

*Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,  
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций  
на соискание ученой степени доктора наук»*

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Известия высших учебных заведений

**ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*научно-технический журнал*

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 23, № 5, 2015, Саратов

## **С О Д Е Р Ж А Н И Е**

От редактора. Гуляев Ю. В. ....	3
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
<i>Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И.</i> Аналогия в задачах о взаимодействии электронных и гидродинамических потоков с полями резонаторов и периодических структур. Часть 1 .....	5
<i>Смирнов Л. А., Крюков А. К., Осипов Г. В.</i> Вращательная динамика в системе двух связанных маятников .....	41
<i>Ковальчук А. В., Беллюстин Н. С.</i> Алгоритм классификации потоковых сигналов на основе последовательной машины опорных векторов .....	62
<b>НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ</b>	
<i>Петрик А. Г.</i> Численное моделирование возможности увеличения эффективной плазменной частоты при формировании сжатого состояния пучка .....	80
<b>НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА</b>	
<i>Нуйдель И. В., Соколов М. Е., Яхно В. Г.</i> Построение макроскопической модели обработки зрительной информации в нормальном состоянии и описание перехода к патологическому эпилептиформному режиму .....	92
<b>КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ</b>	
V Съезд биофизиков России. Ростов-на-Дону, 4–10 октября 2015. ....	107
<i>Ризниченко Г. Ю., Романовский Ю. М.</i> Нелинейная динамика на V Съезде биофизиков России .....	111

DEPARTMENT OF EDUCATION AND SCIENCE OF RUSSIAN FEDERATION  
Izvestiya VUZ  
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS  
*scientific-technical journal*  
published since 1993

Published 6 times a year

Vol. 23, № 5, 2015, Saratov

C O N T E N T S

Editorial. <i>Gulyaev Yu. V.</i> .....	3
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY	
<i>Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Trubetskov D. I.</i> Analogy in interactions of electronic beams and hydrodynamic flows with fields of resonators and periodic structures. Part 1 .....	5
<i>Smirnov L. A., Kryukov A. K., Osipov G. V.</i> Rotational dynamics in the system of two coupled pendulums .....	41
<i>Kovalchuk A. V., Bellyustin N. S.</i> Classification algorithm of streaming signals based on the online support vector machine .....	62
INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS	
<i>Petrik A. G.</i> Numerical simulation of electron-beam «squeezed» state in purpose to study the possibility of effective plasma frequency increase .....	80
NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE	
<i>Nuidel' I. V., Sokolov M. E., Yakhno V. G.</i> Macroscopic model of visual processing in brain structures in normal condition and description of the transition to epileptiform regime .....	92
CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIA. SCHOOLS	
V Congress of Biophysicists of Russia. Rostov-on-Don, 4–10 October 2015 .....	107
<i>Riznichenko G. Yu., Romanovsky Yu. M.</i> Nonlinear dynamics at the V Congress of biophysicists of Russia .....	111

## От редактора

Книга ничего не описывает и не выражает; она оказывает действие. Описать или выразить – значит, сделать лишь первый шаг, опереться на что-то. Все остальное еще впереди.

Л. Флашен. Эссе

Недавно мне попала в руки книга Иэна Стюарта «Величайшие математические задачи» (М.: Альпина нон фикшн, 2015, 460 с.). Из семи задач тысячелетия, изложенных в книге, две относятся к прикладной математике и современной математической физике: «Глава 8. Орбитальный хаос. Задача трех тел» и «Глава 12. Потокосное мышление. Уравнение Навье–Стокса». Обе темы близки нашему журналу, но больше меня заинтересовала глава о турбулентности. Я вспомнил, что проблемам нелинейной гидродинамической неустойчивости был посвящен отдельный выпуск нашего журнала (Изв. вузов. ПНД, 1993, т. 3, № 2). Более того, вспомнил я и другую книгу – «Современная гидродинамика. Успехи и проблемы гидродинамики» (М.: Мир, 1984), а в ней статью английского физика Г. Моффата «Некоторые направления развития теории турбулентности» с его воспоминаниями. Вот отрывок из воспоминаний.

«В 1961 году в Марселе был проведен важный коллоквиум по случаю открытия Института статистических методов турбулентности: Там были Карман, а также А.Н. Колмогоров и Дж. Тейлор. Я вспоминаю, что Карман в своем выступлении на открытии конференции сказал, что когда он, наконец, предстанет перед Создателем, первое, о чем он попросит, будет раскрытие тайн турбулентности».

Неужели до сих пор тайны не раскрыты? – удивился я. Широко известно, что для решения уравнения Навье–Стокса в практических целях существуют компьютерные программы, которые применяются при конструировании автомобилей, расчета аэродинамики самолетов, расчета тока крови в организме человека и т.п. В чем же дело? Решение есть, что еще нужно? Ответ находим в книге Иэна Стюарта (с. 308).

«Задача тысячелетия не просит математиков найти явные решения уравнения Навье–Стокса, поскольку это, по существу, невозможно. Не имеет она отношения и к численным методам решения этих уравнений, несмотря на всю их важность. Вместо этого в задаче требуется найти доказательство фундаментального теоретического свойства: *существования* решений. При заданном состоянии жидкости в определенный момент времени – при известных характеристиках ее движения – существует ли решение уравнения Навье–Стокса, верное для всего будущего времени, начиная с рассматриваемого момента?»

Иными словами, вопрос ставится так: *существует ли точное решение*, аппроксимацией которого являются компьютерные расчеты.

Далее еще одна цитата из Стюарта (стр. 315).

«Именно этим объясняется включение уравнения Навье–Стокса в число задач тысячелетия. Его официальное описание на сайте Института Клея состоит из четырех отдельных задач. Решения любой из них будет достаточно для получения приза. Во всех четырех задачах жидкость считается несжимаемой. Вот эти задачи.

1. *Существование и гладкость решений в трех измерениях.* Здесь предполагается, что жидкость занимает бесконечное пространство целиком. При заданном первоначальном гладком поле скорости требуется доказать, что для любого положительного момента времени существует гладкое решение уравнения, совпадающее с заданным первоначальным полем.
2. *Существование и гладкость решений на трехмерном плоском торе.* Тот же вопрос, но теперь в предположении, что пространство представляет собой плоский тор – прямоугольник с отождествленными противоположными сторонами. В этой версии обходятся потенциальные проблемы, связанные с бесконечным пространством, о котором шла речь в первой версии; это пространство не соответствует реальности и может вызвать неправильное поведение системы по причинам, не имеющим непосредственного отношения к задаче.
3. *Опровержение существования решений в трех измерениях.* Опровергнуть пункт 1. Иными словами, найти начальное поле, для которого не существует гладкого решения в любой положительный момент времени, и доказать это утверждение.
4. *Опровержение существования решений на трехмерном плоском торе.* Доказать, что пункт 2 неверен.

Те же вопросы остаются открытыми и для уравнения Эйлера, которое, в сущности, эквивалентно уравнению Навье–Стокса, но не учитывает вязкости. За ответы на вопросы по уравнению Эйлера, однако, никто никаких призов не обещает.»

Может быть, кто-то из читателей журнала захочет заняться решением этих задач, а кто-то и решит их?

Желаю успеха!

Научный руководитель ИРЭ РАН,  
академик РАН

Ю.В. Гуляев



## АНАЛОГИЯ В ЗАДАЧАХ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОННЫХ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ С ПОЛЯМИ РЕЗОНАТОРОВ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

### Часть 1

*А. П. Кузнецов<sup>1,2</sup>, С. П. Кузнецов<sup>2,3</sup>, Д. И. Трубецков<sup>1,4</sup>*

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

<sup>2</sup>Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

<sup>3</sup>Удмуртский государственный университет, Ижевск

<sup>4</sup>НИЯУ МИФИ, Москва

Уравнения гидродинамики невязкой сжимаемой жидкости преобразованы к виду, удобному для построения самосогласованной теории взаимодействия гидродинамических потоков с полями резонаторов и периодических структур по аналогии с теорией устройств СВЧ электроники со скрещенными электрическим и магнитным статическими полями. В качестве возбуждаемого акустического поля рассматривается поле скоростей, а в качестве источников – завихренность в потоке. Для двумерных задач в пренебрежении нелинейностью собственных акустических колебаний и сжимаемостью жидкости в области движения вихрей получены уравнения возбуждения акустических резонаторов в форме, полностью аналогичной уравнениям возбуждения электродинамических резонаторов. Для трехмерных резонаторов проведено рассмотрение, повторяющее электродинамическую теорию по своей общей структуре, хотя полной аналогии в этом случае не получается. Для иллюстрации решения самосогласованных уравнений рассматривается динамика плоской ленты вихрей, взаимодействующих с периодической структурой типа «ребенки». Решается самосогласованная задача для случая взаимодействия вихревого потока с произвольной периодической структурой. Получено дисперсионное уравнение задачи и на основе его анализа указаны конструкции гидродинамических устройств, являющихся полными аналогами электронных лучевых приборов со скрещенными полями.

**Ключевые слова:** Электронный поток, гидродинамический поток, вихри, периодические структуры, теория возбуждения.

### Введение

Задачи о взаимодействии волн с полями периодических структур распространены весьма широко. Большое число примеров можно найти в радиофизике и гидродинамике. В гидродинамике это распространение волн на поверхности воды в

случае периодически неровного дна [1], звуковые колебания в струях, движущихся в трубах с гофрированными стенками [1], некоторые типы аэродинамических генераторов звука [2, 3]. В радиофизике взаимодействие волн в электронных потоках с полями периодических структур широко используется для усиления и генерации электромагнитных колебаний СВЧ-диапазона [4–8]. И в радиофизических, и в гидродинамических устройствах протекают во многом похожие волновые процессы.

Аналогия гидродинамики и электродинамики вызывала интерес с самого момента возникновения электродинамики. Именно с нее началось формирование общей теории колебаний и волн: в своей «Теории звука» Рэлей наряду с вопросами акустики включил и главу, посвященную электрическим колебаниям [9]. Сейчас аналогия достаточно хорошо развита и применяется для решения задач гидро- и электростатики [10], для анализа распространения свободных волн в различных структурах [11, 12]. В работах [13, 14] обращено внимание на аналогию между двумерным движением электронного потока в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, и течением несжимаемой вихревой жидкости, в частности, на аналогию между диокотронной неустойчивостью электронного потока в статических скрещенных электрическом и магнитном полях и неустойчивостью Гельмгольца. Такую аналогию привлекают для объяснения аномально высоких шумов в СВЧ электронных приборах магнетронного типа, которые пытаются связать с турбулентной природой электронного облака [15, 16]. Приходится, однако, констатировать, что аналогия в задачах о взаимодействии в системах типа поток – поле, когда возможно не только возбуждение волновых полей источниками, но и обратное воздействие этих полей на источники, в достаточной мере не разработана. Можно отметить работу [2], в которой обсуждается аналогия между «антизатуханием» Ландау в электронных приборах и механизмами самовозбуждения аэродинамического устройства с периодической структурой, рассмотрен «гидродинамический монотрон», однако, по словам самих авторов, развитая аналогия носит эвристический характер и не затрагивает формализм теории. В то же время кажется естественным, что такие элементы теории электронных устройств, как уравнения возбуждения периодической структуры заданными источниками, уравнения движения источников в поле излучения, методы совместного решения этих уравнений, задача о выделении квазистатической части поля и др. должны обладать большой степенью общности, независимо от физической природы анализируемой системы.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы обосновать возможность и наметить пути использования развитых в электронике сверхвысоких частот методов теоретического исследования, а иногда и конкретных результатов анализа взаимодействия электронных потоков с колебаниями и волнами в резонаторах и волноводах, применительно к задачам о взаимодействии гидродинамических потоков с акустическими колебаниями и волнами.

Общепринятой основой для решения задач о возбуждении акустических колебаний при движении жидкости или газа является подход, предложенный в свое время Лайтхиллом [17, 18]. Его содержание состоит в том, что в уравнениях гидродинамики сжимаемой жидкости выделяется комбинация членов, отвечающая волновому уравнению акустических колебаний для переменной составляющей плотности среды, а все остальные члены рассматриваются как источники возбуждения этих колебаний. Чтобы сделать желаемое применение развитых в электродинамике методов

и подходов наглядным и продуктивным, мы предлагаем такую постановку задачи, чтобы уравнения, описывающие акустические колебания и волны, записывались не для скалярного поля, как в теории Лайтхилла, а соответствовали по виду уравнениям Максвелла. Вполне успешной такая формулировка оказывается для двумерных задач, но даже с этим ограничением она открывает очевидные перспективы для развития и применения аналогии между электроникой СВЧ, в рамках которой многие проблемы проработаны весьма глубоко, и задачами взаимодействия акустических колебаний с гидродинамическими потоками. Для трехмерных задач прямая аналогия не проходит, но остается возможным использовать общую структуру теоретических схем, развитых в электронике и электродинамике, адаптируя их к задачам гидродинамики и акустики.

Следует отметить, что наиболее удобным для описания с единых позиций взаимодействия волн в системах различной природы является метод связанных волн, опирающийся на представление о синхронных волнах [19]. В случае синхронного взаимодействия эффективно обмениваются энергией лишь те волны в потоке и в периодической структуре, у которых примерно равны фазовые скорости и волновые числа. На диаграмме частота  $\omega$  – волновое число  $k$  таким волнам отвечает точка пересечения дисперсионных характеристик потока и периодической структуры. В случае слабого взаимодействия волны связываются лишь в малой окрестности точки пересечения, размеры которой по частоте  $\Delta\omega$  и волновому числу  $\Delta k$  определяют характерные масштабы времени  $\tau \sim 1/\Delta\omega$  и длины  $l \sim 1/\Delta k$  взаимодействия. По этой причине все многообразие волновых взаимодействий можно свести к нескольким универсальным ситуациям. Так, если точка пересечения лежит на прямой ветви дисперсионной характеристики структуры (групповая скорость положительна), то в активной системе реализуется конвективная неустойчивость, когда пространственно локализованное возмущение, нарастая по амплитуде, с течением времени уходит из области первоначальной локализации. Если точка пересечения лежит на обратной ветви характеристики структуры (групповая скорость отрицательна), то в активной системе реализуется абсолютная неустойчивость, когда возмущения, нарастая, с течением времени охватывают все пространство. Весьма интересная ситуация возникает у границы полосы пропускания периодической структуры, где происходит смена характера неустойчивости с конвективной на абсолютную и наоборот [20–22]. Может, однако, иметь место и такая ситуация, когда одна из волн в потоке характеризуется сильной собственной неустойчивостью. Она реализуется в электронных устройствах со скрещенными полями в режиме больших токов пучка [6], а также в гидродинамических системах, в которых тангенциальный разрыв взаимодействует с акустическим полем в периодической структуре [2, 3, 23, 24]. Экспериментальные исследования гидродинамических систем такого типа указывают на возможность самовозбуждения в них звука [24]. Однако в теоретических работах ни усиление, ни подавление, ни самовозбуждение колебаний не найдено [2, 3]. Задача теоретического обоснования принципиальной возможности усиления, подавления и самовозбуждения в гидродинамических системах представляется важной. В перспективе ее решение позволило бы добиться той же степени управления гидродинамическим течением, какая возможна в электронике при работе с электронным потоком.

Настоящая работа (часть 1) направлена на выяснение физического смысла акустических источников поля, выступающих в качестве аналогов зарядов и токов в

электродинамике, и получение самосогласованных уравнений взаимодействия источников с периодической структурой. Важным элементом самосогласованной задачи являются уравнения возбуждения периодической структуры. Соответствующая теория для акустических систем будет построена на основе электродинамической теории [25], опирающейся на уравнения возбуждения резонаторов. Отметим, что это одна из возможных разновидностей электродинамической теории, которая оказывается наиболее удачной для достижения поставленных целей. По причине «резонаторного» типа уравнений возбуждения периодических структур [25] довольно значительное внимание уделим аналогии в задаче о возбуждении акустических и электродинамических резонаторов. При рассмотрении аналогии для уравнений движения будем следовать работам [13, 14].

### 1. Аналогия между уравнениями гидродинамики невязкой сжимаемой жидкости и уравнениями Максвелла (двумерный случай)

Исходные уравнения динамики невязкой сжимаемой жидкости имеют следующий вид [26]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\text{grad } p/\rho, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2)$$

$$p = p(\rho). \quad (3)$$

Здесь  $\vec{v}$  – поле скоростей,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность. Для газов давление  $p$  и плотность  $\rho$  связаны уравнением адиабаты

$$p(\rho) = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (4)$$

где  $\gamma = C_p/C_V$ . Аналогичное соотношение справедливо и для конденсированных сред, величина  $\gamma$  подбирается в этом случае эмпирически. Если возмущения давления и плотности не очень велики, то

$$\rho = \rho_0 (1 + \tilde{\rho}), \quad p = p_0 (1 + \tilde{p}), \quad (5)$$

и из (4) следует, что возмущения этих величин пропорциональны друг другу

$$\tilde{p} = \gamma \tilde{\rho}. \quad (6)$$

Перепишем систему уравнений (1)–(3), исключив давление  $p$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -c^2 \text{grad } \tilde{\rho}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \text{div } \vec{v} + \text{div} (\tilde{\rho} \vec{v}) = 0. \quad (8)$$



Здесь  $c^2 = p_0 \gamma / \rho_0$  – квадрат скорости звука. Ограничим пока наше рассмотрение двумерными течениями. В этом случае следует положить

$$\vec{v} = (v_x, v_y, 0), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

**1.1. Безвихревые колебания жидкости, линейное приближение. Уравнения Максвелла без источников.** Пусть возмущения плотности и скорости малы, а жидкость не участвует в движении как целое. Отбросив в уравнениях (7), (8) члены второго порядка малости, получим:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -c^2 \text{grad } \tilde{\rho}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{v} = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим безвихревые колебания жидкости. Условием отсутствия завихренности является обращение в нуль ротора скорости:

$$\text{rot } \vec{v} = 0. \quad (13)$$

Покажем, что уравнения (11)–(13) эквивалентны уравнениям Максвелла в отсутствие источников поля – токов и зарядов.

Введем новые векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  следующим образом:

$$\vec{E} = (-v_y, v_x, 0), \quad (14)$$

$$\vec{B} = (0, 0, \tilde{\rho}). \quad (15)$$

(Вектор  $\vec{E}$  дуален к вектору скорости  $\vec{v}$ .)

Перейдем в соотношениях (11)–(13) к представлению движения жидкости в терминах векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Для этого распишем соотношения (11)–(13) по компонентам.

Из уравнения Эйлера (11) получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} = c^2 \frac{\partial B_z}{\partial y} \end{cases} \rightarrow c^2 \text{rot } \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (16)$$

Из уравнения непрерывности (12):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (17)$$

Из условия отсутствия завихренности (13):

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{div } \vec{E} = 0. \quad (18)$$

Наконец, используем первое из соотношений (10):

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (19)$$

Полученные уравнения (16)–(19) полностью совпадают с уравнениями Максвелла в вакууме ( $\varepsilon_0 = 1$ ) в отсутствие электрических зарядов и токов. Электродинамические аналоги соответствующих гидродинамических величин приведены в таблице<sup>1</sup>.

Таблица

Гидродинамические величины  
и их электродинамические аналоги

Гидродинамическая величина		Электродинамическая величина	
Переменная составляющая плотности	$\tilde{\rho}$	Магнитное поле	$B$
Вектор скорости	$v_x$	Электрическое поле; вектор, дуальный к вектору скорости	$E_y$
	$v_y$		$-E_x$
Завихренность	$\Omega$	Плотность заряда	$\rho_e$
Плотность тока завихренности	$\vec{j} = \Omega \vec{v}$	Плотность тока электрических зарядов	$\vec{j} = \rho_e \vec{v}$

**1.2. Безвихревые колебания жидкости, нелинейный случай. Соленоидальные токи.** Оставим теперь в уравнениях (7), (8) все члены, включая также и квадратичные. Движение жидкости по-прежнему полагаем двумерным и безвихревым. В этом случае уравнения (18) и (19) остаются без изменения:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (20)$$

Таким образом, первая пара уравнений Максвелла сохраняет свою форму, причем и электрические, и магнитные заряды отсутствуют.

Проводя преобразования так же, как это сделано выше, из уравнений (7), (8) можно получить следующие соотношения:

$$c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}_E, \quad (21)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \vec{J}_B. \quad (22)$$

<sup>1</sup>Отметим альтернативный подход к построению аналогии между гидродинамикой и электродинамикой в работе [34], где приняты несколько иные правила соответствия между электродинамическими и гидродинамическими полями, нежели в нашей работе. В частности, в качестве аналога магнитного поля выступает поле завихренности, а в качестве аналога электрического поля – локальное ускорение жидкой частицы в данной точке в данный момент. Для рассмотрения задач взаимодействия с полями резонаторных и волноводных структур наш вариант аналогии, проработанный с использованием идей и методов электродинамики и электроники приборов со скрещенными полями, представляется более подходящим.

Здесь введены обозначения

$$\vec{J}_E = \left( -v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}, v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}, 0 \right), \quad (23)$$

$$\vec{J}_B = c^2 \left( 0, 0, -\frac{\partial \tilde{\rho} v_y}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{\rho} v_x}{\partial x} \right). \quad (24)$$

Уравнения (21), (22) представляют собой вторую пару уравнений Максвелла с возбуждающими токами – электрическим  $\vec{J}_E$  и магнитным  $\vec{J}_B$ . Своим появлением эти токи обязаны нелинейным членам в уравнениях динамики жидкости, следовательно, нелинейность является «источником» звуковых волн в жидкости. Заметим, что в исходных уравнениях Максвелла магнитные токи отсутствуют, однако, их иногда вводят искусственно, например, в ситуации, когда необходимо описать возбуждение электродинамической структуры (объемного резонатора, волновода и др.) петлей с током, размер которой много меньше длины волны [27]. Покажем, что введенные нами гидродинамические аналоги электрического и магнитного токов  $\vec{J}_E$  и  $\vec{J}_B$  являются чисто соленоидальными. Действительно, используя условие отсутствия завихренности (18)  $\partial v_y / \partial x = \partial v_x / \partial y$  и переходя в соотношениях (23) и (24) к полям  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  по формулам (14) и (15), получим следующие выражения для  $\vec{J}_E$  и  $\vec{J}_B$ :

$$\vec{J}_E = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial v^2}{\partial y}, \frac{\partial v^2}{\partial x}, 0 \right) = -\frac{1}{2} \text{rot} (v^2 \vec{e}_z) = -\frac{1}{2} \text{rot} (E^2 \vec{e}_z), \quad (25)$$

$$\vec{J}_B = c^2 \left( 0, 0, \frac{\partial (B E_y)}{\partial x} - \frac{\partial (B E_x)}{\partial y} \right) = -\text{rot} (B \vec{E}). \quad (26)$$

Таким образом, величины  $\vec{J}_E$  и  $\vec{J}_B$  представляют собой роторы, и дивергенция от них равна нулю:

$$\text{div } \vec{J}_E = 0, \quad \text{div } \vec{J}_B = 0. \quad (27)$$

Итак, нелинейность в покоящейся в целом жидкости в отсутствие вихрей порождает «источники» поля – токи, но не порождает заряды.

**1.3. Вихревые течения, плотность тока завихренности и гидродинамические заряды.** Пусть теперь жидкость может участвовать в движении как единое целое, то есть в жидкости возможны потоки. Если эти потоки безвихревые, то справедливы все соотношения и выводы предыдущего параграфа за тем исключением, что величины соленоидальных токов  $\vec{J}_E$  и  $\vec{J}_B$ , определяемые скоростью жидкости  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \tilde{\vec{v}}$ , отличны от нуля уже в линейном приближении по малым добавкам  $\tilde{\vec{v}}$  к скорости потока  $\vec{v}_0$ .

Рассмотрим общий случай, когда в жидкости имеются потоки и существует завихренность, то есть присутствует векторное поле  $\vec{\Omega}$

$$\text{rot } \vec{v} = -\vec{\Omega}. \quad (28)$$

(Знак минус введен здесь для удобства.) В двумерном случае вектор  $\vec{\Omega}$  имеет не равную нулю только  $z$ -компоненту:  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ . Расписывая ротор скорости по компонентам и используя соотношения (9) и (14), из (28) находим

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\Omega \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \Omega \rightarrow \text{div } \vec{E} = \Omega. \quad (29)$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением Максвелла, если величине  $\Omega$  придать смысл плотности электрического заряда  $\rho_e(x, y)$ . Таким образом, уединенному электрическому заряду, для которого  $\rho_e = q\delta(x)\delta(y)$ , необходимо сопоставить элементарный вихрь вида  $\Omega = q\delta(x)\delta(y)$ .

В электродинамике движение зарядов порождает электрический ток, причем справедливо соотношение  $\vec{j} = \rho_e \vec{v}$ , где  $\vec{v}$  – скорость зарядов,  $\vec{j}$  – плотность тока. Следовательно, если развиваемая аналогия полная, то должно существовать соотношение  $\vec{J} = \Omega \vec{v}$ , где  $\vec{J}$  – плотность гидродинамического «тока». Однако из соотношения (7) после несложных преобразований получаем

$$c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}, \quad (30)$$

$$\vec{J} = \Omega \vec{v} + \vec{J}_E, \quad (31)$$

где  $\vec{J}_E$  – введенный ранее соотношением (25) соленоидальный ток. Таким образом, только часть полного тока строго аналогична электродинамическому току. Эту часть  $\vec{j} = \Omega \vec{v}$  будем называть плотностью тока завихренности. Как и в электродинамике, плотность тока завихренности  $\vec{j}$  удовлетворяет уравнению непрерывности, которое можно получить, взяв дивергенцию от обеих частей уравнения (30):

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (32)$$

Заметим, что уравнение непрерывности справедливо и для полного тока

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{j} + \vec{J}_E) = 0, \quad (33)$$

поскольку ток  $\vec{J}_E$  является чисто соленоидальным.

Приведем гидродинамические «уравнения Максвелла» в виде полной системы:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \Omega, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \vec{J}_B, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \quad c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} + \vec{J}_E. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, уравнения динамики невязкой сжимаемой жидкости в двумерном случае эквивалентны уравнениям Максвелла с магнитными токами. Отличие от электродинамики проявляется в наличии дополнительного соленоидального «тока»  $\vec{J}_E$ , что, однако, не нарушает структуры уравнений.

## 2. Аналогия уравнений возбуждения акустических и электродинамических резонаторов и периодических структур внешними источниками

**2.1. Уравнения возбуждения резонаторов.** Рассмотрим двумерную полость с непроницаемыми для жидкости стенками. На поверхности такой стенки должно выполняться граничное условие:

$$\vec{v}_\perp|_S = 0. \quad (35)$$

Введенный выше вектор  $\vec{E} = (-v_y, v_x, 0)$  перпендикулярен вектору скорости  $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$  и, следовательно, должен быть перпендикулярен стенке резонатора. Таким образом, в терминах вектора  $\vec{E}$  граничное условие (35) принимает такой же вид, как и в электродинамике для электрического поля:

$$\vec{E}_{\parallel} \Big|_S = 0. \quad (36)$$

Второе граничное условие, используемое в теории электромагнитного поля,

$$\vec{B}_{\perp} \Big|_S = 0, \quad (37)$$

в нашей двумерной задаче выполняется автоматически: вектор  $\vec{B} = (0, 0, \tilde{\rho})$  имеет единственную компоненту, параллельную боковой стенке резонатора.

Таким образом, в объеме акустического резонатора векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  подчиняются гидродинамическим «уравнениям Максвелла» (34), а граничные условия для этих векторов (36), (37) такие же, как и в электродинамике. Установленная аналогия позволяет воспользоваться готовыми уравнениями возбуждения объемных резонаторов, полученными в электродинамике [5,27]:

$$\vec{E} = \sum_s C_s \vec{E}_s - \text{grad } \Phi, \quad \vec{B} = \sum_s C_s \vec{B}_s, \quad (38)$$

$$\frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s = -\frac{1}{N_s} \int_V \left( \vec{j} \vec{E}_{-s} + \vec{J}_E \vec{E}_{-s} - \vec{J}_B \vec{B}_{-s} \right) dV. \quad (39)$$

Здесь  $\vec{E}_s$  и  $\vec{B}_s$  – собственные функции  $s$ -го акустического типа колебаний, удовлетворяющие «уравнениям Максвелла» без источников

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E}_s &= 0, \quad \text{rot } \vec{E}_s = -i\omega_s \vec{B}_s, \\ \text{div } \vec{B}_s &= 0, \quad c^2 \text{rot } \vec{B}_s = i\omega_s \vec{E}_s \end{aligned} \quad (40)$$

с соответствующими граничными условиями;  $\omega_s$  – собственные частоты дискретного спектра линейных акустических колебаний;  $\Phi$  – квазистатический потенциал вихревого потока (как говорят в электронике, потенциал поля «пространственного заряда»), определяемый из уравнения

$$\text{div grad } \Phi = -\Omega; \quad (41)$$

$N_s$  – норма  $s$ -го типа колебаний

$$N_s = \int_V \left( |\vec{E}_s|^2 + c^2 |\vec{B}_s|^2 \right) dV. \quad (42)$$

Рассмотрим далее колебания в резонаторах типа резонатора Гельмгольца (рис. 1, а). В таком резонаторе сжимаемость жидкости (газа) существенна только

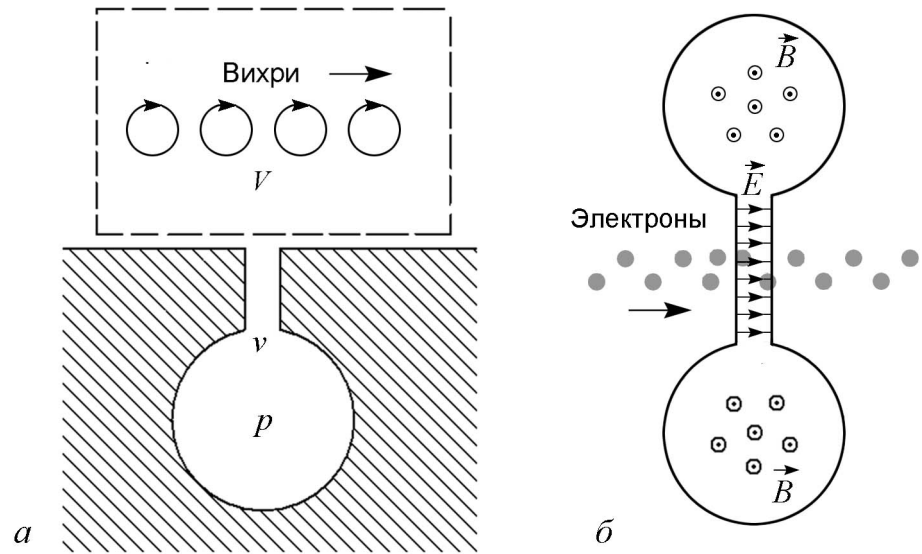


Рис. 1. Примеры объемных резонаторов: *a* – акустический резонатор Гельмгольца, возбуждаемый потоком вихрей, *б* – электродинамический тороидальный резонатор

внутри резервуара, а поле скоростей отлично от нуля в горловине [28]. Длина волны  $\lambda$  основного типа колебаний в резонаторе Гельмгольца много больше его характерного размера  $l$ . Нетрудно усмотреть аналогию с широко используемыми в электронике резонаторами тороидального типа, в которых электрическое поле сосредоточено в узком зазоре, а в резервуаре «хранится» магнитное поле (рис. 1, б). На языке электродинамики условие  $\lambda \gg l$  является условием квазистационарности колебаний. В квазистационарном случае электрическое поле основной моды резонатора можно считать квазистатическим

$$\text{rot } \vec{E}_s = 0 \quad \text{и} \quad \vec{E}_s = -\text{grad } \Phi_s, \quad (43)$$

а магнитными полями (сжимаемостью жидкости) вне резервуара пренебречь:

$$\vec{B}_s = 0. \quad (44)$$

Пусть резонатор Гельмгольца возбуждается вихревым потоком, например, сдвиговым течением, так, что элементарные вихри движутся в области, где поле квазистатическое (см. рис. 1, а). В этом случае не все члены в правой части уравнения (39) вносят вклад в возбуждение звукового поля. В соответствии с (39), вклад источников описывается интегралом

$$I_{V_P} = \int_{V_P} \left( \vec{j} \vec{E}_{-s} + \vec{J}_E \vec{E}_{-s} - \vec{J}_B \vec{B}_{-s} \right) dV, \quad (45)$$

вычисленным по всему объему резонатора. Разобьем интеграл (45) на две части – интеграл по объему резервуара и горловины  $v$  и по внешнему по отношению к ним объему  $V$  (см. рис. 1, а):

$$I_{V_P} = I_v + I_V. \quad (46)$$

Поскольку элементарные вихри не проникают внутрь резервуара и горловины, то в объеме  $v$  следует положить равной нулю плотность тока завихренности  $\vec{j}$ :

$$I_v = \int_v \left( \vec{J}_E \vec{E}_{-s} - \vec{J}_B \vec{B}_{-s} \right) dV. \quad (47)$$

В п. 1.2 было указано, что, если жидкость не участвует в движении как единое целое, то соленоидальные токи  $\vec{J}_E$  и  $\vec{J}_B$  описывают генерацию звуковых волн нелинейностью, а значит, интеграл (47) характеризует отклонение собственных колебаний резонатора от линейного описания. Этими эффектами будем пренебрегать, и, следовательно, можно положить  $I_v = 0$ .

Вычислим теперь интеграл по внешнему объему  $V$ . В квазистатическом приближении сжимаемость жидкости можно не учитывать (условие (44)), следовательно

$$I_V = \int_V \vec{j} \vec{E}_{-s} dV + \int_V \vec{J}_E \vec{E}_{-s} dV. \quad (48)$$

Преобразуем второй член в соотношении (48). Используя условие соленоидальности тока  $\vec{J}_E$  (25)  $\vec{J}_E = -(1/2)\text{rot}(\nu^2 \vec{e}_z)$ , тождество векторного анализа  $\text{div} [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b}$  и теорему Остроградского–Гаусса, получаем

$$\begin{aligned} \int_V \vec{J}_E \vec{E}_{-s} dV &= -\frac{1}{2} \int_V \vec{E}_{-s} \text{rot}(\nu^2 \vec{e}_z) dV = \\ &= -\frac{1}{2} \int_S \left\{ \nu^2 [\vec{e}_z \times \vec{E}_{-s}]_{\perp} \right\} dS - \frac{1}{2} \int_V \nu^2 \vec{e}_z \text{rot} \vec{E}_{-s} dV. \end{aligned} \quad (49)$$

Но для двумерных задач, в соответствии с граничным условием (36),  $[\vec{e}_z \times \vec{E}_{-s}]_{\perp S} = 0$ , а внутри объема  $V$  выполняется условие квазистатичности (43)  $\text{rot} \vec{E}_{-s} = 0$ . Следовательно,  $\int_V \vec{J}_E \vec{E}_{-s} dV = 0$ . Это значит, что соленоидальный ток не вносит вклад в возбуждение звукового поля.

Таким образом, для квазистационарных резонаторов, возбуждаемых вихревым потоком, движущимся в области, где собственное поле резонатора квазистатическое, в пренебрежении нелинейностью собственных акустических колебаний можно записать

$$\frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s = -\frac{1}{N_s} \int_V \vec{j} \vec{E}_{-s} dV, \quad (50)$$

где  $\vec{j} = \Omega \vec{v}$  – плотность тока завихренности. В этом случае аналогия с электродинамикой полная.

В заключение приведем уравнения возбуждения резонаторов в гидродинамических обозначениях:

$$\vec{v} = \sum_s C_s \vec{v}_s - \text{rot}(\Phi \vec{e}_z), \quad \tilde{\rho} = \sum_s C_s \rho_s, \quad (51)$$

где собственные функции  $\vec{v}_s$  и  $\rho_s$  определяются из уравнений

$$\operatorname{div} \vec{v}_s = -i\omega_s \rho_s, \quad c^2 \operatorname{grad} \rho_s = -i\omega_s \vec{v}_s, \quad (52)$$

а потенциал квазистатического поля вихревого потока – из уравнения

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = -\Omega. \quad (53)$$

Для коэффициентов  $C_s$  справедливо следующее соотношение:

$$\frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s = -\frac{1}{N_s} \int_V [\vec{v}_{-s} \times \vec{j}] \vec{e}_z dV, \quad (54)$$

где  $N_s$  – норма, причем

$$N_s = \int_V (|\vec{v}_s|^2 + c^2 |\rho_s|^2) dV. \quad (55)$$

## 2.2. Обобщение теорий возбуждения резонаторов на трехмерный случай.

Если задача о взаимодействии гидродинамического течения и акустического поля резонатора трехмерная, то непосредственной аналогии между уравнениями электродинамики и гидродинамики нет. Это видно хотя бы из того, что плотность гидродинамического заряда  $\vec{\Omega} = -\operatorname{rot} \vec{v}$  является векторной величиной, а заряды в электродинамике скалярны. Однако и в этом случае для построения соответствующей акустической теории можно ориентироваться на структуру электродинамической теории.

Итак, пусть необходимо найти возбуждаемые гидродинамическим течением акустические поля объемного трехмерного резонатора  $\vec{v}$  и  $\tilde{\rho}$ , которые подчиняются уравнениям (7), (8) и граничным условиям (35) на поверхности резонатора  $S^2$ :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + c^2 \operatorname{grad} \tilde{\rho} = \vec{J}_v, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v} = J_\rho, \quad (\vec{v} \cdot \vec{n})_S = 0. \quad (56)$$

Здесь введены обозначения

$$\vec{J}_v = [\vec{\Omega} \times \vec{v}] - \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2, \quad J_\rho = -\operatorname{div} (\tilde{\rho} \vec{v}), \quad \vec{\Omega} = -\operatorname{rot} \vec{v}. \quad (57)$$

Величины  $J_v$ ,  $J_\rho$  и  $\vec{\Omega}$  будем рассматривать как источники акустического поля.

Построим систему собственных функций  $\vec{v}_s$ ,  $\rho_s$ , определяемых следующей краевой задачей:

$$\begin{aligned} i\omega_s \vec{v}_s + c^2 \operatorname{grad} \rho_s &= 0, \quad \operatorname{rot} \vec{v}_s = 0, \\ i\omega_s \rho_s + \operatorname{div} \vec{v}_s &= 0, \quad (\vec{v}_s \cdot \vec{n})_S = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

<sup>2</sup>В акустике имеется значительное число публикаций, посвященных возбуждению объемного резонатора потоком (см., например [35–38]). Здесь они подробно не обсуждаются, поскольку данная задача интересует нас лишь с точки зрения аналогии с электродинамикой и как шаг к теории возбуждения периодических структур.



Физический смысл этой краевой задачи состоит в том, что она описывает собственные линейные колебания резонатора в отсутствие потоков жидкости и вихрей, причем величины  $\omega_s$  являются собственными частотами этих колебаний. Нетрудно показать, что собственные функции  $\vec{v}_s(x, y, z)$  и  $\rho_s(x, y, z)$  удовлетворяют условию ортогональности и могут быть нормированы так, что

$$\int_{V_0} \vec{v}_s \vec{v}_m^* dV = c^2 \int_{V_0} \rho_s \rho_m^* dV = \frac{1}{2} \delta_{sm}, \quad (59)$$

где  $V_0$  – объем резонатора.

Будем искать решение задачи (56) в следующей форме:

$$\vec{v} = \sum_s C_s(t) \vec{v}_s + \vec{v}_{\text{кк}}, \quad (60)$$

$$\tilde{\rho} = \sum_s C_s(t) \rho_s, \quad (61)$$

где  $C_s(t)$  – некоторые, пока неопределенные коэффициенты, а  $\vec{v}_{\text{кк}}$  – квазистатическое поле. Квазистатическое поле удовлетворяет условию несжимаемости

$$\text{div } \vec{v}_{\text{кк}} = 0. \quad (62)$$

(В электродинамике – условию потенциальности  $\text{rot } \vec{E}_{\text{кк}} = 0$  или  $\vec{E}_{\text{кк}} = -\text{grad } \Phi$ .) Равенство нулю дивергенции квазистатического поля позволяет ввести векторный потенциал  $\vec{A}$ :

$$\vec{v}_{\text{кк}} = -\text{rot } \vec{A}. \quad (63)$$

Калибровку потенциала выберем так, чтобы его дивергенция равнялась нулю:  $\text{div } \vec{A} = 0$ . Возьмем ротор от обеих частей соотношения (60). Учитывая, что  $\text{rot } \vec{v}_s = 0$ , используя тождество векторного анализа  $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ , условие калибровки потенциала  $\text{div } \vec{A} = 0$ , и принимая во внимание последнее из соотношений (57), находим уравнение для определения векторного потенциала квазистатического поля:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\vec{\Omega}. \quad (64)$$

Получим теперь уравнения для коэффициентов  $C_s$ . Подставим разложения (61) и (60) в исходные уравнения (56) и используем (58):

$$\sum_s \left[ \frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s \right] \vec{v}_s + \frac{\partial \vec{v}_{\text{кк}}}{\partial t} = \vec{J}_v, \quad (65)$$

$$\sum_s \left[ \frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s \right] \rho_s = J_\rho. \quad (66)$$

Умножим уравнение (65) на  $\vec{v}_m^*$ , а уравнение (66) на  $\rho_m^*$ , проинтегрируем по объему резонатора и сложим, учитывая условие ортогональности собственных функций:

$$\frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s + \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \vec{v}_{\text{кк}} \vec{v}_s^* dV = \int_{V_0} \vec{J}_v \vec{v}_s^* dV + c^2 \int_{V_0} J_\rho \rho_s^* dV. \quad (67)$$

Покажем, что интеграл, стоящий в левой части соотношения (67), равен нулю. Имеем:

$$\int_{V_0} \vec{v}_{\text{кв}} \vec{v}_s dV = \frac{1}{i\omega_s} \int_{V_0} \vec{v}_{\text{кв}} \text{grad } \rho_s^* dV = \frac{1}{i\omega_s} \left[ \int_S (\vec{v}_{\text{кв}} \vec{n}) \rho_s^* dS - \int_{V_0} \rho_s^* \text{div } \vec{v}_{\text{кв}} dV \right]. \quad (68)$$

Здесь использована теорема Остроградского–Гаусса, тождество векторного анализа  $\text{div}(\rho \vec{v}) = \vec{v} \text{grad } \rho + \rho \text{div } \vec{v}$ , а также свойство собственных функций  $i\omega_s \vec{v}_s^* = \text{grad } \rho_s^*$ . Поверхностный интеграл в (68) равен нулю в силу граничного условия  $(\vec{v}_{\text{кв}} \cdot \vec{n})_S = 0$  на стенке резонатора, а объемный интеграл равен нулю в силу условия (62).

Преобразуем теперь интегралы, стоящие в правой части соотношения (67). Используя определение величин  $\vec{J}_v$  и  $J_\rho$  (57), соотношения (58) и теорему Остроградского–Гаусса, находим

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \vec{J}_v \vec{v}_s^* dV &= \int_{V_0} [\vec{\Omega} \times \vec{v}] \vec{v}_s^* dV - \frac{1}{2} \int_{V_0} \vec{v}_s^* \text{grad } v^2 dV = \\ &= \int_{V_0} \vec{\Omega} [\vec{v} \times \vec{v}_s^*] dV + \frac{1}{2} \int_{V_0} v^2 \text{div } \vec{v}_s^* dV, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\int_{V_0} J_\rho \rho_s^* dV = - \int_{V_0} \text{div}(\tilde{\rho} \vec{v}) \rho_s^* dV = \frac{1}{i\omega_s c^2} \int_{V_0} \text{div}(\tilde{\rho} \vec{v}) \text{div } \vec{v}_s^* dV. \quad (70)$$

Окончательно

$$\frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s = \int_{V_0} \vec{\Omega} [\vec{v} \times \vec{v}_s] dV + \int_{V_0} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\text{div}(\tilde{\rho} \vec{v})}{i\omega_s} \right) \text{div } \vec{v}_s^* dV. \quad (71)$$

Считаем, что в области движения вихрей жидкость несжимаема, а вне этой области акустические колебания линейны. Тогда в области движения потока  $\text{div } \vec{v}_s^* = 0$ , а вне ее  $v^2$  и  $\text{div}(\tilde{\rho} \vec{v})$  – члены второго порядка малости. Поэтому величина  $[v^2/2 + 1/(i\omega_s) \text{div}(\tilde{\rho} \vec{v})] \text{div } \vec{v}_s^*$  мала по всему объему резонатора, и вторым интегралом в (71) можно пренебречь:

$$\frac{dC_s}{dt} - i\omega_s C_s = \int_{V_0} \vec{\Omega} [\vec{v} \times \vec{v}_s^*] dV. \quad (72)$$

Соотношения (60)–(64), (72) дают решение задачи о возбуждении акустических колебаний в трехмерном резонаторе «гидродинамическими зарядами»  $\vec{\Omega}$ .

**2.3. Уравнения возбуждения периодических структур.** Рассмотрим теперь возбуждение гидродинамическим течением акустических волн в периодических структурах с неподатливыми стенками (рис. 2). Ось  $x$  системы координат направим вдоль оси трансляционной симметрии структуры, а ее геометрический период обозначим  $d$ . Найдем акустические поля, возбуждаемые вихревыми источниками в такой

системе. Эти поля подчиняются краевой задаче (56), причем граничные условия на стенках являются периодическими с периодом  $d$ . Задачу полагаем трехмерной.

Для развития аналогии нужно выбрать электродинамическую теорию, логике которой будем следовать. Существует несколько вариантов решения задачи о возбуждении электромагнитных полей в периодических структурах. Будем основываться на теории возбуждения [25], которая удобна в том отношении, что опирается на рассмотренную выше теорию возбуждения резонаторов.

Вслед за [25] будем использовать преобразование Гельфанда, которое ставит в соответствие функции  $U(x)$  функцию  $U_\beta(x)$  двух переменных  $\beta$  и  $x$  по следующему правилу [29, 30]:

$$U_\beta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(x + nd) e^{i\beta nd}. \quad (73)$$

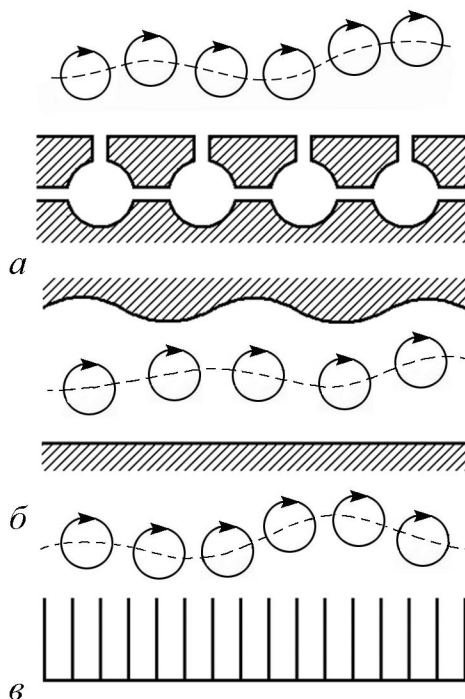


Рис. 2. Примеры акустических периодических структур, возбуждаемых потоком вихрей: *а* – цепочка связанных резонаторов Гельмгольца, *б* – волновод с гофрированной стенкой, *в* – периодическая структура «гребенка»

Гельфандовские образы  $U_\beta(x)$  удовлетворяют очевидным свойствам

$$U_\beta(x + d) = U_\beta(x) e^{-i\beta d}, \quad U_{\beta+2\pi/d}(x) = U_\beta(x), \quad (74)$$

а формула обратного преобразования имеет следующий вид:

$$U(x) = \frac{d}{2\pi} \int_0^{2\pi/d} U_\beta(x) d\beta. \quad (75)$$

Применим преобразование Гельфанда к соотношениям (56), (57)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_\beta}{\partial t} + c^2 \text{grad } \tilde{\rho}_\beta &= \vec{J}_{v\beta}, \\ \frac{\partial \tilde{\rho}_\beta}{\partial t} + \text{div } \vec{v}_\beta &= J_{\rho\beta}, \quad \text{rot } \vec{v}_\beta = \vec{\Omega}_\beta. \end{aligned} \quad (76)$$

Граничные условия остаются без изменения в силу их периодичности.

Свойства преобразования Гельфанда (74) позволяют рассматривать функции  $v_\beta(x, y, z, t)$  и  $\tilde{\rho}_\beta(x, y, z, t)$  не во всем объеме периодической структуры, а лишь внутри элементарной ячейки, ограниченной боковыми поверхностями структуры и двумя сечениями  $x = \text{const}$ , расположенными на расстоянии  $d$  друг от друга. При этом на

всей поверхности элементарной ячейки заданы некоторые граничные условия: на боковых поверхностях  $(\vec{v}_{s\beta} \cdot \vec{n}) = 0$ , а на сечениях  $x = \text{const}$  – условие

$$\vec{v}_{\beta}(x+d) = \vec{v}_{\beta}(x) e^{-i\beta d}, \quad \tilde{\rho}_{\beta}(x+d) = \tilde{\rho}_{\beta}(x) e^{-i\beta d}. \quad (77)$$

Элементарную ячейку в  $\beta$ -представлении можно интерпретировать как ансамбль объемных резонаторов, каждый из которых снабжен индексом  $\beta$ . Построим системы собственных функций таких резонаторов:

$$i\omega_s(\beta) \vec{v}_{s\beta} + c^2 \text{grad } \rho_{s\beta} = 0, \quad i\omega_s(\beta) \rho_{s\beta} + \text{div } \vec{v}_{s\beta} = 0. \quad (78)$$

Функции  $\omega = \omega_s(\beta)$ , очевидно, определяют закон дисперсии  $s$ -го типа колебаний в акустической периодической структуре. Собственные функции  $\vec{v}_{s\beta}$  и  $\rho_{s\beta}$  удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_{V_0} (\vec{v}_{s\beta} \vec{v}_{m\beta}^* + c^2 \rho_{s\beta} \rho_{m\beta}^*) dV = \delta_{sm}, \quad (79)$$

где  $V_0$  – объем элементарной ячейки.

Будем искать решение задачи (76) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\beta} &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s \vec{v}_{s\beta} - \text{rot } \vec{A}_{\beta}, \\ \tilde{\rho}_{\beta} &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s \rho_{s\beta}, \end{aligned} \quad (80)$$

подчиняя потенциал квазистатического поля  $\vec{A}_{\beta}$  уравнению

$$\nabla^2 \vec{A}_{\beta} = -\vec{\Omega}_{\beta}. \quad (81)$$

Повторяя выкладки теории возбуждения резонаторов, находим

$$\frac{\partial C_{s\beta}}{\partial t} - i\omega_s(\beta) C_{s\beta} = \int_{V_0} [\vec{\Omega}_{\beta} \times \vec{v}_{\beta}] \vec{v}_{s\beta}^* dV = \int_V [\vec{\Omega} \times \vec{v}] \vec{v}_{s\beta}^* dV. \quad (82)$$

В левой части уравнения (82) интеграл по объему элементарной ячейки  $V_0$  преобразован к интегралу по полному объему структуры  $V$  с использованием соотношений (73), (74).

Все функции в (82) имеют по параметру  $\beta$  период  $2\pi/d$ . Разложим их в ряд Фурье, что дает

$$\frac{\partial C_{sn}}{\partial t} - i \sum_m \omega_{sm} C_{s,n-m} = \int_V \vec{\Omega} [\vec{v} \times \vec{v}_{sn}^*] dV, \quad (83)$$

где

$$C_{sn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_{s\beta} e^{-i\beta nd} d(\beta d), \quad \vec{v}_{sn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{v}_{s\beta} e^{-i\beta nd} d(\beta d) = \vec{v}_{s0}(x - nd, y, z), \quad (84)$$

$$\omega_{sn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_s(\beta) e^{-i\beta nd} d(\beta d). \quad (85)$$

Выполним в соотношениях (80), (81) обратное преобразование Гельфанда. В результате получим

$$\begin{aligned} \vec{v}(x, y, z, t) &= \sum_s \sum_n C_{sn}(t) \vec{v}_{s0}(x - nd, y, z) - \text{rot} \vec{A}, \\ \tilde{\rho}(x, y, z, t) &= \sum_s \sum_n C_{sn}(t) \rho_{s0}(x - nd, y, z), \\ \nabla^2 \vec{A} &= -\vec{\Omega}. \end{aligned} \quad (86)$$

Соотношения (83), (86) дают решение задачи о нахождении акустического поля в периодической структуре по заданной плотности вихревых частиц  $\vec{\Omega}$ .

В двумерном случае  $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ ,  $\vec{A} = (0, 0, A)$ . При этом соотношения (83), (86) заменой  $v_x = E_y$ ,  $v_y = -E_x$ ,  $\Omega = \rho$ ,  $A = \Phi$  переводятся тождественным образом в аналогичные соотношения теории возбуждения периодических электродинамических структур [25].

### 3. Уравнения движения вихрей и электрических зарядов

Получим уравнения движения элементарного вихря (гидродинамического «заряда») во внешнем поле, что позволит замкнуть задачу и получить самосогласованную систему уравнений.

Согласно теореме Гельмгольца [31], вихри движутся вместе с жидкостью, следовательно, скорость движения в данной точке – это также и скорость элементарного вихря, находящегося в этой точке. Если обозначить компоненты скорости вихревой частицы через  $U$  и  $V$ , то в двумерном случае можно написать следующие уравнения движения этой частицы:

$$U = v_x, \quad V = v_y. \quad (87)$$

Заметим, что скорость в такой трактовке играет двойную роль. С одной стороны – это скорость вихревых частиц, и с этой точки зрения она является переменной уравнений движения. С другой стороны, скорость – это поле излучения совокупности вихрей в объеме периодической структуры, воздействующее на вихри. С этой точки зрения скорость является объектом теории возбуждения. Именно поэтому мы построили теорию возбуждения периодических структур, избрав в качестве возбуждаемого поля скорость, а, например, не давление, как это кажется на первый взгляд более естественным и как это часто принято в акустике [32].

Воспользовавшись Таблицей, из (87) получаем

$$U = E_y, \quad V = -E_x. \quad (88)$$

Эти соотношения известны как уравнения движения заряженных частиц в адиабатическом приближении в статических перпендикулярных друг другу полях – электрическом и магнитном [6]. (В нашей нормировке статическое магнитное поле  $B_0 = 1$ .)

#### 4. Решение некоторых задач гидродинамики в рамках «электронного» подхода

Чтобы продемонстрировать работоспособность развитой аналогии, решим с ее помощью несколько известных гидродинамических задач.

**4.1. Плоская лента вихрей.** Рассмотрим два потока жидкости, движущихся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями  $u$  (рис. 3, а). Пусть граница раздела жидкостей лежит в плоскости  $y = 0$ , тогда

$$\vec{v} = \begin{cases} \vec{v}_1 = (u, 0), & y > 0, \\ \vec{v}_2 = (-u, 0), & y < 0. \end{cases} \quad (89)$$

В соответствии с таблицей, в качестве эквивалентной электростатической задачи следует рассмотреть ситуацию, когда в пространстве создано распределение электрического поля

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_1 = (0, u), & y > 0, \\ \vec{E}_2 = (0, -u), & y < 0. \end{cases} \quad (90)$$

Такая конфигурация поля реализуется, если в плоскости  $y = 0$  располагается лист, заряженный с некоторой поверхностной плотностью  $\sigma_0$  (рис. 3, б). Этот лист создает однородное электрическое поле  $E_{1,2} = \pm\sigma_0/2$  ( $\varepsilon_0 = 1$ ), что с учетом соотношений (90) приводит к равенству  $\sigma_0 = 2U$ , или в терминах плотности электрического заряда

$$\rho_e = 2u\delta(y), \quad (91)$$

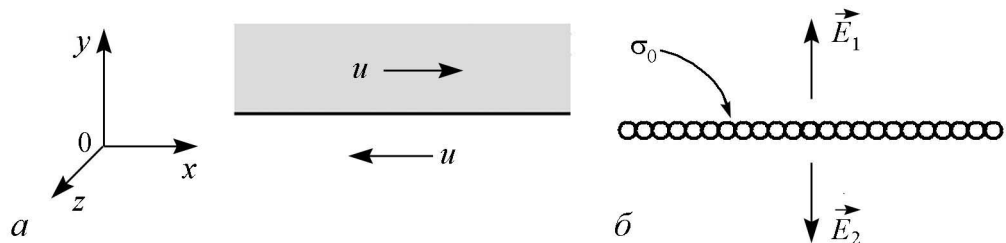


Рис. 3. Два разнонаправленных течения эквивалентны неподвижному тонкому заряженному листу

где  $\rho_e$  – плотность заряда на единицу длины оси  $z$ ,  $\delta(y)$  –  $\delta$ -функция Дирака. Плотность электрического заряда  $\rho_e$  в соответствии с Таблицей эквивалентна завихренности  $\Omega$ , так что

$$\Omega = 2u\delta(y). \quad (92)$$

Таким образом, изображенное на рис. 3, а гидродинамическое течение на «электронном» языке может быть охарактеризовано как плоская лента неподвижных вихревых зарядов. Рис. 4 иллюстрирует, как поля отдельных элементарных вихрей, расположенных в плоскости  $y = 0$ , в своей суперпозиции формируют поле ленты.

Пусть теперь вся картина течения, изображенного на рис. 3, а, целиком движется со скоростью  $V$  направо. В этом случае

$$\vec{v} = \begin{cases} \vec{v}_1 = (V + u, 0), & y > 0, \\ \vec{v}_2 = (V - u, 0), & y < 0 \end{cases} \quad (93)$$

и мы имеем задачу о движении двух потоков жидкости, скользящих друг по другу со скоростями  $v_{10} = V + u$  и  $v_{20} = V - u$  (рис. 5, а). Чему такая ситуация будет соответствовать в электродинамике? Снос картины течения со скоростью  $\vec{V} = (V, 0)$  эквивалентен наложению постоянного внешнего электрического поля  $\vec{E}_0 = (0, V)$ . Наличие поперечного магнитного поля  $\vec{B}_0$  в этом случае приведет к движению листа как единого целого со скоростью  $E_0/B_0 = V$  ( $B_0 = 1$ , рис. 5, б). Итак, гидродинамическая задача о движении двух потоков жидкости со скоростями  $v_{10}$  и  $v_{20}$  на «электронном» языке – это движение плоской ленты вихрей, несущей заряд  $\Omega = (v_{10} - v_{20}) \delta(y)$ . Скорость вихревой ленты вычисляется по вытекающей из соотношения (93) формуле

$$V = \frac{1}{2} (v_{10} + v_{20}). \quad (94)$$

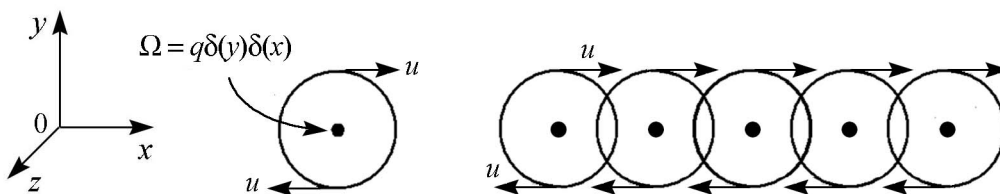


Рис. 4. Из полей отдельных вихрей формируется поле ленты

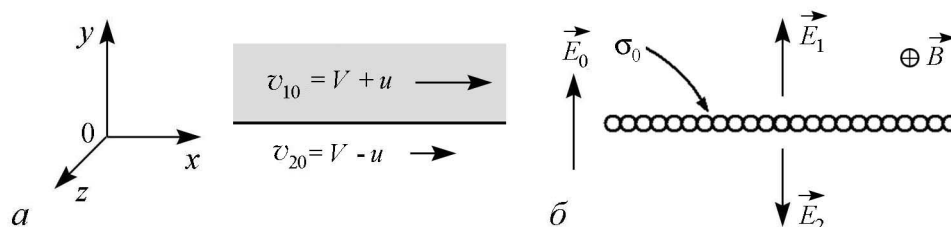


Рис. 5. Два течения, скользящих друг по другу, эквивалентны тонкому заряженному листу, движущемуся в скрещенных полях

Заметим, что правило вычисления скорости вихрей (94) эквивалентно известному в электронике правилу вычисления поля, действующего на ленточный пучок [6]:

$$\vec{E} = \frac{1}{2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2). \quad (95)$$

Здесь  $\vec{E}_1$  – электрическое поле над лентой,  $\vec{E}_2$  – электрическое поле под лентой.

**4.2. Неустойчивость Гельмгольца.** Рассмотрим собственные колебания в системе двух гидродинамических потоков, скользящих друг по другу со скоростями  $v_{10}$  и  $v_{20}$ . Эта задача эквивалентна исследованию собственных колебаний ленточного потока вихрей, движущегося со скоростью  $v_0 = 1/2(v_{10} + v_{20})$  и несущего заряд с невозмущенной поверхностной плотностью  $\sigma_0 = v_{10} - v_{20}$ . Пусть лента слегка изогнулась. Как это принято в электронике, будем характеризовать ее состояние высокочастотными смещениями,  $\tilde{x}(x, t)$  и  $\tilde{y}(y, t)$ . Запишем уравнения движения ленточного электронного пучка в скрещенных полях в адиабатическом приближении

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} &= E_y, \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} &= -E_x. \end{aligned} \quad (96)$$

Согласно развитой аналогии  $\vec{E} = (-v_y, v_x)$ , так что можно получить уравнения движения элементов ленты вихрей

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} &= v_x, \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} &= v_y. \end{aligned} \quad (97)$$

Здесь величины  $v_x$  и  $v_y$  имеют смысл составляющих высокочастотного поля скорости, действующего на вихри. Перепишем соотношение (97) в представлении Фурье по времени и координате  $x$

$$\begin{aligned} i(\omega - kv_0) \tilde{x}_{\omega k} &= v_{x\omega k}, \\ i(\omega - kv_0) \tilde{y}_{\omega k} &= v_{y\omega k}. \end{aligned} \quad (98)$$

Индексы  $\omega$  и  $k$  далее опускаем.

Вычислим поле  $\vec{v} = (v_x, v_y)$ , действующее на вихри. В анализируемой системе поле скоростей является чисто квазистатическим полем «пространственного заряда»

$$\vec{v} = -\text{rot} (\Phi \vec{e}_z), \quad (99)$$

или в электродинамических обозначениях

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi. \quad (100)$$

Для потенциала квазистатического поля  $\Phi$  справедливо уравнение Пуассона (53), которое в представлении Фурье выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} - k^2 \Phi = \tilde{\Omega}, \quad (101)$$



где  $\tilde{\Omega}$  – возмущение плотности вихревого заряда. Для заряженной ленты  $\Omega = \sigma\delta(y - \tilde{y})$ , следовательно, в линейном приближении

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\sigma}\delta(y) - \sigma_0\tilde{y}\delta'(y), \quad (102)$$

где  $\sigma_0$  – невозмущенная поверхностная плотность вихрей на ленте,  $\tilde{\sigma}$  – ее высокочастотное возмущение,  $\delta'(y)$  – производная от  $\delta$ -функции. Используем закон сохранения «заряда» вихрей на ленте  $\tilde{\sigma} = -\sigma_0(\partial\tilde{x})/(\partial x)$ , что в представлении Фурье дает  $\tilde{\sigma} = ik\sigma_0\tilde{x}$ . Окончательно

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} - k^2\Phi = -ik\sigma_0\tilde{x}\delta(y) + \sigma_0\tilde{y}\delta'(y). \quad (103)$$

Для решения уравнения (103) заметим, что  $\delta$ -источник в правой части этого уравнения приводит к скачку производной потенциала на ленте, а  $\delta'$ -источник – к скачку самого потенциала. Используя это обстоятельство, легко найти, что

$$\Phi(y) = \begin{cases} \Phi_1(y) = Ae^{-ky}, & y > 0, \\ \Phi_2(y) = Be^{ky}, & y < 0, \end{cases} \quad (104)$$

где

$$A = \frac{\sigma_0}{2}(i\tilde{x} + \tilde{y}), \quad B = \frac{\sigma_0}{2}(i\tilde{x} - \tilde{y}). \quad (105)$$

Потенциал квазистатического поля ленты найден. Соотношение (100) и Таблица позволяют найти и само квазистатическое поле

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = ik\Phi, & v_x &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ E_y &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, & v_y &= -ik\Phi. \end{aligned} \quad (106)$$

В качестве поля, действующего на вихри, в соответствии с (94) и (95) возьмем величину

$$\vec{E} = \left[ \frac{\vec{E}_1 + \vec{E}_2}{2} \right]_{y=0}, \quad \vec{v} = \left[ \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} \right]_{y=0}. \quad (107)$$

где индексы 1 и 2 относятся к полям под и над лентой. Подставим в (107) соотношения (106)

$$\begin{aligned} E_x &= ik \left[ \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} \right]_{y=0}, & v_x &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial y} \right]_{y=0}, \\ E_y &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial y} \right]_{y=0}, & v_y &= -ik \left[ \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} \right]_{y=0}. \end{aligned} \quad (108)$$

Используя (104), (105) и (108), получаем выражение для поля, действующего на вихри, через высокочастотные смещения участков ленты

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\sigma_0 k \tilde{x}}{2}, & v_x &= \frac{\sigma_0 k \tilde{y}}{2}, \\ E_y &= \frac{\sigma_0 k \tilde{y}}{2}, & v_y &= \frac{\sigma_0 k \tilde{x}}{2}. \end{aligned} \quad (109)$$

Подставим полученные выражения в уравнения движения вихрей (98). Тогда

$$i(\omega - kv_0)\tilde{x} = \frac{1}{2}\sigma_0 k\tilde{y}, \quad i(\omega - kv_0)\tilde{y} = \frac{1}{2}\sigma_0 k\tilde{x}. \quad (110)$$

Из соотношений (110) вытекает дисперсионное уравнение

$$(\omega - kv_0)^2 + \left(\frac{\sigma_0 k}{2}\right)^2 = 0. \quad (111)$$

Вспоминая, что  $v_0 = 1/2(v_{10} + v_{20})$  и  $\sigma_0 = v_{10} - v_{20}$ , преобразуем это уравнение к виду

$$(\omega - kv_{10})^2 + (\omega - kv_{20})^2 = 0. \quad (112)$$

Мы получили хорошо известное уравнение, описывающее неустойчивость Гельмгольца [33].

**4.3. Взаимодействие гидродинамического течения с периодической структурой типа гребенки.** Рассмотрим теперь разрывное гидродинамическое течение над периодической структурой типа гребенки (рис. 6). В области вне гребенки справедливы все полученные выше соотношения (96)–(104), лишь в выражении для потенциала  $\Phi$  появляется дополнительное слагаемое

$$\Phi(y) = \begin{cases} \Phi_1(y) = Ae^{-ky}, & y > 0, \\ \Phi_2(y) = Be^{ky} + Ce^{-ky}, & y < 0. \end{cases} \quad (113)$$

Согласно (103), производная потенциала на ленте испытывает скачок на величину  $(-ik\sigma_0\tilde{x})$ , а потенциал – на  $\sigma_0\tilde{y}$ . Совместно с (113) это условие приводит к двум уравнениям, связывающим коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$

$$A + B - C = i\sigma_0\tilde{x}, \quad A - B - C = \sigma_0\tilde{y}. \quad (114)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$B = \sigma_0(i\tilde{x} - \tilde{y})/2. \quad (115)$$

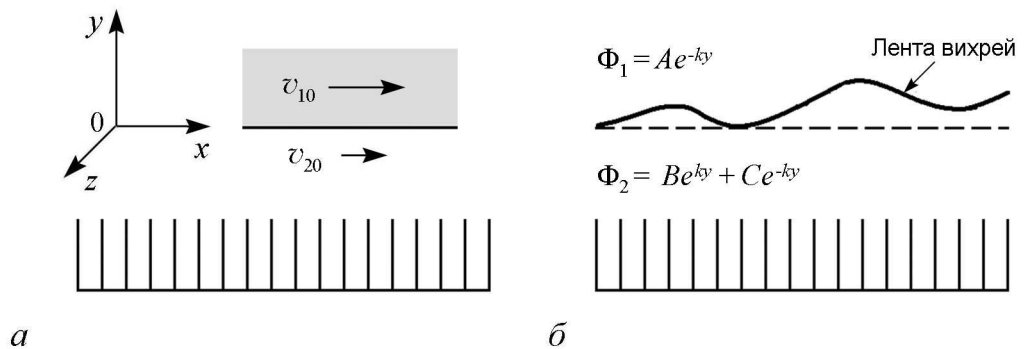


Рис. 6. Взаимодействие гидродинамического течения с периодической структурой типа «гребенка»:  $a$  – исходное невозмущенное течение;  $b$  – «группировка» вихревой ленты в поле гребенки

С помощью соотношений (108) и (113) можно найти поля, действующие на вихри

$$\begin{aligned} E_x &= ik(A + B + C)/2, \quad v_x = k(A - B + C)/2, \\ E_y &= k(A - B + C)/2, \quad v_y = -ik(A + B + C)/2. \end{aligned} \quad (116)$$

Используя (114) и уравнения движения (98), получаем

$$\begin{aligned} i(\omega - kv_0)\tilde{x} &= \sigma_0 k\tilde{y}/2 + kC, \\ i(\omega - kv_0)\tilde{y} &= \sigma_0 k\tilde{x}/2 - ikC. \end{aligned} \quad (117)$$

Таким образом, поля, действующие на вихри, складываются из полей пространственного заряда (109) и составляющей поля, обусловленной присутствием гребенки.

Соотношения (106) и (113) позволяют найти поля непосредственно на поверхности гребенки

$$\begin{aligned} E_x(-L) &= ik(Ce^{kL} + Be^{-kL}), \quad v_x(-L) = k(Ce^{kL} - Be^{-kL}), \\ E_y(-L) &= k(Ce^{kL} - Be^{-kL}), \quad v_y(-L) = -ik(Ce^{kL} + Be^{-kL}). \end{aligned} \quad (118)$$

Введем поверхностный импеданс гребенки. В электродинамике обычно полагают  $Z_3 = E_x/B_z$ , а в акустике  $Z_a = P/v_y = c^2\rho_0\tilde{\rho}/v_y$ . Запишем гидродинамические «уравнения Максвелла» в представлении Фурье по времени

$$i\omega\vec{E} - c^2 \text{rot } \vec{B} = 0, \quad i\omega\vec{B} + \text{rot } \vec{E} = 0. \quad (119)$$

Для двумерных задач  $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ , так что из первого уравнения (119) следует, что  $B_z = \omega E_y / kc^2$ . Используя соотношения (118) и Таблицу, находим

$$Z_3 = \frac{C + Be^{-2kL}}{C - Be^{-2kL}} \frac{ikc^2}{\omega}, \quad Z_a = \frac{C - Be^{-2kL}}{C + Be^{-2kL}} \frac{i\omega\rho_0}{k}. \quad (120)$$

Конфигурация гребенки такова, что электрическое поле внутри гребенки может иметь только поперечную компоненту, а скорость – только продольную  $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$  и  $\vec{v} = (0, v_y, 0)$  (рис. 7). Уравнения (119) совместно с очевидными граничными условиями на дне гребенки

$$E_x(-L-h) = 0, \quad v_y(-L-h) = 0 \quad (121)$$

приводят к следующим выражениям для полей внутри гребенки:

$$\begin{aligned} E_x &= D \sin \left[ \frac{\omega}{c} (y + L + h) \right], \quad v_y = -D \sin \left[ \frac{\omega}{c} (y + L + h) \right], \\ B_z &= \frac{1}{ic} D \cos \left[ \frac{\omega}{c} (y + L + h) \right], \quad \rho = \frac{1}{ic} D \cos \left[ \frac{\omega}{c} (y + L + h) \right]. \end{aligned} \quad (122)$$

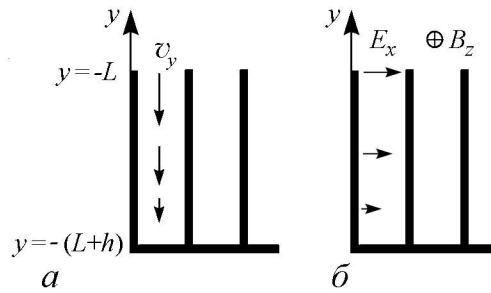


Рис. 7. Конфигурация полей внутри гребенки: а – акустическое поле скоростей, б – электрическое поле

Вычисляя эти поля в сечении  $y = -L$ , получаем выражения для импедансов

$$Z_3 = ic \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c}, \quad Z_a = ic\rho_0 \operatorname{ctg} \frac{\omega h}{c}. \quad (123)$$

Записав соотношения (115), (117), (120), (123) совместно, приходим к следующему равенству

$$\left(k - \frac{\omega}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c}\right) \left[(\omega - kv_0)^2 + \left(\frac{\sigma_0 k}{2}\right)^2\right] + \left(k + \frac{\omega}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c}\right) (\omega - kv_0) k \sigma_0 e^{-2kL} = 0. \quad (124)$$

Поскольку  $v_0 = (1/2)(v_{10} + v_{20})$  и  $\sigma_0 = (v_{10} - v_{20})$ , из (124) получаем

$$\begin{aligned} &\left(\omega - ck \operatorname{ctg} \frac{\omega h}{c}\right) \left[(\omega - kv_{10})^2 + (\omega - kv_{20})^2\right] = \\ &= -e^{-2kL} \left(\omega + ck \operatorname{ctg} \frac{\omega h}{c}\right) \left[(\omega - kv_{10})^2 - (\omega - kv_{20})^2\right]. \end{aligned} \quad (125)$$

Это дисперсионное уравнение и описывает систему, изображенную на рис. 6. В работах [2, 3] оно для случая  $v_{20} = 0$  (слой жидкости между верхним потоком и гребенкой покоится) было найдено в рамках обычного гидродинамического подхода. Нами это уравнение получено на основе «электронных» представлений об уравнении движения вихревых зарядов, о полях, воздействующих на вихри, о разбиении поля на поле «пространственного заряда» и поле, созданное периодической системой. Эти представления позволяют осуществить обобщение теории взаимодействия гидродинамических течений с периодическими структурами на случай структур с произвольной геометрией.

## 5. Взаимодействие гидродинамических течений с полями произвольных периодических структур

Для описания взаимодействия гидродинамического течения с произвольной периодической структурой необходимо построить самосогласованную систему уравнений, состоящую из уравнений возбуждения акустических полей и уравнения движения источников поля. Воспользуемся уравнениями возбуждения периодических структур (83) и (86). Полагаем, что поток эффективно взаимодействует с одним типом поверхностной волны, так что в суммах в (86) можно оставить члены с одним индексом  $s$ , отвечающим этому типу волны

$$\vec{v}(x, y, t) = \sum_n C_{sn}(t) \vec{v}_s(x - nd, y) + \vec{v}_{кс}, \quad (126)$$

$$\frac{\partial_{sn}}{\partial t} - i \sum_m \omega_{sm} C_{s,n} - m(t) = \iint \left[ \vec{j}(x, y) \times \vec{v}_s^*(x - nd, y) \right] \vec{e}_z dy dx. \quad (127)$$

В формуле (127) интегрирование по  $z$  уже выполнено с учетом того, что задача двумерная.

Перейдем в соотношениях (126), (127) к представлению Фурье по времени и координате  $x$  (индексы  $\omega$  и  $k$  опускаем)

$$\vec{v} = \vec{v}_s \sum_n C_{sn} e^{iknd} + \vec{v}_{\text{кс}}, \quad (128)$$

$$i(\omega C_n - \sum_m \omega_{sm} C_{s,n} - m) = \frac{1}{2\pi} \iint [\vec{j}(k') \times \vec{v}_s^*(k')] \vec{e}_z e^{-ik'nd} dk' dy. \quad (129)$$

Умножим уравнение (129) на  $e^{iknd}$  и проведем суммирование по  $n$ . Меняя во втором члене порядок суммирования и учитывая, что в соответствии с (85)  $\omega_s(k) = \sum_n \omega_{sn} e^{iknd}$ , получаем

$$i[\omega - \omega_s(k)] \sum_{p=n} -m C_{sp} e^{ipd} = \frac{1}{2\pi} \iint [\vec{j} \times \vec{v}_s^*] \vec{e}_z e^{i(k-k')nd} dk' dy. \quad (130)$$

Применив формулу  $\sum_n e^{i(k-k')nd} = 2\pi \sum_m \delta(k - k' + 2\pi m/d)$  и вводя обозначение  $C_s = \sum_n C_{sn} e^{iknd}$ , проинтегрируем правую часть соотношения (130)

$$\vec{v} = C_s \vec{v}_s + \vec{v}_{\text{кс}}, \quad (131)$$

$$i[\omega - \omega_s(k)] C_s = \sum_m I(k + 2\pi m/d), \quad (132)$$

где

$$I(k) = \int [\vec{j} \times \vec{v}_s^*] \vec{e}_z dy. \quad (133)$$

Уравнение (132) будем использовать в дальнейшем как уравнение возбуждения в рамках самосогласованной задачи. Как и в электронике приборов с длительным взаимодействием со скрещенными полями (к ним относятся лампы бегущей и обратной волны типа М), в это уравнение в качестве величины, характеризующей источник возбуждения, входит величина  $I(k)$ , выражающаяся через плотность тока завихренности  $\vec{j}$  и собственную функцию системы  $\vec{v}_s$ . Величину  $I(k)$  по аналогии с электроникой будем называть возбуждающим током. В качестве отклика системы на воздействие вихрей будем рассматривать величину амплитуды  $C_s$ . Если амплитуда  $C_s$  известна, то соотношение (131) позволяет полностью восстановить картину акустического поля в системе.

Запишем теперь уравнения движения вихревой ленты (98), используя выражение для высокочастотного поля скоростей (131):

$$\begin{aligned} i(\omega - kv_0) \tilde{x} &= C_s v_{sx} + v_x, \\ i(\omega - kv_0) \tilde{y} &= C_s v_{sy} + v_y. \end{aligned} \quad (134)$$

Считаем, что квазистатическое поле  $\vec{v}_{\text{кс}}$ , описывающее собственные поля течения, дается соотношениями (109). Такое приближение заведомо справедливо в случае, когда периодическая структура достаточно удалена от гидродинамического течения. (Как говорят в электронике, используем приближение «бесконечно удаленных

электродов»). Тогда

$$\begin{aligned} i(\omega - kv_0)\tilde{x} &= C_s v_{sx} + \sigma_0 k \tilde{y}/2, \\ i(\omega - kv_0)\tilde{y} &= C_s v_{sy} + \sigma_0 k \tilde{x}/2. \end{aligned} \quad (135)$$

Эти соотношения позволяют выразить смещения участков вихревой ленты через амплитуду  $C_s$ , с которой возбужден рассматриваемый тип колебаний периодической структуры

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= -\frac{i(\omega - kv_0)v_{sx} + \sigma_0 k v_{sy}/2}{(\omega - kv_0)^2 + (\sigma_0 k/2)^2} C_s, \\ \tilde{y} &= -\frac{i(\omega - kv_0)v_{sy} + \sigma_0 k v_{sx}/2}{(\omega - kv_0)^2 + (\sigma_0 k/2)^2} C_s. \end{aligned} \quad (136)$$

Выразим возбуждающий ток  $I$  через высокочастотные смещения участков вихревой ленты. Из определения тока завихренности вытекает соотношение

$$\vec{j} = \left( \Omega_0 \tilde{v}_x + \tilde{\Omega} v_0 \right) \vec{e}_x + \vec{v}_y \Omega_0 \vec{e}_y. \quad (137)$$

Здесь  $\Omega_0 = \sigma_0 \delta(y)$  – невозмущенная плотность вихрей,  $\tilde{\Omega}$  – ее возмущение,  $v_0$  – скорость вихрей.

Используя (137), распишем выражение для возбуждающего тока (133) по компонентам

$$I = v_0 \int \tilde{\Omega} v_{sy}^* dy + \tilde{v}_x \int \Omega_0 v_{sy}^* dy - \tilde{v}_y \int \Omega_0 v_{sx}^* dy. \quad (138)$$

В электронике приборов со скрещенными полями с длительным взаимодействием второе и третье слагаемые в соотношениях, аналогичных (138), отбрасывают. Это связано с тем, что взаимодействие электронного потока с электромагнитной волной в периодической структуре предполагается синхронным. Величины высокочастотных скоростей  $v_x = E_y/B$  и  $v_y = -E_x/B$  не содержат резонансных знаменателей, а величина  $\tilde{\rho} \sim \tilde{x}, \tilde{y} \sim E_{x,y}/(\omega - kv_0)$ , аналогичная  $\tilde{\Omega}$ , содержит такой знаменатель. Поэтому в электронике лишь сгруппированный по плотности ток эффективно возбуждает поля. В гидродинамике приходится иметь дело также и с ситуациями, когда синхронизма в области действительных частот и волновых чисел нет (см. ниже, п. 6). В этом случае указанное предположение несправедливо, и необходимо учитывать все три слагаемых в (138).

Вычислим первый интеграл в соотношении (138). Используя выражение (102) для переменной составляющей плотности вихрей  $\tilde{\Omega} = ik\sigma_0 \tilde{x} \delta(y) - \sigma_0 \tilde{y} \delta'(y)$  и правила интегрирования  $\delta$ -функции и ее производной, получаем

$$I_1 = v_0 \int \tilde{\Omega} v_{sy}^* dy = \sigma_0 v_0 \left[ ik \tilde{x} v_{sy}^* + \tilde{y} \frac{\partial v_{sy}^*}{\partial y} \right]_{y=0}. \quad (139)$$

Здесь собственная функция и ее производная вычислены в точке  $y = 0$ , отвечающей положению невозмущенной границы раздела потоков.

Как и раньше, считаем, что жидкость в области движения вихрей несжимаема. Следовательно, в этой области  $\text{div } \vec{v}_s = 0$  и  $\partial v_{sx}/\partial x + \partial v_{sy}/\partial y = 0$ , что в представлении Фурье дает  $ikv_{sx} = \partial v_{sy}/\partial y$ . Тогда

$$I_1 = ik\sigma_0 v_0 (\tilde{x}v_{sy}^* - \tilde{y}v_{sx}^*). \quad (140)$$

Вычислим второй и третий интегралы в (138). Для компонент возмущения скорости справедливы соотношения (98), подставляя которые в (138) и учитывая, что  $\Omega_0 = \sigma_0 \delta(y)$ , получаем

$$I_2 + I_3 = \int (\tilde{y}_y v_{sx}^* - \tilde{x}_y v_{sy}^*) \Omega_0 dy = i\sigma_0 (\omega - kv_0) [\tilde{x}v_{sy}^* - \tilde{y}v_{sx}^*]_{y=0}. \quad (141)$$

Складывая (141) и (140), получаем выражение для возбуждающего тока через высокочастотные смещения участков вихревой ленты

$$I = i\sigma_0 \omega (\tilde{x}v_{sy}^* - \tilde{y}v_{sx}^*). \quad (142)$$

Если воспользоваться соотношениями (136), то можно выразить возбуждающий ток через амплитуду  $C_s$

$$I = \sigma_0 \omega \frac{(\omega_0 - kv_0) (v_{sx} v_{sy}^* - v_{sy} v_{sx}^*) + i\sigma_0 k (|v_{sy}|^2 - |v_{sx}|^2) / 2}{(\omega - kv_0)^2 + (\sigma_0 k / 2)^2} C_s. \quad (143)$$

Если жидкость в области движения вихрей несжимаема, то для собственных функций справедливы соотношения

$$\begin{aligned} v_{sy}(k) &= v_{s0}(k) e^{-kL}, \\ v_{sx}(k) &= i v_{s0}(k) e^{-kL}. \end{aligned} \quad (144)$$

Здесь  $v_{s0}(k)$  – некоторая функция  $k$ ,  $L$  – расстояние от поверхности структуры до границы раздела невозмущенных потоков жидкости. Тогда

$$\begin{aligned} v_{sx} v_{sy}^* - v_{sy} v_{sx}^* &= 2i |v_{s0}|^2 e^{-2\text{Re } kL}, \\ |v_{sy}|^2 - |v_{sx}|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (145)$$

Подставим соотношения (145) в (143)

$$\left[ (\omega - kv_0)^2 + (\sigma_0 k / 2)^2 \right] I = 2i\sigma_0 \omega |v_{s0}(k)|^2 e^{-2\text{Re } kL} (\omega - kv_0) C_s. \quad (146)$$

Это уравнение для тока  $I$  в представлении Фурье. Теперь задача замкнулась: имеется уравнение возбуждения амплитуды рабочего типа волны  $C_s$  током  $I$  (132) и уравнение динамики тока  $I$  под воздействием возбужденной с амплитудой  $C_s$  волны в периодической структуре (146). Из этих двух соотношений находим дисперсионное уравнение задачи

$$\omega - \omega_s(k) = 2\sigma_0 \omega \sum_m \frac{\left( \omega - kv_0 - \frac{2\pi m v_0}{d} \right) \left| v_{s0} \left( k + \frac{2\pi m v_0}{d} \right) \right|^2 e^{-2\text{Re } kL}}{\left( \omega - kv_0 - \frac{2\pi m v_0}{d} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \sigma_0 k + \frac{2\sigma_0 m \pi}{d} \right)^2} e^{-\frac{4m\pi L}{d}}. \quad (147)$$

Если период структуры  $d$  меньше или порядка расстояния от структуры до потока  $L$ , то все члены с номерами  $m \neq 0$  в соотношении (147) экспоненциально малы, и ими можно пренебречь:

$$[\omega - \omega_s(k)] \left[ (\omega - kv_0)^2 + (\sigma_0 k/2)^2 \right] = 2e^{-2\text{Re } kL} \sigma_0 \omega (\omega - kv_0) |v_{s0}(k)|^2. \quad (148)$$

Если же  $d > L$ , то сумму в (147) следует сохранить. Используя, что  $v_0 = (v_{10} + v_{20})/2$  и  $\sigma_0 = v_{10} - v_{20}$ , получаем

$$[\omega - \omega_s(k)] \left[ (\omega - kv_{10})^2 + (\omega - kv_{20})^2 \right] = -\omega R_s(k) \left[ (\omega - kv_{10})^2 - (\omega - kv_{20})^2 \right], \quad (149)$$

где  $R_s(k) = (2/k) |v_{s0}(k)| e^{-2\text{Re } kL}$ . Уравнение (149) описывает взаимодействие разрывного гидродинамического течения с определенным типом поверхностной волны в периодической структуре с произвольной геометрией. Функция  $\omega_s(k)$  определяет дисперсию этой волны, а величина  $R_s(k)$  – эффективность ее возбуждения.  $R_s(k)$  играет в задачах гидродинамики такую же роль, как и сопротивление связи [6] в электронике.

## 6. Для каких гидродинамических устройств применимы результаты теории приборов с длительным взаимодействием М типа?

Из уравнения (148) в пределе  $L \rightarrow \infty$  получается дисперсионное уравнение, описывающее колебания свободного потока

$$(\omega - kv_0)^2 + (\sigma_0 k/2)^2 = 0, \quad (150)$$

и закон дисперсии свободной поверхностной волны

$$\omega - \omega_s(k) = 0. \quad (151)$$

Нетрудно видеть, что собственные колебания потока неустойчивы. При этом возможны две качественно различные ситуации.

Пусть сначала скорости верхнего и нижнего потоков жидкости, взаимодействующих с периодической структурой, примерно равны друг другу:  $v_{10} \approx v_{20}$  (рис. 8, а). Тогда величина  $\sigma_0 = v_{10} - v_{20}$ , ответственная за собственную неустойчивость тангенциального разрыва, мала, и в системе возможно синхронное взаимодействие потока с волной в структуре. При этом связь потока и поверхностной волны существенна только в области частот и волновых чисел вблизи точки  $(k_0, \omega_0)$  пересечения дисперсионных характеристик  $\omega = kv_0$  и  $\omega = \omega_s(k)$ :

$$\omega_0 = k_0 v_0, \quad \omega_0 = \omega_s(k_0). \quad (152)$$

В малой окрестности этой точки функцию  $\omega_s(k)$  можно разложить в ряд Тейлора. Если взаимодействие происходит вдали от границы полосы пропускания периодической структуры, то групповая скорость в точке пересечения характеристик  $v_{\text{кс}} = d\omega_s/dk|_{k=k_0}$  отлична от нуля. Тогда

$$\omega_s(k) = \omega_0 + v_{\text{кс}}(k - k_0). \quad (153)$$



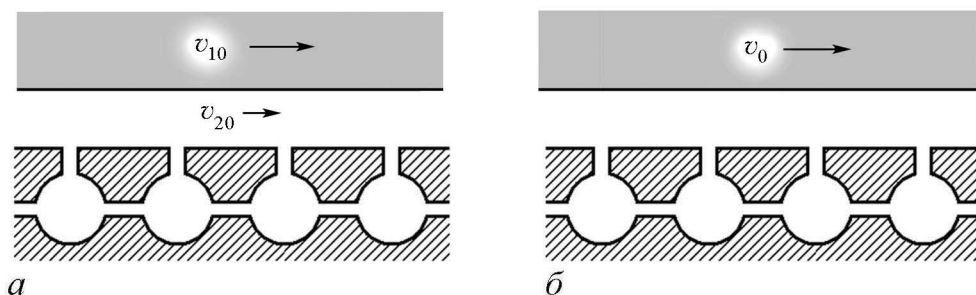


Рис. 8. Два разных случая взаимодействия течения с акустической периодической структурой:  $a - v_{10} \approx v_{20}$ , система со слабой собственной неустойчивостью, для нее справедлива теория ламп бегущей и обратной волны типа М;  $b - v_{20} = 0$ , система с сильной собственной неустойчивостью, в электронике она отвечает работе приборов в режиме больших токов

В этой же окрестности все коэффициенты дисперсионного уравнения (148) кроме разностей типа  $(\omega - kv_0)$  можно вычислить в точке синхронизма  $(k_0, \omega_0)$ . Используя (153), получаем

$$[\omega - \omega_0 - v_{\text{к}}(k - k_0)] [(\omega - kv_0)^2 + \omega_p^2] = \mp \varepsilon^2 (\omega - kv_0). \quad (154)$$

Здесь  $\omega_p^2 = \sigma_0^2 k_0^2 / 4$ ;  $\varepsilon^2 = |\sigma_0| k_0^2 v_0 R_s(k_0)$ ; верхний знак берется, если  $\sigma_0 < 0$ , нижний – если  $\sigma_0 > 0$ . Рассмотрим далее случай, когда групповая скорость  $v_{\text{к}}$  в точке пересечения характеристик положительна. Введем следующие обозначения:

$$\beta = k, \quad \beta_e = \frac{\omega}{v_0}, \quad \beta_p = \frac{\omega_p}{v_0}, \quad \beta_0 = \frac{\omega - \omega_0 + k_0 v_{\text{к}}}{v_{\text{к}}}, \quad D^2 = \frac{\varepsilon^2 v_0}{\omega^2 v_{\text{к}}} \quad (155)$$

и представим соотношение (154) в виде

$$(\beta - \beta_0) [(\beta_e - \beta)^2 + \beta_p^2] = \mp D^2 \beta_e^2 (\beta_e - \beta). \quad (156)$$

Уравнение (156) совпадает с дисперсионным уравнением лампы бегущей волны типа М [6], причем  $D$  играет роль параметра усиления. Заметим, что, если скорость верхнего потока меньше скорости нижнего, то  $\sigma_0 < 0$ , и в соотношении (156) стоит минус. В этом случае связь потока и поля приводит к неустойчивости, даже если отбросить собственную неустойчивость потока. Если же скорость верхнего потока больше скорости нижнего, то в (156) стоит плюс, и в пренебрежении собственной неустойчивостью связь волн является пассивной. В электронике первая ситуация отвечает такой конструкции лампы, когда замедляющая система расположена на положительном электроде (аноде), а вторая – на отрицательном электроде («холодном» катоде).

Если групповая скорость в точке пересечения дисперсионных характеристик отрицательна, то уравнение (148) приводится к уравнению лампы обратной волны типа М [6].

Таким образом, полными аналогами приборов с длительным взаимодействием типа М являются гидродинамические устройства с резонансным слоем жидкости, который находится в условиях синхронного взаимодействия с поверхностной волной в периодической структуре. Для таких устройств можно использовать известные результаты теории ламп бегущей и обратной волны типа М.

Иная ситуация возникает, если скорости верхнего и нижнего потоков существенно отличаются. Сюда же относится случай, когда слой жидкости между верхним потоком и структурой покоится (рис. 8, б). При этом собственная неустойчивость потока сильная, и синхронного взаимодействия в области действительных частот и волновых чисел нет. (На это обстоятельство было указано в работах [2, 3]; мы вернемся к анализу некоторых результатов этих работ во второй части статьи.) Тем не менее аналогия с электронными устройствами сохраняется. При этом, однако, должны рассматриваться режимы, когда ток пучка велик и, соответственно, велик его пространственный заряд. Действительно, для электроники обращение в нуль скорости нижнего потока жидкости эквивалентно требованию, чтобы поверхностная плотность заряда ленточного пучка достигала величины, достаточной для компенсации статического электрического поля у отрицательного электрода:  $\sigma_0/2\varepsilon_0 = E_0$ . Такие режимы в теории лучевых приборов типа М ранее не анализировались.

### Заключение

Уравнения динамики невязкой сжимаемой жидкости в двумерном случае оказывается возможным представить в форме, эквивалентной уравнениям Максвелла с магнитными токами. Отличие от электродинамики проявляется в появлении дополнительного соленоидального электрического тока, что, однако, не нарушает структуры уравнений.

Уравнения возбуждения объемных резонаторов и периодических структур гидродинамическими течениями и электронными потоками находятся в точном соответствии друг другу в двумерном случае, когда собственные акустические колебания в структуре можно полагать линейными, а жидкость в области движения вихрей – несжимаемой.

Уравнения движения вихревых частиц, совокупность которых отвечает гидродинамическому течению, в двумерном случае эквивалентны уравнениям движения электрических зарядов в статических скрещенных полях, электрическом и магнитном.

Развитая аналогия позволяет построить самосогласованную теорию взаимодействия гидродинамических течений с полями периодических структур. Теория лучевых электронных приборов СВЧ со скрещенными полями может быть применена непосредственно к анализу гидродинамических устройств со слабой собственной неустойчивостью потока. Для устройств с сильной собственной неустойчивостью гидродинамического течения аналогия сохраняется, однако соответствующие электронные приборы должны работать в режиме больших токов.

Для трехмерных задач прямой и полной аналогии между электродинамикой и гидродинамикой нет, но теорию возбуждения акустических периодических структур можно строить, следуя логике и содержанию электродинамической теории.

*Работа поддержана грантами ведущих научных школ России НШ-828.2014.2 и НШ-1726.2014.2 (разделы 1,3-6). Часть работы, выполненная С.П.К. (раздел 2), поддержана грантом РНФ 15-12-20035.*

## Библиографический список

1. Элашии Ш. Волны в активных и пассивных периодических структурах // ТИИЭР. 1976. Т. 64, № 12. С. 18.
2. Андронов А.А., Фабрикант А.Л. Затухание Ландау, ветровые волны и свисток // В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука. 1979, С. 68–104.
3. Андронов А.А., Фабрикант А.Л. К теории аэродинамического самовозбуждения звука: усиление поверхностных волн // Акустический журнал. 1980. Т. 26, № 5. С. 655–662.
4. Пирс Дж. Лампа с бегущей волной. М.: Сов. Радио, 1952. 230 с.
5. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. Радио, 1973. 400 с.
6. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970. 584 с.
7. Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФ, 1979. 298 с.
8. Электроника ламп с обратной волной / Под ред. В.Н. Шевчика и Д.И. Трубецкова. Саратов: Изд-во СГУ, 1975. 194 с.
9. Стретт Дж.В. (лорд Рэлей). Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с.
10. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. М.: Мир, 1966. С. 246–249.
11. Бреховских Л.М. Поверхностные волны в акустике // Акустический журнал. 1959. Т. 5, № 1. С. 4–13,
12. Лепендин Л.Ф. Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
13. Лейман В.Г. Адиабатическая теория неустойчивости электронного потока в скрещенных полях // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1968, № 8. С. 26–34.
14. Лейман В.Г. Об устойчивости системы параллельных электронных потоков, фокусируемых магнитным полем // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1967. № 8. С. 15–26.
15. Хокни Р. Методы расчета потенциала и их приложения // В кн.: Вычислительные методы в физике плазмы. М.: Мир, 1974. С. 143–212.
16. Кузнецов С.П. Турбулентное движение электронного потока в скрещенных полях // ЖТФ. 1977. Т. 47, № 12. С. 2483–2487.
17. Lighthill M.J. On sound generated aerodynamically. I. General theory // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society. 1952. Vol. 211, № 1107. P. 564–587.
18. Lighthill M.J. On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society. 1954. Vol. 222, № 1148. P. 1–32.
19. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.

20. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. О характере неустойчивости в ЛБВ вблизи границы полосы пропускания // Известия вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 9. С. 1104–1112.
21. Кузнецов А.П. Смена характера неустойчивости в системе двух слабо связанных волн // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8, № 15. С. 941–944.
22. Hung D.M.H. et al. Absolute instability near the band edge of traveling-wave amplifiers // Physical Review Letters. 2015. Vol. 115. № 12. P. 124801.
23. Гуань-дин-хуа. К теории возбуждения поверхностных звуковых волн // Акустический журнал. 1961. Т. 7, № 2. С. 181–184.
24. Meyer E. Neuere analogien zwischen akustischen und elektromagnetischen Schwingungen und Wellenfeldern. 4-th International congress Acoustics. Copenhagen. 1963. Vol. 2. P. 139–156.
25. Кузнецов С.П. Об одной форме уравнений возбуждения периодического волновода // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25, № 2. С. 419–421.
26. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. С. 10.
27. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Сов. Радио, 1957. 582 с.
28. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. С. 18.
29. Гельфанд И.М. Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами // ДАН СССР. 1950. Т. 73, № 1. С. 1117–1120.
30. Гельфанд И.М. О формулах преобразования Фурье // Математическое просвещение. 1960. Вып. 5. С. 155–159.
31. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1966. Т. 7. С. 250–253.
32. Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. 501 с.
33. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
34. Kambe T. A new formulation of equations of compressible fluids by analogy with Maxwell's equations // Fluid dynamics research. 2010. Vol. 42. № 5. 055502.
35. Кубанский П.Н. Поведение резонансной системы в потоке // ЖТФ. 1957. Т. 27, № 1. С. 180–188.
36. Yoshikawa S. Underwater organ pipes // J. Acoust. Soc. Jap. (E). 1984. Vol. 5. № 4. P. 211–221.
37. Nelson P.A., Halliwell N.A., Doak P.E. Fluid dynamics of a flow excited resonance, part II: flow acoustic interaction // Journal of Sound and Vibration. 1983. Vol. 91. № 3. P. 375–402.
38. Panton R.L., Miller J.M. Excitation of Helmholtz resonator by a turbulent boundary layer // The Journal of the Acoustical Society of America, 1975. Vol. 58. № 4. P. 800–806.

Поступила в редакцию 8.10.2015

# ANALOGY IN INTERACTIONS OF ELECTRONIC BEAMS AND HYDRODYNAMIC FLOWS WITH FIELDS OF RESONATORS AND PERIODIC STRUCTURES

## Part 1

*A. P. Kuznetsov<sup>1,2</sup>, S. P. Kuznetsov<sup>2,3</sup>, D. I. Trubetskov<sup>1,4</sup>*

<sup>1</sup>Saratov State University

<sup>2</sup>Kotel'nikov Institute of Radio-engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

<sup>3</sup>Udmurt State University, Izhevsk

<sup>4</sup>National Research Nuclear University MEPhI, Moscow

The hydrodynamic equations of inviscid compressible fluid are converted to a form suitable for development of self-consistent theory of interaction of hydrodynamic flows with resonators and periodic structures by analogy with the theory of microwave electronics devices with crossed electric and magnetic fields. We consider excitation of the acoustic velocity fields by the sources provided by vorticity in the flow. For two-dimensional problems, neglecting by nonlinearity of natural acoustic oscillations and by compressibility of the fluid in the domain of vortex motion, we obtain the excitation equations of acoustic resonators in a form entirely analogous to the equations for resonators in electrodynamics. For three-dimensional resonators there is no complete analogy, but we provide a derivation corresponding to the electrodynamics theory in general structure. To illustrate solutions of self-consistent equations we consider dynamics of a flat vortex tape interacting with a comb-type periodic structure. Also we consider the self-consistent problem for the case of interaction of the vortex flow with an arbitrary periodic structure. The dispersion equation is obtained, and on the basis of its analysis some designs of hydrodynamic devices are suggested analogous to the electronic beam devices with crossed fields.

**Keywords:** Electron beam, hydrodynamic flow, vortices, periodic structures, theory of excitation.

## References

1. *Elachi C.* Waves in active and passive periodic structures: A review // Proceedings of the IEEE. 1976. Vol. 64, № 12. P. 1666–1698.
2. *Andronov A.A., Fabrikant A.L.* Landau damping, wind waves and whistle // Nonlinear Waves. 1979. S. 68–104. (in Russian).
3. *Andronov A.A., Fabrikant A.L.* To the theory of aerodynamic self-excitation of sound: amplification of surface waves // Akusticheskij Zhurnal. 1980. Vol. 26, № 5. S. 655–662 (in Russian).
4. *Pierce J.R.* Traveling-Wave Tubes // Bell System Technical Journal. 1950. Vol. 29. № 3. P. 390–460.
5. *Weinstein L.A., Solntsev V.A.* Lectures on microwave electronics. Moscow: Sov. Radio, 1973. 400 s. (in Russian).
6. *Shevchik V.N., Trubetskov D.I.* Analytical methods of calculation in microwave electronics. Moscow: Sov. Radio, 1970. 584 s. (in Russian).

7. The relativistic high-frequency electronics. Gorky: Inst. Appl. Phys, 1979. 298 s. (in Russian).
8. Electronics of the backward wave tubes / Eds V.N. Shevchik and D.I. Trubetskoy. Saratov State University. 1975. 194 s. (in Russian).
9. *Rayleigh L.* The Theory of Sound. Dover: New York, 1945.
10. *Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M.L.* The Feynman Lectures on Physics. Addison Wesley, 1963. Chapter 12.
11. *Brekhovskich L.M.* Surface waves in acoustics. Review // *Akusticheskij Zhurnal*. 1959. Vol. 5, № 1. S. 4–13 (in Russian).
12. *Lependin L.F.* Acoustics. Moscow: Higher School. 1978. 448 s. (in Russian).
13. *Leiman V.G.* The adiabatic theory of the instability of the electron beam in crossed fields // *Elektronnaya tekhnika. Ser. Elektronika SVCh*. 1968. № 8. S. 26–34. (in Russian).
14. *Leiman V.G.* The stability of the system of parallel electron beams, the focusing magnetic field // *Elektronnaya tekhnika. Ser. Elektronika SVCh*. 1967. № 8. S. 15–26. (in Russian).
15. *Hockney R.W.* The potential calculation and some applications // In *Methods in Computational Physics*. Vol. 9. New York: Academic Press, 1970. P. 135–211.
16. *Kuznetsov S.P.* Turbulent motion of the electron beam in crossed fields // *Zh. Tekh. Fiz.* 1977. Vol. 47, № 12. S. 2483–2487. (in Russian).
17. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically. I. General theory // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society. 1952. Vol. 211, № 1107. P. 564–587.
18. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society. 1954. Vol. 222, № 1148. P. 1–32.
19. *Rabinovich M.I., Trubetskoy D.I.* Oscillations and waves: in linear and nonlinear Systems. Springer Science & Business Media, 2012. 578 p.
20. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P.* Nature of the instability in the region of the limit of the passband // *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1980. Vol. 23, № 9. P. 736–743.
21. *Kuznetsov A.P.* Nature of the instability in a system of two weakly coupled waves // *Sov. Tech. Phys. Lett.* 1982. Vol. 8, № 8. P. 408.
22. *Hung D.M.H. et al.* Absolute instability near the band edge of traveling-wave amplifiers // *Physical Review Letters*. 2015. Vol. 115. № 12. P. 124801.
23. *Din-wha Guan.* To the theory of acoustical surface waves excitation // *Akusticheskij Zhurnal*. 1961. Vol. 7, № 2. S. 181–184. (in Russian).
24. *Meyer E.* Neuere analogien zwischen akustischen und electromagnetischen Schwingungen und Wellenfeldern // 4-th International congress Acoustics. Copenhagen. 1963. Vol. 2. P. 139–156.
25. *Kuznetsov S.P.* On one form of excitation equations of a periodic waveguide // *Sov. J. Commun. Technol. Electron.* 1980. Vol. 25. P. 419–421.

26. *Rudenko O.V., Soluyan S.I.* Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics. Moscow: Nauka, 1975. S. 10. (in Russian).
27. *Weinstein L.A.* Electromagnetic waves. Moscow: Sov. Radio, 1957. 582 s. (in Russian).
28. *Strelkov S.P.* Introduction to the theory of vibrations. Moscow: Nauka, 1964. 437 s. (in Russian).
29. *Gelfand I.M.* Expansion in eigenfunctions of an equation with periodic coefficients // *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1950. Vol. 73, № 1. S. 1117–1120. (in Russian).
30. *Gelfand I.M.* On formulas of Fourier transform // *Matematicheskoe prosveshchenie*. 1960. № 5. S. 155–159. (in Russian).
31. *Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M.L.* The Feynman Lectures on Physics. Addison Wesley. 1963. Chapter 40.
32. The modern hydrodynamics. Advances and problems. Moscow: Mir. 1984. 501 s. (in Russian).
33. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics. Pergamon Press. 1959. 548 p.
34. *Kambe T.* A new formulation of equations of compressible fluids by analogy with Maxwell's equations // *Fluid dynamics research*. 2010. Vol. 42, № 5. 055502.
35. *Kubanskii P.N.* The behavior of the resonant system in stream // *Zh. Tekh. Fiz.* 1957. Vol. 27, № 1. P. 180–188.
36. *Yoshikawa S.* Underwater organ pipes // *J. Acoust. Soc. Jap. (E)*. 1984. Vol. 5, № 4. P. 211–221.
37. *Nelson P.A., Halliwell N.A., Doak P.E.* Fluid dynamics of a flow excited resonance, part II: flow acoustic interaction // *Journal of Sound and Vibration*. 1983. Vol. 91, № 3. P. 375–402.
38. *Panton R.L., Miller J.M.* Excitation of Helmholtz resonator by a turbulent boundary layer // *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1975. Vol. 58, № 4. P. 800–806.



*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, заведующий базовой кафедрой динамических систем Саратовского госуниверситета. Имеет звание профессора. Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 100 статей в российских и международных научных журналах. Научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний», «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны (сборник задач) и др.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН  
 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
 www.sgtnd.narod.ru  
 E-mail: apkuz@rambler.ru

*Кузнецов Сергей Петрович* – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1988). Руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор базовой кафедры динамических систем СГУ. Автор монографии «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», монографии «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», монографии «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены одиннадцать кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН  
426034 Ижевск, ул. Университетская, 1  
Удмуртский государственный университет  
E-mail: spkuz@yandex.ru

*Трубецков Дмитрий Иванович* – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор кафедры прикладной математики НИЯУ МИФИ, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
115409 Москва, Каширское шоссе, 31  
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
E-mail: dtrubetskov@yahoo.com





## ВРАЩАТЕЛЬНАЯ ДИНАМИКА В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

*Л. А. Смирнов<sup>1,2</sup>, А. К. Крюков<sup>1</sup>, Г. В. Осипов<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Институт информационных технологий, математики и механики, ННГУ

<sup>2</sup>Институт прикладной физики Российской академии наук

Исследованы особенности динамики двух нелинейно связанных маятников. При наличии затухания и постоянного внешнего воздействия в такой системе наряду с состояниями равновесия может существовать синфазное предельное периодическое движение. С помощью прямого численного моделирования показано, что при некоторых значениях параметра, характеризующего связь между маятниками, данное синфазное предельное вращение становится неустойчивым. В пределе малой диссипации построена асимптотическая теория, объясняющая причины потери устойчивости синфазного вращательного предельного цикла. Найдены аналитические выражения для границ зоны этой неустойчивости. В ходе численных расчетов установлено, что есть интервал значений силы связи, внутри которого в рассматриваемой системе помимо устойчивого синфазного имеются также два (устойчивый и неустойчивый) несинфазных вращательных предельных цикла. Таким образом, для нелинейно связанных маятников продемонстрировано наличие бистабильности их предельных периодических движений. Подробно проанализированы бифуркации, приводящие к возникновению и исчезновению несинфазных предельных режимов вращения.

*Ключевые слова:* Синхронизация, осциллятор, нелинейная динамика

### Введение

Два связанных маятника являются одной из базовых моделей в различных областях физики. Она адекватно описывает не только механические объекты, но и разнообразные процессы в электрических цепях, полупроводниковых структурах, молекулярной биологии и т. д. [1–3]. В частности, эта модель применяется для анализа систем фазовой синхронизации [4, 5]. Ее используют при теоретическом рассмотрении связанных джозефсоновских контактов [6–11] и гранулированных сверхпроводников [12]. Аналогия с маятниками играет особую роль, когда речь идет об изучении вращательных колебаний оснований молекул ДНК [3] и формировании так называемых открытых состояний [13–15], являющихся важным и необходимым элементом функционирования такой молекулы [16].

Имея представление о поведении двух связанных нелинейных осцилляторов, можно сделать обобщение на цепочки маятников типа и продвинуться в понимании их динамических свойств. Интерес к данным проблемам вызван большим количеством физических сред, для описания которых применима модель Френкеля–Конторовой или ее модификации [2, 17, 18]. Кроме приведенных выше примеров можно еще выделить цепочки взаимодействующих спинов в ферромагнетиках [19–21] и скручивания цепочки в полимерных кристаллах [22–24]. Стоит отметить, что обсуждаемые в данной работе вопросы могут быть интересны в приложении к системам глобально связанных фазовых осцилляторов с инерцией [25–27], поведение которых в настоящее время активно обсуждается в литературе [28–37].

В предлагаемой статье исследованы особенности вращательной динамики двух нелинейно связанных маятников. В разделе 1 (п. 1.1) описана исходная модель и сформулирована постановка решаемой задачи. Затем (п. 1.2) в пределе малой диссипации построена асимптотическая теория, объясняющая причины неустойчивости предельного синфазного режима вращения маятников. Найдены аналитические выражения для границ интервала значений силы связи между маятниками, внутри которого данное синфазное предельное периодическое движение теряет свою устойчивость. В ходе дальнейшей разработки асимптотического подхода (п. 1.3) продемонстрировано, что на нелинейной стадии развития такой неустойчивости формируется несинфазный вращательный предельный цикл. В разделе 2 приведены результаты расчетов в рамках исходной модели, подтверждающие теоретические построения. Подробно проанализированы бифуркации, приводящие к возникновению и исчезновению несинфазных предельных режимов вращения, и показано наличие бистабильности для предельных периодических движений в рассматриваемой системе. В Заключение подводятся итоги работы и формулируются основные выводы.

## **1. Неустойчивость предельного синфазного режима вращения двух связанных идентичных маятников**

**1.1. Исходная модель. Постановка задачи.** Рассмотрим два связанных идентичных маятника, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \lambda \frac{d\varphi_1}{dt} + \sin \varphi_1 = \gamma + K \sin (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (1)$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \lambda \frac{d\varphi_2}{dt} + \sin \varphi_2 = \gamma + K \sin (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2)$$

Здесь:  $\lambda$  – коэффициент затухания, ответственный за диссипативные процессы; постоянное внешнее воздействие на каждый из маятников учтено посредством  $\gamma$ ; параметр  $K$  характеризует силу связи между элементами. На рис. 1 приведены примеры механических систем, поведение которых подчиняется уравнениям (1), (2). В этом нетрудно убедиться, написав выражение для диссипативной функции Рэля и применив формализм классической механики Лагранжа [38, 39].

В рассматриваемом случае несложно найти состояния равновесия, приравняв нулю первые и вторые производные функций  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  по времени  $t$ . В зави-

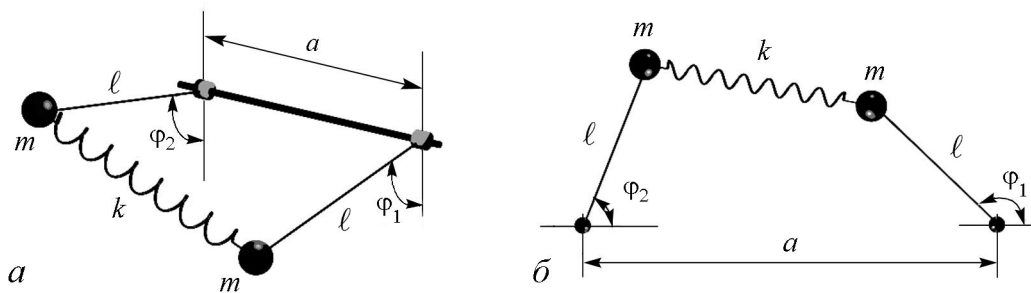


Рис. 1. *а* – два маятника с равными массами  $m$ , упруго связанные между собой с помощью пружины жесткости  $k$ , совершают индивидуальные движения (в присутствии силы тяжести  $mg$ ) строго в плоскостях, перпендикулярных линии подвеса; положение маятников соответственно характеризуется углами отклонениями от вертикальной оси  $\varphi_1, \varphi_2$ ; в этом случае параметр  $K$ , входящий в систему уравнений (1), (2), пропорционален  $k$  и равен  $K = 2k\ell/g$ . *б* – два маятника с равными массами  $m$ , упруго связанные между собой с помощью пружины жесткости  $k$ , вращаются в плоскости рисунка по окружностям одинакового радиуса  $\ell$ ; в данной ситуации коэффициент  $K$  не зависит от  $k$  и определяется только длинами  $\ell$  и  $a$  ( $K = \ell/a$ ), однако жесткость пружины  $k$  задает частоту малых синхронных колебаний, на которую нормировано время в уравнениях (1), (2)

симости от соотношений между  $\gamma$  и  $K$ , у системы (1), (2) может быть от шести состояний равновесия (когда  $\gamma < 1$  и  $4\gamma K < 1$ ) до нуля (когда  $\gamma > 1$  и  $4\gamma K > 1$ ). Эти состояния равновесия (если они есть) представляют собой или устойчивые фокусы (узлы), или седла, что является достаточно естественным. Однако в ряде ситуаций движение двух связанных маятников выходит на предельные режимы вращения. Именно о них и пойдет речь в данной работе.

Прежде всего отметим, что когда в любой момент времени  $t$  координаты  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  совпадают друг с другом, то есть  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi(t)$ , два связанных маятника движутся синфазно и их динамика описывается одним уравнением нелинейного осциллятора с затуханием, находящегося под действием постоянной внешней силы:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \lambda \frac{d\varphi}{dt} + \sin \varphi = \gamma. \quad (3)$$

Поведение такого осциллятора хорошо изучено [40, 41]. На рис. 2 показана плоскость параметров  $\lambda, \gamma$ . Она разбита на три области  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  и  $\mathcal{D}_3$  с помощью прямой  $\gamma = 1$  и бифуркционной кривой  $\mathcal{T}$ , которую часто называют кривой Трикоми [40–42]. Данные области соответствуют различным структурно устойчивым фазовым портретам системы, подчиняющейся уравнению (3). Для значений параметров  $\lambda, \gamma$  из области  $\mathcal{D}_1$  у нелинейного осциллятора имеются только два состояния равновесия (на цилиндре), а именно, седло и фокус (узел). Для точек  $\lambda, \gamma$  из сектора  $\mathcal{D}_2$  устойчивый вращательный предельный цикл сосуществует с устойчивым фокусом (узлом), область притяжения которого ограничивается устойчивыми сепаратрисами седла. При значениях параметров  $\lambda, \gamma$  из полуплоскости  $\mathcal{D}_3$  состояния равновесия отсутствуют, и осциллятор всегда стремится выйти на предельное периодическое движение, являющееся единственным аттрактором.

Таким образом, при некоторых соотношениях между  $\lambda$  и  $\gamma$ , в четырехмерном фазовом пространстве  $\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2$  заведомо существует синфазный вращательный предельный цикл. Как показали, выполненные непосредственно в рамках системы уравнений (1), (2) численные расчеты (см. ниже раздел 2), этот цикл в ряде ситуаций может терять устойчивость в конечном интервале значений силы связи  $K$ .

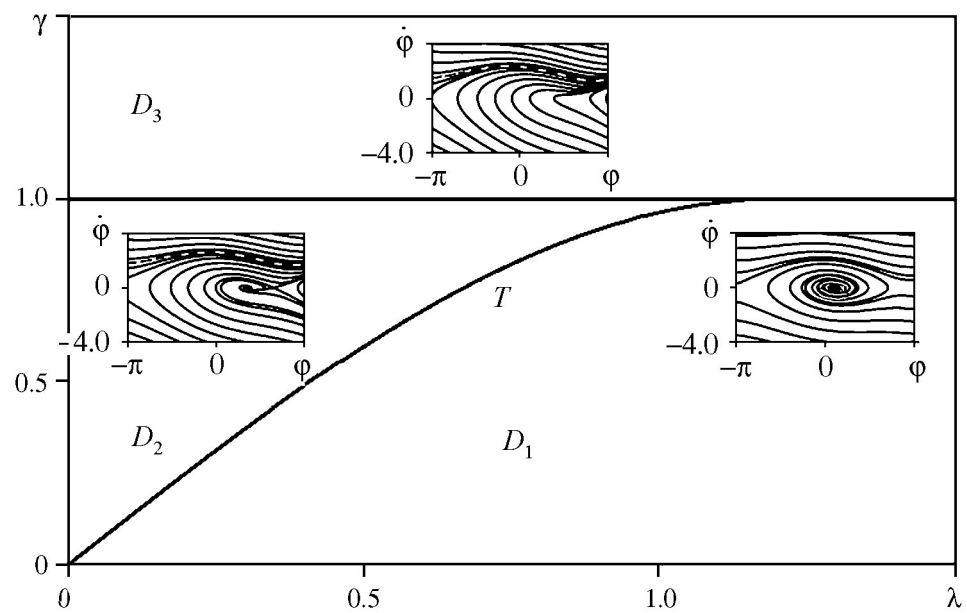


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма (плоскость параметров  $\lambda$  и  $\gamma$ ) и структурно устойчивые фазовые портреты системы, подчиняющейся уравнению (3), при значениях  $\lambda = 0.2$ ,  $\gamma = 0.3$  (правая вставка),  $\lambda = 0.9$ ,  $\gamma = 0.4$  (левая вставка) и  $\lambda = 1.2$ ,  $\gamma = 0.6$  (центральная вставка). В области  $D_1$  имеются только два состояния равновесия (на цилиндре). В секторе  $D_2$  наряду с состояниями равновесия существует устойчивый вращательный предельный цикл. В полуплоскости  $D_3$  в фазовом пространстве есть единственный аттрактор, соответствующий предельному периодическому движению. Линия  $T$  представляет собой бифуркационную кривую Трикоми, при переходе через которую у нелинейного осциллятора возникает предельный режим вращения, отмеченный штриховыми линиями на левой и центральной вставках с характерными соответственно для областей  $D_2$  и  $D_3$  фазовыми портретами уравнения (3)

**1.2. Асимптотическое описание неустойчивости синфазного вращательного предельного цикла.** Проанализируем подробно случай малой диссипации, когда  $\lambda \ll 1$ . Предположим также, что характеризующее внешнюю силу значение  $\gamma$  лежит на плоскости  $\lambda$ ,  $\gamma$  достаточно далеко от кривой Трикоми, то есть будем считать, что величина  $\gamma$ , как минимум, близка к единице. В этой ситуации удастся построить формализованную асимптотическую теорию, объясняющую причины возникновения наблюдаемой при прямом численном моделировании системы уравнений (1), (2) неустойчивости синфазного предельного режима вращения двух связанных маятников. Разработанный ниже аналитический подход основан на наличии в задаче малого параметра  $\varepsilon$ , пропорционального квадрату коэффициента затухания  $\lambda$ , то есть  $\varepsilon \propto \lambda^2 \ll 1$ . Однако, прежде чем приступить к изложению наших теоретических представлений, отметим, что, как показывают численные расчеты, область применимости полученных результатов простирается до значений  $\lambda \sim 0.5$ .

Для начала перейдем от координат маятников  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  соответственно к их полусумме и полуразности

$$\eta = (\varphi_1 + \varphi_2) / 2, \quad \xi = (\varphi_1 - \varphi_2) / 2. \quad (4)$$

Кроме того, для удобства дальнейших рассуждений введем новое безразмерное время

$$\tau = \gamma t / \lambda. \quad (5)$$

В итоге, исходная система уравнений (1), (2) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \varepsilon \kappa \gamma \frac{d\eta}{d\tau} + \varepsilon \kappa \sin \eta \cos \xi = \varepsilon \kappa \gamma, \quad (6)$$

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \varepsilon \kappa \gamma \frac{d\xi}{d\tau} + \varepsilon \kappa \sin \xi \cos \eta = -\varepsilon \kappa K \sin 2\xi, \quad (7)$$

где вместо отношение  $\lambda^2 / \gamma^2$  используется обозначение

$$\varepsilon \kappa = \lambda^2 / \gamma^2. \quad (8)$$

Как обсуждалось выше, для  $\lambda$  и  $\gamma$  из интересующих нас диапазонов значений параметров рассматриваемой системы при синфазном движении двух связанных маятников (когда в каждый момент времени  $t$  координаты  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  совпадают друг с другом, а значит,  $\xi(\tau) = 0$ ) существует вращательный предельный цикл. Для того, чтобы исследовать устойчивость такого синфазного режима вращения двух маятников, будем считать, что между ними имеется отличная от нуля слабая расстройка  $\xi(\tau)$ , которая остается в течение продолжительного временного отрезка (на протяжении нескольких периодов вращения) малой величиной, не превосходящей по порядку  $\varepsilon$ . Другими словами, предполагается, что

$$\xi(\tau) = \varepsilon \xi_0(\tau) + o(\varepsilon^2), \quad (9)$$

где символом  $o(\varepsilon^2)$  обозначены члены, имеющие порядок  $\varepsilon^2$  и выше.

В свою очередь, функцию  $\eta(\tau)$  представим в виде суммы двух слагаемых

$$\eta(\tau) = \phi(\tau) + \psi(\tau). \quad (10)$$

Первое слагаемое, а именно,  $\phi(\tau)$  характеризует непосредственно синфазный вращательный предельный цикл, который устойчив в отсутствие связанных с  $\xi(\tau)$  возмущений и удовлетворяет уравнению движения, находящегося под действием постоянной внешней силы нелинейного осциллятора с затуханием

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \varepsilon \kappa \gamma \frac{d\phi}{d\tau} + \varepsilon \kappa \sin \phi = \varepsilon \kappa \gamma. \quad (11)$$

Второе слагаемое  $\psi(\tau)$  описывает: во-первых, процесс постепенного (в течение нескольких оборотов маятников на  $2\pi$ ) установления предельного периодического движения, то есть выход на предельный вращательный цикл из расположенной вблизи него произвольной точки фазового пространства; во-вторых, влияние расстройки  $\xi(\tau)$  между координатами  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  на их полусумму  $\eta(\tau)$ . Из соотношений (6), (10) и (11) вытекает, что поведение функции  $\psi(\tau)$  подчиняется уравнению

$$\frac{d^2 \psi}{d\tau^2} + \varepsilon \kappa \gamma \frac{d\psi}{d\tau} + \varepsilon \kappa \cos \xi \cos \phi \sin \psi + \varepsilon \kappa (\cos \xi \cos \psi - 1) \sin \phi = 0. \quad (12)$$

При наличии малого параметра  $\varepsilon$  в синфазном вращательном предельном цикле  $\phi(\tau)$ , то есть периодическом на цилиндре решении уравнения (11), можно выделить основную монотонно растущую во времени часть и малые поправки к ней

$$\phi(\tau) = (\tau - \tau_0) + \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon^j \phi_j(\tau). \quad (13)$$

Здесь постоянная  $\tau_0$  определяется начальными условиями, а каждый член  $\phi_j(\tau)$  ( $j = 1, 2, \dots, +\infty$ ) асимптотического по  $\varepsilon$  ряда представляет собой ограниченную периодически изменяющуюся функцию переменной  $\tau$ . По теории возмущений непосредственно из уравнения (11) нетрудно найти, что

$$\phi_1(\tau) = \kappa \sin(\tau - \tau_0) = \frac{\lambda^2}{\varepsilon \gamma^2} \sin\left(\frac{\gamma}{\lambda} t - \tau_0\right). \quad (14)$$

Рассматриваемая нами система достаточно долго находится вблизи синфазного вращательного предельного цикла, поэтому решение уравнения (12) для  $\psi(\tau)$  формально можно искать в виде следующего асимптотического по  $\varepsilon$  разложения:

$$\psi(\tau) = \varepsilon^{1/2} \psi_0(\varepsilon \tau) \left[ 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon^{(j+1)/2} \psi_j(\tau) \right], \quad (15)$$

где общий множитель  $\psi_0(\varepsilon \tau)$  является медленной функцией нового времени  $\tau$  (5). Приравняв друг другу слагаемые одного порядка малости, получаем

$$\psi_1(\tau) = \varepsilon \kappa \cos(\tau - \tau_0) = \frac{\lambda^2}{\varepsilon \gamma^2} \cos\left(\frac{\gamma}{\lambda} t - \tau_0\right). \quad (16)$$

Принимая во внимание также медленность изменения функции  $\psi_0(\varepsilon \tau)$  и используя процедуру усреднения, находим

$$\psi_0(\varepsilon \tau) = \Psi_0 \exp(-\varepsilon \kappa \gamma \tau) = \Psi_0 \exp(-\lambda t), \quad (17)$$

где  $\Psi_0$  – постоянная величина, которая, как и  $\tau_0$ , определяется начальными условиями. Из (15) и (17) видно, что возмущения, описываемые с помощью  $\psi(\tau)$ , затухают на временах порядка  $\lambda^{-1}$ . Другими словами, для интересующих нас процессов с длительностью, превышающей  $\lambda^{-1}$ , слагаемое  $\psi(\tau)$  в соотношении (10) можно не учитывать. При этом основное влияние на поведение расстройки  $\xi(\tau)$  между координатами  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  будет оказывать явным образом выделенная в их полусумме  $\eta(\tau)$  функция  $\phi(\tau)$ , непосредственно характеризующая только синфазный вращательный предельный цикл.

Предположим, что с момента начала движения двух связанных маятников прошло достаточное количество времени ( $\Delta t \gtrsim \lambda^{-1}$ ). Основываясь на выше сказанном, учтем в уравнении (7) основные значимые в иерархии по малому параметру  $\varepsilon$  члены. В итоге для расстройки  $\xi(\tau)$  получаем уравнение, которое можно воспринимать как уравнение с периодическими меняющимися коэффициентами. Теперь естественно предположить, что при изменении величины  $K$ , ответственной за связь между двумя

маятниками, в поведении функции  $\xi(\tau)$  возможно проявление эффектов параметрической неустойчивости [39,43].

Действительно, рассмотрим такие  $K$ , для которых квадрат частоты  $\omega_s = 1$  синфазного вращательного предельного цикла слабо отличается от квадрата удвоенной частоты

$$\omega_0 = \sqrt{2\epsilon\kappa K} = \sqrt{2K\lambda}/\gamma \quad (18)$$

собственных линейных осцилляций  $\xi(\tau)$ , то есть разность  $\omega_s^2 - 4\omega_0^2$  является малой величиной порядка  $\epsilon$

$$2\epsilon\Omega = \omega_s^2 - 4\omega_0^2 = 1 - 8\epsilon\kappa K = 1 - 8K\lambda^2/\gamma^2, \quad (19)$$

где  $2\Omega \sim 1$ . Фактически, мы находимся в окрестности первой зоны предполагаемой параметрической неустойчивости [39,43]. Это означает также, что нас интересуют достаточно большие значения  $K$ , и можно считать, что выполняется условие  $K^{-1} \sim \epsilon$ .

Будем искать решение уравнения (7) в виде (9), где основное слагаемое  $\xi_0(\tau)$  представим как

$$\xi_0(\tau) = \text{Re} \left[ \Xi(\epsilon\tau) \exp(i(\tau - \tau_0)/2) \right]. \quad (20)$$

Здесь  $\Xi(\epsilon\tau)$  – комплексная амплитуда, плавно изменяющаяся во времени  $\tau$ . Приравняв друг другу члены одного порядка малости и, воспользовавшись медленностью функции  $\Xi(\epsilon\tau)$ , усредним полученное в порядке  $\epsilon^2$  соотношение по периоду предельного синфазного вращения двух маятников. В итоге придем к следующему укороченному уравнению для  $\Xi(\epsilon\tau)$ :

$$\frac{2}{\epsilon} \frac{d\Xi}{d\tau} = -(\kappa\gamma + i\Omega) \Xi + i\kappa \Xi^*. \quad (21)$$

Здесь верхний индекс  $*$  указывает на комплексно-сопряженную величину. Несложно найти общее решение данного уравнения и убедиться в том, что

$$\Xi \propto \exp(p_{1,2}\tau) = \exp\left(\frac{\gamma}{\lambda} p_{1,2} t\right), \quad (22)$$

где показатели экспонент соответственно равны

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{\epsilon}{2} \left( -\kappa\gamma \pm \sqrt{\kappa^2 - \Omega^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\gamma^2} \left( -\lambda^2\gamma \pm \sqrt{\lambda^4 - \gamma^2 \left( \gamma - 2\sqrt{2K\lambda} \right)^2} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Как видно из выражений (23),  $p_1$  является действительной положительной величиной, когда параметр связи  $K$  лежит в интервале  $K_1 < K < K_2$ , где

$$K_{1,2} = \frac{1}{8} \left( \frac{\gamma^2}{\lambda^2} \mp 2\sqrt{1 - \gamma^2} \right). \quad (24)$$

Это означает, что расстройка  $\xi(\tau)$  экспоненциально нарастает во времени с инкрементом  $p_1$  на начальном этапе, то есть развивается своеобразная параметрическая

неустойчивость до тех пор, пока ее не остановят нелинейные эффекты, которые не учитывались в ходе изложенного выше рассмотрения. Максимально быстрый рост возмущений  $\xi(\tau)$  с показателем

$$p_{1\max} = \frac{\lambda^2}{2\gamma^2} (1 - \gamma) \quad (25)$$

происходит при значении  $K_* = \gamma^2/8\lambda^2$ , соответствующем центральной точке интервала  $K_1 < K < K_2$ . Особо отметим, что согласно выражениям (24) и (25) параметрическая неустойчивость возможна только при  $\gamma < 1$ . Данный вывод согласуется с расчетами, выполненными в рамках уравнений (1), (2).

**1.3. Рождение несинфазного вращательного предельного цикла на нелинейной стадии развития неустойчивости.** Как было показано в предыдущем параграфе, при значениях силы связи  $K$  из интервала  $K_1 < K < K_2$  синфазный предельный режим вращения двух маятников становится неустойчивым, когда их координаты  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  совпадают друг с другом. При этом, согласно развитым теоретическим представлениям, расстройка  $\xi(t)$  между  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  нарастает во времени  $t$  экспоненциально с инкрементом  $\gamma p_1/\lambda$ . Однако данный рост не может продолжаться бесконечно. Его должны остановить неучтенные нами ранее нелинейные эффекты, которые играют принципиальную роль в теории параметрических колебаний и обычно приводят к стабилизации неустойчивости [39, 44]. Только приняв во внимание неизохронность поведения удовлетворяющей уравнению (7) функции  $\xi(\tau)$ , можно определить характер установившегося режима движения двух маятников, сила связи  $K$  между которыми близка к критическому значению  $K_* = \gamma^2/8\lambda^2$ .

Для того, чтобы как минимум качественно проанализировать влияние нелинейных эффектов на развитие описанной выше параметрической неустойчивости синфазного вращательного предельного цикла, предположим, что расстройка  $\xi(\tau)$  увеличилась на столько, что ее можно считать по порядку величины сравнимой с  $\sqrt{\varepsilon}$ . Другими словами, пусть теперь

$$\xi(\tau) = \sqrt{\varepsilon}\xi_0(\tau) + \varepsilon\xi_1(\tau) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (26)$$

где символом  $o(\varepsilon^{3/2})$  обозначены члены имеющие порядок  $\varepsilon^{3/2}$  и выше. При этом основные слагаемые в асимптотическом разложении функции  $\eta(\tau)$  останутся неизменными и будут удовлетворять тем же самым формулам, которые выписаны в п. 1.2,

$$\eta(\tau) = [\tau - \tau_0 + \varepsilon\phi_1(\tau) + \dots] + \sqrt{\varepsilon}\psi_0(\varepsilon\tau) [1 + \psi_1(\tau)], \quad (27)$$

где  $\phi_1(\tau)$ ,  $\psi_1(\tau)$  и  $\psi_0(\varepsilon\tau)$  соответственно определяются выражениями (14), (16) и (17). Аналогично тому, как было сделано раньше, представим  $\xi_0(\tau)$  в виде (20) и подставим соотношения (26) и (27) в уравнение (7). Далее, приравняв друг другу члены одного порядка малости и, воспользовавшись медленностью функции  $\Xi(\varepsilon\tau)$ , усредним полученное в порядке  $\varepsilon^{3/2}$  соотношение по периоду предельного синфазного вращения двух маятников. В итоге, придем к следующему укороченному уравнению для  $\Xi(\varepsilon\tau)$ :

$$\frac{2}{\varepsilon} \frac{d\Xi}{d\tau} = -(\kappa\gamma + i\Omega) \Xi + i\kappa\Xi^* - i\omega_0^2 |\Xi|^2 \Xi. \quad (28)$$



В отличие от (21) в (28) присутствует нелинейное слагаемое, которое становится существенным, когда расстройка  $\xi(\tau)$  нарастет до величины порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ .

В комплексной функции  $\Xi(\tau)$  выделим явным образом амплитуду  $\rho(\tau)$  и фазу  $\vartheta(\tau)$

$$\Xi(\tau) = \rho(\tau) \exp[i\vartheta(\tau)]. \quad (29)$$

Тогда для действительных функций  $\rho(\tau)$  и  $\vartheta(\tau)$  переменной  $\tau$  из (28) получим систему автономных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{2}{\varepsilon} \frac{d\rho}{d\tau} = -\kappa\gamma\rho + \kappa\rho \sin 2\vartheta, \quad (30)$$

$$\frac{2}{\varepsilon} \frac{d\vartheta}{d\tau} = -\Omega + \kappa \cos 2\vartheta - \omega_0^2 \rho^2. \quad (31)$$

Если правые части уравнений (30) и (31) одновременно обратятся в нуль, то  $\rho(\tau)$  и  $\vartheta(\tau)$  примут соответственно равновесные значения  $R_0$  и  $\Theta_0$  и не будут в дальнейшем меняться с течением времени  $\tau$ . При этом согласно формуле (20) расстройка  $\xi_0(\tau)$  будет совершать гармонические колебания с постоянной амплитудой  $R_0$  и фиксированной фазой  $(\Theta_0 - \tau_0/2)$  на частоте  $\omega_d = \omega_s/2$ , в два раза меньшей частоты  $\omega_s = \gamma/\lambda$  синфазного вращательного предельного цикла.

Равновесные значения  $R_0$  и  $\Theta_0$  удовлетворяют соотношениям

$$R_0 \sin 2\Theta_0 = \gamma R_0, \quad \omega_0^2 R_0^2 = \kappa \cos 2\Theta_0 - \Omega. \quad (32)$$

У системы трансцендентных алгебраических уравнений (32) есть тривиальное решение, когда  $R_0 = 0$ . Оно отвечает нулевой расстройке  $\xi_0(\tau)$ , то есть синхронному вращению двух связанных маятников. Кроме того, система уравнений (32) при определенных условиях имеет и стационарные решения с конечной амплитудой  $R_0$ . Если  $\gamma < 1$ , то, исключив  $\Theta_0$  из второго соотношения (32), находим

$$R_0^\pm = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{-\Omega \pm \kappa \sqrt{1 - \gamma^2}} = \sqrt{\frac{8K\lambda^2 - \gamma^2 \pm 2\lambda^2 \sqrt{1 - \gamma^2}}{4\varepsilon\lambda^2 K}}. \quad (33)$$

Решение  $R_0^+$  существует при параметре связи  $K \geq K_1$ , а решение  $R_0^-$  реализуется только в области  $K \geq K_2$ . Что касается постоянной  $\Theta_0$  (поправки к фазе установившихся колебаний расстройки  $\xi_0(\tau)$ ), то для нее из соотношений (32) легко находятся соответствующие  $R_0^+$  и  $R_0^-$  значения

$$\Theta_0^+ = 0.5 \arcsin \gamma, \quad \Theta_0^- = 0.5 (\pi - \arcsin \gamma). \quad (34)$$

Для полноты картины обсудим теперь устойчивость найденных стационарных решений укороченного уравнения (28). Прежде всего отметим, что для равновесного состояния с  $R_0 = 0$  данный вопрос по сути уже разобран в п. 1.2. Было установлено, что такое состояние неустойчиво относительно малых возмущений при значениях коэффициента связи  $K$  между маятниками из интервала  $K_1 < K < K_2$ .

Для того чтобы проанализировать устойчивость стационарных решений с конечными амплитудами  $R_0^-$  и  $R_0^+$ , рассмотрим поведение поправки  $\varepsilon \xi_1(\tau)$  к основному слагаемому в асимптотическом разложении (26) для расстройки  $\xi(\tau)$ . Будем

искать  $\xi_1(\tau)$  в аналогичной соотношению (20) форме

$$\xi_1(\tau) = \operatorname{Re} \left[ \zeta(\varepsilon\tau) \exp(i(\tau - \tau_0)/2) \right], \quad (35)$$

где  $\zeta(\varepsilon\tau)$  – медленно изменяющаяся во времени  $\tau$  комплексная функция. В итоге во втором порядке малости по  $\varepsilon$  получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение для  $\zeta(\tau)$

$$\frac{2}{\varepsilon} \frac{d\zeta}{d\tau} + (\kappa\gamma + i\Omega + 2i\omega_0^2 |\Xi_0|^2) \zeta + (i\omega_0^2 \Xi_0^2 - i\kappa) \zeta^* = -\varepsilon \Xi_0 \psi_0(\varepsilon\tau). \quad (36)$$

Здесь и далее предполагается, что  $\Xi_0$  комплексное число, которое принимает одно из двух значений

$$\Xi_0^\pm = R_0^\pm \exp(i\Theta_0^\pm) \quad (37)$$

в зависимости от того, вблизи какого из равновесных состояния (с амплитудой  $R_0^+$  или  $R_0^-$ ) мы находимся.

Удовлетворяющую неоднородному уравнению (36) функцию  $\zeta(\tau)$  можно представить в виде суммы его частного решения  $\zeta_p(\tau)$  и общего решения  $\zeta_g(\tau)$  однородного уравнения (36) без правой части

$$\zeta(\tau) = \zeta_p(\tau) + \zeta_g(\tau). \quad (38)$$

В качестве  $\zeta_p(\tau)$  возьмем

$$\zeta_p(\tau) = \mathcal{A} \psi_0(\tau), \quad (39)$$

где  $\mathcal{A}$  – комплексная постоянная, которую легко найти путем непосредственной подстановки (39) в соотношение (36). В свою очередь,  $\zeta_g(\tau)$  можно разложить по собственным функциям линейного дифференциального оператора  $\hat{L}$

$$\hat{L}\zeta = \frac{2}{\varepsilon} \frac{d\zeta}{d\tau} + (\kappa\gamma + i\Omega + 2i\omega_0^2 |\Xi_0|^2) \zeta + (i\omega_0^2 \Xi_0^2 - i\kappa) \zeta^*. \quad (40)$$

Естественно данное разложение зависит от того, какое из двух значений  $\Xi_0^+$  и  $\Xi_0^-$  будет выбрано за  $\Xi_0$ .

В первом случае асимптотическое поведение  $\zeta_g(\tau)$  определяется функциями

$$\sigma_{1,2}^+(\tau) = \exp(q_{1,2}^+ \tau) \quad (41)$$

и комплексно сопряженными к ним. Здесь

$$q_{1,2}^+ = -\kappa\gamma \pm \sqrt{\kappa^2\gamma^2 - 4\omega_0^2 R_0^2 \kappa \sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (42)$$

являются собственными значениями оператора  $\hat{L}$  с  $\Xi_0 = \Xi_0^+$ . Из выражения (42) видно, что действительные части  $q_{1,2}^+$  всегда отрицательные. Таким образом, равновесное состояние с амплитудой  $R_0^+$  устойчиво относительно малых возмущений  $\varepsilon \xi_1(\tau)$ .

Во втором случае асимптотическое поведение  $\zeta_g(\tau)$  определяется функциями

$$\sigma_{1,2}^-(\tau) = \exp(q_{1,2}^- \tau) \quad (43)$$

и комплексно сопряженными к ним. Здесь

$$q_{1,2}^- = -\kappa\gamma \pm \sqrt{\kappa^2\gamma^2 + 4\omega_0^2 R_0^2 \kappa \sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (44)$$

представляют собой собственные значения оператора  $\hat{L}$  с  $\Xi_0 = \Xi_0^-$ . Нетрудно заметить, что оба числа  $q_{1,2}^-$  действительные, причем одно всегда положительное, а другое всегда отрицательное. Это означает, стационарное решение укороченного уравнения (28) с амплитудой  $R_0^-$  является неустойчивым (седловым).

Итак, на основе развитого асимптотического подхода можно сделать следующие выводы об установившихся предельных вращательных режимах движения двух маятников, сила связи  $K$  между которыми близка к значению  $K_* = \gamma^2/8\lambda^2$ . В области  $K \leq K_1$  существует единственное устойчивое равновесное состояние с  $R_0 = 0$ , а именно, есть только один синфазный вращательный предельный цикл. В интервале  $K_1 < K < K_2$  данный режим вращения теряет свою устойчивость, а у укороченного уравнения (28) появляется стационарное решение с амплитудой  $R_0 = R_0^+$ , отвечающее устойчивому предельному вращательному движению с конечной расстройкой  $\xi(t)$  между координатами  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$ . Это означает, что развитие параметрической неустойчивости синфазного вращательного предельного цикла заканчивается установлением несинфазного предельного вращения двух маятников. Как уже отмечалось выше, механизм насыщения неустойчивости связан с неизохронностью осцилляций переменной  $\xi(\tau)$ . Поскольку частота собственных колебаний расстройки  $\xi(\tau)$  зависит от энергии, с ростом амплитуды она изменяется и резонансные условия нарушаются. В теории параметрических колебаний этот механизм носит название расстроеного [39, 44]. Наконец, в области  $K \geq K_2$  сосуществуют два устойчивых равновесных состояния с  $R_0 = 0$  и  $R_0 = R_0^+$  и одно неустойчивое с  $R_0 = R_0^-$ . Другими словами, наблюдается бистабильность вращательных предельных циклов: движение маятников может выйти как на синфазный, так и на несинфазный режимы вращения. При  $K \geq K_2$  следует ожидать, что возможен жесткий переход от синфазного вращательного предельного цикла к несинфазному: малые возмущения  $\xi(t)$  затухают, тогда как расстройки  $\xi(t)$  с достаточной большой амплитудой нарастают и в результате переходного процесса устанавливается несинфазное предельное вращение. Данная ситуация, в каком-то смысле, аналогична жесткому возбуждению автоколебаний [40].

## 2. Бифуркации удвоения периода и возникновение бистабильности вращательных предельных циклов в системе двух связанных идентичных маятников

На рис. 3 наглядно продемонстрировано, как развивается параметрическая неустойчивость в случае, когда  $\lambda = 0.16$ ,  $\gamma = 0.99$ , а параметр связи  $K = 4.7625$  лежит внутри соответствующего интервала значений  $K_1 \approx 4.7503777 < K < K_2 \approx 4.8209114$ . При численном моделировании в качестве начальных условий случайным образом выбирались координаты точки  $\varphi_{10}$ ,  $\dot{\varphi}_{10}$ ,  $\varphi_{20}$ ,  $\dot{\varphi}_{20}$ , лежащей близко к синфазному предельному циклу в фазовом пространстве рассматриваемой системы.

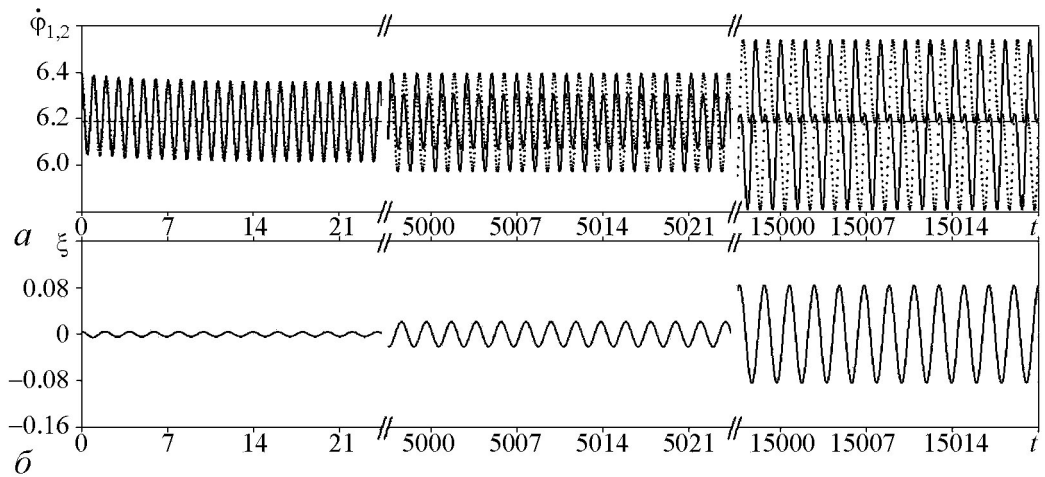


Рис. 3. *a* – изменение во времени обобщенных скоростей  $\dot{\varphi}_1(t)$  (сплошная линия) и  $\dot{\varphi}_2(t)$  (пунктирная линия) двух маятников; *b* – изменение во времени расстройки  $\xi(t)$  между их координатами  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$ . Численное моделирование поведения системы выполнено в рамках уравнений (1), (2) при  $\lambda = 0.16$ ,  $\gamma = 0.99$  и  $K = 4.7625$

В частности, для изображенной на рис. 3 ситуации имеем

$$\varphi_{10} = 2.6472 \times 10^{-3}, \quad \dot{\varphi}_{10} = 6.3850902,$$

$$\varphi_{20} = -8.0492 \times 10^{-3}, \quad \dot{\varphi}_{20} = 6.3904578.$$

Начальные значения  $\xi(t=0)$  и  $\dot{\xi}(t=0)$  расстройек между координатами двух маятников и их производными малы и соответственно равны

$$\xi_0 = 5.3483 \times 10^{-3}, \quad \dot{\xi}_0 = -2.6838 \times 10^{-3}. \quad (45)$$

Из рис. 3 видно, что на промежутке времени  $0 \leq t \leq 21$  функции  $\dot{\varphi}_1(t)$  и  $\dot{\varphi}_2(t)$  практически совпадают друг с другом. Они выходят на режим колебаний, которые происходят вблизи значения  $\omega_s = \gamma/\lambda = 6.1875$ , а именно, у  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  есть монотонный рост со скоростью  $\omega_s$ , совпадающей с визуальной частотой квазипериодических изменений. Это означает, что, пока расстройка  $\xi(t)$  мала и почти не оказывает влияние на динамику системы, постепенно (за  $\Delta t \sim \lambda^{-1} = 6.25$ ) устанавливается предельное квазисинфазное вращение двух маятников с периодом  $T_s = 2\pi\lambda/\gamma \approx 1.0154643$ .

На втором приведенном на рис. 3 этапе, когда  $5000 \leq t \leq 5021$ , становится заметна расфазировка в движении двух маятников из-за развития параметрической неустойчивости их предельного синфазного режима вращения. Графики функций  $\dot{\varphi}_1(t)$  и  $\dot{\varphi}_2(t)$  здесь уже значительно разошлись, так как стал существенным вклад расстройки  $\xi(t)$ , растущей с характерным инкрементом  $\gamma p_1/\lambda \approx 0.461 \times 10^{-3}$ . Визуальный период изменения  $\dot{\varphi}_1(t)$  и  $\dot{\varphi}_2(t)$  увеличился в два раза и начал совпадать с периодом колебаний переменной  $\xi(t)$ . Отметим, что на данной стадии проявляются нелинейные эффекты [39, 44]. Их влияние прежде всего приводит к замедлению роста амплитуды колебаний расстройки  $\xi(t)$ .

С течением времени нелинейные эффекты становятся настолько значительными, что полностью останавливают развитие параметрической неустойчивости и стабилизируют протекающие процессы. На временном интервале  $15000 \leq t \leq 15021$  движение маятников уже вышло на новое предельное вращение, в котором координаты  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  меняются несинфазно. Другими словами, когда параметр связи  $K$  становится равным  $K_1$ , при превышении которого развивается описанная выше параметрическая неустойчивость, в системе двух связанных маятников возникает еще один предельный цикл, характеризующийся несинфазным вращением с частотой повторения  $\omega_d$  в два раза меньшей по сравнению с  $\omega_s$ . Можно сказать, что происходит своеобразная бифуркация удвоения периода, так как период  $T_d$  установившегося несинфазного предельного цикла в два раза больше, чем период  $T_s$  синфазного вращательного предельного цикла, вблизи которого были выбраны начальные значения. Такая динамика обусловлена тем, что нарастающая из-за развития параметрической неустойчивости расстройка  $\xi(t)$  колеблется согласно условию синхронизма с частотой  $\omega_d$ . Данные выводы, основанные на результатах расчетов, полностью согласуются с развитыми в разделе 1 теоретическими представлениями.

На рис. 4 приведена бифуркационная диаграмма, полученная путем прямого численного моделирования системы уравнений (1), (2). На ней показана амплитуда установившихся в результате всех переходных процессов колебаний расстройки  $\xi(t)$ . Горизонтальная линия  $A_1$  соответствует устойчивому состоянию с  $\xi_{max} = 0$ , когда синфазный вращательный предельный цикл притягивает к себе расположенные

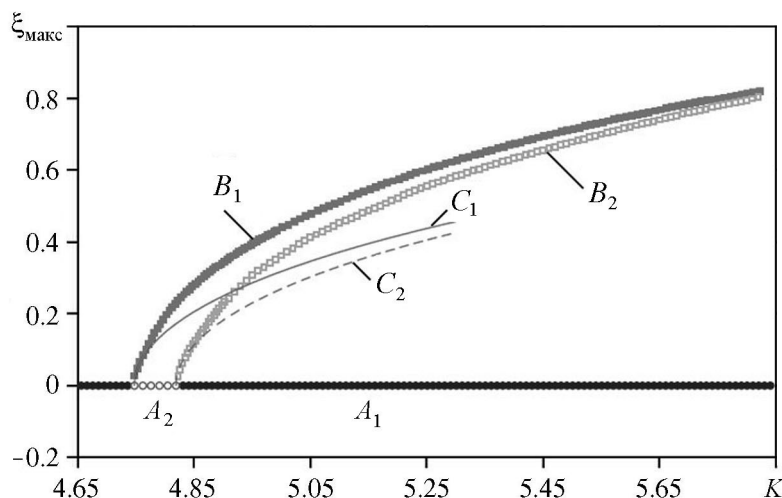


Рис. 4. Зависимость амплитуды установившихся колебаний расстройки  $\xi(t)$  между координатами  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  маятников от параметра связи  $K$  при фиксированных  $\gamma = 0.99$  и  $\lambda = 0.16$ . Горизонтальная прямая  $\xi_{\max} = 0$  (показана жирными маркерами  $A_1$  и светлыми маркерами  $A_2$ ) отвечает синфазному вращательному предельному циклу. Светлыми маркерами  $A_2$  отмечены значения  $K$ , при которых данный цикл неустойчив согласно расчетам, выполненным непосредственно в рамках системы уравнений (1), (2). Крайние точки отрезка  $A_2$  практически совпадают с границами найденного в п. 1.2 интервала  $K_1 < K < K_2$  параметрической неустойчивости синфазного предельного режима вращения. Линии  $B_1$  и  $B_2$  (показаны жирными и светлыми квадратными маркерами) соответствуют устойчивому и неустойчивому несинфазным вращательным предельным циклам, полученным в ходе прямого численного моделирования. Сплошная  $C_1$  и штриховая  $C_2$  линии представляют собой аналитические оценки на основе формулы (33) для максимума расстройки  $\xi(t)$  при устойчивом и неустойчивом несинфазных предельных режимах вращения двух маятников

вблизи траектории в фазовом пространстве. Однако, как видно из рис. 4, линия  $A_1$  терпит разрыв. Участок разрыва  $A_2$  на бифуркационной диаграмме соответствует интервалу неустойчивости синфазного предельного цикла. Данный отрезок на рис. 4 практически весь лежит внутри интервала  $K_1 < K < K_2$ . Как показано выше в ходе асимптотического рассмотрения (см. п. 1.2), именно при значениях параметра связи  $K$  из этого интервала развивается параметрическая неустойчивость синфазного предельного цикла. Совпадение с хорошей степенью точности численных и аналитических результатов свидетельствует о справедливости развитых в п. 1.2 теоретических построений.

Линия  $B_1$  (см. рис. 4) соответствует устойчивому предельному вращению с отличной от нуля расстройкой  $\xi(t)$  ( $\xi(t) \neq 0$ ) между координатами  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  маятников. Видно, что линия  $B_1$  берет свое начало из точки с абсциссой  $K \approx K_1$  (там, где синфазное вращение становится неустойчивым), продолжается в затемненной области параметрической неустойчивости, а затем выходит достаточно далеко за ее границы, то есть за точку  $K \approx K_2$ . Таким образом, при  $K_2 \leq K \leq K_3$  ( $K_3 \approx 5.8275$  для выбранных значений параметров  $\lambda = 0.16$  и  $\gamma = 0.99$ ) одновременно сосуществуют два устойчивых вращательных предельных цикла, один из которых можно охарактеризовать синфазным движением двух маятников, а второй – несинфазным. Возникает своеобразная бистабильность вращательных предельных циклов в рассматриваемой системе, описываемой уравнениями (1), (2).

Как показывают расчеты, помимо устойчивых предельных режимов вращения в диапазоне  $K_2 \leq K \leq K_3$  есть еще и неустойчивый несинфазный вращательный предельный цикл, период которого совпадает с  $T_d$ , а значит, в два раза превосходит  $T_s$ . Этот неустойчивый цикл (см. линию  $B_2$  на рис. 4), рождается из неустойчивого синфазного предельного периодического движения в окрестности точки  $K \approx K_2$  в результате субкритической бифуркации удвоения периода. При  $K = K_3$  устойчивый и неустойчивый вращательные предельные циклы сливаются друг с другом, что приводит к их исчезновению через седлоузловую бифуркацию. В итоге приведенная на рис. 4 бифуркационная диаграмма имеет гистерезисный характер.

Отметим, что наличие бистабильности вращательных предельных циклов было предсказано в п. 1.3, где получены оценки для амплитуд  $\xi_{\max}$  колебаний расстройки  $\xi(t)$  при предполагаемых устойчивом и неустойчивом несинфазных режимах вращения двух маятников. Согласно развитыми теоретическим представлениям, имеем  $\xi_{\max}^{\pm} \approx \sqrt{\varepsilon} R_0^{\pm}$ . Зависимости  $\xi_{\max}^{\pm}$  от силы связи  $K$  изображены на бифуркационной диаграмме (см. рис. 4) соответственно с помощью сплошной и штриховой кривых  $C_1$  и  $C_2$ . Видно, что маркеры  $B_1$  и  $B_2$  достаточно хорошо ложатся на данные линии только вблизи критического значения параметра связи  $K_* = \gamma^2/8\lambda^2 \approx 4.7856445$ . Как только  $K$  начинает отличаться от  $K_*$  на величину, превосходящую по порядку  $\varepsilon$ , или амплитуда  $\xi_{\max}$  становится в несколько раз больше, чем  $\sqrt{\varepsilon}$ , различия между линиями  $B_1$  и  $C_1$ , а также между линиями  $B_2$  и  $C_2$  существенно увеличиваются. Это связано с тем, что при построении аналитической оценки для  $\xi_{\max}$  в п. 1.3 использовалось предположение о малости нелинейных эффектов, позволившее ограничиться в уравнении (28) лишь кубичной по амплитуде расстройки  $\xi(t)$  поправкой.

На рис. 5 представлены проекции на плоскость  $\dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_1$  фазовых траекторий соответствующих вращательным предельным циклам при различных значениях па-

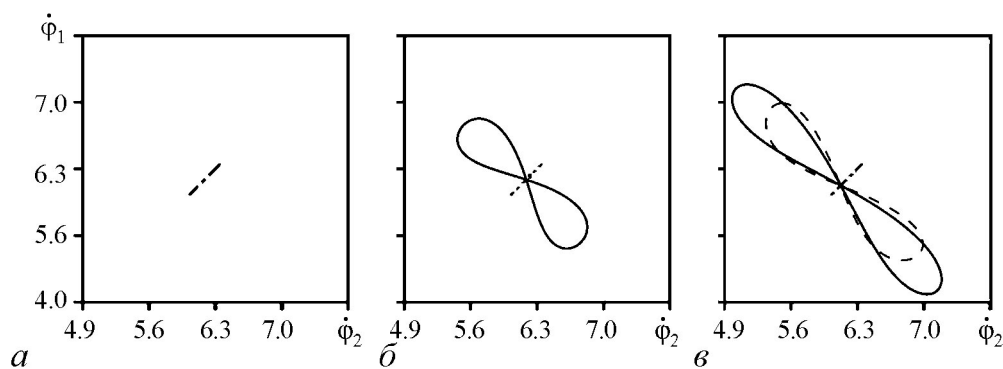


Рис. 5. Проекция на плоскость  $\dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_1$  фазовых траекторий вращательных предельных циклов при различных значениях параметра связи  $K$ :  $a - 4.7$ ,  $б - 4.8$  и  $в - 4.9$  при  $\gamma = 0.99$ ,  $\lambda = 0.16$ . Штрихпунктирными и сплошными линиями показаны устойчивые режимы вращения, а пунктирной (см. фрагмент  $б$ ) и штриховой (см. фрагмент  $в$ ) линиями – неустойчивые предельные периодические движения. Сплошные и штриховые линии соответствуют несинфазным вращательным предельным циклам, а штрихпунктирные (см. фрагменты  $a$  и  $в$ ) и пунктирная (см. фрагмент  $б$ ) линии – синфазным предельным вращениям

раметра связи  $K$ . Когда  $K = 4.7$ , у маятников существует лишь синфазный предельный режим вращения (штрихпунктирная линия на рис. 5,  $a$ ). Видно, что образ такого движения представляет собой отрезок, так как  $\dot{\varphi}_1(t)$  и  $\dot{\varphi}_2(t)$  – периодические функции, которые совпадают друг с другом во все моменты времени  $t$ .

На рис. 5,  $б$  синфазный предельный режим вращения отмечен пунктирной линией, при  $K = 4.8$  он становится неустойчивым. Здесь же сплошной линией изображена проекция на плоскости  $\dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_1$  фазовой траектории устойчивого несинфазного вращательного предельного цикла. Его образ похож на наклонную восьмерку. Каждой из петель этой линии соответствует проход по пунктирному отрезку от начала до конца и обратно, то есть один период  $T_s$  синфазного предельного цикла. В свою очередь, чтобы обойти восьмерку полностью, требуется время  $T_d = 2T_s$ . Другими словами, возникновение замкнутой восьмерки на фазовой плоскости  $\dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_1$  является наглядной иллюстрацией бифуркации удвоения периода, которая происходит в результате параметрической неустойчивости синфазного предельного цикла.

Фазовые траектории на рис. 5,  $в$  демонстрируют, как располагаются друг относительно друга три предельных вращательных цикла, сосуществующих вместе в системе двух связанных маятников при  $K = 4.9$ . Синхронный вращательный предельный цикл, вновь ставший устойчивым (сплошная линия), не изменил своего положения по сравнению с ситуациями, изображенными на фрагментах ( $a$ ) и ( $б$ ). В данном случае амплитуда колебаний устойчивого несинфазного режима вращения выросла, увеличилась длина восьмерки, являющаяся проекцией его фазовой траектории на плоскость  $\dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_1$ . Центр наклонной восьмерки сместился к краю отрезка, соответствующего синфазному вращательному предельному циклу. Здесь же штриховой линией показано неустойчивое несинфазное предельное периодическое движение. Видно, что амплитуда колебаний такого движения меньше, чем в случае устойчивого несинфазного предельного вращения. Однако центр восьмерок устойчивого и неустойчивого несинфазных вращательных предельных циклов совпадают. При увеличении параметра связи  $K$  фазовые траектории данных циклов все ближе подходят друг к другу. Когда  $K$  становится равным критическому значению  $K_3$ , они

сливаются. При этом общий центр их проекций на плоскость  $\dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_1$  в виде восьмерок подойдет к концу отрезка (штрихпунктирная линия), изображающего синфазный вращательный предельный цикл.

### Заключение

В работе подробно исследована вращательная динамика двух нелинейно связанных идентичных маятников, совместное поведение которых описывается системой уравнений (1), (2). С помощью прямого численного моделирования и теоретического рассмотрения показано: когда ответственная за постоянное внешнее воздействие безразмерная величина  $\gamma$  меньше единицы, при определенных значениях параметра  $K$ , характеризующего связь между маятниками, синфазный предельный режим вращения становится неустойчивым. Найдены аналитические выражения для границ зоны  $K_1 < K < K_2$  этой неустойчивости. Расчеты показали, что в рассматриваемой системе происходит рождение несинфазных вращательных предельных циклов в окрестностях точек  $K = K_1$  и  $K = K_2$ . При первой бифуркации, когда  $K \approx K_1$ , возникает устойчивое несинфазное предельное периодическое движение, а синфазный вращательный предельный цикл теряет свою устойчивость. Вблизи  $K = K_2$  происходит вторая бифуркация, в ходе которой формируется неустойчивый несинфазный вращательный предельный цикл и возвращается устойчивость к синфазному предельному режиму вращения. Другими словами, для двух нелинейно связанных маятников продемонстрировано наличие бистабильности их предельных периодических движений. С дальнейшим ростом параметра связи  $K$  (при критическом значении  $K = K_3$ , которое определяется только вычислениями) происходит слияние и полное исчезновение несинфазных вращательных предельных циклов.

*Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-12-00811).*

### Библиографический список

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2001.
2. *Braun O., Kivshar Yu.S.* The Frenkel-Kontorova model: Concepts, Methods, and Applications. Springer, 2004.
3. *Yakushevich L.V.* Nonlinear Physics of DNA. 2nd Edition. Wiley-Vch, 2004.
4. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D.* Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization network. Singapore: World Scientific, 1994.
5. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Особенности возникновения квазипериодических движений в системе диссипативно связанных нелинейных осцилляторов под внешним периодическим воздействием // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, вып. 1. С. 37.
6. *Leeman C., Lereh P., Racine G. A., Martinoli P.* Vortex dynamics and phase transitions in a two-dimensional array of Josephson junctions // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56, № 12. P. 1291.



7. *Ryu S., Yu W., Stroud D.* Dynamics of an underdamped Josephson-junction ladder // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53, № 3. P. 2190.
8. *Kim B.J., Kim S., Lee S.J.* Defect motions and smearing of Shapiro steps in Josephson-junction ladders under magnetic frustration // *Phys. Rev. B.* 1995. Vol. 51, № 13. P. 8462.
9. *Kim J., Choe W.G., Kim S., Lee H.J.* Dynamics of Josephson-junction ladders // *Phys. Rev. B.* 1994. Vol. 49, № 1. P. 459.
10. *Denniston C., Tang C.* Phases of Josephson-junction ladders // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, № 21. P. 3930.
11. *Qian M., Weng J.-Z.* Transitions in two sinusoidally coupled Josephson-junction rotators // *Annals of Physics.* 2008. Vol. 323. P. 1956.
12. *Fishman R.S., Stroud D.* Role of long-range Coulomb interactions in granular superconductors // *Phys. Rev. B.* 1988. Vol. 38, № 1. P. 290.
13. *Yakushevich L.V., Gapa S., Awrejcewicz J.* Mechanical analog of the DNA base pair oscillations // *Dynamical Systems. Theory and Applications* / Eds. by J. Awrejcewicz et al. Lodz: Left Group, 2009. P. 879.
14. *Якушевич Л.В.* Биомеханика ДНК: Вращательные колебания оснований // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3, № 3. С. 319.
15. *Аврейцевич Я., Млынарска С., Якушевич Л.В.* О нелинейных колебаниях пар оснований ДНК // *Прикладная математика и механика.* 2013. Т. 77, № 4. С. 1.
16. *Krueger A., Protozanova E., Frank-Kamenetskii M.* Sequence-dependent basepair opening in DNA double helix // *Biophys. J.* 2006. Vol. 90. P. 3091.
17. *Takeno S., Peyrard M.* Nonlinear modes in coupled rotator models // *Physica D.* 1996. Vol. 92. P. 140.
18. *Zhang F.* Kink shape modes and resonant dynamics in sine-lattices // *Physica D.* 1997. Vol. 110. P. 51.
19. *Kosterlitz J.M., Thouless D.J.* Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems // *J. Phys. C. Solid State Phys.* 1973. Vol. 6. P. 1181.
20. *Antoni M., Ruffo S.* Clustering and relaxation in Hamiltonian long-range dynamics // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, № 3. P. 2361.
21. *Wang X.Y., Taylor P.L.* Devil's staircase, critical thickness, and propagating fingers in antiferroelectric liquid crystals // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 4. P. 640.
22. *Fillaux F., Carlile C.J.* Inelastic-neutron-scattering study of methyl tunneling and the quantum sine-Gordon breather in isotopic mixtures of 4-methyl-pyridine at low temperature // *Phys. Rev. B.* 1990. Vol. 42, № 10. P. 5990.
23. *Fillaux F., Carlile C.J., Kearley G.J.* Inelastic-neutron-scattering study at low temperature of the quantum sine-Gordon breather in 4-methyl-pyridine with partially deuterated methyl groups // *Phys. Rev. B.* 1991. Vol. 44, № 22. P. 12280.
24. *Zhang F., Collins M.A., Kivshar Yu.S.* Kinks and conformational defects in nonlinear chains // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51, № 4. P. 3774.
25. *Acebrón J.A., Bonilla L.L., Pérez Vicente C.J., Ritort F., Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Rev. Mod. Phys.* 2005. Vol. 77, № 1. P. 137.
26. *Tanaka H.-A., Lichtenberg A.J., Oishi S.* First order phase transition resulting from

- finite inertia in coupled oscillator systems // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, № 11. P. 2104.
27. Tanaka H.-A., Lichtenberg A.J., Oishi S. Self-synchronization of coupled oscillators with hysteretic responses // *Physica D. Nonlin. Phenom.* 1997. Vol. 100, № 3–4. P. 279.
  28. Rohden M., Sorge A., Timme M., Witthaut D. Self-organized synchronization in decentralized power grids // *Phys. Rev. Lett.* Vol. 109, № 6. P. 064101(1).
  29. Rohden M., Sorge A., Witthaut D., Timme M. Impact of network topology on synchrony of oscillatory power grids // *Chaos.* 2014. Vol. 24, № 1. P. 013123(1).
  30. Olmi S., Navas A., Boccaletti S., Torcini A. Hysteretic transitions in the Kuramoto model with inertia // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 90, № 4. P. 042905(1).
  31. Olmi S., Martens E.A., Thutupalli S., Torcini A. Intermittent chaotic chimeras for coupled rotators // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 92, № 3. P. 030901(1).
  32. Ha S.-Y., Kim Y., Li Z. Large-time dynamics of Kuramoto oscillators under the effects of inertia and frustration // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2014. Vol. 13, № 1. P. 466.
  33. Gupta S., Campa A., Ruffo S. Nonequilibrium first-order phase transition in coupled oscillator systems with inertia and noise // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 89, № 2. P. 022123(1).
  34. Komarov M., Gupta S., Pikovsky A. Synchronization transitions in globally coupled rotors in the presence of noise and inertia: Exact results // *Europhysics Letters.* 2014. Vol. 106, № 4. P. 40003(1).
  35. Ji P., Peron T.K.DM., Menck P.J., Rodrigues F.A., Kurths J. Cluster explosive synchronization in complex networks // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 110, № 21. P. 218701(1).
  36. Ji P., Peron T.K.DM., Menck P.J., Rodrigues F.A., Kurths J. Analysis of cluster explosive synchronization in complex networks // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 90, № 6. P. 062810(1).
  37. Peron T.K. DM., Ji P., Rodrigues F.A., Kurths J. Effects of assortative mixing in the second-order Kuramoto model // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 91, № 5. P. 052805(1).
  38. Goldstein G. *Classical Mechanics.* 3rd Edition. Addison–Wesley, 2001.
  39. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика.* 5-е издание. М.: Физматлит, 2004.
  40. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний.* М.: Наука, 1981.
  41. Belykh V.N., Pedersen N.F., Soerensen O.H. Shunted–Josephson-junction model. I. The autonomous case // *Phys. Rev. B.* 1977. Vol. 16, № 11. P. 4853.
  42. Tricomi F. Integrazioni di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa–Classe di Scienze.* 1933. Vol. 2, № 1. P. 1. 4 (2014).
  43. Якубович В.А., Старжинский В.М. *Параметрический резонанс в линейных системах.* М.: Наука, 1987.
  44. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* 2-е изд. М.: Наука, 1974.

*Поступила в редакцию* 19.11.2015  
*После доработки* 15.12.2015

© Л.А. Смирнов, А.К. Крюков, Г.В. Осипов  
Изв. вузов «ПНД», т. 23, № 5, 2015

## ROTATIONAL DYNAMICS IN THE SYSTEM OF TWO COUPLED PENDULUMS

*L. A. Smirnov<sup>1,2</sup>, A. K. Kryukov<sup>1</sup>, G. V. Osipov<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics of Lobachevsky State University of  
Nizhny Novgorod

<sup>2</sup>Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences

We consider dynamics in a pair of nonlinearly coupled pendulums. With existence of dissipation and constant torque such system can demonstrate in-phase periodical rotation in addition to the stable state. We have shown in numerical simulations that such in-phase rotation becomes unstable at certain values of coupling strength. In the limit of small dissipation we have created an asymptotic theory that explains instability of the in-phase cycle. Found analytical equations for coupling strength values corresponding to the boundaries of the instability area. Numerical simulations show that there is a coupling strength interval where the system can have a pair of stable and unstable non in-phase cycles in addition to the stable in-phase motion. Therefore, we demonstrated that nonlinearly coupled pendulums have a bi-stability of the limit cycles. Analysed bifurcations which lead to originating and disappearing of non in-phase cycles.

*Keywords:* Synchronization, oscillator, nonlinear dynamics

### References

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2001.
2. *Braun O., Kivshar Yu.S.* The Frenkel–Kontorova model: Concepts, Methods, and Applications. Springer, 2004.
3. *Yakushevich L.V.* Nonlinear Physics of DNA. 2nd Edition. Wiley-Vch, 2004.
4. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D.* Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization network. Singapore: World Scientific, 1994.
5. *Astakhov V.V., Bezrukhov B.P., Kuznetsov S.P., Seleznyov E.P.* // ZhETF Letters. 1988. Vol. 14, № 1. P. 37.
6. *Leeman C., Lereh P., Racine G. A., Martinoli P.* // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56, № 12. P. 1291.
7. *Ryu S., Yu W., Stroud D.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, № 3. P. 2190.
8. *Kim B. J., Kim S., Lee S. J.* // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 51, № 13. P. 8462.
9. *Kim J., Choe W. G., Kim S., Lee H. J.* // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 49, № 1. P. 459.
10. *Denniston C., Tang C.* // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75, № 21. P. 3930.
11. *Qian M., Weng J.-Z.* // Annals of Physics. 2008. Vol. 323. P. 1956.
12. *Fishman R. S., Stroud D.* // Phys. Rev. B. 1988. Vol. 38, № 1. P. 290.
13. *Yakushevich L.V., Gapa S., Awrejcewicz J.* Mechanical analog of the DNA base pair oscillations // Dynamical Systems. Theory and Applications / Eds. by J. Awrejcewicz et al. Lodz: Left Grupa, 2009. P. 879.

14. Yakushevich L.V. // Computer Research and Modeling. 2011. Vol. 3, № 3. P. 319.
15. Avreytsevich Y., Mlynarska S., Yakushevich L.V. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2013. Vol. 77, № 4. P. 1.
16. Krueger A., Protozanova E., Frank-Kamenetskii M. // Biophys. J. 2006. Vol. 90. P. 3091.
17. Takeno S., Peyrard M. // Physica D. 1996. Vol. 92. P. 140.
18. Zhang F. // Physica D. 1997. Vol. 110. P. 51.
19. Kosterlitz J.M., Thouless D.J. // J. Phys. C: Solid State Phys. 1973. Vol. 6. P. 1181.
20. Antoni M., Ruffo S. // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, № 3. P. 2361.
21. Wang X.Y., Taylor P.L. // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, № 4. P. 640.
22. Fillaux F., Carlile C.J. // Phys. Rev. B. 1990. Vol. 42, № 10. P. 5990.
23. Fillaux F., Carlile C. J., Kearley G. J. // Phys. Rev. B. 1991. Vol. 44, № 22. P. 12280.
24. Zhang F., Collins M. A., Kivshar Yu. S. // Phys. Rev. E. 1995. V. 51, № 4. P. 3774.
25. Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez Vicente C. J., Ritort F., Spigler R. // Rev. Mod. Phys. 2005. Vol. 77, № 1. P. 137.
26. Tanaka H.-A., Lichtenberg A. J., Oishi S. // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, № 11. P. 2104.
27. Tanaka H.-A., Lichtenberg A. J., Oishi S. // Physica D: Nonlin. Phenom. 1997. Vol. 100, № 3–4. P. 279.
28. Rohden M., Sorge A., Timme M., Witthaut D. // Phys. Rev. Lett. Vol. 109, № 6. P. 064101(1).
29. Rohden M., Sorge A., Witthaut D., Timme M. // Chaos. 2014. Vol. 24, № 1. P. 013123(1).
30. Olmi S., Navas A., Boccaletti S., Torcini A. //
31. Olmi S., Martens E. A., Thutupalli S., Torcini A. // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 92, № 3. P. 030901(1).
32. Ha S.-Y., Kim Y., Li Z. // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2014. Vol. 13, № 1. P. 466.
33. Gupta S., Campa A., Ruffo S. // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89, № 2. P. 022123(1).
34. Komarov M., Gupta S., Pikovsky A. // Europhysics Letters. 2014. Vol. 106, № 4. P. 40003(1).
35. Ji P., Peron T.K. DM., Menck P.J., Rodrigues F.A., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 110, № 21. P. 218701(1).
36. Ji P., Peron T.K. DM., Menck P.J., Rodrigues F.A., Kurths J. // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 90, № 6. P. 062810(1).
37. Peron T.K. DM., Ji P., Rodrigues F. A., Kurths J. // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 91, № 5. P. 052805(1).
38. Goldstein G. Classical Mechanics. 3rd Edition. Addison–Wesley, 2001.
39. Landau L.D., Lifshitz E.M. Mechanics. 5rd Edition. Moscow: Physmatlit, 2004.
40. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E. Theory of Oscillations. Moscow: Science, 1981.
41. Belykh V.N., Pedersen N.F., Soerensen O.H. // Phys. Rev. B. 1977. Vol. 16, № 11. P. 4853.
42. Tricomi F. Integrazioni di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze. 1933. Vol. 2, № 1. P. 1. 4 (2014).

43. *Yakubovich V.A., Starzhinskiy V.M.* Parametric resonance in linear systems. Moscow: Science, 1987.
44. *Bogolyubov N.N., Mitropolsky Y.A.* Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations. Moscow: Science, 1974.



*Смирнов Лев Александрович*, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела нелинейной электродинамики Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федерального исследовательского центра Института прикладной физики Российской академии наук» (ИПФ РАН), старший преподаватель кафедры теории управления и динамики систем федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, ГСП-120, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46  
 Институт прикладной физики Российской академии наук  
 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
 E-mail: smirnov\_lev@appl.sci-nnov.ru



*Крюков Алексей Константинович*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории управления и динамики систем федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

603950 г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
 E-mail: alkryukov@gmail.com



*Осипов Григорий Владимирович*, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления и динамики систем федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
 E-mail: grosipov@gmail.com



## АЛГОРИТМ КЛАССИФИКАЦИИ ПОТОКОВЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ ОПОРНЫХ ВЕКТОРОВ

*А. В. Ковальчук<sup>1</sup>, Н. С. Беллюстин<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

<sup>2</sup>ФГБНУ Научно-исследовательский радиофизический институт, Нижний Новгород

В работе предлагается и исследуется метод классификации сигналов, который при работе с потоком данных в реальном времени осуществляет изменение параметров классификации по вновь поступающим данным – этим обеспечивается высокая эффективность классификации. Предложенный метод реализуется на модификации известного алгоритма «машины опорных векторов», базовый вариант которого для работы в реальном времени непригоден из-за высоких требований к вычислительным ресурсам. Разработанный алгоритм последовательного «дообучения» машины опорных векторов позволяет существенно уменьшить время «обучения» и количество опорных векторов. На данных по распознаванию рукописных цифр показано, что ошибка разработанного алгоритма классификации сигналов возрастает несущественно. Сформулированы условия оптимальной ориентации гиперплоскостей в многомерном пространстве признаков и оптимальной величины зазора между ними при формировании двухпорогового (тернарного) классификатора.

*Ключевые слова:* Машина опорных векторов, классификация потоковых сигналов, тернарный классификатор.

### Введение

Вопросы оптимальной обработки сложных и многомерных сигналов обсуждаются в литературе достаточно давно, и в настоящее время они играют ключевую роль в самых различных научных направлениях. Особенно важным типом таких сигналов являются двумерные изображения, возникающие при регистрации электромагнитных волн различных частот, например, радиолокационные изображения, оптические фотографии или рентгеновские снимки. Анализ сигнала всегда должен в итоге сформировать ответ на простой по структуре вопрос: присутствует ли в сигнале (на изображении) целевой объект или нет. Потому задача сводится к созданию классификатора, который должен отнести сигнал к одному из двух возможных классов – с объектом или без него. Поскольку каждый пример сигнала можно отождествлять с точкой в многомерном пространстве признаков (или же вектором из начала координат в эту точку), то задача классификации сводится к разделению многомерного

пространства признаков на области с помощью разделяющей гиперплоскости или более сложных гиперповерхностей.

Исследования последних лет показали, что вариант разделяющей гиперплоскости оказался во многих случаях достаточно эффективным, что подтверждается практикой применения его в одном из наиболее эффективных статистических методов классификации – «машине опорных векторов» (support vector machine, SVM) [1]. Алгоритм использует для обучения массив имеющихся экспериментальных данных, а затем проводит оптимальную разделяющую гиперплоскость в многомерном пространстве таким образом, чтобы ширина зазора, в котором находятся «опорные вектора» обоих классов, оказалась минимально возможной. Алгоритмы SVM нашли применение в задачах классификации данных с пропусками (полуавтоматическая классификация с обучением). В частности, примерами успешно решенных прикладных задач могут служить системы классификации радиолокационных данных или системы поддержки принятия решений в медицине, где часть поступающих сигналов классифицируется специалистом, а остальная часть – классификатором [2].

Однако сложным вопросом для теории алгоритмов SVM до сих пор остаются вопросы последовательного обучения в динамических условиях, когда последовательно пополняются имеющиеся для обучения экспериментальные данные и требуется осуществлять дополнительное обучение модели с учетом вновь поступивших данных. Стандартный SVM-подход требует на каждом последовательном шаге заново проводить полное обучение всей системы по всем имеющимся данным, а в случае работы в режиме постоянной готовности (online) временные затраты на такое обучение могут стать недопустимо высокими.

В связи с этим для последовательных алгоритмов SVM важна разработка приближенных динамических вариантов SVM, позволяющих при небольшой потере качества работы существенно уменьшить требуемую память и время переобучения по новым данным. Эти вопросы впервые обсуждались в работах [3, 4]. Идея последовательных динамических алгоритмов SVM, использующих методы нелинейной динамики, может состоять в использовании шагов введения и вывода входных векторов во множество опорных векторов, формирующих решение. В работе [5] предложен простой и быстрый геометрический алгоритм последовательного поиска граничных векторов и формирования классифицирующей гиперплоскости. Другие методы направлены на сокращение количества опорных векторов с некоторой потерей в качестве решения [6].

В настоящей работе предлагается упрощенная схема дополнительного обучения системы, в которой используются нелинейные правила итерационного перебора, нелинейные ядровые функции и нейродинамическое обучение системы в реальном времени. Такой подход на основе методов нелинейной динамики может приближенно решить рассматриваемую оптимизационную задачу при существенном сокращении необходимых вычислительных ресурсов. На примере задачи распознавания рукописных цифр подтверждена эффективность предложенного нового варианта последовательного алгоритма SVM, реализующего непрерывное дополнительное обучение классификатора. Предлагаемая модификация алгоритма значительно сокращает время на расчеты при сопоставимом качестве распознавания, получаемом с применением прямого алгоритма  $\nu$ -SVM [7]. Приведены также экспериментальные результаты их сравнения.

Предлагаемый алгоритм не только обеспечивает эффективное разделение пространства признаков на классы, но и дает важную количественную характеристику степени перекрытия разделяемых классов – долю обучающих примеров, попадающих в зазор между двумя гиперплоскостями. Этот параметр позволяет сравнивать между собой различные варианты наборов признаков по их эффективности в отношении разделения двух рассматриваемых классов.

## 1. Машина опорных векторов

Рассмотрим обобщенную форму тернарного классификатора и сформулируем оптимизационную задачу для поиска его параметров.

**1.1. Оптимизационная задача.** Пусть имеется набор объектов обучающей выборки  $S = \{x_1, \dots, x_N\}$  и соответствующий им набор меток  $L = \{y_1, \dots, y_N\}$ . Здесь  $x_i \in X$  – прецедент пространства  $X$ , в котором задано скалярное произведение;  $y \in \{-1, 1\}$  метка класса. Гиперплоскость в пространстве  $X$  может быть описана как

$$\{x \in X \mid H_{(w,b)}(x) = \langle w, x \rangle - b = 0\},$$

где  $w \in X, \|w\| = 1, b \in \mathbb{R}^d$ , а пара  $(w, b) \in X \times \mathbb{R}^d$  задает гиперплоскость в пространстве  $X$ . В этом представлении вектор  $w$  ортогонален гиперплоскости и является нормалью к ней.

Предположим, что задана нормаль  $w$  и соответствующее ей множество гиперплоскостей  $H_w$ . Тогда найдется пара гиперплоскостей  $H_{(w,b^+)}, H_{(w,b^-)} \in H_w$ , таких что

$$\begin{aligned} (w, b^+) : H_{w,b^+}(x_i) &\geq 0, \forall i \in S^+, \\ (w, b^-) : H_{w,b^-}(x_i) &< 0, \forall i \in S^-, \end{aligned} \quad (1.1)$$

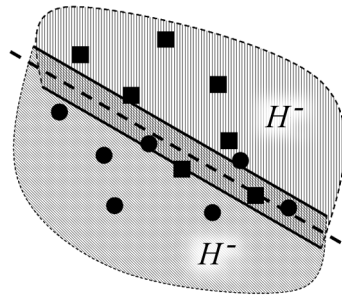


Рис. 1. Геометрическая интерпретация на плоскости классифицирующей гиперплоскости и зазора

где  $S^+ = \{i \in Z_+ \mid y_i = 1\}$ ,  $S^- = \{j \in Z_+ \mid y_j = -1\}$  – индексы объектов разных классов. Таким образом, граница между множествами примеров разного класса может быть описана параллельными гиперплоскостями (рис. 1). Очевидно, что выбор параметра  $b$  неоднозначен и условиям (1.1) удовлетворяет бесконечное множество пар гиперплоскостей. Для решения вопроса выбора гиперплоскости потребуется понятие оптимальной разделяющей гиперплоскости и зазора [8].

**Определение (зазор гиперплоскостей).** Для гиперплоскостей (1) величина  $\rho_{(n,b^+,b^-)} = b^+ - b^-$  называется *зазором гиперплоскостей*.

Можно выделить два важных для классификации объекта случая. В случае *положительной* величины зазора множества объектов, образуемые индексами  $S^+$  и  $S^-$ , разделены в пространстве  $X$ , и существует гиперплоскость, корректно классифици-



рующая объекты. При *отрицательной* величине зазора гиперплоскости в пространстве  $X$  описывают три непересекающихся подмножества (см. рис. 1):

$H^+$  – содержит только примеры с меткой  $(+1)$ ;

$H^-$  – содержит только примеры с меткой  $(-1)$ ;

$H^0$  – может содержать примеры обоих классов, в этом случае объект  $x \in H^0$  классифицируется неверно.

Существуют интуитивные и теоретически подкрепленные основания полагать, что больший зазор гиперплоскостей увеличивает обобщающую способность классификатора [9]. Согласно этим аргументам, оптимальную разделяющую гиперплоскость следует выбирать по максимальной величине зазора. Для поиска параметров гиперплоскостей с максимальным зазором может быть сформулирована следующая оптимизационная задача:

$$\begin{aligned} & \max_{w, b^+, b^-} (b^+ - b^-), \\ & s.t. \begin{cases} \langle w, x \rangle - b^+ \geq 0, & \forall i : y_i = 1, \\ \langle w, x \rangle - b^- < 0, & \forall i : y_i = -1, \\ \|w\|^2 = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Учитывая, что обучающая выборка может содержать объекты с ошибочными метками классов, ошибки в измерениях значений объектов и т.д., в задачу (1.2) вводятся так называемые корректирующие коэффициенты  $\xi$  [8]. При этом требуется, чтобы количество таких ошибок было как можно меньше. Оптимизационная задача (1.2) тогда может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} & \max_{w, b^+, b^-} (b^+ - b^- - \sum_{i=1 \dots N} c_i \xi_i), \\ & s.t. \begin{cases} y_i \left( \langle w, x \rangle - \frac{1+y_i}{2} b^+ + \frac{y_i-1}{2} b^- \right) \geq -\eta \xi_i, \\ \xi_i \geq 0, \\ \|w\|^2 = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Задача (1.3) является задачей нелинейного программирования, поскольку ограничивающие условия целевой функции имеют квадратичную функцию. Здесь  $c, \eta$  – параметры регуляризации, области значений которых будут рассмотрены ниже. Поиск решения задачи в прямой постановке представляет известную сложность, поэтому рассмотрим двойственную оптимизационную задачу, эквивалентную исходной. Функция Лагранжа оптимизационного функционала (1.3)

$$\begin{aligned} L(w, b^+, b^-, \xi, \alpha, \lambda, \mu) = & \sum_{i=1 \dots N} c_i \xi_i - (b^+ - b^-) + \frac{\lambda}{2} (\|w\|^2 - 1) - \\ & - \sum_{i=1 \dots N} \alpha_i \left( y_i \left( \langle w, x \rangle - \frac{1+y_i}{2} b^+ + \frac{y_i-1}{2} b^- \right) + \eta \xi_i \right) - \sum_{i=1 \dots N} \mu_i \xi_i, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $\lambda \neq 0, \alpha_i \geq 0, \mu_i \geq 0$  – коэффициенты Лагранжа. Эту функцию необходимо минимизировать по прямым переменным ( $w, b^+, b^-, \xi$ ) и максимизировать по двойственным переменным ( $\alpha, \lambda, \mu$ ). Эти условия приводят к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial w} &= \lambda w - \sum_{i=1 \dots N} \alpha_i y_i x_i = 0 \Rightarrow w = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1 \dots N} \alpha_i y_i x_i, \\ \frac{\partial L}{\partial b^+} &= -1 + \sum_{i=1 \dots N} \alpha_i y_i \frac{1 + y_i}{2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1 \dots N} \alpha_i = 1, \forall i : y_i = 1, \\ \frac{\partial L}{\partial b^-} &= 1 - \sum_{i=1 \dots N} \alpha_i y_i \frac{y_i - 1}{2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1 \dots N} \alpha_i = 1, \forall i : y_i = -1, \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_i} &= c_i - \eta \alpha_i - \mu_i = 0 \Rightarrow \alpha_i \leq \frac{c_i}{\eta}, \\ \lambda^2 &= \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j y_i y_j \langle x_i, x_j \rangle.\end{aligned}\quad (1.5)$$

С учетом всех подстановок (1.5) функция Лагранжа (1.4) принимает вид  $L = -\sqrt{\sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j y_i y_j \langle x_i, x_j \rangle}$ , и двойственная задача оптимизации формулируется как

$$\begin{aligned}\min \quad & \left( W(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j y_i y_j \langle x_i, x_j \rangle \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1 \dots N} \alpha_i = 1, & \forall i : y_i = 1, \\ \sum_{i=1 \dots N} \alpha_i = 1, & \forall i : y_i = -1, \\ 0 \leq \alpha_i \leq \frac{c_i}{\eta}. \end{cases}\end{aligned}\quad (1.6)$$

**1.2. Решающая функция. Тернарный классификатор.** В классической формулировке двухклассовой задачи классификации требуется отыскать решающую функцию  $f_2 : X \rightarrow \{-1, 1\}$ . В двойственной постановке функция принятия решения может быть записана как

$$f_2(x) = \text{sgn} \left( \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1 \dots N} \alpha_i y_i \langle x_i, x \rangle - \frac{b^+ + b^-}{2} \right), \quad (1.7)$$

где параметры  $b^+, b^-$  определяются из условия дополняющей нежесткости Каруша–Куна–Таккера (ККТ) [10]

$$b^+ = \max_{i \in S^+ : \alpha_i < \frac{c_i}{\eta}} (\langle w, x_i \rangle), \quad b^- = \min_{i \in S^- : \alpha_i < \frac{c_i}{\eta}} (\langle w, x_i \rangle).$$

Случай линейно разделимых данных, а также случай слабого пересечения классов достаточно редко встречается в практических задачах. Напротив, более интересен случай частичной вложенности множеств объектов разных классов в пространстве признаков  $X$ , которому соответствует отрицательная величина зазора гиперплоскостей. Поэтому в некоторых задачах более разумно использовать тернарные

функции принятия решения  $f_3 : X \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  [11]

$$f_3(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1 \dots N} \alpha_i y_i \langle x_i, x \rangle - \max(b^+, b^-) \geq 0, \\ -1, & \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1 \dots N} \alpha_i y_i \langle x_i, x \rangle - \min(b^+, b^-) < 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1.8)$$

Согласно (1.8), любому объекту ставится в соответствие либо метка класса  $\{-1, 1\}$ , либо метка 0 – отказ от принятия решения. Нетрудно заметить, что неразмеченными остаются попавшие в зазор объекты, которые считаются неизвестными. Если количество неизвестных объектов достаточно велико, для контроля качества классификатора (1.8) значения ошибки распознавания недостаточно. Поэтому вводится дополнительный параметр, называемый *ошибкой зазора*, который определяет долю объектов, попавших в зазор. Ошибка зазора формально есть:  $E_m = (1/N) |\{i | f_3(x_i) = 0\}|$ . Для оценки качества тернарного классификатора более удобно использовать эффективность классификатора, определяемую как  $R_m = 1 - E_m$ , где  $E_m$  – ошибка зазора.

**1.3. Выбор параметров.** Вопрос о выборе параметров в методе SVM подробно рассмотрен в работе [7], где впервые предложена формулировка задачи  $\nu$ -SVM. Здесь сформулируем сначала важные следствия предлагаемого алгоритма (1.6), а затем покажем его эквивалентность известному ранее алгоритму  $\nu$ -SVM (см. ниже п. 1.4).

Перед тем, как уточнить связь параметров машины опорных векторов, обобщим оптимизационную задачу (1.3) на случай построения нелинейных разделяющих поверхностей с помощью так называемого *ядрового перехода* [6,7]. Двойственная задача оптимизации (1.6) зависит от объектов обучения только в виде попарных скалярных произведений  $\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle$ . Решающие правила (1.7), (1.8) также зависят только от скалярных произведений между распознаваемым объектом и объектами обучения  $\langle \Phi(x_i), \Phi(x) \rangle$ . Предположим далее, что скалярное произведение в пространстве  $X$  известно как функция  $K$  в исходном пространстве  $\mathcal{R}^d$ :  $\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = K(x, y)$ . Оптимизационная задача (1.6) с учетом ядровой функции может быть записана как

$$\begin{aligned} \min (W(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j y_i y_j K_{i,j}), \\ s.t. \begin{cases} \sum_{\forall i: y_i=1} \alpha_i = 1, \\ \sum_{\forall i: y_i=-1} \alpha_i = 1, \\ 0 \leq \alpha_i \leq \frac{c_i}{\eta}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для определения связи между параметрами введем понятие *ошибок обучения*.

**Определение (доля ошибок обучения).** Доля ошибок обучения для решающей функции  $f_3(x)$  (без учета ошибки зазора) определяется как доля объектов обучения, для которых  $\xi_i > 0$ ,  $R_e = (1/N) |\{i | \xi_i > 0\}|$ .

Тогда справедлива следующая теорема:

**Теорема (свойства параметра  $\eta$  для классификации).** Предположим, что параметры функции принятия решения  $f_3(x)$  соответствуют решению оптимизационной задачи (1.9). Тогда

- 1)  $\eta$  является верхней оценкой на долю ошибок обучения,
- 2)  $\eta$  является нижней оценкой на долю опорных векторов при нормировочном условии

$$\begin{cases} \sum_{\forall i: y_i=1} c_i = 1, \\ \sum_{\forall i: y_i=-1} c_i = 1. \end{cases}$$

**Доказательство.**

1) Из условий ККТ, если  $\xi_i > 0$ , то  $\mu_i = 0$  и  $\alpha_i = c_i/\eta$ . В худшем случае только доля  $\eta = \sum_{D^+ \in S^+} c_i = \sum_{D^- \in S^-} c_i$  объектов обучения будет удовлетворять условиям (1.8) на вес  $\alpha_i$  целевой функции с учетом нормировки. При этом оставшиеся примеры имеют нулевые веса  $\alpha_i$ , выпадая из множества опорных векторов.

2) Согласно п. 1, минимальное количество опорных векторов определяется максимальной оценкой на долю ошибочных объектов, так как веса остальных векторов нулевые.

**1.4. О связи с методом  $\nu$ -SVM.** Рассмотрим двойственную оптимизационную задачу в постановке  $\nu$ -SVM

$$\begin{aligned} \min (W(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j y_i y_j K_{i,j}), \\ s.t. \begin{cases} \sum_{i=1}^N y_i \alpha_i = 0, \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i \geq \nu, \\ 0 \leq \alpha_i \leq c_i. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Соответствующие условия Лагранжа и условия дополняющей нежесткости ККТ для (1.10) могут быть записаны как

$$\begin{aligned} \alpha_i + \mu_i = c_i, \quad \sum_{i=1}^N y_i \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i - \delta = \nu, \\ \delta \rho = 0, \quad \mu_i \xi_i = 0, \quad \sum_{i=1 \dots N} \alpha_i (y_i (\langle w, x \rangle + b) - \rho + \xi_i) = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $\delta, \mu_i, \alpha_i$  – коэффициенты Лагранжа. Между задачами (1.9) и (1.10) существует связь, которую можно сформулировать следующим образом.

**Теорема (об эквивалентности).** Если метод  $\nu$ -SVM приводит к такому решению, что  $\rho > 0$ , тогда задачи (1.9) и (1.10) эквивалентны и их решения совпадают при условии, что параметр  $\eta$  равен  $\nu$ .

**Доказательство.** Заметим, что при  $\rho > 0$  из условий ККТ следует равенство  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = \nu$ . Нетрудно убедиться, что это равенство справедливо и для (1.9) заменой  $\alpha_i = \beta_i/2\eta$  и сложением ограничивающих равенств. Разность этих равенств дает эквивалентное условие  $\sum_{i=1}^N y_i \beta_i = 0$  на веса разных классов. Задачи (1.9) и (1.10) имеют совпадающие условия, при равных параметрах  $\eta = \nu$  их решения совпадают.

Параметры гиперплоскости (1.7) могут быть выражены через параметры  $\nu$ -SVM:  $b^+ = \rho - b$ ,  $b^- = -\rho - b$ , при соблюдении условий теоремы. Решающая функция запишется как  $f_2(x) = \text{sgn}(\sum_{1 \dots N} \alpha_i y_i K(x_i, x) + b)$  с величиной зазора гиперплоскости  $\rho = (b^+ - b^-)/2$ .

## 2. Метод последовательной оптимизации

Наиболее известными методами решения проблемы SVM (проблемы квадратичного программирования) является метод сопряженных градиентов [9] и метод последовательной минимальной оптимизации (sequential minimal optimization, SMO) [10]. Эти методы основаны на поиске оптимального сдвига вдоль заранее выбранного направления. Каждый сдвиг происходит относительно начального вектора  $\alpha$  вдоль направления  $h$  так, чтобы удовлетворять ограничениям задачи. Новый вектор запишется как  $\alpha^* = \alpha + \lambda^* h$ , где

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \arg \max W(\alpha + \lambda h), \\ s.t. 0 &\leq \lambda \leq \phi(\alpha, h). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Верхняя граница  $\phi(\alpha, h)$  определяется условиями оптимизации квадратичной задачи. Платт отметил, что расчеты величины сдвига становятся намного быстрее, если направление поиска в основном содержит нулевые коэффициенты [10]. Он предложил оставить лишь пару ненулевых коэффициентов, таких чтобы  $\sum_k h_k = 0$ . Алгоритм SMO использует направление поиска  $h$ , в котором отличны от нулевых лишь пара коэффициентов:  $(+1)$  и  $(-1)$ . Отметим, что такой выбор автоматически удовлетворяет условию ограничения на сумму весовых коэффициентов  $\alpha$ , а ограничение на величину  $\alpha$  можно получить выбором сдвига  $\lambda$ .

В рассматриваемой задаче (1.8) расчеты сдвига возможно производить сразу для четырех коэффициентов направления без существенной потери скорости. Ограничения здесь разделены для примеров разных классов и поэтому точное решение может быть найдено для совместных пар из разных классов. Новый вектор весов тогда можно записать как

$$\alpha^* = \alpha + \vartheta^* u + \varphi^* v, \quad (2.2)$$

где  $u = Z_{i,j}$  и  $v = Z_{t,p}$   $i, j \in S^+$   $t, p \in S^-$ . Здесь  $Z_{x,y}$  – разреженный вектор коэффициентов  $(+1)$ ,  $(-1)$  с индексами  $x, y$ , соответственно. В этом случае, задача

квадратичной оптимизации запишется в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 (\vartheta, \varphi) &= \arg \max W(\alpha + \vartheta u + \varphi v), \\
 0 \leq \vartheta &\leq \min \begin{pmatrix} \frac{c_i}{\eta} - \alpha_i \\ \alpha_j \end{pmatrix} = \vartheta_{\max}, \\
 s.t. \quad 0 \leq \varphi &\leq \min \begin{pmatrix} \frac{c_t}{\eta} - \alpha_t \\ c\alpha_p \end{pmatrix} = \varphi_{\max}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Вычисляя экстремум целевой функции  $W(\alpha + \vartheta u + \varphi v)$  по параметрам  $(\vartheta, \varphi)$ , получим

$$\begin{cases} \hat{\vartheta} = \frac{-\langle vg \rangle T + \langle ug \rangle V}{2(UV - TT)}, \\ \hat{\varphi} = \frac{-\langle ug \rangle T + \langle vg \rangle U}{2(UV - TT)}, \end{cases} \quad \begin{aligned} U &= \sum_i \sum_j u_i u_j y_i y_j K_{i,j}, \\ V &= \sum_i \sum_j v_i v_j y_i y_j K_{i,j}, \\ T &= \sum_i \sum_j u_i v_j y_i y_j K_{i,j}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где  $g_k = \frac{\partial W(\alpha)}{\partial \alpha_k} = \sum_i \alpha_i y_k y_i K_{k,i}$  – градиент целевой функции. Применяя разреженную форму для направлений  $u$  и  $v$ , оптимальные значения величины шага можно записать как

$$\begin{cases} \hat{\vartheta} = \frac{-T(g_t - g_p) + V(g_i - g_j)}{2(UV - TT)}, \\ \hat{\varphi} = \frac{-T(g_i - g_j) + U(g_t - g_p)}{2(UV - TT)}, \end{cases} \quad \begin{aligned} U &= K_{i,i} + K_{j,j} - 2K_{i,j}, \\ V &= K_{t,t} + K_{p,p} - 2K_{t,p}, \\ T &= -K_{i,t} + K_{i,p} + K_{j,t} - K_{j,p}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

С учетом ограничений оптимальные значения шага достигаются при значениях

$$\vartheta^* = \min(\vartheta_{\max}, \hat{\vartheta}),$$

$$\varphi^* = \min(\varphi_{\max}, \hat{\varphi}).$$

На практике алгоритм SMO обычно используют с небольшим допуском  $\tau > 0$  [12,13]. Выбираются только такие направления поиска, чтобы  $\langle h, g \rangle \geq \tau$  и  $\vartheta_{\max} > 0$ ,  $\varphi_{\max} > 0$ . При таком выборе появляется возможность увеличения целевой функции (2.4) вдоль направления  $h$ . Поэтому для определения направления поиска будем выбирать такие пары, что

$$\begin{aligned}
 i, j \in S^+, \quad u &= Z_{i,j}, \\
 t, p \in S^-, \quad v &= Z_{t,p}, \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i < \frac{c_i}{\eta}, \quad \alpha_j > 0, \\ \alpha_t < \frac{c_t}{\eta}, \quad \alpha_p > 0, \\ g_i + g_t - g_j - g_p \geq \tau. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Среди возможных квартетов индексов объектов  $(i, j, t, p)$ , удовлетворяющих условиям (2.6), наиболее эффективен квартет с максимальным направленным градиентом  $\langle h, g \rangle$ . Этот выбор описан в контексте понятия оптимальной гиперплоскости в работах [8,9].

**2.1. Последовательный алгоритм машины опорных векторов, работающий в режиме online (OnSVM).** Предлагаемый алгоритм OnSVM основан на идее последовательной оптимизации параметров задачи (1.9) для каждого, вновь добавленного, объекта  $x_k$ . Можно выделить три следующих основных шага алгоритма:

- Insert: добавление объекта во множество опорных векторов  $S' = \{S, x_k\}$ ;
- Solve: поиск  $\tau$ -четверки и формирование для неё оптимального решения;
- Remove: удаление объекта из множества  $S$  при достижении условий исключения.

**2.1.1. Шаг Insert.** В отличие от постановки задачи классической SVM, потоковое добавление объектов во множество  $S$  приводит к изменению ограничивающих условий на коэффициент  $\alpha$  (1.9). В самом деле, поскольку нормировочный коэффициент  $c$  зависит от общего числа объектов, то добавление нового объекта снижает верхнюю границу  $\alpha \leq \alpha_{bound} = c/\eta$ . Первый шаг Insert состоит из операций ограничения параметров  $\alpha$ , присвоении новому объекту начального значения и пересчета градиентов  $g$ .

Шаг 1. Добавление объекта во множество опорных векторов

```

Insert
if  $y_k = +1$  then
   $N^+ \leftarrow N^+ + 1$ ;  $\alpha_{bound}^+ \leftarrow \frac{1}{\eta N^+}$ ;  $\alpha_s \leftarrow \min(\alpha_s, \alpha_{bound}^+)$ ;  $\alpha_k \leftarrow 1 - \sum_{i \in S^+} \alpha_i$ ;  $S^+ \leftarrow S^+ \cup \{k\}$ 
else
   $N^- \leftarrow N^- + 1$ ;  $\alpha_{bound}^- \leftarrow \frac{1}{\eta N^-}$ ;  $\alpha_s \leftarrow \min(\alpha_s, \alpha_{bound}^-)$ ;  $\alpha_k \leftarrow 1 - \sum_{i \in S^-} \alpha_i$ ;  $S^- \leftarrow S^- \cup \{k\}$ 
endif
 $g_s \leftarrow - \sum_{i \in S} y_i y_s \alpha_i K_{i,s}, \forall s \in S$ 

```

Здесь:  $N^+$ ,  $N^-$  – количество объектов с положительными и отрицательными метками, соответственно;  $\alpha_{bound}^+$ ,  $\alpha_{bound}^-$  – верхние границы. Начальное значение  $\alpha$  выбрано таким, чтобы удовлетворять ограничительным равенствам. Этот выбор может не соответствовать оптимальному решению. Сдвиг верхней границы также может повлиять на отклонение от оптимума. Поэтому следующий шаг – это поиск оптимального совместного решения для измененного множества опорных векторов  $S$ .

**2.1.2. Шаг Solve.** На шаге Solve формируется  $\tau$ -четверка опорных векторов из  $S$  с максимальным направленным градиентом. В случае, если  $\tau$ -четверка не может быть найдена, этот шаг должен быть пропущен. Оптимальное решение для  $\tau$ -четверки можно получить, используя соотношение (2.6). На этом этапе также определяются необходимые параметры смещения гиперплоскостей  $b$ .

Для  $\tau$ -четверки отбираются те вектора  $i$ , которые не достигли ограничений на  $\alpha_i$  в соответствующих направлениях поиска решения.

## Шаг 2. Поиск совместного решения для $\tau$ -четверки

```

Solve
 $i \leftarrow \arg \max_{s \in S^+, \alpha_i < \alpha_{bound}^+} (g_s)$ ;  $j \leftarrow \arg \min_{s \in S^+, \alpha_j > 0} (g_s)$ ;  $t \leftarrow \arg \max_{s \in S^-, \alpha_t < \alpha_{bound}^-} (g_s)$ ;  $p \leftarrow \arg \min_{s \in S^-, \alpha_p > 0} (g_s)$ ;
 $\delta \leftarrow g_i - g_j + g_t - g_p$ 
if  $\delta > \tau$  then
   $\vartheta \leftarrow \min(\hat{\vartheta}, \alpha_{bound}^+ - \alpha_i, \alpha_j)$ ;  $\varphi \leftarrow \min(\hat{\varphi}, \alpha_{bound}^- - \alpha_t, \alpha_p)$ ;  $\{\hat{\vartheta}, \hat{\varphi}\}$ -as defined in (2.5, 2.6)
   $\alpha_i \leftarrow \alpha_i + \vartheta$ ,  $\alpha_j \leftarrow \alpha_j - \vartheta$ ;  $\alpha_t \leftarrow \alpha_t + \varphi$ ,  $\alpha_p \leftarrow \alpha_p - \varphi$ ;
   $b^+ \leftarrow - \max_{s \in S^+, \alpha_s < \alpha_{bound}^+} (g_s)$ ;  $b^- \leftarrow \max_{s \in S^-, \alpha_s < \alpha_{bound}^-} (g_s)$ ;
endif
  
```

**2.1.3. Шаг Remove.** Заключительный шаг Remove необходим для освобождения множества  $S$  опорных векторов от векторов, не участвующих в формировании параметров разделяющей гиперплоскости  $j$ :  $\alpha_j = 0$ ,  $g_j < 0$ .

## Шаг 3. Исключение опорного вектора

```

Remove
 $i \leftarrow \arg \min_{s \in S^+, \alpha_s = 0} (g_s)$ ; if  $g_i < 0$  then  $S^+ = S^+ - \{i\}$ 
 $j \leftarrow \arg \min_{s \in S^-, \alpha_s = 0} (g_s)$ ; if  $g_j < 0$  then  $S^- = S^- - \{j\}$ 
  
```

Шаг Remove исключает из каждого подмножества  $S^+$ ,  $S^-$  не более одного опорного вектора, удовлетворяющего условиям исключения. Решение принимается по минимальному значению градиента  $g$ .

**2.1.4. Алгоритм OnSVM.** Алгоритм обучения OnSVM состоит из трех следующих процедур:

- Initialization – сбор минимального числа необходимых опорных векторов;
- Process – потоковая обработка примеров объектов, включая поиск оптимального решения и удаления опорных векторов;
- Finalize – поиск окончательного решения.

## Алгоритм OnSVM

Initialize Repeat at least 4 times: Fetch example k Call Insert	Process Repeat a predefined number of times: Fetch an example k Run Insert Run Solve Run Remove	Finalize Repeat while $\delta > \tau$ : Run Solve Run Remove
--	--	---

Алгоритм OnSVM может быть использован как алгоритм последовательного обучения. В этом случае модель границы готова к распознаванию объектов сразу после процедуры Initialize. Обучение последующих примеров проводится процеду-



рой Process. Процедура Finalize введена для окончательной оптимизации опорных векторов, нарушающих  $\tau$ -условие.

На практике последовательные алгоритмы обучаются на основе эпох. Каждая эпоха состоит из случайно отобранных примеров объектов. После окончания заданного количества итераций по эпохам выполняется процедура Finalize. Эмпирические данные свидетельствуют, что обученный на одной эпохе классификатор почти не отличается от решения SVM.

Рассмотренный алгоритм основан на простом и эффективном методе SMO. Вопрос сходимости этого метода в его обобщенной формулировке – обобщенный метод последовательной минимальной оптимизации (generalized sequential minimal optimization, GSMO) – подробно рассмотрен в работе [14]. Легко убедиться, что алгоритм OnSVM является алгоритмом GSMO и удовлетворяет условиям *теоремы о сходимости*. Согласно выводам, сделанным в работе, для заданного положительного  $\tau > 0$  алгоритм OnSVM в представленной формулировке сходится за конечное число шагов  $k$ .

**2.2. Увеличение производительности.** Существенный недостаток алгоритма OnSVM заключается в необходимости пересчета градиентов  $g$  при добавлении объекта. Пересчет градиентов существенно увеличивает количество вычислений алгоритма обучения, замедляя работу шага Insert. Причина состоит в зависимости верхней границы  $\alpha_{bound}$  от количества обучаемых векторов.

Заметим, что сдвиг верхней границы влияет на те опорные вектора, величины весов  $\alpha$  которых достигли границы, а также весов, достаточно близких к границе. Таким образом, опорные вектора из множества  $S$  можно разделить на 3 подмножества:

- подмножество  $S_0$  – векторы с немодифицируемыми весами;
- подмножество  $S_1$  – векторы с граничными весами;
- подмножество  $S_2$  – векторы с весами не дальше от границы  $\alpha'_{bound}$  чем на величину сдвига  $\Delta\alpha = \alpha'_{bound} - \alpha''_{bound}$  и оставшиеся векторы  $S_0$ .

Здесь  $\alpha'_{bound}$  и  $\alpha''_{bound}$  – верхние границы до добавления вектора и после, соответственно. Очевидно, что граничные опорные векторы имеют одинаковую величину сдвига, чтобы удовлетворить граничным условиям после добавления вектора. Это свойство можно использовать для уменьшения количества вычислений ядровой функции.

Введем дополнительную переменную  $\Delta g_i = \sum_{j \in S_1} y_i y_j K_{i,j}$  как сумму ядровых функций по отношению к опорному вектору с индексом  $i$ . Тогда градиент этого вектора запишется как

$$g''_i = g'_i + \Delta\alpha\Delta g + \sum_{j \in S_2} (\alpha'_j - \alpha''_{bound}) y_i y_j K_{i,j}, \forall i \in S. \quad (2.7)$$

Вычисление ядровых функций здесь необходимо выполнить лишь для опорных векторов из множества  $S_2$ , а значения  $\Delta g_i$  могут быть вычислены заранее. Заметим также, что подмножество  $S_2$  – переходное:  $S_0 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$ . Такой переход требует изменения переменной  $\Delta g_i$

$$\Delta g''_i = \Delta g'_i + y_i y_j K_{i,j}, \quad \forall i \in S_1, \quad j \in S_2. \quad (2.8)$$

Кроме прямого перехода опорного вектора в подмножество  $S_1$ , возможен и обратный переход. Такая ситуация возникает во время поиска оптимального совместного решения для  $\tau$ -четверки на шаге Solve. При обратном переходе,  $S_1 \rightarrow S_0$ , имеем

$$\Delta g_i'' = \Delta g_i' - y_i y_j K_{i,j}, \quad \forall i \in S_1, \quad j \notin S_1. \quad (2.9)$$

На шаге Solve также изменяются веса  $\alpha$  в случае существования  $\tau$ -четверки. Для сохранения действительных значений градиента, на шаге Solve вводим дополнительный пересчет градиента

$$g_s'' = g_s' - \vartheta y_i y_s K_{i,s} + \vartheta y_j y_s K_{j,s} - \varphi y_p y_s K_{p,s} + \varphi y_t y_s K_{t,s}, \quad \forall s \in S, \quad \{i, j, p, t\} \in \tau\text{-quad}. \quad (2.10)$$

Предлагаемые изменения существенно уменьшают количество вычислений ядровых функций. Так, для алгоритма OnSVM оценка на количество вызовов ядровой функции составляет  $C(K) \sim N^2$ . С учетом ускоряющих изменений количество вызовов может быть уменьшено до линейной зависимости и в общем случае составляет  $C^{\text{OnSVM}}(K) \sim N + o(N^2) \ll N^2$ . Здесь  $N$  – количество опорных векторов в множестве  $S$ .

### 3. Вычислительный эксперимент

Апробация предложенного алгоритма проводилась на данных MINIST ручного начертания цифр, доступных на сайте <http://ftp.ics.uci.edu/pub/machine-learning-databases/>. По этим данным была сформирована задача классификации начертания каждой цифры от всех остальных цифр в наборе 0...9. Данные разделялись на тренировочную и тестовую группы в соотношении 2 : 1. В экспериментах использовались данные Optdigits<sup>1</sup> и Pendigits<sup>2</sup>, заметно различающиеся по сложности разделения данных на классы. На этих данных предложенный здесь алгоритм OnSVM сравнивался с известной ранее реализацией  $\nu$ -SVM из открытой библиотеки машинного обучения LIBSVM 3.10 при ядровой функции гауссова типа  $K_{RBF}(x, y) = \exp(-\gamma \|x - y\|^2)$ . Значения использованных параметров:  $\eta = 0.01$ ,  $\gamma = 0.0005$ ,  $\tau = 0.0001$ .

В табл. 1 приведены результаты сравнения алгоритмов OnSVM и  $\nu$ -SVM на базе Optdigits; в табл. 2 – на данных Pendigits. Здесь: «Num» – класс распознавания; «nSV» – количество опорных векторов; «nSV Max» – пиковое количество опорных векторов на эпохе обучения;  $E_2$  – ошибка классификации на тестовых примерах в режиме бинарного классификатора (1.7);  $E_3$  – ошибка тернарного классификатора (1.8);  $R_3$  – эффективность тернарного классификатора.

В табл. 1 и 2 приведены также результаты для ошибок распознавания в режиме тернарного классификатора (1.8). Возрастание обобщающей способности алгоритма в этом режиме работы классификатора может значительно повышаться за счет ухудшения эффективности классификатора – уменьшения количества примеров, по которым классификатор принимает решение о присвоении метки класса.

<sup>1</sup> [ftp://ftp.ics.uci.edu/pub/machine-learning-databases/optdigits/](http://ftp.ics.uci.edu/pub/machine-learning-databases/optdigits/)

<sup>2</sup> [ftp://ftp.ics.uci.edu/pub/machine-learning-databases/pendigits/](http://ftp.ics.uci.edu/pub/machine-learning-databases/pendigits/)

Таблица 1

Сравнительные результаты работы алгоритма  
для набора Optdigits

№№	OnSVM					LIBSVM	
	nSV	nSV Max	$E_2, \%$	$E_3, \%$	$R_3, \%$	nSV	$E_2, \%$
0	58	60	0.0	0.00	96.17	80	0.05
1	104	109	0.89	0.05	93.88	149	0.67
2	99	100	0.11	0.00	96.00	126	0.17
3	119	126	0.72	0.00	93.9	158	0.67
4	100	101	0.33	0.00	95.33	133	0.17
5	107	121	0.45	0.11	94.6	139	0.45
6	63	66	0.22	0.00	95.66	84	0.17
7	83	88	0.72	0.00	95.83	105	0.72
8	164	171	0.95	0.00	90.49	203	0.95
9	175	183	1.28	0.06	93.77	230	0.95
Total	107.2	112.5	0.57	0.02	94.6	140.7	0.5

Таблица 2

Сравнительные результаты работы алгоритма  
для набора Pendigits

№№	OnSVM					LIBSVM	
	nSV	nSV Max	$E_2, \%$	$E_3, \%$	$R_3, \%$	nSV	$E_2, \%$
0	1036	1046	0.60	0.00	74.80	1267	0.60
1	963	991	0.40	0.00	71.40	1267	0.34
2	1168	1285	0.11	0.00	79.54	1143	0.11
3	827	959	0.28	0.03	86.00	872	0.28
4	957	979	0.34	0.00	75.85	1218	0.37
5	884	906	0.48	0.00	74.70	1157	0.43
6	858	880	0.17	0.00	75.73	1186	0.14
7	934	966	1.03	0.00	73.10	1186	1.03
8	1117	1126	0.11	0.00	73.79	1354	0.11
9	1032	1046	0.49	0.08	72.73	1291	0.51
Total	978.1	1018.4	0.4	0.01	75.76	1149.1	0.39

Параметр «nSV Max» позволяет оценить максимальный объем памяти, необходимый для кеширования ядровой матрицы. Кеширование ядровых функций значительно ускоряет процесс обучения, но размер памяти, требующийся для кеша, пропорционален квадрату количества обучаемых векторов. В алгоритме OnSVM необходимый размер памяти пропорционален параметру «nSV Max». В проведенных экспериментах этот параметр не отличался от общего количества опорных векторов более чем на 5%.

На рис. 2 и 3 показаны результаты усреднения измерений параметров десяти классификаторов на наборе данных Pendigits для каждой из цифр. Рис. 2 показы-

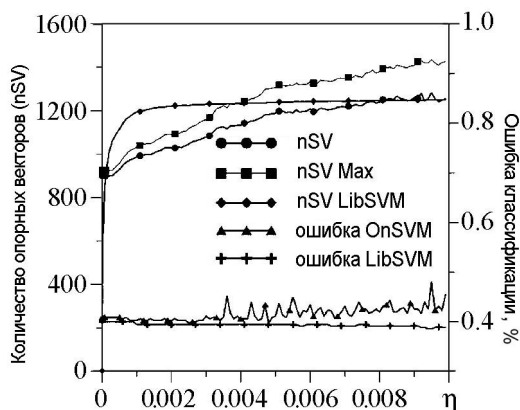


Рис. 2. Количество поддерживающих векторов и ошибки систем OnSVM и LIBSVM в зависимости от параметра  $\eta$

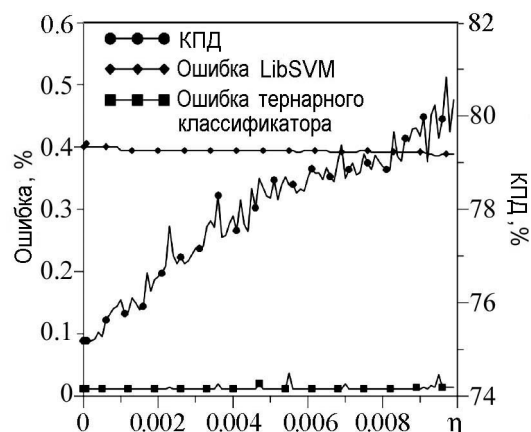


Рис. 3. Зависимость эффективности и уровня ошибок от параметра  $\eta$

вает зависимость количества опорных векторов от параметра  $\eta$  в сравнении с реализацией LIBSVM и зависимость ошибки  $E_2$  от  $\eta$  рассматриваемых алгоритмов. Рис. 3 показывает зависимости ошибки  $E_3$  и эффективности  $R_3$  от параметра алгоритма  $\eta$ .

Табл. 3 – сводная таблица сравнения рассматриваемых методов на базах данных Optdigits и Pendigits, а также на искусственно синтезированной базе данных Waveform, которая была получена в результате 100 экспериментов, в каждом из которых использовались обучающая и тестовая базы из 4000 и 1000 примеров, соответственно, при значениях параметров алгоритма  $\eta = 0.001$ ,  $\gamma = 0.005$ ,  $\tau = 0.001$ . Здесь же приведено количество примеров для каждой из трех рассмотренных групп.

Таблица 3

Сводная сравнительная таблица

	OnSVM		LIBSVM		Datasize	
Dataset	nSV	$E_2(\%)$	nSV	$E_2(\%)$	Train	Test
Pendigits	978.1	0.4	1149.1	0.39	7494	3823
Optdigits	107.2	0.57	140.7	0.5	3823	1797
Waveform <sup>3</sup>	377	12.5	444	12.9	4000	1000

### Заключение

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

- Вычислительные эксперименты подтвердили, что решение предлагаемого алгоритма OnSVM сходится к решению  $\nu$ -SVM и позволяет достичь приемлемого качества решения за один проход по обучающим примерам.

<sup>3</sup><ftp://ftp.ics.uci.edu/pub/machine-learning-databases/waveform/>

- Количество опорных векторов у алгоритма OnSVM в среднем меньше, чем у точного решения SVM при эквивалентном качестве и при сокращении времени расчетов в десятки раз. В некоторых случаях удастся получить значительно более компактные решения.
- Результаты работы бинарных классификаторов для алгоритмов OnSVM и LIBSVM достаточно близки, однако, применение тернарного классификатора в алгоритме OnSVM позволяет существенно уменьшить ошибки распознавания за счет некоторого падения эффективности.
- Поскольку при кешировании значений ядровой матрицы рост требуемой памяти пропорционален квадрату числа обучающих векторов, то предложенный последовательный алгоритм нуждается в меньшем количестве памяти при тех же временных затратах.

Перечисленные результаты позволяют использовать алгоритм в задачах классификации потоковых данных с пропусками в режиме попеременных классификации и дополнительного обучения при обязательной первичной инициализации алгоритма минимальным набором примеров. Алгоритм может быть использован в системах, для которых требуется возможность дополнительного обучения по вновь поступающим данным.

*Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН «Нелинейная динамика в математических и физических науках», грант РНФ № 14-11-00693.*

## Библиографический список

1. Cristianini N., J. Shawe-Taylor J. An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-Based Learning Methods. Cambridge University Press, 2000.
2. Макаренко А.В., Правдивцев А.В., Воловик М.Г. К вопросу о моделировании и анализе ИК-термокарт головного мозга человека // Изв. вуз. ПНД. 2011. Т. 19, № 6. С. 145.
3. Cauwenberghs G., Poggio T. Incremental and Decremental Support Vector Machine Learning // Advances in Neural Information Processing Systems. 2000. P. 409.
4. Bordes A., Ertekin S., Weston J., Bottou L. Fast kernel classifiers with online and active learning // Journal of Machine Learning Research. 2005. Vol. 6. P. 1579.
5. Roobaert D. DirectSVM: A Simple Support Vector Machine Perceptron // VLSI Signal Processing. 2002. P. 147.
6. Orabona F., Castellini C., Caputo B., Jie L., Sandini G. On-line independent support vector machines // Pattern Recognition. 2010. Vol. 43. P. 1402.
7. Schoelkopf B., Smola A. New Support Vector Algorithms // NeuroCOLT Technical Report NC2-TR-1998-031. 1998.
8. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей / Под ред. В.Н. Вапника. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1984.
9. Vapnik V. Estimation of Dependences Based on Empirical Data. Berlin: Springer-Verlag, 1982.

10. *Platt J.* Fast training of support vector machines using sequential minimal optimization / Eds B. Scholkopf, C.J.C. Burges, A.J. Smola. Advances in Kernel Methods – Support Vector Learning. Cambridge, MA: MIT Press, 1999.
11. *Расстригин Л.А., Эренштейн Р.Х.* Метод коллективного распознавания. Энергоиздат, 1981. 80 с.
12. *Chang C.-C., Lin C.-J.* LIBSVM: A Library for Support Vector Machines. Technical report // Computer Science and Information Engineering. National Taiwan University, 2001–2004. <http://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm>.
13. *Collobert R., Bengio S.* SVMTool: Support vector machines for large-scale regression problems // Journal of Machine Learning Research. 2001. Vol. 1. P. 143.
14. *Keerthi S.S., Gilbert E.G.* Convergence of a generalized SMO algorithm for SVM classifier design // Machine Learning. 2002. Vol. 46. P. 351.

## CLASSIFICATION ALGORITHM OF STREAMING SIGNALS BASED ON THE ONLINE SUPPORT VECTOR MACHINE

*A. V. Kovalchuk<sup>1</sup>, N. S. Bellyustin<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Institute of Applied Physics RAS, Nizhny Novgorod

<sup>2</sup>FSBSI Radiophysical Scientific-Research Institute, Nizhny Novgorod

The work proposed a modification of support vector machines (SVM) to train and classify in real time (online) streams of data. The algorithm is tested on the data handwriting figures and shown that its error is comparable to SVM direct solution error. Speed and support vectors number of proposed SVM algorithm is smaller than in other known SVM implementations. Finally, a ternary classifier for 2-class problem is proposed which shows better results than binary.

*Keywords:* Support vector machine, streaming signal classification, online learning, ternary classifier.

### References

1. *Cristianini N., J. Shawe-Taylor J.* An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-Based Learning Methods. Cambridge University Press, 2000.
2. *Makarenko A.V., Pravdivtsev A.V., Volovik M.G.* Problems of modeling and analysis of infrared thermo maps human brain // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2011. Vol. 19, № 6. P. 145. (in Russian).
3. *Cauwenberghs G., Poggio T.* Incremental and Decremental Support Vector Machine Learning // Advances in Neural Information Processing Systems, 2000. P. 409.
4. *Bordes A., Ertekin S., Weston J., Bottou L.* Fast kernel classifiers with online and active learning // Journal of Machine Learning Research. 2005. Vol. 6. P. 1579.
5. *Roobaert D.* DirectSVM: A Simple Support Vector Machine Perceptron. VLSI Signal Processing, 2002. P. 147.

6. *Orabona F., Castellini C., Caputo B., Jie L., Sandini G.* On-line independent support vector machines // Pattern Recognition. 2010. Vol. 43. P. 1402.
7. *Schoelkopf B., Smola A.* New Support Vector Algorithms // NeuroCOLT Technical Report NC2-TR-1998-031. 1998.
8. Algorithms and programs for dependencies reconstruction / Ed. V.N. Vapnik. M.: Physmatlit, 1984 (in Russian).
9. *Vapnik V.* Estimation of Dependences Based on Empirical Data. Berlin: Springer-Verlag, 1982.
10. *Platt J.* Fast training of support vector machines using sequential minimal optimization / Eds B. Scholkopf, C.J.C. Burges, A.J. Smola. Advances in Kernel Methods – Support Vector Learning. Cambridge, MA: MIT Press, 1999.
11. *Rastrigin L.A., Erenstein R.H.* The method of collective recognition. Energoizdat, 1981. 80 p. (in Russian).
12. *Chang C.-C., Lin C.-J.* LIBSVM: A Library for Support Vector Machines. Technical report // Computer Science and Information Engineering. National Taiwan University, 2001–2004. <http://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm>.
13. *Collobert R., Bengio S.* SVMtorch: Support vector machines for large-scale regression problems // Journal of Machine Learning Research. 2001. Vol. 1. P. 143.
14. *Keerthi S.S., Gilbert E.G.* Convergence of a generalized SMO algorithm for SVM classifier design // Machine Learning. 2002. Vol. 46. P. 351.

*Поступила в редакцию 19.11.2015*



*Ковальчук Андрей Викторович* – родился в Нижнем Новгороде (1982). Окончил Нижегородский государственный университет им. Лобачевского (2006). После окончания ННГУ работает в ИПФ РАН. Область научных интересов: динамика в нейронных сетях, машинное обучение, компьютерное зрение, оптоакустика. Опубликовал 30 научных работ по направлениям, указанным выше.

603950 Нижний Новгород, ГСП-120, ул. Ульянова, д. 46  
Институт прикладной физики РАН  
E-mail: [aka.xzib1t@gmail.com](mailto:aka.xzib1t@gmail.com)



*Беллюстин Николай Сергеевич* – родился в Горьком (1950). Окончил с отличием Горьковский государственный университет (1972). После окончания работает в Научно-исследовательском радиофизическом институте на инженерных и научных должностях, в настоящее время – ведущий научный сотрудник. Защитил докторскую диссертацию по радиофизике (2002). В область научных интересов входят исследования волн в плазме и других средах, искусственные нейронные сети, компьютерное зрение. Автор 150 научных работ.

603950 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12а  
ФГБНУ Научно-исследовательский радиофизический институт  
E-mail: [bellyustin@mail.ru](mailto:bellyustin@mail.ru)



## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ УВЕЛИЧЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ЧАСТОТЫ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ СЖАТОГО СОСТОЯНИЯ ПУЧКА

*А. Г. Петрик*

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

В работе проведено численное трехмерное электромагнитное моделирование сжатого состояния релятивистского электронного пучка в двухсекционной системе, состоящей из труб разных диаметров. Исследовано влияние геометрических параметров двухсекционной системы на нелинейную динамику электронного пучка, получены зависимости эффективной плазменной частоты от параметров системы. Из рассчитанных зависимостей можно сделать вывод, что плотность пучка и эффективная плазменная частота могут быть увеличены более чем в 2 раза относительно системы без формирования сжатого состояния.

*Ключевые слова:* Численное моделирование, сжатое состояние, виртуальный катод, эффективная плазменная частота, релятивистский электронный пучок, нелинейная динамика.

### Введение

В радиофизике и электронике больших мощностей представляет интерес изучение образования и динамики виртуального катода в интенсивных электронных потоках плазменных и электровакуумных приборов [1–5]. Виртуальный катод – это нескомпенсированный электрический заряд, который образуется в пучках со сверхкритическим током [6] и приводит к значительному провисанию потенциала в пространстве дрейфа до величин, превышающих ускоряющее напряжение, что приводит к отражению части электронного потока обратно к плоскости инжекции [2–4]. Приборы с виртуальным катодом имеют ряд важных практических применений, например, подобные устройства могут использоваться: в качестве мощных источников электромагнитного излучения [3–8], для генерации широкополосных шумоподобных СВЧ-колебаний [9–11], в мощной коммутационной технике [2, 4], для ускорения ионов [12] и т.д.



Для продвижения подобных устройств в более высокочастотный диапазон требуется исследование вопросов повышения частоты генерации в системах с виртуальным катодом. Типичные значения рабочих частот виркаторов лежат в диапазоне 1...10 ГГц, хотя в последнее время показано, что, используя эффекты генерации высших гармоник [13] или переключения пучковых мод [7], можно повысить рабочие частоты подобных систем до 40...80 ГГц. Фундаментальным ограничением частоты виркаторов является тот факт, что частота колебаний виртуального катода определяется эффективной плазменной частотой пучка. Поэтому повышение частоты генерации виркаторных систем определяется, в основном, возможностью повышения плотности заряда в области виртуального катода, что сложно реализовать на практике. Одним из методов решения задачи является использование более плотных релятивистских интенсивных пучков, однако повышение плотности заряда в пучке ограничено технологическими сложностями, в первую очередь, предельно допустимыми эмиссионными способностями современных катодов [14, 15].

Поэтому представляет интерес исследование альтернативных подходов к повышению плотности пространственного заряда в области виртуального катода за счет формирования более плотных сгустков электронов (см., например, [16]). Одним из возможных подходов в данном направлении является формирование сжатого состояния пучка (ССП), описание которого впервые дано авторами работы [17]. СПП является распределенным в пространстве дрейфа виртуальным катодом, который можно обнаружить по специфическому профилю фазового портрета электронного потока, когда эмитируемые с катода и отраженные от виртуального катода пучки смыкаются вдоль оси скоростей, образуя область сильно нагретого электронного облака, при этом на начальном этапе волна переключения в сжатое состояние распространяется от виртуального катода к эмиттеру, то есть против инжекции пучка [17]. (Альтернативный сценарий развития СПП рассмотрен в работе [18].) Формирование волны переключения ранее было использовано для ускорения ионов. Для СПП характерны большая плотность и малые скорости частиц, а также сильная турбулентность, развивающаяся во встречных потоках. Таким образом, с точки зрения СВЧ-электроники, интерес к исследованию СПП, в первую очередь, связан с тем, что такой распределенный в пространстве виртуальный катод может выступать в роли активной среды для генерации СВЧ-колебаний или усиления внешних сигналов, в том числе и близких по своему спектральному составу к шумоподобным [19, 20].

Целью данной работы стало исследование влияния геометрических параметров системы с двухсекционным пространством дрейфа на плотность электронного потока в сжатом состоянии для выявления возможностей увеличения эффективной плазменной частоты пучка в сжатом состоянии.

### **Исследуемая модель**

В качестве модели для исследования была выбрана система с пространством дрейфа, состоящим из двух сегментов (двух труб с разными диаметрами) и пронизываемым релятивистским электронным потоком. Аналогичная релятивистская виркаторная система с двухсегментным пространством дрейфа пучка была использована в работах [4, 21].

Схема исследуемой системы изображена на рис. 1. В качестве источника электронов выступает трубчатый катод 1, размещенный соосно с первой и второй

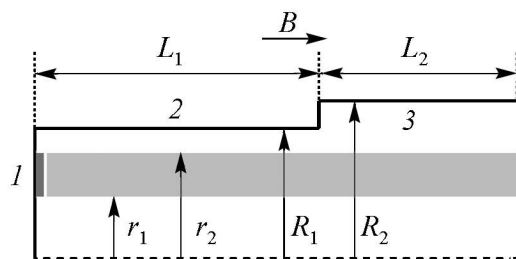


Рис. 1. Схема исследуемой численной модели: 1 – трубчатый катод, 2 – анодная секция, 3 – секция дрейфа

секциями дрейфа. Ток пучка был выбран в данном исследовании равным 7 кА и не менялся. Начальная энергия эмитируемых частиц 500 кэВ. Невозмущенная плазменная частота инжектируемого потока равна 11.5 ГГц. Пучок движется в эквипотенциальном пространстве дрейфа в первой секции, которая на расстоянии  $L_1$  от катода испытывает скачок радиуса, переходя во вторую секцию длиной  $L_2$ , в результате чего на границе между первой и второй секциями дрейфа образуется виртуальный катод за счет превышения критическим током предельного вакуумного значения [6, 22]. Вся система находится во внешнем продольном однородном магнитном поле с индукцией  $B = 50$  кГс, которое фокусирует и удерживает электронный пучок, ограничивая движение частиц в поперечном направлении.

В качестве основных геометрических параметров, зависимость от которых исследуется в данной статье, были выбраны следующие: длина первой секции  $L_1$ , радиус первой трубы  $R_1$  и толщина пучка  $\Delta r = r_2 - r_1$ , где  $r_2$  – внешний и  $r_1$  – внутренний радиусы пучка. Значения остальных геометрических параметров фиксировались:  $L_2 = 70$  мм,  $r_2 = 8$  мм,  $R_2 = 22$  мм.

Все вычисления проводились с использованием лицензионного программного комплекса CST Particle Studio (CST PS) [23]. CST PS является хорошим инструментом для трехмерного моделирования динамики потока заряженных частиц в электромагнитных полях электродинамических систем и все шире используется для современных исследований в электронике большой мощности [24–26]. При расчетах используется PIC (particle-in-cell) вычислитель, предназначенный для моделирования самосогласованной задачи распространения электромагнитных волн и движения заряженных частиц во временной области. При этом электромагнитные поля вычисляются в дискретных узлах путем решения полной системы уравнений Максвелла по схеме с перешагиванием (метод сеток). Моделирование электронного потока осуществлялось методом крупных частиц, при этом для каждой частицы решались уравнения движения самосогласованным образом с уравнениями поля. При моделировании источника электронного потока использовалась модель эмиссии постоянного тока.

## Результаты

Рассмотрим полученные результаты численного моделирования с использованием модели, описанной в предыдущем разделе.

На рис. 2 показан процесс формирования сжатого состояния в исследуемой системе на примере построенных в последовательные моменты фазовых портретов (по оси ординат – импульс, нормированный на произведение массы электрона и скорости света). Первоначально виртуальный катод формируется вблизи плоскости

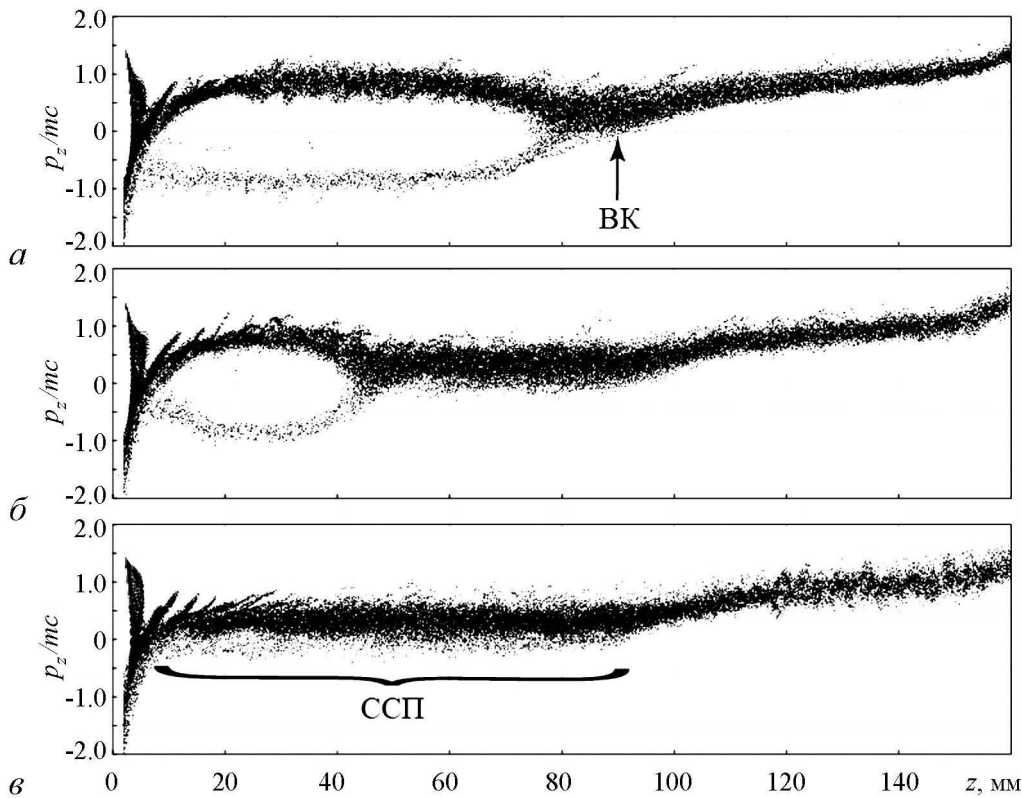


Рис. 2. Мгновенные фазовые портреты пучка, демонстрирующие эволюцию образования сжатого состояния пучка в моменты времени: 2.0 нс (а), 3.1 нс (б) и 4.6 нс (в). Геометрические параметры системы, при которых были сняты фазовые портреты:  $R_1 = 16$  мм,  $L_1 = 90$  мм,  $r_1 = 6$  мм

инъекции, однако проходящий через виртуальный катод ток оказывается достаточно большим, чтобы в области скачка дрейфа ( $L = 90$  мм) наблюдалось существенное провисание потенциала. Данный потенциальный барьер с течением времени возрастает, все сильнее тормозя электроны. Как следствие, в системе в области скачка радиуса между секциями дрейфа формируется второй виртуальный катод (отмечен на рис. 2, а стрелкой ВК). В результате на протяжении всей первой трубы дрейфа возникает двухпотоковое состояние. Электронный поток, проходящий через виртуальный катод, формируемый в области инъекции, и поток, отраженный от второго виртуального катода, постепенно смыкаются вдоль оси скоростей, при этом можно видеть, что волна переключения от двухпотокового к сжатому состоянию распространяется от второго виртуального катода к эмиттеру, то есть против направления распространения инжектируемого пучка (см. рис. 2, б).

Рассмотрим влияние длины первой секции дрейфа  $L_1$  на динамику и формирование ССП. На рис. 3 показана зависимость эффективной плазменной частоты  $f_p$  от длины первой секции  $L_1$ , а также зависимость накопленного в ССП пространственного заряда  $q$  от  $L_1$  при  $R_1 = 16$  мм,  $r_1 = 6$  мм.

Эффективная плазменная частота в области ССП оценивалась в соответствии с формулой

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\langle \rho \rangle_{T,ve}}{m_{\text{рел}} \varepsilon_0}}, \quad (1)$$

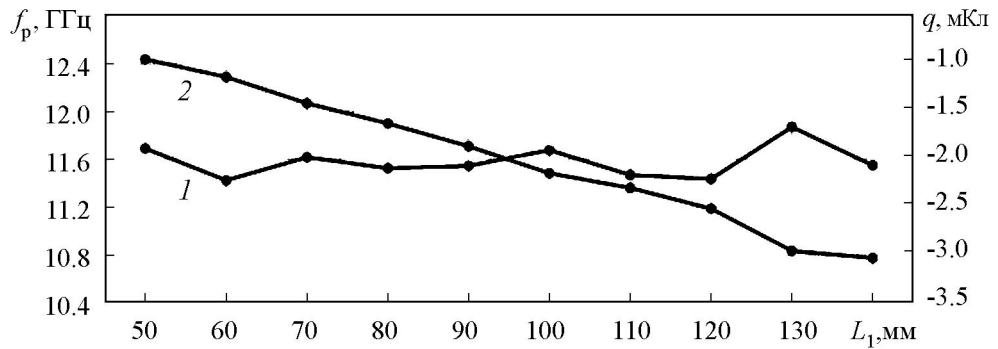


Рис. 3. Зависимость эффективной плазменной частоты  $f_p$  (кривая 1) и пространственного заряда  $q$  (кривая 2) от длины первой секции дрейфа  $L_1$ .  $R_1 = 16$  мм,  $r_1 = 6$  мм

где  $e$  – заряд электрона;  $m_{\text{рел}} = \gamma m_0$  – релятивистская масса электрона с массой покоя  $m_0$  (релятивистскую поправку необходимо использовать в связи с тем, что большое число электронов характеризуются большими значениями лоренцевского фактора – см. рис. 4, на котором показано типичное распределение электронов по величине лоренцевского фактора  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ );  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная;  $\langle \rho \rangle_{T,V}$  – плотность заряда, усредненная по объему пучка в первой секции (в пределах которой образуется ССП)

$$\langle \rho(t_0) \rangle_V = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{L_1} \rho(l, r, \varphi) r dl dr d\varphi \quad (2)$$

и по времени после окончания переходного процесса (интервал  $t_2 - t_1$ ,  $t_1 = 20$  нс,  $t_2 = 30$  нс)

$$\langle \rho \rangle_{T,V} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \langle \rho(t) \rangle_V dt \quad (3)$$

Из зависимости, соответствующей величине эффективной плазменной частоты (кривая 1 на рис. 3), видно, что при увеличении длины первой секции (то есть протяженности сжатого состояния) отсутствует какая-либо тенденция к росту или падению плазменной частоты, ее значение колеблется с малой амплитудой порядка 0.2 ГГц в окрестности значения 10.2 ГГц, то есть значения, близкого величине плазменной частоты пучка

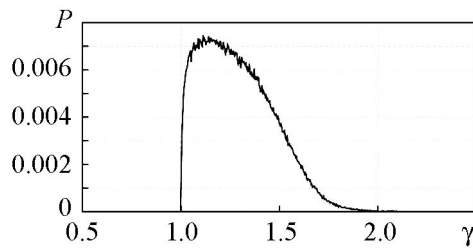


Рис. 4. Распределение лоренцевского фактора электронов релятивистского пучка, инжектируемого в составную трубу дрейфа. Параметры системы:  $R_1 = 16$  мм,  $R_2 = 22$  мм,  $L_1 = 90$  мм,  $L_2 = 70$  мм,  $r_1 = 6$  мм,  $r_2 = 8$  мм

в плоскости инжекции до формирования виртуального катода. Одновременно, накопленный в системе пространственный заряд монотонно растет с увеличением длины первой секции  $L_1$ , которая фактически определяет протяженность формируемого ССП. Важно, что величина накопленного простран-

ного заряда в области ССП зависит от длины секции линейно, что позволяет реализовать значительные величины  $q$ . Этот факт может способствовать реализации методов увеличения мощности выходного излучения подобной системы, например, при усилении сигналов за счет увеличения протяженности ССП. Можно сделать вывод, что увеличение длины первой секции дрейфа  $L_1$ , в которой образуется ССП, слабо влияет на значение плотности пространственного заряда и плазменной частоты, но способствует накоплению суммарного пространственного заряда в ней. Для дальнейшего моделирования было выбрано значение длины первой секции  $L_1 = 130$  мм, при котором наблюдается небольшой локальный максимум эффективной плазменной частоты в области ССП.

Рассмотрим теперь зависимость эффективной плазменной частоты  $f_p$  от радиуса первой секции дрейфа  $R_1$ . С помощью данной зависимости можно проиллюстрировать, как влияет величина скачка радиуса системы на плотность пучка и эффективную плазменную частоту в области ССП. Зависимость  $f_p$  от радиуса цилиндрического пространства первой секции  $R_1$  изображена на рис. 5. Значения остальных параметров системы указаны в подписи к рисунку. Из рисунка хорошо видно, что радиус первой секции дрейфа и приближение внешней границы пучка, определяемое величиной  $r_2$ , к поверхности границы пространства дрейфа сильно влияет на эффективную плазменную частоту. С уменьшением радиуса  $R_1$  и, как следствие, с уменьшением расстояния между пучком и поверхностью трубы наблюдается рост значения плазменной частоты до величины порядка 20 ГГц при  $R_1 = 8.5$  мм. Физически подобное поведение объясняется тем, что с увеличением радиуса пучка и приближением его к поверхности пространства дрейфа увеличивается влияние эффекта компенсации сил пространственного заряда (эффект редукции) за счет наличия проводящего экрана [27], что позволяет существенно увеличить (более чем в 4 раза) плотность пространственного заряда в области сжатого состояния потока. Рост плотности происходит до определенного значения величины радиуса, пока  $R_1$  не станет меньше 8.5 мм. При данном критическом значении  $R_1$  электронный пучок, несмотря на сильное внешнее фокусирующее магнитное поле, начинает осаждаться на стенках трубы дрейфа первой секции за счет увеличивающихся дефокусирующих сил пространственного заряда, что и приводит к уменьшению величины накопленного пространственного заряда, а следовательно, и эффективной плазменной частоты в ССП.

Стоит также отметить, что, когда радиус пучка  $R_1$  превышает значение 17 мм (показано стрелкой на рис. 5), происходит разрушение сжатого состояния. Это выражается в том, что на фазовом портрете ССП более не представляет сжатую область близких к нулю продольных скоростей, а в системе наблюдается постепенное «размывание» ССП. На рис. 6 представлены соответствующие иллюстрации фазовых портретов

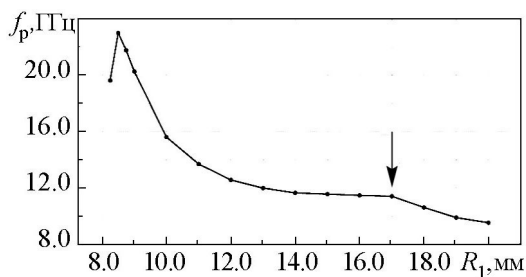


Рис. 5. Зависимость эффективной плазменной частоты  $f_p$  от радиуса первой секции дрейфа  $R_1$  при  $L_1 = 130$  мм,  $r_1 = 6$  мм

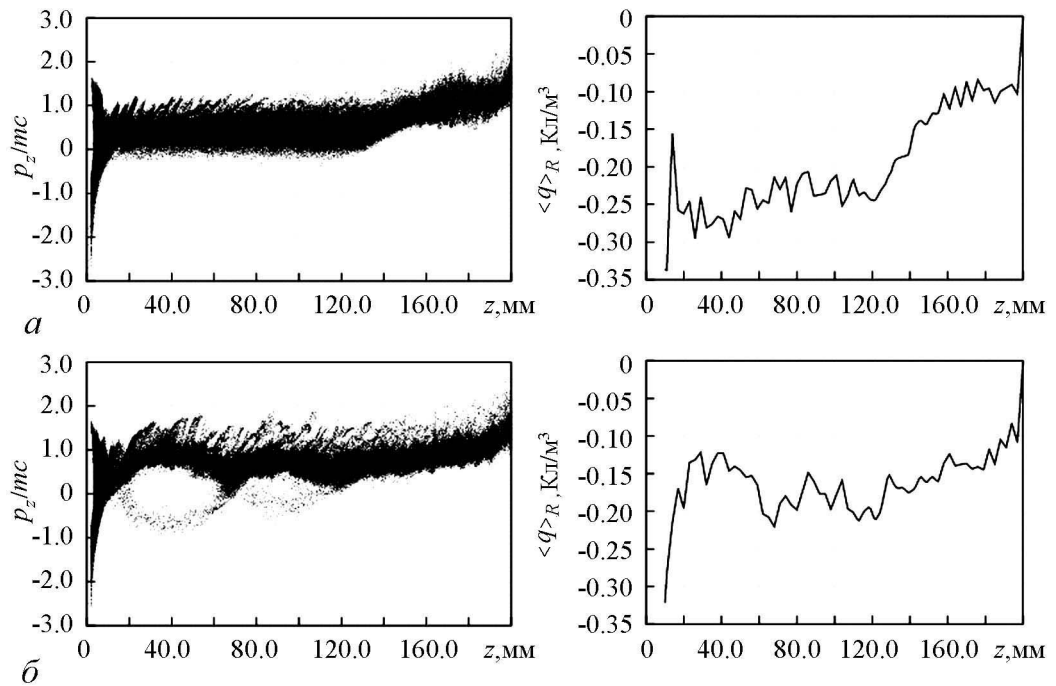


Рис. 6. Характерные фазовые портреты пучка и соответствующие им зависимости усредненного по радиусу значения плотности заряда от продольной координаты. При значении  $R_1 = 16$  мм (а) ССП формируется, а при  $R_1 = 20$  мм (б) происходит разрушение ССП и количество накопленного заряда в области первой секции уменьшается

для  $R_1 = 16$  мм и  $R_1 = 20$  мм. Видно, что во втором случае на фазовом портрете не наблюдается хорошо выраженное ССП. В первой трубе дрейфа происходит рост скоростей электронов, а следовательно, существенно снижается плотность накопленного в первом пространстве дрейфа заряда и эффективная плазменная частота. На зависимости  $f_p(R_1)$  (см.рис. 5) заметно более резкое уменьшение эффективной плазменной частоты по сравнению со случаем, когда ССП сформировано. Соответствующие зависимости усредненного по радиусу значения плотности заряда от продольной координаты (см.рис.6, б) также демонстрируют уменьшение накопленного заряда в области первой секции дрейфа.

Рассмотрим теперь влияние толщины пучка  $\Delta r$  на величину эффективной плазменной частоты пучка в области ССП. Для определенности внешний радиус

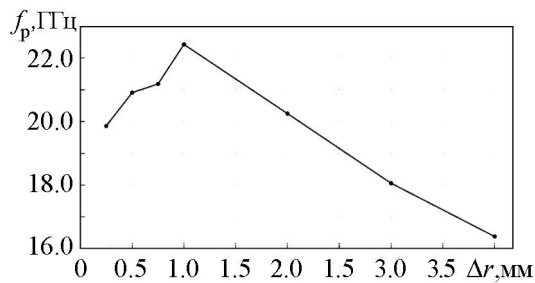


Рис. 7. Зависимость эффективной плазменной частоты  $f_p$  от толщины пучка  $\Delta r$  при  $R_1 = 9$  мм,  $L_1 = 130$  мм

пучка  $r_2$  зафиксируем и будем менять внутренний радиус  $r_1$  пучка для варьирования  $\Delta r$ . Рассчитанная зависимость эффективной плазменной частоты  $f_p$  от толщины  $\Delta r$  представлена на рис. 7. Значения остальных параметров расчета:  $R_1 = 9$  мм,  $L_1 = 130$  мм. Из полученной зависимости можно сделать вывод, что эффективная плазменная частота при больших толщинах пучка уменьшается с ростом  $\Delta r$  линейно. Это спра-

ведливо для относительно больших толщин пучка  $\Delta r \geq 1$  мм, тогда как для  $\Delta r < 1$  мм эффективная плазменная частота начинает быстро уменьшаться, что связано со значительным увеличением расфокусировки пучка за счет увеличивающихся сил пространственного заряда при уменьшении толщины пучка и, следовательно, увеличении невозмущенной плазменной частоты пучка. Следует также отметить, что при переходе через критическое значение параметра  $\Delta r$  пролетный и отраженный пучки на фазовом портрете перестают смыкаться вдоль оси скоростей, сжатое состояние более не образуется. Можно сделать вывод, что для рассматриваемых параметров системы максимальная плотность заряда, которую возможно достичь в ССП, составляет величину порядка 20 ГГц.

### Заключение

Проведено трехмерное электромагнитное моделирование в лицензионной среде CST Particle Studio релятивистского электронного пучка в двухсекционной системе с двумя составными трубами разных диаметров. Показано, что геометрические параметры системы, а именно скачок радиуса между первой и второй секциями дрейфа, радиус и толщина электронного пучка существенно влияют на значение эффективной плазменной частоты пучка в области ССП. Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации параметров релятивистских пучково-плазменных генераторов со сверхкритическим током для повышения их рабочей частоты.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 14-02-31149.*

### Библиографический список

1. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. М.: Физматлит, 2003.
2. Benford J., Swegle J.A., Schamiloglu E. High Power Microwaves. CRC Press, Taylor and Francis, 2007.
3. Дубинов А.Е., Селемир В.Д. Электронные приборы с виртуальным катодом // Радиотехника и электроника. 2002, Т. 47. № 6. С. 575.
4. Дубинов А.Е., Ефимова И.А., Корнилова И.Ю., Сайков С.К., Селемир В.Д., Тараканов В.П. Нелинейная динамика электронных пучков с виртуальным катодом // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2004. Т. 35, вып. 2. С. 462.
5. Диденко А.Н., Красик Я.Е., Перелыгин С.Ф., Фоменко Г.П. Генерация мощного СВЧ-излучения релятивистским электронным пучком в триодной системе // Письма в ЖТФ. 1979, Т. 5. № 6. С. 321.
6. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 2. М.: Физматлит, 2004.
7. Kurkin S.A., Badarin A.A., Koronovskii A.A., Hramov A.E. Higher harmonics generation in relativistic electron beam with virtual cathode // Physics of Plasmas. 2014. Vol. 21, № 9. P. 093105.

8. Kurkin S.A., Hramov A.E., Koronovskii A.A. Microwave radiation power of relativistic electron beam with virtual cathode in the external magnetic field // Applied Physics Letters. 2013. Vol. 103. P. 043507.
9. Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е., Егоров Е.Н., Филатов Р.А. Экспериментальное и теоретическое исследование хаотических колебательных явлений в нерелятивистском электронном потоке с виртуальным катодом // Физика плазмы. 2005. Т. 31, № 11. С. 1009.
10. Калинин Ю.А., Храмов А.Е. Экспериментальное и теоретическое исследование влияния распределения электронов по скоростям на хаотические колебания в электронном потоке в режиме образования виртуального катода // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 5. С. 25.
11. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurkin S.A. Numerical study of chaotic oscillations in the electron beam with virtual cathode in the external non-uniform magnetic fields // Applied Physics Letters. 2010, Vol. 374, № 30. P. 3057.
12. Дубинов А.Е., Корнилова И.Ю., Селемир В.Д. Коллективное ускорение ионов в системах с виртуальным катодом // УФН. 2002. Т. 172, № 11. С. 1225.
13. Kurkin S.A., Koronovskii A.A., Hramov A.E. Effect of the electron beam modulation on the sub-THz generation in the vircator with the field-emission cathode // J. Plasma Physics. 2015. Vol. 81. P. 905810320.
14. Krasik Ya.E., Dunaevsky A., Felsteiner J. Plasma sources for high-current electron beam generation // Physics of Plasmas. 2001. Vol. 8, № 5. P. 2466.
15. Shlapakovski A.S., Kweiler T., Hadas Y., Krasik Ya.E., Polevin S.D., Kurkan I.K. Effects of different cathode materials on submicrosecond double-gap vircator operation // IEEE Transactions on Plasma Science. 2009. Vol. 37, № 7. P. 1233.
16. Дубинов А.Е., Макаров И.В., Садовой С.А., Сайков С.К., Тараканов В.П. Особенности накопления зарядов в высокопоточной электронной ловушке // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37, № 5. С. 81.
17. Ignatov A.M., Tarakanov V.P. Squeezed state of high-current electron beam // Physics of Plasmas. 1994. Vol. 1, № 3. P. 741.
18. Петрик А.Г. О механизме формирования сжатого состояния релятивистского электронного пучка в составной трубе дрейфа // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т.22, №6. С.35.
19. Егоров Е.Н., Короновский А.А., Куркин С.А., Храмов А.Е. Формирование и нелинейная динамика сжатого состояния винтового электронного пучка с дополнительным торможением // Физика плазмы. 2013. Т. 39, № 11, С. 1033.
20. Дубинов А.Е., Ефимова И.А. Колебания сжатого состояния электронных пучков в виркаторе на встречных потоках // Электромагнитные волны и электронные системы. 2003. Т. 8, № 11–12. С. 55.
21. Дубинов А.Е. Сценарии установления «сжатого состояния» электронного потока в магнитоизолированном виркаторе // Письма в ЖТФ, 1997, Т. 23, № 22, С. 29.
22. Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Устойчивость релятивистских электронных по-



- токов в плазме и проблема критических токов // Успехи физических наук. 1971. Т. 103, № 4. С. 609.
23. <https://www.cst.com/products/cstps>.
24. *Champeaux S., Gouard P., Cousin R., Larour J.* 3-D PIC numerical investigations of a novel concept of multistage axial vircator for enhanced microwave generation // IEEE Transactions on Plasma Science. 2015. Vol. 43, № 11. P. 3841.
25. *Kurkin S.A., Frolov N.S., Rak A.O., Koronovskii A.A., Kurayev A.A., Hramov A.E.* High-power microwave amplifier based on overcritical relativistic electron beam without external magnetic field // Applied Physics Letters. 2015. Vol. 106. P. 153503.
26. *Kurkin S.A., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Rak A.O.* Optimization of the double-gap vircator with electromagnetic feedback in CST particle studio // IEEE International on Vacuum Electronics Conference (IVEC). 2014, P. 389.
27. *Лебедев И.В.* Техника и приборы СВЧ. Ч. I и II. М.: Высшая школа, 1972.

*Поступила в редакцию* 22.11.2015  
*После доработки* 10.12.2015

# **NUMERICAL SIMULATION OF ELECTRON-BEAM «SQUEEZED» STATE IN PURPOSE TO STUDY THE POSSIBILITY OF EFFECTIVE PLASMA FREQUENCY INCREASE**

*A. G. Petrik*

Saratov State Technical University

Three-dimensional electromagnetic numerical simulation is carried out of «squeezed» state of the electron beam in two-section vircator system with drift tubes of different diameters. We have studied the influence of two-section system geometric parameters on the nonlinear dynamics of electron beam. We have obtained an effective plasma frequency depending on the system parameters. From the calculated dependencies it can be concluded that the density of the beam and the effective plasma frequency can be increased more than twice relative to the system without the formation of the «squeezed» state.

*Keyword:* Numerical simulation, «squeezed» state, virtual cathode, effective plasma frequency, relativistic electron beam, nonlinear dynamics.

## **References**

1. *Trubetskoy D.I., Hramov A.E.* Lectures on Microwave Electronics for Physicists. Vol. 1. Moskva: Fizmatlit, 2003. (In Russian).
2. *Benford J., Swegle J.A., Schamiloglu E.* High Power Microwaves. CRC Press, Taylor and Francis, 2007.
3. *Dubinov A.E., Selemir V.D.* // Journal of Communications Technology and Electronics. 2002. Vol. 47, № 6. P. 575.

4. Dubinov A.E., Efimova I.A., Kornilova I.Yu., Saikov S.K., Selemir V.D., Tarakanov V.P. // Physics of Particles and Nuclei. 2004. Vol. 35, № 2. P. 251.
5. Didenko A.N., Krasik Ya.E., Pereligin S.F., Fomenko G.P. // Sov. J. Tech. Phys. Lett. 1979. Vol. 5. P. 128.
6. Trubetskov D.I., Hramov A.E. Lectures on microwave electronics for physicists. Vol. 2. Moskva: Fizmatlit, 2004. (In Russian).
7. Kurkin S.A., Badarin A.A., Koronovskii A.A., Hramov A.E. // Physics of Plasmas. 2014. Vol. 21, № 9. P. 093105.
8. Kurkin S.A., Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Applied Physics Letters. 2013. Vol. 103. P. 043507.
9. Kalinin Yu.A., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Egorov E.N., Filatov R.A. // Plasma Physics Reports. 2005. Vol. 31. P. 938.
10. Kalinin Yu.A., Hramov A.E. // Technical Physics. 2006. Vol. 51. P.558.
11. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurkin S.A. // Applied Physics Letters. 2010, Vol. 374, № 30. P. 3057.
12. Dubinov A.E., Kornilova I.Yu., Selemir V.D. // Physics-Uspekhi. 2002. Vol. 45, № 11. P.1109.
13. Kurkin S.A., Koronovskii A.A., Hramov A.E. // J. Plasma Physics. 2015. Vol. 81. P. 905810320.
14. Krasik Ya.E., Dunaevsky A., Felsteiner J. // Physics of Plasmas. 2001. Vol. 8, № 5. P. 2466.
15. Shlapakovski A.S., Kweiler T., Hadas Y., Krasik Ya.E., Polevin S.D., Kurkan I.K. // IEEE Transactions on Plasma Science. 2009. Vol. 37, № 7. P. 1233.
16. Dubinov A.E., Makarov I.V., Sadovoy S.A., Saikov S.K., Tarakanov V.P. // Technical Physics Letters. 2011, Vol. 37, Issue 3. P.230–232.
17. Ignatov A.M., Tarakanov V.P. // Physics of Plasmas. 1994. Vol. 1, № 3. P. 741.
18. Petrik A.G. // Izvestiya VUZ. Prikladnaya Nelineynaya Dinamika. 2014. Vol.22, №6. S.35. (In Russian).
19. Egorov E.N., Koronovskii A.A., Kurkin S.A., Hramov A.E. // Plasma Physics Reports. 2013. Vol. 39, № 11. P. 925–935.
20. Dubinov A.E., Efimova I.A. // Electromagnetic Waves and Electronic Systems. 2003, Vol. 8, № 11–12. P. 55. (In Russian).
21. Dubinov A.E. // Tech. Phys. Lett. 1997. Vol.23. P. 870.
22. Bogdankevich L.S., Ruhadze A.A. // Sov. Physics Uspekhi. 1971, Vol. 14. P. 163.
23. <https://www.cst.com/products/cstps>.
24. Champeaux S., Gouard P., Cousin R., Larour J. 3-D PIC numerical investigations of a novel concept of multistage axial vircator for enhanced microwave generation // IEEE Transactions on Plasma Science. 2015. Vol. 43, № 11. P. 3841.
25. Kurkin S.A., Frolov N.S., Rak A.O., Koronovskii A.A., Kurayev A.A., Hramov A.E. // Applied Physics Letters. 2015. Vol. 106. P. 153503.
26. Kurkin S.A., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Rak A.O. // IEEE International on Vacuum Electronics Conference (IVEC). 2014, P. 389.

27. *Lebedev I.V.* Microwave Devices. Vol. 1–2. Moskva: Vyschaya shkola, 1972. (In Russian).



*Петрик Алексей Георгиевич* – родился в Саратове (1992). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского по специальности «Физика открытых нелинейных систем» (2014). С 2014 года – аспирант Саратовского государственного технического университета. Область научных интересов – исследование интенсивных электронных пучков, изучение механизмов образования и динамики виртуального катода в различных системах.

410054 Саратов, ул. Политехническая, 77

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

E-mail: a.g.petrik@gmail.com



## ПОСТРОЕНИЕ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБРАБОТКИ ЗРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В НОРМАЛЬНОМ СОСТОЯНИИ И ОПИСАНИЕ ПЕРЕХОДА К ПАТОЛОГИЧЕСКОМУ ЭПИЛЕПТИФОРМНОМУ РЕЖИМУ

*И. В. Нуйдель<sup>1</sup>, М. Е. Соколов<sup>1</sup>, В. Г. Яхно<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Институт прикладной физики РАН, Н. Новгород

<sup>2</sup>Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматривается функциональная модель преобразования сигналов в сетях однотипных связанных между собой активных элементов. С одной стороны, это макроскопическая модель таламокортикальных динамических взаимодействий между нейронными ансамблями, и на ней можно рассматривать нормальные и патологические режимы обработки сигналов (например, изображений). С другой стороны, модель и результаты расчётов можно рассматривать как вариант моделирования эпилепсии в таких системах. В работе развивается информационный макроскопический подход к моделированию нормальных режимов обработки и эпилептиформных режимов, который в этом смысле можно считать уникальным.

**Ключевые слова:** Симуляторы нейронных сетей, нейроморфные модели, моделирование преобразования сенсорных сигналов в таламокортикальных нейронных ансамблях, таламокортикальные цепи, кортикоталамические взаимодействия, моделирование эпилепсии.

### Введение

**Сложности в моделировании эпилепсии.** Эпилепсия является патологическим состоянием, которое может возникнуть по нескольким причинам и приводит к характерным изменениям в мозге на различных уровнях: субклеточном (мембраны ионных каналов, нейротрансмиттерные системы), клеточном (нейроны), тканевом (сети нейронов), модульном (модули из нейронных сетей). Чтобы проследить, как изменения на одном уровне могут повлиять на другие, мы используем интегративный подход к моделированию эпилепсии.

В настоящее время развиваются экспериментальные и вычислительные модели эпилепсии. Создаются экспериментальные модели *in vivo* на животных (например, для изучения действия фармакологических препаратов на животных с генетической эпилепсией) и *in vitro* на культурах клеток (например, для поиска условий возникновения вспышечной активности на культуре клеток гиппокампа). Начиная с

1970-х годов разрабатываются различные вычислительные модели эпилепсии, применяемые для интерпретации экспериментальных данных и разработки гипотез, которые в дальнейшем могут быть проверены экспериментально.

В последнее десятилетие применяются два взаимодополняющих подхода в вычислительных моделях эпилепсии: детальный и макроскопический. Огромный плюс двух подходов в моделировании состоит в возможности таких вычислительных моделей формализовать и связать между собой разные уровни анализа (фрактальность модельного описания). Например, вычислительные модели сети взаимосвязанных нейронов и интернейронов могут помочь одновременно изучать механизмы, лежащие на уровне клетки и на уровне сети, и имитировать соответствующие активности, которые могут быть экспериментально записаны (внутриклеточный потенциал или активность связанных элементов, которая является аналогом локального потенциала поля).

**Детальный подход к моделированию.** Детальный подход опирается на точное моделирование структуры нервных клеток (дендриты, сома, аксон) и их функций, которые сильно зависят от свойств мембраны нейрона. Развитие этот подход получил из-за возможности ведения внутриклеточной записи потенциалов и теоретического описания процессов в клетке с помощью уравнений ионного транспорта, впервые предложенных Ходжкиным и Хаксли [1].

Значительное число нейронных моделей находятся в свободном доступе [2] и наиболее сложные версии могут учитывать даже 3D геометрию фактических дендритных деревьев. Эти модели объяснили некоторые основные механизмы, посредством которых возникает синхронизированная вспышечная активность [3].

Также эти модели способны генерировать паттерны активности, аналогичные зарегистрированной «in vitro» эпилептиформной активности, поэтому они являются имитационными моделями. Верификация (проверка) биологической правдоподобности таких моделей осуществляется по электрофизиологическим данным (электроэнцефалограмма, ЭЭГ).

**Макроскопический подход.** Второй подход часто называют макроскопическим или распределенным. Рассматриваются связанные локализованные популяции (ансамбли) нейронов (например, пирамидальные клетки и интернейроны коры). В модели считается динамика нейронного ансамбля и рассматриваются макроскопические взаимодействия между нейронными ансамблями. Пионерские работы в этом направлении начали в 1970-х годах Wilson and Cowan [4]. Они выдвинули как аксиому следующее предположение: все нервные процессы зависят от взаимодействия возбуждающих и тормозных клеток. Этот подход породил целую серию работ с различными вариациями такой модели [5, 6], но все они были ограничены невозможностью сопоставить их измерениям в реальных биологических организмах.

Но теперь новые экспериментальные техники позволяют проверить адекватность макроскопических моделей [7], что вызывает особый интерес к таким моделям. Кроме того, стоит учитывать по-прежнему ограниченные мощности компьютеров для моделирования крупномасштабных нейронных сетей с явным представлением всех нейронов. Например, Suffczynski et al. [8] разработали вычислительную модель таламо-корковых сетей, которая включает в себя субпопуляции таламокортикальных клеток, клеток ретикулярного ядра, корковых пирамидальных клеток и интернейронов коры.

Модель используется для анализа переходов от нормального режима к синхронной эпилептической активности. Показан случайный характер возникновения припадков, который может быть объяснен свойством бистабильности таламокортикальной системы. Таким образом, упрощенные макроскопические модели могут воспроизводить характерные черты перехода от нормального режима к эпилепсии и дают возможность подобрать параметры, которые отвечают за возникновение пароксизмальной активности [9,10]. На таких моделях можно точно воспроизвести ЭЭГ, записанные у пациентов во время перехода от интериктальных (поведенческих) проявлений к иктальной (припадок) деятельности.

В монографии [11] изложены самые полные и современные данные по различным моделям эпилептических и переходных процессов.

**Перспективы.** В ближайшие годы можно ожидать, что вычислительные нейронауки будут развиваться, и исследования условий возникновения эпилепсии приведут к пониманию механизмов управления в мозге.

На клеточном уровне модели будут включать все больше и больше информации о фактических нейронах (ионы, каналы, рецепторы). На сетевом уровне будут моделироваться крупномасштабные нейронные системы, такие как, например, проект под названием «Blue Brain» [12], направленный на воспроизведение колонки неокортекса, состоящей из точно смоделированных пирамидальных клеток, соединенных между собой через тридцать миллионов синапсов с точной 3D локализацией. Ожидается, что сетевые модели будут включать не только нервные клетки, но и астроциты (их роль в эпилепсии по-прежнему является предметом дискуссий).

Проблемой таких моделей является избыточная сложность и огромное число параметров, поэтому наряду с ними будут развиваться макроскопические модели в целях изучения и объяснения, как начинается эпилептическая активность и происходит её генерализация. То есть нужны методики для преодоления барьера между моделированием на микроскопическом и макроскопическом уровнях; будут оптимизироваться методы идентификации параметров модели для решения ключевого вопроса получения значений параметров модели непосредственно из реальных данных. Будет изучаться эволюция этих параметров во времени для того, чтобы получить представление о переходах между нормальной и эпилептической активностью.

Численное моделирование будет интегрировать больше информации из биофизики, чтобы более точно и лучше воспроизвести и интерпретировать информацию, полученную в реальном наблюдении. Вычислительные модели должны разрабатываться в тесной связи с экспериментальными. Проверка модели является сложным вопросом [13], и уровень моделирования здесь имеет решающее значение. Главной проблемой является нахождение компромисса между созданием очень подробных моделей и использованием их результата на практике [14]. Трудности верификации также увеличиваются с уровнем детализации.

**Информационный макроскопический подход к моделированию эпилепсии.** В настоящей работе развивается информационный макроскопический подход к моделированию эпилепсии, который носит концептуальный характер, то есть позволяет рассмотреть важные принципы обработки сигналов в таламокортикальных сетях.

Общеизвестно, что человек и животные обрабатывают информацию различных модальностей: звуковые, зрительные, тактильные внешние стимулы. В нор-

мальном режиме обработки информации поведение, двигательные, мыслительные, психические и другие функции адекватны внешней ситуации. При регистрации ЭЭГ сигналов мозга в нормальном режиме (при обработке информации) колебания электрической активности в отделах мозга асинхронные и низкоамплитудные. При эпилепсии с разной этиологией или органическими изменениями в мозге процесс восприятия информации нарушается. Во время припадка происходит нарушение двигательных, вегетативных, мыслительных, психических функций.

Еще в 1912 году П.Ю. Кауфман в работе «Электрические явления в коре головного мозга» впервые описал ЭЭГ во время судорожного приступа. Он выдвинул гипотезу, согласно которой судорожный припадок проявляется ненормальной волновой активностью в ЭЭГ.

Существует более 40 видов эпилепсий различной этиологии. Основной чертой всех видов припадков считается параксизмальная синхронизованная спонтанная электрическая активность нейронов, наблюдаемая на ЭЭГ. Наиболее распространенные типы первично-генерализованных приступов, отличающихся вовлечением в патологический процесс обоих полушарий мозга, – тонико-клонические (судорожные) приступы и абсансы.

Абсансная эпилепсия представляет собой одну из форм неконвульсивной генерализованной эпилепсии. Интерес учёных именно к этому заболеванию обусловлен отсутствием точных методик предсказания начала приступа и спорами о механизмах его формирования. Этот вид эпилепсии широко распространён среди детей и характеризуется внезапной кратковременной (до 10 с) остановкой деятельности ребенка (игры, разговор); ребенок замирает, не реагирует на оклик, а через несколько секунд продолжает прерванную деятельность. Пациенты не осознают и не помнят припадков. Частота абсансов может достигать нескольких десятков в сутки.

Основным признаком абсансной эпилепсии является спонтанное возникновение в ЭЭГ генерализованных высокоамплитудных разрядов пик-волна. Исследование механизмов возникновения, поддержания и окончания статуса абсансной эпилепсии – важная задача нейрофизиологии.

Свойства и механизмы разрядов пик-волна были подробно исследованы в экспериментах на животных с генетической абсансной эпилепсией (линии крыс GAERS и WAG/Rij, [15–18]). Разряд пик-волна представляет собой результат ритмической пароксизмальной таламокортикальной активности. Каждый разряд начинается в соматосенсорной области коры («hot spot» [19]) и поддерживается за счет работы пейсмекера, расположенного в ретикулярном ядре таламуса [20]. В результате сложных реципрокных таламокортикальных взаимодействий формируются характерные высокоамплитудные разряды [20].

Хотя эпилепсия сейчас активно исследуется, идёт поиск лекарственных препаратов, актуальными остаются понимание схем и связей между нейрональными модулями, отвечающими за эпилептиформную активность. Это и является темой исследования настоящей работы.

## Модель

Известно, что практически все информационные сигналы проходят в мозге через кору, ретикулярные ядра таламуса, специфический таламус. Важно выяснить,

как преобразуются входные сенсорные сигналы в этих отделах мозга и какие внутренние процессы могут ограничить и полностью нарушить их совместную работу. Одним из вариантов таких нарушений является эпилепсия.

Интегративный подход к исследованию предполагает, с одной стороны, рассмотрение режимов моделей таламокортикальных систем как нелинейных динамических систем, а с другой стороны, проверку согласования теоретических выводов моделей и экспериментальных условий с целью перехода из режима параксизмальной активности в нормальный режим.

В работе приведены результаты расчетов на функциональной модели взаимодействия нейронных модулей в процессе обработки информации в таламокортикальной системе.

Архитектуру настоящей модели, которая показана на рис. 1, определяют взаимодействующие звенья таламокортикальной цепи. Здесь знаками «+» и «-» показаны возбуждающие и тормозные связи, соответственно. Стрелка в нижней части рисунка указывает на сенсорный вход в таламус.

В модель включены четыре однотипных взаимосвязанных нейронных модуля. В модели рассматривается ситуация, когда нейронные ансамбли коры одного модуля воздействуют на нейронные ансамбли коры других модулей. Состояние модуля описывается четырьмя переменными, определяющими распределение возбуждения в соответствующих нейронных ансамблях.

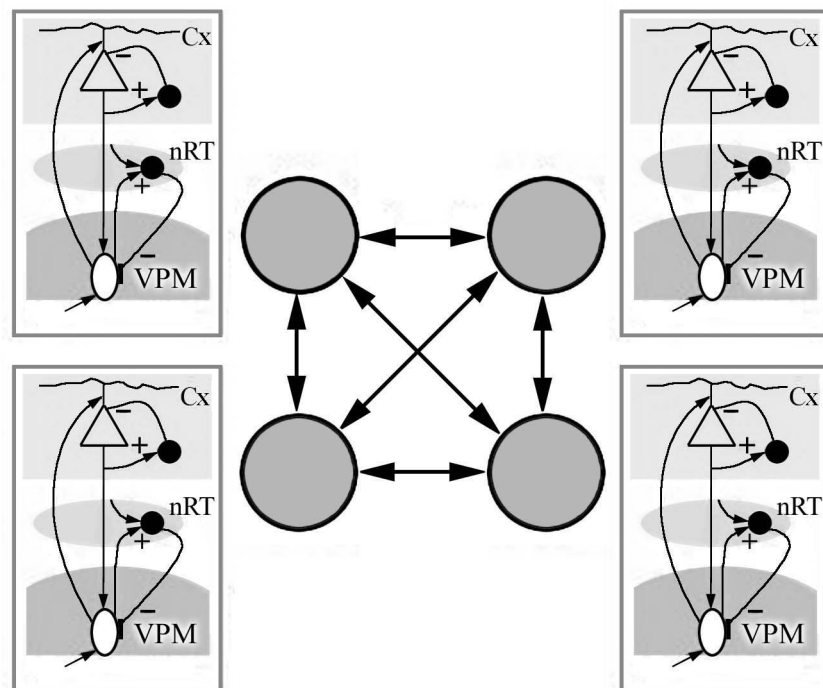


Рис. 1. Схема взаимодействия четырёх однотипных таламокортикальных модулей. Каждый модуль состоит из ансамблей пирамидальных нейронов и тормозных интернейронов коры (Cx), нейронов специфических таламических ядер (специфические ядра, VPM) и тормозных нейронов ретикулярного ядра таламуса (неспецифические ядра, nRT), связанных между собой возбуждающими и тормозящими связями. Модули связаны между собой через ансамбли нейронов коры головного мозга



$U_1$  – переменная, соответствующая активности сенсорных (релейных) ядер таламуса;

$U_2$  – переменная, соответствующая активности нейронов коры;

$U_3$  – переменная, соответствующая активности тормозных интернейронов коры;

$U_4$  – переменная, соответствующая активности ретикулярных ядер таламуса.

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1^j}{\partial t} &= -\frac{U_1^j}{\tau_1^j} + k_1^j F_1 \left[ -T_1^j + k_{ex}^j U_{ex}^j + k_{12}^j U_2^j + k_{14}^j \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{14}^j(\vec{\xi}) U_4^j(\vec{r} - \vec{\xi}, t) d\vec{\xi} \right], \\ \frac{\partial U_2^j}{\partial t} &= -\frac{U_2^j}{\tau_2^j} + k_2^j F_2 \left[ -T_2^j + k_{21}^j U_1^j - k_{23}^j U_3^j + \right. \\ &\quad \left. + k_{22}^j \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{22}^j(\vec{\xi}) U_2^j(\vec{r} - \vec{\xi}, t) d\vec{\xi} + \sum_{i \neq j} \gamma_i^j \int_{-\infty}^{\infty} U_2^i d\vec{r} \right], \\ \frac{\partial U_3^j}{\partial t} &= -\frac{U_3^j}{\tau_3^j} + k_3^j F_3 \left[ -T_3^j + k_{32}^j U_2^j \right], \\ \frac{\partial U_4^j}{\partial t} &= -\frac{U_4^j}{\tau_4^j} + k_4^j F_4 \left[ -T_4^j + k_{41}^j U_1^j + k_{42}^j U_2^j \right].\end{aligned}\tag{1}$$

Переменные модели имеют следующий физический смысл.

Для модуля  $j$  переменная  $U_i(x, y, t)$  представляет собой распределение возбуждения в двумерной нейроноподобной системе по пространству и во времени и имеет смысл относительного количества возбуждённых волокон в малом объеме в окрестности  $(x, y)$  в момент времени  $t$  (говоря другими словами, это проекция распространяющегося по нервным путям возбуждения от соответствующего рецептивного поля, активированного внешним стимулом). Используется теоретическая модель участков коры как двумерных плоских слоев, состоящих из большого количества нейроноподобных однотипных активных пороговых элементов [4, 6, 21].

$F_i$  – нелинейная пороговая функция активации типа конечного скачка (например сигмоидальная функция);

$T_i$  – порог активации (параметр, связанный с внутрикорковым торможением);

$\tau_i$  – характерное время затухания начального возмущения при  $F_i = 0$ ;

$k_i$  – плотность активируемых нейронов;

$k_{вх}$  – сила влияния входного сигнала;

$k_{ij}$  – сила влияния  $j$ -го участка на  $i$ -й;

$U_{вх}$  – начальное возбуждение ансамбля нейронов в слое, являющееся проекцией доставленного по нервным путям возбуждения от соответствующего рецептивного поля сенсоров, активированного внешним стимулом;

$\gamma_i^j$  – параметр связи ансамблей коры;

$\Phi_{ij}$  – функция пространственной связи между нейроноподобными элементами ансамблей или внутри одного ансамбля, вид которой определяет настройку данного нейронного модуля на операцию по выделению определенного признака внешнего стимула [21]. Для выделения объектов заданного размера используется функция

пространственной связи типа латерального торможения (с положительным центром и отрицательными флангами). При расчетах функция пространственной связи бралась в виде

$$\Phi(x, y) = (1 - ar^2) \exp(-br^2),$$

где

$$r_x = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad r_y = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Все переменные усреднены и безразмерны на интервале от 0 до 1.

В нормальных условиях функционирования в системе происходит следующее: в модельную систему приходит внешний сигнал на отделы таламуса модельных модулей; через таламус внешний сигнал поступает в различные ансамбли пирамидальных клеток коры. В работах И.А. Шевелева [22] высказано предположение, что сигнал с таламуса приходит в разные участки коры (отвечающие за выделение разных признаков) со сдвигом фазы, вызванным временной задержкой. Этот сдвиг фазы обуславливает асинхронную работу в клетках коры в процессе обработки информации.

Имеет место такая последовательность действий: внешний сигнал активирует специфические (сенсорные, или релейные) ядра таламуса (VPM); по таламокортикальному пути возбуждение поступает на ансамбль пирамид коры (переменная  $U_2$ ); пирамиды коры связаны с тормозными интернейронами (переменная  $U_3$ ); сенсорные, или релейные ядра таламуса (VPM,  $U_1$ ) и кора ( $U_2$ ) активируют ретикулярные ядра таламуса (nRT); nRT (переменная  $U_4$ ) оказывает тормозное влияние на релейные ядра таламуса ( $U_1$ ); сигнал больше не поступает на кору и деактивируется nRT. Затем процесс повторяется. В результате после прохождения входного сигнала через нейронные ансамбли таламокортикальной системы на нейронных ансамблях коры формируется прерывистое, стробированное представление исходного сигнала [20, 21, 23].

Как известно из нейрофизиологических данных, пароксизмальная активность нейронов обуславливается синхронизацией электрической активности нейронных ансамблей в различных модулях и отражается на ЭЭГ повышением частоты и амплитуды колебаний. Нервный субстрат остаётся неизменным, но система переходит в режим автоколебаний, чем обусловлено нарушение процесса восприятия. Для эпилепсии характерно возникновение в коре и подкорковых структурах пик-волновых разрядов широко генерализованной спонтанной высокоамплитудной активности [15, 18, 20].

### Постановка численного эксперимента

Ниже приведены результаты последних расчетов на функциональной модели взаимодействия нейрональных модулей при обработке информации в таламокортикальной системе. Модель программно реализована в среде MATLAB 7.7.0.

После проведения расчётов имеются набор пространственно-временных паттернов (изображений) для переменных модели, соответствующих таламусу, коре, ретикулярным ядрам таламуса, а также, интегральная (суммарная) активность нейронных ансамблей четырёх модулей коры от времени – одномерный сигнал, аналог ЭЭГ, снятой с участка коры. Интегральная активность нейронных ансамблей учитывает эти характеристики переменных коры с четырёх таламокортикальных модулей

(кортикальных колонок) и показывает, как меняется во времени общий уровень возбуждения в модельной коре.

В численном эксперименте для одного модуля – это нормированная на площадь суммарная яркость точек на изображении, соответствующем переменной коры, изменяющаяся во времени в процессе выделения из внешнего сигнала различных признаков (объектов заданного размера, линий заданного направления и т.п.). Параметрами модулей являются функции пространственной связи для переменной, соответствующей коре. Они имеют различный размер (матрицы коэффициентов связей между элементами  $11 \times 11$ ,  $9 \times 9$ ,  $7 \times 7$ ,  $5 \times 5$  при общем размере подаваемого начального сигнала на вход  $128 \times 128$ ) и настроены на выделение линий разной толщины.

В качестве исходного стимула на переменную, соответствующую таламусу, подавался сигнал в виде изображения белого круга на чёрном фоне (рис. 2): постоянный и периодический. Постоянный сигнал предназначался для иллюстрации собственного процесса стробирования внешнего сигнала самой системой; периодический сигнал – для рассмотрения перехода к самовозбуждению системы периодическим сигналом (известный факт из исследования эпилепсий).

## Результаты расчётов

**Постоянный внешний сигнал в виде изображения (белый круг на чёрном фоне).** В первых расчетах синхронизация между модулями была фактически выключена за счет малого коэффициента связи (КС) между модулями. В номинальном

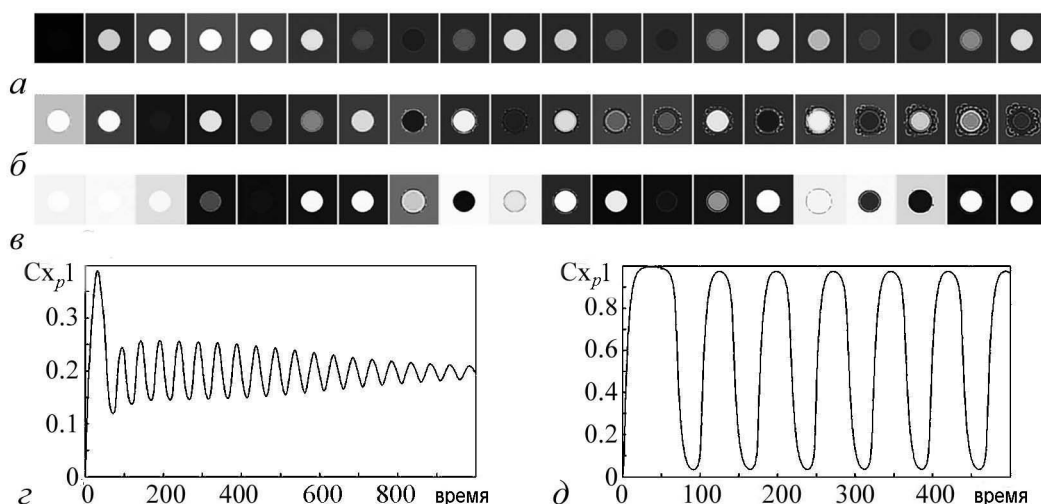


Рис. 2. Динамика пространственно-временных паттернов для переменной модели, соответствующей коре. В систему подавался постоянный внешний сигнал в виде белого круга на черном фоне. Каждая картинка это распределение активности нейронов коры в фиксированный момент времени. Набор таких временных срезов в строке позволяет заметить, как изначальное периодическое выделение признака переходит постепенно к нарушению нормальной обработки изображения (автоколебательный режим самовозбуждения) с увеличением КС: *а* – 0.001; *б* – 0.02; *в* – 0.08.  $C_{p1}$  – одномерный сигнал представлен как зависимость от времени в шагах счета нормированной на площадь суммарной яркости точек на изображении, соответствующем переменной коры, для различных значений КС: *г* – 0.001; *д* – 0.08

выражении КС варьировал между 0.001–0.01 (рис. 2, а). Видно, что система демонстрирует периодическое выделение сигнала, то есть работает механизм стробирования описанный выше.

Слабый переходный режим был зафиксирован при  $КС = 0.02$ , рис. 2, б. Появляется светимость фона в моменты прекращения выделения пятна. При усилении связи, а как следствие, и синхронизации между модулями при значении КС в интервале 0.04–0.1 режим нормального стробирования сигнала нарушается. На переменной, соответствующей коре, наблюдается распространение областей активности (рис. 2, в и Таблица).

Таблица

Факты и наблюдения	Характеристика эпилепсии	Вычислительный эксперимент	Результаты расчетов
	Нарушение процесса восприятия информации. Поведенческие появления.	В режиме несинхронной работы происходит периодическое (стробированное) выделение контура исходного сигнала. Далее, с увеличением коэффициента связи между модулями, происходит их синхронизация, и выделение признака исходного изображения нарушается.	
	Абсансная эпилепсия представляет собой одну из форм неконвульсивной генерализованной эпилепсии. Области повышенной импульсивной активности распространяются по коре.	Распространение областей активности с увеличением коэффициента синхронизации между модулями.	
	Возникновение в ЭЭГ генерализованных высокоамплитудных разрядов пик-волна.	Синхронизация модулей, определенно, является причиной повышения амплитуды сигнала.	

**Периодический внешний сигнал.** За счет существования внутреннего периода стробирования важным критерием может оказаться периодичность внешнего сигнала. Известны случаи инициированной пароксизмальной активности у людей за счет периодических световых вспышек. Нам не удалось подобрать параметров, чтобы за счет одного периодического сигнала инициировать переход к режиму с нарушением стробированного выделения сигнала, но изменения в результатах обработки на коре стали более выраженные.

На рис. 3, *а* представлены результаты расчета при  $КС = 0.001$ . Синхронизация и нарушение в обработке стали более заметны при переходных значениях  $КС$  в интервале  $0.02-0.1$ . (рис. 3, *б* и *в*).

В режиме нарушения стробирования на переменной, соответствующей коре наблюдается распространение областей активности (см. Таблица).

Возникновение ритмических высокоамплитудных разрядов в сигнале ЭЭГ в результате синхронной работы нескольких нейрональных модулей является основной чертой всех видов эпилепсий [20]. Расчёты на модели подтверждают этот факт (рис. 2, *з*, *д* и рис. 3, *з*, *д*).

Известно явление перемежаемости в поведении таламокортикальных осцилляторных паттернов на ЭЭГ крыс с предрасположенностью к абсанс-эпилепсии [24]. Возникновение синхронизации в реальном мозге связано с выбросом медиатора (в синаптических взаимодействиях участвуют глутаматергические, ГАМКергические и холинергические механизмы [8]). Этот процесс можно смоделировать, если управлять коэффициентом связи между модулями, меняя его случайным образом или по заданному закону.

Модель была опробована в режиме изменения коэффициента связи.  $КС$  менялся скачками и был постоянным на каждом этапе. На рис. 4 показаны три одно-

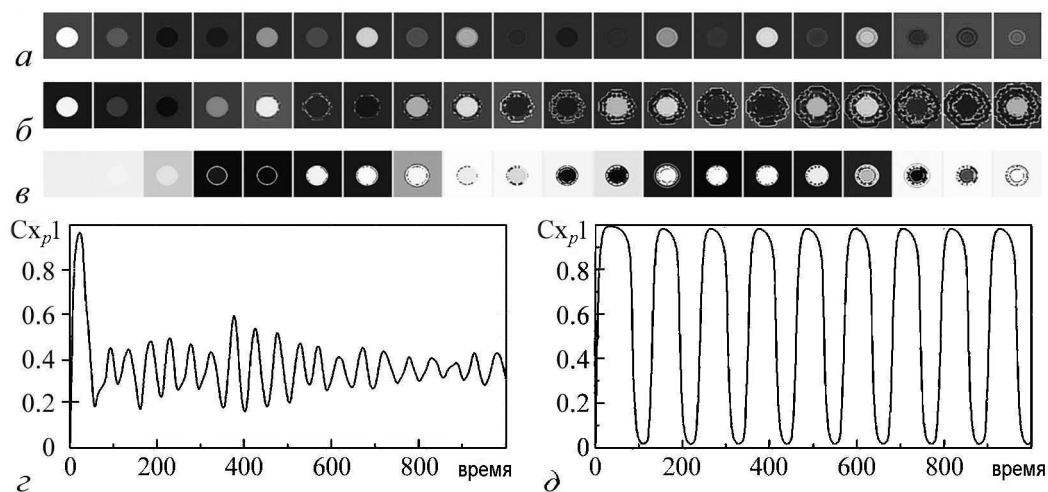


Рис. 3. Динамика пространственно-временных паттернов для переменной модели, соответствующей коре (внешний сигнал – периодический), при увеличении  $КС$  между модулями: *а* –  $0.001$  (норма); *б* –  $0.02$  (переход); *в* –  $0.07$  (патология). Видно разрушение периодического выделения круга и наблюдается полная засветка участка коры (автоколебательный режим самовозбуждения).  $C_{p \times 1}$  – одномерный сигнал представлен как зависимость от времени в шагах счета нормированной на площадь суммарной яркости точек на изображении, соответствующем переменной коры, для различных значений  $КС$ : *з* –  $0.001$ ; *д* –  $0.07$

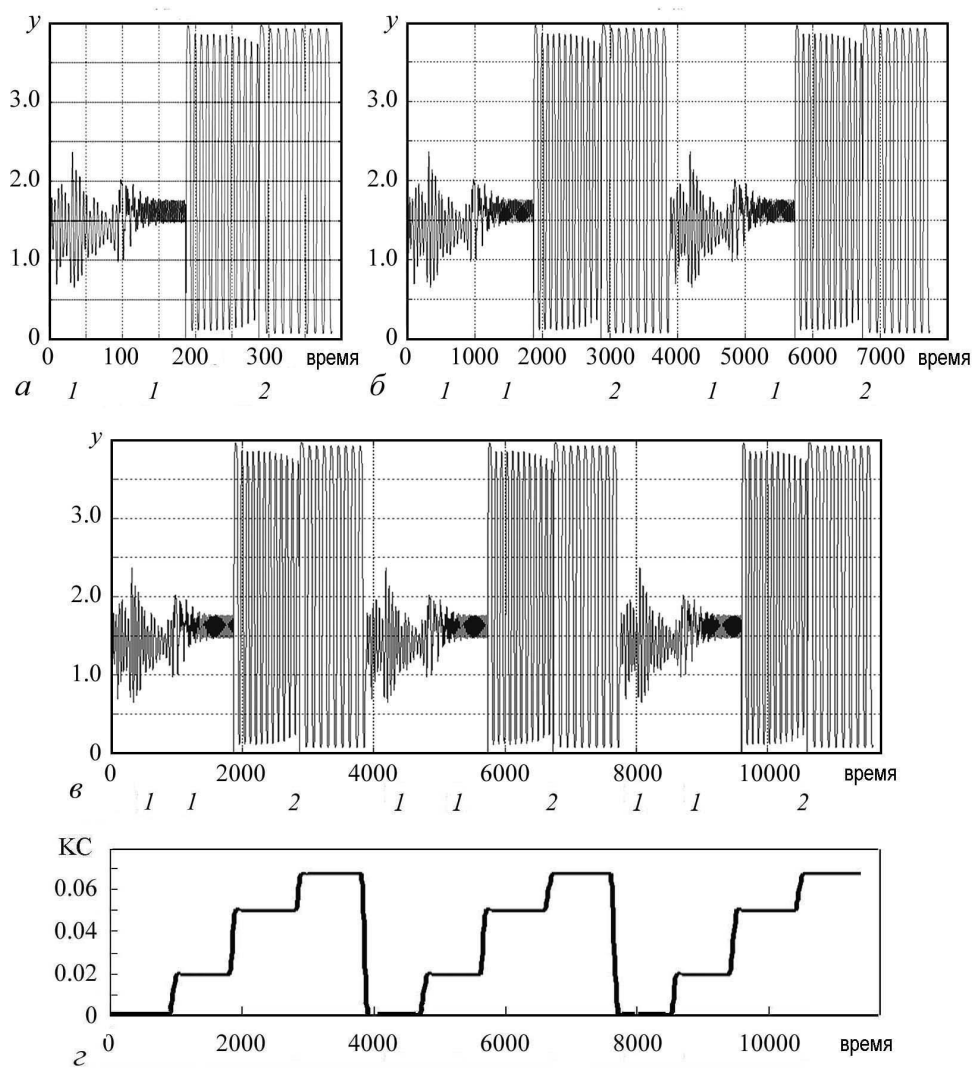


Рис. 4. *а, б* – одномерный модельный сигнал в случае периодического увеличения КС (здесь и далее по оси абсцисс – время в шагах счета; по оси ординат – нормированная на площадь суммарная яркость точек на изображении, соответствующем переменной коры); на рисунках видны перемежающиеся фрагменты, соответствующие разным процессам обработки информации: *1* – стробирование внешнего сигнала с выделением контура (соответствующие режимы см. на рис. 2, *а* и рис. 3, *а*); *2* – распространение областей повышенной активности (соответствующие режимы см. на рис. 2, *б* и рис. 3, *б*). *в* – одномерный модельный сигнал в случае скачкообразного увеличения КС с сохранением постоянного значения на каждом этапе. *г* – соответствующие значения коэффициента связи: 0.001, 0.02, 0.05, 0.067

мерных модельных сигнала, которые содержат разное число фрагментов (каждый длится одну тысячу шагов расчёта), соответствующих разным процессам обработки информации.

## Выводы

Разработана функциональная модель преобразования сигналов в сетях взаимосвязанных однотипных активных элементов, описывающая динамику преобразований сенсорных сигналов в таламокортикальных нейронных ансамблях.

Исследуемая функциональная модель показала возможность симулирования множества динамических режимов при нормальной обработке информационных сигналов (на примере изображений), а также режимов с нарушениями, примером, которых является абсансная эпилепсия. На модели воспроизведены режимы распространения областей повышенной импульсной активности (аналог эпилепсии).

Управление коэффициентом связи между модельными модулями воспроизводит явление перемежаемости на ЭЭГ таламокортикальных осцилляторных паттернов. Кроме этого, модель допускает сопоставление таламокортикальных осцилляторных паттернов процессам обработки информации (на примере изображений).

Авторы выражают глубокую признательность профессору Г.Д. Кузнецовой (Институт Высшей нервной деятельности РАН, Москва) как инициатору этой работы, а также за обсуждение результатов работы на всех её этапах.

*Работа поддержана Грантом РФФИ 14-11-00693 «Теория информационных процессов в мозге: нейросетевые математические модели сигнализации, обработки информации, информационных и когнитивных функций», конкурс 2014 года «Проведение фундаментальных научных исследований отдельными научными группами».*

#### Библиографический список

1. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *J. Physiol.* 1952. Vol. 117. P. 500.
2. *Gerstner W., Kistler W.* Spiking Neuron Models: Single Neurons, Populations, Plasticity // Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
3. *van Drongelen W., Lee H.C., Stevens R.L., Hereld M.* Propagation of seizure-like activity in a model of neocortex // *J. Clin. Neurophysiol.* 2007. Vol. 24(2). P. 182.
4. *Wilson H.R., Cowan J.D.* Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons // *Biophys. J.* 1972. Vol. 12(1). P. 1.
5. *Сбитнев В.И., Драбкин Г.М.* Перенос спайков в статистических нейронных ансамблях. I. Концепция фазовых переходов // *Биофизика.* 1975. Т. 20. С. 669. II. Нейрон-нелинейный источник спайков // *Биофизика.* 1976. Т. 21. С. 1072. III. Фазовый переход в модели поля CA<sub>3</sub> гиппокампа // *Биофизика.* 1977. Т. 22. С. 523.
6. *Кудряшов А.В., Яхно В.Г.* Распространение областей повышенной импульсной активности в нейронной сети // *Динамика биологических систем.* 1978. Вып. 2. С. 45.
7. *Destexhe A., Sejnowski T.J.* The Wilson–Cowan model, 36 years later // *Biol. Cybern.* 2009. July. Vol. 101(1). P. 1.
8. *Suffczynski P., Kalitzin S., Lopes Da Silva F.H.* Dynamics of non-convulsive epileptic phenomena modeled by a bistable neuronal network // *Neuroscience.* 2004. Vol. 126(2). P. 467.
9. *Wendling F., Bartolomei F., Bellanger J.J., Bourien J., Chauvel P.* Epileptic fast intracerebral EEG activity: Evidence for spatial decorrelation at seizure onset // *Brain.* 2003. Vol. 126 (6). P. 1449.
10. *Wendling F., Hernandez A., Bellanger J.J., Chauvel P., Bartolomei F.* Interictal to ictal transition in human temporal lobe epilepsy: Insights from a computational model of intracerebral EEG // *J. Clin. Neurophysiol.* 2005. Vol. 22 (5). P. 343.

11. *Soltesz I., Staley K.J.* Computational Neuroscience in Epilepsy. Elsevier, 2008.
12. *Markram H.* The blue brain project // Nat. Rev. Neurosci. 2006. Vol. 7(2). P. 153.
13. *Prinz A.A., Bucher D., Marder E.* Similar network activity from disparate circuit parameters // Nat. Neurosci. 2004. Vol. 7(12). P. 1345.
14. *Herz A.V., Golisch T., Machens C.K., Jaeger D.* Modeling single-neuron dynamics and computations: A balance of detail and abstraction // Science. 2006. Vol. 314 (5796). P. 80.
15. *Vergnes M., Marescaux C. et al.* Spontaneous paroxysmal electroclinical patterns in rat: A model of generalized non-convulsive epilepsy // Neurosci. Lett. 1982. Vol. 33. P. 97.
16. *Coenen A., van Luijtelaar G.* Genetic animal models for absence epilepsy: A review of the WAG/Rij strain of rats // Behav. Genetics. 2003. Vol. 33. P. 635.
17. *Depaolis A., van Luijtelaar G.* Genetic models of absence epilepsy in the rat. // Eds. A. Pitkanen, P. Schwartzkroin, S. Moshe. Models of Seizures and Epilepsy // San Diego, CA: Elsevier, 2005. P. 233.
18. *Van Luijtelaar G., Sitnikova E.* Global and focal aspects of absence epilepsy: The contribution of genetic models // Neurosci. Biobehav. Rev. 2006. Vol. 30. P. 983.
19. *Meeren H., Pijn J., van Luijtelaar G., Coenen A., Lopes da Silva A.* Evolving concepts on the pathophysiology of absence seizures: The cortical focus theory // Arch. Neurology. 2002. Vol. 62. P. 371.
20. *Кузнецова Г.Д., Габова А.В., Соколов М.Е.* Исследование механизмов поддержания и окончания статуса абсансной эпилепсии // Нелинейная динамика когнитивных исследованиях – 2011: Труды конференции / Рос. акад. наук, Ин-т приклад. физики [и др]. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2011. С. 107.
21. *Яхно В.Г.* Модели нейроноподобных систем. Динамические режимы преобразования информации. Нелинейные волны – 2002 / Отв. Ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2003. С. 90.
22. *Шевелёв И.А.* Волновые процессы в зрительной коре мозга // Природа/ 2001. № 12; [http://vivovoco.rsl.ru/VV/JOURNAL/NATURE/12\\_01/ALPHA.HTM](http://vivovoco.rsl.ru/VV/JOURNAL/NATURE/12_01/ALPHA.HTM)
23. *Hecht-Nielsen R.* A theory of the cerebral cortex // Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Conference on Molecular Electronics and Biocomputing. Future Electronic Devices Association of Japan, Okinawa, 28–30 November 1995.
24. *Platt N., Spiegel E.A., Tresser C.* On-off intermittency: A mechanism for bursting // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70, № 3. P. 279.

## MACROSCOPIC MODEL OF VISUAL PROCESSING IN BRAIN STRUCTURES IN NORMAL CONDITION AND DESCRIPTION OF THE TRANSITION TO EPILEPTIFORM REGIME

*I. V. Nuidel<sup>1</sup>, M. E. Sokolov<sup>1</sup>, V. G. Yakhno<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Institute of Applied Physics RAS, Nizhny Novgorod

<sup>2</sup>Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod – National Research University

This paper presents the functional model of signal processing in networks of similar interconnected active elements. On the one hand, it is a macroscopic model of the dynamic



interactions between neural networks and its states can be considered as normal and abnormal modes of signal processing (for example, images). On the other hand, the model and the calculation results can be considered as a variant of modeling epilepsy. In this paper we develop an information macroscopic approach to the modeling of epilepsy, which in this sense is unique.

**Keywords:** Neural network emulators, neuromorphic model, modeling of sensory signal transformation in the thalamocortical neuronal ensembles, thalamocortical circuit, modeling of epilepsy, corticothalamic interactions.

## References

1. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* // J. Physiol. 1952. Vol. 117. P. 500.
2. *Gerstner W., Kistler W.* Spiking Neuron Models: Single Neurons, Populations, Plasticity // Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
3. *Van Drongelen W., Lee H.C., Stevens R.L., Hereld M.* // J. Clin. Neurophysiol. 2007. Vol. 24(2). P. 182.
4. *Wilson H.R., Cowan J.D.* // Biophys. J. 1972. Vol. 12(1). P. 1.
5. *Sbitnev V.I., Drabkin G.M.* // Biophysics. 1975. T. 20. C. 669 ( in Russian).
6. *Kudryashov A.V., Yakhno V.G.* // Dynamics of Biological Systems. 1978. Iss. 2. P. 45 (in Russian).
7. *Destexhe A., Sejnowski T.J.* // Biol. Cybern. 2009. July. Vol. 101(1). P. 1.
8. *Suffczynski P., Kalitzin S., Lopes Da Silva F.H.* // Neuroscience. 2004. Vol. 126(2). P. 467.
9. *Wendling F., Bartolomei F., Bellanger J.J., Bourien J., Chauvel P.* // Brain. 2003. Vol. 126 (6). P. 1449.
10. *Wendling F., Hernandez A., Bellanger J.J., Chauvel P., Bartolomei F.* // J. Clin. Neurophysiol. 2005. Vol. 22 (5). P. 343.
11. *Soltesz I., Staley K.J.* Computational Neuroscience in Epilepsy. Elsevier, 2008.
12. *Markram H.* // Nat. Rev. Neurosci. 2006. Vol. 7(2). P. 153.
13. *Prinz A.A., Bucher D., Marder E.* // Nat. Neurosci. 2004. Vol. 7(12). P. 1345.
14. *Herz A.V., Gollisch T., Machens C.K., Jaeger D.* // Science. 2006. Vol. 314 (5796). P. 80.
15. *Vergnes M., Marescaux C. et al.* // Neurosci. Lett. 1982. Vol. 33. P. 97.
16. *Coenen A., van Luijckelaar G.* // Behav. Genetics. 2003. Vol. 33. P. 635.
17. *Depaolis A., van Luijckelaar G.* // Eds A. Pitkanen, P. Schwartzkroin, S. Moshe. Models of Seizures and Epilepsy // San Diego, CA: Elsevier, 2005. P. 233.
18. *van Luijckelaar G., Sitnikova E.* // Neurosci. Biobehav. Rev. 2006. Vol. 30. P. 983.
19. *Meeren H., Pijn J., van Luijckelaar G., Coenen A., Lopes da Silva A.* // Arch. Neurology. 2002. Vol. 62. P. 371.
20. *Kuznetsova G.D., Popova A.V., Sokolov M.E.* // Nonlinear dynamics of cognitive studies - 2011: Proceedings / Ros.akad.nauk, Institute of Applied Physics. Nizhny Novgorod: IAP RAS, 2011. P. 107 (in Russian).

21. *Yahno V.G.* // Proceedings / Nonlinear Waves 2002 / Eds A.V. Gaponov-Grekhov, V.I. Nekorkin. Nizhny Novgorod: IAP RAS, 2003. P. 90 (in Russian).
22. *Shevelev I.A.* // Priroda. 2001. № 12 (in Russian).
23. [http://vivovoco.rsl.ru/VV/JOURNAL/NATURE/12\\_01/ALPHA.HTM](http://vivovoco.rsl.ru/VV/JOURNAL/NATURE/12_01/ALPHA.HTM)
24. *Hecht-Nielsen R.* // Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Conference on Molecular Electronics and Biocomputing. Future Electronic Devices Association of Japan, Okinawa, 28–30 November 1995.
25. *Platt N., Spiegel E.A., Tresser C.* // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70, № 3. P. 279.

*Поступила в редакцию*     30.10.2015  
*После доработки*             20.11.2015



*Нуйдель Ирина Владимировна* родилась в 1966 году. В 1988 году окончила радиофизический факультет Горьковского госуниверситета по специальности «радиофизика и электроника». С 1990 года работает в ИПФ РАН. Имеет ученую степень кандидата наук (1998) и стаж работы в должности старшего научного сотрудника 11 лет (с 2004 года по настоящее время). Область научных интересов: нелинейная динамика, исследование структур коллективной активности в однородных распределенных нейроноподобных системах, обработка изображений. Автор более 50 работ.

603950 Нижний Новгород, ГСП-120, ул. Ульянова, 46  
 Институт прикладной физики РАН  
 E-mail: nira\_appl@mail.ru



*Соколов Максим Евгеньевич* родился в Горьком (1984). Окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2008). После окончания ННГУ работает в ИПФ РАН младшим научным сотрудником. Область научных интересов: обработка изображений, исследование структур коллективной активности в однородных распределенных нейроноподобных системах. Автор 3 статей и 19 публикаций в тезисах докладов и трудах конференций.

603950 Нижний Новгород, ГСП-120, ул. Ульянова, 46  
 Институт прикладной физики РАН  
 E-mail: sokolov.maxx@gmail.com



*Яхно Владимир Григорьевич* родился в 1947 году. Доктор физико-математических наук (1999). Работает в ИПФ РАН с 1977 года. Заведующий лабораторией автоволновых процессов. Научные интересы связаны с исследованием процессов самоорганизации в распределенных неравновесных системах и применением автоволновых представлений для моделирования процессов обработки сенсорных сигналов, развитием компьютерных алгоритмов кодирования изображений (разработка биометрических систем), рассмотрением процессов в модельных системах, имитирующих функционирование живых систем. Имеет более 200 научных публикаций (в том числе 2 монографии и 10 патентов).

603950 Нижний Новгород, ГСП-120, ул. Ульянова, 46  
 Институт прикладной физики РАН  
 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
 E-mail: yakhno@appl.sci-nnov.ru



## V СЪЕЗД БИОФИЗИКОВ РОССИИ

Ростов-на-Дону, Россия

4–10 октября 2015

### Организаторы

- Российская академия наук
- Отделение биологических наук РАН
- Министерство образования и науки РФ
- Научный совет РАН по биологической физике
- Национальный комитет Российских биофизиков
- Южный федеральный университет
- Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
- Институт биофизики клетки РАН
- Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН
- Институт молекулярной биологии РАН

### Организационный комитет

*Рубин А.Б.*, чл.-корр. РАН – *сопредседатель*; *Боровская М.А.*, ректор ЮФУ – *сопредседатель*; *Узденский А.Б.*, профессор, д.б.н. – *зам. председателя*; *Иваницкий Г.Р.*, чл.-корр. РАН – *зам. председателя*; *Фесенко Е.Е.*, чл.-корр. РАН – *зам. председателя*; *Ризниченко Г.Ю.*, проф., д.ф.-м.н. – *зам. председателя*; *Штранкфельд И.Г.*, к.б.н. – *ответственный секретарь*; *Артюхов В.Г.*, проф., д.б.н.; *Бурлакова Е.Б.*, проф., д.б.н.; *Владимиров Ю.А.*, академик; *Василевский Ю.В.*, проф., д.ф.-м.н.; *Воденев В.А.*, д.б.н.; *Волотовский И.Д.*, академик НАН Белоруси; *Гительзон И.И.*, академик; *Говорун В.М.*, чл.-корр. РАН; *Готтих Б.П.*, проф., д.х.н.; *Григорьев А.И.*, академик; *Гурский Г.В.*, чл.-корр. РАН; *Гусев Н.Б.*, чл.-корр. РАН; *Дегерменджи А.Г.*, академик; *Есипова Н.Г.*, к.ф.-м.н.; *Иванов В.Т.*, академик; *Кирпичников М.П.*, академик; *Колчанов Н.А.*, академик; *Комаров В.М.*, проф., д.б.н.; *Коновалов А.И.*, академик;

*Макаров А.А.*, академик; *Намиот В.А.*, проф., д.ф.-м.н.; *Никольский Н.Н.*, академик; *Островский М.А.*, академик; *Розанов А.Ю.*, академик; *Савитский А.П.*, проф., д.х.н.; *Скулачев В.П.*, академик; *Твердислов В.А.*, проф., д.ф.-м.н.; *Ткачук В.А.*, академик; *Туманян В.Г.*, проф., д.ф.-м.н.; *Черенкевич С.Н.*, академик НАН Беларуси; *Чизмаджев Ю.А.*, чл.-корр. РАН; *Шувалов В.А.*, академик

### **Программный комитет**

*Рубин А.Б.*, чл.-корр. РАН – *председатель*; *Есипова Н.Г.*, канд. физ.-мат. наук – *зам. председателя*; *Антонов В.Ф.*, проф., д.б.н.; *Атауллаханов Ф.И.*, проф., д.б.н.; *Бурлакова Е.Б.*, проф., д.б.н.; *Ванин А.Ф.*, проф., д.ф.-м.н.; *Вашанов Г.А.*, проф., д.б.н.; *Василевский Ю.В.*, проф. д.ф.-м.н.; *Владимиров Ю.А.*, академик; *Воденеев В.А.*, д.б.н.; *Гельфанд М.С.*, проф. д.б.н.; *Гречкин А.Н.*, академик; *Зинченко В.П.*, д.ф.-м.н.; *Иваницкий Г.Р.*, чл.-корр. РАН; *Колесников С.С.*, проф., д.б.н.; *Комарова Л.Ф.*; *Красавин Е.А.*, проф., д.б.н.; *Крицкий М.С.*, проф., д.б.н.; *Литвин Ф.Ф.*, проф., д.б.н.; *Макеев В.Ю.*, д.ф.-м.н.; *Максимов Г.В.*, проф., д.б.н.; *Намиот В.А.*, проф., д.ф.-м.н.; *Подлубная З.А.*, проф., д.б.н.; *Ризниченко Г.Ю.*, проф., д.ф.-м.н.; *Романовский Ю.М.*, проф., д.ф.-м.н.; *Рошупкин Д.И.*, проф., д.б.н.; *Сергеев А.М.*, чл.-корр. РАН; *Слобожанина Е.И.*, чл.-корр. НАН Беларуси; *Соболев А.С.*, проф., д.б.н.; *Твердислов В.А.*, проф., д.ф.-м.н.; *Туманян В.Г.*, проф., д.ф.-м.н.; *Узденский А.Б.*, проф., д.б.н.; *Фесенко Е.Е.*, чл.-корр. РАН; *Финкельштейн А.В.*, проф., чл.-корр. РАН; *Хрущев С.С.*, старший научный сотрудник, МГУ; *Цатурян А.К.*, д.ф.-м.н.; *Черенкевич С.Н.*, академик НАН Беларуси; *Чернавский Д.С.*, проф. д.ф.-м.н.; *Шайтан К.В.*, проф., д.ф.-м.н.; *Штранкфельд И.Г.*, к.б.н.; *Ягужинский Л.С.*, проф., д.б.н.; *Яминский И.В.*, проф., д.ф.-м.н.; *Яхно В.Г.*, проф., д.ф.-м.н.

### **Рабочая программа**

### **Пленарные доклады**

#### **4 октября 2015**

*Рубин А.Б.* Проблемы современной биофизики

*Узденский А.Б.* Реакция клеток на фотодинамическое воздействие:

Сигнальные и эпигенетические механизмы

*Владимиров Ю.А.* Свободные радикалы и проблемы медицинской биофизики

*Волотовский И.Д.* Стволовые клетки: Биофизические механизмы

функционального контроля и прикладные аспекты

*Иваницкий Г.Р.* Что такое сознание и мышление с точки зрения физики?

#### **5 октября 2015**

*Колчанов Н.А.* Регуляторные генетические системы экспериментально-компьютерный анализ и моделирование

*Гельфанд М.С.* Эволюция регуляторных систем

*Твердислов В.А.* Хиральность как системный фактор структурообразования в молекулярной биологии

*Дегерменджи А.Г.* Эвристические (нейросетевые) модели и ключевые проблемы биофизики: Новые направления в биофизике водных экосистем

*Березовский И.Н.* Основы термостабильности белков

*Шайтан К.В.* Вариационные принципы механики и неравновесной термодинамики в проблеме конформационных движений и фолдинга биополимерных структур

*Финкельштейн А.В.* Решение парадокса Левинталя возможно на уровне формирования и упаковки вторичных структур белков

*Кирпичников М.П.* Бактериальный родопсин: Структура, фотохимия, оптогенетика

*Ефремов Р.Г.* Клеточные мембраны как стохастические динамические системы: Результаты вычислительных экспериментов

*Соколова О.С.* Молекулярные основы моделирования клеточной мембраны белками семейства BAR

*Антонов В.Ф.* Липидоцентрическая концепция пермеабилзации модельных и клеточных мембран

*Соболев А.С.* Как «взнуздать» нормальные процессы внутриклеточного транспорта, чтобы с их помощью доставлять в клетку то, что нужно и куда нужно?

*Freiberg A.M.* (Фрайберг А.) Hidden aspects of photosynthesis light harvesting

*Шувалов В.А.* Начальные стадии разделения зарядов в реакционных центрах фотосинтеза

*Погосян С.И.* Биофизические подходы к определению первичной продукции водоемов

*Ризниченко Г.Ю.* Кинетические, монте-карло и многочастичные модели первичных процессов фотосинтеза

## **6 октября 2015**

*Рочев Ю.А.* Новые материалы в биомедицине

*Морозов В.Н.* Биологические нанозерозоли: Анализ, генерация, использование

*Фесенко Е.Е.* Биофизические подходы к криоконсервации органов и тканей

*Приежжев А.В.* Возможности технологии лазерных пинцетов для решения задач биофизики

*Ванин А.Ф.* Динитрозильные комплексы железа с тиол-содержащими лигандами – «рабочая форма» одного из важнейших представителей универсальных регуляторов биологических процессов – монооксида азота динитрозильные комплексы железа с персульфидными лигандами как соединения, обеспечивающие взаимосвязь биологического действия монооксида азота и сероворода

*Гурский Г.В.* Принципиально новые методы создания противовирусных препаратов

*Савицкий А.П.* Новые методы высокоразрешающей субдифракционной флуоресцентной микроскопии

*Галль Л.Н.* О роли структурирования воды в функционировании живых биологических систем

## 7 октября 2015

*Крицкий М.С.* Фотоника птериновых коферментов

*Красновский А.А.* Биофотоника синглетного молекулярного кислорода

*Иванов А.В.* Физико-химические механизмы регуляции окислительного стресса вирусом гепатита С

*Пермяков Е.А.* Кальцийсвязывающие белки: Структура, свойства, функции

*Зинченко В.П.* Роль ГАМК-ергических нейронов, содержащих  $\text{Ca}^{2+}$ -связывающие белки, в регуляции спонтанной синхронной активности нейронов мозга

*Максимов Г.В.* Состояние миелина при возбуждении нервного волокна

*Воденев В.А.* Электрические сигналы у высших растений: Механизмы генерации и распространения

*Булычев А.А.* Мембранный транспорт и передача сигналов в растительной клетке при локальном световом и механическом воздействиях

## 8 октября 2015

*Лахно В.Д.* Перенос энергии и заряда в одиночных молекулах ДНК.

Нанобиоэлектроника

*Нечипуренко Д.Ю.* Расщепление ДНК как механохимическое явление

*Цатурян А.К.* Молекулярные механизмы сокращения поперечно-полосатых мышц и его регуляции

*Гусев Н.Б.* Малые белки теплового шока и проблема регуляции мышечного сокращения

*Намиот В.А.* Дальнодействующие взаимодействия и принципы молекулярного узнавания на разных уровнях строения биосистем

*Соловьёва О.Э.* Моделирование миокарда: От клетки до органа

*Василевский Ю.В.* Персонализированная вычислительная оценка фракционированного резерва кровотока

*Гурия Г.Т.* Биофизика свёртывания крови

## 9 октября 2015

*Медвинский А.Б.* Хаос в динамике популяций: Математические модели и реальность

*Романовский Ю.М.* Динамика и энергетика внутринейронного транспорта

*Яхно В.Г.* Моделирование процессов распознавания и восприятия сигналов в живых системах

*Айдаркин Е.К.* Пассивное ожидание и межсенсорное взаимодействие

*Попов И.А.* Новые масс-спектрометрические подходы к исследованию структуры и конформаций биомолекул с использованием изотопного обмена в атмосферных условиях

*Галзитская О.В.* Определение величины ядра сворачивания амилоидной

протофибриллы из концентрационной зависимости длительности  
лаг-фазы и времени последующего роста протофибрилл  
*Коновалов А.И.* Образование наноассоциатов – фундаментальная основа  
проявления физико-химических и биологических свойств  
высокоразбавленных водных растворов

УДК 577

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА НА V СЪЕЗДЕ БИОФИЗИКОВ РОССИИ

*Г. Ю. Ризниченко<sup>1</sup>, Ю. М. Романовский<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, биологический факультет

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет

Дан краткий обзор докладов, озвученных на V Съезде биофизиков России (4–10 октября 2015, Ростов-на-Дону), в которых результаты получены с применением методов нелинейной динамики. В частности, продемонстрированы большие возможности теоретической молекулярной динамики, исследующей взаимодействие не только отдельных молекул, но и сложных молекулярных комплексов. Широко представлены стохастические методы для получения новых результатов в нейродинамике молекулярных моторов. Обсуждаются новые экспериментальные методы, которые позволяют проследить динамику биомолекул. Полное представление о состоянии биофизики в России можно получить из двухтомных трудов Съезда, представленных на его сайте.

*Ключевые слова:* Динамика биологических макромолекул, биологическая подвижность, трансформации энергии, экологическая биофизика, нейродинамика.

История Съездов биофизиков России такова:

- I Съезд – начало 1980-х годов, Москва, МГУ
- II Съезд – 1999 год, Москва
- III Съезд – 2007 год, Воронеж
- IV Съезд – 2012 год, Нижний Новгород
- V Съезд – 2015 год, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

Информацию, в том числе и тезисы докладов II–V Съездов, можно найти в Интернете. Всего было озвучено 750 докладов, из них 50 пленарных.

В работе Съезда приняли участие более 500 биофизиков из всех ведущих научных центров России, а также ученые стран СНГ. Оргкомитет V Съезда возглавлял заведующий кафедрой биофизики биологического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, председатель Межведомственного Научного совета по биофизике, член корреспондент РАН А.Б. Рубин. Огромный вклад в формирование программы Съезда внесла Ученый секретарь Наталья Георгиевна Есипова. Основные научно-организационные проблемы Съезда легли на плечи Ростовского Оргкомитета (в большинстве своем молодежного) во главе с профессором А.Б. Узденским, благодаря стараниям которого Съезд прошел успешно.

Приведем здесь типичную для всех съездов рубрику направлений Съезда в Ростове-на-Дону.

- Структура и динамика белков и их комплексов;
- Структура и динамика нуклеиновых кислот и их комплексов;
- Биофизика клетки. Мембранные процессы;
- Биологическая подвижность. Молекулярные моторы;
- Механизмы трансформации энергии: митохондрии, фотосинтез;
- Биофизика сложных систем;
- Медицинская биофизика;
- Фотобиология. Биофотоника;
- Действие физико-химических факторов на биологические системы;
- Экологическая биофизика;
- Нейродинамика и нейробиология;
- Биоинформатика и системная биология;
- Новые методы в биофизических исследованиях;
- Биофизика одиночных молекул. Нанобиотехнологии;
- Биофизическое образование.

Биофизика является междисциплинарной, чрезвычайно быстро развивающейся областью науки, развитие которой напрямую связано с бурным ростом возможностей методов экспериментальных исследований и информационных технологий. На V биофизическом съезде звучали доклады, отражающие современные достижения фундаментальной науки в понимании того, как физические законы взаимодействия реализуются в живых системах. Также было много докладов, посвященных применению биофизики в медицине, биотехнологии, при создании новых энергопреобразующих устройств, в экологическом мониторинге и других областях.

Как в пленарных докладах, так и в докладах и дискуссиях большинства секций возникали вопросы, связанные с нелинейными пространственно-временными процессами в живых системах. Осмысление жизни становится все более «нелинейным». Как правило, предметом обсуждения являлись соответствующие математические модели. Перечислим названия пленарных докладов, в которых наряду с проблемами стохастических методов нелинейные проблемы выходили на первый план [1].

- *Иваницкий Г.Р.* Что такое сознание и мышление с точки зрения физики?
- *Намиот В.А.* Дальнодействующие взаимодействия и принципы молекулярного узнавания на разных уровнях строения биосистем
- *Шайтан К.В.* Вариационные принципы механики и неравновесной термодинамики в проблеме конформационных движений и фолдинга биополимерных структур
- *Ефремов Р.Г.* Клеточные мембраны как стохастические динамические системы: результаты вычислительных экспериментов
- *Ризниченко Г.Ю.* Кинетические, монте-карло и многочастичные модели первичных процессов фотосинтеза
- *Зинченко В.П.* Роль ГАМК-ергических нейронов, содержащих  $\text{Ca}^{2+}$ -связывающие белки, в регуляции спонтанной синхронной активности нейронов мозга
- *Цатурян А.К.* Молекулярные механизмы сокращения поперечно-полосатых мышц и его регуляции
- *Соловьёва О.Э.* Моделирование миокарда: От клетки до органа
- *Гурия Г.Т.* Биофизика свёртывания крови



- *Барцев С.И.* Эвристические (нейросетевые) модели и ключевые проблемы биофизики
- *Романовский Ю.М.* Динамика и энергетика внутринейронного транспорта
- *Яхно В.Г.* Моделирование процессов распознавания и восприятия сигналов в живых системах
- *Медвинский А.Б.* Хаос в динамике популяций: Математические модели и реальность
- *Атауллаханов Ф.И.* Молекулярные моторы
- *Чернавский Д.С., Чернавская О.Д.* Сопоставление некоторых теоретических подходов к моделированию мышления

Доклады о происхождении и функционирования мышления и сознания (авторы Г.Р. Иваницкий, Д.С. Чернавский, В.Г. Яхно) носили обзорный характер. Слишком сложная материя – мышление, чтобы представить конкретные математические модели за 30 мин, отведенные на каждое сообщение. Однако и в этих докладах были представлены блочные иерархические системы, описание которых с необходимостью требует применения нелинейных моделей. Г.Р. Иваницкий подчеркивает значение сложных автоволн, которые связывают физиологические процессы в глии и коре головного мозга. В иерархической системе Д.С. Чернавского важнейшую роль играют блоки формирования «символа» из «образа». Этот подход эквивалентен формированию «когов» (термин К.В. Анохина), связанных между собой. Главным положением доклада В.Г. Яхно является существование «определяющего признака живой системы, связанного с интерпретацией распознающей системой входного сигнала и использования этой интерпретации для оптимизации ее текущего состояния на основе прошлого опыта». Все три доклада снабжены ссылками на публикации, в которых представлены конкретные модели отдельных уровней рассматриваемых систем.

В группе докладов Ю.М. Романовского, К.В. Шайтана, Ф.И. Атауллаханова представлены модели кинезина, миозина V, динеина, тубулиновых микротрубочек, образования структуры биополимеров с привлечением понятия энергетического ландшафта. А.К. Цатурян рассказал о новых экспериментах с исследованием тропомиозина в работе мышц и созданием уточненной механической модели мышечного сокращения.

А.Б. Медвинский представил обобщенные модели динамики водных популяций планктона, появления хаотических режимов в его существовании и обсудил проблемы, связанные с концепцией «жизни на грани хаоса». В докладе А.Г. Дерменджи представлены иерархические модели процессов в экологических водных системах.

Широко обсуждались проблемы преобразования энергии при фотосинтезе на разных уровнях организации живых систем, начиная от процессов преобразования энергии в фотосинтетической мембране (пленарные доклады В.А. Шувалова, А. Фрайберга, Г.Ю. Ризниченко) до уровня биофотореакторов и экосистем (С.И. Погосян), этим же проблемам были посвящены заседания секции.

Важным современным направлением биофизических исследований является молекулярное моделирование, развитие которого связано с бурным развитием возможностей вычислительной техники и накоплением экспериментальных знаний об организации живых систем на молекулярном и субклеточном уровне. Моделирова-

ние процессов в системах, состоящих из сотен тысяч атомов (молекулярная динамика), более крупных субъединиц (крупнозернистое моделирование), или ансамблей биомакромолекул (многочастичное броуновское моделирование) требует при проведении вычислительного эксперимента с привлечением суперкомпьютеров и новых подходов к организации вычислений. Применение гибридной архитектуры с параллельным использованием сотен графических процессоров позволяет производить компьютерные эксперименты на системах, содержащих  $10^4$ – $10^5$  аминокислот для временных диапазонов 30–60 мс, характерных для биологически значимых процессов (ферментативный акт). Вопросы компьютерного моделирования обсуждались в пленарных докладах К.В. Шайтана, Р.Г. Ефремова, Г.Ю. Ризниченко, Ф.И. Атауллеханова и на секциях. Важной особенностью молекулярной динамики многоатомных молекул является сочетание их броуновского движения и нелинейного взаимодействия при встречах. При этом учитывается их конфигурация, распределение парциальных зарядов и перенос зарядов между ними.

Во многих секционных докладах присутствуют модели нелинейных процессов в мембранных насосах-переносчиках ионов в мышечных структурах в мозге и в отдельных клетках и органах (см., например, доклады О.А. Кофановой, С.Е. Бороновского, Я.Р. Нарциссова и О.Д. Чернавской, Д.С. Чернавского). Описаны экспериментальные методы с применением лазерных ловушек. Одним словом, специалистам «нелинейщикам» весьма полезно ознакомиться с двухтомным сборником тезисов V Съезда биофизиков России [1,2], изданным Южным федеральным университетом и представленным также на сайте Съезда.

В рамках Съезда состоялся Круглый стол (ведущий – заведующий кафедрой биофизики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова В.А. Твердислов), посвященный проблемам биофизического образования, в котором было особо рекомендовано уделять больше внимания математическому моделированию, в том числе нелинейным моделям. С интересными конструктивными предложениями выступили руководители кафедр биофизики Воронежского государственного университета В.И. Артюхов, Сибирского федерального университета В.А. Кратасюк, Медицинской академии имени И.М. Сеченова В.Ф. Антонов, профессор Краснодарского агротехнического университета Г.А. Плутахин и др. Выступающие рассказали о своих подходах к преподаванию биофизики с учетом специфики вуза и уровня подготовки студентов. Распространение биофизических подходов и методов в самых разных областях науки и производства требует повышения уровня биофизического образования не только в университетах, но и в медицинских, агротехнических и технических вузах, имеющих специализацию «биотехнология».

### Библиографический список

1. V Съезд биофизиков России. Ростов-на-Дону, 4–10 октября 2015. Материалы докладов: В 2-х томах. Том 1. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2015.
2. V Съезд биофизиков России. Ростов-на-Дону, 4–10 октября 2015. Материалы докладов: В 2-х томах. Том II. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2015.

*Поступила в редакцию 23.11.2015*

© Г. Ю. Ризниченко, Ю. М. Романовский  
Изв. вузов «ПНД», т. 23, № 5, 2015

## NONLINEAR DYNAMICS AT THE V CONGRESS OF BIOPHYSICISTS OF RUSSIA

*G. Yu. Riznichenko<sup>1</sup>, Yu. M. Romanovsky<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Biological Department, Lomonosov Moscow State University

<sup>2</sup>Physical Department, Lomonosov Moscow State University

A brief review of reports at the V Congress of Biophysicists of Russia (Rostov-on-Don, 4–10 October 2015) is presented in which the results are based on the methods of nonlinear dynamics. Stochastic methods are widely represented obtaining new results in neurodynamics and theory of molecular motors. Molecular dynamics simulations include now not only dynamics of separate molecules, but complex molecular systems like ion channels incorporated in lipid membrane. The full picture of the state of biophysics in Russia can be obtained from the two volume Proceedings of the V Congress of Biophysicists of Russia which is laid out on its website.

**Keywords:** Dynamics of biological macromolecules, biological mobility, energy transformation, ecological biophysics, neurodynamics.

### References

1. V Congress of Biophysicists of Russia. Rostov-on-Don, 4–10 October 2015. Tezisy: In 2 volumes. Rostov-on-Don: Publishing Department of the Southern Federal University, 2015. Vol. 1. (In Russian).
2. V Congress of Biophysicists of Russia. Rostov-on-Don, 4–10 October 2015. Tezisy: In 2 volumes. Rostov-on-Don: Publishing Department of the Southern Federal University, 2015. Vol. II. (In Russian).



*Ризниченко Галина Юрьевна* – родилась в Москве (1946), окончила физический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (1972), доктор физико-математических наук. Профессор кафедры биофизики биологического факультета МГУ, зав. сектором информатики и биофизики сложных систем. Автор учебника «Лекции по математическим моделям в биологии» (2002, 2011) и более 10 учебных пособий и монографий. Большинство научных работ посвящено моделированию первичных процессов фотосинтеза. Председатель оргкомитета ежегодных междисциплинарных конференций «Математика. Компьютер. Образование».

119992 Москва, ГСП-2, Ленинские горы д. 1, стр. 12, МГУ  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
E-mail: riznich@biophys.msu.ru



*Романовский Юрий Михайлович* – родился в 1929 году, окончил физический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (1952), доктор физико-математических наук, заслуженный профессор МГУ. В настоящее время – профессор физического факультета МГУ. Автор 10 монографий, посвященных проблемам динамики нелинейных систем и математической биофизике, 3 из них переведены за рубежом. Автор или соавтор 6 книг, посвященных истории физики или судьбе известных ученых-физиков.

119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, МГУ  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
E-mail: yuromanovsky@yandex.ru

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*  
Редакторы *Н.Н. Левина, Л.А. Сидорова*  
Оформление художника *Д.В. Соколова*  
Оригинал-макет подготовлен  
*И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой*  
в пакете  $L^A T_E X$

Подписка на 1-е полугодие 2016 года осуществляется  
по каталогу Агентства Роспечати  
«Газеты. Журналы», индекс 73498

Подписка на 2-е полугодие 2016 года осуществляется  
по Объединенному Каталогу «Пресса России» 2016/2  
Раздел: 30. «Научно-технические издания.  
Известия РАН. Известия ВУЗов»  
и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис» 2016/2  
а также по Договору между Подписчиком  
(юридическим или физическим лицом)  
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2016 год 1080 руб. (6 номеров)  
Заявки на заключение Договора принимаются  
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Тел./факс: (845-2) 52-38-64  
E-mail: and@nonlin.sgu.ru  
Сайт журнала <http://andjournal.sgu.ru>

Распространение журнала осуществляется  
редакцией журнала по адресной системе

**Условия подписки на электронную версию журнала на сайте  
Научной электронной библиотеки <http://elibrary.ru>**

Сдано в набор 4.02.2016. Подписано к печати 5.03.2016  
Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная  
Усл. печ. л. 10,15 (7,25). Уч.-изд. л. 7,0. Заказ № 26–Т.

Отпечатано в Типографии ФГБОУ ВО СНИГУ  
410012 Саратов, Б.Казачья, 112А, тел. (845-2) 27-33-85

© Редакция журнала  
«Известия вузов. ПНД», 2016  
© Оформление художника  
Д.В. Соколова, 2016