



НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ЛАМПЫ ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ: АВТОМОДУЛЯЦИЯ, МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ, КОНТРОЛЬ *

С.П. Кузнецов

Анализируются особенности нелинейной динамики лампы обратной волны в присутствии таких факторов, как потери энергии при распространении волн, поле пространственного заряда, отражения волн на концах системы. Обсуждается динамика лампы обратной волны со связанными системами, в том числе мультистабильность, обусловленная возможностью взаимодействия пучка с медленной или быстрой нормальной волной в связанных линиях передачи. Рассмотрена возможность подавления автомодуляции при введении в лампу обратной волны дополнительной цепи с запаздыванием, в присутствии которой ток пучка зависит от амплитуды выходного сигнала. При написании обзора наряду с материалами, опубликованными в разные годы в литературе, использованы также оригинальные материалы исследований, проведенных в последнее время.

Введение

Лампа обратной волны (ЛОВ) или карсинотрон – это электронный прибор для генерации электромагнитных колебаний СВЧ-диапазона, в котором пучок электронов взаимодействует с электромагнитной волной в замедляющей системе в ситуации, когда фазовая скорость волны близка к скорости электронов, а групповая скорость противоположна по направлению (рис.1) [1–3]. Благодаря первому условию электроны подвергаются эффективному воздействию поля волны: в пучке образуются сгустки, и возникает высокочастотная составляющая тока. Благодаря второму условию энергия испущенного сгустками излучения распространяется навстречу пучку, что обеспечивает наличие в системе внутренней обратной связи и возможность самоподдерживающихся колебаний. В «классическом» варианте генератора обратной волны – ЛОВ типа О – электроны взаимодействуют с продольной составляющей поля волны, претерпевают смещения параллельно оси пучка и отдают волне кинетическую энергию.

*Статья подготовлена на основе лекции, прочитанной на XIII зимней школе-семинаре по СВЧ электронике и радиофизике (Саратов, 31 января – 5 февраля 2006 г.).

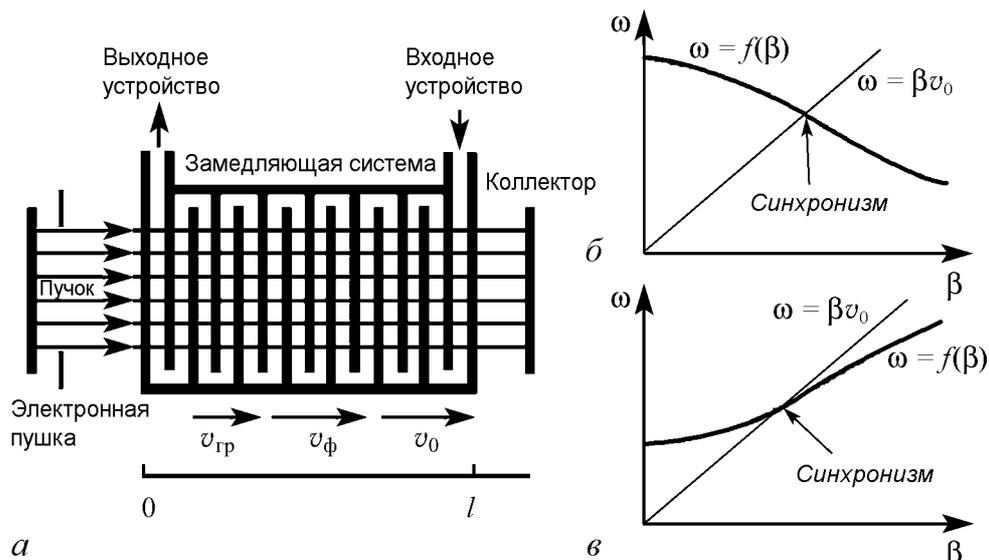


Рис. 1. Схематическое изображение лампы обратной волны типа О в низковольтном варианте (а) и диаграммы волновое число – частота, отвечающие взаимодействию электронного пучка с обратной волной – ЛОВ (б) и прямой волной – ЛБВ (в)

Реализуемый в ЛОВ принцип длительного взаимодействия подразумевает, что длина l велика по сравнению с замедленной длиной волны, то есть $N = l/\lambda_{зам} \gg 1$, а взаимодействие пучка и волны достаточно слабое. В этой ситуации существенно воздействовать на электронный пучок на протяжении всей длины системы и эффективно возбуждаться им могут только спектральные составляющие поля, фазовые скорости которых близки к скорости движения электронов. Эффективное взаимодействие осуществляется в узком интервале частот и волновых чисел вблизи точки (ω_0, β_0) , где пересекаются дисперсионная характеристика замедляющей системы $\omega = \omega(\beta)$ и линия $\omega = \beta v_0$, отвечающая распространению возмущений в электронном пучке. Поэтому взаимодействующую с электронным пучком составляющую поля волны можно представить в виде $E(x, t) = \text{Re} [\tilde{E}(x, t)e^{i\omega_0 t - i\beta_0 x}]$, где $\tilde{E}(x, t)$ – медленно меняющаяся комплексная функция. Высокочастотный ток, возникающий в электронном пучке в результате воздействия на него поля волны, представляется в виде $I(x, t) = \text{Re} [I_1(x, t)e^{i\omega_0(t-x/v_0)} + I_2(x, t)e^{2i\omega_0(t-x/v_0)} + \dots]$, где $I_1(x, t)$, $I_2(x, t) \dots$ – медленные амплитуды первой, второй и следующих гармоник. Однако эффективно возбуждать поле будет только первая гармоника тока, так как она представляет собой волну, находящуюся в синхронизме с волной в замедляющей системе. Поскольку частота генерации примерно соответствует точке пересечения дисперсионных характеристик, а при изменении рабочего напряжения скорость пучка меняется и точка пересечения перемещается, то имеет место электронная перестройка частоты. Это одна из привлекательных особенностей ЛОВ.

Ключевым моментом при построении нестационарной нелинейной теории является формулировка уравнения возбуждения электродинамической системы. В нем должен быть принят во внимание основной нестационарный эффект – распространение огибающей волны с групповой скоростью. Для его учета зависимость $\omega = \omega(\beta)$ аппроксимируем линейной функцией, что на диаграмме отвечает касательной прямой в точке пересечения дисперсионных характеристик (ω_0, β_0) . Наклон этой прямой определяет групповую скорость: $v_{гр} = |d\omega(\beta_0)/d\beta|$. Прочие частотные зави-

симости (непостоянство групповой скорости, зависимость сопротивления связи от частоты) можно не принимать во внимание из-за узости спектра частот и волновых чисел. Как можно показать, в итоге требуемое уравнение получается добавлением члена, ответственного за групповой перенос, в уравнение, принятое в традиционной теории приборов с длительным взаимодействием [1, 3]:

$$\frac{1}{v_{\text{гп}}} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} = -\frac{1}{2} \beta_0^2 K_0 \tilde{I}_1, \quad (1)$$

где K_0 – сопротивление связи замедляющей системы для рабочей пространственной гармоники на частоте ω_0 .

Вторая составляющая самосогласованной теории – это формулировка уравнения движения электронов, которое выводится из второго закона Ньютона

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{e}{m_0} \operatorname{Re} \left[\tilde{E}(x, t) e^{i\omega_0 t - i\beta_0 x} \right]. \quad (2)$$

Обозначим как $t(x, t_0) = t_0 + x/v_0 + \tilde{t}(x, t_0)$ время прибытия в точку x электрона, влетевшего в пространство взаимодействия в момент t_0 . Тогда преобразование производной в левой части уравнения дает

$$d^2 x / dt^2 = (\partial t / \partial x)_{t_0}^{-1} (\partial / \partial x)_{t_0} [(\partial t / \partial x)_{t_0}^{-1}] = -(\partial t / \partial x)_{t_0}^{-3} (\partial^2 t / \partial x^2)_{t_0}.$$

Из-за медленности изменения комплексной амплитуды во времени и малости изменения скорости электронов в процессе взаимодействия мы вправе заменить в правой части $\tilde{E}(x, t(x, t_0))$ на $\tilde{E}(x, t_0 + x/v_0)$ и $(\partial t / \partial x)_{t_0}^{-3}$ на v_0^{-3} , откуда имеем

$$(\partial^2 \tilde{t} / \partial x^2)_{t_0} = -\frac{e}{m v_0^3} \operatorname{Re} \left[\tilde{E}(x, t_0 + x/v_0) e^{i\omega_0(t_0 + \tilde{t}(x, t_0))} \right]. \quad (3)$$

Если отслеживать движение группы электронов с разными фазами влета в пределах одного высокочастотного периода, то уравнения оказываются такими же, как в стационарной нелинейной теории с тем лишь отличием, что амплитуду волны нужно брать в месте пребывания группы частиц. Комплексная амплитуда первой гармоники тока пучка выражается через функцию $t(x, t_0)$ соотношением

$$I_1(x, t) = \frac{1}{\pi} \int I(x, t) e^{-i\omega_0(t-x/v_0)} d(\omega_0 t) = \frac{1}{\pi} \int I_0 e^{-i\omega_0(t_0 + \tilde{t}(x, t_0))} d(\omega_0 t_0), \quad (4)$$

где интегрирование ведется по периоду $2\pi/\omega_0$, и при преобразовании интеграла принято во внимание соотношение $|I(x, t) dt| = |I_0 dt_0|$, вытекающее из закона сохранения заряда.

После приведения к безразмерным переменным и параметрам уравнения и граничные условия принимают следующий вид [4, 5]:

$$\partial^2 \theta / \partial \zeta^2 = -\operatorname{Re} [F \exp(i\theta)], \quad \partial F / \partial \tau - \partial F / \partial \zeta = \tilde{I}, \quad \tilde{I} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0, \quad (5)$$

$$\theta|_{\zeta=0} = \theta_0, \quad \partial \theta / \partial \zeta|_{\zeta=0} = 0, \quad F|_{\zeta=L} = 0, \quad (6)$$

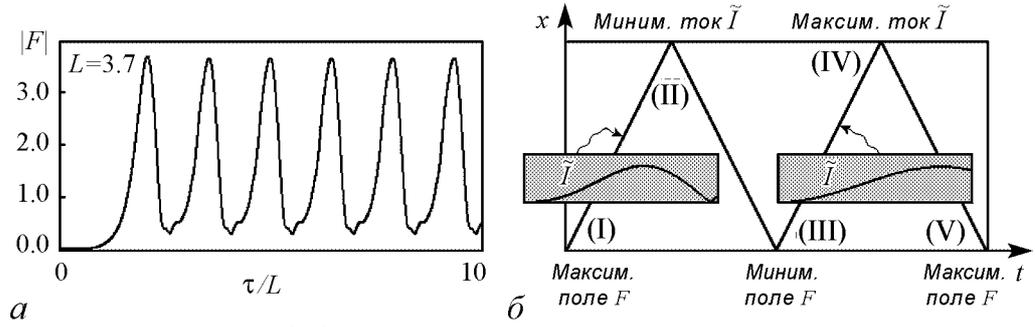


Рис. 2. График зависимости амплитуды выходного сигнала от времени, полученный при численном решении уравнений (4), (5), иллюстрирующий возникновение автомодуляции (а), и пространственно-временная диаграмма, поясняющая механизм этого эффекта (б). Пусть в момент (I) амплитуда высокочастотного поля у пушечного конца системы относительно велика. Это приводит к перегруппировке электронов в пучке вдоль линии $x - v_0 t = \text{const}$: распределение амплитуды высокочастотного тока по длине выглядит, как показано на вставке. В результате амплитуда тока у коллекторного конца в момент (II) относительно мала. Тогда на линии, отвечающей распространению волнового пакета с групповой скоростью $x + v_{гр} t = \text{const}$, амплитуда поля будет меньше, поэтому в момент $t \cong L/v_0 + L/v_{гр}$ амплитуда сигнала на выходе минимальна (III). Меньшее поле более эффективно группирует пучок (см. вставку), поэтому на соответствующей характеристике достигается максимум тока у коллекторного конца (IV). В результате новый максимум поля (V) возникнет через время $T \cong 2(L/v_0 + L/v_{гр})$. Это грубая оценка периода автомодуляции; согласно численным расчетам коэффициент оказывается равным 1.5

где $\zeta = \beta_0 C x$ и $\tau = \omega_0 C (t - x/v_0) (1 + v_0/v_{гр})^{-1}$ – безразмерные независимые переменные – координата и «местное время». Благодаря введению «местного времени», отсчитываемого в каждой точке пространства взаимодействия со сдвигом x/v_0 , в уравнении движения отсутствует производная по τ , что облегчает построение разностной схемы для численного решения системы уравнений. Это удобно еще и в том отношении, что в безразмерной форме уравнений оказывается исключенным параметр отношения групповой скорости и скорости пучка, который фигурирует теперь только в коэффициенте, связывающем размерное и безразмерное время. Величина $\theta(\zeta, \tau, \theta_0)$ характеризует фазу относительно волны для электрона, влетевшего в пространство взаимодействия с фазой θ_0 , а $F(\zeta, \tau) = \tilde{E}/(2\beta_0 U C^2)$ – безразмерную комплексную амплитуду высокочастотного поля волны. Параметр Пирса $C = \sqrt[3]{I_0 K_0 / (4U)}$, где I_0 – постоянная составляющая тока пучка, U – ускоряющее напряжение, предполагается малым.

Как было в свое время установлено, в представленной приведенными уравнениями модели ЛОВ переходный процесс заканчивается установлением стационарного режима генерации только при величинах рабочего тока, не более чем в 3 раза превышающих стартовый ток. При больших токах пучка возникает автомодуляция¹, когда амплитуда сигнала на выходе ЛОВ осциллирует во времени периодическим или непериодическим образом [4–6].

Эти результаты подтверждены экспериментально, как в отношении самого факта возникновения автомодуляции, так и в отношении ее количественных и качественных характеристик (период, спектр) [6, 7]. Известны также результаты экспериментов с релятивистскими ЛОВ, в которых наблюдалась автомодуляция [8, 9].

На рис. 2, а показан пример полученной из численного решения уравнений (4), (5) зависимости амплитуды сигнала на выходе ЛОВ от времени, демонстри-

¹Стационарный режим генерации возникает при значениях параметра безразмерной длины $L = L_{ст} = 1.97327$, а автомодуляция – при $L > L_m \cong 2.937$.

рующей возникновение периодической автомодуляции при $L = 3.7$. На рис. 2, б приводится пространственно-временная диаграмма, иллюстрирующая механизм возникновения автомодуляции. Главную роль в нем играют два момента. Во-первых, это распределенный характер обратной связи и конечная скорость переноса возмущений с пучком и навстречу ему с волной. Во-вторых, это возникновение перегруппировки электронов в режиме сильной нелинейности. Можно посмотреть, как меняется амплитуда высокочастотного тока в пучке, движущемся в достаточно интенсивном поле волны: начиная от входа в пространство взаимодействия, она нарастает, достигает максимума, затем убывает, снова растет, достигает максимума уже меньшей величины, и так далее. Такой характер зависимости связан с формированием электронных сгустков и их рассыпанием из-за различия скоростей электронов, попавших в разные фазы поля.

На рис. 3 показаны несколько кадров «мультифильма», демонстрирующего динамику распределения амплитуды поля (оттенена серым) и первой гармоники высокочастотного тока по длине системы в режиме автомодуляции. В нижней части каждого «кадра» приводится диаграмма, иллюстрирующая распределение продольных смещений частиц в электронном пучке и добавок к скорости, которые отложены по оси ординат. Полосы серого цвета соответствуют тормозящей фазе высокочастотного поля: при попадании электронных сгустков в эти интервалы фаз они отдают волне свою кинетическую энергию.

Одним из принципиально важных достижений стало обнаружение в численных расчетах и в эксперименте генерации хаотических колебаний в ЛОВ при достаточно больших величинах параметра безразмерной длины, то есть при значительном превышении рабочего тока пучка над стартовым [6–10, 10, 12, 14, 16, 18]. Были продемонстрированы, в частности, такие атрибуты хаоса, как сплошной спектр выходного сигнала и неустойчивость по отношению к малому возмущению начальных условий.

Надо подчеркнуть, однако, что основная модель ЛОВ (5), (6) имеет своим содержанием взаимодействие электронного пучка и электромагнитной волны в рафинированном виде. Она не учитывает многих факторов, зачастую оказывающих заметное влияние на работу реальных устройств, таких как потери энергии при распространении волн в замедляющей системе, поле пространственного заряда, отражения волн на концах системы и других. Предметом настоящего обзора будет обсуждение влияния этих эффектов на динамику нерелятивистской ЛОВ. Их учет ведет к определенному усложнению уравнений, в которых помимо нормированной длины L появляются дополнительные параметры, влияющие на режимы динамики системы. Если речь идет об исследовании общего плана, а не просто о расчете характеристик какой-то конкретной лампы, то учет сразу всех факторов вряд ли можно считать разумным подходом. В самом деле, при многопараметрическом исследовании полный перебор вариантов становится проблематичным, а результаты труднообозримыми. Поэтому кажется предпочтительным рассмотреть и составить представление о влиянии различных факторов на динамику ЛОВ по отдельности, каждый раз формулируя уравнения нестационарной нелинейной теории так, чтобы они включали интересующий фактор. В ряде случаев оказывается возможным провести качественное сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными результатами. При написании статьи наряду с материалами, опубликованными в разные годы в литературе, использованы также оригинальные материалы исследований, проведенных в последнее время.

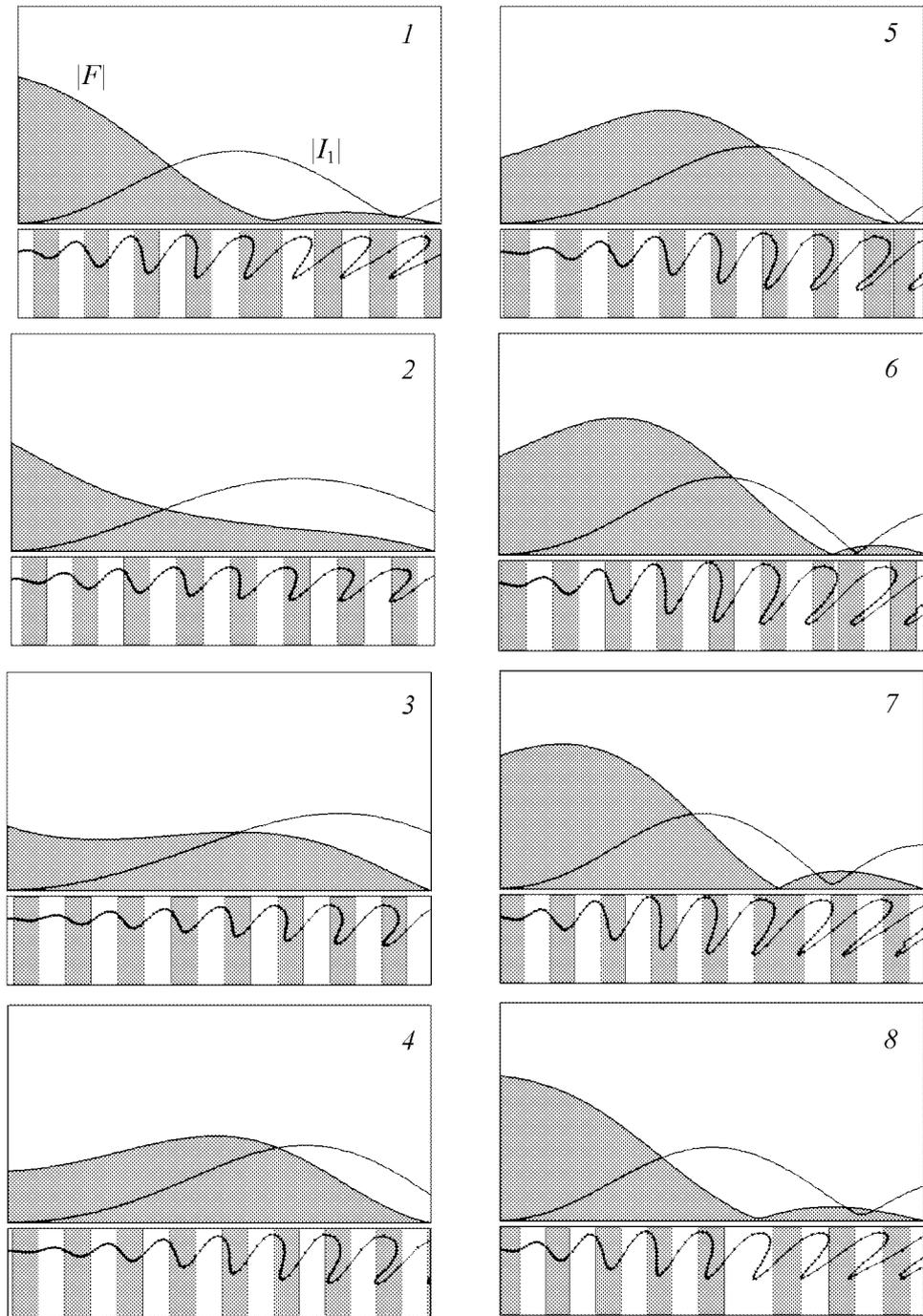


Рис. 3. Периодическая автомодуляция в модели ЛОВ, описываемой уравнениями (5), (6), при $L=3$. На каждом «кадре» верхняя диаграмма показывает распределения амплитуды поля (кривая, затененная серым) и первой гармоники высокочастотного тока в зависимости от безразмерной координаты ζ с шагом по безразмерному «времени» τ , равным $5/24$. Интервал изменения переменной по оси ординат от 0 до 4. Нижняя диаграмма иллюстрирует распределение продольных смещений электронов и добавок к скорости, которые отложены по оси ординат, причем полосы серого цвета соответствуют тормозящей фазе высокочастотного поля

1. Влияние потерь энергии в замедляющей системе

Оставляя уравнение движения электронов и граничные условия такими же, как в основной модели,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = -\operatorname{Re} [F e^{i\theta}], \quad \theta|_{\zeta=0} = \theta_0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad F|_{\zeta=L} = 0, \quad (7)$$

примем во внимание потери энергии при распространении волн в замедляющей системе, что достигается включением дополнительного члена в левую часть уравнения возбуждения:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \zeta} + d \cdot F = \tilde{I}, \quad \tilde{I} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0. \quad (8)$$

Здесь d – нормированный параметр диссипации, который выражается через уровень потерь в децибелах в «холодной» системе D и нормированную длину L : $d = 0.115D/L$.

Численное решение уравнений показывает, что при реалистичных значениях параметра диссипации влияние потерь энергии на динамику системы сводится к сдвигу бифуркационных значений параметра L в сторону увеличения [12]. Иллюстрацией может служить рис. 4, на котором показана карта режимов на плоскости (D, L) по данным численных расчетов. На ней можно видеть области отсутствия колебаний, одночастотной генерации и автомодуляции, обозначенные, соответственно, белым, светло-серым и темно-серым цветом.

Интересные нетривиальные особенности динамики можно обнаружить при больших значениях параметра диссипации. Хотя для реальных приложений эти режимы вряд ли целесообразны, с принципиальной точки зрения они представляют несомненный интерес, оттеняя специфику ЛОВ как распределенной системы.

Известно, что в отсутствие потерь неустойчивость состояния равновесия $F \equiv 0$ в бесконечно длинной системе электронный поток – обратная волна носит абсолютный характер: локализованное возмущение в системе эволюционирует таким образом, что происходит его распространение в пространстве в обе стороны с нарастанием по амплитуде. С увеличением параметра диссипации d наступает момент, когда абсолютная неустойчивость сменяется конвективной: нарастание возмущения при распространении имеет место только в сторону движения пучка. Анализ характера неустойчивости проводится на основании линейной теории. Если положить

$$\theta = \theta_0 + \tilde{\theta}, \quad \tilde{I} \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i\tilde{\theta} e^{-i\theta_0} d\theta_0, \quad \text{то из уравнений (7), (8) получаем}$$

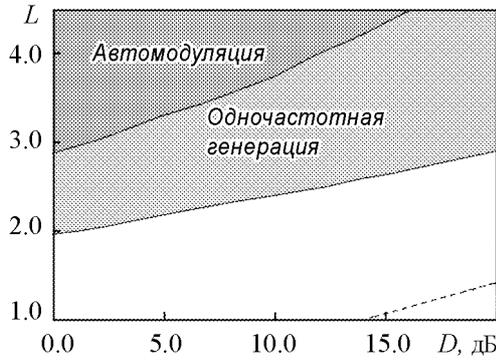


Рис. 4. Области автомодуляции и одночастотной генерации на карте динамических режимов на плоскости параметр потерь – параметр нормированной длины. Штриховая линия в правом нижнем углу – граница области абсолютной неустойчивости в соответствии с формулой (11): ниже этой линии неустойчивость в безграничной системе конвективная

$$\partial^2 \tilde{I} / \partial \zeta^2 = -iF, \quad \partial F / \partial \tau - \partial F / \partial \zeta + dF = \tilde{I}. \quad (9)$$

Подстановка $\tilde{I}, F \sim e^{\delta\zeta + \chi\tau}$ приводит к дисперсионному уравнению

$$\delta^2(\delta - \chi - d) = i. \quad (10)$$

Чтобы найти значение параметра d , отвечающее возникновению абсолютной неустойчивости, наряду с выполнением уравнения (10), следует потребовать обращения в нуль производной от комплексной частоты по комплексному волновому числу и инкремента нарастания колебаний во времени, то есть $d\chi/d\delta = 0$ и $Re\chi = 0$. (См. подобный анализ в работах [11, 20].) В результате решения системы алгебраических уравнений находим²

$$d_{ac} = 3^{3/2} 2^{-5/3} = 1.63669. \quad (11)$$

Интересно рассмотреть динамику системы *вблизи точки смены характера неустойчивости*. Оказывается, что переход, имеющий место при $d = d_{ac}$, можно интерпретировать как изменение направления распространения фронта, разделяющего возбужденную («вниз по потоку») и невозбужденную («вверх по потоку») области системы [12].

На рис. 5 представлены пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие динамику распределения амплитуды поля по длине в ЛОВ с диссипацией вблизи точки перехода от абсолютной к конвективной неустойчивости. Если параметр диссипации d немного больше критической величины d_{ac} , то фронт постепенно смещается вниз по потоку, в направлении движения электронов. С течением времени он покидает в конце концов пространство взаимодействия, а система остается в невозбужденном состоянии (рис. 5, а). Напротив, если параметр d немного меньше критического, то фронт медленно движется навстречу электронному пучку до своей остановки из-за присутствия границы, в итоге система оказывается в возбужденном состоянии (рис. 5, в). При $d = d_{ac}$ в системе асимптотически большой длины фронт может располагаться вдали от краев в произвольном положении; имеет место своего рода нейтральная устойчивость (рис. 5, б).

Переход описанного типа, связанный со сменой характера неустойчивости, специфичен для распределенных систем и обсуждался ранее в контексте химических систем типа реакция – диффузия [24]. Он сочетает свойства жестких и мягких бифуркаций. С одной стороны, переход носит характер скачкообразного изменения состояния при сколь угодно малой вариации параметра, а с другой стороны он обратимый, то есть имеет место при одном и том же значении параметра, независимо от того, движемся ли мы в сторону его увеличения или уменьшения.

Вблизи точки смены характера неустойчивости все процессы развиваются во времени крайне медленно, и состояние системы в каждый момент можно считать квазистационарным. При малой надкритичности $\Delta d = d_{ac} - d$ сформировавшаяся в системе пространственная структура медленно перемещается, практически не изменяя форму, и в конце концов останавливается на определенном расстоянии от левого края системы, тем ближе, чем больше Δd (рис. 6). В отличие от режимов,

²Этот результат впервые был получен в работе Федорченко и Кацаренко [22].

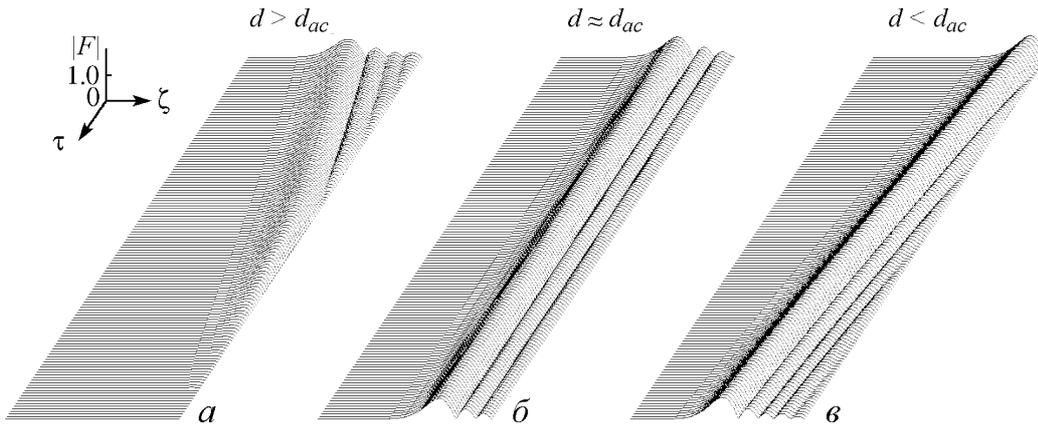


Рис. 5. Диаграммы, иллюстрирующие динамику пространственных структур в ЛОВ вблизи точки перехода от абсолютной к конвективной неустойчивости (а – конвективная неустойчивость, б – точка перехода, в – абсолютная неустойчивость)

возникающих в отсутствие диссипации или при малой ее величине, наличие даже сильной перегруппировки не препятствует стационарному характеру режима. Дело в том, что ответственный за автомодуляцию механизм обратной связи, действие которого подразумевает распространение возмущений с волной навстречу электронному пучку от области, где реализуется перегруппировка, подавлен диссипацией в большей степени, нежели механизм, отвечающий за самовозбуждение на основной рабочей частоте.

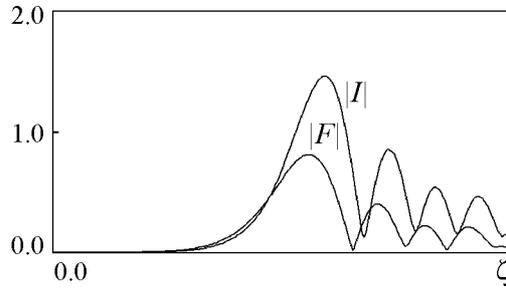


Рис. 6. Распределение амплитуды поля и тока по длине ЛОВ с диссипацией в режиме стационарных одночастотных автоколебаний вблизи точки перехода от абсолютной к конвективной неустойчивости при $d = 1.58$; $L = 20$

2. Влияние пространственного заряда

При выводе уравнений нестационарной нелинейной теории в рамках метода медленно меняющихся амплитуд мы говорили, что при соответствующем выборе независимых переменных ($\tau \propto t - x/v_0$, $\zeta \propto x$) уравнения движения электронов записываются в такой же форме, как и в стационарной теории ЛОВ. То же самое справедливо при учете поля пространственного заряда.

В предположении широкого пучка уравнение движения имеет вид [1, 3, 12]³

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = -Re \left[F e^{i\theta} + \frac{4QC}{ik} \sum_{k=1}^M I_k e^{ik\theta} \right], \quad I_k = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d\theta, \quad (12)$$

³При получении уравнения движения с учетом пространственного заряда обычно вводят предположение (которое, вообще говоря, может вызывать сомнения), что статическая составляющая поля полностью компенсируется ионным фоном. Для специального случая ЛОВ с замедляющей системой, набранной из пластин-решеток, которые использовались в экспериментах [5–10, 20], постоянная составляющая поля практически исключена по другой причине, а именно потому, что все решетки имеют одинаковый статический потенциал.

где поле пространственного заряда представлено рядом Фурье по переменной θ , характеризующей фазу электронов относительно высокочастотного заполнения поля волны, и учтено конечное число членов ряда M .

Здесь использовано традиционное обозначение параметра пространственного заряда, введенное Пирсом, $4QC = (\omega_p/(\omega_0 C))^2$, где ω_p – плазменная частота, ω_0 – частота синхронизма, C – параметр взаимодействия Пирса. Уравнение возбуждения и граничные условия остаются без изменения.

Результаты численного решения уравнений нестационарной нелинейной теории с учетом пространственного заряда обсуждались в работах [5, 12–14, 26, 28].

На рис. 7 показаны графики зависимости амплитуды выходного сигнала от времени, рассчитанные на компьютере при разных значениях нормированной длины. Параметр пространственного заряда задавался таким образом, чтобы оставалась постоянной величина отношения $4QC/L = (2\pi)^{-1}(Q/N)$, что отвечает лампе фиксированной геометрической длины при различных значениях тока.

Как можно видеть из рисунка, при выбранном значении $Q/N = 0.7$ наблюдаемая при увеличении тока (то есть параметра L) последовательность смены динамических режимов отличается от той, которая имела место в пренебрежении пространственным зарядом [4, 5]. Стационарный одночастотный режим генерации устанавливается в интервале нормированной длины от стартового значения $L_{ст} = 2.1359$

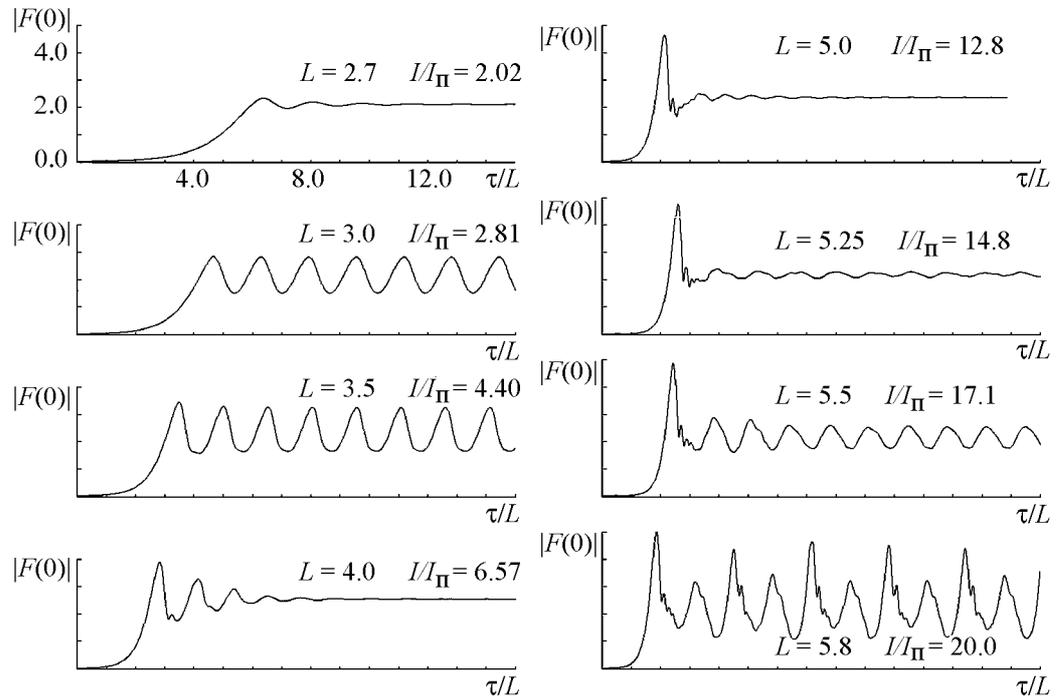


Рис. 7. Графики зависимости амплитуды выходного сигнала ЛОВ от времени, рассчитанные на компьютере при учете пространственного заряда и в отсутствие диссипации ($d = 0$) при различных значениях параметра нормированной длины и фиксированном $Q/N = 0.7$. Указаны значения отношения тока пучка к пусковому (стартовому) I/I_{Π} . Стартовое значение нормированной длины, полученное по линейной теории, составляет $L_{ст} = 2.1359$

примерно до 2.9. Далее возникает режим периодической автомодуляции, затем, при $L \geq 3.7$ – вновь стационарный одночастотный режим, и при $L \geq 5$ – снова автомодуляция.

С физической точки зрения, происходит следующее. Пока рабочий ток относительно мал, незначительно и поле пространственного заряда. При этом благодаря возникновению перегруппировки в пучке и вследствие запаздывающего механизма обратной связи, при увеличении тока с некоторого момента реализуется автомодуляция. Однако с ростом тока, в силу увеличения пространственного заряда, кулоновское расталкивание препятствует сближению электронов и их взаимному обгону, а значит, и возникновению перегруппировки. Тем самым автомодуляция оказывается подавленной. При дальнейшем увеличении тока, что сопровождается возрастанием степени нелинейности процессов в пучке и относительной скорости взаимного движения электронов, автомодуляция в конце концов снова возникает.

На рис. 8, *а* показана карта динамических режимов на плоскости параметров $(Q/N, L)$, построенная по результатам численных расчетов. На ней видно, что граница области автомодуляции образует характерный зигзаг. При значениях Q/N свыше 0.92 область стационарного одночастотного режима простирается до L порядка 5.0. Таким образом, один из возможных способов подавить автомодуляцию, состоит в использовании режимов, отвечающих большим параметрам пространственного заряда. Если дополнительно учесть потери в замедляющей системе, то область по параметру Q/N , где имеет место зигзаг границы автомодуляции, несколько сужается (см. рис. 8, *б*).

В реальных ЛОВ чем больше геометрическая длина, тем при меньших токах достигаются значения параметра L , которые отвечают возникновению тех или иных динамических режимов, например, автомодуляции и хаоса, и тем меньшее влияние оказывает на эти феномены пространственный заряд. Для демонстрации эффектов пространственного заряда в эксперименте имеет смысл, очевидно, изучить и сопоставить динамику нескольких образцов лампы разной геометрической длины.

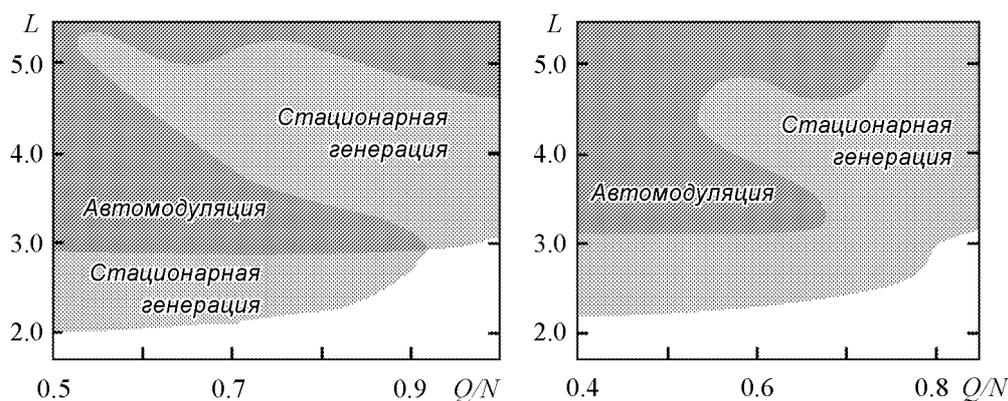


Рис. 8. Карты динамических режимов на плоскости параметров $(Q/N, L)$, построенная по результатам численных расчетов в отсутствие потерь (*а*) и при уровне потерь 4 дБ (*б*)

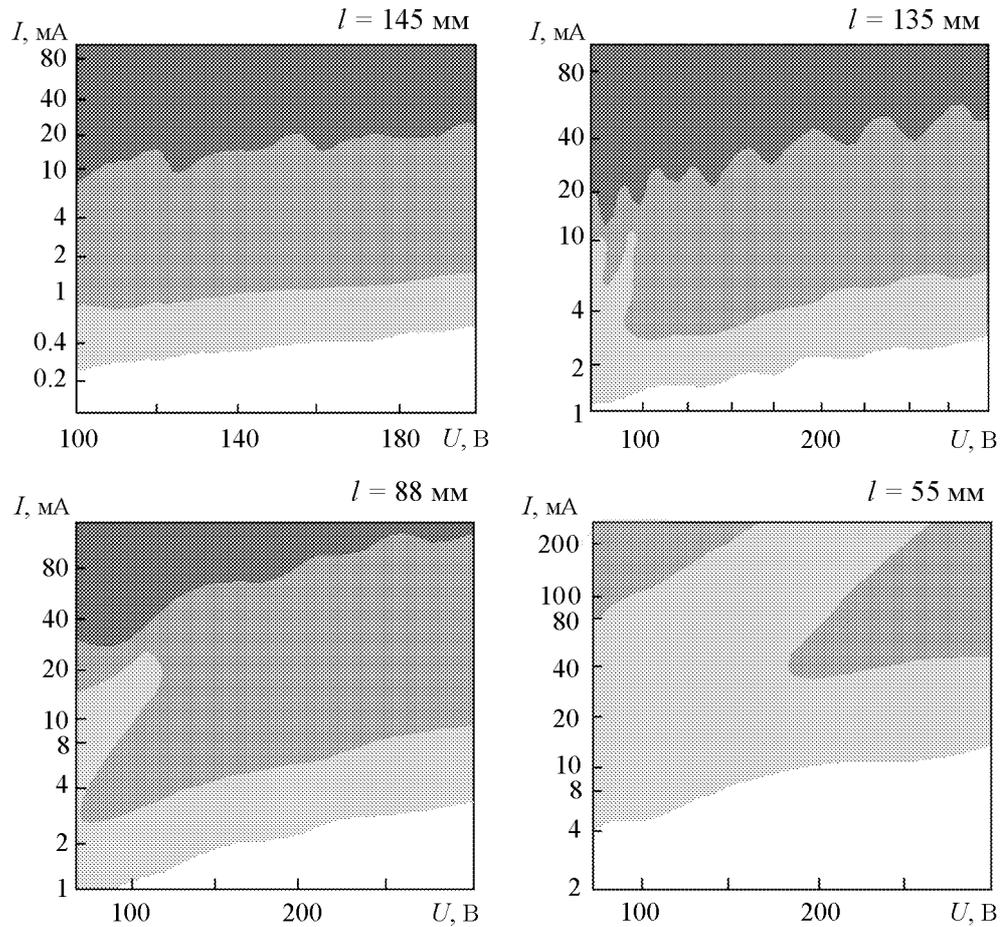


Рис. 9. Карты динамических режимов на плоскости напряжение – ток, полученные в эксперименте для четырех макетов разной геометрической длины [12,26] l : 145 (а); 135 (б); 88 (в); 55 (г)

На рис. 9 показаны карты динамических режимов на плоскости напряжение – ток для четырех макетов последовательно уменьшающейся длины $l=145, 135, 88$ и 55 мм [12,26]. При этом площадь поперечного сечения пучка одна и та же, а уровень потерь составляет около 0.5 дБ/см. Рассматривая приведенные карты, следует иметь в виду, что параметр L увеличивается с ростом тока, тогда как Q/N не зависит от тока и убывает с ростом напряжения. Можно видеть, что по мере уменьшения длины лампы характерная зигзагообразная форма границы автомодуляции появляется сначала в области низких напряжений, а затем смещается в сторону их увеличения.

На рис.10 приведены осциллограммы, показывающие процесс установления колебаний при различных значениях тока пучка в одном из лабораторных макетов ЛОВ в области зигзага границы автомодуляции [26]. Формы огибающей достаточно характерны и находятся в качественном соответствии с наблюдаемыми в численных расчетах.

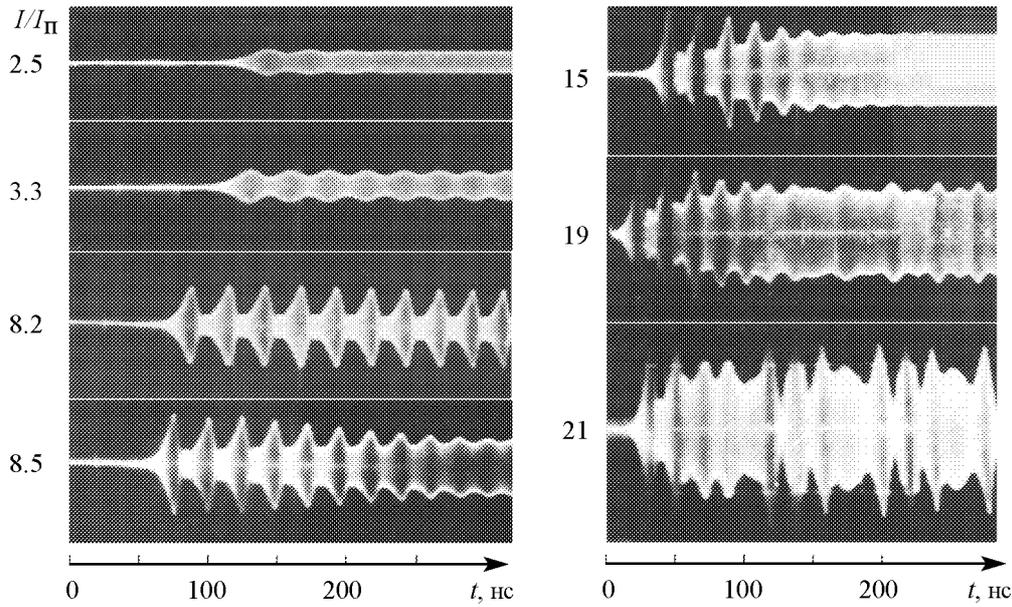


Рис. 10. Фотографии с экрана осциллографа, показывающие процесс установления колебаний при различных значениях тока пучка в лабораторном макете ЛОВ длиной $l=88$ мм при напряжении $U=100$ В в области зигзага границы автомодуляции [26]. Осциллограммы получены в режиме периодического следования прямоугольных импульсов тока, с которыми была синхронизована горизонтальная развертка электронного луча

3. Особенности динамики модели ЛОВ при конечных значениях параметра Пирса

Уравнения основной модели ЛОВ отвечают асимптотической теории, основанной на малости параметра взаимодействия Пирса $C = \sqrt[3]{I_0 K / (4U)}$. Условием $C \ll 1$ обеспечивается, как можно показать, возможность применения метода медленно меняющихся амплитуд. С другой стороны, хорошо известно, что в нерелятивистском случае параметр C определяется по порядку величины КПД лампы. Поскольку для практики представляют интерес устройства с повышенным КПД, важной проблемой является учет конечной величины параметра Пирса, который реально может достигать значений $0.1 \div 0.2$.

Основной эффект, связанный с конечностью параметра Пирса, состоит в том, что возникающее в процессе взаимодействия изменение скорости электронов может быть сравнимым по порядку величины со средней скоростью. В стационарной теории ЛОВ это обстоятельство можно учесть без особых проблем. Для этого следует более аккуратно провести преобразование производных при выводе уравнения движения и принять во внимание, что $(\partial t / \partial x)_{t_0} = 1/v_0 + (\partial \tilde{t} / \partial x)_{t_0} = v_0^{-1}(1 + C \partial \theta / \partial \zeta) = v_0^{-1}(1 + (L/(2\pi N)) \partial \theta / \partial \zeta)$.

В нестационарной теории для последовательного учета заметного изменения скорости электронов пришлось бы, вообще говоря, выйти за рамки метода медленно меняющихся амплитуд, а это влечет принципиальные трудности в попытках обобщения всего подхода. Тем не менее можно указать одну возможность сохранить общую структуру теории без изменения и при конечных значениях параметра

Пирса. Введем дополнительное предположение о том, что *групповая скорость волны по абсолютной величине много меньше скорости пучка*. В этом случае характерные времена всех динамических феноменов будут определяться наиболее медленным процессом – распространением поля в замедляющей системе с групповой скоростью. Пролет электронов вдоль пространства взаимодействия можно тогда считать практически мгновенным, и при этом совершенно неважно, изменилась на сколько-то скорость частиц или нет, лишь бы по порядку величины она оставалась сравнимой с исходной. Используя это предположение, можно представить уравнения ЛОВ без учета диссипации и пространственного заряда в форме [15]

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = - \left(1 + \frac{L}{2\pi N} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right)^3 \operatorname{Re} [F e^{i\theta}], \quad \theta|_{\zeta=0} = \theta_0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \zeta} = - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0, \quad F|_{\zeta=L} = 0, \quad (14)$$

где фигурируют два параметра – нормированная длина L и величина N – отношение длины пространства взаимодействия к замедленной длине волны.

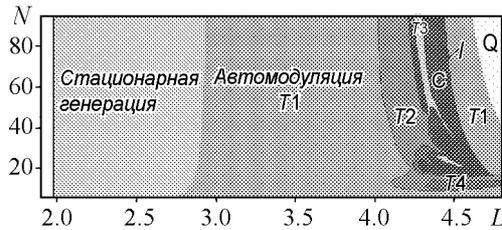


Рис. 11. Карта динамических режимов ЛОВ при учете конечной величины параметра Пирса

отсутствия генерации (белый цвет), одночастотной стационарной генерации (светло-серый), а также автомодуляции основного периода (Т1), удвоенного (Т2), утроенного (Т3), учетверенного (Т4) периода, хаотической (С) и квазипериодической (Q) автомодуляции. Буквой I обозначена граница перехода через перемежаемость. Как можно видеть, в верхней части карты положение границ областей практически перестает зависеть от параметра N – это область применимости основной модели. При уменьшении N , что соответствует увеличению параметра Пирса и КПД лампы, порог автомодуляции понижается. В частности, при $N=5$ автомодуляция возникает при отношении тока I к пусковому (стартовому) (I_n), приблизительно равном 2.7 (вместо 3.3 в асимптотике больших N). Сложной и нетривиальной трансформации подвергается картина в области удвоений периода и перехода к хаосу. (См. правую часть карты, которая была выявлена аккуратными численными расчетами в работе Титова [15].)

Судя по характерной конфигурации областей, которая встречается и в других нелинейных системах при двухпараметрическом анализе, помимо стандартного фейгенбаумовского сценария здесь присутствуют такие феномены, как «перекрестки» («crossroad-area»), складки и сборки (что подразумевает наличие жестких переходов и гистерезиса), трикритические (псевдотрикритические) точки и т.п. [30].

4. Влияние отражений

Важным фактором, оказывающим влияние на динамику реальных ламп обратной волны, во многих случаях оказывается наличие отражений волн на концах замедляющей системы [12, 15–19, 32, 34, 36].

Вообще говоря, на краю системы, куда приходит излученная пучком энергия, только часть ее передается в выходной тракт, а часть трансформируется в отраженные волны, переносящие энергию в противоположную сторону (по направлению движения электронов). Как правило, по фазовой скорости – это волны, не синхронные с пучком. (Исключение могли бы составить ситуации, когда реализуется синхронизм с какими-то пространственными гармониками отраженных волн, но они заведомо редки и нетипичны.) Поэтому отраженные волны распространяются, практически не взаимодействуя с электронным пучком, как в «холодной» системе. Дойдя до противоположного конца лампы, эти волны частично поглощаются, а частично отражаются, причем часть энергии трансформируется снова в рабочую волну. Тем самым возникает дополнительный механизм обратной связи.

На практике чаще всего стремятся избежать отражений, что важно, например, когда требуется реализовать широкополосную перестройку частоты без перепадов уровня выходной мощности и неравномерности характеристики перестройки. В других ситуациях, напротив, может быть полезным целенаправленно использовать отражения, скажем, для повышения уровня мощности и КПД генератора. В этом случае говорят о *резонансной ЛОВ*.

Обычно в формировании дополнительной обратной связи существенным образом участвует только встречная волна того же типа, что и основная рабочая мода. На частоте ω_0 она имеет такие же по величине волновое число и групповую скорость, но противоположное направление распространения. Отмечая рабочую и отраженную волны знаками плюс и минус, соответственно, полагаем:

$$E_+ = \text{Re} \left[\tilde{E}_+(x, t) e^{i\omega_0 t - i\beta_0 x} \right], \quad E_- = \text{Re} \left[\tilde{E}_-(x, t) e^{i\omega_0 t + i\beta_0 x} \right]. \quad (15)$$

Для комплексных амплитуд \tilde{E}_+ и \tilde{E}_- справедливы уравнения

$$v_{\text{гр}}^{-1} \frac{\partial \tilde{E}_+}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{E}_+}{\partial x} = -\frac{1}{2} \beta_0^2 K_0 \tilde{I}_1, \quad (16)$$

$$v_{\text{гр}}^{-1} \frac{\partial \tilde{E}_-}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}_-}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

с граничными условиями на концах замедляющей системы

$$\tilde{E}_-(0, t) = R_0 \tilde{E}_+(0, t), \quad \tilde{E}_+(l, t) = R_l \tilde{E}_-(l, t). \quad (18)$$

Здесь R_0 и R_l – комплексные коэффициенты отражения на левом и правом конце замедляющей системы; их конкретные значения определяются конструкцией вывода энергии и согласующего или входного устройства, соответственно⁴.

⁴Вообще говоря, коэффициенты отражения могут зависеть от частоты. При учете этой зависимости в граничных условиях, записанных для нестационарных уравнений, появились бы не постоянные коэффициенты, а некоторые операторы. Однако, работая в рамках метода медленно меняющихся амплитуд, мы полагаем рабочую полосу частот узкой, $\Delta\omega \sim C\omega_0 \ll \omega_0$, и в пределах этой полосы частотной зависимостью коэффициентов отражения естественно пренебречь.

Пользуясь тем, что общее решение для амплитуды отраженной волны представляется в виде $\tilde{E}_-(x, t) = f(x - v_{\text{гп}}t)$, где f – произвольная функция, можно эту переменную исключить из рассмотрения, оставив лишь уравнение для рабочей волны и граничное условие с запаздыванием:

$$v_{\text{гп}}^{-1} \frac{\partial \tilde{E}_+}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{E}_+}{\partial x} = -\frac{1}{2} \beta_0^2 K_0 \tilde{I}_1, \quad \tilde{E}_+(l, t) = \rho e^{i\varphi} \tilde{E}_+(0, t - l/v_{\text{гп}}). \quad (19)$$

Здесь ρ и φ – модуль и фаза произведения комплексных коэффициентов отражения, $R_0 R_l = \rho e^{i\varphi}$. Тогда при переходе к безразмерным переменным, принятым в нестационарной нелинейной теории ЛОВ, уравнения основной модели с учетом отражений представляются в следующем виде [15, 16, 32]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = -\text{Re}[F \exp(i\theta)], \quad \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0, \quad (20)$$

$$\theta|_{\zeta=0} = \theta_0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = 0, \quad F(L, \tau) = \rho e^{i\varphi} F(0, \tau - sL), \quad (21)$$

где $s = (1 - u)/(1 + u)$ – параметр группового рассинхронизма, $u = v_{\text{гп}}/v_0$ – безразмерная групповая скорость.

При наличии отражений на концах, отрезок линии передачи – замедляющая система ЛОВ – превращается в резонатор, обладающий определенным набором собственных мод. Производя подстановку $F \propto e^{\lambda\tau}$ в уравнение для амплитуды поля с исключенным током пучка $\partial F/\partial \tau - \partial F/\partial \zeta = 0$, и учитывая граничные условия, приходим к уравнению $e^{\lambda L} = \rho e^{i\varphi - \lambda s L}$. Разрешая его относительно λ , получаем набор корней $\lambda_r = \gamma_r + i\Omega_r$, отвечающих собственным модам резонатора. Мнимая часть λ_r дает собственную частоту, а действительная – показатель затухания r -й моды:

$$\Omega_r = \frac{\varphi + 2\pi r}{L(1 + s)}, \quad \gamma_r = -\frac{\ln \rho}{L(1 + s)}. \quad (22)$$

Из полученных соотношений видно, что параметр ρ влияет на коэффициент затухания, то есть управляет добротностью резонансных мод. При $\rho \rightarrow 1$ затухание стремится к нулю, при уменьшении же ρ добротность, напротив, падает, и при $\rho \rightarrow 0$ резонансные свойства сходят на нет. Параметр s (или u) отвечает за расстояние по частоте между соседними модами, которые образуют эквидистантный спектр, а параметр φ – за расположение этой «решетки» мод относительно опорной частоты.

Заметим, что в эксперименте вариацию параметра φ можно осуществить посредством изменения управляющего напряжения, даже если сами по себе комплексные коэффициенты отражения практически постоянны в интересующем интервале частот.

Пусть мы выбрали какую-то конкретную точку рабочего диапазона, определили все необходимые величины (сопротивление связи, скорость пучка и групповую скорость волны, коэффициенты отражения и др.), и записали соответствующие уравнения нестационарной нелинейной теории в безразмерной форме (20), (21). Теперь изменим слегка величину ускоряющего напряжения, так чтобы скорость пучка на входе в пространство взаимодействия составила $v'_0 = v_0 + \Delta v$. Не меняя нормировку уравнений, это можно учесть путем модификации граничного условия для производной: $\partial \theta / \partial \zeta|_{\zeta=0} = b = -\Delta v / C v_0$. Произведем, далее, замену $\theta = \hat{\theta} - b(\zeta + \tau)$,

$F = \tilde{F}e^{ib(\zeta+\tau)}$. Тогда уравнения и граничные условия в новых переменных примут в точности ту же форму, что и исходные, но в граничном условии для поля будет фигурировать фазовый параметр $\tilde{\varphi} = \varphi - (1+s)b$.

Если говорить о численном решении нестационарной задачи, то уравнения в приведенной выше форме пригодны *только при условии, что групповая скорость волны меньше или равна скорости электронного пучка*. В противном случае в граничном условии вместо запаздывающего отклика фигурировал бы опережающий, то есть при решении уравнений слой за слоем по времени на каждом шаге требовалось бы учитывать значения выходной амплитуды, которые к этому моменту еще не вычислены. Упомянутое соотношение скоростей выполняется далеко не всегда. Например, оно не имеет места в экспериментах с нерелятивистскими ЛОВ [6,6,7,7,10,12,26], где групповая скорость примерно в полтора раза больше скорости пучка.

Чтобы получить формулировку уравнений, пригодную для произвольных соотношений скорости пучка и групповой скорости, приходится вернуться к независимым переменным, соответствующим реальной координате и времени

$$\tau' = (u^{-1} + 1)\tau + \zeta = \omega_0 Ct, \quad \zeta' = \zeta = \beta_0 Cx. \quad (23)$$

Выполнив замену переменных, представляем уравнения в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau'} + \frac{\partial \theta}{\partial \zeta'} = V, \quad \frac{\partial V}{\partial \tau'} + \frac{\partial V}{\partial \zeta'} = -\text{Re}[F e^{i\theta}], \\ \frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial \tau'} - \frac{\partial F}{\partial \zeta'} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\theta|_{\zeta'=0} = \theta_0, \quad V|_{\zeta'=0} = 0, \quad F(L, \tau') = \rho e^{i\varphi} F(0, \tau' - L/u). \quad (25)$$

В такой постановке задачи процедура численного решения усложняется: разностная схема записывается для системы вещественных уравнений в частных производных, два из которых отвечают уравнению возбуждения (для действительной и мнимой части комплексной амплитуды), а остальные – уравнениям движения для частиц, представляющих фрагмент пучка в интервале фаз от 0 до 2π .

При малых отражениях $\rho \leq 0.3$ процессы установления колебаний и динамические режимы в ЛОВ, в основном, аналогичны тем, которые наблюдаются в отсутствие отражений. На рис. 12 показаны карты динамических режимов для ЛОВ с отражениями при относительно малой величине модуля произведения коэффициентов отражения ($\rho = 0.3$) на плоскости фазовый параметр – нормированная длина, где обозначены области возникновения стационарной одночастотной генерации и автомодуляции. Основной эффект, к которому приводят отражения, состоит в том, что границы областей различных режимов приобретают волнообразный вид. Интересно, что степень возмущения границ растет с увеличением абсолютной величины параметра группового рассинхронизма $s = (1-u)/(1+u)$.

Напомним, что фазовый параметр φ изменяется, в частности, при варьировании скорости пучка на входе в пространство взаимодействия, так что в эксперименте волнообразная форма границ будет иметь место на картах, представленных на плоскости напряжение – ток.

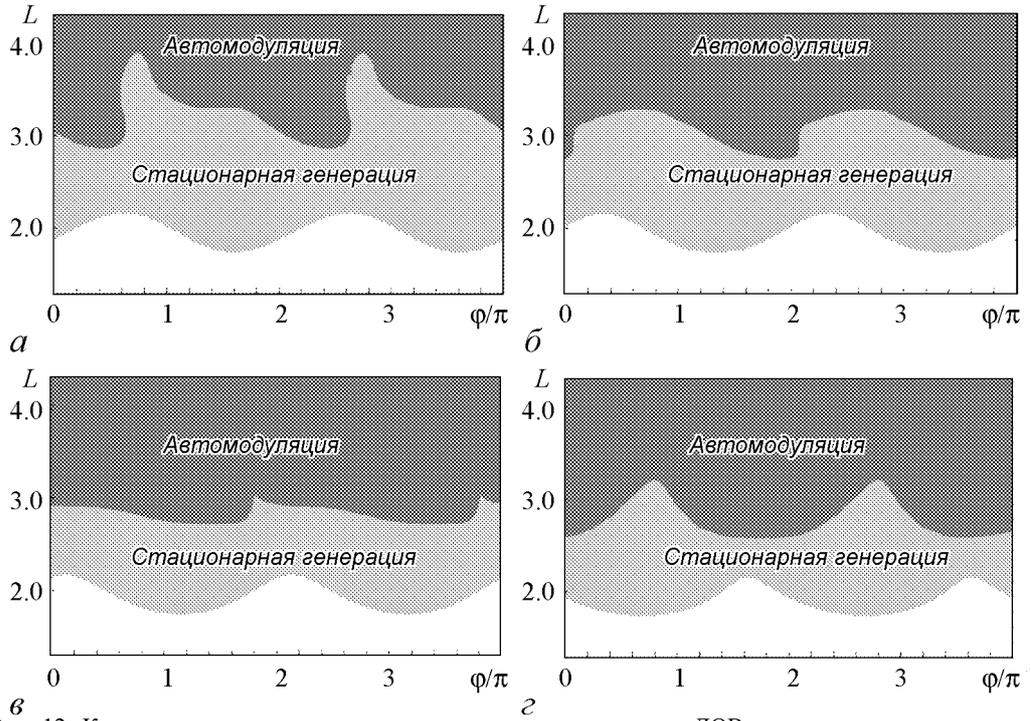


Рис. 12. Карты динамических режимов на плоскости параметров ЛОВ при умеренных отражениях, $\rho = 0.3$ для $u = 3$ (а), $3/2$ (б), 1 (в), $1/3$ (г), то есть для значений параметра группового рассинхронизма $s = -0.5, -0.2, 0$ и 0.5 . По вертикальной оси отложен параметр нормированной длины L , а по горизонтальной – фазовый параметр φ/π . Форма областей повторяется с периодом 2 по параметру φ/π

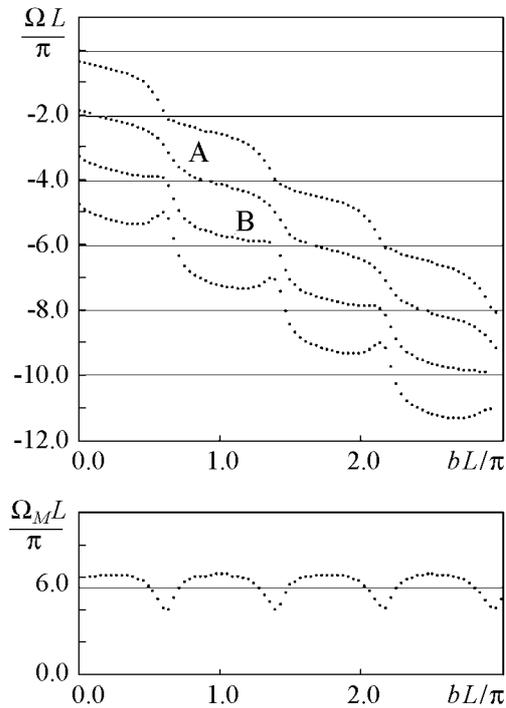


Рис. 13. «Электронная перестройка»: безразмерные частоты основных спектральных составляющих в режиме периодической автомодуляции в зависимости от параметра bL в ЛОВ со слабыми отражениями (вверху) и частота автомодуляции (внизу) по данным компьютерного эксперимента. Основная составляющая обозначена буквой А, главный спутник – буквой В. Значения параметров: $L = 3.1, \rho = 0.2, u = 1$. Горизонтальные линии на верхнем рисунке показывают расположение собственных частот распределенного резонатора. Сплошная линия на нижнем рисунке отвечает частоте автомодуляции в системе без отражений

Рис. 13 иллюстрирует влияние малых отражений ($\rho = 0.2$) на характеристики электронной перестройки частоты в режиме периодической автомодуляции. Результаты получены при численном решении уравнений (23) – (25) для значения нормированной длины $L = 3.1$ и нормированной групповой скорости $u=1$. На верхнем графике представлены безразмерные частоты наиболее интенсивных спектральных составляющих в зависимости от параметра bL , характеризующего скорость пучка на входе. Горизонтальные линии соответствуют частотам собственных мод распределенного резонатора, каковым является замедляющая система ЛОВ в присутствии отражений. Основная составляющая обозначена буквой А, главный спутник – В. Расстояние по вертикали между соседними составляющими в спектре отвечает частоте автомодуляции, график зависимости которой от параметра bL показан внизу. Наблюдаемый характер изменения частоты автомодуляции можно связать с тем, что основная составляющая и главный спутник имеют тенденцию удерживаться по частоте вблизи собственных мод распределенного резонатора, пересекая их при перестройке. Этот эффект становится более выраженным при дальнейшем увеличении отражений.

На рис.14 показана карта динамических режимов для ЛОВ при достаточно сильных отражениях ($\rho = 0.7$), а по периферии на диаграммах (а) – (д) – зависимости амплитуды выходного сигнала от времени в процессе установления колебаний в некоторых характерных точках плоскости параметров. Безразмерная групповая скорость $u = 3/2$, что отвечает параметру группового рассинхронизма $s = -0.5$.

Особенность резонансной ЛОВ, обусловленная наличием двух механизмов обратной связи, состоит в присутствии эффектов их взаимного влияния и конкуренции. Одно из характерных проявлений – возможность возникновения квазипериодических режимов при относительно небольших значениях параметра нормированной длины $L \sim 3.0$ (см. рис. 14, а).

Следует отметить наличие на карте областей жесткого возбуждения, обозначенных чередующимися полосками белого и серого цвета. В этих областях при малой начальной амплитуде колебания затухают, а при большой – устанавливается стационарный одночастотный режим генерации (см. рис. 14, в). Жесткое возбуждение реализуется в тех областях, где скорость пучка несколько превышает величину, отвечающую оптимальному взаимодействию с волновой компонентой одной из мод распределенного резонатора. Если система возбуждена и в ней присутствует поле достаточно большой амплитуды, то электроны, отдающие полю волны свою кинетическую энергию, уменьшают среднюю скорость и оказываются тем самым в области более эффективного взаимодействия с волной. Благодаря этому режим генерации сохраняется. Если же амплитуда невелика, заметного торможения электронов нет, взаимодействие малоэффективно и колебания затухают. Аналогичный физический механизм ответственен за переходы между стационарными режимами малой и большой амплитуды, которые наблюдаются при движении по фазовому параметру в областях стационарной одночастотной генерации и автомодуляции (сравните рис. 14, б и в).

Особенностью переходных процессов в резонансной ЛОВ по сравнению с системой без отражений является их относительно большая длительность. Достаточно характерная картина вблизи порога возникновения автомодуляции состоит в том, что уровень амплитуды постепенно нарастает по мере того как излученная электронами

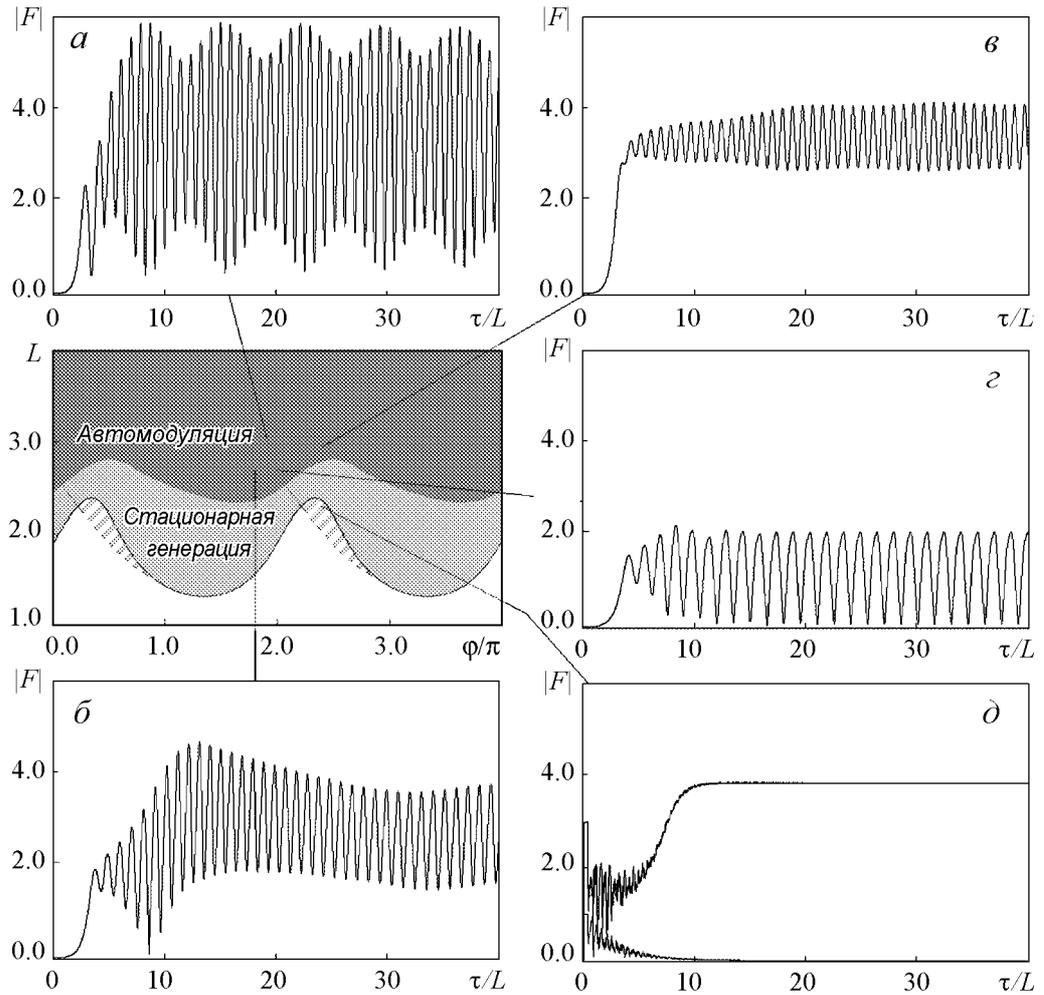


Рис. 14. Карта динамических режимов ЛОВ при сильных отражениях на плоскости нормированная длина L – фазовый параметр φ/π , по периферии – характерные зависимости амплитуды от времени в процессе установления колебаний. Чередующимися полосками белого и серого цвета на плоскости параметров обозначены области жесткого возбуждения. Модуль произведения коэффициентов отражения $\rho = 0.7$, нормированная групповая скорость $u = 3/2$, остальные параметры: (а) $L = 3.05$, $\varphi/\pi = 1.9$ (возникает квазипериодический режим); (б) $L = 2.7$, $\varphi/\pi = 1.8$; (в) $L = 2.95$, $\varphi/\pi = 2.4$; (г) $L = 2.7$, $\varphi/\pi = 2$ (возникает периодическая автомодуляция); (д) $L = 2.3$, $\varphi/\pi = 2.4$ (жесткое возбуждение режима стационарной генерации)

энергия накапливается в резонансной моде. По ходу развития этого процесса сначала возникает слабая модуляция, близкая к синусоидальной, затем она становится более глубокой и принимает характерную сложную форму (см. рис. 14).

Экспериментальному исследованию влияния отражений на динамику ЛОВ был посвящен ряд работ [16–18, 26, 32, 34], в которых демонстрируются описанные выше феномены, а также содержатся дополнительные данные, в том числе эмпирический анализ сценариев возникновения хаоса. Показано, что в присутствии отражений возможен переход к хаосу через удвоения периода и через квазипериодические режимы.

На рис.15 приводятся заимствованные из работы [16] карты динамических режимов, демонстрирующие волнообразную форму границ раздела между областями

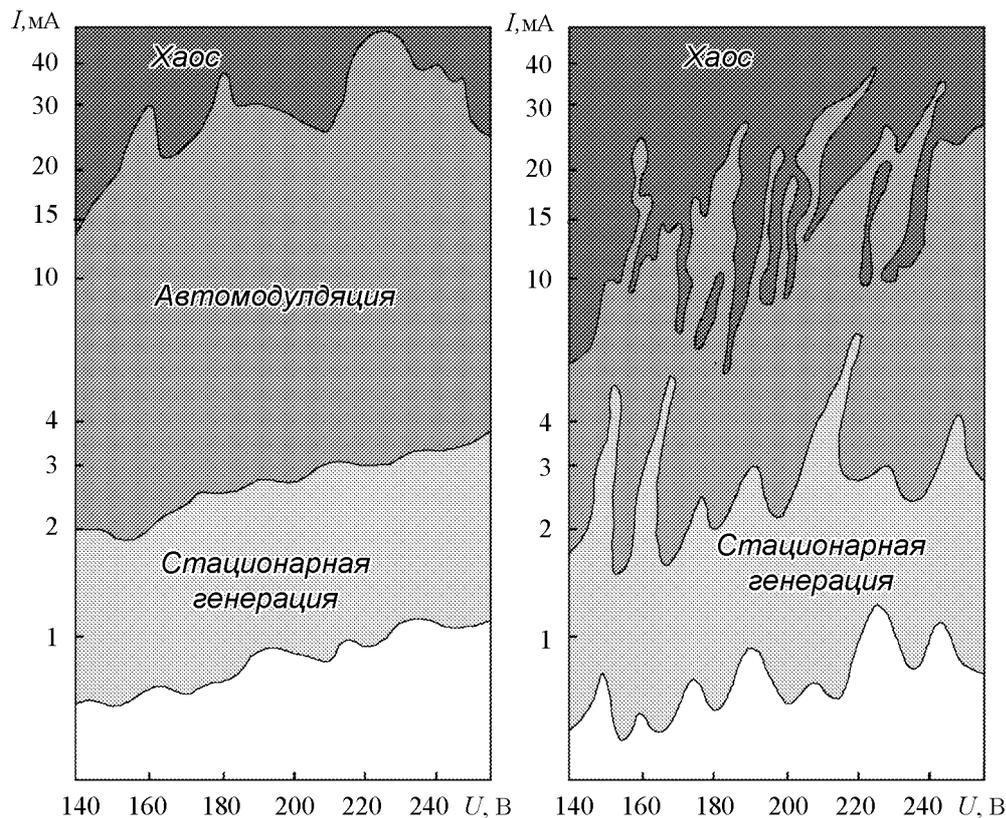


Рис. 15. Карты динамических режимов на плоскости напряжение – ток, полученные для одного из лабораторных макетов ЛОВ, соответственно, при малом ($\rho \leq 0.2$) и при большом ($\rho \sim 0.7 \div 0.8$) уровне отражений волн на концах системы. Из работы [16]

различных режимов. Обе карты получены для одного и того же лабораторного макета ЛОВ, одна при малом, а другая при большом уровне отражений волн на концах системы. Следует обратить внимание, насколько сильнее выражена волнообразная структура границ областей во втором случае. Заметим также, что влиянию отражений сильнее всего подвержена граница перехода от регулярной автомодуляции к развитому хаосу.

5. ЛОВ со связанными линиями передачи

Рассмотрим модификацию лампы обратной волны с электродинамической структурой в виде двух связанных парциальных систем – линий передачи [20, 21, 38, 40]. Пусть одна из линий передачи – это замедляющая система, с которой взаимодействует электронный пучок, а вторая – система, идентичная ей в смысле электродинамических свойств, но без пучка (рис.16).

В отсутствие пучка распространение происходит так, что если вначале волна присутствует только в одной парциальной системе, то из-за наличия связи она возбуждает волну во второй системе, и туда постепенно перекачивается энергия. Затем начинается обратная передача энергии из второй системы в первую и так далее. Процесс в бесконечной системе протекает периодически («биения»). Альтернатив-

ный способ описания распространения волн в связанных линиях передачи использует нормальные волны. Волновое поле представляется как линейная комбинация двух волн, «медленной» и «быстрой» (имеется в виду различие фазовых скоростей

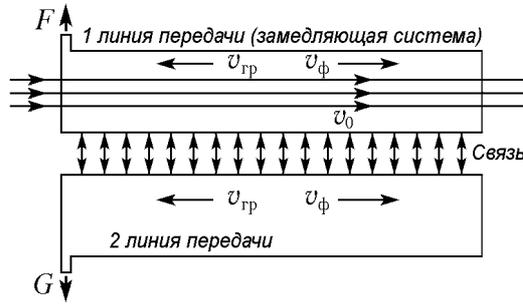


Рис. 16. Схема лампы обратной волны со связанными системами

волн на данной частоте). Каждой из нормальных волн отвечает своя дисперсионная характеристика (рис. 17), причем с ростом параметра связи расстояние по волновому числу между дисперсионными кривыми увеличивается. При распространении волн на фиксированной частоте пространственный период биений будет равен $2\pi/\Delta\beta$, где $\Delta\beta$ – разность волновых чисел обеих нормальных волн.

В случае идентичных связанных линий передачи, который только и обсуждается здесь, «медленная» волна отвечает симметричному, а «быстрая» – антисимметричному распределению волнового поля в двух парциальных системах.

В терминах парциальных систем уравнения нестационарной теории взаимодействия электронного потока с обратными волнами записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = -\text{Re} [F e^{i\theta}], \quad \theta|_{\zeta=0} = \theta_0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \zeta} - i\alpha G = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0, \quad \frac{\partial G}{\partial \tau} - \frac{\partial G}{\partial \zeta} - i\alpha F = 0, \quad (27)$$

$$F(L, \tau) = 0, \quad G(L, \tau) = 0, \quad (28)$$

где через F и G обозначены комплексные амплитуды поля, соответственно, в первой и второй линии передачи; α – коэффициент связи. При проведении расчетов

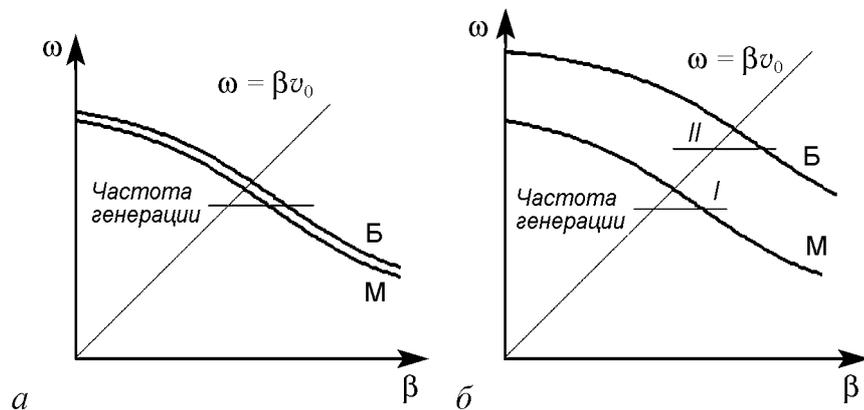


Рис. 17. Дисперсионные характеристики нормальных волн на диаграмме волновое число – частота для связанных линий передачи с обратными волнами в случае малого (а) и большого (б) коэффициента связи. М означает медленную волну, а Б – быструю

в качестве удобного параметра, характеризующего величину связи, целесообразно использовать комбинацию αL , которая определяется собственно электродинамической системой и не зависит от тока пучка.

Когда мы говорим о ЛОВ на связанных линиях передачи, вторую парциальную систему можно рассматривать как *элемент распределенного отбора энергии*. Из-за того, что переносимая волной навстречу пучку энергия излучения перекачивается во вторую систему, интенсивное поле волны более не воздействует на пучок в области его поступления в пространство взаимодействия. Поэтому следует ожидать, что механизм обратной связи, отвечающий за автомодуляцию [4, 5], будет в значительной мере подавлен.

В качестве иллюстрации на рис. 18 приводятся результаты численного решения уравнений нестационарной нелинейной теории ЛОВ со связанными линиями передачи. Значение параметра $L = 4.0$, что в обычной ЛОВ отвечает режиму развитой автомодуляции. Однако в рассматриваемом случае, благодаря тому, что параметр связи $\alpha L = 2.8$ достаточно велик, результатом переходного процесса оказывается установление стационарного одночастотного режима генерации. Из диаграммы, иллюстрирующей распределение амплитуды тока по длине лампы и амплитуд поля в двух парциальных системах, можно видеть, что в данном режиме имеет место развитая в значительной степени перегруппировка, что, однако, не приводит к возбуждению автомодуляции. На выходе лампы (у левого края) амплитуда поля в волноводе без пучка больше, чем в волноводе с пучком. Это согласуется с утверждением, что в основе подавления автомодуляции лежит перекачка энергии из одной парциальной системы в другую.

На рис. 19, *а* показана карта динамических режимов, построенная по результатам численного моделирования динамики ЛОВ со связанными линиями передачи, из которой видно, что в области $\alpha L/\pi$ от 0.6 до 1.0 граница автомодуляции достаточно сильно сдвинута вверх по параметру нормированной длины, а значит и по рабочему току. Именно возможность исключить автомодуляцию в достаточно широком интервале значений рабочих токов послужило главной первоначальной мотивацией исследования данной разновидности ЛОВ. Этот эффект наблюдался экспериментально [38]. На рис. 19, *б* показана полученная в эксперименте карта режимов спе-

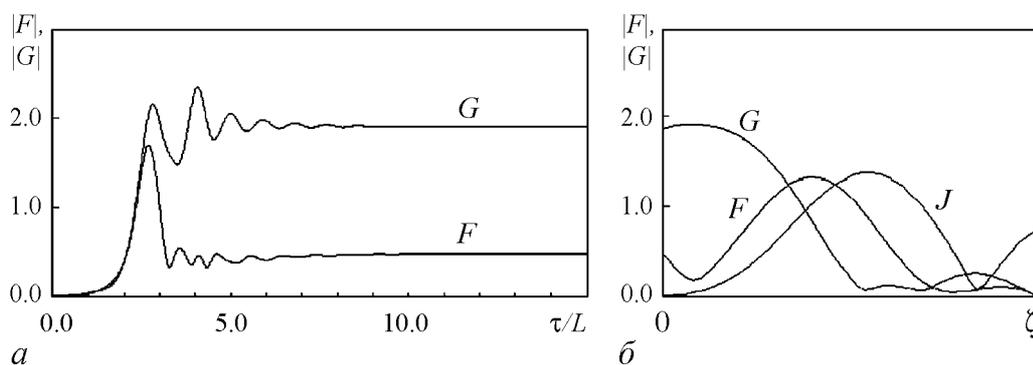


Рис. 18. *а* – зависимость амплитуды поля от времени в ЛОВ со связанными линиями передачи на выходе парциальной системы с пучком (F) и без пучка (G). *б* – распределение амплитуд по длине в стационарном режиме для парциальных волн (F , G) и тока (J). Значения параметров: $L = 4.0$, $\alpha L = 2.8$

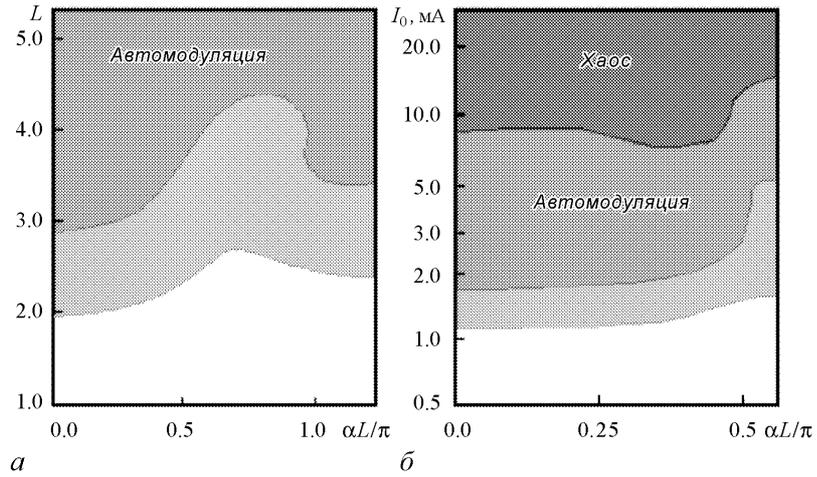


Рис. 19. Карта динамических режимов на плоскости параметр связи – нормированная длина, построенная по результатам численных расчетов (а) и полученная в эксперименте на лабораторном макете ЛОВ со связанными линиями передачи, допускающем плавную регулировку коэффициента связи [38]

циального лабораторного макета ЛОВ со связанными линиями передачи, в котором коэффициент связи можно было плавно изменять. При этом величина коэффициента связи контролировалась по относительному уровню передачи энергии во второй волновод из первого в «холодной» лампе.

Для дальнейшего анализа динамических явлений в ЛОВ со связанными линиями передачи полезно использовать представление волнового поля в виде комбинации нормальных волн. При малых значениях параметра связи дисперсионные характеристики двух нормальных волн – медленной и быстрой располагаются очень близко (рис. 17, а), так что пучок как бы «не различает» одну от другой (за время пролета относительный набег фазы мал по сравнению с π). При сильной связи дисперсионные характеристики проходят достаточно далеко друг от друга (рис. 17, б), так что пучок может взаимодействовать либо с одной, либо с другой нормальной волной в двух непересекающихся частотных интервалах. Следовательно, могут иметь место два разных режима генерации, один на более низкой частоте при синхронизме с медленной волной, а другой на более высокой частоте при синхронизме с быстрой волной. С ростом тока и тот и другой режимы могут претерпевать бифуркации, такие как возникновение автомодуляции и переход к хаосу.

Введем комплексные амплитуды «медленной» и «быстрой» волн

$$F_M = (F + G)e^{i\alpha\zeta}, \quad F_B = (F - G)e^{-i\alpha\zeta} \quad (29)$$

и выполним в уравнениях соответствующую замену переменных. Это приводит к следующей форме уравнений

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} (F_M e^{i\theta - i\alpha\zeta} + F_B e^{i\theta + i\alpha\zeta}), \quad \theta|_{\zeta=0} = \theta_0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial F_M}{\partial \tau} - \frac{\partial F_M}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta + i\alpha\zeta} d\theta_0, \quad \frac{\partial F_B}{\partial \tau} - \frac{\partial F_B}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta - i\alpha\zeta} d\theta_0, \quad (31)$$

$$F_M(L, \tau) = 0, \quad F_B(L, \tau) = 0. \quad (32)$$

На рис. 20 представлен пример сосуществования двух разных режимов автомодуляции ЛОВ со связанными линиями передачи в одной и той же точке пространства параметров ($\alpha L = 5.8$, $L = 3.9$). Вверху показаны графики, отвечающие режиму с доминирующей медленной волной, а внизу – с быстрой. Какой из этих двух режимов возникает, зависит от начальных условий. Представлены зависимости амплитуд нормальных волн от времени на выходном конце системы и спектры сигнала на выходе линии передачи, с которой взаимодействует пучок.

Если считать, что одна из нормальных волн вообще не возбуждена, то в уравнениях (30)-(32) ее амплитуду следует положить нулевой. В результате уравнения сводятся к основной модели (5)-(6), с той лишь разницей, что имеется дополнительный коэффициент $1/2$ в уравнении движения. Нормированная стартовая длина для режимов, связанных с возбуждением медленной или быстрой волны, в этом прибли-

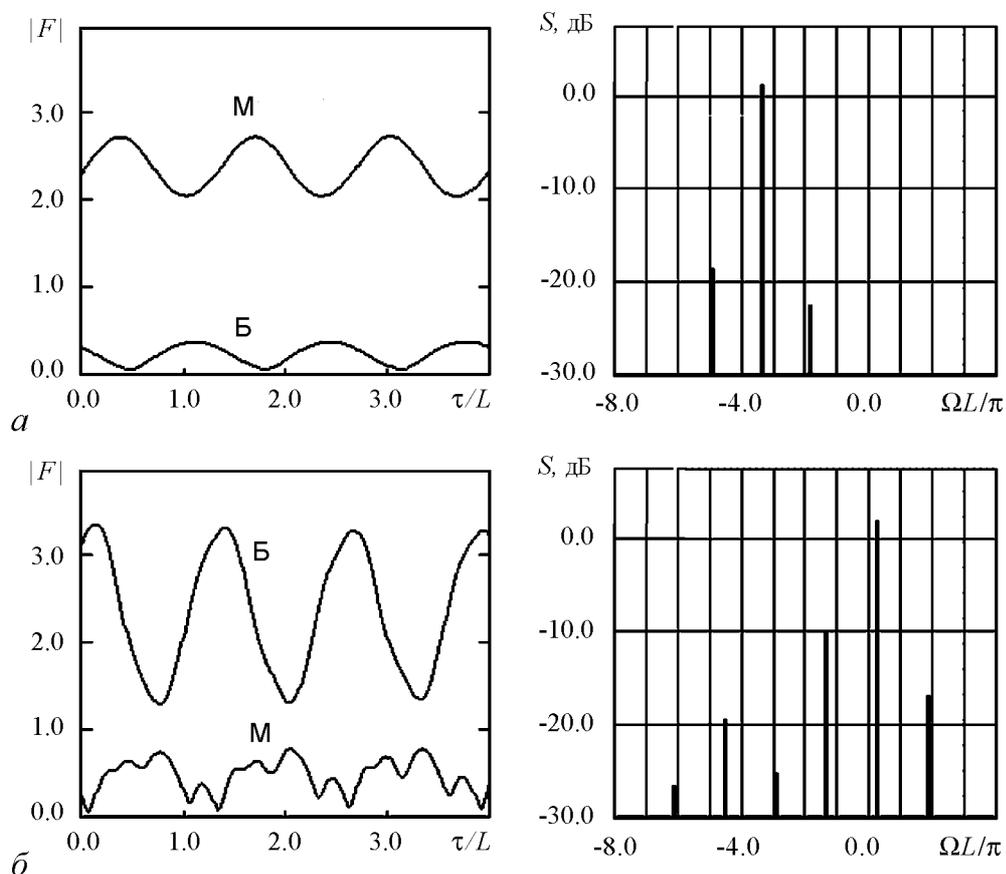


Рис. 20. Два режима автомодуляции, которые сосуществуют в ЛОВ со связанными линиями передачи в одной и той же точке пространства параметров ($\alpha L = 5.8$, $L = 3.9$). Слева показаны зависимости амплитуд медленной (М) и быстрой (Б) нормальных волн от времени на выходном конце системы. Справа приведены спектры выходного сигнала на выходе линии передачи, с которой взаимодействует пучок. В зависимости от начальных условий реализуется режим, в котором доминирует медленная (а) или быстрая (б) нормальная волна. Обратите внимание, что во втором случае спектр смещен в область более высоких частот

жении одна и та же: $L_M \approx L_B \approx 1.973 \sqrt[3]{2} \approx 2.486$. Аккуратные расчеты показывают, что с увеличением параметра связи стартовые значения нормированной длины L_M и L_B действительно стремятся к указанной величине, однако с осцилляциями, происходящими приблизительно в противофазе. Таким образом, в одних интервалах по параметру связи легче возбуждается медленная, а в других – быстрая волна.

Чтобы наглядно представить картину на плоскости параметров, следует мыслить карту динамических режимов состоящей из двух перекрывающихся листов: на одном представлены режимы с превалирующим возбуждением медленной, а на втором – быстрой волны. Конфигурации областей на обоих листах по данным компьютерных расчетов показаны на рис. 21, *a* и *б*, причем области различных режимов обозначены оттенками серого цвета. Заметим, что часть карты, отвечающая малым параметрам связи, выступает как естественное продолжение первого листа.

При движении по параметрам на втором листе и выходе из области, обозначенной серым на рис. 21, *б*, режим генерации на базе быстрой волны теряет устойчивость. Система в результате развития нарастающего во времени возмущения переходит в режим, отвечающий генерации на медленной волне, то есть на лист 21, *a*. Этот процесс переключения иллюстрируется на рис. 22.

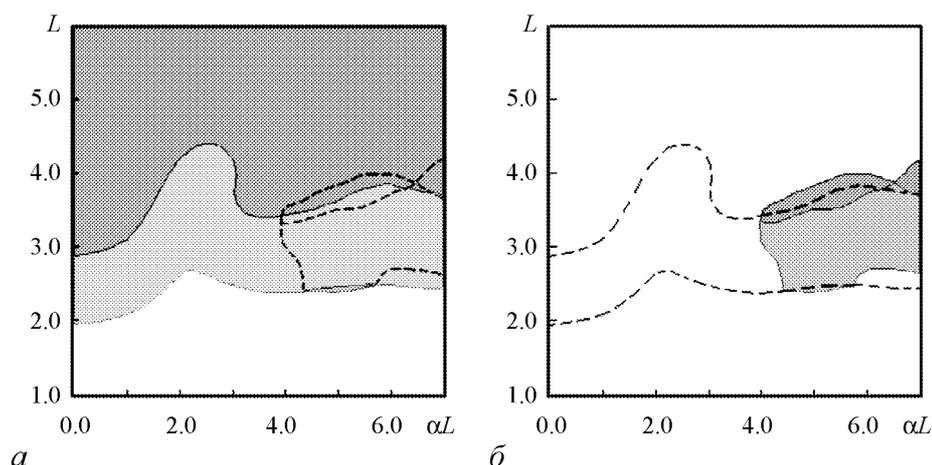


Рис. 21. Карта динамических режимов ЛОВ со связанными линиями передачи, представленная на двух листах, которым в области больших параметров связи αL отвечает генерация преимущественно на медленной (*a*) и быстрой (*б*) нормальной волне. Пунктиром показаны границы областей, отвечающих другому листу

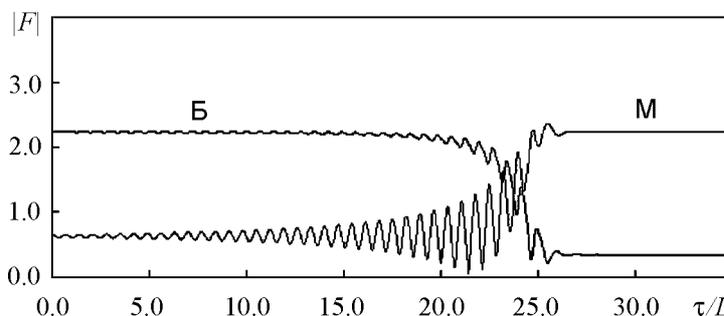


Рис. 22. Развитие неустойчивости состояния генерации на быстрой волне с переходом в режим генерации на медленной волне в ЛОВ со связанными линиями передачи. Параметры: $L = 3.0$, $\alpha L = 4.1$

6. Применение методики контроля хаоса для устранения автомодуляции в ЛОВ

Во многих случаях возникновение автомодуляции в ЛОВ выступает как паразитный эффект, препятствующий реализации одночастотной генерации с относительно высокими уровнями мощности и КПД, которые должны были бы достигаться при увеличении рабочего тока. Основываясь на представлении о ЛОВ как о динамической системе, для устранения автомодуляции можно обратиться к идее стабилизации неустойчивых состояний, получившей известность как управление хаосом («controlling chaos»). Впервые эта концепция была высказана в 1990 г. группой исследователей из Мэрилендского университета [42], показавших, как можно реализовать периодическую динамику вместо хаотического режима в нелинейной системе посредством слабых контролируемых воздействий на какой-либо доступный для регуляции параметр системы. Позднее были предложены и другие варианты управления хаосом для стабилизации неустойчивости или направления фазовой траектории в желаемую область. Один простой и во многих случаях эффективный метод основан на использовании запаздывающей обратной связи [22].

Как указывалось во вступительном разделе, механизм автомодуляции в ЛОВ связан с тем, что максимум амплитуды поля на выходном конце лампы, где встреливается пучок, приводит к появлению минимума излученного поля на выходном конце приблизительно через время $L/v_0 + L/v_{гр}$. Далее по истечении такого же интервала времени вновь формируется максимум, и этот процесс затем периодически повторяется.

Очевидно, воспрепятствовать возникновению автомодуляции можно изменением во времени тока пучка на входе в пространство взаимодействия, с тем чтобы он был больше при появлении максимумов и меньше при появлении минимумов амплитуды поля. На рис. 23 схематически показано, как это сделать путем введения дополнительной цепи контроля, базируясь на идее управления хаосом с использованием запаздывания [44]. Снимаемый с выхода ЛОВ высокочастотный сигнал подвергается детектированию и фильтрации, в результате чего выделяется огибающая сигнала реализующейся или потенциально возможной автомодуляции. Далее сигнал разветвляется и поступает на вход дифференциального усилителя, причем по одной из ветвей он передается с запаздыванием примерно на полпериода автомодуляции. С выхода усилителя сигнал подается как дополнительное напряжение смещения на управляющий электрод (сетку) в электронной пушке и регулирует тем самым величину тока пучка на входе в пространство взаимодействия.

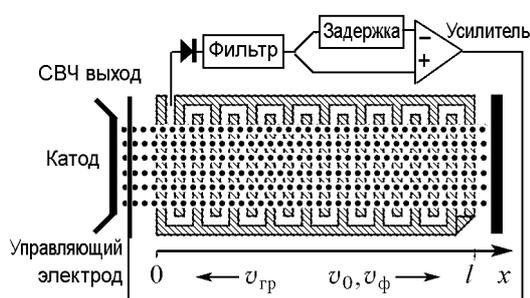


Рис. 23. Схематическое изображение ЛОВ с добавленной схемой подавления автомодуляции на основе метода управления хаосом с использованием запаздывания

Продemonстрируем возможность подавления автомодуляции в численном эксперименте. При этом удобно использовать стандартную нормировку безразмерных переменных и параметров, где в качестве тока пучка в формулах фигурирует средний

постоянный ток I_0 . Изменение тока из-за присутствия цепи контроля учтем в уравнении возбуждения введением множителя $A = A(\tau)$. Уравнения (5), (6) принимают тогда следующий вид

$$\partial^2 \theta / \partial \zeta^2 = -\text{Re} [F \exp(i\theta)], \quad \partial F / \partial \tau - \partial F / \partial \zeta = A(\tau) \tilde{I}, \quad \tilde{I} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0, \quad (33)$$

$$\theta|_{\zeta=0} = \theta_0, \quad \partial \theta / \partial \zeta|_{\zeta=0} = 0, \quad F|_{\zeta=L} = 0, \quad (34)$$

Напомним, что в отсутствие цепи контроля стационарный режим генерации возникает при $L = L_{\text{ст}} = 1.97327$, а автомодуляция – при $L = L_{\text{м}} \approx 2.937$.

Примем, что зависимость тока электронного пучка от напряжения на выходе цепи контроля вблизи среднего значения I_0 дается выражением

$$I(t) = I_0 + g\Delta V, \quad (35)$$

где $\Delta V = V(t) - V(t - \Delta t) \cong \beta_0^{-1} \left(\left| \tilde{E}(0, t) \right| - \left| \tilde{E}(0, t - \Delta t) \right| \right)$, $V(t)$ – амплитуда высокочастотного потенциала на выходе ЛОВ, Δt – время запаздывания, g – постоянный коэффициент, имеющий размерность проводимости. Полагая $A = I/I_0$ и переходя к безразмерным переменным, мы должны написать

$$A(\tau) = 1 + 2gUI_0^{-1}C^2 (|F(0, \tau)| - |F(0, \tau - T)|) = 1 + cl^{-1} (|F(0, \tau)| - |F(0, \tau - T)|), \quad (36)$$

где $c = 2gUC^2l/I_0 = \pi gKN$ и $T = \omega_0 C(1 + v_0/v_{\text{гр}})^{-1}\Delta t$ – безразмерные константы, характеризующие цепь контроля.

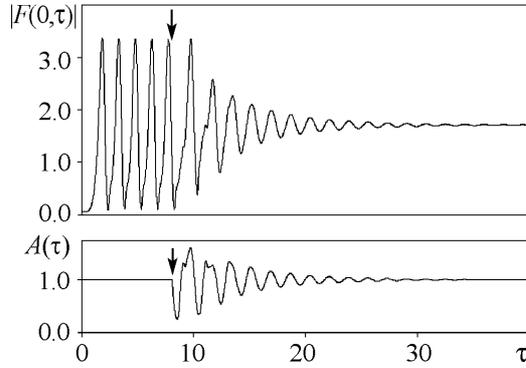


Рис. 24. Зависимость безразмерной амплитуды высокочастотного поля на выходе ЛОВ и нормированного тока пучка от времени при $L = 3.5$. Момент включения контроля показан стрелкой, параметры цепи контроля $c = 0.95$ и $T = 0.8$

На рис. 24 показан пример зависимости амплитуды выходного сигнала от времени при $L = 3.5$. Контроль выключен вначале и включается в момент, отмеченный стрелкой. Хорошо видно, как возникшая автомодуляция затухает, и устанавливается режим стационарной одночастотной генерации: амплитуда сигнала становится постоянной и не зависящей от времени. При этом дополнительные члены в соотношении (36) взаимно уничтожаются и $A \equiv 1$. Это тот же самый режим, который получается в стационарной нелинейной теории, но присутствие цепи контроля делает его устойчивым. Параметры цепи

контроля $c = 0.95$ и $T = 0.8$ подобраны эмпирически с тем, чтобы стационарный режим генерации возникал в наиболее широком диапазоне безразмерной длины L . При указанных параметрах c и T это имеет место для $L_{\text{ст}} < L < 3.7$. Таким образом, по сравнению с обычной ЛОВ удастся поднять порог автомодуляции по l примерно в 1.27 раза, а по величине рабочего тока – в два раза (1.27^3). Безразмерная амплитуда выходного сигнала $|F|$ меняется при этом мало, так что достижимый в режиме

одночастотной генерации КПД увеличивается в 1.3 раза, а мощность – в 2.5 раза. По-видимому, эти показатели можно улучшить, используя более совершенные методы контроля.

Для реализации описанной схемы фильтр должен задерживать высокочастотную составляющую сигнала и пропускать основную частоту автомодуляции (в экспериментах [6, 7, 12, 26] – это частоты порядка 1 ГГц и 50 МГц, соответственно). Далее, время задержки должно быть порядка $L/v_0 + L/v_{гр}$. Наконец, коэффициент передачи цепи контроля должен быть таким, чтобы сигнал на входе, отвечающий по порядку величины амплитуде высокочастотного поля, на выходе приводил к вариации тока порядка среднего тока пучка. С учетом того, что амплитуда высокочастотного напряжения составляет по порядку величины C^2U , где C – малый параметр (например, в экспериментах [6, 7, 12, 26] C приблизительно составляет $0.005 \div 0.1$), а напряжение на управляющем электроде должно быть меньше ускоряющего напряжения U примерно на порядок, наличие усилителя в цепи контроля представляется принципиально необходимым.

Заключение

В статье рассмотрены особенности динамики лампы обратной волны, связанные с такими факторами, как потери энергии при распространении волн в замедляющей системе, поле пространственного заряда, отражения волн на концах системы, конечная величина параметра Пирса, присутствие дополнительной линии передачи, благодаря чему в электродинамической системе имеет место распространение связанных волн. Обсуждается также возможность подавления автомодуляции при введении цепи контроля с запаздыванием, регулирующей ток пучка в зависимости от амплитуды выходного сигнала.

Выявлен интересный тип бифуркации в ЛОВ с диссипацией, характерный для распределенных систем и отвечающий смене характера неустойчивости невозбужденного состояния с абсолютного на конвективный. Бифуркация состоит в изменении направления распространения фронта, разделяющего возбужденную и невозбужденную части системы. Представлены карты режимов для ЛОВ при учете пространственного заряда. Обращается внимание, что присутствие пространственного заряда способствует подавлению автомодуляции. Отмечено, что в ситуации малой групповой скорости справедливо простое обобщение нестационарных нелинейных уравнений ЛОВ на случай не малых значений параметра Пирса. Впервые представлены результаты численных расчетов динамики ЛОВ с отражениями в ситуации, когда групповая скорость волны больше скорости пучка. Отмечено и проиллюстрировано численными расчетами явление мультистабильности в ЛОВ со связанными системами благодаря возможности взаимодействия электронного потока по отдельности с медленной или быстрой волной в линиях передачи.

Представленные результаты могут быть полезны для понимания сложной динамики не только в ЛОВ, но также и в некоторых других устройствах с обратной волной и инерционным механизмом группирования электронного потока (гирорезонансные приборы, лазеры на свободных электронах и др.).

Выражаю благодарность член-корр. РАН, профессору Д.И. Трубецкову за предложение подготовить настоящий обзор, за продуктивную совместную работу, обсуждения и дискуссии на разных этапах исследования нестационарных процессов

в ЛОВ. Я благодарен профессору Б.П. Безручко за экспериментальные исследования, которые в большой степени обеспечили наполнение содержанием и признание результатов теоретических исследований динамики ЛОВ. Я выражаю также признательность доктору физико-математических наук Н.М. Рыскину, сотрудничество с которым в последние годы способствовало возобновлению исследований в данном направлении в нашей научной группе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 03-02-16192 и 06-02-16733.

Библиографический список

1. Электроника ламп с обратной волной / Под ред. В.Н. Шевчика и Д.И. Трубецкого. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975.
2. Трубецков Д.И., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М., Храмов А.Е. Сложная динамика распределенных нелинейных систем сверхвысокочастотной электроники // *Нелинейные волны* 2004 / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова и В.И. Некоркина. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. С. 287.
3. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. Москва: Физматлит, 2003. 496 с.
4. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н. Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1978. Т. 21, № 7. С. 1037.
5. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П. Периодические и стохастические автомодуляционные режимы в электронных генераторах с распределенным взаимодействием // *Релятивистская высокочастотная электроника. Проблемы повышения мощности и частоты излучения*. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 101.
6. Безручко Б.П., Кузнецов С.П. Экспериментальное исследование нелинейных нестационарных процессов в ЛОВО-генераторе // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1978. Т. 21, №7. С. 1053.
7. Безручко Б.П., Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П. Теоретическое и экспериментальное исследование переходных процессов в ЛОВО-генераторе // *Лекции по электронике СВЧ*. Изд-во Саратов. ун-та, 1978. Кн. 5. С. 236.
8. Гинзбург Н.С., Зайцев Н.И., Иляков Е.В., Кулагин И.С., Новожилова Ю.В., Сергеев А.С., Ткаченко А.К. Наблюдение автомодуляционных режимов генерации в мощной ЛОВ // *Письма в ЖТФ*. 1998. Т. 24. № 20. С. 66.
9. Гинзбург Н.С., Зайцев Н.И., Иляков Е.В., Кулагин И.С., Новожилова Ю.В., Сергеев А.С. Теоретическое и экспериментальное исследование автомодуляционных режимов генерации 3-сантиметровой ЛОВ с мегаваттным уровнем мощности // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1999. Т. 7. № 5. С. 60.
10. Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Экспериментальное наблюдение стохастических колебаний в динамической системе электронный пучок – обратная электромагнитная волна // *Письма в ЖЭТФ*. 1979. Т. 29, № 3. С. 180.
11. Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Стохастические автоколебания в системе электронный пучок - обратная волна // *Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность*. Горький, ИПФ АН СССР, 1980. С. 29.

12. *Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Экспериментальное и теоретическое исследование стохастических автоколебаний в лампе обратной волны. Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Изд-во Саратов. ун-та, 1981. Кн. 5. С. 25.
13. *Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Стохастические автоколебания и неустойчивость в лампе обратной волны // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 6. С. 1136.
14. *Ефимов Б.П., Кривицкий Б.Я., Лукин К.А., Мильчо М.В., Ракитянский В.А.* Возбуждение стохастических колебаний в резонансной ЛОВО миллиметрового диапазона // Электроника миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов. Сб. науч. тр. Киев: Наукова думка, 1988. С. 68.
15. *Ракитянский В.А.* Источники колебаний миллиметрового диапазона с универсальными спектральными характеристиками на основе слабрезонансных ЛОВО // Радиофизика и электроника. Сб. науч. тр. Институт радиофизики и электроники НАН Украины. Харьков. 1997. Т. 2, № 1. С. 111.
16. *Рыскин Н.М., Титов В.Н., Трубецков Д.И.* Детали перехода к хаосу в системе электронный поток – обратная электромагнитная волна // ДАН. 1998. Т. 358, № 5. С. 620.
17. *Рыскин Н.М., Титов В.Н.* О сценарии перехода к хаосу в однопараметрической модели лампы обратной волны // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 1. С. 75.
18. *Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Хаос и гиперхаос в лампе обратной волны // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47, № 6. С. 383.
19. *Ginzburg N.S., Zaitsev N.I., Ilyakov E.V., Kulagin I.S., Novozhilova Yu.V., Rozen-thal R.M., and Sergeev A.S.* Observation of chaotic dynamics in a powerful backward-wave oscillator // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. P. 108304.
20. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* О характере неустойчивости в ЛБВ вблизи границы полосы пропускания // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 9. С. 1104.
21. *Кузнецов А.П.* Смена характера неустойчивости в системе двух слабо связанных волн // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 8, № 15. С. 941.
22. *Федорченко А.М., Кацаренко Н.Я.* Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука, 1981. 176 с.
23. *Kuznetsov S.P.* Complex dynamics in backward-wave oscillators // Proc. of International Symposium «Topical problems of nonlinear wave physics». N.Novgorod, Russia, 6-12 Sept. 2003. P. 78.
24. *Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Dewel G., Borckmans P.* Absolute and convective instabilities in a one-dimensional Brusselator flow model // J.Chem.Phys. 1997. Vol. 106. P. 7609.
25. *Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П.* О влиянии пространственного заряда на переходный процесс в релятивистской ЛОВ // IX Всесоюзная конференция по электронике СВЧ. Тезисы докладов. т.1. Вакуумная электроника СВЧ. Киев, 1979. С. 89.
26. *Безручко Б.П.* Экспериментальное исследование нестационарных и стохастических явлений в распределенной автоколебательной системе электронный по-

- ток – обратная электромагнитная волна: Дис... канд. физ.-мат. наук. Саратов: СГУ, 1980.
27. Балакирев В.А., Островский А.О., Ткач Ю.В. О влиянии сил ВЧ пространственного заряда на динамику автомодуляционных процессов в релятивистском карсинотроне // ЖТФ. 1991. Т. 61, № 2. С. 158.
 28. Пегель И.В. Моделирование нестационарных процессов в релятивистской лампе обратной волны методом макрочастиц // Изв. вузов. Физика. 1996. Т. 39, № 12. С. 62.
 29. Титов В.Н. Тонкая структура процессов автомодуляции и перехода к хаосу в распределенной автоколебательной системе электронный поток – обратная электромагнитная волна: Дис... канд. физ.-мат. наук. Саратов: СГУ, 2000.
 30. Кузнецов С.П. Динамический хаос. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
 31. Амиров Р.Ш., Безручко Б.П., Исаев В.А., Четвериков А.П. Влияние отражений на нестационарные процессы в ЛОВО. Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. Кн.2. С. 90.
 32. В.А. Кац. Стохастические автоколебания в электронных распределенных системах на сверхвысоких частотах: Дис... канд. физ.-мат. наук. Саратов: СГУ, 1985.
 33. Астахов С.А., Безручко Б.П., Зборовский А.В., Трубецков Д.И. Исследование сложной динамики системы электронный поток – обратная волна с отражениями (эксперимент и численное моделирование) // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП-98). Материалы международной научно-технической конференции. Саратов: СГТУ, 1998. Т. 1. С. 39.
 34. Астахов С.А., Грибанов А.В. Исследование перехода к хаосу в лампе обратной волны с отражениями // Нелинейные дни в Саратове для молодых. Материалы научной школы-конференции. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1998. С. 13. (<http://www.astakhov.newmail.ru/papers/youth.pdf>).
 35. Астахов С.А. Экспериментальное и численное исследование влияния отражений на сложную динамику лампы обратной волны. Дипломная работа. Саратов: СГУ, 1998 (<http://www.astakhov.newmail.ru/papers/msthesis.pdf>).
 36. Рыскин Н.М., Титов В.Н. Автомодуляционные и хаотические режимы генерации в релятивистской лампе обратной волны с отражениями // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 10. С. 860.
 37. Levush B., Antonsen T.M., Bromborsky A., Lou W.R., Carmel Y. Theory of relativistic backward wave oscillator with end reflections // IEEE Trans. on Plasma Sci. 1992. Vol. 20. № 3. P. 263.
 38. Исаев В.А., Фишер В.Л., Четвериков А.П. Исследование возникновения автомодуляции в ЛОВ со связанными системами // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. 7-я зимняя школа-семинар инженеров. Кн. 2. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. С. 3.
 39. Балакирев В.А., Островский А.О., Ткач Ю.В. К теории автомодуляционной неустойчивости колебаний в связанных карсинотронах // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16, вып. 19. С. 8.
 40. Балакирев В.А., Островский А.О., Ткач Ю.В. К теории автомодуляционных

процессов в системе связанных гофрированных волноводов, возбуждаемых прямолинейными электронными потоками // ЖТФ. 1991. Т. 61, № 9. С. 94.

41. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* О возможности увеличения порога автомодуляции в гирогенераторе со встречной волной и связанными электродинамическими системами // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29, вып. 4. С. 63.
42. *Ott E., Grebogi C., Yorke J.A.* Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64, № 11. С. 1196.
43. *Pyragas K.* Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. 1992. Vol. A170, № 6. P. 421.
44. *Долов А.М., Кузнецов С.П.* Применение методики контроля хаоса для устранения автомодуляции в лампе обратной волны // ЖТФ. 2003. Т. 73, вып. 8. С. 139.

Саратовский филиал ИРЭ РАН

Поступила в редакцию 19.04.2006

NONLINEAR DYNAMICS OF BACKWARD-WAVE TUBE: SELF-MODULATION, MULTI-STABILITY, CONTROL

S.P. Kuznetsov

Features of nonlinear dynamics of backward-wave tube in the presence of such factors as energy dissipation at wave transmission, field of space charge, wave reflection at the system edges are analyzed. Dynamics of the backward-wave tube with coupled systems including multi-stability connected with possibility of beam interaction with low or fast normal wave in the coupled transmission lines is discussed. Possibility of suppression of self-modulation is considered in the backward-wave tube with an additional delay circuit, controlling the current of the electron beam in dependence on the amplitude of output signal. Besides the materials published in different years in literature, the review contains some original materials of recent researches.



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П.Кузнецова защищены шесть кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994-1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».



ГЕНЕРАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ РАДИОИМПУЛЬСОВ С ПОМОЩЬЮ КЛИСТРОННОГО АВТОГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

Б.С. Дмитриев, Ю.Д. Жарков, В.Н. Скороходов, А.А. Бирюков

Изучена возможность использования клистронного автогенератора с запаздывающей обратной связью в качестве источника хаотических радиоимпульсов. Приведены результаты экспериментальных исследований, проведенных на специальной измерительной установке. Показано, что клистронный автогенератор под внешним импульсным воздействием способен переходить в режим развитого хаоса и может генерировать хаотические радиоимпульсы.

Введение

К настоящему времени предложено заметное количество динамических систем различной природы, генерирующих хаотические сигналы. Актуальным стал вопрос о практическом использовании динамического хаоса, в первую очередь в информационных технологиях, электронике и технике связи. Можно отметить, что электроника и радиотехника явились важным экспериментальным полигоном для исследования свойств хаоса. Это объясняется возможностью получения хаотических колебаний с помощью довольно простых по структуре электронных устройств. В последние годы был предложен ряд способов передачи информации, использующих хаотическую динамику, и тем самым созданы предпосылки для появления новых направлений в системах связи. Одним из таких направлений является передача информации с помощью прямохаотических систем связи [1, 2]. В таких системах передачи ввод информации осуществляется непосредственно в хаотический сигнал, генерируемый в радио- или СВЧ-диапазоне. Прямохаотические системы связи имеют ряд преимуществ перед традиционными системами передачи информации - стабильность спектра передаваемых широкополосных хаотических радиоимпульсов при изменении длительности этих радиоимпульсов, помехоустойчивость, потенциально высокая скорость передачи информации и др. [1, 2].

Основным понятием в прямохаотических системах связи является понятие хаотического радиоимпульса, который представляет собой фрагмент прямохаотического сигнала с длительностью, превышающей длительность квазипериода хаотических

*Статья подготовлена на основе лекции, прочитанной на XIII зимней школе-семинаре по СВЧ электронике и радиофизике (Саратов, 31 января – 5 февраля 2006 г.).

огибающей сигнала на экране осциллографа 7; электронный частотомер 8 и второй поляризационный аттенуатор 3, обеспечивающий изменение глубины обратной связи. В качестве источника внешнего воздействия был выбран генератор стандартных сигналов 14, сигнал которого модулировался генератором импульсов 15 и усиливался ЛБВ 13. Система внешнего воздействия через ферритовые вентили 11 и тройник 12 подключалась к линии обратной связи клистрона.

Экспериментальные результаты

Прежде всего необходимо было определить области генерации хаотических импульсов в исследуемой системе. Выбирался такой режим работы автономного клистронного автогенератора, при котором обеспечивалась одночастотная генерация на пороге возникновения регулярной автомодуляции. Как известно, физической причиной возникновения автомодуляции, а затем и хаотических колебаний в клистронном автогенераторе с запаздыванием, как и в других автогенераторах, является наличие крутого падающего участка на амплитудной характеристике, обусловленного перегруппировкой электронов при больших уровнях входного сигнала. Нелинейная перегруппировка электронов и запаздывание реакции резонансной автоколебательной системы на начало действия нелинейности и приводит к возникновению автомодуляции и к дальнейшей хаотизации колебаний. Подача внешнего импульсного сигнала от ЛБВ в указанном режиме вызывает смещение рабочей точки на амплитудной характеристике в область развитого хаоса. Это приводит к возникновению хаотических колебаний, то есть к генерации хаотических радиоимпульсов, только в течение внешнего импульсного воздействия.

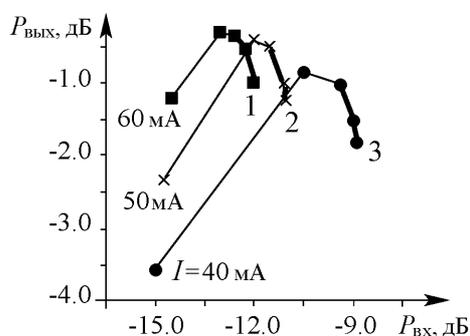


Рис. 2. Экспериментальная зависимость выходной мощности от входной

обратной связи аттенуатором до полного подавления сигнала. Затем затухание уменьшалось, и снималась зависимость выходной мощности от величины затухания. Входная мощность, подаваемая на клистрон после тройника 12, определялась из соотношения

$$P_{вх} = \frac{P_{вых}}{A},$$

где A – затухание в цепи обратной связи. Нормировка $P_{вх}$ и $P_{вых}$ производилась по максимуму выходной мощности ($P_{вх}/P_{вых\ макс}$, $P_{вых}/P_{вых\ макс}$), и строилась зависимость $P_{вых}$ от $P_{вх}$ в двойном логарифмическом масштабе

$$P_{\text{вых, dB}} = 10 \lg \frac{P_{\text{вых}}}{P_{\text{вых макс}}},$$

$$P_{\text{вх, dB}} = 10 \lg \frac{P_{\text{вх}}}{P_{\text{вых макс}}}.$$

Возникновению регулярной автомодуляции в автономном режиме соответствуют точки 1, 2, 3 на этих зависимостях. Выделенными линиями показан возможный диапазон работы автогенератора для получения хаотических радиоимпульсов при внешнем импульсном воздействии. Установлено, что диапазон возникновения хаотических радиоимпульсов увеличивается с ростом тока.

Были сняты зависимости выходной мощности клистрона в неавтономном режиме P от частоты внешнего воздействия f и выделены две области появления хаотических радиоимпульсов (рис. 3). Эксперименты показали, что в случае большой отстройки частоты внешнего воздействия от рабочей частоты клистрона получить хаотические импульсы не представляется возможным, так как практически отсутствует воздействие внешнего сигнала. Так же и с приближением частоты внешнего воздействия к рабочей частоте клистрона наблюдалось исчезновение хаотических импульсов, что, видимо, связано с синхронизацией по частоте двух генераторов. Этим объясняется наличие «окна» между двумя областями хаоса.

Обнаружено, что области развитого хаоса занимают достаточно широкую полосу по частоте при увеличении тока клистрона до 60 мА. Хорошо видно, что эти области заметно расширяются при небольшом увеличении тока. Это связано с особенностями работы клистронного автогенератора, который, как показано, легко переходит в хаотический режим при больших токах и высоких напряжениях.

Эксперименты проводились с импульсами длительностью от 1 до 10 мкс. Исследования не показали принципиальной зависимости работы системы от длительности импульсов при скважности от 2 до 100.

Для практического приложения представляет интерес зависимость выходной мощности автогенератора в автономном режиме от тока пучка клистрона. Для одного из режимов эта зависимость приведена на рис. 4. Хорошо заметно, что мощность практически линейно увеличивается с ростом тока пучка.

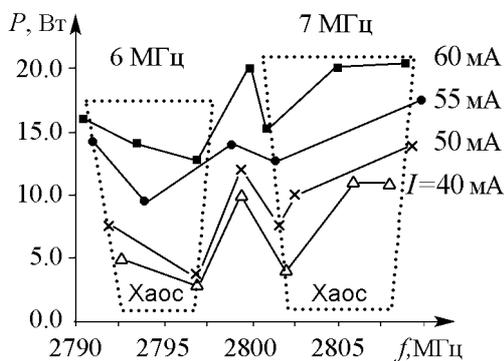


Рис. 3. Экспериментальная зависимость выходной мощности от частоты ГСС

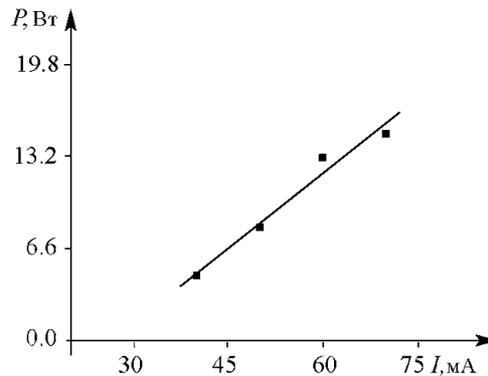


Рис. 4. Экспериментальная зависимость выходной мощности от тока пучка

Представляет интерес зависимость частоты внешнего воздействия, необходимого для возникновения хаотических радиоимпульсов, от затухания A в цепи обратной связи.

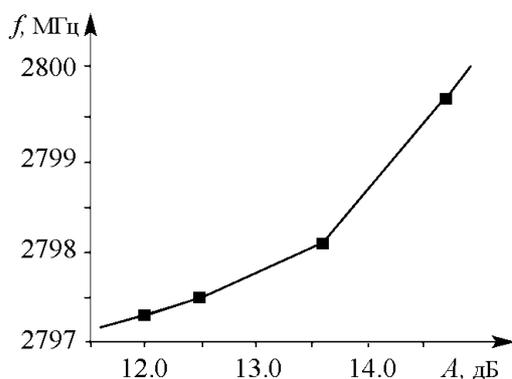


Рис. 5. Экспериментальная зависимость частоты внешнего воздействия от затухания в цепи обратной связи при $I = 36.5$ мА, $U = 2500$ В

На приведенном графике (рис. 5) видно, как необходимо изменять частоту внешнего воздействия в зависимости от затухания для получения хаотических радиоимпульсов в системе. При достаточной отстройке частоты внешнего сигнала от частоты работы автогенератора необходимо уменьшать затухание в цепи обратной связи.

Для иллюстрации наблюдаемых явлений на рис. 6 приведены фотографии фазового портрета, спектра и огибающей сигнала, на которых отчетливо видна сложная динамика колебаний в системе. Огибающая сигнала позволя-

ла дополнительно фиксировать наличие хаоса в системе. На последней фотографии показано заполнение импульсов хаотическим сигналом.

Были проведены прямые эксперименты по передаче и приему в эфире хаотических радиоимпульсов в лабораторных условиях. С этой целью в одном из плеч направленного ответвителя $I2$ устанавливалась антенна для излучения сигнала. Сигнал от приемной антенны подавался на детекторную камеру, усиливался и фиксировался на экране осциллографа.

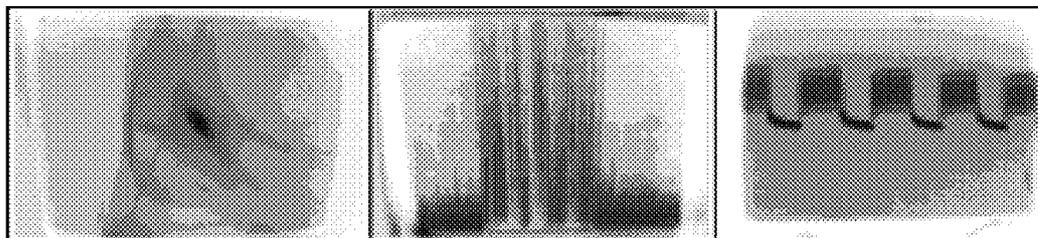


Рис. 6. Фотографии фазового портрета, спектра и огибающей сигнала

Заключение

На основе полученных экспериментальных данных можно утверждать, что клистронный автогенератор под внешним импульсным воздействием способен генерировать хаотические радиоимпульсы, которые можно передавать по коаксиальной линии или в пространстве с помощью различных антенн. Клистронный автогенератор имеет богатую динамику поведения, что делает его привлекательным в экспериментах такого типа.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 06-02-16451) и Программы по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (шифр НШ- 4167.2006.2).

Библиографический список

1. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
2. *Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О.* // Зарубежная радиоэлектроника. 1997. № 10. С. 4.
3. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Клокотов Д.В., Рыскин Н.М.* Экспериментальное исследование сложной динамики в многорезонаторном клистронном автогенераторе с запаздывающей обратной связью // ЖТФ. 2003. Т. 73, вып. 7. С. 105.
4. *Shigaev A. M., Dmitriev B. S., Zharkov Yu. D., Ryskin N.M.* Chaotic dynamics of delayed feedback klystron oscillator and its control by external signal // IEEE Transactions on Electron Devices. 2005. Vol. 52, № 5. P. 790.

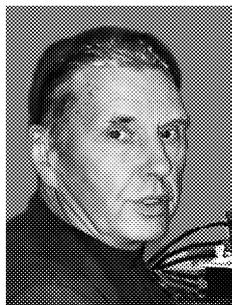
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 30.06.2006

GENERATION OF CHAOTIC RADIO-FREQUENCY PULSES USING KLYSTRON ACTIVE OSCILLATOR WITH DELAYED FEEDBACK

B.S. Dmitriev, Yu.D. Zharkov, V.N. Skorokhodov, A.A. Biryukov

The possibility of usage of klystron active oscillator with delayed feedback as a source of chaotic radio pulses was explored. Experimental results of chaotic radio pulses producing in multicavity active oscillator with delayed feedback by means of the influence of radio-frequency pulses, delivered in the feedback line are presented. Experimental results showed that the initiation of chaotic radio-frequency pulses is possible in the whole zone of amplitude curve (gain characteristic) of autonomous klystron active oscillator.



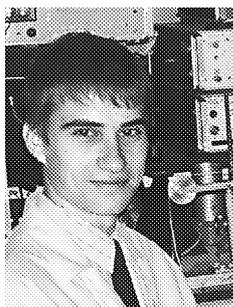
Дмитриев Борис Савельевич – родился в Саратове (1937), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1959), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1967). В настоящее время является профессором кафедры нелинейной физики СГУ. Ведет курсы общей физики (механика, молекулярная физика и термодинамика, электродинамика). Область научных интересов - микроволновая электроника и радиофизика. Опубликовал более 120 научных и научно-методических работ и учебных пособий. E-mail: DmitrievBS@vxfo.sgu.ru



Жарков Юрий Дмитриевич – родился в селе Терса Еланского района Волгоградской области (1931). Окончил физический факультет СГУ (1953). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1961) и доктора (1987) в области радиофизики и электроники СВЧ. В настоящее время – профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – физическое моделирование процессов взаимодействия потоков заряженных частиц с СВЧ-полями, исследование сложной динамики в СВЧ-генераторах с запаздывающей обратной связью. Опубликовал более 100 работ, среди них несколько учебных пособий, 20 изобретений.



Скороходов Валентин Николаевич – родился в 1959 году. Окончил физический факультет СГУ в 1982 году. В настоящее время является заведующим лабораторией кафедры электроники, колебаний и волн. Область научных интересов: нелинейная динамика в СВЧ-электронике. Автор более 15 статей в отечественных и зарубежных журналах.



Бирюков Алексей Алексеевич – родился в 1985 году. Студент 4 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Научные интересы: колебания, волны, сложная динамика в приборах СВЧ-электроники, передача информации в СВЧ-диапазоне. Лауреат фонда некоммерческих программ «Династия», исполнитель гранта РФФИ. Автор 3 статей по данной тематике.



ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЛАНАРНЫХ БРЭГГОВСКИХ СТРУКТУР ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ И УСИЛЕНИЯ КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАЗВИТЫМИ АКТИВНЫМИ СРЕДАМИ

*Н.С. Гинзбург, Н.Ю. Песков, А.С. Сергеев, В.Р. Барышев,
К.Е. Дорфман, В.Ю. Заславский, А.М. Малкин, Р.М. Розенталь*

Приведен обзор новых возможностей генерации и усиления пространственно-когерентного излучения с помощью брэгговских структур планарной геометрии. В частности, рассмотрены схемы черенковских генераторов с двумерной распределенной обратной связью, исследована возможность использования указанного механизма для синхронизации излучения лазерных активных сред (лазеры с двумерной распределенной обратной связью). Обсуждаются электронные усилители на основе планарных брэгговских волноводов.

Введение

Двумерная распределенная обратная связь (РОС) [1-7] была первоначально предложена для синхронизации излучения мощных релятивистских электронных потоков ленточной и трубчатой конфигурации. При этом предполагалось использование тормозного индуцированного излучения электронов, которые совершают осцилляторное движение либо в поле ондулятора (ЛСЭ), либо в однородном магнитном поле (МЦАР). Проведенный к настоящему времени теоретический анализ таких типов автогенераторов показал перспективность использования двумерной РОС в условиях, когда один из поперечных размеров рабочего пространства на несколько порядков превосходит длину волны излучения. Двумерная РОС реализуется с помощью двумерных брэгговских резонаторов планарной и коаксиальной геометрии, моделирование и «холодное» тестирование которой демонстрирует их высокую селективность по двум координатам. В настоящее время проводятся интенсивные экспериментальные исследования планарной (ИЯФ СО РАН и ИПФ РАН) [8] и коаксиальной (Страдклайдский университет, Великобритания и ИПФ РАН) [9] схем ЛСЭ с двумерной РОС.

Вместе с тем не вызывает сомнений, что потенциальные возможности нового механизма организации обратной связи далеко еще не исчерпаны. Основной целью

настоящей работы является расширение сферы приложений данного механизма, в частности, применительно к автогенераторам черенковского типа с прямолинейными электронными пучками, а также к лазерным активным средам. В этой связи следует отметить, что в исходном одномерном варианте РОС была предложена в квантовой электронике [10, 11], где получила широкое распространение в полупроводниковых лазерах. В данной работе будет показана перспективность двумерного, а в принципе, и трехмерного обобщения указанного механизма, результатом которого может явиться синхронизация излучения пространственно-развитых активных сред. Кроме того в данной работе обсуждается возможность увеличения объема пространства взаимодействия путем увеличения расстояния между пластинами, образующими двумерный брэгговский резонатор, при поддержании его селективирующих характеристик. С этой целью предлагается использовать связь распространяющихся и квазикритических мод.

Важно подчеркнуть, что для электронных систем использование планарных брэгговских структур не исчерпывается только генераторными задачами. На основе таких структур могут быть реализованы сверхразмерные волноводы с высокой степенью фильтрации мод. Подобные волноводы могут быть использованы в различных схемах усилителей, в том числе в усилителях с поперечным током. При этом, хотя речь идет об однопериодических брэгговских структурах, подобная задача, по существу, является двумерной и в этой связи рассматривается в заключительном разделе работы.

1. Основные свойства двумерных брэгговских структур планарной геометрии

Двумерный брэгговский резонатор может быть выполнен в виде отрезка планарного волновода длиной l_z , шириной l_x и зазором между пластинами a_0 (рис. 1, *a*). На внутренние стенки волновода нанесена двояко-периодическая гофрировка, трансляционные векторы \vec{h}_{\pm} которой имеют угол φ по отношению друг к другу (рис. 1, *b*),

$$a(x, z) = \frac{a_1}{2} \cos(\bar{h}_x x) \cos(\bar{h}_z z) = \frac{a_1}{4} (\cos(\bar{h}_x x + \bar{h}_z z) + \cos(\bar{h}_x x - \bar{h}_z z)), \quad (1)$$

где a_1 – глубина гофрировки, $\bar{h}_x = 2\pi/d_x$ и $\bar{h}_z = 2\pi/d_z$ – проекции трансляционных векторов решетки \vec{h}_{\pm} (рис. 1, *b*), d_x и d_z – периоды по соответствующим координатам. На такой гофрировке возникает связь и взаимное рассеяние четырех парциальных волн, распространяющихся в двух взаимно-перпендикулярных направлениях,

$$\vec{E} = \text{Re} \left[\left(A_+ \vec{E}_a e^{-ih_a z} + A_- \vec{E}_a e^{ih_a z} + B_+ \vec{E}_b e^{-ih_b x} + B_- \vec{E}_b e^{ih_b x} \right) e^{i\omega t} \right], \quad (2)$$

если волновые числа парциальных волн h_a и h_b удовлетворяют условию брэгговского резонанса

$$h_a \approx \bar{h}_z, \quad h_b \approx \bar{h}_x. \quad (3)$$

В общем случае волны A_{\pm} и B_{\pm} могут отличаться как поперечной (по оси y) структурой поля $\vec{E}_j(y)$ (которая соответствует структуре одной из собственных волн планарного волновода), так и постоянными распространения $h_a \neq h_b$ (см. рис. 1, б). В частном случае перпендикулярных друг к другу трансляционных векторов решетки ($\varphi = 90^\circ$, $\vec{h}_x = \vec{h}_z$) все четыре парциальные волны должны иметь одинаковое число вариаций поля вдоль координаты y и равные волновые числа $h_a = h_b = h$. Условие брэгговского резонанса (3) в этом случае принимает вид

$$h \approx \bar{h}, \quad (3a)$$

где $\bar{h} = \bar{h}_{x,z} = \bar{h}_{\pm}/\sqrt{2}$.

В рамках приближения геометрической оптики при больших параметрах Френеля $l_x^2/\lambda_z \gg 1$, $l_z^2/\lambda_x \gg 1$, взаимное рассеяние парциальных волн на двумерной брэгговской решетке может быть описано уравнениями связанных волн [2, 3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{\pm}}{\partial z} \mp i\delta A_{\pm} \pm i\alpha(B_{+} + B_{-}) &= 0, \\ \frac{\partial B_{\pm}}{\partial x} \mp i\delta B_{\pm} \pm i\alpha(A_{+} + A_{-}) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\delta = h - \bar{h}$ – отстройка от брэгговского резонанса (3a); $A_{\pm}(x, z)$, $B_{\pm}(x, z)$ – медленно меняющиеся амплитуды. В случае рассеяния волн низшего (ТЕМ) типа коэффициент связи на синфазной двумерной синусоидальной гофрировке равен $\alpha = a_1 \bar{h}/8a_0$.

Представляя решение линейной системы уравнений в виде $\sim e^{i\Lambda_x x} e^{i\Lambda_z z}$, приходим к дисперсионному уравнению для нормальных волн в безграничной двумерной брэгговской структуре

$$(\delta^2 - \Lambda_x^2)(\delta^2 - \Lambda_z^2) - 4\alpha^2 \delta^2 = 0. \quad (5)$$

На рис. 2 показаны дисперсионные поверхности в области $\delta > 0$ (при $\delta < 0$ указанные поверхности являются зеркальным отображением представленных на рисунке). Дисперсионные поверхности имеют два листа. Лист II пересекает вертикальную ось в точке $\delta = 2\alpha$ (имеется также зеркальное отражение в точке $\delta = -2\alpha$). В этих точках располагаются экстремумы функции $\delta(\Lambda_x, \Lambda_z)$, соответствующие минимуму групповой скорости волн. Как будет показано ниже, в случае ограниченных структур частоты одного из семейств собственных мод системы лежат в окрестности указанных экстремумов $\delta = \pm 2\alpha$. Данное семейство мод, по существу, аналогично модам

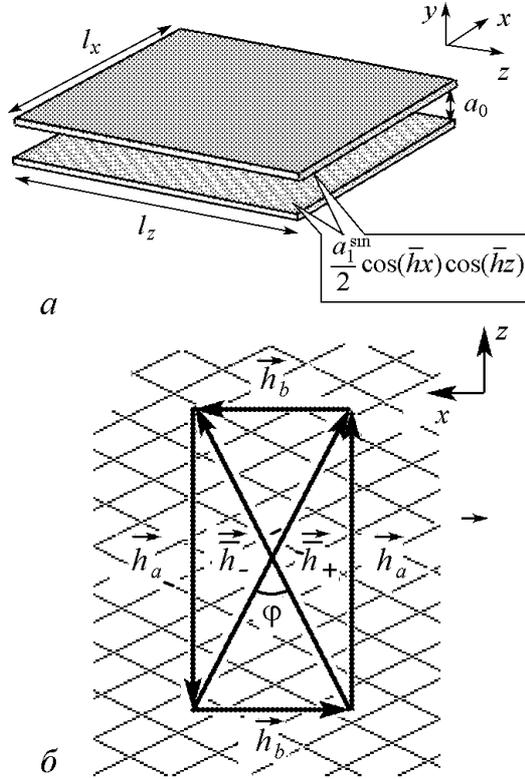


Рис. 1. а – схема двумерного брэгговского резонатора планарной геометрии; б – диаграмма, иллюстрирующая процесс рассеяния парциальных волн: $\vec{h}_{a,b}$ – волновые векторы парциальных волн, \vec{h}_{\pm} – трансляционные векторы решетки

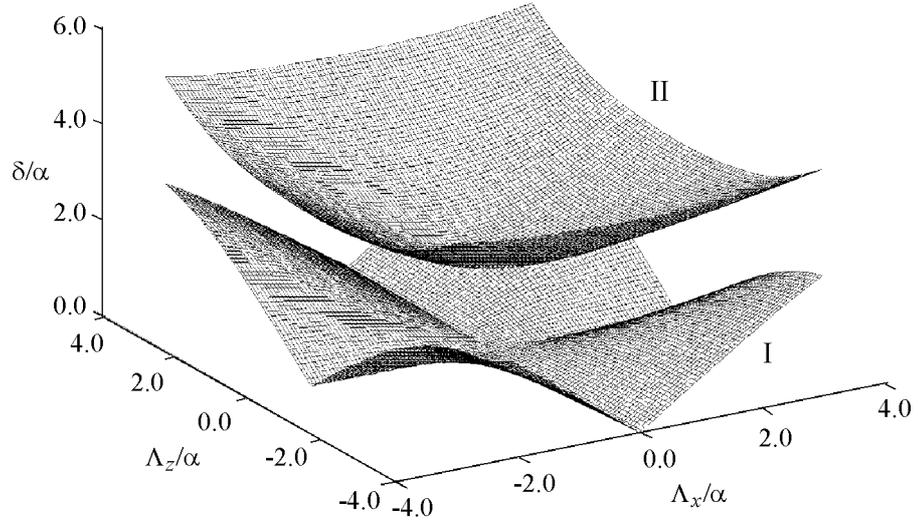


Рис. 2. Дисперсионные характеристики парциальных волн двумерной брэгговской структуры в рамках приближения геометрической оптики

одномерной брэгговской структуры [12-13]. Принципиальным отличием двумерных структур является наличие дополнительного листа I, проходящего через точку $\delta = 0$. В результате в ограниченной системе наиболее высокодобротные моды оказываются в окрестности брэгговской частоты.

Для строгого определения спектра собственных мод двумерного брэгговского резонатора уравнение (4) следует дополнить граничными условиями, которые в предположении об отсутствии потоков электромагнитной энергии извне и идеальном согласовании для парциальных волн на границах гофрировки могут быть представлены в виде,

$$\begin{aligned}
 A_+(x, 0) &= 0, \\
 A_-(x, l_z) &= 0, \\
 B_+(0, z) &= 0, \\
 B_-(l_x, z) &= 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Частоты $\omega_{n,m} \approx c\bar{\hbar} + c \operatorname{Re} \delta_{n,m}$ и добротности $Q_{n,m} \approx \bar{\hbar} / 2 \operatorname{Im} \delta_{n,m}$ собственных мод определяются соответственно реальной и мнимой частями отстройки δ , для которой в условиях сильной связи волн $\alpha l_{x,z} \gg 1$ из решения краевой задачи (4), (6) имеем [3]

$$\delta_{n,m} = \pm \frac{\pi^2 mn}{2\alpha l_z l_x} + i \frac{\pi^2}{2\alpha^2 l_z l_x} \left(\frac{n^2}{l_z} + \frac{m^2}{l_x} \right), \tag{7a}$$

$$\delta_{n,m} = \pm \left[2\alpha + \frac{\pi^2}{4\alpha} \left(\frac{n^2}{l_z^2} + \frac{m^2}{l_x^2} \right) \right] + i \frac{\pi^2}{2\alpha^2} \left(\frac{n^2}{l_z^3} + \frac{m^2}{l_x^3} \right), \tag{7б}$$

где n и m продольный и поперечный индексы мод. Как следует из (7), собственные моды резонатора расположены (I) в окрестности частоты точного брэгговского резонанса $\bar{\omega} = \bar{\hbar}c$ (то есть $\delta = 0$), а также (II) вблизи границы зоны брэгговского

рассеяния $\delta \approx \pm 2\alpha$ (рис. 3). Очевидно, что моды семейства II (76) имеют аналоги в спектре мод одномерных брэгговских резонаторов. Специфической особенностью двумерных брэгговских резонаторов является наличие высокодобротных мод семейства I в центре брэгговской полосы в отсутствие дефектов гофрировки (7а). Для сравнения отметим, что в традиционной одномерной брэгговской структуре высокодобротная мода в центре брэгговской полосы возникает при внесении дефекта гофрировки [12, 13]. Наличие мод вблизи брэгговской частоты отличает двумерные брэгговские структуры и от широко исследуемых в настоящее время фотонных кристаллов, в которых формирование мод также требует наличия дефекта. При этом, с точки зрения использования в генераторах с пространственно развитыми активными средами, очевидным достоинством двумерных брэгговских структур является то, что поля мод не сосредоточены вблизи дефекта, а распределены по всей поверхности структуры.

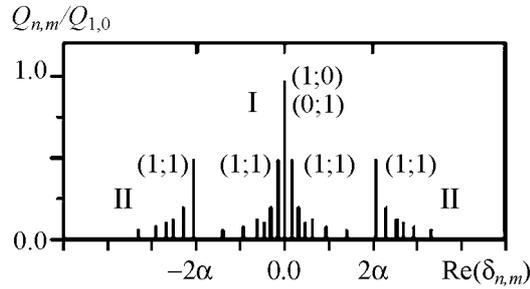


Рис. 3. Спектр мод двумерного брэгговского резонатора в рамках приближения геометрической оптики

Максимальной добротностью обладают моды с индексами $\{n = 0, m = 1\}$ и $\{n = 1, m = 0\}$ (см. рис. 3). Эти моды вырождены по частоте, которая совпадает с брэгговской частотой, а в случае $l_x = l_z$ – и по добротности. Структуры полей парциальных волн основной моды, а также мод с индексами $\{n = 1, m = 1\}$ приведены на рис. 4. Таким образом, двумерный брэгговский резонатор обладает высокой селективностью как по продольному n , так и по поперечному m индексу. Такая селективность обеспечена высвечиванием потоков электромагнитной энергии не только в продольном $\pm z$ направлении (как это имеет место в традиционных одномерных брэгговских резонаторах), но дополнительно и в поперечном $\pm x$ направлениях.

Далее в разделе 2 будет использована еще одна интересная особенность отражения плоских волн от двумерной брэгговской структуры. Как следует из результатов работы [3], при наклонном падении волны с частотой, равной брэгговской ($\delta = 0$) $A_+ = A_0 \exp(ik_{\perp}x)$, где k_{\perp} – поперечное волновое число, в выражении для поля отраженной волны

$$A_- = A_0 \frac{\alpha^2 l_z}{1 + \alpha^2 l_x l_z} \frac{1 - \exp(ik_{\perp}l_x)}{ik_{\perp}} \quad (8)$$

отсутствует фазовый множитель, зависящий от поперечной координаты x . Это означает, что отраженная волна при любых углах падения распространяется строго по нормали к торцу двумерного зеркала. Однако модуль коэффициента отражения естественно уменьшается с ростом угла падения:

$$|R|^2 = \left(\frac{\alpha^2 l_x l_z}{1 + \alpha^2 l_x l_z} \cdot \frac{\sin(k_{\perp}l_x/2)}{k_{\perp}l_x/2} \right)^2. \quad (9)$$

Подобный эффект «выпрямления» волнового фронта может быть использован для синхронизации излучения широких ленточных пучков путем установки двумерных брэгговских структур вне пространства взаимодействия.

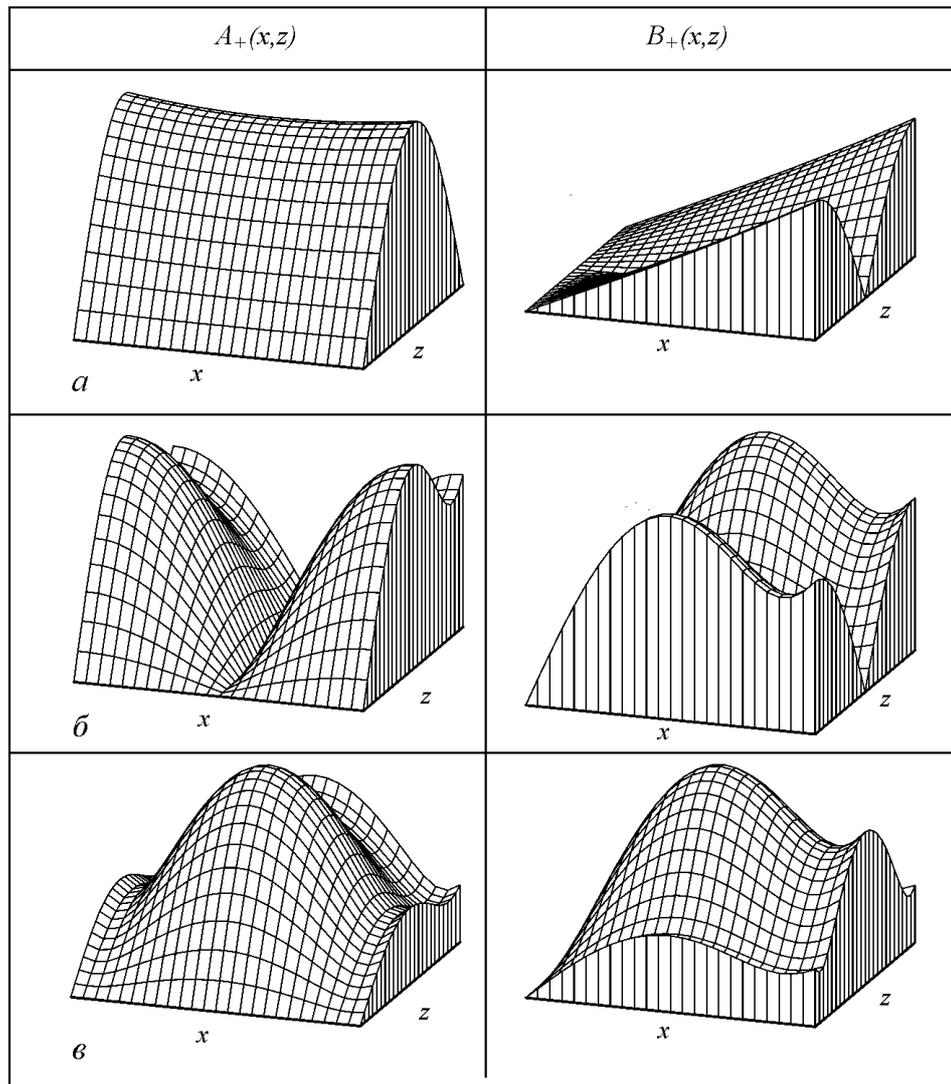


Рис. 4. Пространственные структуры полей парциальных волн A_+ и B_+ основной наиболее добротной моды $\{m = 0, n = 1\}$ (*a*), а также мод $\{m = 1, n = 1\}$ в окрестности $\delta \approx 0$ (*б*) и $\delta \approx \pm 2\alpha$ (*в*)

2. Использование двумерной РОС в черенковских генераторах с ленточными пучками

Существует, по крайней мере, две возможности использования двумерной РОС в генераторах черенковского типа. Одна из них заключается в том, что двумерная брэгговская структура играет не только роль резонатора (подобно ЛСЭ), но и периодической замедляющей системы. При этом электронный поток синхронно взаимодействует с пространственной гармоникой одной из четырех парциальных волн, формирующих поле двумерной решетки. Вторая возможность состоит в том, что в области взаимодействия планарного электронного пучка с волной используется традиционная замедляющая система, а синхронизатор в виде двумерной брэгговской структуры располагается вне пространства взаимодействия в виде дополнительного зеркала.

2.1. Черенковские мазеры с двумерной РОС. В принципе, черенковское взаимодействие может быть организовано с пространственной гармоникой любой из четырех парциальных волн (2), составляющих поле двумерной брэгговской структуры. Будем считать, что поступательная скорость электронов направлена вдоль оси z . В ситуации, изображенной на рис. 5, *а*, электроны взаимодействуют с синхронной пространственной гармоникой попутной парциальной волны A_+ , распространяющейся в направлении $+z$. Соответствующее условие синхронизма может быть представлено в виде

$$\omega \approx (h_a + \bar{h}_z) v_{||} \quad \text{или} \quad h_e \approx h_a + \bar{h}_z, \quad (10)$$

где $h_e = \omega/v_{||}$.

Существует также возможность синхронизировать с пучком пространственную гармонику одной из парциальных волн B_{\pm} , распространяющихся в поперечном направлении (рис. 5, *б*). В этом случае условие синхронизма принимает вид

$$h_e \approx h_b + \bar{h}_z \text{tg} \varphi \sin \psi. \quad (11)$$

Однако при этом двумерная брэгговская структура должна быть повернута на небольшой угол ψ к направлению распространения пучка.

В условиях синхронизма (10) только парциальная волна A_+ , распространяющаяся вдоль электронного пучка, взаимодействует с частицами. Волны B_{\pm} , распространяющиеся поперек движения пучка, обеспечивают синхронизацию излучения от различных частей широкого электронного пучка. В предположении медленности изменения амплитуд парциальных волн $A_{\pm}(x, z, t)$, $B_{\pm}(x, z, t)$ в пространстве и времени, а также малости относительных изменений энергии частиц, возбуждение

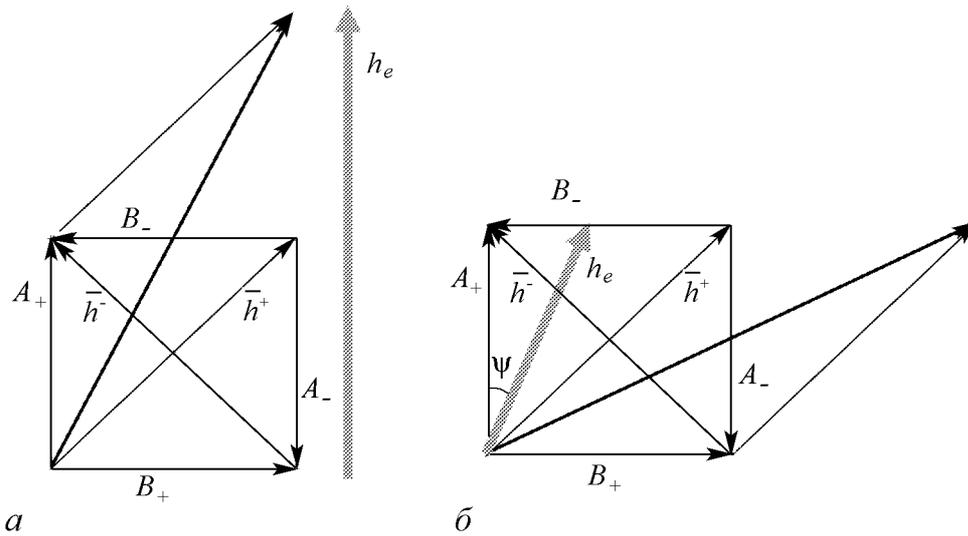


Рис. 5. Диаграмма, иллюстрирующая при $\varphi = \pi/2$ черенковское взаимодействие электронного пучка с пространственными гармониками различных парциальных волн двумерной брэгговской структуры: *а* – синхронизм с попутной волной A_+ и *б* – синхронизм с поперечно распространяющейся волной B_+

двумерного брэгговского резонатора прямолинейным электронным пучком описывается системой уравнений, аналогичным ЛСЭ с двумерной РОС (ср. с [5, 6]),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{1}{\beta_{gr}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \hat{A}_+ + i\hat{\alpha} (\hat{B}_+ + \hat{B}_-) &= J, \quad J = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0, \\ \left(-\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{1}{\beta_{gr}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \hat{A}_- + i\hat{\alpha} (\hat{B}_+ + \hat{B}_-) &= 0, \\ \left(\pm \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{\beta_{gr}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \hat{B}_\pm + i\hat{\alpha} (\hat{A}_+ + \hat{A}_-) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{1}{\beta_{gr}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^2 \theta &= \text{Re} (\hat{A}_+ e^{i\theta}). \end{aligned} \quad (12)$$

Граничные условия для парциальных волн даются соотношениями (6). В случае инжекции моноэнергетического электронного пучка граничные условия для частиц имеют стандартный вид

$$\theta|_{Z=0} = \theta_0 \in [0, 2\pi), \quad \left(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{1}{\beta_{||}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \theta \Big|_{Z=0} = \Delta, \quad (13)$$

где $\Delta = (\bar{\omega} - h_a v_{||} - \bar{h}_z v_{||}) / \bar{\omega} C$ – расстройка электронного синхронизма (10) на несущей частоте, в качестве которой при записи (12) выбрана брэгговская частота. В уравнениях (12) использованы следующие безразмерные величины: $Z = \bar{h} C z$, $X = \bar{h} C x$, $\tau = \bar{\omega} t C$, $\bar{\omega} = \bar{h} c$, $\theta = \bar{\omega} t - h_a z - \bar{h}_z z$ – фаза электрона по отношению к синхронной пространственной гармонике, $\hat{\alpha} = \alpha / \bar{h} C$, $(\hat{A}_\pm, \hat{B}_\pm) = e \kappa \mu (A_\pm, B_\pm) / m c \bar{\omega} \gamma_0 C^2$, параметр усиления

$$C = \left(\frac{e \hat{I}_0 \lambda^2 K^2 \mu}{m c^3 8 \pi \gamma_0 a_0} \right)^{1/3}, \quad (14)$$

\hat{I}_0 – ток инжекции на единицу поперечного размера, $\mu \approx \gamma_0^{-2}$ параметр инерционной группировки [13], коэффициент связи электронов с волной

$$K = \frac{3 \bar{h} a_1 \sinh(4 \bar{h} b)}{4 \sinh(4 \bar{h} a_0)}, \quad (15)$$

b – расстояние от ленточного электронного пучка до стенки волновода. Электронный КПД дается соотношениями

$$\eta = \frac{C}{\mu (1 - \gamma_0^{-1})} \hat{\eta}, \quad \hat{\eta} = \frac{1}{2\pi L_x} \int_{-L_x/2}^{+L_x/2} dX \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Z} - \Delta \right) \Big|_{Z=+L_z/2} d\theta_0. \quad (16)$$

В рассматриваемом случае динамика двумерного черенковского лазера аналогична динамике ЛСЭ [4]. Временные зависимости КПД для значений параметров, при которых происходит установление стационарного режима колебаний, представлены на рис. 6, а. В стационарном режиме пространственное распределение полей

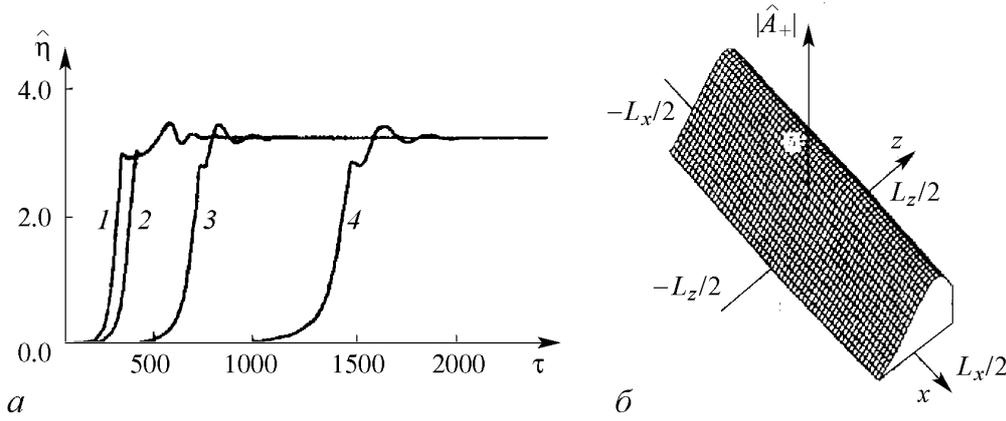


Рис. 6. Установление стационарного режима генерации в черенковском лазере с синхронной попутной волной A_+ для $L_z = 4.0$, $\Delta = -1.8$; *a* – зависимости электронного КПД от времени при различной ширине системы: 1 – $L_x = 0.8$, $\hat{\alpha} = 1.25$; 2 – $L_x = 3.2$, $\hat{\alpha} = 0.63$; 3 – $L_x = 12.8$, $\hat{\alpha} = 0.32$; 4 – $L_x = 28.8$, $\hat{\alpha} = 0.21$; *б* – пространственное распределение парциальной волны \hat{A}_+ в стационарном режиме генерации для параметров, соответствующих кривой 3

парциальных волн A_{\pm} и B_{\pm} (рис. 6, б) близко к распределению полей высокочастотной (основной) моды холодного резонатора (ср. с рис. 4, а). Частота установившихся автоколебаний также близка к частоте этой моды, то есть брэгговской частоте. Условия самовозбуждения основной моды могут быть представлены в форме

$$P = \hat{\alpha}^2 L_x L_z^4 \geq 250, \quad \Delta L_z \approx \pi. \quad (17)$$

Важно отметить, что поперечное распределение амплитуды резонансной волны A_+ не зависит от поперечной координаты x , чем обеспечивается одинаковый отбор энергии для всех фракций электронного пучка. Из системы уравнений (12) следует, что в стационарном режиме генерации ($\partial/\partial\tau = 0$) при возбуждении основной моды зависимость амплитуд волн B_{\pm} от поперечной координаты может быть представлена в виде

$$\hat{B}_+ = \hat{\alpha} X (\hat{A}_+ + \hat{A}_-), \quad \hat{B}_- = \hat{\alpha} (L_x - X) (\hat{A}_+ + \hat{A}_-), \quad (18)$$

что позволяет свести (12) к форме

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}_+}{dZ} + i\hat{\alpha}^2 L_x (\hat{A}_+ + \hat{A}_-) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0, \\ \frac{d\hat{A}_-}{dZ} - i\hat{\alpha}^2 L_x (\hat{A}_+ + \hat{A}_-) &= 0, \\ \frac{d^2\theta}{dZ^2} &= \text{Re} (\hat{A}_+ e^{i\theta}). \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, для системы постоянной длины $L_z = \text{const}$ распределение волн по продольной координате, равно как и электронный КПД, не меняется, если удовлетворено соотношение $\hat{\alpha}^2 L_x = \text{const}$. Подобная автомодельность позволяет увеличивать

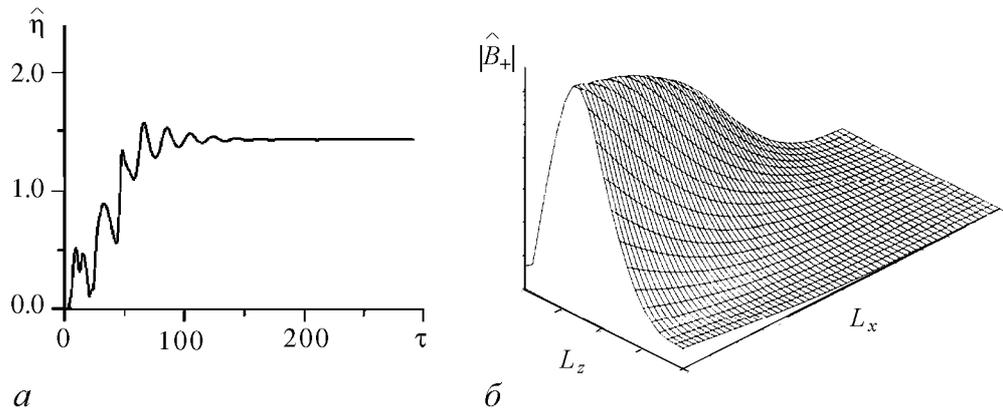


Рис. 7. Установление стационарного режима генерации в черенковском лазере с синхронной поперечно-распространяющейся волной B_+ : a – зависимости КПД от времени; b – пространственное распределение волны \hat{B}_+ в стационарном режиме генерации при $\hat{\alpha} = 0.12$, $\Delta = 0$, $L_z = 12$, $L_x = 4$

ширину пространства взаимодействия l_x при соответственном уменьшении коэффициента связи (например, глубины гофрировки a_1). Численное решение нестационарных уравнений (12) подтверждает этот вывод. При $L_z \leq 5$ стационарный режим синхронизации сохраняет устойчивость, по крайней мере, до $L_x \leq 30$ (при параметре усиления $C \approx 5 \cdot 10^{-3}$ это соответствует параметру сверхразмерности $l_x/\lambda \approx 10^3$). Однако время переходного процесса увеличивается с увеличением ширины системы (см. рис. 6, a).

Следует отметить, что устойчивый режим одночастотных колебаний соответствует возбуждению основной волны, реализуемому при небольшом превышении параметра P над пороговым значением. При дальнейшем увеличении этого параметра и соответствующем подборе расстройки синхронизма наблюдается селективное возбуждение других мод резонатора, например моды $\{n = 1, m = 1\}$. При значительном превышении P над порогом реализуются многочастотные автомодуляционные режимы генерации, в которых пространственная структура выходного излучения периодически или хаотически эволюционирует во времени [6].

В режиме взаимодействия с поперечной волной B_+ в условии синхронизма (11) уравнения, описывающие динамику лазера, отличаются от уравнений (12) переносом фактора возбуждения из уравнения (12а) в уравнение (12в). Для этого случая зависимость КПД от времени и структура поля синхронной с пучком волны B_+ в стационарном режиме генерации приведены на рис. 7.

2.2. Планарные лампы обратной волны с внешней синхронизацией излучения в двумерной брэгговской структуре. Рассмотрим модель планарной ЛОВ, на коллекторном конце которой вне области взаимодействия электронов с синхронной волной расположена двумерная брэгговская структура (рис. 8). Излучение в двумерную брэгговскую структуру попадет после отражения от дополнительного рефлектора, расположенного с катодной стороны системы (подобный катодный отражатель типичен, к примеру, для релятивистских ЛОВ и может представлять собой закритическое сужение, отражатель резонансного типа и т.д.).

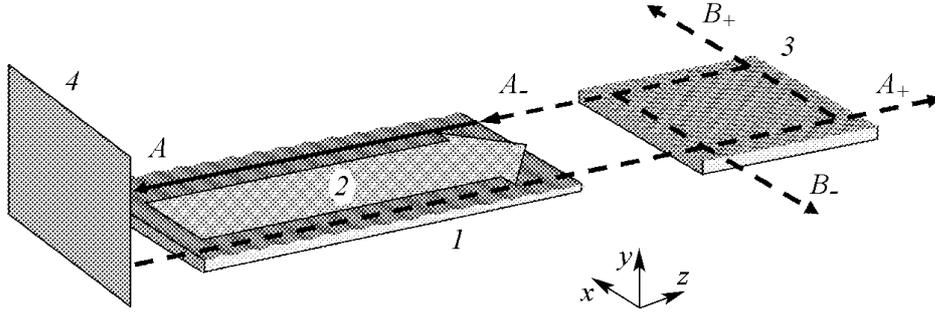


Рис. 8. Схема планарной ЛОВ с внешним двумерным брэгговским рефлектором: 1 – замедляющая система ЛОВ, 2 – ленточный электронный пучок, 3 – брэгговская структура, 4 – катодный отражатель

В приближении относительно малого изменения энергии электронов динамика ЛОВ описывается известной системой уравнений [14]

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) A_- &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^2 \theta &= \text{Re}(A_- e^{i\theta}) \end{aligned} \quad (20)$$

с граничными условиями $\theta|_{Z=0} = \theta_0 \in [0, 2\pi)$, $\left(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \theta \Big|_{Z=0} = \Delta$, где Δ – расстройка синхронизма на несущей частоте, в качестве которой выбрана брэгговская частота.

Рассеяние волн в брэгговской структуре, нормированные поперечный и продольный размеры которой L_{\perp} и L_{\parallel} , соответственно, опишется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \pm \frac{\partial}{\partial Z}\right) A_{\pm} \mp i\alpha (B_+ + B_-) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \pm \frac{\partial}{\partial X}\right) B_{\pm} \mp i\alpha (A_+ + A_-) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Предположим, что поле A_- на выходе из брэгговской структуры непосредственно попадает на вход ЛОВ, а на вход ее поступает волна A_+ , повторяющая с учетом запаздывания поле на выходе ЛОВ ($Z = 0$). Считая, что параметры Френеля всех волновых потоков достаточно велики, дифракцией пренебрегаем. Кроме того, полагаем, что групповые скорости волн в ЛОВ и брэгговской структуре одинаковы и близки к скорости света.

В режиме свободных колебаний поведение ЛОВ определяется единственным параметром – безразмерной длиной L^{BWO} . Условие самовозбуждения генератора выполнено при $L^{BWO} > 2$. Режим стационарной генерации устойчив до $L^{BWO} \leq 2.9$, когда имеет место переход к режиму автомодуляции выходной амплитуды. Для исследования режима синхронизации выберем длину ЛОВ $L^{BWO} = 2.4$, так чтобы дополнительные отражения от брэгговской структуры не приводили к по-

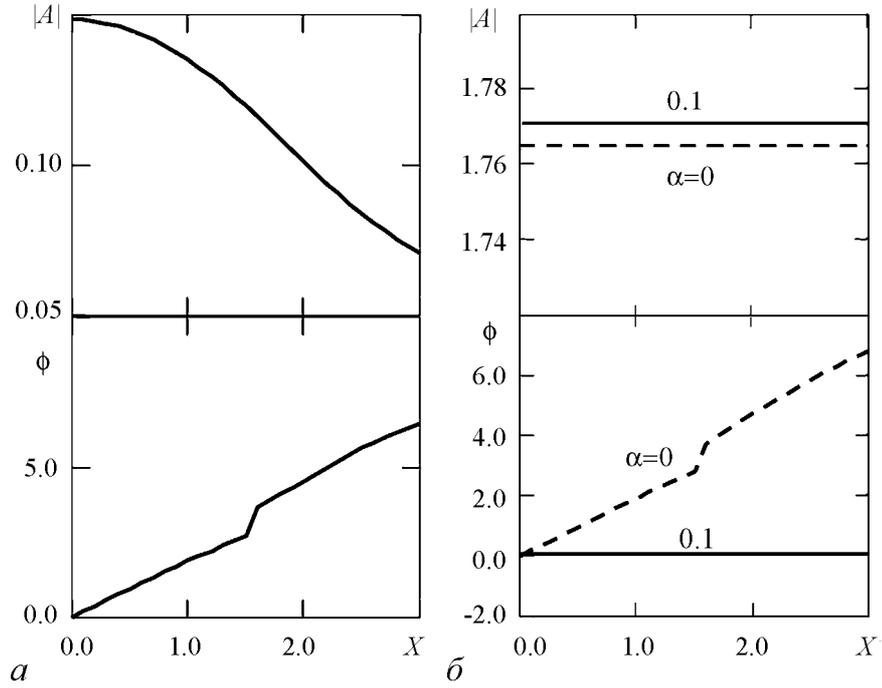


Рис. 9. Моделирование планарной ЛОВ. Поперечное распределение амплитуды и фазы рабочей волны при $\Delta = 0$: a – начальный момент времени; b – установившийся режим. Штриховые кривые – внешний синхронизатор отсутствует $\alpha = 0$, сплошные кривые – установлен внешний синхронизатор с $\alpha = 0.1$

явлению многочастотной генерации. Поперечный размер ЛОВ выберем порядка ее длины $L_{\perp} = 3$, а длину брэгговской структуры $L_{\parallel} = 1$.

Рассмотрим вначале поведение системы при равенстве брэгговской и собственной частот ЛОВ ($\Delta = 0$). В режиме свободных колебаний ($\alpha = 0$), после окончания переходного процесса модуль поля выходного излучения принимает постоянное вдоль поперечного сечения значение, в то время как распределение фазы практически повторяет начальное (рис. 9, a), то есть фактически является случайным. Введение брэгговской структуры приводит к установлению однородного распределения фазы по поперечной координате (рис. 9, b). Заметим, что коэффициент отражения от брэгговской структуры, при котором возникает поперечная синхронизация, достаточно мал (согласно (9) при $\alpha = 0.3$ отражается менее 5% падающей мощности). Количественно процесс синхронизации удобно характеризовать функционалом

$$F(\tau) = \int_0^{L_{\perp}} \left| \frac{\partial A_+(0, X, \tau)}{\partial X} \right|^2 dX,$$

описывающим изменение фазы рабочей волны. Режиму синхронизации соответствует резкий спад величины F , при этом время синхронизации уменьшается с ростом коэффициента связи α (рис. 10).

При изменении расстройки синхронизма Δ , которое в реальной системе может быть обусловлено нестабильностью ускоряющего напряжения, режим синхро-

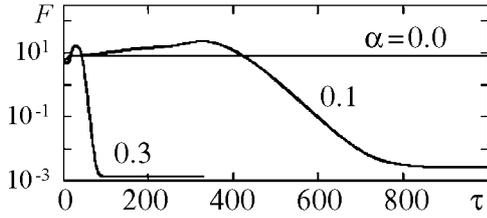


Рис. 10. Поведение функционала $F(\tau)$ при различных коэффициентах связи α во внешнем синхронизаторе ($\Delta = 0$)

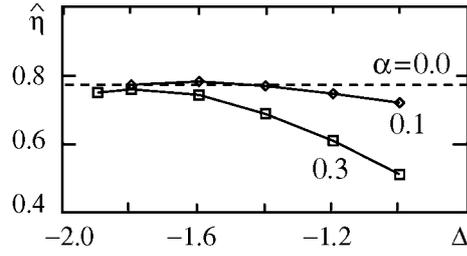


Рис. 11. Изменение приведенного КПД планарной ЛОВ при варьировании расстройки Δ между частотой свободной генерации и брэгговской частотой

низации сохраняется в полосе изменения расстроек $\delta\Delta \sim 1$ (рис. 11). Увеличение коэффициента связи расширяет полосу синхронизации, однако при этом за счет увеличения потерь на излучение поперечных волн B_{\pm} происходит снижение волнового КПД, связанного с излучением волны A_{+} .

3. Синхронизация излучения двумерных лазерных активных сред

Отличительной особенностью электронного пучка, как активной среды, является существенная анизотропия коэффициента усиления – вследствие эффекта Доплера электроны могут синхронно взаимодействовать и усиливать только один из парциальных волновых потоков, формирующих поле двумерного брэгговского резонатора. В данном разделе исследована возможность использования двумерных брэгговских структур для синхронизации излучения двумерных лазерных активных сред. Предполагается, что такая среда обеспечивает изотропное усиление всех парциальных волновых потоков, независимо от направления их распространения. Таким образом, рассматривается модель планарной двумерной активной среды, помещенной в двумерную брэгговскую структуру, обеспечивающей распределенную обратную связь (рис. 12). Например, двумерная брэгговская структура может представлять собой среду, диэлектрическая проницаемость которой на участке протяженностью l_x вдоль координаты x и l_z вдоль координаты z имеет следующую модуляцию:

$$\varepsilon(x, z) = 1 + \varepsilon_0 \cos(\bar{h}z) \cos(\bar{h}x). \quad (22)$$

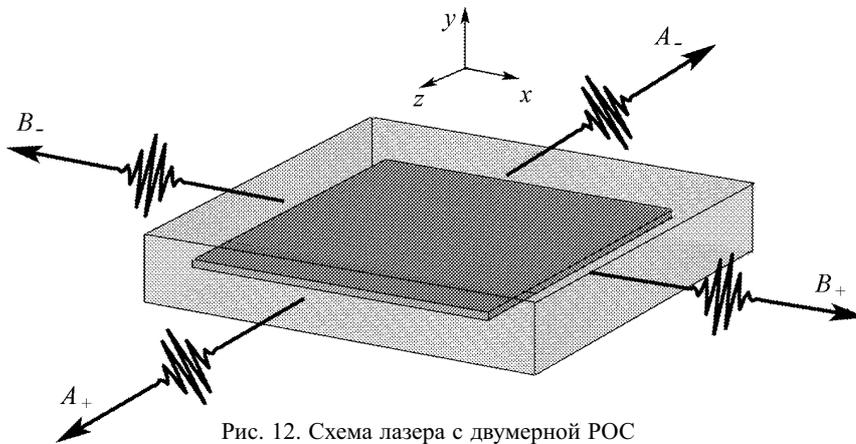


Рис. 12. Схема лазера с двумерной РОС

На подобной решетке в условиях (3) будет возникать связь и взаимное рассеяние четырех парциальных волновых потоков (2), распространяющихся в $\pm z$ и в $\pm x$ направлениях.

Для описания активной среды используем двухуровневую модель, где в отсутствие взаимодействия накачка обеспечивает разность населенностей между двумя рабочими уровнями. Частота перехода ω_0 полагается равной брэгговской частоте $\bar{\omega}$. Взаимодействие поля с активной средой будем описывать в рамках полуклассической модели [11, 15]

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{\varepsilon(x, z)}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A &= -\frac{4\pi}{c} P, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{1}{T_2} \frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{1}{4T_2^2} + \omega_0^2 \right) P &= -\frac{2\omega_0 |\mu|^2}{\hbar c} A \rho, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho - \rho_e}{T_1} &= \frac{2}{\hbar \omega_0 c} A \frac{\partial P}{\partial t}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $A(x, z, t)$ – вектор-потенциал электромагнитного поля, $P(x, z, t)$ – поляризация активной среды, $\rho(x, z, t)$ – разность населенностей, μ – дипольный момент, T_1 и T_2 – времена релаксации инверсии и поляризации, ρ_e – равновесное значение инверсии в отсутствие взаимодействия.

Следуя [15], представим поляризацию и инверсию среды в следующем виде:

$$\begin{aligned} P &= \text{Re} \left(i \left(P_{z+} e^{i(\omega t + hz)} + P_{z-} e^{i(\omega t - hz)} + P_{x+} e^{i(\omega t + hx)} + P_{x-} e^{i(\omega t - hx)} \right) \right), \\ \rho &= \rho_0 + \text{Re} \left(\rho_{2z} e^{2ihz} + \rho_{2x} e^{2ihx} + \rho_{z-x} e^{2ih(z-x)} + \rho_{z+x} e^{2ih(z+x)} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где $P_{z,x\pm}$, ρ_0 , $\rho_{2z,2x}$, $\rho_{z\mp x}$ – медленно меняющиеся в пространстве и времени амплитуды. Процесс генерации будем исследовать в балансном приближении, предполагая, что время поперечной релаксации мало по сравнению с другими временными масштабами. В этом случае компоненты поляризации могут быть выражены в виде

$$\begin{aligned} \hat{P}_{z+} &= \beta \hat{T}_2 \left(2\hat{A}_+ \hat{\rho}_0 + \hat{A}_- \hat{\rho}_{2z} + \hat{B}_+ \hat{\rho}_{z-x} + \hat{B}_- \hat{\rho}_{z+x} \right), \\ \hat{P}_{z-} &= \beta \hat{T}_2 \left(2\hat{A}_- \hat{\rho}_0 + \hat{A}_+ \hat{\rho}_{2z}^* + \hat{B}_+ \hat{\rho}_{z+x}^* + \hat{B}_- \hat{\rho}_{z-x}^* \right), \\ \hat{P}_{x+} &= \beta \hat{T}_2 \left(2\hat{B}_+ \hat{\rho}_0 + \hat{B}_- \hat{\rho}_{2x} + \hat{A}_+ \hat{\rho}_{z-x}^* + \hat{A}_- \hat{\rho}_{z+x} \right), \\ \hat{P}_{x-} &= \beta \hat{T}_2 \left(2\hat{B}_- \hat{\rho}_0 + \hat{B}_+ \hat{\rho}_{2x}^* + \hat{A}_+ \hat{\rho}_{z+x}^* + \hat{A}_- \hat{\rho}_{z-x} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

где $\beta = |\mu|^2 \rho_e / 2\hbar \omega_0^3$ – нормированная плотность атомов активной среды, $\hat{\rho} = \rho / \rho_e$,

$$\hat{P}_{z,x\pm} = P_{z,x\pm} q / \omega_0, \quad \left(\hat{A}_\pm, \hat{B}_\pm \right) = (A_\pm, B_\pm) q \omega_0 / c, \quad \hat{T}_{1,2} = \omega_0 T_{1,2}, \quad q = (\rho_e \hbar \omega_0)^{-1/2}. \quad (26)$$

Процесс усиления волн в активной среде, а также их взаимного рассеяния может быть описан следующей системой усредненных уравнений:

$$\begin{aligned}
\mp \frac{\partial \hat{A}_{\pm}}{\partial Z} + \frac{\partial \hat{A}_{\pm}}{\partial \tau} + i\alpha (\hat{B}_+ + \hat{B}_-) &= \hat{P}_{z\pm}, & \mp \frac{\partial \hat{B}_{\pm}}{\partial X} + \frac{\partial \hat{B}_{\pm}}{\partial \tau} + i\alpha (\hat{A}_+ + \hat{A}_-) &= \hat{P}_{x\pm}, \\
\frac{\partial \hat{\rho}_0}{\partial \tau} + \frac{(\hat{\rho}_0 - 1)}{\hat{T}_1} &= - (\hat{A}_+ \hat{P}_{z+}^* + \hat{A}_- \hat{P}_{z-}^* + \hat{B}_+ \hat{P}_{x+}^* + \hat{B}_- \hat{P}_{x-}^*), \\
\frac{\partial \hat{\rho}_{2z}}{\partial \tau} + \frac{\hat{\rho}_{2z}}{\hat{T}_1} &= - (\hat{A}_+ \hat{P}_{z-}^* + \hat{A}_- \hat{P}_{z+}^*), & \frac{\partial \hat{\rho}_{2x}}{\partial \tau} + \frac{\hat{\rho}_{2x}}{\hat{T}_1} &= - (\hat{B}_+ \hat{P}_{x-}^* + \hat{B}_- \hat{P}_{x+}^*), \\
\frac{\partial \hat{\rho}_{z+x}}{\partial \tau} + \frac{\hat{\rho}_{z+x}}{\hat{T}_1} &= - (\hat{A}_+ \hat{P}_{x-}^* + \hat{A}_- \hat{P}_{x+}^* + \hat{B}_+ \hat{P}_{z-}^* + \hat{B}_- \hat{P}_{z+}^*), \\
\frac{\partial \hat{\rho}_{z-x}}{\partial \tau} + \frac{\hat{\rho}_{z-x}}{\hat{T}_1} &= - (\hat{A}_+ \hat{P}_{x+}^* + \hat{A}_- \hat{P}_{x-}^* + \hat{B}_+ \hat{P}_{z+}^* + \hat{B}_- \hat{P}_{z-}^*),
\end{aligned} \tag{27}$$

где $\tau = \omega_0 t$; $Z, X = \frac{\omega_0}{c} z, x$; α - коэффициент связи парциальных волн на исходной линейной решетке (22). Кроме того, появление наведенных решеток в инверсии (24) приводит к возникновению нелинейной связи всех парциальных потоков. Граничные условия к уравнениям (27) совпадают с (6), а начальные имеют вид

$$\hat{\rho}_0 = 1, \quad \hat{\rho}_{2z,x} = \hat{\rho}_{z\pm x} = 0, \quad \hat{A}_{\pm} = \hat{B}_z = f(x, z), \quad |f| \ll 1.$$

В отсутствие активной среды $\beta = 0$ двумерная брэгговская структура обладает спектром дискретных мод, описываемым соотношением (7). Соответственно условие самовозбуждения может быть представлено в виде

$$\text{Im}(\delta_{1,0}) = 2\beta \hat{T}_2. \tag{28}$$

В предположении, что $l_z > l_x$, максимальной добротностью и, соответственно, минимальным порогом самовозбуждения обладает мода с индексами $\{n = 1, m = 0\}$, частота которой совпадает с брэгговской частотой.

Результаты моделирования нелинейной стадии процесса генерации на основе системы усредненных уравнений (27), также демонстрируют возможность установления режима стационарной одночастотной генерации при размерах системы, существенно превосходящих длину волны. На рис. 13 представлены зависимости накопленной энергии электромагнитного поля от времени при различных превышениях над порогом генерации, соответствующих установлению стационарного режима. На рис. 14, а, б показаны характерные распределения амплитуд парциальных волн в стационарном режиме генерации. Видно, что эти

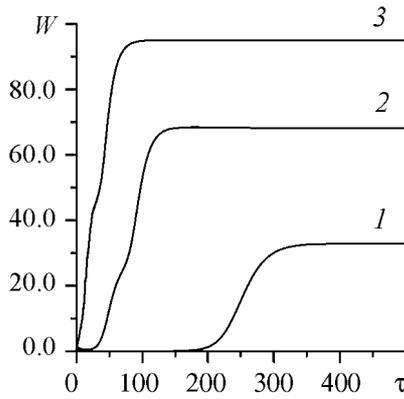


Рис. 13. Зависимость накопленной энергии W электромагнитного поля от времени в процессе установления стационарного режима генерации в лазере с двумерной РОС при $L_z = 5, L_x = 2.5, \alpha = 1, \hat{T}_1 = 1$: $1 - 2\beta \hat{T}_2 = 0.1, 2 - 2\beta \hat{T}_2 = 0.2, 3 - 2\beta \hat{T}_2 = 0.5$

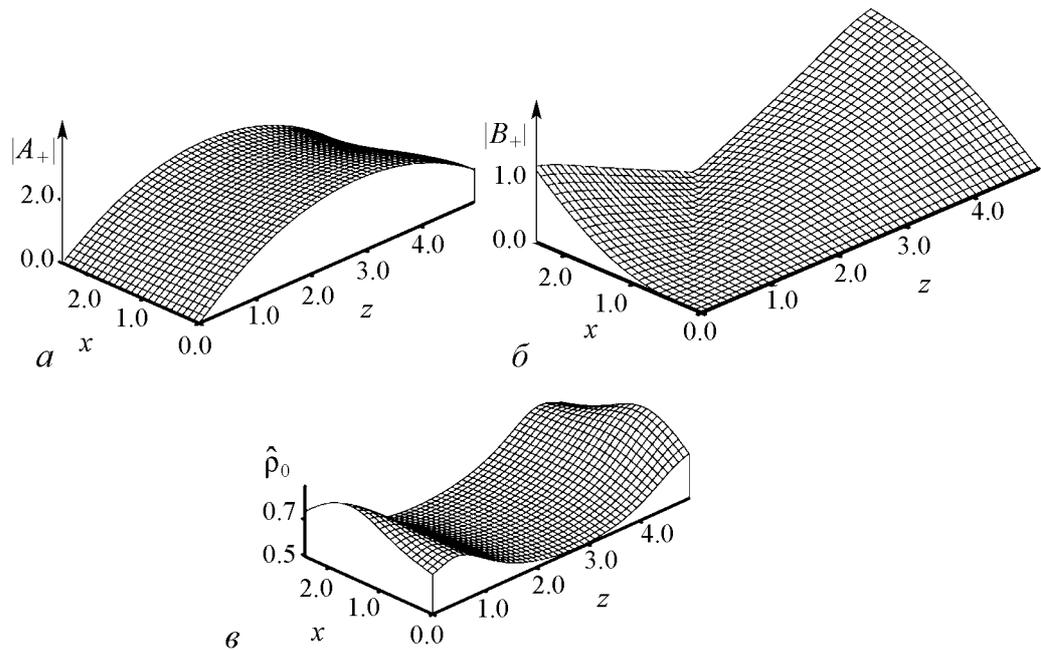


Рис. 14. Пространственные распределения амплитуд парциальных волн (*a*, *б*) и средней инверсии (*в*) в стационарном режиме генерации в лазере с двумерной РОС

распределения аналогичны распределениям полей парциальных волн, образующих наиболее добротную моду двумерного брэгговского резонатора (см. рис. 4, *a*). Пространственное распределение средней инверсии показано на рис. 14, *в*.

Следует отметить, что решения уравнений (27) также обладают автомодельностью. При условии $\alpha L_{x,z} = \text{const}$, $\beta/a = \text{const}$, $\tau/a = \text{const}$ сохраняются абсолютные значения и пространственные распределения амплитуд парциальных волн. Это означает, что если при пропорциональном увеличении размеров активной области уменьшать коэффициент связи волн α и коэффициент усиления β , то можно поддерживать режим синхронизации излучения в активной среде, занимающей большую область. При этом, хотя коэффициент усиления β и, соответственно, плотность активных атомов должны снижаться как α^{-1} , полное число когерентно излучающих атомов $N_0 l_x l_z$ должно возрастать и, соответственно, должна расти интегральная мощность излучения. Время переходного процесса при увеличении линейных размеров системы также должно возрастать.

4. Использование брэгговских структур, основанных на связи квазикритических и распространяющихся волн

Очевидно, что, являясь эффективным селекционирующим элементом, двумерные брэгговские структуры позволяют решать не только проблему повышения интегральной мощности когерентного излучения за счет развития поперечного сечения рабочего пространства, но и открывают дополнительные возможности в продвижении

приборов СВЧ-электроники в коротковолновые диапазоны. В этой связи становится актуальной задача развития объема пространства взаимодействия вдоль второй (узкой) координаты. Данная задача до определенных пределов может быть решена путем использования связи распространяющихся и квазикритических мод [16, 17]. В п. 4.1 рассмотрен гибридный планарный резонатор, составленный из двумерного и одномерного брэгговских зеркал. Отличительной особенностью данного резонатора является использование в одномерном зеркале связи указанных мод. В результате двумерное брэгговское зеркало позволяет осуществить селекцию колебаний по длинной координате x , в то время как предлагаемая модификация одномерного брэгговского зеркала обладает повышенной (по сравнению с традиционными брэгговскими структурами) селективностью вдоль узкой координаты y . В п. 4.2 обсуждаются электронные генераторы планарной геометрии, внутри пространства взаимодействия которых посредством брэгговских структур реализуется связь бегущих и квазикритических волн. Исследуется возможность реализации поперечного дифракционного вывода излучения в планарных схемах гиротрона и оротрона.

4.1. Гибридный планарный резонатор, составленный из двумерного и модифицированного одномерного брэгговских зеркал. Использование в ЛСЭ планарной геометрии гибридного резонатора, составленного из двумерного и одномерного брэгговских зеркал, было предложено в работе [5]. В этой схеме двумерное зеркало расположено со стороны коллектора и позволяет обеспечить синхронизацию излучения поперек электронного потока, то есть по координате x . В то же время брэгговское зеркало, расположенное с анодной стороны является одномерным и относительно небольшие отражения от него необходимы для замыкания цепи обратной связи. При этом, если в качестве выходного отражателя использовать рассмотренную ниже модификацию одномерного брэгговского зеркала, основанного на связи распространяющейся и квазикритической волн, то одновременно возможна организация селекции мод по «узкой» координате y .

В традиционном брэгговском зеркале поле представляет собой набор двух бегущих навстречу волн, непосредственно связанных между собой [13]. В рассматриваемой модификации брэгговского зеркала поле может быть представлено как сумма двух встречно распространяющихся волн

$$\vec{E} = \text{Re} \left(A_+(z) \vec{E}_A(r_\perp) e^{i(\omega_c t - hz)} \right) + \text{Re} \left(A_-(z) \vec{E}_A(r_\perp) e^{i(\omega_c t + hz)} \right), \quad (29a)$$

связь которых осуществляется посредством возбуждения внутри структуры квазикритической моды

$$\vec{E} = \text{Re} \left(B(z) \vec{E}_B(r_\perp) e^{i\omega_c t} \right). \quad (29б)$$

Соответствующее условие брэгговского резонанса имеет вид

$$h \approx \bar{h}, \quad \bar{h} = 2\pi/d. \quad (30)$$

Очевидно, что период структуры d в этом случае больше (до двух раз), чем в традиционном случае. Процесс рассеяния попутной волны во встречную с участием

квазикритической моды описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dA_{\pm}}{dZ} \mp i\Omega A_{\pm} = \pm i\alpha B, \\ \frac{1}{2} \frac{d^2 B}{dZ^2} + \Omega B = \alpha (A_+ + A_-), \end{cases} \quad (31)$$

где $\Omega = (\omega - \bar{\omega})/\bar{\omega}$ - отстройка частоты падающей волны от брэгговской, $Z = \bar{h}z$. Задача решается со следующими граничными условиями для парциальных волн:

$$A_+|_{Z=-L/2} = A_0, \quad A_-|_{Z=L/2} = 0, \quad \frac{dB}{dZ} \mp i\sqrt{2\Omega}B|_{Z=\mp L/2} = 0. \quad (32)$$

На рис. 15 представлены зависимости коэффициента отражения от частоты, демонстрирующие, что в отличие от традиционных брэгговских структур уменьшение коэффициента связи волн α ведет к уменьшению полосы отражений, в то время как максимум коэффициента отражений в отсутствие омических потерь не зависит от величины α и близок к единице (введение омических потерь, очевидно, приводит к уменьшению R_{\max}). Таким образом, можно утверждать, что на связи распространяющихся и квазикритических волн может быть реализован узкополосный отражатель.

Данный вывод подтверждается результатами прямого численного моделирования на основе трехмерного электромагнитного кода [22]. На Рис. 15, б показаны полученные в моделировании зависимости коэффициента отражения от частоты при падении на границу отражателя ТЕМ волны. Брэгговская структура имела период $d = 4$ мм и была рассчитана на связь с квазикритической модой ТМ₂ бесконечного (по оси x) планарного волновода. Коэффициент связи волн для рассматриваемой комбинации мод равен $\alpha = a_1/a_0$. Как видно из рисунка, в окрестности частоты отсечки указанной моды $f \approx 75$ ГГц имеет место практически полное отражение рабочей ТЕМ волны. Вместе с тем для всех остальных мод отражения от рассмотренной брэгговской решетки малы. Таким образом, в случае гибридного двухзеркального резонатора возможна селекция по «второму» (по оси y) поперечному индексу мод.

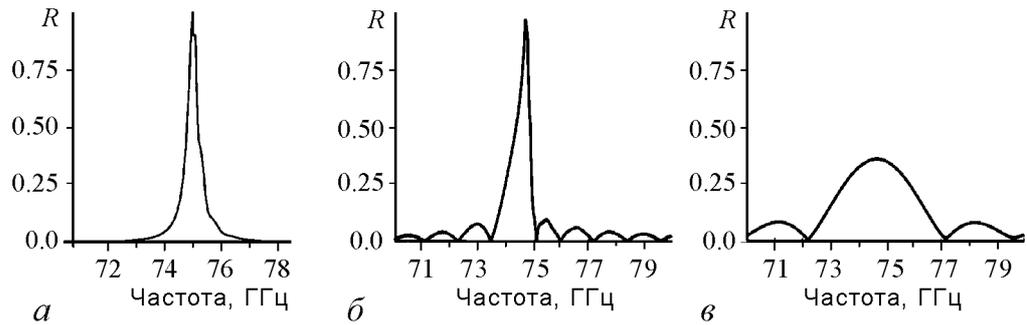


Рис. 15. Частотные зависимости коэффициента отражения от брэгговской структуры, основанной на связи распространяющихся и квазикритической мод: а - аналитическая теория ($l = 12$ см, $\alpha = 0.1$ см⁻¹); б - прямое численное моделирование ($l = 12$ см, период гофрировки $d = 4$ мм, глубина гофра $2a_1 = 0.05$ мм, расстояние между пластинами $a_0 = 4$ мм, что соответствует $\alpha = 0.1$ см⁻¹). в - коэффициент отражения при непосредственной связи падающей и отраженной волн на периодической структуре с глубиной гофрировки как на рис. б, но с вдвое меньшим периодом

Для сравнения на рис. 15, *в* показана частотная зависимость коэффициента отражения от традиционной брэгговской структуры (прямая связь падающей и отраженной волн) с той же глубиной гофрировки и расстоянием между пластинами, но с вдвое меньшим периодом.

4.2. Планарные модели гиротрона и оротрона с поперечным дифракционным выводом излучения. Очевидно, что для обеспечения эффективной селекции мод по двум координатам, связь бегущих и квазикритических мод может быть реализована непосредственно внутри пространства взаимодействия генератора. Вообще говоря, согласно (2), если трансляционные векторы элементарных решеток направлены под углом отличным от 90° (см. рис. 1, *б*), цикл двумерной распределенной обратной связи может включать в себя моды с разными поперечными (по оси y) индексами. В предельном случае $\varphi \rightarrow 0$ трансляционные вектора становятся параллельными, а волновые числа поперечно распространяющихся парциальных волн h_b стремятся к нулю, то есть эти волны становятся квазикритическими. Таким образом, двумерная брэгговская структура вырождается в одномерную, в которой осуществляется связь квазикритической и двух бегущих навстречу волн A_{\pm} . При этом, если с ленточным электронным пучком взаимодействует одна из бегущих волн, то такой генератор будет представлять собой ЛСЭ, в котором в качестве волны обратной связи используется квазикритическая мода. В таком варианте селекция мод по оси x будет не столь эффективна, как в случае связи с бегущими в поперечном направлении волнами, но появится возможность увеличения расстояния между пластинами, то есть дополнительная селективность по оси y . Существует и альтернативная возможность, когда ленточный электронный поток синхронно взаимодействует с квазикритической модой, а бегущие волны осуществляют вывод энергии. В этом случае может быть реализована схема гиротрона или оротрона с поперечным дифракционным выводом энергии. Такой вывод должен улучшать синхронизацию излучения поперек электронного потока.

Продemonстрируем здесь селективные возможности двумерного планарного брэгговского резонатора, основанного на связи бегущих и квазикритических мод в рамках прямого трехмерного моделирования. Общий вид резонатора показан на рис. 16, *а*. Резонатор был рассчитан на связь двух ТЕМ волн (которые теперь будем полагать распространяющимися в $\pm x$ направлениях) с квазикритической волной TM_1 планарного волновода.

Резонатор возбуждался падающим на торец коротким электромагнитным импульсом с поперечной структурой, представляющей собой ТЕМ волну. Моделирование показывает, что после нескольких проходов волн по резонатору происходит формирование собственных мод, которым в спектре поля соответствуют выделенные линии. На рис. 16, *б* видно установление главной моды с частотой, близкой к частоте квазикритической моды TM_1 $f \approx 30$ ГГц. Распределение поля квазикритической моды в плоскости резонатора (x, z) показано на рис. 16, *в* на примере компоненты электрического поля E_x (которая отсутствует в падающей волне). Потоки энергии вовне, связанные с этой волной, малы по сравнению с потоками, связанными с ТЕМ волнами, которые вытекают в $\pm x$ направлениях. Соответственно на рис. 16, *г* представлено распределение компоненты электрического поля E_y , которая обусловлена вытекающими в $\pm x$ направлениях ТЕМ волнами и имеет структуру, близкую к стоячей волне.

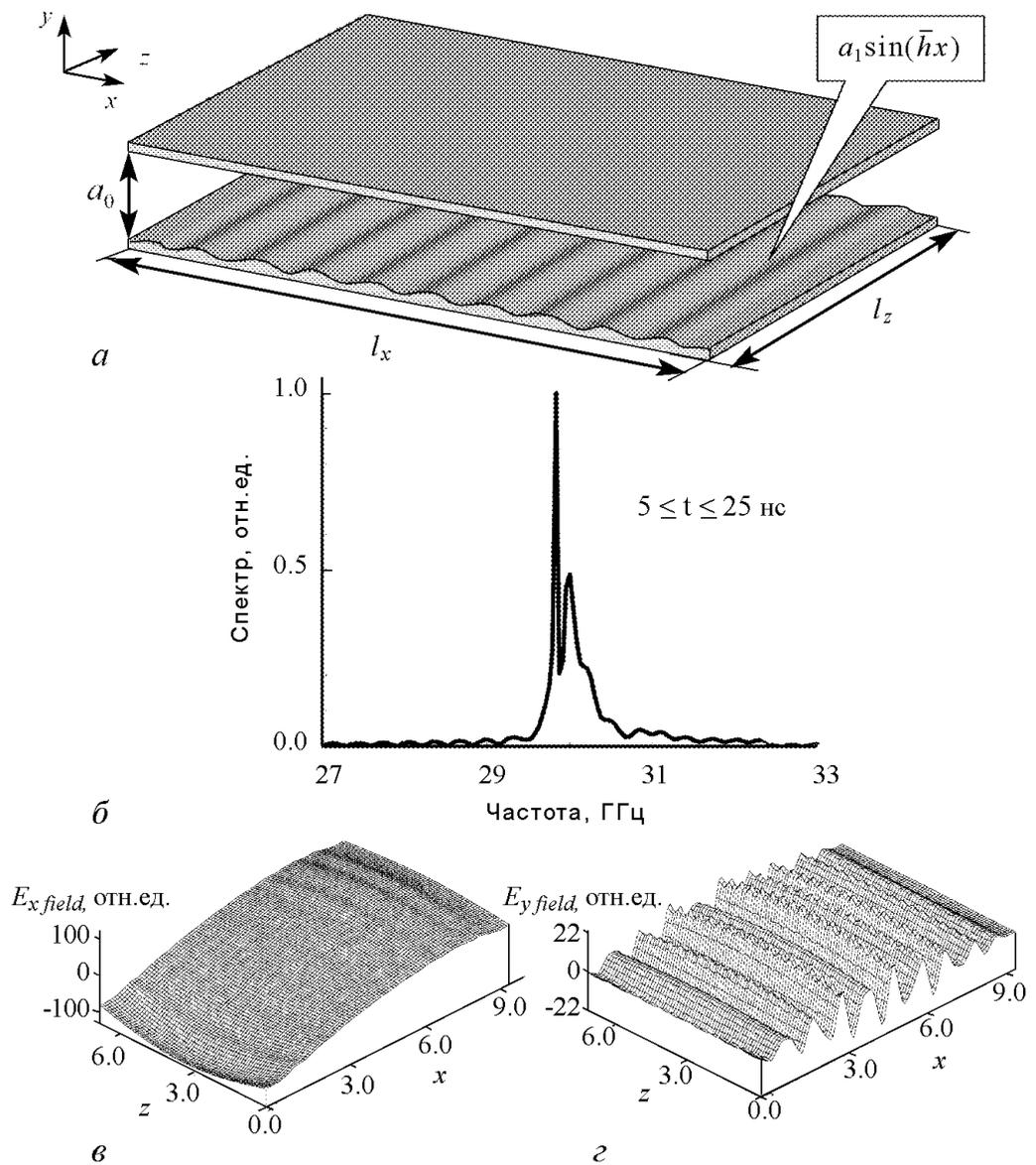


Рис. 16. *a* – схема планарного двумерного брэгговского резонатора, основанного на связи бегущих и квазикритической мод. Результаты моделирования его возбуждения коротким начальным электромагнитным импульсом: *б* – спектр ВЧ-поля в точке, расположенной внутри резонатора; пространственные распределения полей E_x (*в*) и E_y (*г*) в момент времени $t = 10$ нс; $l_x = l_z = 10$ см, $d = 1$ см, глубина гофра $2a_1 = 0.04$ см, расстояние между пластинами $a_0 = 0.5$ см

На рис. 17, 18 представлены результаты моделирования в рамках PIC кода КАРАТ планарной модели гиротрона, в котором благодаря нанесению параллельной направлению движения винтового электронного пучка мелкой гофрировки осуществляется поперечный (по отношению к направлению ведущего магнитного поля) дифракционный вывод энергии. Электронный пучок непосредственно взаимодействует с квазикритической TM_1 волной. Последняя вследствие наличия брэгговской структуры связывается с поперечно распространяющимися ТЕМ волнами, осуществляющими вынос энергии в $\pm x$ направлениях. Одновременно эти волны должны способствовать синхронизации излучения различных частей ленточного пучка. В приве-

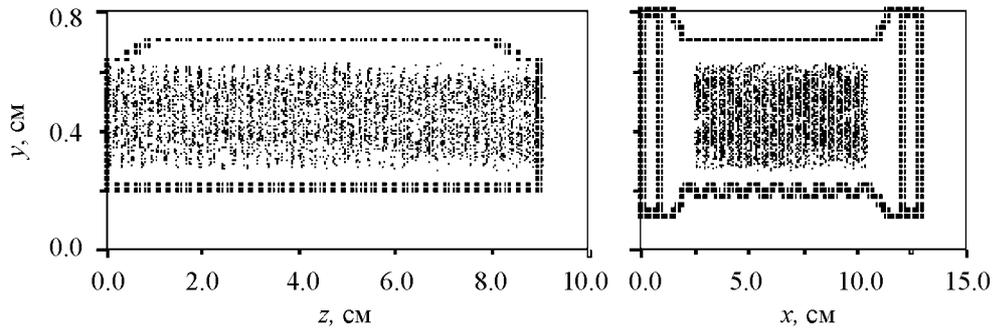


Рис. 17. Схема планарного гиротрона с поперечным выводом энергии в разных сечениях

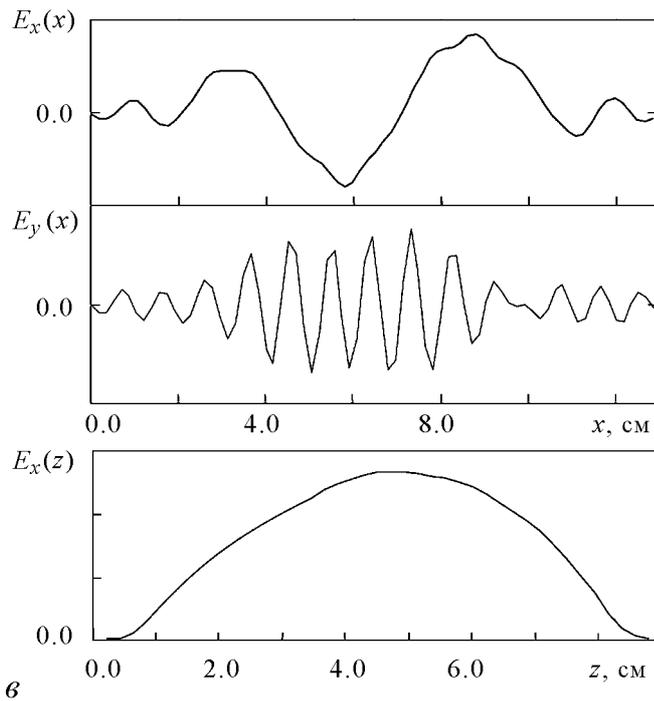
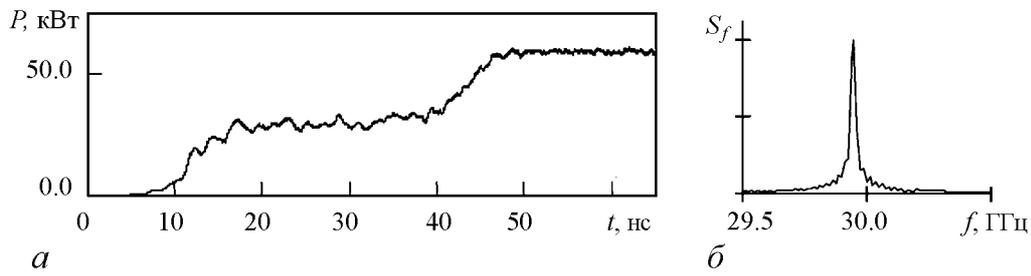


Рис. 18. Моделирование установления стационарного режима генерации в гиротроне с поперечным выводом энергии $I = 8$ А, $U = 50$ кВ, $H = 11.4$ кЭ, питч-фактор $g = 1.5$, частота излучения 30 ГГц. *a* – временная зависимость мощности, выводимая в поперечном направлении; *б* – спектр излучения; *в* – структуры полей рабочей ТМ₁ моды $E_x(x, z)$, а также структура $E_y(x)$ выводной ТЕМ волны в стационарном режиме генерации

денном примере стабильный одночастотный режим генерации реализуется при поперечном размере резонатора до 20 длин волн. Следует отметить, что в «горячем» моделировании возбуждалась мода с большим числом вариаций по поперечной координате x , чем представлено на рис. 16, где среднее сечение волновода оставалось неизменным. В таких условиях максимальной добротностью обладает мода, показанная на рис. 16, *в, з*. Это определяется некоторым различием моделей. В модели гиротрона имело место расширение волновода вне пространства взаимодействия (см. рис. 17) с целью обеспечения более эффективного согласования границ области моделирования. Такая нерегулярность приводила к частичным отражениям и, вообще говоря, ухудшала селективность. Моделирование холодного резонатора с неоднородным профилем, аналогичным изображенному на рис. 17, показывает сближение добротностей мод с различным числом вариаций поля по поперечной координате x . Соответственно реализация одномодового режима генерации в анализируемой модели гиротрона обусловлена, в том числе, электронной селекцией мод.

5. Использование планарных брэгговских волноводов в усилителях с поперечным током

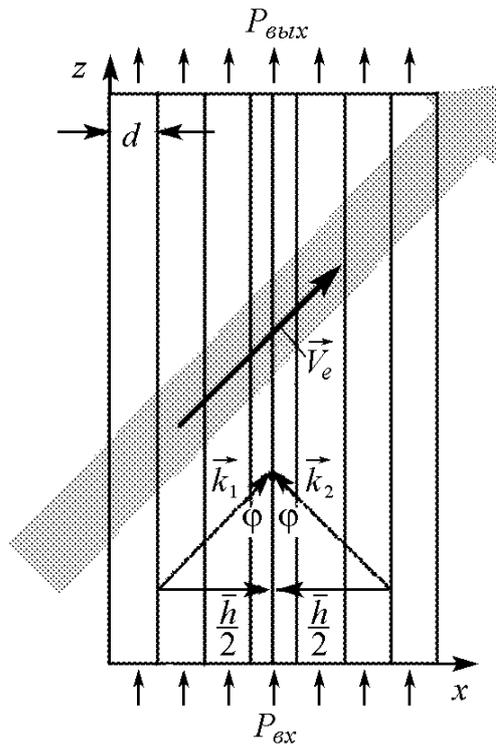


Рис. 19. Схема ЛСЭ усилителя с поперечным током с канализацией излучения в планарном брэгговском волноводе со связью ТМ и ТЕМ волн

в случае, когда обе связанные парциальные волны имеют проекцию волновых векторов (k_{1z}, k_{2z}) , перпендикулярную вектору решетки \vec{h} (рис. 19). При этом возникает поток электромагнитной энергии $\vec{P}_{\text{вых}}$ (вектор Пойнтинга), направленный поперек трансляционного вектора решетки, и, соответственно, вдоль гофрировки. Таким образом,

Усилитель с поперечным током является одной из известных в электронике СВЧ схем, отличительной особенностью которых является поперечное распространение излучения относительно ленточного электронного потока. В случае прямолинейных электронных потоков такой тип взаимодействия может быть реализован с помощью косо гофрировки замедляющей системы [18]. Для криволинейных потоков синхронное взаимодействие может поддерживаться в гладких электродинамических системах [19, 20]. При этом одной из проблем является искажение под влиянием электронного потока поперечной структуры поля усиливаемой волны [20]. Для решения этой проблемы могут быть предложены открытые волноводы на основе одномерных брэгговских структур, которые обладают высокой селективностью по поперечному индексу мод.

Волноводное распространение в брэгговской структуре реализуется в случае,

брэгговский волновод планарной геометрии представляет собой две параллельные пластины, на внутренние поверхности которых нанесена мелкая гофрировка вдоль направления распространения волны. При наличии скачка фазы гофрировки по осевому сечению волновода происходит формирование моды локализованной вблизи дефекта гофрировки, которая обладает значительно меньшими дифракционными потерями по сравнению с другими волноводными модами.

Брэгговская структура (см. рис. 19) может быть использована в качестве волноведущего тракта в ЛСЭ усилителе с поперечным током. Усиливаемое поле может быть представлено в виде двух парциальных волн

$$\vec{A}_s = \vec{y}^0 \operatorname{Re} \left\{ \left(A_+(x, z) e^{i\bar{h}x/2} + A_-(x, z) e^{-i\bar{h}x/2} \right) e^{i\omega t - ih_0 z} \right\}. \quad (33)$$

Предполагается, что электронный пучок синхронен с попутной ему волной A_+ , соответствующее условие синхронизма имеет вид

$$\omega - kv_{\parallel} \approx \Omega_b, \quad (34)$$

где $\Omega_b = 2\pi v_{\parallel}/d_u$ – частота осцилляция электронов в поле ондулятора с периодом d_u , $k = \omega/c$, $\bar{h} = 2\pi/d$, $h_0 = \sqrt{k^2 - \bar{h}^2}/4$, d – период гофрировки. Важно подчеркнуть, что брэгговский волновод позволяет обеспечить максимально возможное доплеровское преобразование частоты вверх, несмотря на то, что групповая скорость усиливаемой волны направлена под значительным углом к поступательной скорости частиц.

Процесс усиления монохроматического сигнала в ЛСЭ усилителе с поперечным током описывается уравнениями, аналогичными уравнениям ЛСЭ генераторов с традиционными одномерными брэгговскими резонаторами [21] при замене временной переменной на пространственную,

$$\begin{aligned} \frac{h_0}{k} \frac{\partial A_+}{\partial Z} + \frac{\bar{h}}{2k} \frac{\partial A_+}{\partial X} + i\alpha A_- &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0, \\ \frac{h_0}{k} \frac{\partial A_-}{\partial Z} - \frac{\bar{h}}{2k} \frac{\partial A_-}{\partial X} + i\alpha A_+ &= 0, \\ \left(\frac{h_0}{k} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\bar{h}}{2k} \frac{\partial}{\partial X} \right)^2 \theta &= \operatorname{Re}(A_+ e^{i\theta}). \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь $X = k_0 Cx$, $Z = k_0 Cz$, C – параметр усиления, коэффициент связи волн определяется соотношением

$$\alpha = \frac{a_1 \bar{h}}{2ka_0 C} \sin \varphi, \quad (36)$$

где φ – угол между направлением распространения парциальных волн (см. рис.19). Для моделирования удобно ввести новые независимые переменные $\xi = \frac{2k}{\bar{h}} X$,

$\zeta = \frac{k}{2h_0}Z - \frac{k}{h}X$, представив систему (35) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_+}{\partial \xi} + i\alpha A_- &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0, \\ \frac{\partial A_-}{\partial \zeta} - \frac{\partial A_-}{\partial \xi} + i\alpha A_+ &= 0, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} &= \text{Re}(A_+ e^{i\theta}).\end{aligned}\quad (37)$$

Если входной сигнал представляет собой волновой пучок, падающий на систему под углом, который соответствует направлению распространения парциальной волны A_+ , то граничные условия к уравнениям (37) примут вид

$$\left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \delta, \quad \theta|_{\xi=0} = \theta_0 \in [0, 2\pi), \quad A_+|_{\zeta=0} = A_0(\xi), \quad A_+|_{\xi=0} = 0, \quad A_-|_{\xi=L_x} = 0, \quad (38)$$

где δ - расстройка синхронизма. Результаты моделирования процесса усиления представлены на рис. 20. Коэффициент усиления

$$\Gamma = \frac{\int_0^{L_x} (|A_+(\xi)|^2 + |A_-(\xi)|^2) d\xi}{\int_0^{L_x} |A_0(\xi)|^2 d\xi}$$

в рассматриваемом примере при оптимальной расстройке синхронизма достигает 30 дБ. Моделирование показывает, что уже на начальном этапе формируется распределение поля, близкое по структуре к полю основной моды брэгговского волновода. Эта структура в силу достаточно высоких фильтрующих свойств сохраняется в процессе усиления (рис. 20, б).

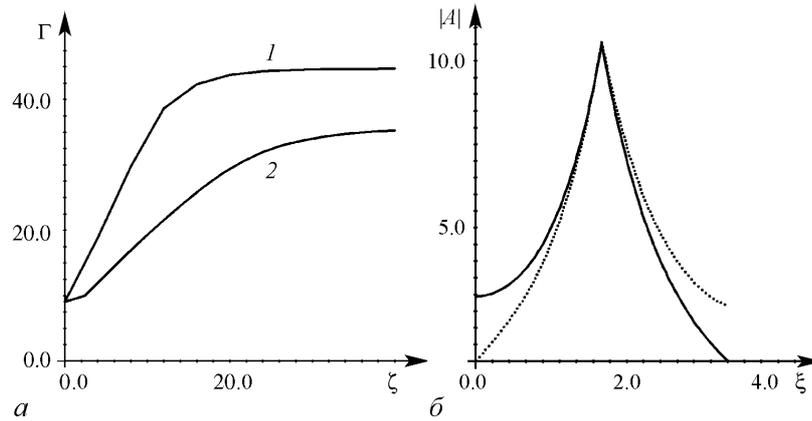


Рис. 20. Моделирование ЛСЭ усилителя с поперечным током $L_x = 3$, $\alpha = 1.5$: а - зависимость коэффициента усиления от продольной координаты при $\delta = 1.5$ (кривая 1) и при $\delta = 0$ (кривая 2); б - поперечная структура парциальных волн A_+ (пунктир) и A_- (сплошная кривая) усиливаемой моды на выходе $L_z = 50$ при оптимальной расстройке $\delta = 1.5$

Заключение

Приведенный анализ демонстрирует, что концепция двумерной распределенной обратной связи обладает значительным инновационным потенциалом. На ее основе может быть реализовано значительное число новых схем генерации когерентного излучения пространственно развитыми активными средами различной физической природы. В данной статье эти возможности были исследованы, прежде всего, на примере черенковского излучения ленточных электронных потоков, а также двумерных лазерных сред. В последнем случае следует отметить, что лазеры с одномерной распределенной обратной связью, реализуемые с помощью одноперiodических брэгговских структур, в настоящее время получили достаточно широкое распространение в квантовой электронике. Проведенный выше анализ показывает перспективность двумерного, а в принципе, и трехмерного обобщения этого механизма с целью получения мощного пространственно-когерентного излучения.

Следует подчеркнуть, что большинство рассмотренных выше моделей не может претендовать на исчерпывающее описание тех или иных источников когерентного излучения. Скорее их целью является демонстрация направлений исследований, конечным итогом которых может явиться как прибор с уникальными параметрами выходного излучения, так и развитие методов описания сложной динамики двумерных, а в будущем и трехмерных активных сред. При этом, если в большинстве современных исследований, посвященных динамике автоколебательных систем, основной интерес сосредоточен на отыскании и анализе сложной (в том числе хаотической) динамики в рамках предельно простых моделей с минимальным числом степеней свободы, то основной целью данного обзора и последующих исследований в значительной степени является обратная задача. А именно, ставится вопрос о получении простых одночастотных режимов генерации в сложных распределенных автоколебательных системах с предельно большим числом степеней свободы. Как показывает проведенный анализ, использование различных модификаций двумерных брэгговских структур позволяет решить задачу управления пространственно-временными характеристиками излучения большого класса автоколебательных систем.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ (№04-02-17118, №05-02-17036, №06-02-17129), а также INTAS и фонда «Династия».

Библиографический список

1. *Arzhannikov A.V., Ginzburg N.S., Peskov N.Yu., e.a.* FEL driven by high current ribbon REB and operated with two-dimensional feedback (conception and interim results) // Abstracts 14th Int. FEL Conf., Kobe, Japan, 1992. P. 214.
2. *Ginzburg N.S., Peskov N.Yu., Sergeev A.S.* Two-dimension double-periodic Bragg resonators for free-electron lasers // *Opt. Comm.* 1993. Vol. 96, № 4-6. P. 254.
3. *Гинзбург Н.С., Песков Н.Ю., Сергеев А.С.* Электродинамические свойства двумерных брэгговских резонаторов // *Радиотехника и электроника.* 1995. Т. 40, № 3. С. 401.
4. *Ginzburg N.S., Peskov N.Yu., Sergeev A.S., e.a.* Theory and design of a free-electron maser with two-dimensional feedback driven by a sheet electron beam // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60. P. 935.

5. Гинзбург Н.С., Сергеев А.С., Песков Н.Ю. и др. К теории планарных ЛСЭ с комбинированными резонаторами, составленными из одномерного и двумерного брэгговских зеркал // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26, № 16. С. 8.
6. Гинзбург Н.С., Песков Н.Ю., Сергеев А.С. и др. Генерация пространственно когерентного излучения в лазерах на свободных электронах с двумерной распределенной обратной связью // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. XLIV, № 5-6. С. 533.
7. Гинзбург Н.С., Денисов Г.Г., Кузиков С.В. и др. Особенности спектра мод планарных структур с двумерной брэгговской гофрировкой (теория и «холодный» эксперимент) // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. Т. XLVIII, № 10-11. С. 842.
8. Arzhannikov A.V., Ginzburg N.S., Ivanenko V.G., *e.a.* Radiation spectrum of planar FEM at different conditions of 2D distributed feedback realization // Proc. 6th Int. Workshop «Strong Microwaves in Plasmas», N.Novgorod, Russia, 2005. Vol. 1. P. 271.
9. Konoplev I.V., Cross A.W., Ginzburg N.S., *e.a.* Study of co-axial free electron maser based on two-dimensional distributed feedback // Proc. 6th Int. Workshop «Strong Microwaves in Plasmas», N.Novgorod, Russia, 2005. Vol. 1. P. 208.
10. Kogelnik H., Shank C.V. Coupled-wave theory of distributed feedback lasers // J. Appl. Phys. 1972. Vol. 43. P. 2327.
11. Ярич А. Введение в оптическую электронику // Москва: «Высшая школа», 1983.
12. Ковалев Н.Ф., Петелин М.И., Резников М.Г. // «Резонатор», СССР, Авторское свидетельство № 720592; Б. № 9, 1980.
13. Bratman V.L., Denisov G.G., Ginzburg N.S., Petelin M.I. FEL's with Bragg reflection resonators: cyclotron auto-resonance maser versus ubitrons // IEEE J. Quant. Electr. 1983. Vol.9, E-19. P. 282.
14. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н. Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1037.
15. Андреев А.В. Оптическое сверхизлучение: новые идеи и новые эксперименты // УФН. 1990. Т. 160, № 12. С. 1.
16. Ginzburg N.S., Malkin A.M., Peskov N.Yu., *e.a.* Improving selectivity of free electron maser with 1D Bragg resonator using coupling of propagating and trapped waves // Phys. Rev. ST-AB. 2005. Vol. 8. P. 040705.
17. Ginzburg N.S., Malkin A.M., Peskov N.Yu. Mode selection in FEL-oscillators based on coupling of propagating and trapped waves // Proc. 6th Int. Workshop «Strong Microwaves in Plasmas», N.Novgorod, Russia, 2005. Vol. 1. P. 233.
18. Dann D.A., Harman W.A., Field L.M., Kino G.S. Theory of the Transverse-Current Traveling-Wave Tube // Proc. IRE. 1956. P. 879.
19. Жураховский В.А. Нелинейная теория гирорезонансной лампы поперечной волны (гирос-ЛПВ) // Радиотехника и электроника. 1969. Т. 14, № 1. С. 128.
20. Быков Ю.В., Гапонов А.В., Петелин М.И. К теории МЦР-усилителя с бегущей волной и поперечным электронным потоком // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. XVII, № 8. С. 1219.
21. Ginzburg N.S., Peskov N.Yu., Sergeev A.S., *e.a.* Mode competition and control in free electron devices with one and two dimensional Bragg resonators // IEEE Trans. on Plasma Science. 1996. Vol. 24, № 3. P. 770.

22. *Peskov N. Yu., Ginzburg N. S., Denisov G. G., et al.* Peculiarities of mode spectrum of planar 2D Bragg resonator (theory and experiment) // Proc. 6th Int. Workshop «Strong Microwaves in Plasmas», N.Novgorod, Russia, 2005. Vol. 1. P. 321.

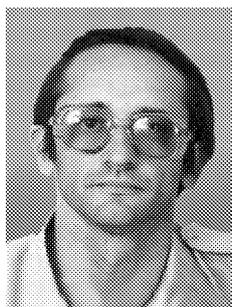
*Институт прикладной физики РАН
Нижний Новгород*

Поступила в редакцию 28.06.2006

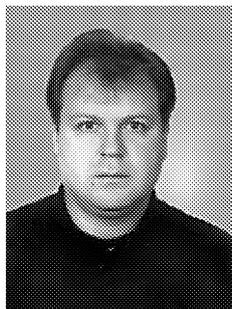
THE USE OF PLANAR BRAGG STRUCTURES FOR GENERATION AND AMPLIFICATION OF COHERENT RADIATION FROM SPATIALLY-EXTENDED ACTIVE MEDIA

*N.S. Ginzburg, N.Yu. Peskov, A.S. Sergeev, V.R. Baryshev,
K.E. Dorfman, V.Yu. Zaslavsky, A.M. Malkin, R.M. Rozental*

A number of novel possibilities of generation and amplification of spatially coherent radiation using planar Bragg structures is reviewed. In particular, we study schemes of Cherenkov oscillators with 2D distributed feedback, and a possibility of using this mechanism for synchronization of radiation of active laser media. Electronic amplifiers based on planar Bragg waveguides are discussed as well.



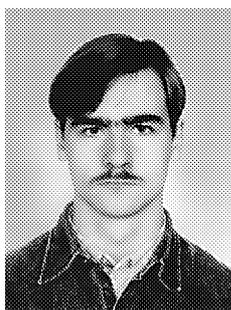
Гинзбург Наум Самуилович – родился 1952 году, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, заведующий Сектором теории релятивистских электронных СВЧ-приборов Института прикладной физики РАН. Область интересов – лазеры на свободных электронах, мазеры на циклотронном резонансе, релятивистские гиротроны, многочастотные процессы в электронных СВЧ-приборах с распределенным взаимодействием, эффекты канализации и сверхизлучения, плазменные и пучковые неустойчивости. Лауреат премии им. Ленинского комсомола (1980), Государственной премии РФ (2003). Автор более 200 статей и обзоров по указанной проблематике.



Песков Николай Юрьевич – родился в 1966 году, старший научный сотрудник, зам. заведующего Отделом высокочастотной релятивистской электроники Института прикладной физики РАН, кандидат физико-математических наук. Область научных интересов – теоретическое и экспериментальное исследование лазеров и мазеров на свободных электронах, их нелинейная динамика, электронная оптика, электродинамические системы. Награжден медалью РАН для молодых ученых (2000). Опубликовал около 100 статей в отечественных и зарубежных журналах.



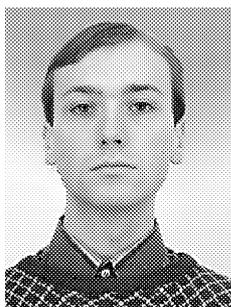
Сергеев Александр Сергеевич – родился в 1957 году. Окончил механико-математический факультет Горьковского государственного университета в 1980 году, работает в Институте прикладной физики РАН, старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук. Область научных интересов – математическое моделирование сложной динамики в приборах электроники больших мощностей. Автор более 150 статей в отечественных и зарубежных журналах.



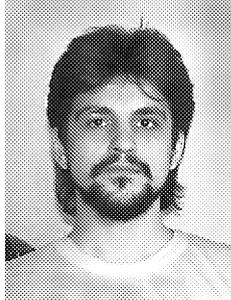
Барышев Владимир Рудольфович – 1982 года рождения, младший научный сотрудник Института прикладной физики РАН, аспирант. Область научных интересов – лазеры на свободных электронах, мазеры на циклотронном резонансе, эффекты канализации и сверхизлучения.



Дорфман Константин Евгеньевич – родился в 1986 году, в 2002 году поступил, а в 2006 году получил степень бакалавра в Высшей школе общей и прикладной физики при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского. Лаборант-исследователь Института прикладной физики РАН. Область научных интересов – релятивистская высокочастотная электроника, селекция мод, нелинейная оптика.



Заславский Владислав Юрьевич – родился в 1981 году, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2004). Младший научный сотрудник Института прикладной физики РАН, аспирант. Область научных интересов – релятивистская высокочастотная электроника, мазеры на свободных электронах, электродинамика, селекция мод. Автор около 15 публикаций в российских и зарубежных изданиях.



Малкин Андрей Михайлович – родился в 1979 году, окончил Высшую школу общей и прикладной физики при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского (2002). Младший научный сотрудник Института прикладной физики РАН, стипендиат фонда «Династия». Область научных интересов – релятивистская высокочастотная электроника, нелинейная динамика. Автор около 20 публикаций в российских и зарубежных изданиях.



Розенталь Роман Маркович – родился в 1977 году. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (1999), после окончания работает в Институте прикладной физики РАН. Область научных интересов – исследование динамики мощных релятивистских приборов вакуумной СВЧ-электроники. Опубликовал более 20 статей в отечественных и зарубежных журналах.



ВЫРАЖЕНИЕ СТРУКТУРЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ В ТЕРМИНАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

А.В. Макаренко

В работе даны исходные положения нового подхода к описанию и анализу структурных свойств динамических процессов. Подход базируется на сформулированном и доказанном утверждении, что структура гладкого динамического процесса во временной области описывается параметрами состояния, скорости и кривизны. Суть подхода заключается в двух ключевых операциях. Во-первых, исходный процесс разлагается на компоненты, описывающие структуру его искривленности, – для этого в работе предложена соответствующая система функций, порождаемых угловым оператором. Во-вторых, по этим функциям рассчитываются различные предложенные конфигурационные, энергетические и информационные параметры.

Введение

Существует достаточно широкий класс прикладных задач, для решения которых требуется анализ структурных свойств и характеристик динамических процессов. Как правило, изучению доступна единственная ограниченная по длительности реализация процесса, измеренная с ограниченной точностью и содержащая конечное число отсчетов, а адекватная математическая модель динамической системы, порождающей процесс, – не известна. Подобные задачи относят к числу проблем с очень высокой априорной неопределенностью [1, 2].

Под структурой динамического процесса в первом приближении возможно понимать набор характерных свойств процесса, которые определяют форму его траектории в расширенном пространстве состояний.

В принципе, существует глубоко проработанный метод математического описания и анализа структуры динамических процессов – это частотно-временной анализ, существующий в настоящее время в двух разновидностях: тригонометрическое

преобразование Фурье [2, 3] и вейвлет-преобразование [4, 5]. Фактически частотно-временной анализ выдает две характеристики: амплитуду и фазу соответствующей гармоники в случае преобразования Фурье [2] и интенсивность и фазу соответствующего временного масштаба в каждый момент времени в случае вейвлет-преобразования [4]. Однако возможности тригонометрического преобразования Фурье не всегда отвечают требованиям задачи. Как уже было отмечено выше, длительность реального динамического процесса всегда ограничена ($\Delta T < \infty$), следовательно ширина спектра бесконечна ($\Delta\omega \rightarrow \infty$), а при спектральном анализе отсечка верхней частотной границы на некотором уровне в значительной степени произвольна [3]. Тем не менее известно, что точность представления и анализа динамического процесса вблизи точки его включения t_1 непосредственно связана с точностью представления его спектральной функции при $\omega \rightarrow \infty$, то есть точный анализ процесса подразумевает бесконечно широкий интервал частот [6, 7]. В свою очередь, нестационарность динамического процесса требует проведения двойного частотно-временного преобразования Фурье, что предполагает наличие реализаций процесса весьма значительной длины [2].

От этих недостатков несколько свободен вейвлет-анализ, но он, в свою очередь, также обладает двумя существенными ограничениями. Во-первых, существует очень сильная зависимость результатов анализа от сочетания исследуемого динамического процесса и материнского вейвлета, а процедура его выбора до сих пор не формализована [5]. Во-вторых, наличие краевых эффектов при вейвлет-преобразовании ограничивает возможности анализа длинновременных масштабов на концах процесса [8].

Таким образом, набор этих недостатков и ограничений определяет преимущества анализа структурных характеристик динамического процесса именно во временной области. Дополнительно отметим следующий факт. Элементарное состояние динамического процесса задается парой $\{x, t\}$, а весь процесс полностью описывается множеством таких пар, упорядоченных по t [1]. С учетом того, что переменная t является по отношению к процессу внешним параметром, из принципов термодинамического формализма [9] следует, что именно анализ во временной области дает максимальное количество информации об особенностях динамики процесса.

Другим направлением исследования характеристик динамических процессов являются подходы хаотической динамики, и, в частности, процедура реконструкции аттрактора методом запаздывания [10, 11]. Этот метод дает неплохие результаты для систем малой размерности (обычно $m < 6$), однако для коротких реализаций отсутствует аналитический критерий адекватности синтезированного аттрактора. Для реализаций значительной длины возможно вычисление корреляционного интеграла и оценка корреляционной размерности системы по наблюдаемой. Тем не менее на практике весьма часто попадают плохо обусловленные временные ряды, не позволяющие получить приемлемую оценку корреляционной размерности, и аттрактор приходится выбирать визуально. В итоге процедура не поддается автоматизации и в результат анализа изначально вносятся ошибки, связанные с «человеческим фактором».

В настоящее время наиболее распространенным способом изучения структуры динамических процессов во временной области является анализ их фазовых портретов в пространстве «состояние – скорость» (x, \dot{x}) . Данный метод был развит на

основе подходов качественной теории дифференциальных уравнений [12, 13]. Он весьма информативен, позволяет однозначно обнаруживать точки экстремумов и перегибов на траектории процесса в расширенном пространстве состояний (на фазовой кривой имеется точка возврата), но не определяет точки изгиба траектории процесса (фазовая кривая также плавно изгибается). Надо заметить, что точке изгиба вообще уделяют мало внимания, а именно она отделяет области с качественно различной динамикой. Действительно, если рассмотреть два типа функций: экспоненту и гиперболу, то можно увидеть, что на графиках этих кривых выделяются две характерные области – область с низкой скоростью и область с высокой скоростью изменения функции. Фактически точка изгиба является точкой «фазового перехода» в динамике системы. Следовательно, необходим инструментарий для ее обнаружения, ибо сам по себе анализ производных не позволяет выделять на траектории динамического процесса точки изгиба.

На основании изложенного вполне логично представляется разработка других методов, информационно дополняющих вышеописанные.

В настоящей работе предложен новый подход к описанию и анализу структурных свойств динамических процессов, заключающийся в разложении исходного процесса на компоненты, характеризующие структуру его искривленности, и в расчете по ним различных конфигурационных, энергетических и информационных параметров.

Статья написана по материалам докладов [14, 15].

1. Постановка задачи

Введем в рассмотрение динамический процесс $x(t)$ со следующими свойствами:

$$x \in X \subset R^1, \quad t \in T \subset R^1, \quad x(t) \in C^\infty \quad \forall t \in (-\infty, +\infty). \quad (1)$$

Исходя из того, что динамический процесс описывается множеством пар $\{x, t\}$, упорядоченных по t , дополнительно определим Ω – расширенное метрическое пространство состояний динамического процесса: $\Omega = X \times T, \Omega \subset R^2$.

По физическим предпосылкам введем в пространстве Ω евклидову метрику, задав норму $dl^2 = dx^2 + dt^2$. Следовательно, пространство Ω будет представлять из себя евклидову плоскость P с декартовыми координатами (x, t) и ортонормированными базисными ортами e_1, e_2 , где любая точка M изображается радиусом-вектором $r = xe_1 + te_2$, направленным из начала координат O в точку с координатами (x, t) .

На основе вышеперечисленных предпосылок и фактов поставим задачу синтеза анализатора структуры динамического процесса $x(t)$ в пространстве Ω по геометрическим свойствам его траектории в этом пространстве.

2. Анализатор структуры динамического процесса

2.1. Основная идея подхода. Кинематическая интерпретация динамического процесса $x(t)$ позволяет рассматривать его как движение изображающей точки $M(x, t)$ в пространстве Ω . Из этого факта по аналогии с аналитической механикой [16] следует Утверждение.

Утверждение 1. Для динамического процесса $x(t)$ существует три фундаментально различных типа движения изображающей точки M в расширенном пространстве состояний Ω :

- покой;*
- равномерное движение;*
- движение с ускорением (в общем случае – переменным).*

Причем первые два типа перемещения точки M в пространстве Ω порождают прямую, третий – кривую. В случае покоя траектория динамического процесса параллельна оси времени.

Из дифференциальной геометрии известно [17], что у прямой касательная сохраняет одно и то же направление для всех точек, и совпадает с ней самой, а кривая этим свойством не обладает, чем фундаментально отличается от прямой. На основе этого факта с учетом Утверждения 1. может быть сформировано следующее Предложение.

Предложение 1. Структура динамического процесса, а следовательно, и форма его траектории в пространстве Ω , во временной области должны описываться и анализироваться в терминах «состояние – скорость – искривленность», как по мгновенным значениям соответствующих параметров, так и по их эволюции во взаимосвязи за определенный период времени.

Заметим, что в случае неравномерного движения изображающей точки M вид кривой, описывающей траекторию динамического процесса, зависит от значения его производных второго и более высоких порядков. Следовательно, классификацию, приведенную в Утверждении 1., можно продолжить и далее, рассматривая производные выше второго порядка, но подобное расширение уже не будет, в нашем смысле, фундаментальной классификацией траекторий, а будет подразделять некоторые частные виды кривых. Тем не менее из этого следует важное Замечание.

Замечание 1. Искривленность траектории динамического процесса в расширенном пространстве состояний может быть охарактеризована различными величинами, в состав которых входят производные различных порядков (не ниже второго).

Как известно, общепринятой, классической мерой искривленности гладкой плоской кривой является классическая кривизна [17]:

$$K_x = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{(1 + \dot{x}^2)^3}}, \quad (2)$$

где точка сверху означает дифференцирование по переменной t .

Тем не менее применение величины K_x для оценивания искривленности траектории динамического процесса во временной области затруднено по двум причинам.

1) Кривизна K_x явно измеряет искривленность $x(t)$ не в функции времени, а в функции длины дуги траектории, которая уже не является для динамического процесса внешним параметром, следовательно, истинная информация об особенностях динамики процесса $x(t)$ во временной области в величине K_x маскирована.

2) На основе предпосылок вывода классической кривизны как меры искривленности гладкой плоской кривой затруднительно построить систему функций, обладающую единой логической базой и позволяющую измерять нелинейные характеристики динамического процесса более высокого порядка согласно Замечанию 1..

Для снятия этих противоречий и ограничений применим следующий геометрический подход, обладающий внутренней строгостью, целостностью и логической корректностью.

2.2. Вывод базовых функций, описывающих искривленность процесса.

Как уже было отмечено выше, у прямой касательная сохраняет одно и то же направление для всех точек, и совпадает с ней самой, а кривая этим свойством не обладает, чем фундаментально отличается от прямой. Следовательно, вполне возможно применить эти положения дифференциальной геометрии для идентификации типов движения изображающей точки M траектории динамического процесса $x(t)$ и анализа его свойств, взяв в качестве индикатора угол наклона касательной к кривой $x(t)$ в точке t относительно оси времени, так называемую угловую функцию $\alpha(t) = \arctg \dot{x}(t)$. В свою очередь, непостоянство $\alpha(t)$ во времени, а следовательно, и искривленность $x(t)$ можно анализировать по поведению касательной уже к $\alpha(t)$, через соответствующую угловую функцию $\varphi(t) = \arctg \dot{\alpha}(t)$.

Подобные рассуждения на основе математической индукции можно последовательно повторить, что в конечном итоге приведет к совокупности угловых функций, характеризующих структуру искривленности динамического процесса $x(t)$. Эту совокупность можно представить как результат действия на динамический процесс $x(t)$ углового оператора G_k^a

$$\alpha(t) = G_1^a x(t), \varphi_0(t) = G_2^a x(t), \varphi_i(t) = G_{i+2}^a x(t). \quad (3)$$

Оператор G_k^a порядка k имеет следующий вид (умножение производится слева):

$$G_k^a = \prod_{i=1}^k \arctg \left[(c_s)_i \frac{d}{dt} \right], \quad (4)$$

где $k = 1, 2, \dots, N_G, N_G \rightarrow +\infty, c_s > 0$ – масштабный коэффициент, служит для управления чувствительностью анализатора, в общем случае для каждой компоненты (угловой функции) он имеет независимое уникальное значение, определяемое целью и условиями анализа.

Отметим, что значения выражений (3) в общем случае ограничены главными углами арктангенса, которые простираются в диапазоне от $-\pi/2$ до $+\pi/2$. Это свойство оказывается чрезвычайно полезным при исследовании вопроса о характеристиках искривления траектории динамического процесса при стремлении его производных к бесконечному значению (что аналогично методу исследования динамических систем на сфере Пуанкаре [13]). Тем не менее при ограниченной динамике процесса зоны насыщения (горизонтальные асимптоты), присутствующие на графике арктангенса, оказывают негативное влияние на разрешающую способность анализатора. С целью компенсации этого эффекта дополнительно определим угловой оператор TG_k^a

$$TG_k^a = \operatorname{tg} G_k^a. \quad (5)$$

Оператор TG_k^a также порождает систему функций, характеризующих искривленность сигнала $x(t)$ в пространстве Ω :

$$\alpha^T(t) = TG_1^a x(t), \varphi_0^T(t) = TG_2^a x(t), \varphi_i^T(t) = TG_{i+2}^a x(t). \quad (6)$$

Функции для операторов TG_1^a и TG_2^a выпишем в явном виде:

$$\alpha^T(t) = c_{ss}\dot{x}(t), \quad (7a)$$

$$\varphi_0^T(t) = c_{ss}c_{as} \frac{\ddot{x}(t)}{1 + c_{ss}^2 \dot{x}^2(t)}. \quad (7b)$$

Заметим, что величина (7б) по своей сути и структуре аналогична классической кривизне (2), но измеряет искривленность динамического процесса не в функции приращения длины траектории, а в функции времени явно, из чего следует Определение.

Определение 1. Динамической кривизной процесса $x(t)$ в точке $M(x(t), t)$, заданного в классе (1), называется предел отношения приращения угла касательной к приращению независимого аргумента t , когда точка $M'(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$ стремится к точке $M(x(t), t)$:

$$\varphi_0^T(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (8)$$

К Определению 1. следует Замечание.

З а м е ч а н и е 2. Условие корректности динамической кривизны как характеристики искривленности траектории динамического процесса в пространстве Ω требует, чтобы при $\Delta t \rightarrow 0$ точка $M'(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$ стремилась к точке $M(x(t), t)$. Это условие накладывает ограничение на конечность абсолютного значения скорости процесса, то есть $|\dot{x}| < \infty$. Данное ограничение на самом деле несколько не сужает область применимости угловых функций в качестве характеристик искривленности динамического процесса, так как динамика всех реальных систем ограничена сверху конечными скоростями, порожденными так или иначе конечной скоростью света [18], и скорость передачи информации также конечна [19].

Таким образом, на основании вышеизложенного операторы G_k^a и TG_k^a можно рассматривать как фильтры, действующие на динамический процесс во временной области и выделяющие из исходного процесса отдельные структурные компоненты его динамики, каждая из которых по-своему характеризует исходный процесс и вносит свой вклад в его свойства.

2.3. Аналитический базис структуры динамического процесса. Для введения обоснованной конструкции аналитического базиса, задающего структуру динамического процесса, необходимо формализовать Предложение 1.. Для этого рассмотрим интуитивно-логическое представление понятия «структура». В толково-словообразовательном словаре русского языка [20] это понятие определяется следующим образом: *структура* (с латинского *structura* – строение, расположение) – это определенное взаиморасположение и связь составных частей, элементов чего-либо, характеризующие строение чего-либо (рис. 1, а).

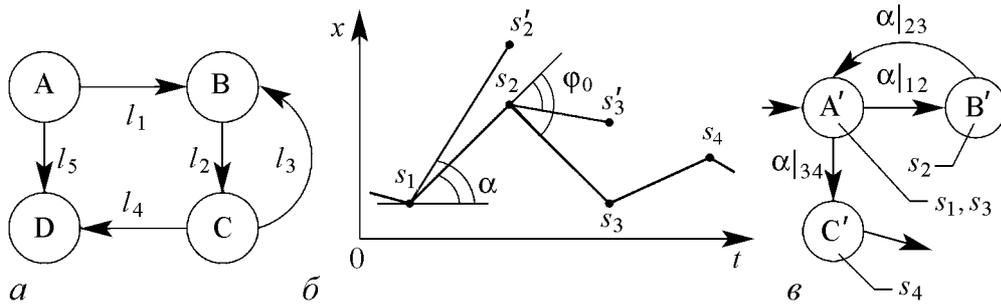


Рис. 1. A-D – элементы системы, l_1-l_5 – связи между элементами системы (а); s_1-s_4 – реализовавшиеся состояния, а s'_2, s'_3 – альтернативные состояния динамического процесса, причем переходы между состояниями определяются параметрами: α – двучечный переход и φ_0 – трехточечный переход (б); A'-C' – уникальные состояния (элементы) процесса в пространстве состояний, $\alpha|_{ij}$ – переходы между уникальными состояниями (связи между элементами) процесса (в).

Рассматривая динамический процесс $x(t)$ как систему [21], следует указать, что составными частями (элементами) процесса являются его состояния $\{x, t\}$, а связями между элементами – переходы между состояниями $\{x_1, t_1\} \rightarrow \{x_2, t_2\}$, причем переходы между состояниями однозначно определяются углом наклона касательной α . Иллюстрация этого положения приведена на рис. 1, б-в.

Таким образом, структура динамического процесса $x(t)$ формально, в первом приближении, описывается множеством пар $\{x, \alpha^T\}$. В свою очередь, структура процесса $\alpha^T(t)$ описывается множеством пар $\{\alpha^T, \varphi_0^T\}$. Для процесса $\varphi_i^T(t)$ структура естественно задается множеством пар $\{\varphi_i^T, \varphi_{i+1}^T\}$. Для обобщения этой последовательности рассуждений необходимо учесть ряд Замечаний.

Замечание 3. Процессы $\alpha^T(t)$ и $\varphi_i^T(t)$ не являются изолированными, а представляют собой динамические компоненты процесса $x(t)$.

Замечание 4. Структура процессов $\alpha^T(t)$ и $\varphi_i^T(t)$ определяет структуру переходов между состояниями динамического процесса $x(t)$.

Из обобщения вышеизложенного следует Утверждение.

Утверждение 2. Структура динамического процесса $x(t)$, заданного в классе (1), во временной области определяется двумя составляющими:

статической структурой – определяет структуру состояний процесса, и описывается множеством пар $\{x, \alpha^T\}$;

динамической структурой – определяет структуру переходов между состояниями процесса и описывается множеством объединений пар $\{\{\alpha^T, \varphi_0^T\}, \{\varphi_0^T, \varphi_1^T\}, \dots, \{\varphi_{N_G-1}^T, \varphi_{N_G}^T\}\}$.

К Утверждению 2. следует Замечание.

Замечание 5. Минимальным носителем динамической структуры процесса $x(t)$, заданного в классе (1), является множество пар $\{\alpha^T, \varphi_0^T\}$.

На основе Утверждения 2. сформируем в классе угловых функций (6) аналитический базис, задающий структуру динамического процесса,

$$P_i^T = \{x, \alpha^T, \varphi_0^T, \dots, \varphi_i^T\}. \quad (9)$$

Для практических задач анализа динамической структуры процесса наибольший интерес представляют первые две компоненты α^T и φ_0^T , как наиболее физически осмысленные. Так, величина $\alpha^T(t)$ фактически описывает скоростные свойства (мгновенную крутизну), а $\varphi_0^T(t)$ – нелинейные свойства (мгновенную кривизну) фронта динамического процесса в момент времени t , что с учетом Замечания 5. позволяет выделить из (9) минимальный базис

$$P_0^T = \{x, \alpha^T, \varphi_0^T\}, \quad (10)$$

который через линейные проективные ортогональные преобразования [22] разлагается на три подпространства:

- $\{x, \alpha^T\}$ – пространство статической структуры процесса;
- $\{\alpha^T, \varphi_0^T\}$ – пространство динамической структуры процесса;
- $\{x, \varphi_0^T\}$ – K_0 -фазовое пространство.

Для функций, определяющих в пространстве P_0^T уникальную фазовую траекторию, справедливы следующие интегральные соотношения:

$$\alpha^T(t) = \operatorname{tg} \left(\int_{t_0}^t \varphi_0^T(t) dt + \operatorname{arctg} \alpha^T(t_0) \right), \quad (11a)$$

$$x(t) = \int_{t_0}^t \alpha^T(t) dt + x(t_0). \quad (11b)$$

Следующая Теорема утверждает эквивалентность динамических процессов, обладающих идентичной динамической структурой. Теорему приведем без доказательства.

Теорема 1. Динамические процессы с идентичной динамической структурой в базисе $\{\alpha^T, \varphi_0^T\}$, заданные в классе (1), эквивалентны с точностью до аддитивной константы и линейного сдвига по времени

$$x_1(t) = x_2(t + \Delta t_2) + \Delta x_2 = \dots = x_n(t + \Delta t_n) + \Delta x_n. \quad (12)$$

Из Теоремы 1. вытекает важное Следствие.

Следствие 1. Динамическая структура процесса, заданная в базисе $\{\alpha^T, \varphi_0^T\}$, инвариантна к линейному сдвигу динамического процесса в пространстве Ω .

Изучение свойств минимального аналитического базиса, задающего структуру динамического процесса, приводит к следующим замечаниям.

Замечание 6. Пространство $\{x, \alpha^T\}$ с точностью до линейного масштабирующего множителя c_{ss} топологически эквивалентно классическому фазовому пространству $\{x, \dot{x}\}$. Следовательно, пространство P_0^T обобщает фазовое пространство $\{x, \dot{x}\}$.

Замечание 7. Анализ в базисе P_0^T снижает требования по дифференцируемости динамического процесса $x(t)$ до класса C^2 .

Для придания пространству $\{\alpha^T, \varphi_0^T\}$ аналитичности введем в рассмотрение носитель динамической структуры процесса в этом пространстве – комплексную функцию действительного переменного

$$\gamma^T(t) = \alpha^T(t) + i\varphi_0^T(t). \quad (13)$$

3. Аналитические характеристики динамической структуры процесса

3.1. Мультипликатор динамической структуры. Введем в рассмотрение величину

$$\beta_2^T = \alpha^T \varphi_0^T, \quad (14)$$

которую назовем мультипликатором динамической структуры процесса.

Изучение мгновенных значений мультипликатора позволяет находить специфические точки траектории динамического процесса. Помимо точек экстремума и перегиба, которые также обнаруживаются изучением производных процесса [23], анализ процесса в терминах оператора G_k^a позволяет находить и определять местоположение точки изгиба траектории динамического процесса, которая, как уже указывалось во введении, отделяет область с «медленной» динамикой от области с «быстрой» динамикой.

Следующая Теорема определяет условия существования точки изгиба траектории динамического процесса в расширенном пространстве состояний. Теорему приведем без доказательства.

Теорема 2. Для того чтобы в пространстве Ω точка $M(x(t), t)$ траектории динамического процесса $x(t)$, заданного в классе (1), была точкой изгиба, необходимо и достаточно выполнение следующего условия для одного из n :

$$TG_1^a \left\{ \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right\} TG_2^a \left\{ \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right\} \neq 0 \quad \text{при} \quad TG_2^a \left\{ \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right\} \rightarrow \text{extremum}, \quad (15)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ – определяет порядок дифференциального оператора.

Кроме выделения точки изгиба, величина β_2^T способна определять локальные свойства динамического процесса:

$\beta_2^T < 0$ – локально сходящийся процесс;

$\beta_2^T > 0$ – локально расходящийся процесс;

$\beta_2^T = 0$ – процесс имеет наилучшую локальную предсказуемость. В этом случае он в точке t либо задается линейной функцией и $\varphi_0^T(t) = 0$, либо $\dot{x}(t) = 0$.

Это положение наглядно иллюстрирует рис. 2.

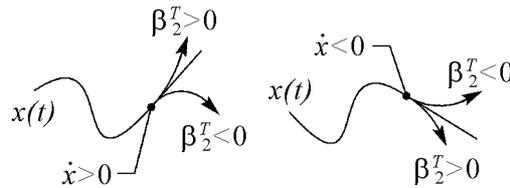


Рис. 2. Иллюстрация к определению понятия локальной сходимости/расходимости динамического процесса

3.2. Интегральные меры. В работе [24] установлено, что сложность непериодического динамического процесса характеризуется суммарной искривленностью его траектории в пространстве Ω . В этом случае мерой сложности процесса $x(t)$ является мера его полной динамической кривизны

$$C_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_0^T(t)| dt. \quad (16)$$

По своей геометрической сути величина C_φ показывает полный угол поворота касательного вектора к кривой $x(t)$ (вектора ее скорости), когда внешний параметр t пробегает свои значения на указанном промежутке. Таким образом, если траектория динамического процесса – прямая линия, то $C_\varphi = 0$. Следовательно, полная динамическая кривизна показывает, насколько форма траектории динамического процесса в пространстве Ω отличается (усложняется) относительно прямой линии. Из чего величина φ_0^T определяется как скорость нарастания сложности динамического процесса.

Интегральную меру возможно ввести и для мультипликатора динамической структуры (14)

$$B_2^T = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_2^T(t) dt. \quad (17)$$

Величина B_2^T характеризует сбалансированность динамики процесса «в целом». Действительно, по знаку этой величины можно судить о преобладании в динамике процесса участков:

- $B_2^T < 0$ – локально сходящихся;
- $B_2^T > 0$ – локально расходящихся;
- $B_2^T = 0$ – динамический процесс скомпенсирован.

На основе (17) для α^T и φ_0^T компонент возможно ввести меру ортогональности

$$r_{\alpha\varphi}^c = \frac{B_2^T}{\sqrt{A_{2b}^T} \sqrt{\Phi_{2b}^T}}, \quad \cos(\theta_{\alpha\varphi}^v) = r_{\alpha\varphi}^c, \quad (18)$$

где $\theta_{\alpha\varphi}^v$ – угол между компонентами α^T и φ_0^T в функциональном пространстве [25].

Причем интегралы

$$A_{2b}^T = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha^T(t)]^2 dt, \quad (19a)$$

$$\Phi_{2b}^T = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_0^T(t)]^2 dt \quad (19b)$$

имеют самостоятельное информационное значение – они определяют полную энергию соответствующей компоненты динамического процесса. Дополнительно, для изучения нестационарных и переходных процессов возможно определение локальных аналогов мер (19)

$$A_{2bl}^T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha^T(t') w_\alpha(t-t')]^2 dt', \quad (20a)$$

$$\Phi_{2bl}^T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_0^T(t') w_\varphi(t-t')]^2 dt', \quad (20b)$$

где w_α и w_φ – некие неотрицательные оконные функции. Если $w_\alpha(t) = \delta(t)$, где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, то локальные величины будут равняться мгновенным. Для повышения избирательности анализатора ширину окна локализации можно сделать адаптивной, зависящей от мгновенной энергии той или иной компоненты.

Дополнительно можно определить меру линейной памяти компонент α^T и φ_0^T

$$r_\alpha(t_1, t_2) = \frac{1}{A_{2b}^T} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^T(t+t_1) \alpha^T(t+t_2) dt, \quad (21a)$$

$$r_\varphi(t_1, t_2) = \frac{1}{\Phi_{2b}^T} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0^T(t+t_1) \varphi_0^T(t+t_2) dt, \quad (21б)$$

а также меру линейной связи между компонентами α^T и φ_0^T [22]

$$r_{\alpha\varphi}(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{A_{2b}^T} \sqrt{\Phi_{2b}^T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^T(t+t_1) \varphi_0^T(t+t_2) dt. \quad (22)$$

3.3. Спектральные характеристики. Как уже отмечалось во введении, спектральный анализ представляет собой мощный и отработанный аппарат исследования структуры динамических процессов, поэтому представляется вполне логичным применить его и к анализу структурных компонент динамических процессов, определив ряд величин:

$$S_k(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[v - TG_k^a x(t)] dt, \quad (23a)$$

$$F_k(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} TG_k^a x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (23б)$$

$$W_k(s_t, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} TG_k^a x(t') \bar{\psi}(s_t, t, t') dt', \quad (23в)$$

где $\bar{\psi}(s_t, t, t')$ – комплексно-сопряженная вейвлетная функция [4].

Таким образом, характеристики, введенные выражениями (23), позволяют выявлять ведущие индексы (v), частоты (ω) и временные масштабы (s_t), оказывающие превалирующее влияние на формирование динамической структуры анализируемого процесса.

3.4. Эффективные временные величины. Введем в рассмотрение плоскую кривую с постоянным коэффициентом динамической кривизны ($\varphi_0^T = \text{const}$). Из (16) следует, что это кривая с постоянной скоростью нарастания сложности и находится она как общее решение автономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x} - \frac{c_{ss}}{c_{as}} \varphi_0^T \dot{x}^2 - \frac{\varphi_0^T}{c_{ss} c_{as}} = 0, \quad (24)$$

следующего из формулы (76). Решение уравнения (24) запишется в следующем виде:

$$x_\varphi(t) = C_2 - \frac{c_{as}}{c_{ss} \varphi_0^T} \ln \left| \cos \left(\frac{\varphi_0^T}{c_{as}} t + C_1 \right) \right|, \quad (25)$$

где постоянная

$$C_1 = \operatorname{arctg}(c_{ss} \dot{x}_0) - \frac{\varphi_0^T}{c_{as}} t_0, \quad (26)$$

а постоянная C_2 находится из выражения (25) подстановкой в него x_0 и t_0 . График плоской кривой с постоянным коэффициентом динамической кривизны приведен на рис. 3.

Анализ выражения (25) показывает, что функция x_φ периодическая, с периодом

$$\Delta T_\varphi = c_{as} \frac{\pi}{|\varphi_0^T|}, \quad (27)$$

и имеет полюсы в моменты времени

$$t_p[k] = \frac{c_{as}}{\varphi_0^T} \left(\pi k + \frac{\pi}{2} - C_1 \right), \quad (28)$$

где $k \in (-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty)$. В случае $\varphi_0^T > 0$ – функция в пределах периода выпукла вниз, а если $\varphi_0^T < 0$ – выпукла вверх, при $\varphi_0^T = 0$ – функция представляет собой прямую, параллельную оси t .

По своему смыслу величина ΔT_φ аналогична радиусу классической кривизны [23]

$$R_K = \frac{1}{|K_x|} \quad (29)$$

и ее можно интерпретировать как эффективную длительность элементарной нелинейности динамического процесса.

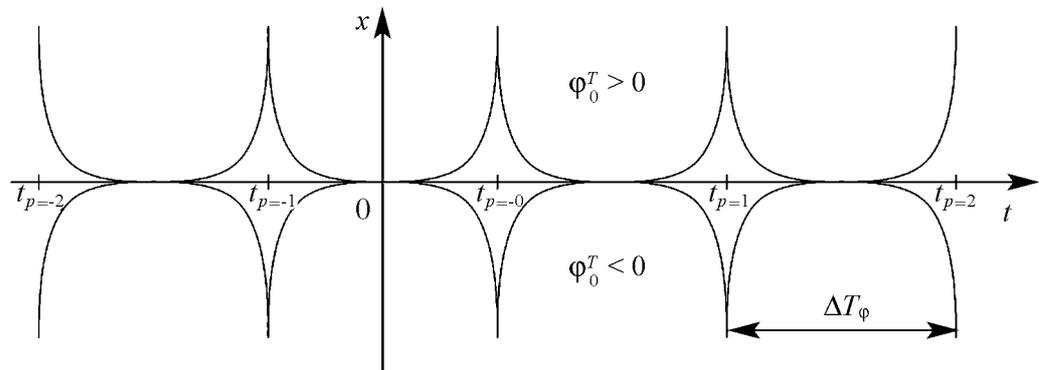


Рис. 3. График кривой с постоянным коэффициентом динамической кривизны

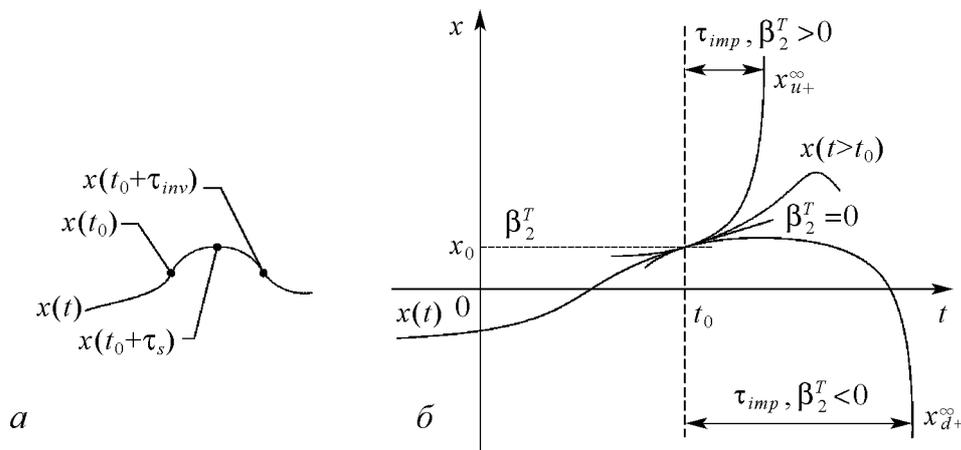


Рис. 4. Состояния динамического процесса, описываемые величинами: τ_s и τ_{inv} – успокоение и инверсия (а); τ_{imp} – выброс траектории, x_{u+}^{∞} и x_{d+}^{∞} – полюса функции x_{φ} (б)

Для локально сходящихся процессов ($\beta_2^T < 0$) можно определить характеристические эффективные времена: τ_s – время выхода процесса в состояние успокоения, $\dot{x}(t_0 + \tau_s) = 0$; τ_{inv} – время перехода процесса в состояние инверсии, $\dot{x}(t_0 + \tau_{inv}) = -\dot{x}(t_0)$. Смысл этих величин иллюстрирует рис. 4, а, и выражаются они через формулы

$$\tau_s = c_{as} \left| \frac{\text{arctg}(c_{ss} \dot{x})}{\varphi_0^T} \right|, \quad (30a)$$

$$\tau_{inv} = 2 \tau_s. \quad (30b)$$

Дополнительно вводится еще и эффективное время выброса траектории динамического процесса ($|x| \rightarrow \infty$):

$$\tau_{imp} = \frac{c_{as} [\pi - 2 \text{sign}(\beta_2^T) \text{arctg} |\dot{x} c_{ss}|]}{2 |\varphi_0^T|}, \quad (31)$$

смысл этой величины иллюстрирует рис. 4,б.

Выводы

В представленной работе предложен новый подход к описанию и анализу структуры динамических процессов, обладающих свойствами гладкости и непрерывности. Основная идея подхода заключается в разложении исходного процесса на компоненты, описывающие структуру его искривленности и расчета по ним различных конфигурационных, энергетических и информационных характеристик. Совокупность компонент, каждая из которых несет информацию об определенных свойствах процесса, формируется посредством действий на исходный процесс совокупности угловых операторов соответствующих порядков. Суть углового оператора заключается в формировании функции, выражающей угол наклона касательной к кривой относительно оси времени.

В работе формализовано понятие «структура динамического процесса» и показано, что она определяется статической и динамической составляющими. Во временной области структура может быть описана и проанализирована в терминах «состояние – скорость – искривленность» как по мгновенным значениям соответствующих параметров, так и по их эволюции во взаимосвязи за определенный период времени. Для динамической составляющей введены две базовые структурные компоненты процесса: α^T – характеризует скоростные свойства, ее возможно интерпретировать как мгновенную крутизну фронта процесса; φ_0^T – выражает нелинейные свойства процесса, его мгновенную искривленность.

Различные дополнительные аналитические характеристики – мультипликатор динамической структуры, набор эффективных временных величин, интегральные меры – позволяют достаточно полно описать динамическую структуру процесса. Кроме того, анализ в терминах оператора G_k^a позволяет находить и определять местоположение точки изгиба траектории динамического процесса, которая, как указано в работе, является точкой «фазового перехода» в эволюции системы и отделяет область с «медленной» динамикой от области с «быстрой» динамикой.

Введение такой характеристики, как динамическая кривизна траектории процесса в расширенном пространстве состояний позволило формализовать понятие «сложность динамического процесса» и предложить для непериодических процессов меру сложности, которая оперирует конкретной реализацией процесса, сравнительно легко вычисляется и имеет обоснованный физический смысл.

В работе предложена и обоснована конструкция аналитического базиса, задающего структуру динамического процесса, причем показано, что широко применяемое в качественной теории динамических систем фазовое пространство (x, \dot{x}) является его частным случаем. Более того, предполагается, что анализ динамического процесса в терминах оператора G_k^a способен дополнить процедуру Такенса по конструированию фазового пространства и построению возможного аттрактора процесса по его временной реализации.

Предложенный подход изначально ориентирован на анализ динамических процессов, не имеющих адекватной математической модели, и не требует каких-либо априорных знаний о самом процессе, а функционирование анализатора во временной области позволяет анализировать структуру переходных и нестационарных процессов без потери информации, что является его несомненным достоинством. Необходимо также отметить, что результаты анализа динамических процессов по изложенному в работе подходу поддаются достаточно простой физической интерпретации, однако эта простота ни в коем случае не умаляет важности последующих выводов о характере исследуемого процесса. Причем положения описанного подхода переносятся и на анализ векторных динамических процессов, и на случай процессов с разрывами, и на стохастические процессы. При этом описанный метод не является заменой классических анализаторов и не умаляет их достоинств, напротив, он органично интегрируется с ними, позволяя посмотреть на анализируемый сигнал с несколько иной точки зрения – с точки зрения геометрии его траектории в расширенном пространстве состояний.

Автор благодарит Д. И. Трубецкова за проявленное внимание к работе и поддержку.

Библиографический список

1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука. Гл. Ред. Физ.-мат. Лит., 1987. 712 с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных / Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 540 с., ил.
3. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 312 с., ил.
4. Чуи К. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001. 412 с.
5. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с.
6. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: Связь, 1957.
7. Астанин Л.Ю., Костылев А.А. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. М.: Радио и связь, 1989. 192 с.
8. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. Т. 166, № 11. С. 1145-1170.
9. Леонтович М.А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука, 1983. 416 с.
10. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
11. Takens F. Lecture Notes in Mathematics / Eds D. Rand, L.-S. Young. New York: Springer-Verlag, 1981. P. 366.
12. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 3-е, испр. М.: Едиторал УРСС, 2004. 552 с.
13. Баутин Н.Н., Леонтович М.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. 2-е изд., доп. М.: Наука, 1990. 488 с.
14. Макаренко А.В. Об одном подходе к описанию и анализу формы и структуры сигнала // Доклады I международной научной конференции «Сверхширокополосные сигналы и сверхкороткие импульсы в радиолокации, связи, акустике». Суздаль, ВлГУ, 2005.
15. Макаренко А.В. Геометрический подход к описанию и анализу динамической структуры сигнала // Материалы XIII Зимней школы-семинара по СВЧ-электронике и радиофизике / Под общ. ред. Д. И. Трубецкого. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2006. С.119.
16. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
17. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 432 с.
18. Einstein A. Zur Elektrodynamik der bewegter Korper // Ann. der Physik. 1905. Vol. 17. С. 891.
19. Хармут Х. Применение методов теории информации в физике / Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 540 с., ил.
20. Ефремова. Т.Ф. Новый словарь русского языка. Толково-словообразовательный. М.: Русский язык, 2000.

21. *Крайзмер Л.П.* Техническая кибернетика. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Энергия, 1964.
22. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
23. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. Изд. 8-е. М.: Физматлит, 2003. 680 с.
24. *Макаренко А.В.* Критерий сложности сигнала – динамическая кривизна его траектории в расширенном пространстве состояний // Доклады VIII международной научно-технической конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение». Москва, ИПУ РАН, 2006.
25. *Пугачёв В.С.* Лекции по функциональному анализу. М.: Изд-во МАИ, 1996. 744 с.

Северо-Кавказский горно-металлургический институт, (Государственный технологический университет), Владикавказ

Поступила в редакцию 30.06.2006

A NEW APPROACH OF FORM AND SIGNAL STRUCTURE DESCRIPTION AND ANALYSIS

A.V. Makarenko

A new approach to describe and analysis the structural and forming characteristics in time domain of signals are presented here. This approach is based on the decomposition of initial process into individual components, which are characteristic of the structure of its curving, and corresponding calculations for different configuration, energy and information parameters.



Макаренко Андрей Викторович – родился в Орджоникидзе (1977). Закончил Северо-Осетинский государственный университет (1998) и аспирантуру при математическом факультете СОГУ (2001). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук по специальности «системный анализ, управление и обработка информации» (СКГТУ, 2002). Заместитель директора ОИЦ СКГМИ (ГТУ). Научные интересы – непараметрическая идентификация по временным рядам нелинейных объектов в стохастических средах; анализ структуры динамических процессов; хаотические системы и природа структурообразования красных (фликкер) шумов. Имеет 16 научных публикаций, участник 7 НИОКР, научный руководитель 12 инженерно-технических проектов. E-mail: avm@skgtu.ru



НЕЛИНЕЙНЫЙ МИР ДЛЯ МОЛОДЫХ

Д.И. Трубецков, А.П. Кузнецов

Рано или поздно... приходится разрешать университеты, научные общества, создавать исследовательские центры, обсерватории, лаборатории, создавать кадры, людей мысли и знания... Им нужна атмосфера – атмосфера всеобщего и всеобъемлющего познания, пронизанная творческим напряжением.

А. и Б. Стругацкие

В журнале открывается новая рубрика, посвященная проблемам образования и взаимодействия науки и образования. Почему возникла необходимость в этом?

Получение новых знаний – это процесс творческий и поэтому интересный. В школе, да и в вузе, однако, возникает некоторая «коллизия» около такого утверждения. Действительно, получаемые знания являются новыми только для самих учащихся. Поэтому обучение – это, вообще говоря, процесс усвоения уже давно методически «проработанных» понятий, законов и подходов. Поэтому зачастую знания, полученные в школе и в вузе, выглядят как своего рода «справочник». В то же время очень хочется воспитать юного исследователя, способного творчески мыслить и самостоятельно получать новые результаты. В первую очередь это относится к тем молодым людям, которые выберут науку своей профессией. Но это важно и для всех, кто живет в динамичном, развивающемся мире. Поэтому, чем раньше начать соответствующий процесс формирования личности исследователя, тем лучше.

В этом плане необходимо, чтобы творческое обучение представляло собой *некоторую систему*, а не набор отдельных фрагментов. Это требует именно создания системы, обеспечения ее функционирования и «самоорганизации». Ключевым здесь является формирование определенной атмосферы духовного подъема и творческого заряда.

Еще один очень существенный момент состоит в том, что современная наука позволяет формировать *целостную картину мира*, а не набор фрагментов, отвечающих отдельным учебным дисциплинам. Для нас очень важным представляется внедрение в образование, начиная со школьного уровня, *идей нелинейной динамики*. Причина состоит в том, что это – междисциплинарное направление, которое объединяет разные естественные науки, проникает в гуманитарные науки, а значит, формирует целостную картину мира.

В рамках новой рубрики планируется помещать материалы, которые будут способствовать внедрению подходов и методов науки в образование, формированию исследовательской системы образования, пропаганде современных достижений науки (в первую очередь нелинейной динамики и синергетики), причем, начиная со школьного уровня. Приглашаем всех коллег, интересующихся проблемами взаимодействия науки и образования, принять участие в работе новой рубрики. Будем рады как обзорным материалам, так и описанию методик, задач, творческих заданий, информации о летних физико-математических школах, конференциях для молодых исследователей и др. Надеемся также на сотрудничество с преподавателями и руководителями лицеев и гимназий, разделяющих концепции творческой и исследовательской системы образования.



«НЕЛИНЕЙНЫЙ МИНИМУМ» В ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Ю.В. Седова

Представлено введение в теорию дискретных отображений, доступное учащимся старших классов и студентам младших курсов. Продемонстрирована взаимосвязь и «взаимопомощь» дискретного и непрерывного описания динамических систем. Приведенные физические примеры облегчают восприятие материала. Решение представленных компьютерных задач даст возможность сформировать достаточно емкий «пакет» программ, который может быть использован в исследовательской работе.

Если в физике и химии где-то и существует простота, то заведомо не в микроскопических моделях. Она, скорее, кроется в идеализированных макроскопических представлениях, например, о простых движениях типа гармонического осциллятора.

И. Пригожин

В те времена легко было совершать фундаментальные открытия. И все их и делали потихоньку.

В.И. Арнольд

Введение

Приобщиться к современной физике очень непросто. Обычно это возможно на старших курсах вуза, когда освоено определенный объем знаний и навыков. Однако в конце XX века появилась новая наука – нелинейная динамика, идеи которой можно изложить и на доступном школьнику уровне. Более того, широкое внедрение компьютеров и их постоянное совершенствование позволяют школьникам, ну если не получать новые результаты, то, по крайней мере, чувствовать себя причастными к современным исследованиям.

Нелинейная динамика описывает эволюцию во времени нелинейных (динамических) систем. Поэтому на первый взгляд кажется, что в основе нелинейной динамики и учения о динамическом хаосе должна лежать глубокая теория дифференциальных уравнений. Это действительно так. Однако существуют другие математические объекты – разностные уравнения или отображения, демонстрирующие многие феномены нелинейной динамики. Отображения гораздо проще для исследования и компьютерного моделирования, так как на их изучение тратится радикально

меньше компьютерного времени. Отображения лишь недавно стали входить в «инструментарий» исследователей, и поэтому они не представлены в школьном курсе физики. Как мы убедимся, на самом деле отображения очень естественно могут появляться при решении даже простых физических задач.

Предлагаемый ниже материал представляет собой своего рода «программу с комментариями», основанную на опыте проведения кружка по нелинейной динамике в Лицее прикладных наук Саратова и индивидуальных занятий со школьниками, интересующимися компьютерным моделированием. Этот материал может служить также определенным дополнением к курсу «Колебания, волны, синергетика» ЛПН. С другой стороны, он дает минимум знаний и навыков (и компьютерных программ, что очень важно), необходимых для начала исследовательской работы в области теории дискретных отображений. Конечно, в рамках журнальной статьи невозможно дать все необходимые методические пояснения. Поэтому мы представляем здесь лишь «канву» изложения. Освоение каждого пункта программы предполагает и решение достаточного количества задач, прежде всего в виде самостоятельного компьютерного моделирования. Опять-таки из-за ограниченного объема мы приводим только некоторые задачи в конце статьи, а также формулируем и часть основного материала в виде задач. Отметим, наконец, что данная программа рассчитана примерно на два года систематических занятий и что непрерывность образования весьма удобна тем, что последние, самые сложные разделы могут быть закончены уже в вузе. Рекомендуемая литература представлена в ссылках [1-9].

1. Разностные уравнения или отображения на примере школьной задачи

Практически в любом сборнике олимпиадных задач по физике можно найти задачу о бесконечной цепочке резисторов. Она формулируется так: чему равно сопротивление цепочки резисторов, которая состоит из одинаковых звеньев (рис. 1).

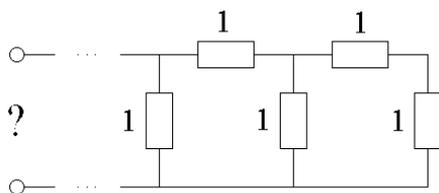


Рис. 1. Бесконечная цепочка сопротивлений

Итак, обратимся к нашей схеме, отсчитаем конечное число звеньев n и $n + 1$ от правого конца цепочки (рис. 2, а).

Сопротивления всех резисторов одинаковы; полагаем их равными единице. Из рисунка хорошо видно, что схема эквивалентна показанной на рис. 2, б. Если x_n – сопротивление цепочки из n звеньев, легко получаем

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n + 2}.$$

Это и есть простейший пример отображения.

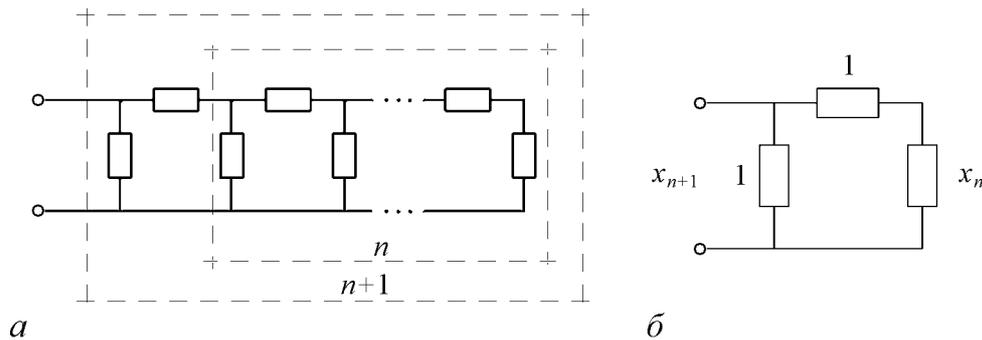


Рис. 2. Иллюстрация построения дискретного отображения

В общем виде одномерное отображение задается соотношением

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Это отображение называется одномерным, поскольку в него входит одна переменная – x . Дискретное отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ является, по-видимому, простейшим примером *динамической системы*. Смысл этого термина раскрывается просто: отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ по заданному начальному значению x_1 позволяет определить все последующие значения переменной – x_2, x_3 и т.д. Действительно, $x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2)$...

Свойства отображений удобно иллюстрировать на *итерационной диаграмме*. Для ее построения надо, прежде всего, на плоскости (x_n, x_{n+1}) изобразить график функции $f(x)$ и биссектрису (рис. 3).

Задавшись теперь начальным значением x_1 , можно по графику найти $x_2 = f(x_1)$. Затем это значение переносится на биссектрису и процедура повторяется. Возникает своеобразная лесенка, иллюстрирующая ход итераций. Как видно из графика, наше отображение имеет предельное значение или, как говорят, *неподвижную точку*, то есть такую точку, в которой $x_0 = f(x_0)$.

Нетрудно получить, что $x_0^2 + x_0 - 1 = 0$. Отсюда следует ответ к задаче об определении сопротивления бесконечной цепочки:

$$x_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618034.$$

Исследуем теперь поведение системы в случае, когда значения переменной близки к предельному значению x_0 . Положим поэтому $x_{n+1} = x_0 + \tilde{x}_{n+1}$ и $x_n = x_0 + \tilde{x}_n$, где знаком «тильда» обозначены малые добавки к x_0 . Тогда из $x_{n+1} = f(x_n)$ имеем

$$x_0 + \tilde{x}_{n+1} = f(x_0 + \tilde{x}_n) \approx f(x_0) + f'(x_0) \tilde{x}_n \Rightarrow$$

$$\tilde{x}_{n+1} = f'(x_0) \tilde{x}_n.$$

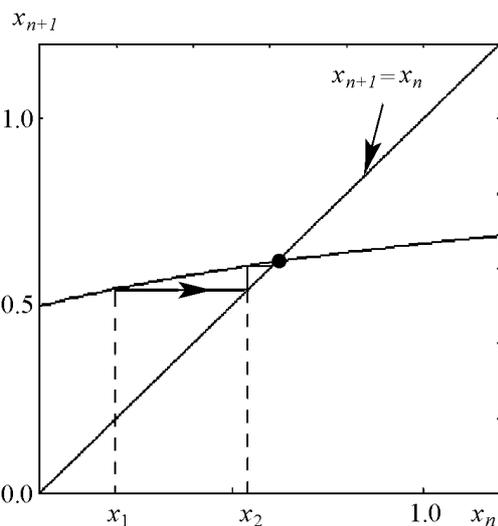


Рис. 3. Итерационная диаграмма для цепочки сопротивлений

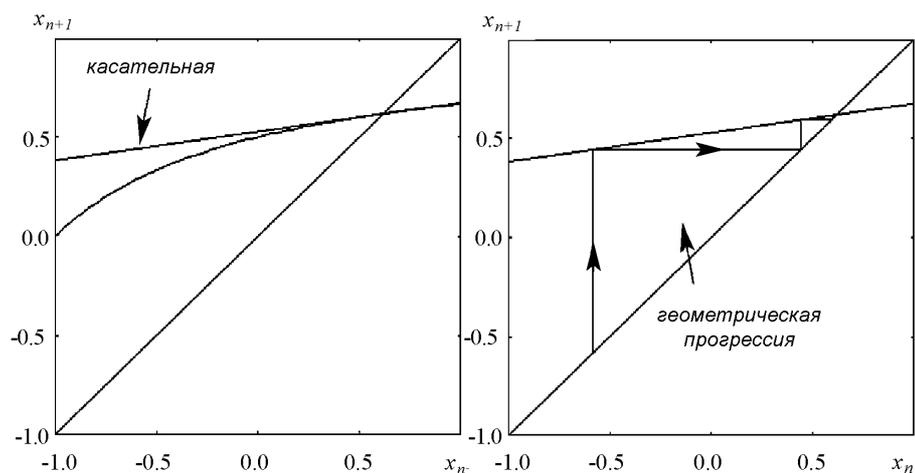


Рис. 4. Вид итерационной диаграммы вблизи неподвижной точки

Таким образом, если имеется некоторая маленькая добавка к значению x_0 , то после первой итерации она умножается на постоянное число $f'(x_0)$, после второй – на $[f'(x_0)]^2$, после третьей – на $[f'(x_0)]^3$ и т.д. Это означает, что переменная x приближается к неподвижной точке по закону геометрической прогрессии с показателем $[f'(x_0)]$. Отметим, что наше рассмотрение на итерационной диаграмме соответствует тому, что мы аппроксимируем $f(x)$ касательной в окрестности x_0 . Соответствующая итерационная диаграмма и дает геометрическую прогрессию (рис. 4).

Теперь по свойству геометрической прогрессии автоматически получаем, что, если $|f'(x_0)| < 1$ – итерации сходятся, а если $|f'(x_0)| > 1$ – расходятся.

Это, как говорят, позволяет судить об *устойчивости* неподвижной точки. В первом случае неподвижную точку называют устойчивой, а во втором – неустойчивой. Заметим, что в силу большой важности величины $f'(x_0)$ она носит специальное название – мультипликатор, и обозначается обычно $\mu = f'(x_0)$.

Вернемся от отображения общего вида к нашему случаю

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2+x}, \quad f'(x_0) = \frac{1}{(2+x_0)^2} = \frac{4}{(\sqrt{5}+3)^2} \approx 0.145900.$$

Итак, как мы видим, $\mu = 0.145900$. Это означает, что итерации сходятся, причем, поскольку $f'(x_0)$ мало, сходятся очень быстро. В этом убеждаемся, итерируя соотношение $x_{n+1} = (x_n + 1)/(x_n + 2)$.

Результат представлен в таблице.

Мы убеждаемся, что увеличение числа звеньев действительно приводит в неподвижную точку. Из таблицы видно, что, оказывается, цепочку всего из трех звеньев можно считать бесконечной с высокой точностью, то есть для цепочки из трех звеньев отклонение от значения сопротивления в неподвижной точке составляет примерно 1%, а из пяти звеньев – уже всего 0.02%! Устойчивость неподвижной точки этого отображения снимает и еще один физический вопрос, о том, не «испортят» ли возможные дефекты в цепочке результат нашего решения. Любопытно, что рассмотренная задача оказалась связанной с числами Фибоначчи и «золотым средним» (см. вторую колонку таблицы).

Таблица

Число звеньев в цепочке, n	x_n	Отклонение от предельного значения, %
1	$x_1 = 1$	
2	$x_2 = 2/3 \approx 0.666667$	7.86
3	$x_3 = 5/8 \approx 0.625000$	1.12
4	$x_4 = 13/21 \approx 0.619048$	0.16
5	$x_5 = 34/55 \approx 0.618182$	0.02
...
∞	$x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618034$	0

2. Логистическое отображение и бифуркационные деревья

Оказывается, отображения могут демонстрировать и более сложное поведение, чем в задаче о бесконечной цепочке сопротивлений. Рассмотрим функцию $f(x)$, имеющую квадратичный экстремум. Простейшей функцией с квадратичным экстремумом является парабола, а соответствующее отображение называют *логистическим*

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

На рис. 5 приведена итерационная диаграмма этого отображения.

Хорошо видно, что отображение может иметь уже две неподвижные точки. Одна из них имеет координату $x_0 = 0$. Исследуем устойчивость этой точки, для чего вычислим соответствующую производную (мультипликатор):

$$\mu = f'(x) = (r - 2rx)|_{x_0=0} = r.$$

При $r > 1$ эта точка неустойчива. Изобразим динамику в этом случае на итерационной диаграмме (см. рис. 5). Можно заметить, что итерации вблизи начала координат идут по закону геометрической прогрессии. Этот факт послужил основой для серьезного изучения логистического отображения в популяционной биологии. Действительно, известно, что при достаточном количестве пищи (параметр r) популяция (например, рыба в пруду) размножается по закону геометрической прогрессии. Для простоты будем считать, что x_n дает количество рыбы в пруду в n -й год. Таким образом, начальное

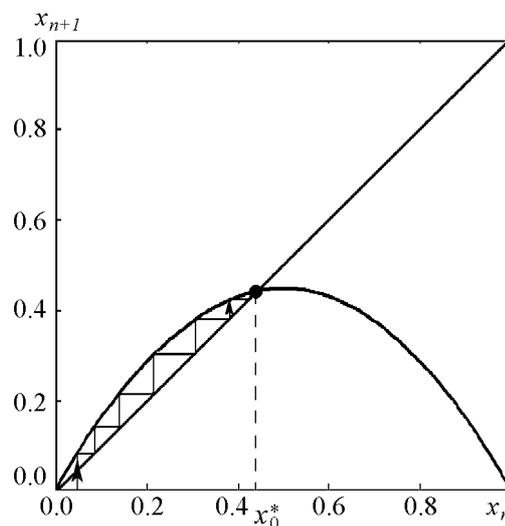


Рис. 5. Итерационная диаграмма логистического отображения

значение x_1 – это число рыб, выпущенных в пруд в первый год, x_2 – количество рыбы на следующий год и т.д. Спрашивается, что будет с этой рыбой по истечении достаточно большого времени? Сначала количество рыбы будет нарастать по геометрической прогрессии. Ясно, однако, что, если рыбы слишком много, то популяция перестает расти. Поэтому график $f(x)$ и имеет падающий участок.

Интуиция говорит о том, что количество рыбы в пруду сначала нарастает, а затем стабилизируется. (Математики сказали бы, что последовательность x_n имеет предел.) Наш график как будто подтверждает в этом интуитивное предположение (см. рис. 5). Как можно видеть, есть еще одна неподвижная точка x_0^* , к которой сходятся итерации,

$$x_0 = rx_0(1 - x_0), \quad x_0^* = 1 - \frac{1}{r}.$$

Это и будет установившееся количество рыбы в водоеме. Однако устойчива ли эта неподвижная точка? Найдем ее мультипликатор

$$\mu = f'(x_0^*) = r - 2rx_0^* = r - 2r\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 2 - r.$$

Если r немного больше 1, то да, точка устойчива, но при $r > 3$ получаем, что мультипликатор $\mu = |f'(x_0^*)| > 1$, а значит, «стабильное» состояние популяции оказывается неустойчивым. Какой же режим рождается при $r = 3$? Используя итерационную диаграмму, можно предположить, что это будет ситуация типа показанной на рис. 6.

Говорят, что в этом случае отображение имеет *2-цикл*. Из условия $\begin{cases} f(x_2) = x_1 \\ f(x_1) = x_2 \end{cases}$ можно получить явное выражение для его элементов

$$\begin{cases} x_1 = rx_2(1 - x_2), \\ x_2 = rx_1(1 - x_1). \end{cases}$$

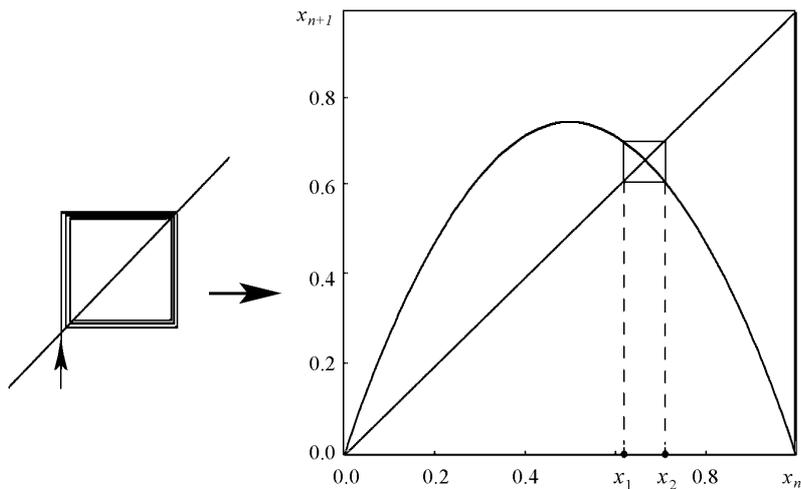


Рис. 6. Возникновение 2-цикла на итерационной диаграмме

Сложим друг с другом оба уравнения, а затем вычтем из первого уравнения второе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = (x_1 - x_2)[r(x_1 + x_2) - r], \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)\left(\frac{r-1}{r}\right), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1+r}{r}, \\ x_1x_2 = \frac{1+r}{r^2}. \end{cases}$$

Используя теорему Виета, можем записать уравнение для поиска элементов 2-цикла

$$x^2 - \frac{1+r}{r}x + \frac{1+r}{r^2} = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем

$$x_{1,2} = \frac{1+r \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}.$$

Из этой формулы видно, что 2-цикл рождается при $r = 3$, а при $r < 3$ его существование невозможно. Итак, если пищи слишком мало, то первые поколения нарастают очень быстро по численности, а затем стационарная численность рыбы не устанавливается, а начинает меняться периодически от года к году: x_1, x_2, x_1, x_2 и т.д. Это очень важный результат с точки зрения динамики популяции.

Ну, а если еще больше увеличить r ? Аналитически можно показать, что существует значение параметра, при котором станет неустойчивым и 2-цикл. Действительно, для элемента 2-цикла можно написать соотношение

$$x_1 = f(x_2) = f(f(x_1)).$$

Таким образом, элемент 2-цикла есть неподвижная точка двукратно проитерированного отображения. Это позволяет легко определить устойчивость цикла, поскольку тогда можно применить полученный ранее способ анализа устойчивости неподвижной точки. При этом только надо использовать правило дифференцирования сложной функции. Итак,

$$\mu = [f(f(x_1))]' = f'(f(x_1))f'(x_1) = f'(x_2)f'(x_1).$$

В нашем случае $f'(x) = r - 2rx$, следовательно

$$\begin{aligned} \mu &= r^2(1 - 2x_1)(1 - 2x_2) = r^2[1 - 2(x_1 + x_2) + 4x_1x_2] = \\ &= r^2\left[1 - 2\frac{1+r}{r} + 4\frac{1+r}{r^2}\right] = -r^2 + 2r + 4. \end{aligned}$$

Таким образом, при $r = 1 + \sqrt{6} = 3.449$ мультипликатор обращается в минус единицу, и 2-цикл становится неустойчивым. При этом точка x_1 «удвоится» – расщепится на две. То же самое произойдет с точкой x_2 . Значит, у нового движения будет четыре элемента, то есть реализуется 4-цикл.

Что будет, если еще больше увеличить параметр, можно установить при помощи компьютерного моделирования. Для этого нужно написать программу построения итерационных диаграмм. На рис. 7 показаны некоторые типы итерационных

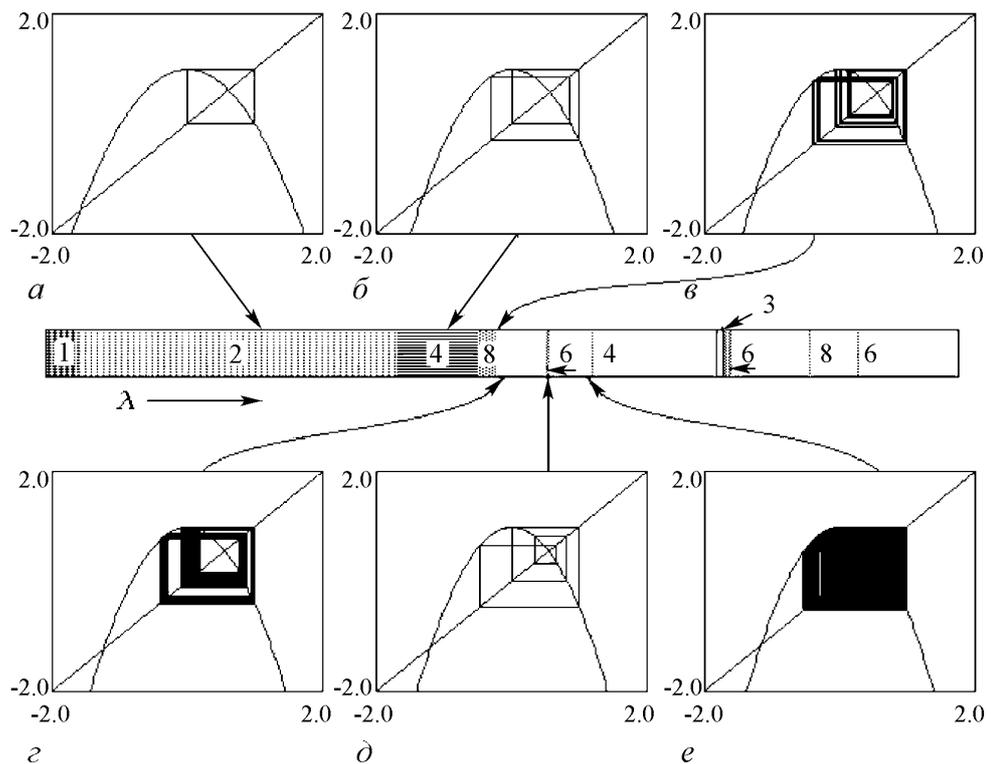


Рис. 7. Некоторые представители «семейства» режимов логистического отображения

диаграмм, которые возможны для отображения, заданного квадратичной параболой. Мы здесь использовали другое представление параболического отображения, $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$, которое более удобно в ряде отношений.

Мы видим, что 4-цикл превращается в циклы периода 8, 16 и т.д.; затем, при превышении некоторого *критического* значения параметра $\lambda_C = 1.401152\dots$ возможен сложный, неповторяющийся процесс. Эти режимы называют динамическим хаосом. Что это означает на языке динамики популяции? Пусть мы запустили рыбу в пруд и подкармливаем ее, чтобы иметь большой улов. Если пищи немного, то численность популяции станет стабильной. Если количество пищи увеличить, то возможны колебания численности рыбы год от года – в одном году рыбы много, а на будущий год – мало. Если же количество пищи перейдет через некоторое пороговое значение, то численность рыбы начнет хаотически, непредсказуемо меняться год от года! Весьма неожиданный и нетривиальный результат. Ясно, что сама возможность такого поведения в предельно простых и *предсказуемых* системах является важным открытием.

Вернемся к нашим диаграммам. Можно видеть, что с ростом параметра возникает не только хаос, но и сложные циклы периодов 3, 6 и т.д., чередующиеся с областями непериодического поведения. Среди них есть и 4-циклы и 8-циклы и т.д., но с существенно иным видом итерационной диаграммы, чем в основной области удвоений периода. Мы рекомендуем составить «коллекцию» основных циклов такого типа (задача 2). Итак, эксперименты с «подкармливанием рыбы» могут привести к необычайно разнообразным режимам.

Еще одна эффектная иллюстрация сложного поведения квадратичного отображения - *бифуркационное дерево* (или, как иногда говорят, «дерево Фейгенбаума» – по имени ученого, установившего многие существенные законы динамики отображений). Бифуркационное дерево дает зависимость установившихся значений переменной x от параметра λ . Наше аналитическое рассмотрение позволяет нарисовать начальный участок дерева (рис. 8).

Это устойчивая неподвижная точка и рождающийся 2-цикл. В случае 2-цикла переменная последовательно посещает две ветви дерева. Такую ситуацию расщепления дерева называют *бифуркацией удвоения периода*. Полное дерево (для всех значений параметра) можно построить с помощью компьютера. Для этого надо задать некоторое начальное значение переменной и параметра. Затем выполнить несколько сот итераций отображения, чтобы исключить переходные процессы и реализовать установившийся режим, и вывести некоторое количество точек на экран дисплея. Затем процедуру повторить для слегка измененного значения параметра. (Рекомендуем в качестве нового начального значения переменной использовать полученное на предыдущем шаге процедуры.) И далее все повторить для всего диапазона управляющего параметра. В результате получится картинка, показанная на рис. 9.

На бифуркационном дереве хорошо видны моменты удвоений периода, когда дерево расщепляется на две ветви, область хаотического режима и различные «окна» периодических режимов в хаосе.

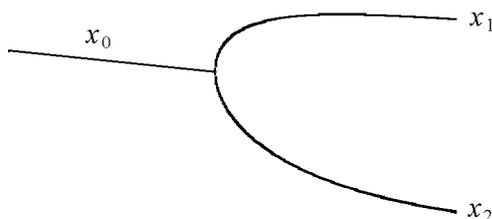


Рис. 8. «Расщепление» ветви дерева – удвоение периода

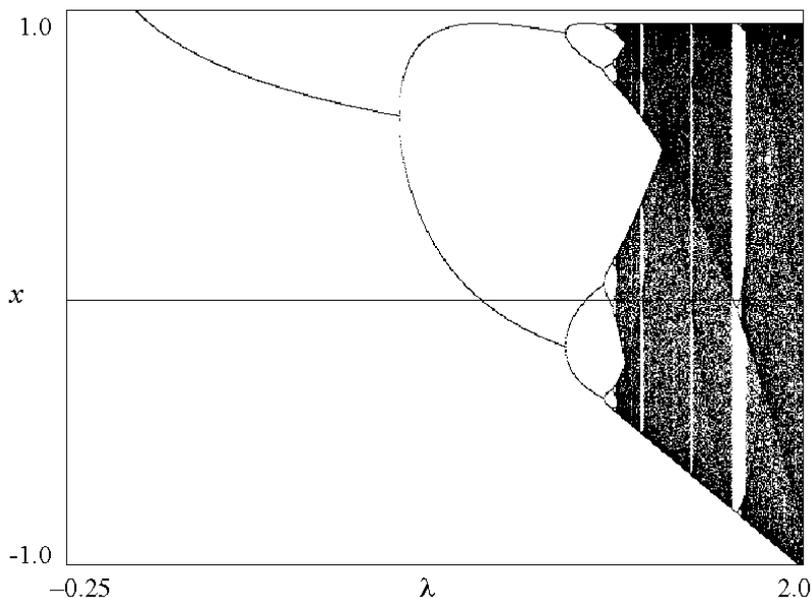


Рис. 9. Бифуркационное дерево логистического отображения

3. Законы Фейгенбаума

Одно из удивительных открытий американского физика М. Фейгенбаума состоит в том, что аналогичное поведение демонстрирует не только приведенное выше, но и другие отображения, моделирующие математические, физические, химические и даже социальные системы. Фейгенбаум сумел обосновать этот факт теоретически. Еще более удивительно, что и системы в виде дифференциальных уравнений тоже демонстрируют такое поведение – переход к хаосу через удвоения периода. При этом законы такого перехода, открытые Фейгенбаумом, универсальны – то есть одинаковы для всех систем. Так, было установлено, что значения параметра λ_k , при которых происходят удвоения, удовлетворяют соотношению

$$\lambda_k \approx \lambda_C - \text{const} \cdot \delta_F^k,$$

где $\delta_F = 4.669201609102990672\dots$ – универсальная константа. (Равенство выполняется тем лучше, чем ближе мы подходим к критической точке рождения хаоса.) Можно сказать, что возникновение хаоса в результате каскада удвоений периода – это одна из фундаментальных закономерностей природы.

Одним из отражений закономерностей Фейгенбаума является тот факт, что бифуркационное дерево в окрестности точки перехода к хаосу обладает *самоподобной* структурой, которая воспроизводится во все более мелких масштабах (свойство *скейлинга*). Для иллюстрации этого на рис. 10 показана окрестность критической точки $\lambda_C = 1.401152\dots$ во все большем масштабе – каждый выделенный прямоугольник дан в увеличенном виде. При этом масштаб по горизонтальной оси пересчитывается в $\delta = 4.6692\dots$ раз относительно критической точки $\lambda = \lambda_C$, а по вертикальной оси x – в $\alpha = -2.5029\dots$ раз (вторая универсальная константа Фейгенбаума) относительно точки $x = 0$. (Знак минус означает изменение ориентации – картинка переворачивается «вверх ногами».)

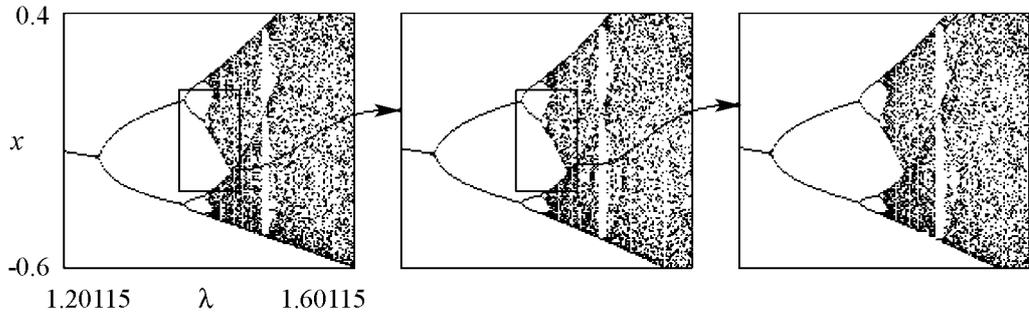


Рис. 10. Самоподобие или «скейлинг» на бифуркационном дереве

4. Шум и бифуркационное дерево

В реальных системах всегда присутствуют случайные флуктуации или шум. Анализ колебательных систем с шумом – очень непростая задача, которая представляет собой существенную часть отдельной науки – статистической радиофизики. Действительно, если система описывается дифференциальным уравнением, не

вполне очевидно, как учесть при ее описании естественные шумы. А вот для дискретных отображений эта задача радикально проще. Действительно, в рамках биологической интерпретации представим себе, что количество пищи не одинаково год от года, а случайно меняется вблизи некоторого постоянного значения. Тогда мы приходим к отображению вида

$$x_{n+1} = 1 - \lambda_n^2 + \varepsilon \xi_n,$$

где ε – амплитуда шума, ξ_n – случайная последовательность. Дискретная случайная величина ξ_n может генерироваться любым компьютером. Используя соответствующий генератор случайных чисел, можно построить бифуркационное дерево в системе с шумом (рис. 11). Можно видеть, что шум «размывает» ветви дерева. Показанный в увеличенном виде фрагмент дерева в этом случае демонстрирует, что влияние шума тем сильнее, чем больше периоды рассматриваемых циклов. Таким образом, сколь малым ни был бы шум, он обязательно разрушит картину удвоений периода вблизи критической точки. Это означает, что в реальных системах всегда наблюдается конечное число удвоений периода (их число зависит от вида системы и характера шума).

Таким образом, дискретные отображения – удобные модели, иллюстрирующие влияние шума на динамические системы. Любопытно, что в компьютере в качестве генератора случайных чисел также используются дискретные отображения!

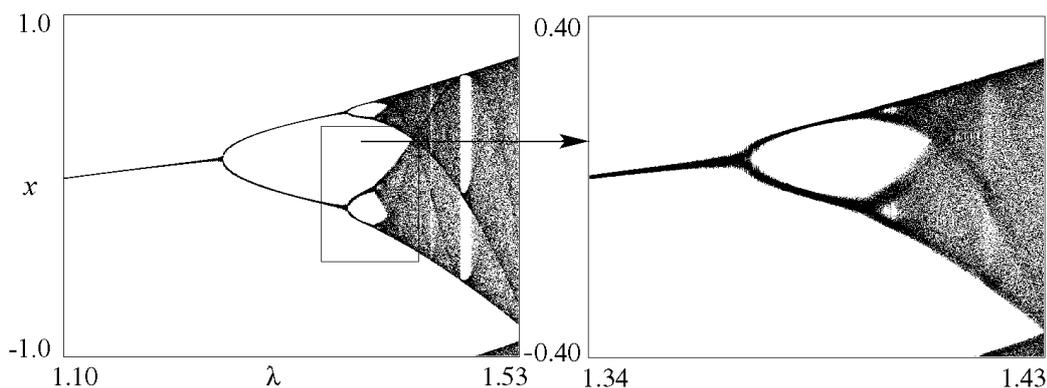


Рис. 11. Воздействие шума на бифуркационное дерево

5. Прыгающий шарик

Рассмотренные нами примеры были одномерными отображениями, поскольку характеризовались единственной переменной x . Теперь мы рассмотрим пример системы, характеризующейся уже двумя измерениями.

Пусть шарик падает на стол с высоты h . Высота подскока шарика после удара о стол дается соотношением

$$h_{n+1} = (1 - \varepsilon)^2 h_n,$$

где ε – доля теряемой при ударе скорости. Это убывающая прогрессия, так как $(1 - \varepsilon) < 1$. А нельзя ли превратить эту систему в систему со сложной динамикой?

Для этого надо как-то поддержать колебания шарика. Простейшее решение состоит в том, чтобы заставить поверхность вибрировать, например, по гармоническому закону (рис. 12).

Тогда «стол» может двигаться навстречу шарика, сообщать энергию и поддерживать колебания. Для такой системы довольно просто построить дискретное отображение. Прежде всего договоримся о выборе дискретных переменных. В отличие от логистического отображения их будет две: скорость шарика перед n -м ударом v_n и момент удара t_n .

Сделаем одно очень существенное предположение – будем пренебрегать смещением стола в момент удара. (Это можно сделать, если скорость шарика достаточно велика по сравнению со скоростью плиты.) Тогда движение шарика на плоскости (t, y) выглядит так, как показано на рис. 13.

Итак, скорость шарика перед ударом v_n . Пусть скорость стола зависит от времени по закону

$$v(t) = V_0 \sin \omega t.$$

Перед ударом шарика скорость $v = V_0 \sin \omega t_n$. Перейдем в систему отсчета, связанную со столом. В этой системе отсчета скорость сближения

$$v_n + V_0 \sin \omega t_n.$$

При ударе по условию теряется доля скорости ε . Тогда в этой системе отсчета скорость шара после удара

$$(1 - \varepsilon)(v_n + V_0 \sin \omega t_n).$$

Вернемся в исходную систему отсчета, для чего добавим к найденному значению скорости скорость стола. Тогда шарик отлетает от плиты со скоростью

$$(1 - \varepsilon)(v_n + V_0 \sin \omega t_n) + V_0 \sin \omega t_n.$$

Ясно, что, подпрыгнув с этой скоростью в отсутствие сопротивления воздуха, он с той же скоростью упадет на стол. Но это уже будет скорость перед $(n + 1)$ -м ударом. Таким образом,

$$v_{n+1} = (1 - \varepsilon)v_n + V_0(2 - \varepsilon) \sin \omega t_n.$$

Время свободного полета шарика $\tau = 2v_{n+1}/g$. Тогда, очевидно,

$$t_{n+1} = t_n + \frac{2v_{n+1}}{g}.$$

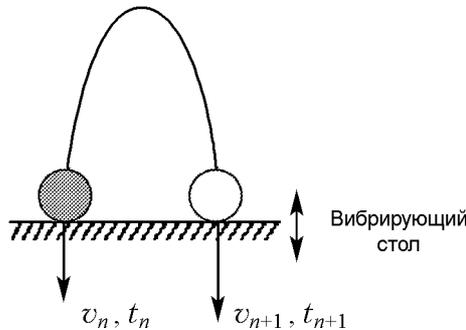


Рис. 12. Модель «прыгающего шарика»

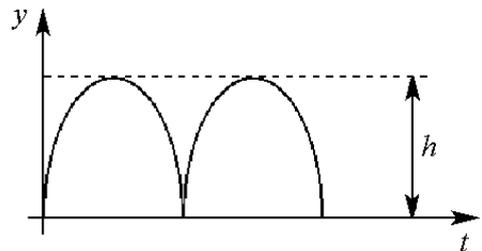


Рис. 13. Пространственно-временная диаграмма движения шарика, отвечающая неподвижной точке отображения

Мы получили искомое двумерное отображение. Его можно несколько упростить, приведя к безразмерному виду. Для этого положим $\varphi_n = \omega t_n$. Тогда

$$v_{n+1} = (1 - \varepsilon) v_n + V_0 (2 - \varepsilon) \sin \varphi_n,$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{2\omega}{g} v_{n+1}.$$

Полагая $V = \frac{2\omega}{g} v$, получим

$$V_{n+1} = (1 - \varepsilon) V_n + k \sin \varphi_n \quad (\varphi_n, \text{ mod } 2\pi),$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + V_{n+1}.$$

Здесь $k = \frac{2(2 - \varepsilon) V_0 \omega}{g}$.

Итак, в безразмерном виде наше отображение характеризуется двумя параметрами: ε – параметр диссипации и k – безразмерная амплитуда колебаний стола.

В наше соотношение мы добавили символы $(\varphi_n, \text{ mod } 2\pi)$. Это означает, что мы берем не само значение фазы φ_n , а добавку к $2\pi n$, где n – целое. Такое дополнение естественно, так как синус – 2π -периодическая функция, а φ_n будет меняться в ограниченном интервале от 0 до 2π .

Убедимся в правильности нашего предположения о том, что вибрации стола поддержат колебания шарика. Найдем неподвижную точку отображения

$$V = (1 - \varepsilon) V + k \sin \varphi,$$

$$\varphi = \varphi + V - 2\pi n.$$

Отсюда

$$V = 2\pi n,$$

$$\frac{2\pi n \varepsilon}{k} = \sin \varphi.$$

Это уравнение имеет два решения

$$\varphi = \pm \arcsin \frac{2\pi n \varepsilon}{k}$$

при условии $2\pi n \varepsilon < k$. Можно показать, что одна из этих точек устойчива, а другая – нет. (Вообще, устойчивые и неустойчивые точки рождаются парами.) Таким образом, если безразмерная амплитуда $k > 2\pi \varepsilon$, то в системе возможна неподвижная точка, которой отвечают подскоки на одинаковую высоту (см. рис. 13). Мы можем легко найти высоты подскоков в этой точке

$$h = \frac{mv_{n+1}^2}{2} = \frac{mg^2}{8\omega^2} V^2 = \frac{mg^2 \pi^2}{2\omega^2}.$$

Будем теперь увеличивать амплитуду колебаний стола k . Обратимся к компьютерному моделированию. На рис. 14 показано бифуркационное дерево, дающее зависимость установившейся скорости V от амплитуды k при фиксированном значении $\varepsilon = 0.9$.

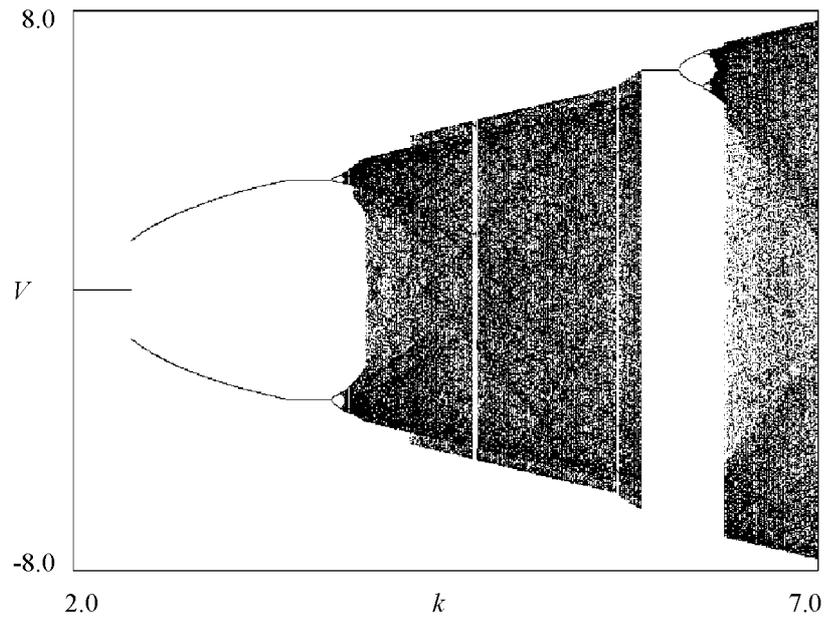


Рис. 14. Бифуркационное дерево отображения «прыгающего шарика»

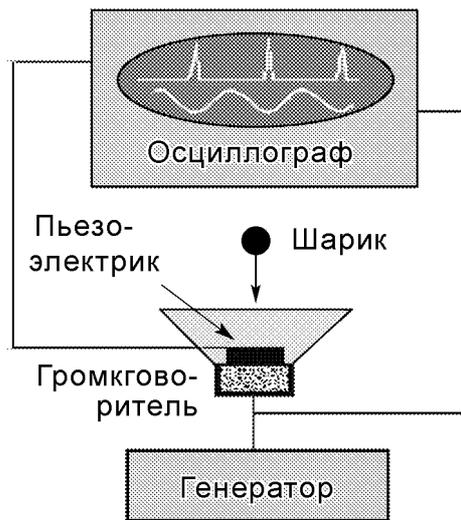


Рис. 15. Эксперимент с прыгающим шариком

Можно видеть, что в системе имеют место бифуркации удвоения периода.

Нам остается добавить, что наша практически школьная задача на самом деле является одной из серьезных моделей нелинейной динамики. Ее ввел российский физик Г.М. Заславский как некоторую модель астрофизики ускорения космических частиц гравитационными полями звезд. Однако она получила популярность, скорее, именно как модель шарика, прыгающего на столе. Ее реализовали и экспериментально, для чего в качестве вибрирующего стола использовали диффузор громкоговорителя (рис. 15). В эксперименте наблюдались и удвоения периода и хаотические колебания.

6. Отображение Эно

Простейшим одномерным отображением со сложной динамикой является логистическое отображение

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad \text{или} \quad x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2,$$

которое описывает, например, динамику популяции.

В предыдущем разделе на примере задачи о прыгающем шарике мы познакомились с двумерными отображениями. Нельзя ли построить двумерное обобщение логистического отображения? Оказывается, можно. При введении одномерного отображения мы предполагали, что численность популяции в $(n + 1)$ -й год зависит лишь от численности в n -й год. Предположим теперь, что память «глубже» – численность в $(n + 1)$ -й год зависит и от численности в $(n - 1)$ -м году. Эта зависимость должна быть слабой. Поэтому полагаем ее линейной. Тогда

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) - bx_{n-1},$$

где b – некоторый новый коэффициент.

Введем теперь обозначение $y_{n+1} = x_n$. Тогда

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) - by_n,$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

Это и есть искомое двумерное отображение. Если использовать другое представление для квадратичной функции, то это отображение можно записать в виде

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - by_n,$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

Такое отображение впервые предложил французский астрофизик Мишель Эно (М. Hénon), и оно носит его имя. (Эно не использовал биологическую интерпретацию, а исходил из другой мотивации – искал простейшие двумерные квадратичные отображения со сложной динамикой.)

Отображение Эно допускает аналитический поиск неподвижной точки и 2-цикла и исследование их устойчивости (см. задачу 6). На рис. 16 показано бифуркационное дерево отображения Эно при $b = 0.3$. Можно видеть, что оно демонстрирует не только рождение устойчивого 2-цикла из неподвижной точки, но и весь

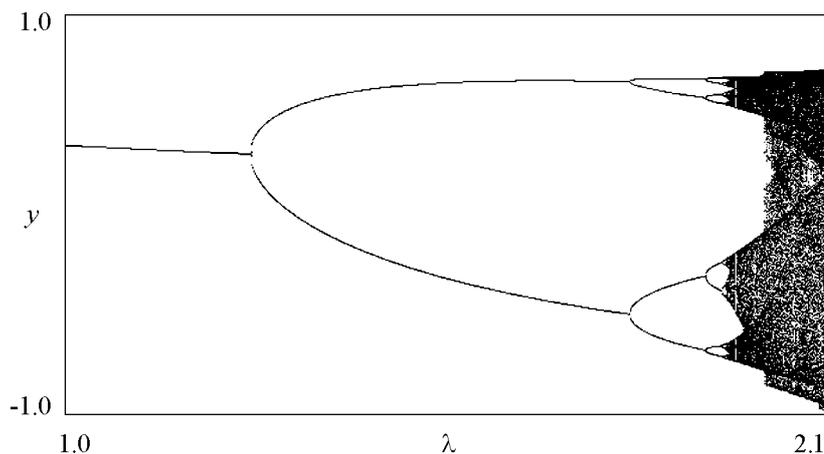


Рис. 16. Бифуркационное дерево отображения Эно

каскад бифуркаций удвоения периода, хаос и окна периодичности в хаосе. Новым является то, что дерево иногда скачком «разбухает». Такое явление в нелинейной динамике называют *кризисом*.

Отметим, что динамика отображения Эно на самом деле столь многообразна, что ему можно посвятить целую монографию. Более того, многие современные исследователи по-прежнему используют отображения Эно в своих работах.

7. Фазовое пространство и аттракторы

Как проследить за эволюцией динамической системы при заданных начальных условиях? Для этого нужно «увидеть», что происходит с определяющими динамическую систему переменными x, y, \dots по мере эволюции во времени. Введем некоторое пространство, по осям координат которого отложим эти переменные. Его принято называть *фазовым пространством*. Фраза «задано начальное состояние динамической системы» теперь означает, что задана точка в фазовом пространстве. «Включим» время. Если система определена дискретным отображением, например, отображением Эно или прыгающего шарика, то изображающая точка при каждой итерации будет совершать «прыжки» в фазовом пространстве.

Динамическая система полностью задает закон эволюции во времени, однако, чтобы получить полную информацию о характере такой эволюции, надо провести исследование для различных начальных условий. Современные компьютеры делают эту задачу не умозрительной, а вполне реальной и позволяют получать наглядные геометрические образы такого процесса.

Итак, рассмотрим множество начальных состояний системы. В фазовом пространстве в этом случае будем иметь уже не одну изображающую точку, а целое «облако». При «включении» времени они все начнут совершать «прыжки». При компьютерном моделировании разумно создать мгновенные «снимки» облака через определенные промежутки времени (число итераций). Тогда можно следить за эволюцией облака на экране дисплея.

Перейдем к компьютерному моделированию. В качестве исследуемой системы выберем отображение Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - by_n, \\y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}$$

Здесь λ и b – параметры. На рис. 17 показаны мгновенные «снимки» облака изображающих точек на фазовой плоскости для отображения Эно, сделанные через одну итерацию.

Заметим, что при работе за компьютером весьма удобно и увлекательно наблюдать эволюцию облака изображающих точек в режиме «компьютерной мультипликации».

Наиболее существенный результат компьютерного моделирования (см. рис. 17) состоит в том, что облако изображающих точек «конденсируется» на некоторые предельные объекты. Их называют аттракторами (от английского to attract – притягивать). Динамические системы, которые обладают аттракторами, называют *диссипативными*.

Процесс «конденсации» изображающих точек на аттрактор занимает некоторое время. Как видно из рис. 17, в результате изображающие точки притягиваются

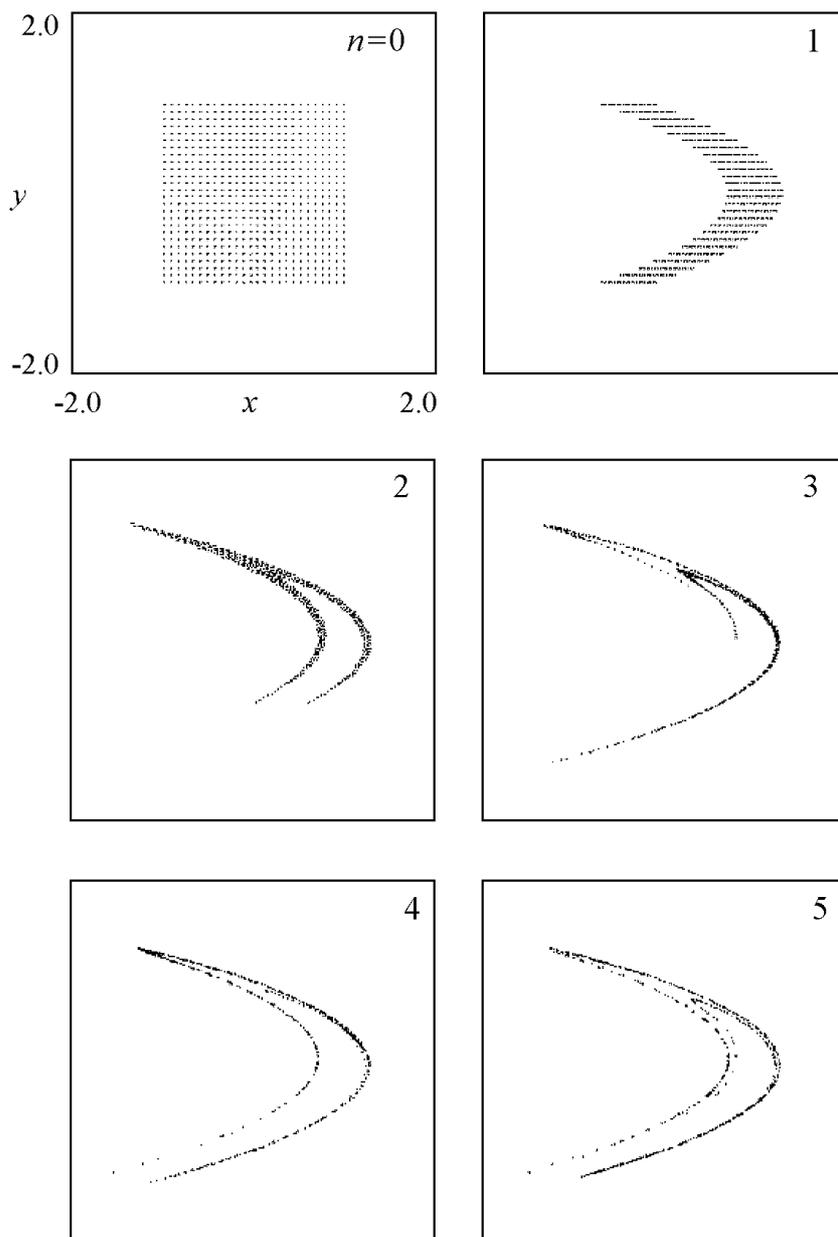


Рис. 17. Конденсация облака изображающих точек в фазовом пространстве на аттрактор для отображения Эно

к некоторой сложной слоистой структуре. Если посмотреть с помощью компьютера как «микроскопа» отдельные фрагменты такого аттрактора, то обнаруживается, что он весь состоит из отдельных «нитей» и областей пустого пространства, причем каждая нить, в свою очередь, имеет аналогичную тонкую структуру. Как говорят, аттрактор в этом случае обладает *фрактальными свойствами*. Подобные аттракторы были обнаружены в семидесятые годы нашего века и получили название *странных*. А колебательные режимы, которым не отвечает определенный период, названы *динамическим хаосом*.

Итак, если исследуемая система диссипативна, то можно изучать лишь ее аттракторы. Это упрощает компьютерное моделирование – не надо следить за всеми изображающими точками. Достаточно выбрать одну из них, выполнить определенное (не очень маленькое) число итераций, чтобы эта точка «вышла» на аттрактор, а затем вывести ее движение на экран компьютера. Тогда мы и получим портрет аттрактора.

8. Карты динамических режимов

Иллюстрации в виде бифуркационных деревьев демонстрируют возможность нетривиальной эволюции аттракторов и, соответственно, колебательных режимов динамических систем при вариации одного параметра. Еще более удивительное разнообразие режимов можно наблюдать, если система характеризуется двумя параметрами. На первый взгляд кажется, что исследование такой системы требует кропотливой работы, и это действительно так. Однако сейчас в нелинейной динамике стал популярным весьма простой, наглядный и информативный прием, который позволяет быстро получать существенную информацию о системе. Продемонстрируем его на примере *кубического* отображения

$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3.$$

Компьютерная «технология» двухпараметрического исследования состоит в следующем. Выбираются какие-либо значения параметров a и b . Затем выполняется несколько сотен итераций отображения для того, чтобы система вышла на аттрактор, а затем – еще несколько сотен итераций уже непосредственно на аттракторе. По мере итераций на аттракторе производится сравнение начального значения со всеми последующими. Если они совпадают с высокой (наперед заданной) точностью, то число итераций принимается за период движения. На плоскости параметров (на экране дисплея) точка отмечается некоторым цветом, причем цветовая палитра выбирается заранее, так что движениям с определенными периодами отвечают определенные цвета. После этого процедура повторяется при слегка измененных значениях параметров, так что в конечном итоге выполняется полное «сканирование» плоскости параметров. В результате плоскость оказывается окрашенной в разные цвета в соответствии с периодом движения на аттракторе. Области хаоса (непериодические режимы) также обозначаются специальным образом. По аналогии с географией такую «раскрашенную» плоскость называют *картой динамических режимов*. На рис. 18 показана карта динамических режимов кубического отображения.

Как видим, столь простая модель демонстрирует очень большое разнообразие режимов и бифуркаций. В нижней части рисунка видна граница между областями устойчивости неподвижной точки и цикла периода 2, представляющая собой линию бифуркации удвоения периода. Линий рождения 4-цикла в результате аналогичной бифуркации уже две, причем область устойчивости 2-цикла имеет характерный вид с уходящими «вверх» пересекающимися «отростками». Таким образом, область устойчивости 2-цикла ограничена этими линиями удвоений, а также двумя линиями *складок* (термин теории катастроф), образующими нижнюю границу «отростков». Отметим, что линии складок продолжают внутрь области устойчивости 2-цикла и сходятся в точке, которую в теории катастроф называют точкой

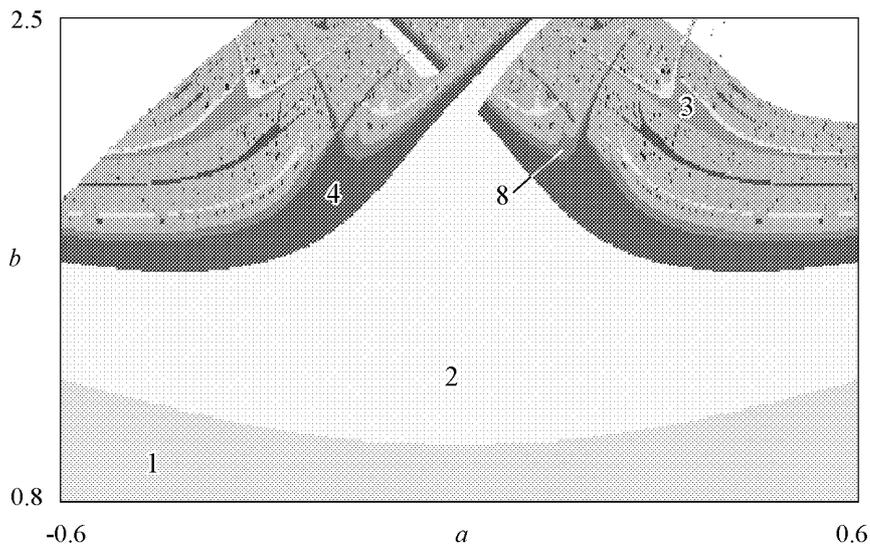


Рис. 18. Карта динамических режимов кубического отображения

сборки ($a = 0, b = 2$), которая, однако, на рисунке не видна. Описанная совокупность бифуркационных линий схематически показана также на рис. 19; область существования устойчивого цикла определенного периода заштрихована. Она демонстрирует весьма типичную структуру на картах, названную французским специалистом в области нелинейной динамики К. Мира *crossroad area* (перекресток). На карте можно видеть две аналогичные конфигурации на базе 8-циклов. Самые широкие окна устойчивости реализуются на основе 3-циклов, внутри них можно идентифицировать конфигурации *crossroad area*, отвечающие областям устойчивости 6-циклов и т.д.

Правда, карты динамических режимов обладают одним недостатком. Если провести сканирование карты различными способами (например, снизу вверх или слева направо), то отдельные фрагменты карт получают отличающимися. Это связано со свойством *мультистабильности* динамических систем. Оно состоит в том, что при заданных значениях параметров могут сосуществовать одновременно несколько (иногда мало, иногда много) аттракторов. Соответственно, в зависимости

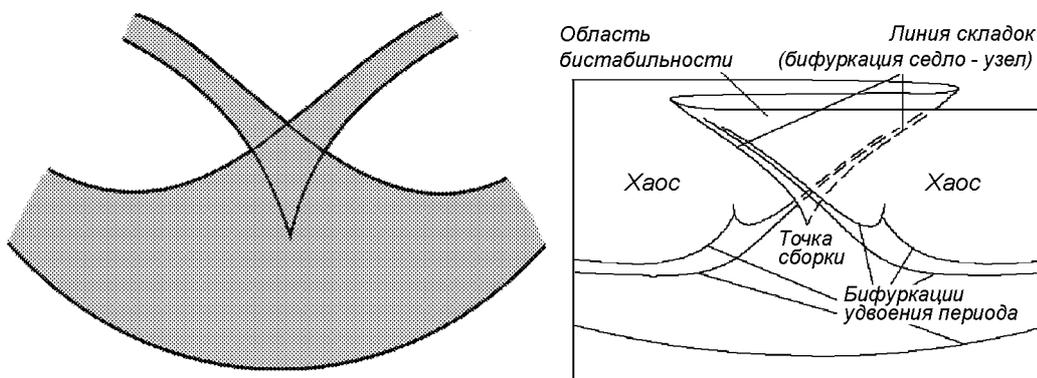


Рис. 19. Элементарные «кирпичики» плоскости параметров

от начальных условий траектория может выйти на тот или иной аттрактор. Поэтому, построив карту, полезно попробовать сделать то же самое, но при других начальных условиях. Полезным также является прием, когда, сделав маленький шаг по параметру, в качестве начальной в фазовом пространстве берут точку аттрактора, получившегося на предыдущем шаге. Иногда об этом способе говорят, что карту строят с *наследованием начальных условий*.

В современной нелинейной динамике достаточно много существенных для теории (иногда говорят – *эталонных*) динамических систем. Среди них и уже знакомое отображение Эно. Набор карт для них образует своеобразный атлас; с некоторыми «страничками» этого атласа можно познакомиться на сайте <http://www.sgtnd.narod.ru/science/atlas/rus/index.htm>.

Итак, большинство нелинейных систем характеризуется сложной топографией карт динамических режимов. Степень сложности полученных изображений такова, что их можно назвать «фрактальными пейзажами». Как правило, карты содержат детали, неоднократно повторяющиеся во все меньших и меньших масштабах. Можно установить определенные законы самоподобия или, как говорят, *скейлинга*. Но это уже отдельная тема.

Интересно, что карты режимов можно строить не только для отображений, но и для дифференциальных систем, если использовать *метод сечений Пуанкаре*. Мы обсудим, как это сделать, но сначала скажем несколько слов о некоторых свойствах дифференциальных уравнений в контексте теории динамических систем.

9. Отображения помогают решать дифференциальные уравнения

Дифференциальная двумерная динамическая система общего вида задается уравнениями

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y).$$

Смысл этих соотношений понятен – скорости изменения физических величин определяются функциями от их значений. Здесь представлен случай двумерной системы, а вообще говоря, число уравнений определяет размерность системы. Замечательно, что отображения помогают решать численно дифференциальные уравнения. Действительно, представим искомые функции времени $x(t)$ и $y(t)$ их значениями на дискретном множестве точек $t_n = nh$, как говорят, в узлах сетки с шагом h по времени:

$$x_n = x(nh), \quad y_n = y(nh).$$

Величина шага должна быть достаточно малой, от нее будет зависеть точность решения. В силу малости h можно положить

$$\dot{x}_n \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{h}, \quad \dot{y}_n \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}.$$

Тогда нетрудно выразить в явном виде x_{n+1} и y_{n+1} через x_n и y_n :

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = y_n + hg(x_n, y_n).$$

Таким образом, мы пришли к некоторому дискретному отображению. Итерируя его, мы будем получать аппроксимацию динамики дифференциальной системы. (Это, разумеется, простейший вариант численного метода – метод Эйлера).

Здесь следует сделать еще одно замечание. Обычно в нелинейной динамике рассматривают различные колебательные (или автоколебательные) системы, в форме различных осцилляторов. Например, нелинейный осциллятор Дуффинга

$$\ddot{x} + d\dot{x} + x + \beta x^3 = 0,$$

или система Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Они приводятся к «стандартной» форме, если наряду с координатой x ввести вторую переменную – скорость v :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -dy - x - x^3.\end{aligned}$$

Такая форма записи удобна для численного решения по описанной выше схеме и позволяет естественным образом перейти к фазовому пространству для дифференциальных систем.

10. Фазовое пространство дифференциальных систем

Обратимся теперь к фазовому пространству. В силу малости шага h на фазовой плоскости (x, v) изображающая точка будет совершать очень маленькие «прыжки», прорисовывая, тем самым, некоторую кривую, как говорят, *фазовую траекторию*. Снова зададим множество начальных состояний в виде облака точек в фазовом пространстве. При «включении» времени они все двинутся по своим траекториям. При компьютерном моделировании разумно создать мгновенные «снимки» облака через определенные промежутки времени (число итераций). Тогда можно следить за эволюцией облака на экране дисплея. Итог такого моделирования для осциллятора Дуффинга дает простой результат – все изображающие точки притянутся в начало координат, что отвечает затуханию колебаний осциллятора. В системе Ван дер Поля результат может быть иным (задача 10). Все точки конденсируются на аттрактор в виде замкнутой кривой (такие аттракторы называют *предельными циклами*), что отвечает некоторому установившемуся колебательному процессу. Примеры предельных циклов, однако, мы дадим ниже, после того, как обсудим возможную связь дифференциальных систем и отображений.

11. Сечение Пуанкаре

Французский математик Анри Пуанкаре предложил метод, который устанавливает связь между дифференциальными системами и отображениями. Обратимся к некоторой трехмерной дифференциальной системе. Выберем в фазовом пространстве некоторую поверхность S (например, плоскость $z = 0$). После этого будем следить не за всей фазовой траекторией дифференциальной системы, а лишь за точками ее пересечения с этой поверхностью (рис. 20, а). Таким образом, мы приходим к дискретному отображению, исследовать которые уже умеем.

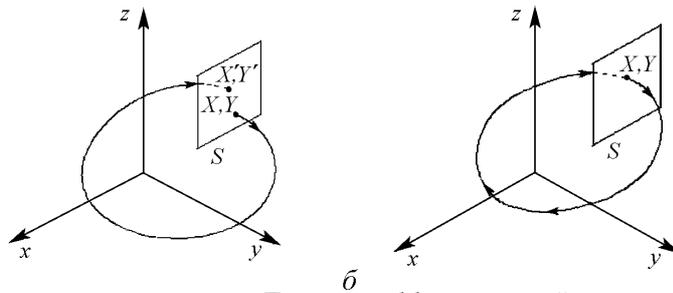


Рис. 20. Фазовая траектория и сечение Пуанкаре дифференциальной системы (а); предельный цикл и неподвижная точка в сечении Пуанкаре (б)

Приведенное простое рассуждение уже оказывается содержательным и позволяет нам указать на возможные типы аттракторов дифференциальных систем. Действительно, мы знаем, что отображения могут демонстрировать неподвижные точки. Это значит, что фазовая траектория, описав дугу, возвращается обратно и вновь «протыкает» сечение в той же точке (рис. 20, б). Таким образом, фазовая траектория может представлять собой замкнутую кривую. Такие фазовые траектории и являются *предельными циклами*. Далее, в сечении Пуанкаре возможно превращение неподвижной точки в 2-цикл. Это означает, что исходный предельный цикл должен усложнить свою форму и превратиться в некоторую двухоборотную кривую. Наконец, в случае хаотического аттрактора, фазовая траектория должна будет «бродить» в некоторой ограниченной области фазового пространства, пересекая секущую поверхность и образуя в этом сечении хаотическое множество.

Эти соображения следует проверить с помощью компьютерного моделирования. Выберем трехмерную дифференциальную систему, допускающую реальное воплощение в радиоэлектронике – так называемую систему Чуа. Это простое электронное устройство, содержащее линейные элементы: один резистор, одну индуктивность и две емкости, а также нелинейный элемент с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой. Система Чуа хорошо изучена, для нее имеется как строгое математическое доказательство существования хаоса, так и многочисленные экспериментальные и компьютерные результаты. Посвященная этой системе монография носит эффектное название «Chua’s circuit: a paradigm for chaos» – «Система Чуа: парадигма хаоса». Не будем, однако, обсуждать детали устройства схемы – для нас важно, что она описывается системой трех дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \alpha(y - h(x)), \quad \dot{y} = x - y + z, \quad \dot{z} = -\beta y.$$

Здесь α и β – параметры (иногда удобно использовать другую пару параметров $\alpha' = \alpha - 0.68\beta$, β), а $h(x)$ – кусочно-линейная функция

$$h(x) = \begin{cases} (2x + 3)/7, & x \leq -1, \\ -x/7, & -1 < x < 1, \\ (2x - 3)/7, & x \geq 1. \end{cases}$$

Таким образом, задача формализована для компьютерного моделирования. Зафиксируем сначала значения параметров α и β и получим портрет аттрактора в трехмерном фазовом пространстве. На рис. 21, а представлен пример такого аттрактора. На этом же рисунке показано сечение фазового пространства плоскостью, которое и можно интерпретировать как сечение Пуанкаре для нашей задачи.

Итак, в анализируемой системе аттрактор в виде предельного цикла действительно возможен и имеет с этим сечением общую точку. С ростом параметра β происходит следующее: при некотором бифуркационном значении β предельный цикл

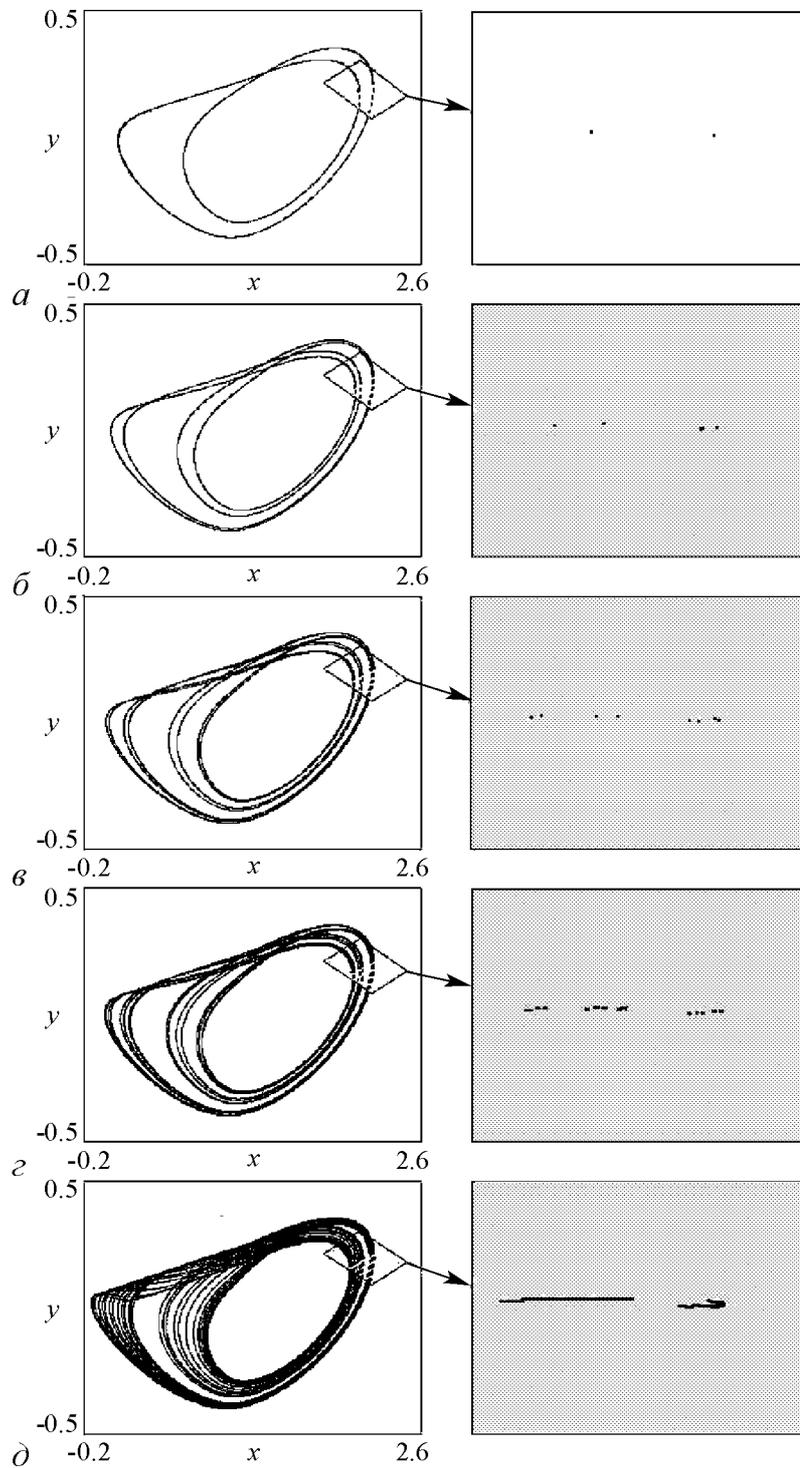


Рис. 21. Удвоения предельных циклов и хаотический аттрактор для схемы Чуа и соответствующие сечения Пуанкаре. Значения параметров: $\alpha' = 0.622$; $\beta = 3.53$ (a), 3.8 (\bar{b}), 3.99 (\bar{b}), 4.038894 (\bar{b}), 4.4 (\bar{d})

расщепляется и превращается в «двухоборотный» жгут. Это оказывается возможным именно благодаря наличию третьего измерения. В проекции на плоскость рис. 21, а предельный цикл имеет самопересечения, но в трехмерном пространстве их на самом деле нет. Нетрудно понять, что такому предельному циклу отвечает удвоенный период колебаний. Как видно из правого верхнего рисунка, в сечении Пуанкаре удвоение периода отвечает появлению 2-цикла.

При дальнейшем росте параметра β предельный цикл претерпевает последовательные усложнения – происходит *каскад бифуркаций удвоения периода*. Отображение Пуанкаре демонстрирует теперь 4-циклы, 8-циклы и т. д. При еще большем увеличении параметра β возникает хаос. Хаотический аттрактор в трехмерном фазовом пространстве выглядит как клубок спутанных ниток (рис. 21, д).

Итак, отображения помогают изучать и понимать динамику дифференциальных систем.

12. Карты динамических режимов дифференциальных систем

Комбинируя программы для расчета сечения Пуанкаре и построения карт динамических режимов, можно без особых проблем построить карты дифференциальных систем. Замечательно, что они оказываются очень похожими на карты отображений и содержат элементы, совершенно аналогичные показанным на рис. 18 и 19. Для примера на рис. 22 представлена карта динамических режимов схемы Чуа.

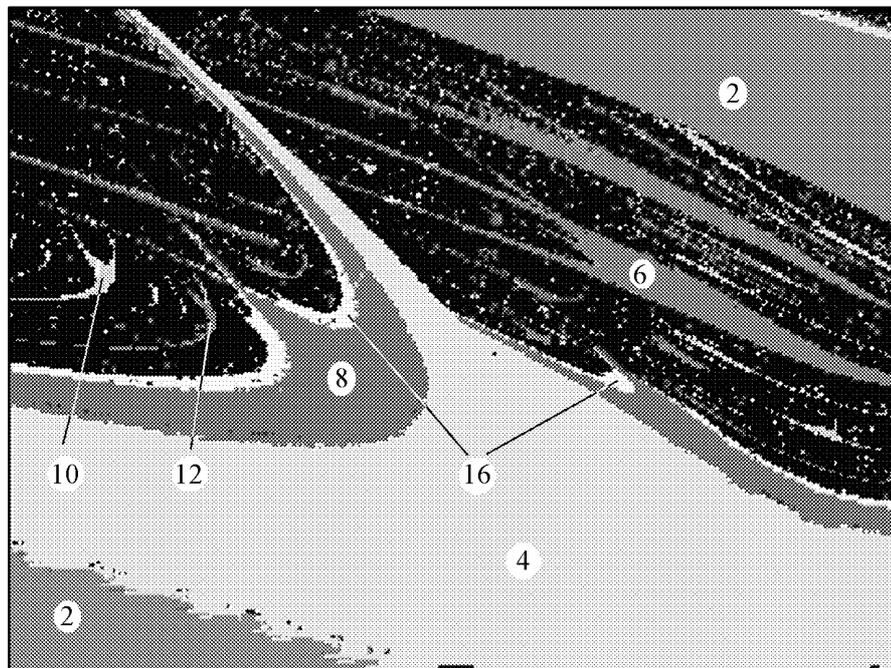


Рис. 22. Карта динамических режимов схемы Чуа

13. Сечение Пуанкаре неавтономных систем

Важный класс динамических систем образуют колебательные системы, возбуждаемые внешним сигналом, или, как говорят, *неавтономные системы*. Простейшими примерами могут служить система Ван дер Поля под действием гармонического сигнала

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = b \sin \omega t,$$

и нелинейный осциллятор Дуффинга

$$\ddot{x} + d\dot{x} + x + \beta x^3 = b \sin \omega t.$$

Эти примеры в автономном случае относятся к двумерным системам, динамика которых разворачивается на фазовой плоскости. В случае учета внешнего воздействия можно, однако, переписать уравнение возбуждаемого осциллятора Дуффинга в следующем виде

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -dy - x - \beta x^3 + b \sin z,$$

$$\dot{z} = \omega.$$

Таким образом, эта система формально приводится к виду, характерному для трехмерных динамических систем – при этом третьей переменной служит время. (Очевидно, то же самое справедливо для осциллятора Ван дер Поля, да и для любой двумерной неавтономной системы.)

Траектория в расширенном трехмерном фазовом пространстве, в котором время выступает в качестве одной из фазовых координат, представляет собой бесконечную спираль (рис. 23). На рисунке для осциллятора Дуффинга показаны также *сечения Пуанкаре*, которые в этом случае представляют собой параллельные плоскости, отстоящие друг от друга на период внешнего воздействия T , и нанесены точки пересечения фазовой траектории с этими плоскостями. Показана также траектория на фазовой плоскости (x, \dot{x}) , которая в рамках такой интерпретации является проекцией трехмерного фазового портрета на текущую плоскость. В представленном случае имеем отклик точно на частоте внешнего воздействия, так что все точки пересечения траектории с плоскостями при проецировании совпали.

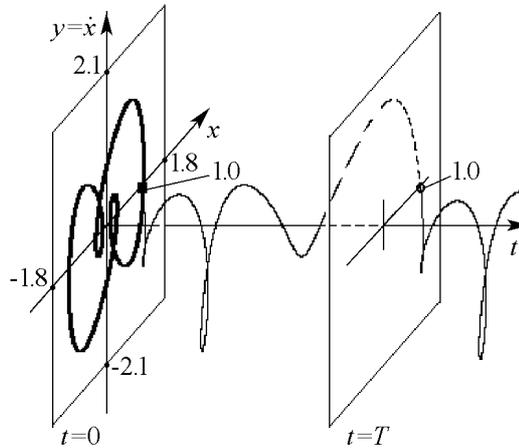


Рис. 23. Фазовая траектория неавтономного осциллятора Дуффинга в «расширенном» фазовом пространстве. Значения параметров $b = 2.5$, $\omega = 0.61$, $d = 0.2$, $\beta = 1$

На рис. 24 показаны проекции аттракторов на фазовую плоскость x, \dot{x} и точки сечения Пуанкаре для осциллятора Дуффинга (а) и осциллятора Ван дер Поля (б).

Чтобы сделать аналогию с традиционными трехмерными динамическими системами более наглядной, можно, используя периодичность внешнего воздействия,

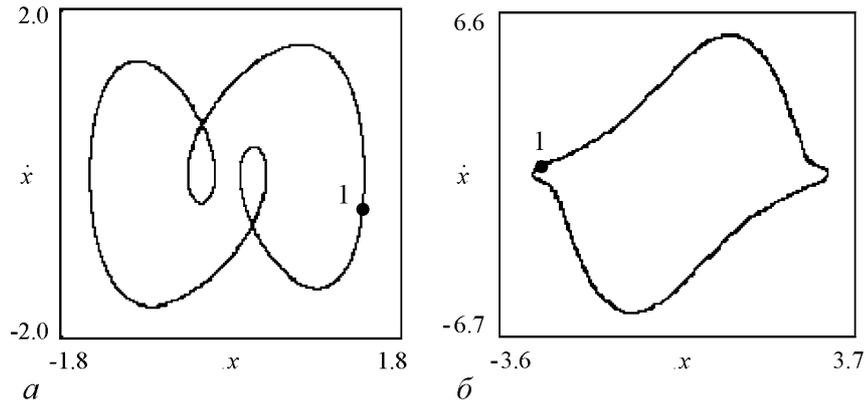


Рис. 24. Фазовые портреты на плоскости (x, \dot{x}) и точки сечений Пуанкаре неавтономных a – осциллятора Дуффинга ($b = 2.5, \omega = 0.61, d = 0.2, \beta = 1$); b – осциллятора Ван дер Поля ($b = 7.5, \omega = 0.5, \lambda = 0.5$)

от расширенного фазового пространства перейти к «замкнутому» фазовому пространству, как бы «склеивая» два сечения Пуанкаре (рис. 25). В результате такой процедуры вид аттрактора полностью соответствует традиционному для автономных систем третьего порядка. Хорошо видно на правом рисунке, что аттрактор имеет «классический» вид, который обычно приобретают предельные циклы после двух бифуркаций удвоения периода. (Рис. 25 относится к неавтономному *брюсселятору*.)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2y - (1 + B)x + A + b \sin \omega t, \\ \dot{y} &= -x^2y + Bx. \end{aligned}$$

Значения параметров $b = 0.05, \omega = 0.72, A = 0.4, B = 1.2$.)

В «новом» фазовом пространстве периодическому режиму будет соответствовать замкнутая траектория (см. рис. 25 и 26, a). Оказывается, что в таких системах возможны новые типы аттракторов, которые представляют собой торы в фазовом пространстве. В этом случае фазовая траектория движется по поверхности тора, всюду плотно покрывая его, но нигде не замыкаясь. Это образы *квазипериодических колебаний*. Им отвечает колебательный процесс с двумя несоизмеримыми частотами – одна из них отвечает движению вдоль меридиана тора, а другая – вдоль его оси.

Нам осталось представить карты динамических режимов неавтономных систем. На рис. 27 такая карта показана для системы Ван дер Поля – Дуффинга

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \beta x^3 = b \sin \omega t,$$

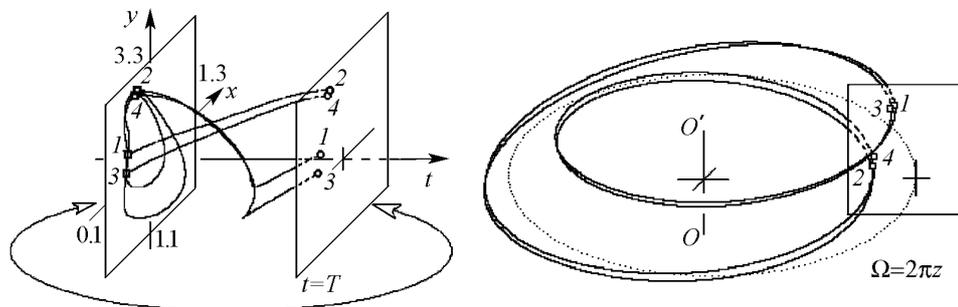


Рис. 25. «Склеивание» сечений Пуанкаре и «четырёхоборотный» предельный цикл неавтономного *брюсселятора*

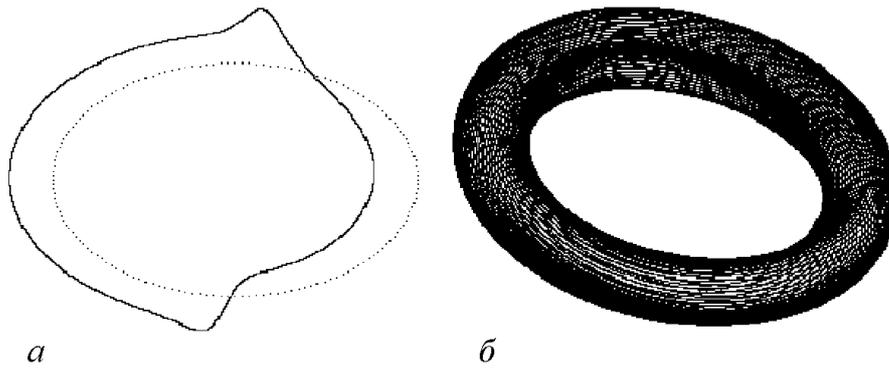


Рис. 26. Аттракторы осциллятора Ван дер Поля для $\lambda = 0.5$, $b = 7.5$. a – периодический режим, $\omega = 0.5$; b – квазипериодический режим, $\omega = 5.25$

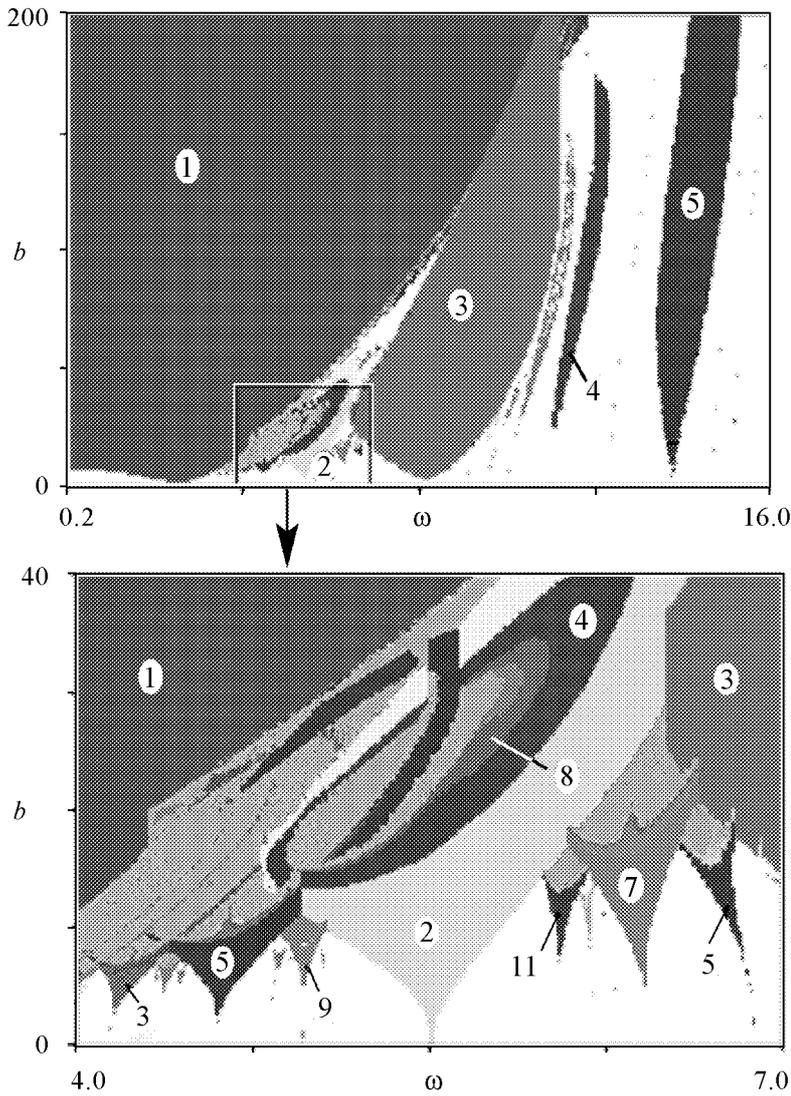


Рис. 27. Система языков Арнольда на карте режимов неавтономного осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга

на плоскости частота ω – амплитуда воздействия b для $\lambda = 1$ и $\beta = 2.5$. Можно видеть, что она имеет некоторые существенные особенности – наличие множества областей периодических режимов, упирающихся своими остриями в ось частот. Они хорошо видны на выделенном фрагменте карты. Эти области носят специальное название *языки Арнольда* (по имени выдающегося российского математика В.И. Арнольда). Цифры на рисунке отвечают периодам циклов. Квазипериодические режимы реализуются в промежутке между языками (белый цвет на карте). В определенной мере режимы, отвечающие языкам Арнольда, связаны с квазипериодическими. Действительно, им отвечают замкнутые предельные циклы, лежащие на поверхности тора. Такому циклу соответствует некоторое число оборотов m для движения по меридиану тора и n оборотов вокруг оси. Период цикла при этом составляет mn . Ясно, что такие долгопериодические циклы «похожи» на тор. Описанный круг явлений связан с понятием *синхронизации*, которое отвечает явлениям в автоколебательной системе под внешним воздействием. Соответствующие вопросы, однако, требуют более глубокого и всестороннего обсуждения, и здесь мы лишь «обозначаем» эту проблематику.

Заключение

Авторы надеются, что представленный материал в определенной мере отразил «тонкую игру дискретного и непрерывного», по выражению В.И. Арнольда, и будет полезен для развития образования в области нелинейной динамики и привлечения к науке молодежи. Авторы хотели бы выразить глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН, профессору Д.И. Трубецкову, «инициировавшему» нашу педагогическую деятельность в области нелинейной динамики. При изложении материала мы опирались также на лекции, читавшиеся А.П. Кузнецовым и С.П. Кузнецовым в течение ряда лет на Всероссийской школе «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Поэтому мы благодарны всему коллективу организаторов этих школ во главе с Д.И. Трубецковым.

Работа поддержана фондом содействия отечественной науке, Американским фондом гражданских исследований и развития и Минобрнауки РФ (BRHE REC-006 Y3-P-06-07), а также программой «Гранты Президента РФ для молодых российских ученых – кандидатов наук и их научных руководителей» (МК-4162.2006.2).

Задачи

1. Реализуйте программу, которая строит бифуркационное дерево для логистического отображения. Установите значения параметров, когда реализуются устойчивые неподвижная точка, 2-цикл, 4-цикл, 8-цикл.
2. Напишите программу, которая строит итерационные диаграммы одномерных отображений. С ее помощью наблюдайте каскад удвоений периода в логистическом отображении. Подберите «коллекцию» циклов в критической области, найдите все 3-циклы, 4-циклы, 5-циклы.
3. Комбинируя две предыдущие программы, создайте такую, которая при щелчке мышью на бифуркационном дереве в отдельном окне строит итерационную диаграмму.
4. Продемонстрируйте свойство скейлинга на бифуркационном дереве.

5. Постройте бифуркационное дерево в системе с шумом. Просмотрите его увеличенные фрагменты.

6. Для отображения Эно найдите аналитически неподвижную точку, элементы 2-цикла. Укажите значения параметров, при которых наблюдается первое удвоение периода.

7. Напишите программу, которая для отображения прыгающего шарика строит график $y(t)$. Рассмотрите случаи 2-цикла, 4-цикла, хаоса и другие возможные варианты.

8. Напишите программу, которая реализует конденсацию изображающих точек на аттрактор Эно.

9. Создайте программу, которая строит карты динамических режимов двумерных отображений. С ее помощью постройте карты отображения Эно и отображения прыгающего шарика. Дополните ее программой, которая при щелчке мыши на карте строит портрет аттрактора в соответствующей точке. С ее помощью пронаблюдайте эволюцию аттракторов при путешествии по карте отображения Эно. То же самое для отображения прыгающего шарика.

10. Напишите программу, решающую численно уравнение Ван дер Поля. Пронаблюдайте конденсацию облака изображающих точек на предельный цикл для системы Ван дер Поля при значении параметра $\lambda = 1$. За эволюцией облака следите в режиме компьютерной мультипликации.

11. Напишите программу, которая строит трехмерные фазовые портреты системы Ресслера.

12. Напишите программу, которая строит сечение Пуанкаре для системы Ресслера

$$\dot{x} = -(y + z), \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b + z(x - c).$$

С ее помощью постройте карту динамических режимов системы Ресслера на плоскости параметров (c, a) для $b = 0.2$. Укажите на ней ситуации «crossroad area».

13. Постройте карту динамических режимов для системы Ван дер Поля – Дуффинга. Пронаблюдайте ее эволюцию при изменении параметра нелинейности β . Дополните ее программой, которая при щелчке мыши на карте строит сечение Пуанкаре. С ее помощью пронаблюдайте замкнутые кривые, отвечающие сечениям тора, и резонансные циклы на торе.

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
2. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
3. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
4. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 312 с.
5. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
6. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
7. Кузнецов А.П. Наглядные образы хаоса // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т. 6, № 11. С. 104.

8. *Ряшко Л.Б.* Модели динамики популяции: от порядка к хаосу // Соросовский образовательный журнал. 2001. № 10. С. 122.
9. *Кузнецов С.П.* Хаос: Сценарий Фейгенбаума и его обобщения // Империя Математики. 2000. Т. 1, № 1. С. 16.
10. *Кузнецов А.П.* Через экран компьютера – в мир нелинейной динамики // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 5. С. 89.

*Саратовский филиал Института
радиотехники и электроники РАН
Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 20.05.2006

«NONLINEAR MINIMUM» IN THE THEORY OF DISCRETE MAPS

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, J.V. Sedova

The introduction in the theory of discrete maps available for understanding to senior classes pupils and students of younger years is presented. It demonstrates correlation of discrete and continuous descriptions of dynamical systems. The physical examples facilitate a perception of a material. The computer tasks are presented, which decision gives a chance to generate enough capacious collection of programs, that can be used in research work.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лица прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики». E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.tserv.ru



Седова Юлия Викторовна – родилась в 1979 году. Окончила Саратовский государственный университет (2001). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2004), научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Научные интересы – влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Автор 9 статей в отечественной и зарубежной печати.



*Серия: «След вдохновений и трудов упорных...»
Приложение к журналу «Изв. вузов. ПНД»*

СИНХРОНИЗАЦИЯ: УЧЕНЫЙ И ВРЕМЯ

Лекции на школах «Нелинейные дни в Саратове для молодых»
Выпуск 2

Д.И. Трубецков

- © Д.И. Трубецков, 2005
- © Д.В. Соколов, оформление 2005
- © Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2005

Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2005. 108 с.
ISBN 5-94409-046-4

Во втором выпуске лекций изложены три небольших курса, подготовленные для традиционных школ Саратовского государственного университета «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Лекции предназначены для школьников старших классов, студентов и аспирантов. Они могут оказаться полезными для учителей и преподавателей высшей школы, а также для всех тех, кто интересуется жизнью естественных наук.

Содержание

От автора

Синхронизация и конкуренция глазами классиков

Эволюция определений Христиан Гюйгенс и часы.

Первое наблюдение синхронизации Рэлей и синхронизация в органых трубах и камертонах

Ван дер Поль, Андронов и ламповый генератор.

Синхронизация автогенераторов в радиотехнике

Конкуренция и сосуществование видов в экологии Фазовая синхронизация по Роберту Адлеру

Две тысячи четвертый год в датах нелинейной динамики

Две тысячи пятый год в датах нелинейной динамики

Созвездие гидродинамических дат

Созвездие фрактальных дат

Даты, не имеющие отношения к гидродинамике и фракталам, но важные для нелинейной динамики

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Обложка художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, Н.Н. Васевой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2007 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498
и Саратовским государственным университетом
по заключению договора между Подписчиком
(юридическим и физическим лицом) и Издателем

Стоимость подписки на 2007 год 450 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 01.08.06. Подписано к печати 20.09.06
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 10,5(7,5). Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 200. Заказ 380

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2006
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2006