



ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ШУМОМ

М.-Г.М. Зульпукаров, Г.Г. Малинецкий, А.В. Подлазов

Рассматриваются бифуркации в нелинейных системах, испытывающих воздействие слабого шума. Описаны случаи локальных бифуркаций: «седло-узел», транскритическая бифуркация, суперкритическая «вилка», субкритическая «вилка».

На основании известного явления роста и насыщения уровня шума по мере приближения к точке бифуркации поставлена обратная задача – по наблюдаемому изменению шума (характер роста, уровень насыщения, плотность распределения) определить положение точки предстоящей бифуркации и ее тип. Предложен алгоритм решения обратной задачи.

Введение

В настоящее время построение и анализ математических моделей нелинейных явлений находят все более широкое применение в исследовании поведения сложных систем, в том числе и в областях, традиционно не относящихся к точным наукам – медицине, социологии, экономике, истории и т.д. [1]. Изучение таких нелинейных явлений, как бифуркации, в этих случаях имеет большое прикладное значение, так как они соответствуют кризисным событиям в моделируемых системах.

Замечательным свойством нелинейных систем является то, что и в простых, и в сложных системах возникают бифуркации одного и того же типа. Это дает возможность свести задачу исследования бифуркаций исходной системы к изучению более простой (модельной) системы.

Отметим также следующее важное свойство нелинейных систем. Известно, что во время прохождения точки бифуркации снижается устойчивость системы по отношению к вариации начальных данных [1, 2]. Это делает систему чувствительной к малым воздействиям. Подчеркнем, что малые воздействия могут носить случайный характер. Из сказанного следует, что выбор конкретного пути развития в точке бифуркации может осуществиться под влиянием малого управляющего воздействия либо может быть вообще случайным.

Отсюда вытекает наличие двух практических задач.

Во-первых, *задача ретроспективного анализа поведения системы* с целью определения критических моментов (точек бифуркации) в прошлом, а также исследование альтернативных вариантов развития. Результаты решения этой задачи, помимо чисто теоретического интереса, могут представлять собой опыт, который стоит учитывать в будущем.

Во-вторых, *задача определения точек бифуркации в будущем* и сосредоточения управляющих усилий в определенном направлении [3]. Исходными данными для задачи, как правило, являются наблюдаемое состояние и поведение системы. Пример решения такой задачи – создание устройств, отключающих авиационные и ракетные двигатели при возникновении в них аномальных шумов, чтобы избежать взрыва и катастрофы.

При рассмотрении поведения сложной системы часто принимается во внимание, что на нее действует случайный шум – малое нерегулярное внешнее воздействие неопределенной природы. Также говорят, что в системе присутствуют слабые флуктуации. Например, если математическая модель описывает систему на каком-то конкретном уровне организации, то для учета влияния других уровней в модель вводятся стохастические составляющие.

Слабые флуктуации не оказывают заметного воздействия на поведение диссипативной системы, отличающейся высокой устойчивостью. Если же система находится вблизи точки бифуркации, то следствием ее чувствительности к малым изменениям начальных данных является усиление флуктуаций. Отметим, что усиление флуктуаций может играть конструктивную роль – приводить к образованию упорядоченных структур на макроуровне (порождение так называемых диссипативных структур, или упорядочение через флуктуации [4, 5]).

Ранее было выяснено, что приближение системы к точке бифуркации сопровождается появлением характерных особенностей шума – шумовых предвестников нелинейных неустойчивостей. Например, в [6] описаны предбифуркационные изменения спектра шума для систем дифференциальных уравнений, имеющих периодические решения. Описание предбифуркационного усиления шума в нелинейных отображениях дано в работах [2, 7, 8], в [9] приведен пример экспериментального исследования предбифуркационных шумов; в работе [10] описаны и другие примеры шумовых предвестников. Нас интересует обратная задача – как по нарастанию шума в системе определить, проходит ли она точку бифуркации.

Суммируя сказанное выше, кратко сформулируем цель данной работы как изучение поведения нелинейных систем с шумом вблизи точки бифуркации и поиск возможностей обнаружения точек бифуркации на основе анализа временного ряда, отражающего поведение системы.

1. Состояние проблемы

На сегодняшний день особенно хорошо изучены предбифуркационные шумы в системах с дискретным временем (системах, моделируемых нелинейными отображениями). В работах [2, 7, 8, 11, 12] отмечен ряд следующих явлений.

Явление роста и насыщения уровня шума в окрестности точки бифуркации исследовано в работах [2, 7, 8] на примере нелинейных отображений вида

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu) + f_n, \quad (1)$$

где μ – параметр, а f_n – возмущение (последовательность одинаково распределенных, независимых в совокупности, центрированных случайных величин с дисперсией σ_f^2). Отображение имеет устойчивую неподвижную точку $\bar{x} = \bar{x}(\mu)$ (в силу устойчивости математическое ожидание $\langle x \rangle = \bar{x}$). Рассматривается шум – центрированная случайная величина $\xi_n = x_n - \bar{x}$. Бифуркационное условие определяется равенством $|\gamma| = 1$, где $\gamma \equiv F'_x(\bar{x})$ (например, $\gamma = -1$ является условием бифуркации удвоения периода), поэтому вводится параметр $\alpha \equiv 1 - |\gamma|$, имеющий смысл расстояния до точки бифуркации.

Показано, что в линейном приближении дисперсия шума при подходе к точке бифуркации растет как

$$(\sigma_\xi^2)_{\text{lin}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \xi_n^2 \rangle_{\text{lin}} = \frac{\sigma_f^2}{1 - \gamma^2} \cong \frac{\sigma_f^2}{2\alpha}. \quad (2)$$

Значения параметра, при которых система может быть линеаризована, определяются соотношением

$$\alpha > \alpha_{\text{min}} = \frac{\sqrt{3} |\varepsilon| \sigma_f}{2}, \quad (3)$$

где $\varepsilon \equiv F''_{xx}(\bar{x})/2$. Вблизи точки бифуркации, когда это условие перестает выполняться, дисперсия шума прекращает расти и выходит на уровень насыщения

$$(\sigma_\xi^2)_{\text{nonlin}} \approx \frac{\sigma_f}{\sqrt{3} |\varepsilon|}.$$

Коэффициент усиления возмущения $K \equiv \sigma_\xi^2 / \sigma_f^2$ при этом достигает максимального значения: $K_{\text{max}} \sim 1/\sigma_f$.

Важное явление роста и насыщения интервала корреляции шума ξ_n описано в работах [2, 11]. Показано, что в области применимости линейного приближения интервал корреляции k растет как $1/\alpha$, а вблизи точки бифуркации выходит на уровень насыщения

$$k_{\text{max}} \approx \frac{1}{\alpha_{\text{min}}} \approx \frac{2}{\sqrt{3} \sigma_f |\varepsilon|}.$$

В нелинейных системах с непрерывным временем наблюдаются аналогичные явления. Например, в работах [7, 8] рассмотрен частный случай такой системы – нелинейный осциллятор, заданный уравнением

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \frac{\partial U}{\partial \xi} = f(t),$$

где β – коэффициент затухания, U – потенциал

$$U(\xi) = \frac{1}{2} B \xi^2 + \frac{1}{4} A \xi^4,$$

а шум $f(t)$ представляет собой δ -подобный случайный процесс. Интервал корреляции $f(t)$ обозначается τ_f . Считается, что интервал τ_f мал по сравнению с периодом колебаний осциллятора. В данной системе происходит суперкритическая бифуркация типа «вилка» (спонтанное нарушение симметрии) при достижении параметром B критического значения $B_c = 0$.

Линейное приближение в этом случае даст зависимость

$$(\sigma_{\xi}^2)_{\text{lin}} = \frac{\sigma_f^2 \tau_f}{2\beta B}$$

в области

$$B > B_{\text{min}} = \sigma_f \sqrt{\frac{3A\tau_f}{\beta}},$$

а вблизи точки бифуркации дисперсия наблюдаемого сигнала выходит на уровень насыщения

$$(\sigma_{\xi}^2)_{\text{nonlin}} = \sigma_f \sqrt{\frac{\tau_f}{12A\beta}}.$$

После прохождения точки бифуркации дисперсия наблюдаемого сигнала некоторое время держится вблизи уровня насыщения, а затем также убывает по линейному закону [2].

Итак, для нелинейных систем с дискретным временем (и ряда частных случаев систем с непрерывным временем) показано, что по мере приближения к точке бифуркации дисперсия наблюдаемого сигнала нарастает строго определенным образом, выходя вблизи точки бифуркации на уровень насыщения. Несколько усложняет наблюдение данного явления то обстоятельство, что интервал корреляции наблюдаемого сигнала, определяющий время, необходимое для сбора статистики, также возрастает в окрестности точки бифуркации.

Естественным продолжением описанных выше исследований было бы решение следующих задач: во-первых, получение аналогичных результатов для как можно более широкого класса нелинейных систем с непрерывным временем; во-вторых, изучение закона распределения наблюдаемого сигнала в зависимости от близости системы к точке бифуркации; и в-третьих, обратная задача – определение положения точки бифуркации и выяснения ее типа по изменению характеристик наблюдаемого сигнала.

2. Постановка задачи

В качестве объекта исследования выберем некоторую диссипативную динамическую систему, поведение которой описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением с параметром

$$\dot{x} = v(x, \lambda), \quad (4)$$

где $x = x(t)$ – переменная состояния, t имеет смысл времени, λ – параметр, v – некоторая нелинейная функция (фазовая скорость). Также будем пользоваться понятием потенциала

$$U(x, \lambda) = - \int_0^x v(z, \lambda) dz. \quad (5)$$

Для данного типа математических моделей имеется ряд строгих результатов, представляющих собой основу для изучения качественных трансформаций широкого класса динамических систем. В сочетании с относительной простотой, это делает динамическую систему вида (4) особенно удобной для исследования.

Решения уравнения (4) в зависимости от v , λ и начального условия $x = x_0$ могут вести себя следующим образом [13]: либо стремиться к постоянному значению – аттрактору (фазовое пространство в данном случае одномерно, и единственный допустимый вид аттрактора – устойчивая особая точка $x(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow \infty$, $v(x^*) = 0$), либо неограниченно возрастать (убывать) за бесконечное время, либо неограниченно возрастать (убывать) за конечное время.

Соответственно выбору однопараметрической одномерной системы для исследования, мы ограничиваемся рассмотрением наиболее простых бифуркаций – локальных бифуркаций положений равновесия. Рассматриваемые нами бифуркации будут иметь коразмерность 1. Чем ниже коразмерность бифуркации, тем более типичной для разнообразных динамических систем она является. Бифуркационные задачи для систем высокой размерности часто сводятся к рассмотрению систем размерности 1 или 2 [14]. Таким образом, сделанные для системы (4) выводы будут достаточно общими.

Перечислим наиболее распространенные бифуркации коразмерности 1, которые будем рассматривать далее. Это бифуркация типа «седло-узел» с нормальной формой $\dot{y} = \mu - y^2$ (y – независимая переменная, μ – параметр), бифуркация типа «обмен устойчивостью» (транскритическая бифуркация) с нормальной формой $\dot{y} = \mu y - y^2$, суперкритическая (мягкая) бифуркация типа «вилка» ($\dot{y} = \mu y - y^3$), субкритическая (жесткая) бифуркация типа «вилка» ($\dot{y} = -\mu y + y^3$).

Рассмотрим, как можно в математической модели нелинейной системы учесть влияние шумов. В случае непрерывного времени в качестве математической модели самого шума используют какой-либо случайный процесс, обычно винеровский. Обозначим его $\xi(t)$ и назовем *вносимым шумом*. Математической моделью системы будет стохастическое дифференциальное уравнение. Существует классификация по способу ввода $\xi(t)$ в уравнение. Наиболее часто рассматриваются системы с аддитивным шумом – $\dot{x} = v(x, \lambda) + \xi(t)$. Также различают мультипликативный шум – $\dot{x} = v(x, \lambda) \times \xi(t)$, внутренние шумы – системы вида $\dot{x} = v(F(x, \xi(t)), \lambda)$, параметрические шумы – системы вида $\dot{x} = v(x, F(\lambda, \xi(t)))$ и т. д.

Мы будем рассматривать *броуновский шум*, действующий по следующей схеме. Пусть в определенные моменты времени t_i переменная состояния x суммируется с реализацией ξ некоторой случайной величины Ξ . Назовем это *возмущением*. Для простоты будем иметь дело только с периодическим шумом (то есть возмущения происходят периодически, с интервалом $T_{ш}$). Полученная в результате возмущения сумма используется в качестве начального условия в задаче Коши для дифференциального уравнения (4). Система интегрируется в течение времени $T_{ш}$, затем происходит очередное возмущение, и т. д. В расширенном фазовом пространстве (x, t) это выглядит как случайное мгновенное перемещение между интегральными кривыми. В результате получится некоторый случайный процесс $x(t)$ марковского типа. Назовем $x(t)$ наблюдаемым сигналом. Броуновский шум представляется достаточно простым и удобным для анализа и, в то же время, он не столь хорошо исследован, как, например, аддитивный шум.

Функцию плотности распределения случайной величины Ξ обозначим $f_{\text{ш}}(\xi)$ и наложим на нее требование четности (снос отсутствует). Стандартное отклонение Ξ будем обозначать $\sigma_{\text{ш}}$.

В дальнейших расчетах будем использовать равномерно распределенный периодический броуновский шум

$$f_{\text{ш}}(\xi) = \begin{cases} 1/A, & |\xi| \leq A/2, \\ 0, & |\xi| > A/2, \end{cases}$$

$$\sigma_{\text{ш}} = \frac{A}{2\sqrt{3}}, \quad (6)$$

$$t_{i+1} - t_i = T_{\text{ш}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Исследуем воздействие шума на систему с параметром λ , изменяющимся с течением времени. Пусть изменение параметра происходит в пределах $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ дискретно с постоянным шагом по λ , обозначаемым $\Delta\lambda$ ($\Delta\lambda \ll \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$), и постоянным интервалом по времени T_{λ} . Поскольку значительно проще изучать наблюдаемый сигнал как установившийся процесс, нам понадобится, чтобы его интервал корреляции был мал по сравнению с временем изменения параметра. Для этого, как минимум, необходимо выполнение условия

$$T_{\text{ш}} \ll T_{\lambda}. \quad (7)$$

Для простоты в теоретических расчетах полагаем, что параметр изменяется квазистатически: $T_{\lambda} \rightarrow \infty$. Также нам понадобится учитывать еще одно характерное время – время выхода на аттрактор T_a . Мы не будем его фиксировать, так как при изменении λ время T_a меняется в широких пределах, и важно рассмотрение его во всем диапазоне.

Окончательно поставим задачу следующим образом.

Во-первых, в условиях действия периодического равномерно распределенного броуновского шума для случая одной из наиболее типичных бифуркаций требуется получить закон распределения наблюдаемого сигнала и выяснить характер его изменения по мере приближения параметра к точке бифуркации.

Во-вторых, исходя из этого, требуется исследовать возможность решения обратной задачи: на основании изменения характеристик наблюдаемого сигнала в процессе медленного изменения параметра системы оценить расстояние до точки бифуркации и сделать предположения относительно ее типа.

3. Экспериментальные данные

С целью наблюдения явления предбифуркационного нарастания дисперсии наблюдаемого сигнала для перечисленных ранее основных типов бифуркаций был поставлен ряд экспериментов. В этих экспериментах выполнялось численное моделирование поведения динамических систем, заданных дифференциальными уравнениями непосредственно в соответствующих нормальных формах, в присутствии броуновского шума. Для каждой системы была выполнена серия экспериментов и

получена эмпирическая зависимость дисперсии наблюдаемого сигнала от бифуркационного параметра и параметров вносимого шума. В экспериментах рассматривались значения параметров, лежащие в области применимости линейного приближения, так как серийные эксперименты в окрестности точки бифуркации связаны с большими вычислительными затратами, что вызвано упоминавшимся выше предбифуркационным увеличением интервала корреляции наблюдаемого сигнала.

Эксперименты строились следующим образом. Бифуркационный параметр μ изменялся в пределах от -10 до -1 с шагом 0.02 (точка бифуркации во всех экспериментах $\mu = 0$). Для каждого значения μ выполнялось моделирование воздействия шума на систему. Шаг модели представлял собой интегрирование в течение времени $\Delta t = 0.001$. В начальный момент модельного времени система помещалась в устойчивое положение равновесия y^* , вычисляемое для данного μ . В начале шага, если оно совпадало с началом периода возмущения, производилось возмущение. В конце каждого шага положение системы y регистрировалось как реализация случайной величины. По окончании моделирования для зарегистрированных значений y вычислялось стандартное отклонение σ_y , интерпретируемое как характеристика интенсивности шума. Зависимость σ_y от μ , полученная в эксперименте, откладывалась на графике. Для каждого значения μ выполнялось 50000 шагов; число шагов подобрано опытным путем таким образом, чтобы быть достаточным для сбора статистики во всех экспериментах для всех значений μ (при уменьшении числа шагов до 1000 получаемые данные начинают заметно меняться от повторения к повторению).

Характеристики вносимого шума в пределах серии экспериментов варьировались по следующей схеме. Как было указано выше, параметрами равномерно распределенного броуновского шума являются амплитуда возмущения A и период возмущения $T_{ш}$. Величина A принимала значения 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} и 10^{-6} , а $T_{ш}$ – 10^{-3} , 10^{-2} и 10^{-1} . Таким образом, каждая серия включала 15 экспериментов. В процессе моделирования для $T_{ш} = 10^{-3}$ возмущение производилось на каждом шаге, для $T_{ш} = 10^{-2}$ – на каждом десятом шаге, а для $T_{ш} = 10^{-1}$ – на каждом сотом шаге.

На рис. 1 показаны графики $\sigma_y(\mu)$ (для разных A и $T_{ш}$) в двойном логарифмическом масштабе. Видно, что экспериментальные точки аппроксимируются прямыми, то есть зависимость (вне области насыщения), как и в случае дискретного времени, является степенной. Для нахождения параметров аппроксимирующей прямой использовался метод наименьших квадратов. Угловой коэффициент аппроксимирующей прямой определяет степень μ в уравнении для конкретного графика. Видно, что его значение неизменно в

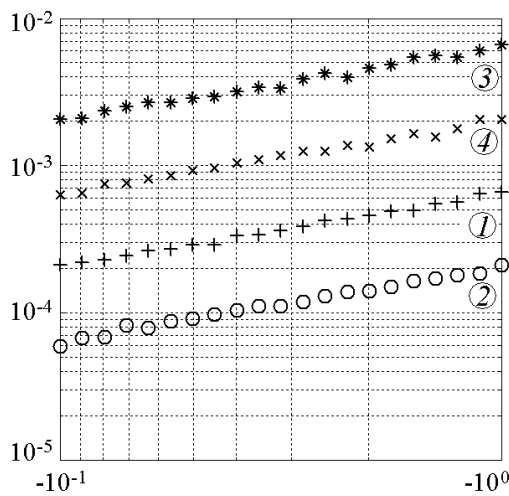


Рис. 1. Данные серии экспериментов для случая суперкритической бифуркации типа «вилка» для следующих значений: (1) – $A = 10^{-4}$, $T_{ш} = 10^{-3}$; (2) – $A = 10^{-4}$, $T_{ш} = 10^{-2}$; (3) – $A = 10^{-3}$, $T_{ш} = 10^{-3}$; (4) – $A = 10^{-3}$, $T_{ш} = 10^{-2}$. По оси абсцисс отложены значения бифуркационного параметра μ , по оси ординат – стандартное отклонение наблюдаемого сигнала σ_y

пределах серии. Сравнивая свободные члены в уравнениях прямых для разных графиков серии, можно получить множитель, зависящий от характеристик вносимого шума.

В итоге для транскритической бифуркации и суперкритической «вилки» получена эмпирическая зависимость вида

$$\sigma_y \sim \frac{A}{\sqrt{T_{\text{ш}}}} \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}, \quad (8)$$

а для бифуркации «седло-узел» –

$$\sigma_y \sim \frac{A}{\sqrt{T_{\text{ш}}}} \frac{1}{\sqrt[4]{|\mu|}}. \quad (9)$$

Подчеркнем следующее: уже можно видеть, что определение типа бифуркации в отдельных случаях возможно на достаточно большом расстоянии от точки бифуркации (вне области насыщения). Особенно удобно, что интервал корреляции наблюдаемого сигнала в этом случае сравнительно мал, и данные для статистики можно набрать достаточно быстро.

Таким образом, для нелинейных систем с непрерывным временем, претерпевающих наиболее типичные бифуркации, экспериментально проверено и подтверждено, что в окрестности точки бифуркации имеет место степенное нарастание шума. Выведенные на основании экспериментальных данных эмпирические формулы в отдельных случаях позволяют различать типы бифуркаций еще до выхода дисперсии наблюдаемого сигнала на уровень насыщения. В дальнейшем предстоит обосновать полученные зависимости теоретически, получив функции плотности распределения наблюдаемого сигнала для различных бифуркаций.

4. Теоретическое обоснование

Рассмотрим простейшую диссипативную динамическую систему вида (4), заданную уравнением

$$\dot{x} = x(\lambda - x^2). \quad (10)$$

Данная система удобна тем, что нет необходимости приводить ее к нормальной форме: можно видеть, что в точке $\lambda = 0$ происходит суперкритическая бифуркация типа «вилка».

Потенциал (5) в данном случае имеет вид

$$U(x, \lambda) = \frac{x^4}{4} - \frac{\lambda x^2}{2}. \quad (11)$$

Потенциальный минимум в точке $x = 0$, имеющий место при $\lambda < 0$, после прохождения параметром λ бифуркационного значения $\lambda = 0$ заменяется на локальный максимум с одновременным появлением пары симметрично расположенных «потенциальных ям».

Считаем, что на систему действует равномерно распределенный броуновский шум вида (6). Пусть управляющий параметр $\lambda < 0$, и λ приближается к точке бифуркации с соблюдением условия (7). Попробуем оценить, как при этом меняется дисперсия наблюдаемого сигнала $x(t)$. Воспользуемся следующими очевидными свойствами функции $v(x, \lambda)$ для случая (10):

$$v(x, \lambda) \approx \lambda x, \quad |\lambda| \gg \tilde{x}^2, \quad (12)$$

$$v(x, \lambda) \approx -x^3, \quad |\lambda| \ll \tilde{x}^2. \quad (13)$$

Здесь \tilde{x} обозначает характерную величину x . При статистическом исследовании в качестве \tilde{x} можно взять, например, стандартное отклонение σ_x . Упрощения (12) и (13) позволяют разделить анализ поведения системы (10) по трем множествам значений параметра λ : в одном из них зависимость поведения системы от параметра является наиболее простой, в другом отсутствует вообще, а в третьем упрощенный анализ невозможен.

Чтобы получить выражение для функции плотности распределения наблюдаемого сигнала, удобно вместо отдельно взятой системы вида (4) ввести в рассмотрение ансамбль таких систем. Если одной системе соответствует точка в одномерном фазовом пространстве, то образом ансамбля систем будет совокупность точечных частиц. Пусть системы подвергаются возмущению описанным выше образом, и эти возмущения не согласованы (то есть у каждой системы – свой независимый генератор шума). Движение каждой частицы будет включать две составляющие: детерминированную (движение под действием разности потенциалов) и стохастическую (броуновское движение). В случае потенциала (11) можно считать, что с течением времени установится некоторое стационарное распределение линейной плотности частиц. Предположим наличие свойства эргодичности: распределение вероятностей для положения отдельной частицы совпадает с распределением плотности частиц ансамбля.

Воспользуемся следующими определениями и обозначениями:

$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dn}{dx}$ – линейная плотность частиц,

u – скорость потока частиц (скорость частиц в точке в отсутствие шумов),

$q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dn}{dt} = \rho u$ – поток через точку,

$K(x, s, t)$ – относительная скорость переноса.

Относительная скорость переноса $K(x, s, t)$ (плотность вероятности переноса частицы за единицу времени) вводится в качестве характеристики стохастической составляющей движения частиц. Пусть в момент времени t координата частицы равна x . Рассмотрим вероятность случайного переноса частицы на отрезок $[s, s + ds]$ в течение интервала времени dt . Определение K заключается в том, что эта вероятность равна

$$P = K(x, s, t) ds dt.$$

Поскольку возмущения разных частиц не согласованы, то для выбранной наугад частицы неизвестен фазовый сдвиг возмущений относительно выбранного момента начала отсчета $t = 0$. Поэтому впредь будем считать стохастическую составляющую движения частиц автономной: $K(x, s, t) \equiv K(x, s)$.

Также, с учетом сделанных предположений о четности функции плотности распределения возмущения, запишем

$$\begin{aligned}\xi &\stackrel{\text{def}}{=} |s - x|, \\ K(x, s) &\equiv K(\xi).\end{aligned}$$

Главной интегральной характеристикой вносимого шума является постоянная, называемая коэффициентом диффузии [15]:

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} K(\xi) \xi^2 d\xi.$$

В частности, для вносимого шума вида (6) относительная скорость переноса будет очевидным образом равна

$$K(\xi) = \frac{1}{T_{\text{ш}}} f_{\text{ш}}(\xi),$$

а коэффициент диффузии, соответственно,

$$\kappa = \frac{1}{T_{\text{ш}}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{ш}}(\xi) \xi^2 d\xi = \frac{\sigma_{\text{ш}}^2}{2T_{\text{ш}}}. \quad (14)$$

Известно [15], что для броуновских частиц поток в отсутствие потенциала зависит от плотности следующим образом:

$$q_B(x, t) = -\kappa \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x}. \quad (15)$$

Составляющая потока частиц, обусловленная уравнением (10), очевидным образом равна

$$q_P = \rho v.$$

Записав эти выражения совместно и приняв во внимание, что нас интересует установившееся стационарное распределение плотности (а значит, суммарный поток частиц $q = q_B + q_P$ в каждой точке равен нулю), получим

$$q = -\kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \rho = 0. \quad (16)$$

Решив это дифференциальное уравнение и приняв во внимание свойство эргодичности, получим выражение для функции плотности вероятности наблюдаемого сигнала

$$f(x) = f_0 \exp\left(-\frac{1}{\kappa} U(x)\right), \quad (17)$$

где f_0 – нормирующий множитель

$$f_0 = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\kappa} U(x)\right) dx}. \quad (18)$$

Для определения характерной величины \tilde{x} воспользуемся стандартным отклонением для плотности вероятности $f(x)$:

$$\tilde{x} \equiv \sigma_f = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx}. \quad (19)$$

Воспользуемся полученными результатами для анализа системы (10) при условии $\lambda \leq 0$. Как и прежде, упростим систему в соответствии с (12) и (13), запишем результаты для каждого случая и определим области, где полученные результаты будут корректны.

Для системы, упрощенной в соответствии с (12), первообразная $v(x)$ примет вид

$$U(x) = -\frac{\lambda x^2}{2}. \quad (20)$$

Далее нам понадобится формула

$$\int_0^{\infty} x^{\beta-1} \exp(-\Lambda x^\alpha) dx = \Lambda^{-\beta/\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (21)$$

(можно убедиться, что заменой $\Lambda x^\alpha = t$ интеграл в левой части приводится к Γ -функции [16]). Согласно (18), с учетом (20) и (21), подставив $\beta = 1$, $\alpha = 2$ и $\Lambda = |\lambda|/2\kappa$, найдем нормирующий множитель f_0 . Аналогичным образом, с учетом (17), подставив в (21) $\beta = 3$ (так как в формуле для дисперсии в подынтегральное выражение входит множитель x^2), $\alpha = 2$, получим выражение для дисперсии наблюдаемого сигнала. Окончательно, подставив выражение для нормирующего множителя в выражение для дисперсии, получим с учетом (19) и свойств Γ -функции:

$$\sigma_f = \sqrt{\kappa} \times \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}. \quad (22)$$

Отсюда следует, что упрощение (12) применимо, пока выполняется условие

$$|\lambda| \gg \sqrt{\kappa}. \quad (23)$$

Подставив (14), нетрудно убедиться, что (22) соответствует полученной ранее эмпирической зависимости (8).

Перейдем к рассмотрению системы, упрощенной в соответствии с (13). Выражение для потенциала при этом примет вид

$$U(x) = \frac{x^4}{4}. \quad (24)$$

В этом случае $\alpha = 4$ и $\Lambda = 1/4\kappa$. Проведя манипуляции, аналогичные описанным выше, получим

$$\sigma_f = \sqrt{2 \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}} \sqrt[4]{\kappa}. \quad (25)$$

Условие (13) запишется в виде

$$|\lambda| \ll 2 \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \sqrt{\kappa}.$$

На рис. 2 можно видеть пример графика функции плотности распределения наблюдаемого сигнала для данного случая. Для сравнения там же показано описанное в работе [9] экспериментально полученное распределение шума в модифицированном осцилляторе Ван дер Поля (управляющий параметр находится в точке суперкритической бифуркации типа «вилка»).

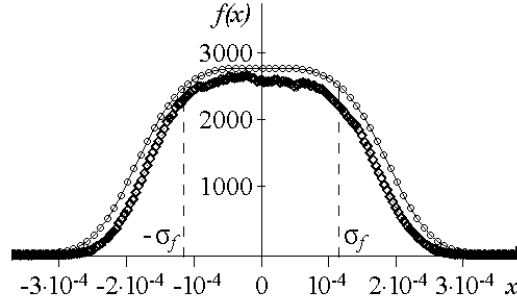


Рис. 2. Плотность распределения наблюдаемого сигнала в точке суперкритической бифуркации типа «вилка». Масштаб по координатным осям дан для теоретического графика. Теоретическая зависимость (○-○-○) получена путем подстановки (24) в (17), σ_f рассчитано согласно (25). Коэффициент диффузии κ определен по формуле (14) для вносимого шума вида (6) с параметрами $A = 10^{-8}$, $T_{ш} = 10^{-2}$

Поскольку данные на графике относятся к различным системам, различным значениям параметров вносимого шума (и, что имеет смысл подчеркнуть особо, различным видам вносимого шума), экспериментальный график пришлось подвергнуть перемасштабированию. Однако можно видеть, что теоретическая и экспериментальная зависимости совпадают (с точностью до масштаба).

Осталось рассмотреть ситуацию, когда λ находится в промежуточной области и ни одно из упрощений не применимо ($|\lambda|$ по порядку величины сопоставима с $\sqrt{\kappa}$). Полагаем, что множитель в подынтегральном выражении в

(18) отвечает условию $1/\kappa \gg 1$. С учетом этого, для вычисления (18) и (19) уместно применить лемму Ватсона [16], которая позволяет для функции

$$\Phi(\Lambda) = \int_0^a x^{\beta-1} F(x) \exp(-\Lambda x^\alpha) dx \quad (26)$$

при $\Lambda \rightarrow \infty$ воспользоваться асимптотическим разложением

$$\Phi(\Lambda) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) \frac{F^{(k)}(0)}{k!}. \quad (27)$$

В качестве примера найдем таким образом f_0 в (18). Подставим в (26) $\beta = 1$, $\alpha = 4$. Положим

$$\begin{aligned} \Lambda &= 1/4\kappa, \\ F(x) &= e^{-(2\Lambda|\lambda|x^2)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Для простоты вычисления старших производных $F(x)$ введем вспомогательную переменную w и функцию $u(w)$:

$$\begin{aligned} w &\equiv \sqrt{2\Lambda|\lambda|x}, \quad u(w) = e^{-w^2}, \\ F^{(k)}(x) &= (2\Lambda|\lambda|)^{k/2} u^{(k)}(w). \end{aligned} \quad (29)$$

Обратим внимание на то, что F – четная функция, и потому для нечетных k выполняется равенство $u^{(k)}(0) = 0$. Имея в виду этот факт, получим согласно (27)–(29)

$$f_0^{-1} = 2\Phi(\Lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{-\frac{2k+1}{4}} \Gamma\left(\frac{2k+1}{4}\right) \frac{u^{(2k)}(0)}{(2k)!} (2\Lambda |\lambda|)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k |\lambda|^k. \quad (30)$$

Этот степенной ряд сходится для любых λ : нетрудно доказать методом индукции, что множитель $u^{(2k)}(0)$ является знакопеременным и растет не быстрее, чем $2^{2k}k!$.

Чтобы получить функцию плотности распределения наблюдаемого сигнала, подставим (30) в (17). Прделав простейшие преобразования, получим

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{\kappa}U(x)\right)}{\kappa^{1/4}W_d\left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{\kappa}}\right)}, \quad (31)$$

где W_d – функция, определяемая следующим образом:

$$W_d(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{2k+1}{4}\right) \frac{u^{(2k)}(0)}{(2k)!} s^k. \quad (32)$$

Исходя из полученного закона распределения, найдем стандартное отклонение наблюдаемого сигнала σ_f в (19). Для этого сначала запишем аналогичное (30) выражение для интеграла, определяющего дисперсию для плотности вероятности $f(x)$ (разница будет заключаться лишь в $\beta = 3$). Затем выполним нормировку, разделив полученное выражение на (30) почленно. Окончательно получим

$$\sigma_f^2 = \sqrt{\kappa} \times W\left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{\kappa}}\right), \quad (33)$$

где

$$W(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{2k+3}{4}\right) \frac{u^{(2k)}(0)}{(2k)!} s^k}{W_d(s)}. \quad (34)$$

Итак, поведение наблюдаемого сигнала в окрестности $|\lambda| = \sqrt{\kappa}$ определяется посредством функций W и W_d , заданных с помощью бесконечных степенных рядов. Указанные функции являются эталонными и могут быть построены численно единственный раз, заранее. Это серьезно облегчает решение обратной задачи.

Попутно отметим, что по мере увеличения $|\lambda|$ затраты на вычисление W и W_d для соответствующих s быстро нарастают, и использование общих формул (31) и (33) для расчетов в области применимости упрощений (12) и (13) нецелесообразно.

На рис. 3 совместно показаны оценки дисперсии наблюдаемого сигнала согласно (22) и (25), график (33), а также измеренные экспериментально значения дисперсии. Можно видеть, что полученные зависимости (в пределах своей области применимости) находятся в согласии с экспериментальными данными. Также ясно видно, что на практике общая формула (33) не заменяет (22), так как ей можно пользоваться только в области выхода дисперсии наблюдаемого сигнала на уровень насыщения: при вычислении согласно (34) $W(s)$ в конечном приближении, существует

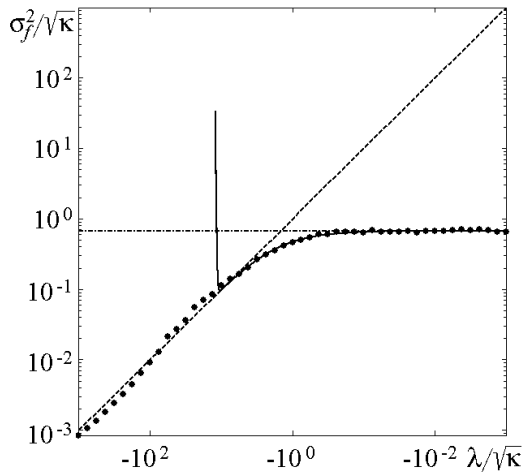


Рис. 3. Дисперсия наблюдаемого сигнала: оценки и экспериментальные данные. Точками показаны экспериментальные значения дисперсии, полученные при численном моделировании поведения системы, заданной уравнением (10), под действием вносимого шума вида (6). Параметры шума: $A = 10^{-3}$, $T_{ш} = 10^{-3}$ ($\kappa = 4.17 \times 10^{-5}$). Штрихпунктирная линия соответствует оценке уровня насыщения согласно (25), штриховая линия соответствует (22). Сплошной линией показан график (33) (числитель и знаменатель $W(s)$ вычислены в 278 приближении)

такое критическое значение s , свыше которого вкладом остатков рядов в числителе и знаменателе пренебрегать уже недопустимо (на приведенном графике критическое значение выглядит как точка локального минимума). В данном случае применение (33) имеет смысл при $|\lambda| < 10\sqrt{\kappa}$, так как при вычислении $W(s)$ используются полиномы 278 степени (ограничение вызвано переполнением типа double при вычислении соответствующих факториалов).

5. Пример решения обратной задачи

Задача определения точки бифуркации в пространстве параметров и выяснения ее типа по наблюдаемой траектории динамической системы с шумом является частным случаем задачи реконструкции динамической системы по временному ряду. Так называемые обратные задачи, заключающиеся в определении некоторых количественных характеристик явления по результатам измерений их косвенных проявлений, обычно относятся к некорректным, в силу, например, разрывности обратного преобразования [17].

Приближенное решение некорректно поставленной задачи, устойчивое к малым изменениям исходных данных, может быть найдено, если условие задачи включает некоторую дополнительную (априорную) информацию об исследуемой системе. Как правило, эта информация либо позволяет сузить класс возможных решений, либо определяет общий характер решения (например, характер его гладкости). В частности, для задачи нахождения точек бифуркации и/или определения типа бифуркации, имеют значение сведения относительно параметров системы, характеристик вносимого шума и т.д. Большой класс методов приближенного решения обратных задач (так называемые методы регуляризации) был предложен в научной школе академика А.Н. Тихонова [17].

Рассмотрим вариант задачи на нахождение точки бифуркации и проверку гипотезы о ее типе на примере суперкритической бифуркации типа «вилка». (Прочие из рассмотренных простых бифуркаций связаны со сближением устойчивого и неустойчивого положений равновесия, следовательно, в их случае вблизи точки

бифуркации при достаточном времени наблюдения должен отмечаться уход сигнала $x(t)$ в область аномальных значений (шумовое разрушение); анализ таких ситуаций представляет собой отдельный класс задач.)

Допустим, некоторая нелинейная система генерирует сигнал $x(t)$, в котором присутствует случайная составляющая ($x(t)$ суть наблюдаемый сигнал). Пусть также имеется следующая априорная информация о системе. Во-первых, система не является колебательной (это упрощает дальнейший анализ). Во-вторых, есть возможность измерения некоторой величины λ , которую мы будем считать параметром системы. При этом характерное время изменения λ значительно превышает интервал корреляции наблюдаемого сигнала T_x :

$$T_\lambda \gg T_x.$$

Пусть также отмечено, что наблюдаемый сигнал при фиксированном λ имеет стационарное распределение, причем при изменении параметра λ в определенном направлении происходит рост дисперсии наблюдаемого сигнала σ_x^2 .

Требуется проверить предположение, что при дальнейшем изменении параметра, по достижении им определенного значения λ_b , в исследуемой системе происходит бифуркация, и определить λ_b . Также требуется проверить, является ли предстоящая бифуркация суперкритической бифуркацией типа «вилка».

Предположим, что параметр находится достаточно далеко от точки бифуркации, так что система может быть линеаризована. Тогда, согласно соотношению (22), если график зависимости дисперсии наблюдаемого сигнала от параметра, $\sigma_x^2(\lambda)$, построен в двойном логарифмическом масштабе, то точки должны ложиться на прямую с угловым коэффициентом $+1$.

Если это не наблюдается, то следует найти некоторое преобразование параметра λ , чтобы удовлетворить этому требованию:

$$\lambda' = L(\lambda) \tag{35}$$

(фактически данное преобразование означает переградуировку шкалы прибора, измеряющего λ). Например, если экспериментальные точки лежат на прямой с отличным от $+1$ угловым коэффициентом, то достаточно возведения λ в соответствующую степень i , возможно, изменения знака. Подчеркнем, что в общем случае такое преобразование неочевидно, и его поиск представляет собой отдельную задачу.

Известно, что линейное приближение дает бесконечный рост уровня шума в точке бифуркации. Воспользуемся этим, чтобы приближенно найти точку бифуркации λ'_b . Из (22) следует соотношение

$$\sigma_x^2 = \frac{\kappa}{-(\lambda' - \lambda'_b)}.$$

Итак, мы получили уравнение с двумя параметрами – бифуркационным значением λ'_b и коэффициентом диффузии κ (напомним, что по условиям задачи он неизвестен). Чтобы найти значения параметров, приведем его к виду уравнения прямой:

$$\sigma_x^{-2} = -\frac{1}{\kappa}\lambda' + \frac{\lambda'_b}{\kappa}. \tag{36}$$

Воспользовавшись, например, методом наименьших квадратов для экспериментальных точек $(\lambda'_i, (\sigma_x^{-2})_i)$, найдем угловой коэффициент и свободный член аппроксимирующей прямой

$$\sigma_x^{-2} = a\lambda' + b, \quad (37)$$

откуда, согласно (36), получим оценки для k и λ'_b :

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= -\frac{1}{a}, \\ \tilde{\lambda}'_b &= b\tilde{k}. \end{aligned} \quad (38)$$

Выполним следующее преобразование координат для удобства использования (33):

$$s' = -\frac{\lambda'}{\sqrt{\tilde{k}}}, \quad y = \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{\tilde{k}}}. \quad (39)$$

Область применимости линейного приближения (22) в этих координатах будет определяться соотношением

$$(\tilde{s}' - \tilde{s}'_b) \gg 1. \quad (40)$$

Если это соотношение не выполняется, то исходное предположение об удаленности параметра от точки бифуркации неверно, и преобразование (35) и основанные на нем оценки (38) не имеют смысла; данный случай требует отдельного рассмотрения.

Следует отметить, что на практике по мере удаления параметра от точки бифуркации точность оценки коэффициента диффузии по формуле (38) возрастает (так как поведение нелинейной системы все менее отличается от поведения линеаризованной системы), в то время как точность оценки координаты точки бифуркации снижается: оценка координат центра гиперболы по удаленным точкам, близким к асимптоте (в масштабе погрешности), затруднена. Таким образом, для получения более точной оценки координаты точки бифуркации необходимо исследование наблюдаемого сигнала в области выхода его дисперсии на уровень насыщения. Относящиеся к этой области экспериментальные точки (s'_i, y_i) следует аппроксимировать функцией

$$y = W(s' - \tilde{s}'_b), \quad (41)$$

где сдвиг \tilde{s}'_b – единственный параметр аппроксимации – определяет положение точки бифуркации. Если удалось выполнить аппроксимацию с заданной точностью, то можно считать, что положение точки бифуркации в новых координатах успешно определено.

Предположение о типе бифуркации можно проверять после оценки положения точки бифуркации. Для этого следует сравнить построенную по результатам наблюдения (за время, в течение которого изменение λ можно считать незначительным) функцию распределения наблюдаемого сигнала с функцией (31). Поскольку в области насыщения закон распределения является уникальным для данного типа бифуркации, при совпадении сравниваемых функций предположение о типе можно считать подтвержденным.

Итак, на основании сказанного, алгоритм решения данной задачи можно сформулировать следующим образом.

1. Построить график для некоторого набора экспериментальных точек $(\lg \lambda_i, \lg [(\sigma_x^2)_i])$.

2. Предположив выполнение (23), подобрать преобразование (35) таким образом, чтобы точки $(\lg \lambda'_i, \lg [(\sigma_x^2)_i])$ ложились на прямую с угловым коэффициентом $+1$.

3. Построить график для экспериментальных точек $(\lambda'_i, (\sigma_x^{-2})_i)$.

4. Методом наименьших квадратов определить коэффициенты в уравнении аппроксимирующей прямой (37).

5. По формулам (38) получить оценки для коэффициента диффузии $\tilde{\kappa}$ и координаты предполагаемой точки бифуркации $\tilde{\lambda}'_b$.

6. Выполнить преобразование координат согласно (39).

7. Проверить выполнение условия (40). Если условие не выполняется, то следует изменить выбор экспериментальных точек для п. 1. Например, можно попробовать выбрать точки с минимальной дисперсией наблюдаемого сигнала (предположительно, они наиболее удалены от точки бифуркации).

8. Рассчитать теоретически плотность распределения наблюдаемого сигнала для линеаризованной системы, подставив (20), $\lambda = \lambda' - \tilde{\lambda}'_b$ и нормирующий множитель, рассчитанный по формуле (21), в (17).

9. Проверить соответствие плотности распределения наблюдаемого сигнала, полученной экспериментально, теоретическим расчетам. При несоответствии считать алгоритм неприменимым в данном случае. Вероятной причиной несоответствия является слишком быстрое изменение параметра.

10. Если с ростом s' отмечается замедление роста дисперсии наблюдаемого шума по сравнению с оценкой для линеаризованной системы, то попытаться аппроксимировать экспериментальные точки функцией (41). В случае, если достигнута заданная точность аппроксимации, считать координату точки бифуркации определенной.

11. С учетом данных о положении точки бифуркации, рассчитать плотность распределения по формуле (31) и сравнить с экспериментальными данными. В случае совпадения считать предположение о типе бифуркации подтвержденным.

Приведем пример применения данного алгоритма. В качестве объекта для испытания была выбрана система, заданная уравнением (10). В силу выбора системы для исследования, п. 2 алгоритма выполнялся тривиальным образом. Система подвергалась воздействию периодического равномерно распределенного броуновского шума (6) со следующими характеристиками:

$$T_{\text{ш}} = 10^{-2}, \quad A = 10^{-3}, \quad \sigma_{\text{ш}} = 2.9 \times 10^{-4}, \quad \sqrt{\kappa} = 2.0 \times 10^{-3}.$$

Рассматривались серии по 10 точек (λ_j, σ_j^2) , отстоящих друг от друга по λ на $\Delta\lambda = 2 \times 10^{-4}$. Дисперсия σ_j^2 наблюдаемого сигнала $x(t, \lambda_j)$ вычислялась по результатам измерений $x_i = x(t_i, \lambda_j)$, таких что $t_{i+1} - t_i = 10^{-3}$. Приведем результаты по двум случаям, различающимся скоростью $\dot{\lambda}$ изменения параметра λ .

В первом случае $\dot{\lambda} = 2 \times 10^{-9}$. Для измерений вблизи значений параметра $\lambda = -0,02$ п. 5 алгоритма дал оценки

$$\sqrt{\tilde{\kappa}} = 2.0 \times 10^{-3}, \quad \tilde{\lambda}'_b = 5.3 \times 10^{-3}.$$

Можно видеть, что условие (40) выполнено. При этом оценка k является достаточно точной, а ошибка оценки λ'_b превышает размер области насыщения. По результатам серии измерений для λ на отрезке $[-3 \times 10^{-3}; -1 \times 10^{-3}]$, согласно п. 10 алгоритма была получена оценка

$$s'_b = 0.05, \tilde{\lambda}_b = -10^{-4}.$$

Итак, ошибка составила 5% от размера области насыщения. На рис. 4, *a* можно видеть, что экспериментальная плотность распределения x хорошо согласуется с теоретическими расчетами по формуле (31), даже с учетом погрешности определения положения точки бифуркации. Можно считать, что гипотеза о типе предстоящей бифуркации подтверждена.

Во втором случае скорость изменения параметра в 1000 раз больше: $\dot{\lambda} = 2 \times 10^{-6}$. В пп. 1–2 алгоритма угловой коэффициент прямой, аппроксимирующей экспериментальные точки $(\lg \lambda_j, \lg \sigma_j^2)$, был найден равным 10. Использование таких экспериментальных данных повлечет неверный выбор преобразования (35), и все дальнейшие оценки будут неадекватны. В качестве иллюстрации на рис. 4, *б* показана экспериментальная плотность распределения, найденная по измерениям в районе $\lambda = -0.02$. Можно видеть ее несоответствие теоретическим результатам. В данном случае причиной этого является нехватка данных для расчета статистики.

Тем не менее, можно видеть, что при соблюдении условия медленного (квазистатического) изменения параметра возможно получение достаточно точного прогноза бифуркации и проверка гипотезы о ее типе весьма простым образом на основе минимума априорной информации.

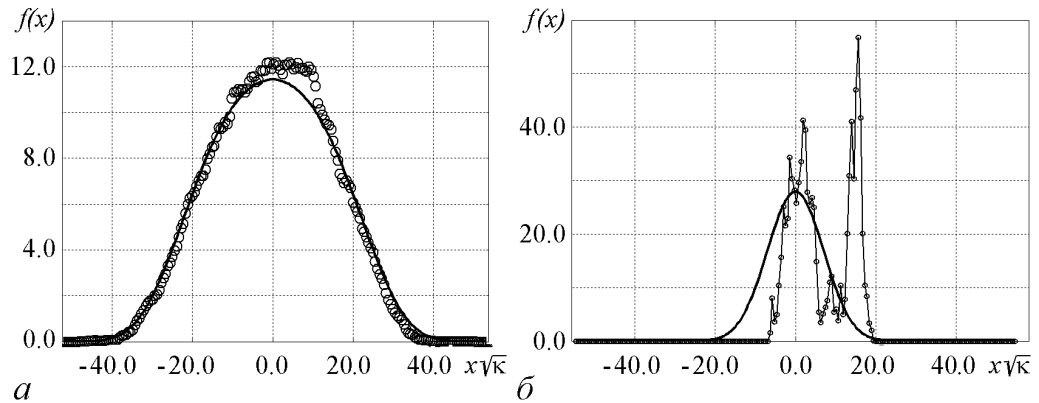


Рис. 4. Плотность распределения наблюдаемого сигнала. Сравнение экспериментальной плотности распределения с теорией. Сплошной линией показан теоретический график функции плотности распределения $f(x)$, точками – экспериментальный. *a* – случай медленного изменения параметра ($\dot{\lambda} = 2 \times 10^{-9}$); измерения в области насыщения уровня шума ($\lambda = -0.002$); точка бифуркации определена с достаточной точностью, экспериментальные данные согласуются с теорией. *б* – быстрое изменение параметра ($\dot{\lambda} = 2 \times 10^{-6}$); измерения в области линейного поведения системы ($\lambda = -0.02$); можно видеть, что положение точки бифуркации не может быть определено

Заключение

В настоящей работе рассмотрены вопросы поведения нелинейных динамических систем, испытывающих воздействие слабого шума, в окрестности точки бифуркации. Дан краткий обзор имеющихся результатов для систем, моделируемых нелинейными отображениями (систем с дискретным временем). Рассмотрены аналогичные явления в апериодических системах, моделируемых нелинейными дифференциальными уравнениями – системах с непрерывным временем. В частности, получена зависимость, описывающая нарастание дисперсии наблюдаемого сигнала по мере приближения к точке бифуркации.

Для изучения были выбраны наиболее типичные бифуркации – локальные бифуркации коразмерности 1. Из них были рассмотрены бифуркации типа «седло-узел», транскритическая бифуркация и две бифуркации типа «вилка» (субкритическая и суперкритическая).

Поставлен ряд экспериментов по изучению изменения наблюдаемого сигнала по мере приближения к точке бифуркации. По результатам экспериментов выведены эмпирические зависимости уровня шума от бифуркационного параметра и параметров вносимого шума для разных типов бифуркаций.

Для отдельно взятой бифуркации (суперкритическая бифуркация типа «вилка») получена точная зависимость дисперсии наблюдаемого сигнала от вносимого шума и бифуркационного параметра. Выведенная теоретически зависимость находится в согласии с полученными ранее экспериментальными данными.

Приведен пример алгоритма решения обратной задачи – обнаружения и определения типа бифуркаций посредством анализа наблюдаемого сигнала.

На основании полученных и имеющихся результатов можно сделать следующие выводы.

Во-первых, бифуркацию типа «седло-узел» можно предвидеть, основываясь на результатах наблюдений задолго до самой бифуркации, то есть, изучая рост дисперсии наблюдаемого сигнала до его выхода на уровень насыщения (рассматривая линеаризованную систему). Это особенно важно с учетом того факта, что интервал корреляции наблюдаемого сигнала при этом относительно мал, и данные для статистики можно набрать достаточно быстро.

Во-вторых, для остальных рассмотренных типов бифуркаций задача определения типа может быть решена, исходя из данных о характеристиках наблюдаемого сигнала на этапе выхода его дисперсии на уровень насыщения. Применение диффузионной модели отчасти снимает проблему увеличения интервала корреляции наблюдаемого сигнала. Действительно, если для исследования одновременно доступно множество систем, длительный сбор статистики для одной системы может быть заменен изучением установившегося распределения (или установившейся динамики, если распределение нестационарно) по ансамблю.

В заключение, считаем приятным долгом поблагодарить О.Я. Бутковского и Е.Д. Суровяткину, которые привлекли наше внимание к этому важному классу задач, за полезное обсуждение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 04-01-00510, 05-01-00852) и гранта Президента РФ НШ-374.2003.1.

Библиографический список

1. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: УРСС, 2002.
2. *Кравцов Ю.А., Бильчинская С.Г., Бутковский О.Я., Рычка И.А., Суровяткина Е.Д.* Предбифуркационное усиление шума в нелинейных системах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2001. Т. 120, вып. 6 (12). С. 1527–1534.
3. *Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В., Кузнецов И.В.* О национальной системе научного мониторинга. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2004, № 47.
4. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
5. *Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г.* Синергетика и прогнозы будущего. Изд. 3. М.: УРСС, 2003.
6. *Wiesenfeld K.* Virtual Hopf phenomenon: A new precursor of period-doubling bifurcations // Phys. Rev. A. Vol. 32, № 3, September 1985. P. 1744–1751.
7. *Kravtsov Yu. A. and Surovyatkina E.D.* Nonlinear saturation of prebifurcation noise amplification // Phys. Let. A. Vol. 319, Issues 3–4, 8 December 2003. P. 348–351.
8. *Surovyatkina E.* Prebifurcation noise amplification and noise-dependent hysteresis as indicators of bifurcations in nonlinear geophysical systems // Nonlinear Processes in Geophysics (2005) 12. P. 25–29.
9. *Juel A., Darbyshire A.G., Mullin T.* The effect of noise on pitchfork and Hopf bifurcations // Proc. R. Soc. Lond. A (1997) 453, 2627–2647.
10. *Anishchenko V.S., Neiman A.B.* Structure and Properties of Chaos in the Presence of Noise // «Nonlinear Dynamics of Structures» / Edited by R. Z. Sagdeev, U. Frisch, F. Hussain, S.S. Moiseev and N.S. Erokhin. Singapore–New Jersey–London–Hong Kong: World Scientific, 1991. P. 21–48.
11. *Surovyatkina E.D.* Rise and saturation of the correlation time near bifurcation threshold // Phys. Let. A. Vol. 329, Issue 3, 23 August 2004. P. 169–172.
12. *Surovyatkina E., Kurths Ju.* Pre-bifurcational noise-dependent phenomena as diagnostic instrument for revealing bifurcations in geophysical systems // Geophysical Research Abstracts. 2005. Vol. 7. P. 00462.
13. *Малинецкий Г.Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику. М.: Наука, 1997.
14. *Йосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983.
15. *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы математической физики. Среда из невзаимодействующих частиц. М.: Наука, 1973.
16. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.
17. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

*Институт прикладной
математики РАН*

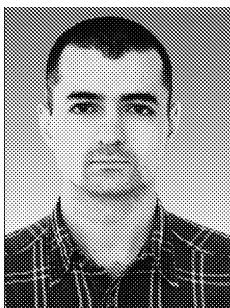
*Поступила в редакцию 02.06.2005
После доработки 23.09.2005*

BIFURCATION THEORY INVERSE PROBLEM IN A NOISY DYNAMICAL SYSTEM. EXAMPLE SOLUTION

M.-G.M. Zulpukarov, G.G. Malinetskii, A.V. Podlazov

Bifurcations in nonlinear systems with weak noise are considered. The local bifurcations are discussed: the saddle-node bifurcation, the transcritical bifurcation, the supercritical and subcritical pitchfork bifurcations.

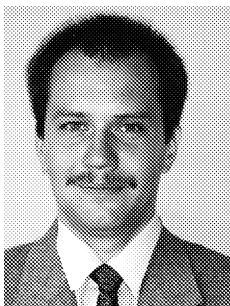
Basing on the known prebifurcational noise rise and saturation phenomenon, the inverse problem is introduced: the problem of the bifurcation detection and determining it's type by the observed noise change (noise deviation growth fashion, saturation level, probability density). The inverse problem solution algorithm is suggested.



Зульпукаров Магомед-Герей Меджидович – родился в Москве (1978), окончил Московский инженерно-физический институт (2002). После окончания аспирантуры МИФИ в 2005 году работает младшим научным сотрудником в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. E-mail: vreemd@mail.ru



Малинецкий Георгий Геннадьевич – родился в Уфе (1956), окончил физический факультет МГУ (1979), защитил кандидатскую диссертацию на тему «Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных средах» (1982) и докторскую диссертацию на тему «Диффузионный хаос и новые типы упорядоченности в нелинейных средах» (1990) в Институте прикладной математики РАН. В настоящее время работает заместителем директора ИПМ, а также профессором кафедры прикладной математики МФТИ. Автор большого количества статей в области исследования хаоса и нелинейных явлений, а также учебника «Структуры, хаос, вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику». E-mail: gmalin@spp.keldysh.ru



Подлазов Сергей Викторович – родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996), к.ф.-м.н. В настоящее время работает в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика, теория самоорганизованной критичности, математическая история, теоретическая демография, теория управления риском. E-mail: Tiger@Keldysh.ru



ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ РЕЖИМОВ ПОЛНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОСА В АНСАМБЛЕ ИЗ ТРЕХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

А.В. Шабунин, С.М. Николаев, В.В. Астахов

Исследуются механизмы появления и исчезновения режимов полной синхронизации хаоса в кольце из трех логистических отображений с симметричной диссипативной связью. Проводится двухпараметрический бифуркационный анализ, рассматриваются типичные колебательные режимы и переходы между ними.

Введение

Синхронизация – универсальное явление в природе и технике, понимание закономерностей которого важно как при изучении фундаментальных законов естествознания, так и для использования в многочисленных приложениях. Если механизмы и проявления синхронизации регулярных колебаний в целом хорошо изучены, то синхронизация хаотических колебаний остается в центре внимания исследователей, специализирующихся в различных отраслях физики, химии, биологии и математики. Отсутствует даже единый подход к самому термину «хаотическая синхронизация». Под этим термином разные исследователи понимают разные явления, говоря о полной [1–4], кластерной [5], обобщенной [6, 8], частотной [8, 9] или фазовой [10] синхронизации. В настоящей работе мы будем рассматривать полную синхронизацию хаоса в кольце из трех логистических отображений с симметричной диффузионной связью. Полной синхронизацией хаоса называют случай, когда все взаимодействующие подсистемы $\{x_i\}$ осциллируют одинаково: $x_i(t) = x_j(t)$, то есть их состояния совпадают в любой момент времени. Это явление интенсивно исследуется, начиная с 1983 года [1]. Обобщением понятия полной синхронизации является обобщенная синхронизация хаоса (generalized synchronization) [8], когда между состояниями осцилляторов наблюдается некоторая детерминированная функциональная взаимосвязь: $x_i(t) = F_{ij}(x_j(t))$.

К настоящему времени известно множество систем различной природы, в которых реализуется режим полной синхронизации хаоса, проанализированы условия его существования [1, 11–13], достаточно хорошо известны механизмы формирования и разрушения полной синхронизации в двух взаимодействующих осцилляторах [14–18]. В частности, для двух осцилляторов, в которых переход к хаосу происходит через каскад субгармонических бифуркаций, было показано, что, как формирование, так и разрушение режима полной синхронизации связано с бифуркациями основного семейства периодических орбит. При этом разрушение режима синхронизации происходит сначала через этап локальной изрешеченности хаотического аттрактора [19, 20], которая делает режим синхронизации негрубым, то есть очень чувствительным к постоянно действующим возмущениям, а затем через этап изрешеченности бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора [21], когда в малую окрестность аттрактора вклиниваются области из бассейна притяжения другого (несинхронного) аттрактора. В ансамблях из большего числа элементов, наряду с полной синхронизацией может наблюдаться кластерная синхронизация, при которой существуют наборы осцилляторов (кластеры), каждый из которых работает в режиме полной синхронизации, а между ними синхронизация отсутствует.

Явления частичной и полной синхронизации в системе, состоящей из трех связанных логистических отображений с несимметричной связью, исследовались в работе [6], в которой был проведен детальный бифуркационный анализ механизмов разрушения полной и формирования частичной хаотической синхронизации. В рассмотренном случае механизмы разрушения режима полной синхронизации хаоса оказались сходными с соответствующими механизмами в двух диффузионно связанных осцилляторах [14]. При этом, как и в случае двух осцилляторов, разрушение синхронизации сопровождалось явлениями локального изрешечивания и изрешечивания бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора. Может сложиться впечатление, что подобная ситуация является типичной, в том смысле, что механизмы разрушения полной синхронизации хаоса в двух осцилляторах с диффузионной связью воспроизводятся и в ансамблях из большего числа элементов. Как влияет вид связи на механизм разрушения синхронизации хаоса? Приведет ли изменение бифуркационного механизма к новым явлениям и колебательным режимам, наблюдаемым в системе с другим типом связи? Ответам на эти вопросы посвящено настоящее исследование.

1. Исследуемая система, свойства симметрии, классификация симметричных решений

Рассмотрим ансамбль из отображений, задаваемый системой уравнений

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \frac{\gamma}{2}(f(y_n) + f(z_n) - 2f(x_n)), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \frac{\gamma}{2}(f(x_n) + f(z_n) - 2f(y_n)), \\z_{n+1} &= f(z_n) + \frac{\gamma}{2}(f(x_n) + f(y_n) - 2f(z_n)),\end{aligned}\tag{1}$$

где функция $f(x) = \lambda - x^2$ определяет вид одиночного осциллятора (логистическое

отображение); λ – управляющий параметр, определяющий его динамику; γ – параметр связи. Логистическое отображение представляет собой одну из базовых моделей нелинейной динамики, в которой при изменении параметра λ наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, в результате чего система совершает переход к хаотическим колебаниям. В закритической области при увеличении λ происходят бифуркации слияния лент многоленточных хаотических аттракторов, завершающиеся формированием развитого хаоса. Ансамбль связанных отображений (1) представляет собой одномерную цепочку с симметричной связью и периодическими граничными условиями. Ее уравнения обладают развитой симметрией, они инвариантны относительно следующих преобразований координат в фазовом пространстве:

- отражения в одной из трех плоскостей симметрии, то есть взаимные замены двух фазовых переменных

$$T_x : x \leftrightarrow x, \quad y \leftrightarrow z, \quad (2)$$

$$T_y : y \leftrightarrow y, \quad x \leftrightarrow z, \quad (3)$$

$$T_z : z \leftrightarrow z, \quad x \leftrightarrow y; \quad (4)$$

- повороты системы координат в положительном или отрицательном направлении, то есть циклическая замена фазовых переменных друг на друга:

$$R_+ : x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x, \quad (5)$$

$$R_- : x \leftarrow y \leftarrow z \leftarrow x. \quad (6)$$

Преобразования симметрии (2)–(6) не являются независимыми друг от друга. Базовыми (то есть независимыми) видами симметрии будут любые два вида отражения из (2)–(4), так как преобразования поворота (5), (6) и отражение относительно третьей плоскости могут быть выражены как их комбинация. Например, выбирая в качестве базиса T_x и T_y , можно записать:

$$R_+ = T_x \circ T_y,$$

$$R_- = T_y \circ T_x,$$

$$T_z = R \circ T_x.$$

Если траектория системы в каждый момент времени симметрична относительно какого-либо из преобразований симметрии $S \in \{T_{x,z,z}, R_{+,-}\}$:

$$x(n) = S(x(n)),$$

то такую траекторию будем называть симметричным решением системы (1). Все симметричные решения уравнений (1) можно разделить на два класса: решения, симметричные относительно одного из преобразований (2)–(4), и решения, симметричные относительно сразу пары этих преобразований. Последние являются симметричными относительно любого из преобразований симметрии для системы (1). В соответствии с установившейся терминологией, решения первого класса принято называть частично синхронными колебаниями, решения второго класса – полностью синхронными колебаниями. Если выбрать начальные условия, соответствующие какому-либо из видов симметрии (2)–(6), то траектория, стартующая из них,

будет также соответствовать этому виду. Таким образом, каждое из преобразований индуцирует в фазовом пространстве соответствующее инвариантное подпространство. Так, например, каждое из преобразований отражения индуцирует инвариантную двумерную плоскость

$$I_x : y = z, \quad (7)$$

$$I_y : x = z, \quad (8)$$

$$I_z : x = y. \quad (9)$$

Эти плоскости в дальнейшем будем называть «подпространствами частичной симметрии». Аттракторы, соответствующие частично синхронным колебаниям, располагаются в одном из подпространств частичной симметрии. Пересечение любых двух из этих подпространств

$$I_c = I_i \cap I_j : x = y = z, \quad (10)$$

также являющееся инвариантным подпространством для системы (1), будем называть подпространством полной симметрии. Аттракторы, соответствующие полностью синхронным колебаниям, располагаются в подпространстве полной симметрии.

Как известно, для системы с симметрией все предельные множества ω_i либо являются самосимметричными относительно определенного вида симметрии S

$$\omega_i = S(\omega_i),$$

либо имеют симметричного «двойника»

$$\omega_i = S(\omega_j).$$

Аттрактор, соответствующий симметричному решению, очевидно, является самосимметричным. Однако обратное не верно: самосимметричный аттрактор может соответствовать несимметричному решению. Типичный пример такого аттрактора – орбита периода два, точки которой переходят друг в друга при преобразовании симметрии, хотя сама орбита не принадлежит ни одному из симметричных подпространств (2)–(10).

Введем следующую классификацию и обозначения предельных множеств в фазовом пространстве системы (1): каждое предельное множество будем обозначать NM_i^j , где буквенный индекс M – тип предельного множества: C (*Cycle*) – периодическая орбита, A (*chaotic Attractor*) – хаотический аттрактор, T (*Torus*) – квазипериодические колебания; числовой индекс $N = 1, 2, 3, \dots$ – период орбиты или число лент аттрактора; верхний буквенный индекс $j \in \{x, y, z, c\}$ используется для симметричных аттракторов и обозначает соответствующее из подпространств симметрии $I_x - I_c$; нижний числовой индекс i идентифицирует предельное множество, если таких несколько. В дальнейшем мы будем интересоваться, в основном, симметричными предельными множествами, соответствующими синхронным колебаниям, а также несимметричными предельными множествами, чьи бифуркации участвуют в образовании или разрушении режимов синхронизации.

2. Трансверсальная устойчивость режимов полной синхронизации

Для того чтобы в системе мог наблюдаться режим полной синхронизации, соответствующее ему предельное множество, располагающееся в подпространстве полной симметрии I_c , должно быть орбитально устойчиво. При анализе устойчивости симметричного предельного множества любые возмущения в фазовом пространстве удобно представлять как сумму возмущения в тангенциальном к подпространству симметрии направлении и трансверсальном ему. Так как симметричное подпространство является инвариантным по отношению к оператору эволюции системы, то направление действия возмущений по отношению к подпространству (тангенциальные или трансверсальные) сохраняется. Соответственно, можно по отдельности характеризовать устойчивость предельного множества в тангенциальном и трансверсальном направлениях. Нарушение тангенциальной устойчивости ведет к смене одного синхронного режима другим синхронным режимом, нарушение трансверсальной устойчивости – к смене синхронного режима несинхронным, то есть к разрушению синхронизации.

Рассмотрим трансверсальную устойчивость режимов полной синхронизации. Для этого удобно перейти к новым переменным

$$\begin{aligned} u &= \frac{x + y + z}{3}, \\ v &= \frac{2x - y - z}{3}, \\ w &= \frac{2y - x - z}{3}. \end{aligned} \quad (11)$$

Векторы нового базиса e_2 и e_3 располагаются перпендикулярно симметричному подпространству, а вектор e_1 – по касательной к нему. Подставляя уравнения (11) в систему (1) и линеаризуя систему в окрестности симметричного подпространства, получим

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad (12)$$

$$v_{n+1} = \left(1 - \frac{3\gamma}{2}\right) f'(u_n) v_n, \quad (13)$$

$$w_{n+1} = \left(1 - \frac{3\gamma}{2}\right) f'(u_n) w_n. \quad (14)$$

Уравнение (12) описывает динамику системы внутри симметричного подпространства. Оно одномерно и совпадает с уравнением для одиночного отображения. Устойчивость по отношению к тангенциальным возмущениям для исходной системы описывается показателем Ляпунова для уравнения (12), который будем называть тангенциальным показателем Ляпунова

$$\Lambda_{\tau}^c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |f'(u_n)|. \quad (15)$$

Выражения (13), (14) описывают динамику системы в трансверсальном направлении в окрестности подпространства I_c . Синхронным колебаниям соответствует нулевое

решение системы (13), (14), а трансверсальная устойчивость синхронных колебаний определяется устойчивостью этого решения. Поскольку уравнения (13) и (14) идентичны, то синхронные колебания характеризуются двумя одинаковыми трансверсальными показателями Ляпунова

$$\Lambda_{\perp 1,2}^c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| 1 - \frac{3\gamma}{2} f'(u_n) \right|. \quad (16)$$

Выражение (16) можно преобразовать следующим образом:

$$\Lambda_{\perp 1,2}^c = \Lambda_{\tau} + \ln \left| 1 - \frac{3\gamma}{2} \right|. \quad (17)$$

Если параметр связи положителен и его значение находится в интервале $0 < \gamma < 2/3$, то трансверсальные показатели Ляпунова меньше тангенциального. Поэтому любые синфазные периодические решения для системы (1) трансверсально устойчивы, а синфазные хаотические решения устойчивы только для достаточно больших значений параметра связи γ . Причем все бифуркации, сопровождающие потерю устойчивости в трансверсальном к симметричному подпространству направлении, являются вырожденными: бифуркационное условие выполняется одновременно для двух характеристических показателей.

3. Бифуркации режимов полной синхронизации

Рассмотрим, как в системе (1) формируются режимы синхронного хаоса. Будем использовать только положительные значения параметров λ и $\gamma < 2/3$. В одностороннем отображении имеются две неподвижные точки: $C_1 = \sqrt{\lambda + 0.25} - 0.5$ и $C_2 = -\sqrt{\lambda + 0.25} - 0.5$. При значении параметра $0 < \lambda < 0.75$ точка C_1 является устойчивой. В дальнейшем, при увеличении λ на базе точки C_1 наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаотическим колебаниям. Точка C_2 остается неустойчивой при любых положительных значениях параметра λ . В кольце из трех отображений при нулевой связи существует 8 неподвижных точек: $1C_1^c = (C_1; C_1; C_1)$, $1C_2^c = (C_2; C_2; C_2)$, $1C_1^x = (C_1; C_2; C_2)$, $1C_2^x = (C_2; C_1; C_1)$, $1C_1^y = (C_2; C_1; C_2)$, $1C_2^y = (C_1; C_2; C_1)$, $1C_1^z = (C_2; C_2; C_1)$, $1C_2^z = (C_1; C_1; C_2)$. Из них только точка $1C_1^c$ при $\lambda < 0.75$ является устойчивой, остальные точки остаются неустойчивыми при любых значениях параметров λ и γ . На базе этой неподвижной точки формируются хаотические аттракторы, соответствующие режиму полной хаотической синхронизации.

Рассмотрим бифуркации режимов, возникших на базе неподвижной точки $1C_1^c$ (в дальнейшем нижний индекс для данной орбиты будем опускать), при фиксированном положительном значении параметра связи и возрастании λ . Как следует из формул (16), (17), любые бифуркации, сопровождающиеся сменой знака показателя Ляпунова, происходят дважды. Вначале в тангенциальном к подпространству симметрии направлении, когда один синхронный режим сменяется другим синхронным режимом, затем в трансверсальном направлении, когда в результате бифуркации в окрестности симметричного подпространства возникает предельное множество, соответствующее несинхронным колебаниям. Бифуркации внутри симметричного под-

пространства полностью повторяют соответствующие бифуркации одиночного отображения. Таким образом, для синхронных колебаний, как и для одиночного отображения, наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся переходом к хаосу, и бифуркации слияния лент хаотических аттракторов в закритической области. Бифуркационные условия тангенциальных бифуркаций зависят только от параметра λ , следовательно, на плоскости параметров (γ, λ) все бифуркационные линии располагаются горизонтально.

Бифуркационные линии для синхронных регулярных и хаотических режимов изображены на рис.1. Сплошные горизонтальные линии соответствуют бифуркациям удвоения периода для периодических орбит основного семейства внутри симметричного подпространства: L_{1-2}^1 ($1C^c \rightarrow 2C^c$), L_{2-4}^1 ($2C^c \rightarrow 4C^c$), L_{4-8}^c ($4C^c \rightarrow 8C^c$), L_{8-16}^c ($8C^c \rightarrow 16C^c$). Линии бифуркаций удвоения периода накапливаются к прямой L_{chaos}^1 , разделяющей области регулярного и хаотического поведения. В закритической области можно наблюдать бифуркации слияния лент хаотических аттракторов. На рис. 1 обозначены две из них (пунктирные линии): L_{4-2} – бифуркация слияния лент синхронного четырехленточного аттрактора, после которой появляется синхронный двухленточный аттрактор, и L_{2-1} – бифуркация слияния лент синхронного двухленточного аттрактора, после которой появляется синхронный одноленточный аттрактор. Кроме того, в закритической области наблюдаются несколько окон периодичности, в которых существуют периодические орбиты и возникшие на их основе хаотические аттракторы.

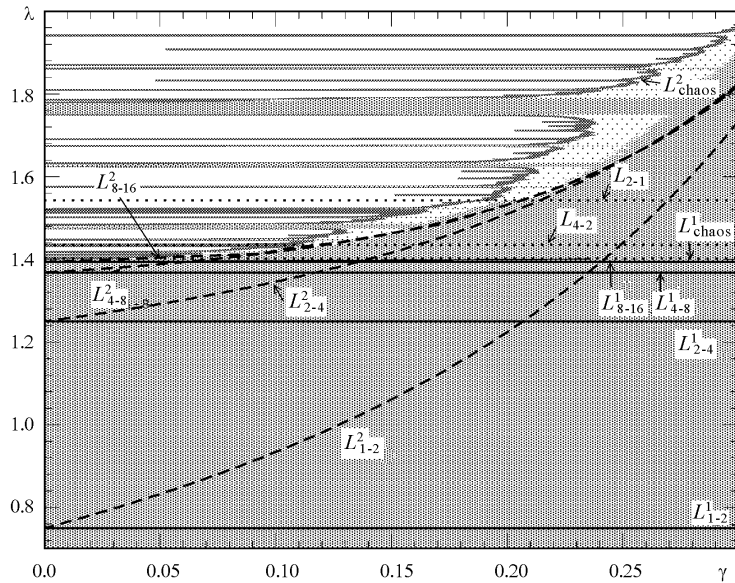


Рис. 1. Бифуркационные линии на плоскости управляющих параметров для режимов полной синхронизации. Сплошные горизонтальные линии L_{N-2N}^1 соответствуют тангенциальным бифуркациям удвоения периода (N – период бифурцирующей орбиты), штриховые линии L_{N-2N}^2 соответствуют трансверсальным бифуркациям периода. Пунктирные горизонтальные линии обозначают тангенциальные бифуркации в закритической области, в том числе линию перехода к хаосу L_{chaos}^1 . Линия L_{chaos}^2 – линия бифуркации прорыва, правее которой наблюдается область негрубой (обозначена светло-серым цветом) и грубой (обозначена серым цветом) синхронизации

Таким образом, в результате каскада тангенциальных бифуркаций удвоения периода в симметричном подпространстве формируется хаотический аттрактор, соответствующий режиму синхронного хаоса. Однако, как уже было замечено выше, каждая из периодических орбит претерпевает бифуркацию дважды. Вторая бифуркация удвоения происходит в трансверсальном направлении, когда меняет знак трансверсальный показатель Ляпунова. Так, на линии L_{1-2}^2 (трансверсальные бифуркации показаны на рис.1 штриховыми линиями) сразу два мультипликатора седловой орбиты $1C^c$ становятся равными (-1) , соответствующие собственные векторы направлены перпендикулярно симметричному подпространству, они образуют базис двумерного отталкивающего инвариантного многообразия для орбиты $1C^c(x + y + z = 0)$. В результате исходная орбита превращается в репеллер, а в его окрестности возникают три седловые орбиты периода два: $2C_1$, $2C_2$ и $2C_3$. При значении параметров $\lambda = 0.962$, $\gamma = 0.05$ точки орбит имеют следующие значения: $2C_1 = \{(0.6; 0.904; 0.177)(0.6; 0.177; 0.904)\}$, $2C_2 = \{(0.904; 0.6; 0.177)(0.177; 0.6; 0.904)\}$, $2C_3 = \{(0.904; 0.177; 0.6)(0.177; 0.904; 0.6)\}$. Видно, что каждая из этих орбит является самосимметричной относительно одного из преобразований симметрии $T_x : 2C_1 \rightarrow 2C_1$, $T_y : 2C_2 \rightarrow 2C_2$, $T_z : 2C_3 \rightarrow 2C_3$, при этом орбиты являются симметричными друг другу относительно преобразования вращения $R_+ : 2C_1 \rightarrow 2C_2 \rightarrow 2C_3 \rightarrow 2C_1$. Структура фазового пространства после указанной бифуркации показана на рис.2.

Неустойчивые многообразия вновь появившихся орбит $2C_i$ подходят к подпространствам частичной симметрии, идут вдоль них и опираются на точки орбиты удвоенного периода $2C^c$ (см. рис.2). При дальнейшем изменении параметров точки орбит $2C_i$ отходят от подпространства полной симметрии.

Аналогичные бифуркации происходят и со всеми другими орбитами из симметричного подпространства. Так, на линии L_{2-4}^2 (см. рис. 1) синхронная седловая орбита периода два претерпевает трансверсальную бифуркацию удвоения периода

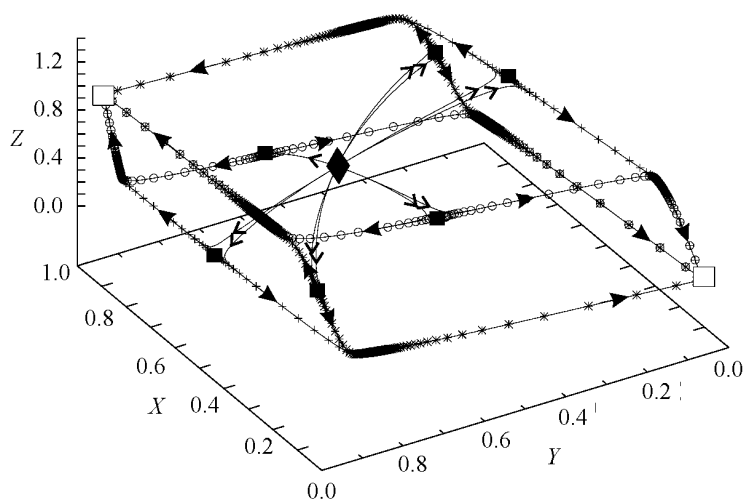


Рис. 2. Фазовый портрет в окрестности $1C^c$ после первой из трансверсальных бифуркаций удвоения периода $1C^c \rightarrow 2C_i$. Изображены: репеллер $1C^c$ (\blacklozenge), три седловые орбиты $2C_i$ (\blacksquare) и устойчивая орбита $2C^c$ (\square)

($2C^c \rightarrow 4C_i, i = 1, 2, 3$), в результате которой данная орбита становится репеллером, а в ее окрестности появляются три самосимметричные седловые орбиты периода четыре. На линиях L_{4-8}^2 и L_{8-16}^2 подобные бифуркации претерпевают орбиты $4C^c$ и $8C^c$. Линии, соответствующие трансверсальным бифуркациям орбит большего периода, на рисунке не приведены, однако они располагаются в непосредственной близости от линии L_{8-16}^2 . Эта линия с достаточно высокой точностью может служить границей области параметров, за которой все синхронные периодические орбиты основного семейства претерпели трансверсальную бифуркацию удвоения периода и стали репеллерами. Вновь возникшие несинхронные орбиты в дальнейшем не претерпевают других бифуркаций и остаются седловыми при всех рассматриваемых значениях параметров. Наконец, на линии L_{chaos}^2 , которая имеет весьма сложную изрезанную форму благодаря наличию окон периодичности, трансверсальную бифуркацию претерпевает хаотический аттрактор, располагающийся в симметричном подпространстве. Два его трансверсальных показателя Ляпунова становятся положительными. При этом синхронный хаотический аттрактор перестает быть притягивающим и трансформируется в хаотическое седло [19, 20], которое становится частью пузырящегося хаотического аттрактора, соответствующего режиму несинхронного хаоса. Левее линии L_{chaos}^2 режим полной синхронизации хаоса не наблюдается.

Описанные выше бифуркации предельных множеств из подпространства полной симметрии схожи с бифуркациями синхронных режимов в системе из двух отображений [14, 17], однако имеют свои особенности. В обоих случаях периодические орбиты претерпевают два каскада бифуркаций удвоения периода: первый – в тангенциальном направлении, в результате которого в симметричном подпространстве формируется синхронный хаотический аттрактор, второй – в трансверсальном направлении, в результате которого орбиты, входящие в замыкание аттрактора, становятся репеллерами. Различия в бифуркационных механизмах заключаются в следующем.

- В системе из трех отображений трансверсальные бифуркации удвоения периода являются вырожденными и приводят к появлению не одной (как для двух отображений), а сразу трех седловых орбит удвоенного периода.
- Вновь возникшие несинхронные орбиты остаются седловыми при всех значениях параметров, тогда как в системе из двух отображений данные орбиты становились устойчивыми через бифуркацию вил, что приводило к развитию мультистабильности в системе.

Каскад трансверсальных бифуркаций удвоения периода ведет к локальной изрешеченности синхронного хаотического аттрактора, поскольку входящие в его замыкание периодические орбиты основного семейства становятся репеллерами. При этом происходит постепенное разрушение режима полной синхронизации хаоса.

4. Явления, сопровождающие разрушение полной синхронизации хаоса

Рассмотрим, как описанный выше бифуркационный сценарий влияет на наблюдаемые в системе (1) явления, сопровождающие потерю полной синхронизации хаоса. Как следует из формулы (16), при достаточно сильной связи любые предельные множества, располагающиеся на прямой I_c будут трансверсально устойчивыми. Выберем значение параметра $\lambda = 1.67$, соответствующее режиму одноленточного

хаотического аттрактора в одиночном отображении. В этом случае аттрактор включает в себя все синхронные седловые орбиты $2^N C^c$ ($N = 0, 1, 2, \dots$), на базе которых данный аттрактор был сформирован. При $\gamma > 0.29$ синхронный хаотический аттрактор, а также входящие в его замыкание седловые периодические орбиты основного семейства (см. рис. 1), характеризуются отрицательными трансверсальными показателями Ляпунова. В этом случае в ансамбле осцилляторов наблюдается режим полной синхронизации хаоса, когда колебания во всех трех отображениях идентичны, причем данный режим является грубым в том смысле, что он сохраняется при добавлении в правые части уравнений малого шума. Будем теперь постепенно уменьшать значение параметра связи, следя за происходящими бифуркациями и теми изменениями в поведении системы, которые за ними следуют. Уменьшение связи ведет к тому, что седловые орбиты, на базе которых аттрактор был сформирован, начинают терять трансверсальную устойчивость, когда показатель Ляпунова Λ_{\perp}^c , подсчитанный в точках седловой периодической орбиты из указанного семейства, становится положительным. Так, значение $\gamma = 0.29$ соответствует вырожденной бифуркации удвоения периода для синхронной седловой орбиты периода один $1C^c$ (линия L_{1-2}^2 на рис. 1), после чего орбита $1C^c$ становится репеллером. В окрестности репеллера $1C^c$ формируется область локальной трансверсальной неустойчивости: при попадании в его непосредственную окрестность траектория вдоль неустойчивых многообразий орбиты будет уходить от симметричного подпространства, возвращаясь впоследствии в его окрестность за счет глобальной трансверсальной устойчивости (показатель Ляпунова Λ_{\perp}^c для хаотического аттрактора остается отрицательным). Считается, что бифуркации, подобные бифуркации орбиты $1C^c$ индуцируют в системе локальную изрешеченность хаотического аттрактора, влекущую негрубость режима синхронизации [14, 16]. Теоретически это верно, поскольку при попадании в малую окрестность репеллера $1C^c$ траектория под действием сколь угодно малого шума выбрасывается вдоль неустойчивого трансверсального многообразия точки $1C^c$ в сторону от подпространства полной симметрии. Тем не менее, как показывают численные исследования, данная бифуркация не вызывает немедленного экспериментально наблюдаемого изменения в поведении системы. Колебания в системе остаются синхронными и после бифуркации, добавление шума не влияет существенно на динамику ансамбля, а малые трансверсальные возмущения быстро затухают. Данная ситуация показана на рис. 3, а. На нем представлена зависимость разностей динамических переменных $x - y$ и $x - z$ от времени при $\gamma = 0.27$. В систему вносился аддитивный шум интенсивностью 10^{-6} и равномерным распределением, а также в начальный момент вводилось отклонение от синхронной траектории интенсивностью 10^{-3} . Из рисунка видно, что первоначальные возмущения затухают в течение приблизительно 30 итераций и в системе устанавливаются синхронные колебания. Причины отсутствия наблюдаемого нарушения синхронизации заключаются, во-первых, в малой вероятности попадания траектории в непосредственную окрестность репеллера и, во-вторых, в значительной тангенциальной неустойчивости репеллера, в результате которой фазовая точка быстро «сносится» с его неустойчивого трансверсального многообразия и попадает в область трансверсального притяжения.

Перечисленные выше особенности иллюстрирует рис. 4. На рис. 4, а приведена плотность распределения на хаотическом аттракторе, отображающая, насколько

ко часто траектория посещает те или иные точки аттрактора. Точки периодических орбит основного семейства $1C^c$, $2C^c$ и $4C^c$ обозначены вертикальными линиями. График плотности распределения носит сильно изрезанный характер, причем точки максимумов не совпадают с точками периодических орбит. На рис. 4, б показана эволюция разности двух переменных x и y от времени. В качестве начальных условий выбирались значения $x = y = z = 1C^c$ (серая линия) и $x = y = z = P$, где $P = 0.81$ – одна из произвольных точек аттрактора, не соответствующая какой-либо периодической орбите (черная линия). В обоих случаях в начальный момент времени вводилось трансверсальное возмущение интенсивностью порядка 10^{-5} . Поведение системы по отношению к первоначальному возмущению качественно различается на малых временах (примерно 20–30 итераций) и одинаково на больших интервалах времени. В первом случае для начальных условий, выбранных в окрестности репеллера, наблюдается почти экспоненциальный рост начального возмущения в течение примерно 20 итераций, который затем сменяется их затуханием до нуля. При выборе других начальных условий нарастания возмущений не наблюдается.

При уменьшении связи аналогичные бифуркации происходят с синхронными орбитами больших периодов: $4C^c \rightarrow 8C_i$ (линия L_{4-8}^2 : $\gamma = 0.26$), $2C^c \rightarrow 4C_i$ (линия L_{2-4}^2 : $\gamma = 0.259$) и $8C^c \rightarrow 16C_i$ (линия L_{8-16}^2 : $\gamma = 0.26$). При уменьшении связи $\gamma \lesssim 0.259$ в репеллеры превращаются и остальные седловые орбиты основного семейства: $2^N C^c \rightarrow 4^N C_i$ ($N = 4, 5, \dots$). Это приводит к локальной изрешеченности синхронного хаотического аттрактора, в результате чего, начиная со значений $\gamma \simeq 0.255$, режим грубой синхронизации хаоса сменяется режимом негрубой синхронизации. Синхронизация продолжает существовать, но только при полном отсутствии постоянно действующих возмущений в системе. Добавление сколь угодно малого шума (в наших экспериментах интенсивность шума выбиралась примерно равной 10^{-6}) приводит к тому, что фазовая траектория время от времени сильно отклоняется от симметричного подпространства. При этом происходит нерегулярное чередование во времени длительных интервалов синхронного поведения с короткими всплесками несинхронных колебаний. Так как трансверсальный показатель Ляпунова Λ_{\perp}^c остается отрицательным, то в системе без шума после переходного процесса устанавливается режим синхронных колебаний. На рис. 3, б изображена динамика системы при $\gamma = 0.24$ с малым шумом, действующим в интервале времени ($0 < n < 15000$), затем в момент времени $n = 15000$ шум выключается (момент выключения шума отмечен на рисунке вертикальной пунктирной линией). Режим негрубой синхронизации сохраняется до значений связи $\gamma \simeq 0.217$, при этом с уменьшением связи индуцированное шумом пузыряющееся поведение становится более развитым: интервалы синхронизации становятся короче, выбросы происходят чаще и фазовая точка выбрасывается все дальше от симметричного подпространства, то есть аттрактор «утолщается». При $\gamma = 0.217$ (линия L_{chaos}^2) два трансверсальных показателя Ляпунова хаотического аттрактора Λ_{\perp}^c становятся положительными, что соответствует вырожденной бифуркации прорыва (blowout bifurcation). В результате синхронный хаотический аттрактор сменяется так называемым хаотическим седлом [21]. После бифуркации прорыва наблюдается режим перемежающейся синхронизации (on-off intermittency) без какого-либо шумового воздействия. С этого момента существенная разница в поведении системы без шума и с малым шумом исчезает. Временные реализации для разностей динамических переменных в системе с шу-

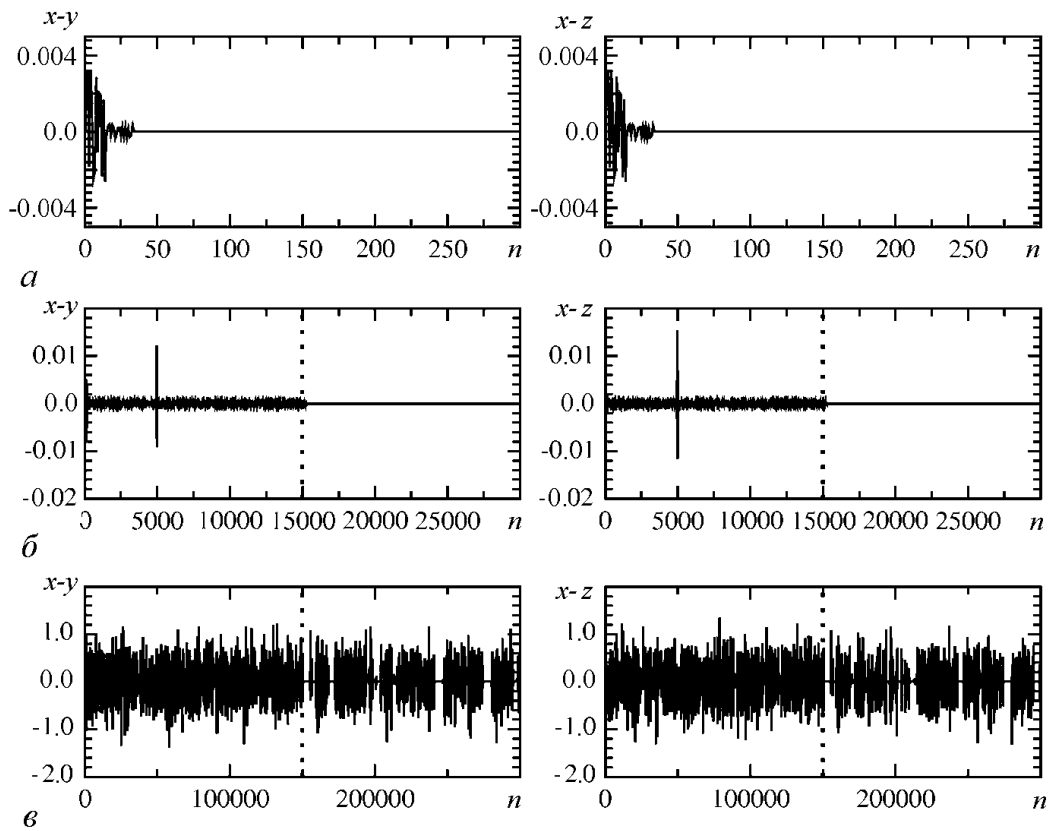


Рис. 3. Временные реализации для разностей динамических переменных, построенные для следующих значений параметра связи γ : 0.27 (а); 0.24 (б); 0.215 (в). На рис. б и в вертикальная пунктирная линия отделяет интервалы времени работы системы с шумом (слева от линии) и без шума (справа)

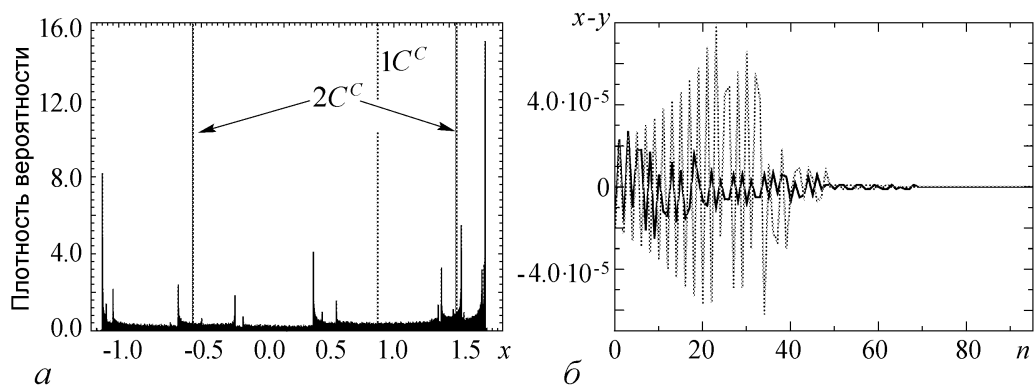


Рис. 4. а – Плотность распределения фазовых точек на синхронном аттракторе. Вертикальные линии отмечают расположение периодических орбит небольших периодов. б – Эволюция малого трансверсального возмущения при выборе начальных условий в окрестности орбиты $1C^c$ (серый цвет) и в произвольной точке аттрактора (черный цвет)

мом (до пунктирной линии) и без шума (после пунктирной линии) изображены на рис. 3, в. Как видно из рисунка, малый шум больше не влияет кардинальным образом на динамику системы. И при наличии шума и при его отсутствии хаотические колебания более не являются синхронными. Таким образом, бифуркация прорыва приводит к разрушению режимов хаотической синхронизации.

Аналогичный сценарий разрушения режима синхронизации хаоса наблюдается и при других значениях параметра λ . Его существенные черты заключаются в следующем.

- Разрушение синхронизации хаоса происходит в два этапа. На первом этапе, в результате трансверсальных бифуркаций удвоения периодических орбит, хаотический аттрактор изрешечивается. При этом синхронизация продолжает существовать, но становится чувствительной к действию малого шума (негрубая синхронизация). Область грубой синхронизации хаотических и регулярных колебаний отмечена на рис. 1 серым цветом. Левее этой области располагается зона негрубой синхронизации хаоса, которая отмечена на том же рисунке светло-серым цветом. На втором этапе трансверсальный показатель Ляпунова для хаотического аттрактора становится положительным. Синхронный хаотический аттрактор трансформируется в хаотическое седло.

- Правая граница зоны негрубой синхронизации хаоса, как это следует из численного эксперимента, значительно смещена относительно линии первой из трансверсальных бифуркаций (L_{1-2}^2) и располагается достаточно близко к линии накопления трансверсальных бифуркаций (она расположена вблизи линии L_{8-16}^2). В режиме развитого хаоса ($\lambda > 1.7$) граница области негрубой синхронизации смещается относительно линии накопления бифуркаций в сторону меньшей связи. Это явление может быть связано с тем, что в области развитого хаоса седловые орбиты основного семейства перестают играть принципиальную роль в поведении системы.

- В отличие от сценария разрушения синхронизации хаоса в системе из двух отображений [14], а также трех отображений с несимметричной связью [6], в рассматриваемом случае отсутствует этап изрешечивания бассейна притяжения хаотического аттрактора. Отсутствие данного этапа обусловлено отмеченными выше особенностями бифуркаций седловых орбит по сравнению с соответствующими бифуркациями для системы из двух отображений.

Заключение

В результате двухпараметрического бифуркационного анализа, а также численного исследования наблюдаемых колебательных режимов выявлены сходство и различия в механизмах формирования и разрушения режимов полной синхронизации в системе из трех отображений с симметричной диффузионной связью по сравнению с другими рассмотренными в литературе аналогичными системами [6, 14]. Во всех рассмотренных случаях формирование режимов полной синхронизации хаоса происходит через каскад тангенциальных бифуркаций удвоения периода основного семейства синхронных периодических орбит, а разрушение этих режимов – через каскад трансверсальных бифуркаций тех же орбит. Исследование бифуркационного механизма разрушения режима полной синхронизации хаоса показало, что потеря

трансверсальной устойчивости синхронным хаотическим аттрактором происходит в результате вырожденной бифуркации прорыва, при которой сразу два трансверсальных показателя Ляпунова становятся положительными. Эта бифуркация предваряется серией вырожденных бифуркаций удвоения периода седловых периодических орбит основного семейства, результатом которых является формирование в аттракторе областей локальной трансверсальной неустойчивости, что, в свою очередь, приводит к негрубости режима хаотической синхронизации. В отличие от системы с другим типом связи [6] при разрушении полной синхронизации хаоса отсутствует стадия изрешечивания бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ и Американского фонда гражданских исследований (CRDF, грант REC-006).

Библиографический список

1. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator system // *Progress of Theoretical Physics*. 1983. Vol. 69. P. 32.
2. *Пиковский А.С.* О взаимодействии странных аттракторов. Препринт ИПФ АН СССР. Горький, 1983.
3. *Кузнецов С.П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1985. Т. 28. С. 991.
4. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1986. Т. 29. С. 1050.
5. *Hasler M., Maistrenko Y., Popovich O.* Simple example of partial synchronization of chaotic systems // *Phys. Rev E*. 1998. Vol. 58. P. 6843.
6. *Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L.S., Abrabanel H. D. I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51. P. 980.
7. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 53. P. 4528.
8. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А.* Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // *Радиотехника и электроника*. 1991. Т. 36. С. 338.
9. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Postnov D. E., Safonova M. A.* Synchronization of chaos // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1992. Vol. 2. P. 633.
10. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett*. 1996. Vol. 76. P. 1804.
11. *Belykh V. N., Mosekilde E.* One-dimensional map lattices: synchronization, bifurcations, and chaotic structures // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 54. P. 3196.
12. *Brown R., Rulkov N. F.* Synchronization of chaotic systems: transverse stability of trajectories in invariant manifolds // *Chaos*. 1997. Vol. 3. P. 395.
13. *Andreyev Y. V., Dimitriev A. S.* Conditions for global synchronization in lattices of chaotic elements with local connections // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1999. Vol. 9. P. 2165.

14. *Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V.* Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 1014.
15. *Astakhov V., Hasler M., Kapitaniak T., Shabunin A., Anishchenko V.* Effect of parameter mismatch on the mechanism of chaos synchronization loss in coupled systems // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. P. 5620.
16. *Maistrenko Y., Maistrenko V., Popovich O., Mosekilde E.* Desynchronization of chaos in coupled logistic maps // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60. P. 2817.
17. *Astakhov V., Shabunin A., Klimshin A., Anishchenko V.* In-phase and antiphase complete chaotic synchronization in symmetrically coupled discrete maps // *Discrete Dynamics in Nature and Society.* 2000. Vol. 7. P. 215.
18. *Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S.* Multistability formation and synchronization loss in coupled Henon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. P. 056212.
19. *Ashwin P., Buescu J., Stewart I.* Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol. 193. P. 126.
20. *Ashwin P., Buescu J., Stewart I.* From attractors to chaotic saddle: a tale of transverse instability // *Nonlinearity.* 1996. Vol. 9. P. 703.
21. *Venkataramani S.C., Hunt B.R., Ott E.* Bubbling transition // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54. P. 1346.
22. *Taborov A.V., Maistrenko Y.L., Mosekilde E.* Partial synchronization in a system of coupled logistic maps // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2000. Vol. 10. P. 1051.

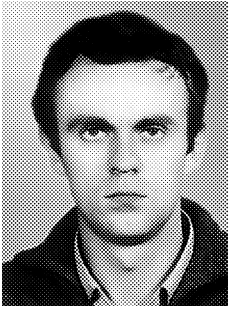
*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 15.07.2005
После доработки 17.10.2005*

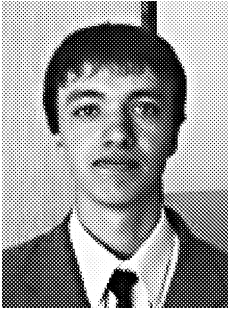
TWO-PARAMETRIC BIFURCATIONAL ANALYSIS OF REGIMES OF COMPLETE SYNCHRONIZATION IN ENSEMBLE OF THREE DISCRETE-TIME OSCILLATORS

A. Shabunin, S. Nikolaev, V. Astakhov

We investigate mechanisms of appearance and disappearance of regimes of complete synchronization of chaos in a ring of three logistic maps with symmetric diffusive coupling. Two-parametric bifurcational analysis is carried out and typical oscillating regimes and transitions between them are considered.



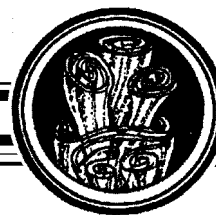
Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, кандидат физико-математических наук (1998). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций. E-mail: alexey@chaos.ssu.runnet.ru



Николаев Сергей Михайлович – является аспирантом кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: хаотические и квазипериодические колебания, синхронизация колебаний, бифуркационный анализ, мультистабильность.



Астахов Владимир Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1980). Доктор физико-математических наук (1999), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях. E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru



**ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ
ФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ РЕЖИМОВ ЧАСТИЧНОЙ
СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОСА В АНСАМБЛЕ ИЗ ТРЕХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ
С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ**

А.В. Шабунин, С.М. Николаев, В.В. Астахов

Исследуются механизмы появления и исчезновения режимов частичной синхронизации хаоса в кольце из трех логистических отображений с симметричной диффузионной связью. Проводится двухпараметрический бифуркационный анализ, рассматриваются типичные колебательные режимы и переходы между ними. Обнаружено, что при частичной синхронизации хаоса реализуется режим обобщенной синхронизации.

Введение

В работе [1] нами было исследованы режимы полной синхронизации хаоса в ансамбле из трех хаотических отображений. Однако полная синхронизация не исчерпывает всех возможных случаев синхронного поведения в рассматриваемой системе: в ней возможны также режимы так называемой кластерной синхронизации. Как известно, в ансамблях из большего чем два числа элементов, наряду с полной синхронизацией может наблюдаться кластерная синхронизация, при которой существуют наборы осцилляторов (кластеры), работающие в режиме полной синхронизации, между которыми полная синхронизация отсутствует. Если число осцилляторов в ансамбле невелико, то вместо термина «кластерная синхронизация» принято использовать термин «частичная синхронизация». Теоретические исследования режимов кластерной синфазной и кластерной противофазной синхронизации колебаний были проведены в работе [2], где были установлены конфигурации инвариантных множеств, соответствующих разным случаям частичной синхронизации при разном числе осцилляторов в системе. В работе [3] методом Ляпунова были найдены условия асимптотической устойчивости для частично синхронных режимов. Простейшая модель для систем, в которых возможно наблюдать явление частичной синхронизации – кольцо из трех осцилляторов. На ее примере проще всего рассмотреть сосуществование режимов полной и частичной синхронизации, закономерности их появления и разрушения и соответствующие бифуркационные механизмы. «Сильная» и «слабая»

(то есть грубая и негрубая) частичная синхронизация хаоса в системах с различными топологиями рассматривалась в работе [4]. В работе [5] исследовался режим частичной синхронизации в системе из трех и четырех связанных осцилляторов Реллера. Тот же подход был применен к системе из большего числа осцилляторов, в результате была выяснена зависимость числа элементов системы, совершающих синхронные колебания, от величины связи между элементами. Явление частичной синхронизации в системе, состоящей из трех связанных логистических отображений с несимметричной связью, исследовалась в работе [6], в которой был проведен детальный бифуркационный анализ механизмов разрушения полной и формирования частичной хаотической синхронизации.

Целью настоящей работы является выявление закономерностей возникновения и исчезновения режимов частичной синхронизации регулярных и хаотических колебаний в кольце из трех осцилляторов с симметричной диффузионной связью. Данная система рассматривалась в работе [7], однако в ней в качестве основного метода анализа использовался расчет трансверсальных показателей Ляпунова. Подобный подход дает возможность оценить область устойчивости для некоторых синхронных режимов на плоскости управляющих параметров, но не позволяет выявить бифуркационные механизмы их формирования, а также не может дать достаточно полной картины устройства пространства параметров при исследовании систем с развитой мультистабильностью. Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо проведение детального бифуркационного анализа седловых периодических орбит, формирующих скелет синхронного хаотического аттрактора. Проведение такого анализа и является предметом настоящей работы.

1. Исследуемая система, свойства симметрии, классификация симметричных решений

В работе [1] рассмотрен ансамбль из отображений, задаваемый системой уравнений

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \frac{\gamma}{2}(f(y_n) + f(z_n) - 2f(x_n)), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \frac{\gamma}{2}(f(x_n) + f(z_n) - 2f(y_n)), \\z_{n+1} &= f(z_n) + \frac{\gamma}{2}(f(x_n) + f(y_n) - 2f(z_n)),\end{aligned}\tag{1}$$

где функция $f(x) = \lambda - x^2$ определяет вид одиночного осциллятора (логистическое отображение); λ – управляющий параметр, определяющий его динамику; γ – параметр связи.

Приведены свойства ее решений и их классификация. В частности, показано, что фазовое пространство системы включает следующие симметричные инвариантные подпространства – «подпространства частичной симметрии»:

$$I_x : y = z, \tag{2}$$

$$I_y : x = z, \tag{3}$$

$$I_z : x = y. \tag{4}$$

2. Трансверсальная устойчивость режимов частичной синхронизации

Рассмотрим трансверсальную устойчивость режимов частичной синхронизации. Для определенности выберем подпространство симметрии I_z . Для этого перейдем к переменным

$$\begin{aligned} p &= \frac{x+y}{2}, \\ q &= \frac{x-y}{2}, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Базисные векторы e_1 и e_3 направлены по касательной к плоскости I_z , в то время как вектор e_2 перпендикулярен ей. В новых переменных в окрестности подпространства I_z уравнения (1) запишутся следующим образом:

$$p_{n+1} = f(p_n) + \frac{\gamma}{2}(f(z_n) - f(p_n)), \quad (5)$$

$$z_{n+1} = f(z_n) + \gamma(f(p_n) - f(z_n)), \quad (6)$$

$$q_{n+1} = \left(1 - \frac{3\gamma}{2}\right) f'(p_n) q_n. \quad (7)$$

Уравнения (5), (6) описывают динамику системы внутри подпространства I_z , а уравнение (7) – динамику выхода из режима синхронизации. Устойчивость его нулевого решения ($q_n = 0$) определяет трансверсальную устойчивость частично синхронных колебаний системы (1). Соответствующий показатель Ляпунова имеет вид

$$\Lambda_{\perp}^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| 1 - \frac{3\gamma}{2} f'(p_n) \right|, \quad (8)$$

где усреднение происходит по точкам p_n на предельном множестве в подпространстве частичной симметрии, являющемся решением системы (5), (6).

3. Бифуркационный анализ режимов частичной синхронизации

Система (1) демонстрирует как полностью синхронные, так и частично синхронные колебания. При достаточно сильной связи ($0 < \gamma < 2/3$) при любом выборе параметра λ можно наблюдать режим полной синхронизации хаоса, когда все три отображения демонстрируют идентичные колебания. Уменьшение связи ведет к разрушению полной синхронизации хаоса, которая сначала, через локальную изрешеченность хаотического аттрактора, становится негрубой, а затем, после прохождения точки бифуркации прорыва, сменяется режимом пузырящегося («bubbling») аттрактора [1]. В этом режиме колебания являются хаотическими и несинхронными. При дальнейшем уменьшении связи в системе формируются, претерпевают ряд бифуркаций, а затем исчезают режимы частичной синхронизации колебаний. Причем, в отличие от кольца отображений с несимметричной связью [6], в рассматриваемом случае бифуркации, ведущие к возникновению режимов частичной синхронизации,

непосредственно не связаны с механизмом разрушения полностью синхронных колебаний. Так, периодические орбиты в подпространствах частичной симметрии $I_x - I_z$ появляются одним из следующих способов.

1. В результате бифуркации вил.

Из неподвижной точки в начале координат, на линии

$$\lambda = \frac{1}{4} \left[\frac{2\gamma}{\left(\frac{3\gamma}{2} - 1\right)^2} - \left(1 - \frac{\gamma}{\frac{3\gamma}{2} - 1}\right)^2 \right]$$

появляется шесть неподвижных точек с координатами

$$\begin{aligned} x_{1,2}^{(1)} = y_{1,2}^{(1)} &= A_{1,2}, \quad z_{1,2}^{(1)} = \frac{1}{\frac{3\gamma}{2} - 1} - x_{1,2}^{(1)}, \\ x_{1,2}^{(2)} = z_{1,2}^{(2)} &= A_{1,2}, \quad y_{1,2}^{(2)} = \frac{1}{\frac{3\gamma}{2} - 1} - x_{1,2}^{(2)}, \\ z_{1,2}^{(3)} = y_{1,2}^{(3)} &= A_{1,2}, \quad x_{1,2}^{(3)} = \frac{1}{\frac{3\gamma}{2} - 1} - y_{1,2}^{(3)}, \\ A_{1,2} &= \frac{1 + \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{(1 + 4\lambda)\left(1 - \frac{3\gamma}{2}\right)^2 - 2\gamma^2}}{3\gamma - 2}. \end{aligned}$$

При изменениях управляющих параметров все эти неподвижные точки остаются неустойчивыми. На их базе не возникают устойчивые периодические режимы или хаотические аттракторы.

2. В результате седло-узловых бифуркаций.

Рассмотрим подробнее второй случай, так как именно аттракторы, возникшие на базе этих орбит, соответствуют наблюдаемым режимам частичной синхронизации.

При исследовании разрушения полной синхронизации хаоса [1] было обнаружено, что ключевую роль в этом процессе играют трансверсальные бифуркации удвоения периода основного семейства периодических орбит: $2^N C^c \rightarrow 4^N C_i$, $i = 1, 2, 3$. Особенность данных бифуркаций для рассматриваемой системы заключается в том, что они являются вырожденными: сразу два мультипликатора становятся равными -1 , собственные векторы для данных мультипликаторов формируют базис неустойчивого двумерного многообразия ($x + y + z = 0$) бифурцирующей орбиты $2^N C^c$, расположенного перпендикулярно подпространству полной симметрии I_c . В результате бифуркации рождается три симметричных друг другу орбиты удвоенного периода $4^N C_i$, а сама орбита становится репеллером. Таким образом, каждая из описанных бифуркаций рождает новые (неустойчивые) периодические орбиты и создает внутри аттрактора области локальной неустойчивости, формируя его локальную изрешеченность. На рис. 1, *a* изображено устройство фазового пространства в проекциях x, y и y, z после первой из трансверсальных бифуркаций удвоения периода синхронных периодических орбит ($1C^c \rightarrow 2C_i$), когда синхронная орбита $1C^c$ уже потеряла устойчивость как внутри симметричного подпространства I_c ,

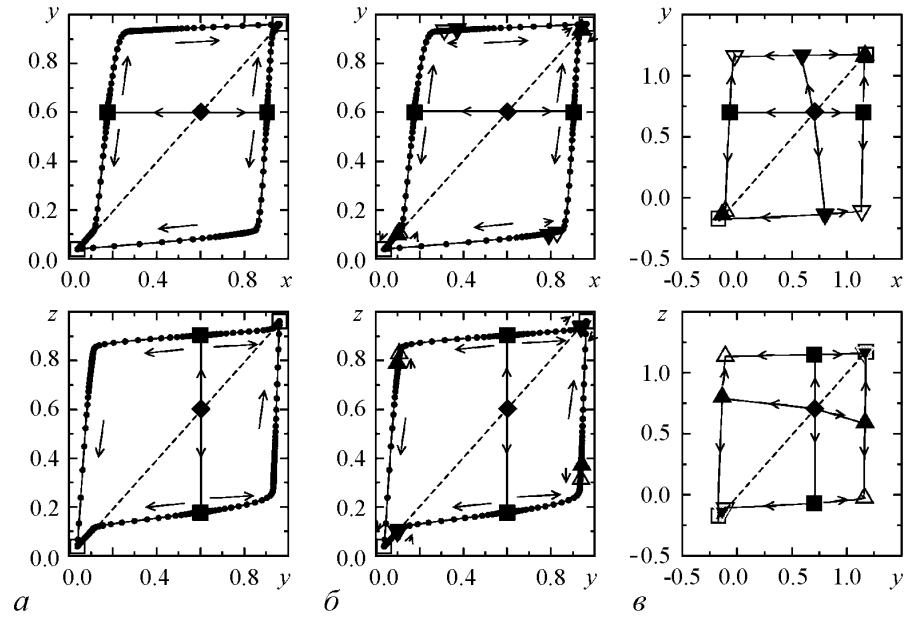
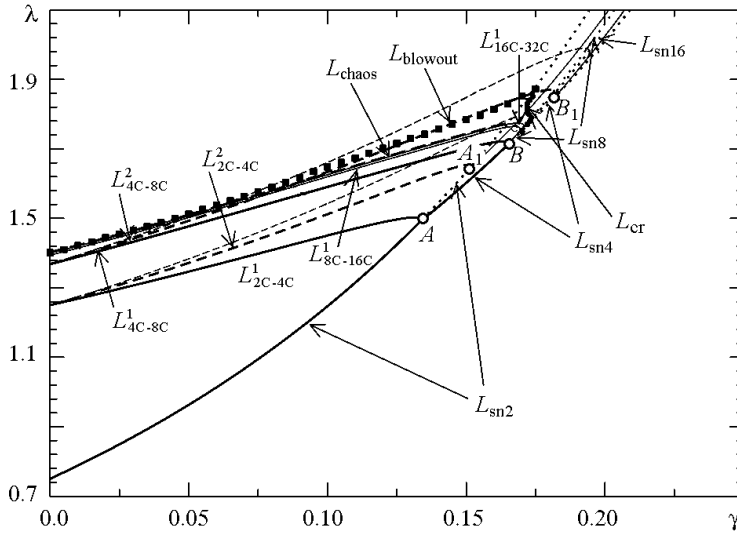


Рис. 1. Орбиты и траектории движения системы по их устойчивым и неустойчивым многообразиям до появления в системе режима частичной синхронизации (а), в момент появления (б) и после появления в системе режима частичной синхронизации (в). Обозначения орбит: $1C^c$ (◆), $2C^c$ (□), $2C_1$ (■), $2C_s^z$ (△), $2C_u^z$ (▲)

так и в нормальном к нему направлении. Неустойчивые многообразия точек одной из орбит ($2C_1$) подходят к подпространству частичной симметрии I_z и вдоль него уходят к устойчивой орбите $2C^c$, расположенной в подпространстве полной симметрии. Затем, при дальнейшем уменьшении связи, в указанном подпространстве частичной симметрии, в непосредственной окрестности неустойчивых многообразий орбиты $2C_1$ в результате седло-узловой бифуркации появляется пара орбит периода два: устойчивая $2C_s^z$ (s – «stable») и неустойчивая $2C_u^z$ (u – «unstable»). Момент бифуркации изображен на рис. 1, б. Расположение данных периодических орбит и соответствующая структура фазового пространства после бифуркации показаны на рис. 1, в. Вновь возникшие орбиты претерпевают два каскада бифуркаций удвоения периода. Первый из них происходит в тангенциальном к подпространству частичной симметрии I_z направлении и завершается образованием режимов частичной синхронизации хаоса (двухленточного хаотического аттрактора). Вторым – в трансверсальном к подпространству I_z направлению. Он ведет к появлению новых несинхронных орбит и одновременно – к локальной изрешеченности хаотических аттракторов, соответствующих режиму частичной синхронизации хаоса. Рассмотрим бифуркации периодических орбит в I_z более подробно. На рис. 2 представлены бифуркационные линии, а также границы области существования режимов частичной синхронизации для рассматриваемой системы. На линии L_{sn2} (до точки А) происходит указанная выше седло-узловая бифуркация: $2C_s^z + 2C_u^z \rightarrow 0$. Рождение указанных орбит происходит при пересечении линии L_{sn2} справа налево, то есть в сторону уменьшения параметра связи. Появившаяся устойчивая орбита $2C_s^z$ на линии L_{2C-4C}^1 претерпевает тангенциальную бифуркацию удвоения периода, в результате которой орбита $2C_s^z$



разом, бифуркационные линии L_{2C-4C}^1 , L_{4C-8C}^1 и L_{sn4} ограничивают область существования устойчивой орбиты периода четыре $4C_s^z$, где наблюдаются периодические колебания периода четыре. Подобные бифуркации происходят и для других орбит каскада бифуркаций удвоения периода. На рис. 2 приведены линии тангенциальных бифуркаций удвоения периода для орбит периода восемь (L_{8C-16C}^1) и шестнадцать ($L_{16C-32C}^1$), а также соответствующие линии седло-узловых бифуркаций (L_{sn8}) и (L_{sn16}). Каскад тангенциальных бифуркаций удвоения периода завершается линией перехода к хаосу (L_{chaos}). В закритической области наблюдаются бифуркации слияния лент хаотических аттракторов, завершающиеся образованием двухленточного хаотического аттрактора. Поскольку эволюция режимов в подпространстве I_z происходит на базе орбиты периода два (устойчивых орбит периода один в подпространствах частичной симметрии нет), то режим частично синхронного одноленточного хаоса в системе не наблюдается.

Область существования режимов частичной синхронизации ограничена по параметру связи как в сторону его увеличения, так и в сторону уменьшения (см. рис. 2). При увеличении параметра связи регулярный режим исчезает в результате седло-узловой бифуркации соответствующей устойчивой орбиты, а хаотический – в результате кризиса аттрактора, при седло-седловой бифуркации орбиты, входящей в его замыкание. Линия кризиса L_{cr} хаотического аттрактора обозначена на рис. 2 знаками «●». Для двухленточного аттрактора она проходит по линии L_{sn2} , а после слияния лент аттрактора «перебегает» на линии $L_{sn4} - L_{sn16}$.

Как было сказано выше, кроме тангенциальных бифуркаций, ведущих как к образованию синхронного хаоса через каскад субгармонических бифуркаций, так и к его исчезновению в результате кризиса, в системе происходят бифуркации в трансверсальном к подпространству I_z направлении. Так, на линии L_{2C-2C}^2 уже успевшая стать седловой орбита $2C_s^z$ претерпевает еще одну бифуркацию удвоения периода, на этот раз – в трансверсальном к I_z направлении. В результате данная орбита становится трансверсально неустойчивой, а в ее окрестности рождается седловая орбита периода четыре $4C_s$, располагающаяся вне симметричного подпространства I_z . Линия L_{2C-2C}^2 , так же как и L_{2C-2C}^1 опирается на кривую седло-узловой бифуркации L_{sn2} (точка A_1). В эту же точку входит линия трансверсальной бифуркации удвоения периода орбиты $2C_u^z$, в результате которой данная орбита становится репеллером, а в ее окрестности, вне подпространства I_z , появляется седловая орбита периода четыре $4C_u$. При увеличении связи обе орбиты периода четыре $4C_s$ и $4C_u$ сливаются и исчезают на линии L_{sn4}^1 . Если увеличивать параметр λ , то старший мультипликатор орбиты $4C_s$ входит в единичную окружность через значение $+1$, после чего орбита $4C_s$ становится устойчивой. Линия данной бифуркации (L_{4C}) опирается на линию седло-узловой бифуркации L_{sn4}^1 . Структура фазового пространства в окрестности орбиты $2C_s^z$ изображена на рис. 3. На нем представлены расположение точек седловой орбиты $2C_s^z$ (○), которая является неустойчивой как в тангенциальном, так и в трансверсальном направлениях, устойчивой орбиты $4C_s^z$ (◇) и седловой орбиты $4C_s$ (□). В дальнейшем, на базе устойчивой орбиты $4C_s$ через бифуркацию Неймарка – Сакера рождается четырехобходная инвариантная кривая $4T_s$, соответствующая квазипериодическим колебаниям. При разрушении данной кривой образуется четырехленточный хаотический аттрактор $4A_s$, не лежащий ни в одном из подпространств частичной симметрии.

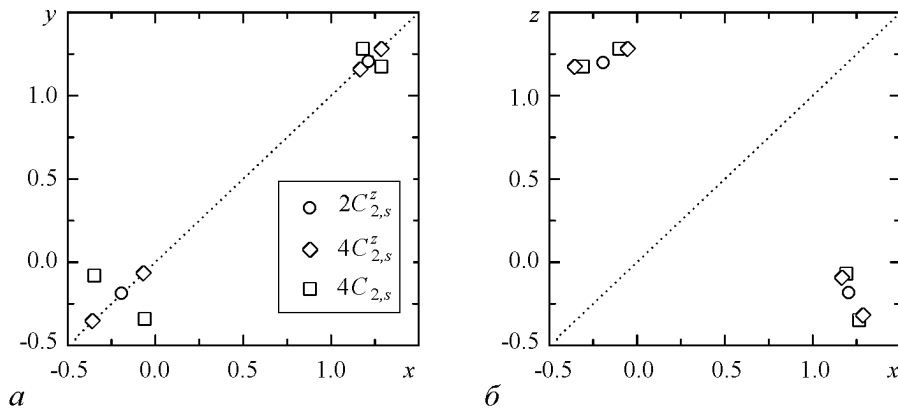


Рис. 3. Расположение периодических орбит периода два и четыре, участвующих в разрушении режима частичной синхронизации хаоса

Аналогичный бифуркационный сценарий наблюдается и для орбит больших периодов. На рис. 2 приведены соответствующие бифуркационные линии для орбиты периода четыре: линия трансверсальной бифуркации удвоения периода $4C_s^z \rightarrow 8C_s$ (L_{4C-8C}^2), линия, на которой вновь возникшая орбита $8C_s$ становится устойчивой (L_{8C}), линия седло-узловой бифуркации орбит $8C_s$ и $8C_u$ (L_{sn4}^1). Каскад трансверсальных бифуркаций удвоения периода завершается бифуркацией прорыва ($L_{blowout}$), при которой трансверсальный показатель Ляпунова для хаотического аттрактора из I_z (8) становится положительным, что приводит к его трансверсальной неустойчивости. Таким образом, линия бифуркации прорыва ограничивает область существования режимов частичной синхронизации слева, то есть со стороны слабой связи. Левее линии $L_{blowout}$ режим частичной синхронизации хаоса не наблюдается.

Весь описанный бифуркационный сценарий повторяется внутри каждого из двух других подпространств частичной симметрии: I_x и I_z . Таким образом, в каждом из подпространств частичной симметрии и его окрестности наблюдается последовательность бифуркаций, обладающая следующими характерными чертами.

- Регулярные и хаотические режимы частичной синхронизации появляются на базе орбиты периода два через каскад тангенциальных бифуркаций удвоения периода.
- Каждый из таких режимов ограничен по параметру связи линией седло-узловой (для регулярных режимов) или седло-седловой бифуркации (для хаотических режимов).
- Каждая из орбит, участвующих в каскаде тангенциальных бифуркаций удвоения периода претерпевает бифуркации еще и в трансверсальном направлении, что приводит как к локальной изрешеченности хаотического аттрактора, соответствующего режиму частичной синхронизации хаоса, так и к появлению новых седловых режимов вне подпространства частичной симметрии.
- Вновь появившиеся в результате трансверсальных бифуркаций удвоения периода несинхронные периодические орбиты впоследствии становятся устойчивыми, что приводит к развитию мультистабильности в системе (1).

4. Колебательные процессы, наблюдаемые при формировании и разрушении режимов частичной синхронизации

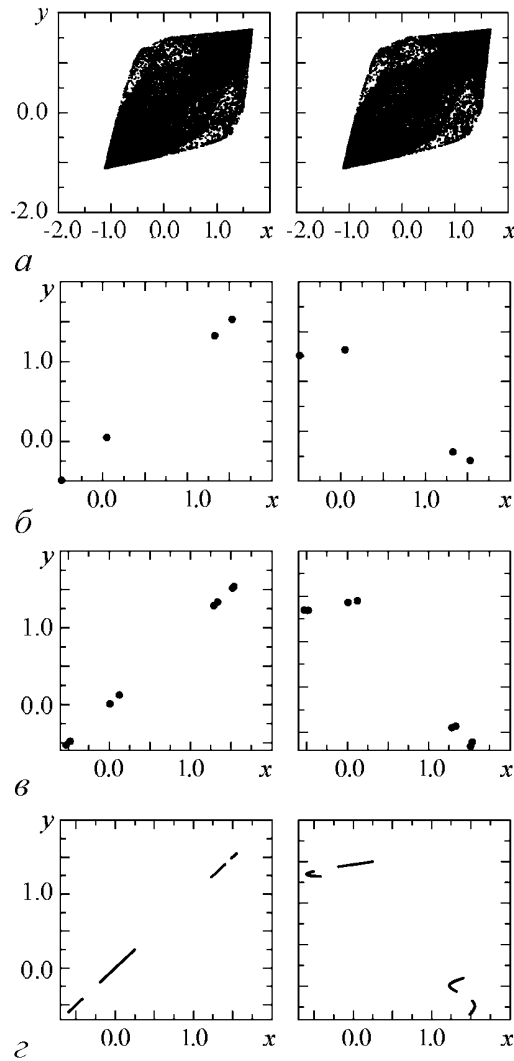


Рис. 4. Проекция фазовых портретов режимов, сменяющих друг друга при уменьшении связи: *a* – несинхронный хаотический аттрактор, образованный после бифуркации прорыва из подпространства полной симметрии, $\gamma = 0.17$; *b* – орбита периода четыре $4C_s^z$, $\gamma = 0.159$; *c* – орбита периода восемь $8C_s^z$, $\gamma = 0.132$; *d* – четырехленточный хаотический аттрактор $4A^z$, $\gamma = 0.112$. $\lambda = 1.67$

В окрестности точки бифуркации наблюдается явление перемежаемости, когда интервалы синхронного и несинхронного хаотического поведения сменяют друг друга. Характерный вид временных реализаций для разностей динамических переменных $x - y$ и $x - z$ приведен на рис. 5. Временная реализация время от времени попадает в окрестность одного из трех подпространств частичной симметрии и эволюционирует там, переходя через некоторое время в окрестность другого подпростран-

Рассмотрим теперь, какие колебательные режимы частичной синхронизации и переходы между ними наблюдаются при уменьшении связи в соответствии с бифуркационным сценарием, рассмотренным в предыдущем разделе. При уменьшении связи после разрушения режима полной синхронизации хаоса в системе наблюдаются несинхронные хаотические колебания в окрестности подпространства полной симметрии: пузыряющийся хаотический аттрактор. Проекция фазового портрета для несинхронного хаотического аттрактора приведены на рис. 4 *a*. При дальнейшем уменьшении связи на одной из линий седло-узловых бифуркаций траектория мягким образом (без гистерезиса) переходит на соответствующий регулярный или хаотический режим в подпространствах частичной симметрии $I_x - I_z$. Конкретный сценарий наблюдаемых переходов зависит от выбранного параметра λ . Так, например, для значения $\lambda = 1.67$ при $\gamma = 0.195$, что соответствует седло-узловой бифуркации (линия L_{sn2} на рис. 2), система переходит с режима несинхронного хаоса на режим периодических колебаний периода четыре (рис. 4, *b*).

Этот режим соответствует одной из трех устойчивых орбит периода четыре $4C_s^x$, $4C_s^y$ или $4C_s^z$ каждая из которых располагается в своем подпространстве частичной симметрии. Выбор одной из трех орбит является случайным и определяется начальными условиями. В дальнейшем мы будем рассматривать режимы на базе орбиты $4C_s^z$.

ства. Переключение между разными кластерами частично синхронного поведения было отмечено в работе [7], однако там не исследовался механизм данного явления. В настоящей работе мы определили, что оно является предвестником грядущей седло-узловой бифуркации, ведущей впоследствии к появлению регулярного режима частичной синхронизации.

После появления частично синхронного режима $4C^z$ на его основе при уменьшении связи наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода. При $\gamma = 0.1355$ происходит бифуркация удвоения периода, после которой наблюдаются периодические колебания с периодом восемь (рис. 4, *в*), затем при $\gamma = 0.122$ – следующая бифуркация удвоения и переход на регулярный режим с периодом шестнадцать. Каскад бифуркаций удвоения завершается формированием в подпространстве I_z хаотического аттрактора ($\gamma = 0.119$). В критической области происходят бифуркации слияния лент хаотического аттрактора, завершающиеся (при выбранном значении λ) формированием четырехленточного аттрактора (рис. 4, *з*). Начиная со значений связи $\gamma \simeq 0.11$ для хаотического аттрактора наблюдается явление локальной изрешеченности. Данное значение связи оказывается близким к точке трансверсальной бифуркации орбиты $4C^z$ ($\gamma = 0.112$). В этом случае синхронизация продолжает существовать только при полном отсутствии шума. Добавление шума ведет к пузырящемуся поведению. Данная ситуация изображена на рис. 6, *а*, *б*. На левых рисунках представлена проекция фазовых портретов, правые рисунки изображают эволюцию временной реализации для разностей переменных x и y в присутствии малого шума (до пунктирной вертикальной линии) и в отсутствие шума (после пунктирной вертикальной линии). Видно, что в самом начале процесса изрешечивания ($\gamma = 0.1092$) «амплитуда» пузыряния мала и утолщение проекции фазового портрета незаметно. После выключения шума траектория практически сразу возвращается в симметричное подпространство. Дальнейшее уменьшение связи ведет к развитию пузыряния, когда разница в поведении с шумом и без шума становится заметна на глаз (см. рис. 6, *б*). При $\gamma = 0.1085$ трансверсальный показатель Ляпунова (8) становится положительным. Хаотический аттрактор перестает быть притягивающим в трансверсальном к I_z направлению и превращается в хаотическое седло. Траектория переходит на пузырящийся аттрактор (рис. 6, *в*). При этом качественная разница в поведении системы без шума и с шумом исчезает. Режим частичной синхронизации хаоса перестает наблюдаться в системе.

Наблюдаемые в подпространстве частичной симметрии I_z многоленточные хаотические аттракторы соответствуют определению частично синхронного хаоса, поскольку переменные x , y и z демонстрируют хаотическое поведение и удовлетворяют соотношениям (4). Однако, как это видно из рис. 4, *з*, переменные x и z , хотя и не

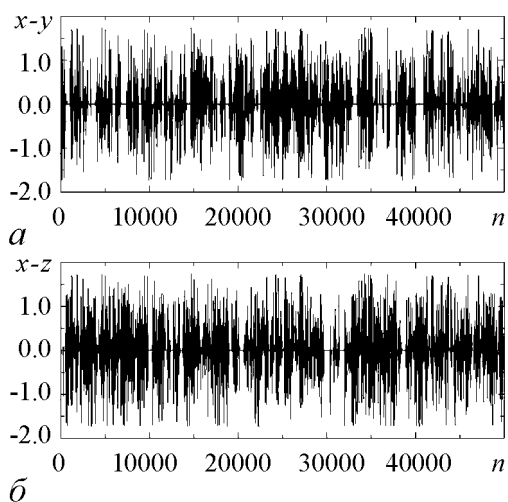


Рис. 5. Вид временных реализаций для разностей динамических переменных. $\lambda = 1.67$, $\gamma = 0.161$

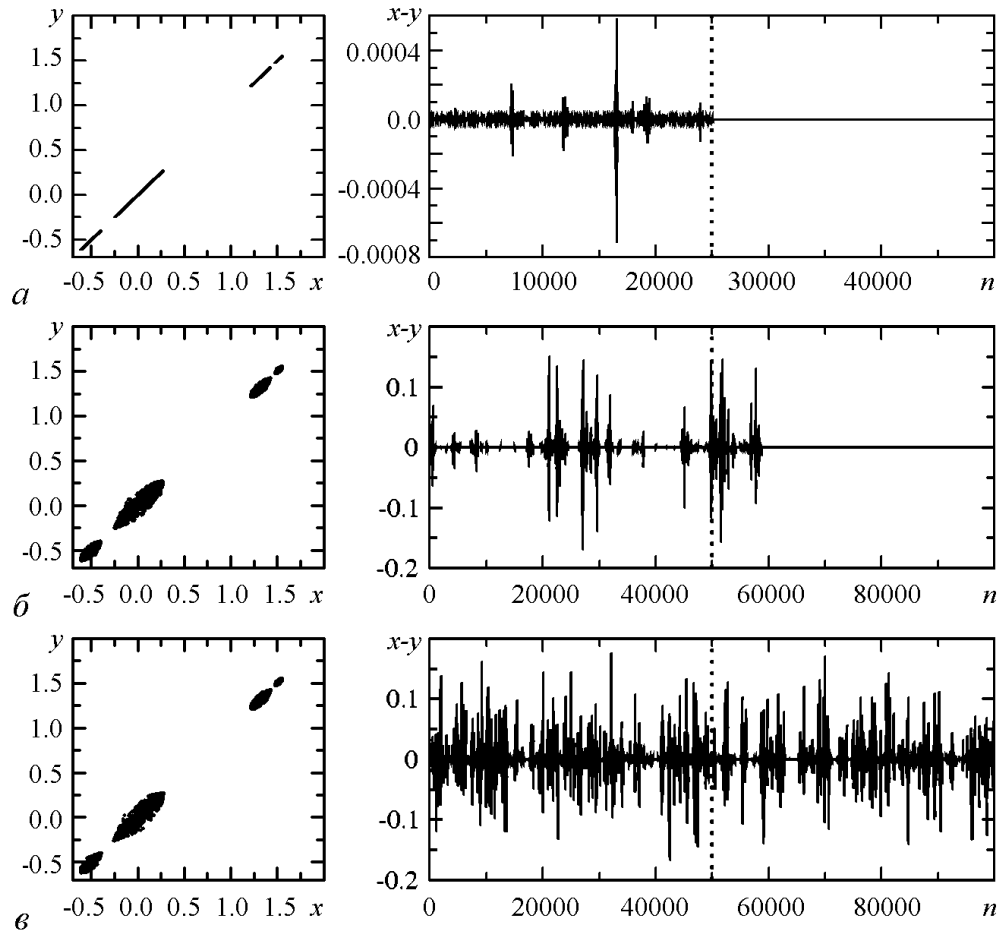


Рис. 6. Этапы разрушения частичной синхронизации хаоса: *a* – начало процесса локального изрешечивания аттрактора, *б* – развитое изрешечивание аттрактора, *в* – пузырящийся аттрактор. Пунктирная вертикальная линия на правых рисунках отмечает момент выключения внешнего шума. $\lambda = 1.67$

являются синхронными с точки зрения определения полной синхронизации ($x = z$), тем не менее и не являются независимыми друг от друга. По виду фазовых портретов можно заключить, что между ними существует некоторая функциональная взаимосвязь $z_n = g(x_n)$, то есть данный режим представляет собой режим обобщенной синхронизации хаоса [8]. Чтобы проверить это предположение, мы построили функцию взаимной когерентности между колебаниями x и z , а также их спектры мощности. Анализ хаотической синхронизации с использованием функции когерентности был подробно рассмотрен нами в работах [9, 10], где было показано, что по усредненной функции когерентности можно построить меру синхронности сложных колебаний, дающую количественную оценку синхронизации от 0 (для несинхронных колебаний) до 1 (для полностью синхронных). Там же было показано, что, хотя, строго говоря, функция когерентности оценивает линейную взаимосвязь между сложными сигналами, но и при не слишком сложной нелинейной зависимости между ними она остается близкой к единице на всех частотах. На рис. 7 приведены спектры мощности колебаний P_x и P_z , построенные по реализациям x_n и z_n :

$$P_{x,z} = \langle F_{x,z}(f) \rangle$$

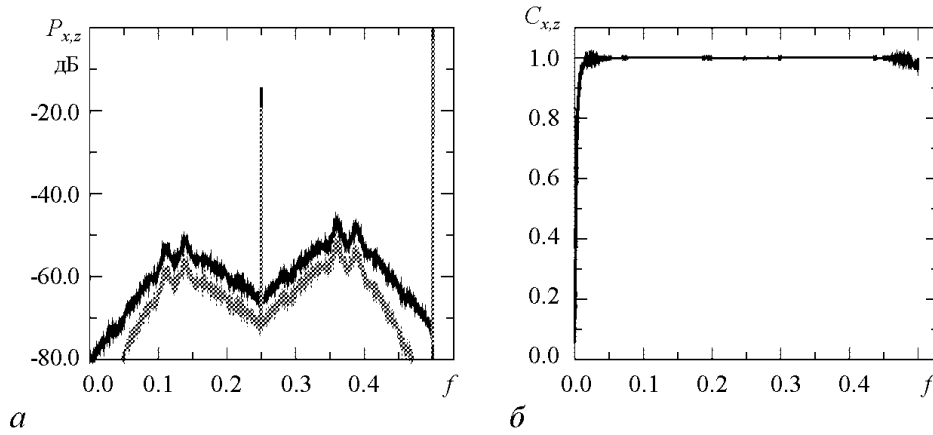


Рис. 7. Спектры мощности (а) и функция взаимной когерентности (б) построенные для режима четырехленточного хаотического аттрактора ($\gamma = 0.112$) по временным реализациям x_n и z_n

(здесь $F_{x,z}(f)$ – преобразование Фурье от x и z , $\langle \dots \rangle$ – усреднение по ансамблю реализаций), а также функция когерентности

$$C_{xz} = \frac{\langle F_x(f)F_z^*(f) \rangle}{\sqrt{P_x(f)P_z(f)}}$$

соответствующие изображенному на рис. 4, z режиму четырехленточного хаотического аттрактора. Из анализа спектров и когерентности можно заключить, что:

- колебания осцилляторов x , y и z являются хаотическими;
- спектры осцилляторов x и z , хотя и являются схожими, отличаются друг от друга, что свидетельствует о существовании нелинейной взаимосвязи между сигналами, не сводящейся к отставанию одного сигнала от другого по времени (подобное поведение носит в литературе название «lag-synchronization» то есть «синхронизация с задержкой» [11]);
- колебания являются полностью когерентными на всех частотах, что свидетельствует о детерминированной взаимосвязи между сигналами.

Таким образом, анализ спектральных характеристик сигналов x и z показывает, что в результате каскада бифуркаций удвоения периода в подпространстве частичной симметрии I_z формируется хаотический аттрактор, соответствующий режиму обобщенной синхронизации хаоса. Поскольку независимой переменной в этом случае является только одна, а остальные две выражаются через нее посредством детерминированных функций, пространство вложения для хаотического аттрактора остается одномерным, как и в случае полной синхронизации хаоса. Можно сказать, что с точки зрения согласованности колебаний подсистем данный режим является не менее синхронным, чем режим полной синхронизации хаоса. Нарушение трансверсальной к подпространству I_z устойчивости (бифуркация прорыва) ведет сразу к рассинхронизации как между осцилляторами x и y , так и между x и z , то есть пространство вложения становится трехмерным.

При других значениях параметра λ сценарий переходов может быть иным. Например, при $\lambda = 1.8$ при уменьшении связи наблюдается переход между пузырящимся аттрактором и хаотическим аттрактором, соответствующим режиму частичной синхронизации. Соответствующие проекции фазовых портретов изображены на рис. 8. При значении связи $\gamma \simeq 1.72$ с пузырящегося аттрактора (рис. 8, а) траектория мягким образом переходит на четырехленточный хаотический аттрактор, располага-

ющийся в подпространстве частичной симметрии I_z . Зависимость между переменными x и z здесь оказывается более сложной, чем для аналогичного аттрактора при

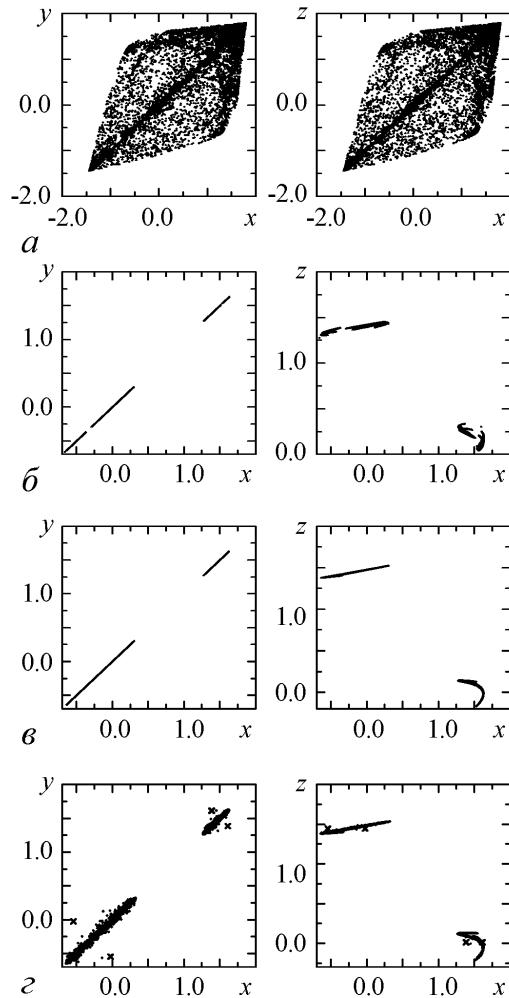


Рис. 8. Этапы формирования и разрушения режима частичной синхронизации хаоса при уменьшении параметра связи γ : 0.178 – несинхронный хаотический аттрактор (а); 0.172 – четырехленточный синхронный аттрактор $4A^z$ (б); 0.159 – двухленточный синхронный аттрактор $2A^z$ (в); 0.157 – переход с аттрактора $2A^z$ на несинхронную орбиту $4C_s$ (точки орбиты обозначены знаками « \times ») (г). $\lambda = 1.8$

начальных условиях. Если в системе с шумом подождать достаточно долгое время, то траектория рано или поздно перейдет на регулярный режим – орбиту периода четыре $4C_s$. Отключение шума при этом не приводит к возвращению в состояние синхронизации. Данная ситуация изображена на рис. 8, г и 9, в. После примерно 10000 итераций в присутствии шума интенсивностью 10^{-6} траектория переходит на орбиту периода четыре, которая обозначена на рис. 8, г знаком « \times ». Для исследования явления изрешечивания мы построили срезы бассейна притяжения орбиты $4C_s$ плоскостями $z = z_{\text{fix}}$. Для построения сечения бассейнов притяжения в некоторой области значений фазовых переменных (x_0, y_0) при фиксированном

$\lambda = 1.67$. В окрестности точки бифуркации также наблюдается явление перемежаемости. При уменьшении связи, в точке $\gamma \simeq 0.16$ происходит слияние лент аттрактора с образованием двухленточного хаотического аттрактора $4A_s^z \rightarrow 2A_s^z$ (рис. 8, в). Сразу после этого перехода наблюдается локальное изрешечивание хаотического аттрактора, что можно увидеть на рис. 9, а, б. На нем изображена временная реализация разностей двух динамических переменных x и y в системе с малым аддитивным шумом интенсивностью порядка 10^{-6} (до вертикальной пунктирной линии) и без шума (после вертикальной пунктирной линии). Видно, что в системе с шумом переход к двухленточному аттрактору ($\gamma < 0.16$) сопровождается появлением выбросов в сторону от подпространства частичной симметрии. При выключении шума выбросы прекращаются. При дальнейшем уменьшении связи, после $\gamma \simeq 0.18$ наблюдается явление изрешечивания бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора областями, входящими в бассейн притяжения несинхронных режимов (в частности, устойчивой орбиты $4C_s$). Выбирая начальные условия в непосредственной окрестности хаотического аттрактора, можно после завершения процесса релаксации попасть как на синхронный аттрактор, так и на орбиту $4C_s$. Добавление в систему малого шума делает переход к несинхронному режиму неизбежным при любых

рованном $z_0 = z_{\text{fix}}$ производилось сканирование начальных условий. Для каждого выбранного начального условия системе предоставлялся длительный интервал времени релаксации, после чего производилась проверка, на какой режим колебаний вышла система. Один из таких срезов для $z_{\text{fix}} = 0$ при последовательно уменьшающихся значениях связи представлен на рис. 10. Области, относящиеся к бассейну притяжения несинхронной орбиты $4C_s$, изображены черным цветом. Сечение хаотического аттрактора показано знаком « \circ ». Поскольку аттрактор соответствует режиму обобщенной синхронизации, его сечение представляет собой точку. Как видно из рисунков, с уменьшением параметра связи, то есть с приближением к верхней границе устойчивости при $\gamma \simeq \simeq 0.154$ (линия L_{blowout} на рис. 4), бассейны притяжения аттрактора несинхронного режима колебаний увеличиваются, и все больше доминируют на плоскости значений (x, y) . При $\gamma = 0.159$ (рис. 10, а) между аттрактором и бассейном притяжения орбиты $4C_s$ имеется некоторый зазор, не позволяющий малому шуму перекидывать изображающую точку в область притяжения несинхронного аттрактора. Уменьшение связи до $\gamma = 0.157$ (рис. 10, б) приводит к появлению в непосредственной окрестности аттрактора точек бассейна притяжения орбиты $4C_s$. В этом случае необратимый переход в зашумленной системе от синхронного режима к несинхронному происходит при любом шуме. Уменьшение связи делает процесс изрешечивания более интенсив-

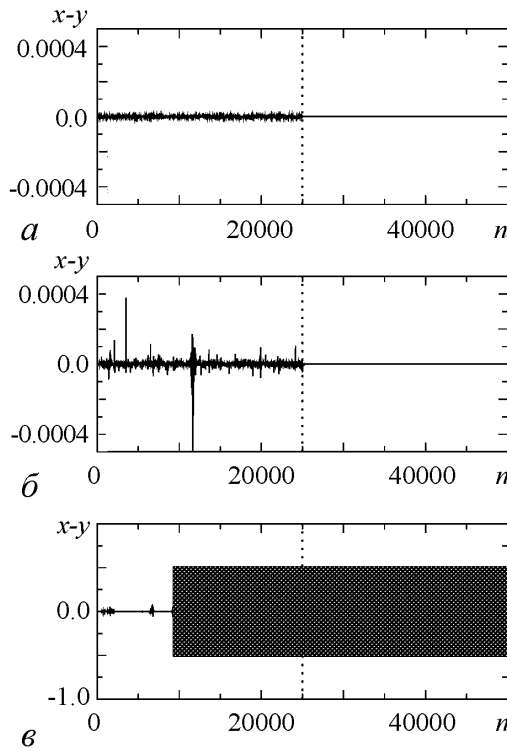


Рис. 9. Вид временных реализаций для разностей фазовых переменных при уменьшении параметра связи γ : 0.161 (а); 0.159 (б); 0.157 (в). Вертикальная пунктирная линия отмечает момент выключения внешнего шума. $\lambda = 1.8$

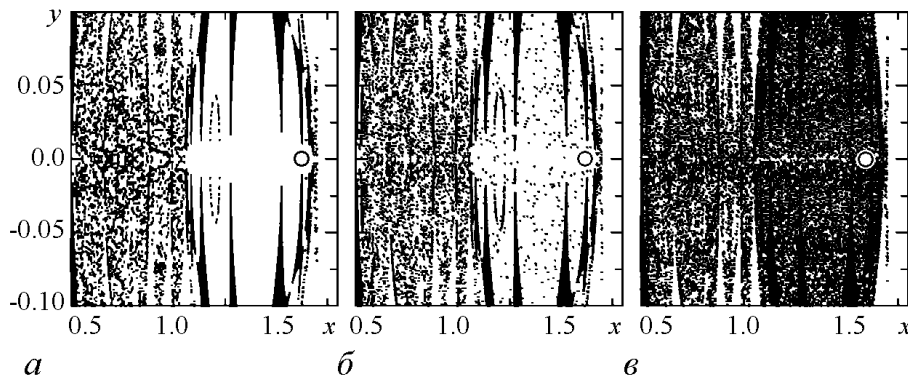


Рис. 10. Сечения бассейнов притяжения орбиты периода два (серый цвет) для последовательно уменьшаемых значений связи γ : 0.159 (а); 0.157 (б); 0.155 (в)

ным (рис. 10, в). Наконец, когда значение параметра связи переходит точку бифуркации прорыва, синхронные хаотические колебания перестают быть трансверсально притягивающими и соответственно, бассейн притяжения несинхронных режимов заполняет всю окрестность хаотического предельного множества в подпространстве I_z . Естественно, что представленная на рис. 10 картина существует лишь для выбранного сечения z_{fix} . Однако, как показывают исследования, данная картина бассейнов притяжения является типичной и для других сечений.

Очевидно, что все описанные выше явления и переходы наблюдаются и для двух других частично синхронных режимов из подпространств I_x и I_y . Таким образом, частично синхронные колебания возникают в системе (1) в зависимости от выбранного значения λ либо через переход «хаос – цикл», либо через переход «хаос – хаос», сопровождающиеся переключающейся перемежаемостью, когда в окрестности точки бифуркации траектория время от времени эволюционирует в том или ином подпространстве частичной симметрии, переходя затем в другое подпространство симметрии. Разрушение частичной синхронизации хаоса сопровождается либо локальной изрешеченностью хаотического аттрактора, либо еще и изрешеченностью его бассейна притяжения.

Заключение

В результате двухпараметрического бифуркационного анализа, а также численного исследования наблюдаемых колебательных режимов в кольце из трех логистических отображений с симметричной диссипативной связью рассмотрены механизмы формирования и разрушения режимов частичной синхронизации. Формирование режимов частичной синхронизации хаоса происходит на базе периодических орбит, возникших в результате седло-узловых бифуркаций в подпространствах частичной симметрии. В каждом из подпространств частичной симметрии через каскад бифуркаций удвоения периода формируются хаотические аттракторы, демонстрирующие в критической области бифуркации слияния лент. Разрушение режима синхронизации происходит либо вследствие бифуркации прорыва, при которой трансверсальный показатель Ляпунова становится положительным, либо в результате необратимого перехода на несинхронный режим при изрешечивании бассейна притяжения хаотического аттрактора. Оба эти процесса предваряются серией трансверсальных бифуркаций удвоения периода седловых периодических орбит основного семейства, результатом которых является формирование в аттракторе областей локальной трансверсальной неустойчивости, что, в свою очередь, приводит к негробности режима хаотической синхронизации. Описанные механизмы отличаются от соответствующих механизмов в ансамбле с несимметричной связью.

Наблюдаемые в подпространствах частичной симметрии хаотические режимы можно рассматривать как пример обобщенной синхронизации, поскольку между всеми тремя координатами системы существует функциональная взаимосвязь и пространство вложения аттрактора, одномерно. Существование в подпространствах частичной симметрии режимов обобщенной синхронизации является особенностью выбранного типа связи и не наблюдается в ансамбле осцилляторов с однонаправленной связью. Детальное рассмотрение закономерностей появления и исчезновения обобщенной синхронизации хаоса в системе идентичных осцилляторов с несимметричной связью (5), (6) в настоящей работе не проводилось и может быть предметом самостоятельного научного исследования.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ и Американского фонда гражданских исследований (CRDF, грант REC-006).

Библиографический список

1. *Шабунин А.В., Николаев С.М., Астахов В.В.* Двухпараметрический бифуркационный анализ режимов полной синхронизации хаоса в ансамбле из трех осцилляторов с дискретным временем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 5–6. С. 24.
2. *Belykh V.N., Belykh I.V., Hasler M.* Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62. P. 6332.
3. *Pogromsky A., Santoboni G., Nijmeijer H.* Partial synchronization: from symmetry towards stability // Physica D. 2002. Vol. 172. P. 65.
4. *Maistrenko Y., Popovich O., Hasler M.* On strong and weak chaotic partial synchronization // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10. P. 179.
5. *Yanchuk S., Maistrenko Y., Mosekilde E.* Partial synchronization and clustering in a system of diffusively coupled chaotic oscillators // Mathematics and Computers in Simulation. 2001. Vol. 54. P. 491.
6. *Tabarov A.V., Maistrenko Y.L., Mosekilde E.* Partial synchronization in a system of coupled logistic maps // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10. P. 1051.
7. *Tsukamoto N., Miyazaki S., Fujisaka H.* Synchronization and intermittency in three-coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67. P. 016212.
8. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4528.
9. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Николаев В.В., Шабунин А.В.* Исследование хаотической синхронизации в системе симметрично связанных генераторов // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45. С. 196.
10. *Shabunin A., Astakhov V., Kurths J.* Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 016218.
11. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 4193.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 15.07.2005

TWO-PARAMETRIC BIFURCATIONAL ANALYSIS OF FORMATION AND DESTRUCTION OF REGIMES OF PARTIAL SYNCHRONIZATION OF CHAOS IN ENSEMBLE OF THREE DISCRETE-TIME OSCILLATORS

A. Shabunin, S. Nikolaev, V. Astakhov

We investigate mechanisms of appearance and disappearance of regimes of partial synchronization of chaos in a ring of three logistic maps with symmetric diffusive coupling. Two-parametric bifurcational analysis is carried out and typical oscillating regimes and transitions between them are considered. Partial chaotic synchronization is revealed to lead to generalized synchronization.



О СВОЙСТВАХ СКЕЙЛИНГА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ШУМА В ОТОБРАЖЕНИИ ОКРУЖНОСТИ С ЧИСЛОМ ВРАЩЕНИЯ, ЗАДАНЫМ ЗОЛОТЫМ СРЕДНИМ

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Ю.В. Седова

В работе исследованы особенности скейлинга, связанные с влиянием аддитивного шума на критическое отображение окружности с числом вращения, равным золотому среднему. На основании ренормгруппового подхода Хэма и Грэхэма [1] получена улучшенная числовая оценка для константы скейлинга, ответственной за влияние шума $\gamma = 2.3061852653$. Уменьшение амплитуды шума на эту константу обеспечивает возможность наблюдения каждого следующего уровня фрактальной структуры, что отвечает увеличению характерного масштаба времени на фактор $(\sqrt{5} + 1)/2$. Представлены численные результаты, демонстрирующие наличие ожидаемого скейлинга на фазовых портретах аттрактора с шумом, графиках «чертовой лестницы» и ляпуновских картах.

Введение

Отображение окружности

$$x_{n+1} = x_n + r - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x_n \pmod{1} \quad (1)$$

– одна из фундаментальных моделей, применяемая для описания многих систем в современной нелинейной динамике [2–5]. В частности, это отображение описывает автогенератор, находящийся под периодическим воздействием [6, 7], контакт Джоузефсона в поле микроволнового излучения [8, 9], волны пространственного заряда в твердом теле [9], маятник с затуханием под внешним воздействием [10]. В теоретических исследованиях, касающихся биологических и медицинских проблем, отображение окружности появляется как модель для описания динамики сердца в присутствии конкуренции двух пейсмекеров, управляющих ритмом [11, 12].

Отображение окружности должно рассматриваться не только как модель определенного качественного типа поведения. Как представитель класса универсальности, ассоциирующегося с переходом к хаосу через квазипериодическое движение,

оно адекватно передает количественные закономерности данного перехода. Это заключение вытекает из ренормгруппового подхода (РГ) [13, 14], который представляет собой эффективный и мощный теоретический инструмент для анализа глубоких и фундаментальных особенностей динамики между порядком и хаосом. В частности, РГ-анализ раскрывает такое характерное свойство динамики, как масштабная инвариантность (скейлинг) для тонких фрактальных структур в фазовом пространстве и пространстве параметров, которые связаны с переходами к хаосу. В нелинейной динамике метод РГ был впервые введен Фейгенбаумом [15–17] в применении к удвоениям периода и позднее последовательно развит для анализа различных типов переходов к хаосу, включая другие классы универсальности с удвоениями периода [18–21], перемежаемость [22, 23], квазипериодичность [24, 25], явления сложной аналитической динамики [26–28], связанные системы [12, 29, 30].

Применительно к переходу к хаосу через разрушение квазипериодического движения, наиболее подробные теоретические и экспериментальные исследования относятся к случаю, когда отношение основных частот задано иррациональным числом $w = (\sqrt{5} - 1)/2$, известным как золотое среднее. В отображении окружности это отвечает квазипериодическому режиму с числом вращения

$$\rho(r, K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}, \quad (2)$$

заданным указанной константой w . (При вычислении величины ρ операция взятия модуля в уравнении (1) игнорируется.)

Выбор именно этого иррационального числа оправдан, во-первых, простотой и прозрачностью соответствующего теоретического анализа и, во-вторых, тем фактом, что в данном случае тонкие структуры пространства параметров, изучение которых составляет предмет рассмотрения в теоретических исследованиях или в экспериментах, являются различимыми лучше, чем при других отношениях частот.

Известен ряд экспериментальных исследований, в которых многие особенности критической динамики вблизи точки перехода к хаосу через квазипериодический режим с числом вращения золотое среднее, предсказанные на основе РГ-анализа, были зарегистрированы, например, в конвекции жидкости и в динамике электронных осцилляторов под внешним воздействием [32–34]. Это касается таких аспектов, как детали структуры пространства параметров (языки Арнольда), скейлинг, мультифрактальные свойства критического квазипериодического движения, спектр Фурье и т.д.

Надо заметить, однако, что все реальные экспериментальные системы всегда функционируют в присутствии воздействующего на них шума. Учет шума является вопросом принципиального значения при тщательном анализе явлений на пороге хаоса, потому что шум «замывает» самые тонкие детали наблюдаемых фрактальных структур. В частности, это обстоятельство было специально отмечено в литературе в отношении контактов Джозефсона [35].

Теоретический подход для описания влияния шума в рамках РГ-анализа был предложен Кратчфилдом с соавторами и Шрайманом с соавторами [36, 37] применительно к переходу к хаосу через удвоения периода в диссипативных системах. Эти авторы ввели в рассмотрение универсальный фактор $\gamma_F = 6.61903\dots$, ответственный за скейлинговые свойства динамики относительно влияния шума. Смысл его состоит в том, что уменьшение амплитуды шума на этот фактор обеспечивает возможность наблюдения еще одного уровня каскада удвоения периода. Позднее аналогичный

подход был предложен для нескольких других типов критического поведения на пороге хаоса [1, 38–41].

В частности, в работе [1] Хэмм и Грэхэм развили РГ-анализ для перехода к хаосу в диссипативных системах через разрушение квазипериодических движений с отношением частот, заданным золотым средним, и оценили соответствующий фактор скейлинга для шума $\gamma_{GM} = 2.30619$. Уменьшение интенсивности шума на эту константу дает возможность различить еще один уровень фрактальной структуры, связанной с увеличением характерного масштаба времени на фактор $W = w^{-1} = (\sqrt{5} + 1)/2$. Помимо упомянутой статьи, нам известны только две работы, специально посвященные влиянию шума на отображение окружности [35, 42]. Будучи опубликованы раньше работы Хэмма и Грэхэма, они содержат только эмпирические результаты численного моделирования, без обоснования на базе РГ-анализа.

Цель настоящей статьи состоит в подробном рассмотрении скейлинговых свойств, вытекающих из РГ-анализа и характерных для отображения окружности под влиянием шума вблизи квазипериодической орбиты с числом вращения «золотое среднее». Раздел 1 посвящен качественному обсуждению результатов численного моделирования стохастической версии отображения окружности с аддитивным шумом. В разделе 2 представлен РГ-анализ отображения окружности вблизи критической точки, отвечающей золотому среднему, при наличии шума, который основан на одном из подходов, предложенных Хэмом и Грэхэмом. В частности, мы приводим существенно улучшенное числовое значение основной универсальной константы, ответственной за свойства скейлинга по отношению к шуму. В разделе 3 рассмотрены выводы, которые можно сделать на основе РГ-анализа в применении к отображению окружности с шумом. Обсуждаются компьютерные иллюстрации, включая портреты аттрактора с шумом, диаграммы типа «чертовой лестницы», карты ляпуновского показателя на плоскости параметров вблизи критической точки «золотое среднее» на различных масштабах и при разных уровнях шума.

1. Влияние шума на отображение окружности: качественные результаты

Как известно, в отображении окружности (1) критическое квазипериодическое движение на пороге хаоса с числом вращения $w = (\sqrt{5} - 1)/2$ имеет место при следующих значениях параметров [13, 14, 43, 44]:

$$(r, K)_c = (0.60666106347011201228\dots, 1). \quad (3)$$

Будем называть эту точку критической точкой типа GM (Golden Mean – «золотое среднее»).

На рис. 1, *a* приведена карта динамических режимов отображения окружности (1) на плоскости параметров (r, K) . Хорошо видны области периодичности в виде характерных языков (языки Арнольда). Для основных языков синхронизации на карте указаны числа вращения, которые находятся по формуле (2). Также на карте режимов отмечена критическая линия $K = 1$ и указано расположение критической точки GM.

Рис. 1, *б* представляет собой ляпуновскую карту отображения окружности на плоскости параметров (r, K) . Ляпуновский показатель, отвечающий каждому эле-

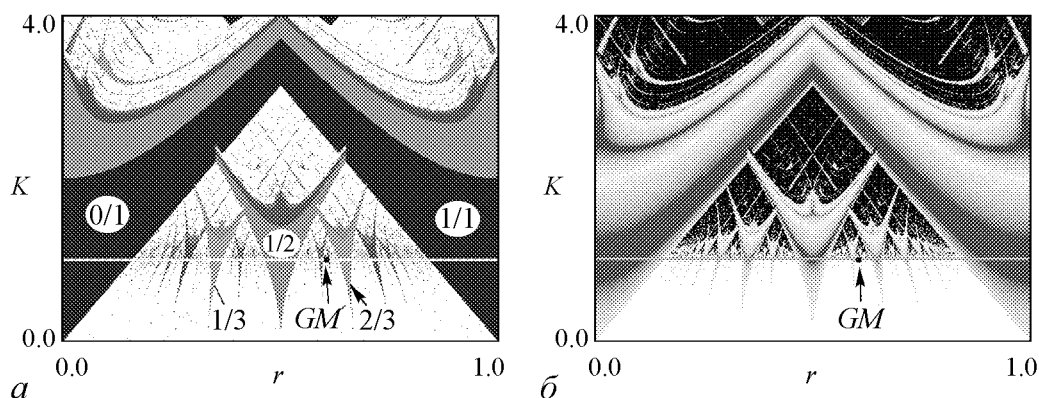


Рис. 1. Карта динамических режимов (а) и карта ляпуновского показателя (б) отображения окружности (1) на плоскости параметров (r, K) . Цифрами на диаграмме (а) указаны числа вращения в основных языках синхронизации. В каждой точке диаграммы (б) ляпуновский показатель, вычисленный по соотношению (4), закодирован в серой гамме. Серые тона определяют отрицательные значения ляпуновского показателя (чем темнее цвет, тем больше абсолютная величина отрицательного показателя). Нулевые значения Λ (квазипериодическая динамика) обозначены белым, а положительные значения (хаос) – черным

менту изображения (пикселю), вычисляется по формуле

$$\Lambda \cong \frac{1}{N} \sum \log |1 - K \cos(2\pi x_n)|. \quad (4)$$

Отрицательные значения Λ закодированы тонами серого цвета: чем темнее цвет, тем больше по модулю значение ляпуновского показателя. Нулевые значения Λ , соответствующие квазипериодической динамике, обозначены белым цветом, а положительные, связанные с хаотической динамикой, – черным. (См. работы [45–48], где описана основная идея ляпуновских карт и приведены другие примеры их использования.)

Введем последовательность ξ_n , которая представляет собой дискретный во времени белый шум. Это означает, что члены последовательности на различных шагах времени предполагаются статистически независимыми. Максимальная величина ξ_n предполагается ограниченной. Среднее для ξ_n равно нулю $\langle \xi_n \rangle = 0$, дисперсия есть некоторая постоянная $\sigma = \sqrt{\langle \xi_n^2 \rangle}$. Рассмотрим следующее стохастическое отображение – отображение окружности в присутствии шума

$$x_{n+1} = x_n + r - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x_n + \varepsilon \xi_n \pmod{1}, \quad (5)$$

где ε характеризует интенсивность добавленного шумового источника.

Если амплитуда шума мала, и исследуется поведение на больших масштабах времени, то конкретная форма распределения вероятности для ξ_n будет несущественна, и поведение системы с шумом будет иметь универсальный характер (этот факт подтвержден и для других критических ситуаций, допускающих анализ в терминах метода РГ, см. [49, 50]). При проведении вычислений будем определять ξ_n как случайную переменную, равномерно распределенную в интервале $[-0.5, 0.5]$; следовательно $\sigma = 1/\sqrt{12}$. При проведении РГ-анализа в следующем разделе будем полагать шум гауссовым.

На рис. 2 представлены ляпуновские карты на плоскости параметров (r, K) при различных значениях интенсивности шума ε . Области периодического поведения, известные в случае отсутствия шума как языки Арнольда, ясно различимы на фрагментах $a, б$ – это окрашенные в серый цвет образования. Между ними, в субкритической области $K < 1$, имеет место квазипериодическая динамика. В присутствии шума периодическая или квазипериодическая динамика в точном смысле не реализуется, но на ляпуновских картах картина характерных областей по-прежнему хорошо различима, по крайней мере, при малых или умеренных шумах, хотя тонкие детали исчезают из-за наличия шума. Введем такую терминологию: будем говорить о шумовом периодическом режиме, когда ляпуновский показатель Λ отрицателен; о шумовом квазипериодическом, если Λ близко к нулю; и о шумовом хаотическом режиме, когда значение Λ положительно. Ляпуновские карты позволяют легко распознавать эти режимы визуально. С этой точки зрения, влияние шума выглядит довольно очевидным: шум стирает тонкие детали картины динамических режимов.

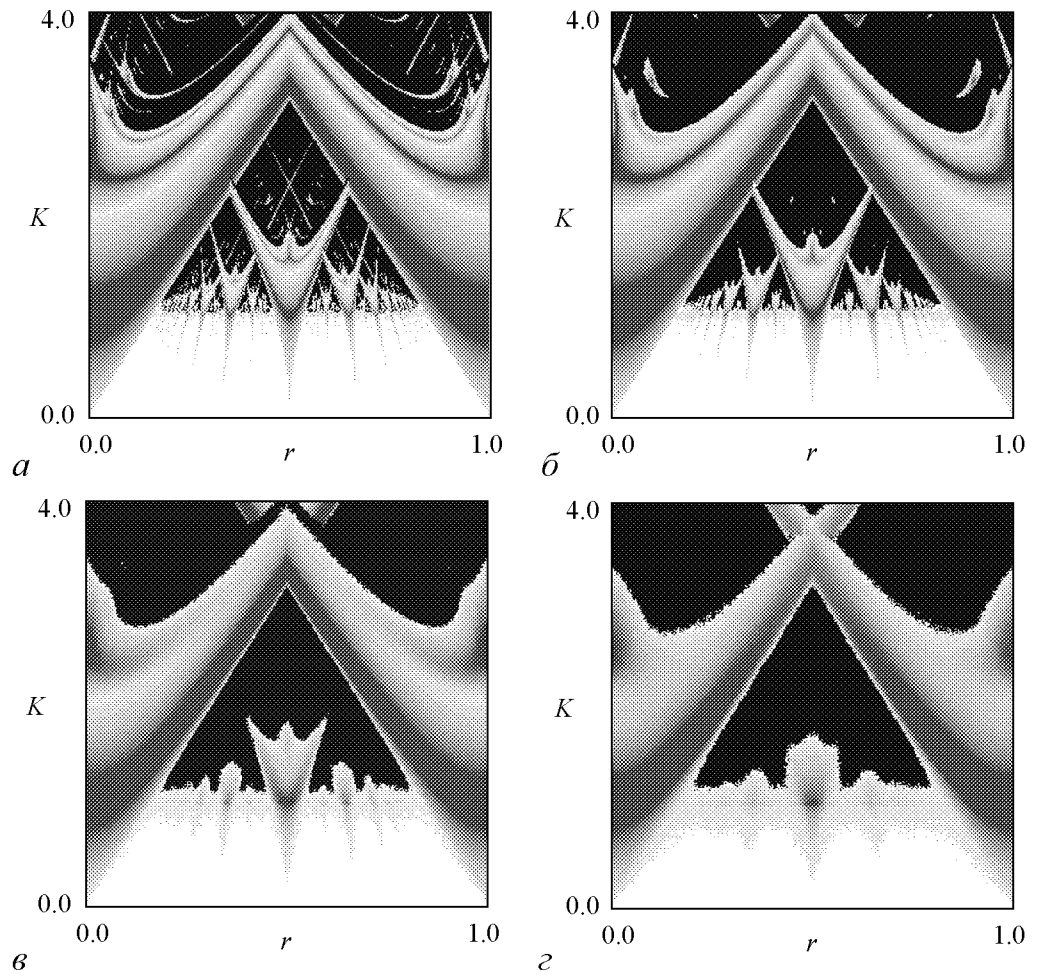


Рис. 2. Ляпуновские карты для отображения (5) на плоскости управляющих параметров r и K . Диаграммы соответствуют последовательному увеличению интенсивности шума ε : 0.001 (a), 0.01 ($б$), 0.05 ($в$) и 0.1 ($г$)

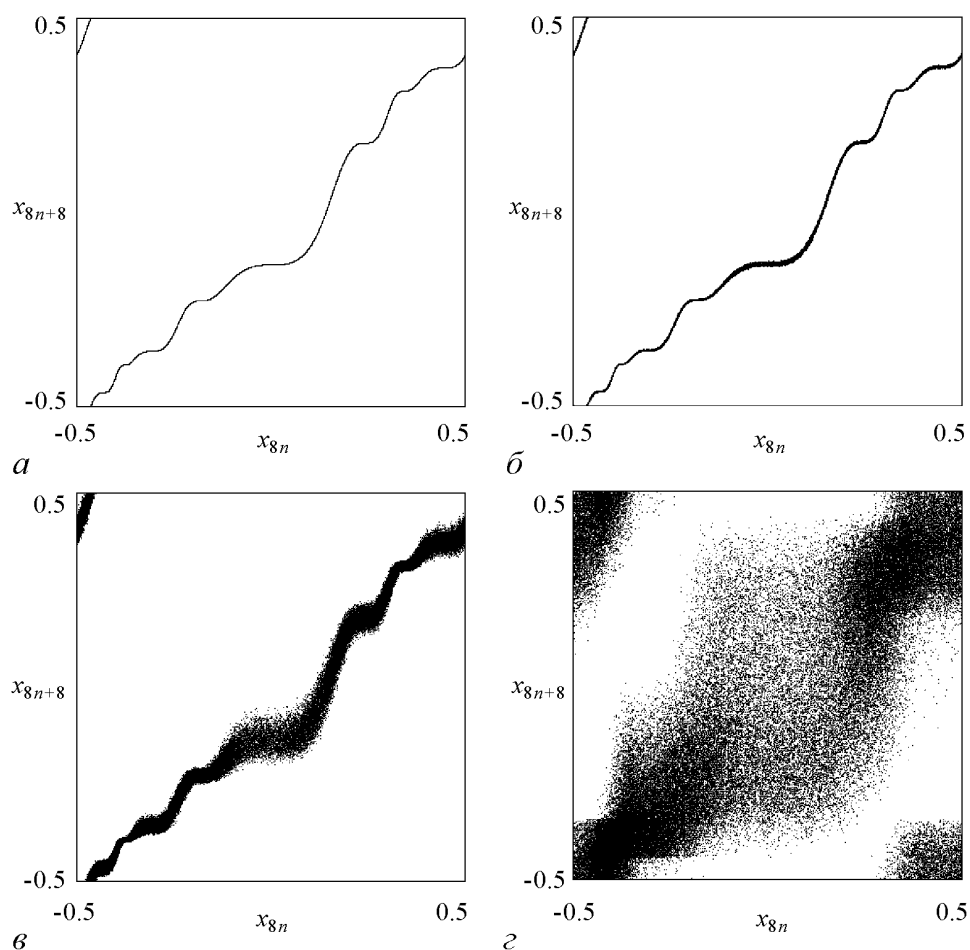


Рис. 3. Портреты аттракторов в критической точке GM отображения (5) на итерационных диаграммах в координатах (x_n, x_{n+F_k}) с $F_k = F_6 = 8$. Фрагмент *a* соответствует динамическому случаю (шум отсутствует), а последующие диаграммы – присутствию шума с последовательно увеличивающейся амплитудой ε : 0.001 (*b*), 0.01 (*c*) и 0.1 (*d*)

На рис. 3 представлены фазовые портреты аттракторов в критической точке типа GM в координатах, которые будут удобны при дальнейшем обсуждении, а именно, x_{n+F_k} в зависимости от x_n , где F_k – одно из чисел Фибоначчи. (Диаграммы на рис. 3 построены для $F_6 = 8$.) Фрагмент *a* соответствует чистому динамическому случаю (шума нет), а фрагменты *b–d* – присутствию шума с нарастающей амплитудой от картинки к картинке. И снова можно видеть, как структура аттрактора становится все более и более размытой с увеличением шума, шаг за шагом тонкие детали на фоне шума исчезают.

2. Ренормгрупповой анализ

В применении к квазипериодическому движению с числом вращения золотое среднее главная идея РГ-анализа состоит в исследовании операторов эволюции, определенных для интервалов времени, заданных последовательными числами Фибоначчи F_k : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$.

Предположим, что в присутствии шума эволюция динамической переменной x в критической точке GM для числа шагов F_k и F_{k+1} дается уравнениями

$$x_{i+F_k} = \phi_k(x_i) + \varepsilon \xi_i \psi_k(x_i) \quad (6)$$

$$x_{i+F_{k+1}} = \phi_{k+1}(x_i) + \varepsilon \xi_i \psi_{k+1}(x_i), \quad (7)$$

где ξ_i является гауссовой последовательностью независимых случайных величин с нулевым средним, $\phi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ – некоторые вспомогательные функции. Параметр амплитуды шума ε предполагается малым. Очевидно, модель (5) есть частная версия уравнений (6) и (7): при $F_1 = F_2 = 1$ следует положить

$$\phi_1(x) = \phi_2(x) = x + r_c - (1/2\pi) \sin 2\pi x, \quad \psi_1(x) = \psi_2(x) \equiv 1. \quad (8)$$

В соответствии с уравнениями (6) и (7), сохраняя члены первого порядка по ε , получаем уравнение эволюции за F_{k+2} шагов дискретного времени:

$$x_{i+F_{k+2}} = \phi_k(\phi_{k+1}(x_i)) + \varepsilon [\xi_i \phi'_k(\phi_{k+1}(x_i)) \psi_{k+1}(x_i) + \xi_{i+F_{k+1}} \psi_k(\phi_{k+1}(x_i))]. \quad (9)$$

Что касается стохастического члена, то необходимо сделать следующее замечание. Предположим, что в некоторый момент орбита стартует из точки x_i . Рассмотрим ансамбль гауссовых случайных чисел $\{\xi_i, \xi_{i+F_{k+1}}\}$ со средним, равным нулю, и дисперсией, равной σ^2 , и составим из них сумму с коэффициентами, заданными функциями x_i . Поскольку пары $\{\xi_i, \xi_{i+F_{k+1}}\}$ статистически независимы, сумма может быть представлена опять же как гауссово случайное число со средним, равным нулю, и дисперсией, равной σ^2 , умноженное на функцию x_i , а именно

$$\xi_i \phi'_k(\phi_{k+1}(x_i)) \psi_{k+1}(x_i) + \xi_{i+F_{k+1}} \psi_k(\phi_{k+1}(x_i)) = \tilde{\xi}_i \psi_{k+2}(x_i). \quad (10)$$

Введем функцию

$$\phi_{k+2}(x) = \phi_k(\phi_{k+1}(x)) \quad (11)$$

и перепишем уравнение (9) в форме, аналогичной (6) и (7), с переопределенной случайной переменной и функциями ϕ и ψ :

$$x_{i+F_{k+2}} = \phi_{k+2}(x_i) + \varepsilon \tilde{\xi}_i \psi_{k+2}(x_i). \quad (12)$$

Чтобы получить замкнутое функциональное уравнение, возведем в квадрат обе части уравнения (10) и выполним усреднение по ансамблю реализаций с шумом. Так как $\langle \tilde{\xi}_i^2 \rangle = \langle \xi_i^2 \rangle = \sigma^2$ и $\langle \xi_i \xi_{i+F_{k+1}} \rangle = 0$, то приходим к соотношению

$$[\psi_{k+2}(x)]^2 = [\phi'_k(\phi_{k+1}(x))]^2 [\psi_{k+1}(x)]^2 + [\psi_k(\phi_{k+1}(x))]^2, \quad (13)$$

где штрих означает производную функции по первому аргументу.

В соответствии с основным содержанием ренормгруппового подхода, осуществим пересчет масштаба $x \mapsto x/\alpha^k$, где $\alpha = -1.288574553954368\dots$ – константа скейлинга для критической динамики с золотым средним [13, 14, 43, 44]. Тогда в терминах перенормированных функций имеем

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \alpha^k \phi_k(\alpha^{-k} x), & f_k(x) &= \alpha^k \phi_{k+1}(\alpha^{-k} x), \\ \Phi_k(x) &= [\psi_k(\alpha^{-k} x)]^2, & \Psi_k(x) &= \alpha^k [\psi_{k+1}(\alpha^{-k} x)]^2, \end{aligned} \quad (14)$$

и полученные выше уравнения означают, что

$$\begin{aligned}
g_{k+1}(x) &= \alpha f_k(x/\alpha), \\
f_{k+1}(x) &= \alpha g_k(f_k(x/\alpha)), \\
\Phi_{k+1}(x) &= \alpha^2 \Psi_k(x/\alpha), \\
\Psi_{k+1}(x) &= \alpha^2 \{[g'_k(f_k(x/\alpha))]^2 \Psi_k(x/\alpha) + \Phi_k(f_k(x/\alpha))\}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Эти соотношения определяют РГ-преобразование для набора функций $\{g_k, f_k, \Phi_k, \Psi_k\}$. Процедура может быть повторена снова и снова, чтобы получить функции для всё больших значений k , то есть определить перенормированные операторы эволюции для больших чисел Фибоначчи на шагах дискретного времени F_k .

Как следует из РГ-анализа [13, 14], в критической точке GM последовательность функций $g_k(x), f_k(x)$ сходится асимптотически к решению в виде неподвижной точки РГ-уравнения $\{g, f\}$, которое удовлетворяет соотношениям

$$g(x) = \alpha f(x/\alpha), \quad f(x) = \alpha g(f(x/\alpha)), \tag{16}$$

или

$$g(x) = \alpha^2 g(\alpha^{-1} g(x/\alpha)). \tag{17}$$

Численные данные для полиномиального разложения универсальной функции $g(x)$ по степеням x^3 могут быть найдены, например, в работе [51].

Сходимость функций $g_k(x), f_k(x)$ к решению в виде неподвижной точки РГ-преобразования подразумевает, что решение рекуррентных линейных функциональных уравнений для функциональных пар $\{\Phi_k(x), \Psi_k(x)\}$ асимптотически определяется собственным вектором, связанным с самым большим собственным числом Ω для следующей задачи на собственные значения [1]:

$$\Omega \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \Psi(x/\alpha) \\ \alpha^2 \{[g'(f(x/\alpha))]^2 \Psi(x/\alpha) + \Phi(f(x/\alpha))\} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Как упоминалось выше, универсальная функция $g(x)$ была получена численно в виде конечного разложения по степеням аргумента [13, 14, 51]. С использованием этих данных функциональное преобразование правой части уравнения (18) было реализовано как компьютерная программа. Неизвестные функции $\{\Phi(x), \Psi(x)\}$ представлялись набором их значений в узлах сетки на интервале $-1.2 < x < 1.2$ и интерполяционной схемой между ними. При заданных произвольно начальных условиях $\Phi(x) \equiv 1, \Psi(x) \equiv 1$ программа выполняла функциональное преобразование многократно и нормировала результирующие функции на каждом шаге как $\Phi^0(x) = \Phi(x)/\Phi(0), \Psi^0(x) = \Psi(x)/\Phi(0)$, до тех пор пока форма функций не стабилизировалась. Значение $\Phi(0)$ (перед нормализацией) сходится к собственному значению

$$\Omega = 5.31849047771... \tag{19}$$

Теперь в линейном приближении относительно амплитуды шума, стохастическое отображение для F_k и F_{k+1} шагов эволюции при больших k в критической точке GM может быть записано в перенормированных переменных

$$\begin{aligned}
x_{i+F_k} &= g(x_i) + \varepsilon \gamma^k \xi_i \Phi(x_i), \\
x_{i+F_{k+1}} &= f(x_i) + \varepsilon \gamma^k \xi_i \Psi(x_i),
\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\varphi(x) = \sqrt{\Phi^0(x)}, \quad v(x) = \sqrt{\Psi^0(x)}, \quad \gamma = \sqrt{\Omega} = 2.30618526526... \quad (21)$$

Если рассмотреть малый сдвиг параметров r и K от критической точки GM, в уравнениях появятся дополнительные члены, которые соответствуют двум существенным собственным модам линеаризованного РГ-уравнения вблизи решения, отвечающего неподвижной точке (см. [13, 14, 51]). Учитывая эти дополнительные члены, можно записать

$$x_{i+F_k} = g(x_i) + C_1 \delta_1^k h^{(1)}(x_i) + C_2 \delta_2^k h^{(2)}(x_i) + \varepsilon \gamma^k \xi_i \varphi(x_i), \quad (22)$$

где $h^{(1)}(x)$ и $h^{(2)}(x)$ – соответствующие собственные векторы. Собственные значения δ_1 и δ_2 , как известно, есть

$$\delta_1 = -2.833610655891... \quad \delta_2 = \alpha^2 = 1.660424381098... \quad (23)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 в уравнении (22) зависят от параметров исходного отображения и равны нулю в критической точке GM. В близкой окрестности критической точки достаточно учитывать первые члены разложения коэффициентов по отклонению параметров от критической точки. Возмущение, связанное с модой C_1 , соответствует сдвигу в пространстве параметров вдоль критической линии $K = 1$; оно сохраняет кубическую точку перегиба. Вторая мода, связанная с коэффициентом C_2 , появляется из-за сдвига от критической линии вдоль кривой постоянного числа вращения. В соответствии с [51], выражения для коэффициентов через параметры исходного отображения окружности есть

$$r - r_c = C_1 - 0.01749C_2 - 0.00148C_2^2, \quad K - K_c = C_2. \quad (24)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 можно трактовать как специальные локальные координаты («скейлинговые координаты») в окрестности критической точки GM на плоскости параметров.

Теперь можно сформулировать основное свойство скейлинга, которое следует из (22), для динамики вблизи критической точки GM в присутствии шума.

Если уменьшить сдвиг по параметру от точки GM так, чтобы коэффициенты C_1 и C_2 уменьшились на факторы δ_1 и δ_2 , соответственно, и уменьшить амплитуду шума ε на фактор γ , то форма стохастического отображения (22) остается неизменной. Таким образом, при новых значениях параметров система с шумом будет демонстрировать статистически подобное поведение, как и со старыми параметрами, но с характерным масштабом времени, увеличенным на фактор $F_{k+1}/F_k \cong w^{-1} = (\sqrt{5} + 1)/2$.

3. Свойства скейлинга и их иллюстрации в численных экспериментах

Обсудим некоторые проявления влияния шума на отображение окружности в критической точке GM и ее окрестности в численных экспериментах с точки зрения закономерностей, обнаруженных в предыдущем разделе.

3.1. Критический аттрактор в присутствии шума. Чтобы исследовать свойства скейлинга критической орбиты в точке GM, удобно использовать итерационную диаграмму в координатах (x_n, x_{n+F_k}) при последовательных числах Фибоначчи F_k , как сделано в разделе 1.

Рис. 4 демонстрирует свойство скейлинга критической орбиты в отсутствие шума. Вставка на каждой картинке показывает фрагмент общей структуры с увеличением на фактор $\alpha = -1.2885\dots$ Можно видеть хорошее подобие увеличенных участков (хотя, формально говоря, свойство скейлинга становится точным только в асимптотике малых масштабов и больших k). На центральной диаграмме вставка изображена перевернутой из-за того, что фактор α отрицателен.

В присутствии шума тонкая структура критической квазипериодической орбиты размывается уровень за уровнем по мере роста интенсивности шума. В соответствии с заключениями предыдущего раздела, каждый новый уровень структуры размывается, когда мы увеличиваем амплитуду источника шума на фактор $\gamma = 2.30618\dots$ Диаграммы на рис. 5 представляют собой фазовые портреты аттракторов с шумом для модельной системы (5) в критической точке GM с различными значениями параметра интенсивности шума ε . Рисунки справа представляют собой увеличенные фрагменты предыдущих диаграмм, с увеличением для рисунков *a*, *б*, *в* на факторы C , αC и $\alpha^2 C$, соответственно, где C – некоторая постоянная. Наблюдается подобие картинок для аттракторов с шумом.

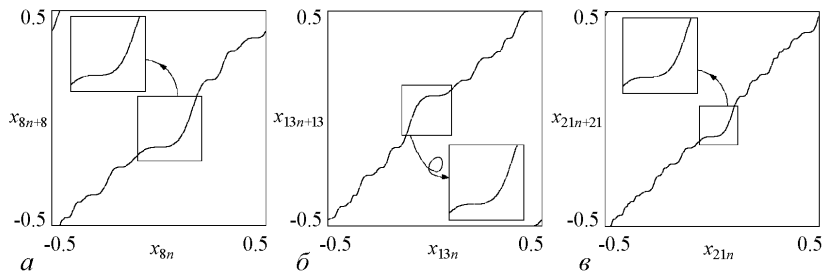


Рис. 4. Иллюстрация скейлинга в отсутствие шума для критической орбиты с числом вращения, равным «золотому среднему» в координатах (x_n, x_{n+F_k}) , $F_k = 8, 13, 21$. На каждой картинке вставленный прямоугольник – это фрагмент с увеличением на фактор $\alpha = -1.2885\dots$ по сравнению с предыдущим случаем. На диаграмме *б* вставленный прямоугольник изображен перевернутым из-за того, что фактор α отрицателен

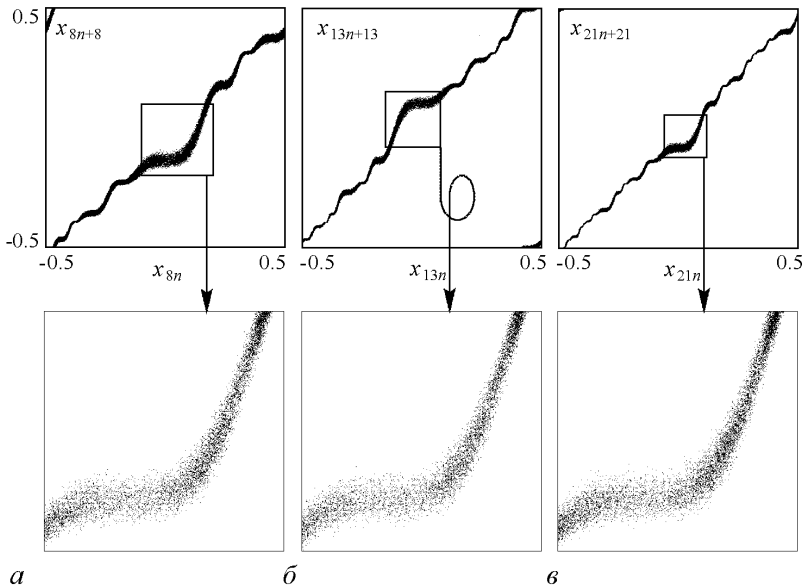


Рис. 5. Фазовые портреты аттрактора для отображения окружности с шумом (5) в критической точке GM: $r = r_c = 0.606661\dots$, $K = 1$ при значениях амплитуды шума ε : 0.005 (*a*), $0.005/\gamma$ (*б*) и $0.005/\gamma^2$ (*в*)

3.2. Показатель Ляпунова в присутствии шума. В соответствии с результатами раздела 2, в критической точке GM для параметров интенсивности шума ε и ε/γ система демонстрирует подобное поведение, причем во втором случае характерный масштаб времени больше на фактор $W = 1.6180\dots$ Следовательно, величина ляпуновского показателя при величине шума ε/γ должна быть меньше, чем при ε , на указанный фактор. Рис. 6 демонстрирует графики ляпуновского показателя в зависимости от интенсивности шума ε . Выделенный прямоугольник нарисован с увеличением на фактор W по вертикальной оси и на фактор γ по горизонтальной оси. При этом изменении масштаба наблюдается подобие картинок. Очевидно, что на меньших масштабах степень совпадения станет еще лучше.

Оценим критический индекс для показателя Ляпунова по отношению к интенсивности шума. Принимая во внимание, что изменение ε на фактор γ сопровождается изменением показателя Ляпунова на фактор W , можно заключить, что ляпуновский показатель должен вести себя как

$$\Lambda \propto \varepsilon^\eta, \quad (25)$$

где $\eta = \log_\gamma W = 0.575891387\dots$ Рис. 7 иллюстрирует зависимость Λ от ε в двойном логарифмическом масштабе. Точки, полученные в результате численных расчетов, расположены вдоль прямой линии с наклоном η . Зависимость имеет колебания с периодом $\log \gamma$ по оси ε в соответствии с законом скейлинга, следующим из РГ-анализа.

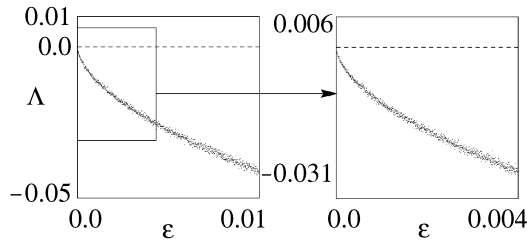


Рис. 6. Показатель Ляпунова Λ в зависимости от интенсивности шума ε . Выделенный участок показан с увеличением на фактор $W = 1.618\dots$ по вертикальной оси и на фактор $\gamma = 2.30618\dots$ по горизонтальной оси

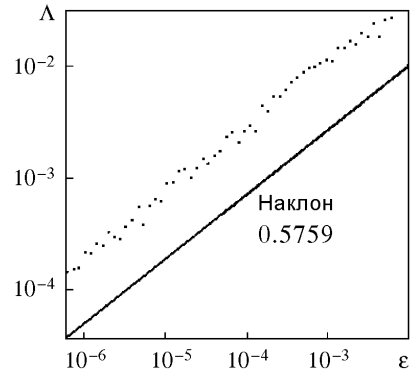


Рис. 7. Показатель Ляпунова в зависимости от интенсивности шума в критической точке GM в двойном логарифмическом масштабе. Прямая линия отвечает соотношению (25)

Стоит отметить своего рода шумовую стабилизацию динамики в точке GM. Действительно, шум содействует уменьшению ляпуновского показателя, то есть уменьшению чувствительности по отношению к начальным условиям, и задерживает появление хаоса. Об этом явлении было упомянуто также в работах [35, 42]. Эффект оказывается противоположным наблюдаемому в ситуации перехода к хаосу через удвоения периода [52].

3.3. Особенности скейлинга в присутствии шума в окрестности критической точки. Обратимся теперь к исследованию особенностей скейлинга при отстройке управляющих параметров отображения от критической точки.

В качестве первого шага рассмотрим изменение одного параметра r при постоянном $K = 1$, тем самым подразумевая, что отображение сохраняет кубическую точку перегиба. В возмущенном универсальном операторе эволюции (22) сдвиг параметра r приводит к моде с собственным значением $\delta_1 = -2.83361\dots$, которое будет присутствовать в скейлинговых отношениях.

Рис. 8 иллюстрирует соответствующее свойство скейлинга динамики без шума. Изображенный объект известен как «чертова лестница» [53, 54]. Ступеньки расположены при каждом рациональном значении числа вращения и соответствуют пересечению языков Арнольда, связанных с периодической динамикой. Рост функции $\rho(r, K)$ имеет место на фрактальном множестве, соответствующем иррациональным числам вращения, то есть квазипериодическим движениям. При $K = 1$ это множество имеет нулевую меру на оси r («полная чертова лестница» [53, 54]). Число вращения, равное золотому среднему, имеет место только при значении параметра r_c , связанным с исследуемой критической точкой. Фрагменты по обе стороны от главной диаграммы показывают детали структуры лестницы около точки GM. Свойство самоподобия состоит в том, что структура воспроизводит себя в малых масштабах при увеличении на фактор δ_1 по горизонтальной оси и на фактор $(-W^2)$ по вертикальной оси.

В присутствии шума число вращения может быть определено через формулу (2) так же, как и в отсутствие шума. В системе под действием шума, однако, мы не можем говорить о периодичности или квазипериодичности в обычном смысле. Тем не менее, некоторая грубая классификация все же возможна.

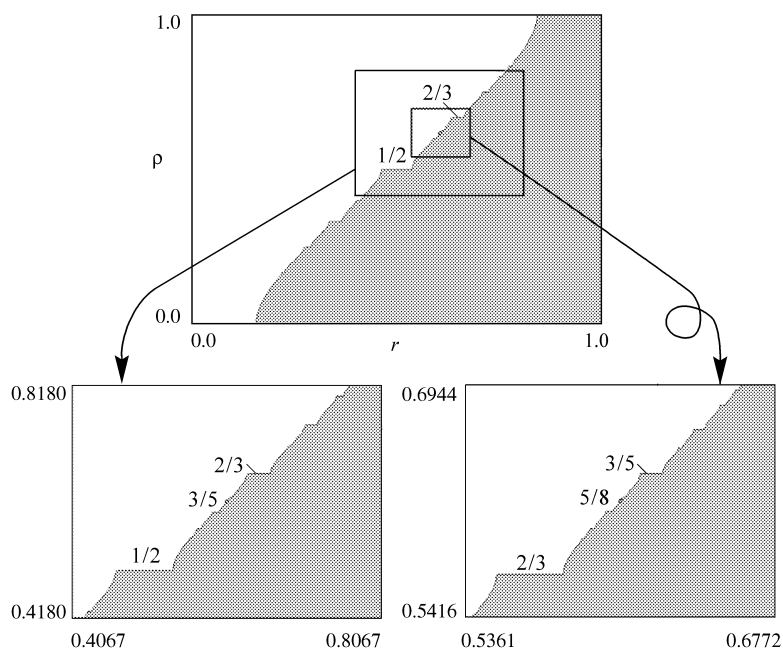


Рис. 8. Иллюстрация локального свойства скейлинга вблизи критической точки золотое среднее в отсутствие шума: график зависимости числа вращения ρ от параметра r («чертова лестница»). Свойство самоподобия состоит в повторяемости структуры на малых масштабах при увеличении на фактор $\delta_1 = -2.8336$ по горизонтальной оси и на фактор $(-W^2) = -2.6180\dots$ по вертикальной оси

При некоторых значениях параметра r можно наблюдать относительно большие временные интервалы, динамика на которых близка к периодической, причем они чередуются с вызванными шумом участками «проскальзывания фазы», на которых переменная x претерпевает относительно быстрый сдвиг ± 1 . Можно сказать, что эти режимы представляют модифицированную присутствием шума версию периодичности. При других значениях параметра переменная x эволюционирует без каких-либо заметных плато во временной зависимости, со статистически хорошо определенным трендом. Это соответствует шумовой версии квазипериодичности.

График зависимости числа вращения от параметра r демонстрирует последовательное сглаживание сначала тонких, а затем крупномасштабных деталей фрактальной структуры чертовой лестницы. Это явление удовлетворяет свойству скейлинга, вытекающему из РГ-анализа влияния шума, и проиллюстрировано на рис. 9. Главная диаграмма и первый увеличенный фрагмент отвечают параметру шума $\varepsilon = 0.1$. Вторая и третья картинки приводятся, соответственно, для интенсивностей шума $\varepsilon = 0.1/\gamma$ и $0.1/\gamma^2$. Хорошо видно подобие структур во всех трех увеличенных фрагментах.

Рис. 10 показывает набор ляпуновских карт на плоскости параметров (r, ε) при фиксированном $K = 1$. Темные серые области соответствуют большим отрицательным значениям ляпуновского показателя. Эти области «шумовой периодичности» – языки Арнольда, которые постепенно стираются с увеличением шума. Светло-серые

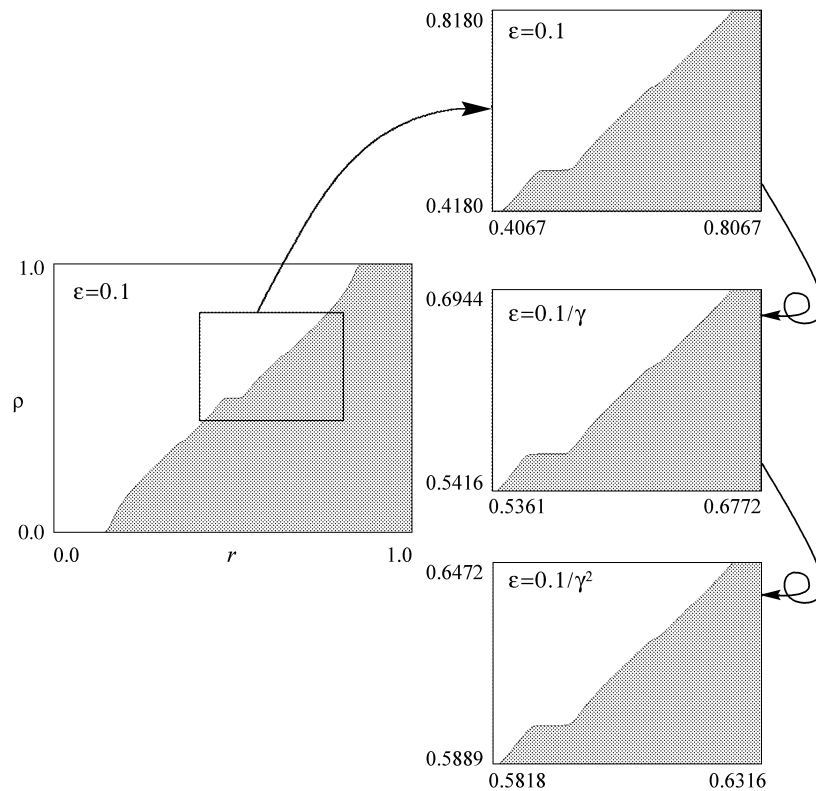


Рис. 9. Иллюстрация скейлинга в присутствии шума на примере структуры «чертовой лестницы» около критической точки золотое среднее. Главная диаграмма и первый увеличенный фрагмент соответствуют уровню шума $\varepsilon = 0.1$. Последующие фрагменты в порядке, обозначенным стрелками, построены для интенсивностей шума $\varepsilon = 0.1/\gamma$ и $\varepsilon = 0.1/\gamma^2$, соответственно

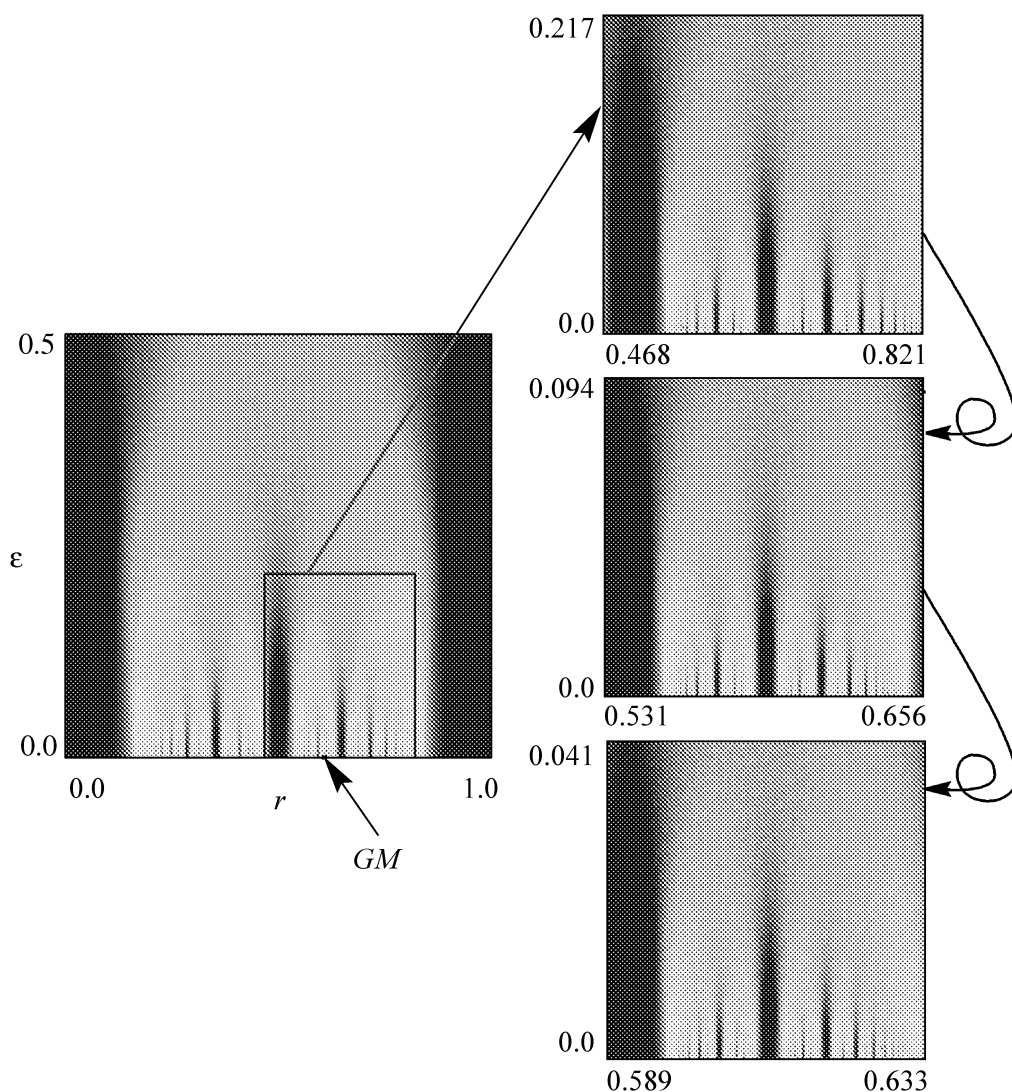


Рис. 10. Ляпуновские карты на плоскости параметра r и амплитуды шума ε , демонстрирующие скейлинг в окрестности критической точки GM при фиксированном критическом значении параметра $K = 1$. Горизонтальные и вертикальные масштабы в последовательности диаграмм, порядок которых обозначен стрелками, меняются соответственно на факторы $\delta_1 = -2.8336$ и $\gamma = 2.30618$. Одновременно на каждом новом уровне увеличения переопределяется кодирование серой гаммы цветов, чтобы делать подобие ясно видимым

области соответствуют маленьким отрицательным значениям показателя Ляпунова. Это области «шумовой квазипериодичности».

В заключение рассмотрим случай, когда варьируются два управляющих параметра r и K . Исследуем скейлинговые свойства структуры языков Арнольда в случае отсутствия и наличия шума. На рис. 11 большая диаграмма и первый увеличенный фрагмент карты Ляпунова для части плоскости параметров представлены для амплитуды шума $\varepsilon = 0$. Параллелограмм на главной диаграмме образован координатными линиями скейлинговых координат (24); критическая точка GM расположена точно

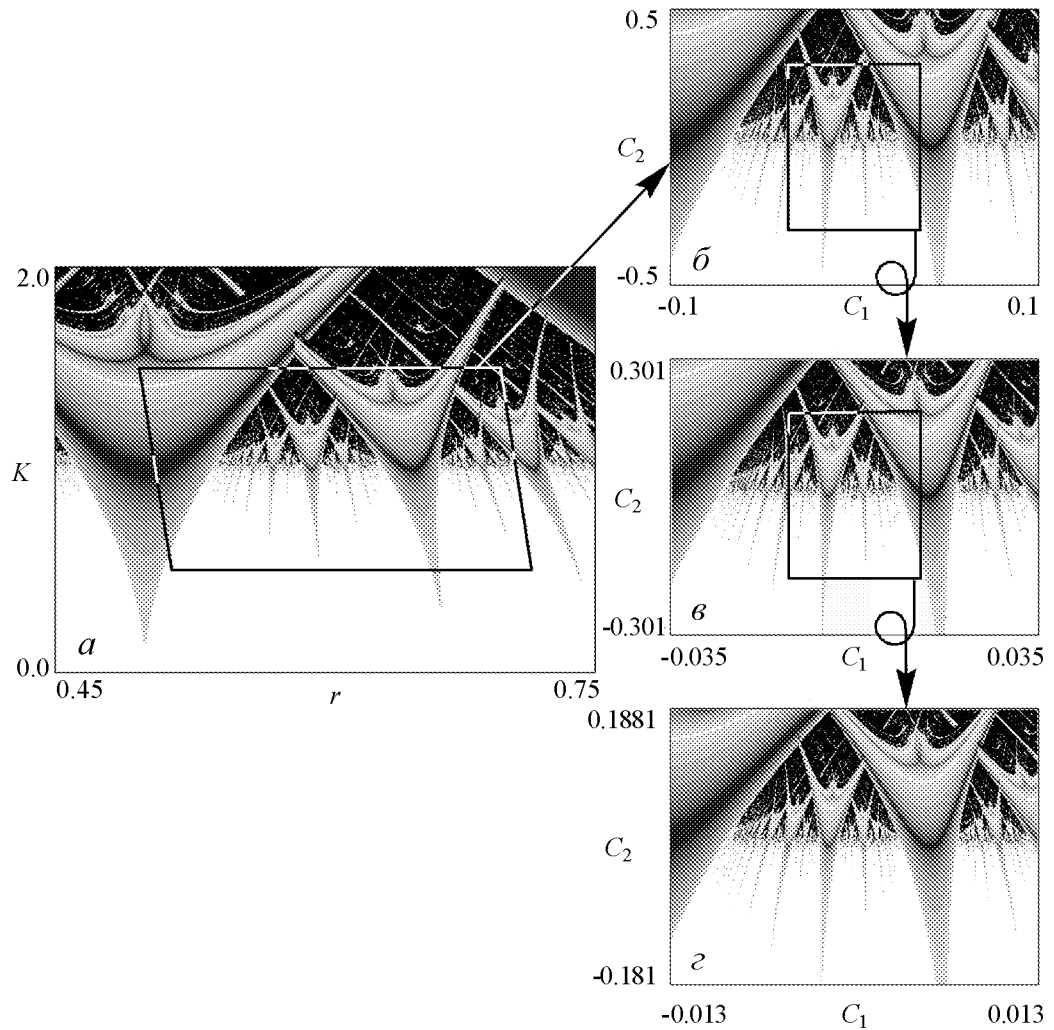


Рис. 11. Иллюстрация свойства скейлинга на ляпуновских картах в окрестности критической точки золотое среднее GM в отсутствие шума. Правило кодирования цветов то же, что и на рис. 1. Главная диаграмма a нарисована в координатах (r, K) . Внутренняя часть выделенного параллелограмма показана отдельно b в скейлинговых координатах (C_1, C_2) . На фрагментах b и c горизонтальный и вертикальный масштабы последовательно изменены на факторы $\delta_1 = -2.8336\dots$ и $\delta_2 = 1.66042\dots$, соответственно. Кодирование цветов переопределено на каждом новом уровне увеличения

в середине параллелограмма. Его внутренняя часть показана в первом увеличенном фрагменте в скейлинговых координатах. Следующие фрагменты представляют собой все меньшие и меньшие окрестности критической точки при последующем пересчете масштаба. Аналогичная процедура проделана в присутствии шума, начальная интенсивность которого задана параметром $\varepsilon = 0.03$ (рис.12). В этом случае для наблюдения самоподобия необходимо не только пересчитывать масштабы по осям r и K , но и уменьшать интенсивность шума на фактор γ . Легко видеть замечательное сходство картинок, полученных на нескольких шагах пересчета масштабов.

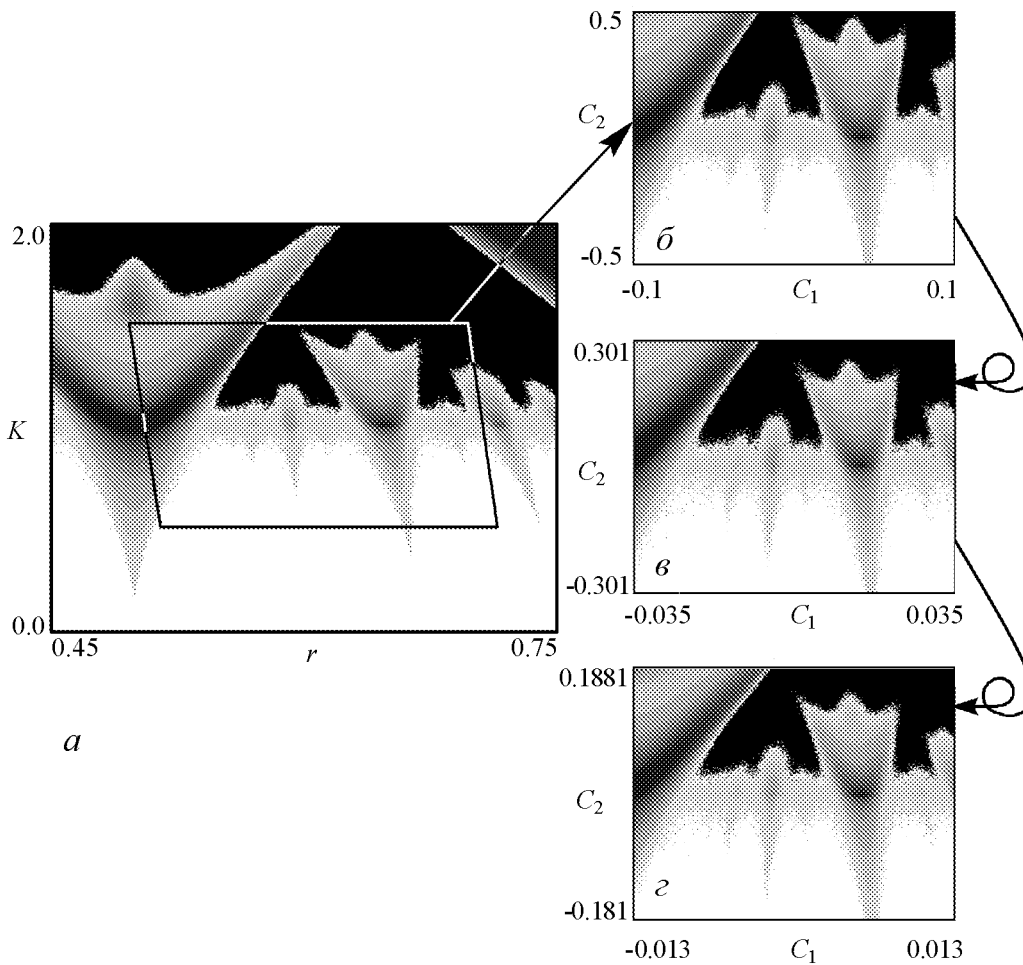


Рис. 12. Ляпуновские карты с шумом, демонстрирующие скейлинг в окрестности критической точки типа GM. Главная диаграмма a , нарисованная в координатах (r, K) , соответствует уровню шума $\varepsilon = 0.03$. Внутренняя часть выделенного параллелограмма показана отдельно b в скейлинговых координатах (C_1, C_2) . На фрагментах b и z , помимо изменения горизонтального и вертикального масштаба, уменьшен уровень шума на фактор $\gamma = 2.30618$ и $\gamma^2 = 5.31849$, соответственно

Заключение

В работе рассмотрены закономерности скейлинга, связанные с влиянием аддитивного шума на динамику модельной системы, описываемой отображением окружности в окрестности критической точки перехода к хаосу через квазипериодическое движение с числом вращения, равным золотому среднему. На основании ренормгруппового подхода сформулирован ряд скейлинговых соотношений, выполнение которых продемонстрировано в численных экспериментах. В частности, мы обращаем внимание на размывание тонкой структуры критической орбиты из-за присутствия шума, самоподобной структуры «чертовой лестницы», расположение «шумовых языков Арнольда» – областей динамики, близкой к периодической, на ляпуновских картах на плоскости параметров около критической точки GM.

Ожидается, что обнаруженные закономерности останутся в силе не только для отображения окружности, но и для всего класса универсальности, который это отображение представляет. Основанием для этого утверждения служат результаты нормгруппового анализа. В частности, указанные особенности будут свойственны автогенераторам и ротаторам под внешним периодическим воздействием, переходам Джозефсона в микроволновой области, конвекции жидкости под внешним воздействием и т.д. Как ожидается, полученные результаты будут полезны для экспериментальных исследований, имеющих своей целью наблюдение и исследование сложного поведения на пороге хаоса в классе систем различной физической природы, демонстрирующих переход к хаосу через квазипериодические движения.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант №03-02-16074), совместного российско-германского гранта РФФИ - ННАО (№04-02-04011), Научно-образовательного центра нелинейной динамики и биофизики при Саратовском государственном университете (грант REC-006) и ФЦНТП (шифр работы № 2005-РИ-19.0/002/304).

Библиографический список

1. *Hamm A., Graham R.* Scaling for small random perturbations of golden critical circle maps // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 46, № 10. P. 6323–6333.
2. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
3. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Курс лекций. М.: Физматлит, 2001.
4. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
5. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.Л.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.
6. *Glass L., Sun J.* Periodic forcing of a limit cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 50. P. 5077–5084.
7. *Anishchenko V.S.* Dynamical Chaos – Models and Experiments. Appearance, Routes and Structure of Chaos in Simple Dynamical Systems // World Scientific, Singapore, 1995.
8. *Bak P., Bohr T., Jensen M.H., Christiansen P.V.* Josephson junctions and circle maps // *Solid State Communications.* 1984. Vol. 51, № 4. P. 231–234.
9. *Bohr T., Bak P., Jensen M.H.* Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. II. Josephson junctions, charge-density waves, and standard maps // *Phys. Rev. A.* 1984. Vol. 30, № 4. P. 1970–1981.
10. *Alstrøm P., Christiansen B., Hyldgaard P., Levinsen M.T., Rasmussen R.* Scaling relations at the critical line and the period-doubling route for the sine map and the driven damped pendulum // *Phys. Rev. A.* 1986. Vol. 34, № 3. P. 2220–2233.
11. *Arnold V.I.* Cardiac arrhythmias and circle mappings // *Chaos.* 1991. Vol. 1, № 1. P. 20–24.
12. *Glass L., Guevara M.R., Shrier A., Perez R.* Bifurcation and chaos in a periodically stimulated cardiac oscillator // *Physica D.* 1983. Vol. 7. P. 89–101.

13. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: A renormalization group analysis // *Physica D*. 1982. Vol. 5. P. 370–386.
14. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E.D.* Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems // *Physica D*. 1983. Vol. 8. P. 303–342.
15. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. Vol. 19, № 1. P. 25–52.
16. *Feigenbaum M.J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1979. Vol. 21, № 6. P. 669–706.
17. *Feigenbaum M.J.* Universal behavior in nonlinear systems // *Physica D*. 1983. Vol. 7, № 1-3. P. 16–39.
18. *Greene J.M., MacKay R.S., Vivaldi F., Feigenbaum M.J.* Universal behaviour in families of area-preserving maps // *Physica D*. 1981. Vol. 3, № 3. P. 468–486.
19. *Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // *УМН*. 1984. Т. 39, № 3. С. 3–37.
20. *Mao J.-M., Greene J.M.* Renormalization of period-doubling in symmetric four-dimensional volume-preserving maps//*Phys. Rev. A*. 1987. Vol. 35, № 9. P. 3911–3917.
21. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica D*. 1997. Vol. 109. P. 91–112.
22. *Hu B., Rudnik J.* Exact solution of the Feigenbaum renormalization group equations for intermittency // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 48, № 24. P. 1645–1648.
23. *Hirsch J.E., Nauenberg M., Scalapino D.J.* Intermittency in the presence of noise: A renormalization group formulation // *Phys. Lett. A*. 1982. Vol. 87. P. 391.
24. *MacKay R.S.* A renormalization approach to invariant circles in area-preserving maps // *Physica D*. 1983. Vol. 7, № 1–3. P. 283–300.
25. *Wilbrink J.* New fixed point of the renormalisation operator associated with the recurrence of invariant circles in generic Hamiltonian maps // *Nonlinearity*. 1990. Vol. 3. P. 567–584.
26. *Гольберг А.И., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальные свойства для последовательностей бифуркаций утроения периода // *УМН*. 1983. Т. 38, № 1. С. 159–160.
27. *Cvitanovic P., Myrheim J.* Universality for period n-tuplings in complex mappings // *Phys. Lett. A*. 1983. Vol. 94. P. 329.
28. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P.* On scaling properties of two-dimensional maps near the accumulation point of the period-tripling cascade // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2000. Vol. 5, № 4. P. 459–476.
29. *Кузнецов С.П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // *Известия вузов. Радиофизика*. 1985. Т. 28, № 8. С. 991–1007.
30. *Kook H., Ling F.H., Schmidt G.* Universal behavior of coupled nonlinear systems // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 43, № 6. P. 2700–2708.
31. *Kim S.-Y.* Universality of period doubling in coupled maps // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49. P. 1745–1748.
32. *Stavans J., Heslot F., Libchaber A.* Fixed winding number and the quasiperiodic route to chaos in a convective fluid//*Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55, № 6. P. 596–599.

33. *Jensen M. H., Kadanoff L. P., Libchaber A., Procaccia I., Stavans J.* Global universality at the onset of chaos: Results of a forced Rayleigh – Benard experiment // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55, № 25. P. 2798–2801.
34. *Su Z., Rollins R.W., Hunt E.R.* Measurements of $f(\alpha)$ spectra of attractors at transitions to chaos in driven diode resonator systems // *Phys. Rev. A.* 1987. Vol. 36, № 7. P. 3515–3517.
35. *Kajanto M.J., Salomaa M.M.* Effects of external noise on the circle map and the transition to chaos in Josephson junctions // *Solid State Communications.* 1985. Vol. 53, № 1. P. 99–106.
36. *Crutchfield J.P., Nauenberg M., Rudnik J.* Scaling for external noise at the onset of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 46, № 14. P. 933–935.
37. *Shraiman B., Wayne C.E., Martin P.C.* Scaling theory for noisy period-doubling transitions to chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 46, № 14. P. 935–939.
38. *Györgyi G., Tishby N.* Scaling in stochastic Hamiltonian systems: A renormalization approach // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 58, № 6. P. 527–530.
39. *Kapustina J.V., Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E.* Scaling properties of bicritical dynamics in unidirectionally coupled period-doubling systems in presence of noise // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. 066207 (12 pages).
40. *Györgyi G., Tishby N.* Path integrals in Hamiltonian systems: breakup of the last Kolmogorov-Arnold-Moser torus due to random forces // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62. № 4. P. 353–356.
41. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Osbaldestin A.H.* Effect of noise on the dynamics of a complex map at the period-tripling accumulation point // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 69, 036216 (6 pages).
42. *Markosova M., Markos P.* Numerical studies of the noisy sine circle map // *Phys. Lett. A.* 1989. Vol. 136, № 7, 8. P. 369–373.
43. *Dixon T.W., Gherghetta T., Kenny B.G.* Universality in the quasiperiodic route to chaos // *Chaos.* 1996. Vol. 6, № 1. P. 32–42.
44. *De la Llave R., Petrov N.P.* Regularity of conjugacies between critical circle maps: An experimental study // *Experimental Mathematics.* 2002. Vol. 11. P. 219–242.
45. *Rössler J., Kiwi M., Hess B., Marcus M.* Modulated nonlinear processes and a novel mechanism to induce chaos // *Phys. Rev. A.* 1989. Vol. 39, № 11. P. 5954–5960.
46. *Marcus M., Hess B.* Lyapunov exponents of the logistic map with periodic forcing // *Computers and Graphics.* 1989. Vol. 13, № 4. P. 553–558.
47. *Bastos de Figueireido J.C., Malta C.P.* Lyapunov graph for two-parameter map: Application to the circle map // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1998. Vol. 8, № 2. P. 281–293.
48. *Kuznetsov A.P., Savin A.V.* About the typical structures and chaos border in the parameter plane of non-autonomous discrete maps with period-doubling // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* 2002. Vol. 5, № 3. P. 296–301.
49. *Fiel D.* Scaling for period-doubling sequences with correlated noise // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1987. Vol. 20. P. 3209–3217.
50. *Choi S.-Y., Lee E.K.* Scaling behavior at the onset of chaos in the logistic map driven by colored noise // *Phys. Lett. A.* 1995. Vol. 205. P. 173–178.

51. *Ivankov N.Yu., Kuznetsov S.P.* Complex periodic orbits, renormalization, and scaling for quasiperiodic golden-mean transition to chaos // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. 046210 (10 pages).
52. *Crutchfield J.P., Farmer J.D., Huberman B.A.* Fluctuations and simple chaotic dynamics // *Phys. Rep.* 1982. Vol. 92, № 2. P. 45–82.
53. *Jensen M.H., Bak P., Bohr T.* Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. I. Circle maps // *Phys. Rev. A.* 1984. Vol. 30, № 4. P. 1960–1969.
54. *Alstrøm P., Levinsen M.T., Rasmussen D.R.* Scaling exponents, relations, and order dependence for circle maps // *Physica D.* 1987. Vol. 26. P. 336–346.

*Саратовский филиал Института
радиотехники и электроники РАН
Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 18.04.2005
После доработки 15.06.2005*

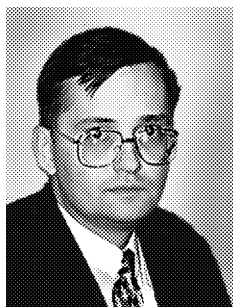
ABOUT SCALING PROPERTIES IN THE NOISY CIRCLE MAP AT THE GOLDEN-MEAN WINDING NUMBER

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, J.V. Sedova

Scaling regularities are examined associated with effect of additive noise upon a critical circle map at the golden-mean winding number. On a basis of the RG approach of Hamm and Graham [1] we present an improved numerical estimate for the scaling constant responsible for the effect of noise, $\gamma = 2.3061852653\dots$. Decrease of the noise amplitude by this number ensures possibility of observation for one more level of fractal-like structure associated with increase of characteristic time scale by factor $(\sqrt{5} + 1)/2$. Numeric results demonstrating evidence of the expected scaling are presented, e.g. portraits of the noisy attractors, devil's staircase plots, and Lyapunov charts.



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П.Кузнецова защищены шесть кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994-1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член-корреспондент РАЕН. Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лица прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики». E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.tserv.ru



Седова Юлия Викторовна – родилась в 1979 году. Окончила Саратовский государственный университет (2001). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2004), старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Научные интересы – влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Автор 7 статей в отечественной и зарубежной печати.



КЛАССИФИКАЦИЯ НЕЙРОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЕЙСТВИЯ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Д.В. Думский, А.Н. Павлов, А.Н. Тупицын, В.А. Макаров

В работе проводится сопоставление методов классификации нейронных потенциалов действия – классического метода анализа главных компонент и алгоритмов, основанных на вейвлет-преобразовании. Показано, что существует, по крайней мере, два случая, когда алгоритмы классификации на основе вейвлет-преобразования являются предпочтительнее. Это наличие мелкомасштабной структуры в формах спайков или наличие медленного шума высокой интенсивности. Установлено, что качество сортировки спайков может быть улучшено за счет предварительной фильтрации сигналов. Обсуждается проблема выбора оптимальных вейвлет-коэффициентов для решения задачи классификации. Предлагается новый метод, сочетающий алгоритм анализа главных компонент с техникой вейвлет-преобразования. Идея метода состоит в определении характерных волновых форм спайков и в использовании для классификации тех вейвлет-коэффициентов, которые обеспечивают максимальные различия между выделенными волновыми формами. Предложенный подход позволяет уменьшить ошибку классификации спайков.

Введение

Экспериментальное исследование динамики малых нейронных ансамблей (от нескольких единиц до нескольких сотен нейронов) и процессов кодирования информации отдельными клетками либо группами клеток сопровождается решением задачи классификации нейронных потенциалов действия или сортировки спайков. Известно, что большинство нейронов мозга обменивается информацией путем возбуждения потенциалов действия (спайков), которые представляют собой короткие всплески напряжения и могут быть зарегистрированы экспериментально с помощью микроэлектрода, погруженного в нейронную ткань (рис. 1). Однако при осуществлении внеклеточной записи электрического потенциала микроэлектрод будет регистрировать сигнал, исходящий не только от одной клетки, вблизи которой он находится, но и от соседних нейронов, расположенных в некоторой локальной области. В результате регистрируемый потенциал представляет собой суммарную электрическую активность некоторого нейронного ансамбля. Для того чтобы проводить исследование генерируемого нейронами информационного кода на основе экспериментальных

данных, необходимо вначале отсортировать спайки, установив, с какой клеткой ассоциируется тот или иной потенциал действия [1].

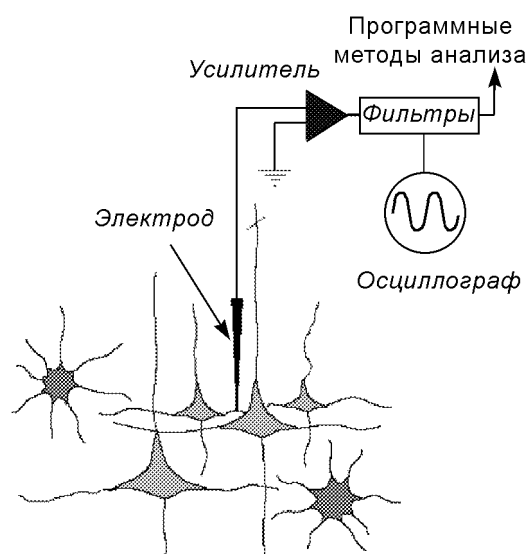


Рис. 1. Схематическое представление установки для измерения и анализа внеклеточных нейронных сигналов

При решении задачи классификации спайков принято считать, что каждый нейрон генерирует спайки одной и той же формы и амплитуды (высоты), причем форма потенциала действия у разных клеток имеет некоторые различия, обусловленные морфологией нейронов и местом регистрации (вблизи аксона, сомы, дендритов и т.д.), а амплитуда зависит также от расстояния между нейроном и микроэлектродом. Поэтому теоретически задача классификации состоит в том, чтобы из экспериментальных данных выделить несколько последовательностей идентичных (близких по форме) спайков, каждая из которых предположительно генерируется каким-то одним нейроном. В идеале в пространстве характеристик, описывающих форму спайков, должно получиться несколько кластеров, каждый из которых соответствует спайковой активности какого-то одного нейрона. Если удастся различить некоторое количество кластеров и отделить их друг от друга, то задача сортировки может считаться успешно решенной. На практике эта задача является технически очень сложной. Во-первых, амплитуда спайков одной и той же клетки может варьироваться. Известно, в частности, что в режиме «берстинга» в течение короткого промежутка времени одной клеткой генерируется серия электрических импульсов, амплитуда которых уменьшается от первого импульса к последнему. Во-вторых, клетки, расположенные в отдалении от микроэлектрода, создают значительный фоновый шум, который суммируется с потенциалами действия нейронов, находящихся вблизи микроэлектрода, и приводит к различным искажениям формы спайков. Спектр такого шума существенно перекрывается со спектром спайков, что затрудняет фильтрацию. Данные факторы обуславливают появление неизбежных ошибок классификации, уменьшить которые удастся, например, путем проведения экспериментов с использованием тетродов (электродов с несколькими, обычно четырьмя, независимыми точками регистрации), когда спайки одного и того же нейрона регистрируются несколькими каналами. Согласно проведенным оценкам [2], при высоком уровне фонового шума экспериментатор может допускать до 50% ошибок сортировки в случае одноканальной регистрации электрической активности и до 10–30% при одновременном использовании нескольких каналов.

Задача сортировки спайков может решаться путем визуального сопоставления разных форм потенциалов действия и разделения сигналов по группам вручную. Такой подход следует признать неэффективным, поскольку типичная экспериментальная запись содержит несколько сотен (или тысяч) спайков и это делает визуальную

классификацию чрезвычайно трудоемкой процедурой. Из-за большого объема данных, которые нужно изучить и рассортировать, человек, решающий данную задачу визуально, будет вынужден принимать противоречивые решения о принадлежности конкретного спайка той или иной группе путем довольно беглого просмотра форм потенциалов действия, что увеличивает число неправильно классифицированных спайков, то есть ошибку сортировки [2]. В силу этих обстоятельств возникает необходимость автоматизации процесса разделения спайков по группам.

Проблеме автоматической классификации нейронных потенциалов действия посвящено очень много работ [1, 3–10]. К числу простых методов сортировки спайков относится пороговая (или амплитудная) сортировка и различные геометрические методы. Однако сортировать спайки по амплитуде удастся лишь при условии, что микроэлектрод расположен очень близко к какому-то одному нейрону (см. рис. 1) – амплитуда сигналов, генерируемых этим нейроном, будет значительно больше, чем у других клеток, и в этом случае можно надежно отделить по крайней мере эту группу спайков. Если амплитуды потенциалов, наведенных в точке регистрации различными нейронами, являются сопоставимыми, то пороговое детектирование не позволит обеспечить качественную классификацию (это относится и к многоканальной регистрации электрической активности с помощью тетродов). Среди обширного арсенала классических методов сортировки спайков, вероятно, наибольшую популярность приобрел анализ главных компонент (АГК)¹. Данный подход предусматривает решение задачи нахождения собственных векторов ковариационной матрицы, сконструированной из всех спайков, которые удастся зарегистрировать в эксперименте. Каждый спайк представляется в виде суммы собственных векторов с некоторыми масштабными коэффициентами; последние используются в качестве характеристик для классификации.

В последние годы для решения данной задачи стали применять вейвлет-анализ, как правило, в его дискретном варианте. В международных биологических и физических журналах был опубликован ряд работ [9–11], в которых показывалось, что использование коэффициентов вейвлет-преобразования в качестве характеристик для классификации спайков может быть эффективнее стандартных методик. Однако здесь не все так просто: если проводить классификацию спайков на основе вейвлет-преобразования, то выясняется, что найти ситуацию, в которой вейвлеты работают заметно лучше классических методов, удастся далеко не всегда. Часто можно встретить примеры, в которых методы классификации, базирующиеся на вейвлет-преобразовании, оказываются хуже, а это довольно неожиданно, так как вейвлет-анализ является, несомненно, более мощным инструментом, чем классический подход, основанный на АГК. В известных на сегодняшний день работах [9–11] приводятся частные случаи успешного решения задачи сортировки для некоторых конкретных форм спайков и отсутствует анализ, объясняющий эти результаты, а также не обсуждаются случаи, в которых применение дискретного вейвлет-преобразования не обеспечивает лучшей классификации нейронных потенциалов действия в сравнении с более простыми методиками. Иными словами, преимущества и недостатки новых подходов [9–11] пока еще детально не изучены, и отсутствуют рекомендации, показывающие, в каких ситуациях их применение является предпочтительным.

¹В международной литературе используется сокращение PCA (Principal Component Analysis [5]).

Цель исследования, представляемого в данной работе, состоит в том, чтобы *сформулировать условия, при которых применение вейвлет-анализа позволяет решить задачу классификации нейронных потенциалов действия эффективнее, чем стандартными методами.* В работе проводится сравнительный анализ методов классификации, предлагается новый подход к решению задачи сортировки спайков и даются практические рекомендации по предварительной обработке экспериментальных данных, позволяющие уменьшить ошибки автоматической классификации.

1. Основные недостатки метода пороговой сортировки

Общий подход к выбору методов сортировки спайков состоит в том, что эффективность любого специального метода должна прежде всего быть сравнена со стандартными алгоритмами: новые методы применяются только при условии, что классические алгоритмы в определенных случаях не позволяют обеспечить качественную классификацию нейронных потенциалов действия. На практике сопоставление обычно проводится с двумя упомянутыми во введении стандартными алгоритмами – методом пороговой сортировки и методом АГК. Поэтому, прежде чем переходить к рассмотрению задачи классификации нейронных потенциалов действия на базе вейвлет-преобразования, необходимо выяснить, в каких случаях классические методы сортировки работают неэффективно.

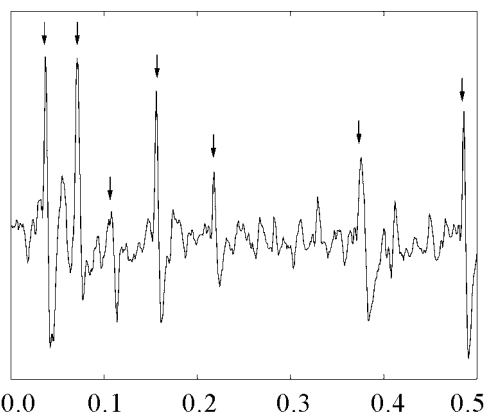


Рис. 2. Характерный пример динамики внеклеточного потенциала. Здесь несложно выделить (показаны стрелками) несколько разных по форме и амплитуде потенциалов действия

классифицировать динамику нейронов в его присутствии? В-третьих, потенциалы действия разных клеток могут накладываться друг на друга; как классифицировать перекрывающиеся спайки?

Амплитуда или высота спайка является одной из самых важных его характеристик. Поэтому наиболее простым методом решения задачи классификации спайков является разделение их по амплитудам (пороговое детектирование). Изначально вводится предположение о том, что каждый нейрон генерирует потенциал строго определенной формы, которая не претерпевает значительных изменений во времени (хотя такое предположение не всегда справедливо, в большинстве практических ситуаций

Многие из основных проблем сортировки спайков проиллюстрированы на рис. 2, где изображена типичная экспериментальная запись внеклеточного потенциала. На этом рисунке можно увидеть несколько различных по амплитуде и форме потенциалов действия. Сразу возникает ряд вопросов, определяющих основные проблемы в решении задачи классификации спайков. Во-первых, соответствуют ли наблюдаемые спайки различным нейронам? Если да, то сколько, и как установить соответствие между ними? Во-вторых, сигнал содержит значительный уровень фонового шума и непонятно, насколько надежно можно

оно вполне корректно). Если в эксперименте микроэлектрод расположен очень близко к одному из нейронов, то потенциалы действия, генерируемые данной клеткой, будут существенно превосходить сигналы от удаленных нейронов. В этом случае можно провести идентификацию, по крайней мере, одного типа спайков с помощью порогового триггера. Фактически, экспериментатор должен поместить электрод таким образом, чтобы потенциалы действия интересующего нейрона были максимально отделены от фоновой активности и от остальных спайков (в этом случае говорят об «изоляции» нейрона). Устанавливая специально подобранные пороговые уровни, можно получить разделение спайков различной высоты. Преимущества метода пороговой сортировки состоят в том, что этот способ требует минимального оборудования и программного обеспечения, может проводиться в реальном времени, и в ряде случаев дает достаточно точную информацию, необходимую экспериментатору. Очевидным недостатком такого подхода является то, что далеко не всегда удается достичь приемлемой изоляции исследуемых нейронов от соседних, генерирующих близкие по амплитуде спайки.

Качество сортировки спайков (или изоляции нейронов) можно проконтролировать, наблюдая наложенные друг на друга формы потенциалов действия. На рис. 3 приведены примеры хорошо изолированного и плохо изолированного нейронов. В случае хорошей изоляции фоновые спайки не исчезают окончательно, но и не оказывают существенного влияния на качество идентификации сигналов рассматриваемого нейрона. В случае плохой изоляции установкой определенного порога не удастся отделить друг от друга несколько различных по форме, но близких по амплитуде спайков. Одним из методов проверки качества изоляции для потенциалов, регистрируемых в течение продолжительного периода времени, является построение гистограммы межспайковых интервалов. Если рассматриваемая последовательность потенциалов действия принадлежит одному нейрону, то не должно быть интервалов меньше периода рефрактерности, который для большинства клеток составляет не менее 1–2 мс.

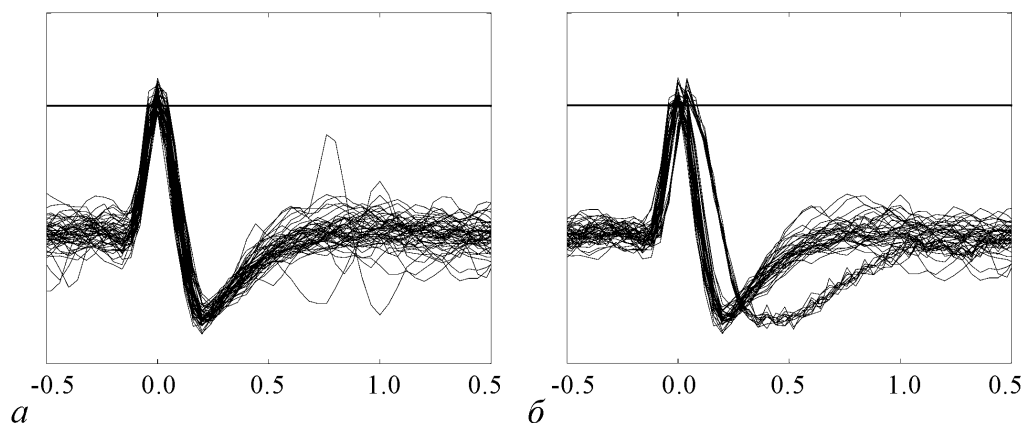


Рис. 3. Пороговая сортировка. *a* – Волновые формы хорошо изолированного нейрона. Построены все профили спайков, напряжение которых превысило установленный порог, обозначенный горизонтальной линией. *б* – Волновые формы плохо изолированного нейрона. Спайки двух близких по амплитуде, но разных по форме волновых форм классифицируются как принадлежащие одному нейрону

Очень часто с помощью техники амплитудного детектирования невозможно отделить с достаточной точностью спайки анализируемого нейрона от фонового шума. Изменением порогового уровня можно регулировать количество пропущенных

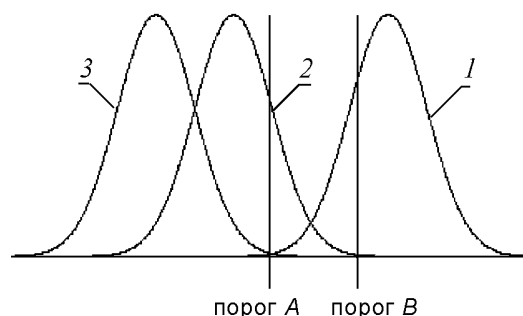


Рис. 4. Распределения амплитуд фоновой активности и пиковые амплитуды спайков двух нейронов. Значения амплитуд отложены вдоль горизонтальной оси

спайков (так называемые отрицательные ошибки классификации) и число фоновых событий, либо спайков, исходящих от других нейронов, которые пересекают порог (положительные ошибки), что проиллюстрировано на рис. 4. Если порог установлен на уровне *A*, определяются все спайки от первого нейрона, но возникает большое число положительных ошибок из-за того, что спайки второго нейрона также пересекают порог и, следовательно, регистрируются как принадлежащие первому нейрону. Если порог увеличить до уровня *B*, выделится лишь часть спайков первого нейрона, а довольно большое их число останется ниже порога. В идеальном случае порог должен быть выбран таким образом, чтобы отношение положительных и отрицательных ошибок было оптимальным. Если уровень фонового шума мал по сравнению с амплитудой нейронных потенциалов действия, и распределение амплитуд позволяет говорить о хорошем разделении групп спайков, то обе эти ошибки будут близки к нулю, и точное положение порога не имеет принципиального значения.

Кроме фонового шума, который в первом приближении можно считать распределенным по пуассоновскому закону, высота спайка может значительно изменяться, если поблизости находятся другие нейроны, генерирующие значительные по величине потенциалы действия. Иногда происходит наложение двух разных спайков друг на друга, и такие импульсы будут пропущены. Насколько часто будет происходить наложение, зависит от частоты возбуждения («зажигания») нейронов.

Для более полного описания особенностей формы спайка можно измерять не только амплитуду, но и некоторые другие характеристики, например, ширину (длительность) спайка или локальные максимумы и минимумы потенциала действия. Такой подход использовался в самых ранних методах сортировки спайков. Общим для этих методов был выбор очень ограниченного набора характеристик, которые в общем случае не могут обеспечить качественную классификацию [13–15]. Как правило, чем больше характеристик используется для описания различий волновых форм спайков, тем лучше способность метода к разделению спайков по группам. Простые подходы (амплитудное детектирование и геометрические методы) приводят к существенным ошибкам классификации, если в эксперименте не удастся обеспечить хорошую изоляцию нейронов. В последнем случае сортировка спайков должна проводиться с учетом индивидуальных особенностей форм потенциалов действия конкретных нейронов, сигналы которых регистрируются в эксперименте. Поэтому обратимся к тем методам классификации, которые проводят деление спайков на группы на основе анализа формы потенциалов действия.

2. Современные методы классификации и их сравнительный анализ

Наиболее эффективным подходом среди классических методов автоматической сортировки спайков является анализ главных компонент [5, 16, 17]. Идея метода АГК состоит в том, чтобы найти набор ортогональных векторов, которые характеризуют наиболее важные особенности формы спайков. С математической точки зрения задача сводится к поиску собственных векторов (так называемых главных компонент) ковариационной матрицы, построенной на основе экспериментальных данных, то есть всех волновых форм, отцентрированных по их максимумам или минимумам [1]. Пример экспериментальных сигналов продемонстрирован на рис. 5, *а*. Каждый спайк может быть полностью представлен в виде суммы главных компонент с соответствующими им весовыми или масштабными коэффициентами S_i , которые определяются следующим образом:

$$S_i = \sum_t c_i(t)x(t), \quad (1)$$

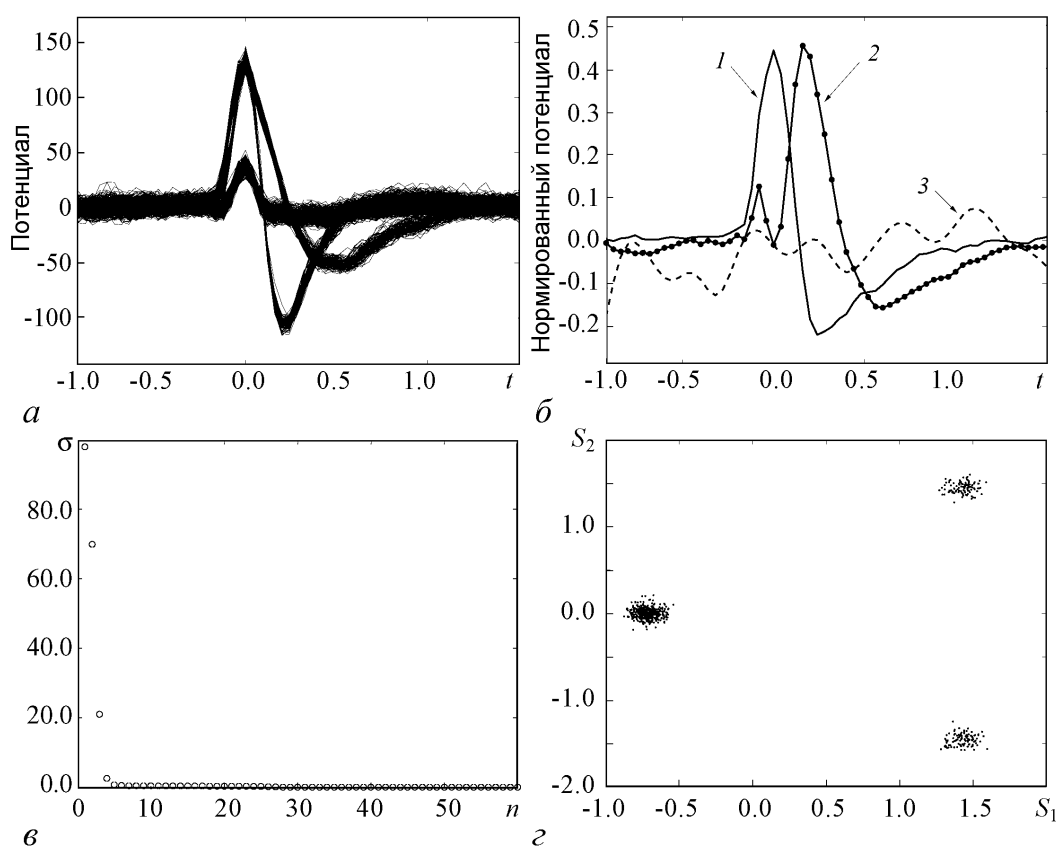


Рис. 5. Сортировка спайков с применением метода АГК. *а* – Пример экспериментальных данных с хорошо разделяемыми волновыми формами потенциалов действия. *б* – Первые три главных компоненты, соответствующие спайкам, показанным на рисунке (*а*). *в* – Стандартное отклонение масштабных коэффициентов в зависимости от номера главной компоненты. *г* – Пространство характеристик, в котором построены масштабные коэффициенты первых двух главных компонент

где $x(t)$ – потенциал действия, $c_i(t)$ – главная компонента с номером i . Масштабные коэффициенты S_i используются в качестве характеристик спайков при сортировке. Наиболее важную информацию содержат первые главные компоненты, которые характеризуют основные особенности формы спайков (и основные различия разных типов потенциалов действия). Первая компонента $c_1(t)$ имеет форму, похожую на спайк (рис. 5, б). Вторая компонента $c_2(t)$ также имеет сходную форму, но смещена относительно $c_1(t)$. Третья компонента $c_3(t)$ не имеет четкой интерпретации и является первым слагаемым суммы (1), учитывающим вклад фонового шума. Поэтому на практике рассматривают первые две или три компоненты, остальные, как правило, сильно зашумлены, и их использование ухудшает эффективность алгоритма.

На рис. 5, в показан график зависимости стандартного отклонения масштабных коэффициентов от номера собственного вектора. Первые три главных компоненты отвечают примерно за 76% изменений в форме потенциалов действия, а первые девять – за 90%. Причем только первые две компоненты имеют собственные значения, которые значительно выше фонового шума (около 30 мВ). Использование более высоких компонент дает лишь незначительное улучшение в точности классификации. Используя масштабные коэффициенты первых двух компонент, можно получить намного более четкое разделение спайков, чем на основе простых пороговых методов или при выборе характеристик потенциалов действия вручную (рис. 5, г).

В отличие от пороговой сортировки, недостатки метода главных компонент не столь очевидны, выяснить их можно только в ходе сравнительного анализа разных алгоритмов классификации. Недостатки метода АГК проявляются, когда речь идет о необходимости рассортировать несколько разных типов спайков, среди которых присутствуют как сильно различающиеся, так и достаточно похожие волновые формы. Масштабные коэффициенты двух первых главных компонент позволяют надежно классифицировать отличающиеся типы спайков, но различия между похожими волновыми формами могут в них не отразиться. Как следствие, не произойдет надежное разделение похожих по форме потенциалов действия разных нейронов и будут возникать положительные и отрицательные ошибки сортировки. Далее мы приведем примеры, иллюстрирующие более подробно эти проблемы классификации.

Относительно недавно был разработан новый подход к решению задачи сортировки спайков, основанный на вейвлет-преобразовании, и на ряде примеров было продемонстрировано его преимущество по сравнению со стандартными методами классификации [9–12]. В рамках алгоритмов сортировки спайков, базирующихся на дискретном вейвлет-преобразовании [9–11], нейронный потенциал действия $x(t)$ представляется в виде линейной комбинации вейвлетов $\psi_{j,k}$

$$x(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (2)$$

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{2^{j/2}} \Psi(2^j t - k). \quad (3)$$

Методы классификации [9–11] используют то обстоятельство, что вейвлет-преобразование сигнала (спайка) может интерпретироваться как его фильтрация в разных частотных диапазонах, при которой полоса частот фильтра управляется масштабным параметром $a = 2^j$. В методе «Вейвлетный классификатор спайков»²

²В зарубежной литературе используется сокращение WSC (Wavelet-based Spike Classifier [10]).

(ВКС) [10] значение энергии, найденной в определенных частотных диапазонах для каждого потенциала действия, рассматривается как количественная мера для классификации. Основная идея ВКС состоит в том, что различия между формами спайков, главным образом, проявляются в высокочастотных (пик спайка) и низкочастотных (фаза реполяризации) характеристиках. Данный метод использует дискретное вейвлет-преобразование с пирамидальным алгоритмом вычисления [18–20], позволяющим достаточно быстро находить значения коэффициентов $c_{j,k}$. Основная задача состоит в том, чтобы выбрать из всех коэффициентов $c_{j,k}$ характеристики, наиболее существенные с точки зрения возможности разделения разных типов спайков. Самый простой метод поиска «нужных» коэффициентов – это вычисление среднего значения $\bar{c}_{j,k}$ и среднеквадратичного отклонения $\sigma_{j,k}$ для каждого коэффициента

$$\bar{c}_{j,k} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} c_{j,k}^i, \quad \sigma_{j,k} = \sqrt{\frac{1}{(N_s - 1)} \sum_{i=1}^{N_s} (c_{j,k}^i - \bar{c}_{j,k})^2}. \quad (4)$$

Критерием выбора наилучших для разделения коэффициентов является наибольшее среднее и наибольшее среднеквадратичное отклонение.

В настоящей работе для задачи классификации спайков мы рассматриваем непрерывное вейвлет-преобразование

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{a,b}(t) dt. \quad (5)$$

Преобразование (5) является избыточным, однако в ряде приложений эта избыточность может быть полезным качеством [21]. С помощью преобразования (5) можно проводить анализ, двигаясь с малым шагом по параметру масштаба a , что позволяет более подробно исследовать, как коэффициенты преобразования $W(a, b)$ зависят от масштаба наблюдения в любой момент времени (то есть при любом b). Формула (5) требует больших вычислительных ресурсов, чем дискретное вейвлет-преобразование (2), (3), однако можно ожидать, что выбранные вейвлет-коэффициенты позволят решить задачу классификации, по крайней мере, не хуже, чем в случае дискретного преобразования, а в каких-то случаях дадут лучшие результаты.

После того, как с помощью того или иного метода классификации определен необходимый набор характеристик, для дальнейшей сортировки спайков используется общий подход, называемый «вырезанием кластеров», то есть определение их границ. Суть его состоит в том, что найденные характеристики используются для представления каждого спайка в некотором пространстве параметров. Численное разделение достигается, когда выбранные характеристики образуют группы (кластеры) в этом пространстве, то есть изолированные (в идеальном случае) друг от друга области точек (см. рис. 5). В случае хорошего разделения каждый кластер содержит спайки, принадлежащие только одному нейрону. На практике определение границ кластеров проводится либо вручную, либо с использованием специальных численных методов. Точка классифицируется принадлежащей данному кластеру, если она лежит внутри его границ; если же она попадает в область за границей, то ее отбрасывают. Определение границ кластеров во многих случаях является трудной задачей, если не существует достаточно четкой границы между группами спайков.

Здесь экспериментатору также приходится искать компромисс между положительными и отрицательными ошибками классификации (как это было для пороговой сортировки, см. рис. 4), но теперь уже в пространстве выбранных для классификации характеристик.

Несмотря на то, что вейвлет-анализ является потенциально более мощным средством, чем метод расчета главных компонент, существует ряд проблем при его использовании для сортировки спайков. Исходя из самой идеи применения вейвлет-коэффициентов для классификации потенциалов действия можно сформулировать две проблемы, с которыми будет сталкиваться экспериментатор.

1) Очевидно, что результаты анализа, то есть вейвлет-коэффициенты будут зависеть от выбора базисной функции ψ . Не существует однозначного ответа на вопрос, как следует выбирать вейвлет в каждом конкретном случае. Таким образом, эффективность метода может сильно изменяться в зависимости от того, какие формы потенциалов действия получены в эксперименте. В работах [9–11] для классификации спайков использовались различные вейвлеты: Добеши, Коифлет, Хаар. Возможные преимущества той или иной базисной функции зависят от конкретных форм анализируемых спайков и, пожалуй, невозможно заранее предположить, какой из вейвлетов будет работать лучше. Исходя из собственного опыта мы можем сказать, что часто для хорошего разделения волновых форм желательно выбирать вейвлет с профилем, похожим на форму спайка. Конечно, это скорее интуитивное представление, чем результат строгого математического анализа, однако в данном случае, наверное, не приходится ожидать получения строгих результатов: оптимальный выбор базиса зависит от формы потенциалов действия, а они могут очень сильно варьироваться от эксперимента к эксперименту.

2) Предположим, что функция ψ выбрана из каких-то соображений. После этого проводится расчет вейвлет-преобразования для экспериментальных данных и получается набор различных коэффициентов, характеризующих каждый спайк (обычно 64 коэффициента в случае дискретного преобразования и значительно большее их количество для непрерывного). Соответственно возникает вопрос, какие коэффициенты рассматривать в качестве характеристик для сортировки спайков. Проблема выбора оптимальных коэффициентов является более серьезной, чем выбор базисной функции. Один из вариантов ее решения мы уже привели, описывая ВКС-метод (4). В литературе предлагаются различные процедуры, начиная от оценок максимальной дисперсии, максимального среднего значения, многомодового распределения [10] и заканчивая более сложными подходами, базирующимися на теории информации [9]. Однако не существует ни одного уникального подхода, который обеспечивал бы наилучшую классификацию вне зависимости от волновых форм. Максимальное среднее значение и дисперсия свидетельствуют о том, что данный вейвлет-коэффициент содержит важную информацию о потенциалах действия, но это не гарантирует, что с его помощью можно надежно различить два разных спайка (различия могут быть в каких-то особенностях формы сигналов, которые выбранный конкретный коэффициент просто не учитывает). Наличие многомодового распределения является необходимым условием для успешной сортировки спайков, но обычно среди набора значений $W(a, b)$ можно найти множество коэффициентов, имеющих многомодовое распределение, и непонятно, каким образом осуществить среди них оптимальный выбор. Эта проблема особенно актуальна в том случае, когда экспериментальные данные содержат потенциалы действия нескольких нейронов, среди которых есть как

сильно различающиеся, так и достаточно похожие типы спайков. При неоптимальном выборе коэффициентов есть значительная вероятность разделения отличающихся волновых форм, но очень трудно провести разделение похожих спайков. Именно из-за неудачного подбора коэффициентов эффективность методов, основанных на вейвлет-преобразовании, может оказаться хуже АГК.

Обсудив очевидные недостатки методов классификации потенциалов действия, определим, в каких ситуациях целесообразно использовать тот или иной подход. Для того чтобы выявить преимущества алгоритмов, базирующихся на вейвлет-преобразовании, попробуем вначале порассуждать о том, что из себя представляет вейвлет-анализ. Часто его интерпретируют как метод «математического микроскопа». Это очень удачная интерпретация: чтобы микроскоп хорошо работал, его необходимо настроить, выбрав точку фокусировки и подобрав нужное увеличение. В вейвлет-преобразовании (5) точка фокусировки задается параметром b (параметром сдвига), а увеличение — параметром a (параметром масштаба). Чтобы увидеть какие-то особенности формы спайка и, соответственно, отличить спайки разных нейронов, параметры вейвлет-преобразования должны быть специально подобраны с учетом индивидуальных особенностей разных нейронов, а не выбираться из общих соображений! Именно этот момент является основным недостатком описанных в научной литературе специальных методов классификации. Авторы работ [9–11] стремились предложить универсальный метод выбора коэффициентов, а такой подход не всегда работает на практике.

В отличие от стандартных алгоритмов классификации нейронных потенциалов действия, вейвлет-анализ позволяет изучать структуру сигналов в широком диапазоне масштабов, в то время как метод АГК, в основном, учитывает различия в волновых формах на больших временных интервалах. Отсюда можно сформулировать первое условие, при котором вейвлет-анализ будет работать эффективнее стандартных методов: *наличие мелкомасштабной структуры в форме потенциалов действия и существование отличий между спайками разных нейронов, проявляющихся на малых временных масштабах.*

Чтобы показать это, была сгенерирована тестовая последовательность, которая состояла из 500 нейронных потенциалов действия и содержала спайки с тремя разными и двумя похожими волновыми формами (рис. 6, *a*) с добавлением шума, интенсивность которого была сопоставима с амплитудой спайков. Применение АГК к тестовым данным дало четкое разделение только на четыре кластера вместо пяти. В данном случае при выполнении расчетов использовался пакет программ Матлаб, анализируемый сигнал состоял из 32000 точек, на каждый спайк приходилось не менее 20 точек. Первые три кластера соответствовали первым трем волновым формам, показав таким образом эффективность метода АГК при сортировке существенно различающихся потенциалов действия. Четвертый кластер одновременно содержал спайки двух волновых форм (ВФ 4 и 5 на рис. 6, *a*), поскольку разница между ними не содержится в первых двух главных компонентах. Анализ характеристик, полученных с помощью алгоритма АГК, подтвердил, что данный подход приводит к ошибкам сортировки спайков, имеющих четкие различия только на малых масштабах.

При решении задачи сортировки с помощью вейвлет-анализа для тех же данных были выделены все 5 кластеров. Для наглядности на рис. 6, *z* приводится увеличенная область пространства характеристик, иллюстрирующая хорошее разделение

похожих волновых форм, что не удалось получить с помощью техники АГК. В этом примере для разделения кластеров использовался так называемый «Wave»-вейвлет (рис. 6, в)

$$\psi(x) = x \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (6)$$

Визуально эта функция очень похожа на анализируемые спайки (ВФ 4 и 5, см. рис. 6, а). Вычисление вейвлет-коэффициентов проводилось непосредственно по формуле (5). При этом использовался широкий диапазон масштабов: от одного шага дискретизации (минимальный масштаб a) до масштабов, сопоставимых с длительностью всего спайка (максимальный масштаб). Значения параметров a , b , соответствующие коэффициентам, выбранным для классификации, представлены на рис. 6, з.

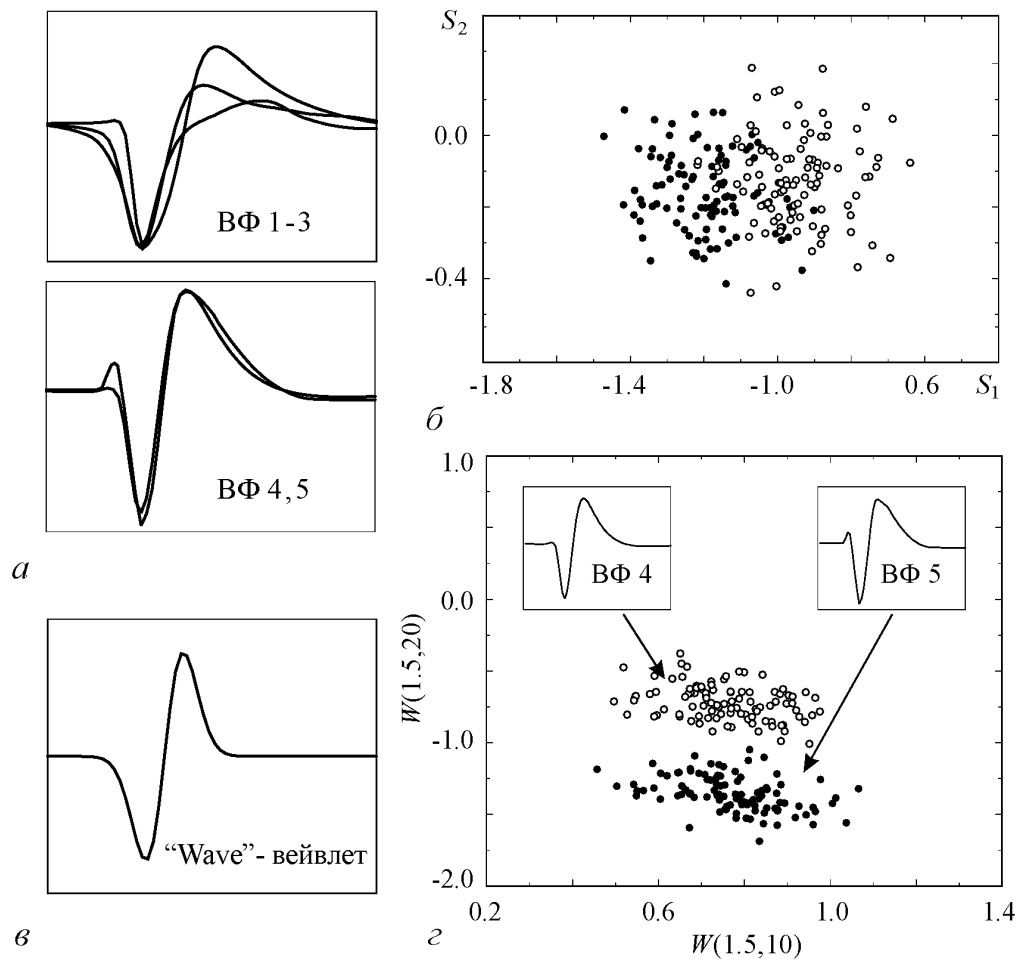


Рис. 6. Пример, в котором вейвлет-подход (а) показывает лучшее разделение спайков по сравнению с АГК (б). а – Набор данных для тестирования, состоящий из трех четко различимых волновых форм спайков (ВФ 1-3) и двух похожих волновых форм (ВФ 4 и 5). б – Пространство характеристик для первых двух главных компонент. Показана только увеличенная область четвертого кластера. Спайки двух волновых форм (ВФ 4 и 5) смешиваются и их разделение невозможно осуществить. в – «Wave»-вейвлет, форма которого близка к волновым формам спайков. г – Увеличенная область вейвлет-коэффициентов, соответствующих четвертому и пятому кластерам (ВФ 4 и 5). Получено два четко разделяемых «облака»

В отсутствие мелкомасштабной структуры результаты вейвлет-анализа могут быть сравнимы с результатами АГК (или даже быть хуже, если проведен неудачный выбор коэффициентов $W(a, b)$). Для иллюстрации этого случая была сгенерирована другая тестовая последовательность данных, немного отличающаяся от предыдущей и, как и прежде, состоящая из трех различных и двух похожих волновых форм, но теперь различия у похожих форм спайков были более выражены, чем в предыдущем примере, и не проявляли мелкомасштабной структуры. Метод АГК успешно разделил все спайки по группам (рис. 7, а). Согласно одному из подходов к выбору коэффициентов вейвлет-преобразования характеристики должны демонстрировать многомодовые распределения; в противном случае в пространстве характеристик будет только один кластер, содержащий потенциалы действия разных нейронов. На практике такое распределение можно получить во многих случаях: наличие нескольких максимумов функции плотности вероятностей означает, что будут классифицированы некоторые волновые формы (не обязательно все). Пример неудачного выбора коэффициентов показан на рис. 7, б. Несмотря на то, что выбранные вейвлет-коэффициенты имеют многомодовые распределения (рис. 7, з), вейвлет-анализ дает неверную классификацию двух похожих волновых форм в отличие от метода АГК, для масштабных коэффициентов которого также можно построить многомодовое распределение (рис. 7, в).

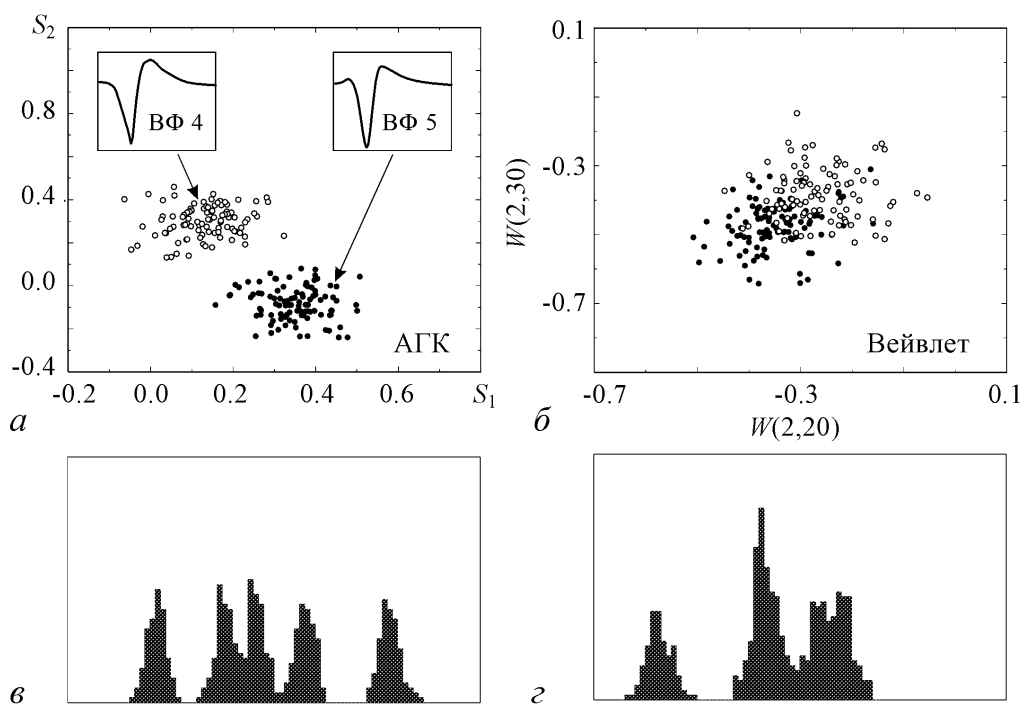


Рис. 7. Случай, когда АГК обеспечивает лучшее разделение. Анализ проводился для тестовых данных, содержащих три четко различимые и две похожие волновые формы. Однако разница между похожими спайками проявляется не на малых масштабах. а – Главные компоненты в пространстве характеристик дают хорошее разделение спайков ВФ4 и ВФ5. б – Классификация с помощью вейвлетов. в – Распределение спайков вдоль первого масштабного коэффициента АГК и г – для одного из вейвлет-коэффициентов

Здесь следует отметить, что наличие мелкомасштабной структуры – ситуация очень специфичная и в реальных электрофизиологических экспериментах встречается не часто (хотя такие случаи, безусловно, есть). Поэтому, если бы преимущества вейвлет-анализа с точки зрения классификации спайков ограничивались только данной ситуацией, он не представлял бы большой практической ценности. В процессе исследований выяснилось, что есть, по крайней мере, еще одна ситуация, когда применение вейвлет-методов является предпочтительным – это *высокий уровень низкочастотного фонового шума*. Влияние статистики флуктуаций на работу методов сортировки спайков будет рассмотрено в следующем разделе настоящей работы.

3. Влияние шума на эффективность методов классификации

Обычно перед проведением классификации очень быстрые (более 5 кГц) и очень медленные (менее 300 Гц) процессы, присутствующие в экспериментальных данных, отфильтровывают, оставляя процессы, определяемые динамикой нейрона (это диапазон частот в районе 1–2 кГц, но при фильтрации оставляют более широкий диапазон, поскольку возможны отличия в частотной области для разных форм потенциалов действия). После фильтрации в сигнале помимо потенциалов действия анализируемых нейронов будет присутствовать «медленный» шум в диапазоне от 300 Гц до 4 кГц, который, перекрываясь со спектром спайков, может создавать сложности при решении задачи сортировки спайков и увеличивать ошибки автоматической классификации.

Чтобы сопоставить возможности методов сортировки спайков в различных ситуациях, проводилось исследование, насколько рассматриваемые алгоритмы чувствительны к статистике и к уровню шума. С этой целью генерировалась последовательность из 2000 спайков двух разных нейронов, и к ней аддитивно добавлялся пуассоновский (или нормальный) случайный процесс, предварительно прошедший процедуру полосовой фильтрации (диапазон частот полосно-пропускающего фильтра $\Delta\nu$ выбирался равным 700 Гц, центральная частота фильтра ν_0 варьировалась в широких пределах). Было обнаружено, что закон распределения флуктуаций не оказывает заметного влияния на работу методов сортировки спайков, но эффективность этих методов очень сильно зависит от *частотного диапазона флуктуаций*. Анализ главных компонент демонстрирует высокую чувствительность к низкочастотному шуму (по сравнению с динамикой нейронов), тогда как наличие «быстрых флуктуаций» не оказывает существенного влияния на его работу. Напротив, методы, базирующиеся на вейвлет-анализе, часто работают хуже при наличии высокочастотного шума и в меньшей степени чувствительны к медленным флуктуациям.

Рис. 8 иллюстрирует пример, в котором метод АГК не позволяет обеспечить четкую классификацию двух типов спайков при наличии низкочастотной случайной динамики ($\nu_0 = 500$ Гц), однако данный алгоритм четко разделяет кластеры при более быстрых флуктуациях ($\nu_0 = 2500$ Гц). Качество классификации, осуществляемой на основе вейвлет-преобразования, ухудшается при увеличении ν_0 (рис. 8, *в*, *г*).

Зависимость величины ошибки классификации от параметра ν_0 представлена на рис. 9 для двух достаточно типичных ситуаций (при вариации формы потенциалов действия): когда с увеличением ν_0 ошибка метода ВКС увеличивается (рис. 9, *а*) и когда она уменьшается, но медленнее, чем ошибка анализа главных компонент (рис. 9, *б*). Отметим, что в обоих случаях в диапазоне низкочастотного

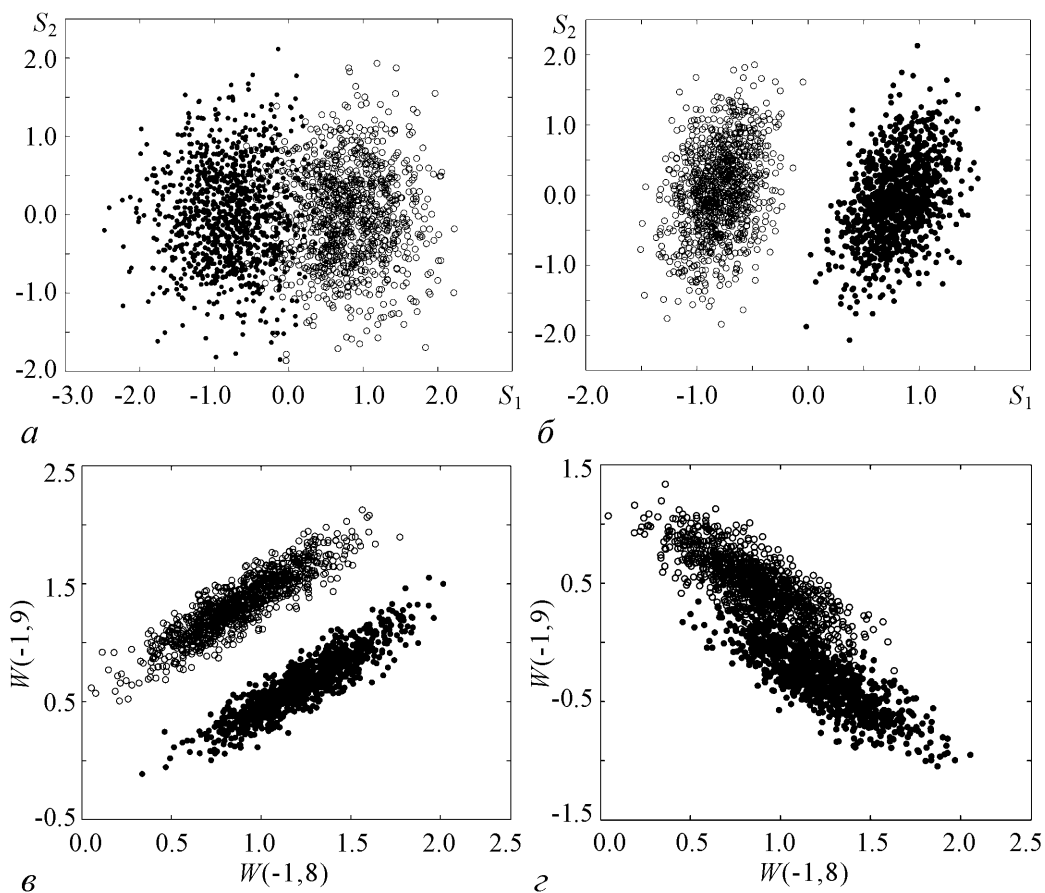


Рис. 8. *а, б* – Пространство масштабных коэффициентов главных компонент. *а* – АГК не дает разделения на кластеры в случае низкочастотной случайной динамики ($\nu_0 = 500$ Гц); *б* – четкое разделение спайков при более высоких флуктуациях ($\nu_0 = 2500$ Гц). *в, г* – Для тех же значений ν_0 пространство вейвлет-коэффициентов позволяет качественно разделить спайки в случае низкочастотного фонового шума (*в*), в то время как увеличение частоты флуктуаций приводит к ухудшению классификации (*г*)

шума ($\nu_0 < 900$ Гц) вейвлеты превосходят метод АГК, а при наличии высокочастотного шума АГК имеет преимущество. Аналогичная картина наблюдается при оценивании количества неклассифицированных спайков, которые программа автоматической классификации не смогла достоверно отнести ни к одному из двух кластеров (рис. 9, *в*). Важный вывод, следующий из приведенных результатов, состоит в том, что качество классификации можно существенно улучшить с помощью предварительной фильтрации экспериментальных данных, установив частоту низкочастотного фильтра 2.5–3 кГц, что значительно меньше, чем обычно принято в нейродинамике (порядка 5 кГц). В частности, фильтрация высокочастотного шума может сильно снизить ошибку классификации методов, основанных на вейвлет-преобразовании. Безусловно, такая фильтрация может внести искажения в форму спайков, однако сама по себе форма спайков является непринципиальной в нашем случае, в то время как более сильное подавление шума обеспечит более качественное разделение кластеров в пространстве характеристик. Ошибки классификации очень существенно зависят от качества предварительной обработки экспериментальных данных, свидетельством чему служит рис. 9, *г*, где за счет смещения частоты среза фильтра с 5 кГц

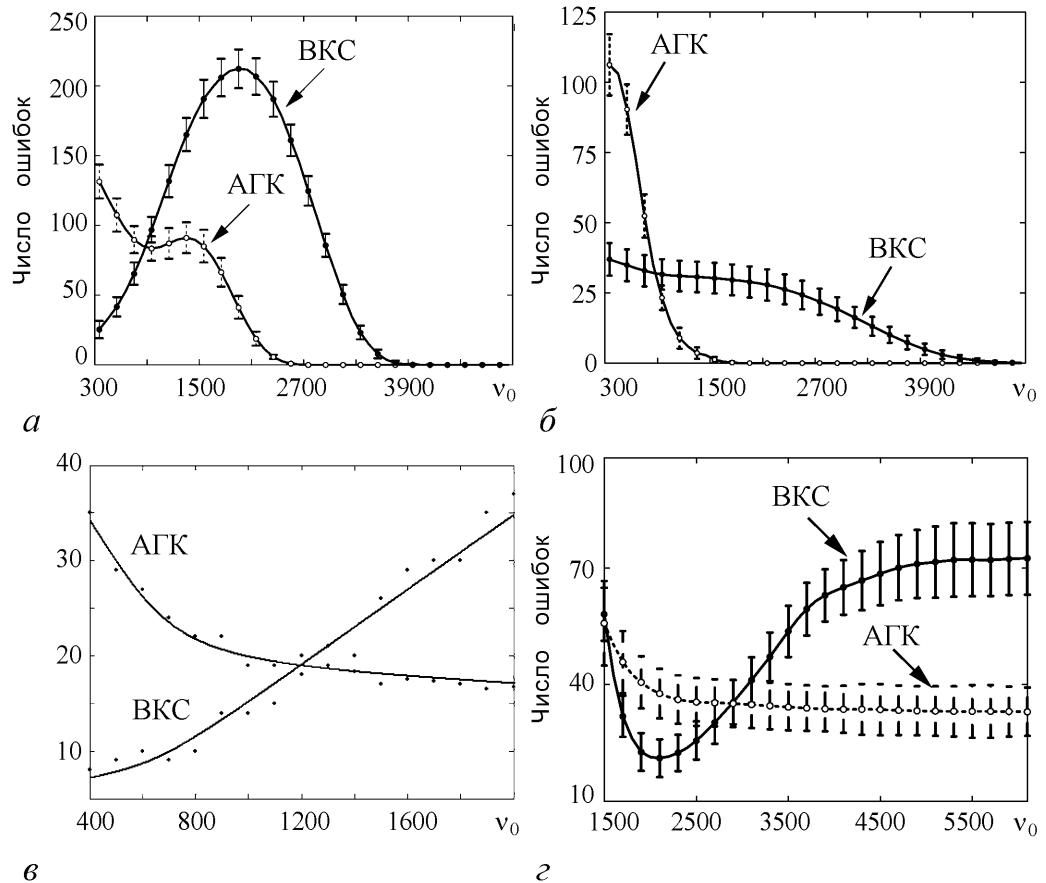


Рис. 9. *a*, *б* – Зависимость величины ошибки классификации от центральной частоты ν_0 полосно-пропускающего фильтра для двух экспериментальных серий, в которых использовались спайки с разными волновыми формами. *a* – Случай когда ошибка метода ВКС увеличивается с увеличением ν_0 и *б* – когда она уменьшается, но медленнее, чем ошибка метода АГК. *в* – Зависимость количества неклассифицированных спайков от частоты ν_0 для методов ВКС и АГК. *г* – Зависимость величины ошибки классификации от частоты среза фильтра, используемого при предварительной обработке данных. Уменьшение частоты среза фильтра в высокочастотной области дает уменьшение ошибки для метода ВКС более чем в два раза и почти не влияет на величину ошибки для АГК

до 2.5 кГц ошибка уменьшается более чем в 2 раза! В данном случае фильтрация осуществлялась после добавления к сигналу пуассоновского случайного процесса, не ограниченного по частотному диапазону. Таким образом, исходя из проведенного исследования, следует рекомендовать нейрофизиологам проводить более узкополосную фильтрацию сигналов электрической активности нейронов. Для практических целей следует отфильтровывать быструю динамику, начиная с 2.5–3.0 кГц.

4. Предлагаемый метод уменьшения ошибки классификации

Выше мы сформулировали два условия, при которых вейвлет-анализ позволяет решать задачу классификации эффективнее стандартных алгоритмов: наличие мелкомасштабной структуры (при слабом уровне шума) и наличие сильных низкочастотных флуктуаций. Мы также показали, что качество решения задачи сортировки спайков зависит от процедуры предварительной фильтрации данных. Но даже если

эти условия не выполняются, а шум в полосе частот 1–2 кГц является существенным³, то тем не менее с помощью вейвлет-анализа можно улучшить классификацию спайков, проведенную стандартными методами.

Рассмотрим случай, довольно часто возникающий на практике при обработке электрофизиологических данных. Предположим, что с помощью какого-то стандартного метода (например, АГК) удастся получить два кластера в пространстве характеристик, расположенных близко друг к другу, вследствие чего не удастся надежно разделить спайки (возникает большое число ошибок классификации в смежной области между центрами кластеров). Для простоты предположим, что кластеры состоят только из двух типов спайков (или спайков одного типа и фонового шума). На рис. 10, *a* представлен пример такой ситуации, полученный в результате применения метода АГК для обработки реального сигнала электрической активности нейронов.

Чтобы уменьшить возможные ошибки идентификации спайков, в данной работе предлагается специальный метод, основанный на сочетании непрерывного вейвлет-анализа и классического метода АГК. Такое сочетание позволяет улучшить результаты сортировки по сравнению с применением этих методов по отдельности.

Первый шаг предлагаемого алгоритма состоит в нахождении характерных волновых форм. С этой целью применяется обычный метод АГК для всех спайков, полученных в эксперименте. Затем проводится усреднение форм спайков в малой окрестности центра каждого кластера; в результате получаются две усредненные волновые формы (см. рис. 10, *a*). Так как эти волновые формы находятся в центрах кластеров, можно рассчитывать, что они представляют «реальные» профили спайков двух нейронов, минимально подверженные влиянию шума (чем больше влияние шума, тем дальше будет расположена точка от центра кластера).

Второй шаг предполагает проведение вейвлет-анализа найденных усредненных волновых форм и поиск коэффициентов вейвлет-преобразования, которые наилучшим образом показывают различия между волновыми формами. Для этого осуществляется анализ волновых форм в широком диапазоне масштабов a и смещений b . Затем оценивается разница между соответствующими значениями $W(a, b)$ и выбираются коэффициенты с максимальными различиями. Иными словами, мы выбираем вейвлет-коэффициенты не произвольно, основываясь на некотором универсальном критерии, а с учетом индивидуальных особенностей конкретных форм спайков. На рис. 10, *б* показаны зависимости разности между всевозможными значениями $W(a, b)$ при вариации масштабов (каждая кривая соответствует определенной величине параметра b). Выделены две точки, снизу и сверху, соответствующие экстремумам этих зависимостей. Следует отметить, что в некоторых случаях возможно существование нескольких экстремумов на разных масштабах и число характеристик, которые можно использовать для классификации, увеличивается. В результате мы получим набор оптимальных коэффициентов, отражающих наиболее важные отличия между усредненными потенциалами действия.

На **третьем шаге** алгоритма выбранные вейвлет-коэффициенты вычисляются для всех спайков из экспериментальных данных и полученные значения рассматриваются в качестве характеристик для классификации (рис. 10, *в*).

³ Уменьшать частоту среза фильтра меньше 2.5 кГц при фильтрации высокочастотного шума нежелательно – для некоторых волновых форм дальнейшее уменьшение частоты будет сопровождаться ростом ошибки, то есть верхнюю границу полосы частот нейронной динамики целесообразно зафиксировать на данном значении.

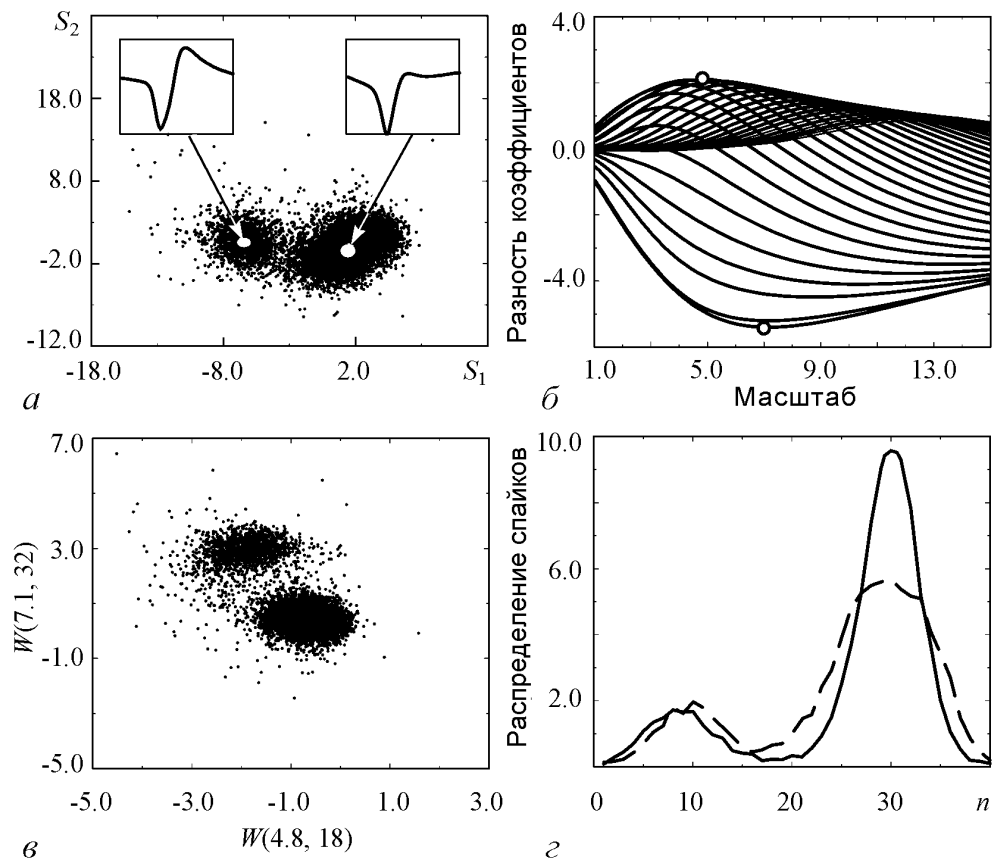


Рис. 10. Иллюстрация предложенного метода улучшения классификации. *a* – Первый шаг: методом АГК в пространстве масштабных коэффициентов получено два перекрывающихся «облака» точек, соответствующих спайкам разных типов. На вложенных картинках показаны характерные волновые формы спайков, полученные путем усреднения волновых форм вблизи центров кластеров. *б* – Второй шаг: зависимость разности между вейвлет-коэффициентами двух характерных спайков в зависимости от масштаба. Кружками отмечена пара коэффициентов ($a = 4.8, b = 18$ и $a = 7.1, b = 32$) с максимальными отличиями. *в* – Новое пространство характеристик для найденных коэффициентов вейвлет-преобразования характерных спайков. *г* – Распределения точек в пространстве характеристик для метода АГК (штриховая линия) и предложенного подхода (сплошная линия)

На рис. 10, *г* показаны распределения точек в пространстве характеристик для метода АГК и предложенного подхода. Главный максимум функции плотности вероятности для вейвлет-анализа стал более узким и более выраженным по сравнению с результатами, полученными для АГК. Это означает, что количество спайков, находящихся в пограничной области между двумя облаками, значительно уменьшается, что ведет к лучшему разделению облаков на два кластера и, таким образом, позволяет уменьшить ошибки классификации (как положительные, так и отрицательные), которые появляются, главным образом, в области между кластерами. Отметим, что в данном случае выбор вейвлет-коэффициентов в соответствии с рекомендациями работы [10] не позволяет улучшить классификацию по сравнению с техникой главных компонент.

Тестирование предложенного метода проводилось на разных экспериментальных сигналах (более 20 реальных записей электрической активности нейронов).

Каждый сигнал был получен следующим образом: выбирались две экспериментальные записи, одна из которых содержала группу спайков, хорошо изолированных от фонового шума и других потенциалов действия. Эти спайки искусственно «вырезались» и случайным образом добавлялись во второй экспериментальный сигнал, который использовался в качестве входных данных для классификации. В результате этого, с одной стороны, сохранялись все характеристики (уровень и статистика шума, истинная вариация волновых форм и т.д.); с другой стороны, мы получаем априорную информацию о принадлежности «добавленных» спайков отдельному кластеру. Эта априорная информация позволяет вычислять ошибки классификации для данного кластера и сопоставить эффективность разных методов сортировки.

Для одного из рассмотренных сигналов, содержащего 16568 потенциалов действия, включая 3069 «дополнительных» спайков, получаются следующие результаты. Метод АГК позволяет идентифицировать два кластера, один из которых соответствует «дополнительным» потенциалам действия. Использование трех первых главных компонент привело к 290 ошибкам сортировки (24 отрицательные и 266 положительные ошибки, то есть 0.8% и 8.6% от общего числа точек кластера).

Применение метода ВКС в данном случае дает ошибку классификации большую, чем для метода АГК: 410 неверно классифицированных потенциалов действия (5.2% отрицательных ошибок и 8.1% положительных). Это еще раз подтверждает, что произвольный выбор вейвлет-коэффициентов из общих рекомендаций не позволяет эффективно решать задачу сортировки спайков. В соответствии с рекомендациями, для классификации выбирались вейвлет-коэффициенты, имеющие максимальные стандартные отклонения, максимальные значения и бимодальные распределения.

Предложенный алгоритм в рассматриваемом примере позволяет добиться наименьшей ошибки: 185 неправильно классифицированных спайков (2.8% отрицательных и 3.1% положительных ошибок).

В таблице суммированы результаты, полученные для трех типичных сигналов. В первом и третьем примере АГК превосходит технику ВКС, а предложенный алгоритм обеспечивает минимальную ошибку сортировки спайков. Во втором примере все методы дают большие ошибки из-за высокого уровня фонового шума, но за счет оптимального выбора вейвлет-коэффициентов количество неправильно классифицированных потенциалов действия удается снизить.

Таблица

Отношения отрицательных и положительных ошибок для трех типичных сигналов (S1, S2, S3), полученные при использовании разных методов. Значения указаны в процентах по отношению к общему числу точек кластеров. Через FN и FP обозначены отрицательные и положительные ошибки, соответственно

	S1		S2		S3	
	FN/FP	Ошибка, %	FN/FP	Ошибка, %	FN/FP	Ошибка, %
АГК	0.8/8.6	9.5	41.6/11.8	53.4	0.1/2.6	2.7
ВКС	5.2/8.1	13.3	34.2/13.8	48.0	6.7/2.9	9.6
Предл. метод	2.8/3.1	5.9	26.4/8.2	34.6	1.8/0.3	2.1

Заключение

В данной работе проведен сравнительный анализ современных методов автоматической сортировки нейронных потенциалов действия. Установлено, что существует две ситуации, в которых методы классификации на базе вейвлет-преобразования работают эффективнее стандартных алгоритмов:

- наличие мелкомасштабной структуры в форме потенциалов действия и существование отличий между спайками разных нейронов, проявляющихся на малых временных масштабах;

- наличие сильного низкочастотного шума.

Показано, что для улучшения качества кластеризации целесообразно проводить предварительную фильтрацию экспериментальных данных, установив частоту низкочастотного фильтра 2.5–3 кГц. Это значение меньше, чем обычно принято в нейродинамике (порядка 5 кГц). «Вырезание» быстрых флуктуаций улучшает работу вейвлет-анализа, и этот эффект является достаточно типичным.

Применение высокочастотных фильтров, то есть удаление медленных случайных процессов иногда позволяет уменьшить ошибку классификации стандартного метода главных компонент (хотя это происходит далеко не всегда, и проводить фильтрацию медленных процессов нужно с большой осторожностью).

Предложен новый метод уменьшения ошибки классификации за счет специального выбора коэффициентов вейвлет-преобразования и сочетания вейвлет-анализа со стандартной техникой АГК. На реальных данных электрической активности нейронов показано, что предложенный подход способен обеспечить наименьшую ошибку сортировки спайков по сравнению с подходами, широко используемыми в настоящее время для классификации нейронных потенциалов действия.

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (государственный контракт № 02.442.11.7181), Министерства образования и науки РФ, гранта Президента России (МК-2512.2004.2).

Библиографический список

1. Lewicki M. A review of methods for spike sorting: the detection and classification of neural potentials // *Net. Com. Neu. Sys.* 1998. Vol. 9. P. R53–R78.
2. Harris K., Henze D., Csicsvari J., Hirase H., Buzsaki G. Accuracy of tetrode spike separation as determined by simultaneous intracellular and extracellular measurements // *J. Neurophysiol.* 2000. Vol. 84. P. 401–414.
3. Schmidt E. Computer separations of multi-unit neuroelectric data: a review // *J. Neurosci. Methods.* 1984. Vol. 12. P. 95–111.
4. Gray C., Maldonado P., Wilson M., McNaughton B. Tetrodes markedly improve the reliability and yield of multiple single-unit isolation from multi-unit recordings in cat striate cortex // *J. Neurosci. Methods.* 1995. Vol. 63. P. 43–54.
5. Eggermont J., Epping W., Aertsen A. Stimulus dependent neural correlations in the auditory midbrain of the grassfrog (*Rana temporaria* L.) // *Biol. Cybern.* 1983. Vol. 47. P. 103–117.
6. Salganicoff M., Sarna M., Sax L., Gerstein G. Unsupervised waveform classification for multi-neural recordings: a real-time, software based system. I. Algorithms and implementation // *J. Neurosci. Methods.* 1988. Vol. 25. P. 181–187.

7. *Sarna M., Gochin P., Kaltenbach J., Salganicoff M., Gerstein G.* Unsupervised waveform classification for multi-neuron recordings: a real-time, software based system. II. Performance comparison to other sorters // *J. Neurosci. Methods.* 1988. Vol. 25. P. 189–196.
8. *Zouridakis G., Tam D.* Multi-unit spike discrimination using wavelet transforms // *Comput. Biol. Med.* 1997. Vol. 27. P. 9–18.
9. *Hulata E., Segev R., Ben-Jacob E.* A method for spike sorting and detection based on wavelet packets and Shannon's mutual information // *J. Neurosci. Methods.* 2002. Vol. 117. P. 1–12.
10. *Letelier J., Weber P.* Spike sorting based on discrete wavelet transform coefficients // *J. Neurosci. Methods.* 2000. Vol. 101. P. 93–106.
11. *Quian Quiroga R., Nadasdy Z., Ben-Shaul Y.* Unsupervised spike detection and sorting with wavelets and superparamagnetic clustering // *Neural Computation.* 2004. Vol. 16. P. 1661–1687.
12. *Kim K., Kim S.* A Wavelet-Based Method for Action Potential Detection From Extracellular Neural Signal Recording With Low Signal-to-Noise Ratio // *IEEE Trans. on Biomed. Eng.* 2003. Vol. 50, № 8. P. 999–1011.
13. *Simon W.* The real-time sorting of neuro-electric action potentials in multiple unit studies *Electroenceph* // *Clin. Neurophysiol.* 1965. Vol. 18. P. 192–195.
14. *Feldman J., Roberge F.* Computer detection and analysis of neuronal spike sequences // *Inform.* 1971. Vol. 9. P. 185–197.
15. *Dinning G.* Real-time classification of multiunit neural signals using reduced feature sets // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 1981. Vol. 28. P. 804–812.
16. *Glaser E., Marks W.* On-line separation of interleaved neuronal pulse sequences *Data Acquisition Process* // *Biol. Med.* 1968. Vol. 5. P. 137–156.
17. *Gerstein G., Bloom M., Espinosa I., Evanczuk S., Turner M.* Design of a laboratory for multineuron studies // *IEEE Trans. Systems, Man Cybern.* 1983. Vol. 13. P. 668–676.
18. *Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.* *Numerical Recipes in C: the art of scientific computing.* Cambridge University Press, 1992.
19. *Burrus C.S., Gopinath R.A., Guo H.* *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer.* N.J: Prentice Hall, 1997.
20. *Chui C.K.* *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Analysis* *SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation.* Philadelphia, PA: SIAM, 1997.
21. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *УФН.* 1996. Т. 166, № 4. С. 1145–1170.

*Саратовский государственный
университет
Университет Компьютенсе, Мадрид*

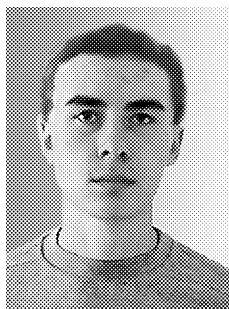
*Поступила в редакцию 2.06.2005
После доработки 3.11.2005*

CLASSIFICATION OF NEURONAL ACTION POTENTIALS USING WAVELET-TRANSFORM

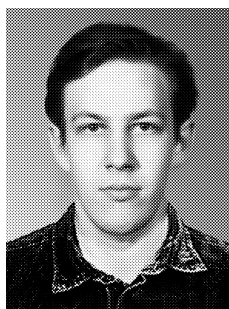
D.V. Dumsky, A.N. Pavlov, A.N. Tupitsyn, V.A. Makarov

In this paper, a comparative study of methods for classification of neuronal action potentials is performed, namely, the standard Principal Component Analysis (PCA) and techniques based on the wavelet-transform. It is shown that there are at least two cases

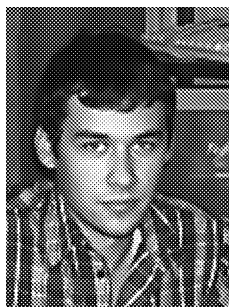
when the wavelet-based approaches have advantages: 1) the presence of a small-scale structure in the shapes of spikes, and 2) the presence of slow noise of high intensity. It is stated that the quality of spike-sorting can be increased by signal's filtering. The problem of choosing optimal wavelet-coefficients for spike classification is discussed. Proposed method is based on combination of the PCA and the wavelet-transform. Main idea of the method consists in the estimation of typical spike waveforms and in the use of those wavelet-coefficients that provide maximal distinctions between the chosen waveforms. The suggested approach allows us to reduce classification errors.



Думский Дмитрий Викторович – родился в Саратове (1979). Окончил Саратовский государственный университет по специальности «биофизика» (2001). Защитил кандидатскую диссертацию (2005). В настоящее время работает инженером на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: динамика биологических систем, анализ временных рядов. Опубликовал (с соавторами) 6 работ в отечественной и зарубежной печати. E-mail: dumsky@chaos.ssu.runnet.ru



Павлов Алексей Николаевич – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Кандидат физико-математических наук (1998). В настоящее время работает доцентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: анализ временных рядов. Имеет более 40 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати. E-mail: pavlov@chaos.ssu.runnet.ru



Туцын Анатолий Николаевич – родился в Саратове (1983). Окончил Саратовский государственный университет по специальности «биохимическая физика» (2005). В настоящее время является инженером кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика, анализ временных рядов.



Макаров Валерий Анатольевич – окончил Нижегородский государственный университет (по специальности «радиофизика» 1992), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук в ННГУ (1997). С 1998 года работает научным сотрудником в Университете Комплютенсе города Мадрида. Опубликовал (с соавторами) более 40 научных работ. Область основных интересов – исследование динамики нейронных ансамблей. E-mail: vmakarov@opt.ucm.es



МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ И СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГЛИКОЛИТИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Л.Б. Ряшко, А.В. Смирнов

В работе рассматриваются методы анализа чувствительности циклов к детерминированным и стохастическим возмущениям. В качестве исследуемой модели взята система уравнений Хиггинса, описывающая гликолитические автоколебания. Исследуется возможность описания локальной чувствительности цикла с помощью собственных чисел системы первого приближения. Результаты, наиболее согласующиеся с эмпирическими, были получены при использовании функции стохастической чувствительности. Выявлены наиболее чувствительные к случайным внешним возмущениям участки цикла. Отмечается уменьшение стохастической устойчивости отдельных участков цикла с ростом жесткости системы, в то время как детерминированная устойчивость цикла в целом увеличивается.

Введение

Предельный цикл в системе определяет поведение многих физических, биологических и химических процессов. Примерами таких систем являются модели Ван дер Поля, Тьюринга – Пригожина, реакции Белоусова – Жаботинского (орегонатор), брюсселятора и другие. В биологической кинетике важную роль играют релаксационные автоколебания. В работе рассматривается система дифференциальных уравнений, впервые предложенная *Хиггинсом (Higgins)* для описания гликолитических автоколебаний. Уравнения такого типа моделируют процессы в первичном жизненном цикле, имеющем немаловажное значение в теории эволюции.

Одни из первых моделей, представленные в работах *Хиггинса*, давали упрощенное общее описание процессов, имеющих отношение к гликолизу [1–2]. В дальнейшем исследовании процесса гликолиза использовались более сложные модели гликолитических осцилляций, например, модель *Селькова – Хиггинса* [3]. Изучалось

поведение моделей под влиянием большой внешней периодической силы (что может отражать реальные метаболические процессы в клетке). Вопросам чувствительности гликолитического осциллятора также уделялось внимание в работе Ю.М. Романовского [4]. Объемный обзор моделей колебательных реакций в гликолизе приведен в работе Гарела [5].

Существенный интерес представляет изучение устойчивости предельных циклов (как цикла в целом, так и отдельных его участков) к случайным внешним возмущениям.

Первые работы по исследованию поведения нелинейных осцилляторов под воздействием внешних периодических сил были проведены Ван дер Полем (*van der Pol*). Нерегулярность разброса возмущенных траекторий вдоль предельных циклов нелинейных систем была рассмотрена Томита (К. *Tomita*) и Дайдо (Н. *Daido*) [6], Куррер (С. *Kurrer*) и Шультен (К. *Schulten*) [7]. В последней работе авторы исследовали воздействие случайных шумов, действующих вдоль цикла и по нормали к нему на примере модели нейрона, задаваемой уравнением Бонхоффера – Ван дер Поля.

В данной работе рассматривается модель Хиггинса при малых случайных возмущениях. Цель работы – сравнение методов анализа чувствительности циклов к детерминированным и стохастическим возмущениям.

В п. 1 рассматриваются методы исследования детерминированной устойчивости автоколебательных нелинейных систем. Подход, основанный на мультипликаторах, не позволяет исследовать чувствительность отдельных участков цикла. Приводятся способы проведения такого анализа. Рассматривается метод исследования локальной устойчивости детерминированной системы, связанный с переходом в новую систему координат [8].

П. 2 посвящен исследованию стохастической устойчивости предельных циклов при случайных возмущениях. Полное описание поведения возмущенной системы дает уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка. Рассматривается аппроксимация плотности распределения с использованием специальной функции – квазипотенциала. Квазипотенциал удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби, аналитическое решение которого является очень сложной задачей.

В малой окрестности цикла первым приближением квазипотенциала является орбитальная квадратичная форма. Матрица этой квадратичной формы, заданная на детерминированной орбите, дает простое количественное описание поведения нелинейной системы при наличии малых случайных возмущений и позволяет оценить чувствительность отдельных участков цикла на внешние возмущения. Эта матричная функция рассматривается как функция чувствительности цикла.

В п. 3 с помощью мультипликаторов проведен подробный анализ асимптотической устойчивости циклов детерминированной системы Хиггинса. Рассматривается чувствительность соответствующей стохастически возмущенной модели. Методом прямого численного моделирования найдена экспериментальная дисперсия, характеризующая разброс случайных траекторий вдоль цикла. Выявлены чувствительные участки цикла. Отмечается уменьшение стохастической устойчивости отдельных участков цикла с ростом жесткости системы, в то время как детерминированная устойчивость цикла в целом увеличивается.

Исследуется возможность описания локальной чувствительности цикла с помощью собственных чисел системы первого приближения. Метод, использующий

подходящую замену системы координат, позволяет локализовать наиболее чувствительные участки цикла, но лишь приближенно.

Результаты, наиболее согласующиеся с экспериментальной дисперсией, были получены при использовании функции стохастической чувствительности.

В приложении к статье приводится алгоритм вычисления функции чувствительности.

1. Методы исследования детерминированной устойчивости

Математическая модель многих нелинейных автоколебательных детерминированных систем описывается в виде

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

где x – n -вектор, $f(x)$ – достаточно гладкая вектор-функция. Система имеет T -периодическое решение $x = \xi(t)$ (на фазовой плоскости – предельный цикл).

Исследование устойчивости периодического решения системы (1) основано на рассмотрении линейной системы первого приближения

$$\dot{z} = F(t)z(t), \quad F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad (2)$$

задающей динамику малых отклонений $z(t) = x(t) - \xi(t)$.

Одной из стандартных характеристик устойчивости цикла являются *мультипликаторы* ρ_i – собственные числа матрицы монодромии $Z(T)$, где $Z(t)$ – фундаментальная матрица решения системы (2). Аналогом мультипликаторов являются *характеристические показатели Ляпунова*.

Один из мультипликаторов (для определенности, ρ_1) всегда равен 1. Условие $|\rho_i| < 1$ для $\forall i = \overline{2, n}$ является необходимым и достаточным для асимптотической орбитальной устойчивости цикла в целом.

Мультипликатор, характеризующий чувствительность цикла к начальным детерминированным возмущениям, является простым описанием потока около цикла за период, но эта интегральная характеристика не дает возможность исследовать устойчивость отдельных участков цикла.

Одну из естественных мер локальной устойчивости цикла дают собственные числа $\lambda_i(t)$ матрицы $F(t)$. Цикл локально устойчив вблизи точки t , если $\text{Re}(\lambda_i(t)) < 0$ для всех i . В противном случае – локально неустойчив.

В целом устойчивый предельный цикл может одновременно иметь участки локальной устойчивости (на которых отклонения траекторий уменьшаются) и локальной неустойчивости (на которых отклонения траекторий увеличиваются). На неустойчивых участках при воздействии внешних возмущений отклонения траекторий от детерминированной орбиты может значительно увеличиваться, даже если в целом (глобально) цикл очень устойчив.

Детальное исследование локальной устойчивости различных нелинейных систем и методы ее количественной оценки описаны в работе Али и Мензингера (*Ali F. and Menzinger M.*) [8]. Авторы приводят анализ различных сценариев, по которым предельный цикл теряет устойчивость при различных типах бифуркаций. Были рассмотрены примеры, в которых предельный цикл теряет устойчивость в целом ли-

бо «плавно» (в случаях бифуркации Хопфа), либо «резко», когда строго локально устойчивые участки сосуществуют с участками строгой локальной неустойчивости (в случае удвоения периода). Авторами был предложен новый количественный метод оценки локальной устойчивости. Метод заключается в переходе в новую систему координат, базис которой в каждой точке цикла $\xi(t)$ состоит из касательного вектора и векторов нормалей. В новых переменных $\tilde{z} = Uz$, где $U(t)$ – матрица ортогонального преобразования, система первого приближения (2) выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\tilde{z}(t) = B\tilde{z}(t),$$

где

$$B(t) = UF(t)U^{-1} + \frac{dU}{dt}U^{-1} - \text{матрица устойчивости (stability matrix)}. \quad (3)$$

2. Методы исследования стохастической устойчивости

Рассмотрим динамическую систему со случайными внешними возмущениями, которые описываются стохастическим дифференциальным уравнением *Ито*

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon\sigma(x)\dot{w}, \quad (4)$$

где $w(t)$ – винеровский процесс; ε – интенсивность возмущений; $\sigma(x)$ – достаточно гладкая $n \times n$ – функция, определяющая зависимость помех от состояния системы.

В результате действия случайных возмущений траектории системы сходят с детерминированного цикла и формируют вокруг него некоторый пучок. При воздействии малых шумов большие отклонения от предельного цикла маловероятны. Уравнение *Колмогорова – Фоккера – Планка* дает наиболее детальное описание вероятностного поведения системы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i(x)\rho) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij}(x)\rho),$$

где $a_{ij} = [\sigma(x)\sigma^T(x)]_{ij}$.

Функция ρ описывает плотность распределения пучка возмущенных траекторий вокруг детерминированного цикла. Так как уравнения такого типа в общем случае трудно решаются, то асимптотическое поведение характеристик системы при малых возмущениях представляет несомненный интерес.

Первые результаты по исследованию устойчивости нелинейных систем с использованием уравнения *Колмогорова – Фоккера – Планка* и различных методов преобразования и приближений были получены *Рытовым* в 1950-х годах [9–10]. Позднее работы в этом направлении велись *Дыкманом (М. Дускман)* [11]. Анализ воздействия случайных возмущений на циклы дискретных систем представлен в [12]. Реакция хаотических аттракторов на случайные возмущения исследовалась в [13].

В настоящее время активно разрабатывается новый подход, связанный с использованием специальной функции – *квазипотенциала* [14]. Квазипотенциал описывает противодействие силам устойчивости, которые влияют на динамику точки в

окрестности аттрактора. Функция квазипотенциала v удовлетворяет уравнению *Гамильтона – Якоби*

$$\left(f(x), \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \sigma(x)\sigma^\top(x) \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \quad (5)$$

с условием на аттракторе $v = 0$, а вне аттрактора $v > 0$. Можно показать, что асимптотика стационарной плотности $\rho(x, \varepsilon)$ при малых ε имеет вид

$$\rho(x, \varepsilon) \approx K e^{-v(x)/\varepsilon^2}.$$

Решение уравнения (5) также является сложной задачей даже для двумерного случая, поэтому рассматривается аппроксимация квазипотенциала в малой окрестности аттрактора. Положим $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ – отклонение точки x от аттрактора, где $\gamma(x)$ – ближайшая к x точка на цикле. Первым приближением квазипотенциала [15] является функция

$$\varphi(x) = (\Delta(x), \Psi(\gamma(x)) \Delta(x)), \quad v(x) = \varphi(x) + O(\|\Delta(x)\|^3),$$

задаваемая функцией $\Psi(\gamma) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma)$, определенной на аттракторе.

Введем матричную функцию $\Phi(\gamma) = \Psi^+(\gamma)$ ($^+$ – псевдообращение). В результате асимптотика стационарной плотности распределения $\rho(x, \varepsilon)$ при малых шумах в малой окрестности цикла может быть записана в форме нормального распределения

$$\rho(x, \varepsilon) \approx \rho_*(x, \varepsilon) = K \exp\left(-\frac{(\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x))\Delta(x))}{2\varepsilon^2}\right)$$

с ковариационной матрицей $\varepsilon^2 \Phi(\gamma)$. Матрица $\Phi(\gamma)$ характеризует реакцию системы (4) вблизи цикла на случайные возмущения.

Для отыскания значений $\Phi(\gamma)$ на цикле используется естественная параметризация, задаваемая T -периодическим решением $\xi(t)$. Связывая точки цикла с точками интервала $[0, T)$, получим соотношение $\Phi(\xi(t)) = W(t)$. Матрица $W(t)$ является единственным решением системы [15]

$$\dot{W} = F(t)W + WF^\top(t) + P(t)S(t)P(t), \quad W(0) = W(T), \quad W(t)r(t) \equiv 0, \quad (6)$$

состоящей из уравнения *Ляпунова*, условия периодичности и условия вырожденности. Здесь

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad S(t) = \sigma(\xi(t))\sigma^\top(\xi(t)), \quad r(t) = f(\xi(t)), \quad P(t) = P_{r(t)},$$

где $P_r = I - rr^\top / r^\top r$ – матрица проектирования на подпространство, ортогональное вектору $r \neq 0$.

Матрица $W(t)$ играет роль стохастической функции чувствительности цикла. Ее анализ и методы отыскания рассмотрены в работе [16].

3. Двумерный случай. Система уравнений Хиггинса

Рассмотрим двумерную систему дифференциальных уравнений Хиггинса [4]

$$\begin{cases} dx/dt = f(x, y) = 1 - xy, \\ dy/dt = g(x, y) = Py \left(x - \frac{1+Q}{Q+y} \right), \end{cases} \quad (7)$$

где x – число свободных, y – число присоединенных нуклеотидов к биполимеру, находящемуся в процессе редупликации; P и Q – параметры. В данной работе рассматривается классический случай $Q = 1$, при этом параметр P определяет жесткость системы (наличие ярко выраженных быстрых и медленных участков цикла).

На рис. 1, 2 изображена эволюция предельного цикла на фазовой плоскости при различных значениях параметра системы.

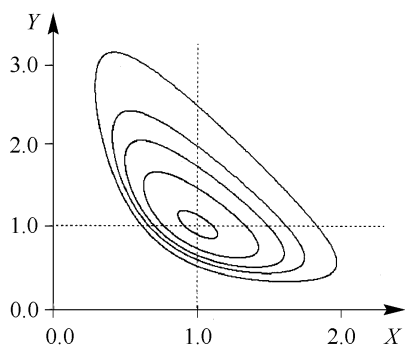


Рис. 1. Эволюция предельного цикла системы Хиггинса при квазигармоническом режиме колебаний ($Q = 1$) для значений P : 2.01 (наименьший размер); 2.1; 2.2; 2.3; 2.5. Точка покоя (1, 1)

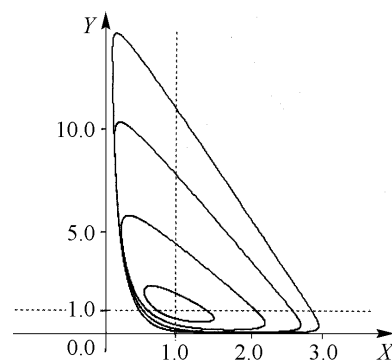


Рис. 2. Эволюция предельного цикла системы Хиггинса при квазигармоническом режиме колебаний ($Q = 1$) для значений P : 2.2 (наименьший размер); 3; 4; 5. Точка покоя (1, 1)

Из рисунков видно, что с увеличением P (при фиксированном $Q = 1$) форма предельного цикла достаточно быстро и качественно меняется: от формы, близкой к эллипсу, к форме прямоугольного треугольника с катетами, проходящими близко от осей координат. С увеличением параметра жесткости системы «катеты» треугольного предельного цикла все более прижимаются к осям координат, и тем больше он растет вдоль оси OY . Скорость прохождения «гипотенузы» предельного цикла в несколько раз больше скорости прохождения траекторией других участков цикла.

Мультипликаторы. Для двумерной системы (7) один из мультипликаторов тождественно равен 1, а другой имеет вид

$$\rho = \exp \left(\int_0^T \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(\tau)) + \frac{\partial g}{\partial x}(\xi(\tau)) \right] d\tau \right), \quad (8)$$

где $x = \xi(t)$ – T -периодическое решение.

Мультипликатор ρ определяет степень устойчивости цикла к возмущению начальных данных. Значение ρ указывает (асимптотически), во сколько раз траектория приближается к циклу за один оборот.

Условием устойчивости цикла является неравенство $\rho < 1$ (критерий Пуанкаре).

График $\rho(P)$ – зависимости мультипликатора ρ от параметра жесткости системы P – представлен на рис. 3. Из рисунка видно, что при увеличении параметра жесткости системы значение мультипликатора уменьшается, следовательно, чем система жестче, тем цикл устойчивее в целом.

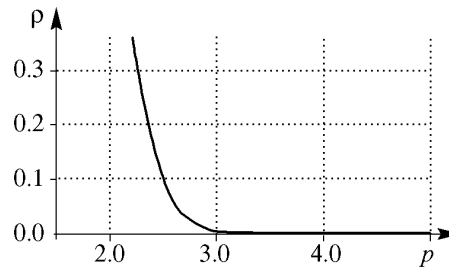


Рис. 3. Зависимость мультипликатора от параметра жесткости системы

Экспериментальная дисперсия. Для экспериментального исследования влияния внешних возмущений рассмотрим стохастическую систему с аддитивными шумами

$$\begin{cases} dx/dt = 1 - xy + \varepsilon \dot{w}_1, \\ dy/dt = Py \left(x - \frac{1+Q}{Q+y} \right) + \varepsilon \dot{w}_2, \end{cases} \quad (9)$$

где $w_i(t)$ ($i = 1, 2$) – независимые стандартные винеровские процессы, ε – интенсивность возмущений.

Добавление шумов приводит к стохастической деформации детерминированной орбиты. Под воздействием случайных возмущений траектории системы сходят с детерминированного цикла и формируют вокруг него некоторый пучок. Для получения оценки экспериментальной дисперсии этого пучка \bar{D} проведены прямое численное моделирование случайных траекторий и подсчет их отклонений по вектору нормали от детерминированной орбиты в каждой точке цикла.

На рис. 4, 5 показана экспериментальная дисперсия $\bar{D}(\xi(t))$ в точках цикла $\xi(t)$ при $P = 2.2$. На рис. 4 видна высокая степень неравномерности распределения экспериментальной дисперсии на цикле. Отрезок времени $[0, T]$ на рис. 4 отражен в долях единицы. Значения дисперсии удобно связать с точками цикла в фазовой плоскости.

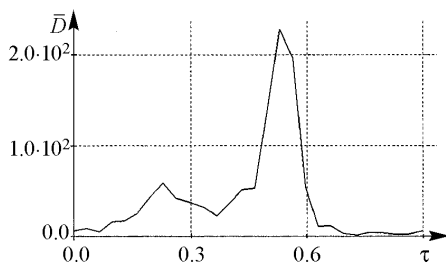


Рис. 4. Экспериментальная дисперсия за период; $P = 2.2$, $Q = 1$, $\tau = t/T$

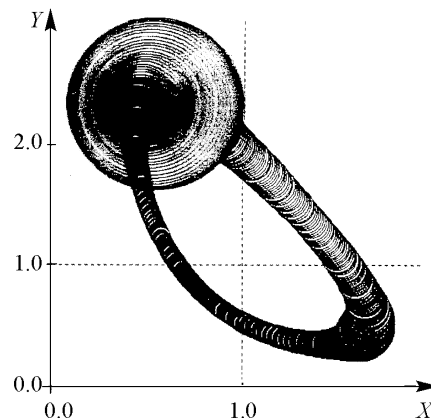


Рис. 5. Экспериментальная дисперсия в фазовой плоскости; $P = 2.2$, $Q = 1$

кости; при этом для наглядности сопоставим каждому значению дисперсии в точке круг пропорциональный значению дисперсии. Рис. 5 позволяет определить наиболее чувствительные участки орбиты к случайным внешним возмущениям: наиболее чувствительными участками цикла являются верхний «угол» треугольного предельного цикла и второй по величине нижний «угол». Рис. 5 показывает, что разброс случайных траекторий имеет нерегулярный характер.

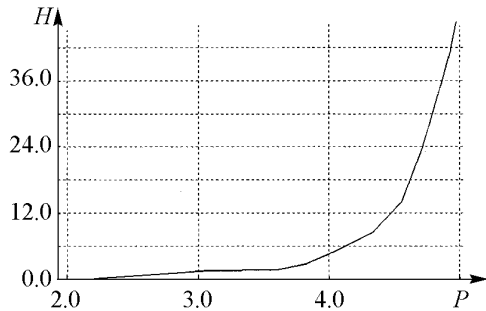


Рис. 6. Зависимость максимума экспериментальной дисперсии от жесткости системы

Для сравнительного анализа удобно рассматривать функцию максимума экспериментальной дисперсии в зависимости от параметра жесткости P

$$H(P) = \max_{t \in [0, T]} \{\bar{D}(\xi(t))\}.$$

На рис. 6 представлен график максимума экспериментальной дисперсии по отношению к жесткости. По графику видно, что с увеличением P значения функции $H(P)$ растут, что говорит

об уменьшении стохастической устойчивости отдельных участков цикла. С ростом P все больше локализуется участок цикла, на котором достигается максимум экспериментальной дисперсии.

При сопоставлении экспериментальной дисперсии (см. рис. 6) с мультипликатором (см. рис. 3) важно отметить, что с ростом жесткости системы глобальная устойчивость цикла увеличивается (значение $\rho(P)$ уменьшается), в то время как стохастическая устойчивость отдельных участков уменьшается (значение $H(P)$ увеличивается).

Собственные числа системы первого приближения. Проведем анализ локальной устойчивости циклов системы с помощью собственных чисел матрицы $F(t)$ системы первого приближения (2). Динамика поведения значений собственных чисел матрицы $F(t)$ за период для уравнений Хиггинса показана на рис. 7. Рассмотрим изменение максимума значений собственных чисел на цикле в зависимости от жесткости системы

$$\Lambda(P) = \max_{t \in [0, T]} \max\{\text{Re}\lambda_1(t), \text{Re}\lambda_2(t)\}$$

Из табл. 1 видно, что с ростом параметра жесткости P растет значение $\Lambda(P)$,

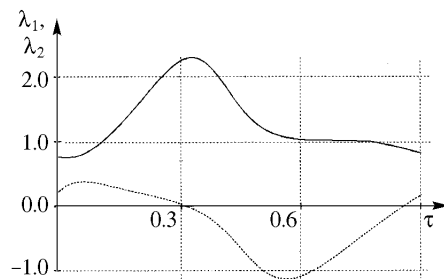


Рис. 7. Собственные числа λ_1, λ_2 матрицы $F(t)$ за период; $P = 2.2, Q = 1, \tau = t/T$

Таблица 1
Максимум собственных чисел матрицы $F(t), Q = 1$

Параметр P	Значение $\Lambda(P)$
2.2	0.249×10^1
3.0	0.713×10^1
4.0	1.397×10^1
5.0	2.161×10^1
7.0	3.959×10^1

что характеризует общую тенденцию увеличения чувствительности отдельных участков цикла.

Сравнивая рис. 7 с рис. 4, отметим, что $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ не позволяют выявить чувствительные участки предельного цикла.

Таким образом, несмотря на то, что собственные числа $F(t)$ системы (2) и отражают рост локальной неустойчивости, они не характеризуют особенности на цикле и не локализуют участки локальной устойчивости или неустойчивости.

Собственные числа матрицы устойчивости. Рассмотрим для двумерного случая метод исследования локальной устойчивости [8], связанный с базисом, состоящим из касательного и нормального векторов к циклу. Матрица устойчивости (3) в этом случае будет иметь вид

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{tt} & \lambda_{tn} \\ \lambda_{nt} & \lambda_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{f^2 + g^2}} \begin{pmatrix} f^2 f_x + g^2 g_y + fg(f_y + g_x) & (g^2 - f^2)(f_y + g_x) + 2fg(f_x + g_y) \\ 0 & f^2 g_y + g^2 f_x - fg(f_y + g_x) \end{pmatrix},$$

где f_x , f_y , g_x , g_y – соответствующие частные производные, индекс n – обозначение компоненты нормали, индекс t – компоненты касательной.

Описанный в работе [8] метод (см. п. 1 настоящей статьи) разделяет движение по отдельным направляющим векторам, что позволяет анализировать интересующее нас отклонение траекторий по нормали без влияния касательной составляющей. В этом случае, динамика нормальных отклонений целиком определяется собственным числом λ_{nn} . Локальная устойчивость характеризуется знаком λ_{nn} :

- на тех участках, где $\lambda_{nn} \ll 0$, влияние возмущений мало;
- на тех участках, где $\lambda_{nn} \sim 0$, траектории движутся вдоль цикла, так как нет преобладающей силы отталкивания или притягивания (обычно при мягком режиме колебаний, например, квазигармонические колебания);
- на тех участках, где $\lambda_{nn} \gg 0$, воздействие внешних шумов велико и вероятны большие отклонения возмущенных траекторий от детерминированной орбиты.

В работе [8] предполагалось, что амплитуда локальных флуктуации достигает своего максимума именно там, где λ_{nn} имеет положительный пик. В этом смысле λ_{nn} должна характеризовать меру локальной неустойчивости.

На рис. 8, 9 представлены графики λ_{nn} за период и на фазовой плоскости в точках цикла. При сравнении рисунков экспериментальной дисперсии (см. рис. 5) и λ_{nn} (см. рис. 9) в фазовой плоскости действительно обнаруживается некоторая корреляция распределения значений на цикле. Сравним графики экспериментальной дисперсии (см. рис. 4) и λ_{nn} (см. рис. 8) за период. Из графиков видно, что максимум экспериментальной дисперсии достигается на том участке цикла, где λ_{nn} имеет наибольший перепад значений при изменении знака. Таким образом, λ_{nn} не описывает в точности распределение экспериментальной дисперсии на цикле. Наиболее наглядно это несоответствие видно из сопоставления рис. 5 и рис. 9.

Рассмотрим максимум собственного числа матрицы стабильности

$$\Lambda_{nn}(P) = \max_{t \in [0, T)} \{\lambda_{nn}(t)\}.$$

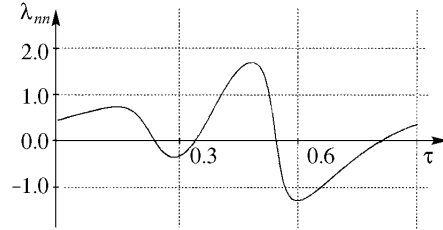


Рис. 8. Собственное число матрицы устойчивости λ_{nn} за период; $P = 2.2$, $Q = 1$, $\tau = t/T$

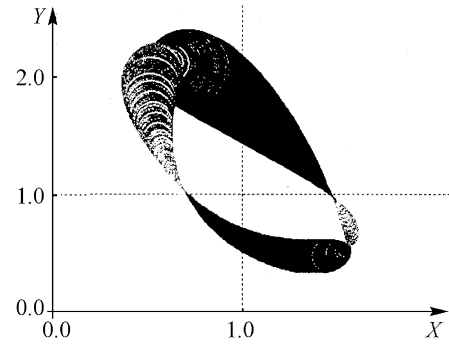


Рис. 9. Собственное число матрицы устойчивости λ_{nn} в фазовой плоскости. Серый тон – отрицательные значения, черный – положительные; $P = 2.2$, $Q = 1$

Таблица 2
Значение максимума λ_{nn} относительно жесткости системы. $Q = 1$

Параметр P	Значение $\Lambda_{nn}(P)$
2.2	0.173×10^1
3.0	1.041×10^1
4.0	2.943×10^1
5.0	5.606×10^1
7.0	1.315×10^1

качества устойчивости B) качественно различна, при этом компоненты матрицы дают более подходящую оценку меры локальной устойчивости.

Функция стохастической чувствительности. Рассмотрим решение уравнения Ляпунова (6) в двумерном случае. Вследствие вырожденности матрица $W(t)$ имеет вид

$$W(t) = \mu(t)P(t),$$

здесь $P(t) = p(t)p^\top(t)$, где $p(t) \perp f(\xi(t))$ и $\|p(t)\| = 1$.

Функция $\mu(t)$ – T -периодическая скалярная функция чувствительности – удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mu} = a(t)\mu + b(t) \quad (10)$$

с T -периодическими коэффициентами, где

$$a(t) = p^\top(t)[F^\top(t) + F(t)]p(t) \quad \text{и} \quad b(t) = p^\top(t)S(t)p(t).$$

Функция стохастической чувствительности аппроксимирует (при малых возмущениях и в небольшой окрестности) дисперсию пучка случайных траекторий, формирующегося вокруг детерминированной орбиты [17]. Это простое аналитическое описание позволяет определить наиболее чувствительные к случайным возмущениям участки детерминированной орбиты.

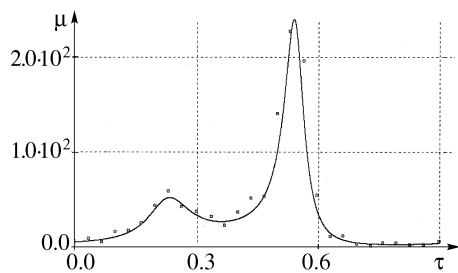


Рис. 10. Функция чувствительности μ за период. Метки – соответствующие значения экспериментальной дисперсии; $P = 2.2, Q = 1, \tau = t/T$

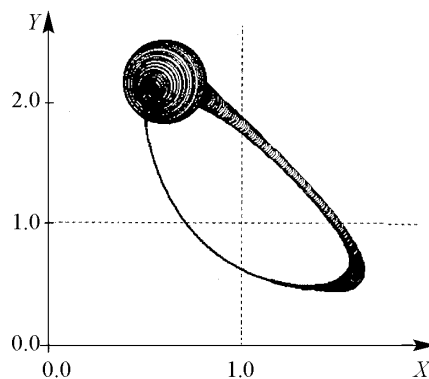


Рис. 11. Функция чувствительности μ в фазовой плоскости; $P = 2.2, Q = 1$

На рис. 10, 11 показаны графики функции чувствительности на цикле. Сравнивая рис. 11 с рис. 5 можно отметить совпадение наиболее чувствительных участков цикла: верхний «угол» треугольного предельного цикла и, менее выраженный, нижний «угол». Из рис. 10 видно, что поведение функции чувствительности (на рисунке – сплошная линия) на цикле хорошо согласуется с поведением экспериментальной дисперсии (на рисунке – метки).

Уравнения Хиггинса также исследовал Ю.М. Романовский [4]. В его работе отмечены наиболее чувствительные участки цикла к случайным флуктуациям: вторая половина нижнего «катета» и нижний «угол» треугольного предельного цикла.

Рассмотрим максимум функции чувствительности для заданного параметра жесткости P

$$M(P) = \max_{t \in [0, T]} \{\mu(t)\}.$$

Исследуя систему в квазигармоническом режиме колебаний при увеличении P вблизи бифуркационного значения параметров $P = 2$, отметим некоторое уменьшение значения $M(P)$ (рис. 12).

Это согласуется с поведением мультипликатора. Из графика видно, что при дальнейшем росте жесткости системы P значение $M(P)$ начинает возрастать. Стохастическая устойчивость цикла уменьшается [18–19]. Этот важный вывод об уменьшении стохастической устойчивости при росте P также подтвержден прямым моделированием случайных траекторий.

Рассмотрим связь функции чувствительности $\mu(t)$ и компоненты матрицы устойчивости $\lambda_{nn}(t)$. Эти функции связывает следующее соотношение:

$$\lambda_{nn}(t) = \frac{\sqrt{f^2 + g^2}}{2} a(t),$$

а так как $a(t)$ лишь параметр, задающий $\mu(t)$ (см. формулу (10)), то $\lambda_{nn}(t)$ лишь косвенным образом характеризует стохастическую устойчивость.

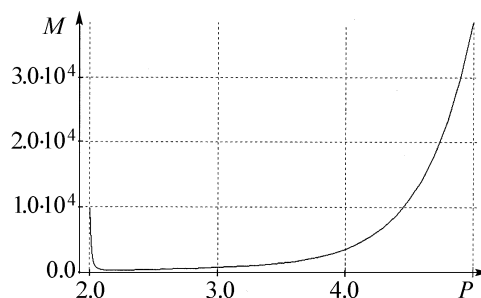


Рис. 12. Зависимость максимума функции чувствительности от жесткости системы

Таким образом, функция чувствительности позволяет наиболее точно определить и локализовать чувствительные к случайным возмущениям участки детерминированной орбиты, а также отражает динамику роста стохастической неустойчивости отдельных участков цикла с ростом жесткости системы. Отметим также, что получение экспериментальной дисперсии для жесткой системы является трудоемкой вычислительной операцией, что делает использование функции чувствительности более удобным математическим аппаратом для исследования стохастической устойчивости.

Работа поддержана грантом РФФИ № 04-01-96098 Урал.

Приложение

Вычисление функции чувствительности

1. Осуществляется построение детерминированного предельного цикла с заданной точностью для исследуемых параметров системы (P, Q) . Для достижения требуемой точности цикла использовалось сечение Пуанкаре. Очередная точка цикла на каждом шаге вычислялась с помощью метода Рунге – Кутты.

2. Вычисляются значения функции чувствительности $\mu(t)$ в каждой точке цикла из набора, полученного на предыдущем этапе алгоритма.

Приведем аналитический способ решения уравнения (10). Общее решение однородного уравнения $\dot{g}(t) = a(t)g(t)$ имеет вид $Cg(t)$, где $g(t) = \exp(\int_0^t a(\tau)d\tau)$, C – константа. Метод вариации произвольной постоянной приводит к уравнению

$$\dot{c}(t) = b(t)g(t) \quad \text{с решением } c(t) = \int_0^t \frac{b(\tau)}{g(\tau)} d\tau.$$

Общее решение имеет вид $\mu(t) = g(t)(C + c(t))$. (11)

Используя условие периодичности, найдем константу C

$$\mu(T) = g(T)(C + c(T)) = g(0)(C + c(0)) = \mu(0),$$

откуда

$$C = \frac{g(T)c(T)}{1 - g(T)}.$$

Функции $g(t)$ и $c(t)$ можно искать численно, решая задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{g}(t) = a(t)g(t), \\ \dot{c}(t) = b(t)/g(t) \end{cases} \quad (12)$$

с начальным условием $g(0) = 1, c(0) = 0$. Используя значения $g(t), c(t)$ и C , находим по формуле (11) искомую функцию чувствительности.

Для системы уравнений Хиггинса со случайными возмущениями (9) функции $a(t)$ и $b(t)$ в уравнениях (10), (12) имеют вид

$$a(t) = \frac{2}{f^2 + g^2} \left[(fx - Pfy - gy) + f^2 \left(px - \frac{PQ(Q+1)}{(Q+y)^2} \right) \right],$$

$$b(t) = \frac{2\varepsilon^2}{f^2 + g^2} [g^2 + f^2],$$

где $f = f(x, y)$, $g = g(x, y)$ – функции из (7), P и Q – параметры системы.

3. Вычисляется $M(P)$ как максимум значений функции чувствительности, посчитанных в каждой точке цикла для исследуемого параметра $P(Q = 1)$.

Библиографический список

1. *Higgins J.* // J.Ind.Eng.Chem. 1967. Vol. 59, № 5. P. 18.
2. *Higgins J.* // Proc.N.A.S.(USA). 1964. Vol. 51. P. 989.
3. *Sel'kov E.E.* // Eur.J.Biochem. 1968. № 4. P. 79.
4. *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975. С. 61, 258.
5. *Гарел Д., Гарел О.* Колебательные химические реакции. М.: Мир, 1986.
6. *Tomita K., Daido H.* Possibility of chaotic behaviour and multi-basins in forced glycolytic oscillations // Physics Letters A. 1980. Vol. 79, № 2, 3. P. 133.
7. *Kurrer C., Schulten K.* Effect of noise and perturbations on limit cycle systems // Physica D. 1991. Vol. 50. P. 311.
8. *Ali F., Menzinger M.* On the local stability of limit cycle // Chaos. 1999. Vol. 9, № 2. P. 348.
9. *Рытов С.М.* Флуктуации в автоколебательных системах томсоновского типа. I // ЖЭТФ. 1955. Т. 29, вып. 3(9). С. 304.
10. *Рытов С.М.* Флуктуации в автоколебательных системах томсоновского типа. II // Там же. С. 315.
11. *Duckman M., Chu X., Ross J.* Stationary probability distribution near stable limit-cycles far from Hopf bifurcation points // Physical Review E. 1993. Vol. 48, № 3. P. 1646.
12. *Кузнецов А.П., Капустина Ю.В.* Свойства скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 6. С. 78.
13. *Копейкин А.С., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Особенности процесса установления вероятностной меры на хаотических аттракторах в системах Лоренца и Ресслера с учетом флуктуаций // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 6. С. 65.
14. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. С. 424.
15. *Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б.* Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 1. С. 51.
16. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity analysis of the stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // Dynamic Systems and Applications. 2002. Vol. 11, № 2. P. 293.
17. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator // Physica A. 2000. 728. P. 126.
18. *Башикурцева И.А., Смирнов А.В., Ряшко Л.Б.* Стохастическая устойчивость гликолитического осциллятора // Материалы III Уральской научно-практической

конференции «Математическое моделирование в медицине и биологии». 2001. С. 18.

19. Башкирцева И.А., Смирнов А.В., Ряшко Л.Б. Сравнительный анализ устойчивости гликолитического осциллятора к детерминированным и случайным возмущениям // Материалы 33-й Региональной молодежной школы-конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики». 2002. С. 107.

Уральский государственный
университет

Поступила в редакцию 1.11.2003
После доработки 3.11.2004

DETERMINISTIC AND STOCHASTIC STABILITY ANALYSIS FOR GLYCOLITIC OSCILLATOR

L.B. Ryashko, A.V. Smirnov

The methods of sensitivity analysis of cycles under deterministic and stochastic disturbances for Higgins model describing glycolytic self-oscillations are considered. Two approaches connected with local exponents and stochastic sensitivity function are compared. The most sensitive parts of cycles are discovered. It was found that some parts of cycle lose stochastic stability along with stability increasing of cycle as whole.



Ряшко Лев Борисович – родился в 1953 году, окончил Уральский госуниверситет (1975), кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой вычислительной математики Уральского госуниверситета, Соросовский доцент (1996,1998). Область научных интересов - устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике.
E-mail: Lev.Ryashko@usu.ru



Смирнов Алексей Валерьевич – родился в 1979 году, окончил Уральский госуниверситет (2001), аспирант кафедры математической физики. Область научных интересов – устойчивость стохастических нелинейных систем.



Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 5–6, 2005

УДК 548; 537.611.46

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВЛЕНИЯ СОЛИТОННОГО РЕЖИМА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН

А.А. Галишиников, Г.М. Дудко, Ю.А. Филимонов

На основе численного решения нелинейного уравнения Шредингера рассмотрен процесс формирования солитонов магнитостатических волн в условиях, когда амплитуда и форма входного импульса отличаются от солитонного решения и на эволюцию солитона оказывает влияние несолитонная часть. Показано, что при отсутствии диссипации возможно наблюдение осцилляций пиковой амплитуды солитона магнитостатических волн, характеризуемых пространственным периодом Λ : $L_D \leq \Lambda \leq 66 \cdot L_D$ (или частотой Ω : $0.015 \cdot T_D^{-1} \leq \Omega \leq T_D^{-1}$), где L_D и T_D – длина и время дисперсии импульса. В условиях диссипации, соответствующей реальным ферритовым пленкам, влияние несолитонной части проявляется лишь в виде немонотонной зависимости пиковой мощности выходного сигнала магнитостатических волн от мощности входного импульса.

Введение

Распространение солитонов магнитостатических волн (МСВ) в ферритовых пленках активно исследуется в связи с перспективностью их применения в СВЧ-устройствах обработки информации [1, 2]. К настоящему времени показана возможность образования солитонов МСВ в ферритовых пленках и структурах феррит – диэлектрик – металл [3–5] и выполнены многочисленные эксперименты по их наблюдению [6–11]. Было проведено подробное численное моделирование распространения солитонов МСВ на основе как нелинейного уравнения Шредингера [9, 10, 12–14], так и системы нелинейных дифференциальных уравнений движения пространственных фурье-компонент вектора СВЧ намагниченности нелинейного импульса [15]. Были также описаны критерии формирования солитона [16] и исследованы вопросы определения скорости распространения [14, 17], затухания [18], столкновения и

отражения солитонов [19]. Однако до сих пор при анализе прошедшего пленку импульса МСВ никак не учитывалась возможность влияния на его огибающую несолитонной части импульса. Между тем для оптических солитонов хорошо известно [20], что для входных импульсов, отличающихся от солитонного решения формой или амплитудой, несолитонная составляющая импульса может заметно менять условия формирования солитона. Цель данной работы – на основе численного решения нелинейного уравнения Шредингера исследовать особенности поведения солитона МСВ в ферритовой пленке, определяемые несолитонной частью импульса.

Отметим, что впервые влияние несолитонной составляющей (несолитонной волны) на солитон нелинейного уравнения Шредингера было описано в работе [21]. Решение нелинейного уравнения Шредингера методом обратной задачи рассеяния показало, что начальное распределение безразмерной комплексной огибающей волны $\varphi(x, t)$ вида

$$\varphi(x, t = 0) = N \operatorname{sech}[(N + \delta)x], \quad |\delta| < 1/2 \quad (1)$$

трансформируется в N солитонов и несолитонную волну, причем таким образом, что отношение суммарной энергии солитонов к полной энергии составляет величину

$$1 - \frac{\delta^2}{(N + \delta)^2}. \quad (2)$$

При $\delta \neq 0$, $-1/2$ несолитонная составляющая приводит к осцилляциям пиковой амплитуды импульса, которые затухают пропорционально $t^{-1/2}$ из-за дисперсионного расплывания несолитонной волны. Тем не менее для оптических солитонов наблюдение таких осцилляций вполне возможно, поскольку расстояния, на которых они все еще заметны, могут составлять несколько десятков дисперсионных длин импульса L_D^1 , что, с одной стороны, может заметно превосходить длительность входного импульса, а с другой, оказывается гораздо меньше длины пробега солитона в высококачественном оптическом волокне [20].

Иначе обстоит дело с импульсами МСВ в ферритовых пленках. Во-первых, в экспериментах по наблюдению солитонов МСВ используются входные СВЧ-импульсы квазипрямоугольной формы. Это изменяет условия формирования солитона относительно случая *sech*-образного импульса, и следует ожидать лишь качественного совпадения с результатами работы [21]. Во-вторых, достаточно высокая скорость релаксации СВЧ намагниченности в ферритовых пленках приводит к более быстрому спаду амплитуды несолитонной части и ограничивает длину пробега импульса МСВ лишь единицами длин дисперсии L_D . В данной работе на примере поверхностных магнитоэлектрических волн (ПМСВ) в структуре феррит – диэлектрик – металл показано, что при типичных для ферритовых пленок значениях параметра диссипации влияние несолитонной части проявится в виде максимума зависимости выходной пиковой мощности от мощности входного сигнала.

¹На длине L_D входной гауссов импульс, имевший длительность T_0 по уровню e^{-1} , уширяется в $\sqrt{2}$ раз [20].

1. Постановка задачи

Будем рассматривать распространение ПМСВ в структуре феррит – диэлектрик – металл при значениях параметров, отвечающих эксперименту, описанному в [11]. Считаем, что структура состоит из пленки железоиттриевого граната (ЖИГ) толщиной $d = 14.1$ мкм, намагниченностью насыщения $4\pi M_0 = 1750$ Гс и шириной линии ферромагнитного резонанса $\Delta H = 0.35$ Э, которая через воздушный зазор $h = 100$ мкм нагружена на металлический экран. Для определенности считаем, что структура помещена во внешнее магнитное поле $H = 897$ Э, которое ориентировано касательно плоскости пленки и перпендикулярно направлению распространения волны. В структуре с такими параметрами ПМСВ на частоте несущей $f = 4594$ МГц характеризуется коэффициентами дисперсии $\beta = 2.5 \cdot 10^4$ см²/с и нелинейности $\gamma = -7.8 \cdot 10^9$ с⁻¹, которые удовлетворяют критерию Лайтхилла формирования солитонов [5], и значениями групповой скорости $V_g = 3.6 \cdot 10^6$ см/с и временного декремента $\alpha = 6 \cdot 10^6$ с⁻¹ [22].

Для моделирования эволюции волны воспользуемся стандартным подходом, основанном на решении нелинейного уравнения Шредингера для комплексной огибающей волны φ [4, 12, 22]

$$j \frac{\partial \varphi}{\partial t} + j V_g \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \gamma |\varphi|^2 \varphi + j \alpha \varphi = 0 \quad (3)$$

с граничными условиями, соответствующими возбуждению волны прямоугольным импульсом с амплитудой φ_0 и длительностью T_0

$$\varphi(x=0, t) = \begin{cases} \varphi_0, & t \leq T_0, \\ 0, & t > T_0. \end{cases} \quad (4)$$

При этом можно определить пороги образования N -солитонных режимов [4]

$$\varphi_0^N = \frac{\pi}{2V_g T_0} \sqrt{\left| \frac{\beta}{\gamma} \right|} (2N - 1). \quad (5)$$

С учетом (5) граничные условия (4) можно переписать в виде, аналогичном (1),

$$\varphi(x=0, t) = \begin{cases} \frac{\pi}{V_g T_0} \sqrt{\left| \frac{\beta}{\gamma} \right|} (N - \delta), & t \leq T_0, \\ 0, & t > T_0. \end{cases} \quad (6)$$

Будем рассматривать случай входных импульсов длительностью $T_0 = 20$ нс при значениях параметров уравнения (3), отвечающих выбранной частоте несущей $f = 4594$ МГц. При этом значения порогов одно- и двухсолитонного режимов, рассчитанные из (5), составляют $\varphi_0^1 = 0.039$ и $\varphi_0^2 = 0.117$, соответственно.

1.1. Бездиссипативный случай. Рассмотрим процесс формирования солитонов в условиях отсутствия диссипации $\alpha = 0$. На рис. 1 приведены зависимости пиковой амплитуды импульса $|\varphi_{\max}(x, t)|$ от его координаты для входных амплитуд в диапазоне $\varphi_0^1 < \varphi_0 < \varphi_0^2$ ($|\delta| < 1/2$). Можно видеть, что аналогично известному случаю, описанному в [20, 21], зависимость $|\varphi_{\max}(x, t)|$ имеет осциллирующий характер, которому можно сопоставить амплитуду $\delta\varphi$ и пространственный период Λ , определив его как расстояние между соседними максимумами. Поведение $|\varphi_{\max}(x, t)|$ можно охарактеризовать частотой осцилляций $\Omega = V_g/\Lambda$.

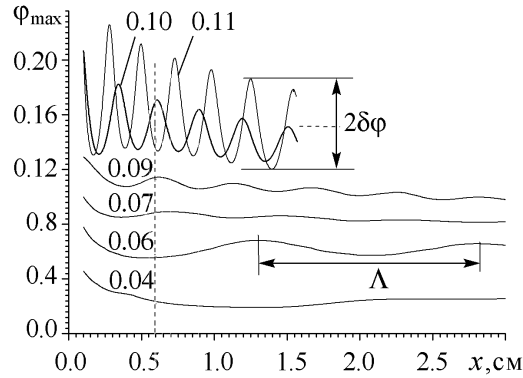


Рис. 1. Зависимости пиковой амплитуды солитонов $|\varphi_{\max}|$ (двухсолитонный режим) от их координаты. Рядом с кривыми указано значение входной амплитуды φ_0

При выбранной длине пробега импульса в 3 см удается выделить один период осцилляций для импульса с $\varphi_0 \approx 0.06$ (см. рис. 1). При этом осцилляции характеризуются пространственным периодом $\Lambda \approx 1.44$ см и частотой $\Omega \approx 2.5$ МГц. С дальнейшим ростом φ_0 частота и амплитуда колебаний растут². Однако в окрестности $\varphi_0^* = 0.07 \approx (\varphi_0^1 + \varphi_0^2)/2$ ($\delta = 0$) амплитуда осцилляций резко падает. Такое поведение аналогично случаю *sech*-образного входного импульса, для которого при $\delta = 0$ несолитонная волна не образуется. При приближении амплитуд входного сигнала к значениям порога двухсолитонного режима частота и пространственный период осцилляций достигают, соответственно, максимальных и минимальных значений $\Omega \approx 15$ МГц и $\Lambda \approx 0.25$ см. При этом амплитуда колебаний достигает максимальных значений $\delta\varphi \approx 0.27\varphi_0$.

На пороге двухсолитонного режима $\varphi_0 = \varphi_0^2$ образуются два неосциллирующих солитона. При $\varphi_0 > \varphi_0^2$ наблюдаются осцилляции обоих солитонов, причем с частотами Ω , в общем случае не кратными друг другу. На достаточно больших расстояниях осцилляции как в одно-, так и в двухсолитонном режиме затухают, и в системе распространяются неосциллирующие солитоны.

Сделаем оценку частоты осцилляций огибающей $|\varphi_{\max}(x, t)|$. Для простоты будем рассматривать односолитонный режим и предположим, что на участке осцилляций поведение огибающей импульса определяется лишь интерференцией несолитонной составляющей и солитона вида [23]

$$\varphi_s(x, t) = A \operatorname{sech} \left(A(x - Vt) \sqrt{\left| \frac{\gamma}{\beta} \right|} \right) \exp \left(A^2 j \frac{\gamma t}{2} - \frac{j}{\beta} (x - Vt) \right), \quad (7)$$

где A и V – независимые параметры, имеющие смысл амплитуды и скорости солитона и определяемые начальными условиями. Понятно, что в таком приближении частота осцилляций определяется относительной скоростью изменения фаз солитона и несолитонной волны. Сопоставить скорости изменения фаз солитонной и несолитонной частей импульса удобнее всего в движущейся со скоростью солитона системе

²Заметим, что на периоде колебаний осцилляции происходят таким образом, что уменьшение амплитуды сопровождается увеличением ширины импульса. Это отражает, с одной стороны, требование сохранения энергии при $\alpha = 0$, а с другой, малое изменение энергии несолитонной части непосредственно под солитоном на периоде колебаний.

координат ($\xi = x - Vt, t$). На рис. 2 показано рассчитанное из (3) при входной амплитуде $\varphi_0 = 0.11$ распределение фазы импульса $\theta(\xi, t)$ вдоль координаты ξ для двух моментов времени t и $t + \Delta t$, где величина $\Delta t = 63$ нс выбиралась близкой к периоду осцилляций, чтобы изменение фазы было максимальным. Штриховой линией на рисунке показана огибающая импульса, которая заметно отличается от нуля на участке $|\xi| < 0.1$. Понятно, что фаза импульса при значениях $|\xi| > 0.1$ определяется несолитонной частью, что подтверждается квадратичным характером зависимости $\theta(\xi)$, типичным для линейных волновых пакетов в среде с квадратичной дисперсией [20].

Как видно из рисунка, за время Δt фаза импульса под огибающей изменяется на величину $\Delta\theta \approx 2\pi$, в то время как фаза несолитонной волны в непосредственной близости от солитона практически не изменяется – точки А и В. Если предположить, что «под» солитоном изменение фазы несолитонной составляющей также будет незначительным, то осцилляции огибающей будут определяться изменением фазы солитона. При этом период осцилляций T можно оценить, используя (7). Приравнявая к 2π набег фазы солитона во времени, получим

$$A^2 \frac{\gamma t}{2} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{4\pi}{\gamma A^2}. \quad (8)$$

Параметр A мы можем оценить, предполагая, что энергия несолитонной части мала по сравнению с энергией солитона. Тогда, записывая условие сохранения первого интеграла движения [20] для уравнения (3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x, t)|^2 dx = \text{const}, \quad (9)$$

для входного импульса (4) и солитонного решения (7) получим

$$\begin{aligned} \varphi_0^2 V_g T_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \text{sech}^2 \left(A \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} (x - Vt) \right) dx = \\ &= A \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \tanh \left(A \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} (x - Vt) \right) \Big|_{x=-\infty}^{\infty} = 2A \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) определим амплитуду солитона как

$$A = \frac{1}{2} \varphi_0^2 V_g T_0 \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}. \quad (11)$$

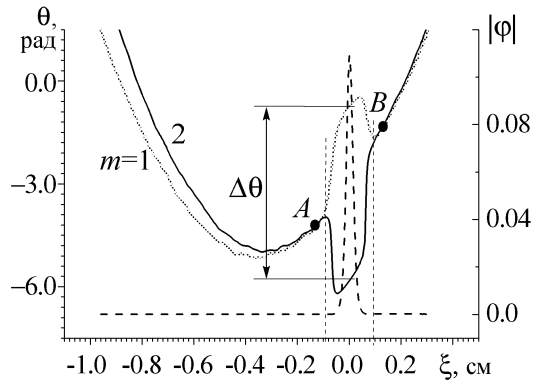


Рис. 2. Распределения фазы $\theta(\xi = x - Vt, t_m)$ импульса в моменты времени $t_m = t_1 + (m - 1)\Delta t$, $m = 1, 2$, $\Delta t = 63$ нс, $\varphi_0 = 0.11$. Штриховой линией показана огибающая импульса $|\varphi|$; пунктирными линиями показаны пороги одно- и двухсолитонных режимов

Для частоты осцилляций $\Omega = T^{-1}$ с помощью (8), (11) получаем

$$\Omega = \frac{\gamma A^2}{4\pi} = \frac{\varphi_0^4 V_g^2 T_0^2 \gamma^2}{16\pi\beta}. \quad (12)$$

На рис. 3 приведены зависимости амплитуды солитона и частоты осцилляций, полученные из анализа численных решений (3) и с помощью оценочных формул (11), (12). Как видно, соотношение для пиковой амплитуды солитона (11) удовлетворительно описывает результаты, полученные численно (максимальное расхождение значений порядка 60%). Для частоты Ω оценка с помощью формулы (12) соответствует численным результатам хуже. Достаточно хорошее совпадение имеется лишь вблизи порога односолитонного режима. Вблизи порога образования двух солитонов разница в значениях частот, полученных из (12) и численного решения (3), достигает 120%. Увеличение ошибки около порога двухсолитонного режима можно объяснить тем, что в несолитонную составляющую уходит значительная доля энергии входного импульса, что никак не учитывается в (12).

Отметим, что, если в выражение для частоты осцилляций (12) подставить значения φ_0 , отвечающие порогу образования N -солитонного режима (5), и воспользоваться выражением для времени дисперсии гауссова импульса

$$T_D = \frac{V_g^2 T_0^2}{8\beta}, \quad (13)$$

то для частоты осцилляций Ω при значениях входных амплитуд $\varphi_0^1 \leq \varphi_0 \leq \varphi_0^2$ получим выражение

$$0.015 \cdot T_D^{-1} \leq \Omega \leq T_D^{-1}. \quad (14)$$

Таким частотам осцилляций отвечают пространственные периоды Λ

$$L_D \leq \Lambda \leq 66 \cdot L_D, \quad (14)$$

где $L_D = T_D V_g$.

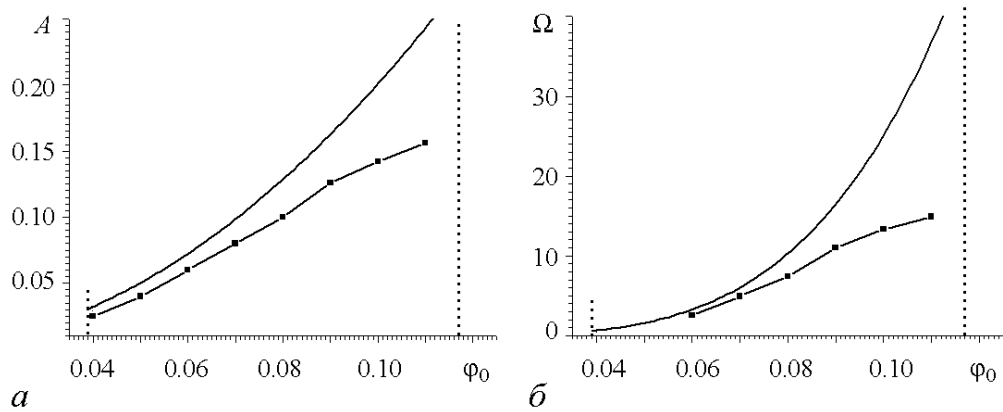


Рис. 3. Зависимости амплитуды солитона $A(a)$ и частоты осцилляций $\Omega(b)$ от входной амплитуды φ_0 . Сплошные линии рассчитаны по формулам (11) и (12); точками отмечены значения, полученные в результате численного моделирования; пунктиром отмечены пороги φ_0^1 и φ_0^2

1.2. Диссипативная среда. При решении (3) с учетом выбранного значения параметра диссипации $\alpha = 6 \cdot 10^6 \text{с}^{-1}$ осцилляции амплитуды импульса не наблюдались. Однако влияние несолитонной составляющей приводило к появлению немонотонной зависимости $|\varphi_{\max}(\varphi_0)|$ в некоторой точке x пленки. Прежде чем перейти к обсуждению расчетов отметим интересную особенность поведения солитона на рис. 1. Как можно видеть, пиковая амплитуда солитона $\varphi_0 = 0.11$ в некоторых точках x оказывается меньше амплитуды солитона $\varphi_0 = 0.10$ (отмечено штриховой линией на рис. 1). Это значит, что амплитуда выходного импульса на расстоянии $x = 0.6$ см при увеличении входной амплитуды от $\varphi_0 = 0.10$ до $\varphi_0 = 0.11$ будет уменьшаться. Можно предположить, что при учете диссипации данный эффект, вызванный влиянием несолитонной части, сохранится.

Для иллюстрации этого предположения обратимся к зависимостям $\varphi_{\max}(\varphi_0, x)$, рассчитанным из (3) для двух значений коэффициента диссипации (рис. 4). Для скорости диссипации $\alpha = 2 \cdot 10^6 \text{с}^{-1}$, что примерно втрое ниже типичных значений для пленок ЖИГ, можно наблюдать осцилляции пиковой амплитуды в плоскости $\varphi_0 = \text{const}$ (см. рис. 4, а). При этом видно, что в плоскости $x = \text{const}$ образуется максимум зависимости $\varphi_{\max}(\varphi_0, x = \text{const})$ – одна из них выделена жирной линией. При значениях $\alpha = 6 \cdot 10^6 \text{с}^{-1}$, которые типичны для пленок ЖИГ, осцилляции пиковой амплитуды в плоскости $\varphi_0 = \text{const}$ не наблюдаются по причине быстрого затухания импульса (см. рис. 4, б). Тем не менее максимум в плоскости $x = \text{const}$ сохраняется – такая зависимость выделена жирной линией. Итак, можно заключить, что взаимодействием солитона МСВ с несолитонной волной в условиях типичной диссипации в пленках ЖИГ приводит к образованию экстремумов на зависимости выходной пиковой амплитуды от амплитуды входного сигнала.

Отметим, что немонотонные зависимости $\varphi_{\max}(\varphi_0, x)$ наблюдались как в экспериментах по изучению солитонов МСВ в ферритовых пленках [9, 18], так и в ряде работ [9, 15, 22] по численному моделированию зависимости солитонов МСВ. Однако причина немонотонности зависимости $\varphi_{\max}(\varphi_0)$ в работах по численному моделированию (см., например, [9, 15]) не обсуждалась. В экспериментах она связы-

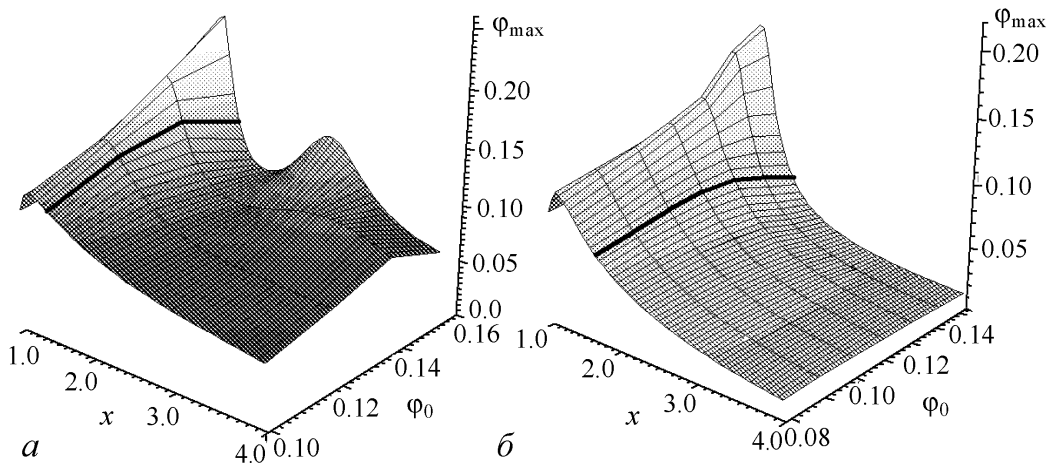


Рис. 4. Зависимости пиковой амплитуды φ_{\max} от координаты x , см и входной амплитуды φ_0 при $\alpha = 2 \cdot 10^6 \text{с}^{-1}$ (а) и $\alpha = 6 \cdot 10^6 \text{с}^{-1}$ (б)

влась с выполнением условий оптимального формирования солитона при выбранных уровнях входного сигнала и расстоянии между входной и выходной антеннами или развитием процессов параметрического возбуждения спиновых волн [9, 18]. К сожалению, до сих пор целенаправленных экспериментов по выяснению причины существования немонотонной зависимости $\varphi_{\max}(\varphi_0, x)$ поставлено не было. Это позволяет рассматривать влияние несолитонной волны в качестве одной из вероятных причин появления максимума зависимости выходной пиковой мощности от входной.

Заключение

В рамках модели, основанной на нелинейном уравнении Шредингера, рассмотрен процесс формирования солитонов магнитостатических волн в условиях, когда амплитуда и форма входного импульса отличаются от солитонного решения и на эволюцию солитона оказывает влияние несолитонная часть. Для бездиссипативного случая показано, что наличие несолитонной составляющей приводит к осцилляциям профиля огибающей импульса, которые затухают по мере формирования солитонного режима. В приближении малости энергии несолитонной части получены формулы для оценки частоты осцилляций и амплитуды огибающей, которые дают значения этих параметров, по порядку величины совпадающие с результатами численного решения нелинейного уравнения Шредингера. Показано, что при значениях диссипативного параметра магнитостатических волн, отвечающих типичным пленкам ЖИГ, осцилляции не наблюдаются. Однако механизм взаимодействия солитона и несолитонной составляющей в этом случае проявляется в виде немонотонного характера зависимости пиковой выходной амплитуды импульса от амплитуды входного импульса и может являться одной из возможных причин образования подобного максимума в экспериментах с солитонами магнитостатических волн.

Работа поддержана грантом РФФИ № 04-02-17537 и Фондом содействия отечественной науке.

Библиографический список

1. Звездин А.К., Медников А.М., Попков А.Ф. Функциональные устройства на магнитостатических и магнитоакустических волнах // Электронная промышленность. 1983, № 8. С. 14.
2. Marcelli R., Nikitov S.A. Nonlinear microwave signal processing: Towards a new range of devices. Kluwer Acad. Publ, 1996.
3. Лукомский В.П. Нелинейные магнитостатические волны в ферромагнитных пластинах // Укр. физ. журн. 1978. Т. 23, № 1. С. 134.
4. Звездин А.К., Попков А.Ф. К нелинейной теории магнитостатических спиновых волн // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, вып. 2. С. 606.
5. Бордман А.Д., Никитов С.А. К теории поверхностных магнитостатических волн // ФТТ. 1989. Т. 31, вып. 6. С. 281.
6. Калиникос Б.А., Ковшиков Н.Г., Славин А.Н. Наблюдение спин-волновых солитонов в ферромагнитных пленках // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38, вып. 7. С. 343.
7. Калиникос Б.А., Ковшиков Н.Г., Славин А.Н. Солитоны огибающей и модуля-

ционная неустойчивость дипольно-обменных волн намагниченности в пленках железиттриевого граната // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, вып. 2. С. 159.

8. *De Gasperis P., Marcelli R., Miccoli G.* Magnetostatic soliton propagation at microwave frequency in magnetic garnet films // *Phys. Rev. Lett.*, 1987. Vol. 59, № 4. P. 481.
9. *Chen M., Tsankov M.A., Nash J.M., Patton C.E.* Backward volume wave microwave envelope solitons in yttrium iron garnet films // *Phys. Rev. B.* 1994. Vol. 49, № 18. P. 12773.
10. *Tsankov M.A., Chen M., Patton C.E.* Forward volume wave microwave envelope solitons in yttrium iron garnet films: Propagation, decay, and collision // *J. Appl. Phys.* 1994. V. 76, № 7. P. 4274.
11. *Filimonov Yu. A., Marcelli R., Nikitov S.A.* Non-linear magnetostatic surface waves pulse propagation in ferrite-dielectric-metal structure // *IEEE Trans. on Magn.* 2002. September. Vol. 38, № 5. P. 3105.
12. *Дудко Г. М.* Эффекты самовоздействия магнитостатических волн в ферромагнитных пленках: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук / Саратов: СГУ, 2002. С. 24.
13. *Slavin A.N., Dudko G.M.* Numerical modelling of spin wave soliton propagation in ferromagnetic films // *J. Mag. Mag. Mat.* 1990. Vol. 86. P. 15.
14. *Zaspel C.E., Kabos P., Xia H., Zhang H. Y., Patton C.E.* Modelling of the power-dependent velocity of microwave magnetic envelope solitons in thin films // *J. Appl. Phys.* 1999. Vol. 85, № 12. P. 8307.
15. *Костылев М.П., Ковшиков Н.Г.* Возбуждение, формирование и распространение солитоноподобных импульсов спиновых волн в ферромагнитных пленках: численный расчет и эксперимент // *ЖТФ.* 2002. Т. 72, вып. 11. С. 5.
16. *Nash J.M., Kabos P., Staudinger R.A., Patton C.E.* Phase profiles of microwave magnetic envelope solitons // *J. Appl. Phys.* 1998. Vol. 83, № 5. P. 2689.
17. *Xia H., Kabos P., Staudinger R.A., Patton C.E., Slavin A.N.* Velocity characteristics of microwave-magnetic-envelope solitons // *Phys. Rev. B.* 1998. Vol. 58, № 5. P. 2708.
18. *Xia H., Kabos P., Patton C.E., Enslie H.E.* Decay properties of microwave-magnetic-envelope solitons in yttrium iron garnet films // *Phys. Rev. B.* 1997. Vol. 55, № 22. P. 15018.
19. *Kovshikov N.G., Kalinikos B.A., Patton C.E., Wright E.S., Nash J.M.* Formation, propagation, reflection, and collision of microwave envelope solitons in yttrium iron garnet films // *Phys. Rev. B.* 1996. Vol. 54, № 21. P. 15210.
20. *Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988.
21. *Satsuma J., Yajima N.* Initial value problems of one-dimensional self-modulation of nonlinear waves in dispersive media // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 1974, № 55. P. 284.
22. *Галишиников А.А., Дудко Г.М., Филимонов Ю.А.* Солитоны поверхностных магнитостатических волн в структуре феррит-диэлектрик-металл // *Радиотехника и электроника.* 2004. Т. 49, № 2. С. 228.
23. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.

Саратовский филиал Института
радиотехники и электроники РАН

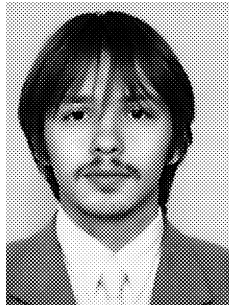
Поступила в редакцию

8.09.2005

NUMERICAL MODELLING OF MAGNETOSTATIC WAVE SOLITON FORMATION PROCESS

A.A. Galishnikov, G.M. Dudko, Yu.A. Filimonov

Through numerical simulation by nonlinear Schrödinger equation magnetostatic wave soliton formation process is considered when amplitude and shape of initial pulse differ from soliton solution and non-soliton part can influence on soliton evolution. It is shown, that in lossless approximation soliton peak amplitude can oscillate with spatial period Λ : $L_D \leq \Lambda \leq 66 \cdot L_D$ (or frequency Ω : $0.015 \cdot T_D^{-1} \leq \Omega \leq T_D^{-1}$), L_D и T_D – length and time of dispersion. With dissipation corresponding to ferrite films, influence of non-soliton part leads to non-monotone behaviour of dependence peak output power versus power of input pulse.



Галишников Александр Александрович – родился в 1980 году в Саратове. Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (1997). По окончании поступил в аспирантуру Института радиотехники и электроники РАН. Работает в Саратовском филиале того же института в должности младшего научного сотрудника. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, магнитостатические волны в ферритовых планарных структурах.



Дудко Галина Михайловна – родилась в 1961 году в Свердловске. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика». С 1983 по 2003 год работала в Саратовском отделении Института радиотехники и электроники РАН. В 2002 году защитила диссертацию по теме «Эффекты самовоздействия магнитостатических волн в ферромагнитных пленках» на соискание ученого звания кандидата физико-математических наук. С 2003 года старший научный сотрудник НПК «Прецизионное оборудование». Область научных интересов – нелинейные явления в магнитоупорядоченных средах, компьютерное моделирование. Автор и соавтор 14 научных статей.



Филимонов Юрий Александрович – родился в 1955 году. Окончил Московский физико-технический институт (1979), кандидат физико-математических наук, директор Саратовского филиала ИРЭ РАН. Область научных интересов – волновые явления в магнитных пленках. E-mail: fil@sfire.san.ru



НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИГНАЛОВ РАЗНЫХ УРОВНЕЙ МОЩНОСТИ В РЕЗОНАНСНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ НА МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ

С.В. Гришин, А.Р. Давоян, Ю.П. Шараевский

Приводятся результаты исследования построенной нелинейной двухчастотной модели для резонансной линии передачи на обратных объемных магнитостатических волнах. В качестве модели используется система двух связанных колебательных контуров, параметры которой помимо зависимости от уровня мощности входного сигнала имеют зависимость от величины расстройки по частоте между большим и малым сигналами. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными.

Введение

Известно [1–5], что амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) микрополосковой линии передачи с ферромагнитной пленкой, в которой возбуждаются магнитостатические волны (МСВ), зависят от уровня мощности входного сигнала. Существование данной зависимости приводит к избирательному подавлению СВЧ-сигналов разных уровней мощности в такой нелинейной линии передачи на МСВ. СВЧ-сигнал, уровень мощности которого ниже некоторого порогового значения (малый сигнал), проходя через указанную нелинейную линию передачи в полосе возбуждения МСВ, ослабляется сильнее, чем СВЧ-сигнал, уровень мощности которого выше порога (большой сигнал). Нелинейность линии передачи на МСВ обусловлена наличием механизма параметрического возбуждения магнитостатической волной тепловых спиновых волн на частотах, вдвое меньших частоты возбуждения МСВ (см., например, [6–8]). При одновременном прохождении двух СВЧ-сигналов (малого и большого) через рассматриваемую линию передачи на МСВ подавление малого сигнала относительно большого будет наблюдаться лишь при определенной величине расстройки между сигналами, $\Delta f \geq 10 \div 20$ МГц [1, 2, 5]. Необходимо отметить, что данные результаты получены, в основном, экспериментальным путем, и на сегодняшний день практически отсутствуют теоретические модели, адекватно описывающие нелинейные особенности такой линии передачи.

Если для возбуждения МСВ вместо согласованного отрезка микрополосковой линии использовать микрополосковый резонатор, то такую линию передачи можно называть резонансной линией передачи на МСВ [9–11]. В данной линии передачи эффективное подавление малого сигнала относительно большого наблюдалось при возбуждении обратных объемных МСВ (ООМСВ) [10]. Причем в отличие от аналогичной линии передачи на ООМСВ, выполненной на основе согласованного отрезка микрополосковой линии, эффект нелинейного подавления малого СВЧ-сигнала относительно большого в резонансной линии передачи достигался при сравнительно небольшой величине перекрытия пленкой микрополоски [10, 12]. Кроме того, для расчета характеристик резонансной линии передачи на ООМСВ (как в линейном, так и в нелинейном режимах) использовалась достаточно простая радиофизическая модель в виде системы двух связанных колебательных контуров [9, 11], в которой параметры одного из контуров, описывающего ферромагнитную пленку при возбуждении ООМСВ, и коэффициент связи между контурами имели функциональную зависимость от уровня мощности входного сигнала. Однако такое модельное представление использовалось только в одночастотном режиме, когда на систему подавался один гармонический сигнал, но с разными уровнями мощности.

В настоящей работе предпринята попытка развития нелинейной модели, полученной в одночастотном режиме, для описания особенностей взаимодействия двух сигналов разных уровней мощности (малого и большого) с разными частотами при их одновременном прохождении через резонансную линию передачи на ООМСВ (двухчастотный режим). Такая задача представляет интерес в связи с возможностью построения теоретической модели для устройства, получившего в литературе название «усилитель отношения сигнал/шум» [1, 2] или «шумоподавитель» [4–6, 12–14].

1. Исходная нелинейная модель и результаты одночастотной теории

В качестве объекта для моделирования использовалась линия передачи на МСВ, состоящая из микрополоскового полуволнового резонатора, вдоль поперечной оси симметрии которого располагалась ферромагнитная пленка (рис. 1, *a*). При определенных значениях и направлении внешнего постоянного магнитного поля H_0 в пленке возбуждались ООМСВ на частотах основного вида колебаний резонатора. Как было отмечено выше, для теоретического описания характеристик данной линии передачи можно использовать модель двух связанных колебательных контуров [9, 11]. На рис. 1, *б* приведена эквивалентная схема рассматриваемой резонансной линии передачи, где первый колебательный контур (1) эквивалентен микрополосковому резонатору, а второй (2) – ферромагнитной пленке при возбуждении в ней ООМСВ. Источник входного напряжения \dot{E} и два RL -контура соответствуют СВЧ-входу и выходу резонансной линии передачи.

Предполагаем, что три параметра схемы (активное сопротивление R_2 и индуктивность L_2 контура 2, а также коэффициент связи k между колебательными контурами) зависят от уровня мощности входного сигнала. Обоснованность такого предположения для одночастотного режима обсуждалась в работе [11]. В общем случае при подаче на вход сложного сигнала (многочастотного, шумового и т.д.) зависимость от мощности приводит к зависимости указанных выше параметров схемы и от времени.

Ниже приведена система уравнений, соответствующая схеме на рис. 1, б при сделанном выше предположении

$$\begin{cases} R_{\text{ГН}} \dot{I}_{\text{ГН}} + L_0 \frac{d\dot{I}_{\text{ГН}}}{dt} + M \frac{d\dot{I}_1}{dt} = \dot{E}, \\ R_1 \frac{d\dot{I}_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 \dot{I}_1}{dt^2} + \frac{1}{C_1} \dot{I}_1 + M \frac{d^2 \dot{I}_{\text{ГН}}}{dt^2} + M \frac{d^2 \dot{I}_{\text{НГ}}}{dt^2} + M_{12} \frac{d^2 \dot{I}_2}{dt^2} + \frac{d^2 M_{12}}{dt^2} \dot{I}_2 = 0, \\ R_2 \frac{d\dot{I}_2}{dt} + \frac{dR_2}{dt} \dot{I}_2 + L_2 \frac{d^2 \dot{I}_2}{dt^2} + \frac{d^2 L_2}{dt^2} \dot{I}_2 + \frac{1}{C_2} \dot{I}_2 + M_{12} \frac{d^2 \dot{I}_1}{dt^2} + \frac{d^2 M_{12}}{dt^2} \dot{I}_1 = 0, \\ R_{\text{НГ}} \dot{I}_{\text{НГ}} + L_0 \frac{d\dot{I}_{\text{НГ}}}{dt} + M \frac{d\dot{I}_1}{dt} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $M = k_0 \sqrt{L_0 L_1}$, $M_{12} = k \sqrt{L_1 L_2}$, k_0 – коэффициент связи колебательного контура l с генератором или нагрузкой; L_0 – индуктивность элемента связи; $R_{\text{ГН}}$ – со-

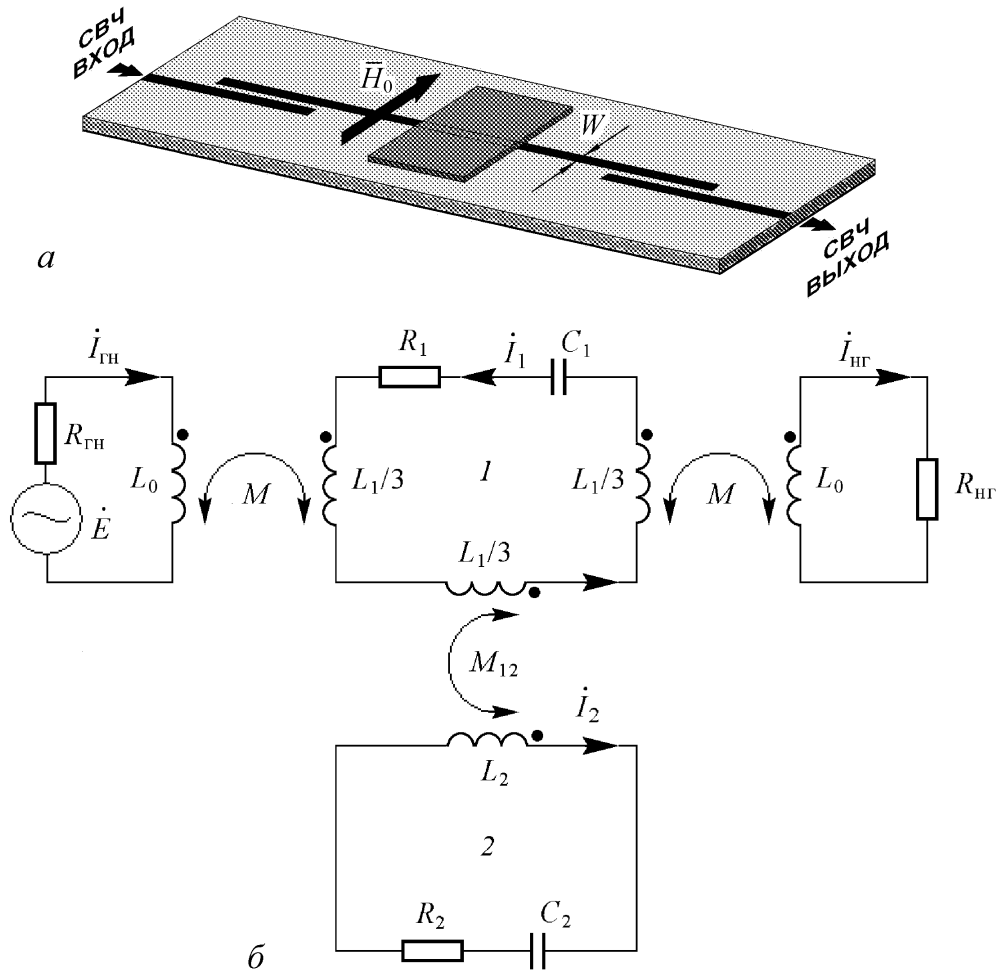


Рис. 1. Резонансная линия передачи на ОМСВ (а) и ее представление в виде эквивалентной схемы (б)

противление генератора, $R_{нг}$ – сопротивление нагрузки; $\dot{I}_{1,2} = \text{Re}(\hat{I}_{1,2}e^{j\omega t})$ – ток колебательного контура I (2); $\dot{E} = \text{Re}(\hat{E}e^{j\omega t})$ – напряжение генератора, $\dot{I}_{гн}$ – ток генератора и $\dot{I}_{нг}$ – ток в нагрузке.

В одночастотном режиме зависимости R_2 , L_2 и k от мощности входного сигнала можно определить, исходя из экспериментальных данных, с применением методов оптимизации. Именно такой подход был использован в работе [11]. При этом значения указанных параметров определялись путем минимизации целевой функции, представляющей собой среднеквадратичное отклонение рассчитанной по модели величины комплексного коэффициента передачи от его измеренного значения [15].

Вначале по измеренным значениям комплексного коэффициента передачи микрорезонатора в отсутствие ферромагнитной пленки находились значения параметров первого контура (R_1 , L_1 , C_1) и элементов связи первого контура с генератором и нагрузкой (L_0 , k_0). Затем по измеренным значениям комплексного коэффициента передачи линии с ферромагнитной пленкой при возбуждении в последней ООМСВ в режиме малого входного сигнала определялись значения параметров второго контура (R_2 , L_2 , C_2) и коэффициента связи k между колебательными контурами. При этом считалось, что параметры первого контура и элементов связи первого контура с генератором и нагрузкой не меняются при возбуждении в пленке ООМСВ.

Далее предполагалось, что три параметра схемы (R_2 , L_2 и k) зависят от средней мощности входного сигнала $\tilde{P}_{вх}$, и именно эти величины являлись параметрами оптимизации при каждом значении $\tilde{P}_{вх}$. При этом для каждого фиксированного значения $\tilde{P}_{вх}$ находились дискретные значения R_2 , L_2 и k . Последнее позволяло использовать для расчета комплексного коэффициента передачи схемы систему уравнений (1), в которой параметры R_2 , L_2 и k на данном этапе моделирования можно было считать не зависящими от времени. Найденные таким образом значения параметров R_2 , L_2 и k при различных уровнях мощности входного сигнала представлены соответствующими значками на рис. 2.

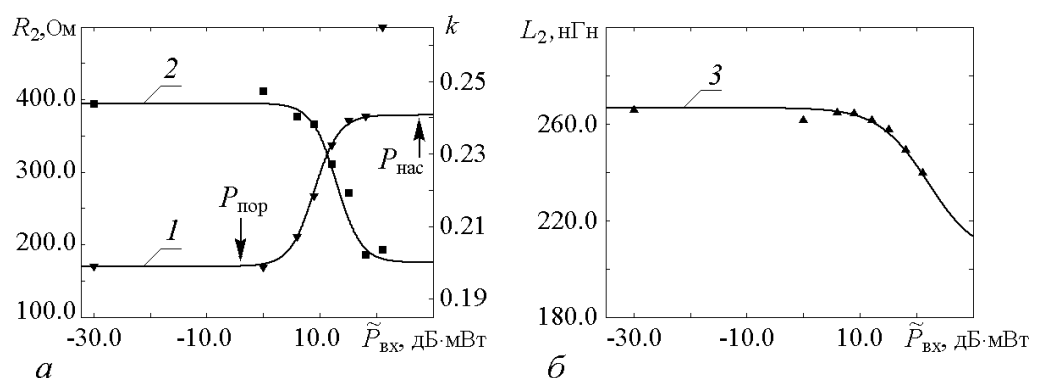


Рис. 2. Зависимости параметров эквивалентной схемы от уровня мощности входного сигнала $\tilde{P}_{вх}$: а – активного сопротивления второго контура R_2 (кривая 1) и коэффициента связи k между контурами (кривая 2); б – индуктивности второго контура L_2 (кривая 3). Значки – значения параметров, полученные в результате их оптимизации по экспериментальным данным, сплошные линии – расчет по эмпирической формуле (2)

Полученные в результате оптимизации дискретные значения параметров схемы могут быть аппроксимированы определенными функциональными зависимостями. В частности, предложенные в работе [11] формулы для описания таких эмпирических зависимостей имели следующий вид:

$$B = B_0 \left\{ \alpha / [1 + (P_{cp} / \tilde{P}_{вх})^n] + 1 \right\}, \quad (2)$$

где B – величина, равная R_2 , L_2 или k ; B_0 – минимальное значение B ; $\alpha = B_{\max} / B_0 - 1$, B_{\max} – максимальное значение B ; P_{cp} – величина входной мощности $\tilde{P}_{вх}$, соответствующая среднему арифметическому значению B . В таблице приведены значения B_0 , α , P_{cp} и n , определенные для каждой из трех зависимостей.

Результаты расчета зависимостей R_2 , L_2 и k от величины входной мощности $\tilde{P}_{вх}$ в соответствии с формулой (2) и данными таблицы приведены на рис. 2. Значение входной мощности, обозначенное на рис. 2, a как $P_{пор}$, соответствует началу нелинейного режима линии, а значение $P_{нас}$ – уровню входной мощности большого сигнала, при превышении которого параметры схемы R_2 и k остаются практически постоянными. Из представленных на рис. 2 результатов следует, что значения параметров схемы, рассчитанные по предложенной эмпирической формуле (2), достаточно хорошо совпадают с аналогичными значениями параметров, полученными в результате их оптимизации по экспериментальным данным. Таким образом, на данном этапе моделирования была установлена функциональная зависимость параметров второго контура и величины связи между контурами от уровня мощности входного сигнала, то есть определен вид нелинейности в предложенной модели двух связанных колебательных контуров в одночастотном режиме.

Таблица

B	B_0	α	P_{cp} , мВт	n
R_2 , Ом	169.69	1.23	8	2
k	0.2	0.2195	20	-2
L_2 , нГн	205	0.3	160	-1

На рис. 3 приведены частотные зависимости величины, характеризующей изменение отношения амплитуды большого сигнала к амплитуде малого сигнала на выходе линии передачи по сравнению со входом $K = 20 \lg(A_{бс} / A_{мс})$, и величины, опре-

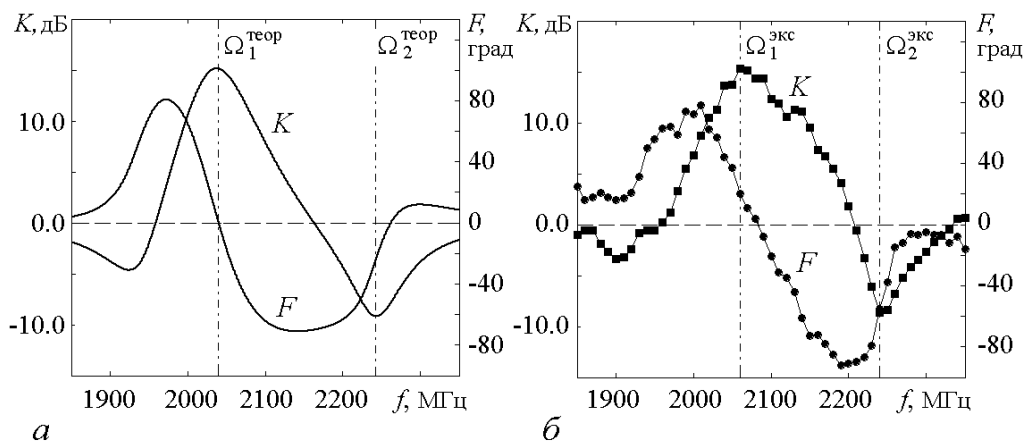


Рис. 3. Теоретическая (а) и экспериментальная (б) зависимости величин K и F от частоты

деляющей разность набега фаз между большим и малым сигналами $F = \Delta\varphi_{\text{бс}} - \Delta\varphi_{\text{мс}}$, где $A_{\text{бс}}, \Delta\varphi_{\text{бс}}$ – значения модуля и набега фазы коэффициента передачи линии в режиме большого сигнала (при $\tilde{P}_{\text{вх}} \cong P_{\text{нас}}$); $A_{\text{мс}}, \Delta\varphi_{\text{мс}}$ – значение модуля и набега фазы коэффициента передачи в линейном режиме (при $\tilde{P}_{\text{вх}} < P_{\text{пор}}$). Кривые, представленные на рис. 3, а, соответствуют теоретически рассчитанным зависимостям с учетом формулы (2), а аналогичные кривые на рис. 3, б – экспериментальным зависимостям. Экспериментальные зависимости были получены на макете резонансной линии передачи на ООМСВ, параметры которого приведены в работе [10].

Прежде всего, следует указать на достаточно хорошее соответствие в поведении кривых, представленных на рис. 3, а и рис. 3, б. Далее необходимо отметить, что зависимость величины K от частоты на рис. 3 характеризуется двумя ярко выраженными частотными областями: область частот, в которой $K > 0$, то есть малый сигнал ослабляется сильнее большого, и область частот, в которой $K < 0$ – большой сигнал в этой области ослабляется сильнее малого. В первой частотной области ($K > 0$) максимальное значение величины $K \cong 15$ дБ и соответствует частоте $\Omega_1^{\text{теор}} = 2040$ МГц на рис. 3, а и частоте $\Omega_1^{\text{экс}} = 2060$ МГц на рис. 3, б. Причем область подавления малого сигнала ($K > 0$) находится, в основном, в пределах теоретически рассчитанной полосы возбуждения ООМСВ. Рассматриваемая резонансная линия передачи в данной области частот может использоваться как шумоподавитель [1, 2, 4–6, 10, 12–14].

Вторая область частот ($K < 0$), в которой происходит ограничение большого сигнала, находится за пределами теоретически рассчитанной полосы возбуждения ООМСВ. Резонансная линия передачи в данном случае может использоваться как ограничитель мощности (см., например, [10, 16, 17]). Минимальное значение K в этой области достигает величины $K \cong -10$ дБ и соответствует частоте $\Omega_2^{\text{теор}} = 2243$ МГц на рис. 3, а и частоте $\Omega_2^{\text{экс}} = 2240$ МГц на рис. 3, б. Наличие у кривой $K(f)$ частотных областей, в которых происходит смена знака величины K , является характерной особенностью, присущей нелинейным линиям передачи на МСВ, обладающим свойствами двухконтурной системы, в частности, резонансной линии передачи на ООМСВ [10].

Из рассмотрения кривых $F(f)$ на рис. 3 следует, что с увеличением уровня мощности входного сигнала в исследуемой линии передачи происходит изменение величины набега фазы сигнала, причем это изменение на некоторых частотах может достигать величины $F \approx 90^\circ$. Следовательно, резонансная линия передачи на ООМСВ в этом случае может дополнительно использоваться и как нелинейный фазовращатель. Отметим, что для теоретической зависимости на частоте $\Omega_1^{\text{теор}}$, где значение $K > 0$ и максимально, сдвиг фазы F между большим и малым сигналами равен нулю (рис. 3, а). Для экспериментальной зависимости $F = 0$ на частоте, большей $\Omega_1^{\text{экс}}$ приблизительно на 25 МГц.

2. Двухчастотная теория

Рассмотрим случай, когда на анализируемую систему одновременно подаются два гармонических сигнала $\dot{E}_1 = \text{Re}(\dot{E}_1 e^{j\omega_1 t})$ и $\dot{E}_2 = \text{Re}(\dot{E}_2 e^{j\omega_2 t})$, причем мощность одного из них (большого сигнала) \tilde{P}_1 гораздо больше мощности другого

(малого сигнала) \tilde{P}_2 , то есть можно положить, что $|\hat{E}_1|^2 \gg |\hat{E}_2|^2$. При этом также предположим, что в системе, несмотря на наличие нелинейности, присутствуют сигналы только на частотах ω_1 и ω_2 , а их комбинационные составляющие считаются либо бесконечно малыми по амплитуде, либо их частоты находятся вне полосы пропускания системы. С учетом этого решение системы уравнений (1) будем искать в следующем виде:

$$\dot{I}_{\text{гн,нг},1,2} = \sum_{i=1}^2 \text{Re} \left(\hat{I}_{\text{гн,нг},1,2}^{(i)} e^{j\omega_i t} \right), \quad (3)$$

где $i = 1, 2$ – индекс, соответствующий частоте первого (большого) и второго (малого) сигнала.

Сделаем также предположение, что параметры второго колебательного контура (R_2 и L_2), а также коэффициент связи k между контурами, помимо зависимости от мощности входного сигнала имеют зависимость от величины расстройки по частоте между малым и большим сигналами $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$. При этом частотная зависимость должна учитывать, что при больших расстройках между сигналами значения указанных выше параметров соответствуют значениям, полученным в режиме малого входного сигнала (линейный режим), а при равенстве частот обоих сигналов значениям, полученным в режиме большого входного сигнала (режим насыщения). Данную зависимость можно ввести в виде соответствующей резонансной кривой, при этом формулу (2) можно представить в виде

$$B = B_0 \{ \alpha\beta / [1 + (P_{\text{ср}}/P_{\text{вх}})^n] + 1 \}, \quad (4)$$

где $\beta = 1/\sqrt{1 + Q^2 (\omega_2/\omega_1 - \omega_1/\omega_2)^2}$, Q – добротность резонансной кривой, определяющей зависимость β от $\Delta\omega$, $P_{\text{вх}} = \tilde{P}_1 (1 + \delta)$ – входная мощность двухчастотного сигнала, $\tilde{P}_1 = \hat{E}_1^2 / [2(R_{\text{гн}} + R_{\text{нг}})]$, $\delta = 2 \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} \cos \Delta\omega t$.

На рис. 4 в качестве иллюстрации приведены: *a* – рассчитанная на основе соотношения (4) зависимость активного сопротивления контура 2 от величины

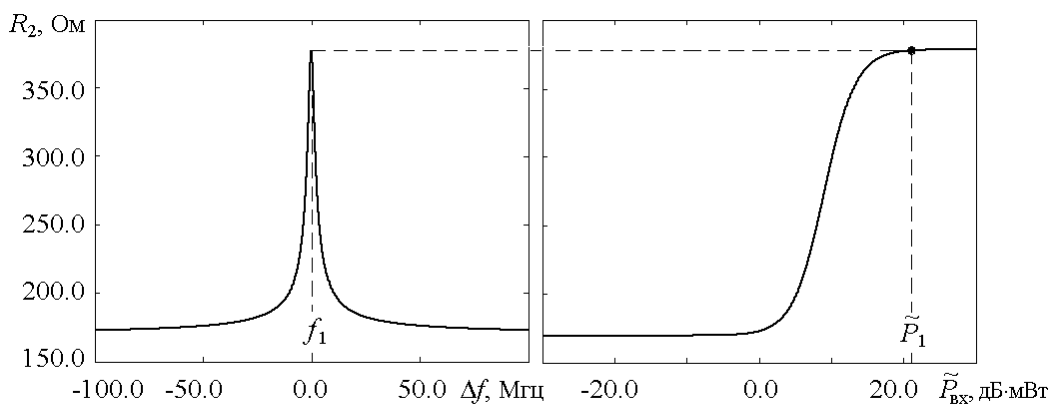


Рис. 4. Зависимости величины активного сопротивления второго контура от величины расстройки по частоте Δf между малым и большим сигналами (*a*) и от средней мощности входного сигнала (*b*)

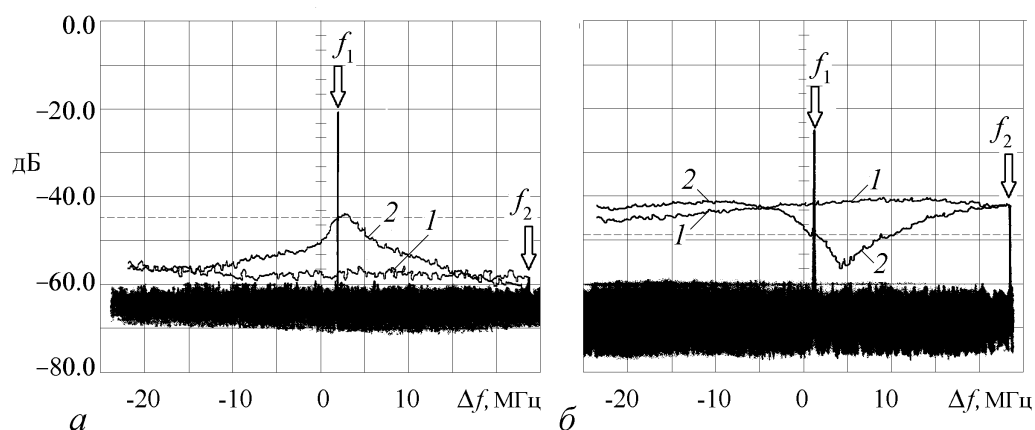


Рис. 5. Амплитудные характеристики малого сигнала, полученные экспериментально при его прохождении через резонансную линию передачи на ООМСВ в отсутствие большого сигнала (1) и в его присутствии (2) на частотах $f_1 = \Omega_1^{\text{экс}} = 2060$ МГц (а) и $f_1 = \Omega_2^{\text{экс}} = 2240$ МГц (б). Штриховой линией обозначен уровень, соответствующий $K = 0$

расстройки по частоте между сигналами при $P_{\text{вх}} \sim \tilde{P}_1 = 128$ мВт (величина Q выбрана равной 665) и б – рассчитанная на основе соотношения (2) зависимость величины активного сопротивления второго контура от уровня мощности входного сигнала. На рис. 4, б также приведено значение R_2 , рассчитанное из соотношения (4) при $P_{\text{вх}} \sim \tilde{P}_1 = 128$ мВт и $\omega_1 = \omega_2$.

На рис. 5 приведены АЧХ малого сигнала в присутствии большого сигнала на фиксированных частотах, соответствующих частотам $\Omega_1^{\text{экс}}$ и $\Omega_2^{\text{экс}}$, при возбуждении ООМСВ в резонансной линии передачи. Измерения АЧХ в двухчастотном режиме проводились с помощью анализатора спектра С4-60, который позволял оценивать изменение амплитуды малого сигнала при перестройке его частоты f_2 вблизи частоты большого сигнала f_1 , величина которой была фиксированной. При перестройке f_2 анализатор спектра работал в режиме запоминания. Гармонические СВЧ-сигналы задавались с помощью двух СВЧ-генераторов Г4-79 с подключенным к выходу одного из них транзисторным усилителем мощности с коэффициентом усиления в линейном режиме работы примерно 30 дБ и выходной мощностью насыщения 200–250 мВт. Уровни мощности СВЧ-сигналов на входе резонансной линии передачи контролировались с помощью измерителя мощности МЗ-51. При этом входная мощность малого сигнала составляла величину $\tilde{P}_2 = 0.5$ мВт¹ и поддерживалась постоянной в диапазоне перестройки его частоты, а мощность большого сигнала имела значение $\tilde{P}_1 = 128$ мВт.

При $f_1 = \Omega_1^{\text{экс}} = 2060$ МГц (см. рис. 5, а) частота большого сигнала находится в области частот, где в односигнальном случае (в соответствии с рис. 3, б) $K > 0$ и максимально. Наблюдаемое на рис. 5, а резонансное увеличение амплитуды малого сигнала вблизи большого (кривая 2) по сравнению со случаем отсутствия в линии

¹ Данный уровень мощности СВЧ-сигнала еще соответствовал линейному режиму работы резонансной линии передачи на ООМСВ и одновременно обеспечивал уверенную индикацию выходного сигнала на фоне собственных шумов анализатора спектра.

большого сигнала (кривая 1) приводит к уменьшению величины K в двухсигнальном режиме по сравнению со случаем, когда на систему подается один сигнал. На частоте $f_2 = f_1$ малый сигнал ослабляется в линии на ту же величину, что и большой сигнал, то есть величина $K = 0$. АЧХ малого сигнала вблизи частоты большого можно рассматривать как резонансную кривую, добротность которой составляет величину $Q \cong 665$.

В случае, когда $f_1 = \Omega_2^{\text{кк}} = 2240$ МГц (см. рис. 5, б), амплитуда малого сигнала вблизи большого начинает уменьшаться и достигает своего минимального значения при отстройке малого сигнала вверх по частоте от большого на величину $\Delta f \sim 3.1$ МГц. Наличие у АЧХ малого сигнала резонансного минимума на частоте, не совпадающей с частотой большого сигнала, приводит к образованию области частот, в которой $K > 0$ (максимальное значение $K \cong 7$ дБ). При больших частотных расстройках между сигналами большой сигнал ослабляется относительно малого сигнала на величину $K \sim -6-7$ дБ. В этом случае добротность резонансной кривой, соответствующей АЧХ малого сигнала, составляет величину $Q \cong 933$.

На рис. 6 приведены АЧХ рассматриваемой системы в двухчастотном режиме (кривые 2 и 3), представляющие собой зависимость величины ослабления малого сигнала A в линии от частоты. Данные характеристики рассчитаны на основе системы уравнений (1) с использованием формулы (4) и метода разделения частот [18] для двух случаев, когда частота большого сигнала f_1 соответствует частотам $\Omega_1^{\text{теор}} = 2040$ МГц (кривая 2) и $\Omega_2^{\text{теор}} = 2243$ МГц (кривая 3). Для упрощения математических выкладок предполагалось, что от входной мощности зависят только два параметра схемы – R_2 и k . Численные значения величины Q для расчета зависимостей R_2 и k от частоты (Q_R для расчета $R_2(f)$ и Q_k для расчета $k(f)$) подбирались таким образом, чтобы ширина рассчитанного резонансного экстремума на АЧХ малого сигнала вблизи частоты большого соответствовала ее измеренной величине. На рис. 6 для сравнения также приведены АЧХ рассматриваемой линии, рассчитанные в одночастотном режиме (кривые 1, 4).

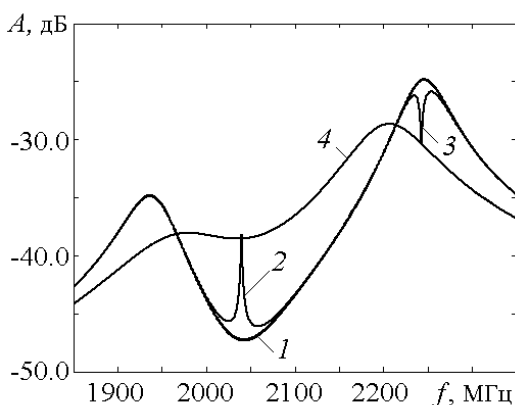


Рис. 6. АЧХ резонансной линии передачи на ООМСВ, рассчитанные по модели двух связанных колебательных контуров в одночастотном режиме (кривая 1 – $\tilde{P}_{\text{вх}} = 1$ мкВт, кривая 4 – $\tilde{P}_{\text{вх}} = 128$ мВт) и в двухчастотном режиме ($\tilde{P}_1 = 128$ мВт, $\tilde{P}_2 = 1$ мкВт; кривая 2 – соответствует частоте $f_1 = 2040$ МГц, $Q_R = 665$, $Q_k = 2 \times 10^5$, а кривая 3 – $f_1 = 2243$ МГц, $Q_R = 933$, $Q_k = 2 \times 10^5$)

Из представленных на рис. 6 результатов расчета в двухчастотном режиме следует, что вблизи частоты большого сигнала, находящейся в области частот, где $K > 0$, наблюдается увеличение амплитуды малого сигнала (кривая 2 на рис. 6), а в области частот, где $K < 0$, наблюдается уменьшение его амплитуды (кривая 3 на рис. 6). В обоих случаях экстремальные значения амплитуды малого сигнала вблизи частоты большого приходятся на частоты $\Omega_1^{\text{теор}}$ и $\Omega_2^{\text{теор}}$ большого сигнала и соответствуют значениям амплитуды сигнала, рассчитанным в одночастотном режиме в насыщении с учетом зависимостей R_2 и k от величины входной мощности

(см. кривую 4, рис. 6). Следует отметить, что результаты расчета, представленные в виде кривой 2, достаточно хорошо описывают наблюдаемый экспериментально эффект увеличения амплитуды малого сигнала вблизи большого (ср. с результатами на рис. 5, а). В тоже время данные расчета, представленные в виде кривой 3, не совсем точно воспроизводят экспериментальные результаты (см. рис. 5, б). В частности, в теоретической модели минимальное значение амплитуды малого сигнала вблизи большого соответствует частоте f_1 , а в эксперименте этот минимум сдвинут вверх по частоте относительно f_1 на величину $\Delta f \sim 3.1$ МГц (рис. 5, б). Аналогичные результаты для двухчастотного режима получаются и в случае, когда от уровня входной мощности зависят три параметра модели: R_2 , L_2 и k .

При относительно больших расстройках между сигналами большой сигнал практически не влияет на величину ослабления малого, вследствие чего АЧХ, рассчитанные для одного сигнала в линейном режиме (кривая 1, рис. 6) и в двухчастотном режиме (кривые 2, 3, рис. 6), совпадают между собой. Аналогичное поведение амплитуды малого сигнала наблюдается и в эксперименте (кривые 1 и 2 на рис. 5).

Заключение

В работе для описания особенностей взаимодействия сигналов разных уровней мощности в резонансной линии передачи на обратных объемных магнитоэлектрических волнах предложена нелинейная модель в виде системы двух связанных колебательных контуров с определенной функциональной зависимостью ее параметров как от уровня мощности входного сигнала, так и от величины расстройки по частоте между сигналами. Модель позволяет достаточно хорошо описать наблюдаемые экспериментально основные эффекты, возникающие в результате взаимодействия двух сигналов при их одновременном прохождении через резонансную линию передачи в различных частотных областях. Однако предложенная нелинейная модель требует дальнейшего уточнения, так как не позволяет, например, описать наблюдаемый экспериментально сдвиг частоты резонансного экстремума амплитудно-частотной характеристики малого сигнала относительно частоты большого сигнала.

Работа выполнена в рамках научной программы Федерального агентства по образованию «Развитие научного потенциала высшей школы» (грант № УР.01.01.372 и грант № 333), а также при поддержке РФФИ (грант № 04-02-16296).

Библиографический список

1. Adam J.D., Stitzer S.N. A magnetostatic wave signal-to-noise enhancer // J. Appl. Phys. Lett. 1980. Vol. 36, № 6. P. 485.
2. Adam J.D. A broadband microwave signal to noise enhancer // IEEE Trans. on Magn. 1980. Vol. MAG-16, № 5. P. 1168.
3. Зубков В.И., Кильдишев В.Н. Влияние мощности СВЧ-сигнала на характеристики микрополосковой линии, нагруженной ферритовой пленкой // РЭ. 1988. Т. 33, № 5. С. 1839.

4. *Соловей Д.В., Шараевский Ю.П.* Прохождение сложных сигналов через нелинейную линию передачи на магнитостатических волнах // Изв. вузов. ПНД. 1995. Т. 3, № 1. С. 11.
5. *Шараевский Ю.П., Гришин В.С., Гурзо В.В. и др.* Взаимодействие регулярных и шумовых сигналов в нелинейной линии передачи на магнитостатических волнах // РЭ. 1995. Т. 40, № 7. С. 1064.
6. *Ваишковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Изд-во СГУ, 1993.
7. *Emtage P.R., Stitzer S.N.* Interaction of signals in ferromagnetic microwave limiters // IEEE Trans. Microwave Theory and Tech. 1977. Vol. MTT-25, № 3. P. 210.
8. *Мелков Г.А., Шолом С.В.* Параметрическое возбуждение спиновых волн поверхностной магнитостатической волной // ЖЭТФ. 1989. Т. 96, вып. 2(8). С. 712.
9. *Гришин С.В., Гришин В.С., Гурзо В.В., Шараевский Ю.П.* Взаимная связь микрополоскового резонатора с ферромагнитной пленкой при возбуждении магнитостатических волн // РЭ. 2003. Т. 48, № 6. С. 724.
10. *Гришин С.В., Шараевский Ю.П.* Нелинейное подавление сверхвысокочастотных сигналов в резонансной линии передачи на магнитостатических волнах // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 2. С. 77.
11. *Гришин С.В., Гришин В.С., Шараевский Ю.П.* Определение нелинейных эквивалентных параметров резонансной системы с ферромагнитной пленкой при возбуждении магнитостатических волн // РЭ. 2005. Т. 50, № 8. С. 902.
12. *Шараевский Ю.П., Гришин С.В., Гурзо В.В.* Шумоподавитель: Патент на полезную модель № 41550 // Изобретения. Полезные модели: Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС. 2004. № 30. С. 542.
13. *Nomoto T., Matsushita Y.* A signal-to-noise enhancer using two MSSW filters and its application to noise reduction in DBS reception // IEEE Trans. Microwave Theory and Tech. 1993. Vol. 41, № 8. P. 1316.
14. *Kuki T., Nomoto T.* A reflection type of MSW signal-to-noise enhancer in the 400–MHz band // IEICE Trans. Electron. 1999. Vol. E82-C, № 4. P. 654.
15. *Банди Б.* Методы оптимизации. М.: Радио и Связь, 1988. 128 с.
16. *Stitzer S.N.* Frequency selective microwave power limiting in thin YIG films // IEEE Trans. on Magn. 1983. Vol. MAG-19, № 5. P. 1874.
17. *Adam J.D., Stitzer S.N.* Frequency selective limiters for high dynamic range microwave receivers // IEEE Trans. Microwave Theory and Tech. 1993. Vol. 41, № 12. P. 2227.
18. *Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 288 с.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию

6.08.2005

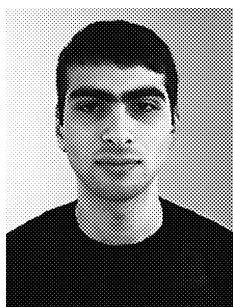
NONLINEAR MODEL OF INTERACTION OF VARIOUS POWER LEVEL SIGNALS IN RESONANCE TRANSMISSION LINE ON MAGNETOSTATIC WAVES

S.V. Grishin, A.R. Davoian, Yu.P. Sharaevskii

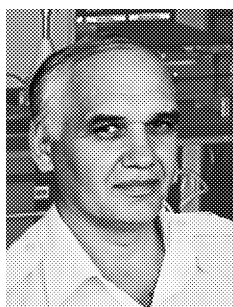
Investigation results of nonlinear dual-frequency model of resonance transmission line on backward volume magnetostatic waves are demonstrated. The system of two coupled oscillatory circuits is used as a model. The parameters of system depend on the input signal power level and on the detuning value between large and small signals. The results of the model are compared with the experimental data.



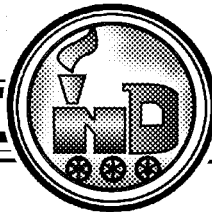
Гришин Сергей Валерьевич – родился в 1974 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (1997). В настоящее время занимает должность старшего преподавателя на кафедре электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов - физика магнитостатических волн в тонких ферромагнитных пленках, математическое моделирование нелинейных процессов в радиофизических системах на основе ферромагнитных пленок. Имеет около 30 публикаций в отечественных научно-технических журналах и сборниках.



Давоян Артур Рафикович – родился в 1985 году. В настоящее время является студентом 4-го курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Область научных интересов – нелинейные колебания и волны в ферромагнитных пленках. Имеет 4 публикации по данной тематике.



Шараевский Юрий Павлович – родился в Николаевске-на-Амуре Хабаровского края (1942). Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой нелинейной физики СГУ. Работал в области электроники сверхвысоких частот, в настоящее время занимается исследованиями в области физики нелинейных волновых процессов в тонких магнитных пленках. Читает лекции по общему курсу физики, по курсу «Концепции современного естествознания» для студентов гуманитарных специальностей, спецкурс «Колебания и волны в нелинейных активных средах». Опубликовал более 120 научных и научно-методических работ, несколько учебных пособий и монографию в соавторстве со В.С. Стальмаховым и А.В. Вашковским «Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот» (Изд-во Сарат. ун-та, 1993). E-mail:sharaevskyy@info.sgu.ru



ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОГОГРУППОВОЙ ПОПУЛЯЦИОННОЙ МОДЕЛИ В ВИДЕ ОДНОГРУППОВОЙ МОДЕЛИ СО МНОГИМИ ПАРАМЕТРАМИ

И.Н. Панкратова

В качестве одного из вариантов нелинейной модели для описания динамики многогрупповой биологической популяции предложена динамическая система, порожденная многомерным логистическим отображением. В некоторых частях компактного фазового пространства данное отображение демонстрирует поведение, нетипичное для одномерного однопараметрического логистического отображения. В биологической модели это проявляется, в первую очередь, в скачкообразном изменении численности как самой популяции в целом, так и ее возрастных групп при малых изменениях возрастной структуры популяции. Кроме того, популяция при изменившейся возрастной структуре может сохранить тип поведения. Изучается механизм возникновения такого поведения многогрупповой популяции.

Введение

С того времени, как Лесли предложил нелинейную модель для описания динамики численности популяции с неперекрывающимися поколениями [1], были предложены различные ее обобщения и модификации [2–4]. Мы предлагаем свой вариант нелинейной модели, где лимитирующий по численности популяции фактор выбран в отличном от модели Лесли виде.

Пусть \mathbf{x} – вектор относительных численностей (плотностей) возрастных групп популяции; A – матрица коэффициентов взаимосвязей групп между собой, включая коэффициенты рождаемости и выживаемости (матрица параметров), и $(1 - \sum_1^n x_i)$ – лимитирующая функция, отвечающая предположению об ограниченности ресурсов. Модель динамики плотностей многогрупповой сезонно размножающейся биологической популяции в условиях стационарной экосистемы с ограниченными ресурсами зададим динамической системой f^m

$$f: R^n \rightarrow R^n, \quad f\mathbf{x} = (1 - \sum_1^n x_i)A\mathbf{x}.$$

Учет естественных ограничений на вектор \mathbf{x} позволяет выделить в R^n компактное множество $K^n = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{x} \geq 0, \sum_1^n x_i \leq 1\}$, которое можно взять в качестве фазового пространства. Инвариантность множества K^n (в положительном направлении), то есть выполнение условия $fK^n \subseteq K^n$, обеспечивается выбором матрицы A : A – неотрицательная матрица ($a_{ij} \geq 0 \forall i, j = \overline{1, n}$) и $\|A\| = \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 4$. Впервые динамическая система $\{f^m, K^n, Z^+\}$, $Z^+ = N \cup \{0\}$, была предложена для изучения в качестве биологической модели многогрупповой популяции в начале 1990-х годов (см., например, [5,6]). В частности, полагая $A = L$, где L – матрица Лесли с коэффициентами рождаемости $a_{1,i} = b_i$, $i = \overline{1, n}$, и выживаемости $a_{i,i-1} = a_i$, $i = \overline{2, n}$ ($a_{i,j} = 0$ для всех других индексов матрицы Лесли), получаем нелинейный аналог модели Лесли. В отличие от других линейных и нелинейных моделей Лесли и их вариантов, встречающихся в научной литературе, для которых зачастую возможно существование только равновесных и циклических решений, предложенная нами модель позволяет получать все виды динамики, в том числе и хаотические режимы, которые наиболее характерны для динамики биологических популяций.

При $n = 1$ x есть общая плотность популяции, $A \equiv \lambda = \text{const}$ – коэффициент размножения, и мы получаем хорошо известную модель, описывающую механизм саморегуляции биологической популяции одного вида в условиях ограниченности ресурсов. Модель задается одномерной динамической системой χ_λ^m

$$\chi_\lambda: R \rightarrow R, \quad \chi_\lambda x = \lambda(1 - x)x.$$

Здесь $f \equiv \chi_\lambda$ – логистическое отображение и $x \in I = [0, 1] \subset R$ при $\lambda \in (0, 4]$ [7, 8]. Отметим, что одномерное однопараметрическое представление отображения f существует также на собственных направлениях матрицы A ввиду линейного изоморфизма между f и χ_λ на собственных направлениях, где в качестве λ выступает собственное значение матрицы A , соответствующее выбранному собственному направлению [6].

К настоящему времени теория, развитая для одномерного логистического отображения, является эффективным методом исследования многих сложных нелинейных явлений, возникающих как в модельных, так и в реальных многомерных системах. Целый ряд свойств рассматриваемого многомерного логистического отображения, в частности, однопараметрической динамики, возникающей в многомерной системе, получены в рамках теории одномерных непрерывных отображений (см., например, [9]). Наряду с этим многомерное логистическое отображение обладает некоторыми качественно новыми свойствами, которые существенным образом отличаются от свойств одномерного однопараметрического логистического отображения.

1. Двумерное логистическое отображение

Для многомерного отображения f установлено, что его динамику во всем фазовом пространстве K^n можно описать совокупностью отображений, заданных в виде суперпозиций одномерных логистических отображений с разными числовыми параметрами (количество параметров не превышает размерности системы). Более точно результат состоит в следующем [10, 11].

Пусть $\omega_f(\mathbf{x})$ – ω -предельное множество траектории $f^m \mathbf{x}$.

Теорема. Для любого \mathbf{x} из K^n существует инвариантное относительно f множество $J_p \subset K^n$ для некоторого $1 \leq p \leq n$, $p \in N$ такое, что J_p состоит из p отрезков лучей $J_{p,1}, \dots, J_{p,p}$, инвариантных относительно отображения f^p , и $\omega_f(\mathbf{x}) \subseteq J_p$. На J_p отображение f^p имеет одномерное представление на каждом $J_{p,i}$

$$f^p|_{J_{p,i}} = \chi_{\lambda_p} \circ \dots \circ \chi_{\lambda_1}, \quad (*)$$

где $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_p > 0$ – некоторые числа.

При доказательстве теоремы используются свойство расщепления пространства на инвариантные циклические подпространства и установленный в [6] факт, что ω -предельные множества системы f^m расположены на конечном числе $p \leq n$ отрезков лучей.

Одномерные суперпозиции $\chi_{\lambda_p} \circ \dots \circ \chi_{\lambda_1}$, $p \leq n$, $p \in N$, удовлетворяющие утверждению теоремы, являются отображениями последования (отображениями Пуанкаре) для многомерного отображения f .

Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ при $p = n$ удовлетворяют условию $\prod_1^n \lambda_i = \lambda^n$, где $\lambda > 0$ – максимальное собственное значение матрицы A (мы полагаем λ строго положительным, иначе динамика отображения f в K^n сводится к тривиальной); при $p < n$ $\prod_1^p \lambda_i = \bar{\lambda}^p$, где собственное значение $\bar{\lambda}$ может быть уже другим, $0 \leq \bar{\lambda} \leq \lambda$ (очевидно, что для нас представляют интерес только значения $\bar{\lambda} > 0$). Эти равенства легко получить с учетом циклическости множества J_p . Поскольку отображение f действует на K^n , отображение $\chi_{\lambda_p} \circ \dots \circ \chi_{\lambda_1}$ с необходимостью действует на $I = [0, 1]$. При этом $0 < \lambda_i \leq 4$, $i = 1, p$.

Сделаем несколько существенных замечаний относительно чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. На циклическом множестве J_p набор чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ сохраняется при последовательном переходе с одного отрезка луча на другой, в то время как одномерный вид отображения f^p получается из (*) с помощью циклической перестановки его сомножителей. Согласно теореме о расщеплении пространства на инвариантные циклические подпространства множество J_p содержится в некотором циклическом множестве M_p вида $M_p = R^p \cap K^n$, где $R^p \subseteq R^n$ – p -мерное инвариантное циклическое подпространство, $p \leq n$, $p \in N$. Множество M_p состоит из континуума циклических множеств вида J_p , отрезки лучей которых при $p > 1$ образуют полые пирамиды вокруг одномерного инвариантного множества, расположенного на неотрицательном собственном направлении матрицы A , отвечающем собственному значению λ (или $\bar{\lambda}$). На M_p отображение f^p также имеет одномерный вид (*), но $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ являются уже параметрами.

Для любой нетривиальной траектории $f^m \mathbf{x}$ точки \mathbf{x} введем в рассмотрение вектор $|f^m \mathbf{x}|^{-1} f^m \mathbf{x}$, который назовем *возрастной структурой популяции* и который определяет соотношения между плотностями возрастных групп в общей численности популяции (в момент времени m). Согласно приведенной выше теореме структура популяции, управляемой системой f^m , с течением времени либо стабилизируется ($p = 1$), либо существует асимптотически периодическое ее изменение с периодом $p > 1 \forall x \neq 0$. Норма вектора \mathbf{x} понимается как $|\mathbf{x}| = \sum_1^n x_i$.

Относительно динамики популяции теорема утверждает, что многогрупповая популяционная модель, заданная системой f^m , асимптотически имеет такое же поведение, как семейство одногрупповых популяционных моделей, заданных одномерными динамическими системами $(\chi_{\lambda_p} \circ \dots \circ \chi_{\lambda_1})^m$, $p \in N$, $1 \leq p \leq n$. Здесь в качестве p выступает число репродуктивных возрастных групп популяции; числа $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ – это коэффициенты размножения репродуктивных групп.

В силу одномерных представлений отображений последования (*) правомерно свести изучение свойств отображения f к изучению свойств отображений $\chi_{\lambda_p} \circ \dots \circ \chi_{\lambda_1}$, зависящих от p параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, $p \in N$. Более того, можно ограничиться случаем $p = 2$, поскольку новые по сравнению с одномерным отображением χ_λ (и его итерациями) свойства возникают уже у двухпараметрического отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Поэтому в дальнейшем мы будем изучать отображение

$$\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}, \quad 0 < \lambda_1, \lambda_2 \leq 4, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda^2.$$

Распишем его действие на произвольный вектор $\mathbf{x} \in I$. Имеем

$$\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1} \mathbf{x} = \lambda^2(1 - \chi_{\lambda_1} \mathbf{x})(1 - \mathbf{x})\mathbf{x}.$$

Отсюда видно, что удобнее рассматривать область параметров (λ_1, λ) , а не (λ_1, λ_2) . Очевидно, что при $0 < \lambda \leq 4$ и $0 < \lambda_1 \leq 4$ суперпозиция $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ имеет смысл и существует на I вместе со всеми своими итерациями, то есть $(\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1})^m x \in I$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Однако параметр λ_1 нельзя выбрать произвольным, в частности, произвольно малым для заданного λ ввиду ограничения $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda^2$, так как $\lambda_2 \leq 4$. Отсюда следует, что $\lambda_{1 \min} \leq \lambda_1 \leq 4$, где $\lambda_{1 \min}$ выбирается из условия: $4\lambda_{1 \min} = \lambda^2$. Таким образом, имеем следующую область изменения параметров (λ_1, λ) :

$$\Lambda = \{ (\lambda_1, \lambda) \mid \lambda_{1 \min} \leq \lambda_1 \leq 4, \quad 0 < \lambda \leq 4, \quad \lambda_{1 \min} = \lambda^2/4 \}.$$

Первое свойство отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$, нехарактерное для отображения χ_λ , относится к существованию областей значений параметров, в которых неподвижные точки отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ (и его итераций $(\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1})^m$, $m = 2, 3, \dots$) появляются и исчезают и нарушается их устойчивость; это ведет либо к скачкообразной смене их положения в фазовом пространстве, либо к смене типа аттрактора.

Действительно, рассмотрим неподвижные точки отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$, то есть корни уравнения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1} x = x$. После несложных преобразований получаем следующее уравнение для корней:

$$x^3 + (1/\lambda_1 - 1/3)x + 2/27 + 1/\lambda_1 \cdot (1/\lambda^2 - 1/3) = 0.$$

Дискриминант уравнения имеет вид

$$D(\lambda, \lambda_1) = -108(Q(\lambda, \lambda_1)^2/4 + P(\lambda_1)^3/27),$$

где

$$P(\lambda_1) = 1/\lambda_1 - 1/3, \quad Q(\lambda, \lambda_1) = 2/27 + 1/\lambda_1 \cdot (1/\lambda^2 - 1/3).$$

Дальнейшие результаты удобно излагать, используя язык теории катастроф [12], так как в рамках именно этой теории можно дать объяснение возникающих

метаморфоз отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$. Тогда приведенное выше кубическое уравнение задает *многообразие катастроф* в пространстве $x\lambda_1\lambda$, которое имеет вид поверхности со сборкой. Проецируя точки этой поверхности на область параметров Λ , замечаем, что линия $D = 0$ задает так называемое *бифуркационное множество* (параметров) и делит область значений параметров Λ на три части, в которых существуют одна, две и три неподвижных точки отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$. Эта линия состоит из двух ветвей, выходящих из точки $(\lambda, \lambda_1) = (3.0; 3.0)$ (*точка сборки*) и образующих кривой угол. Тогда при $\lambda, \lambda_1 < 3.0$ ($D < 0$) существует только одна нетривиальная неподвижная точка (при $\lambda \leq 1.0, \lambda_{1 \min} \leq \lambda_1 \leq 4x = 0$ является единственной притягивающей неподвижной точкой отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$).

На рис. 1 показаны три части области параметров $\{(\lambda_1, \lambda) \mid 3.0 \leq \lambda \leq 4.0, 3.0 \leq \lambda_1 \leq 4.0\}$, где $D > 0$ и существуют три различных нетривиальных неподвижных точки (подобласть внутри кривого угла); $D < 0$ и существует только одна нетривиальная неподвижная точка (подобласть вне кривого угла) и $D = 0$ – линия, на которой существуют три нетривиальных неподвижных точки, две из которых совпадают. Здесь λ_1 – ось абсцисс и λ – ось ординат.

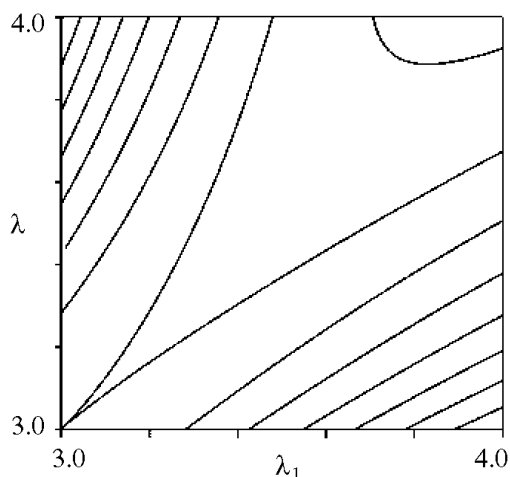


Рис. 1. Линия $D = 0$, выходящая из точки $(\lambda_1, \lambda) = (3.0; 3.0)$, в области $\{(\lambda_1, \lambda) \mid 3.0 \leq \lambda_1 \leq 4.0, 3.0 \leq \lambda \leq 4.0\}$

При изменении значений параметров λ_1, λ мы пересекаем линию $D = 0$, где нарушается устойчивость положений неподвижных точек. Данное свойство легко обнаруживается при рассмотрении бифуркационных диаграмм для отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$. Достаточно даже обратиться к (одномерным) срезам бифуркационных диаграмм для отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$, где вдоль оси абсцисс меняется один из параметров λ_1 или λ , другой параметр при этом фиксирован, а по оси ординат откладываются значения переменной x , расположенные на аттракторе, которые получаются при итерациях отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$. Рис. 2 иллюстрирует этот феномен. На рисунке представлен срез бифуркационной диаграммы для отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ при значениях $\lambda = 3.6, 3.24 \leq \lambda_1 \leq 4.0$. При значениях $\lambda_1 \approx 3.346$ и $\lambda_1 \approx 3.873$ ($D = 0$) видно, что здесь скачкообразно меняются типы аттракторов отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ (в двух различных подобластях области $3.346 \leq \lambda_1 \leq 3.873$, где $D > 0$, аттракторами являются неподвижные точки).

При значении $\lambda_1 \approx 3.51$ ($D > 0$) также происходит смена типа аттрактора отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$, и мы наблюдаем нарушение устойчивости положения цикла периода 2 (нарушение устойчивости положения неподвижных точек отображения $(\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1})^2$) и смену типа аттрактора.

Второе свойство отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ заключается в существовании «петель», состоящих из конечного (или бесконечного) числа притягивающих периодических траекторий отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ (то есть внутри этих «петель» мы наблюдаем прямые и обратные бифуркации удвоения периода притягивающих траекторий, а также хаос, антихаос и т.д.).

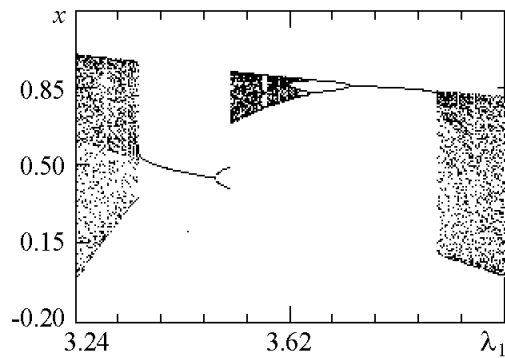


Рис. 2. Срез бифуркационной диаграммы для отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ при $\lambda = 3.6$; $3.24 \leq \lambda_1 \leq 4.0$. При $\lambda_1 \approx 3.346$ и $\lambda_1 \approx 3.873$ $D = 0$

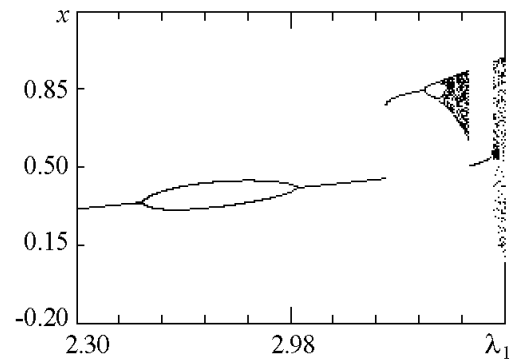


Рис. 3. Срез бифуркационной диаграммы для отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ при $\lambda_1 = 3.35$; $0.8 \leq \lambda \leq 3.66$. При $\lambda \approx 2.46$, $\lambda \approx 3.02$ происходят соответственно вход в область притяжения цикла периода 2 и выход из нее

Одна из причин существования «петель» заключается в том, что при непрерывном изменении значений параметров происходит пересечение областей притяжения циклов периода $k \cdot 2^n$, $k \in N$, $n = 0, 1, 2, 4, \dots$: вначале происходит вход в эти области, а затем – выход из них и пересечение областей притяжения циклов, но уже в обратном порядке $\dots, n, n - 1, n - 2, \dots$. На рис. 3 представлен срез бифуркационной диаграммы для отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ при значении $\lambda_1 = 3.35$, поясняющий данное свойство. Здесь $0.8 \leq \lambda \leq 3.66$. При значениях $\lambda \approx 2.46$ и $\lambda \approx 3.02$ происходят соответственно вход в область притяжения цикла периода 2 и выход из нее. Кроме того, на диаграмме можно также наблюдать нарушение устойчивости положений неподвижных точек при значениях $\lambda \approx 3.269$, $\lambda \approx 3.608$ ($D = 0$) и $\lambda \approx 3.54$ ($D > 0$).

Отметим еще раз, что динамика отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ по сравнению с однопараметрической отображения χ_λ усложняется из-за возможности пересечения подобластей параметров, в которых отображение имеет разные динамические свойства, при вариации значений параметров. Все эти особенности динамики отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ можно обнаружить на бифуркационных диаграммах для данного отображения в области Λ . Большой интерес здесь представляет окрестность точки $(\lambda_1, \lambda) = (3.0; 3.0)$.

Заключение

Допуская возможность существования биологических популяций, динамика которых описывается системой f^m , можно дать прогноз динамики популяций, принимая во внимание их самоорганизацию и стабильность. Мы имеем в виду, в первую очередь, стабильность возрастной структуры популяции (вектор $|f^m \mathbf{x}|^{-1} f^m \mathbf{x}$), которая со временем либо стабилизируется, либо существует ее периодическое изменение для любой начальной плотности популяции $\mathbf{x} \neq 0$. Асимптотическая устойчивость структуры популяции позволяет определять число репродуктивных возраст-

ных групп (число p в $(*)$) для корректного описания динамики популяции. Заметим, однако, что хотя структура популяции является устойчивым признаком популяции и асимптотически меняется периодическим образом, плотность популяции и ее возрастных групп может меняться произвольным образом, включая периодическое и хаотическое изменения. Вычислим $\lambda = \left(\prod_1^p \lambda_i\right)^{1/p}$ – максимальное собственное значение матрицы A и определим область параметров $\lambda_1 \dots \lambda_p$. Позже мы можем «забыть» про матрицу A (и внутригрупповые взаимосвязи) и контролировать динамику популяции, меняя коэффициенты репродуктивности возрастных групп $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ в одногрупповой модели.

В дополнении отметим, что если все n возрастных групп являются репродуктивными, то матрица A биологической модели является неотрицательной импримитивной с индексом импримитивности n [13], система f^m называется в этом случае канонической [14] и модель тождественна модели Лесли с матрицей $L = A^*$, где A^* – транспонированная к A матрица.

Библиографический список

1. *Leslie P.H.* The use of matrices in certain population mathematics // *Biometrika*. 1945. Vol. 33. P. 183.
2. *Geramita J.M. and Pullman M.J.* An introduction to the application of non-negative matrices to biological systems // *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*. Kingston, Ontario, Canada: Queen's Univ. 1984, № 68.
3. *Caswell H.* Matrix population models: construction, analysis and interpretation. Sunderland, Massachusetts, USA: Sunauer Associates Inc., 1989.
4. *Логофет Д.О.* Еще раз о нелинейной модели Лесли: асимптотическое поведение траекторий в примитивном и импримитивном случаях // *Докл. АН СССР*. 1991. Т. 318, № 5. С. 1077.
5. *Панкратова И.Н., Рахимбердиев М.И.* О предельных множествах системы дискретных уравнений со скалярной нелинейностью // *Известия НАН РК, сер. физ.-мат.* 1993, № 5. С. 56.
6. *Панкратова И.Н.* О предельных множествах многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения // *Дифференц. уравнения*. 1996. Т. 32, № 7. С. 995.
7. *Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова Думка, 1989.
8. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // *Успехи физ. наук*. 1983. Т. 141, № 2. С. 343.
9. *Панкратова И.Н.* Динамические свойства многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения для типичных случаев однопараметрической динамики // *Известия МОН, НАН РК, сер. физ.-мат.* 2001, № 5. С. 55.
10. *Панкратова И.Н.* Одномерные представления многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения // *Математический журнал*. Алматы. 2004. Т. 4, № 1. С. 62.

11. Панкратова И.Н. Сведение многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения к одномерному // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 11. С. 1570.
12. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.
13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. С. 355.
14. Панкратова И.Н., Рахимбердиев М.И. Канонический вид многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения // Математический журнал. Алматы. 2003. Т. 3, № 1. С. 54.

Институт математики

*Министерства образования и науки РК
Алматы, Казахстан*

Поступила в редакцию

После доработки

10.09.2005

30.09.2005

REPRESENTATION OF MANY-GROUP POPULATION MODEL AS ONE-SPECIES POPULATION MODEL WITH MANY PARAMETERS

I.N. Pankratova

We propose a dynamic system determined by a many-dimensional logistic map as a variant of a nonlinear model for dynamics of a biological many-group population. In some parts of a compact phase space the map displays a behavior which is atypical for a one-parameter one-dimensional logistic map. For a many-group population model it means stepwise changes of a total population density and densities of population age groups. We have an opportunity of getting a total population age groups changing periodically with the same period in many various parts of a phase space. A mechanism of dynamics originated in this manner for such a many-group population is discussed.



Панкратова Ирина Николаевна – родилась в 1958 году, окончила математический факультет Казахского государственного университета им. С.М.Кирова в 1980 году. Работает в институте математики МОН РК в должности старшего научного сотрудника, кандидат физико-математических наук (1994). Имеет более 60 научных публикаций. Область научных интересов: многомерная многопараметрическая нелинейная динамика и ее применения в биологии и других областях науки. E-mail: irina@math.kz



К 100-летию со дня рождения С.П. Стрелкова

Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 5–6, 2005

УДК 533.6.071.87

О НЕКОТОРЫХ ПОНЯТИЯХ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ СВЯЗЯМИ

В.И. Смыслов

Описание основных понятий, относящихся к собственным колебаниям неконсервативных систем с несимметричными связями, в частности, таких как комплексные собственные формы и частоты, комплексные нормальные координаты.

По представлению ООН 2005 год объявлен годом физики. Важнейшую часть физики составляет наука о колебаниях, которая охватывает явления в масштабах от атома до Вселенной. Отечественный вклад в науку о колебаниях и в ее приложения к практическим задачам достаточно велик. В решении целого ряда колебательных задач, относящихся к аэроупругости, большая заслуга принадлежит Сергею Павловичу Стрелкову. На основе одной из написанных им книг [1] учились и успешно работали инженеры, ученые многих НИИ, вузов, КБ и других предприятий. К сожалению, это издание стало библиографической редкостью, а некоторые его положения, так случилось, даже открываются заново.

Поводом к изложенному в настоящей заметке послужил выход книги С.В. Аринчева [2], составленной на базе спецкурсов для студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана (специальности «Ракетостроение» и «Космические летательные аппараты и разгонные блоки»). В последнее время в вузах появился целый ряд научно-технических книг и учебников; некоторые, к сожалению, не отвечают требуемому качеству. В связи с этим представляется необходимым уточнить или напомнить ряд основных понятий, в первую очередь имеющих отношение к специфическим задачам динамической аэроупругости, теории колебаний и теоретической механики, на примере линейных систем с конечным числом степеней свободы.

Достаточно общее уравнение *собственных колебаний*¹ системы имеет вид:

$$M\ddot{\mathbf{q}} + N\dot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = 0, \quad (1)$$

¹Не вдаваясь в варианты описания сил, зависящих от скорости.

где \mathbf{q} – вектор обобщенных координат (смещений, углов); M , K и H – матрицы, соответственно, инерционных, упругих сил и сил демпфирования, которые могут относиться к упругой конструкции, воздушному потоку, системе автоматического управления (САУ) и другим.

1. Неконсервативные системы

Первые из таких систем, достаточно широкого класса, являются *неконсервативные* динамические системы. При их анализе зачастую проводится сопоставление с *консервативными* системами, известным признаком которых² (см., например, у А.А. Андропова [3], в справочнике [4] и др.) является неизменность количества энергии. Все прочие системы являются неконсервативными. В инженерной практике огромное число задач относится к неконсервативным системам (хотя в расчетах зачастую используется схематизация исследуемых систем, как консервативных). Для консервативных систем в уравнении (1) $H\dot{\mathbf{q}} = 0$, а матрицы M и K симметричные, с положительными диагональными элементами. Эти матрицы приводятся к диагональному виду одновременно.

Одним из общих признаков классификации систем в теоретической механике является характер *консервативных* или *неконсервативных сил* (рис. 1). Для последних отсутствует потенциал и, следовательно, работа сил при переходе системы из одного состояния в другое зависит от способа перехода, в отличие от таких консервативных сил, как упругие или силы тяжести.

В неконсервативных системах четко выделяется класс *диссипативных систем* – с рассеянием энергии (зависящей от скорости колебаний), в которых, если нет других неконсервативных сил, принципиально не возникает потеря динамической устойчивости. Для них справедливы свойства матриц M и K , относящихся к консервативным системам, а матрица H – симметричная.

Возникновение неустойчивости в неконсервативных системах – одно из основных явлений, составляющих предмет исследования динамической аэроупругости, науки, в которой важнейшими системами являются упругие тела или конструкции, взаимодействующие с потоком (основным источником энергии). Во многих случаях в этом взаимодействии участвует САУ, элементы которой имеют дополнительный источник энергии. Отличительной особенностью последней разновидности неконсервативных систем является наличие несимметричной связи³ между отдельными степенями свободы – колебаниями соответствующих обобщенных координат (см. [1, 5]). Зачастую в этом случае используется идея (привычная для всех, занимающихся задачами флаттера) И. Рокара [6] о происхождении динамической неустойчивости систем, в которых по каким-либо причинам происходит сближение частот. То значение параметра, которое соответствует их равенству, определяет границу устойчивости. Особый термин для того же класса неконсервативных систем – Г. Циглера [5], который называет их *циркуляционными*, по названию неконсервативных сил, не зависящих от скорости колебаний (в отличие от диссипативных сил).

²Не смешивать с понятием *автономные системы*, которые могут включать источник энергии, лишь бы отсутствовали внешние воздействия, зависящие от времени, [3].

³Системы являются *активными*, в отличие от пассивных, [1].

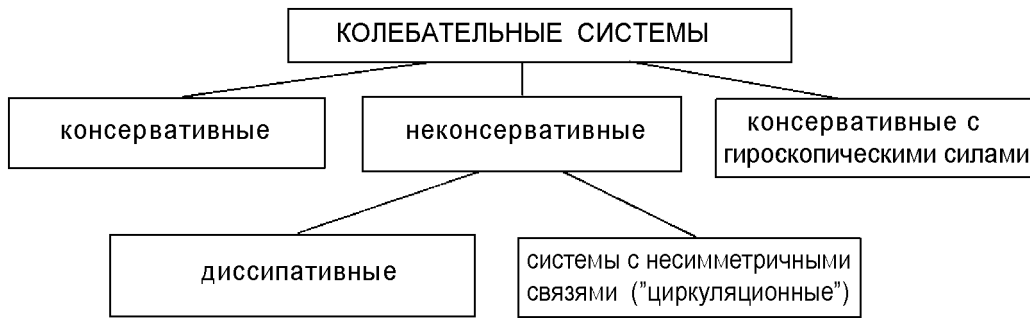


Рис. 1. Классификация колебательных систем (по характеру сил)

Системы с гироскопическими силами (зависящими от скорости), встречающиеся в некоторых задачах аэроупругости, называются в [5] *гироскопическими консервативными* системами. Здесь матрица H – кососимметричная.

Неконсервативные силы со стороны потока, вызывающие несимметричное («невозвратное») воздействие колебания одного вида на колебания другого (например, кручения крыла на его изгиб), может дополняться любыми взаимодействиями, связанными с наличием однонаправленных элементов САУ (в первую очередь – силовых приводов).

Введенное в книге [2] «обобщенное» определение неконсервативной системы как такой, где «при парном взаимодействии степеней свободы первая из двух соответствующих обобщенных сил тождественно равна нулю, а вторая зависит от обобщенной координаты, соответствующей первой обобщенной силе», является ошибочным. Эта формулировка относится лишь к частному случаю из множества неконсервативных систем с несимметричной связью (названному С.П. Стрелковым в [7] системой с необратимыми связями). Недопустимо придавать общий характер частной (хотя и важной) задаче. Поэтому неправомерно называть (чтобы не вводить в заблуждение читателя книги) «теорией колебаний неконсервативных систем» [2] предмет рассмотрения, притом неполного, одного лишь класса *систем с несимметричными связями*. Вместе с тем, можно лишь приветствовать факт обращения автора [2] к указанной теме, крайне важной для задач динамической аэроупругости, учитывая малое количество книг по этому вопросу.

2. Комплексные частоты

Другое понятие для рассматриваемых неконсервативных систем – *комплексная частота*, было специально введено (по аналогии с понятием комплексного корня) почти полвека назад С.П. Стрелковым [1, 7], оно вошло в обиход и стало в задачах аэроупругости привычным. Вектор частного решения уравнения (1) имеет вид

$$\mathbf{q}_k = C_k \mathbf{q}_{0k} e^{\lambda_k t}, \quad \lambda_k = \operatorname{Re} \lambda_k + j \operatorname{Im} \lambda_k = \delta_k \pm j \omega_k, \quad (2)$$

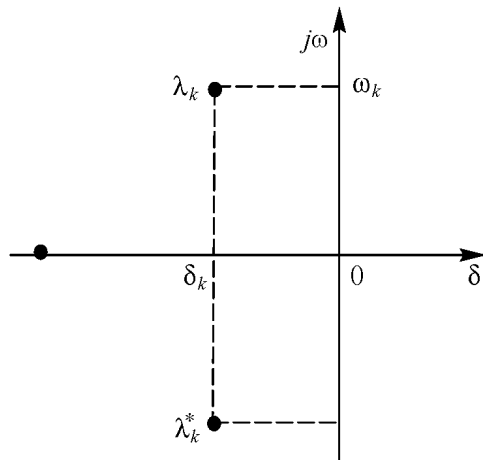


Рис. 2. Комплексные собственные частоты на плоскости корней: δ_k – действительная и ω_k – мнимая часть корня

где \mathbf{q}_{0k} – вектор амплитуд, C_k – константа, определяемая начальными условиями. Здесь подразумевается, что на комплексной плоскости корней λ мнимая часть (ω) есть собственно частота гармонического множителя, а действительная часть (δ) – показатель затухания (рис. 2). Его знак определяет характер решения: расходящегося или затухающего, то есть выходит корень характеристического уравнения в правую полуплоскость (на плоскости корней) или в левую. В системе без демпфирования на той же плоскости действительные части корней нулевые, а частоты располагаются на мнимой оси⁴. Очевидно, понятия собственных частот для консервативной и неконсервативной систем в принципе различны.

3. Собственные формы

Представляется излишним и неудачным дополнять известное понятие *собственной формы* консервативной системы таким определением, как «пропорциональная» (в книге [1]). Классическое понятие собственной формы, как совокупности *коэффициентов распределения* [1, 8] амплитуд собственных колебаний (на собственной частоте), относится лишь к консервативной системе. При этом все величины действительные, в терминах матричной алгебры – это собственный вектор \mathbf{q}_{0k} , а квадрат частоты λ^2 – собственное значение. Физический или инженерный смысл колебаний системы без затухания по собственной форме – фазовые сдвиги между колебаниями координат всех точек отсутствуют или составляют 180 градусов, и отношение амплитуд в любой момент времени остается постоянным, то есть мгновенные фотографии упругой конструкции отличаются лишь константой – общим множителем, положительным или отрицательным. Имеются характерные точки – *узловые*, в которых амплитуда колебаний всегда нулевая.

Важным свойством собственных форм является их ортогональность, равенство нулю суммы произведений соответствующих коэффициентов распределения k -й и m -й собственных форм (относящихся к различным собственным частотам) с инерционными или упругими весовыми коэффициентами:

$$(\mathbf{q}_{0k})^T \mathbf{M} \mathbf{q}_{0m} = (\mathbf{q}_{0k})^T \mathbf{K} \mathbf{q}_{0m} = 0, \quad (3)$$

где $(\mathbf{q}_{0k})^T$ – транспонированный вектор \mathbf{q}_{0k} .

Физический смысл условий ортогональности для консервативных систем следующий. Сумма произведений элементов векторов формы и упругих $\mathbf{K} \mathbf{q}_{0m}$ (или инерционных $\mathbf{M} \mathbf{q}_{0m}$) сил равна нулю, если векторы относятся к разным собственным частотам. В этом случае равна нулю и работа упругих (или инерционных) сил одного тона на перемещениях другого. Для одинаковых частот указанная сумма произведений равна значению эффективной жесткости (или массы) данного тона.

⁴ Действительными значения частоты оказываются с учетом комплексно-сопряженной части общего решения.

Такие характеристики, как набор («спектр») собственных частот и собственных форм конкретной упруго-массовой системы, являются основными, характеризующими колебательные свойства упругой конструкции вне потока.

Ситуация меняется при рассмотрении неконсервативной системы с демпфированием. В этом случае появляется комплексная собственная частота, привычное понятие собственной формы оказывается неприменимо. Лишь в частном случае неконсервативной системы (в ограниченном диапазоне изменения неконсервативных сил и при отсутствии сил, зависящих от скорости колебаний) можно найти значения действительных собственных частот и соответствующих коэффициентов распределения, однако эти данные имеют ограниченную ценность. Пример такого случая – колебания в потоке на докритической скорости без учета сил конструкционного и аэродинамического демпфирования, при этих колебаниях с изменением режима потока изменяются частота и «форма».

Для неконсервативной системы с затуханием С.П. Стрелковым [1, 7] было введено понятие *комплексной собственной формы*, в которой коэффициенты распределения амплитуд (элементы вектора \mathbf{q}_{0k}) – комплексные величины, они образуют не один, а *два вектора*, условно – действительный и мнимый.

$$\mathbf{q}_k = C_k \mathbf{q}_{0k} e^{\lambda_k t} + C_k^* \mathbf{q}_{0k}^* e^{\lambda_k^* t} = 2e^{\delta_k t} [(\operatorname{Re} \mathbf{q}_{0k}) \cos \omega_k t - (\operatorname{Im} \mathbf{q}_{0k}) \sin \omega_k t],$$

$$\mathbf{q}_{0k} = (\operatorname{Re} \mathbf{q}_{0k}) + j(\operatorname{Im} \mathbf{q}_{0k}). \quad (4)$$

В отличие от консервативной системы каждая амплитуда здесь характеризуется еще и показателем затухания (положительным или отрицательным) и меняется со временем. Фазовые сдвиги между колебаниями координат отдельных точек отличаются теперь от 0 или 180 градусов. Признаком такой формы является допустимость ее представления двумя наборами амплитуд – двумя «фотографиями»: в первый определенный момент времени и во второй момент, через четверть периода. Обе картины могут быть совершенно различными, даже с разным числом «узлов». Наглядным представлением колебаний по такой форме служит пучок векторов – «звездочка» на комплексной плоскости, вращающийся в соответствии с собственной частотой,

все амплитуды которого убывают или возрастают с одинаковым показателем затухания [1], их годографы – спирали (рис. 3, где элементы вектора \mathbf{q}_{0k} обозначены как $\operatorname{Re} \mathbf{q}_{0k}$, $\operatorname{Im} \mathbf{q}_{0k}$). В противоположность этому собственную форму консервативной системы представляет набор векторов, расположенных вдоль одной прямой, вращающейся в соответствии с собственной частотой, все амплитуды неизменны и годографы векторов – концентрические окружности, проекции векторов на действительную ось достигают экстремальных значений одновременно.

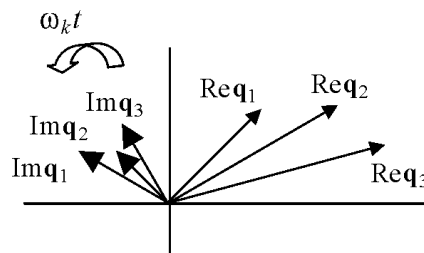


Рис. 3. Комплексная собственная форма

там же С.П. Стрелковым [1, 7] были введены и условия ортогональности комплексных собственных форм, более сложные, чем в варианте консервативной системы, использующие в этом случае собственные векторы сопряженной (или транспонированной) системы, так называемые условия биортогональности. В случае неконсервативных систем наглядность условий ортогональности пропадает, поскольку они представляют определенные соотношения между собственной формой исходной си-

стемы и транспонированной [7], последняя практически не имеет отношения к рассматриваемой системе.

Для уравнения (1) при отсутствии сил демпфирования, $\mathbf{H}\dot{\mathbf{q}} = 0$, и при недиагональной матрице \mathbf{K} – несимметричной упругой связи, условия ортогональности записываются наиболее просто, они подобны соотношению (3):

$$(\mathbf{q}_{0k})^T \mathbf{K} \mathbf{w}_{0m} = 0, \quad (5)$$

с тем отличием, что \mathbf{w}_{0m} – собственный вектор сопряженной (транспонированной) системы, с транспонированной матрицей \mathbf{K}^* , взамен \mathbf{K} .

При преобразовании уравнения (1) к уравнению в координатах \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ («фазовых») условия ортогональности для неконсервативной системы с несимметричными связями записываются в виде:

$$(\mathbf{u}_{0k})^T \mathbf{w}_{0m} = 0, \quad (6)$$

где $(\mathbf{u}_{0k})^T$ – собственный вектор исходной системы, \mathbf{w}_{0m} – собственный вектор сопряженной системы (соответствующий корень $-\lambda_m^*$, притом $\lambda_m \neq \lambda_k$).

4. Нормальные координаты

Еще одним основным понятием для упругих систем являются *нормальные координаты*, называемые также *главными*. Их можно определить как такие, в которых колебания будут гармоническими при любых начальных условиях. Классический термин относится лишь к консервативным системам, при этом в нормальных координатах уравнения колебаний системы оказываются независимыми (друг от друга), при любых видах связей, описывающих эти колебания в других координатах. Этот чрезвычайно удобный вид записи, очень наглядный, широко используется в аэроупругости, колебания каждой нормальной координаты как раз и являются колебаниями по одной из собственных форм. Матрица \mathbf{Q} – преобразования к нормальным координатам η , в которых становятся диагональными одновременно матрицы инерции \mathbf{M}^0 и жесткости \mathbf{K}^0 , называется *модальной*, ее столбцы – векторы собственных форм:

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}\eta; \quad \mathbf{M}^0 = \mathbf{Q}^T \mathbf{M} \mathbf{Q}; \quad \mathbf{K}^0 = \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q}, \quad (7)$$

В прикладных задачах модальная матрица, как правило, не имеет обратной, она прямоугольная, поскольку число обобщенных – «физических» координат на порядок больше числа рассматриваемых собственных тонов.

Применительно к неконсервативным системам с комплексными собственными частотами было специально введено (тоже С.П. Стрелковым [4, 7]) понятие *комплексных нормальных координат*, соответствующих упомянутому комплексным собственным формам, с тем же наглядным представлением. Естественно, в этих координатах гармонических колебаний быть не может, каждая нормальная координата η_k определяет интенсивность, комплексную частоту (затухание и частоту) колебаний всех физических координат. Иными словами, по всем этим координатам комплексная нормальная координата дает распределение амплитуд и фазовых сдвигов:

$$\eta_k = C_k e^{\lambda_k t} = (\text{Re } \eta_k) + j(\text{Im } \eta_k); \quad (8)$$

$$\mathbf{q}_k = \Sigma(\eta_k \mathbf{q}_{0k}) + \Sigma(\eta_k^* \mathbf{q}_{0k}^*) = \Sigma[(\text{Re } \eta_k)(\text{Re } \mathbf{q}_{0k}) - (\text{Im } \eta_k)(\text{Im } \mathbf{q}_{0k})].$$

Данная нормальная координата соответствует затухающему колебанию с соответствующим показателем затухания и частотой, и при этом с ее помощью могут быть получены значения всех физических координат.

5. Частный случай неконсервативных систем

Особый, но часто используемый в аэроупругости вид неконсервативных систем определяется представлением сил демпфирования в виде сил эквивалентного вязкого трения, пропорциональных упругим, инерционным силам или их линейным комбинациям. В этом случае с помощью модальной матрицы Q оказывается возможным переход к *нормальным координатам консервативной системы*, в которых колебания системы с демпфированием происходят независимо для каждой собственной частоты и система уравнений (1) распадается на ряд независимых:

$$m_k^0 \ddot{\eta}_k + h_k^0 \dot{\eta}_k + k_k^0 \eta_k = 0, \quad (9)$$

где m_k^0 , h_k^0 и k_k^0 – обобщенные массы, демпфирование и жесткость, скалярные элементы соответствующих диагональных матриц. Таким образом, колебания полной диссипативной системы представляются набором независимых колебательных одностепенных систем в нормальных координатах той же упруго-массовой конструкции, но без учета демпфирования. Эта несколько усложненная, но корректная формулировка не всегда выдерживается, что приводит в ряде случаев к ошибкам в публикациях, по существу безошибочных в прочих отношениях (см., например [4, 8]). Указанное представление характеристик демпфирования оправдано во многих задачах динамической аэроупругости, в первую очередь, благодаря относительно малым (по большей части) величинам логарифмических декрементов колебаний соответствующих тонов. Это позволяет существенно упростить расчетные параметрические исследования и анализ экспериментальных данных, где важную роль играет также наглядность представления результатов, в частности, относящихся к отдельным собственным тонам.

6. О некоторых свойствах систем с несимметричными связями

Автор книги [2] приводит понятия нормальных комплексных координат, соотношений биортогональности, комплексной собственной формы практически так же, как их вводил С.П. Стрелков, см. [1]. Досадным обстоятельством является то, что, несмотря на сравнительно широкий набор библиографических ссылок, включающих также Труды ЦАГИ, «Ученые Записки ЦАГИ» (авторы А.Ф. Минаев, В.Г. Буньков, М.С. Галкин, В.Н. Поповский и др.), в их число в книге [2] не вошел ни широко известный учебник по теории колебаний С.П. Стрелкова [1], ни более ранняя его публикация [7].

В целом к достоинствам учебного пособия [1], полезным для рассмотрения задач аэроупругости, следует отнести акцентирование *особенностей систем с несимметричными связями* и целый ряд примеров. На предельно простой искусственной двухстепенной системе с однонаправленной связью демонстрируются такие свойства, как снижение собственной частоты с увеличением жесткости (и рост частоты с увеличением инерции) и соответствующее изменение коэффициентов чувствительности. Сближение частот по мере увеличения скоростного напора («аэродинамической жесткости») – рутинный эффект, например, в задачах классического флаттера, см. также его обсуждение у И. Рокара [6]. В той же книге приведен парадоксальный, на первый взгляд для специалистов аэроупругости, факт для системы с несимметричными связями: понижения границы устойчивости (например, уменьшение критической скорости флаттера) с увеличением демпфирования. Это детально иллюстрируется в [2] на упомянутой двухстепенной системе, так же как изменение собствен-

ной формы с изменением коэффициента однонаправленной связи, изменение числа узлов и другие эффекты. Интерес представляют также примеры простых систем увеличения динамической устойчивости с помощью различных видов обратной связи, продольных колебаний жидкостной ракеты и другие.

Библиографический список

1. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний: Учебник для университетов и вузов. М.: ГИТТЛ, 1950. 2-е изд. М.: Наука, 1964.
2. *Аринчев С.В.* Теория колебаний неконсервативных систем (с примерами на компакт-диске): Учеб. пособие для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
3. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
4. Вибрации в технике: Справочник. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978.
5. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М., 1971.
6. *Рокар И.* Неустойчивость в механике. М., 1959.
7. *Стрелков С.П.* К теории колебаний в дискретных неконсервативных линейных системах // Труды ЦАГИ, вып. 722, 1958.
8. *Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С.* Теория колебаний: Учеб. для вузов / Под общ. ред. К.С.Колесникова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003.
9. *Колесников К.С., Сухов В.Н.* Упругий летательный аппарат как объект автоматического управления. М., 1974.
10. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., 1961.

Центральный Аэрогидродинамический институт Поступила в редакцию 15.06.2005

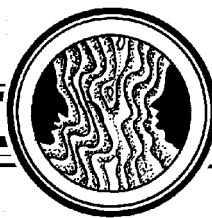
ABOUT SOME CONCEPTS OF OSCILLATION THEORY OF NONCONSERVATIVE SYSTEMS WITH ASYMMETRICAL COUPLINGS

V.I. Smyslov

The description of base concepts concerning to self-oscillations of nonconservative systems with asymmetrical couplings is given, in particular, such as the complex proper forms and frequencies, and complex normal coordinates.



Смыслов Всеволод Игоревич – родился в Ленинграде (1931), окончил физический факультет МГУ (1954). После окончания МГУ работает в Центральном аэрогидродинамическом институте. Доктор технических наук (1989, ЦАГИ) в области теории колебаний, аэроупругости, теории автоматического управления, моделирования колебательных процессов, методов и средств воспроизведения вибраций, автоматизации экспериментальных исследований. Лауреат премии им. Н.Е. Жуковского.



К 100-летию со дня рождения С.П. Стрелкова

Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 5–6, 2005

ТЕКСТ РЕЧИ НА ЦЕРЕМОНИИ ВРУЧЕНИЯ ПРЕМИИ ИМЕНИ Н.Е. ЖУКОВСКОГО*

С.П. Стрелков

За работы в области электромеханического моделирования флаттера Сергею Павловичу Стрелкову и Всеволоду Игоревичу Смыслову решением жюри конкурса имени профессора Н.Е. Жуковского от 2 января 1962 года присуждена премия первой степени за 1960 год.

Председатель жюри В.М.Мясищев
Ученый секретарь жюри Н.М.Семенова

Мы выражаем свою глубокую благодарность руководству ЦАГИ, жюри и Комитету по Авиационной технике за столь высокую оценку нашей работы. Нам очень радостно принять эту награду не только потому, что наша работа так высоко оценена, а главным образом, нас радует то, что разработанный нами метод получает более надежную и авторитетную поддержку нашей научной общественности. А мы, со своей стороны, будем употреблять еще больше усилий для внедрения этого метода в практику исследования опасных вибраций.

Наша работа поставлена с целью теоретического исследования и развития методов устранения опасных вибраций, возникающих в полете. Но основные трудности в решении поставленной задачи заключаются в *эксперименте* – успех зависит от удачного решения *опытных* задач, от преодоления ряда чисто экспериментальных препятствий, и не только от успешного решения механических задач, но электротехнических, электронных и других.

*Текст речи поступил в редакцию 15.06.2005.

Ввиду болезни С.П. Стрелкова текст речи был зачитан В.И. Смысловым.

Мясищев Владимир Михайлович (1902–1978) – генеральный конструктор, начальник ЦАГИ с 1960 по 1967 год. Семенова Надежда Матвеевна – ученица Н.Е. Жуковского, ученый секретарь жюри с 1947 по 1983 год.

Как мне представляется, деятельность великого русского ученого Н.Е. Жуковского, премия имени которого мы имеем честь получать, представляет наиболее четкий и яркий пример гармонического *сочетания* теоретических и экспериментальных исследований. Хотя может и *некстати* здесь упоминать, но теперь часто можно слышать голоса авторитетных ученых современности, что соединение в одних исследованиях теории с экспериментом – это уже прошлый этап. Теперь разделение труда в науке достигло такой высокой степени, что целесообразно теоретикам заниматься только *теорией*, а экспериментаторам – только *экспериментом*. Сейчас так и происходит, а времена Бернулли, Жуковского, Максвелла давно прошли.

Не будем здесь начинать дискуссии, действительно, фронт научных исследований непрерывно расширяется с каждым годом и специализация в науке все увеличивается и увеличивается.

Но, тем не менее, или так нас, физиков, воспитали, наши симпатии всё же на стороне тех идеалов, которые сочетают теоретические и экспериментальные исследования. И неправда, что среди наших современников нет таких идеалов, достаточно назвать имя недавно умершего великого физика Энрико Ферми.

Мне только хотелось подчеркнуть этим, что наша в основном (по трудности) *экспериментальная* работа получила высокую оценку, премию имени великого *теоретика механики и авиации* Н.Е. Жуковского.

Теперь разрешите сказать несколько слов о самой работе. Проблема упругих вибраций летящих объектов, существенно связанных с динамическими реакциями среды, довольно сложная проблема, все усложняющаяся по мере увеличения веса и скорости объектов. Самовозбуждающиеся вибрации (автоколебания, флаттер) служат причиной гибели, и уж во всяком случае причиной прекращения полетов.

Теоретическое решение задачи наталкивается на большие трудности. Для самолетов, которые летали 15–20 лет назад, применение метода Бубнова – Галеркина, в таком совершенстве разработанного учеными ЦАГИ под руководством академика, ныне президента Академии наук, М.В. Келдыша, успешно решало задачу теоретического исследования. И до сих пор этот метод еще «не снят с вооружения», но его недостаточность теперь очевидна – сложные и быстро изменяющиеся формы летающих объектов не дают возможности, без опытов в трубе и на натуре, разумно выбрать *формы* колебаний. А после таких опытов уже не нужны расчеты. Поэтому и предлагается целый ряд методов теоретического исследования проблем вибраций не по Бубнову – Галеркину.

Во всех этих случаях задача сводится к решению системы с большим числом степеней свободы, к отысканию собственных и вынужденных колебаний в этой системе.

А так как вся система является активной и неконсервативной, или с математической точки зрения сводится к несамосопряженной системе, то проблема заключается в отыскании комплексных корней в системе высокого порядка, а для лучших современных быстродействующих машин эти задачи еще не по силам, если порядок уравнений превышает 40–50.

Поэтому и у нас и за рубежом ищут иные методы и культивируют их, если они по простоте, дешевизне, *наглядности*, скорости получения решений для различных вариантов могут успешно конкурировать с быстродействующими машинами, хотя и значительно уступают им, например, в точности.

Немыслимо для наших целей сделать чисто электронную модель, во всяком случае, такой пока нет, и на этом пути видны огромные трудности. Поэтому и был предложен и развивается метод электромеханического моделирования, в котором *объект* – механическая динамически подобная в смысле упругих вибраций модель, воздух (или поток) – *электронная* модель, состоящая из элементов типа интеграторов ИПТ. Сигналы от колеблющейся механической модели поступают на электронную модель, которая их обрабатывает и выдает *команду* на силовозбудители, последние действуют так, как действовал бы окружающий *воздух* в полете. Модель может быть связана с электронными имитаторами автопилота, других стабилизирующих и регулирующих устройств.

Вот идея. Но для ее осуществления нужно было решить целый ряд сложных и трудных задач, которые требовали и теоретических расчетов, и экспериментов, физических и технических. Вот эту проблему успешно решал небольшой коллектив сотрудников 3-й лаборатории ЦАГИ и добился определенных успехов. Я не могу и не собираюсь делать здесь отчет о проделанной работе, очень важной, трудной и сложной, только укажу, что одной из последних работ были исследованы колебания системы со 128 степенями свободы (то есть описывающие ее уравнения имеют такой порядок).

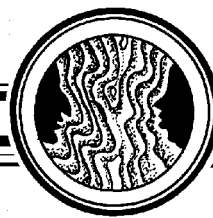
Необходимо отметить, что первая простейшая модель с двумя степенями свободы была реализована в 1954–55 годах в МГУ А.А. Харламовым, а в 1959 году в Райтовской лекции Коллара (английского специалиста в области аэроупругости) появилось сообщение о начале подобных работ в Англии, примерно на уровне полученных в свое время в МГУ (то есть тех, с которых начиналась работа в ЦАГИ).

Конечно, метод находится в развитии, по-видимому, он себя вполне оправдал, если бы работать только с *небольшими* механическими моделями, но – аппетит приходит во время еды, и нам хочется применить его (метод) и для натуральных объектов, и в этом направлении уже сделан первый опыт – Вадимом Ивановичем Ульяновым.

Нельзя не отметить, что активное участие в экспериментальной работе принимал *коллектив* сотрудников, хотя уж и не такой большой. Всем им мы высказываем здесь нашу глубокую *благодарность* за их успешную работу, В.И. Ульянову, Р.Э. Луцевичу и другим. Существенную помощь и поддержку с самого начала работы оказывали нам А.И. Макаревский и руководство 3-й лаборатории.

Еще раз разрешите поблагодарить за столь высокую честь, которая была оказана нам, и обещать употребить все наши силы для более быстрого и совершенного применения электромеханического метода для решения практических задач вибраций в авиационной технике.

26 января 1962



К 100-летию со дня рождения С.П. Стрелкова

Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 5–6, 2005

УДК 624.04.534.1

ВОСПОМИНАНИЯ О СЕРГЕЕ ПАВЛОВИЧЕ СТРЕЛКОВЕ*

Об отце

Отчетливые воспоминания об отце начинаются в моей памяти с военных лет. В то время мы с матерью были в эвакуации и жили у деда в селе Башмаково Пензенской области. В июне 1942 года за нами приехал отец. Он в числе других сотрудников ЦАГИ был в то время в эвакуации в Казани и добирался к нам на попутных поездах. Встретили мы его страшно исхудавшим и черным от копоти. Мой младший брат, увидев отца, закричал: «Цыган приехал!» – и в ужасе спрятался в сарае, и потом долго не выходил оттуда.

Всю войну и после войны отец был очень худым. Сказался перенесенный в молодости туберкулез и приобретенная за годы войны язва желудка. Мы, дети, конечно, не очень воспринимали болезнь отца, но мать следила за его здоровьем и уделяла отцу максимальное внимание, и благодаря ее заботам ему были обеспечены все условия для интенсивной научной работы.

Отец работал так много, что теперь я просто не припомню подобных примеров. Кроме ЦАГИ отец работал в МГУ, читал лекции, заведовал кафедрой, писал учебники. Ежедневно, придя из ЦАГИ или вернувшись из Москвы, он садился за работу, проводя за столом много часов. Практически каждый день он трудился до двух–трех часов ночи. Дома, на его рабочем столе, кроме рукописей и книг находились собранные им различные радиосхемы, часть из которых использовалась для научных работ, но была и другая, «запретная», радиосхема – мощный коротковолновый приемник, по которому отец узнавал о событиях в мире, минуя официальную пропаганду. Нам, детям, отец никогда ничего не говорил о своих политических взглядах, в доме не рассказывались политические анекдоты. Я знаю, что только с близкими друзьями, В.Г. Гараканидзе и В.В. Белостоцким, он мог обсуждать какие-то политические вопросы, но очень осторожно. Откровенен он был только со своим отцом и моей матерью. Такое было тогда время.

*Материалы поступили в редакцию 15.06.2005.

Отец хорошо знал немецкий и английский языки, которые он изучил самостоятельно. В годы хрущевской оттепели, когда стали возможны поездки за границу, отец мечтал съездить на какую-нибудь конференцию для общения с иностранными учеными, с которыми был знаком заочно. Но, к сожалению, это ему не удалось. Один раз все уже было подготовлено, но очередной политический кризис (из-за Чехословакии) послужил причиной того, что делегацию вернули из аэропорта. Теперь, когда каждый из его сыновей десятки раз побывал за рубежом, вспоминать о неосуществленной мечте отца довольно грустно.

Отец с нами был очень добр. Несмотря на то, что я был самым озорным среди братьев, не помню случая, чтобы он меня наказал. Часто в выходные дни он проводил время с нами. Постоянно устраивал всевозможные походы, а потом и поездки.

Отец вырос в деревенской среде и многое умел делать своими руками: прекрасно подшивал валенки, мог чинить ботинки и плести корзины.

Он очень любил природу, и они с матерью много путешествовали, часто на автомобиле, который был куплен в 1951 году.

Наша семья, во многом благодаря стараниям матери, была самой стабильной по тем меркам среди наших многочисленных родственников. Поэтому в годы военных и послевоенных невзгод в нашей семье постоянно жил кто-либо из двоюродных братьев и сестер.

Авторитет отца среди моего поколения был настолько высок, что профессию физика выбрали оба моих брата, три двоюродных брата, двоюродная сестра. При этом отец ни на кого не давил авторитетом. Когда я собрался поступать в МВТУ, отец не возражал и даже поддержал мой выбор, зная мою склонность к «железкам».

В ЦАГИ я оказался не благодаря отцу, а по совету моего инструктора В.И. Смыслова, который во время нашего альпинистского восхождения на Кавказе убедил меня поступить на работу в лабораторию № 3 ЦАГИ; до этого я намеревался пойти в ЛИИ.

От отца я получал полезные советы как по научным, так и по житейским проблемам. Советы и обсуждения отец проводил не в виде нравоучения, а терпеливо объясняя свое мнение. К сожалению, я не всегда был тогда прилежным учеником.

Вообще, отец, будучи прирожденным педагогом, отличался необыкновенной способностью объяснять весьма просто сложные вопросы. Только после его смерти я понял, как много не успел узнать от него.

К.С. Стрелков

Об учителе и наставнике: воспоминания бывшего студента

В начале 1950-х годов профессор С.П. Стрелков прочел курс лекций по теории колебаний студентам-прочнистам Физтеха, проходивших практику в ЦАГИ. По университетским традициям он видел в слушателях не безликую группу студентов, а жаждущих знаний людей, лица которых хорошо и надолго запоминал.

Через год или два, встретив меня (все еще студента) в здании лаборатории № 3 ЦАГИ, Сергей Павлович спросил (как знакомого человека), чем я занимаюсь, и предложил обращаться к нему не стесняясь, если возникнет необходимость.

В это время я начал заниматься вопросами влияния на флаттер внутреннего трения в целлулоиде, который активно стал применяться для изготовления конструктивно-подобных моделей летательных аппаратов. Решая методами математической физики задачу о колебаниях тел с учетом внутреннего трения в материале,

я пользовался гипотезами различных авторов о характере этого трения. Хотя гипотезы касались узкой области физики, выводы, которые мне удалось сделать на их основе, оказались довольно общими (независимость при сделанных предположениях о характере трения декремента от частоты колебаний и возможность существования частных решений в виде стоячих волн). Эти результаты позволили применить метод Бубнова – Галеркина для решения задачи о флаттере модели с учетом внутреннего трения. Можно было также предположить, что, несмотря на большую величину трения в целлулоиде (почти на порядок более высокую, чем в металлах), влияние его на флаттер оказалось небольшим, так как сдвиги фаз при флаттере моделей, возникающие за счет аэродинамических сил, не искажаются силами трения.

С этими вопросами я посчитал возможным обратиться к Сергею Павловичу, который с интересом меня выслушал, посетовал на громоздкость математического аппарата и посоветовал просмотреть книгу Рэля «Теория звука». Весь разговор был исключительно доброжелательным и ни в коей мере не был похож на разговор профессора со студентом, а скорее напоминал беседу коллег.

Когда же я ознакомился с книгой Рэля, в которой задачи учета рассеивания энергии изящно решены путем введения диссипативной функции, то мои выводы о влиянии трения в материале на колебания целлулоидных конструктивно-подобных моделей оказались совершенно очевидными, и я понял, насколько внимательным был Сергей Павлович. Это качество – чрезвычайно важная его черта настоящего большого ученого, так много сделавшего для воспитания будущих научных работников.

В.В. Лыщинский

О дорогом человеке

Мне повезло: в начале моей жизни в Жуковском и работы в ЦАГИ (с 1960 года) я близко познакомился с семьей Стрелковых. Несмотря на годы учебы в МАИ, я оставался провинциалом и мало что смыслил не только в науке и инженерном деле, но и в жизни. В гостеприимном доме Стрелковых я (и не я один из новых «пришельцев» в Жуковский) увидел тогда и доброту, и тепло, и некий дух мудрости. Мой новый приятель Костя Стрелков замечательно сочетал увлеченность спортом, мотоциклом и автомобилем с завидным инженерным талантом, широким кругозором, начитанностью. Ясно, что многое в Косте шло от родителей, Сергея Павловича и Нины Константиновны. Они, подлинные русские интеллигенты, с глубокими корнями и блестящим университетским образованием, видели в своей жизни всякое: благополучие и трудности, высшее признание и обидное невнимание. Усадить за свой обеденный стол стеснительного молодого человека, простить промашку было для них естественно. Так что я скоро почувствовал себя своим в скромном и хлебо-сольном доме Стрелковых. Не сказал бы, что с Сергеем Павловичем общался много – часть недели он жил в Москве и работал в МГУ, где возглавлял кафедру общей физики на мехмате. Но близкое общение, даже относительно редкое и краткое, осталось в памяти как мало какое другое, хотя потом довелось знать немало людей – и выдающихся. Сергей Павлович запомнился человеком немногословным, сдержанным и вместе с тем остроумным, ценившим удачную шутку – его мягкую улыбку помню до сих пор. Замечательный ученый и педагог, преданный и ЦАГИ, и МГУ, он был прост и доступен, хотя всегда естественно сохранялась дистанция между ним и «молодыми нахалами», способными, казалось, лишь на пустые разговоры. Правда,

были и среди молодых исключения. Как мы узнали тогда, Сергей Павлович, увлеченный в свое время радиолобитель и мастер на все руки, давно уже выделял товарища сына, Сашу Чернова, в котором, еще в школьнике, увидел вполне реализовавшийся впоследствии талант инженера-прибориста. Никогда не слышал, чтобы Сергей Павлович повысил голос или сказал что-то «лишнее». Никогда не видел его в кресле, на солнышке в саду, в тренировочном костюме. Сейчас понимаю, что как раз мы, гости, могли мешать ему расслабиться и отдохнуть после напряженной работы...

До сих пор помню некоторые его суждения, например, о русской истории – спокойные и аргументированные. Однажды во время дружеской перепалки между Костей и мной Сергей Павлович, предпочитавший обычно не вмешиваться в наши споры, сказал: «Не знаю, где была бы граница Турции на юге России, если б не было Армении...» Это было мне дорого – словно бальзам на «старые раны». Многие суждения Сергея Павловича, как, кстати сказать, и замечания Нины Константиновны, помогали избавляться от стереотипов, снимали пелену и открывали объективный взгляд на истинное содержание многих событий и личностей нашей жизни.

Почти никогда при мне не обсуждались «производственные» вопросы. Но запомнились и два эпизода в моей работе, в которых я ощутил прямую или косвенную поддержку Сергея Павловича.

Первый эпизод был связан с зарождением концепции использования упругости конструкции. В начале 1960-х годов мне пришла в голову неожиданная и в чем-то парадоксальная мысль – отказаться от единственного тогда способа решения проблемы реверса элеронов путем повышения жесткости конструкции. Были изобретены выносные элероны и предэлероны, которые не только не требовали повышения жесткости конструкции крыльев, но позволяли обеспечить решение актуальной проблемы поперечного управления скоростных летательных аппаратов и при снижении жесткости крыльев. Последнее поначалу встретило негативное отношение даже со стороны моих непосредственных руководителей – в области статической аэроупругости. Довод их был простым: жесткость конструкции необходима также для решения проблем прочности и флаттера. Сергей Павлович не говорил мне что-либо о своем отношении к предложенному новшеству, которое большинство специалистов-аэродинамиков также считало крамольным. Но, в отличие от других, он не ругал меня за «предательство» интересов комплекса прочности. Я и не пытался заручиться его поддержкой. Во-первых, потому что доказательства жизнеспособности новых органов управления мог представить только я сам, и это потребовало несколько лет работы в скоростных аэродинамических трубах. Кроме того, для обоснования выгод использования упругости конструкции потребовалось развитие многодисциплинарных методов исследований. И это вызывало нарекания авторитетов (но не С.П. Стрелкова), требовавших невмешательства в «чужие» области. Очевидно, многодисциплинарный подход к исследованиям, взаимодополнение расчетных и экспериментальных методов исследований, интенсивно развивавшееся у нас впоследствии, было близко духу Сергея Павловича как ученого, известного своими научными работами и монографиями по широкому кругу проблем механики и автоматики. По существу, С.П. Стрелков был одним из нескольких человек, которые увидели в тех первых шагах в развитии концепции «использования упругости конструкции» перспективное направление. Должен сказать, что Константин Сергеевич Стрелков, с которым как раз многое обсуждалось в деталях, при всей его резкости и строгости по отношению к сомнительным инженерным решениям, был также одним из тех немногих, кто никогда, даже на самых начальных этапах разработки непопулярной тогда идеи, не выказывал скептицизма. Бывали лишь подшучивания Кости, когда, спустя 5-6 лет,

первые признаки выхода на ту же дорогу «использования упругости», или «активной аэроупругости», стали проявляться в зарубежной информации...

Кстати, понятие «активная аэроупругость», как раз в том смысле, который мы вкладываем в понятие «использование упругости конструкции», было введено несколько лет тому назад за рубежом. Сам я считаю это удобным, правильным по сути, но все же неудачным «нововведением», поскольку ранее это словосочетание уже закрепилось за другой – динамической – проблемой: обеспечение динамической устойчивости и снижение динамических нагрузок летательного аппарата за счет активных систем автоматического управления. Это та новаторская область – аэросервоупругость, в которой много сделал именно С.П. Стрелков и его многочисленные ученики в ЦАГИ и МГУ. Мне было приятно услышать однажды от Аркадия Федоровича Минаева, признанного лидера этого направления в последние годы, человека гордого, сдержанного и самодостаточного, что его учителем был Сергей Павлович. Мы все переживали, когда Сергея Павловича Стрелкова, ученого, чьи исследования и книги по теории колебаний, по различным разделам аэромеханики получили мировое признание, в очередной раз «прокатывали» на выборах в Академию наук, но видели в этом лишь несправедливость...

Второй эпизод. Тогда же, в начале 1960-х я предложил схему сверхзвукового самолета вертикального взлета и посадки. Схема была необычной – в виде тонкого несущего диска. Внешнее кольцо этого диска предполагалось вращающимся и состоящим из последовательно расположенных крыльев. Для вертикального взлета и посадки эти крылья устанавливались под заданными, варьируемыми углами атаки, и кольцо приводилось во вращение за счет отбора воздуха от компрессора маршевых турбореактивных двигателей, выдуваемого через щели в задних кромках крыльев. На крейсерском режиме крылья «складывались», и самолет превращался в «летающую тарелку» – со всеми ее достоинствами и недостатками. Аэродинамики и на этот раз отнеслись к столь экзотическому проекту весьма скептически. Сергей Павлович, несомненно, видел сложность и «сырость» схемы. Но, умея заглянуть в будущее, он, видимо, нашел в предложенной схеме и нечто интересное. Он не стал обсуждать детали и сделал самое полезное в тот момент, посоветовав ознакомиться с проектом инженера ЦАГИ М.В. Суханова. Сергей Павлович знал, что Суханов построил в свое время планер с крылом в виде диска, успешно прошедший летные испытания. Опытный конструктор и, к тому же, специалист по двигательной тематике, Суханов стал активным защитником и энтузиастом проекта, внесшим в него свои интересные идеи. С самого начала было очевидно, что перспективы этого новшества не столь значительны, как перспективы концепции «использования упругости конструкции», которую за рубежом называют сегодня революцией в деле создания авиационной и ракетно-космической техники. Но можно надеяться, что нечто подобное вертикально взлетающей сверхзвуковой «летающей тарелке» все же будет реализовано в будущем...

Такие люди, как Сергей Павлович Стрелков, выходец и продолжатель дела всемирно известной научной школы теории колебаний академика Л.И. Мандельштама, ученый, умевший находить простые инженерные решения самых сложных проблем в самых разных областях, важны не только своими личными научными трудами и трудами своих учеников. Они особенно важны тем, что создают неповторимую атмосферу высокого творчества, доброжелательности, взаимопомощи. Они учат и воспитывают, не поучая. Их вклад в рождение и продвижение новаторских идей, в достижение достойного уровня научной и инженерной мысли тех, кто общается и работает с ними, неоценим. С уходом таких людей уходит атмосфера, и образуются

дыры пострашнее озоновых... Мне кажется, в полной мере мы это осознаем, когда таких людей уже нет. Пока они рядом, доступные и скромные, мы не понимаем масштабов их личностей и не задумываемся над опасностью предстоящих потерь...

Г.А. Амирьянц

О моем научном руководителе

Среди своих учителей с особой теплотой я вспоминаю научного руководителя при работе над кандидатской диссертацией профессора Сергея Павловича Стрелкова. Добрый и интеллигентный человек, Сергей Павлович не только опекал меня при решении научной задачки, но и был мудрым наставником при первых робких научных шагах молодого специалиста. Теперь, когда накоплен свой солидный жизненный опыт, мне легко понять его отношение к молодому инженеру из ОКБ, пытавшемуся как-то влиться в научный коллектив ЦАГИ.

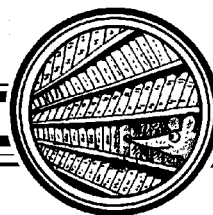
Работая в ОКБ А.И. Микояна с 1957 года, я старался посещать научные семинары С.П. Стрелкова в ЦАГИ, благо мои начальники Т.А. Малькова и Д.Н. Кургузов никогда не препятствовали этому моему желанию. Семинары давали много «пищи» для ума специалисту КБ для научных размышлений и «амбиций». Помню, в конце 1950-х годов я неудачно выступил по вопросу смещения резонансных пиков при фрикционном демпфировании. Научный сотрудник ЦАГИ В.Г. Буньков тут же раскритиковал мои выводы, а в добрых и слегка лукавых глазах руководителя семинара не было и намека на упрек, но скорее сочувствие типа: «Ну, как же Вы так, молодой человек!». А лет через пять Сергей Павлович в своем рабочем кабинете принимал у меня, аспиранта ЦАГИ, экзамен по специальности, вторым экзаменатором был А.И. Курьянов. Этот экзамен запомнился мне не результатом, а скорее, доброжелательным процессом выявления тех вопросов, над которыми мне еще предстояло поработать. И когда в 1968 году я подготовил диссертацию и проходил предзащиту на НТС в ЦАГИ, одним из первых меня поддержал Сергей Павлович.

Сейчас, после почти полувека работы в авиационном КБ, мне уже трудно дать объяснение, почему пожелтевшие рукописные страницы черновика отзыва научного руководителя до сих пор хранятся в моем рабочем столе, несмотря на многочисленные переезды и чистки столов. Видимо, рука не поднимается их уничтожить, так как они дороги мне как память о человеке, который оставил глубокий след в моей жизни.

Н.И. Баранов

Из отзыва С.П. Стрелкова на диссертацию Н.И. Баранова. «...При расчетах на флаттер считалось, что крыло (или стабилизатор) абсолютно жесткие в своей плоскости. Но в некоторых конструкциях управляемых стабилизаторов их жесткость в плоскости оказывается не такой большой, и поэтому собственная частота колебаний в плоскости плана стабилизатора сравнима с частотами «обычных» изгибно-крутильных колебаний. Это обстоятельство может сказаться на аэроупругих свойствах некоторых новейших конструкций крыльев переменной стреловидности. Вследствие этого учет колебаний крыла (или стабилизатора) в его плоскости, особенно, если частота этих колебаний близка к частоте изгиба (или кручения), становится совершенно необходимой задачей...»

С.П. Стрелков



К 100-летию со дня рождения С.П. Стрелкова

Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 5–6, 2005

УДК 53:929(092)

Серия: «Выдающиеся ученые физического факультета МГУ»

СЕРГЕЙ ПАВЛОВИЧ СТРЕЛКОВ

Л.П. Стрелкова, В.И. Смыслов

© Стрелкова Л.П., Смыслов В.И., 2002
© Физический факультет МГУ, 2002
М: Физический факультет МГУ, 2002. 108 с.
ISBN 5-8279-0017-6

Научно-биографический очерк о жизни и научно-педагогической деятельности профессора МГУ, заслуженного деятеля науки и техники РСФСР Сергея Павловича Стрелкова. Описаны его семья, учеба, начало работы на физфаке МГУ под руководством выдающегося ученого Л.И. Мандельштама, дальнейшая работа в ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского и в МГУ – как профессора и как заведующего кафедрой. Раскрываются научные достижения профессора С.П. Стрелкова в области теории колебаний, аэроупругости, решении прикладных задач авиационной науки, связанных с обеспечением безопасности самолетов и ракет от опасных вибраций в полете. Прирожденный педагог, чьи книги и задачи по теории колебаний, механике, общей физике получили мировую известность, он оставил большое наследие в виде научных трудов, способствовал формированию определенного строя научных взглядов специалистов, которые продолжают успешно работать в вузах и научных учреждениях России. Для широкого круга читателей, интересующихся развитием физики и историей Московского университета, развитием авиационной науки и историей ЦАГИ.

Предисловие

Сергей Павлович Стрелков – воспитанник физфака МГУ, с которым на протяжении многих лет была связана его научная и педагогическая деятельность. Одновременно с этим он – многолетний сотрудник ЦАГИ* – главного научно-исследовательского авиационного института. Один из ярких представителей отечественной школы теории колебаний, ученик академика Л.И. Мандельштама, заведующий кафедрой общей физики МГУ, заслуженный деятель науки и техники РСФСР

*Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, основанный в 1918 г.

С.П. Стрелков занимал должности начальника и затем научного руководителя сектора в комплексе прочности ЦАГИ, руководил семинаром по аэроупругости, был членом ученых советов МГУ и ЦАГИ. Обе сферы деятельности Сергея Павловича в ЦАГИ и на кафедре физфака были полезны и дополняли друг друга (это можно отнести не только к авиационной тематике). С его именем связано становление и развитие ряда научных направлений, его интересы охватывали широкий диапазон самых разных областей физики, теории колебаний, аэроупругости, динамической прочности, аэродинамики.

Большой заслугой С.П. Стрелкова была его педагогическая работа профессора, научного руководителя аспирантов, автора широко известных у нас и за рубежом учебников. Он был прирожденным педагогом, его лекции, семинары по теории колебаний и общей физике всегда пользовались заслуженной популярностью, он сыграл большую роль в становлении современного курса общей физики, читаемого в МГУ. Многие научные работники МГУ и ЦАГИ – его ученики. Он обладал исключительной эрудицией, энциклопедическими знаниями, тонкой инженерной интуицией, его работы демонстрировали собой редкое сочетание большого практического опыта незаурядного экспериментатора с ясным и гибким умом аналитика. Практическая целенаправленность результатов, строгость теоретических выводов, простота и отточенность стиля – отличительные черты его трудов.

Сергей Павлович был не только физик, но также – инженер, внесший весомый вклад в развитие авиационной науки и техники. Он обладал замечательной способностью находить и объяснять первопричины возникновения опасных «болезней» самолетов, вертолетов, ракет, аэродинамических труб, связанных с их вибрационными характеристиками, оперативно находить эффективные пути их устранения и предотвращать их появление в дальнейшем.

С.П. Стрелков был наделен самыми привлекательными человеческими качествами. Добрый, благожелательный, он охотно помогал своим ученикам, сотрудникам, всем, кто шел к нему за советом. Его авторитет ученого-физика, крупного авиационного специалиста, был исключительно высок в научных центрах, учебных заведениях и на промышленных предприятиях.

С.П. Стрелков оставил большое наследие не только в своих трудах, он способствовал формированию определенного строя научных взглядов специалистов, которые продолжают работать в направлениях, связанных с его деятельностью. <...>

Москва, декабрь 2001

Сергей Павлович. Детство. Подготовка к гимназии

Сережа, будучи «подготовишкой», так называли мальчиков, готовившихся поступать в гимназию, обычно сидел в классе (который вели родители) и выполнял свое задание. В класс он должен был являться, как и все ученики, вовремя и ничем не выделяться среди них.

Мать приходила в класс раньше на два часа и, как правило, осматривала входящих детей – умыты ли, причесаны. В передней, где была раздевалка класса, стоял умывальник, и обязанностью Сережи было посмотреть, на месте ли мыло, полотенце и есть ли вода в умывальнике. Если ее нет, он был обязан немедленно сказать об этом сторожу. Около умывальника было зеркало, и висела сумочка с

большим деревянным гребнем. Мать часто сама умывала и причесывала детей. Дети садились за парты, урок начинали с молитвы. Сережа рассказывал, как он обучал трех братьев (крестьянских детей, погодки были), которые в школу ходили по очереди, так как имели только одни сапоги на троих, все учились в одном классе. Отец вменял в обязанности Сережи следить, чтобы уроки делали все братья: он проверял их тетради, а потом, оставаясь после уроков, заставлял их, по очереди, писать диктант и решать задачи, читать вслух и рассказывать о прочитанном, делать пересказ. Это были первые азы его педагогической деятельности, приучившие его к терпению, размышлению и пониманию детей.

Обучение в семинарии (г. Краснослободск)

К сожалению, Сереже, после того как он был подготовлен к экзамену, не пришлось учиться в гимназии. Мать предполагала отдать его в 1-ю мужскую гимназию в г. Пензе. Жить он должен был у бабушки, но она умерла в конце 1913 года. Проживавшая в Пензе сестра матери, Вера Аполлинарьевна Мурзина, предложила родителям поместить Сережу у нее. Она была замужем за сыном городского головы. Городской голова был купцом первой гильдии и имел винные заводы. Сельских учителей, увлеченных революционными идеями, совсем не устраивало, что их первенец будет жить в семье, взгляды которой на жизнь, и сама жизнь, резко отличалась от их образа мыслей и жизни. Содержать ребенка в чужой семье они не могли.

Друг и товарищ отца, Ремеров Николай Иванович, будучи инспектором народных училищ, уговорил отца отдать Сережу в Краснослободскую Духовную семинарию, куда попасть было нелегко. В основном, семинария принимала детей, у которых отцы и деды были служители Епархии. Но хлопоты Ременова и хорошая подготовка Сережи сыграли роль, и он сдал экзамены. Сережа не хотел учиться в семинарии, так как мечтал о гимназии и затем – об Университете.

Приезжая на вакансии домой из семинарии, особенно первый год обучения, прямо в передней, развязывая башлык, он бросал его на пол, садился на табуретку и начинал плакать и причитать: «Не буду учиться в "Бурсе"!» Книга Н.Г. Помяловского «Очерки Бурсы», где рассказано о быте бурсаков, была у нас в родительской библиотеке. Отец же считал, что произведение Помяловского, хотя и недурное, нельзя считать обобщающим все духовные учебные заведения.

В науках религиозных отец высоко ценил нравственную основу самосовершенствования, чтил все заповеди и старался в доме придерживаться христианского порядка жизни. Однако, количество часов, отведенных на уроки богословия, считал слишком большим и говорил, что их надо бы сократить по крайней мере наполовину.

Мать соблюдала два праздника – Рождество и Пасху. Никогда не говела, разве только по необходимости. Во время вакансии родители не заставляли Сережу посещать аккуратно церковные службы, ходил только с мамой, сестрами и братьями к заутрене в праздники Рождества и Пасхи. Отец же в церковь никогда не ходил, хотя со священником Мало-Азясьской церкви часто по праздникам, когда тот заходил, отпустив дьякона, садился играть в шахматы. За священника Веселовского все дворы села обходил дьякон, а Веселовский иногда засиживался у родителей до позднего вечера. Разговор их никогда не касался религии.

По окончании Сережей первого года обучения в семинарии началась война с Германией. Разговоры Сережи о том, что он не хочет учиться в семинарии, прекратились. Он быстро стал взрослеть: отец, уходя на фронт, сказал: «Сережа, ты

остаешься самым главным в семье помощником матери, теперь кроме тебя ей никто не поможет...». Эти слова запомнились Сереже на всю жизнь... Он аккуратно писал письма на фронт отцу все годы, вплоть до его благополучного возвращения в 1917 году. Павел Михайлович, находясь на Германском фронте, посылает в Земскую Управу г. Краснослободска прошение и вот ответ Земской Управы:

«МВД, Краснослободская Уездная Земская Управа – 2 декабря 1915 г., №3112
Учителю Мало-Азяського училища Павлу Михайловичу Стрелкову.

Очередное уездное собрание сессии 1915 г. в заседании 18 сентября 1915 г. рассмотрело ходатайство Ваше о назначении Вашему сыну стипендии на образование. Постановило ходатайство Ваше ОТКЛОНИТЬ. О чем Уездная Управа уведомляет Вас. Председатель...»

Расстался с семинарией Сережа в 1917 году. Отца по постановлению Сената освободили от воинской обязанности, как многосемейного. Хлопоты по его освобождению мать начала с 1914 г. через земство и предводителя Губернского дворянства графа Толстого. И только через три года прошение было подписано. Семинария в 1917 г. декретом Советской власти была распущена, и Сережа остался «не аттестован». Надо было думать, где и в какой школе обучать его, чтобы он получил право продолжать учиться, как он хотел, в университете.

Подготовка к университету

Сережа в годы полной разрухи работал вместе с отцом в сельском хозяйстве. Учился выполнять сельскохозяйственные работы (косить, вязать снопы) у соседки Марфы Григорьевны Колдаевой, так как родители этого делать совсем не умели. Дед учил его пахать плугом и обращаться с лошадьми. Пришлось научиться ремонтировать сельхозинвентарь. Семья, состоящая теперь из 10 человек, должна была сама себя обеспечивать продовольствием: хлебом, мясом, картофелем, крупой, молоком, яйцами и овощами.

Тем не менее, продолжение образования детей – главная родительская забота. Программа школ-десятилеток по математике, физике, химии и русскому языку, примерно, соответствовала в эти годы программе классической гимназии.

Договорились о сдаче экзаменов за среднюю школу в оставшейся пока без изменений школе, принадлежавшей Сызрано-Вяземской железной дороге. Школа находилась в 25 километрах от ст. Башмаково, на станции Пачелма. В 1924 г. Сергей успешно сдает все экзамены и получает аттестат об окончании средней школы.

Кто вы, абитуриент Стрелков?

Но, увы... Одного аттестата зрелости недостаточно, и недостаточно быть хорошо подготовленным, – необходимо было еще иметь соответствующее социальное положение. Преимущество тогда имели рабочие, бедные крестьяне и их дети, – и все это должно было подтверждаться документом.

А здесь – родители-учителя, да еще кто они по социальной, еще не установившейся в то время, шкале? Служащие... Но мать? Надо зарабатывать самостоятельное положение – и Сережа отправляется учиться в Совпартшколу в г. Чембар и проводит там год.

Учителя Совпартшколы не имели четкого представления, чему надо учить юношей и девушек пришедших к ним, и на уроках, главным образом, читались газеты, в которых публиковались декреты Советской власти.

После окончания школы он, волостной политпросветитель, работал в с. Пойме в избе-читальне. По вечерам читал и разъяснял жителям села декреты советской власти. Днем решал задачи с мальчиками, которые приходили в избу-читальню, расположенную в бывшем доме купца Панкратова, на главной улице села. Спал и жил в этом большом доме, сдвинув столы, постелив на них газеты и укрывшись овчинным полушубком. Проработав там год, он уходит на работу в начальную школу в с. Покровское. По вечерам и ночью продолжает готовиться к поступлению в МГУ.

Первый раз на свой заработок он отправляется в 1926 г. сдавать экзамены в Москву. Единственное слово «промазал» на открытке из Москвы огорчает всю семью. Он возвращается, продолжает учительствовать и готовиться в МГУ.

Сельский учитель. С. Покровское (Из дневника Л.П. Стрелковой)

«Взобравшись на большое крыльцо, открыла дверь. Ворвавшийся с улицы холодный воздух покрыл все белым покрывалом, сквозь туман увидела большую, светлым огромным пятном, лампу и услышала веселый смех детей, а в нем и смех своего брата Сережи: он что-то рассказывал. Учитель разглядел в клубах пара меня, встал и подошел. Взял из рук сумку, представил своим ученикам: «Дети, это моя младшая сестренка». – Я уже сказала им: «Здравствуйте!» – «Ну, скажи еще раз!» Я повторила, и дети хором ответили.

Сережа показывал детям «туманные картинки». Рисовал на бумаге карандашом рисунок, затем брал блюдце, где было подсолнечное масло, и смазывал листочек – диапозитив был готов. Вставлял в рамку проекционного фонаря, осветителем которого была десятилинейная керосиновая лампа (тогда, в 1926 г. не было электричества в деревнях России), и на экране появлялась девочка – «красная шапочка» и серый волк. Дети смотрели на экран. Экраном служила простыня, повешенная на деревянную стену. Сережа рисовал сказку дальше. Наконец он закончил: «Дети, сейчас мы посмотрели только половину сказки. Остальное – завтра вечером. Видите, моя «красная шапочка» уже пришла». Дети стали расходиться. Сережа погасил лампу фонаря, затем, встав на скамейку, погасил верхнюю лампу. Окна класса побелели. Вышли из школы и отправились в дом к бабе Анне, старушке, где Сережа снимал угол. Изба была недалеко от школы, проста как сундук, имела одну дверь, одно окно и внутри – русскую печь, вокруг которой можно ходить. В углу переднем, против двери висела икона с горящей лампадкой, около печи хлопотала бабушка Анна. Печь топилась. Сережа подал мне ковш и поставил ведро: «Здесь мы с бабой Анной умываемся», – пояснил он. Потом он открыл дверь, выходящую прямо в поле и показал на стоявший плетень, сказав, что это «уборная». Смотрю с изумлением. У избы не было ни двора, ни сеней, вокруг было пустынно и неуютно...

Выпили молока и съели картофель. Сережа отправил меня на печку, а сам сел за стол. На столе была маленькая «коптюшка» – небольшой пузырек, налитый керосином, из отверстия которого торчал горящий фитилек. На самодельном, из трех досок, письменном столе (доски были положены на козлы) лежала стопка книг «Университет на дому». Сережа долго еще сидел за столом.

На третий день он проводил меня домой, и я долго рассказывала родителям, как живет брат. Мама вытирала слезы, и говорила: «Простудится он в таких "хоромах"!» Отец успокаивал: «Таня, не расстраивайся, это последний год – ведь уже весна...» – «А ты, попрыгунья, узнала, как живут учителя?» - «Сестры Вандышевы живут в хорошем большом доме, теплом и красивом, мы с Сережей у них обеда-

ли...» – «Сестры Вандышевы учительствуют там уже двадцать лет, – сказал отец. – Им отец их, священник, выстроил дом». – «Сережа сказал, что их хотели выгнать из их дома?» – «И уж, было, выгнали, да Бог спас, народ вступился: ... сказал, достаточно, что их отца на Соловки отправили, а они наших детей учат. Нашелся там разумный человек. Дай, Бог, им счастья, Сережа говорил, что они его подкармливают, приглашают на обеды».

Москва. Студент МГУ (1927-1931 гг.)

В 1927 году Сергей Павлович решает, что будет пытаться сдавать экзамены в МГУ и Саратовский Государственный университет. Сдает и в первый, и во второй. Зачислен в оба университета. Выбирает Московский. С 1927 года он до конца жизни связан с Московским Университетом. Вначале его зачислили на химический факультет, затем, после первой сессии он переводится на физическое отделение физико-математического факультета. В те годы жил он в общежитии на Ильинке, в большом зале бывшей биржи. День занятий они, провинциалы: Власов Анатолий, Фурсов Василий, Скибарко Алексей, Сорокин, Стрелков Сергей, Бендриков Гриша, Микрюков Василий расписали на целый учебный год: вначале лекции, затем обед, затем занятия в читальном зале библиотеки Политехнического. Заканчивали занятия в 10 часов вечера, а затем возвращались в общежитие. Шли из Политехнического на Старую площадь, выходили на набережную Москвы реки и, огибая Зарядье, поднимались по Варварке к общежитию на Ильинке. Прогулки совершались ежедневно. Выходной день, воскресенье, посвящался баннным делам. Ходили в Сандуновские бани («Сандуны»). Всей группой прирабатывали. Зимой рано утром чистили на улицах снег. Потом, уже на втором курсе, стали заниматься репетиторством. Главным образом, занимались с «академиками» (из академии красной профессуры), что была (в 1918-30 гг.) расположена в лицее Цесаревича Николая на Крымском валу. Так, например, Сергей Павлович репетировал по математике Лихачева – известного директора московского автозавода (впоследствии – ЗИЛ). Много лет спустя он сказал, что «вся математика заключалась в четырех действиях арифметики» и добавил: «Человек был замечательный, добрый и расплачивался аккуратно. Приглашал меня: «Будешь профессором – приходи! Будем решать другие задачи...»» Но пути их впоследствии не пересеклись.

Новые методы обучения в вузах

2 сентября 1921 г. было подписано «Положение о высшей школе», на основании которого ГУУЗом (Главным управлением учебных заведений) был разработан новый «Устав Высшей школы», основное в нем – образование в высших школах **ПРЕДМЕТНЫХ КОМИССИЙ**, и введение в них представителей от студенчества. Для администрации стало обязательным участие в предметной комиссии избранных студентов с правом решающего голоса.

С 1929 г. социальный состав студенчества резко изменился. Положением о высшей школе установлено предпочтительно принимать в Университет детей рабочих и крестьян. Резко упал уровень подготовки студентов. Профессорско-преподавательский состав выступил против такого состава студентов, ибо все программы и методика изложения дисциплин были рассчитаны на другой уровень подготовки вновь поступивших. Естественно, что большинство желающих учиться из рабочих и крестьян не были подготовлены к занятиям в Университете.

Теперь «предметная комиссия» утверждала лектора и преподавателя, ведущего практические занятия. Ставила условием, что читаемый курс должен быть понятен слушателям. Многие профессора МГУ вынуждены были оставить преподавание, так как не могли по тем или иным причинам приспособить свои курсы лекций (семинаров) к новому полуграмотному, к тому же плохо воспитанному студенчеству. Например, профессор В.И. Романов не желал изменять читаемого им курса «Общей физики» и считал, что «если они пришли учиться в Университет, то им нужно работать по 16-18 часов в день». За что Предметная комиссия на очередном заседании не утвердила его в числе лекторов, и он вынужден был оставить работу. То же произошло с профессором Э.В. Шпольским, который перешел работать в 1-й Педагогический институт им. Ленина (тогда – «Второй Университет»). Такой позиции придерживался и известный академик математик Д.Ф. Егоров, который не менял программы излагаемых им курсов математики, а читал их так же, как и все 25 лет. По рассказам Г.А. Бендрикова все студенты посещали его лекции и действительно много работали, чтобы понимать этот курс. Метод обучения до революции был общий, как это установлено было почти по всей Европе: профессора объявляли свои читаемые курсы, читали их, затем объявляли дни (месяцы), когда они принимают экзамены. Причем очередность сдачи предметов не устанавливала администрация, а устанавливал сам студент. Например, курс, который читался на старшем году обучения, студент мог сдать, если он был подготовлен, в первом году. Расписание занятий было свободным. Например, физический практикум был открыт круглый год (за исключением каникул) и студент мог отработать в нем задачи в удобное для него время. Никаких предварительных бесед или опросов не было. Коллоквиум принимали преподаватели, объявляя об этом в журналах, где велись записи студентов.

Посещать лекции и семинары было не обязательно, групп как таковых не было. Если студент ставил себе цель получить диплом, за время обучения (которое не было ограничено, а отсюда и «вечные» студенты) обязательной была только сдача экзаменов по указанному для данной специальности перечню предметов в установленном самим профессором объеме. Университет и Высшая школа ставили задачу воспитания в молодежи основных черт: наибольшей самостоятельности и ответственности. Никаких заранее составленных для них расписаний, никакого навязывания того или иного лектора, все должен был делать сам молодой человек, ибо тогда считалось, что возраст 16-17 лет уже достаточен для принятия самостоятельных решений и, главным образом, выбора.

Революция принесла коренное изменение в Высшую школу – ликвидацию самостоятельного выбора в образовании, в работе, в жизни. Все высшие школы были преобразованы так, что они давали образование определенному классу людей (рабоче-крестьянскому) по определенному заранее расписанию и по определенной программе, которую спускали профессорам. Основная направленность вырабатывалась идеологическим отделом ЦК. Количественная часть относилась как к политике, так и к экономике – каких специалистов, в какое время надо готовить и как их использовать.

До 1917 года вузы частично существовали за счет платы учащихся (платное обучение). После революции это образование стало бесплатным, так как оно образовывало людей, которые не избирали себе работу, а были распределяемы на работу.

Основные даты жизни

- 1905, 18 сентября в с. Долгоруково, Пензенской губернии, в семье сельского учителя родился Сергей Павлович Стрелков.
- 1924 получил аттестат об окончании средней школы.
- 1924 волостной политпросветитель в с. Пойме.
- 1927 зачислен в Московский Университет.
- 1929 начало работы в лаборатории Л.И. Мандельштама
- 1931 аспирант физического факультета МГУ.
- 1934 старший научный сотрудник лаборатории колебаний.
- 1936 защита кандидатской диссертации (Исследование автоколебаний в гидродинамическом потоке, кафедра колебаний физфака МГУ). Присуждена ученая степень кандидата физико-математических наук. Утвержден в звании доцента.
- 1938 и.о. профессора кафедры общей физики Горьковского государственного университета.
- 1940 переезд в г. Жуковский, начальник группы в ЦАГИ.
- 1941, 13 октября ЦАГИ эвакуируется в Казань.
- 1942 август, докторская диссертация (Автоколебания в аэродинамических трубах, Ученый совет МГУ). Присуждена ученая степень доктора физико-математических наук.
- 1943 возвращение из Казани в Москву.
- 1943 по март 1955 г. профессор физического факультета МГУ.
- 1948 награжден орденом Красной Звезды.
- 1949 начальник отдела,
- 1951 начальник сектора в ЦАГИ.
- 1950 опубликована книга «Введение в теорию колебаний».
- 1955 зав. кафедрой физического факультета МГУ.
- 1956 опубликован учебник «Механика».
- 1960 научный руководитель сектора в ЦАГИ.
- 1960 награжден орденом Трудового Красного Знамени.
- 1962 Премия первой степени за работы 1960 г. с вручением диплома и золотой настольной медали имени профессора. Н.Е. Жуковского.
- 1968 присвоено звание «Заслуженный деятель науки и техники РСФСР».
- 1974, 2 апреля С.П. Стрелков скончался в возрасте 68 лет. Похоронен в г. Жуковском.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Глава 1. Семейная хроника

Глава 2. ЦАГИ. Проблемы аэроупругости

Глава 3. МГУ. Физфак. Кафедра общей физики для мехмата

Глава 4. Педагогическая деятельность

Учебники

Ученики

Основные даты жизни

Список основных научных трудов Сергея Павловича Стрелкова

Список сокращений

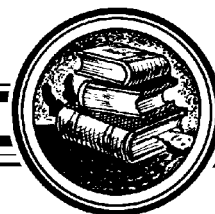
Отец Стрелков Павел Михайлович – родился в 1881 году в селе Свищевка Чембарского уезда Пензенской губернии. Он был младшим из пяти сыновей. Его детские годы прошли в селах Свищевка и Камынино. В 1889 году мальчика отдали в Камынинскую Народную школу, которую построил помещик Щеглов. Осенью 1893 года Павел успешно сдал экзамены в трехклассное Чембарское городское училище. Затем он кончает двухгодичные Русско-Качимские учительские курсы Ведомства Святейшего Синода и получает «звание учителя церковно-приходской школы». С 1902 года по 1914 год вплоть до призыва в действующую армию Павел Михайлович учителем в Пензенской губернии с некоторыми перерывами, связанными с репрессиями властей ввиду его участия в революционном движении: распространении нелегальной литературы, организации конспиративных чтений и бесед на политические и антирелигиозные темы. В 1907 году в Мокшане принимает участие в выборах и оказывается выбранным в Государственную Думу, но ввиду революционных взглядов теряет работу, а затем переходит на нелегальное положение. В 1911 году по поручению Земского Отдела Народного образования он строит в селе Малый Азясь земскую школу. Во время Февральской революции принимает участие в организации солдатских комитетов и делегируется в Петроградский Совет. В 1918 году занимает должность заведующего Уездным Отделом Народного образования, делегируется на Всероссийский Учительский съезд. Ввиду тяжелого материального положения (к этому времени у Стрелковых было семь детей) семья переезжает на станцию Башмаково Сызрань-Вяземской ж.д., где у деда было небольшое хозяйство и с 1919 года Павел Михайлович начинает заниматься сельским хозяйством. Он механизмирует свое хозяйство, восстанавливая брошенный в господском имении сельскохозяйственный инвентарь, привлекая к посильным работам в поле сыновей. В 1920-х годах продолжает общественную деятельность, в 1928 году вступает в сельскохозяйственную артель, передав в общественную собственность весь скот и инвентарь. Тем не менее, в 1931 году его исключают из колхоза по сфабрикованным обвинениям и включают в списки лишенцев. Счастливый случай позволяет избежать семье раскулачивания и выселения. В конце 1930-х годов он работает на Башмаковском птицекомбинате в должности заведующего плановым отделом. Скончался Павел Михайлович в 1946 году.

Мать Перекрестова Татьяна Аполлинарьевна – родилась в 1879 году в Пензе в дворянской семье. Отец погиб в русско-турецкой войне в 1878 году в битве под Плевной. Мать одна вырастила и дала образование четверым детям. Татьяна Аполлинарьевна окончила с серебряной медалью гимназию и учительские курсы в Пензе, после чего работала учительницей в Пензе и на селе. «В 1903 году вышла замуж за Павла Михайловича Стрелкова. Дальнейшая судьба сельской учительницы складывается трудно. Дети рождаются почти ежегодно, муж часто за свою революционную деятельность бывает «в бегах». Тяжелые годы Татьяна Аполлинарьевна переживает во время войны 1914 года. Муж призван в действующую армию, она остается одна в школе с шестью детьми, в 1915 году рождается седьмой ребенок: Основная забота Татьяны Аполлинарьевны - это первый сын Сергей. Она боится оставить его без настоящего образования. Возвращается с фронта Павел Михайлович, его назначают заведующим Уездным Отделом Народного образования в городе Краснослободске». После переезда в Башмаково и рождения в 1922 году восьмого ребенка, сына Михаила, Татьяна Аполлинарьевна полностью посвящает себя семье, ведению домашнего хозяйства, воспитанию и обучению детей предметам начальной школы. В годы войны в Башмаково супруги принимают семью старшего сына и других родственников, всего одиннадцать человек, их трое детей на фронте, младший сын, Михаил, погибает на Курской дуге в 1943 году. Скончалась Татьяна Аполлинарьевна в 1947 году.



Стрелкова Лидия Павловна – родилась в 1915 году. В 1934 году окончила московскую производственную школу по обработке киноплёнки (1934) и работала в системе кино до 1950 года. Затем окончила радиотехнический факультет МЭИ и работала на физфаке МГУ (1949–1986). Кандидат педагогических наук (1968). Автор более 50 научных статей, методических и научных работ.

биогра



Серия: «Синергетика: от прошлого к будущему»

ПУТЬ В СИНЕРГЕТИКУ

Экскурс в десяти лекциях

Б.П. Безручко, А.А. Короновский, Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов

© Коллектив авторов, 2005
© КомКнига, 2005
М.: КомКнига, 2005. 304 с., илл.
ISBN 5-484-00266-4

Книга посвящена одному из наиболее перспективных междисциплинарных подходов – теории самоорганизации, или синергетике. Известный физик и замечательный писатель Чарльз Сноу в середине XX века сетовал на опасную пропасть в науке, которая пролегла между естественно-научной и гуманитарной культурами. Одна из целей синергетики – перебросить мост через эту пропасть. Понятия, идеи, концепции синергетики сейчас все шире используются в экономике и социологии, в политике и бизнесе, в психологии и государственном управлении, оказывая тем самым влияние на наше мировоззрение. Книга знакомит всех интересующихся и, прежде всего, представителей гуманитарного знания с естественно-научными корнями синергетики, с развитием и применением этих идей в науках о человеке и обществе.

В основу книги положены курсы лекций, которые читались на социально-гуманитарном, философском, биологическом, геологическом факультетах и факультете компьютерных наук и информационных технологий Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского. Опыт авторов показывает, что материал книги успешно и с интересом осваивается и школьниками. Представленные лекции во многом соответствуют программе курса «Синергетика: новое мировидение» для 11-го класса общеобразовательных школ, гимназий и лицеев, рекомендованного Министерством образования РФ. Поэтому круг читателей этой книги может быть достаточно широк.

Введение

Синергетику можно рассматривать как форум, на котором ученые разных дисциплин встретились друг с другом для того, чтобы обменяться своими идеями, как справиться с большими системами.

Г.Хакен

В 90-е годы XX столетия человечество занимает проблемы не только политические, но и социальные, экономические и экологические; они тесно взаимосвязаны, носят глобальный характер и оказывают воздействие на всех и вся.

Э.Ласло

Вероятно, что для всех нас было бы гораздо лучше, если бы не только при обучении и в научной работе, но и в повседневной политической и экономической жизни как можно большее число людей поняло, что простые динамические системы не обязательно приводят к простому поведению.

Р.Мэй

Главная цель этого лекционного курса – показать студентам (в первую очередь, гуманитариям) как нелинейная динамика, или синергетика (новое научное мировоззрение нашего времени), проникает в разные науки, и, что не менее важно, познакомить читателей с основными понятиями и подходами синергетики, под которой сами авторы понимают современную нелинейную теорию колебаний и волн, теорию самоорганизации открытых систем, а также научные направления, связанные с ними. Первый эпиграф к предисловию в значительной мере раскрывает основные идеи и подходы, положенные в основу лекционного курса – это встреча и обмен идеями самых разных дисциплин – от физики и астрономии до социологии, психологии и экономики. Здесь уместно привести еще одно высказывание Германа Хакена, которое близко к идеологии нашего лекционного курса:

«Данная конференция, как и все предыдущие, показала, что между поведением совершенно различных систем, изучаемых различными науками, существуют поистине удивительные аналогии. С этой точки зрения, данная конференция служит еще одним примером существования новой области науки – Синергетики. Разумеется, Синергетика существует не сама по себе, а связана с другими науками, по крайней мере, двойко. Во-первых, изучаемые Синергетикой системы относятся к компетенции различных наук. Во-вторых, другие науки привносят в Синергетику свои идеи...»

Более развернуто предмет курса можно определить словами, взятыми из известной статьи Ю.А.Данилова «Роль и место синергетики в современной науке».

Синергетика:

- междисциплинарное («наддисциплинарное») научное направление;
- занимается изучением систем, состоящих из большого числа частей, компонент или подсистем взаимодействующих между собой; слово «синергетика» означает «совместное действие», подчеркивая согласованность функционирования частей, отражающуюся в поведении системы как целого;
- предметом изучения могут быть системы различной природы; синергетику интересуют общие закономерности эволюции (развития, движения), она старается свести рассмотрение к модели, общей для «чужеродных» систем;
- физика, химия, биология, нейрофизиология, экономика, социология, лингвистика и т.д. изучают «свои» системы своими методами и формулируют результаты на «своем» языке; синергетика пользуется универсальным языком, сформировавшимся на основе, в первую очередь, теории колебаний и качественной теории дифференциальных уравнений;
- наука о самоорганизации; рассмотрение чаще проводится на таком уровне, с которого процессы и структуры в системе видятся возникающими «сами собой», вследствие самоорганизации, без руководящей и направляющей «руки», действующей извне;
- выделяет немногочисленные параметры порядка, от которых зависят величины, характеризующие состояние системы, и которые, в свою очередь, могут влиять на параметры порядка. Добавим еще от себя, что синергетика:

- видит эволюцию как череду сменяющих друг друга структур; при определенных условиях (значениях параметров порядка) структуры теряют устойчивость, разрушаются и заменяются новыми.

Смысл, вкладываемый в приведенные слова, мы раскрываем в последующих лекциях, а пока достаточно иллюстративного примера. Представьте себе, например, совокупность большого числа молекул воды в атмосфере Земли (систему) (рис.). Молекулы беспорядочно движутся; мерой этого движения является температура (которая играет роль параметра порядка). Все молекулы притягиваются друг к другу, если расстояние между ними превышает их размер. Но при больших значениях температуры, они интенсивно двигаясь, не могут «слипнуться», и довольно равномерно рассеяны по пространству – система однородна. На левой верхней части рисунка они представлены черными точками. С понижением температуры, до некоторого критического значения, однородное состояние становится неустойчивым, разрушается и заменяется новым, в котором молекулы распределены в пространстве уже неоднородно – образуются структуры. Так в зависимости от предыстории (скорости охлаждения, наличия пыли и т.п.) в атмосфере образуются или округлые капельки воды, или узорчатые снежинки, или кусочки льда. Эти образовавшиеся сами собой (самоорганизовавшиеся) структуры составляют те же молекулы воды, но в сцепленном состоянии. Скопления капелек или снежинок, в свою очередь, образуют облака – структуры еще большего пространственного масштаба. Характеристики сформировавшихся структур, например, размеры и плотность облачного покрова, могут в свою очередь определять порядок в рассматриваемой системе (тоже играть роль параметров порядка). В рассматриваемой нами системе – Земле с ее атмосферой и молекулами воды – это проявляется в неоднородности нагрева поверхности Земли Солнцем, образованием гигантских атмосферных образований – вихрей, течений, которые переносят тепло, определяя погоду на планете.

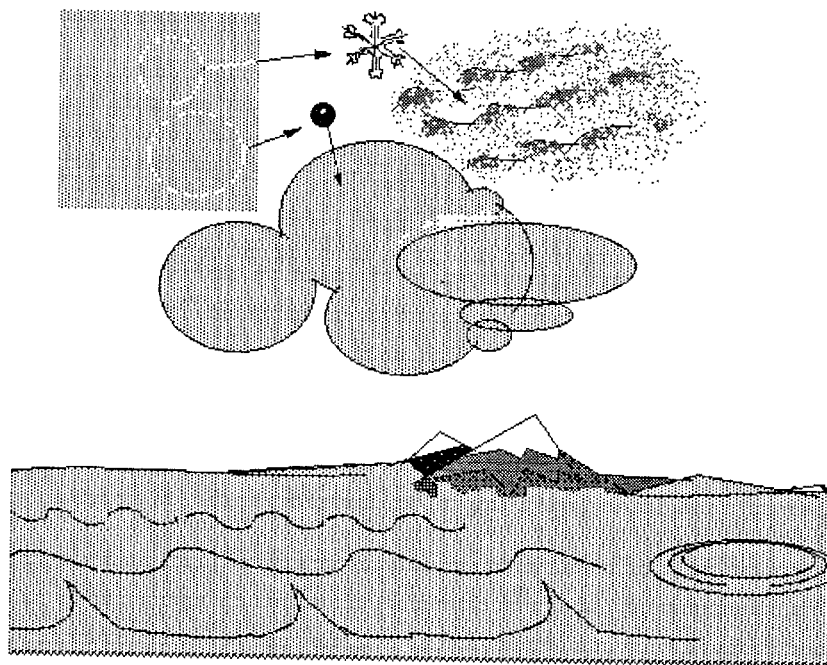


Рис. Некоторые макроструктуры, образующиеся в системе взаимодействующих частичек воды

Однородное состояние жидкости в водоеме, заполненном слившимися каплями, тоже может терять устойчивость и заменяться структурами с различными пространственными конфигурациями. Зеркальная поверхность озера покрывается узором бегущих волн при малейшем ветре, по ней бегут сложно устроенные группы круговых волн после падения камня. В воде структуры возникают при увеличении скорости течения струи, когда образуются изгибы, вихри, так что из ранее однородного течения поэтапно эволюционирует к беспорядочному «турбулентному». В покрывающем вращающуюся Землю океане тоже формируются гигантские структуры. Документальное подтверждение сказанному вы найдете на приведенных фотографиях и в материалах последующих глав. Нечто подобное, рассмотренное на примере из неживой природы, имеет место и в природе живой, и даже в человеческом обществе. Колеблются во времени и образуют структуры с различной плотностью заселенности в пространстве взаимодействующие популяции животных (зайцы и лисы, рыбы и планктон). Примером явлений самоорганизации в социальных системах может служить расслоение ранее однородного общества по мере развития средств производства – концентрация богатств в руках определенных групп, организация партий и движений. Естественно, что различные формы существования материи имеют свои особенности и нельзя совокупность молекул свести к совокупности людей, но универсальные закономерности, если они имеют место в мире и если они действительно универсальны, должны проявляться на различных уровнях сложности систем.

Будучи по образованию и профессиональным интересам физиками, мы предлагаем естественно-научное представление предмета, хотя и адаптированное для широкого читателя. Мы ориентировались на читателя, знакомого с математическим аппаратом в пределах школы и даже несколько подзабывшего его, поэтому старались по мере возможности избегать сложных формул и математических выкладок. Где этого сделать не удалось, приведено упрощенное изложение требуемого математического аппарата. С целью объяснения необходимости достаточно строгих представлений и агитации гуманитариев приложить некоторые усилия на освоение предлагаемого математического минимума, в книге приведены сведения по истории физики, математики и математическому моделированию. Одновременно, мы постарались использовать как можно больше иллюстраций, чтобы сделать знакомство с синергетикой более наглядным и эстетически привлекательным.

Структура лекционного курса следующая. Первая лекция посвящена обсуждению предмета курса, даются основные определения, обсуждается современная обстановка вокруг синергетики. Во второй лекции описан основной инструмент синергетики – моделирование, с помощью которого синергетика находит общее в самых различных областях знания (физика, радиофизика, биология, химия, экономика, общественные науки и т.д.). Третья лекция представляет собой математическое введение, в котором на доступном уровне собраны основные сведения из математики, без которых не обойтись при изложении основ синергетики. В четвертой лекции вводится чрезвычайно важное для синергетики понятие динамической системы. Пятая, шестая, седьмая и восьмая лекции посвящены изложению основ базовых дисциплин, составляющих фундамент синергетики – соответственно теории колебаний и волн, самоорганизации в открытых системах и теории бифуркаций. В этих лекциях обсуждаются основные универсальные явления (колебания, волны, паттерны, бифуркации и т.д.), которые наблюдаются в системах самой различной природы, включая социальные, биологические, экономические, физиологические и другие системы. Девятая лекция содержит в себе рассказ об одной из простейших моделей для описания процессов образования структур (паттернов) – клеточных автоматов и решеточных газах. И, наконец, десятая лекция посвящена наиболее яркому открытию в нелинейной науке XX века – открытию детерминированного (или динамического) хаоса. Отметим, что в тексте лекций есть основной «базовый» материал, который

набран крупным шрифтом, а также дополнительный «необязательный» материал, который набирается меньшим шрифтом и содержит либо более сложный материал, либо какие-то «изящные» вещи, призванные привлечь внимание читателя к нестандартным трактовкам того или иного вопроса, также оформлены и цитаты. В конце книги приведены приложения, в которых собраны дополнительные материалы по вводному курсу в синергетику, а также список рефератов, которые можно рекомендовать для самостоятельной работы студентов.

Здесь мы не будем подробно обсуждать содержание каждой лекции, поскольку книгу предваряет расширенное оглавление, которое повторяется перед текстом каждой из лекций.

Мы надеемся, что книга будет полезна не только студентам при изучении курса «Синергетика», но и представителям как технических, так и гуманитарных специальностей, которые хотят познакомиться с таким интересным и бурно развивающимся научным направлением, как нелинейная динамика, или синергетика. В частности, материал книги во многом соответствует программе курса «Синергетика: новое мировидение» для 11 класса общеобразовательных школ, гимназий и лицеев, рекомендованной Департаментом общего среднего образования Министерства образования Российской Федерации.

В заключение отметим, что читателю, который после знакомства с лекциями будет заинтересован в более глубоком знакомстве с нелинейной динамикой (синергетикой), можно посоветовать обратиться к литературе, указанной ниже в разделе «Основная рекомендуемая литература».

Содержание

Предисловие. Шпаргалка по проектированию будущего. *С. Миров*

Предисловие. Через тернии к звездам. *Г. Малинецкий*

Введение

Лекция первая. Что такое «синергетика»? *Контрольные вопросы к первой лекции.*

Лекция вторая. Моделирование – универсальный инструмент синергетики (или что общего у груза на пружинке с зайцами и лисами). Понятие модели. Познавательная роль моделей. Какие бывают модели и как они рождаются. Особая роль математических моделей. В чем причина исключительной эффективности математики? Что общего находит синергетика в системах различной природы? *Контрольные вопросы ко второй лекции.*

Лекция третья. Математические понятия, без которых не обойтись. Почему в нашем курсе много физики и математики? Численные значения характеризующих систему величин. Переменные и параметры. Динамический и статистический подходы к описанию объектов и явлений. Линейность и нелинейность. Фракталы. *Контрольные вопросы к третьей лекции.*

Лекция четвертая. Динамическая система. Что такое «динамическая система»? Динамические системы с дискретным временем. Динамические системы с непрерывным временем. Распределенные системы. *Контрольные вопросы к четвертой лекции.*

Лекция пятая. Колебания. Основные понятия и определения теории колебаний. Линейные колебания и их свойства. Явление резонанса. Нелинейные колебания. Представление колебаний в фазовом пространстве. Автоколебания и их свойства. Примеры колебаний. *Контрольные вопросы к пятой лекции.*

Лекция шестая. Волны. Что такое волна? Свойства волн. Волны на воде. Нелинейные волны. Ударные волны. Уединенные волны (солитоны). *Контрольные вопросы к шестой главе.*

Лекция седьмая. Примеры процессов самоорганизации в различных системах. Структуры Тьюринга. Вихри Тейлора в течении Куэтта. Ячейки Бенара. Рябь Фарадея. Вихри за движущимся объектом. Процессы самоорганизации в человеческом обществе. *Контрольные вопросы к седьмой лекции.*

Лекция восьмая. Бифуркации. *Контрольные вопросы к восьмой лекции.*

Лекция девятая. Клеточные автоматы. Что такое «клеточный автомат»? Искусственная жизнь. Клеточные автоматы и моделирование динамики биологических Популяций. *Контрольные вопросы к девятой лекции.*

Лекция десятая. Динамический хаос. Как возникает случайность в динамической системе? Сценарии перехода к хаосу. Другие сценарии возникновения хаоса: перемежаемость и разрушение квазипериодических колебаний. *Контрольные вопросы к десятой лекции.*

Приложение А. Вступительное слово на конференции «Нелинейная динамика открытых систем в гуманитарных и общественных науках».

Приложение Б. Список рефератов по курсу «Синергетика».

Приложение В. Библиография избранных статей в журнале «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», посвященных приложению методов синергетики в гуманитарных, экономических, биологических и других нефизических науках.

Основная рекомендуемая литература

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Обложка художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, Н.Н. Васевой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2006 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты и журналы», индекс 73498
и Саратовским государственным университетом
по заключению договора между Подписчиком
(юридическим и физическим лицом) и Издателем

Стоимость подписки на 2006 год 450 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 11.01.06. Подписано к печати 07.02.06
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 11,2(8,0). Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 200. Заказ 372

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2006
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2006