

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Павлова О.Н., Павлов А.Н.</i> Мультифрактальное описание динамики нефронов	3
<i>Подлазов А.В.</i> Режимы с обострением с комплексными показателями. Лог-периодические колебания в модели разрыва пучка волокон	15
БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ	
<i>Баширцева И.А., Ряшко Л.Б., Федотов С.П., Цветков И.Н.</i> Обратные стохастические бифуркации в системе Эно	31
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС	
<i>Кочанов А.А., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.</i> Индуцированная шумом параметрическая неустойчивость и стохастические колебания в осцилляторе с нелинейным трением	43
НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ	
<i>Ланда П.С., Власов В.А.</i> Аналитическое рассмотрение влияния космических факторов на флуктуации скоростей броуновских частиц	56
МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ	
<i>Трубецков Д.И.</i> Феномен математической модели Лотки–Вольтерры и сходных с ней	69
ДЕБЮТ	
<i>Фунтов А.А.</i> О приближенном аналитическом решении уравнений Лотки–Вольтерры	89
<i>Материалы IX Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября 2010</i>	
<i>Сытова С.Н.</i> Хаос в объемных лазерах на свободных электронах	93
<i>Новожилова Ю.В.</i> Параметрическая неустойчивость в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки. I. Теория	112
<i>Новожилова Ю.В., Сергеев А.С., Усачева С.А.</i> Параметрическая неустойчивость в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки. II. Численное исследование	128
<i>Павлов А.Н., Филатова А.Е., Храмов А.Е.</i> Частотно-временной анализ нестационарных процессов: концепции вейвлетов и эмпирических мод	141
<i>Короновский А.А., Максименко В.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.</i> К вопросу о расчете спектра пространственных ляпуновских экспонент в пространственно-распределенных пучково-плазменных системах	158
PERSONALIA	
<i>Шапкина М.Н.</i> Во главе двух академий	175

C O N T E N T S

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATIONS AND WAVE THEORY

- Pavlova O.N., Pavlov A.N.* Multifractal description of nephrons dynamics 3
Podlazov A.V. Blow-up with complex exponents. Log-periodic oscillations in
the democratic fiber bundle model 15

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B., Fedotov S.P., Tsvetkov I.N.* Backward stochastic
bifurcations of the Hénon map 31

DETERMINISTIC CHAOS

- Kochanov A.A., Vadivasova T.E., Anishchenko V.S.* Noise induced parametric instabi-
lity and stochastic oscillations in the oscillator with nonlinear dissipation 43

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Landa P.S., Vlasov V.A.* Analytical consideration of the cosmic factor effects upon
the fluctuations of Brown particle velocities 56

METHODICAL PAPERS IN NONLINEAR DYNAMICS

- Trubetskov D.I.* Phenomenon of Lotka–Volterra mathematical model and similar
models 69

DEBUT

- Funtov A.A.* About approximate analytical solutions of Lotka–Volterra equations ... 89

***Transactions of the IX International School «Chaotic Oscillations
and Pattern Formation», Saratov, Russia, October 4–9, 2010***

- Sytova S.N.* Chaos in volume free electron lasers 93
Novozhilova Yu.V. Parametric instability of autooscillator coupled with remote
load. I. Theory 112
Novozhilova Yu.V., Sergeev A.S., Usacheva S.A. Parametric instability of autooscillator
coupled with remote load II. Numerical simulation 128
Pavlov A.N., Filatova A.E., Hramov A.E. Time-frequency analysis of nonstationary
processes: concepts of wavelets and empirical modes 141
Koronovskii A.A., Maximenko V.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E. On the problem
of computation of the spectrum of spatial Lyapunov exponents for the spatially
extended beam plasma systems 158

PERSONALIA

- Shashkina M.N.* At the head of two academies 175



МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ НЕФРОНОВ

О.Н. Павлова, А.Н. Павлов

В данной работе на основе метода мультифрактального формализма исследуется динамика функциональных элементов почек нормотензивных и гипертензивных крыс. Анализируются колебательные процессы в математической модели нефрона и экспериментальные данные проксимального давления. Иллюстрируются изменения спектров сингулярностей сигналов, регистрируемых в нефронных канальцах, при почечной гипертонии, которые включают увеличение степени мультифрактальности и уменьшение корреляций. Соответствующие изменения связаны с более выраженной степенью хаотичности колебаний давления жидкости в канальцах нефронов гипертензивных крыс.

Ключевые слова: Спектр сингулярностей, мультифрактальный формализм, динамика нефронов, гипертония, авторегуляция кровотока.

Введение

Теория мультифракталов широко используется для описания сложного скейлинга, наблюдаемого в динамике систем различной природы [1–4]. К настоящему времени применение данной теории позволило решить широкий комплекс научных проблем, в частности, при изучении развитой гидродинамической турбулентности и агрегационных свойств клеточных элементов крови в биологии, в исследованиях разрушения материалов в физике металлов и броуновского движения, при изучении структуры молекул ДНК и диффузионного роста кластеров, в исследованиях несоразмерных структур и квазикристаллов в физике твердого тела, при изучении инвариантной вероятностной меры странных аттракторов и т.д. [5–11].

Представителями мультифрактальных объектов служат многие физиологические процессы. В силу нестационарности для анализа соответствующих данных необходимо применять специальные методы исследования структуры сигналов, одним из которых является предложенный в работах [12, 13] мультифрактальный формализм, получивший название метода максимумов модулей вейвлет-преобразования

(ММВП). Привлекательность данного метода состоит, прежде всего, в его универсальности – он является более эффективным инструментом исследования мультискейлинговых свойств объектов по сравнению с ранее разработанными подходами, использующими идеологию структурных функций [14, 15].

За последние годы метод ММВП превратился в один из популярных инструментов анализа нестационарных данных. В частности, после появления в журнале «Nature» статьи по мультифрактальному описанию сердечного ритма [16] и серии последующих публикаций [17–21], метод ММВП стал использоваться в качестве инструмента прикладных исследований для количественного описания сложной структуры медико-биологических процессов. Этот инструмент расширяет возможности решения задач диагностики на основе вейвлет-анализа, описанные в работе [22], так как результаты метода ММВП не зависят от выбора материнского вейвлета в отличие от изложенного в упомянутой статье [22].

В работах нашего коллектива [23, 24] ранее было установлено, что применение метода ММВП позволяет выявлять «тонкие» эффекты в динамике сердечно-сосудистой системы, которые не удается диагностировать на основе классических методов цифровой обработки сигналов, в частности, спектрально-корреляционного анализа. В данной статье акцентируется внимание на динамике функциональных элементов почки (нефронов). Путем анализа математической модели нефрона и экспериментальных данных иллюстрируется хаотизация динамики нефрона при функциональных нарушениях состояния организма (случай гипертонии), сопровождаемая изменениями количественных характеристик мультифрактальности, включающих увеличение показателей Гельдера и ширины спектра сингулярностей. Показано, что расчеты спектра сингулярностей позволяют диагностировать изменение степени сложности колебаний давления жидкости в канальцах нефрона по коротким участкам экспериментальных данных. В этом контексте метод ММВП оказывается эффективным средством диагностики состояния организма.

1. Метод максимумов модулей вейвлет-преобразования

Метод максимумов модулей вейвлет-преобразования, предложенный в начале 1990-х годов Мьюзи, Бакри и Арнеодо [12, 13], предусматривает вычисление спектра сингулярностей в два этапа. На первом этапе проводится вейвлет-преобразование сигнала $x(t)$ по формуле [25–30]

$$W(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (1)$$

где в качестве базиса используются вейвлеты, построенные путем дифференцирования функции Гаусса, чаще всего WAVE или МНАТ. С одной стороны, выбор вейвлета – это очень важная часть исследований, так как разные функции позволяют лучше рассмотреть различные особенности сложной структуры сигнала $x(t)$. Например, если вейвлет содержит много нулевых моментов, он эффективнее для обработки нестационарных данных, так как позволяет игнорировать тренд, который

носит полиномиальный характер. За это приходится «расплачиваться» усложнением поверхности коэффициентов вейвлет-преобразования, содержащей большое число малосущественных деталей. С другой стороны, важной особенностью метода ММ-ВП является то, что результаты расчета спектра сингулярностей теоретически не зависят от выбора базиса! Это обстоятельство позволяет выбирать тот вариант базиса, который удобнее для исследователя.

После вычисления коэффициентов преобразования $W(a, b)$ выделяется скелетон (линии локальных экстремумов поверхности вейвлет-коэффициентов, идентифицируемых при фиксированных значениях параметра масштаба и соответствующих точкам с локальным сингулярным поведением). В окрестности каждой такой точки $x = x^*$ при $a \rightarrow 0$ наблюдается простая степенная зависимость

$$W(a, x^*) \sim a^{h(x^*)} \quad (2)$$

с показателем Гельдера $h(x^*)$. Анализ выделенных линий скелетона теоретически позволяет вычислять гельдеровские показатели, но такой подход является неточным из-за того, что при увеличении масштаба сказывается влияние соседних сингулярностей.

Более точный метод расчета показателей Гельдера основан на построении статистических функций $Z(q, a)$

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} (\sup_{a' \leq a} |W(a', b_l(a'))|)^q, \quad (3)$$

где $L(a)$ – множество всех линий (l) локальных максимумов модулей вейвлет-коэффициентов, существующих на масштабе a ; $b_l(a')$ характеризует расположение на масштабе $a' \leq a$ максимума, относящегося к линии l .

В соответствии с выводами работ [12, 13], выполняется следующая зависимость:

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}, \quad (4)$$

где величина $\tau(q)$ носит название *скейлингового показателя*. Линейная зависимость $\tau(q)$ типична для монофрактальных объектов ($h = d\tau/dq = \text{const}$), а нелинейная зависимость $\tau(q)$ с большим числом гельдеровских показателей $h(q) = d\tau/dq \neq \text{const}$ – для мультифракталов. Численные значения h обеспечивают возможность количественного описания корреляционных свойств сигналов, диагностируя наличие антикорреляций ($h < 1/2$), коррелированной динамики ($h > 1/2$) и отсутствие корреляций ($h = 1/2$).

Расчеты показателей Гельдера h и скейлинговых показателей τ позволяют вычислить фрактальную размерность (спектр сингулярностей или скейлинг-спектр) на основе преобразования Лежандра

$$D(h) = qh - \tau(q). \quad (5)$$

Подробное описание метода ММВП приводится в обзоре, опубликованном в журнале «Успехи физических наук» [23], поэтому в данной статье не будем углубляться в детали метода, уделив больше внимания изложению оригинальных результатов.

2. Анализ динамики функциональных элементов почки

Как отмечалось в предыдущих работах [31–36], нефрон представляет собой весьма любопытный объект исследования в нелинейной динамике. Это связано с тем, что и в рамках математического моделирования [37–39], и при анализе экспериментальных данных [40, 41] было установлено, что колебательные процессы в динамике нефрона являются близкими к периодическим при нормальном артериальном давлении, но сменяются сильно нерегулярными (хаотическими) при повышенном артериальном давлении (случай гипертонии). Более того, в сигналах давления фильтра в канальцах нефронов гипертензивных крыс удается зафиксировать несколько субгармоник частоты медленных колебаний (составляющей примерно 0.03 Гц), что позволяет, по крайней мере, предположить, что хаотизация процессов в канальцах нефрона может происходить в рамках субгармонического сценария перехода к хаосу. Безусловно, для динамики живых систем подобные выводы нужно делать с большой осторожностью, так как анализируются процессы, характеристики которых могут претерпевать изменения во времени, а при проведении анализа нестационарных данных проблематично использовать количественные критерии, основанные на расчетах степени хаотичности. Тем не менее, различия в динамике нефронов в норме и при гипертонии диагностируются даже визуально, что отмечалось в исследованиях [40, 41]. Сложнее обстоит дело с количественными критериями, позволяющими охарактеризовать изменение сложности процессов почечной авторегуляции кровотока. Нестационарные и зачастую короткие сигналы, регистрируемые в динамике нефронов, весьма ограничивают возможности количественного описания их сложной динамики. Достоинством метода ММВП является возможность «ухватывать» основные особенности структуры сложных сигналов по коротким фрагментам экспериментальных данных, на порядок меньшим чем для классического спектрально-корреляционного анализа [23, 42]. Это обстоятельство позволяет рассматривать метод ММВП в качестве потенциального инструмента диагностики патологических изменений механизмов почечной авторегуляции кровотока.

2.1. Динамика математической модели нефрона. К настоящему времени было предпринято несколько попыток построения математической модели нефрона [37, 38]. Наиболее простой моделью (и в то же время не только описывающей хаотизацию динамики при вариации управляющих параметров, но и позволяющей получать сигналы, соответствующие реальной динамике нефронов) является модель, предложенная в работе [38]. Она представляет собой систему 6 обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащую большое количество нелинейных функций, параметров и являющуюся достаточно сложной. Процесс авторегуляции отдельного нефрона, в соответствии с моделью [38], может быть описан системой следующих 6 дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_t}{dt} &= \frac{1}{C_{tub}} [F_{filt}(P_t, r) - F_{reab} - F_{Hen}(P_t)], \\
\frac{dr}{dt} &= v_r, \\
\frac{dv_r}{dt} &= \frac{P_{av}(P_t, r) - P_{eq}(r, \Psi(X_3, \alpha), T)}{\omega} - v_r d, \\
\frac{dX_1}{dt} &= F_{Hen}(P_t) - \frac{3X_1}{T}, \\
\frac{dX_2}{dt} &= \frac{3(X_1 - X_2)}{T}, \\
\frac{dX_3}{dt} &= \frac{3(X_2 - X_3)}{T}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь первые 3 уравнения описывают динамику давления жидкости в проксимальном канальце P_t и свойства артериол (динамику радиуса r и скорости его изменения v_r), а следующие 3 уравнения – задержку в реакции системы на изменение величины потока в петле Генле. Эти две подсистемы являются взаимосвязанными: переменная P_t первой из них входит в уравнение для X_1 второй подсистемы, а переменная цепи задержки X_3 влияет на динамику артериолы, входя в нелинейную функцию P_{eq} .

Полное описание всех нелинейных функций и параметров данной модели занимает несколько страниц, и поскольку в нашей работе модель используется в оригинальном варианте, предложенном Барфредом с соавторами, мы отсылаем заинтересованного читателя к работам [38,39], где модель нефрона описана весьма подробно. Эта модель рассматривалась также в статье [43], где приводится набор типичных значений ее параметров. Отметим, что детальные исследования динамики системы (6), которые проводились в работе [44], позволили обнаружить ряд интересных закономерностей. В качестве управляющих параметров в этих работах были выбраны α (усиление в цепи канальцево-гломерулярной обратной связи, КГОС) и T (задержка в петле Генле). Для случая, который соответствует реалистичной динамике нефрона ($T \approx 16$ с), в диапазоне $\alpha=10-12$ наблюдалась суперкритическая бифуркация Хопфа, приводящая к потере устойчивости состояния равновесия и рождению предельного цикла. Это соответствует экспериментальным данным, согласно которым около 70% нефронов демонстрируют автоколебания, а остальные находятся в состоянии равновесия. При вариации артериального давления режим функционирования может сдвигаться в ту или другую сторону от бифуркации Хопфа.

Модельные уравнения в автоколебательном режиме демонстрируют динамику с двумя характерными частотами – низкочастотные колебания с периодом $T_h \cong 2.2T$ (которые возникают из-за наличия задержки в цепи канальцево-гломерулярной обратной связи) и более быстрые колебания с периодом $T_v \approx T_h/5$, обусловленные миогенным механизмом. Примечательно, что при изменении управляющих параметров модель демонстрирует переход от периодических колебаний к режиму динамического хаоса, что соответствует реалистичной динамике нефронов (близкие к регулярным колебания при нормальном артериальном давлении и хаотические – при гипертензии). При изменении времени задержки T и усиления в цепи КГОС α можно наблюдать режимы динамики с различным рациональным отношением ($n : m$) между периодами колебаний. В соответствии с работой [44], области сильных резонансов

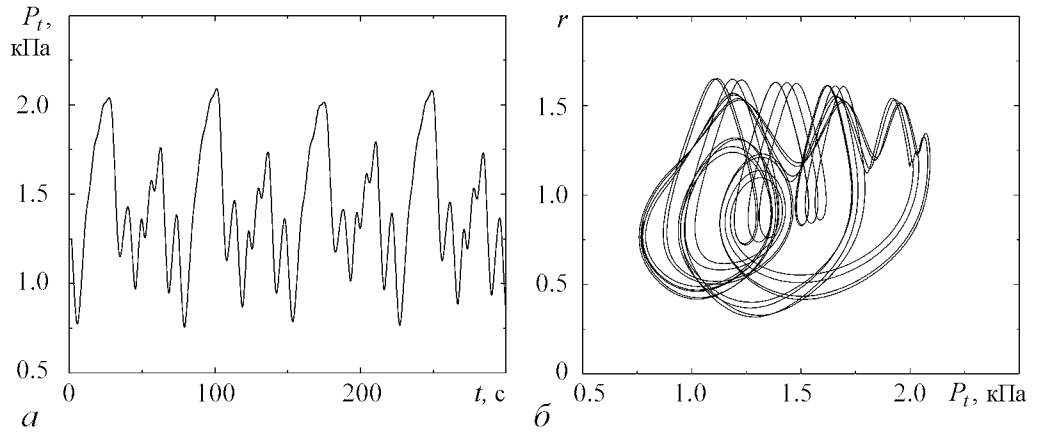


Рис. 1. Хаотический режим динамики модели нефрона: временная реализация (а) и проекция фазового портрета (б) при значениях управляющих параметров $T = 16.0$, $\alpha = 32.0$

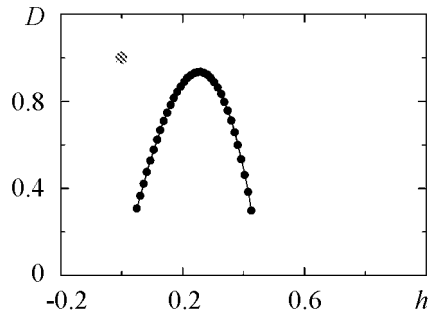


Рис. 2. Спектры сингулярностей хаотического (черные символы) и периодического (серый символ) режима динамики модели нефрона

соответствующих бысткому (миогенному) ритму. Они имеют меньшую амплитуду по сравнению с ритмом КГОС, однако их извлечение из реализации, представленной на рис. 1, б, не представляет сложности в связи с отсутствием шумов (в отличие от данных физиологических экспериментов). На рис. 2 представлены результаты расчета спектра сингулярностей данного режима динамики (черные символы). Для сравнения серым цветом показан спектр сингулярностей периодического режима ($T = 16.0$, $\alpha = 20.0$). Данный результат далее будет сопоставлен с анализом экспериментальных данных.

2.2. Анализ экспериментальных данных. Наряду с изучением динамики модели была проведена обработка серии экспериментов на нефронах (записи давления фильтрата в проксимальных канальцах, сделанные с применением катеторного метода регистрации). Данные были записаны в институте Панум (университет Копенгагена, Дания) и включали записи 34 нефронов нормотензивных крыс и 42 нефронов спонтанных гипертензивных крыс (генетическая форма гипертонии). Все эксперименты проводились на анестезированных животных, протоколы экспериментов описаны в работе [34]. Типичные примеры сигналов приводятся на рис. 3. Длительность экспериментальных данных варьировала от 800 до 1200 с.

(1:4, 1:5 и 1:6) наблюдаются в диапазоне $T \in [12-20]$ с, который соответствует значениям времени задержки, регистрируемым в реальной динамике нефронов. Отметим, что все упомянутые отношения частот диагностируются и в экспериментальных исследованиях давления фильтрата в проксимальных канальцах [31, 34, 36]. Пример хаотического режима динамики модели нефрона (б) приведен на рис. 1.

Для изучения фрактальных свойств хаотического аттрактора в модели (б) нами проводилось определение интервалов времени между локальными максимумами колебаний, соответствующих

В отличие от математического моделирования, обработка экспериментальных данных осложняется наличием нестационарности, существенным уровнем фонового шума и малой длительностью сигналов. Без проведения предварительной фильтрации идентификация расположения локальных максимумов колебаний, соответствующих миогенным колебаниям, является весьма сложной проблемой. Для ее решения в данной работе использован следующий подход. Вначале проводилось вычисление мгновенной частоты миогенного ритма колебаний с применением вейвлет-преобразования (базисная функция Морле) и последующим выделением «хребтов» преобразования. Затем, по аналогии с работой [45], строились зависимости действительных частей вейвлет-коэффициентов, соответствующих мгновенной частоте миогенных колебаний, и вычислялись интервалы времени между локальными максимумами данных зависимостей. Такой подход одновременно обеспечивает полосовую фильтрацию и возможность сравнительно простой идентификации значений интересующих нас временных интервалов.

На рис. 4 представлены результаты расчета спектров сингулярностей для экспериментальных данных, изображенных на рис. 3. Из-за сложностей получения гладкой «колоколообразной» формы спектра сингулярностей по коротким данным нами проводилось объединение последовательностей временных интервалов для парных нефронов, демонстрирующих синхронную динамику и обладающих сходной мультифрактальной структурой. Но даже в этом случае данные являются короткими (порядка 300 отсчетов), и получение гладких зависимостей $D(h)$ возможно не для всех экспериментов. Несмотря на это обстоятельство, можно отметить несколько характерных отличий, которые подтверждаются результатами статистического анализа.

Во-первых, спектр сингулярностей, соответствующий динамике нефрона гипертензивной крысы, является более широким. Это свидетельствует о том, что режим патологии может быть охарактеризован как режим с более выраженной мультифрактальной структурой. Кроме того, спектр сингулярностей при гипертонии смещается к значениям $h = 0.5$, соответствующим случаю некоррелированной динамики (в частности, при $q < 0$, то есть для малых флуктуаций или слабых сингулярностей).

Во-вторых, спектр сингулярностей, соответствующий динамике нефрона нормотензивной крысы, также имеет «колоколообразный» вид, соответствующий мультифрактальной динамике (но с более однородной структурой). Это может служить отражением того обстоятельства, что даже для нормотензивных крыс динамика нефро-

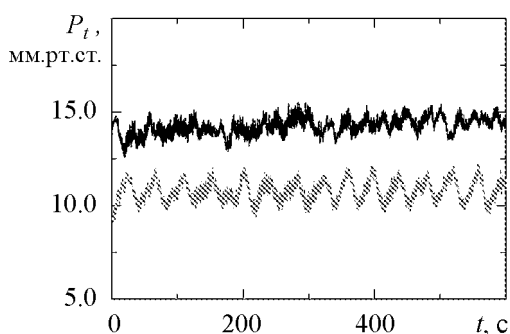


Рис. 3. Примеры сигналов проксимального давления в каналах нефронов нормотензивной (снизу) и гипертензивной крысы (сверху)

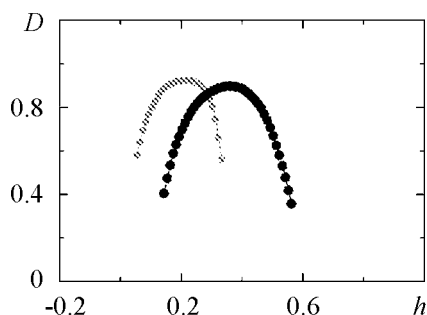


Рис. 4. Спектры сингулярностей, соответствующие динамике нефронов нормотензивной (серые символы) и гипертензивной крысы (черные символы)

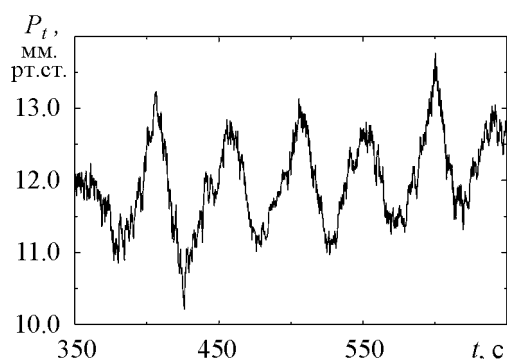


Рис. 5. Иллюстрация режима удвоенного периода в динамике нефрона нормотензивной крысы

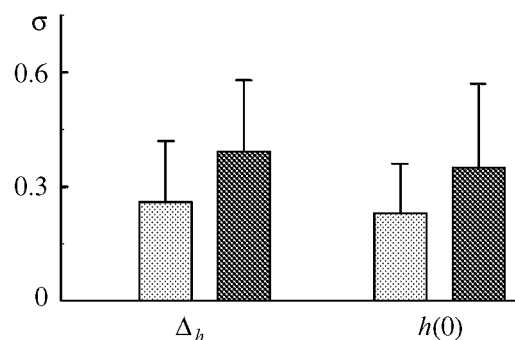


Рис. 6. Результаты статистического анализа мультифрактальной динамики нефронов нормотензивных (серый цвет) и гипертензивных крыс (черный цвет)

нов не является строго периодической, и, возможно, ее можно интерпретировать как режим слабого хаоса в отличие от режима развернутого хаоса при гипертонии. Косвенным доводом в пользу такого предположения может служить то обстоятельство, что даже для нефронов нормотензивных крыс иногда можно зафиксировать колебания, соответствующие удвоенному периоду (рис. 5).

Однако, это справедливо не для всех нефронов – во многих случаях динамика давления в проксимальных канальцах близка к режиму однократного предельного цикла. В связи с этим вопрос о том, чему в большей степени соответствует динамика нефронов нормотензивных крыс, слабому хаотическому режиму или регулярным колебаниям (без учета нестационарности) – является дискуссионным.

Отметим, что представленные на рис. 4 различия спектров сингулярности для нормы и гипертонии являются достаточно характерными. Об этом свидетельствуют результаты статистического анализа, проведенного для групп животных (рис. 6). Даже в тех случаях, когда из-за малого объема выборки не удастся получить гладкую зависимость $D(h)$, мультифрактальный анализ позволяет оценить диапазон изменения Δ_h показателей Гельдера и значение $h(0)$, характеризующее положение максимума функции $D(h)$.

Согласно рис. 6, динамика нефронов при гипертонии характеризуется увеличением ширины спектра сингулярностей (0.27 ± 0.15 для нормотензивных крыс и 0.39 ± 0.19 для спонтанных гипертензивных крыс) и смещением функции $D(h)$, которое можно охарактеризовать значением $h(0)$. В норме зафиксировано значение $h(0) = 0.22 \pm 0.13$, при гипертонии $h(0) = 0.34 \pm 0.21$. Отметим, что данные результаты получены по коротким участкам экспериментальных записей, когда метод ММВП оказывается более предпочтительным для исследования корреляционных свойств анализируемых процессов [23, 42].

Заключение

Используемый в данной работе мультифрактальный анализ на основе вейвлет-преобразования (или, в терминологии ряда работ, мультифрактальный формализм) является достаточно новым методом изучения структуры сложных сигналов. Несмотря на то, что он известен с начала 1990-х годов, метод ММВП пока еще только на-

чинает активно применяться на практике при анализе динамики живых систем. Это связано, по-видимому, с двумя причинами. С одной стороны, сказывается сложность практической реализации данного метода в виде пакета прикладных программ, так как расчет спектра сингулярностей требует проведения процедуры автоматической идентификации линий скелетона, настройки параметров для аппроксимации степенного характера зависимостей статистических функций $Z(g, a)$ и т.п. С другой стороны, оказывает влияние и достаточно сложная теория данного метода по сравнению с привычными методами цифровой обработки сигналов. Вероятно, именно по этим причинам попытки применения этого инструмента исследования в биологии и медицине можно рассматривать лишь как первые шаги. Но даже эти первые попытки свидетельствуют о значительном потенциале мультифрактального формализма.

В отличие от классических методов цифровой обработки сигналов, ММВП позволяет изучать корреляционные свойства случайных и детерминированных процессов по сравнительно коротким и нестационарным сигналам. Это крайне важно в биологических приложениях нелинейной теории колебаний. Методы анализа экспериментальных данных, для которых нестационарность динамики не является препятствием, не только существенно расширяют возможности экспериментальных исследований, но и в значительной степени определяют дальнейший прогресс в развитии теории анализа структуры сигналов. Основанный на вейвлет-преобразовании метод мультифрактального формализма относится именно к таким инструментам исследования.

Авторы выражают искреннюю признательность N.-H. Holstein-Rathlou, D.J. Marsh и O.B. Сосновцевой за предоставленные данные и многочисленные дискуссии.

Проводимые исследования были поддержаны Министерством образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (государственный контракт № П451).

Библиографический список

1. *Mandelbrot B.B.* The fractal geometry of nature. San Francisco: W.H. Freeman and company, 1982.
2. *Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I.* Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 33. P. 1141.
3. *Tel T.* Fractals, multifractals, and thermodynamics // Z. Naturforsch. 1988. Vol. 43a. P. 1154.
4. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
5. *Mandelbrot B.B.* Fractals and multifractals: noise, turbulence and galaxies. New York: Springer-Verlag, 1989.
6. *Eisenberg E., Bunde A., Havlin S., Roman H.E.* Range of multifractality for random walks on random fractals // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 47. P. 2333.
7. *Dräger J.* Multifractal features of random walks and localized vibrational excitations on random fractals: dependence on the averaging procedures // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 4596.

8. *Arneodo A., Decoster N., Roux S.G.* Intermittency, log-normal statistics, and multifractal cascade process in high-resolution satellite images of cloud structure // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83. P. 1255.
9. *Chabra A., Meneveau C., Jensen R.V.* Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum and its application to fully developed turbulence // *Phys. Rev. A.* 1989. Vol. 40. P. 5284.
10. *Benzi R., Paladin G., Parisi G., Vulpiani A.* On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems // *J. Phys. A.* 1984. Vol. 17. P. 3521.
11. *Strait B.J., Dewey T.G.* Multifractals and decoded walks: applications to protein sequence correlations // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52. P. 6588.
12. *Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A.* Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 67. P. 3515.
13. *Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A.* Multifractal formalism for fractal signals: The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method // *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 47. P. 875.
14. *Frisch U., Parisi G.* Fully developed turbulence and intermittency // *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics* / Ed. by Ghil M., Benzi R., Parisi G. 1985. P. 71.
15. *Gagne Y., Hopfinger E., Frisch U.* A new universal scaling for fully developed turbulence: the distribution of velocity increments // *New Trends in Nonlinear Dynamics and Pattern Forming Phenomena: The Geometry of Nonequilibrium* / Ed. by Couillet P., Huerre P. 1989. P. 315.
16. *Ivanov P.Ch., Nunes Amaral L.A., Goldberger A.L., Havlin S., Rosenblum M.G., Struzik Z.R., Stanley H.E.* Multifractality in human heartbeat dynamics // *Nature.* 1999. Vol. 399. P. 461.
17. *Arneodo A., Aubenton-Carafa Y.D., Audit B., Bacry E., Muzy J.F., Thermes C.* What can we learn with wavelets about DNA sequences? // *Physica A.* 1998. Vol. 249. P. 439.
18. *Stanley H.E., Nunes Amaral L.A., Goldberger A.L., Havlin S., Ivanov P.Ch., Peng C.-K.* Statistical physics and physiology: monofractal and multifractal approaches // *Physica A.* 1999. Vol. 270. P. 309.
19. *Nunes Amaral L.A., Ivanov P.Ch., Aoyagi N., Hidaka I., Tomono S., Goldberger A.L., Stanley H.E., Yamamoto Y.* Behavioral-independent features of complex heartbeat dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86. P. 6026.
20. *Ivanov P.Ch., Nunes Amaral L.A., Goldberger A.L., Havlin S., Rosenblum M.G., Stanley H.E., Struzik Z.R.* From $1/f$ noise to multifractal cascades in heartbeat dynamics // *Chaos.* 2001. Vol. 11. P. 641.
21. *Marrone A., Polosa A.D., Scioscia G., Stramaglia S., Zenzola A.* Multiscale analysis of blood pressure signals // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60. P. 1088.
22. *Thurner S., Feurstein M.C., Teich M.C.* Multiresolution wavelet analysis of heartbeat intervals discriminates healthy patients from those with cardiac pathology // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80. P. 1544.
23. *Павлов А.Н., Анищенко В.С.* Мультифрактальный анализ сложных сигналов // *Успехи физических наук.* 2007. Т. 177, вып. 8. С. 859.
24. *Pavlov A.N., Ziganshin A.R., Klimova O.A.* Multifractal characterization of blood pressure dynamics: stress-induced phenomena // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2005. Vol. 24. P. 57.

25. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. Philadelphia: S.I.A.M., 1992.
26. *Mallat S.G.* A wavelet tour of signal processing. New York: Academic Press, 1998.
27. *Addison P.S.* The illustrated wavelet transform handbook: Applications in science, engineering, medicine and finance. Bristol, Philadelphia: IOP Publishing, 2002.
28. *Kaiser G.* A friendly guide to wavelets. Boston: Birkhäuser, 1994.
29. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. Т. 166, № 11. С. 1145.
30. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
31. *Marsh D.J., Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H.* Frequency encoding in renal blood flow regulation // American Journal of Physiology. Regul. Integr. Comp. Physiol. 2005. Vol. 288. P. R1160.
32. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J.* Double-wavelet approach to studying the modulation properties of nonstationary multimode dynamics // Physiological Measurement. 2005. Vol. 26. P. 351.
33. *Pavlov A.N., Makarov V.A., Mosekilde E., Sosnovtseva O.V.* Application of wavelet-based tools to study the dynamics of biological processes // Briefings in Bioinformatics. 2006. Vol. 7. P. 375.
34. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J.* Synchronization among mechanisms of renal autoregulation is reduced in hypertensive rats // American Journal of Physiology. Renal Physiology. 2007. Vol. 293. P. F1545.
35. *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Pavlova O.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Characterizing multimode interaction in renal autoregulation // Physiological Measurement. 2008. Vol. 29. P. 945.
36. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Pavlova O.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Characterizing the effect of L-name on intra- and inter-nephron synchronization // European Journal of Pharmaceutical Sciences. 2009. Vol. 36. P. 39.
37. *Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J.* A dynamic model of renal blood flow autoregulation // Bull. Math. Biol. 1994. Vol. 56. P. 411.
38. *Barfred M., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Bifurcation analysis of nephron pressure and flow regulation // Chaos. 1996. Vol. 6. P. 280.
39. *Mosekilde E.* Topics in nonlinear dynamics: applications to physics, biology and economic systems. World Scientific: Singapore, 1996.
40. *Holstein-Rathlou N.-H., Leyssac P.P.* TGF-mediated oscillations in the proximal intratubular pressure: differences between spontaneously hypertensive rats and Wistar-Kyoto rats // Acta Physiol. Scand. 1986. Vol. 126. P. 333.
41. *Leyssac P.P., Holstein-Rathlou N.-H.* Tubulo-glomerular feedback response: Enhancement in adult spontaneously hypertensive rats and effects of anaesthetics // Pflügers Arch. 1989. Vol. 413. P. 267.
42. *Павлов А.Н., Павлова О.Н.* Анализ корреляционных свойств случайных процессов по сигналам малой длительности // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, № 7. С. 71.
43. *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., Anishchenko V.S.* Extracting dynamics from threshold-crossing interspike intervals: possibilities and limitations // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61, № 5. P. 5033.

44. *Postnov D.E., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Cooperative phase dynamics in coupled nephrons // *Int. J. Modern Physics B.* 2001. Vol. 15. P. 3079.
45. *Павлова О.Н., Павлов А.Н., Анисимов А.А., Назимов А.И., Сосновцева О.В.* Синхронизация колебаний в динамике ансамблей корковых нефронов // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2011. Т. 19, № 1. С. 14.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 15.09.2009
После доработки 16.02.2010*

MULTIFRACTAL DESCRIPTION OF NEPHRONS DYNAMICS

O.N. Pavlova, A.N. Pavlov

The dynamics of functional units of the kidney in normotensive and hypertensive rats is studied based on the method of multifractal formalism. Rhythmic processes in a nephron's mathematical model and in experimental data of tubular pressure are analyzed. Changes in singularity spectra for nephronic tubular processes in a hypertension state are illustrated that include an increase of multifractality degree and a decrease of correlations. The corresponding changes are caused by a stronger degree of chaotic oscillations for tubular pressure in nephrons of hypertensive rats.

Keywords: Singularity spectrum, multifractal formalism, nephrons dynamics, hypertension, blood flow autoregulation.



Павлова Ольга Николаевна – родилась в Саратове (1985). Окончила физический факультет Саратовского университета по специальности биохимическая физика (2007). Кандидат физико-математических наук (2009), ассистент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: динамика биологических систем. Имеет более 20 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: pavlova_olya@yahoo.com



Павлов Алексей Николаевич – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Кандидат физико-математических наук (1998), доктор физико-математических наук (2009). В настоящее время профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: анализ структуры сигналов, применение методов нелинейной динамики в биологии и медицине. Имеет более 100 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: pavlov_lesha@mail.ru



РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЕМ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ. ЛОГ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В МОДЕЛИ РАЗРЫВА ПУЧКА ВОЛОКОН

А.В. Подлазов

В некоторых системах, развивающихся в режиме с обострением, на основной тренд накладываются лог-периодические колебания, неограниченно ускоряющиеся по мере приближения к моменту обострения. Объяснение подобного поведения, характерного, в частности, для сейсмических и экономических явлений, могло бы дать понимание природы момента обострения, возникающего в этом случае как сгущение точек постоянной фазы колебаний. Такой взгляд есть частный случай более общего подхода, который рассматривает не колебания как возмущение растущего тренда, а напротив – сам тренд как результат колебательного процесса.

Лог-периодические колебания свидетельствуют о дискретной масштабной инвариантности описываемого явления. Легко прослеживается их связь с другими ее примерами, такими как самоподобные фракталы или диффузия на анизотропной решетке, рассматриваемыми в работе. Однако эти примеры предполагают наличие у системы дискретных уровней организации, что само по себе нетривиально.

В работе показано, что лог-периодические колебания возникают в классической модели разрыва пучка волокон при условии, что прочности последних генерируются датчиком случайных чисел ограниченной глубины. В этом случае возможные значения прочностей оказываются элементами периодического множества. А нелинейная модель лишь преобразует периодический входной сигнал в лог-периодический выходной. Весьма широкая распространенность периодических явлений в природе позволяет предположить, что лог-периодичность и в других системах обусловлена аналогичным преобразованием.

Ключевые слова: Лог-периодические колебания, режимы с обострением, критические явления, дискретная масштабная инвариантность, разрыв пучка волокон, компьютерное моделирование.

Введение

Одним из интереснейших объектов нелинейной динамики являются *лог-периодические колебания* [1–11]. Этим термином обычно обозначается развитие катастрофического события, сопровождающееся ускоряющимися колебаниями, в соот-

ветствие с формулой вида

$$x(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t_f - t)^{-\alpha + k\beta i} = (t_f - t)^{-\alpha} P(\log(t_f - t)), \quad (1)$$

где t_f – момент обострения [12–14], то есть момент времени, к которому рассматриваемая характеристика x достигает бесконечности, что означает разрушение системы или радикальное изменение закона ее развития, а $P(\cdot)$ – некоторая периодическая функция. Первый множитель в правой части формулы (1) отвечает за катастрофический тренд, а второй – за накладывающиеся на него колебания, сгущение которых, происходящее по мере приближения t к t_f , может служить предвестником катастрофы.

Возможность динамики такого рода дает основания для выработки нового взгляда на природу катастрофы. Ее уместно рассматривать не только как неограни-

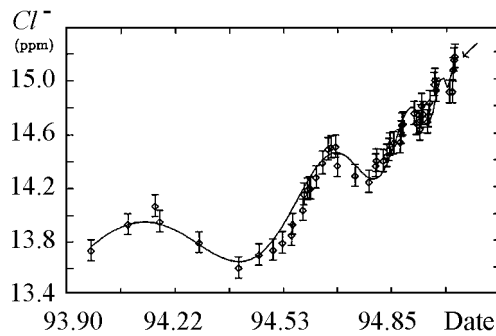


Рис. 1. Концентрация ионов хлора в подземных источниках перед землетрясением в Кобе 17 января 1995 г. [рис. из 1].

Показаны сглаженные данные и аппроксимация несглаженных данных формулой (2). Предсказанный на основе этой аппроксимации момент катастрофы отстоит от реального (отмеченного стрелкой) всего на два дня

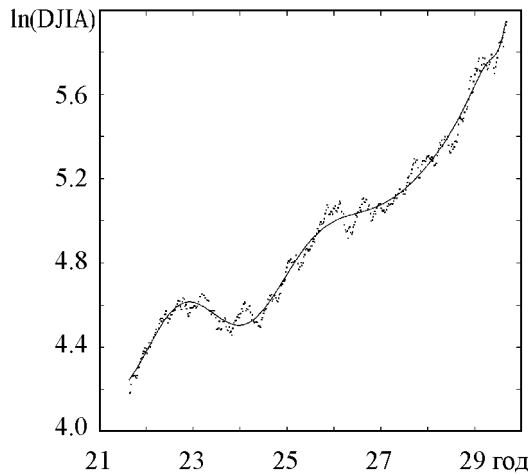


Рис. 2. Логарифм индекса Ду-Джонса перед крахом 23 октября 1929 г. [рис. из 2].

Сплошная линия соответствует аппроксимации данных формулой (2)

ченное возрастание какой-то величины, характеризующей текущее состояние системы, как это принято в теории режимов с обострением, но и как неограниченное ускорение происходящих в системе колебательных процессов, что, возможно, более точно соответствует детальным механизмам развития катастрофических событий.

На практике разложение (1) часто ограничивают первой гармоникой, записывая его как

$$x(t) \cong (t_f - t)^{-\alpha} \times \left(a_0 + a_1 \cos \left(\beta \ln \frac{t_f - t}{\tau} \right) \right), \quad (2)$$

где a_0 и a_1 – амплитуды, соответственно, основного тренда, растущего в режиме с обострением, и колебаний около него; β – их безразмерная частота; τ – размерная фаза. Эта формула оказывается удобной при изучении развития крупных катастрофических событий.

На рис. 1 приведен график изменения концентрации ионов в подземных водах перед разрушительным землетрясением в Кобе (Япония). Отчетливо видны как возрастающий тренд, так и ускоряющиеся колебания, уменьшение периода которых позволяет предсказать момент катастрофы куда точнее, чем можно это сделать на основании анализа тренда.

Второй пример лог-периодических колебаний можно видеть на рис. 2, где

показана динамика логарифма индекса Доу–Джонса, характеризующего стоимость акций крупнейших американских компаний, перед Черным вторником (биржевым крахом, с которого началась Великая депрессия). Катастрофическое событие вновь предваряется несколькими циклами колебаний.

Другие многочисленные примеры лог-периодических колебаний, предшествовавших катастрофическим событиям как сейсмологической, так и экономической природы, описаны в работах [3–8].

В настоящее время механизм возникновения лог-периодических колебаний неясен, хотя исследователями были предложены дифференциальные уравнения с решениями, частично воспроизводящими такую динамику. В работах [9,10] рассматривается уравнение, решение которого описывается формулой (1) с $a_0 = 0$, то есть получены колебания вокруг тренда, но за вычетом самого тренда. Однако ни строгого вывода этого уравнения, ни объяснения того, почему динамику нелинейной системы в данном случае можно «разобрать на части», рассматривая колебания отдельно от тренда, нет. В работе [11] избран другой подход, позволяющий получить в качестве решения формулу (2), но введенное там дифференциальное уравнение оказывается неавтономным, и, более того, содержит явным образом величину t_f . Иными словами, предполагается предопределенность момента катастрофы на уровне постановки задачи, что представляется нефизичным.

Природа лог-периодических колебаний тесно связана сразу с двумя глубокими вопросами: с природой момента обострения (возникновение выделенного момента времени в автономной задаче) и с природой дискретной масштабной инвариантности (возникновение выделенных иерархических уровней). Вместе с тем, взаимосвязь этих вопросов между собой неочевидна и вряд ли может быть строго обоснована. Однако выявление ее контуров является сверхзадачей данного исследования, поэтому в оставшейся части введения дается краткий обзор по этим вопросам.

Основная же часть статьи посвящена рассмотрению модификации модели разрыва пучка волокон [15,16], демонстрирующей один из возможных механизмов возникновения лог-периодические колебания. Не претендуя на полноту и окончательность объяснения их природы, эта модель позволяет на конкретном примере показать связь дискретной масштабной инвариантности с наличием выделенного момента времени.

В.1. Выделенные значения времени или управляющего параметра

Существует, по крайней мере, два класса процессов, в которых наблюдается возникновение выделенных значений переменной – режимы с обострением и критические явления.

Развитие в режиме с обострением. Простейшим объектом теории режимов с обострением [12–14] является уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^{1+1/\alpha},$$

решение которого неограниченно возрастает при приближении к некоторому моменту обострения t_f

$$x(t) \sim (t_f - t)^{-\alpha}. \quad (3)$$

Несмотря на огромные успехи, достигнутые теорией режимов с обострением для широкого класса пространственно-распределенных систем, ключевой вопрос теории о природе самого момента обострения остается до сих пор открытым.

Как получается, что условие задачи имеет смысл в общем, а ее общее решение не существует? Почему решение автономного уравнения имеет выделенный момент времени?

Поскольку получить содержательные ответы на эти вопросы в традиционной постановке не удастся, представляется разумным попытаться ее расширить. Наиболее очевидный способ сделать это состоит в формальном переходе от действительного показателя α к комплексному $\alpha + \beta i$, то есть в переходе от рассмотрения процессов вида (3) к рассмотрению более широкого класса процессов вида (1). Учет кратных гармоник здесь обусловлен существенной нелинейностью систем, развивающихся в режиме с обострением, но в простейшем случае можно ограничиться записью (2).

При развитии в режиме (2) момент обострения естественным образом возникает как ступение точек постоянной фазы, приходящихся на моменты времени

$$t_n = t_f - \tau e^{-2\pi n/\beta}.$$

Легко видеть, что $t_n \rightarrow t_f$ при $n \rightarrow \infty$, то есть вопрос о природе выделенного момента времени разрешится сам собой, коль скоро мы научимся объяснить природу лог-периодических колебаний.

К сожалению, такая исследовательская программа пока представляется трудновыполнимой. Как будет продемонстрировано далее, не действительный показатель является частным случаем комплексного, а, напротив, лог-периодические колебания есть очень специальный случай возмущения, наложившегося на степенную динамику. Кроме того, запись колебаний в комплексной форме, естественная и удобная для линейных систем, в случае любой нелинейности сопряжена со значительными вычислительными, а порой и содержательными трудностями.

Поведение в окрестности критической точки. Альтернативный подход к выяснению природы выделенного момента времени дает изучение *критических систем* [17]. В них корреляционная длина (характеризующая пространственный масштаб, на котором поведение их элементов согласованно) при приближении *управляющего параметра к критическому значению* расходится степенным образом

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}, \quad (4)$$

что очень напоминает формулу (3).

К сожалению, прямая аналогия между режимом с обострением и критичностью неправомерна. За редкими исключениями (одно из которых рассматривается далее) управляющий параметр p не может выступать как времениподобная переменная, обладающая естественным направлением изменения. В подавляющем большинстве систем через критическую точку можно проходить в обоих направлениях, и формула (4) остается справедливой как при $p < p_c$, так и при $p > p_c$ (хотя коэффициенты пропорциональности могут различаться).

Существенно и то, что в случае критических явлений обычно не составляет труда объяснить возникновение выделенного значения управляющего параметра p_c . С одной стороны, это еще более удаляет их от развития в режиме с обострением, но с

другой – позволяет надеяться на достижение понимания природы лог-периодических колебаний на материале критических систем и на его дальнейшее распространение на системы, развивающиеся в режиме с обострением.

В.2. Дискретная масштабная инвариантность

Степенные зависимости с накладывающимися на них лог-периодическими колебаниями встречаются в дискретных системах регулярной структуры, хотя следует заметить, что при этом не возникает выделенного момента времени или выделенного значения какой-либо другой величины, исполняющей его роль. Рассмотрим два примера подобного рода.

Самоподобные фракталы. Первый пример дают *фракталы*. Это геометрические объекты, метрическая размерность которых превышает топологическую [18]. Если покрывать фрактал элементами (например, кругами или квадратами) линейного размера ε , то при его стремлении к нулю количество элементов, необходимое для этого, возрастает согласно формуле

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}, \quad (5)$$

где D – *размерность фрактала*.

На рис. 3 приведен пример *самоподобного фрактала*, получающегося из квадрата в результате деления его на 9 квадратов, имеющих втрое меньшую сторону, с удалением среднего из них и повторением этой процедуры для 8 оставшихся. То геометрическое множество, которое остается от любого из этих квадратов, при увеличении линейных размеров втрое отобразится на весь фрактал. В этом выражается

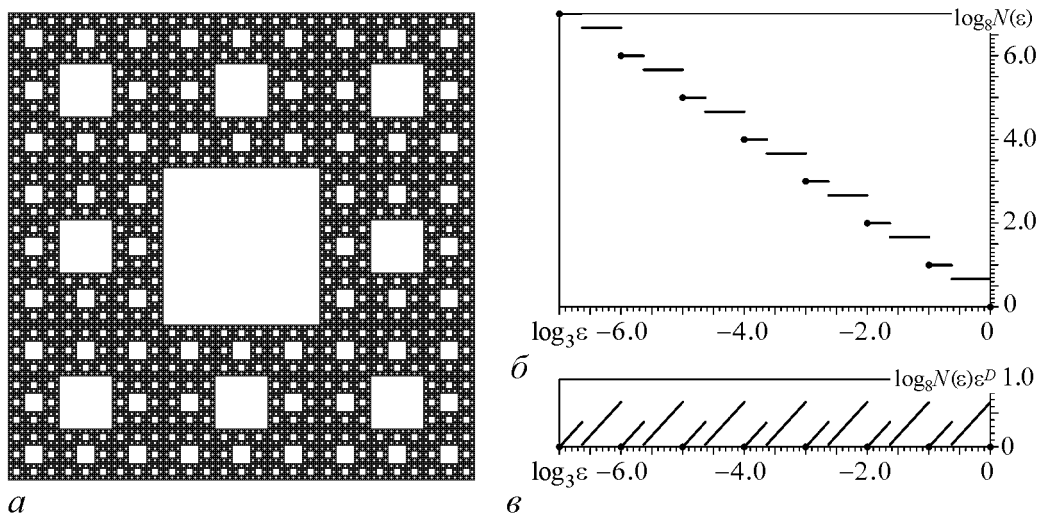


Рис. 3. Комплексная размерность самоподобных фракталов. *a* – Ковер Серпинского [рис. из 19]. При утроении масштаба часть этого фрактального множества совпадает с целым, что означает его самоподобие. *б* – Приведена зависимость количества квадратов N , необходимых для покрытия ковра, от их стороны ε . Жирные точки соответствуют «удобным» квадратам со стороной $1, 1/3, 1/9 \dots$, при использовании которых фрактал покрывается без наложений и излишков. Поскольку таких квадратов требуется $1, 8, 64 \dots$, его размерность $D = \log_3 8 \approx 1.89 \dots$. При использовании квадратов других размеров зависимость $N(\varepsilon)$ отклоняется от вида (5). *в* – Детрендрованное отклонение – периодическая (в логарифмическом масштабе) функция, фурье-компоненты которой дают комплексные размерности

его самоподобие или, иначе говоря, *масштабная инвариантность*. И если бы она имела место при произвольном преобразовании размеров, то формула (5) выполнялась бы точно. Однако масштабная инвариантность самоподобных фракталов *дискретна* [1,3,6,8]. Для рассмотренного фрактала растяжения с коэффициентами, не являющимися степенями тройки, не позволяют отобразить его на себя. Это приводит к наложению на зависимость (5) возмущения, периодического в логарифмическом масштабе, и как следствие возникновению спектра комплексных фрактальных размерностей (см. рис. 3)

$$D_n = \log_3 8 + \frac{2\pi i n}{\ln 3}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

соответствующих разным частотам разложения этого возмущения в ряд Фурье.

Следует заметить, что самоподобные фракталы, выглядящие совершенно одинаково на некоторых разных масштабах, представляют собой искусственные объекты. Реальные фракталы не самоподобны – они на разных масштабах выглядят очень похоже (так, что невозможно определить, на каком именно масштабе они рассматриваются), но всё-таки немного по-разному. И хотя для несамоподобных фракталов зависимость (5) всё равно неточна, после ее детрендирования уже не получается периодической функции. А следовательно, несамоподобные фракталы уже не обладают дискретным спектром комплексных размерностей, как не обладают дискретным спектром комплексных показателей и многие реальные системы, развивающиеся в режиме с обострением.

Диффузия на анизотропной решетке с закрепленными случайностями.

Другой пример возникновения дискретной масштабной инвариантности связан с *анизотропной диффузией* [8,20]. В простейшем варианте она реализуется как «блуждание» на решетке, ячейки которой делятся на два типа: *диоды*, составляющие основную массу ячеек, и *ловушки*, доля которых $p \ll 1$ (рис. 4).

Попав в ячейку-диод, «блуждатель» на следующем шаге смещается в выделенном направлении, а оказавшись в ячейке-ловушке, он может пройти в этом направлении лишь с вероятностью $u \ll 1$, а с вероятностью $(1 - u)$ делает шаг в противоположном направлении. Если за ловушкой находится диод, то миновав ее, блуждатель никогда к ней более не возвращается, а если же за ней оказывается еще

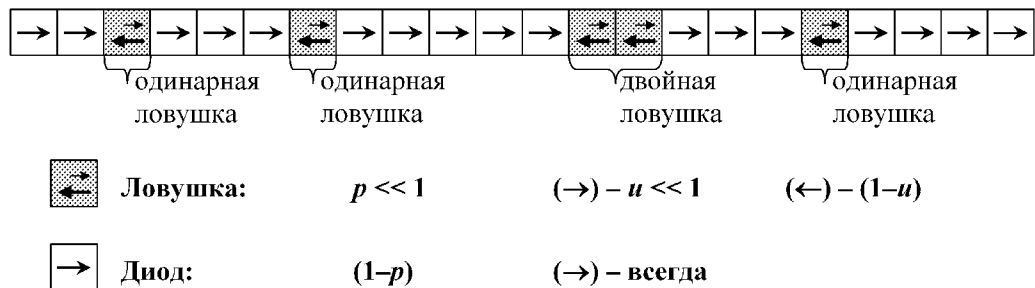


Рис. 4. Диффузия на анизотропной решетке с закрепленными случайностями. «Блуждатель» свободно движется слева направо по диодам, составляющим основную долю ячеек, пока не встретит ловушку, которая с большой вероятностью отбрасывает его налево, поэтому на ее прохождение ему потребуются много попыток. Если несколько ячеек-ловушек выстраиваются подряд, образуется кратная ловушка, преодоление которой еще более затруднено

одна ловушка, то с большой вероятностью и уже пройденную ловушку придется преодолевать еще много раз. В результате кратные ловушки оказываются препятствием качественно иного уровня. В каком-то смысле ловушки разной кратности схожи с разными масштабами рассмотрения иерархических систем вроде самоподобных фракталов.

Ловушка кратности k встречается в среднем один раз на $x_k = p^{-k}$ ячеек, а на ее прохождение тратится порядка $t_k = u^{-k}$ шагов. А всего на прохождение дистанции x_k тратится (с учетом преодоления ловушек меньшей кратности) время

$$\sum_{i=0}^k p^i u^{-(k-i)} = t_k \frac{1 - (u/p)^{k+1}}{1 - u/p}.$$

В случае $u \ll p$ оно мало отличается от t_k . Поэтому можно считать, что x_k – это положение блуждателя в момент времени t_k .

Таким образом, возникает *перенормировочное уравнение*

$$px(t) = x(ut), \quad (6)$$

которое бы свидетельствовало об однородной (масштабно-инвариантной) зависимости x , если бы выполнялось при произвольных u или p . В этом случае его решение имело бы вид

$$x(t) \sim t^\nu, \quad (7)$$

с показателем $\nu = \log_u p$. Но будучи справедливым только при тех u и p , которые взяты в постановке задачи, уравнение (6) указывает лишь на лог-периодичность детрендериванной зависимости $y(t) = x(t)t^{-\nu}$

$$y(t) = y(ut),$$

что рождает целый спектр комплексных показателей для формулы (7)

$$\nu_n = \log_u p + \frac{2\pi i n}{\ln u}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Дискретный характер этого спектра, как и в случае с размерностью самоподобных фракталов, обусловлен наличием четко выделенных уровней. В случае фрактала они связаны с номером итерации процесса построения фрактала, в случае анизотропной диффузии – с кратностью ловушки. Но в любом случае эти уровни строго дискретны. Если допустить наличие ячеек-ловушек с переменной величиной u , то есть возникновение ловушек нецелой кратности, то лог-периодическая компонента зависимости x исчезнет, точно так же как исчезает она в зависимости числа элементов покрытия от их размера для несамоподобных фракталов.

Модель разрыва пучка волокон

Рассмотренные выше системы, демонстрируя дискретную масштабную инвариантность, всё-таки не вполне соответствуют решаемой задаче. Они предполагают наличие явно заданных или фактически возникающих дискретных иерархических уровней, что совершенно нереалистично.

А вот отсутствие выделенного значения времени или иной изменяемой переменной не есть принципиальный недостаток с точки зрения исследования лог-периодичности колебаний. Если совместить в одной модели геометрию самоподобного фрактала и критические свойства, как это сделано в работах [8,21], то легко добиться возникновения колебаний, стягивающихся к выделенному моменту времени в согласии с формулой (1). Однако природа дискретной масштабной инвариантности нуждается в объяснении в той же мере, как и природа лог-периодичности. И еще неизвестно, что сделать проще.

Правила модели и ее свойства. Возможность объяснить возникновение лог-периодичности без введения в систему дискретных уровней организации дает классическая модель разрыва пучка волокон [15,16]. В ней рассматривается пучок, изначально состоящий из N параллельных волокон, к которому приложено усилие f , разделяемое поровну между всеми волокнами (рис. 5). Каждое волокно характеризуется прочностью s – той пороговой величиной приходящегося на него усилия, при превышении которого волокно необратимо разрывается. При разрыве волокна усилие мгновенно перераспределяется между оставшимися волокнами, что приводит к росту нагрузки на них. Последняя вновь может превысить прочность некоторых волокон, спровоцировав новые разрывы и т.д. После завершения лавины разрывов усилие, приложенное к пучку, повышается до тех пор, пока вновь не будет превышен порог прочности одного из волокон.

То, как рвется пучок по мере роста приложенного к нему усилия, существенно зависит от степени неоднородности пучка. Если прочность волокон описывается функцией распределения $F(s)$, то пучок содержит в среднем $n = N [1 - F(s)]$ волокон прочности не менее s , способных выдержать суммарное усилие $f = sn$. Таким образом, волокно прочности s рвется по достижении усилием величины

$$f(s) = Ns [1 - F(s)] \quad (8)$$

при условии, что все более слабые волокна уже порвались.

Если функция распределения $F(s)$ такова, что выражение (8) имеет максимум в некоторой точке $s_c > 0$, то вблизи нее разрывающее усилие удовлетворяет формуле

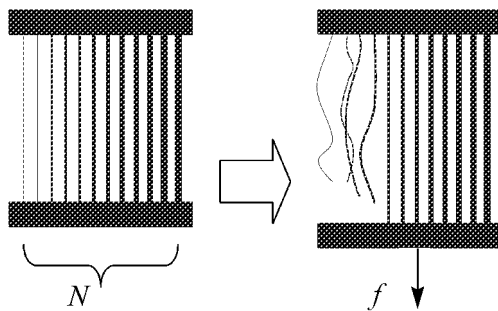


Рис. 5. Разрыв пучка волокон. Прилагаемое к пучку усилие равномерно распределяется между всеми волокнами. Когда волокно не выдерживает, его разрыв приводит к росту той доли усилия, которая приходится на каждое из оставшихся волокон. Если пучок держит приложенное усилие, оно нарастает до тех пор, пока не произойдет разрыв

$$f_c - f(s) \sim (s_c - s)^2. \quad (9)$$

При этом запас прочности, необходимый для выживания волокна, расходится при $f \rightarrow f_c$ как

$$\frac{ds}{df} \sim (f_c - f)^{-1/2}, \quad (10)$$

то есть f_c – критическая точка. В ее окрестности на повышение приложенного усилия пучок будет отвечать разрывом числа волокон, распределенного степенным образом. И лишь после того, как f достигнет f_c , произойдет разрыв всех оставшихся волокон – полное

разрушение. Соответственно, если рассматривать возрастающую приложенную силу f как аналог времени, то значение f_c выступает в роли момента обострения. Причем вопрос о его природе даже не встает – коль скоро число волокон и их прочность конечны, то, несомненно, при некотором усилии весь пучок будет разорван.

Ограничимся для простоты рассмотрением равномерного распределения волокон по прочности на отрезке $[0; 1]$, которому соответствует $F(s) = s$. В этом случае $s_c = 1/2$ и $f_c = N/4$, а формула (9) точна для всех s , а не только для близких к s_c .

Особенности процесса разрушения в дискретном случае. Формула (10) для скорости разрыва получена для континуального множества волокон. В случае их конечного числа отношение дифференциалов заменится отношением конечных приращений прочности слабейшего волокна δs и приложенного усилия δf .

На рис. 6 представлена динамика дискретного аналога скорости разрыва, определенная в ходе компьютерного эксперимента для пучка волокон, прочности которых сгенерированы с помощью датчика случайных чисел. Легко видеть, что график сильно отклоняется от тренда, предсказанного формулой (10).

Рис. 7, где зависимость детрендирована, позволяет установить лог-периодический характер колебаний, наложившихся на тренд.

При анализе на рис. 7 и далее полагается, что моменту обострения соответствует не значение f_c , а немного большая величина f_f , подбираемая так, чтобы постоянство частоты колебаний в логарифмическом масштабе выдерживалось максимально строго.

В выборе эмпирического момента обострения f_f , отличного от f_c , имеется некоторый произвол, однако, не очень большой. С одной стороны, для реальных, а не модельных систем точное положение момента обострения всё равно не известно (так как система разрушается до его достижения) и является подгоночным. А с другой стороны, введение дополнительного выделенного значения f имеет и вполне содержательный математический смысл, который станет понятен позже.

Если бы с реальным пучком дела обстояли так же, как в описанном

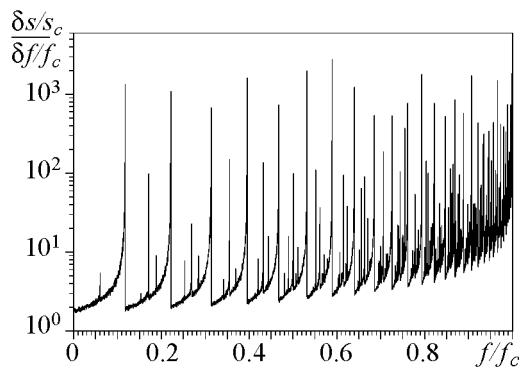


Рис. 6. Экспериментально измеренная скорость разрыва. Хотя скорость разрыва расходится при $f \rightarrow f_c$, на возрастающий тренд накладываются очень сильные колебания, сгущающиеся по мере приближения к моменту обострения. Результат получен для пучка, состоящего из $N = 2^{27} \approx 10^8$ волокон

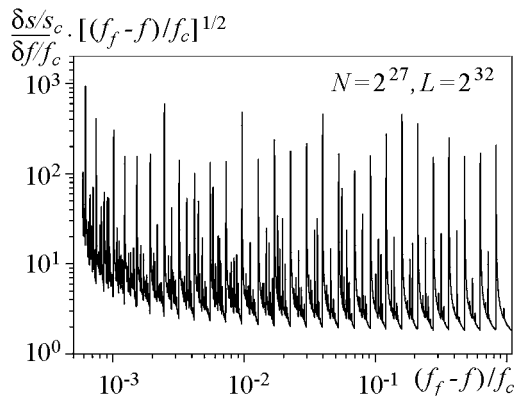


Рис. 7. Колебательная компонента скорости разрушения. Показана та же зависимость, что и на рис. 6, но с скомпенсированным трендом (10), растущим в режиме с обострением. По абсциссе взята отстройка от эмпирического момента обострения f_f в логарифмическом масштабе. При этом эквидистантные пики соответствуют лог-периодическим колебаниям. Глубина использованного датчика случайных чисел – 32 бита

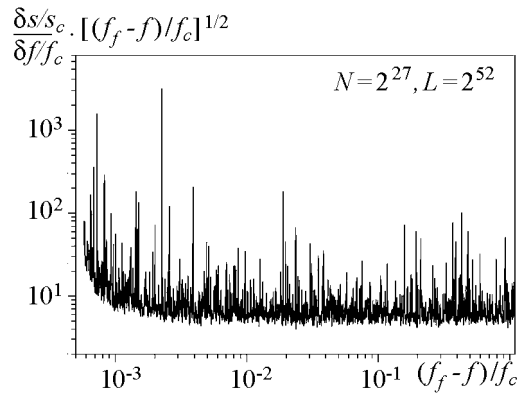


Рис. 8. Увеличение разрядности датчика. Та же самая зависимость, что и на рис. 7, но при генерации набора волокон использовался датчик случайных чисел с глубиной 52 бита. Эквидистантных пиков, соответствующих лог-периодическим колебаниям, здесь нет. Для устранения возможных разночтений при получении этого и предыдущего рисунков реально использовалась одна и та же генерация случайных чисел, но для рис. 7 у них были сохранены только 32 старших бита, а последующие сброшены в ноль

лог-периодических колебаний. Их возникновение обусловлено не вполне корректной дискретизацией модели при построении для нее компьютерного алгоритма, что задним числом можно трактовать как умышленную модификацию правил модели. Однако история науки учит, что путь, приведший к неожиданным результатам, порой становится их неотъемлемой составной частью. Поэтому автору представляется крайне важным сохранить всю последовательность действий, позволивших обнаружить принципиально новый эффект в хорошо изученной модели.

Входным сигналом для модели разрыва пучка волокон является случайная генерация их прочностей. И конечная точность датчика случайных чисел означает периодичность сигнала, подаваемого на вход модели. В самом деле, если датчик позволяет сгенерировать L различных случайных целых чисел $0 \leq l < L$, то прочностей, получаемые линейным отображением этого диапазона на единичный отрезок,

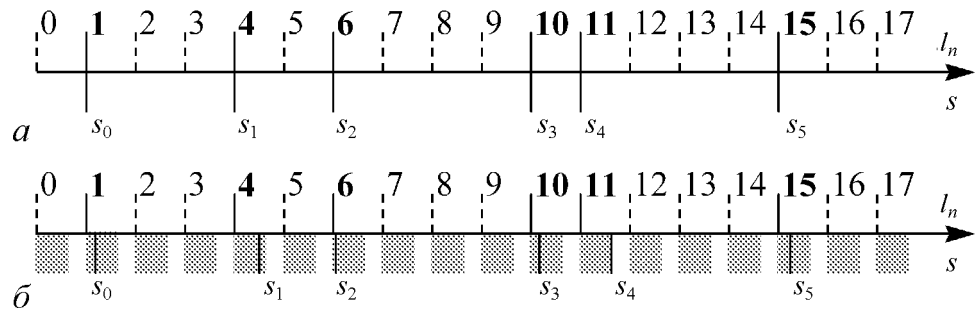


Рис. 9. Связь случайных чисел и прочностей волокон. *a* – Случай строгой периодичности. Прочности волокон s выбираются из набора эквидистантных величин, связанных с целочисленными значениями датчика l формулой $Ls_n = l_n$. *б* – Случай нестрогой периодичности. Здесь уже возможен некоторый допуск и $L\Delta s_n \in [l_n; l_n + \Delta l]$ с $\Delta l < 1$. Однако, по-прежнему, все возможные значения s принадлежат периодическому множеству

компьютерном эксперименте, то вряд ли объяснение лог-периодических колебаний представляло бы существенную трудность. Однако интуиция подсказывает, что подобного поведения быть просто не может. И, действительно, данный результат является артефактом численного моделирования.

Наблюдаемый феномен обусловлен особенностями датчика случайных чисел, который использовался для генерации прочностей волокон. Генерируемые случайные числа имели всего 32 двоичных разряда. Если взять датчик с большей разрядностью, то, как можно видеть из рис. 8, лог-периодичность исчезает, и отклонения от тренда принимают случайный характер.

Иными словами, в своем аналоговом варианте модель разрыва пучка волокон не демонстрирует лог-

выбираются на периодической решетке, имеющей шаг $1/L$ (рис. 9, а). И если отношение L/N , равное среднему числу шагов решетки, разделяющих два последовательных по прочности волокна, не очень велико, то в модели наблюдается лог-периодическое поведение. В случае, представленном на рис. 7, это отношение (определяющее, как будет показано далее, число циклов, проходимых системой до полного разрушения) составляло всего $2^5 = 32$. А при переходе к рис. 8 оно было увеличено в $2^{20} \approx 1$ млн. раз, что сделало совершенно несущественной принадлежность прочностей периодическому набору.

Заметим, что строгая периодичность входа модели необязательна для получения лог-периодических колебаний. Можно допустить некоторое отклонение прочностей от величин, строго соответствующих точкам целочисленной решетки (как показано на рис. 9, б). Важно, однако, чтобы размытие решетки имело регулярный характер, тогда, как можно видеть на рис. 10, эквидистантность пиков сохраняется, хотя они тоже становятся размытыми.

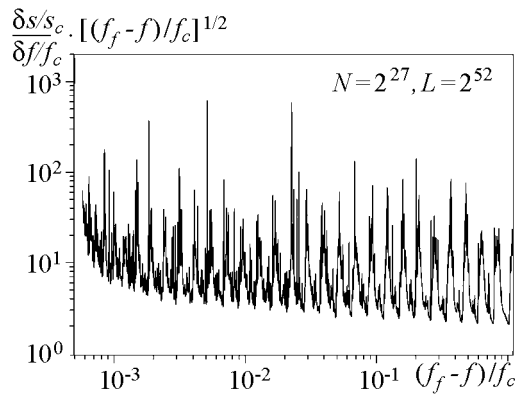


Рис. 10. Случай нестрогой периодичности. То же самое, что и на рис. 8, но случайные числа только частично закруглены до 32 бит. Посредством конъюнкции с маской `0xFFFFFFFF3FFFFFFF` в ноль сброшены не все последующие биты, а лишь 2. Генерируемые так числа могут отклоняться от возможных значений 32-битного датчика, но не более чем на четверть младшего разряда. Лог-периодичность сохраняется, хотя пики утрачивают четкость

Природа лог-периодичности

Осталось разобраться, где именно возникают пики и как именно модель разрыва пучка волокон конвертирует периодическую компоненту входного сигнала в лог-периодический выходной сигнал.

Резонансные пики. Пусть имеется N волокон и для них L потенциально возможных прочностей. Обозначим n -е по величине значение случайного числа в генерации через l_n . Тогда, соответствующая ему прочность

$$s_n = \frac{l_n}{L}, \quad (11)$$

а, кроме того, в силу равномерности распределения волокон по прочности

$$s_n \approx \frac{n}{N}. \quad (12)$$

Усилие, необходимое для разрыва n -го волокна

$$f_n = s_n (N - n).$$

При увеличении номера волокна $n \rightarrow n + \delta n$ и $l_n \rightarrow l_n + \delta l_n$ это усилие возрастает на величину

$$\delta f_n = \frac{l_n + \delta l_n}{L} (N - n - \delta n) - \frac{l_n}{L} (N - n) \approx \frac{(N - n) \delta l_n + l_n \delta n}{L}.$$

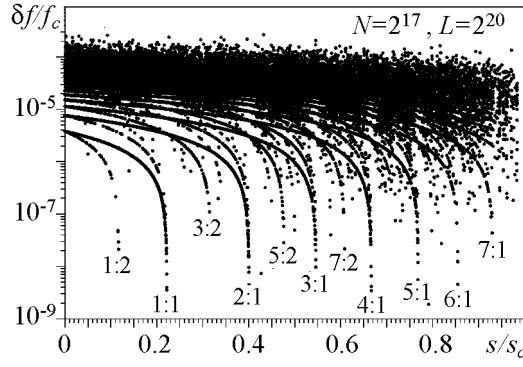


Рис. 11. Приближение к резонансам ($\delta l_n : \delta n$). Малые приращения δf группируются по абсциссе в районе резонансных прочностей, лежащая на (прямые в обычном масштабе) линии, заданные уравнением (15). Самые сильные резонансы с $\delta n = 1$ (разрыв всего одного волокна в ответ на рост приложенного усилия) соответствуют основной частоте лог-периодических колебаний, вторичные резонансы с $\delta n \geq 2$ – обертонам

Исключение n и l_n с помощью формул (11) и (12) окончательно дает

$$\delta f_n \cong \frac{N\delta l_n - s(N\delta l_n + L\delta n)}{L}. \quad (13)$$

Экспериментально наблюдаемые гигантские всплески отношения приращений прочности слабейшего волокна и приложенного усилия (пики) связаны с обращением последнего почти что в ноль. Положив $\delta f_n = 0$ и потребовав тем самым, чтобы разрыв происходил без увеличения приложенного усилия, находим *резонансное значение* прочности \tilde{s}_n , при котором увеличение номера слабейшего волокна на δn и соответствующего ему значения датчика на δl_n возможно без роста приложенного усилия:

$$\tilde{s}_n \cong \frac{N\delta l_n}{N\delta l_n + L\delta n}. \quad (14)$$

Разумеется, нет никаких гарантий, что в случайно сгенерированном пучке действительно найдется волокно именно с такой прочностью. Однако сгодится и прочность, чуть меньшая резонансной,

$$\tilde{s}'_n = \tilde{s}_n - \Delta s.$$

Как следует из формулы (13), необходимый для разрыва такого волокна прирост усилия

$$\delta f'_n = \Delta s \left(\delta n + \frac{N}{L} \delta l_n \right) \quad (15)$$

будет мал в меру малости отклонения Δs . Следовательно, при резонансных прочностях, задаваемых формулой (14), или близких к ним возможны пики скорости разрыва.

Рис. 11 показывает измеренные в численном эксперименте приросты усилия, демонстрирующие изобилие волокон с прочностями, близкими к резонансным, в реальной генерации.

Преобразование масштабов. Теперь необходимо установить, как положения резонансов (14) превращаются именно в эквидистантные в логарифмическом масштабе пики.

В соответствие с формулой (9), относительная отстройка усилия от критического значения определяется по формуле

$$\frac{f_c - f}{f_c} = \left(\frac{s_c - s}{s_c} \right)^2 = (1 - 2s)^2,$$

поскольку для рассматриваемого варианта модели $s_c = 1/2$. С помощью формулы (14) для положения пиков получаем

$$\frac{f_c - \tilde{f}_n}{f_c} = (1 - 2\tilde{s}_n)^2 = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2,$$

где $z = \frac{\delta l_n N}{\delta n L} = \frac{\tilde{s}_n}{1 - \tilde{s}_n}$ изменяется от 0 до 1 при изменении s от 0 до 1/2. Если принять положение эмпирического момента обострения

$$f_f = f_c(1 + a),$$

то логарифм относительной отстройки от него, которая откладывается по абсциссе на рис. 7, 8 и 10, есть

$$g(z) = \ln \frac{f_f - f}{f_c} = \ln \left(a + \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2 \right).$$

Замечательным обстоятельством является возможность подобрать значение параметра a таким образом, что эта функция оказывается практически линейной почти на всем отрезке $[0; 1]$ (врезка на рис. 12).

Если оценивать качество приближения функции $g(z)$ на отрезке $[0; z]$ ее линейным разложением

$$g_1(z) = \ln(1 + a) - \frac{4}{1 + a} z$$

с помощью интегральной невязки

$$\varepsilon_a(z) = \int_0^z [g(\zeta) - g_1(\zeta)] d\zeta,$$

то, как можно видеть из рис. 12, приближение оказывается очень хорошим (невязка на три порядка меньше изменения функции почти на всем диапазоне изменения аргумента).

Иными словами, благодаря определенной свободе выбора положения эмпирического момента обострения f_f , величина $\log(f_f - f)$ практически линейно зависит от отношения $\delta l_n : \delta n$. Вследствие этого резонансы при фиксированном δn и последовательных значениях δl_n оказываются эквидистантны. Таким образом, динамика системы на протяжении почти всего времени ее существования описывается формулой (1). И лишь в непосредственной близости от момента обострения, где система уже практически ненаблюдаема, происходит отклонение от такого поведения. Однако и там это отклонение носит лишь количественный, а не качественный характер – сгущение колебаний сохраняется, хотя оно более и не подчиняется простой формуле (1).

Пучок сохраняется при прочностях слабейшего волокна $s < s_c = 1/2$. Наложение этого ограничения на резонансные прочности формулы (14) дает ограничение на количество резонансов

$$\delta l_n < \frac{L}{N} \delta n.$$

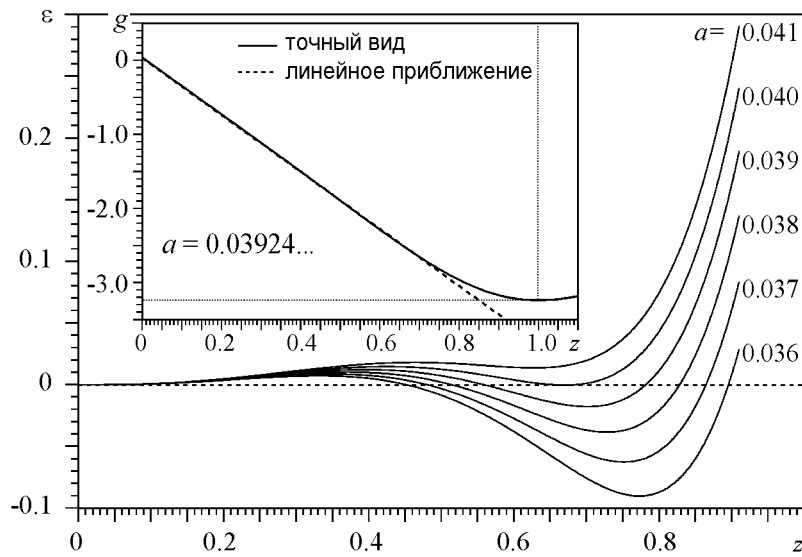


Рис. 12. Линейность преобразования масштабов. При $a \approx 0.037 \dots 0.041$ для $z \leq 0.75$ интегральная невязка между функциями $g(z)$ и $g_1(z)$ очень мала. Уменьшение параметра a позволяет несколько расширить участок, на котором имеет смысл использовать линейное приближение, за счет некоторого ухудшения качества последнего. Поскольку никаких однозначных критериев для точного выбора a нет, в данной работе принято такое значение, при котором на линейном участке $g(z) \sim 1 - 100z$. На врезке – графики функции и ее линейного приближения при этом a

Основной частоте колебаний следуют пики, возникающие при $\delta n = 1$ (см. рис. 11). Их количество ограничено отношением L/N , которое, следовательно, не должно быть очень большим, чтобы можно было различить отдельные циклы колебаний.

Следует заметить, что реально наблюдаемое число циклов лог-периодических колебаний несколько меньше, чем L/N , поскольку вблизи момента обострения происходят столь быстрые изменения, что картина смазывается. Дополнительные искажения вносятся также работой с отстройкой усилия не от критического значения f_c , а от эмпирического момента обострения f_f , что, однако, не меняет качественных свойств системы.

Выводы

Развитие в режиме с обострением связано с ускорением происходящих в системе процессов, которое может проявляться в виде лог-периодических колебаний.

Один из возможных механизмов их возникновения раскрывает модель разрыва пучка волокон. Если прочности волокон выбираются из периодического набора значений (генерируются с помощью датчика случайных чисел ограниченной точности), то наблюдающиеся в модели колебания оказываются периодической функцией логарифма отстройки усилия от эмпирического момента обострения. Причем постоянство периода сохраняется почти до самого момента обострения.

Причиной возникновения лог-периодических колебаний в критической системе может быть преобразование входного сигнала, периодического в линейном масштабе, в выходной сигнал, периодический в логарифмическом масштабе. Модель разрыва пучка волокон демонстрирует пример такого преобразования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 08-01-00781/11-01-00887 и 10-01-00786).

Библиографический список

1. *Johansen A., Sornette D., Wakita H., Tsunogai U., Newman W.I., Saleur H.* Discrete scaling in earthquake pre-cursory phenomena: Evidence in the Kobe earthquake, Japan // *J. Phys. I (France)*. 1996. Vol. 6. P. 1391.
2. *Sornette D., Johansen A.* Large financial crashes // *Physica A*. 1997. Vol. 245, № 3–4. P. 411. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/9704127>
3. *Сорнетте Д.* Как предсказывать крахи финансовых рынков: критические события в комплексных финансовых системах. М.: Интернет-трейдинг, 2003. 400 с.
4. *Sornette D., Sammis C.G.* Complex critical exponents from renormalization group theory of earthquakes: Implications for earthquake predictions // *J. Phys. I (France)*. 1995. Vol. 5, № 5. P. 607.
5. *Johansen A., Sornette D.* Critical crashes // *Risk*. 1999. Vol. 12, № 1. P. 91. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/9901035>
6. *Johansen A., Sornette D., Ledoit O.* Predicting financial crashes using discrete scale invariance // *Journal of Risk*. 1999. Vol. 1, № 4. P. 5. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/9903321>
7. *Sornette D., Johansen A.* Significance of log-periodic precursors to financial crashes // *Quantitative Finance*. 2001. Vol. 1, № 4. P. 452. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/0106520>
8. *Saleur H., Sammis C.G., Sornette D.* Discrete scale invariance, complex fractal dimensions and log-periodic fluctuations in seismicity // *J. Geophys. Res.* 1996. Vol. 101. P. 17661.
9. *Ide K., Sornette D.* Oscillatory finite-time singularities in finance, population and rupture // *Physica A*. 2002. Vol. 307, № 1–2. P. 63. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/0106047>
10. *Sornette D., Ide K.* Theory of self-similar oscillatory finite-time singularities in finance, population and rupture // *Int. J. Mod. Phys. C*. 2002. Vol. 14, № 3. P. 267. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/0106054>
11. *Basin M.A.* Differential equations determining the function that describes pre-catastrophic behavior of a system // *Technical Physics Letters*. 2006. Vol. 32, № 4. P. 338.
12. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
13. Режимы с обострением. Эволюция идеи: Законы коэволюции сложных структур // Сб.: «Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения» / Ред. Г.Г. Малинецкий. М.: Наука, 1998. 255 с.
14. Режимы с обострением: эволюция идеи // Сборник статей. 2-е изд. испр. и доп. / Под ред. Г.Г. Малинецкого. М.: Физматлит, 2006. 312 с.
15. *Andersen J.V., Sornette D., Leung K.-T.* Tri-critical behavior in rupture induced by disorder // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 2140.
16. *Zhang S., Fan Q., Ding E.* Critical processes, Langevin equation and universality // *Physics Letters A*. 1995. Vol. 203. P. 83.
17. *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980. 298 с.
18. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
19. http://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_carpet

20. *Stauffer D.* New simulations on old biased diffusion// *Physica A.* 1999. Vol. 266, № 1–4. P. 35.
21. *Sornette D., Johansen A.* A hierarchical model of financial crashes // *Physica A.* 1998. Vol. 261, № 3–4. P. 351.

*Институт прикладной
математики им. М.В. Келдыша РАН*

*Поступила в редакцию 8.07.2010
После доработки 11.04.2011*

BLOW-UP WITH COMPLEX EXPONENTS. LOG-PERIODIC OSCILLATIONS IN THE DEMOCRATIC FIBER BUNDLE MODEL

A.V. Podlazov

The main trend of some blow-up systems is disturbed by log-periodic oscillations infinitely accelerating when approaching the blow-up point. Explanation of such behavior typical e.g. for seismic and economic phenomena could give an insight into the nature of blow-up point rising in this case as the condensation of constant phase points of oscillations. This viewpoint is a particular case of the more general approach that treats not oscillations as a disturbance of the growing trend, but the trend itself as a result of oscillatory process.

Log-periodic oscillations indicate about the discrete scale invariance of described phenomenon. One can easily establish the connection of theirs with other its examples, such as considered here self-similar fractals or diffusion in anisotropic quenched random media. However these examples presuppose the presence of discrete levels of organization in the system nontrivial of themselves.

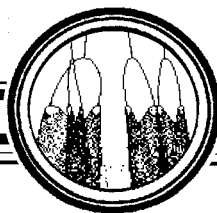
We show that log-periodic oscillations arise in the classical democratic fiber bundle model with the strength of bundles generated by means of random number generator of limited depth. In this case possible strength values belong to a periodic set. And the nonlinear model just transforms this periodic input to the log-periodic output. Periodic events are quite worldwide, so one can assume that log-periodicity in other systems originates from a similar transformation.

Keywords: Log-periodic oscillations, blow-up growth, critical phenomena, discrete scale invariance, democratic fiber bundle model, computer simulation.



Подлазов Андрей Викторович – родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996). После окончания МФТИ работает в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (2001) в области теории самоорганизованной критичности и теории масштабно-инвариантных процессов. Автор монографий «Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика» [М.: Наука, 2000. 432 с.] (в соавторстве с В.А. Владимировым, Ю.Л. Воробьевым, Г.Г. Малинецким и др.) и «Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды» [Изд.3/ Синергетика: от прошлого к будущему. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 280 с.] (в соавторстве с Г.Г. Малинецким и А.Б. Потаповым). Опубликовал 60 научных статей по направлениям, указанным выше, а также по демографии, математической истории и вопросам развития системы образования.

125047 Москва, Миусская пл., 4
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
E-mail: Tiger@Keldysh.ru



ОБРАТНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ БИФУРКАЦИИ В СИСТЕМЕ ЭНО

И.А. Башкирцева, Л.Б. Ряшко, С.П. Федотов, И.Н. Цветков

В работе рассматриваются стохастически возмущенные предельные циклы дискретных динамических систем в зоне удвоения периода. Исследуется явление обратных стохастических бифуркаций – уменьшение кратности цикла при увеличении интенсивности шума. Предлагается метод анализа обратных стохастических бифуркаций на основе техники функции стохастической чувствительности. Конструктивные возможности данного метода демонстрируются на примере двумерного отображения Эно.

Ключевые слова: Бифуркации, дискретные стохастические системы, модель Эно, стохастическая чувствительность.

Введение

Функционирование большинства реальных систем сопровождается воздействием неконтролируемых случайных возмущений. Присутствие даже малых случайных возмущений может привести к существенным изменениям в динамике системы [1–4]. Известен широкий круг явлений, связанных с воздействием случайных помех: стохастический резонанс [5, 6], индуцированные шумами переходы [2], порождаемый шумами порядок [7, 8] и хаос [9]. Хорошо известно, что фазовый портрет нелинейной системы может быть существенно изменен под воздействием шума [10–12]. Эффекты, связанные с присутствием шума, значительно усиливаются вблизи точек бифуркации. Благодаря высокой чувствительности аттракторов в зонах бифуркаций даже весьма малые шумы могут порождать качественные изменения динамики. Анализ стохастической чувствительности аттракторов нелинейных систем, находящихся под воздействием случайных возмущений, позволяет вести конструктивное исследование подобных изменений [13, 14].

В настоящее время исследования явлений, связанных с воздействием шумов, проводятся в рамках теории стохастических бифуркаций [15, 16]. Изучение перехода «равновесие – цикл» в динамических системах со случайными возмущениями привлекает внимание многих исследователей. Так, например, стохастические бифуркации Хопфа рассматривались в [17–20] для бруссельатора, в [21, 22] для осциллятора

Дуффинга–ван дер Поля, в [23] для осциллятора ван дер Поля, в [24, 25] для системы Хопфа. Анализ скейлинга для дискретных отображений с шумом при переходе к хаосу посвящены работы [26–29].

В данной работе исследуются стохастически возмущенные циклы нелинейной дискретной динамической системы в зоне удвоения периода.

Целью работы является анализ обратных стохастических бифуркаций многомерных дискретных систем на основе метода функций стохастической чувствительности (ФСЧ). Техника ФСЧ была введена ранее для стохастических циклов нелинейных систем с непрерывным временем в [13, 30–32] и для дискретных систем в [33]. Данная работа развивает подход к исследованию обратных стохастических бифуркаций, предложенный для непрерывных систем в работе [34] и для дискретных одномерных систем в [35].

В п. 1 приводится содержательное описание явления обратной стохастической бифуркации (ОСБ) и дается формальный критерий определения ОСБ по виду графика плотности вероятности распределения состояний стохастического цикла. Для построения плотности вероятности представлены два подхода – эмпирический подход и подход, опирающийся на аппарат функций стохастической чувствительности. Здесь дается общее описание последнего для стохастических k -циклов многомерных систем. В п.2 для стохастических циклов системы Эно плотность распределения вероятности случайных состояний определяется эмпирически в результате прямого компьютерного моделирования. Для аппроксимации плотности вероятности предлагается использовать аппарат функций стохастической чувствительности. Для стохастических циклов системы Эно дается оценка критических значений интенсивности возмущений, соответствующих обратным стохастическим бифуркациям.

1. Формализация явления обратной стохастической бифуркации и его анализ

Рассмотрим многомерную дискретную стохастическую систему

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon \sigma(x_t) \xi_t, \quad (1)$$

где $f(x)$ – достаточно гладкая функция, $\sigma(x)$ – $(n \times m)$ -матрица, ξ_t – m -мерный некоррелированный случайный процесс с параметрами

$$E \xi_t = 0, \quad E \xi_t \xi_t^T = I, \quad E \xi_t \xi_k = 0 \quad (t \neq k),$$

где I – единичная $(m \times m)$ -матрица, ε – интенсивность шума.

Рассматриваем случай, когда детерминированная система (1) (при $\varepsilon = 0$) имеет k -цикл – множество точек $\Gamma = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$, связанных соотношениями

$$f(\bar{x}_i) = \bar{x}_{i+1} \quad (i = 1, \dots, k-1), \quad f(\bar{x}_k) = \bar{x}_1.$$

Считаем, что последовательность \bar{x}_t определена при всех t с условием периодичности $\bar{x}_{t+k} = \bar{x}_t$. Предполагается, что цикл Γ является экспоненциально устойчивым [36].

Присутствие в системе (1) случайных возмущений приводит к тому, что фазовая траектория покидает детерминированный предельный цикл Γ и формирует

вокруг его элементов множество случайных состояний. При малом значении интенсивности шума отклонения случайных состояний от Γ малы. С достаточно большой доверительной вероятностью области рассеивания, соответствующие различным точкам детерминированного цикла, не пересекаются. С ростом ε величина отклонений растет и становится сравнимой с расстоянием между соседними точками аттрактора. В результате соседние области рассеивания начинают пересекаться между собой. При дальнейшем увеличении ε после некоторого критического значения происходит полное слияние соседних областей. Например, при малых шумах вокруг двух состояний детерминированного 2-цикла наблюдаются две непересекающиеся области рассеивания (рис. 1, *a*, *b*). При увеличении шума эти области начнут пересекаться и при соответствующем уровне интенсивности возмущений сольются в одну – стохастический 2-цикл перейдет в стохастическое равновесие (рис. 1, *в*). Такое качественное изменение фазового портрета системы – уменьшение кратности стохастического цикла при увеличении интенсивности шума – будем называть *обратной стохастической бифуркацией*. После первой ОСБ при дальнейшем увеличении интенсивности шума для многократных стохастических циклов наблюдается серия *старших ОСБ* последовательного уменьшения кратности – вплоть до образования стохастического 1-цикла (равновесия).

Для детального анализа ОСБ в представляемой работе используем функцию плотности вероятности случайных состояний. Данная функция позволяет описывать важные детали слияния соседних областей рассеивания при увеличении шума. Пусть в детерминированном случае ($\varepsilon = 0$) система (1) имеет устойчивый предельный 2-цикл Γ . Тогда при малом значении ε график плотности $p(x, \varepsilon)$ имеет два узких пика (рис. 1, *з*). При увеличении ε ширина пиков растет, и начинается процесс их слияния (рис. 1, *д*). Форма графика при этом остается бимодальной, а общее количество точек локального максимума равно двум. При некотором значении ε происходит *P*-бифуркация [15] – форма графика плотности качественно изменяется и становится унимодальной (рис. 1, *е*). Соседние всплески сливаются в один, и остается только

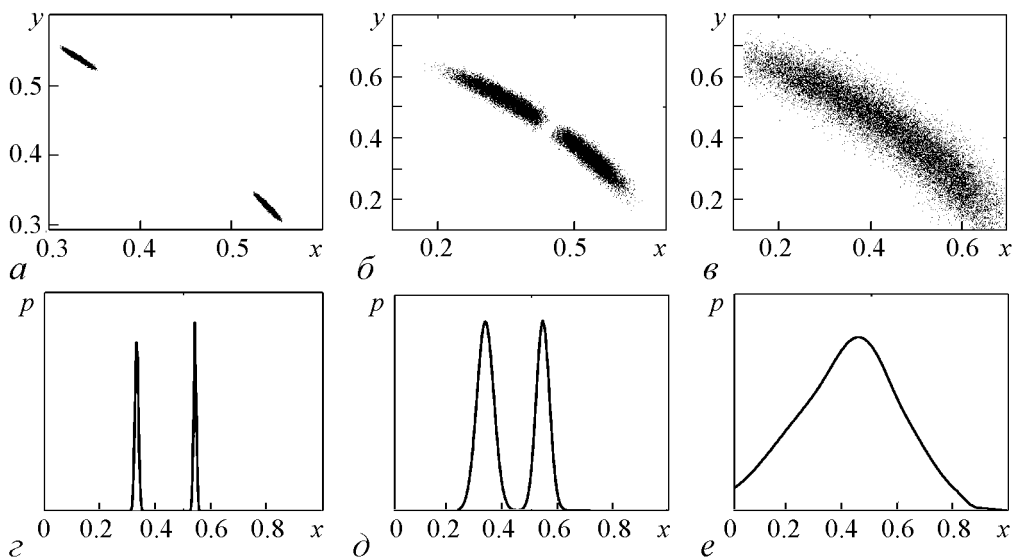


Рис. 1. Случайные состояния стохастической системы Эно при $\mu = 1.72$ для $\varepsilon = 0.001$ (*a*), 0.005 (*b*), 0.03 (*в*) и проекции плотности вероятности для $\varepsilon = 0.001$ (*з*), 0.005 (*д*), 0.03 (*е*)

одна точка локального экстремума. При дальнейшем увеличении ε наблюдается один четко выраженный пик. Такое качественное изменение формы графика плотности – переход стохастического 2-цикла в 1-цикл – описывает ОСБ. Бифуркационное значение интенсивности шума, при котором происходит качественное изменение графика плотности $p(x, \varepsilon)$ от бимодальной формы к унимодальной, будем называть *критическим значением шума* и обозначать ε^* . В случае, когда в детерминированной системе (1) наблюдается устойчивый 2^k -цикл, критическим значением первой ОСБ будем называть значение интенсивности шума, при которой график плотности $p(x, \varepsilon)$ переходит от 2^k -модальной формы к 2^{k-1} -модальной.

Таким образом, для анализа ОСБ необходимо знать плотности вероятности при различной интенсивности шума. Для построения плотности вероятности предлагается использовать два подхода: эмпирический и аналитический.

Эмпирический подход к изучению ОСБ опирается на численное моделирование случайной траектории процесса (1). В результате длительного итерационного процесса мы получаем статистический набор данных, по которому строится гистограмма. Для построения эмпирической статистики важным параметром является количество итераций. Значение данного параметра непосредственно влияет на затраты времени, расходуемого на численное моделирование. При малом количестве итераций гистограмма, аппроксимирующая плотность вероятности, содержит значительную шумовую составляющую. Данный факт существенно осложняет применение какого-либо формального критерия, позволяющего по экстремумам судить о качественных изменениях формы графика, сопровождающего ОСБ. Сглаживание графика $p(x, \varepsilon)$ может быть достигнуто либо за счет значительного увеличения времени эмпирического моделирования, либо за счет применения специальной процедуры сглаживания.

Предлагаемый в работе аналитический подход опирается на построение аппроксимации плотности вероятности с помощью аппарата функций стохастической чувствительности.

1.1. Аппарат функции стохастической чувствительности. Рассматриваем случай, когда детерминированная система (1) при $\varepsilon = 0$ имеет k -цикл Γ . Рассмотрим решение x_t^ε стохастической системы (1) с начальным условием $x_1^\varepsilon = \bar{x}_1 + \varepsilon \xi$. При малых ε чувствительность детерминированного решения \bar{x}_t к случайным возмущениям определяется величиной

$$v_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_t^\varepsilon - \bar{x}_t}{\varepsilon} .$$

Для v_t справедлива система

$$v_{t+1} = F_t v_t + S_t \xi_t, \quad S_t = \sigma(\bar{x}_t), \quad (2)$$

где $F_t = \partial f(\bar{x}_t) / \partial x$. Стохастическая динамика последовательности v_t определяется изменением первых двух моментов $m_t = E v_t$, $V_t = E v_t v_t^\top$. Для m_t и V_t справедливы следующие уравнения

$$m_{t+1} = F_t m_t, \quad (3)$$

$$V_{t+1} = F_t V_t F_t^\top + Q_t, \quad Q_t = S_t S_t^\top. \quad (4)$$

с начальными условиями $m_1 = E\xi$, $V_1 = E\xi\xi^\top$. Благодаря k -периодичности коэффициентов F_t и Q_t из (3), (4) следует

$$m_{(l+1)k+1} = Bm_{lk+1}, \quad (5)$$

$$V_{(l+1)k+1} = BV_{lk+1}B^\top + Q, \quad (6)$$

где

$$B = F_k \cdot \dots \cdot F_2 F_1, \quad Q = Q_k + F_k Q_{k-1} F_k^\top + \dots + F_k \cdot \dots \cdot F_2 Q_1 F_2^\top \cdot \dots \cdot F_k^\top.$$

В работе [33] показано, что в случае устойчивого k -цикла Γ детерминированной системы (1) последовательности m_t и V_t сходятся для любых начальных значений:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_t = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (V_t - W_t) = 0. \quad (7)$$

Здесь W_t – k -периодическая последовательность матриц ($W_{t+k} = W_t$), которая может быть найдена следующим образом. Матрица W_1 – единственное решение уравнения

$$W = BWB^\top + Q, \quad (8)$$

а W_2, W_3, \dots, W_k находятся рекуррентно

$$W_{t+1} = F_t W_t F_t^\top + Q_t, \quad t = 1, \dots, k-1. \quad (9)$$

Матричную k -периодическую функцию W_t , значения которой W_1, \dots, W_k характеризуют реакцию точек $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ цикла Γ системы (1) на малые случайные воздействия, будем называть *функцией стохастической чувствительности цикла*.

Используя функцию стохастической чувствительности в случае гауссовых шумов ξ_t , построим аппроксимацию плотности вероятности распределения случайных состояний стохастического k -цикла.

Случайные состояния x_t^ε нелинейной системы (1) при малых ε можно аппроксимировать суммой

$$x_t^\varepsilon \approx x_t + z_t, \quad (10)$$

где x_t, z_t – решения системы стохастического линейного расширения

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad x_t \in \Gamma, \quad (11)$$

$$z_{t+1} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_t) z_t + \varepsilon \sigma(x_t) \xi_t. \quad (12)$$

В силу линейности уравнения (12) и гауссовости шума ξ_t , решение z_t уравнения (12) также является гауссовым процессом.

При начальном условии $A_i = \{x_1 = \bar{x}_i\}$, связанном с произвольной фиксированной точкой \bar{x}_i устойчивого детерминированного цикла, компонента $z_{t,i}$ решения системы (11), (12), независимо от распределения начального состояния z_1 , сходится к некоторому гауссову процессу $\bar{z}_{t,i}$. Этот установившийся процесс имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием $E\bar{z}_{t,i} = 0$ и периодической ковариационной матрицей, связанной с функцией стохастической чувствительности соотношением $\text{cov}(\bar{z}_{t,i}, \bar{z}_{t,i}) = \varepsilon^2 W_{t+i-1}$.

При условии A_i для случайного состояния \bar{x}_t^ε стохастического цикла нелинейной системы (1) в силу (10) справедлива аппроксимация

$$\bar{x}_t^\varepsilon \approx \bar{x}_{t+i-1} + \bar{z}_{t,i},$$

где правая часть – нормально распределенный вектор с математическим ожиданием \bar{x}_{t+i-1} и ковариационной матрицей $\varepsilon^2 W_{t+i-1}$. Соответствующая условная плотность распределения имеет вид

$$p(x/A_i) = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{(2\pi)^n \det W_{t+i-1}}} \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} (x - \bar{x}_{t+i-1})^\top W_{t+i-1}^{-1} (x - \bar{x}_{t+i-1})\right).$$

Считая события A_i равновероятными ($p(A_i) = 1/k$), по формуле полной вероятности имеем $p(x) = 1/k \sum_{i=1}^k p(x/A_i)$. В силу k -периодичности функции стохастической чувствительности W_t и \bar{x}_t , получаем окончательную формулу

$$p(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\varepsilon \sqrt{(2\pi)^n \det W_i}} \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} (x - \bar{x}_i)^\top W_i^{-1} (x - \bar{x}_i)\right). \quad (13)$$

Как видим, функция $p(x)$ однозначно определяется состояниями \bar{x}_t цикла невозмущенной детерминированной системы и набором матриц W_t – значений функции стохастической чувствительности. Конструктивный алгоритм расчета функции стохастической чувствительности представлен в (8), (9).

Точность аппроксимации стационарной плотности распределения (13) зависит от того, насколько сумма $\bar{x}_t + \bar{z}_t$, формируемая стохастическим линейным расширением (11), (12) близка к состоянию \bar{x}_t^ε нелинейной системы (1). Чем меньше интенсивность шума, тем, естественно, выше точность. При увеличении ε усиливающиеся нелинейные эффекты могут сопровождаться ростом погрешности.

Практические возможности использования аппроксимации (13) в исследовании обратных стохастических бифуркаций проиллюстрируем на примере системы Эно.

2. Анализ обратных стохастических бифуркаций циклов системы Эно

Рассмотрим стохастическую систему Эно

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1 - \mu x_t^2 - 0.5y_t + \varepsilon \xi_{1,t}, \\ y_{t+1} &= x_t + \varepsilon \xi_{2,t}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\xi_{1,t}$, $\xi_{2,t}$ – последовательности независимых гауссовых случайных величин, $E\xi_{1,t} = E\xi_{2,t} = 0$; $E\xi_{1,t}^2 = E\xi_{2,t}^2 = 1$; $E\xi_{1,t}\xi_{2,t} = 0$; ε – интенсивность шумов.

При отсутствии случайных возмущений ($\varepsilon = 0$) детерминированная модель Эно (14) имеет на интервале $1.6 \leq \mu \leq 2.5$ различные типы динамики с чередующимися зонами порядка и хаоса. На интервале, где наблюдаются бифуркации удвоения периода, можно выделить зоны структурной устойчивости – интервалы I_0, I_1, \dots – с постоянной кратностью циклов, разделенные точками бифуркаций. На интервале I_n наблюдаются 2^n -циклы. Для детерминированной системы (14) имеем следующие интервалы структурной устойчивости: $I_0 \approx (1.6, 1.68)$, $I_1 \approx (1.68, 2.31)$,

$I_2 \approx (2.31, 2.41)$ и т.д. При этом на I_0 имеем одну точку покоя $\bar{x}_{0,1}(\mu) = \bar{y}_{0,1}(\mu) = (\sqrt{9 + 16\mu} - 3)/(4\mu)$, на I_1 имеем 2-цикл с состояниями

$$\bar{x}_{1,1}(\mu) = \frac{3 + \sqrt{16\mu - 27}}{4\mu},$$

$$\bar{y}_{1,1}(\mu) = \frac{3 - \sqrt{16\mu - 27}}{4\mu},$$

$$\bar{x}_{1,2}(\mu) = \bar{y}_{1,1}(\mu),$$

$$\bar{y}_{1,2}(\mu) = \bar{x}_{1,1}(\mu).$$

Для 2-цикла системы Эно ($\mu = 1.72$) изменение эмпирической плотности вероятности, полученной прямым численным моделированием, в зависимости от интенсивности добавленного возмущения представлено на рис. 2 (серый цвет). Переход от бимодальной к унимодальной форме графика плотности происходит при $\varepsilon^* \approx 0.018$. В связи с большими затратами времени на численное моделирование цикла и сглаживание графика эмпирической плотности вероятности получена только грубая оценка критического значения.

Перейдем к теоретическому анализу ОСБ, позволяющему избежать больших затрат времени, связанных с численным моделированием. Для 2-цикла ($\mu = 1.72$) на рис. 2 приведены графики плотности p , полученные из теоретической аппроксимации (13) с использованием ФСЧ. Как видно из рис. 2, теоретическая аппроксимация плотности вероятности (черный цвет) хорошо соответствует эмпирическим данным. При $\varepsilon = 0.001$ теоретическая кривая практически совпадает с эмпирической. При увеличении ε наблюдается некоторое количественное расхождение, вызванное нелинейностью. Однако качественное соответствие – наличие бимодальной формы – сохраняется.

При изменении значений ε в интервале (0.001; 0.03) количество локальных максимумов изменяется, и график плотности преобразуется соответственно от бимодальной к унимодальной форме. Таким образом, критическое значение первой ОСБ перехода 2-цикла в 1-цикл принадлежит интервалу (0.001; 0.03). Более точно, $\varepsilon^* = 0.0176$. Для определения модальности графика теоретической аппроксимации

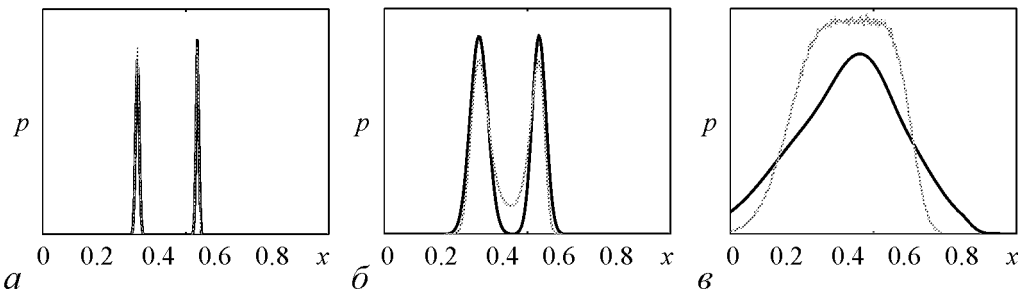


Рис. 2. Проекция плотности вероятности циклов системы Эно: эмпирическое построение (серый цвет), теоретическая аппроксимация (черный цвет) для $\mu = 1.72$ при $\varepsilon = 0.001$ (а), 0.01 (б), 0.03 (в)

плотности вероятности использовался следующий алгоритм: из каждой точки детерминированного аттрактора по методу «наискорейшего спуска» находились ближайшие локальные максимумы и далее по количеству различных локальных максимумов определялась модальность графика.

Для 4-цикла ($\mu = 2.32$) с помощью аппроксимации (13) получена оценка критического значения интенсивности шума $\varepsilon^* = 0.0026$. Переход от четырехмодальной формы плотности к бимодальной для данного значения параметра представлен на рис. 3.

Величина ε^* критической интенсивности шума, отвечающая первой ОСБ перехода от 2-цикла к 1-циклу, зависит от параметра μ . Графики функции $\varepsilon^*(\mu)$, полученные эмпирическим моделированием (серый цвет) и найденные с помощью ФСЧ (черный цвет) представлены на рис. 4. Как видим, метод, основанный на аппроксимации (13) с использованием ФСЧ, позволяет достаточно точно найти бифуркационные значения, отвечающие первой ОСБ.

Проследим изменение бифуркационного значения интенсивности при смене интервалов структурной устойчивости. На рис. 5 представлен график поведения критического значения интенсивности шума первой ОСБ $\varepsilon^*(\mu)$ на интервалах $I_1 \cup I_2$. Как видно из данного рисунка, график $\varepsilon^*(\mu)$ демонстрирует самоподобие на интервалах I_k . На каждом из этих интервалов функция $\varepsilon^*(\mu)$ сначала возрастает, а затем стабилизируется.

Точность полученных теоретических оценок первой ОСБ при приближении к левым концам интервалов I_1 и I_2 увеличивается. Это объясняется тем, что соседние точки циклов в этих зонах близки друг к другу и ОСБ происходит уже при малых шумах, для которых аппроксимация (13) имеет достаточно высокую точность.

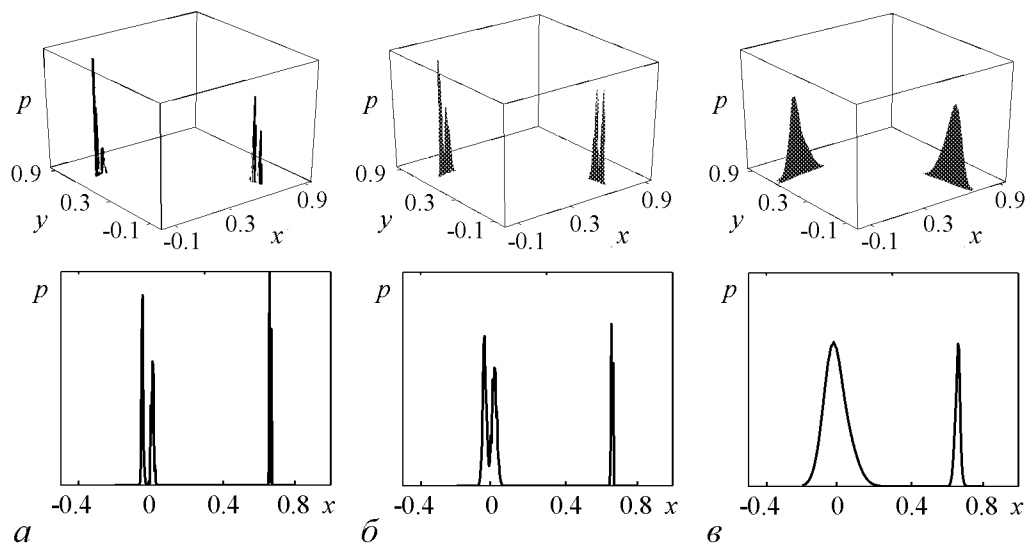


Рис. 3. Теоретическая плотность вероятности циклов системы Эно для $\mu = 2.32$ при $\varepsilon = 0.0005$ (а), 0.001 (б), 0.005 (в)

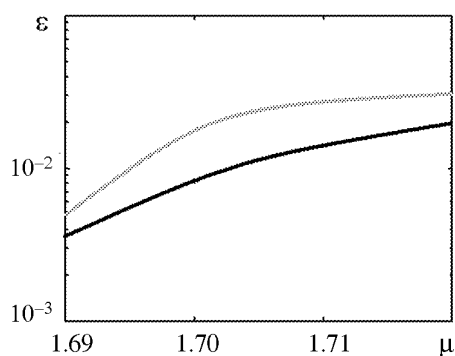


Рис. 4. Диаграмма первой ОСБ системы Эно: эмпирическая оценка (серый цвет), теоретическая оценка (черный цвет)

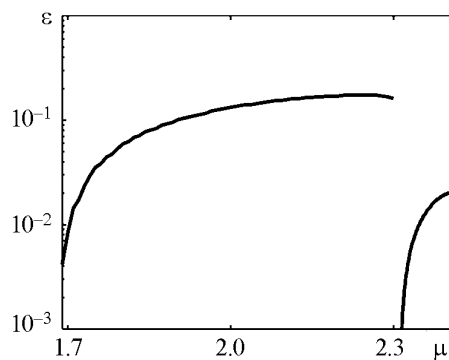


Рис. 5. Диаграмма теоретической оценки первой ОСБ системы Эно

Заключение

В данной статье рассмотрены обратные стохастические бифуркации циклов многомерных дискретных систем, находящихся под воздействием случайных возмущений. Предложен формальный критерий обратной стохастической бифуркации, связанный с качественным изменением графика плотности вероятности стохастического цикла. Для отыскания данной плотности вероятности рассмотрен эмпирический и теоретический подход. Теоретический анализ использует аппарат функций стохастической чувствительности. Для двумерного отображения Эно представлено сравнение результатов теоретического и эмпирического анализа обратных стохастических бифуркаций. Показано, что результаты, полученные с использованием аппарата функций стохастической чувствительности, хорошо соответствуют эмпирическому моделированию и не требуют огромных вычислительных затрат.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ NN 09-01-00026, 09-08-00048, 10-01-96022урал, Федерального агентства по образованию N 2.1.1/9498, ФЦП 02.740.11.0202.

Библиографический список

1. *Stratonovich R.L.* Topics in the Theory of Random Noise. New York: Gordon and Breach, 1963.
2. *Horsthemke W., Lefever R.* Noise-Induced Transitions. Berlin: Springer, 1984.
3. *Landa P.S., McClintock P.V.E.* Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise // *Physics Reports*. 2000. Vol. 323, № 1. P. 1.
4. *Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L.* Effects of noise in excitable systems // *Physics Reports*. 2004. Vol. 392. P. 321.
5. *Gammaitoni L., et al.* Stochastic resonance // *Rev. Mod. Phys.* 1998. Vol. 70. P. 223.
6. *McDonnell M.D., Stocks N.G., Pearce C.E.M., Abbott D.* Stochastic resonance: From Suprathreshold Stochastic Resonance to Stochastic Signal Quantization. Cambridge University Press, 2008.

7. *Matsumoto K., Tsuda I.* Noise-induced order // *J. Stat. Phys.* 1983. Vol. 33. P. 757.
8. *Gassmann F.* Noise-induced chaos-order transitions // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55. P. 2215.
9. *Gao J.B., Hwang S.K., Liu J.M.* When can noise induce chaos? // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 82. P. 1132.
10. *Mayer-Kress G., Haken H.* The influence of noise on the logistic model // *J. Stat. Phys.* 1981. Vol. 29. P.149.
11. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
12. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск: ИКИ, 2003.
13. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator // *Physica A.* 2000. Vol. 278. P. 126.
14. *Fedotov S., Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic dynamo model for subcritical transition // *Phys. Rev.E.* 2006. Vol. 73. P.066307.
15. *Arnold L.* Random Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1998.
16. *Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Стохастические бифуркации // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2009. Т. 17, № 5. С. 3.
17. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to external multiplicative noise // in *Fluctuations and Sensitivity in Equilibrium Systems* / Eds W. Horsthemke and D.K. Kondepudi. Berlin: Springer. 1984. P. 143.
18. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56. P. 1631.
19. *Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F.* Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // *Phys. Rev. A.* 1987. Vol. 36. P. 834.
20. *Arnold L., Bleckert G., Schenk-Hoppe K.* The stochastic Brusselator: Parametric noise destroys Hopf bifurcation // In *Stochastic Dynamics.* New-York: Springer. 1999. P. 71.
21. *Namachchivaya N.Sri.* Hopf bifurcation in the presence of both parametric and external stochastic excitations // *J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 110. P. 923.
22. *Schenk-Hoppe K.R.* Bifurcation scenarios of the noisy Duffing–van der Pol oscillator // *Nonlinear dynamics.* 1996. Vol. 11. P. 255.
23. *Leung H.K.* Stochastic Hopf bifurcation in a biased van der Pol model // *Physica A.* 1998. Vol. 254. P. 146.
24. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2009. Vol. 39. P. 72.
25. *Башкирцева И.А., Перевалова Т.В., Ряшко Л.Б.* Анализ индуцированных шумом бифуркаций в системе Хопфа // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2010. Т. 18, № 1. С. 37.
26. *Crutchfield J. P., Nauenberg M., Rudnick J.* Scaling for external noise at the onset of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 46, № 14. P. 933.

27. *Crutchfield J. P., Farmer J., Huberman B. A.* Fluctuation and simple chaotic dynamics // *Phys. Rep.* 1982. Vol. 92, № 2. P. 45.
28. *Кузнецов А.П., Канустина Ю.В.* Свойство скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2000. Т.8, № 6. С. 78.
29. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Седова Ю.В.* О свойствах скейлинга при воздействии шума в отображении окружности с числом вращения, заданным золотым средним // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2005. Т.13, № 5. С. 56.
30. *Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B.* Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // *Dynamic Systems and Applications.* 2002. Vol. 11. P. 293.
31. *Ryagin M., Ryashko L.* The analysis of the stochastically forced periodic attractors for Chua's circuit // *Int. J. Bifurcation Chaos.* 2004. Vol. 14. P. 3981.
32. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity and chaos control for the forced nonlinear oscillations // *Chaos, Solitons and Fractals,* 2005. Vol. 26. P. 1437.
33. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Tsvetkov I.* Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for the discrete dynamic systems // *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis.* 2010. Vol. 17. P. 501.
34. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Stikhin P.* Noise-induced backward bifurcations of stochastic 3D-cycles // *Fluctuation and Noise Letters.* 2010. Vol. 9, № 1. P. 89.
35. *Башикирцева И.А., Ряшко Л.Б., Федотов С.В., Цветков И.Н.* Обратные стохастические бифуркации циклов дискретных систем // *Нелинейная динамика.* 2010. Т. 6, № 4. С. 737.
36. *Elaydi S. N.* An Introduction to Difference Equations. Springer: Berlin, 1999.

*Уральский государственный
университет им. А.М. Горького
University of Manchester*

*Поступила в редакцию 14.07.2010
После доработки 29.03.2011*

BACKWARD STOCHASTIC BIFURCATIONS OF THE HÉNON MAP

I.A. Bashkirtseva, L.B. Ryashko, S.P. Fedotov, I.N. Tsvetkov

We study the stochastically forced limit cycles of discrete dynamical systems in a period-doubling bifurcation zone. A phenomenon of a decreasing of the stochastic cycle multiplicity with a noise intensity growth is investigated. We call it by a backward stochastic bifurcation. In this paper, for such a bifurcation analysis we suggest a stochastic sensitivity function technique. The constructive possibilities of this method are demonstrated for analysis of the two-dimensional Hénon model.

Keywords: Bifurcations, discrete stochastic systems, Hénon model, stochastic sensitivity.



Башкирцева Ирина Адольфовна – родилась в 1965 году. Окончила Уральский госуниверситет (1987). Кандидат физико-математических наук (1997), доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – асимптотический анализ и численное моделирование нелинейных стохастических систем.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет им. А.М. Горького
E-mail: irina.bashkirtseva@usu.ru



Ряшко Лев Борисович – родился в 1953 году. Окончил Уральский госуниверситет (1975). Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике и монографии «Стохастические аттракторы нелинейных динамических систем» (в соавторстве с И.А. Башкирцевой).

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет им. А.М. Горького
E-mail: lev.ryashko@usu.ru



Федотов Сергей Петрович – родился в 1960 году, окончил Уральский государственный университет. Доктор физико-математических наук (1993), профессор математики в университете Манчестера (Англия). Автор ряда научных работ и монографии «Reaction-Transport Systems Mesoscopic Foundations, Fronts, and Spatial Instabilities» (Series: Springer Series in Synergetics, 2010, with Vicenc Mendez, Werner Horsthemke).

School of Mathematics, University of Manchester
Oxford Road, Manchester, M13, 9PL, UK
E-mail: sergei.fedotov@manchester.ac.uk



Цветков Иван Николаевич – родился в 1983 году, окончил Уральский госуниверситет (2006), кандидат физико-математических наук (2010). Область научных интересов – анализ чувствительности стохастических дискретных систем.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет им. А.М. Горького
E-mail: itsvet@e1.ru



ИНДУЦИРОВАННАЯ ШУМОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ОСЦИЛЛЯТОРЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ ТРЕНИЕМ

А.А. Кочанов, Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко

В работе рассматривается возникновение неустойчивости состояния равновесия осциллятора при модуляции собственной частоты шумовым сигналом. Исследуется порог неустойчивости при различных характеристиках шума и свойства возникающих выше порога стохастических колебаний в случае нелинейной диссипации.

Ключевые слова: Параметрическая неустойчивость, параметрический шум, стохастическая бифуркация, стохастические колебания.

Введение

Случайные воздействия во многих случаях играют весьма существенную роль в поведении динамических систем [1–8]. Часто такие воздействия носят характер параметрического шума, то есть представляют собой флуктуации управляющих параметров системы. Параметрический (по-другому, мультипликативный) шум может оказывать более сильное влияние на динамический режим, чем аддитивный шум, добавляемый в систему в форме случайного слагаемого с постоянной интенсивностью. Параметрический шум наиболее существенным образом может влиять на происходящие при вариации параметров бифуркации, сдвигая бифуркационные значения параметров в ту или иную сторону, а в некоторых случаях приводя к новым бифуркационным переходам, не наблюдавшимся в детерминированной системе [3, 7, 9–13]. Простейшим примером может служить диссипативный осциллятор. В отсутствие воздействий он находится в состоянии равновесия, однако, случайная модуляция частоты благодаря непрерывной подкачке энергии при достаточной интенсивности шума приводит к возникновению незатухающих случайных колебаний [11, 13–18]. Возникновение колебаний связано с бифуркацией состояния равновесия в начале координат, которое при определенном уровне шума становится неустойчивым. Согласно [7], данная бифуркация представляет собой стохастическую бифуркацию D-типа. Возможна и обратная ситуация, когда параметрический шум стабилизирует точку

равновесия. Примером может служить маятник Капицы [17, 19]. С физической точки зрения, случайное изменение частоты во времени приводит к непрерывной подкачке энергии в систему и, следовательно, эффект шумовой параметрической неустойчивости аналогичен параметрической неустойчивости, возникающей при периодической модуляции частоты. Таким образом, можно выделить в отдельный класс нелинейные диссипативные системы, в которых параметрический шум вызывает и поддерживает незатухающие стохастические колебания. Если же воздействие отсутствует, то система находится в состоянии устойчивого равновесия. По аналогии с детерминированными параметрическими системами будем называть их стохастическими параметрическими осцилляторами, а возникающие в них колебания – стохастическими параметрическими колебаниями.

Индукцированная шумом параметрическая неустойчивость достаточно хорошо известна, однако некоторые имеющиеся в литературе выводы противоречат друг другу. Так, в [14] отмечается, что действие низкочастотной накачки как бы увеличивает собственные потери осциллятора и таким образом стабилизирует систему, в то время как высокочастотная накачка ее дестабилизирует. Там же делается вывод, что белый шум вообще не влияет на устойчивость состояния равновесия, поскольку влияние высокочастотных и низкочастотных компонент сигнала взаимно уравнивается. Последний вывод противоречит некоторым другим имеющимся в литературе результатам, например, приведенным в [11, 13]. На наш взгляд, в литературе отсутствует достаточно последовательное сравнение эффекта параметрической неустойчивости, наблюдаемого для различных по своим характеристикам источников шума. Недостаточно исследован вопрос о характере стохастических параметрических колебаний в нелинейном осцилляторе и об изменении свойств колебаний при фиксированном виде нелинейности и вариации шумового воздействия. Кроме того, вопрос о том, являются ли индуцированные параметрическим шумом колебания действительно особым типом параметрических колебаний или, возможно, обладают определенными свойствами автоколебательного режима, хотя и поднимался в литературе [11, 13], но все еще остается не до конца решенным.

В настоящей работе рассматриваются параметрические колебания при шумовой накачке частоты нелинейного осциллятора. Анализируется влияние статистических характеристик шума на порог возникновения колебаний. Исследуются свойства параметрических стохастических колебаний в нелинейном осцилляторе при выбранном виде нелинейности и различных типах сигнала шумовой модуляции. Показано принципиальное отличие индуцированных параметрическим шумом колебаний от автоколебательного режима.

1. Исследуемый осциллятор и модели шума

Нами исследован осциллятор с нелинейным трением, аналогичный рассмотренному в [13],

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \dot{x}^3 + \omega_0^2 [1 + K\xi(t)]x = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) записано для безразмерной переменной x и безразмерного времени t . Случайный сигнал $\xi(t)$ модулирует параметр, управляющий собственной частотой

системы, ω_0 – невозмущенная собственная частота (в проведенных исследованиях полагалось, что $\omega_0 = 1.0$), K задает глубину модуляции (интенсивность шумовой накачки), параметр γ определяет линейную диссипацию. В проведенных численных экспериментах фиксировались значения параметра диссипации $\gamma = 0.01$ и собственной частоты $\omega_0 = 1.0$. Параметр K и характеристики шума менялись.

При слабом шуме и сильной диссипации в системе (1) на плоскости переменных $(x, y = \dot{x})$ существует устойчивая неподвижная точка в начале координат $(0, 0)$ и стохастические колебания отсутствуют. С ростом интенсивности шумовой накачки состояние равновесия становится неустойчивым и возникают стохастические колебания. Для определения порога неустойчивости можно ограничиться рассмотрением линейного уравнения для малого возмущения $u(t)$ переменной x в окрестности нуля

$$\ddot{u} + \gamma\dot{u} + \omega_0^2[1 + K\xi(t)]u = 0. \quad (2)$$

Будем определять порог параметрической неустойчивости на основании линеаризованной системы (2), используя характеристики экспоненциальной неустойчивости траекторий в (2). Строго говоря, мы определяем устойчивость состояния равновесия в (1), рассчитывая старший показатель Ляпунова для некоторой достаточно длинной траектории линеаризованной системы (2). Таким образом, мы связываем порог параметрической неустойчивости со стохастической бифуркацией состояния равновесия D-типа [7].

Порог параметрической неустойчивости не зависит от конкретного вида нелинейности осциллятора (главное – наличие неподвижной точки в нуле координат), но может существенным образом зависеть от характера случайного сигнала $\xi(t)$. Что же касается свойств возникающих в результате шумовой параметрической накачки стохастических колебаний, то они определяются как характером шума, так и нелинейными свойствами осциллятора.

Нами использовались три модели случайного сигнала $\xi(t)$: белый гауссов шум; одномерный процесс Орнштейна–Уленбека; двумерный процесс Орнштейна–Уленбека.

В случае белого шума полагалось $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$, где $n(t)$ – нормированный гауссов белый шум ($\langle n(t) \rangle \equiv 0$; $\langle n(t)n(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$ – функция Дирака), D – константа, определяющая интенсивность шума $\xi(t)$.

Одномерный процесс Орнштейна–Уленбека задается уравнением

$$\dot{\xi}(t) + \alpha\xi(t) = \sqrt{2D}n(t), \quad (3)$$

где $n(t)$ – нормированный гауссов белый шум, $D = \text{const}$ – интенсивность шума, α – коэффициент диссипации. Он представляет собой гауссов экспоненциально-коррелированный процесс со спектральной плотностью мощности в форме лоренциана

$$G_{\xi}(\omega) = \frac{4\sigma_{\xi}^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \omega > 0.$$

Максимум спектральной плотности мощности располагается на нулевой частоте. Ширина спектра на уровне половинной мощности есть α (с учетом только неотрицательных частот), а дисперсия определяется как $\sigma_{\xi}^2 = D/\alpha$.

Двумерный процесс Орнштейна–Уленбека задается как

$$\ddot{\xi}(t) + \alpha \dot{\xi}(t) + \omega_1^2 \xi(t) = \sqrt{2D}n(t). \quad (4)$$

Здесь также $n(t)$ – нормированный гауссов белый шум, $D = \text{const}$ – интенсивность шума, α – коэффициент диссипации. Кроме того, имеется собственная частота ω_1 , определяющая положение спектрального максимума. При малых потерях ($\alpha \ll 1$) процесс $\xi(t)$ представляет собой гармонический гауссов шум с экспоненциально спадающей огибающей автокорреляционной функции и спектром, имеющим форму лоренциана с максимумом на частоте ω_1

$$G_{\xi}(\omega) = \frac{\sigma_{\xi}^2 \alpha}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_1)^2}, \quad \omega > 0.$$

Ширина спектра на уровне половинной мощности есть α , а дисперсия задается выражением $\sigma_{\xi}^2 = D/(\alpha\omega_1^2)$.

2. Накачка белым шумом

Рассмотрим случай $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$, $K = 1.0$, где $n(t)$ – нормированный гауссов белый шум. При фиксированном параметре γ с ростом интенсивности шума D происходит бифуркация, в результате которой равновесие в начале координат ($x = 0$, $y = 0$) теряет устойчивость и возникают стохастические колебания. Уравнения (1) и линеаризованное уравнение для возмущения интегрировались численно с учетом параметрического белого шума. Численно рассчитывался старший показатель Ляпунова λ_1 . На рис. 1 представлены зависимости показателя λ_1 от интенсивности шума D . Сплошной линией изображена зависимость показателя некоторой произвольно выбранной стохастической траектории (в силу эргодичности процесса выбор траектории не имеет существенного значения), а штриховая линия соответствует показателю точки равновесия в нуле, который определялся с помощью решения уравнения (2). Что же касается λ_1 для произвольной траектории, то он в пределах точности вычислений совпадает с показателем точки равновесия до тех пор, пока та устойчива (поскольку любая траектория спустя некоторое время попадает в эту точку). Затем для (1) показатель произвольной траектории становится отрицательным.

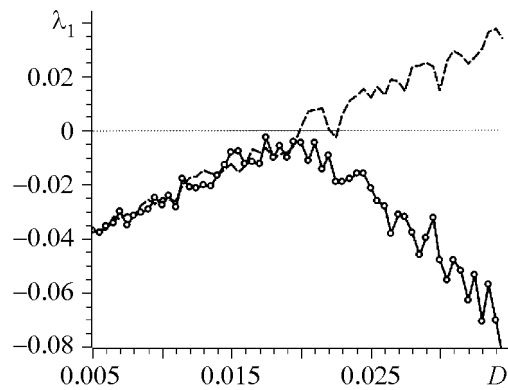


Рис. 1. Зависимости старшего показателя Ляпунова λ_1 от интенсивности гауссова белого шума D в осцилляторе (1) при $K = 1.0$. Сплошная линия соответствует показателю траектории, стартующей из некоторой произвольно выбранной начальной точки, отличной от начала координат, штриховая – показателю λ_1 точки равновесия $(0, 0)$

При другом виде нелинейности показатель λ_1 произвольной траектории может оказаться положительным и стохастические траектории, соответственно, экспоненциально неустойчивыми (как, например, в одноявном осцилляторе Дуффинга [20]).

Бифуркационное значение D может быть оценено теоретически с помощью укороченных уравнений для амплитуды и фазы осциллятора. В случае гауссова белого шума для линеаризованного осциллятора (2) стандартными методами усреднения и преобразования шума [1, 14] можно получить следующие стохастические дифференциальные уравнения для мгновенной амплитуды и флуктуационной компоненты фазы колебаний:

$$\dot{a} = \frac{a}{2} \left(-\gamma + \frac{D}{2} + \sqrt{D}n_1(t) \right), \quad \dot{\phi} = \frac{\sqrt{D}}{2}n_2(t), \quad (5)$$

где преобразованные источники шума $n_1(t)$ и $n_2(t)$ можно, в некотором приближении, считать независимыми белыми гауссовыми источниками ($\langle n_{1,2} \rangle \equiv 0$, $\langle n_1(t)n_2(t+\tau) \rangle = \delta_{1,2}\delta(\tau)$, $\delta(\tau)$ – функция Дирака, $\delta_{1,2}$ – символ Кронеккера). Из уравнения для амплитуды легко видеть, что решение $a = 0$ устойчиво при $D < 2\gamma$ и неустойчиво при $D > 2\gamma$. Значение $D = 2\gamma$ является бифуркационным. Для $\gamma = 0.01$, при котором проводились численные расчеты, бифуркационное значение есть $D = 0.02$, что хорошо соответствует результатам численных расчетов.

Примеры фазового портрета и спектра параметрических стохастических колебаний в осцилляторе (1) при накачке белым шумом приведены на рис. 2. Фазовые траектории заполняют область фазовой плоскости в окрестности нуля координат, хотя возможны и значительные отклонения от нуля, так как стохастические колебания при воздействии гауссова шума неограниченны (рис. 2, а). Спектр колебаний стохастического параметрического осциллятора (рис. 2, б) имеет максимум на частоте ω_0 . Он является сравнительно узким и по форме близок к лоренциану.

На множестве стохастических траекторий задана стационарная плотность вероятности $p(x, y)$. Аналитическое выражение для плотности вероятности можно найти, используя укороченные уравнения (5). Учитывая статистическую независимость амплитуды и фазы и определяя коэффициенты сноса и диффузии на основании вида стохастических уравнений, можно записать отдельно уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова для амплитуды и для фазы [1, 2, 14]. Найдя их стационарное решение

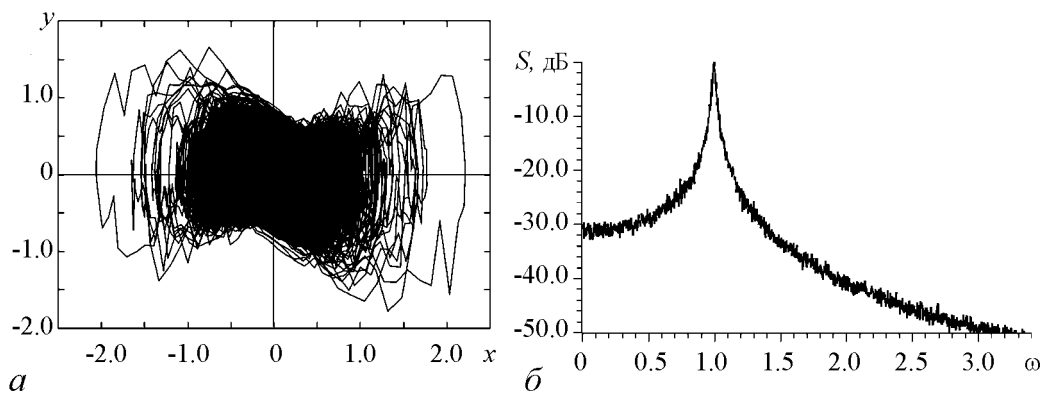


Рис. 2. Характеристики параметрических стохастических колебаний в осцилляторе (1) при накачке белым шумом: а – фазовый портрет; б – нормированный спектр мощности колебаний $x(t)$. Интенсивность шума $D = 0.03$ ($K = 1.0$). Нормированный спектр $S(\omega)$ вводится следующим образом: $S(\omega) = 10 \lg (G(\omega)/G_{\max})$, где G_{\max} – максимальное значение спектральной плотности мощности

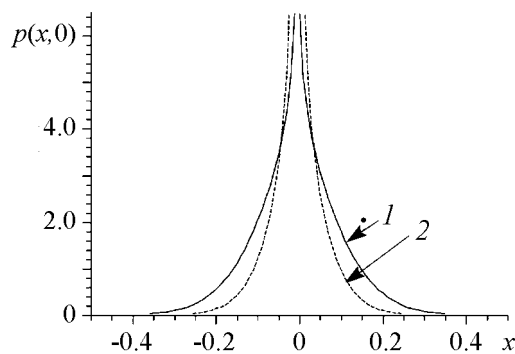


Рис. 3. Графики плотности вероятности $p(x, 0)$, рассчитанной по формуле (6) при $y = 0$ для $D = 0.03$ (кривая 1) и $D = 0.05$ (кривая 2)

и перейдя в декартову систему координат, получаем следующее выражение для стационарной плотности вероятности:

$$p(x, y) = C(x^2 + y^2)^{-\frac{2\gamma}{D}} e^{-\frac{3(x^2 + y^2)}{2D}}, \quad (6)$$

где константа C определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1.$$

Графики плотности вероятности для двух значений D представлены на рис. 3 (значения плотности вероятности на рисунке ограничены значением 6.5).

Поверхность, задаваемая выражением (6), обладает симметрией относительно поворота на произвольный угол. Это является следствием квазигармонического приближения. Реально, при больших отклонениях от начала координат симметрия может нарушаться. В силу достаточной сложности расчетов совместной плотности вероятности $p(x, y)$ двух переменных, в численных экспериментах рассчитывались плотности вероятности $p(x)$ и $p(y)$. Качественно их вид аналогичен графикам $p(x, 0)$, приведенным на рис. 3. Таким образом, и аналитические и численные результаты показывают, что плотность вероятности бесконечно возрастает с приближением к началу координат.

Множество стохастических траекторий с заданным стационарным распределением вероятности можно понимать как стохастический аттрактор, хотя существуют и другие подходы к определению аттрактора динамической системы с шумом [7, 20, 21].

3. Накачка низкочастотным шумом

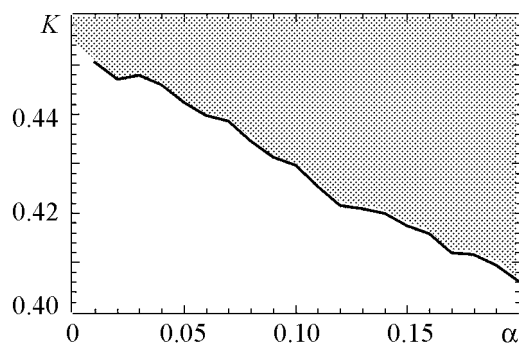


Рис. 4. Граница параметрической неустойчивости осциллятора с низкочастотной шумовой накачкой (3) для фиксированного значения дисперсии шума $\xi(t) = 1.0$. Затонированная область соответствует стохастическим колебаниям, белая область — устойчивой точке равновесия

Проведенные нами исследования показали, что накачка белым шумом приводит к возникновению параметрической неустойчивости и стохастических колебаний. Исследуем теперь случай накачки низкочастотным шумом, используя модель (3). Будем рассматривать шумовой сигнал $\xi(t)$ с единичной дисперсией (полагая $D = \alpha$) и менять параметр модуляции K и ширину спектра воздействия, определяемую параметром α . На рис. 4 приведена граница параметрической неустойчивости на плоскости параметров K, α , полученная с помощью вычисления старшего показателя Ляпунова точки равновесия. В затонированной области осцилля-

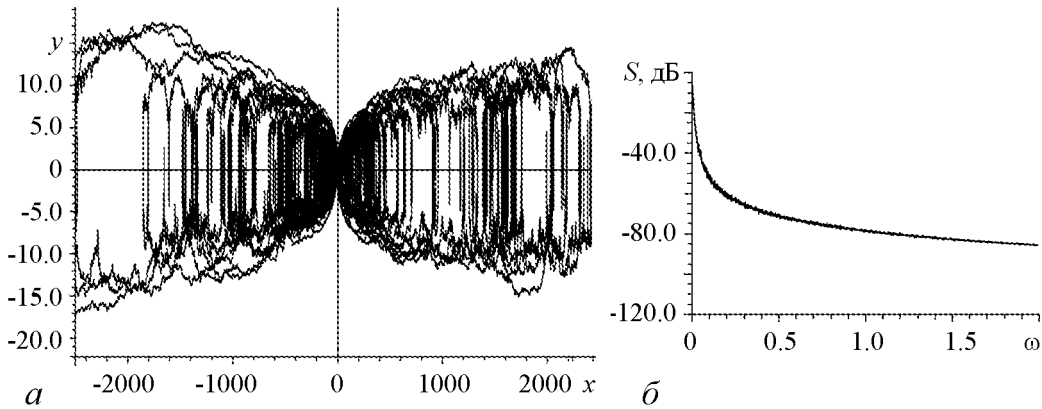


Рис. 5. Характеристики параметрических стохастических колебаний в осцилляторе (1) при накачке низкочастотным шумом (3): a – фазовый портрет; b – нормированный спектр мощности колебаний $x(t)$. Параметры шума: $\alpha = D = 0.01$, $K = 1.0$

тор совершает стохастические колебания. Ниже имеет место устойчивая точка равновесия. Можно отметить, что пороговое значение K относительно слабо меняется в пределах исследованного интервала значений α , слегка убывая с увеличением ширины спектра шума.

Рассмотрим основные характеристики стохастических колебаний нелинейного осциллятора (1), вызванных низкочастотной шумовой накачкой (3). Расчет старшего показателя Ляпунова для произвольной стохастической траектории, так же как и в случае белого шума, показывает устойчивость стохастических траекторий по Ляпунову во всей исследованной области стохастических колебаний. Типичный вид фазового портрета и спектра колебаний приведен на рис. 5. Характерной чертой колебаний в случае малых значений α (узкополосный шум) являются сравнительно частые значительные отклонения фазовой траектории от точки равновесия $(0, 0)$ вдоль координатной оси $0x$. Это хорошо заметно на фазовом портрете (рис. 5, a). Спектр колебаний $x(t)$ сосредоточен в низкочастотной области (рис. 5, b) и практически повторяет спектр шумовой накачки. Спектральный максимум на собственной частоте осциллятора $\omega_0 = 1.0$ отсутствует. Таким образом, колебания скорее носят характер вынужденных, чем параметрических колебаний.

4. Накачка гармоническим шумом

Случайный процесс (4) при условии $\alpha \ll \omega_1$ является узкополосным и может служить моделью гармонического гауссова шума. Как уже отмечалось, спектр шума имеет максимум на частоте ω_1 , а ширина спектральной линии на уровне половинной мощности равна параметру α . Гармонический шум по своим спектральным характеристикам близок к детерминированному гармоническому сигналу, поэтому эффект параметрической неустойчивости при соответствующем выборе характерной частоты шумового сигнала ω_1 может быть особенно заметен.

С помощью вычисления старшего показателя Ляпунова точки равновесия была рассчитана граница параметрической неустойчивости на плоскости параметров K , ω_1 при фиксированном значении ширины спектральной линии ($\alpha = 0.01$) и дисперсии шума $\sigma_\xi^2 = 1$ (соответственно, $D = \alpha\omega_1^2$). Результат представлен на рис.6.

Можно выделить два участка границы неустойчивости, имеющих форму языков (клювы Матье), при накачке на второй гармонике ($\omega_1 = 2\omega_0 = 2.0$) и на основной частоте ($\omega_1 = \omega_0 = 1.0$). Порог неустойчивости будет наименьшим при выпол-

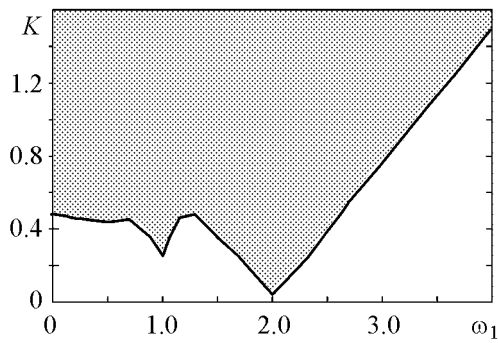


Рис. 6. Граница параметрической неустойчивости осциллятора при накачке гармоническим шумом (4) с шириной спектра $\alpha = 0.01$ и единичной дисперсией. Затонированная область соответствует стохастическим колебаниям, белая область – устойчивой точке равновесия

В области низких частот воздействия ($\omega_1 < 0.1$) процесс (4) уже нельзя считать гармоническим шумом, так как ширина спектра становится сравнимой с характерной частотой ω_1 или даже превосходит ее. При малых ω_1 граница параметрической неустойчивости, отмеченная на рис. 6, близка к значениям, полученным для низкочастотного шума (3).

Рассмотрим, что собой представляют стохастические колебания нелинейного осциллятора (1), возникающие при накачке шумом (4) с различной характерной частотой ω_1 . На рис. 6 приведены фазовые портреты и реализации колебаний $x(t)$,

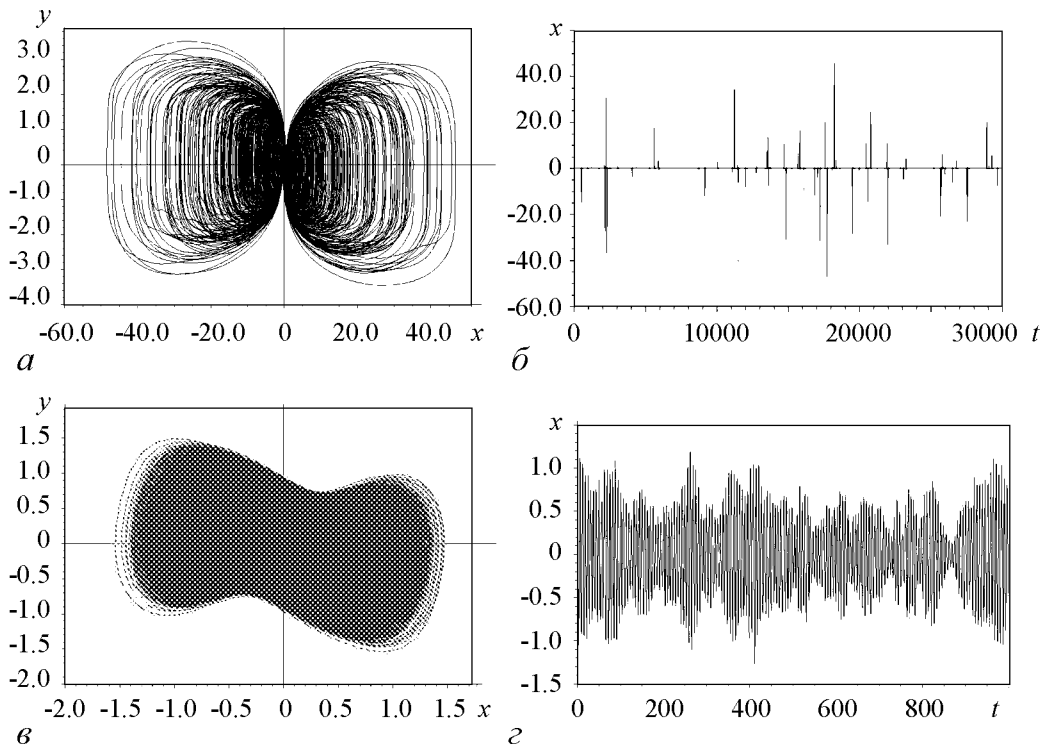


Рис. 7. Характеристики параметрических стохастических колебаний в осцилляторе (1) при накачке низкочастотным шумом (4): фазовый портрет и форма колебаний $x(t)$ при характерной частоте шума $\omega_1 = 0.1$ (а, б) и при $\omega_1 = 2.0$ (в, г). Другие параметры шума: $\alpha = 0.05$; $\sigma_\xi^2 = 1.0$; $K = 1.0$

типичные при воздействии шума на сравнительно низкой частоте $\omega_1 = 0.1$ и на второй гармонике собственной частоты $\omega_1 = 2.0$. При низкой характерной частоте шума (4), когда $\omega_1 \ll \omega_0$, поведение фазовых траекторий (и вид колебаний) качественно подобно наблюдаемому при воздействии шума (3). Траектория уходит далеко от точки равновесия (рис. 6, а), а реализация $x(t)$, кроме малых осцилляций (они не заметны в масштабе рис. 6, б), демонстрирует резкие всплески. При $\omega_1 = 2.0$ уходы траектории на далекое расстояние от точки $(0, 0)$ маловероятны и в численном эксперименте не наблюдаются (рис. 6, в), а реализация колебаний выглядит как реализация гармонического шума (рис. 6, з). Для всех исследованных случаев накачки шумом (4) траектории стохастических колебаний в нелинейном осцилляторе (1) экспоненциально устойчивы.

Вид спектра стохастических колебаний в нелинейном осцилляторе (1) качественным образом зависит от характерной частоты шума ω_1 . Примеры спектров, полученных при различных ω_1 , даны на рис. 8. При накачке гармоническим шумом на первой и второй гармониках собственной частоты в спектре можно видеть пики на частоте ω_0 и ее нечетных гармониках (например, кривая 2 на рисунке). Для субгармоник собственной частоты этот пик также может быть заметен, однако с уменьшением ω_1 он исчезает и спектр становится подобен спектру колебаний при накачке низкочастотным шумом (3) (кривая 1). При накачке на гармониках собственной частоты вид спектра усложняется. Кроме пика на частоте ω_0 и ее гармониках появляются и другие спектральные максимумы (кривая 3).

Численные расчеты показывают, что вероятностные распределения в случае стохастических колебаний, вызванных низкочастотным шумом (3) и цветным шумом (4) с низкой характерной частотой ω_1 , сходны между собой и имеют тот же характер, что и распределение (6), полученное для белого шума. Распределение, соответствующее воздействию гармонического шума с частотой $\omega_1 = 1.0$ или $\omega_1 = 2.0$, имеет другой характер. Оно значительно шире, и в нуле координат плотность вероятности конечна. В качестве примера на рис. 9 приведены соответствующие графики распределений $p(x)$, построенные численно для случаев воздействия низкочастотным шумом (3) (кривая 1) и гармоническим шумом (4) с $\omega_1 = 1.0$ (кривая 2).

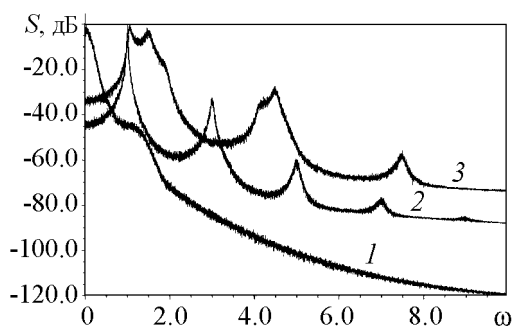


Рис. 8. Нормированные спектры колебаний $x(t)$ в нелинейном осцилляторе (1) при накачке шумом (4) с различными значениями характерной частоты ω_1 : 0.1 (кривая 1); 2.0 (кривая 2); 3.0 (кривая 3). Другие параметры шума: $\alpha = 0.05$; $\sigma_\xi^2 = 1.0$; $K = 1.0$

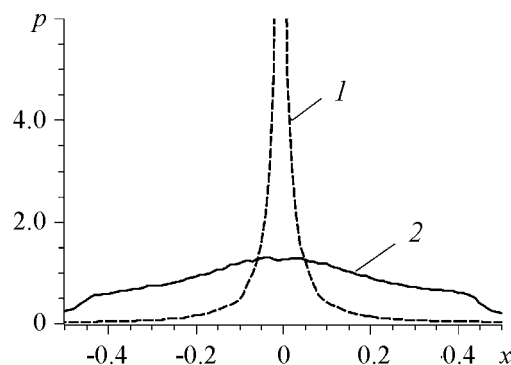


Рис. 9. Графики плотности вероятности $p(x)$, рассчитанные численно для случаев воздействия низкочастотным шумом (3) (кривая 1) и гармоническим шумом (4) при $\omega_1 = \omega_0$ (кривая 2). В обоих случаях дисперсия шума равна единице, $\alpha = 0.01$, $K = 1.0$

5. Внешнее гармоническое воздействие на параметрический стохастический осциллятор

Детерминированные параметрические колебания не являются автоколебательным режимом и не могут быть синхронизованы внешним воздействием. В случае стохастических колебаний, вызванных параметрическим шумом, аналогичное утверждение не является очевидным. Так, в [13] было сделано предположение, что нелинейные осцилляторы с шумовой параметрической накачкой за порогом неустойчивости могут рассматриваться как некий класс стохастических генераторов. Генераторы (автоколебательные системы) должны обладать свойством частичной (эффективной, согласно Р.Л. Стратоновичу [1]) синхронизуемости. Если нелинейные осцилляторы, возбуждаемые параметрическим шумом, таким свойством не обладают, то говорить о них как о генераторах было бы неправильно. В [20] для осциллятора Дуффинга с одноямым потенциалом было показано отсутствие какого-либо эффекта захвата характерной частоты стохастических колебаний при гармоническом внешнем воздействии. Определим, как ведет себя в этом отношении нелинейный осциллятор (1).

Рассмотрим аддитивное воздействие на стохастический осциллятор (1) внешнего гармонического сигнала. Для этого добавим в правую часть соответствующего уравнения слагаемое $C \sin(\omega_2 t)$, где C и ω_2 – амплитуда и частота внешнего воздействия, соответственно. Выберем такой режим стохастической накачки

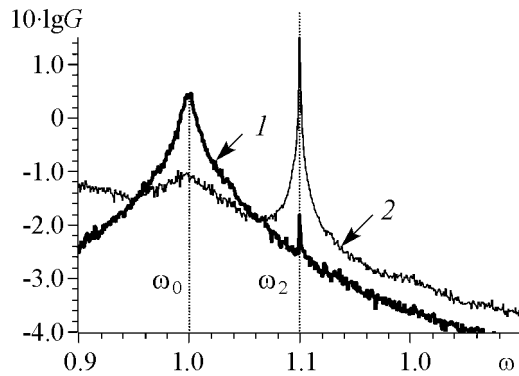


Рис. 10. Спектры мощности колебаний $x(t)$ стохастического осциллятора (1) при аддитивном гармоническом воздействии на частоте ω_2 . Кривая 1 соответствует амплитуде воздействия $C = 0.001$, а кривая 2 – амплитуде $C = 0.05$. Накачка осуществляется гармоническим шумом (4) на второй гармонике собственной частоты осцилляторов. Дисперсия шума равна единице, параметр α равен 0.05. Для удобства сравнения спектральная плотность мощности колебаний $G(\omega)$ здесь не нормировалась на максимальное значение

осцилляторов, который соответствует достаточно четкому спектральному пику на собственной частоте осциллятора ω_0 . Для осциллятора (1) такой пик наблюдается, например, при накачке гармоническим шумом (4) на второй гармонике собственной частоты. Частоту гармонического воздействия ω_2 выберем близкой к собственной частоте ω_0 . Численные эксперименты в выбранном режиме накачки, а также и для других сигналов накачки (например, при накачке осциллятора (1) белым шумом) показали, что эффект захвата частоты стохастических колебаний отсутствует. При увеличении амплитуды воздействия не наблюдается смещение спектрального максимума, соответствующего основной частоте стохастических колебаний. Полученные результаты проиллюстрированы спектрами мощности колебаний $x(t)$, представленными на рис. 10.

Выводы

Проведенные исследования показывают, что различные по своим характеристикам случайные сигналы, модулирующие собственную частоту осциллятора, при определенной амплитуде модуляции приводят к неустойчивости состояния равновесия и возникновению стохастических колебаний. Порог неустойчивости связан со стохастической D-бифуркацией точки равновесия и может быть определен на основе линейного приближения. Вызванные параметрическим шумом стохастические колебания могут рассматриваться как особый класс стохастических колебаний – параметрические стохастические колебания. Характеристики параметрических стохастических колебаний существенным образом зависят от характеристик случайного модулирующего сигнала. Прежде всего, можно указать на различия в спектрах стохастических колебаний. В случае модуляции белым шумом в спектре колебаний выделяется линия с максимумом на собственной частоте осциллятора. При модуляции цветным шумом, с базовой частотой, равной собственной частоте осциллятора или ее второй гармонике, в спектре колебаний также наблюдается достаточно узкая линия на собственной частоте и, кроме того, линии на гармониках. При низкочастотном воздействии спектр колебаний также сосредоточен в области низких частот, а максимум на собственной частоте отсутствует. Высокочастотное воздействие приводит к более сложной форме спектра. Максимум на собственной частоте имеется, но становится менее выраженным. Различаются также и форма колебаний, поведение фазовых траекторий и вид вероятностного распределения.

Стохастическим параметрическим колебаниям присущи некоторые свойства «обычных» параметрических колебаний. Так, при модуляции гармоническим шумом на плоскости параметров можно наблюдать характерные области неустойчивости, подобные областям Матье. Наименьший порог неустойчивости соответствует накачке шумом, имеющим спектральный максимум на второй гармонике собственной частоты осциллятора. Тот факт, что возникающие при шумовой накачке стохастические колебания носят характер параметрических колебаний и не могут рассматриваться как особый случай стохастической автогенерации, подтверждается отсутствием эффекта частотного захвата при воздействии на стохастический осциллятор внешней гармонической силы.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (гос. контракт №14.740.11.0074).

Библиографический список

1. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
2. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
3. Хорстнемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
4. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.

5. *Risken Z.* The Fokker-Planck Equation. Berlin, Springer, 1989.
6. *Ван Кампен Н.Г.* Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990.
7. *Arnold L.* Random dynamical systems. Berlin, Spriger, 2003.
8. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва;Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
9. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56. P. 1631.
10. *Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F.* Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // *Phys. Rev. F.* 1987. Vol. 36. P. 834.
11. *Landa P.S., Zaikin A.A.* Noise-induced phase transitions in a pendulum with a randomly vibrating suspension axis // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 4. P. 3535.
12. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances // *Chaos, Solitons, and Fractals.* 2009. Vol. 39. P. 7.
13. *Ланда П.С.* Возбуждение хаотических и стохастических колебаний в различных системах // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2009. Т. 18, № 1. С. 1.
14. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.
15. *Bobryk R.V., Chrzyszczuk A.* Colored noise induced parametric resonance // *Physica A.* 2002. Vol. 316. P. 225.
16. *Gitterman M.* The noisy oscillator: the first hundred years, from Einstein until now. Singapore: World Scientific, 2005.
17. *Aumaitre S., Mallick K., Francois P.* Noise-induced bifurcations, multiscaling and on-off intermittency // *J. of Stat. Mech.* 2007, № 7. P07016.
18. *Сироткин О.Л.* Особенности моментных функций осциллятора с параметрической нестабильностью, обусловленной дихотомическим шумом с эрланговскими функциями распределения // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2009. Т. 52, № 11. С. 921.
19. *Катица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* 1951. Т. 21, № 5. С. 588.
20. *Anishchenko V., Vadivasova T., Strelkova G.* Stochastic self-sustained oscillations of non-autonomous system // *The European Physical Journal.* 2010. Special Topics 187. P. 109. Springer-Verlag, 2010.
21. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Автоколебания динамических и стохастических систем и их математический образ – аттрактор// *Нелинейная динамика.* 2010. Т. 6, № 2. С. 1.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского
ОАО «НИИ-Тантал», Саратов*

Поступила в редакцию 2.12.2010

NOISE INDUCED PARAMETRIC INSTABILITY AND STOCHASTIC OSCILLATIONS IN THE OSCILLATOR WITH NONLINEAR DISSIPATION

A.A. Kochanov, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko

The appearance of the instability of oscillator equilibrium state in a case of noisy modulation of the natural frequency is considered in the work. The threshold of instability and the properties of stochastic oscillations arising over the threshold are studied for the different noise characteristics.

Keywords: Parametric instability, parametric noise, stochastic bifurcation, stochastic oscillations.



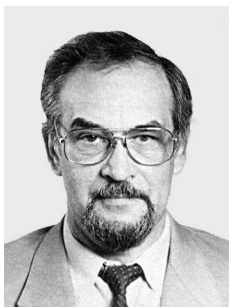
Кочанов Александр Александрович – родился 25 августа 1988 года в Саратове. В 2010 году окончил физический факультет Саратовского государственного университета (кафедра радиофизики и нелинейной динамики). В настоящее время работает инженером-технологом ОАО «НИИ-Тантал». Область научных интересов – нелинейная динамика, исследование влияния шума на динамические системы.

410040 Саратов, просп. 50 лет Октября, 110а
ОАО «НИИ-Тантал»
E-mail: kochanovaleksandr@mail.ru



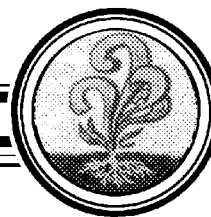
Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: vadivasovate@yandex.ru



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: wadim@info.sgu.ru



АНАЛИТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ВЛИЯНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА ФЛУКТУАЦИИ СКОРОСТЕЙ БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ

П.С. Ланда, В.А. Власов

Проводится аналитический расчет плотности вероятности для скорости движения броуновской частицы с учетом слабого воздействия на нее внешней силы, вызванной потоком космических частиц. Показано, что учет этого зависящего от времени воздействия приводит к тому, что распределение вероятности становится существенно нестационарным и представляет собой сумму компонент, обусловленных различными астрономическими факторами: вращением Земли вокруг собственной оси и Солнца, движением Солнца и звезд и т.п. Показано также, что результатом рассмотренного воздействия является модуляция гауссова распределения, имеющего место для свободной броуновской частицы, и его асимметрия по отношению к направлению скорости частицы. Наши расчеты показывают, что форма модуляции для разных компонент распределения вероятностей получается различной.

Ключевые слова: Распределения вероятностей, гауссово распределение, уравнение Фоккера–Планка, гравитационные силы.

Введение

В ряде работ С.Э. Шноля с соавторами (см., например, библиографический список в книге [1]) было показано, что вследствие «разброса результатов», сопровождающего измерения процессов различной природы, наблюдаются закономерные изменения тонкой структуры распределений плотностей вероятностей для скорости изменения измеряемых величин. Под «тонкой структурой» авторы понимают характерные формы отклонений указанных распределений вероятностей от тех, которые присущи самой исследуемой системе. Например, для броуновского движения – это отклонения от гауссова распределения. Эти распределения представлены авторами в виде последовательности гистограмм, вычисленных на основе относительно коротких выборок из экспериментально полученных временных рядов. Каждая выборка содержит сравнительно небольшое число точек (обычно 30–60). Различные

выборки сдвинуты друг относительно друга по времени. Кроме того, соответствующие выборки могут быть сделаны в различных пунктах наблюдения. Такой способ обработки результатов измерений вызван нестационарностью наблюдаемых процессов. В принципе, при расчете вероятностей нестационарных процессов, для которых отсутствует свойство эргодичности, усреднение следует проводить не по времени, а по статистическому ансамблю. Однако часто, например, при решении задач медицинской диагностики, такой ансамбль отсутствует. Можно измерить большое количество электрокардиограмм, электроэнцефалограмм или стабิโลграмм, но они не образуют статистического ансамбля. Поэтому приходится проводить усреднение по достаточно короткому интервалу времени. Так часто поступают при вычислениях фрактальных размерностей таких нестационарных процессов, не оценивая даже характерное время нестационарности. По-видимому, именно этим можно объяснить очень большой разброс опубликованных результатов.

Однако указанный способ позволяет, хотя и с некоторыми ошибками, измерять вероятности для нестационарных процессов. Авторами упомянутых выше работ было обнаружено, что форма полученных гистограмм изменяется с периодами, равными «звездным» и «солнечным» суткам, а также году и приблизительно 27 суткам. Форма гистограмм, получаемых при одновременных измерениях процессов любой природы в данном географическом пункте с высокой вероятностью сходна. В разных географических пунктах сходная форма гистограмм, при исследовании процессов разной природы, наблюдалась в одно и то же местное время. О суточной периодичности формы гистограмм можно судить из рис. 1, где на примере излучения α -частиц при радиоактивном распаде показано, что вероятности интервалов, кратных суткам, между сходными гистограммами имеют четко выраженные максимумы. Периодичность подтверждается и рис. 2, где показано, что максимум соответствует звездным суткам, а не солнечным. (Оба рисунка заимствованы из [1].)

Закономерные изменения формы гистограмм во времени не противоречат случайному характеру изменений измеряемых величин. Более того, случайные, в традиционном смысле, процессы являются адекватными объектами для изучения закономерностей изменения формы гистограмм. Закономерные изменения формы гистограмм были обнаружены при измерениях скоростей химических и биохимических реакций, скорости движения заряженных частиц в электрическом поле, при измерениях времени релаксации протонов в переменном магнитном поле, в шумах грави-градиентной антенны, в шумах полупроводников, при измерениях радиоактивности разных видов (соответствующие ссылки приведены в [1]).

На протяжении нескольких десятилетий основным объектом исследований С.Э. Шноля были флуктуации интенсивности альфа-распада. Этот выбор в значительной степени был обусловлен методическими соображениями – созда-

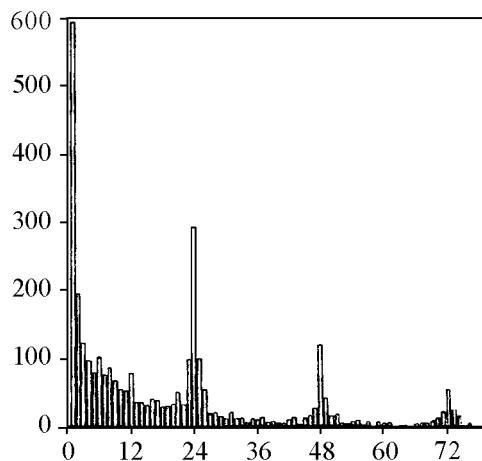


Рис. 1. Распределение сходных гистограмм, построенных по измерениям альфа-активности препаратов ^{239}Pu , по разделяющим их одночасовым интервалам [1]

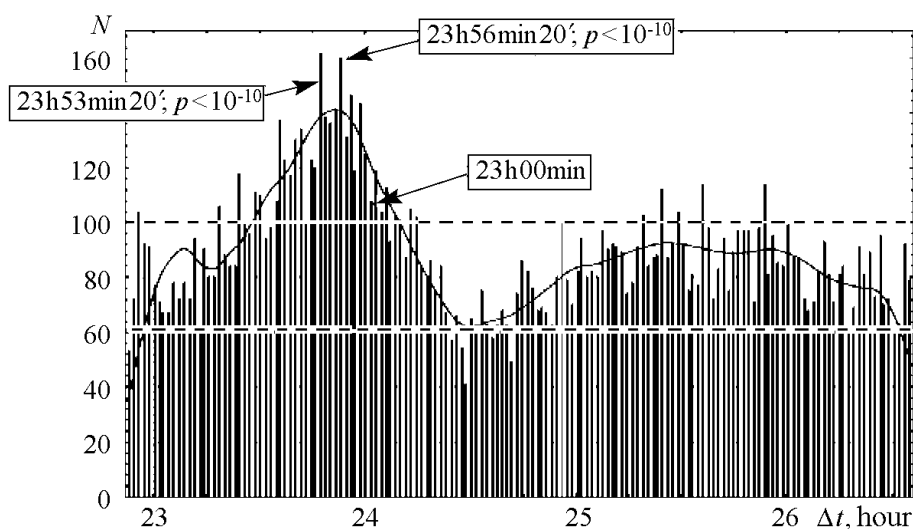


Рис. 2. Распределение сходных гистограмм, построенных каждая по 60-ти односекундным измерениям альфа-активности ^{218}Po , по разделяющим их одноминутным интервалам [1]

нием стабильно работающих измерительных устройств, позволяющих проведение в автоматическом режиме многолетних непрерывных ежесекундных измерений альфа-активности в разных географических пунктах. Использование при измерениях альфа-активности детекторов с коллиматорами, вырезающими потоки частиц в определенных направлениях, позволило установить зависимость изменений формы гистограмм от направления в пространстве. Было показано, что определенным направлениям соответствуют определенные формы гистограмм и их изменения связаны с вращением Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца ¹.

На основании всей совокупности полученных результатов был сделан вывод, в соответствии с которым закономерности изменения формы гистограмм не зависят от природы процесса и определяются весьма общей космофизической причиной. В качестве такой общей причины в [1] предложены флуктуации пространства-времени, обусловленные движением Земли в неоднородном гравитационном поле. Рассмотрению таких флуктуаций посвящен ряд работ (см., например, [2–4]). Однако механизм воздействия этих флуктуаций на различные системы остается неясным. Как, например, гравитационные силы могут влиять на скорости химических реакций?

В настоящей работе в качестве альтернативной общей космофизической причины предлагается поток каких-либо частиц от Солнца и других звезд, и задача решается на основе классической физики. Этот подход тесно перекликается с известными работами А.Л. Чижевского, полагавшего, что изменение солнечной активности сильно влияет на все процессы на Земле [5]. Взгляды Чижевского изложены также в работах его последователей (см., например, [6, 7]).

Для выбора реальной причины представляется важным существенное расширение объектов исследований. В этой связи в работе [8] было предпринято исследование броуновского движения, поскольку, как принято думать, его закономерно-

¹Мнения авторов данной статьи расходятся по этому вопросу с мнением автора работы [1]. С.Э. Шноль полагает, что наблюдаемые результаты экспериментов определяются направлением вылета альфа-частиц, тогда как П.С. Ланда считает, что они определяются направлением прилета космических частиц.

сти вполне объясняются «внутренними свойствами» и не требуют учета каких-либо внешних факторов. Однако, как показано в [8], форма гистограмм для распределения скоростей броуновской частицы, как и для других случайных процессов, определяется внешними факторами. Рассмотрение броуновского движения целесообразно еще и потому, что оно допускает сравнительно простое аналитическое исследование.

1. Приближенный аналитический расчет распределения вероятностей для скоростей броуновских частиц с учетом внешнего потока

Прежде всего мы рассмотрим классическую хорошо известную задачу о движении маленького шарика (броуновской частицы) радиуса R и массы m , находящегося в газообразной или жидкой среде. Без учета каких-либо дополнительных факторов такую среду можно описывать уравнениями газовой динамики со случайными источниками [9], обусловленными атомно-молекулярной структурой среды. Флуктуации газодинамических функций (плотности, скорости и температуры T), вызванные этими источниками, называются естественными флуктуациями, потому что они являются принципиально неустранимыми. В механике сплошных сред эти флуктуации, естественно, не принимаются во внимание, потому что среда предполагается непрерывной. Но для корректного описания движения броуновской частицы учет этих флуктуаций необходим. В [9] показано, что этот учет приводит к хорошо известному уравнению Ланжевена [10]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \gamma\mathbf{v} = \xi(t), \quad (1)$$

где векторная функция $\xi(t)$ – белый шум с корреляционной функцией $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = K\delta(\tau)$,

$$K = 2\gamma \frac{kT}{m}, \quad \gamma = \frac{6\pi\eta R}{m}. \quad (2)$$

Здесь K – половина спектральной плотности процесса $\xi(t)$, k – постоянная Больцмана, T – температура среды, η – динамическая вязкость, R и m – радиус и масса броуновской частицы. Заметим, что член $\gamma\mathbf{v}$ в (1) называется силой Стокса и описывает внутреннее трение в среде.

Из уравнения (1) следует, что спектральная плотность скорости броуновской частицы равна

$$S(\omega) = \frac{2K}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad (3)$$

то есть она описывается лоренцевой линией с полушириной γ . Корреляционная функция для движения броуновской частицы $R(\tau)$ является экспоненциально спадающей и определяется формулой

$$R(\tau) = \frac{K}{2\gamma} \exp(-\gamma|\tau|). \quad (4)$$

В одномерном случае уравнению (1) соответствует следующее уравнение Фоккера–Планка [10]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial v} = 0, \quad (5)$$

где поток вероятности

$$G = -\gamma v w - \frac{K}{2} \frac{\partial w}{\partial v}. \quad (6)$$

Стационарное решение уравнения (5) при условии равенства нулю потока вероятности имеет вид

$$w(x) = C \exp\left(-\frac{\gamma v^2}{K}\right), \quad (7)$$

откуда следует, что скорость броуновских частиц имеет гауссово распределение вероятностей, где нормировочная постоянная $C = \sqrt{\pi\gamma/K}$.

Будем предполагать, что внешние факторы проявляются в виде суммы случайных сил, действующих на броуновскую частицу. По-видимому, эти силы могут иметь различную природу. Как уже отмечалось, в [1] предполагается, что эти силы имеют гравитационное происхождение, связанное с перемещением Земли в пространстве. Другим источником этих сил может служить космическое излучение, исходящее из Солнца и всех других звезд. Если космические лучи, исходящие из Солнца, являются преобладающими, то, в первую очередь, периодические составляющие внешнего потока должны быть связаны с вращением Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца. Какое-то влияние может оказывать движение самого Солнца и всех звезд нашей Галактики.

Ради простоты будем предполагать, что источником внешнего воздействия на броуновскую частицу является поток космических частиц, движущихся в одном и том же направлении со средней скоростью u . Будем также предполагать, что отклонения скорости космических частиц от среднего значения малы, а линейная плотность этого потока $\rho(t)$ является функцией времени. При сравнении полученных ниже результатов с экспериментами необходимо учесть, что сделанное предположение об однонаправленности потока космических частиц должно соответствовать экспериментам с коллиматорами [1].

Чтобы рассчитать влияние потока космических частиц на движение броуновской частицы, будем предполагать, что в процессе соударения броуновская и космическая частицы связаны пружинкой жесткости k . Очевидно, что взаимодействие между частицами будет происходить до тех пор, пока их скорости не сравняются. Записав законы сохранения импульса и энергии, получаем следующие уравнения:

$$m\mathbf{v} + m_c\mathbf{u} = (m + m_c)\mathbf{v}_e, \quad m|v|^2 + m_c u^2 = (m + m_c)v_e^2 + kx^2, \quad (8)$$

где m и m_c – массы броуновской и космической частиц, соответственно; \mathbf{v} и \mathbf{u} – скорости броуновской и космической частиц до удара; \mathbf{v}_e скорости обеих частиц после удара и kx^2 – энергия деформации частиц в процессе удара. Решая уравнения (8), находим x

$$x = \sqrt{\frac{mm_c}{k(m + m_c)}} (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2. \quad (9)$$

Отсюда и из (8) следует, что сила взаимодействия между частицами в процессе удара равна

$$kx = \sqrt{\frac{mm_c k}{m + m_c}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|. \quad (10)$$

Таким образом, изменение количества движения броуновской частицы за счет соударения с одной космической частицей равно

$$\Delta m\mathbf{v} = \Delta t \sqrt{\frac{mm_c k}{m + m_c}} (\mathbf{u} - \mathbf{v}), \quad (11)$$

где Δt – время соударения. Сила, действующая на броуновскую частицу со стороны всего потока космических частиц равна

$$\mathbf{F}(t) = \frac{\Delta m \mathbf{v}}{\Delta t} n(t)(\mathbf{u} - \mathbf{v})\mathbf{e} \equiv m\beta n(t)(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2\mathbf{e}, \quad (12)$$

где $n(t) = \rho(t)/m_c$ – число частиц на единицу длины; \mathbf{e} – единичный вектор, направленный вдоль внешнего потока; $\beta = \sqrt{m_c k / (m(m + m_c))}$. Исходя из найденного выражения для силы $\mathbf{F}(t)$, запишем модельное уравнение для скорости броуновской частицы в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \gamma\mathbf{v} = \xi(t) + \beta n(t)(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2\mathbf{e}. \quad (13)$$

Принимая во внимание только вращение Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца, положим

$$\begin{aligned} n(t) &= n_0(\varepsilon t) \left(1 + \sin \alpha \cos \omega_2 t\right) \left(1 + \sin \varphi \cos(\omega_1 t - \psi)\right) = \\ &= 1 + \sin \varphi \cos(\omega_1 t - \psi) + \sin \alpha \cos \omega_2 t + \\ &\quad + \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{2} \left(\cos(\omega_3 t - \psi) + \cos(\omega_4 t - \psi)\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где $n_0(\varepsilon t)$ – медленно меняющаяся функция времени; $\omega_1 = 36\pi/432$ рад/ч – приблизительное значение частоты обращения Земли вокруг своей оси; $\omega_2 = \omega_1/365.25$ рад/ч – приблизительное значение частоты обращения Земли вокруг Солнца; $\omega_{3,4} = \omega_1 \pm \omega_2$ – частоты, мало отличающиеся от ω_1 ; ψ – сдвиг фаз, определяемый долготой места наблюдения; $\alpha \approx 0.409 \approx 23.45^\circ$ – угол между плоскостью экватора и плоскостью земной орбиты; φ – угол между направлением скорости потока космических частиц и направлением на Север. Из формулы (11) следует, что при $\varphi = 0$ плотность космических частиц не зависит от времени суток. Заметим, что периоды, соответствующие частотам $\omega_{3,4}$, отличаются от периода обращения Земли вокруг Солнца $T_1 = 2\pi/\omega_1$ приблизительно на 4 мин. Интересно, что такие периоды проявляют себя на рис. 1 и 2, однако при обсуждении рис. 2 в [1] автор обращает внимание только на один из этих периодов T_4 (отождествляемый с солнечными сутками), который больше периода T_1 (отождествляемого со звездными сутками) примерно на 4 мин. Как видно из формулы (11), в гистограммах должен присутствовать и период T_3 , меньший T_1 . Безусловно, этот вывод требует тщательной экспериментальной проверки.

Выбирая начало отсчета времени в один из дней летнего противостояния, находим, что моменты времени, в которые $\omega_2 t = (2n + 1)\pi/2$ ($n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$), соответствуют дням равноденствия, $\omega_2 t = 2n\pi$ – дням летнего противостояния, $\omega_2 t = (2n + 1)\pi$ – дням зимнего противостояния.

Заметим, что точные значения частот ω_1 и ω_2 несоизмеримы, причем $\omega_1 \gg \omega_2$. Поэтому функция $n(t)$ близка к квазипериодической функции времени, то есть к сумме периодических составляющих с несоизмеримыми периодами $T_j = 2\pi/\omega_j$, где $j = 1, \dots, 4$.

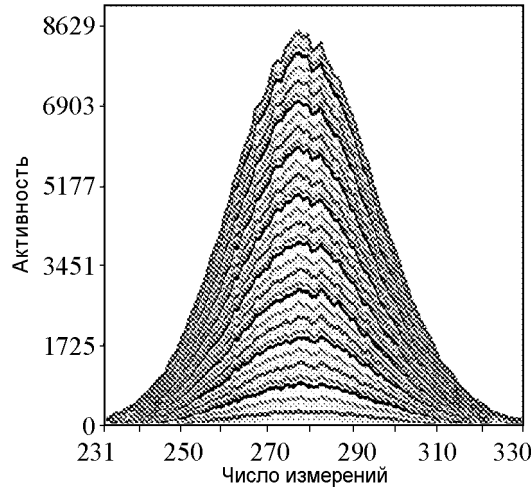


Рис. 3. Несглаженное распределение результатов 352980 измерений альфа-активности препарата ^{239}Pu за четверо суток. «Слоевые линии» проведены через каждые 6000 измерений. По оси абсцисс отложена активность – число актов распада, зарегистрированных счетчиком за 1 сек.; по оси ординат – число измерений, соответствующее данной величине активности [1]

Уравнение (10) удобно переписать в виде двух уравнений для продольной (вдоль потока) v_{\parallel} и поперечной (перпендикулярно потоку) v_{\perp} компонент вектора \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\parallel}}{dt} + \gamma v_{\parallel} &= \xi(t) + \beta n(t) \left((u - v_{\parallel})^2 + v_{\perp}^2 \right), \\ \frac{dv_{\perp}}{dt} + \gamma v_{\perp} &= \xi(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда сразу видно, что при наличии внешнего направленного потока движение броуновской частицы становится неизотропным по направлению, что необходимо учитывать в экспериментах.

В случае достаточно узкого коллиматора можно приближенно положить $v_{\perp} = 0$. Тогда уравнения (12) сведутся к одному уравнению для $v \equiv v_{\parallel}$

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = \xi(t) + \beta n(t) (u - v)^2. \quad (16)$$

Уравнению (13) соответствует следующее уравнение Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial v} = 0, \quad (17)$$

где поток вероятности

$$G = \left(-\gamma v + \beta n(t) (u - v)^2 \right) w - \frac{K}{2} \frac{\partial w}{\partial v}. \quad (18)$$

При $\beta = 0$ решением уравнения (14) с учетом (18) является гауссово распределение вероятностей (9).

Полагаем, что поправка к гауссову распределению вероятностей мала. Это предположение подтверждается вычислениями плотности вероятности на основе измеренного временного ряда (см., например, [1, рис. 3]). Тогда решение уравнения (14) можно искать путем разложения по некоторому малому параметру μ в виде ряда

$$w(v, t) = w_0(v) + \mu w_1(v, t) + \dots \quad (19)$$

Подставляя (19) в уравнение (14) и в выражение (18), для функции $w_1(v, t)$ получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial w_1(v, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{K}{2} \frac{\partial w_1(v, t)}{\partial v} + \gamma v w_1(v, t) \right) = -2\beta n(t) (u - v) \left(1 + \frac{\gamma v (u - v)}{K} \right) w_0(v). \quad (20)$$

Функция $w_1(v, t)$ описывает поправку к гауссову распределению вероятностей, которую можно сопоставить с «тонкой структурой гистограмм», исследованной в [1].

Из условия нормировки функции $w(v, t)$ следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_0(v) dv = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} w_1(v, t) dv = 0. \quad (21)$$

В силу линейности уравнения (20) его решение можно искать в виде

$$\begin{aligned} w_1(v, t) = & W_0(v, \varepsilon t) + \sin \varphi \left(W_{11}(v, \varepsilon t) \cos(\omega_1 t - \psi) + W_{12}(v, \varepsilon t) \sin(\omega_1 t - \psi) \right) + \\ & + \sin \alpha \left(W_{21}(v, \varepsilon t) \cos \omega_2 t + W_{22}(v, \varepsilon t) \sin \omega_2 t \right) + \\ & + \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{2} \left(W_{31}(v, \varepsilon t) \cos(\omega_3 t - \psi) + \right. \\ & + W_{32}(v, \varepsilon t) \sin(\omega_3 t - \psi) + W_{41}(v, \varepsilon t) \cos(\omega_4 t - \psi) + \\ & \left. + W_{42}(v, \varepsilon t) \sin(\omega_4 t - \psi) \right), \quad (22) \end{aligned}$$

где $W_0(v, \varepsilon t)$ и $W_{ij}(v, \varepsilon t)$ – неизвестные медленно меняющиеся со временем функции.

Из уравнения (14) и выражений (18), (11) находим следующие уравнения для функций $W_0(v, \varepsilon t)$ и $W_{ji}(v, \varepsilon t)$:

$$\begin{aligned} \frac{K}{2} \frac{\partial^2 W_0(v, t)}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\gamma v W_0(v, t) \right) &= -2\beta n_0(\varepsilon t)(u - v) \left(1 + \frac{\gamma v(u - v)}{K} \right) w_0(v), \\ \omega_1 W_{12} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{K}{2} \frac{\partial W_{11}}{\partial v} + \gamma v W_{11} \right) &= 2\beta n_0(\varepsilon t)(u - v) \left(1 + \frac{\gamma v(u - v)}{K} \right) w_0(v), \\ -\omega_1 W_{11} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{K}{2} \frac{\partial W_{12}}{\partial v} + \gamma v W_{12} \right) &= 0; \\ \omega_2 W_{22} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{K}{2} \frac{\partial W_{21}}{\partial v} + \gamma v W_{21} \right) &= 2\beta n_0(\varepsilon t)(u - v) \left(1 + \frac{\gamma v(u - v)}{K} \right) w_0(v), \\ -\omega_2 W_{21} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{K}{2} \frac{\partial W_{22}}{\partial v} + \gamma v W_{22} \right) &= 0; \quad (23) \\ \omega_3 W_{32} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{K}{2} \frac{\partial W_{31}}{\partial v} + \gamma v W_{31} \right) &= 2\beta n_0(\varepsilon t)(u - v) \left(1 + \frac{\gamma v(u - v)}{K} \right) w_0(v), \\ -\omega_3 W_{31} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{K}{2} \frac{\partial W_{32}}{\partial v} + \gamma v W_{32} \right) &= 0; \\ \omega_4 W_{42} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{K}{2} \frac{\partial W_{41}}{\partial v} + \gamma v W_{41} \right) &= 2\beta n_0(\varepsilon t)(u - v) \left(1 + \frac{\gamma v(u - v)}{K} \right) w_0(v), \\ -\omega_4 W_{41} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{K}{2} \frac{\partial W_{42}}{\partial v} + \gamma v W_{42} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение (23) описывает поправку к гауссову распределению вероятностей, медленно зависящую от времени, тогда как остальные уравнения описывают формы распределений вероятностей (гистограмм), изменяющихся во времени приблизительно с периодами $T_1 = 2\pi/\omega_1$ (суточными), $T_2 = 2\pi/\omega_2$ (годовыми) и $T_3 = 2\pi/\omega_3$, $T_4 = 2\pi/\omega_4$ (близкими к суточным).

Следует отметить, что найденные уравнения являются приближенными по двум причинам. Во-первых потому, что мы предполагали скорость внешнего потока постоянной, а она флуктуирует. Вторая причина заключается в приближенном решении уравнения (14). Однако можно предположить, что экспериментальные сходные гистограммы с соответствующими периодами должны быть близки к следующим из полученных уравнений. К сожалению, данные, приведенные в работе [8], сделать это не позволяют.

Уравнения (23) удобно переписать в безразмерных переменных, введя безразмерные скорости $V = \sqrt{\gamma/K} v$ и $U = \sqrt{\gamma/K} u$. В результате получим

$$\frac{d}{dV} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial W_0}{\partial V} + VW_0 \right) = -2B(\varepsilon t)(U - V) \left(1 + V(U - V) \right) w_0(V); \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1}{\gamma} W_{12} - \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial W_{11}}{\partial V} + VW_{11} \right) &= 2B(\varepsilon t)(U - V) \left(1 + V(U - V) \right) w_0(V), \\ -\frac{\omega_1}{\gamma} W_{11} - \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial W_{12}}{\partial V} + VW_{12} \right) &= 0; \\ \frac{\omega_2}{\gamma} W_{22} - \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial W_{21}}{\partial V} + VW_{21} \right) &= 2B(\varepsilon t)(U - V) \left(1 + V(U - V) \right) w_0(V), \\ -\frac{\omega_2}{\gamma} W_{21} - \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial W_{22}}{\partial V} + VW_{22} \right) &= 0; \quad (25) \\ \frac{\omega_3}{\gamma} W_{32} - \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial W_{31}}{\partial V} + VW_{31} \right) &= 2B(\varepsilon t)(U - V) \left(1 + V(U - V) \right) w_0(V), \\ -\frac{\omega_3}{\gamma} W_{31} - \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial W_{32}}{\partial V} + VW_{32} \right) &= 0; \\ \frac{\omega_4}{\gamma} W_{42} - \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial W_{41}}{\partial V} + VW_{41} \right) &= 2B(\varepsilon t)(U - V) \left(1 + V(U - V) \right) w_0(V), \\ -\frac{\omega_4}{\gamma} W_{41} - \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial W_{42}}{\partial V} + VW_{42} \right) &= 0, \end{aligned}$$

где $B(\varepsilon t) = (\beta n_0(\varepsilon t)/\gamma) \sqrt{K/\gamma}$, $w_0(V) = (1/\sqrt{\pi}) \exp(-V^2)$.

Поскольку функция $w_1(V, t)$ должна быть отлична от нуля только при наличии внешнего воздействия, мы должны найти только частное решение неоднородного уравнения (20).

Прежде всего найдем решение неоднородного уравнения (24). Частное решение этого уравнения будем искать в виде полинома по

$$W_0(V) = (a_0 + b_0V + c_0V^2 + d_0V^3)w_0(V). \quad (26)$$

Подставляя (26) в уравнение (24), находим систему уравнений для a_0 , b_0 , c_0 и d_0

$$c_0 + 2BU = 0, \quad 2BU^2 - 2B - b_0 + 3d_0 = 0, \quad -4BU - 2c_0 = 0, \quad 2B - 3d_0 = 0, \quad (27)$$

решение которой имеет вид

$$b_0 = 2BU^2, \quad c_0 = -2BU, \quad d_0 = 2B/3. \quad (28)$$

Мы видим, что решение (26) справедливо при любом значении a_0 . Это позволяет нам найти a_0 из второго условия нормировки (21). Из этого и первого условия (21) следует, что

$$a_0 = -\frac{c_0}{2} = BU. \quad (29)$$

Чтобы найти форму распределений вероятностей с различными периодами, нужно решить уравнения (15). Полагая в (15)

$$W_{ji}(V, \varepsilon t) = w_{ji}(V, \varepsilon t)w_0(V), \quad (30)$$

получаем для $w_{ji}(V, \varepsilon t)$ следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1}{\gamma} w_{12} - \frac{1}{2} \frac{d^2 w_{11}}{dV^2} + V \frac{dw_{11}}{dV} &= 2B(U - V) \left(1 + V(U - V)\right), \\ -\frac{\omega_1}{\gamma} w_{11} - \frac{1}{2} \frac{d^2 w_{12}}{dV^2} + V \frac{dw_{12}}{dV} &= 0, \\ \frac{\omega_2}{\gamma} w_{22} - \frac{1}{2} \frac{d^2 w_{21}}{dV^2} + V \frac{dw_{21}}{dV} &= 2B(U - V) \left(1 + V(U - V)\right), \\ -\frac{\omega_2}{\gamma} w_{21} - \frac{1}{2} \frac{d^2 w_{22}}{dV^2} + V \frac{dw_{22}}{dV} &= 0, \\ \frac{\omega_3}{\gamma} w_{32} - \frac{1}{2} \frac{d^2 w_{31}}{dV^2} + V \frac{dw_{31}}{dV} &= 2B(U - V) \left(1 + V(U - V)\right), \\ -\frac{\omega_3}{\gamma} w_{31} - \frac{1}{2} \frac{d^2 w_{32}}{dV^2} + V \frac{dw_{32}}{dV} &= 0, \\ \frac{\omega_4}{\gamma} w_{42} - \frac{1}{2} \frac{d^2 w_{41}}{dV^2} + V \frac{dw_{41}}{dV} &= 2B(U - V) \left(1 + V(U - V)\right), \\ -\frac{\omega_4}{\gamma} w_{41} - \frac{1}{2} \frac{d^2 w_{42}}{dV^2} + V \frac{dw_{42}}{dV} &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

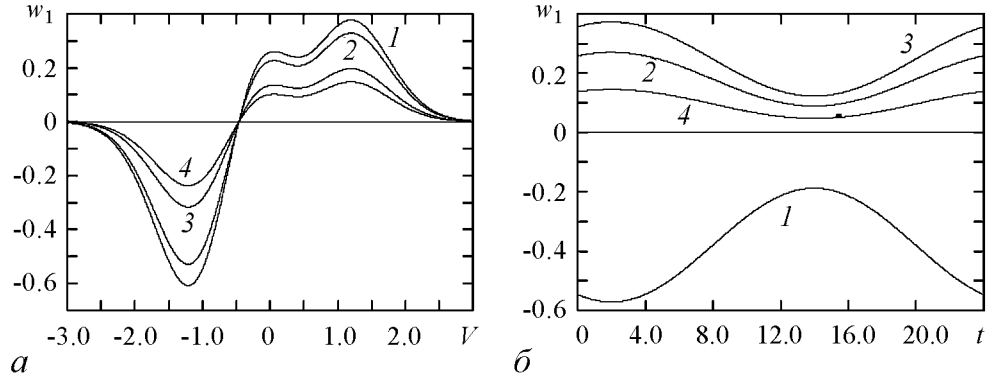


Рис. 4. Примеры зависимостей $w_1(V, t)$ от V при нескольких значениях t (a) и от t при нескольких значениях V (b) для $\gamma = 100000$, $\alpha = 0.409$, $\psi = 0.52$, $\varphi = \pi/3$. Кривые 1,2,3,4 на рис. (a) соответствуют $t = 0, 6, 12, 18$ (кривая для $t = 24$ совпадает с соответствующей кривой для $t = 0$, что означает суточную периодичность); на рис. (b) кривые 1,2,3,4 соответствуют $V = -1, 0, 1, 2$

Решения неоднородных уравнений (31) имеют вид

$$w_{i1}(V) = 2B\gamma^2 \left[\frac{2U(1-2V^2)}{4\gamma^2 + \omega_i^2} + \left(U^2 - \frac{4\omega_i^2}{9\gamma^2 + \omega_i^2} \right) \frac{V}{\gamma^2 + \omega_i^2} + \frac{3V^3}{9\gamma^2 + \omega_i^2} \right], \quad (32)$$

$$w_{i2}(V) = 2B\gamma\omega_i \left[\frac{U(1-2V^2)}{4\gamma^2 + \omega_i^2} + \left(\frac{U^2}{\omega_i^2 + \gamma^2} + \frac{3\gamma^2 - \omega_i^2}{9\gamma^2 + \omega_i^2} \right) \frac{V}{\gamma^2 + \omega_i^2} + \frac{V^3}{9\gamma^2 + \omega_i^2} \right].$$

Принимая во внимание (22) и (30), получим следующее выражение для функции $w_1(V, t)$:

$$\begin{aligned} w_1(V, t) = & W_0(V, \epsilon t) + \left(\sin \varphi \left(w_{11}(V) \cos(\omega_1 t - \psi) + w_{12}(V) \sin(\omega_1 t - \psi) \right) + \right. \\ & + \sin \alpha \left(w_{21}(V) \cos \omega_2 t + w_{22}(V) \sin \omega_2 t \right) + \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{2} \left(w_{31}(V) \cos(\omega_3 t - \psi) + \right. \\ & \left. \left. + w_{32}(V) \sin(\omega_3 t - \psi) + w_{41}(V) \cos(\omega_4 t - \psi) + w_{42}(V) \sin(\omega_4 t - \psi) \right) \right) w_0(V). \end{aligned} \quad (33)$$

Примеры зависимостей $w_1(V, t)$ от V при нескольких значениях t (a) и от t (b) при нескольких значениях V приведены на рис. 4.

Заключение

Близость следующих из теоретического рассмотрения форм модуляции для разных компонент распределения вероятностей к найденным экспериментально в работе [8] свидетельствует о том, что эксперименты и их обработка авторами этой работы были проведены корректно и сделанные ими выводы правильны, несмотря на то, что используемый ими метод визуального сравнения гистограмм вызывает некоторые вопросы.

Библиографический список

1. Шноль С.Э. Космофизические факторы в случайных процессах. Stockholm (Швеция): Изд-во Svenska Fisikarkivet, 2009. 388 с.
2. Шноль С.Э. Макроскопические флуктуации формы дискретных распределений как следствие арифметических и космофизических причин // Биофизика. 2001. Т. 46, № 5. С. 775.
3. Кириллов А.А., Зенченко К.И. О возможности нарушения статистики Пуассона в процессах типа радиоактивного распада // Биофизика. 2001. Т. 46, № 5. С. 841.
4. Блюменфельд Л.А., Зенченко Т.А. Квантовые переходы между состояниями и космофизические флуктуации // Биофизика. 2001. Т. 46, № 5. С. 859.
5. Агеев И.М., Шишкин Г.Г. Корреляция солнечной активности с электропроводностью воды // Биофизика. 2001. Т. 46, № 5. С. 829.
6. Чижевский А.Л. Земное эхо солнечных бурь. М.: Мысль, 1976.
7. Мартынюк В.С., Темурьянц Н.А., Московчук О.Б. Корреляция биофизических параметров биологических активных точек и вариаций гелиогеофизических факторов // Биофизика. 2001. Т. 46, № 5. С. 905.
8. Каминский А.В., Шноль С.Э. Влияние космофизических факторов на флуктуации скоростей броуновских частиц // Изв. вузов. ПНД. 2011. Т. 19, № 1. С. 63.
9. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
10. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. Радио, 1961.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 26.01.2010

ANALYTICAL CONSIDERATION OF THE COSMIC FACTOR EFFECTS UPON THE FLUCTUATIONS OF BROWN PARTICLE VELOCITIES

P.S. Landa, V.A. Vlasov

Results of analytical consideration of the probability distribution density for Brown particle, subject to weak influence of the external force conditioned by a cosmic particle flow. It is shown that this influence, which is time-dependent, results in essential non-stationarity of the probability distribution, i.e. it becomes a sum of components caused by different astronomical factors: Earth revolution about inherent axes and the Sun, the motion of the Sun and stars and so on. It is also shown that an important result of the effect under consideration lies in the modulation of Gaussian, valid for a free Brown particle,

and its asymmetry with respect to the direction of the particle velocity. Our calculations have showed that the modulation form for different probability distribution component is distinct.

Keyword: Probability distribution, Gaussian, Fokker–Plank equation, gravitational forces.



Ланда Полина Соломоновна – окончила физический факультет МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий научный сотрудник МГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор десяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer», «Регулярные и хаотические колебания», вышедшей в издательстве «Springer» в 2001 году, и нескольких обзоров, в том числе в УФН и «Physics Reports». Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика».

119899 Москва, Ленинские горы, МГУ
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: planda@mail.ru



Власов Владимир Алексеевич – родился в 1989 году в Москве. Студент физического факультета МГУ (кафедра биофизики). Имеет одну публикацию в центральной печати (Шноль С.Э., Ланда П.С., Власов В.А. Влияние космических факторов на скорость альфа-распада. Вестник научно-технического развития, № 2 (42), 2011).

119899 Москва, Ленинские горы, МГУ
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail:mr_vv@list.ru



ФЕНОМЕН МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРЫ И СХОДНЫХ С НЕЙ*

Д.И. Трубецков

Математическая модель Лотки–Вольтерры (часто её называют моделью «хищник–жертва») применима для описания различных процессов в биологии, экологии, медицине, в социальных исследованиях, в истории, в радиофизике и других науках.

В настоящем обзоре, который во многом носит методологический характер, рассмотрены варианты этой модели и сходных с ней применительно к анализу ряда природных и социальных явлений.

Обсуждаются следующие модели: модели взаимодействия загрязнения с окружающей средой; модель классовой борьбы; модель бесклассового общества эпохи охотников-собирателей; модель военных действий; вирусная модель инфекционного заболевания; модель распространения эпидемий, включая модель заражения вирусом компьютеров; модель взаимодействия когнитивных и/или эмоциональных мод мозга.

Ключевые слова: Математическая модель Лотки–Вольтерры, система «хищник–жертва», анализ природных и социальных явлений.

«...При разрешении юридических казусов, как и при постановке врачом диагноза или во время опытов, проводимых химиком, решающую* роль играет распознавание типовых моделей».

*Бернхард Шлинк. Возвращение***

Введение на основе экологических примеров [1–8]

По своей сути модель Лотки–Вольтерры есть математическое описание дарвинского принципа борьбы за существование, который Чарльз Дарвин в своей автобиографии [1] излагает следующим образом. «Изучив множество обстоятельств, я пришел к выводу о существовании борьбы за существование. Однажды пришло мне в голову, что при подобных обстоятельствах благоприятные виды продолжили бы развиваться

*Материалы статьи были изложены автором в лекциях на международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС–2010), проходившей в г. Саратове 4–9 октября 2010 года.

** Санкт-Петербург: Издательская группа «Азбука-классика», 2010, с. 67

дальше, а неблагоприятные исчезли бы с лица Земли. Вот сейчас у меня и возникла теория, которой следует руководствоваться» (цит. по [2]).

Путь, которым шел Дарвин, хорошо описан в книге [2]. Любопытно, что Дарвин окончательно уверился в своих выводах после прочтения книги «Опыт о законе народонаселения» Томаса Роберта Мальтуса [3]. Это эссе сыграло важную роль в социальной и политической жизни Британии в 90-е годы XVIII века, поскольку его воспринимали как разумное осмысление естественных законов общества. В 30-е годы XIX века мальтузианские доктрины подавляли проведение правительственной политики. Напомним доводы Мальтуса, которые удивительно просты. Поскольку, по словам Мальтуса, у человечества есть естественная склонность к увеличению рода, производство пищи не могло оставаться на прежнем уровне.

Процитируем далее [2, стр. 67].

«Хотя приблизительный баланс существует, как утверждал автор: некоторое количество людей погибает в результате природных факторов (голода или болезней) или человеческих действий (войны, сексуальные воздержания или греховные поступки, например, детоубийство). Это необходимо ради общего баланса существования.

Мальтус пошел дальше, утверждая: ...данная участь (гибель) – удел самого слабого, самого бедного и самого больного члена общества. Избежать уготованной судьбы не представляется возможным, на то есть воля Бога. Напрашивался один простой вывод, но автор предостерегал о нем: если дать нищим милостыню, то человеческий род будет увеличиваться, появится и нехватка пищи».

Викторианское время, казалось бы, подтвердило правоту Мальтуса. Возникли мятежи, связанные с недостатком еды, дискуссии о «Законе о бедных» и общественная реакция на «Хлебные законы». В 1834 году викторианские правящие круги в ответ на поправки к «Закону о бедных» как альтернативу церковным благотворительным обществам организовали работные дома, где люди работали за хлеб и воду.

Дарвин жил в этом мире, был его представителем и вращался в одинаковых с Мальтусом кругах. Он распространяет идеи Мальтуса на все живое: в природе идет борьба за жизнь, борьба за существование, в которой худший и слабейший организм погибает первым, а побеждают более развитые формы, более здоровые и приспособленные. Именно эти особи дают потомство. Организмы быстрее адаптируются к условиям окружающей среды, если подобные случаи борьбы повторяются через некоторые промежутки времени.

Начнем дальнейшее изложение (в качестве напоминания) с моделей взаимодействующих популяций – первых математических моделей Лотки [4] и Вольтерры [5]. Будем следовать в изложении главе 5 книги [6], поскольку это удобно для дальнейшего описания моделей взаимодействия загрязнения с окружающей средой.

Авторы [6, с. 114–115] указывают в первую очередь на работу Вольтерры [5], замечая, что аналогичная модель «была предложена Лоткой [4] несколько ранее (Вольтерра значительно более полно провел анализ этой системы. Лотка каждый раз старался подчеркнуть свой приоритет в записи этой модели)».

Модель Лотки–Вольтерры описывает взаимодействие двух видов – популяции хищников и популяции жертв.

Пусть $N(t)$ – численность жертв, $P(t)$ – численность хищников в момент времени t . Тогда модель Лотки–Вольтерры имеет вид:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP, \quad \frac{dP}{dt} = -dP + cNP, \quad (1)$$

a, b, c, d – положительные постоянные.

Напомним, что система уравнений (1) основана на следующих допущениях:

- при отсутствии хищников жертвы размножаются неограниченно согласно уравнению $dN/dt = aN$, которое называют иногда уравнением Мальтуса;
- хищники при отсутствии жертв вымирают согласно уравнению $dP/dt = -dP$;
- слагаемые, пропорциональные произведению NP , рассматриваются как превращение энергии одного источника в энергию другого (эффект влияния популяции хищников на популяцию жертв, то есть результат их встречи, состоит в уменьшении скорости прироста dN/dt численности жертв на величину NP , пропорциональную численности хищников).

Если ввести новые переменные

$$u(\tau) = \frac{N(t)d}{c}, \quad v(\tau) = \frac{P(t)b}{a}, \quad \tau = at, \quad \gamma = \frac{c}{d},$$

то система уравнений (1) примет вид

$$\frac{du}{d\tau} = u - uv, \quad \frac{dv}{d\tau} = \gamma v(u - 1), \quad (2)$$

Система уравнений (2) имеет две неподвижные точки: $(0, 0)$ – седло и $(1, 1)$, для которой собственные значения матрицы Якоби $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ – $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\gamma}$, $i = \sqrt{-1}$, то есть положение равновесия $(1, 1)$ негиперболическое и сделать вывод о его устойчивости на основе линейного анализа нельзя.

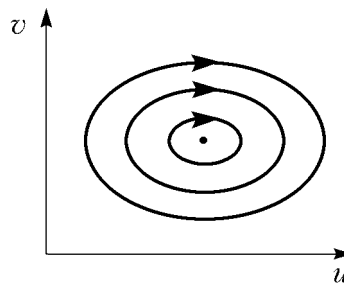
Фазовые траектории системы уравнений (2), как известно, являются интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dv}{du} = \gamma \frac{(u-1)v}{(1-v)u},$$

решение которого

$$\gamma u + v - \ln u^\gamma v = H. \quad (3)$$

Можно показать (см., например, [5,7]), что вблизи $(1, 1)$ линии уровня функции H представляют собой замкнутые кривые, соответствующие периодическим решениям системы уравнений (2) (рис. 1). Постоянная H в выражении (3) определяется начальными условиями, например, $u(0) = u_0$ и $v(0) = v_0$.



Математическая модель, описываемая системой уравнений (2), структурно

Рис. 1. Фазовые траектории, соответствующие соотношению (3)

неустойчива, то есть малое изменение правых частей в ней может приводить к качественному изменению поведения решения. В этом её основной недостаток. Более того, именно поэтому трудно говорить о совпадении теории с экспериментом.

Одна из причин структурной неустойчивости модели в том, что она является консервативной, то есть имеет первый интеграл. Как подчеркивает автор книги [6], несмотря на указанный основной недостаток модели, система уравнений (1) позволяет сделать нетривиальные выводы, подтвержденные многочисленными наблюдениями. В частности, в [6] сформулирован принцип Вольтерры: если в системе «хищник–жертва», описываемой моделью (1), оба вида истребляются равномерно и пропорционально числу их индивидуумов, то среднее число жертв возрастает, а среднее число хищников убывает.

В книге [6] приведены два примера существования этого эффекта в природе. Один – общественный факт, который привел Вольтерру к его теории борьбы за существование [5]: во время первой мировой войны лов рыбы в Адриатическом море был сильно сокращен, что, к удивлению биологов, привело к увеличению хищников и уменьшению числа жертв. Второй пример менее известен. Согласно [6], принцип Вольтерры показывает двойственный характер применения средств от насекомых (инсектицидов) для сохранения урожая на полях. Почти все такие химические вещества действуют не только на вредителей, но и на их естественных врагов, что зачастую приводит к увеличению числа вредителей и уменьшению, например, птиц, питающихся этими вредителями. Таким образом, согласно принципу Вольтерры, в экосистеме «хищник–жертва» популяция жертв более чувствительна к процессу пропорционального уменьшения особей в популяции.

В терминологии В.И. Арнольда, модель, описываемая системой уравнений (1), называется «жесткой» [8]. Кстати, раздел книги В.И. Арнольда «Жесткие» и «мягкие» математические модели (М.: МЦНО, 2000) называется «Жесткие модели как путь к ошибочным предсказаниям». При малом изменении модели она становится мягкой, когда к правым частям (1) добавляются малые слагаемые, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу или хищников за жертв (конкретные виды уравнений приведем ниже). Тогда в общем виде уравнения (1) можно переписать так:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bPN + \varepsilon f(P, N), \quad \frac{dP}{dt} = -dP + cPN + \varepsilon g(P, N), \quad \varepsilon \ll 1.$$

В зависимости от малых поправок $\varepsilon f(P, N)$ и $\varepsilon g(P, N)$ возможны, например, сценарии, показанные на рис. 2.

В смысле интерпретации интересен рис. 2, б. По Арнольду, если P – бандиты, а N – трудящиеся, эволюция системы приводит то к резкому увеличению числа бандитов, то к их почти полному вымиранию, поскольку они настолько ограбили трудящихся, что взять уже нечего. Система в конечном счете попадает в область столь больших или столь малых значений P и N , что модель становится неприменимой, поскольку изменяются законы эволюции.

Приведем еще несколько усложненных моделей «хищник–жертва».

Система «хищник–жертва» с учетом внутривидовой конкуренции.

$$\frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - bNP, \quad \frac{dP}{dt} = -dP \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) + cNP,$$

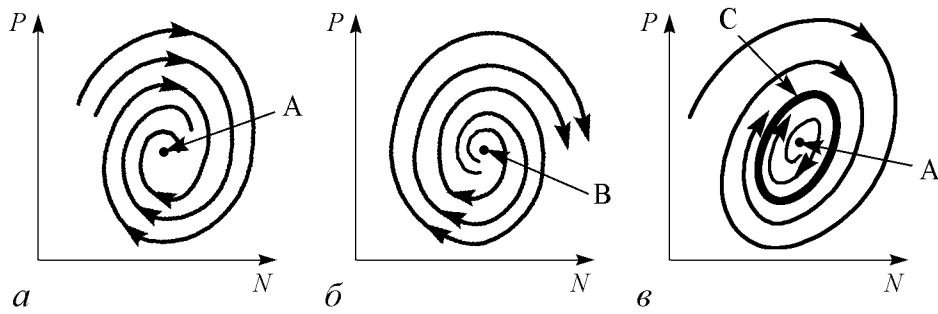


Рис. 2. *a* – состояние равновесия устойчиво: при любых начальных условиях через большое время устанавливается оно же; *б* – состояние равновесия *B* неустойчиво: система идет «вразнос»; *в* – в системе с неустойчивым стационарным состоянием *A* устанавливается с течением времени периодический режим *C* (в отличие от системы (1) (см. рис. 1) имеют место колебания определенной амплитуды, не зависящей от малости отклонения)

где $K_{1,2}$ – потенциальные емкости экологических систем, которые определяются доступным количеством ресурсов и соответствуют предельным значениям численности популяций. В безразмерных переменных данная система уравнений примет вид

$$\frac{du}{dt} = u(1 - \alpha u - v), \quad \frac{dv}{dt} = v(-\gamma - \beta v + u), \quad (4)$$

где $N(t) = (a/c)u(\tau)$, $P(t) = av(\tau)/b$, $\tau = at$, $\gamma = d/a$, $\alpha = a/(cK_1)$, $\beta = d/(aK_2)$.

Модель конкуренции

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right) - e N_1 N_2; \quad \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2}\right) - h N_1 N_2. \quad (5)$$

Здесь r_1, r_2, e, h – положительные постоянные.

Анализ системы уравнений (5) показывает: если n популяций линейно зависят от m ресурсов, причем $m < n$, то по крайней мере одна из популяций вымирает.

Модель мутуализма (симбиоза)

$$\frac{du_1}{dt} = u_1(r_1 + a_{11}u_1 + a_{12}u_2), \quad \frac{du_2}{dt} = u_2(r_2 + a_{21}u_1 + a_{22}u_2). \quad (6)$$

Для описания мутуализма достаточно потребовать, чтобы

$$a_{12} > 0, \quad a_{21} > 0.$$

Детальный анализ приведенных моделей можно найти, например, в книгах [6] и [7].

В заключение раздела, следуя [7] в изложении [6], рассмотрим *обобщенную модель* Лотки–Вольтерры, описываемую системой уравнений

$$\frac{du}{dt} A(u) - B(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = -D(v) + C(u, v), \quad (7)$$

где u и v – численности жертв и хищников, соответственно, $A(u)$ – функция размножения жертв при отсутствии хищников; $D(v)$ – функция вымирания хищников при отсутствии жертв; функция $B(u, v)$ описывает выедание хищниками жертв; $C(u, v)$ – эффективность потребления жертв хищниками. Перечислим возможные дополнительные факторы внутри- и межпопуляционных отношений [6].

- Нелинейная зависимость скорости размножения популяций жертв от плотности при малых значениях плотности (отсутствие достаточного количества брачных пар): $A(u) = au^2/(N + u)$, где a и N – положительные постоянные.
- Внутривидовая конкуренция жертв: $A(u) = au(1 - u/K)$.
- Насыщение хищников: $B_1(u) = bu/(1 + \alpha u)$ – трофическая функция хищника.
- Нелинейный характер выедания хищниками жертв: $B_1(u) = bu^2/(1 + \alpha u)$.
- Конкуренция хищников за жертв: $B_2(v) = bv/(1 + \beta v)$. При этом $B(u, v) = B_1(u)B_2(v)$.
- Конкуренция хищников за отличные от жертв ресурсы: $C(v) = v/(1 + v/K_1)$.
- Нелинейный характер зависимости скорости размножения хищника от плотности популяции при малых значениях плотности: $C_2(v) = cv/(N_v + v)$, при этом $C(u, v) = C_1(u)C_2(v)$ и $C_1(u) = B_1(u)$, $D_2(v) = cv$, то есть $C(u, v) = cv/(N_v + v) B_1(u)$.

1. Математическая модель взаимодействия загрязнения с окружающей средой, трактуемая как модель «хищник–жертва» [6,9]

Ситуацию «загрязнение–природа» можно трактовать как частный случай модели «хищник–жертва», когда природа выступает в качестве жертвы, а загрязнение – хищника. Главное предположение, лежащее в основе модели, состоит в том, что окружающая среда активно абсорбирует и перерабатывает загрязнение вплоть до определенного предела.

Из качественных соображений в системе окружающая среда – загрязнение возможны три следующих принципиально различных сценария взаимодействия.

1. При малых выбросах загрязнения окружающая среда его полностью перерабатывает (устойчивая ситуация).

2. При увеличении выбросов загрязнения в зависимости от внешних условий и случайных причин окружающая среда может находиться в удовлетворительном состоянии, а может и погибнуть (бистабильная ситуация)*.

3. Наконец, третья ситуация соответствует экологической катастрофе – полному вымиранию природы.

Предположим, что общий фон загрязнения и состояние окружающей среды можно характеризовать следующими переменными: концентрацией загрязнения \mathcal{P} и плотностью биомассы \mathcal{E} , соответственно. В том случае, если существует постоянно действующий источник загрязнения, процесс эволюции загрязнения можно описать уравнением

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = a - b\mathcal{P}, \quad (8)$$

где a – мощность источника загрязнения за единицу времени, b – коэффициент естественного уничтожения загрязнения (такое уничтожение называют «мертвым»), или

*Бистабильная ситуация может реализоваться, когда в окрестности некоторых предприятий растительный покров остается только местами. Это следует из наблюдений и может служить во многом запоздалым сигналом для принятия срочных мер по спасению природы.

естественной диссипацией). При начальном условии $\mathcal{P}(t = 0) = \mathcal{P}_0$ решение уравнения (8) имеет вид:

$$\mathcal{P}(t) = \frac{a}{b} + \left(\mathcal{P}_0 - \frac{a}{b} \right) e^{-bt},$$

то есть со временем концентрация загрязнения уменьшается естественным образом.

Предположим далее, что загрязнение находится в постоянном взаимодействии с окружающей средой, которая оказывает очищающий эффект на загрязнение. Будем также считать систему «окружающая среда – загрязнение» замкнутой. Тогда процесс взаимодействия с окружающей средой можно описать следующей системой уравнений:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = a - b\mathcal{P} - f(\mathcal{E}, \mathcal{P}), \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = g(\mathcal{E}) - h(\mathcal{E}, \mathcal{P}), \quad (9)$$

где функция $f(\mathcal{E}, \mathcal{P}) \geq 0$ – описывает поглощение и переработку загрязнения окружающей средой; $g(\mathcal{E})$ – слагаемое, описывающее динамику окружающей среды в отсутствие загрязнения; $h(\mathcal{E}, \mathcal{P})$ – функция, описывающая вредное влияние загрязнения на окружающую среду.

Примем в качестве функций взаимодействия загрязнения и живой природы

$$f(\mathcal{E}, \mathcal{P}) = c\mathcal{E}\mathcal{P} \quad \text{и} \quad h(\mathcal{E}, \mathcal{P}) = d\mathcal{E}\mathcal{P},$$

где c и d – постоянные коэффициенты.

Будем считать, что при отсутствии загрязнения поведение окружающей среды можно описать логистическим уравнением, то есть $g(\mathcal{E}) = r\mathcal{E}(1 - \mathcal{E}/K)$, где r – постоянный коэффициент, а K – соответствует максимальному значению \mathcal{E} при $d\mathcal{E}/dt = 0$. Подставив выражения для $f(\mathcal{E}, \mathcal{P})$, $h(\mathcal{E}, \mathcal{P})$, и $g(\mathcal{E})$ в систему уравнений (9), получим

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = a - b\mathcal{P} - c\mathcal{E}\mathcal{P}, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = r\mathcal{E} \left(1 - \frac{\mathcal{E}}{K} \right) - d\mathcal{E}\mathcal{P}. \quad (10)$$

Переходя в системе уравнений (10) к безразмерным переменным

$$\mathcal{P} = \frac{bu}{d}, \quad \mathcal{E} = \frac{bv}{c}, \quad \tau = bt, \quad \alpha = \frac{ad}{b^2}, \quad u_0 = \frac{r}{b}, \quad p = \frac{r}{cK},$$

получаем простейшую математическую модель взаимодействия загрязнения с окружающей средой в виде следующих уравнений:

$$\frac{du}{dt} = \alpha - u - uv, \quad \frac{dv}{dt} = v(u_0 - u) - pv^2. \quad (11)$$

Легко видеть, что система уравнений (10) есть система хищник–жертва, где в качестве жертвы выступает загрязнение (не биологический объект), а в качестве хищника – биологически активная окружающая среда.

В системе уравнений (11) параметр α можно трактовать как обобщенную мощность источника загрязнения; u_0 – предельно допустимая концентрация для данной экосистемы (если $u > u_0$, $dv/dt < 0$, и природа вымирает); p – характеристика экосистемы – коэффициент внутривидовой конкуренции природы.

Положения равновесия системы уравнений (11), соответствующие условиям $du/dt = 0$ и $dv/dt = 0$, нетрудно найти из уравнений

$$\alpha - u(1 + v) = 0, \quad -v(u - u_0) - pv^2 = 0.$$

Тогда $A_1 = (\alpha, 0)$; $A_2 ((u_0 + p + Q)/2, (u_0 - p - Q)/(2p))$;

$$A_3 ((u_0 + p - Q)/2, (u_0 - p + Q)/(2p)), \quad Q = \sqrt{(u_0 + p)^2 - 4\alpha p}.$$

Второе и третье положения равновесия существуют, если $[(u + p)^2 - 4\alpha P] > 0$. Стандартный линейный анализ на устойчивость указанных положений равновесия приводит к параметрическому портрету системы уравнений (11), приведенному на рис. 3. На рис. 4 приведены соответствующие фазовые портреты системы уравнений (11).

Если параметры принадлежат области IV, то все траектории за исключением устойчивого многообразия A_1 стремятся при $t \rightarrow \infty$ к A_3 (рис. 4, а). Области II соответствует фазовый портрет на рис. 4, б. В области III существует единственный глобальный аттрактор A_1 (рис. 4, в).

Таким образом, описанная математическая модель соответствует трем качественно описанным выше ситуациям.

Однако в начале этого раздела в качестве главного предположения было указано, что модель содержит пороговую величину загрязнения, которая способна переработать природа. Этот эффект нужно учесть в математической модели.

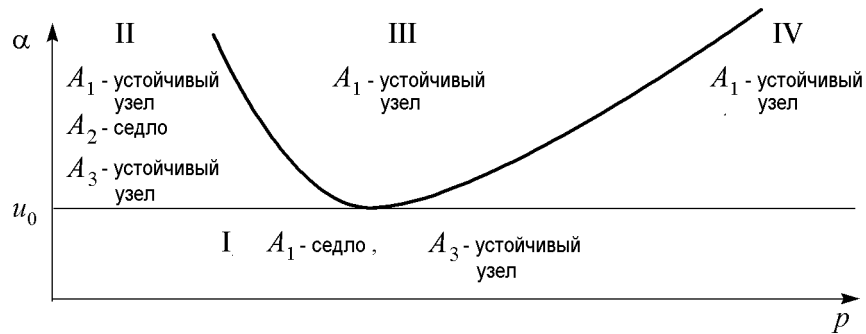


Рис. 3. Параметрический портрет системы уравнений (11). При фиксированном u_0 вся область допустимых параметров разбивается на четыре множества

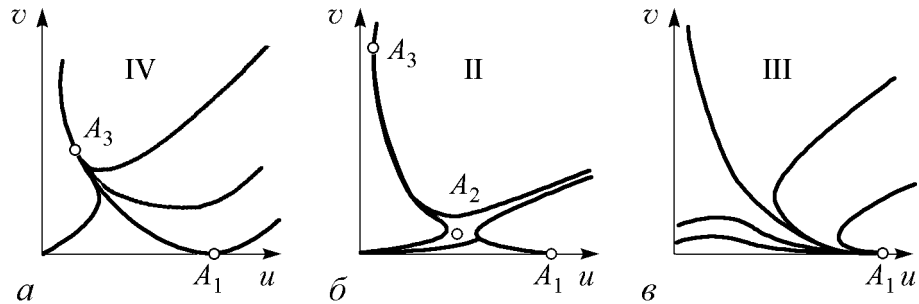


Рис. 4. Фазовые портреты системы уравнений (11)

Для этого в книге [6, с. 134] предлагается использовать одну из трофических функций, описывающих процесс насыщения, например,

$$f(\mathcal{E}, \mathcal{P}) = \frac{c\mathcal{E}\mathcal{P}b/d}{A + \mathcal{P}}. \quad (12)$$

Тогда при малой концентрации загрязнения $f(\mathcal{E}, \mathcal{P}) \approx c\mathcal{P}\mathcal{E}$, при высокой концентрации $f(\mathcal{E}, \mathcal{P}) \approx c\mathcal{E}$, что более реалистично, чем первоначальное выражение.

После приведения системы уравнений (9) к безразмерному виду с учетом соотношения (12) и переобозначений в [6, с. 135] получена следующая система уравнений:

$$\frac{du}{dt} = \alpha - u - \frac{uv}{\lambda + u}, \quad \frac{dv}{dt} = v(u_0 - u) - pv^2, \quad (13)$$

где $\lambda = A(d/b) > 0$ описывает степень влияния природы на загрязнение: чем больше его величина, тем меньше степень поглощения живой природы и наоборот.

По мнению авторов книги [6] параметр λ можно считать количественной характеристикой восприимчивости данной экосистемы к выбросам загрязнения.

В книге [6] также указано, что в системе уравнений (13) возможны одно, два или три состояния равновесия такого же характера, как и для системы (11). Причем авторы [6] подчеркивают, что априорные предположения относительно выбора тех или иных функциональных зависимостей в этой модели в большей степени адекватны действительности, чем выбранные модели (11).

2. Математическая модель очистки сточных вод [6,9]

Рассмотрим далее модель очистки сточных вод, основанную на следующих простых представлениях.

Будем рассматривать загрязнитель как «жертву», а биологически активный ил как «хищника». Процесс биохимического окисления загрязнителя будем трактовать как «поедание» его микроорганизмами активного ила.

Предположим, что имеется постоянный источник загрязнения, а активный ил способен перерабатывать загрязнение до определенного предела. Считаем, что изменение концентрации активного ила в чистой воде убывает по экспоненциальному закону.

Тогда динамику очистки сточных вод можно описать уравнениями

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = a - bD(\mathcal{P}) - cf(\mathcal{P}, \mathcal{E}), \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -d\mathcal{E} + eh(\mathcal{P}, \mathcal{E}),$$

где $\mathcal{P}(t)$ – концентрация загрязнения воды, $\mathcal{E}(t)$ – плотность биомассы активного ила, $D(\mathcal{P})$ – функция диссипации, характеризующая естественный распад загрязнения; $f(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ и $h(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ – трофические функции, характеризующие процесс очистки загрязнителя биологически чистым илом; $a > 0$ – мощность источника загрязнения; $d > 0$ – постоянная, характеризующая скорость убывания активного ила в чистой воде; c и e – положительные постоянные.

Допустим, что $D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, а трофические функции «хищника» и «жертвы» одинаковы и имеют вид:

$$f(\mathcal{P}, \mathcal{E}) = h(\mathcal{P}, \mathcal{E}) = \frac{\mathcal{P}\mathcal{E}}{r + \mathcal{P}}, \quad \text{где } r > 0 \text{ – постоянная.}$$

Тогда будем иметь:

$$\frac{dP}{dt} = a - bP - \frac{cPE}{r + P}, \quad \frac{dE}{dt} = -dE + \frac{ePE}{r + P}. \quad (14)$$

После введения безразмерных переменных $\tau = at$, $P = ru(\tau)$, $E = (rd/c) \cdot v(\tau)$ система уравнений (14) принимает вид

$$\frac{du}{d\tau} = \alpha - \beta u - \frac{uv}{1 + u}, \quad \frac{dv}{d\tau} = -v + \frac{\gamma uv}{1 + u}, \quad (15)$$

где $\alpha = a/(rd)$, $\beta = b/d$, $\gamma = e/d$. Неподвижные точки системы (15) $A_1(u_1, v_1) = (\alpha/\beta, 0)$ и $A_2(u_2, v_2) = (1/(\gamma - 1), [\alpha(\gamma - 1) - \beta]\gamma/(\gamma - 1))$.

Стандартный линейный анализ показывает, что точка $A_1(u_1, v_1)$ является седловой при $\beta < \alpha(\gamma - 1)$ и $\gamma > 0$ и устойчивым узлом при $\beta > \alpha(\gamma - 1)$.

Если увеличивать значение параметра α при фиксированных значениях β и $(\gamma - 1)$, что соответствует увеличению интенсивности источника загрязнения, то возникает устойчивое состояние равновесия $A_2(u_2, v_2)$. Если параметр α мал (мала интенсивность загрязнения), то масса биологически активного ила стремится к нулю. Поскольку загрязнитель является пищей для биологически активного ила, при недостаточной интенсивности загрязнителя биологически активный ил исчезает.

Разумно предположить, что существует некоторое пороговое значение концентрации загрязнения P^* , при превышении которого очищающая способность ила уменьшается, и рассмотреть трофические функции вида

$$f(P, E) = EPe^{-rP}, \quad r = \text{const} > 0.$$

В этом случае величина порогового значения загрязнения $P^* = 1/r$. В реальности в описываемом процессе есть еще одна компонента – процесс аэрации – насыщения ила кислородом, который значительно повышает способность переработки биологически активным илом загрязнителя. С учетом сказанного математическая модель очистки примет вид:

$$\frac{dP}{dt} = a - bP - cf(P, E), \quad \frac{dE}{dt} = -dE + ef(P, E)Q(t), \quad \frac{dQ}{dt} = -hQ + R, \quad (16)$$

где $a, b, c, d, e = \text{const} > 0$. Здесь $Q(t)$ – концентрация кислорода, а $R > 0$ определяет величину притока кислорода в систему в единицу времени.

Проведенный авторами книги [6] анализ системы уравнений (16) в предположении, что $f(P, E) = Pg(E)$, где $g(E)$ – гладкая монотонно возрастающая неотрицательная функция (причем $g(0) = 0$), показывает, что при достаточно близких значениях параметра R , определяющего количество поступающего в систему кислорода, всегда можно добиться стабильности системы.

3. Моделирование классовой борьбы [10,11]

Запишем уравнения модели «хищник–жертва» в виде следующей системы:

$$\frac{dx}{dt} = a(y_1 - y)x, \quad \frac{dy}{dt} = -b(x - x_1)y, \quad (17)$$

где x, y – численность популяций, x_1 и y_1 – их стационарные значения, a и b – постоянные.

Эта модель используется для описания малых городских ареалов [10]. В этом случае переменная x в системе уравнений (17) означает площадь землепользования, y – земельную ренту, a, b, x_1, y_1 – некоторые параметры.

Интересное приложение модели для описания классовой борьбы дано Гудвином [10,11]. Рассмотрим, следуя [11], два типа граждан: рабочих и капиталистов.

Рабочие тратят весь свой доход wL на потребление, капиталисты накапливают свой доход $Y - wL$, где Y – продукция производства. Цена потребительских товаров нормирована к единице.

Пусть K означает капитал, $a = a_0 e^{gt} = Y/L$ – производительность труда, возрастающую с постоянной скоростью g , $k = K/Y$ – коэффициент капиталоемкости продукции, $N = N_0 e^{nt}$ – предложение на рынке рабочей силы, которое увеличивается с темпом роста n . Доля затрат на оплату труда по отношению к национальному доходу составляет $wL/Y = w/a$. Следовательно, доля прибыли капиталистов составляет $(1 - w/a)$. Поскольку сбережения можно определить как $S = Y - wL = (1 - w/a)Y$, доля инвестиций составляет $dK/dt = S = (1 - w/a)Y$ или $(dK/dt)(1/K) = (1 - w/a)(Y/K)$; при этом выбытием капитала пренебрегаем.

При постоянном значении капиталоемкости $k = K/Y$ получаем $dk/dt = 0$ и

$$Y \frac{dK}{dt} = K \frac{dY}{dt}. \quad (18)$$

Далее, поскольку $a = a_0 e^{gt} = Y/L$, после дифференцирования по времени имеем

$$\frac{dY}{dt} \frac{1}{Y} - \frac{dL}{dt} \frac{1}{L} = g. \quad (19)$$

Кроме того, из (18) с учетом того, что $dK/dt = (1 - w/a)L$, следует

$$\frac{dY}{dt} \frac{1}{Y} = \frac{dK}{dt} \frac{1}{K} = \left(1 - \frac{w}{a}\right) \frac{1}{k}. \quad (20)$$

Из соотношений (19) и (20) окончательно находим:

$$\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \left(1 - \frac{w}{a}\right) \frac{1}{k} - g. \quad (21)$$

Введем новые переменные: $y = w/a$ – доля затрат на оплату труда; $x = L/N$ – коэффициент занятости.

После простых преобразований, с учетом (21) получаем

$$\frac{dx}{dt} = x \left[\frac{1-y}{k} - (g+n) \right], \quad (22)$$

$$\frac{dy}{dt} = y \left[\frac{1}{w} \frac{dw}{dt} - \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right], \quad (23)$$

где $(da/dt)(1/a) = g$.

Будем считать ставку заработной платы быстрой переменной, удовлетворяющей условиям:

$$\frac{dw}{dt} = wf(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) < 0, \quad \frac{df}{dx} > 0.$$

Линейная аппроксимация $f(x)$ в виде $(dw/dt)(1/w) = -r + bx$ превращает (23) в следующее уравнение:

$$\frac{dy}{dt} \frac{1}{y} = -r + px - g. \quad (24)$$

Объединяя (22) и (24), приходим к модели Гудвина, описываемой системой уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x \left[\frac{1}{k} - (g + n) - \frac{y}{k} \right], \quad \frac{dy}{dt} = y[-(g + r) + px]. \quad (25)$$

Очевидно, что система уравнений (25) эквивалентна системе уравнений (17), поэтому все выводы общего характера, справедливые для системы (17), верны и для модели Гудвина.

Заметим, что модель Гудвина, учитывающая взаимодействие между уровнем занятости и законодательно установленной долей отчислений на оплату труда, весьма напоминает классические модели политической экономии (её иногда называют неомарксистской). Модель вновь привлекает внимание к трудам экономистов-классиков, таких как Риккардо, Смит, Маркс. Увы, модель структурно неустойчива.

Итак, модель «хищник»–«жертва» может быть использована для моделирования явлений взаимосвязи городской земельной ренты и интенсивности землепользования, безработицы и динамики экономического роста.

4. Модель «хищник–жертва» для описания бесклассового общества – общества эпохи охотников-собирателей [12]

Для этой эпохи характерна низкая плотность населения и общинная (родовая) организация человеческого сообщества. Человек полностью зависел от природы, шла постоянная борьба за выживание, а главным из добываемых ресурсов была пища. Человек был частью экосистемы и отличался от других стайных хищников, по-сууществу, лишь умением использовать для собственных нужд огонь и примитивные орудия труда. Изменение численности населения в конкретном ареале, в основном, определялось состоянием ресурсной базы и может быть описано моделью «хищник–жертва» – системой уравнений (1). Теперь в этих уравнениях N – численность популяции объектов охоты («жертв»); P – численность древних охотников («хищников») в рассматриваемом ареале; cNP – скорость рождения «хищников»; dP – смертность «хищников»; aN – скорость гибели «жертв» (считается, что их пищевая база неограниченна); bNP – скорость гибели «жертв» за счет их истребления «хищниками» (считается, что это единственная причина смертности «жертв»). Решения этих уравнений анализировались во Введении). Поскольку охотники-собиратели потребляли то, что было произведено в природе без их участия, численность популяции определялась внешними условиями, повлиять на которые они не могли (в модели численность охотников-собирателей колеблется около среднего значения

$P_0 = a/b$. Заметим, что именно этим объясняется относительная стабильность численности населения Земли на протяжении всего каменного века до эпохи неолита.

Когда человек приручил животных и научился возделывать культурные растения, он превратился из охотника-собирателя в скотовода и земледельца. Таким образом, значительно увеличился коэффициент a и равновесная численность людей, поскольку величина коэффициента b , характеризующего потребление, осталась примерно на прежнем уровне.

5. Сходная идеология людей для описания военных действий [13,14,8]

В книге [13] Фредерик Ланчестер – английский эрудит и инженер – предложил простую модель борьбы двух противников (скажем, двух армий), которая носит его имя. Заметим, что такая же модель была предложена офицером царской армии М.О. Осиповым в 1915 году [14]. Поэтому справедливо называть эту модель моделью Ланчестера–Осипова. Далее в изложении будем следовать работе [8]. В данной модели состояние системы описывается точкой (x, y) положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки x и y – численности противостоящих армий. Уравнения модели имеют следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = -by, \quad \frac{dy}{dt} = -ax. \quad (26)$$

Здесь a и b – мощность оружия армии x и армии y , соответственно. Другими словами, каждый солдат армии x убивает за единицу времени a солдат армии y (и соответственно каждый солдат армии y убивает b солдат армии x). Таким образом, общая эффективность всех выстрелов армии x дается как ax , а для армии y – как by . В работе [8] предполагается, что непрерывная аппроксимация достаточно хороша, и скорость изменения численности войск пропорциональна эффективности выстрелов противной стороны. «Жесткая», по В.И. Арнольду, модель (26) допускает точное решение в виде:

$$ax^2 - by^2 = \text{const}. \quad (27)$$

Изменение численности армий x и y происходит вдоль гиперболы, заданной уравнением (27) (рис. 5). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки. Гиперболы разделены прямой $\sqrt{ax} = \sqrt{by}$. Если начальная точка лежит выше этой прямой, то гипербола выходит на ось y . Это означает, что в ходе войны численность армии x уменьшается за конечное время до нуля. Армия y выигрывает, противник уничтожен. Если же начальная точка лежит ниже прямой, выигрывает армия x . На прямой, как пишет Арнольд, война «к всеобщему удовлетворению» заканчивается истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены. Из соотношения (27) следует, что на прямой $\sqrt{ax} = -\sqrt{by}$. Тогда первое уравнение системы (26) принимает вид: $dx/dt = -\sqrt{abx}$. Его решением является $x = Ce^{-\sqrt{abt}}$, где $C = \text{const}$, и очевидно, что $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

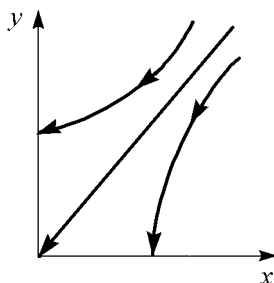


Рис. 5. «Жесткая» модель войны

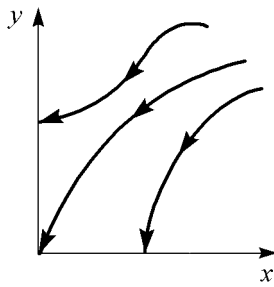


Рис. 6. «Мягкая» модель войны

$$\frac{dx}{dt} = -b(x, y)y, \quad \frac{dy}{dt} = -a(x, y)x?$$

Эта система уравнений уже не решается в явном виде. Но модель за счет изменений $a(x, y)$ и $b(x, y)$ становится «мягкой». Кривые на плоскости (x, y) уже не гиперболы и разделяет их не прямая (рис. 6). Но основной качественный вывод остается прежним: ситуации « x выигрывает» и « y выигрывает» разделены нейтральной линией «обе армии уничтожают друг друга за бесконечное время».

6. Простейшая вирусная модель инфекционного заболевания [15,16]

В 1974 году Г. Белл предложил простейшую модель иммунной реакции, в которой взаимодействие между антигеном и антителом описывается в терминах «хищник–жертва».

Изложим вариант теории Г. Белла [15], исходя из более общей модели Г.И. Марчука [16].

Основными факторами в модели инфекционного заболевания являются следующие:

- концентрация патогенных размножающихся антигенов $V(t)$;
- концентрация антител $F(t)$; под антителами понимают субстраты иммунной системы, нейтрализующие антигены (иммуноглобулины, рецепторы клеток);
- концентрация плазмочелюток C – носителей и продуцентов антител – предполагается постоянной;
- степень поражения органа-мишени не учитывается.

Уравнение, описывающее изменение числа антигенов (чужеродных клеток, проникающих в организм), имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \beta V - \gamma FV. \quad (28)$$

Первое слагаемое в уравнении (28) – скорость прироста антигенов за счет размножения; β – коэффициент размножения антигенов; слагаемое γFV описывает число антигенов, нейтрализуемых антителами F в единицу времени; γ – коэффициент, связанный с вероятностью нейтрализации антигена антителами при встрече с ними.

Для получения второго уравнения подсчитаем баланс числа антител, реагирующих с антигеном. Будем иметь

$$dF = \rho C dt - \eta \gamma FV dt - \mu_f F dt. \quad (29)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (29) описывает генерацию антител плазмменными клетками за время dt ; ρ – скорость производства антител плазмноклеткой. Второе слагаемое ($\eta\gamma FVdt$) описывает уменьшение числа антител за счет связи с антигенами, причем на нейтрализацию одного антигена приходится η антител. Третье слагаемое ($\mu_f Fdt$) описывает уменьшение популяции антител за счет старения; μ_f – коэффициент, обратно пропорциональный времени распада антител. Разделив уравнение (29) на dt , получим

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - (\mu_f + \eta\gamma V)F. \quad (30)$$

Если при $t < t_0$ $V(t) \equiv 0$, то начальные условия имеют вид

$$V(t_0) = V_0, \quad F(t_0) = F_0. \quad (31)$$

Пусть в дальнейшем $t_0 = 0$.

Рассмотрим два предельных случая динамики болезни. Допустим, что организм не производит антител данной специфичности, то есть $F(t) = F_0 = 0$ для всех $t \geq 0$ и $\rho = 0$. Тогда из (28) следует, что

$$\frac{dV}{dt} = \beta V \quad \text{и} \quad V(t) = V_0 e^{\beta t}, \quad (32)$$

где V_0 – доза заражения (начальная концентрация антигенов) при $t = 0$. Очевидно, что такое решение соответствует течению болезни с летальным исходом, так как нет компенсирующих рост антигенов факторов. Второй предельный случай: присутствующие в организме антитела (специфические к данному антигену) достаточны для того, чтобы уничтожить все проникшие в организм антигены, не включая в действие механизм антителообразования. В этом случае в уравнении (28) $\beta \ll \gamma F$. Предполагая дозу заражения V_0 малой, можно считать величину F постоянной, определяемой нормальным уровнем антител F^* . Тогда уравнение (28) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = (\beta - \gamma F^*) V$$

и его решение записывается так:

$$V = V_0 e^{-(\gamma F^* - \beta)t}.$$

В предельном случае, когда $B = 0$

$$V = V_0 e^{-\gamma F^* t}, \quad (33)$$

что соответствует высокому иммунологическому барьеру.

Решения (32) и (33) представлены на рис. 7. При заданных значениях коэффициентов модели и начальных условиях и естественно, что все семейство разнообразных динамик заболевания уложится в заштрихованной области на рис. 7 [16].

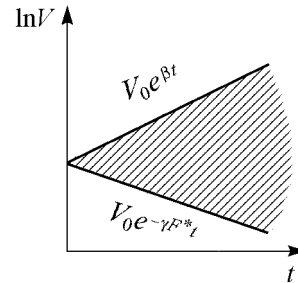


Рис. 7. Область заболеваний, ограниченная решениями для двух предельных случаев

7. Сходные модели распространения эпидемий [17,6]

Рассмотрим SIR–модель Кермака–МакКендрика, полагая, что особи популяции могут быть в трех различных состояниях:

- $S(t)$ – здоровые особи, которые находятся в группе риска и могут подхватить инфекцию;
- $I(t)$ – заразившиеся переносчики болезни;
- $R(t)$ – те, кто выздоровел и перестал распространять болезнь (в эту категорию относят, например, приобретших иммунитет или даже умерших).

Типичная эволюция особи популяции описывается следующей диаграммой:
 $S \rightarrow I \rightarrow R$.

Построим феноменологическую модель, соответствующую диаграмме, используя следующие допущения:

- 1) популяция замкнута и имеет постоянный размер N ;
- 2) промежуток времени, когда заболевший остается опасным для окружающих, распределен по экспоненциальному закону со средним $1/\gamma$;
- 3) контакты случайны и равновозможны (однородное перемешивание).

При этих допущениях будем иметь:

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda S, \quad \frac{dI}{dt} = \lambda I - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I,$$

где λ – так называемая сила инфекции, которая в данном случае равна произведению количества контактов в единицу времени, сделанных одним здоровым (обозначим это количество как cN), вероятности передать ему инфекцию при контакте p и вероятности встретить заболевшего $I(t)/N$. Обозначим $\beta = cp$. Тогда получаем $\lambda = \beta I$ и приходим к стандартной форме уравнений:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I, \quad \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0 \text{ и}$$

$$S(t) + I(t) + R(t) = N. \quad (34)$$

Третье уравнение в приведенной системе избыточно и, поскольку $dS/dt \leq 0$, то естественно считать фазовым пространством треугольник $S(t) + I(t) \leq N$.

Из первого и второго уравнений системы (34) следует, что

$$\frac{dI}{dS} = \frac{(\beta S - \gamma)I}{\beta SI} = -1 + \frac{\sigma}{S}, \quad \sigma = \frac{\gamma}{\beta}, \quad I \neq 0. \quad (35)$$

Учитывая начальные условия $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, найдем первый интеграл $I + S - \sigma \ln S = I_0 + S_0 - \sigma \ln S_0$, с помощью которого можно построить фазовые кривые на плоскости (S, I) (рис. 8). Кривые, приведенные на рис. 8, б, хорошо совпадают с данными по эпидемии чумы в Бомбее 1906 года.

В книге [6] предложено использовать модель, рассмотренную выше, с некоторой модификацией для анализа заражения вирусом компьютеров. Постановка задачи следующая.

Пусть S – число компьютеров, которые подвергаются заражению вирусом, I – часть компьютеров, зараженных вирусом и не имеющих антивирусного программного обеспечения, R – часть компьютеров, имеющих должную антивирусную защиту (иммунитет). Тогда уравнения модели имеют вид (см. систему уравнений (34)):

$$\frac{dS}{dt} = -aSI, \quad \frac{dI}{dt} = aSI - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI.$$

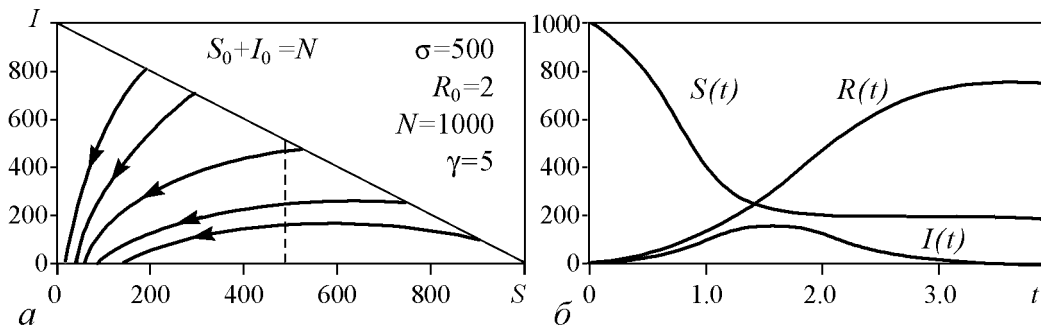


Рис. 8. Пример конкретного расчета по уравнениям (34) и (35)

Основная идея модификации этой классической модели эпидемии состоит во введении элемента цикличности, то есть элемента регулирующего добавления новых подверженных эпидемии компьютеров. В каждый новый отрезок времени число инфицированных компьютеров вычисляется на основе количества инфицированных компьютеров, оставшихся от предыдущего момента, а число подверженных эпидемии компьютеров разыгрывается как случайная величина по закону Пуассона с распределением $\rho_m = (\lambda^m/m!)e^{-\lambda}$, $m = 1, 2, \dots$

Решение задачи в [6] не приводится. Авторы [6] предлагают следующий путь решения. Построить график функции $I(t)$, численно решая приведенную выше систему уравнений с начальными условиями $S(0) = 100$, $I(0) = 1$, $R(0) = 0$, $\lambda = 10$, $a = 0.23$, $b = 0.5$. Добавление новых элементов предлагается производить при $t_k = k$, $k = 1, 2, \dots, 100$.

Возможно, кого-то из читателей заинтересует решение этой задачи и её многочисленных вариантов.

8. Обобщенная модель Лотки–Вольтерры для описания взаимодействия когнитивных и/или эмоциональных мод мозга [18]

Согласно работе [18], крупномасштабные когнитивные паттерны (моды или представления, наблюдаемые в эксперименте) в рабочем режиме мозга должны подавлять друг друга, что естественно должно происходить последовательно во времени. Иными словами, работающий мозг демонстрирует когнитивную и эмоциональную активность в виде цепочки сменяющих друг друга во времени комбинаций функциональных мод, а сами эти комбинации определяются родом ментальной активности.

По мнению авторов [18], «...конкуренция за конечные ресурсы одна из главных действующих сил, управляющих процессами мозга. Эти ресурсы – энергия (кислород и глюкоза) и информация (внимание и память). Важно, что информационные ресурсы – продукт деятельности самого мозга, то есть они могут по-разному влиять на эмоции и когнитивные функции (например, за счет управления вниманием) и должны быть включены в общую динамическую модель, определяющую рабочее пространство. ...Моды, представляющие в рабочем пространстве эмоции и когнитивные функции, взаимно обмениваются информацией и конкурируют в борьбе за энергетические и информационные ресурсы».

Авторы [18] претендуют на новую парадигму, заключающуюся в утверждении: «эмоции и когнитивные функции – это переходные динамические процессы, связанные с

функционально определяемым взаимодействием различных подсистем мозга, их конкуренцией и синхронизацией (координацией) во времени». Упомянутые выше процессы конкуренции когнитивных и эмоциональных мод между собой, а также эмоциональных и когнитивных мод друг с другом в работе [18] предлагается описывать системами уравнений типа Лотки–Вольтерры в следующей обобщенной форме:

$$\tau \frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t) \left[\mu_i(E) - \sum_{i=1}^n \varphi_{i,j}(E)x_i(t) \right] + x_i(t)\eta(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (36)$$

Здесь $x_i(t)$ характеризует активность i -й моды (численность i -й популяции в экологии); n – число взаимодействующих мод (популяций); $\mu_i(E)$ – поступающая в систему информация или доступные ресурсы; $\varphi_{i,j}(E)$ – элементы матрицы взаимодействия; $\eta(t)$ – мультипликативный шум, присутствующий в системе; τ – характерное время, определяющее процесс.

Если учесть специфику ресурсов, за которые борются когнитивные и эмоциональные моды, подсистем уравнений (36) должно быть три: моды эмоций, когнитивные моды и ресурсы (внимание, память, энергия). Особенно велика роль внимания. В статье [18] для простоты считается, ...что описание конкуренции за внимание между эмоциями и когнитивными функциями не требует спецификации отдельных мод, и поэтому можно ограничиться рассмотрением конкурентной борьбы за внимание «в целом» эмоций $\tilde{B} = \sum_{i=1}^n B_i$ и «в целом» когнитивных мод $\tilde{A} = \sum_{i=1}^n A_i$. Тогда базовые уравнения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \tau_A \frac{dA_i(t)}{dt} &= A_i(t) \left[\sigma_i(I, \tilde{B}, D)R_A - \sum_{j=1}^N \rho_{ij}(D)A_j(t) \right] + A_i(t)\eta(t), \quad i = 1, \dots, N, \\ \tau_B \frac{dB_i(t)}{dt} &= B_i(t) \left[\zeta_i(S, \tilde{A}, D)R_B - \sum_{j=1}^M \xi_{ij}(D)B_j(t) \right] + B_i(t)\eta(t), \quad i = 1, \dots, M, \\ \tau_{R_A} \frac{dR_A(t)}{dt} &= R_A(t) \left[\tilde{A} - (R_A(t) + \Phi_A(I, D)R_B(t)) \right], \\ \tau_{R_B} \frac{dR_B(t)}{dt} &= R_B(t) \left[\tilde{B} - (R_B(t) + \Phi_B(S, D)R_A(t)) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

В этих уравнениях A_i и B_i – неотрицательные переменные, соответствующие когнитивным и эмоциональным модам, общая интенсивность которых обозначается \tilde{A} и \tilde{B} , соответственно; I – информация от внешнего мира; S – характеристика эмоционального влияния от внешнего мира (в случае отрицательных эмоций – стресс); D – уровень принимаемых лекарств; τ_A и τ_B – характерные времена сознательной и эмоциональной активностей; $\eta(t)$ – мультипликативный шум; коэффициенты Φ_A и Φ_B определяют интенсивность борьбы за внимание со стороны эмоций и мышления. Зависимость параметров σ_i и ζ_i от \tilde{A} и \tilde{B} , соответственно, описывает прямое влияние активности когнитивных процессов на эмоции и эмоций на мышление. В статье [18]

представлен компьютерный анализ выписанных выше уравнений при наличии внешнего стимула $S(t)$, характеризующего уровень стресса. Обсуждается также взаимодействие настроения и мышления. Анализируется взаимодействие трех компонент активности мозга: поведения, эмоциональной памяти и когнитивной деятельности при отсутствии внешних воздействий.

Вместо заключения

В замечательной книге Ю.И. Неймарка [19, с. XIV и с. XVI] есть такие слова.

«Что такое модель? Слово “модель” из итальянского языка и означает “копия, образец, прототип”, изучив который, мы познаем оригинал. Значит, математическая модель – это прототип какой-то части мира – объекта, системы, устройства, машины, процесса, прибора, изучая который, мы постигаем эту часть мира...»

Если модель типовая (см. эпиграф) или, как говорят, эталонная, то с её помощью можно постичь не одну, а разные части мира. Именно такой моделью является математическая модель Лотки–Вольтерры. Разумеется, представленный обзор охватывает только часть её возможных приложений и не претендует на всеобщность.

Библиографический список

1. *Ch. Darwin*. Autobiography. 1958. С. 120.
2. *Браун Джанет*. Чарльз Дарвин. Происхождение видов / Сер. «10 книг, изменивших мир». М.: АСТ: аст., 2009. 220 с.
3. *Malthus T.R.* An essay on the principle of population, as it affects the future improvement of society. 1798.
<http://www.faculty.rsu.edu/felwell/Theorists/Malthus/essay2.htm>
4. *Lotka A.* Elements of Physical Biology. Baltimore, 1925. Reprinted by Dover in 1956 as Elements of Mathematical Biology.
5. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование / Пер. с франц. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. 288 с.
6. *Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П.* Динамические системы и модели биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 400 с.
7. *Базыкин А.Д.* Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.
8. *Арнольд В.И.* «Жесткие» и «мягкие» модели // Природа. 1998. № 4. С. 3.
9. *Братусь А.С., Мещерин А.С., Новожилов А.С.* Математические модели взаимодействия загрязнения с окружающей средой // Вестник МГУ. Сер. Вычислительная математика и кибернетика. 2001. Т. 6. С. 140.
10. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и переменны в нелинейной экономической теории / Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 335 с.
11. *Goodwin R.M.* A Growth Model // Socialism and Growth. Cambridge: University Press, 1967.
12. *Малков С.Ю.* Социальная самоорганизация и исторический процесс. Глава 2. М.: УРСС, 2009.
13. *Lanchester F.W.* Aircraft in warfare: The down of the fourth arm. London, Constable, 1916.

14. *Осинов М.О.* О влиянии численности вступающих в бой сил на их потери // Военный сборник, июнь-октябрь, 1915.
15. *Bell G.* Prey – predator equations simulating on immune response // *Math. Biosci.* 1973. № 16. С. 291.
16. *Марчук Г.И.* Математические модели в иммунологии и медицине. Глава 2. М.: Наука, 1985.
17. *Kermack W.O. and Mc.Kendrick A.G.* Contribution to the mathematical theory of epidemics // *Proceedings of Royal Statistical Society A.* 1927. Vol. 115. P. 700.
18. *Рабинович М.И., Мюезинолу М.К.* Нелинейная динамика мозга: эмоции и интеллектуальная деятельность // *УФН.* 2010. № 4.
19. *Неймарк Ю.И.* Математические модели в естествознании и технике. Н. Новгород: Издательство Нижегородского университета, 2004.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 11.02.2011

PHENOMENON OF LOTKA–VOLTERRA MATHEMATICAL MODEL AND SIMILAR MODELS

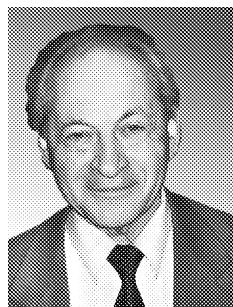
D.I. Trubetskov

Lotka–Volterra mathematical model (often called «predator–prey» model) is applicable for different processes description in biology, ecology, medicine, in sociology investigations, in history, radiophysics, etc.

Variants of this model is considered methodologically in this review.

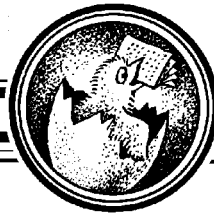
The next models are observed: model of contamination or other dirty interaction with surroundigs; model of class struggle; model of classless society – epock of hunters-gatherers; military operations model; model of virus infection diseases; model of epidemic spreading, so virus of computers infection spreading; model of cognitive and(or) emotion cerebral modes.

Keywords: Lotka–Volterra mathematical model, «predator–prey» system, analysis of natural or society phenomena.



Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: TrubetskovDI@nonlin.sgu.ru



О ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРЫ

А.А. Фунтов

Доказана возможность аналитического решения уравнения Лотки–Вольтерры модели «хищник–жерва» и усложненных моделей.

Ключевые слова: Уравнения Лотки–Вольтерры, модель хищник–жертва, аналитическое решение.

Исходные уравнения модели «хищник–жертва» имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = e_1 N_1 - y_2 N_1 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = -e_2 N_1 + y_1 N_1 N_2, \end{cases} \quad (1)$$

где N_1 – число жертв; N_2 – число хищников; $e_{1,2}$, $y_{1,2}$ – положительные постоянные.

Цель данной работы – найти аналитическое решение уравнений (1) и доказать возможность его использования путем сравнения с хорошо известными численными решениями, которые можно найти, например, в [1].

Представим функцию $N(t)$ в виде

$$N_i(t) = N_{i0} + \tilde{N}, \quad (2)$$

где $i = 1, 2$, $N_{10} = e_2/y_1$ и $N_{20} = e_1/y_2$ – равновесные значения численности популяций, а $\tilde{N}_i(t)$ – отличие от равновесных значений. Используем (2) в системе уравнений (1), тогда

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{N}_1}{dt} = \frac{-y_2 e_2}{y_1} \tilde{N}_2 - y_2 \tilde{N}_1 \tilde{N}_2, \\ \frac{d\tilde{N}_2}{dt} = \frac{y_1 e_1}{y_2} \tilde{N}_1 + y_1 \tilde{N}_1 \tilde{N}_2. \end{cases} \quad (3)$$

Введем величину ε в систему (3) и, считая, что $\varepsilon = \text{const} \ll 1$, получим

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{N}_1}{d\tau} = -\tilde{N}_2 - \varepsilon\tilde{N}_1\tilde{N}_2, \\ \frac{d\tilde{N}_2}{d\tau} = \tilde{N}_1 + \varepsilon\tilde{N}_1\tilde{N}_2. \end{cases} \quad (4)$$

При выводе (4) были приняты следующие допущения и введены следующие обозначения:

$$y_1 = y_2, \quad e_1 = e_2, \quad \frac{e_2 y_2}{y_1} dt = \frac{e_1 y_1}{y_2} dt = d\tau \quad \text{и} \quad \frac{y_1}{e_2} \approx \frac{y_2}{e_1} = \varepsilon \ll 1.$$

Будем искать решение (4) в виде разложения по ε

$$\begin{cases} \tilde{N}_1(\tau) = n_1 + \varepsilon n_2 + \varepsilon^2 n_3, \\ \tilde{N}_2(\tau) = m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon^2 m_3. \end{cases} \quad (5)$$

Выражения (5) подставим в систему (4), что приводит к уравнениям

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{d\tau} + \varepsilon \frac{dn_2}{d\tau} + \varepsilon^2 \frac{dn_3}{d\tau} = \\ \quad = -(m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon^2 m_3) - \varepsilon(m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon^2 m_3)(n_1 + \varepsilon n_2 + \varepsilon^2 n_3), \\ \frac{dm_1}{d\tau} + \varepsilon \frac{dm_2}{d\tau} + \varepsilon^2 \frac{dm_3}{d\tau} = \\ \quad = n_1 + \varepsilon n_2 + \varepsilon^2 n_3 + \varepsilon(m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon^2 m_3)(n_1 + \varepsilon n_2 + \varepsilon^2 n_3). \end{cases} \quad (6)$$

Выделяя в (6) слагаемые с ε^0 , ε , ε^2 , получим

$$\varepsilon^0 \begin{cases} \frac{dn_1}{d\tau} = -m_1, \\ \frac{dm_1}{d\tau} = n_1, \end{cases} \quad (7)$$

$$\varepsilon \begin{cases} \frac{dn_2}{d\tau} = -m_2 - n_1 m_1, \\ \frac{dm_2}{d\tau} = n_2 + n_1 m_1, \end{cases} \quad (8)$$

$$\varepsilon^2 \begin{cases} \frac{dn_3}{d\tau} = -m_3 - n_2 m_1 - n_1 m_2, \\ \frac{dm_3}{d\tau} = n_3 + n_2 m_1 + n_1 m_2. \end{cases} \quad (9)$$

Найдем решения систем уравнений (7–9) и подставим их в (5). Полученные значения \tilde{N}_1 и \tilde{N}_2 подставим в (2), что дает окончательно следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(t) = \frac{e_2}{y_1} + a \cos \left[\frac{y_2 e_2}{y_1} t + \varphi \right] + \\ \quad + \varepsilon \left[\frac{-a^2}{2} \left(\sin 2 \left[\frac{y_2 e_2}{y_1} t + \varphi \right] - \sin 2\varphi \right) + \frac{a^2}{4} \left(\cos 2 \left[\frac{y_2 e_2}{y_1} t + \varphi \right] - \cos 2\varphi \right) \right], \\ N_2(t) = \frac{e_1}{y_2} + a \sin \left[\frac{y_1 e_1}{y_2} t + \varphi \right] + \\ \quad + \varepsilon \left[a^2 \left(\sin 2 \left[\frac{y_1 e_1}{y_2} t + \varphi \right] - \sin 2\varphi \right) - a^2 \cos 2 \left[\frac{y_1 e_1}{y_2} t + \varphi \right] \right], \end{array} \right. \quad (10)$$

где первые слагаемые есть равновесные значения численности, а вторые и третьи слагаемые есть отличие от равновесных значений. Полученные выражения (10) являются приближённым аналитическим решением уравнений Лотки–Вольтерры.

Следует заметить, что постоянная a и разность фаз φ определяются из начальных условий. Если предположить, что $N_1(0) = x_0$ и $N_2(0) = y_0$, то получим (пренебрегая третьими слагаемыми [2]):

$$\varphi = \arctg \left(\frac{y_0 - \frac{e_1}{y_2}}{x_0 - \frac{e_2}{y_1}} \right) \quad \text{и} \quad a = \frac{x_0 - \frac{e_2}{y_1}}{\cos \varphi}. \quad (11)$$

Нетрудно видеть (рис. 1), что решения, полученные автором аналитически, $N_1(t)$ и $N_2(t)$ хорошо совпадают с решениями $N_{11}(t)$ и $N_{22}(t)$, полученными численными методами [1], с точностью до коэффициентов.

Пользуясь аналогичными рассуждениями, найдем решения для усложненных моделей, а именно для случаев симбиоза и конкуренции популяций. Исходные уравнения для симбиоза имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU_1}{dt} = U_1 (r_1 + a_{11}U_1 + a_{12}U_2), \\ \frac{dU_2}{dt} = U_2 (r_2 + a_{21}U_1 + a_{22}U_2), \end{array} \right. \quad (12)$$

где U_1 – численность жертв, U_2 – численность хищников, $r_{1,2}$, $a_{11,12,21,22}$ – положительные постоянные. Исходные уравнения для конкуренции популяций

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} \right) - a N_1 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} \right) - b N_1 N_2, \end{array} \right. \quad (13)$$

где N_1 – численность жертв, N_2 – численность хищников, $r_{1,2}$, a , b , K_1 , K_2 – положительные постоянные. Как видно из рис. 2, решения верно изображают характер осцилляций.

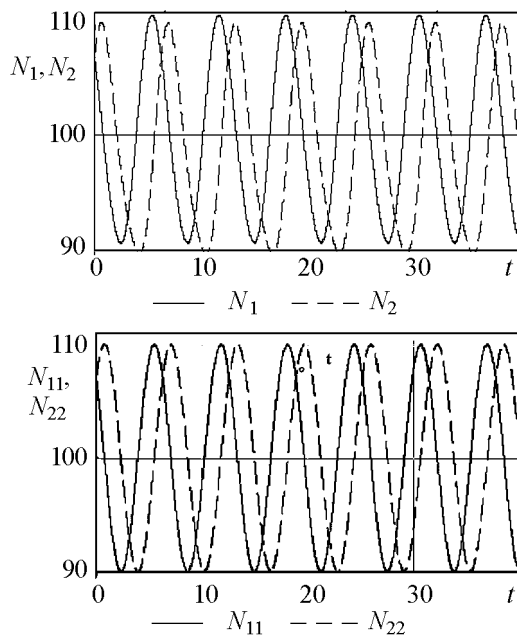


Рис. 1. Графики для модели «хищник–жертва», где $N_1(t)$ и $N_2(t)$ – решения, полученные аналитически, $N_{11}(t)$ и $N_{22}(t)$ – решения, полученные численными методами. Значения коэффициентов, используемых в обоих решениях: $e_1 = e_2 = 1$, $y_1 = y_2 = 0.01$, $\varepsilon = 0.01$, $a = 10$, $\varphi = \pi/4$

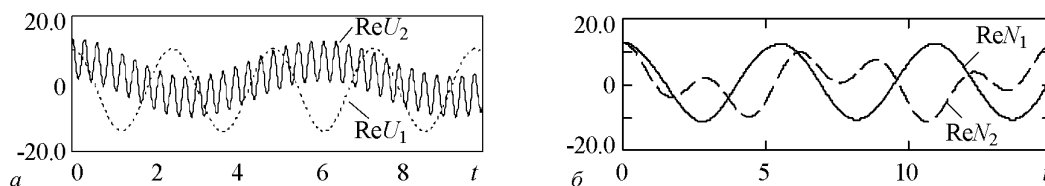


Рис. 2. Графики для усложненных моделей: *a* – симбиоз (значения коэффициентов изображенных на графике решений: $r_1 = 12$, $r_2 = 14$, $a_{11} = 13.2$, $a_{12} = 8.7$, $a_{21} = 13$, $a_{22} = 7$); *b* – конкуренция ($r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $K_1 = 2$, $a = 2$, $K_2 = 3$, $b = 3$, $\varepsilon = 0.001$)

В заключение сформулируем основные результаты работы.

- Получены приближённые аналитические решения для модели «хищник–жертва», довольно хорошо совпадающие с решениями, полученными численными методами.
- Получены аналитические решения для усложненных моделей «хищник–жертва», а именно для случаев симбиоза и конкуренции популяций.

Библиографический список

1. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
2. *Кузнецов А. П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания: Учебное пособие для вузов. М.: Физматлит, 2002.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 24.01.2011

ABOUT APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF LOTKA–VOLTERRA EQUATIONS

A.A. Funtov

The possibility of analytical decision of Lotka–Volterra equation is demonstrated for «predator–prey» model, and for complicated models.

Keywords: Lotka–Volterra equation, model a predator-prey, analytical solution.



Фунтов Александр Андреевич – родился в 1992 году. Окончил среднюю школу № 20 города Балаково (2009). В настоящее время студент 2 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Участвовал в научной конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых–2010».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alexfuntov@mail.ru



ХАОС В ОБЪЕМНЫХ ЛАЗЕРАХ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ*

С.Н. Сытова

Описана математическая модель объемного лазера на свободных электронах. Рассмотрены отдельные стороны и причины возникновения хаотической динамики излучения в таком лазере.

Ключевые слова: Релятивистская СВЧ-электроника, объемные лазеры на свободных электронах, математическое моделирование, хаос, нелинейная динамика.

Введение

Начиная с середины XX века после создания обширного класса вакуумных электронных приборов, среди которых лампы бегущей волны (ЛБВ) [1], лампы обратной волны (ЛОВ) [2], оротрон [3] и др., началась эра бурного развития электроники, в том числе релятивистской СВЧ-электроники. Основа функционирования таких приборов заключается в излучении электронов, сгруппированных в сгустки и взаимодействующих в резонаторе с замедленными электромагнитными волнами. В семидесятые годы прошлого века большой шаг вперед был сделан также в связи с созданием лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) [4], основной принцип работы которых также использует излучение электронов, движущихся в ондуляторе, колеблющихся и излучающих под действием внешнего электромагнитного поля. Таким образом, в настоящее время существует большое количество различных типов генераторов электромагнитного излучения на основе электронных пучков, использующих различные принципы и механизмы спонтанного излучения – дифракционное излучение [5], излучение Смита–Парселла [6], черенковское излучение [7] и др. Все эти приборы [8] обладают рядом общих принципов функционирования и достоинств, в частности, имеют очень хорошие к.п.д. и другие характеристики, позволяют получать большие мощности излучения в узких спектральных диапазонах, но также

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

имеют недостатки. Среди последних можно назвать угрозы пробоя волновода при больших мощностях и сложность создания сверхразмерных систем.

Последнее, в частности, связано с тем, что во всех вариантах ЛОВ, ЛБВ, оротронах, карсинотронах и др., в которых излучение возбуждается вследствие пролета электронов над плоской периодической замедляющей системой, невозможно использование широкого по двум направлениям (не ленточного) электронного пучка, так как во всех этих приборах пучок должен проходить на расстоянии

$$d \leq \frac{\lambda\beta\gamma}{4\pi}, \quad (1)$$

где при длине волны, например, $\lambda = 1$ см и параметрах электронного пучка $\beta = v/c = 0.8$, $\gamma = 1.67$ (лоренц-фактор) получается $d \approx 0.1$ см, то есть необходим очень тонкий пучок. Это же условие приводит к ограничению мощности прибора.

В широко распространенных вакуумных электронных приборах и ЛСЭ распределенная обратная связь (ОС), обеспечивающая эффективное взаимодействие электромагнитных волн с электронным пучком, как правило, одномерна, то есть пучок электронов и волновые векторы электромагнитного излучения направлены вдоль одной прямой в одном или противоположных направлениях.

Существует ряд электронных приборов, в которых электронный пучок и электромагнитные волны распространяются не вдоль одной прямой. В оротроне излучение выводится под углом 90 градусов к замедляющей системе. Здесь используется ленточный тонкий пучок, поскольку принцип действия оротрона основан на дифракционном излучении в тонком поверхностном слое над дифракционным зеркалом, и, соответственно, справедлива оценка (1).

Большой интерес представляют релятивистские многоволновые черенковские генераторы [9], в которых получены гигаваттные мощности. Здесь кольцевой пучок возбуждает поверхностные волны в сверхразмерном цилиндрическом периодическом волноводе, диаметр которого составляет несколько длин волн генерируемого излучения. Но поскольку пучок кольцевой (опять справедлива оценка (1)), то амплитуды волн экспоненциально затухают с удалением от поверхности волновода и возникает необходимость проводки пучка на достаточно близком расстоянии от поверхности.

В [10] рассматриваются двумерно- и трехмерно-периодические замедляющие системы, которыми являются многорядные и многоэтажные штыревые системы, используемые в мощных генераторных и усилительных лампах СВЧ. Среди первых таких систем была электронно-лучевая лампа малой мощности миллиметрового диапазона с замедляющей системой в виде металлических пластин со щелями [11].

Но ни в одном из известных электронных приборов не используется работа генератора в условиях, когда для электромагнитных волн выполняются условия дифракции Брэгга в резонаторе вблизи области совпадения корней дисперсионного уравнения. В [12, 13] были предложены принципы создания нового типа генераторов электромагнитного излучения – объемных ЛСЭ, которые оказались свободными от ряда недостатков электронных вакуумных приборов, указанных выше.

1. Основные принципы работы объемного лазера на свободных электронах

Новая закономерность [12,13] возрастания инкремента излучательной неустойчивости пучка частиц, пролетающего через трехмерную пространственно-периодическую мишень в условиях дифракции, от числа волн, возбуждаемых в решетке, явилась теоретической основой принципиально нового типа генераторов электромагнитного излучения – объемных лазеров на свободных электронах (ОЛСЭ), использующих в качестве резонатора трехмерную дифракционную решетку, и поверхностных ЛСЭ с резонатором в виде двумерной периодической структуры [13–15]. Инкремент неустойчивости в комптоновском режиме для электронного пучка, проходящего через такую пространственно-периодическую мишень, вблизи точек вырождения корней дисперсионного уравнения в зависимости от числа s дополнительных волн, возбуждаемых в системе в условиях дифракции, изменяется приблизительно на $\rho^{1/(3+s)}$ вместо $\rho^{1/3}$ для ЛОВ, ЛБВ, ЛСЭ. Вместо обычной оценки порогового тока $j_{\text{start}} \sim 1/(kL)^3$ при определенных условиях оказывается справедливой следующая оценка при генерации s дополнительных дифрагированных волн:

$$j_{\text{start}} \sim \frac{1}{(kL)^{3+2s}}, \quad (2)$$

где $k = \omega/c$, ω – частота излучения, L – длина пространственно-периодической мишени.

Экспериментальные исследования [16–19] подтвердили правильность теории ОЛСЭ.

Основные принципы, лежащие в основе работы ОЛСЭ:

- динамическая дифракция электромагнитных волн в пространственно-периодической трехмерной дифракционной решетке (фотонном кристалле);
- объемная (неоднородная) распределенная обратная связь;
- широкий в поперечном сечении электронный пучок (либо ленточный в случае поверхностного ЛСЭ).

Теория ОЛСЭ справедлива для всех частотных диапазонов (от миллиметрового и субмиллиметрового до оптического и рентгеновского).

1.1. Физическая модель объемного лазера на свободных электронах.

Рассмотрим физическую модель ОЛСЭ с объемной распространенной ОС (рис. 1, *a*), реализуемой за счет механизма динамической дифракции в трехмерной дифракционной решетке (фотонном кристалле). Здесь и ниже рассмотрены двухволновые геометрии ОЛСЭ, в которых в результате дифракции в мишени образуются две сильные электромагнитные волны (рис. 1, *b*). Различные многоволновые геометрии ОЛСЭ представлены в [20]. Пример одного из вариантов трехволновой дифракции приведен на рис. 1, *в*. Четырех- и восьмиволновая дифракция в рентгеновском диапазоне была подтверждена экспериментально [22, 23]. Моделирование трехволновых геометрий было проведено в [24].

Схематично принцип работы одного из типов ОЛСЭ изображен на рис. 1, *a*. Пусть монохроматичный широкий релятивистский электронный пучок со скоростью u «падает» под некоторым углом на трехмерную пространственно-периодическую

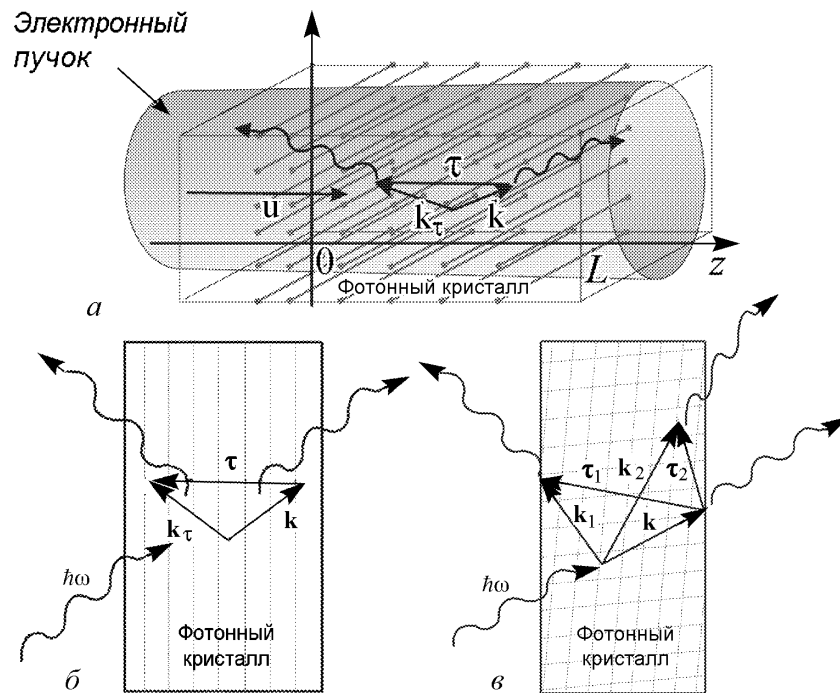


Рис. 1. Схема ОЛСЭ (а); двухволновая (б) и трехволновая (в) дифракция на фотонном кристалле мишень длиной L . Электроны пучка начинают испускать спонтанное излучение, которое при одновременном выполнении условий дифракции

$$2\mathbf{k}\tau + \tau^2 \approx 0 \quad (3)$$

и условий синхронизма

$$|\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}| = \delta\omega \approx 0 \quad (4)$$

преобразуется в коллективное параметрическое (квазичеренковское) излучение [25–27] с частотой ω и волновыми векторами \mathbf{k} и $\mathbf{k}_\tau = \mathbf{k} + \tau$, где τ – вектор обратной решетки мишени.

В результате динамической дифракции в области генерации формируются две (или более) сильно связанные волны в существенно неоднородной геометрии, когда волновые векторы проходящих и дифрагированных волн, а также вектор скорости электронов пучка расположены под углами друг по отношению к другу, то есть реализуется объемная распределенная ОС. Характерная величина отстройки от (4) определяется либо длиной области взаимодействия электронного пучка с волной (в случае слабого усиления) либо плотностью электронного пучка (в случае сильного усиления) [28]. Более того, параметры геометрии ОЛСЭ могут быть выбраны таким образом, что для волн выполняются условия дифракции Брэгга вблизи области совпадения корней дисперсионного уравнения. В результате формирования волн в такой объемной системе при определенных условиях возникают моды, взаимодействующие с электронным пучком значительно более эффективно, чем в одномерной ситуации. В областях вблизи точек вырождения корней дисперсионного уравнения групповая скорость электромагнитной волны резко уменьшается, излучение за счет

непрерывного переотражения на периодических плоскостях задерживается в области взаимодействия электронного пучка с волной.

В рентгеновском диапазоне в качестве мишени используются кристаллические пластинки. В этом случае величина пространственного периода определяется периодом кристаллической решетки, и испускаемое излучение имеет длину, сравнимую с межатомными расстояниями, то есть принадлежит рентгеновскому диапазону. В СВЧ-диапазоне в качестве мишени может использоваться искусственная дифракционная решетка, гофрированный волновод, объемная периодическая система, состоящая из периодически натянутых диэлектрических или металлических нитей. Все эти мишени можно объединить одним термином – «фотонные кристаллы» [21].

Особенно большое значение объемная распределенная ОС имеет для дискриминации мод при генерации больших мощностей в сверхразмерной системе, которой является ОЛСЭ. Поперечное сечение электронного пучка в таких системах значительно превышает длину волны излучения. Большие поперечные размеры электронного пучка позволяют распределить его мощность и мощность генерируемой волны по большому объему, тем самым снижая локальную нагрузку на отдельные элементы. Как хорошо известно, при этом возникает генерация большого количества нежелательных мод. В результате развивается деструктивная интерференция, и излучение становится некогерентным. Объемная распределенная ОС позволяет выделить требуемые моды и подавить нежелательные. Поэтому исследование развития неустойчивости в зависимости от величин физических параметров электронного пучка и ОС является актуальной задачей.

Существует несколько стадий развития неустойчивости в ОЛСЭ. Стадия неустойчивости, соответствующая регенеративному усилению, лежит в области параметров, определяющих баланс скорости наработки излучения синхронной с электронным пучком волной и скорости поглощения излучения дифрагированной волны, обеспечивающей объемную распределенную ОС в фотонном кристалле. В этом случае в системе происходит усиление падающей извне волны. Параметры, при которых величина генерируемого излучения и потери выравниваются, отвечают пороговой точке генерации. В этом случае генерация излучения развивается из спонтанного некогерентного излучения. После перехода управляющих параметров через точку генерации реализуется нелинейный режим. Если величины управляющих параметров (например, плотность тока электронного пучка) ненамного превосходят пороговые значения, то нелинейный режим приводит к стационарному насыщению. При изменении физических параметров могут возникать переходы между различными типами нелинейной неустойчивости по различным сценариям: режим стационарного насыщения – колебательные режимы – хаос.

1.2. Моды в объемном лазере на свободных электронах. В физических принципах функционирования ОЛСЭ заложено формирование в области взаимодействия в каждой из сильно связанных волн нескольких мод, которые также связаны между собой. Другими словами, в общем случае n -волновой динамической дифракции напряженность электрического поля \mathbf{E} можно искать в виде

$$\mathbf{E} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{e}_j E_j e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (5)$$

где i – мнимая единица; \mathbf{e} – вектор поляризации; E_j – амплитуда j -й сильной волны, \mathbf{k}_j – ее волновой вектор; $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$, $\mathbf{k}_j = \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}_j$, $j = 1, \dots, n - 1$, $\boldsymbol{\tau}_j$ – векторы обратной решетки фотонного кристалла.

Это решение можно представить по-другому [28], в виде мод

$$\mathbf{E} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{e} C_j e^{i(\mathbf{k}_j^* \mathbf{r} - \omega t)} \left(1 + \sum_{l=1}^{n-1} s_j^l e^{i\boldsymbol{\tau}_l \mathbf{r}} \right), \quad (6)$$

где C_j , s_j^l – коэффициенты связанных мод; $\mathbf{k}_j^* = \mathbf{k} + k\delta_j \mathbf{n}$, δ_j – корни дисперсионного уравнения, \mathbf{n} – нормаль к задней стенке фотонного кристалла.

Синхронизм нескольких мод с электронами пучка соответствует вырождению корней дисперсионного уравнения. Специальным выбором параметров геометрии системы [20, 28], когда несколько мод находятся в синхронизме, можно изменить пороговую закономерность ОЛСЭ. То есть, если только одна мода находится в синхронизме с электронным пучком, пороговый ток пропорционален следующей величине:

$$j_{\text{start}} \sim \frac{1}{(kL)^3}.$$

Если две моды находятся в синхронизме с электронами, мы имеем следующую оценку:

$$j_{\text{start}} \sim \frac{1}{(kL)^5}.$$

И в общем случае для n мод в синхронизме с электронами оценка будет иметь вид

$$j_{\text{start}} \sim \frac{1}{(kL)^{3+2(n-1)}}.$$

Таким образом, пороговый ток может быть существенно понижен при синхронизме нескольких мод в многоволновой геометрии дифракции. С другой стороны, длина взаимодействия может быть существенно уменьшена при фиксированной величине тока пучка. Данный закон был подтвержден численными расчетами [24].

2. Математическая модель объемного лазера на свободных электронах

Рассмотрим схему двухволнового ОЛСЭ, приведенную на рис. 1, *а*, *б*. Уравнения, описывающие нелинейную стадию работы ОЛСЭ, получаются из уравнений Максвелла в приближении медленно меняющихся амплитуд. В случае двухволновой дифракции будем искать решение в виде (5):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{e}(E e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + E_{\tau} e^{i(\mathbf{k}_{\tau}\mathbf{r} - \omega t)}), \\ \mathbf{j} &= \mathbf{e} j e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (7)$$

где \mathbf{j} – плотность тока электронного пучка. $E(z, t)$ и $E_{\tau}(z, t)$ – комплекснозначные амплитуды проходящей и дифрагированной волн.

В условиях динамической дифракции в фотонном кристалле электрическая индукция представима в виде [29]

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \approx \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

где $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{\tau} \varepsilon(\tau, \omega) \exp(-i\tau\mathbf{r})$; $\varepsilon(0, \omega) = 1 + \chi_0$, $\varepsilon(\tau, \omega) = \chi_{\tau}$, $\varepsilon(-\tau, \omega) = \chi_{-\tau}$, $\chi_0, \chi_{\tau}, \chi_{-\tau}$ – коэффициенты разложения диэлектрической проницаемости среды в ряд по векторам обратной решетки. Принципы вычисления этих коэффициентов в фотонных кристаллах даны в [21]. Тогда

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = (1 + \chi_0)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{e}\chi_{-\tau}E(z, t)e^{i(\mathbf{k}_{\tau}\mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{e}\chi_{\tau}E_{\tau}(z, t)e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Считаем также, что $\mathbf{H} = \mathbf{B}$. Окончательно система уравнений без конкретизации правой части I , описывающей электронный пучок, будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \gamma_0 c \frac{\partial E}{\partial z} + 0.5i\omega l E - 0.5i\omega\chi_{\tau}E_{\tau} = I, \quad (8)$$

$$\frac{\partial E_{\tau}}{\partial t} + \gamma_1 c \frac{\partial E_{\tau}}{\partial z} - 0.5i\omega\chi_{-\tau}E + 0.5i\omega l_1 E = 0,$$

где $l_0 = (\mathbf{k}^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0)/\omega^2$, $l_1 = (\mathbf{k}_{\tau}^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_0)/\omega^2$, $l = l_0 + \delta$, δ – отклонение от выполнения условий синхронизма; $\gamma_0 = (\mathbf{k}, \mathbf{n})$, $\gamma_1 = (\mathbf{k}_{\tau}, \mathbf{n})$ – направляющие косинусы объемной распределенной ОС, $\beta = \gamma_0/\gamma_1$ – фактор асимметрии; $\varepsilon_0 = 1 + \chi_0$.

Граничные условия для геометрии рис. 1, a, b выглядят следующим образом:

$$E(z = 0, t) = E_0, \quad E_{\tau}(z = L, t) = 0. \quad (9)$$

Другие варианты граничных условий были представлены в [24, 34].

Рассмотрим, как динамика электронного пучка в ОЛСЭ моделируется усреднением по фазам влета электронов в область взаимодействия. Этот метод [30] хорошо известен и широко применяется для расчета ЛБВ, ЛОВ, ЛСЭ и других электронных приборов [8, 31, 32]. Как было показано в наших исследованиях, этот метод также хорошо работает при моделировании динамики пучка в ОЛСЭ.

Рассмотрим замагниченный пучок, движение электронов которого можно считать как одномерным. Введем функцию $\Theta(t, z, p)$, описывающую фазу электронного пучка по отношению к электромагнитному полю. Фаза любого электрона, влетающего в область взаимодействия при $z = 0$ в момент времени t_0 , может быть представлена в следующем виде:

$$\vartheta(t, t_0, \mathbf{r}_{\perp}) = k_z z + \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp} - \omega t(z, t_0).$$

Здесь $t(z, t_0)$ – траектория движения этого электрона при движении в фотонном кристалле [30]. Начальная фаза при $z = 0$ имеет вид

$$\vartheta(t = t_0, t_0, \mathbf{r}_{\perp}) = \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp} - \omega t_0 = \Theta_1 - \Theta_0 = p,$$

где $\Theta_0, \Theta_1 \in [0, 2\pi]$, $p \in [-2\pi, 2\pi]$. Проводя усреднение комбинации начальных фаз $\Theta_1 - \Theta_0$, перейдем от микроскопического к макроскопическому описанию.

Выполняя некоторые преобразования, из уравнения движения для каждого электрона получим окончательно

$$\frac{d^2\Theta(t, z, p)}{dz^2} = \frac{e\Phi}{m\gamma^3\omega^2} \left(k_z - \frac{d\Theta(t, z, p)}{dz} \right)^3 \cdot \text{Re} \left(E(t - z/u, z) e^{i\Theta(t, z, p)} \right), \quad (10)$$

$$\frac{d\Theta(t, 0, p)}{dz} = k_z - \omega/u, \quad \Theta(t, 0, p) = p,$$

где e , m – заряд и масса электрона; $\Phi = \sqrt{l_0 + \chi_0 - 1/(u/c\gamma)^2}$; γ – лоренц-фактор пучка.

Область изменения параметров в (8)–(10) следующая: $t > 0$, $z \in [0, L]$, $p \in [-2\pi, 2\pi]$.

Определим правую часть первого уравнения (8) I . Из уравнений Максвелла, используя (7), получим

$$I = -\frac{2\pi i}{\omega} \left(\mathbf{e} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)},$$

где $(\mathbf{e} \partial \mathbf{j} / \partial t) \sim (\mathbf{e}\mathbf{u}) \sim \Phi$ – угол Брэгга.

Ток электронного пучка может быть представлен как сумма по каждому электрону в пучке

$$\mathbf{j} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} = \sum_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} e^{-i(\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp} + k_z z - \omega t)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) \theta(t - t_{0\alpha}) \theta(T_{0\alpha} - t),$$

где $t_{0\alpha}$ – момент времени влета α -го электрона в мишень, $T_{0\alpha}$ – момент выхода этого электрона из мишени, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha})$ – δ -функция, $\theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha})$ – θ -функция.

Усредним выражение для тока I по фазам электрона Θ_0 и Θ_1

$$I = 2\pi j_0 \Phi \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta_0}{2\pi} e^{-i\Theta(t, z, \Theta_1 - \Theta_0)},$$

где $j_0 = en_b u$. Это усреднение справедливо вследствие выполнения закона сохранения числа частиц пучка

$$j dt = j_0 dt_0,$$

которое эквивалентно теореме Лиувилля о сохранении фазового объема. Используя метод разбиения плоской фигуры и расписывая интегральные суммы вместо двойного интеграла, окончательно получим

$$I = 2\pi j_0 \Phi \int_0^{2\pi} \frac{2\pi - p}{8\pi^2} \left(e^{-i\Theta(t, z, p)} + e^{-i\Theta(t, z, -p)} \right) dp. \quad (11)$$

В обобщенном виде система (8)–(11) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial t} + a_1 \frac{\partial E}{\partial z} + b_{11} E + b_{12} E_\tau &= I, \\
\frac{\partial E_\tau}{\partial t} + a_2 \frac{\partial E_\tau}{\partial z} + b_{21} E + b_{22} E_\tau &= 0, \\
\frac{d^2 \Theta}{dz^2} &= \frac{e\Phi}{m\gamma^3 \omega^2} \left(k_z - \frac{d\Theta}{dz} \right)^3 \operatorname{Re} (E(t - z/u) e^{i\Theta}), \\
\frac{d\Theta(t, 0, p)}{dz} &= k_z - \omega/u, \quad \Theta(t, 0, p) = p.
\end{aligned} \tag{12}$$

Проверим выполнение закона сохранения энергии в системе (12). Умножим первое уравнение на E^* , где звездочка означает комплексное сопряжение, а второе – на E_τ^* , сложим оба уравнения и используем теорему Чу о кинетической мощности для сильно связанных волн в двухволновом приближении. В результате получается

$$\frac{\partial W}{\partial t} + P + P_\tau = C\eta, \tag{13}$$

$$\eta = \int_0^{2\pi} \frac{2\pi - p}{8\pi^2} \frac{2u^2 - v^2(t, L, p) - v^2(t, L, -p)}{u^2} dp \tag{14}$$

– электронный к.п.д.; $W = |E|^2 + |E_\tau|^2$ – электромагнитная энергия, запасенная в фотонном кристалле; $P = C_1 |E(t, L)|^2$ и $P_\tau = C_2 |E_\tau(t, 0)|^2$ – радиационные потери проходящей и дифрагированной волн там же.

3. Результаты предыдущих исследований

Линейный режим работы ОЛСЭ изучен достаточно хорошо [20, 27, 28] и др., но он быстро сменяется нелинейной стадией, на которой происходит основная генерация излучения. Очевидно, что нелинейный режим работы, описываемый системой (12), может быть исследован только с использованием методов математического моделирования, поскольку аналитически получить решение этой системы не представляется возможным. Разработанные вычислительные алгоритмы [33, 34] могут эффективно применяться при моделировании нелинейных режимов работы ОЛСЭ, что было подтверждено численными экспериментами [33–39]. Проведенное математическое моделирование нелинейной стадии работы ОЛСЭ подтвердило все основные физические закономерности и принципы работы ОЛСЭ, предсказанные в [12, 13], в частности, радикальное изменение пороговых условий генерации ОЛСЭ. В ходе численных экспериментов были исследованы:

- пороги генерации по плотности тока пучка, длине мишени, поглощению мишени, факторам асимметрии дифракции для двух- и трехволновых ОЛСЭ [34, 35];
- ширина режима усиления по плотности тока пучка для двух- и трехволновых ОЛСЭ [24, 34];
- электродинамическая картина генерации ОЛСЭ с внешними зеркалами [34].

Были также получены пороги генерации для экспериментальных установок ОЛСЭ [35].

Моделирование было проведено для гигагерцового и рентгеновского диапазонов длин волн [37]. Показано, что существует оптимальный набор параметров для эффективной генерации излучения в каждом из вышеперечисленных случаев, а также, что ОЛСЭ является хаотической динамической системой [36–39].

Таким образом, было впервые проведено математическое моделирование нелинейной стадии работы различных типов ОЛСЭ, работающих в условиях многоволновой динамической дифракции вблизи области совпадения корней дисперсионного уравнения.

4. Хаотическая динамика объемного лазера на свободных электронах

Хаотическая динамика является неотъемлемым свойством широкого класса систем, демонстрирующая их переход в состояния, в которых обнаруживается как детерминированное поведение, так и непредсказуемость. В природе существует огромное количество примеров хаотической динамики, например, турбулентность в жидкости, газе и плазме, хаос в биологических и химических системах и так далее [40].

Изучение хаотического поведения электронных генераторов и ЛСЭ занимает немало места в современных исследованиях [8, 41–47]. В [44, 45] проведена параметризация нелинейных и хаотических колебаний ЛСЭ. В работе [44] показано, что для ЛСЭ существуют следующие возможные сценарии перехода к хаосу: удвоение периода, квазипериодичность и перемежаемость. Квазипериодичность связана с бифуркациями Хопфа, которые вводят новую частоту в систему. Перемежаемость связана с бифуркациями седловых точек, то есть столкновением устойчивой и неустойчивой точек, которые затем исчезают. Здесь после хаоса может появиться вновь регулярное движение.

Аналитическое исследование хаоса в ОЛСЭ, описываемого системой (12), представляется невозможным из-за ее сильной нелинейности. Кроме того, большое количество внешних управляющих параметров, таких как, например, ток пучка, длина системы, направляющие косинусы объемной распределенной ОС, поглощение мишени, факторы асимметрии дифракции, параметры отстройки и другие параметры многократно увеличивают объем работы.

Сложная природа взаимодействия пучка электронов с электромагнитным полем в условиях объемной распределенной ОС, реализующейся в фотонных кристаллах при выполнении условий динамической дифракции, приводит к неоднородному распределению интенсивности электромагнитного поля. Это, в свою очередь, ведет к значительным возмущениям в движении электронов и, соответственно, к многообразию динамики генерации в ОЛСЭ. В [36–39] были изучены пространственно-временная и фазовая динамика ОЛСЭ. Получены следующие динамические режимы работы ОЛСЭ: периодический, квазипериодический, хаотический, перемежаемость, переходный хаос и др., дополненные соответствующими фазовыми портретами и энергетическими спектрами. Получены примеры сложной трансформации динамических режимов с наличием областей периодичности, квазипериодичности и хаоса. Исследована чувствительность различных режимов к изменению начальных условий. Построены параметрические карты динамических режимов ОЛСЭ при изменении плотности тока j и (1) фактора асимметрии, (2) отстройки от точного выполнения условий синхронизма, (3) длины фотонного кристалла, (4) диэлектрической проницаемости среды, (5) системного параметра l_0 .

5. Результаты численного моделирования

5.1. Двухмодовое приближение. Как уже говорилось в разделе 1.2, ОЛСЭ является многомодовой системой. Попытаемся проанализировать, каким образом формируются и взаимодействуют моды при работе ОЛСЭ.

Решение системы (12) ищем в двухмодовом приближении (6) при $n = 2$

$$\begin{aligned} E &= C_1 e^{ik\delta_1 z} + C_2 e^{ik\delta_2 z}, \\ E_\tau &= s_1 C_1 e^{ik\delta_1 z} + s_2 C_2 e^{ik\delta_2 z}, \\ j &= j_1 e^{ik\delta_1 z} + j_2 e^{ik\delta_2 z}. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда можно получить следующие выражения для коэффициентов каждой из мод:

$$\begin{aligned} \delta_n &= -(l_1 \gamma_0 + l \gamma_1 - \gamma_1 \tilde{j}_n) \pm ((l_1 \gamma_0 + l \gamma_1 - \gamma_1 \tilde{j}_n)^2 - \\ &\quad - 4\gamma_0 \gamma_1 (ll_1 - \chi^2 - l_1 \tilde{j}_n)^{1/2}) / (4\gamma_0 \gamma_1), \\ s_n &= \frac{\chi_{-\tau}}{l_1 + 2\gamma_1 \delta_n}, \quad C_1 = \frac{-E_0 s_2 e_2}{s_1 e_1 - s_2 e_2}, \quad C_2 = \frac{E_0 s_1 e_1}{s_1 e_1 - s_2 e_2}, \\ \tilde{j}_n &= 2\Phi j_n / C_n, \quad e_n = e^{ik\delta_n L}, \quad \chi^2 = \chi_\tau \chi_{-\tau}, \quad n = 1, 2. \end{aligned} \quad (16)$$

В отсутствие электронного пучка ($j_n = 0$) (16) есть решение стационарной задачи двухволновой дифракции на фотонном кристалле. Стационарный режим работы ОЛСЭ, обнаруженный при небольшом преодолении пороговых условий, пример которого изображен на рис. 2, может реализоваться только при $j_n = \text{const}$. На этом рисунке для параметров $\lambda = 3$ см, $\gamma = 2.17$, $|\chi_0| = 0.1$, $L = 9$ см и $j = 2$ кА/см² приведено изменение амплитуд проходящей, дифрагированной волн и правой части I системы (12) в зависимости от времени, на выходе волн из фотонного кристалла и внутри него в фиксированный момент времени. Соответствующие им временное (при $z = L$) и пространственное распределения фаз электронов Θ приведены на рис. 3. Видно, что фазы электронов собираются в две структуры одинаковой «толщины», интеграл (11) от которых будет давать постоянную величину.

Нормированные на стартовые значения моменты электронов пучка в зависимости от времени (рис. 4) при $z = 0.2L$ и $z = L$ демонстрируют наличие в начале

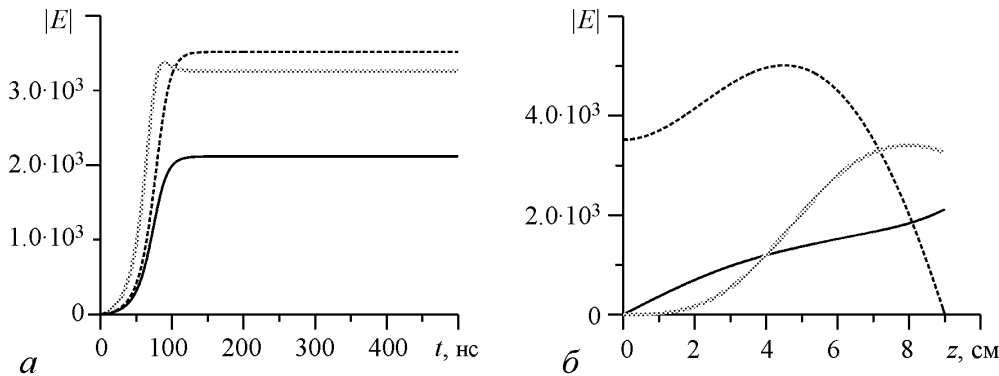


Рис. 2. Временная (а) и пространственная (б) зависимости амплитуд проходящей волны (черная линия), дифрагированной волны (пунктирная линия) и правой части I системы (12) (серая линия)

фотонного кристалла замедлившихся и ускорившихся электронов; большая часть последних к концу мишени, отдав свою энергию электромагнитной волне, замедляется. Черная линия на рис. 4, *a* демонстрирует одну из траекторий при фиксированном значении p .

При небольшом увеличении длины фотонного кристалла $L = 11$ см образуется периодический режим, результаты которого изображены на рис. 5–8. Здесь введены те же обозначения, что и на рис. 2–4. Видно, как электроны собираются в фотонном кристалле в сгустки (рис. 6, *б*), которые начинают разрушаться ближе к его концу (рис. 6, *в*). В результате, отдав энергию электромагнитной волне, большая часть электронов замедляется (рис. 6, *б*). Именно этим и объясняется полученное экспериментально насыщение по генерируемой мощности в зависимости от длины фотонного кристалла [18].

Кривая I (рис. 5, *a*) на выходе из мишени демонстрирует «слабый» хаос, когда зависимость амплитуды от времени выглядит приблизительно как повторение однотипных пиков близких размеров за приблизительно равные промежутки времени, что соответствует возбуждению большого числа паразитных частот. Но в силу выполнения условий динамической дифракции в фотонном кристалле дополнительные паразитные частоты подавляются и не передаются электромагнитным волнам. В результате и для проходящей, и для дифрагированной волн наблюдается периодический режим.

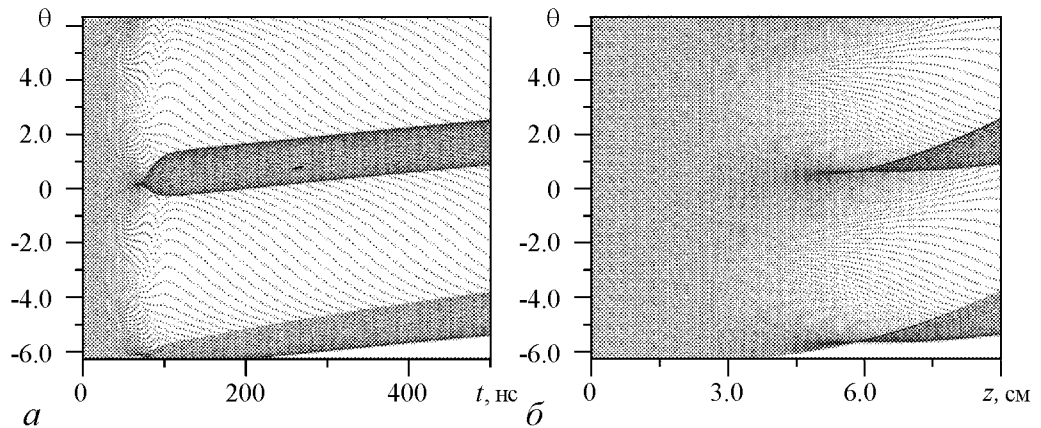


Рис. 3. Временное (*a*) и пространственное (*б*) распределение фаз электронов

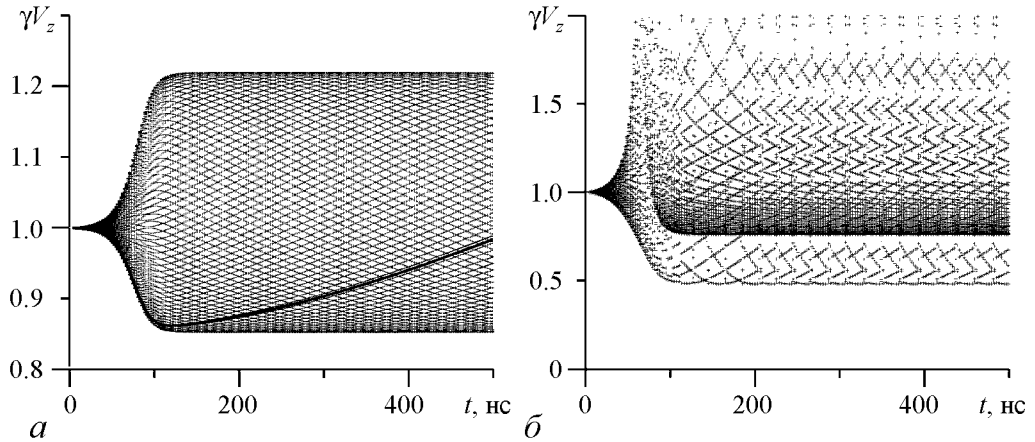


Рис. 4. Распределение моментов электронов пучка при $z = 0.2L$ (*a*) и $z = L$ (*б*)

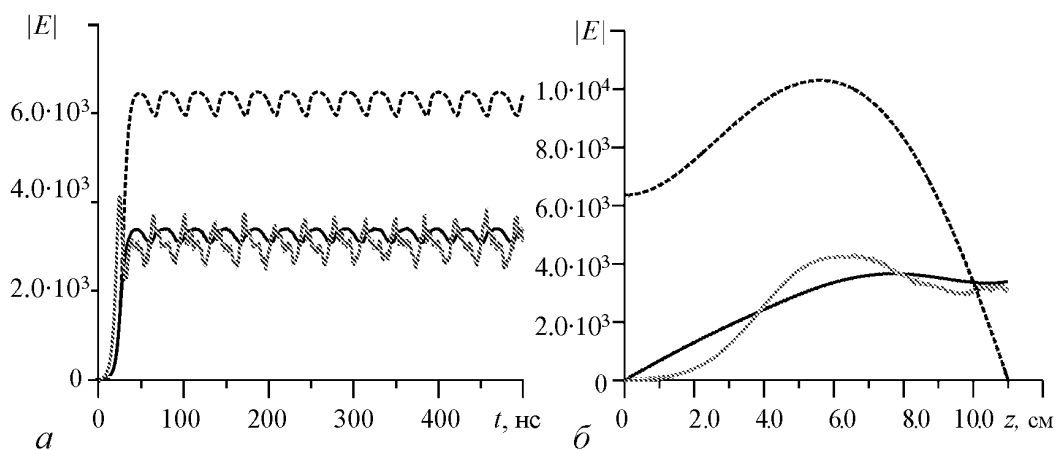


Рис. 5. Временная (а) и пространственная (б) зависимости амплитуд проходящей волны (черная линия), дифрагированной волны (пунктирная линия) и правой части I системы (10) (серая линия)

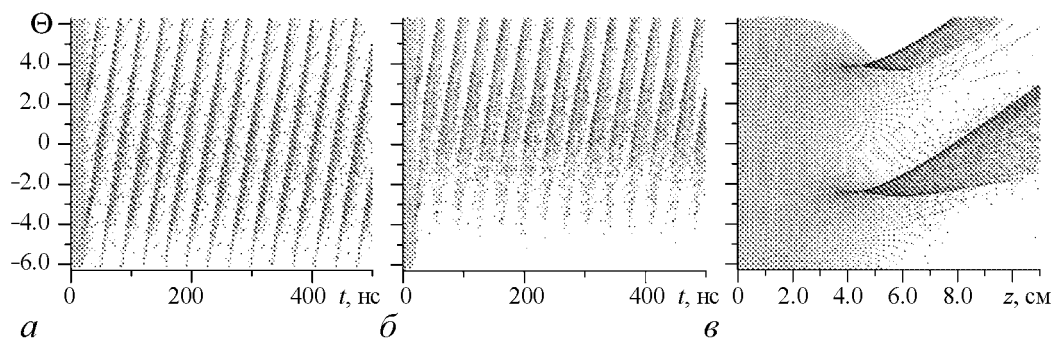


Рис. 6. Временное при $z = 0.2L$ (а), при $z = L$ (б) и пространственное (в) распределение фаз электронов

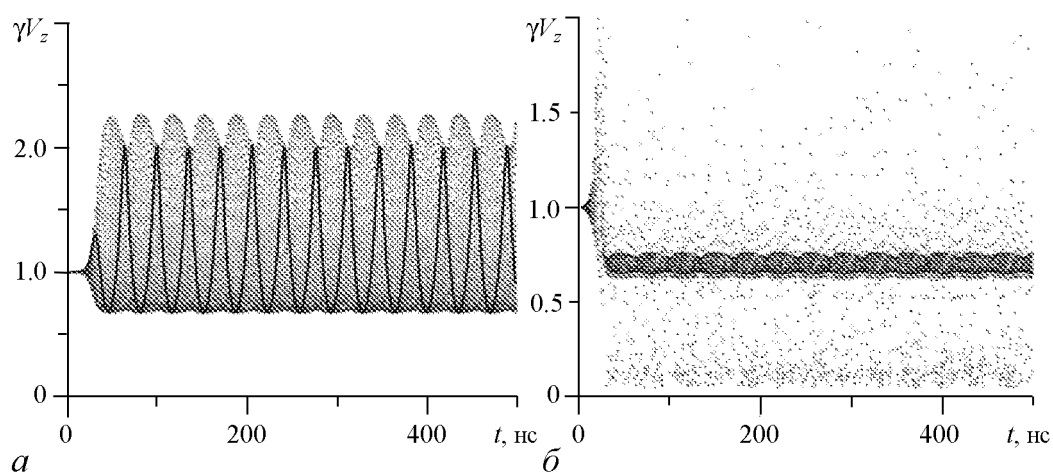


Рис. 7. Распределение моментов электронов пучка при $z = 0.2L$ (а) и $z = L$ (б)

5.2. Параметрические карты динамических режимов объемного лазера на свободных электронах. Рассмотрим параметрическую карту динамических режимов ОЛСЭ на плоскости с осями координат «длина фотонного кристалла L – плотность тока j » (см. рис. 8) для следующего набора входных данных: $\lambda = 3$ см, $L = 9 \dots 40$ см, $j = 400 \dots 3000$ А/см², $\beta = -10$, $|\chi_0| = 0.1$. По краям приведены наиболее характерные зависимости амплитуд электромагнитного поля $|E(L, t)|$ и $|E_\tau(0, t)|$ от времени (в нс). Здесь и ниже использованы следующие обозначения: 0 означает, что плотность тока находится ниже порога. P – периодические режимы, Q – квази-

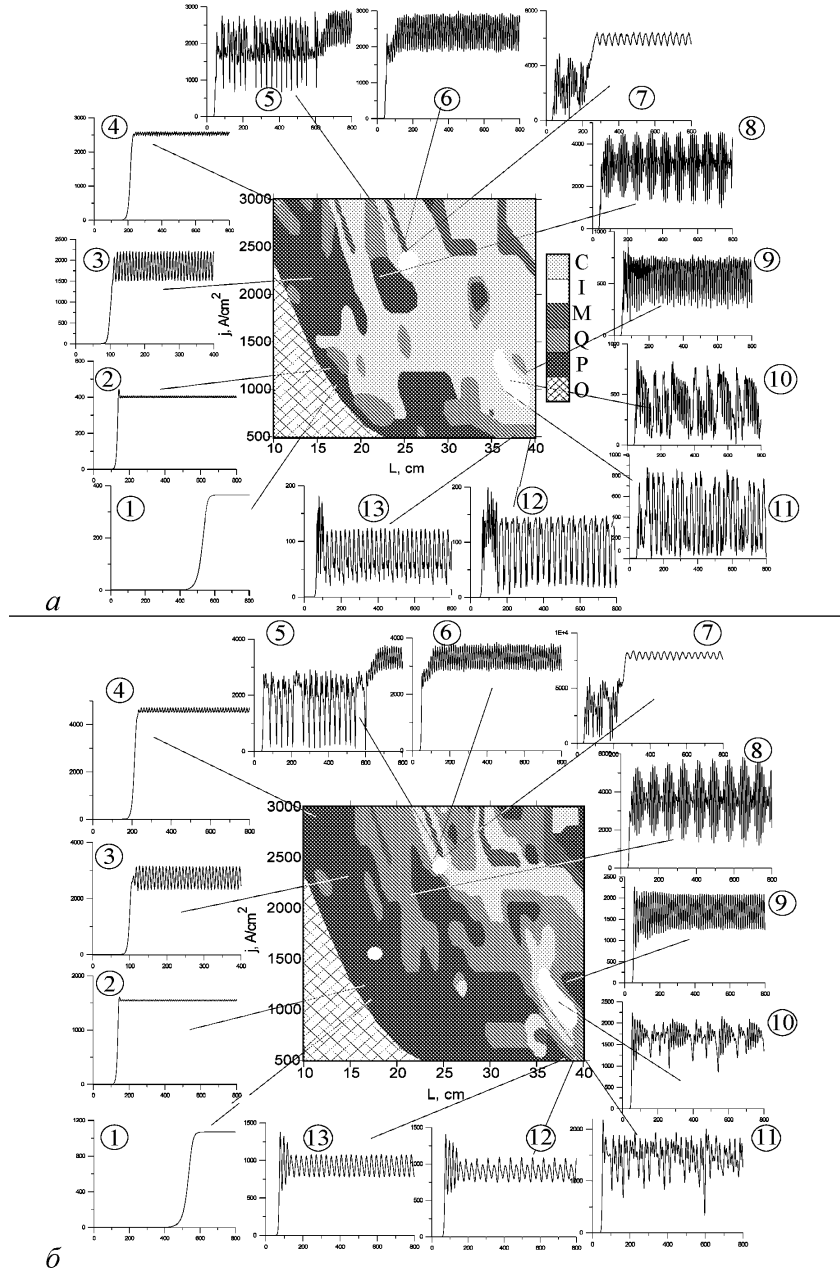


Рис. 8. Параметрическая карта на плоскости параметров «длина фотонного кристалла L – плотность тока j » для проходящей (а) и дифрагированной (б) волны

периодичность, С – хаос, I – перемежаемость, М – переход между высокоамплитудными и низкоамплитудными режимами. Графики 1–3 (рис. 8, а) и графики 1–4, 13 (рис. 8, б) представляют периодические автоколебания. Поведение амплитуды поля на графиках 4, 8, 12, 13 (см. рис. 8, а) и 8, 9, 12 (см. рис. 8, б) является квазипериодическими колебаниями с несколькими несоизмеримыми частотами. Различные хаотические режимы представлены на графиках 6, 11 (см. рис. 8, а) и 11 (см. рис. 8, б), причем режимы 11 находятся рядом с полосой перемежаемости (графики 10). При моделировании получены как низкоамплитудные (см. графики 1–4), так и высокоамплитудные режимы (8–13). Переход между высокоамплитудными и низкоамплитудными режимами происходит через так называемую неустойчивость перекрестного возбуждения (cross-excitation instability) [47], которая вызвана возбуждением одновременно нескольких мод (см. графики 7 и ср. с 9 и 11). В обратную сторону (от низкоамплитудным к высокоамплитудным) переход происходит последовательным увеличением амплитуды без резких срывов режимов. Таким образом, вдоль порога при небольшом превышении значений управляющих параметров (например, плотности тока электронного пучка) получается стационарное насыщение или периодические автоколебания. При увеличении этих значений наблюдается сложная картина взаимного перехода различных режимов.

Такой параметр, как плотность тока пучка, как оказалось, является более чувствительным параметром для перехода от одного динамического режима к другому. На рис. 9 приводится параметрическая карта динамических режимов ОЛСЭ на плоскости с осями координат «длина фотонного кристалла – фактор асимметрии β » при фиксированном значении плотности тока пучка $j = 300 \text{ А/см}^2$. Энергия электронов составляла 250 кэВ, $\gamma=1.3$. Остальные параметры: $\lambda \approx 4.5 \text{ см}$, $|\chi_0| = 0.37$, $\beta = -1.5 \dots -2$. Длина фотонного кристалла измерялась количеством периодов дифракционной решетки $n = 10 \dots 20$ ($L = 18 \dots 36 \text{ см}$).

Здесь, как и ранее, получена широкая полоса периодических режимов вдоль пороговой линии генерации и существенно менее «пестрая» карта хаотических режимов. Рассчитанный по формуле (12) к.п.д. такого ОЛСЭ составляет порядка 10%.

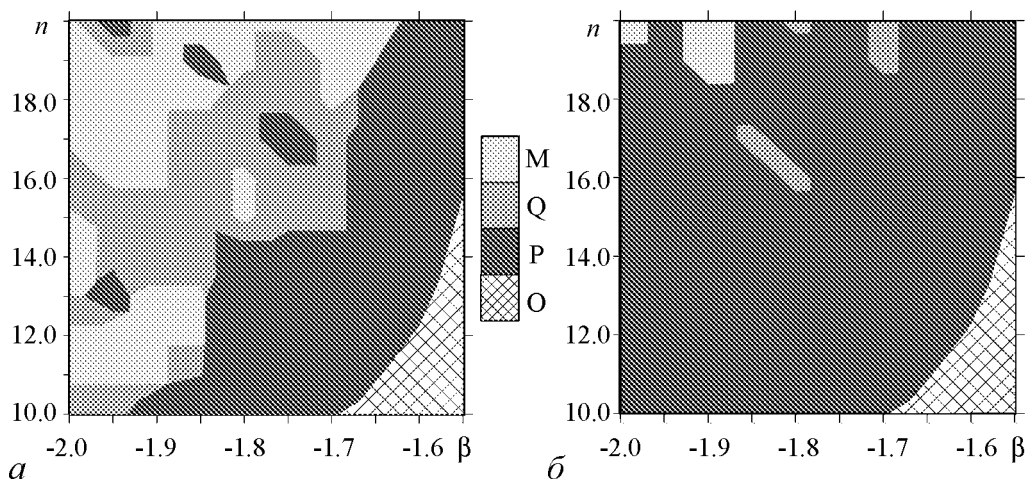


Рис. 9. Параметрическая карта динамических режимов ОЛСЭ на плоскости параметров « $\beta - n$ » для проходящей (а) и дифрагированной (б) волн

Таким образом, представленные параметрические карты еще раз демонстрируют важное свойство ОЛСЭ. А именно – что в силу механизма объемной распределенной ОС в ОЛСЭ в условиях динамической дифракции не все паразитные частоты, возникающие при прохождении пучка электронов через фотонный кристалл, передаются проходящей волне, а тем более дифрагированной. С этим и связано получаемое в моделировании меньшее число основных частот для дифрагированной волны по сравнению с проходящей и, соответственно, разные типы динамики для этих волн на параметрических картах.

5.3. Чувствительность системы к изменению начальных данных. При численном решении систем уравнений всегда возникает вопрос, является ли наблюдаемый «хаос» хаосом на самом деле, либо результатом некорректного учета ошибок округления или конечного порядка аппроксимации дифференциальных уравнений разностными. Одним из возможных ответов на данный вопрос является исследование чувствительности решений к малым вариациям начальных данных. Если неустойчивость решений будет наблюдаться именно для хаотических режимов, а для периодических и квазипериодических решение будет устойчивым, то это явится хорошей верификацией используемых численных алгоритмов и программных средств. Аналитически проверить устойчивость и сходимость предложенных разностных методов не представляется возможным в силу сильной нелинейности полученной разностной и исходной дифференциальной систем. Проведенные исследования чувствительности полученных решений к возмущениям стартовой плотности тока пучка δj для различных режимов работы ОЛСЭ дали следующие результаты. Для слабого хаоса наблюдается отстройка от невозмущенного решения при изменении значения плотности тока на $\delta j/j = 10^{-15}$ (компьютерный счет проводился с двойной точностью), хотя общая форма решения сохраняется, в то время как для периодического режима небольшие отличия в решении начинают наблюдаться при $\delta j/j = 0.01$. Это же справедливо и для квазипериодического режима. Аналогичные результаты, полностью вписывающиеся в картину периодичности и хаотичности, были получены для режима усиления ОЛСЭ при малых изменениях амплитуды падающей на систему электромагнитной волны E_0 .

Заключение

Методами математического моделирования исследована нелинейная динамика работы объемного лазера на свободных электронах. Показано, что при прохождении электронов пучка через фотонный кристалл электроны пучка собираются в ступки: некоторые из них ускоряются, а отдав энергию волне, находящейся с ними в синхронизме, замедляются и так далее. Ближе к выходу из мишени ступки начинают разрушаться, формируя паразитные частоты. В силу самого механизма объемной распределенной обратной связи в условиях динамической дифракции не все паразитные частоты передаются проходящей волне, а тем более дифрагированной. С этим и связано получаемое в моделировании большее число основных частот для проходящей волны по сравнению с дифрагированной.

Объемный лазер на свободных электронах является новым объектом исследования, поскольку физические принципы его работы отличаются от принципов работы других вакуумных электронных приборов. Полученные экспериментальные и

теоретические результаты свидетельствуют о том, что объемный лазер на свободных электронах является источником мощного излучения в различных диапазонах длин волн, включая миллиметровый и субмиллиметровый диапазоны. При моделировании исследованы различные стороны нелинейной стадии работы объемного лазера на свободных электронах, что будет использовано в его экспериментальных исследованиях. Показано, что объемный лазер на свободных электронах является динамической хаотической системой.

Автор благодарит В.Г. Барышевского за всемерную поддержку и постоянное внимание к работе.

Библиографический список

1. *Kompfner R.* The traveling wave tube // *Wireless World* LII. 1946. P. 369.
2. *Пирс Дж.Р.* Лампа с бегущей волной. М.: Сов. Радио, 1952.
3. *Русин Ф.С., Богомолов Г.Д.* Оротрон как генератор миллиметрового диапазона // *Электроника больших мощностей*. 1968. Вып. 5. С. 45.
4. *Маршалл Т.* Лазеры на свободных электронах. М.: Мир, 1987.
5. *Болотовский Б.М., Воскресенский Г.В.* Дифракционное излучение // *УФН*. 1966. Т. 88. С. 209.
6. *Smith S.J., Purcell E.M.* Visible light from localized surface charges moving across a grating // *Phys. Rev.* 1953. Vol. 92. P. 1069.
7. *Франк И.М.* Излучение Вавилова–Черенкова. Вопросы теории. М.: Наука, 1988.
8. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по СВЧ электронике для физиков. В 2 т. М.: Физматлит, 2003–2004.
9. *Бугаев С.П., Канавец В.И., Кошелев В.И., Черепенин В.А.* Релятивистские многоволновые СВЧ генераторы. Новосибирск: Наука, 1991.
10. *Силин Р.А., Сазонов В.П.* Замедляющие системы. М.: Советское радио, 1966.
11. Электронно-лучевая лампа малой мощности миллиметрового диапазона / *Тагер А.С., Зюлина Е.А., Победоносцев А.С. и др.* А.с. 1840644 СССР SU A1. 1956.
12. *Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D.* Parametric beam instability of relativistic charged particles in a crystal // *Physics Let. A*. 1984. Vol. 102. P. 141.
13. *Барышевский В.Г.* Поверхностное параметрическое излучение релятивистских частиц // *Доклады АН СССР*. 1988. Т. 299. С. 1363.
14. *Baryshevsky V.G.* Volume free electron lasers // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 2000. Vol. A445. P. 281.
15. *Alam S., Rahman M.O., Bentley C. Ando M.* Basics of surface and volume FEL's // *Proc. Second Asian PAC Conf.* 2001. P. 277.
16. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Gurinovich A.A. et al.* First lasing of a volume FEL (VFEL) at a length range $\lambda \sim 4\text{--}6$ mm // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 2002. Vol. A483. P. 21.
17. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Evdokimov V.A. et al.* Experimental observation of radiation frequency tuning in «OLSE-10» prototype of volume free electron laser // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 2006. Vol. B252. P. 86.
18. *Baryshevsky V.G., Belous N.A., Gurinovich A.A. et al.* Experimental study of volume

- free electron laser using a «grid» photonic crystal with variable period // Proc. FEL. 2007, Novosibirsk, Russia. 2007. P. 496.
19. *Baryshevsky V.G., Belous N.A., Gurinovich A.A. et al.* Experimental studies of volume FELs with a photonic crystal made of foils // Proc. 32 Int. Conf. FEL2010. Malmö, Sweden. 2010. THPB18.
 20. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya.* Formation of distributed feedback in an FEL under multi-wave diffraction // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 1995. Vol. A358. P. 493.
 21. *Baryshevsky V.G., Gurinovich A.A.* Spontaneous and induced parametric and Smith–Purcell radiation from electrons moving in a photonic crystal built from the metallic threads // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 2006. Vol. B252. P. 92.
 22. *Afanasenko V.P., Baryshevsky V.G., Gradovsky O.T. et al.* Detection of parametric X-ray radiation of a GaAs monocrystal // Phys. Lett. 1989. Vol. A141. P. 311.
 23. *Афанасенко В.П., Барышевский В.Г., Гацуха С.В. и др.* Обнаружение аномалии в угловом распределении параметрического рентгеновского излучения // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. С. 213.
 24. *Batrakov K.G., Sytova S.N.* Dynamics of electron beam instabilities under conditions of multiwave distributed feedback // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2005. Vol. 8. P. 359.
 25. *Барышевский В.Г.* Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях. Мн.: БГУ, 1982.
 26. *Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D., Ulyanekov A.P.* Parametric x-ray radiation in crystals: Theory, experiment and applications. Springer. 2006.
 27. *Baryshevsky V.G., Gurinovich A.A.* Radiative instability of a relativistic electron beam moving in a photonic crystal // arXiv:1011.2983v1 [physics.acc-ph] 12 Nov. 2010. <http://arxiv.org/abs/1011.2983>.
 28. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya.* Parametric (Quasi-Cherenkov) x-ray free electron laser // J. Phys. D. 1991. Vol. 24. P. 1250-1257.
 29. *Пинскер З.Г.* Рентгеновская кристаллооптика. М.: Наука, 1982.
 30. *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. Радио, 1973.
 31. *Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Нестационарные нелинейные явления при взаимодействии электронного потока, движущегося в скрещенных полях, с обратной электромагнитной волной // Известия вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20, № 2. С. 300.
 32. *Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н.* Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Известия вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1037.
 33. *Batrakov K., Sytova S.* Modelling of quasi-Cherenkov electron beam instability in periodical structures // Mathematical modelling and analysis. 2004. Vol. 9. P. 1.
 34. *Батраков К.Г., Сытова С.Н.* Моделирование объемных лазеров на свободных электронах // ЖВМ и МФ. 2005. Т. 45. С. 690.
 35. *Batrakov K., Sytova S.* Numerical simulation of nonlinear effects in Volume Free Electron Laser (VFEL) // Proc. Int. Conf. RuPAC2006, Novosibirsk, Russia. 2007. P. 141.
 36. *Sytova S.* Volume Free Electron Laser (VFEL) as a dynamical system // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2007. Vol. 10. P. 297.

37. *Batrakov K.G., Sytova S.N.* Nonlinear analysis of quasi-Cherenkov electron beam instability in VFEL (Volume Free Electron Laser) // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2005. Vol. 8. P. 42.
38. *Sytova S.* Numerical analysis of lasing dynamics in Volume Free Electron Laser // *Mathematical modelling and analysis*. 2008. Vol. 13. P. 263.
39. *Sytova S.* Some aspects of chaotic lasing in volume free electron lasers // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2009. Vol. 12. P. 37.
40. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: введение. М.: Мир, 1988.
41. *Ninno G., Fanelli. D.* Controlled hopf bifurcation of a storage-ring free-electron laser // *Phys. Rev. Let.* 2004. Vol. 92. P. 094801.
42. *Thomas C.A., Botman J.I.M., Bruni C. et al.* Storage ring free electron laser dynamics in presence of an auxiliary harmonic RF cavity // *Eur. Phys. J. D.* 2005. Vol. 32. P. 83.
43. *Coupric M.E.* Chaos studies on the super-ACO free electron laser // *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res.* 2003. Vol. A507. P. 1.
44. *Hahn S.L., Lee J.K.* Nonlinear short-pulse propagation in a free-electron laser // *Phys. Rev.* 1993. Vol. E48. P. 2162.
45. *Hur M.S., Lee H.J., Lee J.K.* A parameterization of nonlinear and chaotic oscillations in driven plasma diodes // *Phys. Rev.* 1998. Vol. E58. P. 936.
46. *Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Хаос и гиперхаос в лампе обратной волны // *Известия вузов. Радиофизика*. 2004. Т. XLVII. С. 383.
47. *Levush B., Antonson N.M., Lou W.-R.* Theory of relativistic backward-wave oscillators with end reflections // *IEEE Trans. Plasma Science*. 1992. Vol. 20. P. 263.

Белорусский государственный университет

*Поступила в редакцию
После доработки*

*19.11.2010
14.02.2011*

CHAOS IN VOLUME FREE ELECTRON LASERS

S.N. Sytova

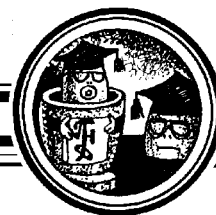
Mathematical model of Volume Free Electron Lasers (VFEL) is described. Some aspects and origins of VFEL chaotic dynamics are examined.

Keywords: Relativistic microwave electronics, volume free electron lasers, mathematical modelling, chaos, nonlinear dynamics.



Сытова Светлана Николаевна – родилась в Минске (1965). Окончила факультет прикладной математики Белорусского государственного университета (1987), кандидат физико-математических наук (1997). Ученый секретарь Института ядерных проблем Белгосуниверситета. Область научных интересов – математическое моделирование процессов излучения в различных типах генераторов электромагнитного излучения. Автор свыше 70 публикаций.

220030 Минск, ул. Бобруйская, 11
Институт ядерных проблем Белгосуниверситета
E-mail: s_sytova@mail.ru



ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ГЕНЕРАТОРЕ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ ОТРАЖЕНИЕМ ОТ НАГРУЗКИ*

1. Теория

Ю.В. Новожилова

В генераторе, работающем на слабо отражающую удаленную нагрузку, в случае большого запаздывания допускается конечное число одночастотных состояний – продольных мод с действительными частотами. Исследована устойчивость каждой из этих мод относительно роста возмущений, которые могут быть двух типов: возмущения на собственной частоте исходной моды и возмущения в виде двух боковых сателлитов, симметрично отстоящих по частоте от частоты этой моды.

Ключевые слова: Работа генератора на нагрузку, запаздывающее отражение, устойчивость одночастотных решений.

Введение

Генератор, соединенный волноводом с отражающей нагрузкой (рис. 1), относится к классу распределенных автоколебательных систем с запаздыванием и имеет бесконечное число степеней свободы. На стадии малого сигнала в таких системах существует бесконечный набор собственных функций (мод) и соответствующих собственных значений (комплексных частот). Некоторые из этих мод могут быть нарастающими, а на стадии сильного сигнала их мощность ограничивается нелинейностью активного элемента R . При этом допускается конечное число одночастотных решений (продольных мод)¹ с постоянной амплитудой. В определенных областях параметров динамика систем с запаздыванием может оказаться достаточно сложной, включая хаотическую. Такая сложная динамика исследовалась в большом числе работ численно и наблюдалась экспериментально [1–19]. Существенно меньшее число публикаций посвящено изучению устойчивости одночастотных решений (мод) [20,21]. В настоящей работе задача об устойчивости одночастотных решений

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

¹Эти продольные моды соответствуют одночастотным колебаниям нелинейной системы и, в отличие от мод линейной консервативной системы, не обладают свойствами полноты и ортогональности.

рассмотрена более детально для случая малого коэффициента отражения. Показано, что возмущения можно отнести к одному из двух типов: возмущения на собственной частоте, представляющие собой достаточно медленные изменения амплитуды и частоты первичной моды, и возмущения в виде боковых сателлитов с частотами, симметрично отстоящими от частоты первичной моды. Исследована устойчивость продольных мод относительно каждого типа возмущений. В I части аналитическими методами решена задача об устойчивости относительно возмущений первого типа для случая произвольного превышения тока над стартовым значением и относительно возмущений второго типа (распада на сателлиты) для случая достаточно большого превышения тока над стартовым значением. Во II части (см. [22]) в пространстве параметров системы численными методами найдены области устойчивости и неустойчивости относительно распада на сателлиты при произвольном превышении тока над пороговым значением.

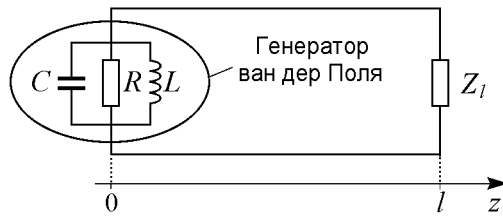


Рис. 1. Генератор ван дер Поля, соединенный с удаленной нагрузкой; C , R , L – соответственно емкость, активное сопротивление, индуктивность контура, моделирующего генератор, Z_l – импеданс нагрузки, l – длина линии задержки

1. Теоретическая модель

Считаем, что в схеме, изображенной на рис. 1, ток \hat{I}_R в активном элементе зависит от напряжения \hat{U} по кубическому закону

$$\hat{I}_R = -\frac{\hat{U}}{R_0} (1 - \nu \hat{U}^2). \quad (1)$$

Предполагаем, что $R_0 > 0$, $\nu > 0$, так что при малых напряжениях проводимость отрицательна. Кроме того, считаем выполненными следующие ограничения.

- Стартовый инкремент генератора без линии $1/(2R_0C)$ мал по сравнению с собственной частотой колебательного контура генератора $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

$$R_0 \gg \sqrt{L/C}. \quad (2)$$

- Волновое сопротивление линии ρ и активное сопротивление R_0 – величины одного порядка:

$$\rho \sim R_0. \quad (3)$$

- Дисперсия в линии отсутствует.

2. Одночастотные процессы

Согласно (2), (3), добротность колебательного контура генератора, зашунтированного волновым сопротивлением, велика: $Q = \rho\sqrt{C/L} \gg 1$. При этом в системе допускаются одночастотные колебания, частота которых ω_c близка к собственной частоте колебательного контура ω_0

$$\alpha = \bar{\omega}_c - 1, \quad |\alpha| \ll 1, \quad (4)$$

где $\bar{\omega}_c = \omega_c/\omega_0$, а высшими гармониками этих колебаний можно пренебречь, так как они находятся за пределами полосы контура.

Чтобы найти связь частоты и амплитуды колебаний, воспользуемся соотношением Кирхгофа для токов в ветвях контура (см. рис. 1)

$$\hat{I}_L + \hat{I}_R + \hat{I}_C = \hat{U}_c/Z_2, \quad (5)$$

где $\hat{U}_c = \text{Re}(U_c e^{i\omega_c t})$ – напряжение на контуре, $\hat{I}_{L,R,C}$ – токи через индуктивность, активное сопротивление и емкость, Z_2 – импеданс нагрузки на частоте ω_c , пересчитанный в сечении $z = 0$:

$$Z_{2c} = \frac{i\rho \operatorname{tg} \vartheta_c + Z_l}{1 + iZ_l \operatorname{tg} \vartheta_c/\rho}, \quad (6)$$

$\vartheta_c = \omega_c t_{\text{del}} = \vartheta_0(1 + \alpha)$ – фаза запаздывания волны в линии на частоте ω_c , l – длина линии, $t_{\text{del}} = l/c$ – время запаздывания, $\vartheta_0 = \omega_0 l/c$ – фаза запаздывания на собственной частоте контура. Поскольку токи на емкости и индуктивности связаны с напряжением соотношениями

$$I_L = \text{Re}(U_c e^{i\omega_c t}/(i\omega_c L)), \quad I_C = \text{Re}(i\omega_c C U_c e^{i\omega_c t}), \quad (7)$$

из (1), (5), (6) получим

$$-i\omega_c U_c C - \frac{U_c}{i\omega_c L} + \frac{U_c}{R_0} - \frac{3v}{4R_0} |U_c|^2 U_c = \frac{U_c(1 + iZ_l \operatorname{tg} \vartheta_c/\rho)}{Z_l + i\rho \operatorname{tg} \vartheta_c}. \quad (8)$$

Введем обозначения

$$Z_l = \rho(1 + \delta), \quad \bar{U}_c = \sqrt{3v}U_c, \quad \bar{\omega}_c = \frac{\omega_c}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \mu = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \eta = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (9)$$

Заметим, что в отсутствие отражения ($\delta = 0$, $Z_l = \rho$) (8) совпадает с уравнением генератора ван дер Поля для одночастотных процессов. При этом параметр $\eta = 1/Q$ имеет смысл обратной добротности колебательного контура генератора, зашунтированного волновым сопротивлением; $(\mu - \eta)$ – это удвоенный стартовый инкремент, или прочность предельного цикла [23, с. 227]. Как следует из условий (2), (3), параметры μ и η малы:

$$\mu, \eta \ll 1. \quad (10)$$

В обозначениях (9) уравнение (8) примет вид

$$\omega_c^2 - 1 + i\mu\bar{\omega}_c \left(1 - |\bar{U}_c|^2/4\right) = i\bar{\omega}_c\eta \frac{2 + \delta - \delta e^{-2i\vartheta_c}}{2 + \delta + \delta e^{-2i\vartheta_c}}. \quad (11)$$

Поскольку отражение от нагрузки мало, то импеданс нагрузки Z_l должен быть близок к волновому сопротивлению ρ (см. (9))

$$|\delta| \ll 1. \quad (12)$$

При этом условии коэффициент отражения близок к $\delta/2$.

Ограничимся рассмотрением только таких процессов, для которых амплитуда излученной волны много больше амплитуды отраженной от нагрузки волны,

вернувшейся в генератор в этот же момент (быстро затухающие процессы не рассматриваем)

$$\left| \delta e^{-2i\vartheta_c} \right| \ll 1. \quad (13)$$

Тогда уравнение (10) сводится к виду

$$\omega_c^2 - 1 + i\mu\bar{\omega}_c \left(1 - |\bar{U}_c|^2/4 \right) = i\bar{\omega}_c\eta \left(1 - \delta e^{-2i\vartheta_c} \right). \quad (14)$$

К такому же виду сводится для одночастотных процессов уравнение генератора ван дер Поля с отражением от удаленной нагрузки, исследованное в [20].

Поскольку частота близка к резонансной (см. (4)), запишем уравнение (14) как

$$2\alpha + i\mu \left(1 - |\bar{U}_c|^2/4 \right) = i\eta \left(1 - \delta e^{-2i\vartheta_c} \right). \quad (15)$$

Стартующие моды. При малой амплитуде колебания $|\bar{U}_c| \ll 1$, как следует из (15), комплексная частота отличается от собственной частоты контура на величину

$$\alpha = \frac{i}{2} \left(\eta - \mu - r e^{-2i\vartheta_c} \right), \quad (16)$$

где

$$r = \delta\eta. \quad (17)$$

Моды самовозбуждаются ($\text{Im } \alpha < 0$), когда мощность, выделяемая на отрицательном сопротивлении, превышает мощность потерь. Предположим, что выполнено условие малости коэффициента отражения по сравнению с относительным превышением плотности активного вещества над ее стартовым значением: $(\mu - \eta)/\eta \gg |\delta|$, или²

$$\mu - \eta \gg |r|. \quad (18)$$

Тогда, как следует из (16), стартовое условие $\mu > \eta$, или $R_0 < \rho$ (см. (9)) и инкременты всех стартующих мод

$$\text{Im } \alpha \approx (\eta - \mu)/2 < 0 \quad (19)$$

имеют такой же вид, как в свободном автогенераторе.

Моды на нелинейной стадии. Уравнение (15) допускает конечное число решений с действительной частотой

$$2\alpha = -r \sin(2\vartheta_c) \quad (20)$$

и постоянной амплитудой

$$|\bar{U}_c|^2/4 = (\mu - \eta + r \cos(2\vartheta_c)) / \mu. \quad (21)$$

²Как следует из обозначений (9), в свободном, без отражений, генераторе величина $(\mu - \eta)/\eta$ равна относительному превышению плотности активного вещества над пороговым (стартовым) значением. Для электронных генераторов величина $(\mu - \eta)/\eta$ – это относительное превышение тока над стартовым значением $(I - I_{st})/I_{st}$.

Как следует из (9), (21), при малых отражениях (18) мощность, уходящая в нагрузку, пропорциональна $|\bar{U}_c|^2 \eta$ и максимальна, когда

$$\eta = \mu/2, \quad (22)$$

то есть, когда активное сопротивление R_0 вдвое меньше волнового сопротивления линии ρ . Заметим, что при малой надпороговости: $\mu - \eta \sim |r|$ отражение может, в зависимости от фазы ϑ_c , привести к срыву генерации (при $\mu - \eta > 0$, $r \cos(2\vartheta_c) < 0$) или наоборот, к возникновению генерации (при $\mu - \eta < 0$, $r \cos(2\vartheta_c) > 0$).

Нахождение частот из (20) удобно пояснить графически (рис. 2): фазы запаздывания ϑ_c мод соответствуют пересечению прямой

$$y_1(2\vartheta_c) = 2\vartheta_c \quad (23)$$

и синусоиды

$$y_2(2\vartheta_c) = 2\vartheta_0 - r\vartheta_0 \sin(2\vartheta_c). \quad (24)$$

Следует отметить, что, в соответствии с (20), частоты продольных мод (следовательно, и фазы запаздывания ϑ_c на этих частотах) не зависят от амплитуды колебаний. Это связано с тем, что в модели генератора ван дер Поля не учитывается мнимая часть отрицательной проводимости.

Как следует из (20), (21), в отсутствие отражения ($\delta = 0$) существует единственная мода, соответствующая свободным колебаниям генератора: $\alpha = 0$, $|\bar{U}_c|^2/4 = (\mu - \eta)/\mu$. При ненулевом отражении мод может быть несколько, но их число конечно (рис. 2, а), и это число определяется произведением коэффициента отражения на длину линии $|r| \vartheta_0$. Мода является единственной до тех пор, пока

$$|r| \vartheta_0 < 1. \quad (25)$$

Следующая мода появляется при возрастании $|r| \vartheta_0$, когда становится выполненным условие касания прямой (23) и синусоиды (24):

$$r\vartheta_0 \cos(2\vartheta_c) = -1. \quad (26)$$

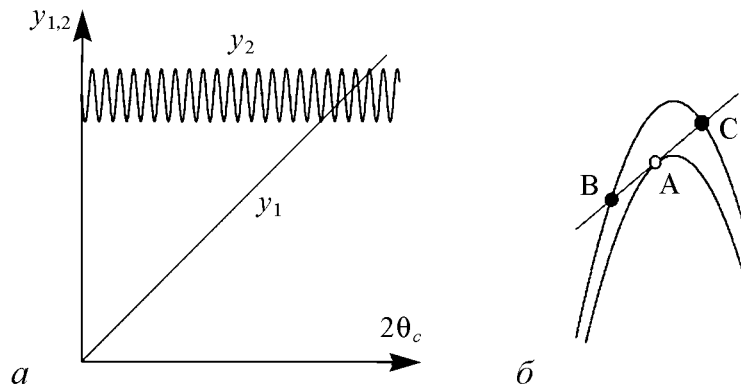


Рис. 2. Графическое решение уравнения (20); а – фазы запаздывания мод соответствуют пересечениям графиков y_1 и y_2 ; б – фрагмент рис. 2, а: рождение новой моды А, которая при увеличении $|r| \vartheta_0$ распадается на моды В и С

Каждая новая мода является вырожденной: при дальнейшем росте $|r| \vartheta_0$ она расщепляется на две (рис. 2, б).

Условие единственности продольной моды (25) можно интерпретировать, исходя из аналогии с известной теорией захвата частоты генератора заданным внешним сигналом [23]. В качестве внешнего сигнала выступает отраженная волна с амплитудой $\delta |\bar{U}_c|/2$, которая навязывает генератору свою частоту, если только эта частота лежит в полосе синхронизации шириной $\omega\delta/Q$ (см. [24]). Если в полосе синхронизации оказывается только одна мода линии задержки³

$$\omega\delta/Q < c/l, \quad (27)$$

то эта мода в системе единственная. Наоборот, если в полосу синхронизации попадает несколько мод линии задержки, то в системе существует несколько одночастотных решений (продольных мод). С учетом обозначений (9), (17) условия (27) и (25) эквивалентны.

3. Уравнения возмущений продольных мод

Допустим, что возникло малое возмущение продольной моды (20), (21)

$$\hat{U}_+ = \text{Re}(U_+ e^{i\omega_+ t}), \quad |U_+|/|U_c| \ll 1. \quad (28)$$

Частота возмущения ω_+ близка к частоте основной моды (см. (2)–(4)). Квадратичная зависимость тока от напряжения на активном элементе (1) приводит к появлению малых составляющих тока и напряжения во всех ветвях контура на частоте ω_- , симметрично отстоящей от частоты основной моды

$$2\omega_c = \omega_+ + \omega_-^*. \quad (29)$$

Следовательно, колебания генератора представляют собой сумму трех колебаний на частотах основной моды и сателлитов. Напряжение и ток на активном элементе представим в виде суммы этих колебаний

$$U = \text{Re} (U_c e^{i\omega_c t} + U_+ e^{i\omega_+ t} + U_- e^{i\omega_- t}), \quad (30)$$

$$I_R = \text{Re} (I_{cR} e^{i\omega_c t} + I_{+R} e^{i\omega_+ t} + I_{-R} e^{i\omega_- t}), \quad (31)$$

где $I_{cR} = -U_c/R_0 + (3\nu)/(4R_0) |U_c|^2 U_c$ – ток на частоте основной моды ω_c , $I_{\pm R} = -U_{\pm}/R_0 + (3\nu)/(4R_0) (2|U_c|^2 U_{\pm} + U_c^2 U_{\mp}^*)$ – линейризованные по амплитудам возмущений U_{\pm} токи на частоте сателлитов ω_{\pm} . Воспользовавшись правилом Кирхгофа (5) для гармоник напряжения и токов через элементы контура на частотах возмущений ω_{\pm} и повторяя процедуру, изложенную в п. 2, получим соотношения для амплитуд и частот возмущений

³Расстояние по частоте между модами длинной линии равно c/l .

$$\left[-1 + \bar{\omega}_+^2 + i\mu\bar{\omega}_+ \left(1 - \frac{|\bar{U}_c|^2}{2} \right) - i\bar{\omega}_+\eta \frac{2 + \delta - \delta e^{-2i\vartheta_+}}{2 + \delta + \delta e^{-2i\vartheta_+}} \right] \bar{U}_+ = \frac{i\bar{\omega}_+\mu\bar{U}_c^2\bar{U}_-^*}{4}, \quad (32)$$

$$\left[-1 + \bar{\omega}_-^2 + i\mu\bar{\omega}_- \left(1 - \frac{|\bar{U}_c|^2}{2} \right) - i\bar{\omega}_-\eta \frac{2 + \delta - \delta e^{-2i\vartheta_-}}{2 + \delta + \delta e^{-2i\vartheta_-}} \right] \bar{U}_- = \frac{i\bar{\omega}_-\mu\bar{U}_c^2\bar{U}_+^*}{4}. \quad (33)$$

Здесь $\vartheta_+ = \omega_+l/c$, $\vartheta_- = \omega_-l/c$ – фазы запаздывания на частотах возмущений ω_{\pm} , $\bar{U}_{+,-} = \sqrt{3\nu}U_{+,-}$, $\bar{\omega}_{+,-} = \omega_{+,-}/\omega_0$. Уравнение для исходной моды имеет вид (11), и при условии (13) может быть записано как (14).

Сдвиг частоты возмущения относительно частоты исходной моды

$$\Omega = \bar{\omega}_+ - \bar{\omega}_c \quad (34)$$

в соответствии с (2)–(4) мал⁴:

$$\Omega \ll 1. \quad (35)$$

Как следует из (4), (29), (34), в этих обозначениях

$$\bar{\omega}_+ = 1 + \alpha + \Omega, \quad \bar{\omega}_- = 1 + \alpha - \Omega^*, \quad \vartheta_+ = \vartheta_c + \Omega\vartheta_0, \quad \vartheta_- = \vartheta_c - \Omega^*\vartheta_0. \quad (36)$$

Ограничимся рассмотрением неубывающих возмущений, для которых выполнены условия, аналогичные (13)

$$\left| \delta e^{-2i\Omega\vartheta_0} \right| \ll 1. \quad (37)$$

Тогда уравнения (32), (33) сводятся к виду

$$\left[2\alpha + 2\Omega + i\mu \left(1 - \frac{|\bar{U}_c|^2}{2} \right) - i\eta \left(1 - \delta e^{-2i\vartheta_c - 2i\Omega\vartheta_0} \right) \right] \bar{U}_+ = \frac{i\mu\bar{U}_c^2\bar{U}_-^*}{4}, \quad (38)$$

$$\left[2\alpha - 2\Omega^* + i\mu \left(1 - \frac{|\bar{U}_c|^2}{2} \right) - i\eta \left(1 - \delta e^{-2i\vartheta_c + 2i\Omega^*\vartheta_0} \right) \right] \bar{U}_- = \frac{i\mu\bar{U}_c^2\bar{U}_+^*}{4}. \quad (39)$$

Как следует из системы уравнений (32), (33) или (38), (39), возмущения связаны через основную моду, играющую роль накачки, а соотношение (29) можно интерпретировать как параметрическую неустойчивость исходной основной моды: распад двух квантов исходной моды на кванты боковых сателлитов. При этом сильная основная мода играет роль накачки. Однако следует отметить, что (29) допускает случай, когда действительные частоты сателлитов равны частоте основной моды. Будем классифицировать такие возмущения как «собственные», а их рост как «собственную» неустойчивость. Неустойчивость, к которой приводит рост возмущений в виде боковых сателлитов, будем называть сателлитной. Как следует из (29), оба возмущения (на частотах ω_+ и ω_-) либо нарастают, либо убывают: $\text{Im } \bar{\omega}_+ = \text{Im } \bar{\omega}_- = \text{Im } \Omega$.

⁴ Ω определена как положительная величина.

4. Характеристическое уравнение

Из уравнений (38), (39) получим характеристическое уравнение для сдвига Ω частоты возмущений относительно частоты исходной моды

$$\begin{aligned} & \left\{ 2\alpha + 2\Omega + i\mu \left(1 - |\bar{U}_c|^2/2 \right) - i\eta \left(1 - \delta e^{-2i\vartheta_c - 2i\Omega\vartheta_0} \right) \right\} \times \\ & \times \left\{ 2\alpha - 2\Omega - i\mu \left(1 - |\bar{U}_c|^2/2 \right) + i\eta \left(1 - \delta e^{2i\vartheta_c - 2i\Omega\vartheta_0} \right) \right\} = \mu^2 |\bar{U}_c|^4 / 16. \end{aligned} \quad (40)$$

Вводя обозначения

$$w = \mu |\bar{U}_c|^2 / 4, \quad \chi = r \left(1 - e^{-2i\Omega\vartheta_0} \right) \quad (41)$$

и используя уравнения (20), (21) для частоты и амплитуды исходной моды, представим (40) в виде

$$\Omega^2 - i\Omega w - i\chi \Omega \cos(2\vartheta_c) - w\chi \cos(2\vartheta_c) / 2 - \chi^2 / 4 = 0. \quad (42)$$

Заметим, что один из корней уравнения (42), $\Omega = 0$, соответствует сдвигу начальной фазы автогенератора, или начала отсчета времени.

Анализ выражений (20), (21), (42) показывает, что поведение системы (амплитуда, частота продольных мод и их устойчивость) определяется тремя параметрами: параметром $r = \eta\delta$, равным отношению удвоенного коэффициента отражения к добротности контура, зашунтированного волновым сопротивлением (см. (9), (17)); фазой запаздывания ϑ_0 на собственной частоте колебательного контура, эта фаза пропорциональна длине линии (см. обозначения после формулы (6)); положительной величиной w (см. (21), (41)), пропорциональной квадрату амплитуды колебаний. Если относительное превышение тока над стартовым существенно больше коэффициента отражения (18), то w равна прочности предельного цикла $\mu - \eta$.

5. Исследование устойчивости продольных мод относительно возмущений на собственной частоте

Для возмущений на собственной частоте можно отклонение частоты возмущения от частоты исходной моды представить в виде

$$\Omega = i\lambda, \quad (43)$$

где λ – действительно. Если возмущение неустойчиво, $\lambda < 0$. Уравнение (42) преобразуем к виду

$$\chi^2 + 2w\chi \cos 2\vartheta_c - 4\lambda\chi \cos 2\vartheta_c - 4\lambda w + 4\lambda^2 = 0, \quad (44)$$

где $\chi = r \left(1 - e^{2\lambda\vartheta_0} \right)$ (см. (41)). Разрешая (44) для χ , получим

$$\chi = -(w - 2\lambda) \cos 2\vartheta_c \pm \sqrt{((w - 2\lambda) \cos 2\vartheta_c)^2 + 4\lambda w - 4\lambda^2}. \quad (45)$$

Поиск решений λ , удовлетворяющих уравнению (45), удобно пояснить графически (рис. 3). Эти решения лежат на пересечениях графика функции

$$g_1(2\lambda\vartheta_0) = 1 - e^{2\lambda\vartheta_0} \quad (46)$$

и наклоненного эллипса⁵

$$g_2(2\lambda\vartheta_0) = \frac{(2\lambda\vartheta_0)/\vartheta_0 - w}{r} \cos 2\vartheta_c \pm \frac{\sqrt{-(((2\lambda\vartheta_0)/\vartheta_0 - w) \sin 2\vartheta_c)^2 + w^2}}{r}. \quad (47)$$

При $r \cos \vartheta_c > 0$ графики функций $g_1(2\lambda\vartheta_0)$ и $g_2(2\lambda\vartheta_0)$ не имеют пересечений при $\lambda < 0$. При $r \cos \vartheta_c < 0$ существует единственное пересечение графиков области $\lambda < 0$, если

$$|g'_1(2\lambda\vartheta_0)|_{\lambda=0} > |g'_2(2\lambda\vartheta_0)|_{\lambda=0}. \quad (48)$$

Условие (48) выполнено при

$$|r\vartheta_0 \cos 2\vartheta_c| > 1. \quad (49)$$

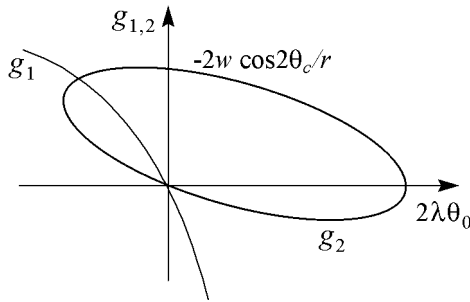


Рис. 3. Графическое решение уравнения (45): графики функций (46) и (47) при $r \cos \vartheta_c < 0$

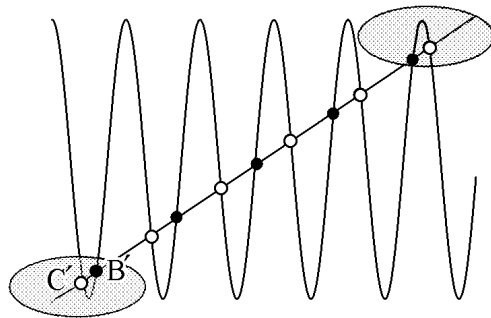


Рис. 4. Фрагмент рис. 2, а. Моды, устойчивые относительно возмущений на собственной частоте, отмечены белыми кружками, неустойчивые — черными. Овалами отмечены крайние в частотном наборе моды, у которых могут возникать сателлиты на действительной частоте при условии достаточно большой надпороговости (18) (см. п. 7)

Таким образом, если в системе существует единственная продольная мода (при $|r|\vartheta_0 < 1$), то она устойчива, так как неравенство (49) не может быть выполнено. Если с ростом $|r|\vartheta_0$ появляется вырожденная мода (см. рис. 2, б), то эта мода нейтральна ($\lambda = 0$), как следует из (26), (46), (47). При дальнейшем росте $|r|\vartheta_0$ происходит расщепление вырожденной моды на две (см. п. 2, рис. 2, б). В соответствии с (48), одна из этих мод — В на рис. 2, б, В' на рис. 4 — неустойчива, а вторая — мода С на рис. 2, б, С' на рис. 4 — устойчива. Если число продольных мод больше двух, то устойчивые и неустойчивые относительно «собственных» возмущений моды чередуются по частоте. Моды, для которых $r \cos \vartheta_c < 0$, неустойчивы; моды, для которых $r \cos \vartheta_c > 0$, устойчивы (см. рис. 2 и рис. 4).

⁵Заметим, что для стационарного состояния $\sin 2\vartheta_c = 0$ эллипс вырождается в две параллельные друг другу прямые.

Следует отметить аналогию с теорией захвата частоты генератора внешним сигналом [23], в качестве которого в данном случае выступает отраженная волна. Если фаза отраженной волны имеет такую величину, что ее воздействие приводит к увеличению амплитуды колебаний на основной моде (см. (21) при $r \cos \vartheta_c > 0$), то эта мода устойчива. И наоборот, если отражение приводит к уменьшению амплитуды колебаний (см. (21) при $r \cos \vartheta_c < 0$), то такая мода неустойчива.

6. Исследование устойчивости продольных мод относительно возмущений в виде боковых сателлитов

Задачу об устойчивости продольных мод относительно распада на боковые сателлиты удается решить аналитически только при условии достаточно большого превышения тока над стартовым (18). При произвольном соотношении параметров уравнение (42) решалось численно в [22].

Условие (18) равносильно неравенству (см. (21), (41))

$$w \gg |r|. \quad (50)$$

Заметим, что при оптимальной передаче мощности в нагрузку (22) условие (50) выполнено.

Следуя методу D-разбиения [25] найдем, при каких параметрах частотная отстройка сателлитов Ω действительна и не равна нулю. Очевидно, что при малом изменении параметров вблизи этих значений устойчивые сателлиты становятся неустойчивыми. Для действительных частот Ω величины $|\chi|$, $|r|$ одного порядка, и условие (50) означает, что $w \gg |\chi|$. При этом корни уравнения (42) примерно равны

$$\Omega_1 \approx iw, \quad (51)$$

$$\Omega_2 \approx i(\chi^2 + 2w\chi \cos(2\vartheta_c)) / (4w). \quad (52)$$

Корень (51) мнимый, причем для этого корня условие малости амплитуды отраженной волны, вернувшейся в генератор (37), может оказаться не выполненным. Однако, если коэффициент отражения стремится к нулю и условие (37) выполняется, то корень (51) равен прочности предельного цикла свободного автогенератора [23].

Уравнение (52) имеет бесконечно много решений. При действительных значениях Ω (52) сводится к двум уравнениям

$$w \cos(2\vartheta_c) = r \cos(2\Omega\vartheta_0), \quad (53)$$

$$\Omega = -r^2 \sin(2\Omega\vartheta_0) / (2w). \quad (54)$$

Фаза запаздывания ϑ_c , входящая в (53), определяется из уравнения $y_1(2\vartheta_c) = y_2(2\vartheta_c)$ (см. (23), (24)). Уравнения (53), (54) могут иметь решения не при любых параметрах системы. Нахождение решений уравнения (54) удобно проиллюстри-

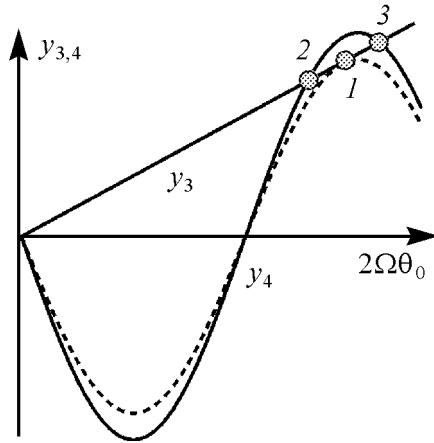


Рис. 5. Графическое решение уравнения (54) для нахождения спутников на действительной частоте. Каждое пересечение прямой y_3 и синусоиды y_4 определяет отстройку частоты Ω для пары спутников (см.(29), (34)). Пунктиром показана синусоида y_4 , касающаяся прямой y_3 (при $r^2\vartheta_0/w$). Пара спутников «1» распадается на две пары спутников, частотам которых соответствуют пересечения «2» и «3»

ровать графически. Эти решения лежат на пересечениях прямой

$$y_3(2\Omega\vartheta_0) = 2\Omega\vartheta_0. \quad (55)$$

и синусоиды (рис. 5)

$$y_4(2\Omega\vartheta_0) = -r^2\vartheta_0\sin(2\Omega\vartheta_0)/w. \quad (56)$$

Как следует из (54), такие пересечения существуют, только если выражение $r^2\vartheta_0/w$ превышает минимальное значение, примерно равное 4.6 (см. рис. 5)

$$r^2\vartheta_0/w \geq 4.6. \quad (57)$$

При выполнении условия (57) число продольных мод велико (см. (50), п. 2)

$$|r|\vartheta_0 \gg 1. \quad (58)$$

Из (50), (53) следует, что

$$|\cos(2\vartheta_c)| \ll 1. \quad (59)$$

Неравенства (58), (59) означают, что частоты тех мод, которые могут иметь спутники на действительной частоте, находятся на краю частотного набора всех мод (см. рис. 4). Если для какой-нибудь продольной моды существуют спутники на действительной частоте, то производные функций (24) и (56) равны (см. (53)): $y'_4(2\Omega\vartheta_0) = y'_2(2\vartheta_c)$. В частности, если спутники на действительной частоте вырожденные (см. рис. 5), то выполнено условие касания (26), то есть это спутники вырожденной исходной моды (см. рис. 2, б).

Рассмотрим переход от устойчивости к неустойчивости при изменении параметров относительно их граничных значений для случая, когда исходная мода вырожденная (для нее справедливо соотношение (26)), и при этом выполнено условие появления пары вырожденных спутников на действительной частоте: $r^2\vartheta_0/w = 4.6$. Предположим, что коэффициент отражения δ меняется, а остальные параметры – длина линии (ϑ_0), активное сопротивление и волновой импеданс линии (параметры μ , η , см. (9)) – остаются неизменными. При уменьшении $|\delta|$ исходная мода исчезает. Если же $|\delta|$ растет, то исходная мода распадается на две моды (см. рис. 2, б), каждая из которых имеет свои боковые спутники. Исследуем эти спутники на устойчивость, то есть найдем знак мнимой части $\text{Im } \Omega$ (как следует из (29), $\text{Im } \Omega$ одинакова для правого и левого спутников). При изменении δ меняется параметр r (17). При этом возникают следующие добавки к частоте исходной моды, фазе запаздывания и параметру надпороговости основной моды

$$\Delta\alpha = \pm \frac{1}{\vartheta_0} \sqrt{\frac{\Delta r}{2r}}, \quad \Delta\vartheta_c = \pm \sqrt{\frac{\Delta r}{2r}}, \quad \Delta w = \mp \sqrt{2r\Delta r} \sin(2\vartheta_c). \quad (60)$$

Верхний знак соответствует более высокочастотной моде, нижний – низкочастотной. Дифференцируя (52) с учетом (60), найдем мнимую часть частоты сателлитов

$$\text{Im } \Omega = \mp \frac{\sqrt{2r\Delta r} \sin(2\vartheta_c)}{4\vartheta_0 w}. \quad (61)$$

Для мод, расположенным подобно модам В и С на рис. 2, б, значение $\sin(2\vartheta_c) < 0$, поэтому мода С устойчива, мода В неустойчива⁶. Если моды расположены подобно модам В' и С' на рис. 4, то мода В' неустойчива, мода С' устойчива. В общем случае неустойчивой относительно распада на сателлиты ($\text{Im } \Omega < 0$) окажется та мода, для которой наклон синусоиды (24) больше наклона прямой (23): $y'_2(\vartheta_c) > y'_1(\vartheta_c)$ (рис. 2, 4); устойчивой – мода, у которой $y'_2(\vartheta_c) < y'_1(\vartheta_c)$.

Покажем, что, если продольная мода единственная (см. (25)), то она устойчива. В соответствии с выводами Приложения 1, при выполнении условия

$$|\cos 2\vartheta_c| \sim 1. \quad (62)$$

мода устойчива. Предположим, что длина системы ($2\vartheta_0$) меняется в пределах π таким образом, что мода остается единственной, а $|\cos 2\vartheta_c|$ становится много меньше единицы. При этом согласно приведенным выше в данном разделе рассуждениям, нет перехода через границу устойчивости, так как не выполнено условие (58), и положительный знак $\text{Im } \Omega > 0$ сохраняется при изменении длины системы. Следовательно, мода остается устойчивой, причем она устойчива и относительно «собственных» возмущений (п.5). Устойчивость единственной моды при произвольном соотношении параметров r, w показана численно во второй части статьи, [22].

Как показано в Приложении 2, если при $w \gg |r|$ для какой-либо моды найдена граница устойчивости $w_{\text{bound}}(r, \vartheta_0)$, то в области $w < w_{\text{bound}}$ эта мода неустойчива, в области $w > w_{\text{bound}}$ – устойчива. При произвольном соотношении параметров r, w это показано в [22].

Заключение

В данной работе представлены результаты аналитического исследования устойчивости одночастотных продольных мод в генераторе со слабо отражающей удаленной нагрузкой.

Если в системе существует единственная продольная мода, то она устойчива. С увеличением расстояния генератор-нагрузка и коэффициента отражения волны от нагрузки число допустимых одночастотных состояний – продольных мод системы – растет. Такого рода мода в определенной области параметров может оказаться неустойчивой.

Исследование продольных мод относительно возмущений на их собственной частоте показывает, что «собственно-устойчивые» и «собственно-неустойчивые» моды чередуются по частоте.

⁶Здесь для определенности предполагается $r > 0$. Изменение знака r равносильно изменению фазы синусоиды (24) на π .

Наряду с этим, мода может быть неустойчива относительно возмущений в виде двух спутников с частотами, симметрично отстоящими от ее частоты. Рост таких возмущений можно трактовать как параметрическую неустойчивость, или 4-фотонный распад двух квантов сильной исходной моды на два кванта спутников. В случае, когда относительное превышение тока над стартовым велико по сравнению с коэффициентом отражения (в частности, при таких параметрах, когда передача мощности в нагрузку оптимальная), неустойчивыми относительно распада на спутники могут быть только моды, частоты которых лежат на краю частотного набора всех мод. Спутниковая неустойчивость при произвольном превышении тока над стартовым исследована численно во второй части статьи, [22].

Автор благодарен М.И. Петелину, Н.М. Рыскину и А.С. Сергееву за полезные дискуссии и внимание к работе.

Приложение 1

Устойчивость мод $|\cos 2\vartheta_c| \sim 1$ относительно распада на спутники при достаточно большом превышении над порогом генерации

При $w \gg |r|$ и $|\cos 2\vartheta_c| \sim 1$ в (52) можно пренебречь одним слагаемым:

$$\Omega \approx i\chi \cos 2\vartheta_c / 2. \quad (\text{П1.1})$$

Представим Ω в виде суммы действительной и мнимой частей: $\Omega = \Omega' + i\Omega''$. Тогда из (П1.1), (41) для действительной и мнимой частей Ω получим:

$$x = -R \sin x e^y, \quad (\text{П1.2})$$

$$y = R(1 - \cos x e^y), \quad (\text{П1.3})$$

где $x = 2\Omega'\vartheta_0$, $y = 2\Omega''\vartheta_0$, $R = r\vartheta_0 \cos 2\vartheta_c$. Поскольку Ω' определена как положительная величина, для доказательства устойчивости необходимо показать, что при $x > 0$ неустойчивых решений ($y < 0$) не существует.

Если $r \cos 2\vartheta_c > 0$, то $R > 0$, и, как следует из (П1.3), действительно, таких решений нет. При $r \cos 2\vartheta_c < 0$ воспользуемся методом D-разбиения. Частота спутника может быть действительна ($y = 0$) в двух случаях: $\cos x = 1$, $x = 0$ или $\cos 2\vartheta_c = 0$, $x = 0$. В обоих этих случаях $\Omega'' = 0$, то есть возмущения не являются спутниками. Следовательно, границы неустойчивости нет. Поскольку при $|R| < 1$ нет решений $x > 0$, $y < 0$ (см. П1.2), то такие решения не появятся и при любых других значениях $|R|$. Таким образом, моды, для которых $|\cos 2\vartheta_c| \sim 1$, устойчивы относительно распада на спутники.

**Расположение областей устойчивости и неустойчивости
вблизи граничной поверхности в пространстве параметров
при достаточно большом превышении над порогом генерации**

Будем считать, что при $w \gg |r|$ найдена граница устойчивости какой-либо моды относительно распада на сателлиты $w_{\text{bound}}(r, \vartheta_0)$. Изменение величины w по сравнению с граничным значением приводит к изменению Ω и χ (52). Как следует из (41), (52), эти приращения равны:

$$\Delta\chi = 2ir\vartheta_0 e^{-2i\Omega\vartheta_0} \Delta\Omega, \quad (\text{П2.1})$$

$$\Delta\Omega = \frac{i\chi\Delta\chi}{2w} + \frac{i \cos(2\vartheta_c) \Delta\chi}{2} - \frac{i\chi^2\Delta w}{4w^2}. \quad (\text{П2.2})$$

Предполагается, что изменение параметра надпороговости w происходит только в результате изменения величины μ . При этом приращения ϑ_0 , ϑ_c и r не появляются (см. п.2). Подставляя (П2.1) в (П2.2) и учитывая (53), (54), получим:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Delta\Omega \times \left| 1 + \frac{\chi r \vartheta_0 e^{-2i\Omega\vartheta_0}}{w} + r \vartheta_0 \cos(2\vartheta_c) e^{-2i\Omega\vartheta_0} \right|^2 = \\ = \frac{r^2 \Delta w}{2w^2} (1 - \cos(2\Omega\vartheta_0)) \left(\cos(2\Omega\vartheta_0) + \frac{r^2 \vartheta_0}{w} \right). \end{aligned} \quad (\text{П2.3})$$

Поскольку для существования границы сателлитной неустойчивости необходимо $r^2\vartheta_0/w \geq 4.6$, мода устойчива ($\text{Im } \Delta\Omega > 0$) при $\Delta w > 0$, и неустойчива ($\text{Im } \Delta\Omega < 0$) при $\Delta w < 0$.

Библиографический список

1. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. (Сер. Современная теория колебаний и волн). М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2001.
3. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры. (Сер. Синергетика: от прошлого к будущему). М.: Едиториал УРСС, 2004.
4. *Григорьева Е.В., Кащенко С.А.* Параметры порядка в моделях лазеров с запаздывающей обратной связью / В кн.: Новое в синергетике. Взгляд в третье тысячелетие. М.: Наука, 2002. С. 185.
5. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
6. *Ginzburg N.S., Petelin M.I., Shapiro M.A.* Automodulation and Stochastic Oscillation Regimes in Resonant Relativistic Electron Masers // 10-th European Conf. On Contr. Fusion and Plasma Physics. Moscow. 1981. Vol. 1. P. M2.

7. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н. Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1037.
8. Marchewka C., Larsen P., Bhattacharjee S., Booske J., Sengele S., Ryskin N.M., Titov V.N. Generation of chaotic radiation in a driven traveling wave tube amplifier with time-delayed feedback // Phys. Plasmas. 2006. Vol. 13, № 1. P. 013104.
9. Рыскин Н.М., Шигаев А.М. Сложная динамика двухрезонаторного клистрона-генератора с запаздывающей обратной связью // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 1. С. 72.
10. Bezruchko B.P., Karavaev A.S., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Reconstruction of time-delay systems from chaotic time serie // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 056216.
11. Losson J., Mackey M.C. Coupled Map Lattices as Models of Deterministic and Stochastic Differential Delay Equations // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, № 1. P. 115.
12. Глявин М.Ю., Запезалов В.Е., Куфтин А.Н., Лучинин А.Г. Экспериментальное исследование спектрального состава выходного излучения в гиротроне с отражением части выходного сигнала // Радиофизика. 2000. Vol. 43, № 5. С. 440.
13. Ginzburg N.S., Zaitsev N.I., Ilyakov E.V., Kulagin I.S., and Rozental' R.M. Self-modulated generation observed in a delayed feedback relativistic microwave gyrotron // Tech. Phys. Lett. 2002. Vol. 28, № 5. P. 395.
14. Rozental R., Ginzburg N., Glyavin M., Zaitsev N., Zapevalov V., Ilyakov E., Kulagin I. Self-modulation spectrum variation in gyrotrons with output reflector // Proceedings of Joint 29th International Conference on Infrared and Millimeter Waves and 12th International Conference on Terahertz Electronics. Karlsruhe. Germany. 2004. Vol. 2. P. 306.
15. Airila M.I., Dumbrajs O., Kall P. and Piosczyk B. Influence of reflections on the operation of the 2 MW, CW 170 GHz coaxial cavity gyrotron for ITER // Nucl. Fusion. 2003. Vol. 43, № 11. P. 1454.
16. Airila M.I., Kall P. Effect of reflections on nonstationary gyrotron oscillations // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 2004. Vol. 52, № 2. P. 522.
17. Dumbrajs O., Idehara T., Watanabe S., Kimura A., Sasagawa H., Agusu L., Mitsudo S., Piosczyk B. Reflections in gyrotrons with axial output // IEEE Trans. on Plasma Science. 2004. Vol. 32, № 3. P. 899.
18. Grudiev A., Jelonnek J., and Schunemann K. Time-domain analysis of reflections influence on gyrotron operation // Phys. Plasmas. 2001. Vol. 8, № 6. P. 2963.
19. Grudiev A., Schunemann K. Nonstationary behavior of a gyrotron in the presence of reflections // International Journal of Infrared and Millimeter Waves. 2003. Vol. 24, № 4. P. 429.
20. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, Физматлит, 1997.
21. Antonsen T.M., Cai S.Y., Nusinovich G.S. Effect of window reflection on gyrotron operation // Phys. Fluids B. 1992. Vol. 4, № 12. P. 4131.
22. Новожилова Ю.В., Сергеев А.С., Усачева С.А. Параметрическая неустойчивость в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки. II. Численное исследование // Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 2. С. 128.

23. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
24. Фернандез А., Харчев Н.К., Новожилова Ю.В., Батанов Г.М., Бондарь Ю.Ф., Колик Л.В., Сарксян К.А., Толкачёв А. Реакция гиротрона на малое отражение от нестационарной нагрузки // Прикладная физика. 2009, № 6. С. 158.
25. Неймарк Ю.И. D-разбиение пространства квазиполиномов. (К устойчивости линеаризованных распределенных систем) // Прикладная математика и механика. 1949. Т. 3, № 4. С. 349.

Институт прикладной физики РАН

Поступила в редакцию 28.01.2011

PARAMETRIC INSTABILITY OF AUTOOSCILLATOR COUPLED WITH REMOTE LOAD

I. Theory

Yu.V. Novozhilova

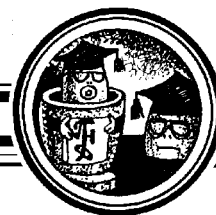
At the autooscillator with weakly reflected remote load the number of one-frequency states – longitudinal modes – increases with the growth of the reflection coefficient and the length of the delay line. A mode of this kind can be unstable in some parameter regions. There can be two types of perturbations: a) the perturbations resulting in a slow evolution of principal mode amplitude and frequency; b) the perturbations in the form of two satellites which frequencies are symmetric from that of the principal mode. The modes stability relative to each type of perturbations was studied analytically.

Keywords: Autooscillator operation at the load, delayed reflection, one-frequency mode stability.



Новожилова Юлия Владимировна – родилась в Горьком (1960), окончила радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1982). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1995). Старший научный сотрудник Института прикладной физики РАН (Нижний Новгород). Область научных интересов – теория электронных СВЧ-приборов, влияние отражений на работу автогенератора. Имеет около 50 публикаций.

603950 Нижний Новгород
Институт прикладной физики РАН
E-mail: river@appl.sci-nnov.ru



ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ГЕНЕРАТОРЕ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ ОТРАЖЕНИЕМ ОТ НАГРУЗКИ

II. Численное исследование*

Ю.В. Новожилова, А.С. Сергеев, С.А. Усачева

Для генератора с малым запаздывающим отражением от нагрузки устойчивость одночастотных колебаний (продольных мод) исследована численно на основе решения характеристического уравнения. При произвольном превышении над порогом генерации в пространстве параметров системы найдены области устойчивости и неустойчивости мод относительно параметрического распада первичной моды на боковые сателлиты, симметрично отстоящие по частоте от частоты первичной моды. Полученные результаты, с одной стороны, совпадают с теоретическими выводами в тех областях параметров, где характеристическое уравнение можно решить аналитически; с другой стороны, хорошо согласуются с результатами численного моделирования процессов перехода между различными модами.

Ключевые слова: Работа генератора на нагрузку, запаздывающее отражение, устойчивость одночастотных решений.

Введение

Исследуем устойчивость одночастотных колебаний (продольных мод)** в генераторе с малым отражением от удаленной нагрузки (см. [1, рис. 1]). Предполагаем, что добротность резонансного контура генератора достаточно велика, а стартовый инкремент мал по сравнению с собственной частотой резонансного контура генератора. При этом одночастотные колебания близки к синусоидальным, а высшими гармониками можно пренебречь, так как они не попадают в полосу контура. Как показано в [1], продольных мод в системе может быть несколько. Их частоты ω_c и фазы запаздывания $\vartheta_c = \omega_c l/c$ определяются уравнением

$$2\vartheta_c = 2\vartheta_0 - r\vartheta_0 \sin(2\vartheta_c). \quad (1)$$

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

**Эти продольные моды соответствуют одночастотным колебаниям нелинейной системы и, в отличие от мод линейной консервативной системы, не обладают свойствами полноты и ортогональности.

Здесь $r = \delta\eta$ – параметр, пропорциональный коэффициенту отражения $\delta/2$, предполагается $|\delta| \ll 1$, $\eta = 1/Q$ (Q – добротность резонансного контура автогенератора); $\vartheta_0 = \omega_0 l/c$ – фаза запаздывания на собственной частоте контура ω_0 , l – длина линии задержки. Решение уравнения (1) удобно проиллюстрировать графически (см. [1, рис. 2]).

Если на частоте ω_+ возникает возмущение одночастотного состояния, то из-за квадратичной нелинейности активной среды появляется возмущение на симметричной частоте ω_- :

$$2\omega_c = \omega_+ + \omega_-^* \quad (2)$$

Выражение (2) позволяет интерпретировать рост возмущений как параметрический процесс распада двух квантов исходной сильной моды, играющей роль накачки, на кванты боковых сателлитов. Отстройка частоты сателлита от частоты стационарного состояния $\Omega = (\omega_+ - \omega_c)/\omega_0$ может быть найдена из характеристического уравнения

$$\Omega^2 - i\Omega w - i\chi\Omega \cos(2\vartheta_c) - w\chi \cos(2\vartheta_c)/2 - \chi^2/4 = 0, \quad (3)$$

где $\chi = r(1 - e^{-2i\Omega\vartheta_0})$, $w = \mu - \eta + r \cos(2\vartheta_c)$, μ – величина, пропорциональная плотности активной среды, при этом $(\mu - \eta)/\eta = (I - I_{st})/I_{st}$ – относительное превышение тока над стартовым значением. Решение уравнения (3) определяется тремя параметрами: отношением коэффициента отражения ($\delta/2$) к добротности контура $r = \delta/Q = \eta\delta$; фазой запаздывания ϑ_0 на собственной частоте колебательного контура, эта фаза пропорциональна длине линии задержки l ; величиной w , пропорциональной квадрату амплитуды колебаний (см. [1]).

Уравнения (2), (3) допускают случай, когда действительные части частот возмущений совпадают с частотой исходной моды: $\text{Re}\Omega = \omega_c$. Назовем такие возмущения «собственными». Устойчивость мод относительно собственных возмущений исследована аналитически в [1]. Показано, что если мода единственная, то она устойчива. Если мод несколько, то моды, для которых $r \cos 2\vartheta_c > 0$ – устойчивы, моды, для которых $r \cos 2\vartheta_c < 0$ – неустойчивы.

Распад исходной моды на боковые сателлиты ($\text{Re}\Omega \neq \omega_c$) при выполнении условия

$$w \gg |r|, \quad (4)$$

означающего, что относительное превышение тока над стартовым $(I - I_{st})/I_{st}$ существенно больше коэффициента отражения $\delta/2$, также исследован аналитически в [1]. Показано, что неустойчивыми относительно распада на сателлиты могут быть только те моды, частоты которых находятся на краю частотного набора всех мод, при этом число мод должно быть велико.

1. Построение границ областей устойчивости продольных мод относительно распада на сателлиты

При произвольном превышении тока над пороговым значением уравнение (3) решалось численно. Для определенности предполагалось $r > 0$. При изменении знака r все рассуждения сохранятся, если фаза запаздывания $2\vartheta_0$ изменится на π .

Если продольная мода единственная (при малых значениях произведения $|r|\vartheta_0 < 1$ [1]), то, как показывают результаты аналитического [1] и численного решения характеристического уравнения (3), она устойчива. Фазы запаздывания на частоте этой моды и на собственной частоте колебательного контура лежат в одном и том же интервале. Для определенности предположим, что это интервал $\{(2n-1)\pi; 2n\pi\}$ (если это соседний интервал: $\{2n\pi; (2n+1)\pi\}$, то можно провести аналогичное рассмотрение). С ростом коэффициента отражения при $|r|\vartheta_0 \geq 1$ появляются новые продольные моды, у которых фазы запаздывания лежат в других интервалах: $2\vartheta_{c\text{new}} < (2n-1)\pi$ или $2\vartheta_{c\text{new}} > 2n\pi$ (см. [1, рис. 2]). Относительно распада на сателлиты новые моды могут оказаться неустойчивыми, но «исходная» мода (с фазой, лежащей в интервале $(2n-1)\pi \leq 2\vartheta_{c\text{orig}} \leq 2n\pi$) останется устойчивой.

Для того чтобы в рассматриваемом интервале фаз запаздывания $(2n-1)\pi \leq 2\vartheta_c \leq 2n\pi$ могли возникнуть моды, неустойчивые относительно распада на сателлиты, фаза запаздывания на собственной частоте колебательного контура должна быть меньше нижней границы этого интервала: $2\vartheta_0 < (2n-1)\pi$. Тогда при некотором значении $|r|\vartheta_0 > 1$ в интервале $(2n-1)\pi \leq 2\vartheta_c \leq 2n\pi$ появляется вырожденная мода. Дальнейшее возрастание $|r|\vartheta_0$ приводит к распаду этой вырожденной моды на две моды, подобные модам В и С на рис. 2, б в [1]. Вырожденная мода и две возникшие из нее моды могут оказаться неустойчивыми к росту сателлитов.

На рис. 1 при достаточно большой надпороговости $w \gg |r|$ построен фрагмент сечения границы неустойчивости плоскостью $\vartheta_0 = \text{const}$ для вырожденной моды и двух возникших из нее мод. Этот фрагмент соответствует случаю, исследованному аналитически в [1, п. 6], и иллюстрирует совпадение численных и аналитических результатов. При некотором значении параметра $r = \hat{r}$ появляется новая вырожденная мода, нейтральная относительно «собственной» неустойчивости.

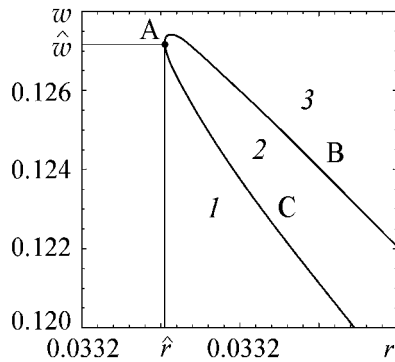


Рис. 1. Границы областей устойчивости относительно распада на сателлиты при $2\vartheta_0 = 318.2\pi$ для мод, фазы запаздывания которых лежат в интервале $323\pi < 2\vartheta_c < 324\pi$. Эти моды обозначены А, В, С, подобно модам в [1, на рис. 2, б]. При $r < \hat{r}$ продольных мод с фазами запаздывания $323\pi < 2\vartheta_c < 324\pi$ нет. Вырожденная мода А появляется при $r = \hat{r}$. При $w = \hat{w}$ она нейтральна; при $w > \hat{w}$ – устойчива, при $w < \hat{w}$ – неустойчива. При $r > \hat{r}$ (в областях 1, 2, 3) существуют две моды: В и С. В области 1 моды В и С неустойчивы; в области 2 мода В неустойчива, мода С устойчива; в области 3 обе моды устойчивы

При $w = \hat{w}$ у этой моды возникают две пары вырожденных сателлитов на действительной частоте, то есть мода нейтральна и относительно сателлитной неустойчивости. Если $w > \hat{w}$, сателлиты этой моды затухают, если $w < \hat{w}$, сателлиты нарастают – мода неустойчива. При возрастании коэффициента отражения в случае, когда длина линии и превышение над порогом не меняются ($\mu, \eta, \vartheta_0 = \text{const}$), вырожденная нейтральная мода распадается на две моды, а на плоскости $w(r)$ происходит смещение из точки $r = \hat{r}, w = \hat{w}$ либо в области 2, 3 – для высокочастотной моды С (в этих областях мода С устойчива относительно распада на сателлиты), либо в области 1, 2 для низкочастотной моды В (в этих областях мода В неустойчива относительно распада на сателлиты). Относительно роста «собственных» возмущений мода В неустойчива, мода С устойчива во всех областях [1, п. 5].

При произвольном соотношении параметров w , $|r|$ сечения границ областей устойчивости плоскостями $\vartheta_0 = \text{const}$ и $r = \text{const}$ показаны на рис. 2 и рис. 3. Рис. 2 и кривые в левой части рис. 3 построены для мод с такими же фазами запаздывания $(2n - 1)\pi \leq 2\vartheta_c \leq 2n\pi$, как и для которых построен рис. 1. В правой части рис. 3 показаны сечения границ областей устойчивости для мод, фазы которых лежат в соседнем интервале $(2n - 2)\pi \leq 2\vartheta_c \leq (2n - 1)\pi$. В областях, где величина w выше граничных значений $w > w_{\text{bound}}$ для какой-либо моды, соответствующая мода устойчива, в областях $w < w_{\text{bound}}$ – неустойчива. Так как коэффициент отражения мал, то и параметр r мал (см. обозначения после (1)). Расчеты проводились для $r \leq 0.034$. При достаточно большой надпороговости $w \gg r$ численные результаты совпадают с аналитическими: рис. 1 является фрагментом рис. 2. При тех значениях r , ϑ_0 , для которых построены границы на рис. 1, исследуемые моды являются крайними по частоте в частотном наборе всех мод. Если при этих значениях r увеличивается длина линии (фаза ϑ_0), то моды $(2n - 1)\pi \leq 2\vartheta_c \leq 2n\pi$ перестают быть крайними по частоте: частоты этих мод сверху приближаются к единице (см. (1)). При этом граница устойчивости сдвигается в область $w \sim r$ (см. рис. 2, 3). Неустойчивость исследуемых мод возможна до тех пор, пока $2\vartheta_0 \leq (2n - 1)\pi$. Нижние части кривых на рис. 2 и в левой части рис. 3 соответствуют более высокочастотным модам типа С, верхние – низкочастотным модам типа В (см. рис. 1 и [1, рис. 2, б]).

При дальнейшем росте длины $2\vartheta_0 > (2n - 1)\pi$, как отмечалось выше, рассматриваемые продольные моды с фазами запаздывания $(2n - 1)\pi \leq 2\vartheta_c < 2n\pi$ становятся устойчивыми,

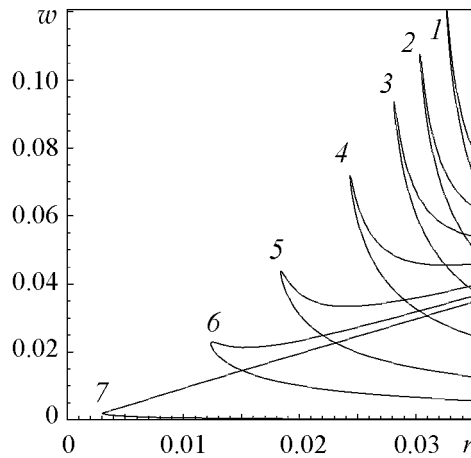


Рис. 2. Сечения границ областей устойчивости плоскостями $\vartheta_0 = \text{const}$ для мод, фазы запаздывания которых лежат в интервале $323\pi \leq 2\vartheta_c \leq 324\pi$. Нижние части кривых соответствуют более высокочастотной моде типа С, верхние части – более низкочастотной моде типа В. $2\vartheta_0 = 318.3\pi$ (1); 318.6π (2); 319π (3); 319.6π (4); 320.54π (5); 321.49π (6); 322.95π (7)

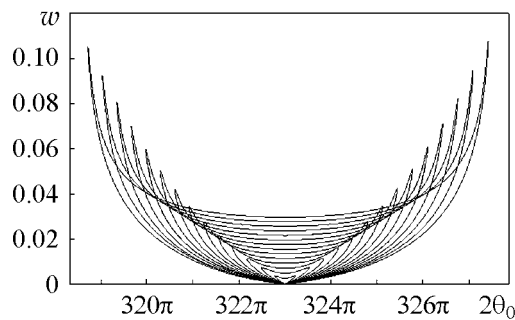


Рис. 3. Сечения границ областей устойчивости плоскостями $r = \text{const}$. Левые части кривых соответствуют модам $323\pi \leq 2\vartheta_c \leq 324\pi$, правые части – модам $322\pi \leq 2\vartheta_c \leq 323\pi$. В левой части нижние кривые соответствуют более высокочастотной моде типа С, верхние – более низкочастотной моде типа В (см. рис. 1 и [1, рис. 2, б]). И наоборот: в правой части рисунка нижние кривые соответствуют более низкочастотной моде типа С', верхние – более высокочастотной моде типа В' (см. [1, рис. 4]). Значение параметра r , соответствующее разным кривым, меняется от 0.002 (для кривой с минимальным разбросом значений ϑ_0) до 0.0028 (для кривой с максимальным разбросом значений ϑ_0) с шагом 0.002

а неустойчивыми могут быть моды с фазами запаздывания в интервале $(2n - 2)\pi < 2\vartheta_c \leq (2n - 1)\pi$, расположенные в нижней части синусоиды (1) (подобно модам B' , C' в [1, рис. 4]). Для этих мод сечения границ областей устойчивости плоскостями $r = \text{const}$ (правые части кривых на рис. 3) выглядят почти симметричными относительно прямой $2\vartheta_0 = (2n - 1)\pi$, однако точной симметрии нет. Отсутствие симметрии объясняется тем, что при изменении ϑ_0 и неизменном r меняется произведение $|r|\vartheta_0$ (хотя и незначительно, поскольку ϑ_0 велико), а это произведение определяет фазу запаздывания (см. (1)). Верхние кривые на рис. 3 построены для моды, обозначенной цифрой «1» на рис. П1, б (Приложение 1). Заметим, что для нижних кривых на рис. 3 при $2\vartheta_0 = (2n - 1)\pi$ находится излом. Это связано с тем, что левая и правая части нижних кривых построены для разных продольных мод. Нижние кривые в левой части рис. 3 (при $2\vartheta_0 < (2n - 1)\pi$) построены для моды, обозначенной цифрой «2» на рис. П1, б, а в правой части рис. 3 (при $2\vartheta_0 > (2n - 1)\pi$) – для моды «3» на рис. П1, б. Действительно, если фаза запаздывания на собственной частоте контура начинает превышать $2\vartheta_0 = (2n - 1)\pi$, то центральная мода «1» (см. рис. П1, б) смещается в область меньших фаз запаздывания: $2\vartheta_{c1} < (2n - 1)\pi$, то есть в правую часть рис. 3. При этом соседняя продольная мода «2» (рис. П1, б) с фазой запаздывания $2\vartheta_{c2} > (2n - 1)\pi$ становится устойчивой, так как при $2\vartheta_0 = (2n - 1)\pi$ для нее $w_{\text{bound}} = 0$ (см. Приложение 1), а неустойчивой может быть мода «3».

На рис. 4 показаны границы областей устойчивости относительно роста сателлитов в пространстве параметров $(r, 2\vartheta_0, w)$ для тех же двух продольных мод, для которых построены проекции на рис. 1, 2 и в левой части рис. 3. Фазы запаздывания этих мод лежат в интервале $323\pi \leq 2\vartheta_c \leq 324\pi$. Граничные поверхности

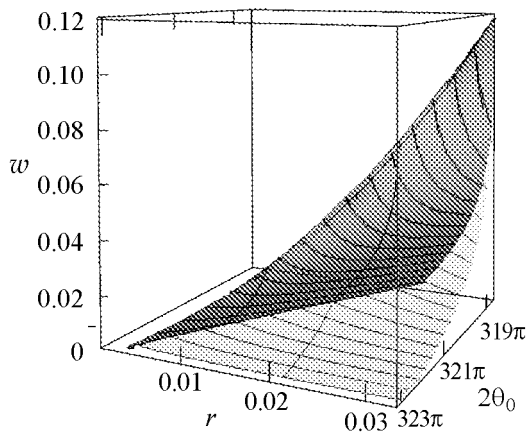


Рис. 4. Двухлистная поверхность – граница областей устойчивости относительно роста сателлитов в пространстве параметров r, ϑ_0, w при $2\vartheta_0 < 323\pi$ для мод, фаза запаздывания которых находится в интервале $323\pi \leq 2\vartheta_c < 324\pi$. Верхний лист поверхности соответствует более низкочастотной моде В, нижний – моде С (см. рис. 1 и [1, рис. 2, б]). Появлению вырожденной моды А соответствует сгиб поверхности. Между листами поверхности мода В неустойчива, мода С устойчива. Сверху над обоими листами поверхности (при $w > w_{\text{bound}}$) обе моды устойчивы, снизу под обоими листами (при $w < w_{\text{bound}}$) – обе неустойчивы

расположены в области $|r|\vartheta_0 \geq 1$, при этом исследуемые моды – не единственные в системе. При $|r|\vartheta_0 < 1$ граничных поверхностей нет, так как в исследуемом интервале существует только одна мода, и она устойчива. Общая линия поверхностей (сгиб) на рис. 4 соответствует появлению вырожденной моды (см. также рис. 1–3). Проекция сгиба на любую из плоскостей $w = \text{const}$ – кривая $r(\vartheta_0)$. Вблизи точки $r = 1/323\pi, \vartheta_0 = 323\pi, w = 0$, из которой расходятся листы поверхности, производная $r'(\vartheta_0)$ равна бесконечности (Приложение 2). При возрастании $|r|\vartheta_0$ вырожденная мода распадается на две моды, подобные модам В и С на рис. 1 или в [1 на рис. 2, б]. Моде В соответствует верхняя поверхность, моде С – нижняя. Над каждой поверхностью при $w > w_{\text{bound}}$ находится область устойчивости соответствующей моды, при $w < w_{\text{bound}}$ – область неустойчивости. Края поверхностей лежат в плоскости $2\vartheta_0 = 323\pi$.

Для продольных мод, фазы запаздывания которых лежат в интервале $322\pi \leq 2\vartheta_c < 323\pi$, двулистные поверхности должны быть почти симметричны изображенным на рис. 4. Эти близкие к симметричным поверхности показаны на рис. 5, а сечения их плоскостями $r = \text{const}$ – в правой части рис. 3.

Для продольных мод, фазы запаздывания которых лежат в других интервалах, граничные поверхности подобны изображенным на рис. 4, 5, но расходятся они из других точек, с координатами $2\vartheta_0 = (2n - 1)\pi$, $r = 2/((2n - 1)\pi)$, $w = 0$. Сечения нескольких таких поверхностей плоскостью $r = \text{const}$ показаны на рис. 6. При $r < 0$ граничные поверхности представляют собой аналогичный набор двулистных поверхностей, расходящихся с ростом $|r|$ из точек с координатами $2\vartheta_0 = 2\pi n$, $r = 1/(\pi n)$, $w = 0$.

На всех рассмотренных рисунках (рис. 1–6) найдены границы областей устойчивости продольных мод относительно роста сателлитов, ближайших по частоте к частоте исходной моды. Для более дальних сателлитов границы устойчивости расположены при меньших значениях w . Эти границы представляют собой двулистные поверхности, расходящиеся из тех же точек с координатами $2\vartheta_0 = (2n - 1)\pi$, $r = 2/((2n - 1)\pi)$, $w = 0$, как и поверхности на рис. 4, 5, но расположены они ниже показанных на этих рисунках поверхностей.

Рассмотрим форму краев поверхности, изображенной на рис. 4. Верхний край соответствует центральной моде «1» на рис. П1, б, нижний край – моде «2» на том же рисунке. Края находятся в плоскости $2\vartheta_0 = 323\pi$. При этом на удвоенной длине линии укладывается целое число полувольт на собственной частоте колебательного контура генератора $2\vartheta_0 = \pi n$, частоты продольных мод симметричны относительно частоты

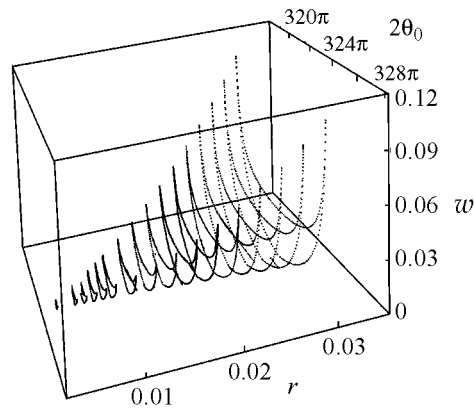


Рис. 5. Точки на двулистной поверхности соответствуют границе областей устойчивости относительно роста сателлитов в пространстве параметров r , ϑ_0 , w для мод, фазы запаздывания которых находятся в интервале $322\pi \leq 2\vartheta_c < 324\pi$. Верхний лист поверхности при $2\vartheta_0 \leq 323\pi$ соответствует моде В, нижний – моде С (см. [1, рис. 1, рис. 2, б]); при $2\vartheta_0 \geq 323\pi$ верхний лист соответствует моде В', нижний – моде С' (см. [1, рис. 4]). Появлению вырожденных мод соответствуют сгибы поверхности. Между листами поверхности мода, которой соответствует верхний лист, неустойчива, мода, которой соответствует нижний лист, устойчива. Сверху над обоими листами поверхности обе моды устойчивы, снизу под обоими листами – обе неустойчивы

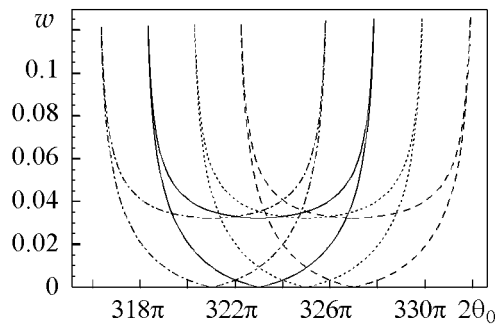


Рис. 6. Сечения границ областей устойчивости плоскостью $r = 0.03255$ для широкого набора продольных мод. Для штрихпунктирной линии левые части кривых соответствуют модам $321\pi \leq 2\vartheta_c \leq 322\pi$, правые – модам $320\pi \leq 2\vartheta_c \leq 321\pi$; для сплошной линии левые части – модам $323\pi \leq 2\vartheta_c \leq 324\pi$, правые части – модам $322\pi \leq 2\vartheta_c \leq 323\pi$; для линии, показанной точками, левые части соответствуют модам $325\pi \leq 2\vartheta_c \leq 326\pi$, правые – модам $324\pi \leq 2\vartheta_c \leq 325\pi$; для штриховой линии левые части – модам $327\pi \leq 2\vartheta_c \leq 328\pi$, правые – модам $326\pi \leq 2\vartheta_c \leq 327\pi$

центральной моды (см. (1)) и для любого соотношения параметров r, w удается аналитически методом D-разбиения исследовать устойчивость центрального состояния $2\vartheta_c = 2\vartheta_0 = \pi n$ (см. Приложение 1). Если при $r > 0$ на удвоенной длине линии укладывается нечетное число полувольт ($2\vartheta_0 = \pi(2n - 1)$) и центральная мода $2\vartheta_c = 2\vartheta_0 = \pi(2n - 1)$ не единственная: $r\vartheta_0 > 1$, то она неустойчива относительно «собственных» возмущений [1]. При этом, если надпороговость достаточно мала (см. Приложение 1)

$$w < w_{\text{bound}} = r(1 - \cos(2\Omega\vartheta_0))/2, \quad (5)$$

эта мода неустойчива также относительно распада на сателлиты. Как следует из Приложения 1, на границе неустойчивости $w = w_{\text{bound}}$ отстройка частоты сателлитов действительна и имеет значение

$$\Omega = r \sin(2\Omega\vartheta_0)/2, \quad (6)$$

то есть сателлиты центральной моды совпадают по частоте с соседними продольными модами (см. (1) при $2\vartheta_0 = \pi(2n + 1)$). Если $r\vartheta_0 \gg 1$, то число мод велико. При этом $\cos(2\Omega\vartheta_0) \approx -1$ (см.(6)), и зависимость (5) близка к линейной: $w_{\text{bound}}(r) \approx r$ (см. рис. 2, рис. 4 при $2\vartheta_0 \approx 323\pi$). Эта зависимость (5) соответствует верхнему краю поверхности при $2\vartheta_0 \approx 323\pi$ на рис. 4.

Граница устойчивости для соседней моды (моды «2» на рис. П1, б) при $2\vartheta_0 \approx 323\pi$ – это прямая $w_{\text{bound}} = 0$ (см. Приложение 3), которая является нижним краем поверхности на рис. 4. При любых $w > 0$ мода устойчива.

Заключение

В работе численными методами найдены границы устойчивости продольных мод генератора с запаздывающим отражением от нагрузки относительно распада на сателлиты. Для случаев, допускающих аналитическое исследование (при достаточно высокой надпороговости (4) или при такой длине линии запаздывания, которая равна целому числу полувольт на собственной частоте колебательного контура генератора), полученные численные результаты совпадают с выводами работы [1].

Если продольная мода неустойчива, и первоначально колебания происходят на этой моде, то можно ожидать, что с течением времени система перейдет в соседнее, устойчивое состояние. При неустойчивости относительно распада на сателлиты выход из неустойчивого состояния должен происходить в виде нарастающих биений, а при неустойчивости относительно возмущений на собственной частоте переходный процесс должен носить экспоненциальный характер. Если мода неустойчива относительно обоих типов возмущений, преобладающим должен быть тот процесс, которому соответствует больший инкремент. Как показало исследование переходных процессов на основе численного решения исходного уравнения с запаздыванием [2], эти процессы происходят в точном соответствии с приведенными в данной работе и в [1] результатами исследования устойчивости относительно обоих типов возмущений.

Авторы выражают благодарность М.И. Петелину и Н.М. Рыскину за постоянное внимание к работе и полезные замечания.

Работа С.А. Усачевой поддержана грантом программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738.

Приложение 1

Исследование устойчивости относительно распада на сателлиты мод с фазами запаздывания $2\vartheta_c = \pi n$

Предположим, что на удвоенной длине системы укладывается целое число полуволн, соответствующих собственной частоте колебательного контура автогенератора. Тогда для центральной моды фаза запаздывания равна $2\vartheta_c = 2\vartheta_0 = 2\pi n$ или $2\vartheta_c = 2\vartheta_0 = (2n - 1)\pi$. Для определенности считаем, что $r > 0$. Все результаты, справедливые при $r > 0$ для моды $2\vartheta_c = 2\pi n$, при $r < 0$ будут справедливы для моды $2\vartheta_c = (2n - 1)\pi$, и наоборот. Как следует из (3),

$$\Omega = \left(i(w + \chi \cos(2\vartheta_c)) \pm \sqrt{\chi^2 \sin^2(2\vartheta_c) - w^2} \right) / 2. \quad (\text{П1.1})$$

При $2\vartheta_c = 2\pi n$ (рис. П1, а) $\sin(2\vartheta_c) = 0$, $\cos(2\vartheta_c) = 1$. Из (П1.1) получим

$$\Omega = i(w + \chi \pm w) / 2. \quad (\text{П1.2})$$

Воспользуемся методом D-разбиения для нахождения границы устойчивости. В соответствии с (П1.2) возможны два случая.

I. $\Omega = iw + i\chi/2$. Значение Ω действительно, если (см. обозначения после (3))

$$w + r(1 - \cos(2\Omega\vartheta_0)) / 2 = 0. \quad (\text{П1.3})$$

Поскольку мода существует только при $w > 0$, условие (П1.3) не выполняется.

II. $\Omega = i\chi/2$. Значение Ω действительно, если

$$r(1 - \cos(2\Omega\vartheta_0)) = 0, \quad (\text{П1.4})$$

то есть при $\cos(2\Omega\vartheta_0) = 1$. При этом

$$\Omega = -r \sin(2\Omega\vartheta_0) / 2. \quad (\text{П1.5})$$

Единственное решение (П1.4), (П1.5) – это $\Omega = 0$, то есть сателлитов на действительной частоте нет.

Таким образом, для стационарного состояния $2\vartheta_c = 2\pi n$ знак мнимой части частоты $\text{Im}\Omega$ не меняется в разных областях параметров. В случае I при достаточно большой надпороговости $\Omega \approx iw$ сателлиты затухают, следовательно, они затухают при любом соотношении параметров w, r . В случае II для действительной и мнимой частей $\Omega = i\chi/2$ справедливы уравнения, подобные приведенным в [1, (П1.3), (П1.4)], и по аналогии с [1, Приложение 1], можно прийти к выводу, что мода $2\vartheta_c = 2\pi n$ устойчива относительно роста боковых сателлитов.

При $2\vartheta_c = \pi(2n - 1)$ (см. рис. П1, б) $\sin 2\vartheta_c = 0$, $\cos 2\vartheta_c = -1$. Из (П1.1) получим

$$\Omega = i(w - \chi \pm w) / 2, \quad (\text{П1.6})$$

то есть возможны два случая.

I. $\Omega = iw - i\chi/2$. Согласно методу D-разбиения, сателлиты на действительной частоте существуют, если

$$w = w_{\text{bound}} = r(1 - \cos(2\Omega\vartheta_0))/2. \quad (\text{П1.7})$$

При этом отстройка частоты сателлитов действительна и имеет значение

$$\Omega = r \sin(2\Omega\vartheta_0)/2. \quad (\text{П1.8})$$

Как следует из (П1.8), сателлиты на действительной частоте могут существовать, только если $r\vartheta_0 > 1$, когда в системе несколько продольных мод. Сравнение (П1.8) с (1) при $2\vartheta_c = (2n - 1)\pi$ показывает, что частота сателлитов совпадает с частотой соседних мод. Поскольку выше границы (П1.7), при $w \gg r$, находится область устойчивости моды $2\vartheta_c = (2n - 1)\pi$ [1, Приложение 2], то ниже границы (при $w < w_{\text{bound}}$) эта мода неустойчива.

II. $\Omega = i\chi/2$. Следуя методу D-разбиения, находим условие существования сателлитов на действительной частоте

$$r(1 - \cos(2\Omega\vartheta_0)) = 0. \quad (\text{П1.9})$$

При этом действительная частота определяется уравнением (П1.8). Единственное решение (П1.8), (П1.9) – это $\Omega = 0$. Следовательно, сателлитов на действительной частоте нет, и характер устойчивости при изменении параметров не меняется. Уравнения для мнимой и действительной частей уравнения $\Omega = i\chi/2$ подобны приведенным в [1, (П1.3), (П1.4)], и по аналогии с [1, Приложение 1] приходим к выводу, что мода $2\vartheta_c = \pi(2n - 1)$ устойчива относительно роста боковых сателлитов.

Приложение 2

Исследование зависимости $r(\vartheta_0)$ для вырожденных мод, фаза запаздывания которых близка к $2\vartheta_c = \pi(2n - 1)$

Как следует из (1), новые вырожденные моды появляются при касании прямой $y_1(2\vartheta_c) = 2\vartheta_c$ и синусоиды $y_2(2\vartheta_c) = 2\vartheta_0 - r\vartheta_0 \sin(2\vartheta_c)$

$$r\vartheta_0 \cos(2\vartheta_c) = -1. \quad (\text{П2.1})$$

Если на удвоенной длине системы укладывается нечетное число длин полуволн, соответствующих собственной частоте колебательного контура автогенератора $2\vartheta_0 = \pi(2n - 1)$, и, если центральная мода $\vartheta_c = \vartheta_0$ является вырожденной, то

произведение $r\vartheta_0$ минимально и равно единице. При возрастании r и неизменной длине линии появляются две новые моды, симметрично отстоящие по частоте относительно центральной.

Рассмотрим вырожденные моды, близкие к центральной. Для них значения $r, \vartheta_0, \vartheta_c$ связаны соотношениями (1), (П2.1), и они слегка отличаются от $\bar{\vartheta}_0 = \pi(2n-1)/2, \bar{r} = 1/\bar{\vartheta}_0, \bar{\vartheta}_c = \vartheta_0$, соответствующих центральной вырожденной моде

$$r = \bar{r} + \Delta r, \quad \vartheta_0 = \bar{\vartheta}_0 + \varphi, \quad \vartheta_c = \bar{\vartheta}_c + \psi, \quad \Delta r \ll \bar{r}, \quad |\varphi, \psi| \ll 1. \quad (\text{П2.2})$$

Значения $r, \vartheta_0, \vartheta_c$ не зависят от параметра надпороговости w . Заметим, что приращение Δr должно быть положительно, при отрицательных Δr вырожденных мод нет (мы рассматриваем случай $r > 0$).

В (1), (П2.1) разложим в ряд $\cos(2\vartheta_c), \sin(2\vartheta_c)$ с точностью до ψ^3

$$\varphi + \Delta r \psi \bar{\vartheta}_0 + \varphi \psi \bar{r} - 2\psi^3/3 = 0, \quad \psi = \pm \sqrt{(\Delta r \bar{\vartheta}_0 + \varphi \bar{r})/2}, \quad (\text{П2.3})$$

и подставим второе равенство (П2.3) в первое

$$\varphi = \pm \frac{2}{3\sqrt{2}} (\Delta r \bar{\vartheta}_0 + \varphi \bar{r})^{3/2}. \quad (\text{П2.4})$$

Поскольку вблизи центрального состояния слагаемое $(\varphi \bar{r})$ мало по сравнению с $\varphi^{2/3}$, преобразуем (П2.4) к виду

$$\varphi = \pm \frac{2}{3\sqrt{2}} (\Delta r \bar{\vartheta}_0)^{3/2}. \quad (\text{П2.5})$$

В соответствии с (П2.5) все вырожденные состояния с фазами запаздывания $(2n-2) < 2\vartheta_c < 2\pi n$ лежат на кривой $r(\vartheta_0)$, которая имеет в точке $2\vartheta_0 = \pi(2n-1)$ особенность

$$r'(\vartheta_0)|_{2\vartheta_0=\pi(2n-1)-0} = \Delta r'(\varphi)|_{2\vartheta_0=\pi(2n-1)-0} = -\infty, \quad (\text{П2.6})$$

$$r'(\vartheta_0)|_{2\vartheta_0=\pi(2n-1)+0} = \Delta r'(\varphi)|_{2\vartheta_0=\pi(2n-1)+0} = +\infty.$$

При $2\vartheta_0 = \pi(2n-1)$, $r = 1/\vartheta_0$ граничное значение параметра надпороговости $w_{\text{bound}} = 0$ (см. (П1.7), (П1.8)). Следовательно, точка $w = 0$, $2\vartheta_0 = \pi(2n-1)$, $r = 1/\bar{\vartheta}_0$ является пересечением сгибов двух граничных двулистных поверхностей (см. рис. 5). Сгибы поверхностей соответствуют вырожденным состояниям. Одна из двулистных поверхностей при $2\vartheta_0 \leq \pi(2n-1)$ соответствует границе области устойчивости для мод $(2n-1)\pi \leq 2\vartheta_c \leq 2n\pi$. Эта поверхность показана на рис. 4. Другая поверхность соответствует модам $(2n-2)\pi \leq 2\vartheta_c \leq (2n-1)\pi$ при $2\vartheta_0 \geq \pi(2n+1)$.

Пересечение граничными поверхностями плоскости $w = 0$

Покажем, что, если граница устойчивости относительно распада на сателлиты для какой-либо моды проходит через нуль $w_{\text{bound}}(r, \vartheta_0) = 0$, то на удвоенной длине линии укладывается целое число полуволен на собственной частоте колебательного контура $2\vartheta_0 = \pi n$, а мода, для которой граница устойчивости проходит через $w = 0$, не является центральной.

Как следует из (П1.1), при $w = 0$

$$\Omega = i\chi e^{\pm 2i\vartheta_c} / 2. \quad (\text{П3.1})$$

Уравнение (П3.1) допускает два случая.

I. $\Omega = ir(1 - e^{-2i\Omega\vartheta_0})e^{-2i\vartheta_c} / 2$. Следуя методу D-разбиения, находим, что сателлиты на действительной частоте существуют, если выполнены условия

$$\begin{aligned} 2\Omega \cos(2\vartheta_c) &= -r \sin(2\Omega\vartheta_0), \\ (1 - \cos(2\Omega\vartheta_0)) \cos(2\vartheta_c) &= -\sin(2\Omega\vartheta_0) \sin(2\vartheta_c). \end{aligned} \quad (\text{П3.2})$$

Отсюда

$$\text{tg}(\Omega\vartheta_0) = -\text{tg}(2\vartheta_c). \quad (\text{П3.3})$$

Уравнение (П3.3) допускает два решения.

I.A. $\sin(2\vartheta_c) = \sin(\Omega\vartheta_0)$, $\cos(2\vartheta_c) = -\cos(\Omega\vartheta_0)$. Тогда, как следует из (П3.2),

$$\Omega = r \sin(\Omega\vartheta_0) = r \sin(2\vartheta_c). \quad (\text{П3.4})$$

Сравнение (П3.4) с (1) показывает, что при этом

$$\Omega = -2\alpha, \quad 2\vartheta_0 = \pi(2n - 1), \quad (\text{П3.5})$$

где $\alpha = (\omega_c - \omega_0) / \omega_0$. Поскольку по определению $\Omega > 0$, граница $w = 0$ соответствует моде, обозначенной индексом «3» на рис. П1, б, а частота правого сателлита совпадает с частотой моды, обозначенной индексом «2» на этом же рисунке.

I.B. $\sin(2\vartheta_c) = -\sin(\Omega\vartheta_0)$, $\cos(2\vartheta_c) = \cos(\Omega\vartheta_0)$. Тогда, как следует из (П3.2),

$$\Omega = -r \sin(\Omega\vartheta_0) = r \sin(2\vartheta_c). \quad (\text{П3.6})$$

Сравнение (П3.6) с (1) показывает, что при этом

$$\Omega = -2\alpha, \quad 2\vartheta_0 = 2\pi n, \quad (\text{П3.7})$$

то есть граница $w = 0$ существует для моды, обозначенной индексом «3» на рис. П1, а, частота правого сателлита совпадает с частотой моды, обозначенной индексом «2» на этом же рисунке.

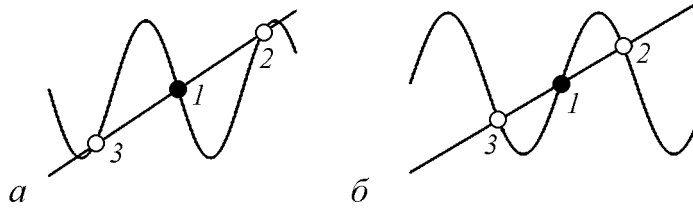


Рис. П1. Фрагмент рис. 2, б из [1]: цифрой 1 обозначена мода $2\vartheta_c = 2\pi n$ (а); $2\vartheta_c = \pi(2n - 1)$ (б); 2, 3 – соседние моды

II. $\Omega = ir(1 - e^{-2i\Omega\vartheta_0})e^{2i\vartheta_c}/2$. Следуя методу D-разбиения, находим, что сателлиты на действительной частоте существуют, если выполнены условия

$$\begin{aligned} 2\Omega \cos(2\vartheta_c) &= -r \sin(2\Omega\vartheta_0), \\ (1 - \cos(2\Omega\vartheta_0)) \cos(2\vartheta_c) &= \sin(2\Omega\vartheta_0) \sin(2\vartheta_c). \end{aligned} \quad (\text{П3.8})$$

Отсюда

$$\text{tg}(\Omega\vartheta_0) = \text{tg}(2\vartheta_c). \quad (\text{П3.9})$$

Возможны два варианта.

II.A. $\sin(2\vartheta_c) = \sin(\Omega\vartheta_0)$, $\cos(2\vartheta_c) = \cos(\Omega\vartheta_0)$. Тогда, как следует из (П3.8),

$$\Omega = -r \sin(\Omega\vartheta_0) = -r \sin(2\vartheta_c). \quad (\text{П3.10})$$

Сравнение (П3.10) с (1) показывает, что при этом

$$\Omega = 2\alpha, \quad 2\vartheta_0 = 2n\pi, \quad (\text{П3.11})$$

граница $w = 0$ соответствует моде «2» на рис. П1, а, частота левого сателлита совпадает с частотой моды «3» на этом же рисунке.

II.B. $\sin(2\vartheta_c) = -\sin(\Omega\vartheta_0)$, $\cos(2\vartheta_c) = -\cos(\Omega\vartheta_0)$. Тогда, как следует из (П5.4),

$$\Omega = r \sin(\Omega\vartheta_0) = -r \sin(2\vartheta_c). \quad (\text{П3.12})$$

Сравнение (П3.12) с (1) показывает, что при этом

$$\Omega = 2\alpha, \quad 2\vartheta_0 = \pi(2n - 1), \quad (\text{П3.13})$$

то есть граница $w = 0$ соответствует моде «2» на рис. П1, б, частота левого сателлита совпадает с частотой моды «3» на этом же рисунке.

Из приведенного выше анализа следует, что краю нижней поверхности на рис. 4 ($w_{\text{bound}} = 0$) при $2\vartheta_0 = 323\pi$ соответствует последний случай, (II.B).

Библиографический список

1. Новожилова Ю.В. Параметрическая неустойчивость в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки. I. Теория // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 2. С. 112.

2. Новожилова Ю.В., Рыскин Н.М., Усачева С.А. Нестационарные процессы в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки // Журнал технической физики (направлено в печать)

Институт прикладной физики РАН,
Саратовский госуниверситет

Поступила в редакцию 28.01.2011

PARAMETRIC INSTABILITY OF AUTOOSCILLATOR COUPLED WITH REMOTE LOAD

II. Numerical simulation

Yu.V. Novozhilova, A.S. Sergeev, S.A. Usacheva

At the autooscillator with small reflection from the remote load the mode stability relative to decay into two side satellites was studied by numerical simulation of characteristic equation. At arbitrary exceed over oscillation threshold the stability regions was founded in the space of system parameters. The results are in a good agree, from the one hand, with theory in the parameter space where characteristic equation can be solved analytically, from the other hand, with the results of numerical simulation of transient processes between modes.

Keywords: Autooscillator operation at the load, delayed reflection, one-frequency modes stability.



Сергеев Александр Сергеевич – родился в Горьком (1957), окончил механико-математический факультет Горьковского государственного университета (1980). Кандидат физико-математических наук (1997), ведущий научный сотрудник Института прикладной физики (Н. Новгород). Область научных интересов – математическое моделирование процессов электронно-волнового взаимодействия. Имеет около 200 публикаций.

603950 Н. Новгород
Институт прикладной физики РАН
E-mail: sergeev@appl.sci-nnov.ru



Усачева Светлана Александровна – родилась в Саратове (1987), окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2009). Аспирант факультета нелинейных процессов СГУ по специальности «Радиофизика». Область научных интересов – нелинейная динамика многомодовых автоколебательных систем, в том числе, распределенных систем с запаздыванием.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет
E-mail: usasva@mail.ru



ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ: КОНЦЕПЦИИ ВЕЙВЛЕТОВ И ЭМПИРИЧЕСКИХ МОД*

А.Н. Павлов, А.Е. Филатова, А.Е. Храмов

Проводится сопоставление концепций вейвлетов и эмпирических мод как наиболее перспективных инструментов изучения структуры нестационарных многокомпонентных процессов. Отмечаются их преимущества по сравнению с классическими методами обработки экспериментальных данных, а также ограничения этих подходов, которые необходимо знать для корректной интерпретации результатов расчетов. Новые возможности исследования структуры сигналов при наличии помех иллюстрируются на примере цифровых одноканальных экспериментальных данных сейсморазведки.

Ключевые слова: Вейвлетный анализ, преобразование Гильберта–Хуанга, сейсморазведка, временные ряды, частотно-временной анализ, мода.

Введение

Проблема анализа динамики систем с меняющимися во времени характеристиками является одной из актуальных задач цифровой обработки сигналов. Классический подход к проведению исследований таких систем состоит в предположении квазистационарности – медленного изменения параметров во времени. В этом случае небольшие фрагменты регистрируемых процессов можно рассматривать как почти стационарные сигналы, применяя к ним классические вероятностные и спектральные методы. Однако такой подход, несомненно, является эффективным лишь при решении ограниченного круга проблем цифровой обработки сигналов, преимущественно в случае нестационарности, носящей характер низкочастотного тренда [1]. Данная ситуация не создает принципиальной сложности, так как спектральные области, соответствующие тренду и динамике, представляющей интерес для исследователя, не перекрываются и их можно разделить, применяя различные приемы цифровой фильтрации [2]. Значительно сложнее случай, когда избавиться от проблемы нестационарности с помощью фильтров не представляется возможным, например,

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

если нестационарными являются изучаемые ритмические процессы. Еще с начала прошлого века исследователям было понятно, что широко используемый спектральный анализ, предусматривающий разложение по базису гармонических функций, не применим к системам с меняющимися во времени характеристиками. В качестве примера можно привести высказывание Л.И. Мандельштама, который еще в 1920-х годах отмечал, что «физическое значение разложения Фурье в большой мере связано с резонансными свойствами линейных систем с постоянными параметрами; при переходе к линейным системам с переменными параметрами разложение Фурье перестает быть целесообразным, и место функций \cos и \sin должны занять другие функции» (цит. по [3]).

Действительно, преобразование Фурье предусматривает интегрирование сигнала $x(t)$ в диапазоне $(-\infty, \infty)$ для получения спектральной информации на заданной частоте, и эта процедура не подразумевает возможности изменения характеристик сигнала на отдельных участках. Фактически, обеспечивается расчет усредненной спектральной информации о сигнале, когда количество спектральных линий не обязательно соответствует числу колебательных мод. Известно, например, что классический спектр мощности не способен отличить сигнал, содержащий переключение частоты гармонической функции от сигнала, содержащего два гармонических колебания с разными частотами [4, 5]. В обоих случаях будет получен спектр, содержащий два пика, и из анализа данного спектра нельзя установить, присутствуют ли ритмические процессы с независимыми частотами одновременно или они возникают последовательно. Результатом классического спектрального анализа является одномерная зависимость спектральной плотности мощности от частоты, которая не учитывает возможность временной эволюции спектральных характеристик и их изменения.

Осознание необходимости создания новых инструментов анализа структуры сигналов, которые могли бы эффективно применяться для обработки нестационарных процессов в динамике систем различной природы, привело к появлению ряда оригинальных подходов. Важный шаг был сделан А. Гроссманом и Ж. Морле в 1980-х годах, когда они продемонстрировали возможность анализа произвольных нестационарных сигналов с помощью единственной функции – «материнского вейвлета» $\psi(t)$, осуществляя ее перемасштабирование и смещение [6]. Дальнейшее построение современной теории вейвлетов, «индуцированное» исследованиями А. Гроссмана и Ж. Морле, связано с именами И. Мейера [7, 8], И. Добеши [9], С. Малла [5] и многих других. В настоящее время вейвлет-анализ превратился в мощнейший инструмент изучения частотно-временной структуры сигналов, широко используемый почти во всех естественных науках и многих областях техники [10–22].

Но наряду с созданием теории вейвлетов, не прекращаются попытки развития альтернативных методов частотно-временного анализа нестационарных процессов, наиболее значимой среди которых является разработка метода эмпирических мод, называемого также преобразованием Гильберта–Хуанга [23–28]. Существует мнение, что этот подход может превосходить вейвлетный анализ с точки зрения частотно-временного разрешения [23–25]. Главное преимущество метода эмпирических мод заключается в том, что он не требует выбора базиса и настройки параметров преобразования, поэтому его проще использовать на практике при проведении вычисле-

ний, так как не требуется проводить предварительные исследования, направленные на выбор оптимального материнского базиса, по которому раскладывается сигнал.

В данной статье проводится качественное сопоставление концепций вейвлетов и эмпирических мод как наиболее перспективных инструментов изучения частотно-временной структуры нестационарных процессов. Рассматриваются преимущества по сравнению с классическими методами обработки экспериментальных данных, а также ограничения данных подходов, которые необходимо знать для корректной интерпретации результатов расчетов. Новые возможности исследования структуры нестационарных многокомпонентных процессов при наличии помех иллюстрируются на примере цифровых одноканальных экспериментальных данных сейсморазведки.

1. Ограничения классических методов частотно-временного анализа и их устранение в рамках концепции вейвлетов

Во Введении уже отмечались недостатки классического спектрального анализа, состоящие в неспособности данного инструмента исследования получать по настоящему локализованную спектральную информацию и изучать динамику систем с меняющимися во времени характеристиками. Отметим, что данные ограничения сохраняются и в том случае, когда анализируется реальная ситуация – процесс конечной длительности, анализ которого проводится с применением оконного преобразования Фурье. Возможность выбора размера окна формально позволяет изучать спектральные характеристики сигнала $x(t)$ на отдельных участках, но на практике качество таких оценок является невысоким вследствие того, что размер окна фиксированный и не зависит от частоты, на которой проводятся расчеты спектральной плотности мощности. Для узкополосных процессов отсутствие отмеченной зависимости не является принципиальным – всегда можно подобрать размер окна, «оптимальный» для качественного оценивания спектральных характеристик. Однако для широкополосных процессов ситуация меняется принципиальнейшим образом – существует диапазон частот, внутри которого обеспечивается получение локализованной спектральной информации (если в пределы оконной функции попадает несколько периодов колебаний), диапазон, где обеспечивается недостаточно высокое качество локализации (десятки периодов) и область отсутствия локализации (сотни периодов). Именно постоянство во временной области окна преобразования является главным ограничением классического спектрального анализа (рис. 1, *a*), так как информацию о быстрых изменениях в структуре сигналов важно извлекать из коротких фрагментов экспериментальных данных, а информацию о медленных изменениях – из более длительных участков [10,11].

Такую идеологию использует вейвлетный анализ, подвижное частотно-временное окно которого «автоматически» подстраивается под анализируемый масштаб наблюдения (рис. 1, *b*). Теория вейвлетов начала активно развиваться в конце 1980-х годов, хотя исторические предпосылки для ее появления возникли намного раньше. В частности, можно отметить работы 1940-х годов, когда впервые была озвучена идея разложения по так называемым «атомам» с помощью смещенных друг относительно друга функций Гаусса [29]. Этот подход уже принципиально отличался от идеологии разложения по базису, построенному из функций, отличных от гармонических (например, функций Уолша [30]). Ключевым аспектом работы [29] являлась возможность проведения локализованного анализа структуры сигналов (за счет ис-

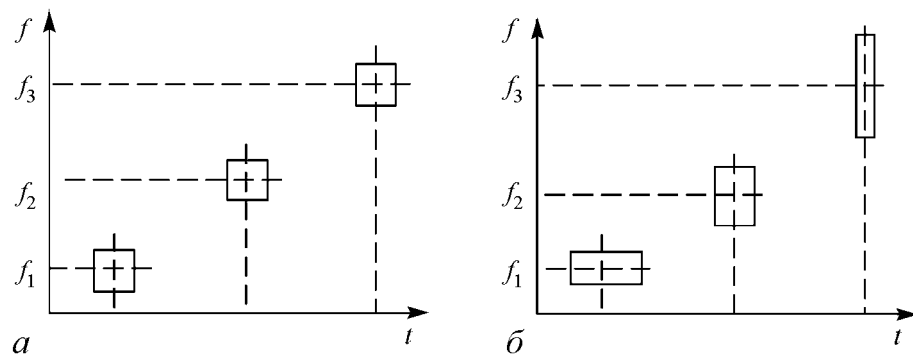


Рис. 1. Частотно-временное окно для оконного спектрального анализа (а) и вейвлет-анализа (б). В первом случае размер окна постоянный во временной и в частотной областях, а ширина спектральных линий не меняется при проведении оценок спектра мощности на частотах f_1 , f_2 и f_3 . Во втором случае проводится «автоматическая» подстройка окна под выбранный масштаб наблюдения, вследствие чего ширина спектральных линий увеличивается с ростом частоты

пользования ограниченных во времени функций), что важно при изучении нестационарных процессов. Примерно к тому же периоду времени относится и идеология распределения Вигнера–Вилля [31, 32], предусматривающая возможность введения в рассмотрение частотно-временного представления анализируемого сигнала и обеспечивающая при этом высокое разрешение как по времени, так и по частоте. Однако эти первые попытки создания методов частотно-временного анализа имели очевидные и весьма серьезные недостатки. Так, распределение Вигнера–Вилля приводит к появлению интерференций, существенно усложняющих возможность адекватной расшифровки информации, полученной в результате проведения расчетов. Интерференции затрудняют возможность получения неискаженной информации о структуре сигнала и, в частности, об изменениях во времени его частотных характеристик. Устранение интерференций распределения Вигнера–Вилля возможно путем осуществления сглаживания с подходящим ядром [9], но это сопровождается заметным ухудшением спектрального разрешения. Считается, что распределение Вигнера–Вилля целесообразно применять только для очень коротких сигналов [9], но даже в этом случае оно уступает по своим возможностям теории вейвлетов. Вследствие отмеченных ограничений этот подход не нашел широкого распространения при решении задач цифровой обработки сигналов, полученных при осуществлении натурных экспериментов.

Фактически, только в конце 1980-х годов сформировалось отдельное новое направление в задачах цифровой обработки сигналов, называемое вейвлет-анализом, которое стало серьезным прорывом в теории цифровой обработки сигналов, осуществленным за последние несколько десятилетий. В настоящее время концепция вейвлетов широко используется при проведении частотно-временного анализа нестационарных процессов, так как она позволяет оперировать с величинами, которые являются привычными в радиофизике. Например, с помощью непрерывного вейвлет-преобразования с комплексными базисами можно ввести в рассмотрение такие характеристики как мгновенные амплитуды, мгновенные частоты и фазы колебаний (см., например, [33–35]). Математический аппарат вейвлет-преобразования позволяет изучать данные характеристики для случая многомодовой динамики, включающей ритмические процессы с удаленными друг от друга частотами, то есть для широкой полосы спектра колебаний связанных или неавтономных колебаний [36]. Это

принципиальным образом отличает вейвлет-анализ от классического метода аналитического сигнала, использующего преобразование Гильберта. В последнем случае необходимо рассматривать только узкополосные процессы для того, чтобы получить результаты, имеющие физический смысл. В соответствии с выводами работ [4, 5, 9], вейвлет-анализ превосходит по своим потенциальным возможностям все упомянутые методы частотно-временного анализа структуры сигналов (оконный спектральный анализ, распределение Вигнера–Вилля, метод аналитического сигнала). В связи с тем, что теория вейвлетов в настоящее время широко представлена в многочисленных обзорах и монографиях [3–16], в том числе и в данном журнале [37–39], мы не будем останавливаться на математических аспектах вейвлет-анализа, адресовав читателя к литературе, где эти аспекты подробно рассмотрены.

2. Метод эмпирических мод

Отмеченные в предыдущем разделе проблемы, связанные с анализом структуры сигналов на основе метода аналитического сигнала, использующего преобразование Гильберта, не ограничиваются только шириной полосы частот исследуемого процесса. Даже для сравнительно узкополосных процессов преобразование Гильберта уступает вейвлет-преобразованию. Известно, что при обработке нестационарных процессов могут возникать нефизические результаты, если среднее значение исследуемого сигнала отлично от нуля [23]. Из-за ненулевого среднего уровня возможно появление участков с отрицательным значением мгновенной частоты колебаний, формально оцениваемой путем вычисления производной от фазы [25]. Безусловно, такой результат следует признать нефизическим – причиной является наличие постоянной составляющей сигнала, приводящей к неравномерности роста фазового угла, а именно, к появлению участков с отрицательной производной фазы колебаний. Данный пример служит простой иллюстрацией проблем, возникающих при проведении расчетов мгновенной частоты колебаний. Для устранения этих проблем можно воспользоваться стандартной процедурой – сведением сигнала к нулевому среднему уровню. Этот прием широко используется и при проведении классического спектрального анализа для устранения δ -выброса на нулевой частоте и вычисления спектра мощности флуктуаций. Но простое вычитание среднего значения позволяет избавиться от рассматриваемых проблем только в случае стационарных процессов, характеристики которых не меняются при переносе начала отсчета времени. В отсутствие стационарности среднее значение в общем случае от времени зависит, поэтому отмеченные сложности вполне могут возникнуть на отдельных участках, характеризующихся локальным ненулевым средним уровнем. Более целесообразной представляется процедура проведения цифровой фильтрации, позволяющей устранить не только постоянную составляющую, но и возможный низкочастотный тренд (например, полиномиальный). Поэтому, прежде чем применять концепцию аналитического сигнала и используемое в рамках этой концепции преобразование Гильберта, вначале необходимо убедиться в том, что проведена необходимая предварительная обработка экспериментальных данных, без реализации которой качество полученных результатов может быть недостаточно высоким (а порой будут получаться и некорректные, с физической точки зрения, результаты). Отметим, что в данном случае мы акцентируем внимание на ограничениях классической концепции аналитического сигнала даже для сравнительно узкополосных процессов, тогда как для многомодовых колебательных процессов, включающих ритмическую активность с независимыми и

удаленными в спектральной области частотами, проблем с получением корректных результатов будет существенно больше, и решать их намного сложнее.

Применение вейвлет-анализа является более эффективным математическим аппаратом, способным устранить недостатки концепции аналитического сигнала. Ключевой аспект состоит в том, что система функций разложения (или базис вейвлет-преобразования) представляет собой фактически набор фильтров, позволяющих в автоматическом режиме устранять проблемы низкочастотного тренда и т.п. От исследователя не требуется осуществлять предварительную фильтрацию экспериментальных данных, так как при проведении расчетов на заданной частоте вейвлет-преобразование будет выступать в роли полосового фильтра, характеристики которого определяются базисной функцией преобразования и допускают настройку «вручную» путем задания параметров, определяющих частотно-временное разрешение. Такой параметр, в частности, есть у функции Морле, традиционно применяемой в качестве наиболее популярного вейвлета для осуществления спектральных оценок [5, 6]. Наряду с тем, что функция Морле обладает хорошими свойствами локализации и во временном пространстве, и в частотной области, результаты вейвлет-анализа с помощью данной функции наиболее приближены к результатам классического оконного спектрального анализа, что облегчает исследование и интерпретацию двумерных вейвлетных спектров [16].

Другой вариант решения проблемы некорректного оценивания мгновенной частоты колебаний был предложен в работе [23] и получил название преобразования Гильберта–Хуанга или метода эмпирических мод. Фактически, для устранения нефизических результатов необходимо обеспечить движение фазовой траектории вокруг начала координат в фазовом пространстве (x, x^H) , где $x(t)$ – исходный сигнал, $x^H(t)$ – преобразование Гильберта функции $x(t)$. Смещения этой траектории приводят к возможному появлению участков флуктуаций мгновенной частоты (вследствие несимметричности формы сигнала) или даже участков с отрицательной мгновенной частотой (при значительных смещениях локального среднего уровня). Именно такой подход и предусматривается в рамках метода [23]. Ключевой аспект преобразования Гильберта–Хуанга состоит в том, что на первом этапе оно предусматривает «выравнивание» локального среднего уровня путем усреднения и последующего вычитания двух огибающих сигнала – верхней, проходящей через локальные максимумы, и нижней, проведенной по локальным минимумам. Процедура выделения и устранения локального среднего уровня реализуется в виде итерационного алгоритма (так как за один шаг в подавляющем большинстве случаев не удается свести сигнал к симметричному виду), позволяющего разложить сигнал на составляющие («внутренние» или эмпирические моды), характеризующиеся более выраженной симметрией по сравнению с исходным процессом и разными временными масштабами. Детали этой процедуры описаны в работе [23], а также в статье [40], поэтому не останавливаемся на них подробно. Для каждой из эмпирических мод процедура расчета мгновенных частот колебаний в рамках классического преобразования Гильберта будет всегда приводить к корректным, с физической точки зрения, результатам. Метод [23] позволяет, таким образом, применять классическую концепцию аналитического сигнала к многочастотным процессам, если вначале провести представление исходного сигнала в виде суммы осциллирующих составляющих – эмпирических мод. Если применительно к классическому преобразованию Гильберта можно сформулировать ряд принципиальных недостатков при анализе нестационарных процессов, то для метода Гильберта–Хуанга эти недостатки не столь очевидны, и вопрос о преиму-

ществах этого подхода по сравнению с концепцией вейвлетов требует отдельного, более детального рассмотрения.

К настоящему времени опубликован ряд работ [24–26], авторы которых считают, что преобразование Гильберта–Хуанга обеспечивает более качественное частотно-временное разрешение по сравнению с вейвлет-анализом. Для подтверждения данных выводов рассматривается, например, случай частотной модуляции – если частота модулирующего и модулируемого процессов существенно отличаются друг от друга, то вейвлет-анализ позволяет корректно оценить временные зависимости соответствующих мгновенных частот колебаний. Проблемы возникают в том случае, когда расстояние в спектральной области между частотами становится небольшим, то есть частоты модулируемого и модулирующего процессов сопоставимы. Следствием близких значений частот является возникновение интерференций, служащих отражением факта перекрытия широких спектральных линий, возникающих при расчете непрерывного вейвлет-преобразования (см., например, [16]). Более того, чем выше частота, тем шире окно вейвлет-преобразования в спектральной области, и тем сильнее проявляется эффект интерференций. В работах [24–26] приводятся примеры, свидетельствующие о способности метода эмпирических мод корректно оценивать мгновенные частоты колебаний для взаимодействующих колебательных процессов с незначительно отличающимися периодами, что служит доводом в пользу более эффективного частотно-временного разрешения структуры сигналов с помощью этого метода.

Однако следует принять во внимание, что данные доводы базируются исключительно на отдельных иллюстративных примерах, так как для преобразования Гильберта–Хуанга в значительно меньшей степени разработан математический аппарат, позволяющий строго обосновать возможные преимущества частотно-временного разрешения. В этом аспекте концепция вейвлет-анализа является значительно более серьезно проработанной, и вопрос о разрешении данного метода был решен достаточно давно [7–9]. Современная теория вейвлетов позволяет для различных базисных функций преобразования записать конкретные формулы, по которым можно оценить как ширину спектральных линий на различных частотах, так и определить ограничения спектрального разрешения для близко расположенных спектральных линий. Для наиболее распространенных и часто используемых вейвлетных функций (материнских базисов типа вейвлеты Морле, Паула, МНАТ и др.) соответствующие данные приведены в монографии [16]. Отсутствие строгой теории для метода Гильберта–Хуанга не позволяет сопоставить этот подход с вейвлетами на уровне конкретных формул. Тем не менее, данный инструмент исследования уже успел хорошо себя зарекомендовать при решении широкого круга задач, и его применение на практике в качестве альтернативного метода анализа частотно-временного состава исследуемых сигналов представляется весьма перспективным направлением в цифровой обработке сигналов.

3. Сопоставление метода эмпирических мод и вейвлет-анализа

Проведем сопоставление метода эмпирических мод и вейвлет-анализа, акцентируя внимание на нескольких особенностях этих подходов.

Используемый базис. Применительно к вейвлет-анализу проблема выбора базисной функции является одной из ключевых проблем – правильно подобранный «материнский» вейвлет позволит провести детальное исследование структуры слож-

ного сигнала, выявив нужные детали. Очень удачной является современная интерпретация вейвлет-анализа как метода математического микроскопа: параметр смещения вейвлета аналогичен выбору точки фокусировки микроскопа, параметр масштаба позволяет устанавливать нужное увеличение, а выбор вейвлета аналогичен выбору объектива. Интерпретация вейвлет-анализа как метода математического микроскопа представляется очень удачной, и с ее помощью можно понять ключевые проблемы, возникающие в том случае, когда вейвлет-анализ не позволяет выявить необходимые особенности рассматриваемого процесса. Для того, чтобы используемый «микроскоп» являлся эффективным инструментом исследования, он должен быть настроен – подобраны все параметры, обеспечивающие возможность качественного анализа сложных процессов. После соответствующей настройки метод вейвлет-анализа будет обеспечивать более высокое частотно-временное разрешение, чем в случае произвольно установленных параметров непрерывного вейвлетного преобразования. Очевидным преимуществом метода эмпирических мод является то обстоятельство, что он не требует выбора базиса и настройки параметров. Это позволяет, с одной стороны, проще реализовать пакет прикладных программ для проведения расчетов методом эмпирических мод в виде автоматически выполняемой процедуры. С другой стороны, применение преобразования Гильберта–Хуанга в меньшей степени зависит от таких субъективных факторов как опыт исследователя, который важен для подходящей настройки параметров вейвлетного преобразования. С точки зрения используемого базиса, метод эмпирических мод является более простым алгоритмом разложения сигнала на независимые ритмические компоненты. Однако одновременно теряется возможность улучшения характеристик метода специальным выбором и настройкой параметров метода, что можно рассматривать уже как недостаток метода.

Исследование нелинейных процессов. Еще одним недостатком, присущим как классическому спектральному анализу, основанному на финитном преобразовании Фурье, так и вейвлетному преобразованию, является проблема анализа нелинейных процессов, а именно оценка амплитуды колебаний, для которых характерен сложный спектральный состав. Фактически, преобразование Фурье позволяет вычислять только амплитуды отдельных составляющих (гармоник), тогда как метод аналитического сигнала и преобразование Гильберта–Хуанга (как его модернизированная версия) обеспечивают возможность введения в рассмотрение мгновенной амплитуды колебательного процесса, характеризующей процесс в целом, а не его отдельные составляющие. Это позволило авторам работ [23–25] утверждать, что метод эмпирических мод лучше приспособлен для выявления и описания нелинейных процессов. Аналогичные доводы можно привести, проводя сопоставление концепции эмпирических мод и вейвлет-преобразования. Вследствие того, что вейвлеты выступают в роли фильтров, они позволяют изучать временную эволюцию отдельных ритмических составляющих в структуре анализируемого сигнала, и при осуществлении вейвлетного преобразования анализируется узкая частотная область, ассоциирующаяся с размером подвижного частотно-временного окна. Для нелинейных процессов, включающих гармоники, каждая из этих гармоник анализируется путем перемасштабирования материнского вейвлета. Двумерный частотно-временной спектр вейвлетного преобразования содержит информацию о мгновенных амплитудах и частотах отдельных гармоник. Если же необходимо ввести в рассмотрение мгновенную амплитуду исследуемого процесса в целом (по аналогии с методом аналитического сигнала), то вейвлет-анализ является менее пригодным для этой цели. С другой

стороны, для широкополосного нестационарного сигнала неочевидна возможность введения единственных мгновенных амплитуд и фаз такого сигнала.

Наличие завершенной теории. По этому показателю метод эмпирических мод, безусловно, уступает как классическому спектральному анализу, так и вейвлет-анализу. Если для концепции вейвлетов детально проработанная теория существует на протяжении примерно двадцати лет (фактически, проработка основ концепции вейвлетов была завершена в конце 1980-х годов), то в случае метода эмпирических мод пока не приходится говорить о наличии аналогичной теории. Ключевые положения концепции вейвлетов сформулированы в виде многочисленных теорем, особенности и возможности вейвлетов при решении широкого круга задач неоднократно обсуждались в научной печати (можно, в частности, отметить, что количество ссылок на источники в сети Интернет, посвященных вейвлет-анализу, уже насчитывает несколько миллионов). Преобразование Гильберта–Хуанга, появившись примерно в тот же период времени (в конце 1980-х годов), пока еще не приобрело такой популярности, и число его применений для решения практических задач уступает применениям вейвлетов. В значительной степени это связано с тем, что метод эмпирических мод не используется в технике, представляя наибольший интерес для научных исследований. Отметим, что незавершенность теории не свидетельствует о меньших потенциальных возможностях метода. Исторически, построение теории вейвлетов представляет собой весьма обширный интервал времени от выдвижения первых идей до их воплощения в виде проработанного математического инструмента исследований сложных сигналов и систем. Идеи, лежащие в основе метода эмпирических мод, появились значительно позже, и их обобщение в виде завершенной математической теории, вероятно, потребует более длительного времени. Важно отметить, что этот подход базируется на совершенно другой идеологии по сравнению с вейвлетами. Так, например, он использует адаптивные базисы; для него в меньшей степени сказываются проблемы, связанные с существованием принципа неопределенности [4] и т.д. Фактически, метод эмпирических мод выступает в роли нового альтернативного (и также обладающего широкими возможностями) инструмента исследования структуры сложных сигналов. Наличие такого инструмента в дополнение к вейвлет-анализу расширяет возможности частотно-временного исследования нестационарных процессов.

Нами проводилось сопоставление обсуждаемых методов на ряде конкретных примеров, включая процессы переключения частоты (в том числе, неоднократное переключение частоты за временной интервал, сопоставимый с характерным периодом колебаний), монотонное изменение частоты («чирп-сигнал», демонстрирующий линейный рост частоты колебаний, или сумма линейных «чирпов»). Во всех рассмотренных примерах было установлено, что частотно-временное разрешение метода эмпирических мод и вейвлет-анализа является сопоставимым, и ни один из этих методов не имеет явных преимуществ с точки зрения диагностики изменений характеристик колебательных процессов во времени. Например, при переключении частоты гармонической функции метод эмпирических мод приводит к заметным погрешностям расчета мгновенного периода колебаний на временных участках, составляющих величину порядка половины периода, после чего оценки мгновенных характеристик проводятся с высокой степенью точности. Аналогичная ситуация возникает и при решении данной задачи с помощью непрерывного вейвлет-преобразования с базисной комплексной функцией Морле. Поэтому анализ тестовых примеров не дает возможности отдать однозначное предпочтение тому или иному подходу.

4. Новые возможности анализа многокомпонентных сигналов сейсмограмм в рамках метода эмпирических мод

В работах [23–26] метод разложения сигнала на эмпирические моды рассматривается как вспомогательный прием для построения частотно-временного спектра в рамках преобразования Гильберта–Хуанга. На наш взгляд, это всего лишь частный вариант использования данного метода, который потенциально обладает более широкими возможностями. Выделение в структуре анализируемого процесса независимых ритмических составляющих важно не только для расчетов частотно-временных спектров. Не меньший интерес этот подход представляет для анализа взаимосвязи подсистем, ответственных за генерацию осцилляторной активности и для анализа этих подсистем по отдельности. Прежде всего, это относится к процессам, представляющим собой линейную комбинацию сигналов, генерируемых различными подсистемами. Характерным примером может служить сигнал электроэнцефалограммы (ЭЭГ), в структуре которого характерные ритмы колебаний можно рассматривать отдельно, проводя их полосовую фильтрацию. Эффективным методом анализа ЭЭГ поэтому является непрерывный вейвлетный анализ, который позволяет эффективно разделить и выделить различные осцилляторные паттерны, характеризующиеся различными частотно-временными особенностями [17, 41–44]. Метод эмпирических мод представляется альтернативным вариантом разделения процесса на независимые составляющие, который может составить конкуренцию как вейвлетному анализу, так и методу ИСА, также часто применяемому для решения аналогичных задач [45].

Наряду с физиологическими процессами, изучение динамики многокомпонентных нестационарных сигналов является крайне актуальной задачей в геофизике. Лидирующие позиции в современной геофизике занимают исследования, связанные с

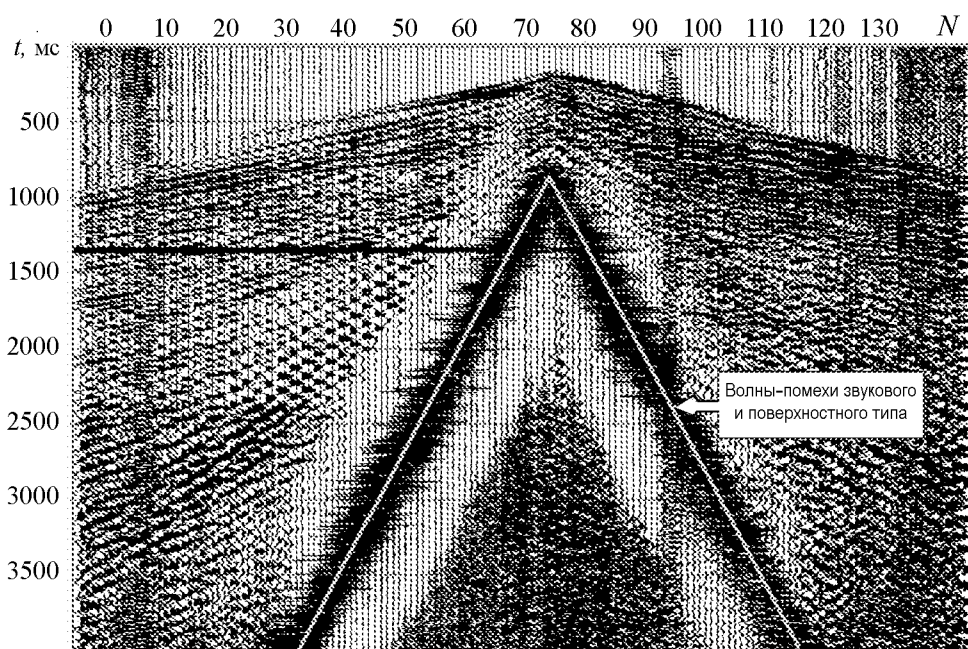


Рис. 2. Сейсмограмма общего пункта возбуждения волнового поля первичного полевого материала. Линиями отмечена область волны-помехи звукового и поверхностного типа. По оси абсцисс отложен номер трассы N , по оси ординат – время t

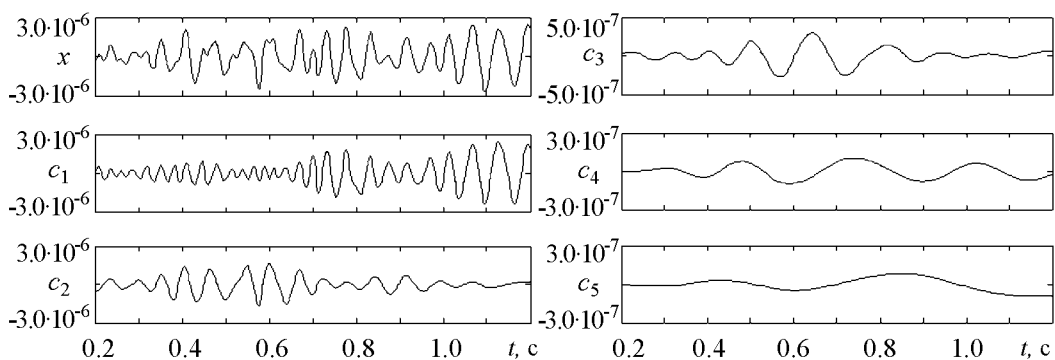


Рис. 3. Разложение фрагмента трассы сейсмограммы $x(t)$ общего пункта возбуждения из первичного полевого материала, полученного на территории Саратовской области, на эмпирические моды c_1 – c_5 , упорядоченные от высокочастотных к низкочастотным

разведкой и поиском различных природных ископаемых. С этой целью проводятся полевые поисковые и разведочные работы, среди которых наиболее широкое распространение приобрел метод отраженных волн [45, 46]. Несомненным достоинством данного подхода является высокая глубинность проведения исследований и возможность получения детальной информации о литологическом строении земной коры. Вследствие того, что проведение полевых работ является весьма дорогостоящим методом получения информации о строении земной коры, крайне актуальной задачей является повышение качества обработки экспериментальных материалов для извлечения максимально возможной информации о структуре записанных сигналов (рис. 2).

Ценность метода эмпирических мод состоит в том, что он позволяет не только проводить частотно-временной анализ сейсмических сигналов, но и осуществлять декомпозицию экспериментальных данных на независимые компоненты, которые могут учитывать различия в структуре слоев земной коры. На рис. 3 приведен пример разложения на эмпирические моды фрагменты одной из трасс сейсмограммы общего пункта возбуждения из первичного полевого материала, полученного на территории Саратовской области (рис. 2). Данное разложение проведено после предварительной процедуры очистки полезного сигнала от шумов и случайных искажений с помощью процедуры вейвлетной фильтрации [40, 48, 49].

Формальное разложение данного сигнала позволяет выделить до 7 внутренних эмпирических мод, однако последние из них отражают медленные вариации среднего уровня сигнала или низкочастотный тренд (это видно уже по моде c_5). Первые моды содержат основную информацию об анализируемом процессе, то есть о литографическом составе земной коры в точке приема сигнала. Это можно проиллюстрировать путем расчета коэффициента корреляции, характеризующего степень линейной зависимости между анализируемым сигналом (трассой сейсмограммы) и каждой из выделенных эмпирических мод. Как следует из рис. 4, только первые мо-

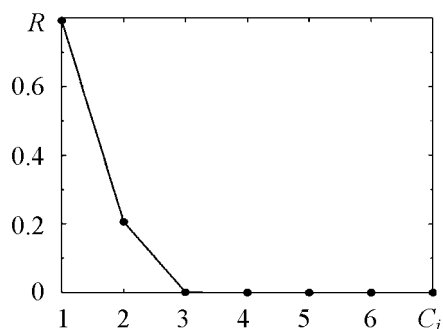


Рис. 4. Зависимость от номера эмпирической моды коэффициента корреляции между эмпирическими модами и исходным сигналом

ды характеризуются большими значениями коэффициента корреляции, а последние моды отражают менее существенные («тонкие») детали исходного процесса.

Представляет значительный интерес анализ спектральных особенностей каждой из эмпирических мод и сравнение этих данных со спектральными характеристиками исходного анализируемого нестационарного сигнала. На рис. 5 представлены соответствующие спектры мощности, вычисленные по выделенным эмпирическим модам. Для удобства представления результатов выбраны произвольные единицы изменения по оси ординат. Это связано с тем, что с увеличением номера моды резко уменьшается энергия колебаний, и при представлении результатов в одинаковом масштабе спектральная плотность мощности сигналов $c_4(t)$ – $c_7(t)$ становятся неразличимыми на фоне более высоких значений спектральной плотности мощности сигналов $c_1(t)$ – $c_3(t)$.

В соответствии с приведенными спектрами, переход от исходного сигнала к эмпирическим модам означает уменьшение полосы частот (выделенные зависимости $c_1(t)$ – $c_5(t)$ являются более узкополосными процессами по сравнению с $x(t)$), что исключает проблемы некорректного расчета мгновенных частот колебаний в рамках преобразования Гильберта. Более того, переход к высшим модам приводит к уменьшению полосы частот, что позволяет эффективно анализировать фазовые особенности именно высших мод, которые ответственны за слабо выраженные особенности анализируемого процесса. Тем не менее, данные особенности могут нести в себе существенно важную информацию о строении земной коры и способствовать улучшению качества проведения сейсморазведки.

Следует также отметить, что переход к каждой последующей моде означает смещение спектра мощности в область более низких частот. Заметим при этом, что каждая мода может иметь сложный спектральный состав, и в этом смысле разложение по эмпирическим модам отличается от разложения по гармоническим составляющим в рамках классического спектрального анализа.

Переход от исследования исходной трассы к изучению (и сопоставлению для разных точек приема) «внутренних мод», на которые можно разложить данный сигнал, представляется целесообразным для упрощения анализа данных сейсморазведки, имеющих сложную структуру. Мы надеемся, что такой подход будет способствовать более детальному и качественному исследованию литографического строения

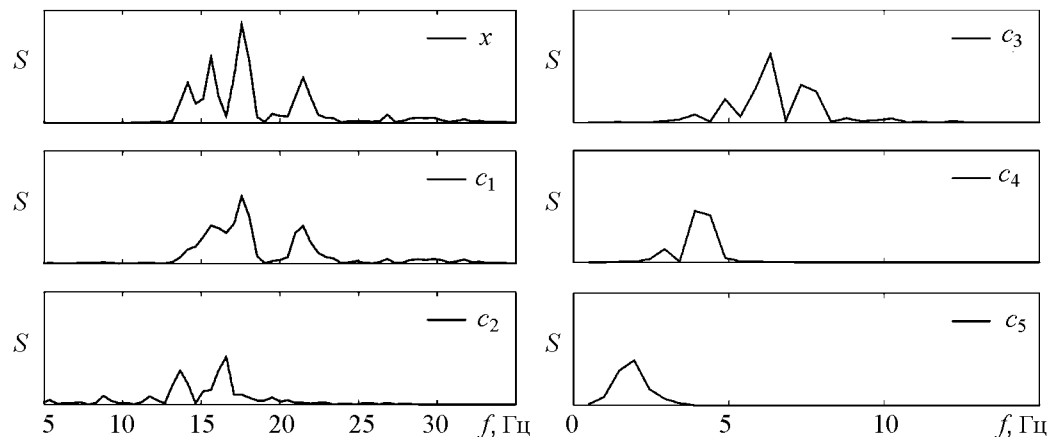


Рис. 5. Спектры мощности трассы сейсмограммы $x(t)$ общего пункта возбуждения и выделенных эмпирических мод

земной коры на разной глубине. В этой связи мы рассматриваем метод эмпирических мод как новый инструмент анализа независимых составляющих в структуре сложных сигналов, позволяющий повысить качество адекватной расшифровки информации, содержащейся в экспериментальных данных сейсморазведки.

Заключение

В данной работе обсуждались и сравнивались на примере анализа экспериментальных нестационарных данных сейсморазведки, содержащих вклад отраженных волн-помех, два наиболее перспективных подхода к решению задачи частотно-временного анализа процессов с меняющимися во времени характеристиками – вейвлет-анализа и метода эмпирических мод. Вейвлет-анализ, являясь в определенной мере некоторым «математическим микроскопом», требует предварительной настройки (выбора параметров смещения и масштаба, выбора базиса, задания «оптимального» частотно-временного разрешения). «Настроенный» микроскоп по своим характеристикам не уступает концепции эмпирических мод, и выбор конкретного инструмента исследования может основываться на таких факторах, как опыт исследователя или существующие традиции решения конкретного класса задач. Доводом в пользу выбора вейвлет-анализа служит более простая физическая интерпретация результатов. В частности, для сложных процессов, регистрируемых в физиологии, геофизике и т.д., метод эмпирических мод позволяет разложить сигнал на большое число «внутренних» мод, характеризующихся близкими мгновенными частотами колебаний. При этом далеко не всегда понятно, с какими процессами эти моды связаны, как из полученного набора осциллирующих составляющих выбрать только те моды, которые ассоциируются с изучаемыми механизмами (или подсистемами), отбросив все «лишние». В этом аспекте следует признать, что вейвлет-анализ способен предоставить более простую информацию для интерпретации сложного спектрального состава исследуемого процесса в виде скалограмм, служащих аналогом классического спектра мощности. Однако отмеченные недостатки являются лишь следствием того, что концепция преобразования Гильберта–Хуанга пока еще только развивается, и есть основания полагать, что с течением времени она может заменить вейвлет-анализ при решении ряда задач цифровой обработки сигналов. Безусловно, любой метод анализа временных рядов имеет свои границы применимости, свои достоинства и недостатки. Результаты, представленные на сегодняшний день в научной литературе, в совокупности с результатами расчетов, предпринятых авторами данной статьи, свидетельствуют о том, что в задачах исследования частотно-временной динамики нестационарных процессов концепции вейвлетов и эмпирических мод являются сопоставимыми по своим потенциальным возможностям, а их применение (в том числе и совместное) [40] способно существенно расширить возможности локализованного анализа процессов с меняющимися во времени характеристиками.

Наряду с проведением частотно-временного анализа многокомпонентных сигналов в условиях нестационарности и наличия помех, метод эмпирических мод обладает значительным потенциалом для решения задач выделения независимых ритмических составляющих из экспериментальных данных. В данной статье мы привели иллюстрацию применения данного подхода для идентификации «внутренних мод» в структуре сигнала сейсмограммы общего пункта возбуждения. Отметим, что современная геофизика является одним из потенциальных областей приложения разраба-

тываемых новых методов детального анализа процессов сложной структуры. Более того, исследования в геофизике в значительной степени и стимулируют совершенствование инструментария для цифровой обработки сигналов. Примером может служить вейвлет-анализ, интерес к которому возник после появления работ, посвященных анализу геофизических процессов [6]. Мы считаем, что метод эмпирических мод может стать новым инструментом анализа структуры сейсмических сигналов, который обеспечит повышение качества изучения литографического строения земной коры на разной глубине.

Работа была поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (государственный контракт № П633).

Библиографический список

1. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989.
2. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical recipes in C: the art of scientific computing. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
3. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их применение // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. С. 465.
4. Addison P.S. The illustrated wavelet transform handbook: applications in science, engineering, medicine and finance. Philadelphia: IOP Publishing, 2002.
5. Mallat S.G. A wavelet tour of signal processing. New York: Academic Press, 1998.
6. Grossman A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. Vol. 15. P. 723.
7. Meyer Y. Wavelets: Algorithms and applications. Philadelphia: S.I.A.M., 1993.
8. Meyer Y. Wavelets and operators. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
9. Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Philadelphia: S.I.A.M., 1992.
10. Torrence C., Compo G.P. A practical guide to wavelet analysis // Bull. Amer. Meteor. Soc. 1998. Vol. 79. P. 61.
11. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. Т. 166, № 11. С. 1145.
12. Wavelets in physics / Ed. van den Berg J.C. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
13. Vetterli M., Kovacevic J. Wavelets and subband coding. NJ: Prentice Hall, 1995.
14. Wavelets in geophysics / Eds Foufoula-Georgiou E., Kumar P. New York: Academic Press, 1994.
15. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002.
16. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
17. Sitnikova E., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Luijtelaar E.L. Sleep spindles and spike-wave discharges in EEG: Their generic features, similarities and distinctions disclosed with Fourier transform and continuous wavelet analysis // Journal of Neuroscience Methods. 2009. Vol. 180. P. 304

18. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75. P. 056207.
19. *Pavlov A.N., Makarov V.A., Mosekilde E., Sosnovtseva O.V.* Application of wavelet-based tools to study the dynamics of biological processes // *Briefings in Bioinformatics.* 2006. Vol. 7. P. 375.
20. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Yip K.-P., Holstein–Rathlou N.-H., Marsh D.J.* Synchronization among mechanisms of renal autoregulation is reduced in hypertensive rats // *Am. J. Physiol. Renal Physiol.* 2007. Vol. 293. P. F1545.
21. *Павлов А.Н., Анищенко В.С.* Мультифрактальный анализ сложных сигналов // *Успехи физических наук.* 2007. Т. 177, № 8. С. 859.
22. *Kumar P., Foufoula-Georgiou E.* Wavelet analysis for geophysical applications // *Reviews in Geophysics.* 1997. Vol. 35. P. 385.
23. *Huang N.E., Shen Z., Long S.R., Wu M.C., Shi H.H., Zheng Q., Yen N.-C., Tung C.C., Liu H.H.* The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1998. Vol. 454. P. 903.
http://ru.wikipedia.org/wiki/Empirical_Mode_Decomposition
24. *Huang N.E., Shen Z., Long S.R.* A new view of nonlinear water waves: the Hilbert spectrum // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1999. Vol. 31. P. 417.
25. *Hilbert–Huang transform and its applications / Eds Huang N.E., Shen S.P.* Singapore: World Scientific, 2005.
26. *Flandrin P., Goncalvés P.* Empirical mode decompositions as data-driven wavelet-like expansion // *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inform. Process.* 2004. Vol. 2. P. 477.
27. *Neto E.P., Custaud M.A., Cejka C.J., Abry P., Frutoso J., Gharib C., Flandrin P.* Assessment of cardiovascular autonomic control by the empirical mode decomposition // *Method. Inform. Med.* 2004. Vol. 43. P. 60.
28. *Huang N.E., Wu Z.* A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method // *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* 2004. Vol. 460. P. 1597.
29. *Gabor D.* Theory of communications // *J. Inst. Electr. Eng. London.* 1946. Vol. 93. P. 429.
30. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 2005.
31. *Ville J.* Theorie et applications de la notion de signal analytique // *Cables et Transm.* 1948. Vol. 2A, № 1. P. 61.
32. *Wigner E.P.* On the quantum correction for thermodynamic equilibrium // *Phys. Rev.* 1932. Vol. 40. P. 749.
33. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* Time scale synchronization of chaotic oscillators // *Physica D.* 2005. Vol. 206. № 3–4, С. 252.
34. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* An approach to chaotic synchronization // *Chaos.* 2004. Vol. 14. № 3, P. 603
35. *Короновский А.А., Пономаренко В.И., Прохоров, М.Д., Храмов, А.Е.* Диагностика синхронизации автоколебательных систем при изменении частоты внешнего воздействия с использованием вейвлетного анализа // *Радиотехника и электроника.* 2007. Т. 52. № 5.

36. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V., Rempen I.S.* Chaotic synchronization of coupled electron-wave systems with backward waves // *Chaos*. 2005. Vol. 15, № 1. P. 013705.
37. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Введение в непрерывный вейвлетный анализ для специалистов в области нелинейной динамики. Часть 1. Основные положения, численная реализация и модельные сигналы // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2001. Т. 9, № 4,5. С. 3.
38. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Введение в непрерывный вейвлетный анализ для специалистов в области нелинейной динамики. Часть 2. Пути в хаос с точки зрения вейвлетного анализа // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2002. Т. 10, № 1–2. С. 3.
39. *Павлов А.Н.* Вейвлет-анализ и примеры его применения // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2009. Т. 17, № 5. С. 99.
40. *Павлов А.Н., Филатова А.Е.* Метод эмпирических мод и вейвлет-фильтрация: применение в задачах геофизики // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 19, № 1. С. 3.
41. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Midzyanovskaya I.S., Sitnikova E. and Rijn C.M.* On-Off Intermittency in Time Series of Spontaneous Paroxysmal Activity in Rats with Genetic Absence Epilepsy // *Chaos*. 2006. Vol. 16. P. 043111.
42. *van Luijtelaar G., Hramov A.E., Sitnikova E., Koronovskii A.A.* Spike-wave discharges in WAG/Rij rats are preceded by delta and theta precursor activity in cortex and thalamus // *Clin Neurophysiol* (2010), (in press) doi:10.1016/j.clinph.2010.10.038
43. *Ovchinnikov A, Lüttjohanna A., Hramov A., van Luijtelaar G.* An algorithm for real-time detection of spike-wave discharges in rodents // *J. Neurosci. Methods*. 2010. Vol. 194. P. 172.
44. *Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Koronovskii A.A., van Luijtelaar G.* Sleep spindles and spike-wave discharges in EEG: Their generic features, similarities and distinctions disclosed with Fourier transform and continuous wavelet analysis // *Journal of Neuroscience Methods*. 2009. Vol. 180. P. 304.
45. *Lee T.-W.* Independent component analysis: Theory and applications. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998.
46. *Yilmaz O.* Seismic Data Analysis. Vol. I, II. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists, 2001.
47. *Гурвич И.И., Боганик Г.Н.* Сейсмическая разведка. М.: Недра, 1980.
48. *Филатова А.Е., Артемьев А.Е., Короновский А.А., Павлов А.Н., Храмов А.Е.* Успехи и перспективы применения вейвлетных преобразований для анализа нестационарных нелинейных данных в современной геофизике // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2010. Т. 18, № 3. С. 3.
49. *Филатова А.Е., Овчинников А.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Применение вейвлетного преобразования для диагностики волн-помех звукового и поверхностного типов по цифровым данным наземной сейсморазведки // *Вестник ТГУ*. 2010. Т. 15, № 2. С. 524.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 26.11.2010
После доработки 09.03.2011*

TIME-FREQUENCY ANALYSIS OF NONSTATIONARY PROCESSES: CONCEPTS OF WAVELETS AND EMPIRICAL MODES

A.N. Pavlov, A.E. Filatova, A.E. Hramov

A comparison of wavelets and empirical modes concepts is performed that represent the most perspective tools to study the structure of nonstationary multimode processes. Their advantages over the classical methods for time series analysis and restrictions of both approaches are discussed that needs to be known for correct interpretation of the obtained results. New possibilities in the study of signals structure at the presence of noise are illustrated for digital single-channel experimental data of prospecting seismology.

Ключевые слова: Wavelet-analysis, Hilbert-Huang transform, prospecting seismology, time series, time-frequency analysis, mode.



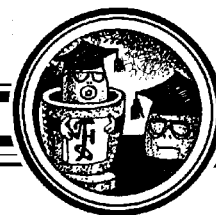
Филатова Анастасия Евгеньевна – родилась в Саратове (1983). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2005). Кандидат физико-математических наук (2008). Старший научный сотрудник Лаборатории физики нелинейных явлений Отделения физики нелинейных систем Саратовского государственного университета. Область научных интересов – нелинейная динамика систем различной природы, методы анализа динамических систем, вейвлетный анализ. Автор ряда статей в рецензируемых отечественных и зарубежных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: anefila@gmail.com



Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал (в соавторстве) книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004), монографию «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003), двухтомную коллективную монографию «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009), коллективную монографию «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд-во МГУ, 2010) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aeh@nonlin.sgu.ru



К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ СПЕКТРА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЛЯПУНОВСКИХ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННЫХ СИСТЕМАХ*

А.А. Короновский, В.А. Максименко, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов

В работе проведен анализ поведения диода Пирса – эталонной пучково-плазменной системы, демонстрирующей хаотическую динамику – с позиций рассмотрения поведения спектра пространственных показателей Ляпунова. Описан метод расчета спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем электронной природы. Рассмотрен как случай автономной динамики системы, так и динамика двух однопольных связанных диодов Пирса при установлении режима обобщенной хаотической синхронизации.

Ключевые слова: Показатели Ляпунова, диод Пирса, обобщенная хаотическая синхронизация, хаотические осцилляторы, динамическая система.

Введение

Диод Пирса является классической моделью физической электроники, которая позволяет при анализе некоторых режимов колебаний в электронном потоке ограничиться гидродинамическим описанием [1–4]. Эта модель интересна тем, что, несмотря на относительную простоту, она демонстрирует многие нелинейные явления, включая динамический хаос, классический сценарий перехода к хаотической динамике, перестройку хаотического аттрактора с изменением управляющего параметра, синхронизацию хаотических колебаний и др. Все это делает диод Пирса удобной базовой моделью пучково-плазменной системы для теоретического и численного анализа сложного поведения в потоках заряженных частиц со сверхкритическим током, для применения методов нелинейной динамики с целью анализа сложного поведения пространственно-распределенных автоколебательных систем, а также изучения методов управления сложными пространственно-временными колебаниями.

*Статья написана по материалам доклада на IX Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 4–9 октября, 2010.

В настоящей работе рассматривается поведение этой эталонной системы с точки зрения пространственных показателей Ляпунова. Известно, что ляпуновские показатели представляют собой мощный инструмент для анализа сложной динамики систем с сосредоточенными параметрами. Они широко используются для описания сложных систем, являющихся предметом изучения различных областей науки, таких как физика [5], молекулярная динамика [6], астрономия [7], медицина [8], экономика [9] и др.

Одним из наиболее значимых приложений показателей Ляпунова является их использование для обнаружения качественных изменений в динамике системы при варьировании управляющих параметров. Например, ляпуновские экспоненты используются для обнаружения перехода от хаотического режима к гиперхаосу [10], для выявления наличия гиперболического аттрактора [5, 11], для диагностики обобщенной синхронизации [12, 13] или индуцированной шумом синхронизации [14–16].

Динамика диссипативной системы с *непрерывным временем* с малым числом степеней свободы, размерность фазового пространства которой равна N , может быть характеризована спектром ляпуновских показателей $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$:

- если динамическая система характеризуется одним положительным ляпуновским показателем, то в системе наблюдается *хаос*;
- если существует 2 или более положительных показателя Ляпунова, то имеет место *гиперхаос*;
- младшие отрицательные показатели Ляпунова характеризуют направления в фазовом пространстве, по которым осуществляется сближение фазовых траекторий;
- один ляпуновский показатель всегда равен нулю, он отвечает за возмущения вдоль траектории в фазовом пространстве системы.

Для систем с сосредоточенными параметрами с *дискретным временем* нулевой показатель Ляпунова, отвечающий за возмущения вдоль траектории, отсутствует, поэтому для отображений спектр показателей Ляпунова, как правило, состоит только из положительных и отрицательных величин, хотя в случае отдельных режимов (например, для квазипериодических колебаний) и для отображений может существовать нулевой показатель.

Нулевая ляпуновская экспонента играет важную роль в определенных физических приложениях. Так, например, для детерминированного периодического осциллятора этот показатель является наибольшим по величине. Следовательно, в таких системах, управляемых внешним сигналом (детерминированным или случайным), старшая условная ляпуновская экспонента (которая является нулевой в автономном случае) может стать отрицательной, что приведет к синхронизации. Полагают также, что в связанных хаотических осцилляторах переход нулевой ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений тесно связан с установлением режима фазовой синхронизации (см. [17, 18]). В то же самое время известно [19, 20], что точка, соответствующая установлению режима фазовой синхронизации, и момент перехода нулевой ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений не совпадают друг с другом и могут в значительной степени различаться. Наконец, нулевой показатель Ляпунова может обозначать наличие специфического режима в динамике системы, такого как неполная индуцированная шумом синхронизация [21].

Для систем с малым числом степеней свободы, демонстрирующих режимы сложной динамики, аналитически найти значения показателей Ляпунова удается исключительно редко. Как правило, для их нахождения приходится использовать численные методы, в основе которых лежит рассмотрение эволюции соответствующего числа векторов возмущения вдоль рассматриваемой траектории в фазовом пространстве. При этом, если не предпринимать специальных мер, то в каждом векторе возмущения будет представлена составляющая с максимальным показателем Ляпунова, которая будет доминировать на больших временах, и корректно оценить остальные показатели не удастся. Попытка рассчитать полную матрицу эволюции и найти ее сингулярные числа также, как правило, к успеху не приводит по той же самой причине: из-за доминирования возмущения с максимальным показателем Ляпунова задача оказывается плохо обусловленной [22]. Работоспособный метод нахождения спектра показателей Ляпунова для систем с малым числом степеней свободы основан на применении алгоритма Бенеттина, причем переопределение векторов возмущения должно состоять не только в изменении нормы, но и сопровождаться их ортогонализацией [23]. В свою очередь, ортогонализация основана на простой процедуре Грамма–Шмидта построения ортонормированной системы.

Таким образом, ляпуновские экспоненты являются мощным инструментом анализа поведения систем с малым числом степеней свободы, демонстрирующих сложную динамику. Очевидно, что этот инструмент можно использовать и для анализа динамики более сложных систем – систем с бесконечномерным фазовым пространством. Однако напрямую вычислить ляпуновские экспоненты для таких систем, используя алгоритмы, разработанные и апробированные для систем с малым числом степеней свободы, оказывается проблематично. Среди основных проблем, возникающих перед исследователем, поставившим себе целью рассчитать показатели Ляпунова для распределенных систем, можно выделить следующие:

- в силу пространственной распределенности анализируемой системы фазовое пространство оказывается бесконечномерным;
- количество показателей Ляпунова, характеризующих поведение пространственно-распределенной активной среды, также оказывается бесконечным;
- вместо конечномерного вектора малой размерности поведение пространственно-распределенной системы будет характеризоваться *состоянием*, которое для каждой системы необходимо определять по-своему;
- процедура перенормировки и ортогонализации векторов возмущений, имеющая место для систем с конечномерным фазовым пространством, должна быть модифицирована для перенормировки и ортогонализации состояний.

В то же самое время распределенные системы являются весьма распространенным классом моделей реальных физических систем, в частности, систем электронной природы, в том числе, приборов и устройств электроники сверхвысоких частот и радиофизики, таких как лампа обратной волны, виркаторы, клистронные автогенераторы, гиро-приборы [24–27]. Иными словами, при изучении пространственно-распределенных систем возникает проблема расчета характеристик, аналогичных спектру ляпуновских показателей для динамических систем с малым числом степеней свободы. Например, такие задачи возникают при исследовании обобщенной хаотической синхронизации, синхронизации, индуцированной шумом, и др.

Пространственно-распределенные системы представляют большой интерес также и с фундаментальной точки зрения. Для пространственно-распределенных систем, характеризующихся бесконечным числом пространственных ляпуновских экспонент, возникает необходимость определения нескольких (старших) пространственных ляпуновских экспонент.

Одной из первых работ в этом направлении была работа [28], в которой рассматривались показатели Ляпунова для уравнения Гинзбурга–Ландау. Однако, как уже отмечалось выше, напрямую вычислить ляпуновские показатели для систем с бесконечномерным фазовым пространством, используя алгоритмы, разработанные и апробированные для систем с малым числом степеней свободы, оказывается проблематично. Попытки адаптировать и обобщить понятие ляпуновского показателя для анализа динамики распределенных систем, как правило, сводятся в конечном итоге к расчету ляпуновского показателя теми же самыми способами, что и для систем с сосредоточенными параметрами. Один из возможных способов – это вычисление старшего ляпуновского показателя по временной реализации, полученной по сигналу, регистрируемому в одной из точек пространства распределенной системы (см., например, [29]), точно так же, как это делается для систем с сосредоточенными параметрами [30]. В качестве альтернативы можно также рассчитывать спектр ляпуновских показателей, пользуясь алгоритмом Бенеттина [23], работая с дискретной моделью распределенной системы. В этом случае дискретизованная распределенная система рассматривается как конечномерная динамическая система с очень большой размерностью. Соответственно, она будет характеризоваться спектром ляпуновских показателей, содержащим очень большое (но все же конечное) число таких показателей [31]. При этом возникает целый ряд особенностей, связанных с большой размерностью фазового пространства такой дискретизованной системы.

В настоящей работе рассматривается вопрос о расчете спектра пространственных показателей Ляпунова для эталонной пространственно-распределенной системы СВЧ-электроники – диода Пирса и использования его для диагностики различных динамических режимов. В основу метода положено непрерывное в пространстве описание состояния системы (по аналогии с работой [10]). В разделе 1 описывается используемый метод; в разделе 2 рассматриваются основные уравнения, описывающие поведение изучаемой системы; раздел 3 посвящен диагностике динамических режимов в пучково-плазменных системах со сверхкритическим током с помощью пространственных показателей Ляпунова. Рассматривается как автономная динамика одной системы, так и установление режима хаотической синхронизации в двух связанных диодах Пирса.

1. Метод расчета

Рассмотрим метод расчета спектра пространственных показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем. Пусть

$$\hat{L}(\mathbf{U}(x, t)) = 0 \quad (1)$$

оператор, описывающий поведение пространственно-распределенной системы с течением времени; $\mathbf{U}(x, t)$ – состояние системы, величина, зависящая от пространственной координаты x и времени t . В целом ряде случаев выбор набора величин,

характеризующих поведение системы в качестве состояния, используемого для расчета показателей Ляпунова, является нетривиальной задачей. Более того, неправильное определение состояния системы приводит к ошибочным результатам.

Как уже отмечалось выше, для пространственно-распределенных систем число пространственных показателей Ляпунова оказывается бесконечным. При вычислении спектра ляпуновских показателей, очевидно, приходится ограничиваться расчетом первых N старших показателей. В этом случае $\mathbf{U}(x, t)$ будет выступать в качестве опорного состояния, относительно которого будет рассматриваться поведение N малых возмущений, которые тоже являются *состояниями*.

При расчете спектра пространственных ляпуновских экспонент функция $\mathbf{U}(x, t)$ будет выступать в качестве опорного состояния, относительно которого будет рассматриваться поведение малых возмущений. Для вычисления первых N старших пространственных ляпуновских экспонент необходимо ввести в рассмотрение набор возмущений $\mathbf{V}_i(x, t)$, $i = 1, \dots, N$, удовлетворяющих условию ортогональности

$$(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (2)$$

где (\mathbf{U}, \mathbf{V}) – скалярное произведение состояний.

Важно отметить, что, если в роли состояния выступает действительная или комплексная функция (как в [32] или [10]), не возникает проблем с определением скалярного произведения. В то же самое время, если состояние системы определяется каким-либо иным образом (что может оказаться необходимым в целом ряде физических задач), то и определение скалярного произведения в этом случае также должно быть определено по-иному. При этом, как и в случае выбора состояния, неправильное определение скалярного произведения состояний системы также будет приводить к ошибочным результатам.

Дополнительно к условию ортогональности (2) все возмущения $\mathbf{V}_i(x, t)$ должны также удовлетворять условию нормировки

$$\|\mathbf{V}_i(x, 0)\| = 1. \quad (3)$$

Набор возмущений $\mathbf{V}_i(x, t)$, удовлетворяющих условиям (2) и (3), может быть получен с помощью процедуры ортогонализации Грамма–Шмидта

$$\begin{cases} \mathbf{V}_i = \frac{\tilde{\mathbf{V}}_i(x, 0)}{\|\tilde{\mathbf{V}}_i(x, 0)\|} = \frac{\tilde{\mathbf{V}}_i(x, 0)}{\sqrt{(\tilde{\mathbf{V}}_i(x, 0), \tilde{\mathbf{V}}_i(x, 0))}}, \\ \tilde{\mathbf{V}}_1(x, 0) = \varphi_1(x), \\ \tilde{\mathbf{V}}_{i+1}(x, 0) = \varphi_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^i (\mathbf{V}_k, \varphi_{i+1}) \mathbf{V}_k(x, 0), \quad (i = 1, 2, \dots, N - 1), \end{cases} \quad (4)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)$ – набор линейно независимых произвольных состояний, определенных на длине L рассматриваемой системы.

Для вычисления спектра пространственных ляпуновских экспонент пространственно-распределенной системы необходимо рассматривать эволюцию во времени

как состояния $\mathbf{U}(x, t)$ исследуемой системы, так и всех возмущений $\mathbf{V}_i(x, t)$. Эволюция состояния $\tilde{\mathbf{U}}(x, t)$ определяется соотношением (1), в то время как эволюция возмущений $\mathbf{V}_i(x, t)$ будет определяться оператором эволюции

$$\partial \hat{L}(\mathbf{U}(x, t), \mathbf{V}_i(x, t)) = 0, \quad (5)$$

который получается линеаризацией оператора (1) в окрестности состояния $\mathbf{U}(x, t)$.

По истечении интервала времени длительностью T полученный набор возмущений $\mathbf{V}_i(x, T)$ снова подвергается процедуре ортогонализации и нормализации по Грамму–Шмидту, при этом в качестве набора функций $\varphi_i(x)$ выступает рассматриваемое множество возмущений $\mathbf{V}_i(x, T)$, иными словами,

$$\varphi_i(x) = \mathbf{V}_i(x, T). \quad (6)$$

Описанная последовательность действий повторяется M раз, где M – достаточно большое число, при этом по ходу вычислений подсчитываются суммы

$$S_i = \sum_{j=1}^M \ln \|\tilde{\mathbf{V}}_i(x, jT)\|, \quad (7)$$

в которых используются возмущения до перенормировки, но после ортогонализации. Оценка значений пространственных ляпуновских экспонент для пространственно-распределенных систем определяется как

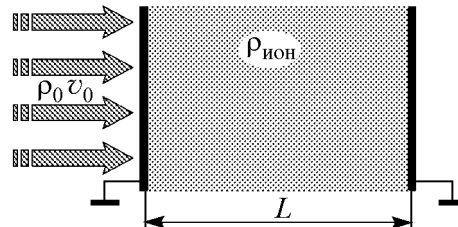
$$\Lambda_i = \frac{S_i}{MT}. \quad (8)$$

Следует также отметить, что в некоторых случаях нет необходимости в рассмотрении всего спектра пространственных показателей Ляпунова, а интерес представляет только старший из них. В этом случае достаточно рассматривать эволюцию опорного состояния $\mathbf{U}(x, T)$ и только одного возмущенного состояния $\mathbf{V}(x, T)$. При этом необходимо осуществлять процедуру перенормировки и подсчитывать первую ляпуновскую сумму S_1 .

2. Диод Пирса

Диод Пирса представляет из себя две бесконечных плоских параллельных сетки, пронизываемые моноэнергетическим на входе электронным потоком (рис. 1). Сетки, ограничивающие систему, заземлены и находятся на расстоянии L друг от друга. Плотность заряда ρ_0 и скорость v_0 на входе в систему поддерживаются постоянными. Пространство между сетками равномерно заполнено нейтрализующим фоном неподвижных ионов с плотностью заряда $|\rho_i/\rho_0| = 1$. Динамика подобной системы определяется единственным управляющим параметром

$$\alpha = \frac{\omega_p L}{v_0}, \quad (9)$$



(9) Рис. 1. Схематическое изображение диода Пирса

называемым параметром Пирса (ω_p – плазменная частота электронного пучка). При $\alpha > \pi$ в системе развивается неустойчивость, приводящая к образованию виртуального катода, от которого часть электронного потока отражается обратно к плоскости инжекции. Вместе с тем, при величине $\alpha \sim 3\pi$ возможно прохождение электронного потока через диодный промежуток без образования виртуального катода. В последнем случае рост неустойчивости Пирса ограничивается нелинейностью в системе, и в диоде наблюдается режим полного прохождения потока, и существует возможность описания пролетного промежутка со сверхкритическим током в рамках гидродинамического подхода. В тех случаях, когда в электронном потоке присутствуют отражения частиц, применение подобного описания неправомерно. Однако существует ряд задач, для которых гидродинамический подход является адекватным и оптимальным.

Динамика электронного потока в диоде Пирса в рамках гидродинамического приближения описывается самосогласованной системой уравнений движения, непрерывности и Пуассона относительно безразмерных переменных [33]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\alpha^2(\rho - 1), \quad (12)$$

с граничными условиями:

$$v(0, t) = 1, \quad \rho(0, t) = 1, \quad \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0. \quad (13)$$

В уравнениях (10)–(12) гидродинамической теории диода Пирса использованы безразмерные переменные потенциала поля пространственного заряда φ , плотности заряда ρ , скорость электронного потока v , пространственной координаты x и времени t , которые связаны с соответствующими размерными переменными соотношениями $\varphi' = (v_0^2/\eta)\varphi$, $\rho' = \rho_0\rho$, $v' = v_0v$, $x' = Lx$, $t' = (L/v_0)t$, где штрихом обозначены размерные величины, η – удельный заряд электрона.

Система уравнений (10)–(12) с граничными и начальными условиями (13) описывает динамику свободного диода Пирса и может быть решена с помощью численных методов в конечно-разностном представлении [34]. Уравнения непрерывности (11) и движения (12) решались с помощью схемы с разностями против потока, а уравнение Пуассона (10) – методом распространения вектора ошибки [35]. Основные параметры численной схемы, такие как шаг пространственной сетки Δx и шаг по времени Δt , были выбраны как $\Delta x = 0.005$ и $\Delta t = 0.003$.

В качестве состояния диода Пирса будем использовать вектор

$$\mathbf{U} = (\rho(x, t), v(x, t))^T, \quad (14)$$

скалярное произведение состояний будет определяться как

$$(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \int_0^1 (\rho_1(x, t)\rho_2(x, t) + v_1(x, t)v_2(x, t)) dx, \quad (15)$$

где интегрирование осуществляется по длине рассматриваемой системы. Важно отметить, что потенциал $\varphi(x, t)$, входящий в уравнения, описывающие эволюцию рассматриваемой системы, не включен в состояние \mathbf{U} , поскольку он однозначно определяется через плотность заряда $\rho(x, t)$ в силу уравнения Пуассона (12) и граничных условий (13). Иными словами, уравнения (10)–(12) являются избыточными, поскольку динамический оператор эволюции, в принципе, можно переписать, исключив из рассмотрения потенциал $\varphi(x, t)$. Фактически, достаточно знать распределения плотности заряда $\rho(x, t)$ и скорости $v(x, t)$, чтобы однозначно характеризовать состояние системы и, опираясь на оператор эволюции $\hat{L}(\mathbf{U})$, в качестве которого выступает система уравнений (10)–(12) с граничными и начальными условиями (13), вычислять аналогичные состояния в следующие моменты времени.

Аналогично, в качестве возмущений \mathbf{V}_i будут выступать вектора

$$\mathbf{V}_i = (\xi_i^\rho(x, t), \xi_i^v(x, t))^T, \quad (16)$$

характеризующие малые отклонения от опорного состояния \mathbf{U} . Возмущение $\xi_i^\varphi(x, t)$ потенциала $\varphi(x, t)$ снова будет однозначно определяться распределением плотности заряда $\rho(x, t)$ и его малым возмущением $\xi_i^\rho(x, t)$.

Поведение диода Пирса с i -м возмущением состояния \mathbf{U} описывается следующей системой уравнений:

$$\hat{L}(\mathbf{U} + \mathbf{V}_i) = 0 \quad (17)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \rho(0, t) + \xi_i^\rho(0, t) &= 1, \\ v(0, t) + \xi_i^v(0, t) &= 1, \\ \varphi(0, t) + \xi_i^\varphi(0, t) &= 0, \\ \varphi(1, t) + \xi_i^\varphi(1, t) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Выполняя процедуру линеаризации вблизи синхронного состояния, раскладывая функции в правых частях уравнения (17) в ряды Тейлора по малым добавкам \mathbf{V} , пренебрегая членами второго и высших порядков малости, можно переписать уравнения (17), (18) в виде

$$\partial \hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V}_i) = 0, \quad (19)$$

где $\partial \hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V}_i)$ – линеаризованный вблизи опорного состояния $\mathbf{U}(x, t)$ оператор эволюции $\hat{L}(\cdot)$, описывающий, каким образом изменяются возмущения \mathbf{V}_i с течением времени. Для исследуемой системы оператор $\partial \hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V}_i)$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_i^\varphi}{\partial x^2} &= -\alpha^2 \xi_i^\rho, \\ \frac{\partial \xi_i^\rho}{\partial t} &= -\xi_i^\rho \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial \xi_i^\rho}{\partial x} - \xi_i^v \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial \xi_i^v}{\partial x}, \\ \frac{\partial \xi_i^v}{\partial t} &= -v \frac{\partial \xi_i^v}{\partial x} - \xi_i^v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \xi_i^\varphi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (20)$$

Соответственно, граничные условия (18) для малых отклонений V_i от синхронного состояния примут вид

$$\begin{aligned}\xi_i^p(0, t) &= 0, \\ \xi_i^v(0, t) &= 0, \\ \xi_i^q(0, t) &= 0, \\ \xi_i^q(1, t) &= 0.\end{aligned}\tag{21}$$

Полученный оператор $\partial\hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ является линейным относительно малых отклонений \mathbf{V} .

Теперь, с учетом введенных в рассмотрение состояния \mathbf{U} , возмущений V_i , оператора эволюции $\hat{L}(\mathbf{U})$, в качестве которого выступает система уравнений (10)–(12) с граничными и начальными условиями (13), и линеаризованного оператора $\partial\hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$, определяемого соотношениями (20)–(31), может быть найден спектр пространственных показателей Ляпунова для диода Пирса, находящегося в автономном режиме.

3. Диагностика динамических режимов в пучково-плазменных системах со сверхкритическим током

Как уже отмечалось выше, показатели Ляпунова широко используются для диагностики различных динамических режимов. В частности, одним из наиболее значимых приложений показателей Ляпунова является их использование для обнаружения качественных изменений в динамике системы при варьировании управляющих параметров. Еще одной важной областью применения является использование спектра показателей Ляпунова при установлении синхронных режимов связанных систем, демонстрирующих хаотические режимы. Поэтому в настоящем разделе будут рассмотрены как автономная динамика пучково-плазменных систем со сверхкритическим током, так и поведение связанных систем.

3.1. Автономная система. Поведение рассматриваемой пространственно-распределенной системы со сверхкритическим током определяется, как было показано выше, всего одним безразмерным параметром – параметром Пирса α . В рамках гидродинамического приближения в автономной модели диода Пирса в узкой области значений управляющего параметра α , соответствующей динамике электронного потока без отражений, система демонстрирует хаотические колебания [34]. Возникновению хаотической динамики предшествует последовательность бифуркаций удвоения периода. При уменьшении параметра α от 2.88л до 2.862л рассматриваемая модель демонстрирует переход от регулярной динамики к хаотической через каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся установлением слабохаотических колебаний с четко выраженным временным масштабом. С дальнейшим уменьшением величины управляющего параметра α происходит перестройка хаотических колебаний в системе: колебания существенно усложняются, исчезает четко выраженный временной масштаб колебаний, усложняется спектральный состав колебаний электронного потока. Это иллюстрирует рис. 2, на котором показаны зависимости

четырёх старших показателя Ляпунова от параметра Пирса α и, для сравнения, бифуркационная диаграмма колебаний плотности пространственного заряда в точке $x = 0.2$ пространства взаимодействия.

Из приведенного рисунка отчетливо видно, что спектр старших пространственных показателей Ляпунова позволяет четко диагностировать динамический режим, наблюдающийся в системе. В спектре пространственных показателей Ляпунова для всех значений управляющего параметра α присутствует один нулевой показатель, который соответствует возмущениям системы вдоль оси времени. В области периодических колебаний $\alpha \lesssim 2.862\pi$ этот нулевой пространственный показатель Ляпунова является максимальным, что свидетельствует об отсутствии в системе хаотической динамики. Все остальные старшие показатели Ляпунова оказываются отрицательными. В то же самое время видно, что в точках бифуркаций удвоения периода (например, $\alpha \simeq 2.87\pi$) второй показатель Ляпунова Λ_2 также становится равным нулю, что свидетельствует о качественных изменениях, происходящих в поведении системы при изменении управляющих параметров.

При дальнейшем уменьшении параметра α (см. рис. 2) старший пространственный показатель Ляпунова Λ_1 становится положительным, что является свидетельством перехода к хаотическим колебаниям. Второй по величине показатель Ляпунова по-прежнему остается равным нулю ($\Lambda_2 = 0$), а все остальные показатели являются отрицательными. Важно, что в окнах периодичности, где реализуются периодические колебания, положительный показатель Ляпунова снова становится отрицательным, максимальное значение в этом случае имеет нулевой ляпуновский показатель.

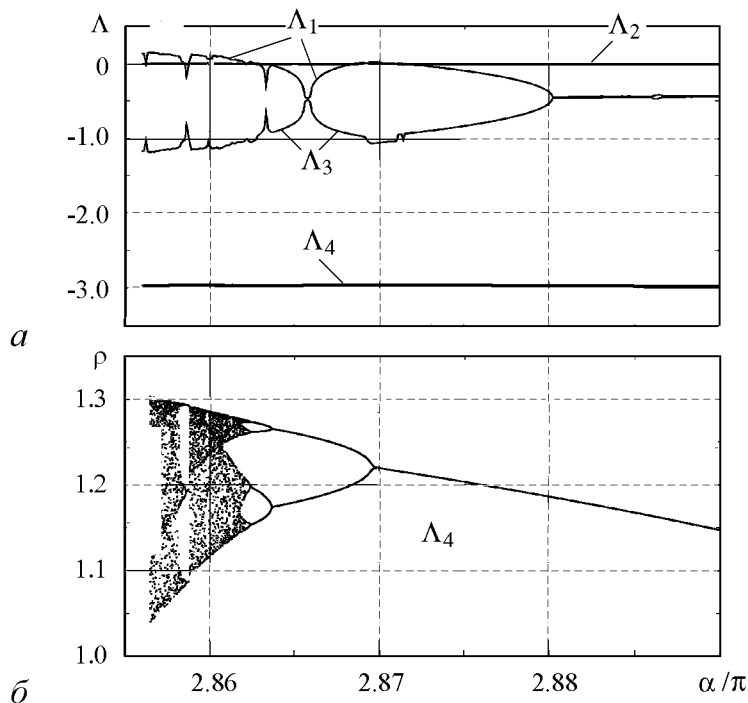


Рис. 2. *a* – Зависимость четырех старших показателя Ляпунова ; *b* – бифуркационная диаграмма колебаний в автономном диоде Пирса при изменении параметра α

Важно отметить, что в случае хаотических колебаний система характеризуется всего лишь одним положительным показателем Ляпунова, хотя для распределенной автоколебательной системы теоретически можно ожидать, что положительных ляпуновских показателей может быть несколько. Наличие только одного положительного показателя Ляпунова свидетельствует о том, что, несмотря на пространственную распределенность системы, хаотические колебания, реализующиеся в ней, достаточно просты. По всей видимости, именно благодаря этому оказалось возможным построить конечномерную модель динамики электронного потока в диоде Пирса с помощью метода Галеркина [35], представляющую собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений [34].

Таким образом, из проведенного рассмотрения видно, что пространственные показатели Ляпунова могут быть с успехом использованы для диагностики динамических режимов в пучково-плазменных системах со сверхкритическим током. Однако область возможного применения спектра пространственных показателей Ляпунова не ограничивается только одной системой. Показатели Ляпунова играют важную роль при изучении явления синхронизации, с их помощью можно диагностировать возникновение того или иного типа синхронного поведения связанных систем, демонстрирующих хаотическую динамику. Поэтому в следующем разделе будет рассмотрен спектр показателей Ляпунова для двух связанных пучково-плазменных систем со сверхкритическим током.

3.2. Два однонаправлено связанных диода Пирса. Как было показано выше, два однонаправлено связанных диода Пирса могут демонстрировать различные режимы хаотической синхронизации, одним из которых является режим обобщенной хаотической синхронизации. Очевидно, что установление синхронного режима в этом случае должно найти свое отражение в поведении спектра пространственных показателей Ляпунова, характеризующих поведение связанных диодов Пирса.

Безразмерные уравнения, описывающие поведение однонаправлено связанных систем, имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varphi^{1,2}}{\partial x^2} = -(\alpha^{1,2})^2 (\rho^{1,2} - 1), \quad (22)$$

$$\frac{\partial \rho^{1,2}}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho^{1,2} v^{1,2})}{\partial x}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial v^{1,2}}{\partial t} = -v^{1,2} \frac{\partial v^{1,2}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^{1,2}}{\partial x}, \quad (24)$$

с граничными условиями

$$v^{1,2}(0, t) = 1, \quad \rho^{1,2}(0, t) = 1, \quad \varphi^{1,2}(0, t) = 0, \quad (25)$$

где верхние индексы «1» и «2» относятся к первой и второй пучково-плазменным системам, соответственно.

Связь между рассматриваемыми диодами Пирса вводится модификацией граничных условий на правой границе второй (ведомой) системы. Иными словами, граничные условия для системы гидродинамических уравнений (22)–(24), описывающих динамику связанных диодов Пирса, в случае однонаправленной связи запишут-

ся следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi^1(1, t) = 0, \\ \varphi^2(1, t) = \varepsilon(\rho^2(x=1, t) - \rho^1(x=1, t)), \end{cases} \quad (26)$$

где первая «1» (ведущая) система находится в режиме автономных колебаний, воздействуя на вторую «2» (ведомую) систему.

В качестве состояния системы из двух взаимодействующих диодов Пирса будем использовать вектор

$$\mathbf{U} = (\rho^1(x, t), v^1(x, t), \rho^2(x, t), v^2(x, t))^T, \quad (27)$$

а скалярное произведение состояний, в свою очередь, будет определяться как

$$(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \int_0^1 (\rho_1^1(x, t)\rho_2^1(x, t) + v_1^1(x, t)v_2^1(x, t) + \rho_1^2(x, t)\rho_2^2(x, t) + v_1^2(x, t)v_2^2(x, t)) dx. \quad (28)$$

Интегрирование в соотношении (28) осуществляется по всей длине рассматриваемой системы, по аналогии с (15). Соотношения (22)–(24) с граничными условиями (25)–(26) для двух однонаправлено связанных диодов Пирса будут выступать в качестве оператора эволюции (1).

По аналогии с (16), в качестве возмущений \mathbf{V}_i для двух связанных диодов Пирса будут выступать векторы

$$\mathbf{V}_i = (\xi_i^{1\rho}(x, t), \xi_i^{1v}(x, t), \xi_i^{2\rho}(x, t), \xi_i^{2v}(x, t))^T, \quad (29)$$

характеризующие малые отклонения от опорного состояния \mathbf{U} , причем малые возмущения $\xi_i^{1\varphi}(x, t)$ и $\xi_i^{2\varphi}(x, t)$ потенциалов $\varphi^{1,2}(x, t)$, также как и для одного автономного диода Пирса, будут однозначно определяться распределениями плотности заряда $\rho^{1,2}(x, t)$ и их малыми возмущениями $\xi_i^{1,2\rho}(x, t)$.

Для исследуемой системы двух однонаправлено связанных диодов Пирса (22)–(26) оператор $\partial \hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V}_i)$, определяющий эволюцию малых возмущений \mathbf{V}_i опорного состояния \mathbf{U} , записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_i^{1,2\varphi}}{\partial x^2} &= -(\alpha^{1,2})^2 \xi_i^{1,2\rho}, \\ \frac{\partial \xi_i^{1,2\rho}}{\partial t} &= -\xi_i^{1,2\rho} \frac{\partial v^{1,2}}{\partial x} - v^{1,2} \frac{\partial \xi_i^{1,2\rho}}{\partial x} - \xi_i^{1,2v} \frac{\partial \rho^{1,2}}{\partial x} - \rho^{1,2} \frac{\partial \xi_i^{1,2v}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \xi_i^{1,2v}}{\partial t} &= -v^{1,2} \frac{\partial \xi_i^{1,2v}}{\partial x} - \xi_i^{1,2v} \frac{\partial v^{1,2}}{\partial x} - \frac{\partial \xi_i^{1,2\varphi}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (30)$$

с граничными условиями для малых отклонений V_i от синхронного состояния

$$\begin{aligned}\xi_i^{1,2p}(0, t) &= 0, \\ \xi_i^{1,2v}(0, t)_i &= 0, \\ \xi_i^{1,2\varphi}(0, t) &= 0, \\ \xi_i^{1\varphi}(1, t) &= 0, \\ \xi_i^{2\varphi}(1, t) &= \varepsilon(\xi_i^{2p}(1, t) - \xi_i^{1p}(1, t)).\end{aligned}\tag{31}$$

Таким образом, для двух однонаправлено связанных диодов Пирса расчет спектра пространственных показателей Ляпунова осуществляется точно также, как и в случае автономного диода Пирса, с тем лишь отличием, что состояние системы U , малые возмущения V_i , операция скалярного произведения (U_1, U_2) и операторы эволюции $\hat{L}(U)$ и $\partial\hat{L}(U, V_i)$ теперь определены с учетом взаимодействия двух систем.

Зависимость пяти старших пространственных показателей Ляпунова для двух однонаправлено связанных диодов Пирса (22)–(24) с граничными условиями (25)–(26) от величины параметра связи ε показана на рис. 3. Выбор значений управляющих параметров $\alpha^1 = 2.858\pi$, $\alpha^2 = 2.860\pi$ обеспечивает хаотическую динамику каждого из диодов Пирса в автономном режиме. Отчетливо видно, что при отсутствии связи между диодами $\varepsilon = 0$ два старших показателя Ляпунова положительны (что характеризует хаотическую динамику в каждом из диодов Пирса по отдельности), два являются нулевыми (эти показатели соответствуют возмущениям состояния систем вдоль оси времени), пятый показатель Ляпунова (и все последующие) оказываются отрицательными.

С увеличением параметра связи значения показателей Ляпунова начинают меняться. Из-за однонаправленного характера связи между рассматриваемыми диодами Пирса, в силу независимости поведения ведущей системы от состояния ведомого осциллятора, спектр ляпуновских показателей $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots$ может быть разделен на две части: ляпуновские показатели ведущей системы $\Lambda_1^1 \geq \Lambda_2^1 \geq \dots$ и условные ляпуновские показатели $\Lambda_1^2 \geq \Lambda_2^2 \geq \dots$. Поскольку динамика ведущего диода Пирса совершенно не зависит от величины параметра связи ε и состояния второго диода Пирса, соответствующие этому диоду Пирса показатели Ляпунова не должны

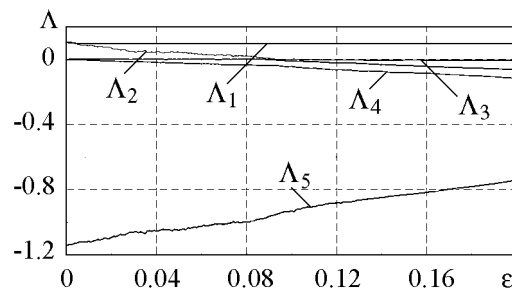


Рис. 3. Зависимость пяти старших показателя Ляпунова от параметра связи ε для двух однонаправлено связанных диодов Пирса

изменяться с увеличением интенсивности связи между рассматриваемыми системами. Что же касается ведомого диода Пирса, то его динамика изменяется с увеличением параметра связи (в частности, она может оказаться синхронизированной сигналом с ведущего диода Пирса), и, соответственно, изменяются значения условных показателей Ляпунова, что отчетливо видно на рис. 3. По мере увеличения параметра связи сначала становится отрицательным второй

условный показатель Ляпунова Λ_2^2 , который при $\varepsilon = 0$ отвечал за возмущения состояния второго диода Пирса вдоль оси времени и был равен нулю, а затем и старший условный показатель Ляпунова Λ_1^2 при $\varepsilon \approx 0.09$ переходит из области положительных значений в область отрицательных, что соответствует установлению режима обобщенной хаотической синхронизации в рассматриваемых диодах Пирса [36].

Заключение

В работе рассмотрен вопрос о спектре пространственных показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем электронной природы на примере диода Пирса, являющегося эталонной пучково-плазменной системой, демонстрирующей хаотическую динамику. Проведена диагностика динамических режимов в пучково-плазменных системах со сверхкритическим током с помощью пространственных показателей Ляпунова, рассмотрена как автономная динамика одной системы, так и установление режима хаотической синхронизации в двух связанных диодах Пирса.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы и Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-3407.2010.2). А.К. благодарит также Фонд некоммерческих программ «Династия».

Библиографический список

1. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. т. 2. М.: Физматлит, 2004.
2. Klinger T., Schroder C., Block D., Greiner F., Piel A., Bonhomme G., and Naulin V. Chaos control and taming of turbulence in plasma devices // Phys. Plasmas. 2001. Vol. 8, № 5. P. 1961.
3. Godfrey B.B. Oscillatory nonlinear electron flow in Pierce diode // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. P. 1553.
4. Kuhn S. and Ender A. Oscillatory nonlinear flow and coherent structures in Pierce-type diodes // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 68. P. 732.
5. Thamilaran K., Senthilkumar D.V., Venkatesan A., and Lakshmanan M. Experimental realization of strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced electronic circuit // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74. 036205.
6. Karakasidis T.E., Fragkou A., and Liakopoulos A. System dynamics revealed by recurrence quantification analysis: Application to molecular dynamics simulations // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76, № 2. 021120.
7. Macek W.M. and Redaelli S. Estimation of the entropy of the solar wind flow // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 5. 6496.
8. Porcher R. and Thomas G. Estimating Lyapunov exponents in biomedical time series // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, № 1. 010902(R).

9. *Dünki R.M.* Largest Lyapunov-exponent estimation and selective prediction by means of simplex forecast algorithms // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 5. 6505.
10. *Kuznetsov S.P. and Trubetskov D.I.* Chaos and hyperchaos in a backward-wave oscillator // *Radiophysics and Quantum Electronics.* 2004. Vol. 47, № 5,6. P. 341.
11. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale-Williams type // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 144101.
12. *Pyragas K.* Weak and strong synchronization of chaos // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 5. R4508.
13. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* Generalized synchronization: a modified system approach // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, № 6. 067201.
14. *Goldobin D.S. and Pikovsky A.S.* Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, №4. 045201(R).
15. *Goldobin D.S. and Pikovsky A.S.* Synchronization of self-sustained oscillators by common white noise // *Physica A.* 2005. Vol. 351. P. 126.
16. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Moskalenko O.I.* Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // *Phys. Lett. A.* 2006. Vol. 354, № 5-6. P. 423.
17. *Osipov G.V., Hu B., Zhou C.S., Ivanchenko M.V., and Kurths J.* Three types of transitions to phase synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 91, № 2. 024101.
18. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., and Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, № 22. 4193.
19. *Politi A., Ginelli F., Yanchuk S., and Maistrenko Yu.* From synchronization to Lyapunov exponents and back // *Physica D.* 2006. Vol. 224. P. 90.
20. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Kurovskaya M.K.* Two types of phase synchronization destruction // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75, № 3. 036205.
21. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Popov P.V.* Incomplete noise-induced synchronization of spatially extended systems // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 77, № 2. 036215.
22. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Сер. «Современная теория колебаний и волн». М.: Физматлит, 2001.
23. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., and Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. P. I. Theory. P. II. Numerical application // *Meccanica* Vol. 15.1980. P. 9.
24. *Филатов Р.А., Калинин Ю.А., and Храмов А.Е.* Исследование влияния положительных ионов на свч-генерацию в низковольтном виркаторе // *Письма в ЖТФ.* 2006. Vol. 32, № 11. P. 61.
25. *Стародубов А.В., Короновский А.А., Храмов А.Е., Жарков Ю.Д., and Дмитриев Б.С.* Исследование обобщенной синхронизации в системе двух связанных клистронных автогенераторов хаоса // *Письма в ЖТФ.* 2007. Vol. 33, № 14. P. 58.
26. *Dmitriev B.S., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Starodubov A.V., Trubetskov D.I., and Zharkov Y.D.* First experimental observation of generalized synchronization phenomena in microwave oscillators // *Physical Review Letters.* 2009. Vol. 102, № 7. 074101.

27. *Nusinovich G.S., Vlasov A.N., and Antonsen T.M.* Nonstationary phenomena in tapered gyro-backward-wave oscillators // *Phys.Rev.Lett.* 2001. Vol. 87, № 21. 218301.
28. *Keefe L.R.* Dynamics of perturbed wavetrain solutions to the ginzburg-landau equation // *Stud. Appl. Math.* 1985. Vol. 73. P. 91.
29. *Короновский А.А., Ремпен И.С., and Храмов А.Е.* Исследование неустойчивых периодических пространственно-временных состояний в распределённой автоколебательной системе со сверхкритическим током // *Изв. РАН, сер. физич.* 2003. Vol. 67, № 12. 1705.
30. *Wolf A., Swift J., Swinney H.L., and Vastano J.* Determining lyapunov exponents from a time series // *Physica D.* 1985. Vol. 16. 285.
31. *Кунцов П.В.* Вычисление показателей ляпунова для распределённых систем: преимущества и недостатки численных методов // *Известия вузов. ПНД.* 2011. Vol. 18, № 5. С. 93.
32. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Фролов Н.С. and Храмов А.Е.* К вопросу о спектре пространственных ляпуновских показателей нелинейной активной среды, описываемой комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау // *Письма в ЖТФ.* 2010. Vol. 36, № 14. С. 19.
33. *Короновский А.А., Трубецков Д.И., and Храмов А.Е.* Методы нелинейной динамики и хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. т. 2. нестационарные и хаотические процессы. М.: Физматлит, 2009.
34. *Трубецков Д.И. and Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. М.: Физматлит, 2003.
35. Роуч. П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
36. *Filatov R.A., Hramov A.E., and Koronovskii A.A.* Chaotic synchronization in coupled spatially extended beam-plasma systems // *Phys. Lett. A.* 2006. Vol. 358. P. 301.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*4.10.2010
9.03.2011*

**ON THE PROBLEM OF COMPUTATION
OF THE SPECTRUM OF SPATIAL LYAPUNOV EXPONENTS
FOR THE SPATIALLY EXTENDED BEAM PLASMA SYSTEMS**

A.A. Koronovskii, V.A. Maximenko, O.I. Moskalenko, A.E. Hramov

The behavior of the Pierce diode has been considered from the point of view of the spatial Lyapunov exponents. The method of calculation of the spectrum of the spatial Lyapunov exponents for the electron spatial extended systems has been proposed. The autonomous dynamics of the Pierce diode as well as the behavior of two unidirectionally coupled Pierce diodes when the generalized synchronization is taken place have been considered.

Keywords: Lyapunov exponents, Pierce diode, generalized synchronization, chaotic oscillators, dynamical system.



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж», двухтомной монографии «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009, под редакцией А.А. Короновского, А.А. Кураева, Д.И. Трубецкова и А.Е. Храмова), монографии «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд-во МГУ, 2010, под редакцией С.И. Ильина и Д.И. Трубецкова) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru



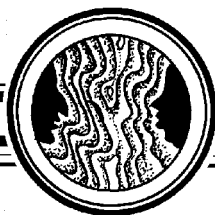
Максименко Владимир Александрович – родился в Аткарске Саратовской области (1989). Студент факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Работает лаборантом в лаборатории №5 ОФНС НИИ ЕН СГУ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: maximenkovl@gmail.com



Москаленко Ольга Игоревна – родилась в Саратове (1984). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета (2006), кандидат физико-математических наук (2008). Доцент кафедры физики открытых систем СГУ, старший научный сотрудник лаборатории физики нелинейных явлений отделения физики нелинейных систем НИИ Естественных наук СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; исследование кооперативных явлений в сетях со сложной топологией; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях. Автор более 20 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru



ВО ГЛАВЕ ДВУХ АКАДЕМИЙ

М.Н. Шапкина

Братья Вавиловы

24 марта 2011 года исполнилось 120 лет со дня рождения Сергея Ивановича Вавилова (1981–1951), выдающегося русского и советского физика XX века, младшего брата Николая Ивановича Вавилова. Оба они стояли во главе двух академий: Николай Иванович возглавил Всесоюзную академию сельскохозяйственных наук имени В.И. Ленина в 1929 году, Сергей Иванович стал президентом Академии наук СССР в июле 1945 года. Оба ученых, по сути, относились к типично российским натурфилософам. Оба были широко образованны, основали большие научные школы, а их труды принесли им мировую известность.

В 1952 году к годовщине смерти С.И. Вавилова вышло фундаментальное издание Академии наук СССР*, где подробно рассматривались труды ученого в области оптики, фотолюминесценции растворов, анализировалась его научная деятельность как воспитателя кадров, пропагандиста и популяризатора научных знаний, главного редактора Большой Советской Энциклопедии. Биографические данные приводились крайне скупо. И, конечно, не было ни слова о том, что президент Академии наук – брат репрессированного академика Н.И. Вавилова.

О них говорили, что старший подаёт пример – младший ему следует. Хорошая протянутая в детстве нить между судьбами со временем стала лишь прочнее. Сергей считал брата во всём значительнее себя. А Николай гордился талантами брата больше, чем своим дарованием. Выражение: «Я-то что! Вот Сергей – это голова!» – слышали от него не раз многие.

Прямая родственная связь обогащалась и обратной. Биолог и растениевод Николай Вавилов никогда не переставал интересоваться проблемами физики. Не без

*К 120-летию юбилею вышел альбом «Сергей Иванович Вавилов»/ Составители А.А. Комар, В.М. Березанская, М.А. Лукичев. Ярославль; Рыбинск: ООО Изд-во «РМП», 2011. 208 с., илл.

© ФИАН, © А.А. Комар, В.М. Березанская, © ООО «Издательство «РМП» – оформление.

влияния младшего брата он загорелся интересом к истории, особенно древней, искусству и литературе. В свою очередь, Сергей Вавилов всегда следил за развитием агрономии, биологии, генетики. Всю жизнь братья были очень близки между собой, проявляя трогательную взаимную заботу.

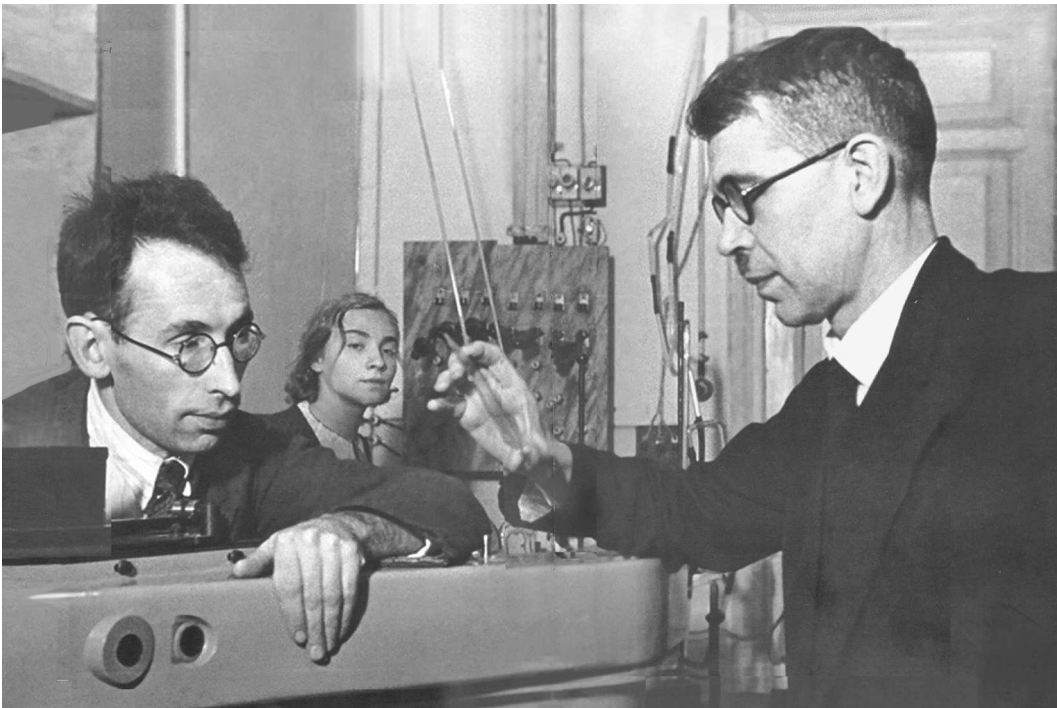
Сергей Иванович Вавилов – научный руководитель Государственного оптического института в Ленинграде (с 1932 г.), основатель и директор Физического института им. П.Н. Лебедева АН СССР в Москве (с 1934 г.), президент Академии наук СССР (с 1945 г.). В книге Юрия Николаевича Вавилова «В долгом поиске», посвященной отцу и дяде, есть такие строки: «Нередко задают вопрос: как смог Сергей Иванович согласиться на санкционированную Сталиным должность президента Академии наук СССР после гибели любимого брата? Как теперь известно, в июле 1945 года дядя узнал, что реальным претендентом на пост президента Академии наук мог стать А.Вышинский, «страшный человек», выступавший на фальсифицированных процессах 1936–1939 годов. Согласившись на должность, Сергей Иванович знал, что эта ноша будет непосильной, особенно в условиях диктатуры Сталина. Дядя фактически подписал себе смертный приговор». Сергей Иванович глубоко переживал трагическую участь любимого брата, неоднократно ходатайствовал о его помиловании, реабилитации, сыграл ключевую роль в спасении семьи репрессированного учёного, оказывая постоянную материальную и моральную поддержку его жене Елене Ивановне Барулиной-Вавиловой и племяннику Юрию. «Память о Сергее Ивановиче и для моей матери и меня остаётся столь же святой, как и память об отце», – всегда повторяет Юрий Николаевич Вавилов.

Сразу после ареста Николая Ивановича в августе 1940 года Сергей Иванович вместе с тогдашним президентом Академии наук СССР В.Л. Комаровым составил письмо Сталину с просьбой освободить репрессированного академика, всемирно известного учёного. О том, что Николай Иванович бесследно «исчез», находясь в научной экспедиции в Западной Украине, стало известно иностранным коллегам, об аресте учёного писала зарубежная пресса. Но Комаров так и не отправил письмо – побоялся. 13 августа 1940 года в своём дневнике С.И. Вавилов, непрестанно думая об аресте брата, задаётся мучающим его вопросом: «За что? Всю жизни неустанная, бешеная работа для родной страны, для народа. Неужели это было не видно и не ясно всем? Да что же ещё можно требовать от людей? Это жестокая ошибка и несправедливость. Тем более, что она хуже смерти. Смерть матери, сестры, теперь ужас, нависший над братом. Думать о чём-нибудь не могу. Мучительно всё это, невыносимо».

26 октября 1943 года: «Получил приглашение в НКВД. Пришла бумага относительно Николая о его смерти в Саратове. Прочёл и расписался. Последняя тоненькая ниточка надежды оборвалась. Надо понять полностью – Николай умер. Опасаюсь, что сойду с ума...»

В 1949 году уже сам, будучи президентом Академии наук СССР, Сергей Иванович вновь пишет письмо на имя Сталина с просьбой реабилитировать академика Н.И. Вавилова. Он категорически отрицает враждебные действия со стороны брата, заявляя, что это клевета. Ответа на это письмо не последовало.

Не дожив нескольких месяцев до своего 60-летия, С.И. Вавилов скоропостижно скончался. Случилось это вскоре после посещения саратовского Воскресенского кладбища, где его брат, умерший в тюрьме 26 января 1943 года от болезней, голода и предельного истощения, был похоронен в общей могиле.



В лаборатории
ГОИ, 1934 г.
Слева - Б.Я.Свешников,
справа - С.И.Вавилов,



С.И.Вавилов,
конец 1940 - х гг.

118



Участники III Всероссийского селекционного съезда в Саратовском университете, июнь 1920 г.
В овале в третьем ряду второй слева - В.Д.Зернов, третий слева - Н.И.Вавилов

Стены аудитории помнят...

При входе в Большую физическую аудиторию третьего учебного корпуса Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского с левой стороны изящной лестницы, ведущей на верхние этажи, можно увидеть мемориальную доску: «В этой аудитории 4 июня 1920 года на III Всероссийском селекционном съезде профессор Саратовского университета Николай Иванович Вавилов выступил с докладом «Закон гомологических рядов в наследственной изменчивости», положившим начало развитию генетики в СССР».

В аудитории, которая сохранила свой торжественный вид со времени постройки здания архитектором К.Л. Мюфке, установлен мраморный бюст академика Николая Ивановича Вавилова – агронома, генетика, географа, организатора сельскохозяйственной и биологической науки.

В ноябре 2012 года будет отмечаться 125-летие великого учёного и гражданина. Звезда Вавилова как учёного возшла именно в Саратове, здесь же, в саратовской тюрьме, его жизнь трагически оборвалась в начале 1943 года.

Летом 1917 года Николай Иванович приезжает в наш город для преподавания на Высших сельскохозяйственных курсах и продолжения своих научных опытов. Ему тридцать лет. В октябре он избирается учёным секретарём вновь созданного в Саратове Юго-Восточного отделения Русского ботанического общества, в следующем году организует отделение Русского географического общества, в состав которого вошли зоологи и географы университета, представители сельскохозяйственной станции, преподаватели Высших сельскохозяйственных курсов, студенты. Годом позже на средства созданного молодым учёным местного отделения Бюро по прикладной ботанике в Нижнее Поволжье организуются экспедиции по изучению и сбору культурных растений.

В сентябре, в год приезда в Саратов, молодой учёный, только что избранный профессором Высших сельскохозяйственных курсов и Саратовского университета, прочёл студентам свою первую, вступительную лекцию, касающуюся основных направлений исследований, которые стоят перед растениеводческой наукой. Основные положения лекции – фактически по переустройству сельского хозяйства страны – станут программой для Н.И. Вавилова и его учеников на долгие годы.

За свою яркую творческую жизнь, полную энергии поиска и открытий, Николай Иванович оставил огромное наследие трудов и идей, составивших славу отечественной сельскохозяйственной и биологической науки. Вавилов рассматривал теоретические исследования как ключ к решению наиболее актуальных задач для развития сельского хозяйства.

Из всех работ замечательного учёного-патриота особое значение для практической селекции имеет закон гомологических рядов в наследственной изменчивости, сформулированный и озвученный Н.И. Вавиловым в СГУ. Уже его современники, присутствовавшие на селекционном съезде в Саратове, поняли необозримые перспективы научного познания и предвидения, которые раскрывал открытый закон. Это крупнейшее обобщение в естествознании, своеобразный «компас» в поисках культур с ценными признаками, необходимыми для определённой хозяйственной зоны.

Закон, открытый нашим великим соотечественником, был и остаётся путеводной нитью исследовательских работ в области биологии и селекции. Недаром участники селекционного съезда в Саратове – первого при советской власти – сравнивали открытие Н.И. Вавилова по значимости с периодическим законом Д.И. Менделеева: в том и другом случае имеются «пустые клетки», но описание того, что в них должно находиться, известно, остаётся только искать. И такие открытия действительно были! В этом глубокое проникновение в сущность формообразовательных процессов. Закон гомологических рядов в наследственной изменчивости по праву считается общебиологической закономерностью для всех живых систем.

Сохранилась фотография (фото на с. 178), сделанная в начале июня 1920 года у третьего корпуса СГУ, где проходил съезд селекционеров, биологов, ботаников, агрономов. Можно лишь вообразить, с каким трудом многие из них добирались на эту встречу в условиях гражданской войны, голода, хозяйственной разрухи! Среди участников представительной встречи были Н.М. Тулайков и А.П. Шехурдин, Г.К. Мейстер и В.С. Богдан, Р.Э. Давид и Е.М. Плачек – с этими именами, за которыми чаще всего стоят трагические судьбы советских генетиков, связана история становления и первые этапы развития отечественной и мировой сельскохозяйственной науки. Организатором и душой съезда был молодой Н.И. Вавилов – профессор агрономического факультета СГУ (кратковременный период сельскохозяйственный институт входил в университет на правах факультета). На фотографии Николай Иванович в центре. И видно, что он устал, но доволен результатами съезда.

Третий селекционный съезд действительно стал историческим. Закон гомологических рядов в наследственной изменчивости, о котором Николай Иванович Вавилов доложил делегатам, определил всю систему взглядов учёного на эволюцию, систематику, географию и экологию растений. Открытый закон помог ему позже прийти к теории центров происхождения и разнообразия культурных растений, а на основе этой теории собрать беспрецедентную коллекцию генов.

Вся последующая деятельность Н.И. Вавилова была логическим развитием и последовательным решением научных вопросов, вытекающих из закона – прежде всего в плане практической деятельности. Разрабатывая крупные теоретические проблемы науки, учёный-подвижник никогда не забывал конечную цель исследования – подъём и эффективное развитие сельского хозяйства родной страны.

*Саратовский государственный
аграрный университет*

Поступила в редакцию 16.02.2011



Шапкина Маргарита Николаевна – окончила Саратовский государственный университет (химический факультет, 1981). Как молодой специалист работала в НИИ химических источников тока (Саратов). В перестроечное время окончила факультет журналистики Высшей комсомольской школы. В журналистике двадцать пять лет, член Союза журналистов России. Работала в молодежной редакции Всесоюзной радиостанции «Юность» (Москва), Приморском теле-радиокомитете (Владивосток), русской редакции Эстонского радио (Таллин). Лауреат журналистских конкурсов «Мой город Саратов» (2001 год), «Последняя миля» (2004) и др. В настоящее время – ведущий специалист управления по воспитательной и социальной работе СГАУ им. Н.И. Вавилова.

410600 Саратов, Театральная площадь, 1
Саратовский государственный аграрный университет им. Н.И. Вавилова
E-mail: ritaplus@mail.ru