ij}) - \delta[\Phi(x_{i+1,j}) + \Phi(x_{i-1,j}) + \Phi(x_{i,j+1}) + \Phi(x_{i,j-1})], \qquad (16)$$

где $i = \overline{1,K}$, $j = \overline{1,L}$; $\Phi(x) = F(x)$ (2) для системы F, $\Phi(x) = G(x)$ (3) для системы G. На параметры накладываются ограничения $\delta_0 > 1$, чтобы обеспечить бистабильность парциального элемента, а также $\delta > 0$, что соответствует отрицательной связи. Граничные условия полагаются нулевыми.

Условие (4) в применении к (16) имеет вид

$$\delta_0 - 4\delta > 1. \qquad (17)$$

В соответствии с предыдущим разделом, для обеих систем F и G это условие является достаточным условием высокой мультистабильности.

Согласно [6], в системе F при условии (17) любые начальные условия вида $\mathrm{sign}\{x_{ij}(0)\} = y_{ij}$, $|x_{ij}(0)| > 1$ трансформируются в устойчивое состояние равновесия с координатами

$$c^{\mathrm{Y}}_{ij} = \delta_0 y_{ij} - \delta[y_{i+1,j} + y_{i-1,j} + y_{i,j+1} + y_{i,j-1}], \qquad (18)$$

имеющее ту же матрицу знаков, что и начальные условия. С точки зрения обработки изображений, такое преобразование может быть охарактеризовано как устранение полутонов и выделение контуров темных и светлых областей во входном изображении [8]. Для этого изображение, подлежащее обработке, представляется в форме профиля начальных условий так, чтобы темные и светлые области в изображении имели в профиле начальных условий противоположные знаки. Тогда в установившейся структуре элементы, лежащие на границе областей разных знаков, будут характеризоваться значениями переменной состояния, превышающими по модулю величину $\delta_0 - 4\delta$. Для получения контура тогда достаточно провести пороговую обработку полученной структуры по модулю со значением порога между $\delta_0 - 4\delta$ и $\delta_0 - 2\delta$.

К полутоновым изображениям общего вида, однако, этот результат напрямую не применим. Преобразование таких изображений в системах F и G является предметом численного исследования в данном разделе.

Все примеры, приведенные далее, были получены с использованием черно-белого полутонового фотографического изображения (рис. 2) в качестве тестового

входного изображения. Размер решетки был выбран в соответствии с пиксельным размером изображения: $K = L = 125$. Уровень яркости каждого пиксела кодировался действительным числом от 0 до 1; значение 0 соответствовало уровню черного, 1 – уровню белого. Начальные условия системы задавались следующим образом:

$$x_{ij}(0) = A(2b_{ij} - 1), \qquad (19)$$

где b_{ij} – уровень яркости ij-го пиксела; параметр A определяет «амплитуду» начальных условий, так что уровни черного и белого во входном изображении соответствуют значениям $(-A)$ и A в начальных условиях, соответственно.

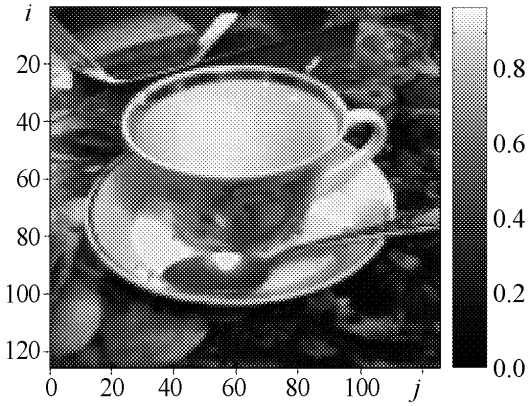


Рис. 2. Тестовое входное изображение

Численное интегрирование уравнений движения осуществлялось методом Рунге – Кутты четвертого порядка.

Было установлено (см. также [9]), что трансформация полутоновых входных изображений в обеих системах в общем случае может иметь более сложный характер, чем тот, который был описан выше для начальных условий специального вида. Типичной является ситуация, когда матрицы знаков установившейся структуры и начальных условий различаются присутствием в последней участков, заполненных мелкомасштабной структурой в виде шахматной доски или полос, которую далее будем называть «шахматным паттерном».

Шахматный паттерн преимущественно формируется в окрестности линии смены знака профиля начальных условий, а также в окрестности линий излома этого профиля (это нестрогое понятие здесь обозначает линии, где сам профиль начальных условий либо его дискретный градиент – разность значений между соседними элементами – испытывает относительно большой скачок). При фиксированных параметрах системы образование шахматного паттерна происходит тем интенсивнее, чем меньший дискретный градиент имеет профиль начальных условий в районе линии смены знака либо чем ближе к нулю этот профиль в районе линии излома, а также чем ближе направление линии смены знака или линии излома к направлению вдоль диагонали решетки.

Если интенсивность шахматного паттерна достаточно мала, то есть матрицы знаков установившейся структуры и начальных условий достаточно близки (о количественной мере этой близости и ее зависимости от параметров системы и начальных условий см. ниже), то обе исследуемые решеточные системы могут использоваться для осуществления операции выделения контуров в полутоновых изображениях тем же способом, как это было описано выше.

При этом в системе G, благодаря наличию у нелинейности парциального элемента спадающих ветвей, оказывается возможным варьировать толщину получаемых контурных линий путем изменения величины порога. Пример выполнения этой операции в системе G приведен на рис. 3. Как видно из рисунков, понижение порога приводит к заметному утолщению контурных линий.

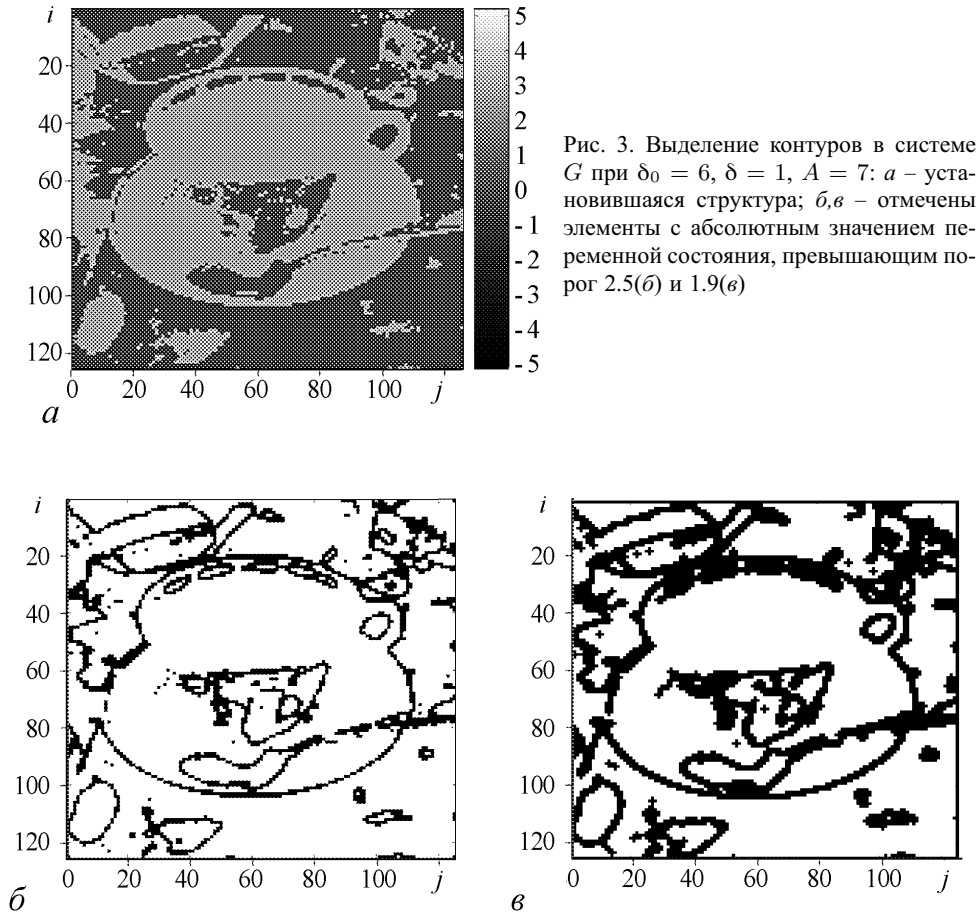


Рис. 3. Выделение контуров в системе G при $\delta_0 = 6$, $\delta = 1$, $A = 7$: *а* – установившаяся структура; *б,в* – отмечены элементы с абсолютным значением переменной состояния, превышающим порог 2.5(*б*) и 1.9(*в*)

Дальнейшее детальное исследование эффекта формирования шахматного паттерна выполнялось с начальными условиями, меньшими 1 по абсолютной величине для всех элементов:

$$|x_{ij}(0)| < 1, \quad i = \overline{1, K},\ j = \overline{1, L}, \tag{20}$$

поскольку именно для таких начальных условий удается выявить универсальные закономерности формирования структур. Значения параметра A в (19), таким образом, выбирались в интервале (0,1).

Как показали эксперименты, матрица знаков стационарного состояния, устанавливающегося в системе F при фиксированных начальных условиях (20), как правило, не меняется при одновременном изменении параметров δ_0 и δ, если отношение $\delta/(\delta_0 - 1)$ при этом остается постоянным. Для системы G аналогичную роль играет отношение $\delta/(2\delta_0 - 1)$. В этой системе, когда указанное отношение фиксировано, зависимость результирующей матрицы знаков от δ_0 и δ присутствует, однако в некоторой области параметров является слабой (см. ниже).

Следующее рассуждение, хотя и не является математически строгим, позволяет понять природу этой закономерности.

Заметим, что внутри области фазового пространства $|x_{ij}| < 1$ уравнения системы F линейны и могут быть записаны в виде

$$\dot{x}_{ij} = (\delta_0 - 1)x_{ij} - \delta[x_{i+1,j} + x_{i-1,j} + x_{i,j+1} + x_{i,j-1}]. \tag{21}$$

Отношение $\delta/(\delta_0 - 1)$ определяет форму траекторий этой системы, поскольку для фиксированного значения отношения изменение параметров δ_0 и δ эквивалентно замене времени. Если начальные условия удовлетворяют неравенству (20), то основную роль в формировании результирующей матрицы знаков играет динамика системы именно в рассматриваемой области фазового пространства. Поэтому указанное отношение в самом деле может играть роль управляющего параметра при формировании структур в системе F.

В то же время уравнения системы G не являются линейными ни в одной области фазового пространства. Однако отношение $\delta/(2\delta_0 - 1)$ определяет форму траекторий системы в окрестности начала координат, где располагается неустойчивое состояние равновесия. В самом деле, линеаризация уравнений системы G в окрестности нуля дает

$$\dot{x}_{ij} = (2\delta_0 - 1)x_{ij} - 2\delta[x_{i+1,j} + x_{i-1,j} + x_{i,j+1} + x_{i,j-1}]. \tag{22}$$

Траектории этой линеаризованной системы определяются указанным отношением.

Для удобства дальнейшего количественного исследования эффекта формирования шахматного паттерна введем обозначение

$$\varkappa_F = \frac{4\delta}{\delta_0 - 1} \tag{23}$$

для работы с системой F и обозначение

$$\varkappa_G = \frac{8\delta}{2\delta_0 - 1} \tag{24}$$

для работы с системой G. В дальнейшем будем рассматривать пары $(\delta_0, \varkappa_F)$ и $(\delta_0, \varkappa_G)$ как управляющие параметры соответствующих систем вместо исходных параметров δ_0 и δ. Заметим, что для обеих систем при фиксированном значении δ_0 параметр δ, определяющий силу связей, пропорционален $\varkappa_{F,G}$.

В соответствии с приведенными выше наблюдениями, зависимость результирующей матрицы знаков в обеих системах от δ_0 при фиксированном $\varkappa_{F,G}$ ожидается слабой, а от $\varkappa_{F,G}$ при фиксированном δ_0 – наоборот, сильной.

В экспериментах будем придерживаться области значений параметров

$$\delta_0 > 1\,, \tag{25а}$$

$$0 < \varkappa_{F,G} < 1\,. \tag{25б}$$

Для системы F эта область есть совместное решение неравенства $\delta > 0$ и условия высокой мультистабильности (4), выраженное через параметры δ_0 и $\varkappa_F$. Несмотря на то, что для системы G условие (4) выполняется лишь в части области (25а,б), будем придерживаться указанной области параметров из соображений единообразия.

Для количественного измерения интенсивности шахматного паттерна введем расстояние между двумя матрицами знаков (расстояние Хемминга) как количество позиций, в которых элементы двух матриц имеют противоположные знаки, нормированное на общее число элементов решетки. Расстояние между матрицами знаков начальных условий и установившегося состояния будем называть ошибкой воспроизведения и обозначать символом e. Случай $e = 0$ соответствует точному воспроизведению матрицы знаков. Противоположная ситуация, когда исходное изображение полностью разрушено, характеризуется значением $e \approx 0.5$.

Приведем сначала экспериментальные результаты, демонстрирующие слабую зависимость ошибки воспроизведения в обеих системах от δ_0 при фиксированном значении $\varkappa_F$ ($\varkappa_G$). На рис. 4 представлены графики зависимости ошибки воспроизведения в системах F и G. Амплитуда начальных условий A была задана равной 0.5 для системы F и 0.25 для системы G (данный выбор мотивирован ниже).

Графики для системы F не демонстрируют зависимости e от δ_0 за исключением скачкообразного изменения около первой расчетной точки $\delta_0 = 1$ (оно объясняется тем, что при $\delta_0 = 1$ вся область фазового пространства $|x_{ij}| < 1$ состоит из состояний равновесия). В системе G зависимость e от δ_0 имеет место (на рис. 4 она хорошо заметна при $\varkappa_G = 0.7$); с увеличением δ_0, однако, эта зависимость быстро ослабевает.

Далее, изучим зависимость матрицы знаков результирующей структуры от амплитуды начальных условий A. На рис. 5 представлены графики зависимости ошибки воспроизведения в системе F (сплошная кривая) и в системе G (штриховая кривая) от A. Для обеих систем эта зависимость – убывающая. Это согласуется с приведенным выше качественным наблюдением, что шахматный паттерн образуется тем более интенсивно, чем меньше абсолютная величина начальных условий в районе линий излома и чем меньше крутизна наклона профиля начальных условий в окрестности линии смены знака.

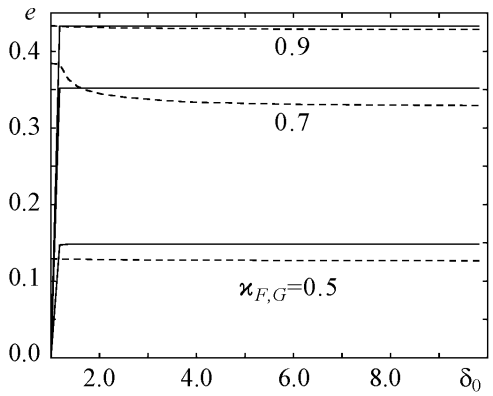


Рис. 4. Зависимость ошибки воспроизведения от δ_0 для различных фиксированных значений $\varkappa_{F,G}$ в системах F и G (сплошная и штриховая кривые, соответственно)

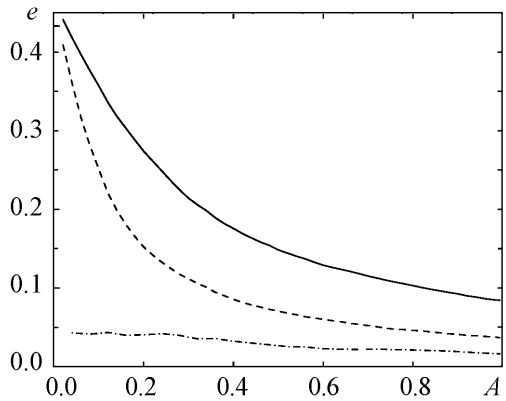


Рис. 5. Зависимость ошибки воспроизведения от A при $\delta_0 = 1.5$, $\varkappa_F = \varkappa_G = 0.5$ в двух системах, а также зависимость расстояния между результирующими матрицами знаков от A в системах F и G с амплитудами начальных условий A и $A/2$, соответственно

Заметим, что график для системы G выглядит похожим на график для системы F, сжатый вдоль оси абсцисс в два раза. Это позволяет высказать предположение, что результирующие матрицы знаков в обеих системах могут быть близки, если начальные условия в системе G уменьшены вдвое по сравнению с начальными условиями системы F, в то время как параметры $\varkappa_{F,G}$ в этих системах равны.

Чтобы проверить это утверждение, вычислим зависимость расстояния между результирующими матрицами знаков от параметра A в системах F и G с амплитудами начальных условий A и $A/2$, соответственно, на основании тех же результатов численного расчета, по которым были построены два описанных выше графика. График этой зависимости построен на рис. 5 штрихпунктирной линией. Как видно из графика, найденное расстояние в самом деле достаточно мало (не превышает пяти процентов) во всем исследуемом диапазоне значений A, что согласуется с высказанным предположением, хотя это наблюдение и не является строгим результатом.

Наконец, исследуем зависимость ошибки воспроизведения в обеих системах от $\varkappa_{F,G}$ при фиксированных значениях δ_0 и A. Чтобы проиллюстрировать эффект масштабирования начальных условий, обсуждавшийся в двух предыдущих абзацах, положим $A = 0.5$ для системы F и $A = 0.25$ для системы G. Графики для системы F с параметром δ_0, принимающим значения 1.2, 1.5, 6.0 и 10.0, сливаются в один, изображенный на рис. 6 сплошной линией. Графики для системы G при параметре δ_0 равном 1.2 и 1.5 изображены пунктирной и штриховой линиями, соответственно. Графики же при δ_0 равном 6.0 и 10.0 сливаются в один, изображенный штрихпунктирной линией. В соответствии с представленными графиками, зависимость ошибки воспроизведения от $\varkappa_{F,G}$ во всем исследуемом диапазоне является монотонно возрастающей. Зависимости e от δ_0 в системе F не наблюдается вообще, в то время как в системе G эта зависимость заметна при больших значениях $\varkappa_G$ и достаточно малых значениях δ_0, где система не обладает высокой мультистабильностью. При меньших значениях $\varkappa_G$ или бóльших значениях δ_0 эта зависимость ослабевает. Заметим еще, что графики для систем F и G с амплитудой начальных условий A, вдвое большей для системы F по сравнению с системой G, достаточно близки друг к другу, что согласуется с наблюдением о масштабировании начальных условий, обсуждавшимся выше.

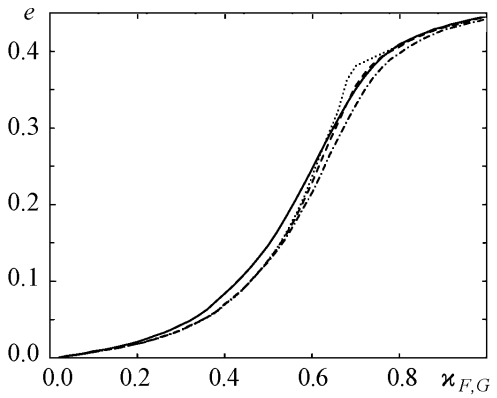


Рис. 6. Зависимость ошибки воспроизведения от $\varkappa_{F,G}$ в двух системах для различных фиксированных значений δ_0: 1.2, 1.5, 6.0 и 10.0

Заключение

В настоящей работе изучалась динамика решеточных систем из связанных бистабильных элементов первого порядка с двумя различными типами нелинейности базового элемента. Особое внимание в этом исследовании уделялось трансформации

начальных условий, рассматриваемых как представление некоторого изображения, в стационарную структуру, устанавливающуюся в системе.

Была аналитически исследована система с нелинейностью парциального элемента (3) и нулевым внешним воздействием, являющаяся простейшей моделью решетки связанных автогенераторов с управлением по частоте. Достаточное условие высокой мультистабильности, известное для решеток с нелинейностью (2) – CNN, было перенесено на эту систему.

Две решеточные системы с локальными отрицательными связями и нелинейностями (2) и (3) были исследованы численно. Был описан эффект формирования шахматного паттерна в обеих системах, а также была изучена зависимость этого эффекта от начальных условий и параметров системы. При этом были отмечены сходства и различия в свойствах двух исследуемых систем.

Таким образом, было показано, что изменение нелинейности парциальных элементов при определенных условиях не приводит к нарушению функционирования системы, применяемой для обработки изображений. Более того, был приведен пример, в котором такое изменение позволило реализовать в системе новые возможности (управление толщиной контурных линий).

Данная работа была выполнена при поддержке РФФИ, грант №03-02-17543.

Библиографический список

1. *Chua L.O., Yang L.* Cellular neural networks: Theory //IEEE Trans. Cirquits. Syst. 1988. Vol. 35. P. 1257.
2. *Chua L.O., Yang L.* Cellular neural networks: Applications //IEEE Trans. Cirquits. Syst. 1988. Vol. 35. P. 1273.
3. *Nekorkin V.I., Makarov V.A., Kazantsev V.B., Velarde M.G.* Spatial disorder and pattern formation in lattices of coupled bistable elements //Physica D. 1997. Vol. 100. P. 330.
4. *Яхно В.Г.* Процессы самоорганизации в распределенных нейроподобных системах. Примеры возможных применений //Нейроинформатика 2001. Лекции по нейроинформатике. М.: МИФИ, 2001. С. 103.
5. *Chua L., Roska T.* Cellular neural networks and visual computing – Foundations and application. Cambridge University Press, 2002.
6. *Zou F., Nossek A.* Bifurcation and Chaos in Cellular Neural Networks //IEEE Trans. Cirquits. Syst. 1993. Vol. 40, № 3. P. 166.
7. *Zou F., Schwarz S., Nossek J.A.* Cellular neural networks design using a learning algorithm //Proc. Int. Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications CNNA-90. Budapest, 1990. P. 73.
8. *Канаков О.И., Шалфеев В.Д.* Применение решетки бистабильных элементов с неидентичными характеристиками к задачам обработки изображений //Труды VI научной конференции по радиофизике, посвященной 100-летию со дня рождения М.Т. Греховой 7 мая 2002 /Ред. А.В.Якимов. Н.Новгород, 2002. С. 116.
9. *Kanakov O.I., Shalfeev V.D.* Influence of the type of nonlinearity of the basic ele-

ment on pattern formation in a homogeneous CNN //Proc. Symp. Topical Problems of Nonlinear Wave Physics (NWP-2003). Nizhny Novgorod: Institute of Applied Physics RAS, 2003. P. 40.

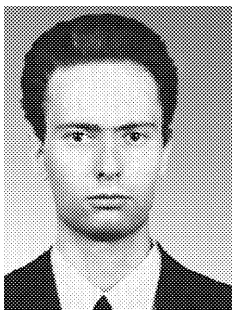
Нижегородский государственный университет

Поступила в редакцию 17.08.2005

FORMATION OF STATIONARY PATTERNS IN LATTICES OF BISTABLE ELEMENTS WITH TWO TYPES OF NONLINEARITY

O.I. Kanakov, V.D. Shalfeev

Laws of pattern formation in lattices of nonlinear-coupled first-order bistable elements with two types of the element nonlinearity are studied and compared. The results are interpreted in terms of the application to edges detection in images. It is shown by the examples considered, that the replacement of the element nonlinearity does not influence significantly the image processing system functionality under certain conditions.



Канаков Олег Игоревич – родился в 1981 году в Нижнем Новгороде, окончил Нижегородский государственный университет в 2004 году по специализации "Нелинейные колебания и волны". Продолжает обучение в аспирантуре ННГУ. Является соавтором 16 печатных работ, в том числе 2 статей в международных журналах.

Шалфеев Владимир Дмитриевич – родился в 1941 году, окончил Горьковский университет в 1963 году. Заведующий кафедрой теории колебаний Нижегородского государственного университета и отделом нелинейной динамики Института прикладной физики РАН, доктор физико-математических наук, профессор, действительный член Академии инженерных наук РФ. Область научных интересов: динамика нелинейных систем, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структуры. Соавтор монографий «Системы фазовой синхронизации», «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации». E-mail: shalfeev@rf.unn.ru