

Прикладная Деловая Динамика



*80 лет Владиславу Алексеевичу Цареву
(3 августа 1943 года)*

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

С. Боккалетти, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном исследовательском совете (Флоренция, Италия)

А. М. Быков, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия)

В. А. Вакорин, Ph.D., Университет Саймона Фрейзера (Ванкувер, Канада)

С. В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

Н. С. Гинзбург, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

С. А. Кащенко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова (Ярославль, Россия)

А. В. Красков, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

Н. В. Кузнецов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

Ж. ван Луйтелаар, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

А. Люттйоханн, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

И. И. Мохов, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)

А. Б. Нейман, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

В. И. Некоркин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

А. С. Пиковский, доктор наук, Потсдамский университет (Потсдам, Германия)

А. Н. Писарчик, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

А. В. Порубов, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

В. В. Тучин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

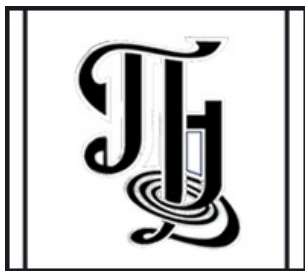
А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

В. А. Царёв, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А (Саратов, Россия)

В. А. Черепенин, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (uralpress.ru). Цена свободная

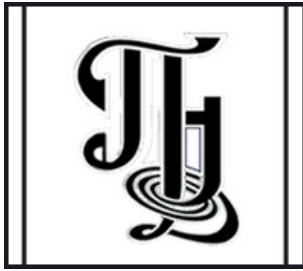
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией М. В. Сысоева
Редакторы: Л. А. Сидорова, А. О. Салахова
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,
Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 14.07.2023
Вышел в свет 31.07.2023
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 16,51 (17,75)
Тираж 100 экз. Заказ № 89-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского
университета. Адрес типографии: Россия,
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФC77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies (ural-press.ru)

The journal is Open Access

Head of Editorial office M. V. Sysoeva
Editors: L. A. Sidorova, A. O. Salakhova
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.:+7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 14.07.2023. Published 31.07.2023
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 16,51 (17,75)
Edition of 100 copies. Order No. 89-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ОТ РЕДАКТОРА

Мирошниченко А. Ю. 80 лет Владиславу Алексеевичу Цареву..... 405

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Вишняков Г. Н., Юрин А. И., Минаев В. Л., Голополов А. А. Анализ погрешности алгоритма обработки сигналов дифференциального фазового поляриметра..... 408

Дмитриев А. С., Рыжов А. И., Сьерра-Теран К. М. Введение в статистическую теорию относительной передачи информации на основе хаотических сигналов..... 421

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

Терешко В. М. Оптимальный баланс индивидуального и коллективного в кормодобывании медоносных пчёл..... 439

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

Фунтов А. А. О теории гибрида ЛБВО и усилителя с комплексной диэлектрической проницаемостью..... 452

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

Аристов В. В., Кубряк О. В., Степанян И. В. Расчёт циклических характеристик электроэнцефалограммы для исследования электрической активности мозга..... 469

Москвитин В. М., Семенова Н. И. Влияние шума на рекуррентные нейронные сети с нелинейными нейронами..... 484

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ. АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

Ревина С. В., Рябов А. С. Неустойчивость Тьюринга в однопараметрической системе Гирера–Мейнхардта..... 501

Кащенко С. А. Динамика полностью связанных цепочек из большого количества осцилляторов с большим запаздыванием в связях 523

C O N T E N T S

EDITORIAL

Miroshnichenko A. Y. 80 years of Vladislav A. Tsarev..... 405

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Vishnyakov G. N., Yurin A. I., Minaev V. L., Golopolosov A. A. Analysis of the accuracy of the signal processing algorithm of the differential phase polarimeter..... 408

Dmitriev A. S., Ryzhov A. I., Sierra-Teran C. M. Introduction to the statistical theory of differential communication based on chaotic signals 421

MODELING OF GLOBAL PROCESSES. NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES

Tereshko V. M. Optimal balance of individual and collective in honeybee foraging..... 439

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

Funtov A. A. About theory of hybride TWTO and an amplifire with a complex permittivity 452

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

Aristov V. V., Kubryak O. V., Stepanyan I. V. Calculation of the cyclic characteristics of the electroencephalogram for investigation of the electrical activity of the brain 469

Moskvitin V. M., Semenova N. I. Noise influence on recurrent neural network with nonlinear neurons..... 484

NONLINEAR WAVES. SOLITONS. AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

Revina S. V., Ryabov A. S. Turing instability in the one-parameter Gierer–Meinhardt system 501

Kashchenko S. A. Dynamics of full-coupled chains of a great number of oscillators with a large delay in couplings..... 523



80 лет Владиславу Алексеевичу Цареву

А. Ю. Мирошниченко

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия
E-mail: alexm2005@list.ru

Поступила в редакцию 29.05.2023, опубликована 31.07.2023

Для цитирования: Мирошниченко А. Ю. 80 лет Владиславу Алексеевичу Цареву // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 405–407. DOI: 10.18500/0869-6632-003055. EDN: YOZXJA

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

3 августа 2023 года исполняется 80 лет почетному работнику высшего профессионального образования РФ, академику Академии наук прикладной радиоэлектроники, доктору технических наук, профессору кафедры «Электронные приборы и устройства» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А. Владиславу Алексеевичу Цареву.

Окончив с отличием Саратовский авиационный техникум в 1962 году, Владислав Алексеевич начал трудовую деятельность в организации п/я 465.

Вся творческая жизнь В. А. Царева вот уже более 50 лет связана с СГТУ имени Гагарина Ю. А. В 1967 году он с отличием окончил Саратовский политехнический институт (СПИ, ныне СГТУ имени Гагарина Ю. А.) по специальности «Электронные приборы» и был принят в аспирантуру. После ее окончания был распределен в лабораторию электронной техники СПИ.

В 1983 году Владислав Алексеевич защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (НИИ «Титан», Москва, руководитель д.т.н., проф. Петров Д. М.) и перешел на кафедру электроники СПИ.

В 1988 году Владиславу Алексеевичу присвоено ученое звание доцента по кафедре «Электронные приборы».

В 1996 году он успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук (АО «НПП «Исток» им. Шокина», Фрязино, Московская обл.), а в 1999 году ему было присвоено ученое звание профессора по кафедре «Электронные приборы и устройства».

С 2003 по 2009 год заведовал кафедрой «Электронные приборы и устройства» Саратовского государственного технического университета.

В настоящее время Владислав Алексеевич Царев работает на кафедре «Электронные приборы и устройства» СГТУ имени Гагарина Ю. А. в должности профессора.

Владислав Алексеевич успешно сочетает работу в университете с научной работой на предприятиях электронной промышленности Саратова: 2000–2005 — заместитель начальника ОКБ по науке ФГУП «НПП «Контакт»; 2002–2004 — консультант ЗАО «Тантал-НАУКА» по вопросам электронной оптики мощных СВЧ-приборов; 2005–2008 — консультант ФГУП «НПП «Алмаз» по вопросам разработки гибридных СВЧ-приборов. В 2011 году работал ведущим инженером отдела 112 ОАО «НПП «Контакт», принимал участие в разработке мощных широкополосных клистронных усилителей X-диапазона для систем космической связи.

С 2012 года по настоящее время является консультантом АО «НПП «Алмаз» по вопросам разработки мощных широкополосных клистронных усилителей X-диапазона для систем космической связи.

На основе полученных им в период с 1990 по 2005 год патентов и разработанных методов расчета в ОАО «НПП «Контакт» были созданы высокоэффективные телевизионные клистроны серии «Верста» и мощный широкополосный усилительный клистрон для систем дальней космической связи серии «Веста», предназначенный для связи с космическим аппаратом по программе «Фобос-грунт», а также новый гибридный СВЧ-прибор (многолучевой клистрод), имеющий рекордно высокий КПД (около 90%). Конструкции таких приборов были отмечены в 1997 г. бронзовыми медалями международного салона изобретений «Эврика-97» в Брюсселе (Бельгия). Одним из новых направлений исследований, которыми руководит профессор Царев В. А., в настоящее время является улучшение комплекса выходных параметров малогабаритных импульсных многолучевых клистронов, перспективных для применения в радиолокационных системах, тропосферной и спутниковой связи и бортовой радиоаппаратуре.

Под научным руководством В. А. Царева защищено 13 кандидатских диссертаций и две докторские диссертации. Он является членом двух диссертационных советов. Имеет более 200 научных публикаций, а также более 50 патентов и авторских свидетельств на изобретения.

Владислав Алексеевич является руководителем научной школы «Разработка методов расчета и проектирования низковольтных многолучевых СВЧ приборов клистронного типа с улучшенными энергетическими, массогабаритными и эксплуатационными характеристиками для радиопередающих систем космической связи, работающих в коротковолновой части СВЧ диапазона».

За время работы в СГТУ имени Гагарина Ю. А. Владислав Алексеевич был научным руководителем ряда научно-исследовательских проектов Министерства образования и науки РФ, Российского фонда фундаментальных исследований, Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере (программы «Старт», «УМНИК»). Участвовал в Межведомственной научной программе «Развитие научного потенциала высшей школы», Федеральной целевой программе «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

Эти исследования соответствуют «Приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники Российской Федерации» — информационно-телекоммуникационные системы и «Критическим технологиям Российской Федерации» — «технологии создания электронной компонентной базы и энергоэффективных световых устройств».

С 1965 года В. А. Царев является членом Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А. С. Попова. С 2006 — член ведущей научной школы РФ НШ — 9553.2006.8 «Создание теории, исследование характеристик и разработка комплекта СВЧ электротехнологического оборудования для интенсификации широкого класса технологических процессов». С 2013 — академик Академии наук прикладной радиоэлектроники.

Владислав Алексеевич состоит в редакционных коллегиях научных журналов и научно-технических сборников, таких как «Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника», «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика», «Вопросы

электротехнологии», «Journal of Electrical and Electronic Engineering (JEEE)», научно-технический сборник «Актуальные проблемы электронного приборостроения».

На протяжении ряда лет В. А. Царев принимал активное участие в работе диссертационных советов: диссертационного совета Д 212.217.04 (Самарский государственный технический университет, специальность 05.09.10 — Электротехнология), заместитель председателя диссертационного совета Д 212.242.10 (Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., специальность 05.09.10 — Электротехнология).

Владислав Алексеевич являлся также федеральным экспертом научно-технической сферы и экспертом ФУМО в системе высшего образования по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки 11.00.00 «Электроника, радиотехника и системы связи».

Владислав Алексеевич — один из инициаторов и организаторов проведения под эгидой международной организации IEEE в СГТУ 15 международных научно-технических конференций «Актуальные проблемы электронного приборостроения».

Владислав Алексеевич награжден нагрудными знаками Министерства и ЦК профсоюза СССР «Победитель социалистического соревнования 1978 г.», за внедрение изобретений — «Изобретатель СССР»; двумя бронзовыми медалями Международного салона инноваций, изобретений и новых технологий (Брюссель, 1997). За заслуги в области образования В. А. Царев награжден нагрудным знаком и ему присвоено звание «Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации» (2007). За многолетний добросовестный труд присвоено звание «Ветеран труда».

За успехи в научно-производственной и общественной работе неоднократно был отмечен Почетными грамотами и дипломами СГТУ за лидирующие места на внутривузовских конкурсах по итогам года. Владислав Алексеевич пользуется уважением и авторитетом как среди сотрудников кафедры, так и среди преподавателей университета.

Поздравляем профессора Царева Владислава Алексеевича с юбилеем, желаем здоровья, плодотворной научной и педагогической деятельности!



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(4)

Научная статья
УДК 543.454; 517.44

DOI: 10.18500/0869-6632-003047
EDN: VVWJWG

Анализ погрешности алгоритма обработки сигналов дифференциального фазового поляриметра

Г. Н. Вишняков^{1,2}, А. И. Юрин^{3,1} ✉, В. Л. Минаев^{1,3}, А. А. Голополов¹

¹Всероссийский научно-исследовательский институт оптико-физических измерений, Москва, Россия

²Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, Россия

³Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

E-mail: vish@vniiofi.ru, ✉ ayurin@hse.ru, minaev@vniiofi.ru, golopolosov@vniiofi.ru

Поступила в редакцию 5.04.2023, принята к публикации 14.04.2023,

опубликована онлайн 27.06.2023, опубликована 31.07.2023

Аннотация. Цель данной работы — анализ влияния алгоритма обработки сигналов поляриметра на результаты измерений угла вращения плоскости поляризации для повышения точности измерений в дифференциальной поляриметрии. **Методы.** В работе рассмотрены методы поляриметрии, применяемые для анализа оптически активных веществ, основанные на методах фазовых измерений, используемых для вычисления угла вращения плоскости поляризации. Отмечена целесообразность применения преобразования Фурье для расчета разности фаз сигналов дифференциального поляриметра. Для анализа погрешности алгоритма применено математическое моделирование процессов обработки измерительной информации при различных параметрах сигналов. **Результаты.** Приведены результаты исследования влияния разрядности аналого-цифрового преобразователя, количества отсчетов за период сигнала и времени накопления на точность восстановления разности фаз. Также исследовано влияние соотношения амплитуд сигналов и уровня амплитудных и фазовых шумов, вызванных несовершенством измерительной системы. **Заключение.** Полученные результаты позволяют выбрать оптимальные параметры элементов поляриметра и режима измерений с целью повышения точности измерений угла вращения плоскости поляризации с помощью дифференциального фазового поляриметра на основе преобразования Фурье.

Ключевые слова: поляриметрия, угол вращения плоскости поляризации, фазовые измерения, анализ гармонических сигналов, амплитудный и фазовый шум, преобразование Фурье.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Всероссийского научно-исследовательского института оптико-физических измерений.

Для цитирования: Вишняков Г. Н., Юрин А. И., Минаев В. Л., Голополов А. А. Анализ погрешности алгоритма обработки сигналов дифференциального фазового поляриметра // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 408–420. DOI: 10.18500/0869-6632-003047. EDN: VVWJWG

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Analysis of the accuracy of the signal processing algorithm of the differential phase polarimeter

G. N. Vishnyakov^{1,2}, A. I. Yurin^{3,1}✉, V. L. Minaev^{1,3}, A. A. Golopolosov¹

¹All-Russian Research Institute for Optical and Physical Measurements, Moscow, Russia

²Bauman Moscow State Technical University, Russia

³HSE University, Moscow, Russia

E-mail: vish@vniiofi.ru, ✉ ayurin@hse.ru, minaev@vniiofi.ru, golopolosov@vniiofi.ru

Received 5.04.2023, accepted 14.04.2023, available online 27.06.2023, published 31.07.2023

Abstract. The purpose of this work is to analyze the effect of the polarimeter signal processing algorithm on the results of measurements of the optical rotation angle of the polarization plane to improve the accuracy of measurements in differential polarimetry. *Methods.* The paper considers the methods of polarimetry used for the analysis of optically active substances, based on the methods of phase measurements used to calculate the optical rotation angle. The expediency of using the Fourier transform to calculate the phase difference of differential polarimeter signals is noted. To analyze the error of the algorithm, mathematical modeling of the measurement information processing for various signal parameters is applied. *Results.* The results of the study of the effect of the bit depth of the analog-to-digital converter, the number of samples over the period of the signal and the accumulation time on the accuracy of restoring the phase difference are presented. The influence of the ratio of signal amplitudes and the level of amplitude and phase noise caused by the imperfection of the measuring system has also been investigated. *Conclusion.* The obtained results make it possible to optimize the operating mode and improve the accuracy of the optical rotation angle measurements using a differential phase polarimeter based on the Fourier transform.

Keywords: polarimetry, optical rotation angle, phase measurements, harmonic signal analysis, amplitude and phase noise, Fourier transform.

Acknowledgements. This work was supported by All-Russian Research Institute for Optical and Physical Measurements.

For citation: Vishnyakov GN, Yurin AI, Minaev VL, Golopolosov AA. Analysis of the accuracy of the signal processing algorithm of the differential phase polarimeter. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(4):408–420. DOI: 10.18500/0869-6632-003047

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Поляриметрические методы исследования основаны на измерении угла вращения плоскости поляризации (УВПП) света, прошедшего через оптически активную среду [1]. Оптическая активность веществ заключается в изменении плоскости поляризации света и обусловлена строением кристаллической решетки или молекул, поэтому измеряя УВПП, можно определять состав вещества, конфигурацию молекул, концентрацию растворов и т. д.

В оптических приборах различного назначения часто применяют поляризационные материалы, для контроля качества которых требуются высокоточные измерения [2]. Поляризационные измерения широко используют в астрономии [3], зондировании земли из космоса [4], пищевой промышленности для определения содержания сахара [5], идентификации масел и других оптически активных жидкостей [6], в медицине — для контроля качества лекарств [7], офтальмологии [8] и т. д. В более сложных случаях, для анализа смесей нескольких оптически активных веществ используют спектрополяриметрические методы [9], в которых исследуют изменение УВПП в зависимости от длины волны света.

1. Методы измерений угла вращения плоскости поляризации света

Среди методов, применяемых для измерения характеристик оптически активных веществ, можно выделить две группы. К первой группе относятся нулевые методы, в которых добиваются минимальной интенсивности (гашения) светового потока путем изменения относительного углового положения оптических элементов — поляризатора и анализатора [10]. Недостатками подобных методов являются необходимость использования высокоточных угломерных устройств, сильное влияние электрических шумов и флуктуаций интенсивности источника света, поскольку момент гашения необходимо определять путем измерения минимального уровня сигнала. В методах второй группы применяют модуляцию поляризации светового потока [10], при этом можно использовать как амплитудные, так и фазовые характеристики сигналов для расчета искомых величин.

Методы, основанные на анализе фазовых характеристик, обладают меньшей чувствительностью к шумам и получили развитие в дифференциальной поляриметрии [11], в которой модуляцию поляризации лучей обычно осуществляют с помощью вращающегося с постоянной скоростью анализатора. Суть дифференциальной поляриметрии заключается в пропускании первого (объектного) модулированного поляризованного луча через кювету с исследуемым веществом, а второго (опорного) — минуя эту кювету (рис. 1).

При этом первый луч претерпевает дополнительный поворот плоскости поляризации из-за оптической активности исследуемого вещества, поэтому сигналы на фотоприемниках будут различаться по фазе. Таким образом, измерение угла вращения плоскости поляризации (УВП) сводится к расчету разности фаз гармонических сигналов. Для анализа спектральной зависимости УВП используют источники излучения с различной длиной волны.

Однако существующие методы дифференциальной поляриметрии обладают недостатками в области схемных решений и реализованных алгоритмов вычисления результатов измерений, поэтому их усовершенствование является актуальной задачей. Целью данной работы является повышение точности дифференциальной поляриметрии за счет анализа влияния алгоритма обработки сигналов на результаты измерений УВП.

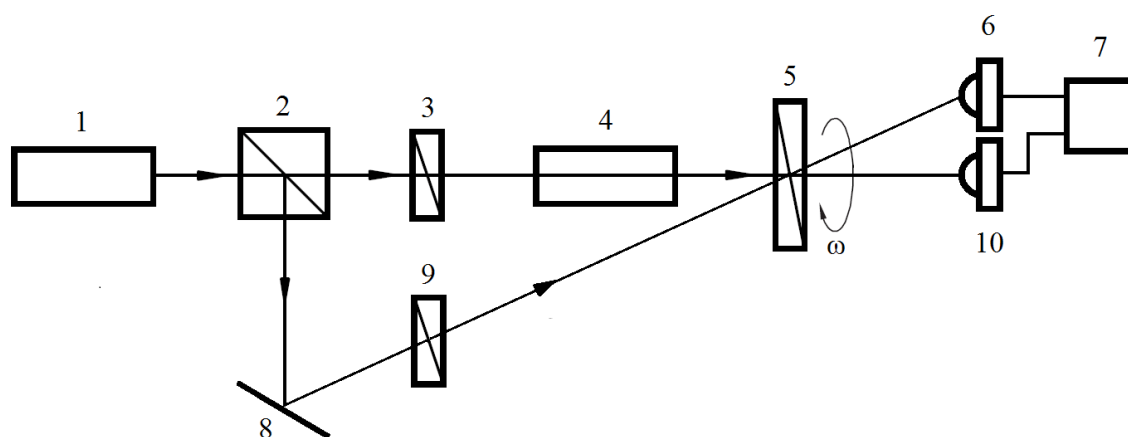


Рис. 1. Схема дифференциального поляриметра: 1 — источник монохроматического излучения; 2 — светоделитель; 3, 9 — поляризаторы; 4 — кювета с исследуемым веществом; 5 — вращающийся анализатор; 6, 10 — фотоприемники; 7 — фазометр; 8 — неподвижное зеркало

Fig. 1. Scheme of differential polarimeter: 1 — source of monochromatic radiation; 2 — beam splitter; 3, 9 — polarizers; 4 — cuvette with the test substance; 5 — rotating analyzer; 6, 10 — photodetectors; 7 — phase meter; 8 — fixed mirror

2. Методы фазовых измерений

Разработаны и широко применяются различные методы фазовых измерений [12]. В простейшем случае используют преобразование разности фаз сигналов в постоянное напряжение или временной интервал. Недостаток подобных методов заключается в том, что для расчета фазы используется только малая часть информационного сигнала в областях его перехода через определенный уровень, поэтому шумы и флуктуации сигнала будут оказывать заметное воздействие на точность измерений.

Для использования всего массива информации о фазе можно использовать корреляционные (интегральные) методы, которые применяют для анализа изображений [13]. Эти методы, как правило, реализуют в частотной области через преобразование Фурье, однако лишь максимум корреляционной функции содержит информацию о фазовом сдвиге, расчет которого в дискретном виде с высокой точностью представляет собой довольно сложную задачу [12].

Если же вновь обратиться к методам обработки изображений, то можно использовать богатый опыт в области расшифровки интерферограмм, а задачу измерения разности фаз гармонических сигналов решать с помощью методов цифровой интерферометрии. Для вычисления фазы волнового фронта при анализе интерферограмм обычно используют метод фазовых шагов или метод, основанный на преобразовании Фурье (фурье-метод) [14].

Метод фазовых шагов в различных модификациях является весьма популярным, однако требует анализа как минимум трех интерферограмм, в связи с чем его трудно применять для работы с быстропротекающими процессами. Фурье-метод позволяет рассчитывать разность фаз по одной интерферограмме, но с меньшей разрешающей способностью, что связано с ограничением спектра сигнала [15]. Однако, поскольку измерительные сигналы дифференциального поляриметра обладают очень узким спектром, то для расчета разности фаз целесообразно применять именно фурье-метод и использовать аналого-цифровой преобразователь (АЦП) вместо фазометра.

3. Алгоритм вычисления фазового сдвига по сигналам дифференциального фазового поляриметра

Рассмотрим процесс получения измерительной информации с помощью дифференциального фазового поляриметра (см. рис. 1). В дифференциальном фазовом поляриметре для модуляции луча используется вращающийся с постоянной скоростью поляризатор, при этом интенсивность света на его выходе описывается законом Малюса [16]. Тогда сигналы на фотоприемниках можно описать уравнениями

$$S_1(t) = M_1 + \sigma_1 \eta(t) + A_1 \cos(\omega_0 t + \sigma_{\phi 1} \eta_{\phi}(t) + \phi_{01}), \quad (1)$$

$$S_2(t) = M_2 + \sigma_2 \eta(t) + A_2 \cos(\omega_0 t + \sigma_{\phi 2} \eta_{\phi}(t) + \phi_{02}), \quad (2)$$

где $S_1(t)$ — сигнал с объектного фотоприемника; $S_2(t)$ — сигнал с опорного фотоприемника; $M_1, M_2, \sigma_1, \sigma_2$ — средние значения и средние квадратические отклонения (СКО) постоянной составляющей сигналов; A_1, A_2 — амплитуды сигналов; $\eta(t)$ — аддитивный амплитудный шум, вызываемый непостоянством интенсивности источника излучения; $\omega_0 = 2\pi/T$ — циклическая частота сигнала (определяемая периодом T); $\sigma_{\phi 1}, \sigma_{\phi 2}, \eta_{\phi}(t)$ — СКО фаз и фазовый шум, вызываемые неравномерностью вращения поляризатора; ϕ_{01}, ϕ_{02} — начальные фазы; t — время.

Предполагается, что шумы $\eta(t)$ и $\eta_{\phi}(t)$ имеют нормальное распределение, но к фазовому шуму применена низкочастотная фильтрация.

Опишем этапы обработки сигналов с помощью предлагаемого алгоритма.

- 1) Исходные опорный и объектный сигналы (1) и (2) умножаются на аподизирующую функцию: модифицированное окно Блекмена–Харриса четвертого порядка [17], имеющего аналитическое представление в виде:

$$w(n) = a_0 - a_1 \cos(2\pi n/N) + a_2 \cos(4\pi n/N) - a_3 \cos(6\pi n/N), \quad 0 \leq n \leq N, \quad (3)$$

где $a_0 = 0.3635819$, $a_1 = 0.4891775$, $a_2 = 0.1365995$, $a_3 = 0.0106411$, N — общее число отсчетов.

- 2) Выполняется прямое преобразование Фурье.
- 3) Выполняется полосовая фильтрация первого порядка в спектре полученных сигналов на этапе 2 фильтром Баттерворта пятого порядка, описываемая уравнением

$$F(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_1}{\Delta\omega_c}\right)^{2k}}, \quad (4)$$

где $\omega_c = 0.1\omega_1$ — частота среза, k — порядок фильтра.

- 4) Выполняется обратное преобразования Фурье от фильтрованных сигналов.
- 5) Вычисляется разность фаз $\Delta\phi(t)$ опорного и объектного сигналов по формуле

$$\Delta\phi(t) = \arg[S_1^i \cdot S_2^{i*}], \quad (5)$$

где знак * означает комплексно-сопряжённое значение; \arg — функция вычисления аргумента комплексного числа; S_1^i , S_2^i — сигналы, полученные на этапе 4.

- 6) Вычисляется среднее значение полученного фазового распределения $\Delta\phi(t)$, которое представляет собой искомое значение УВПД.

4. Анализ влияния различных параметров на погрешности алгоритма

Приведем результаты оценки влияния на погрешность алгоритма вычисления фазового сдвига по сигналам дифференциального фазового поляриметра следующих параметров: разрядности уровней квантования, количества отсчетов за период и длительности накопления сигнала, соотношения амплитуд сигналов, амплитудного шума и фазового шума, вызванного неравномерностью вращения анализатора. Математическое моделирование проводилось в среде MATLAB [18]. Целью данного моделирования является выбор параметров схемы поляриметра и оптимального режима его работы.

Анализ погрешности алгоритма проводился следующим образом.

- 1) Задавались объектный и опорный сигналы по формулам (1) и (2) с различными параметрами. При этом фазовый сдвиг между исходными сигналами для всех реализаций постоянен, $\Delta\phi_0 = \phi_{01} - \phi_{02}$, где $\phi_{01} = 0^\circ$ и $\phi_{02} = 45^\circ$ — начальные фазы объектного и опорного сигналов, соответственно.
- 2) Вычислялся фазовый сдвиг $\Delta\phi(t)$ между сигналами с помощью предложенного алгоритма.
- 3) Абсолютная погрешность алгоритма оценивалась по разности между заданным и вычисленным фазовым сдвигом: $\Delta\phi = \Delta\phi(t) - \Delta\phi_0(t)$. Дополнительно вычислялось СКО $\sigma_{\Delta\phi}$.

4.1. Влияние разрядности уровней квантования. При оцифровке сигналов возникает погрешность квантования (шум квантования), которая зависит от количества уровней квантования, связанных с разрядностью применяемого АЦП. Поэтому для выбора оптимального значения уровней квантования рассмотрим его влияние на погрешность измерения. Параметры математической модели сигналов приведены в табл. 1, где Q — максимальное значение сигнала в заданной разрядности системы.

Результаты моделирования приведены на рис. 2, *a*, *b*.

Как следует из анализа полученных зависимостей, разрядность уровней квантования оказывает незначительное влияние на погрешность и СКО, и для оцифровки сигнала дифференциального поляриметра можно использовать недорогие 12-разрядные АЦП.

Таблица 1. Значения параметров математической модели сигналов

Table 1. Parameters values of the mathematical model of signals

Параметр	Значение
Разрядность АЦП	8...16
Среднее значение объектного сигнала	$Q/2$
Среднее значение опорного сигнала	$Q/2$
Амплитуда объектного сигнала	$Q/2$
Амплитуда опорного сигнала	$Q/2$
Период сигнала, с	0.1
Количество отсчетов на период	1000
Длительность накопления сигнала, с	20

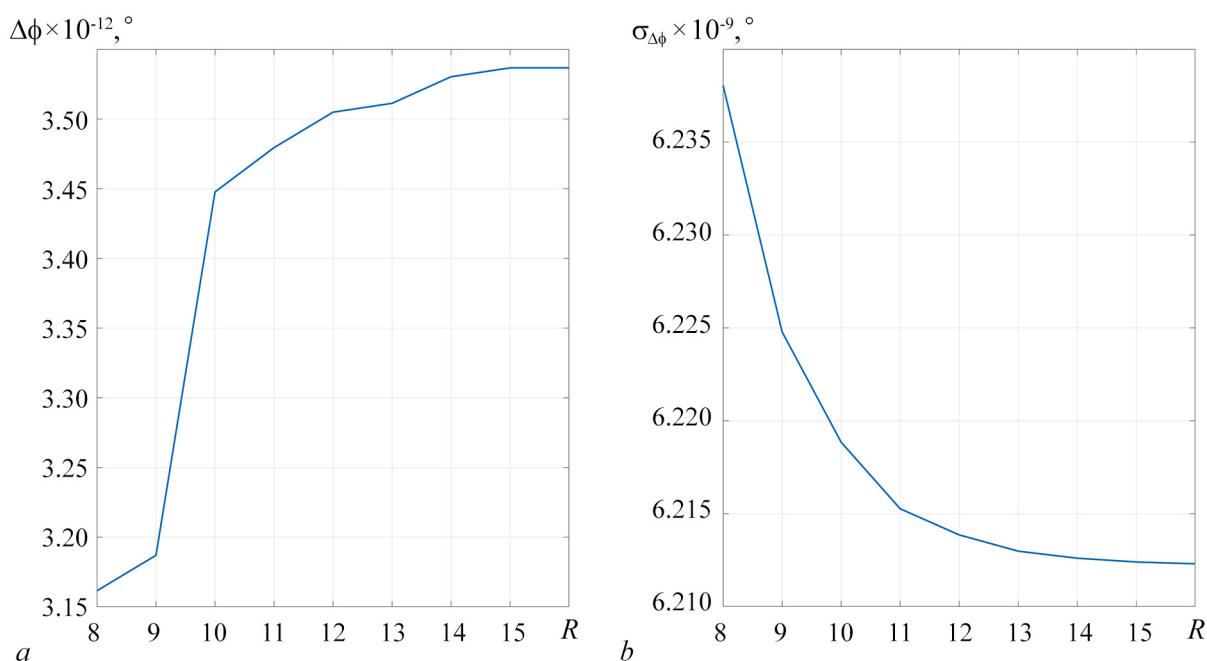


Рис. 2. Влияние разрядности АЦП R на погрешность $\Delta\phi$ (*a*) и СКО $\sigma_{\Delta\phi}$ (*b*) восстановленной разности фаз

Fig. 2. The effect of the analog-to-digital converter bit rate R on the error $\Delta\phi$ (*a*) and the standard deviation $\sigma_{\Delta\phi}$ (*b*) of the restored phase difference

4.2. Влияние количества отсчетов за период и длительности накопления сигнала.

Далее рассмотрим влияние количества отсчетов за период и длительности накопления сигнала (рис. 3, *a*, *b*). Параметры математической модели сигналов приведены в табл. 2.

Как следует из рис. 3, *a* и 3, *b*, наибольшее влияние на погрешность и СКО оказывает время накопления сигнала (то есть количество анализируемых периодов). При этом значения данных параметров слабо изменяются после времени накопления больше 30 секунд (или 300 периодов), поэтому можно ограничить объем получаемой информации с учетом этих результатов.

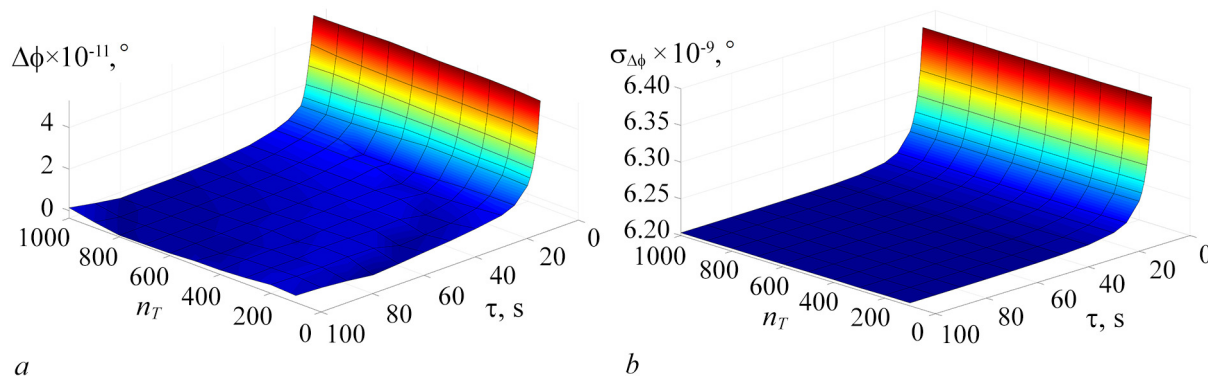


Рис. 3. Влияние количества отсчетов на период n_T и времени накопления сигнала τ на погрешность $\Delta\phi$ (*a*) и СКО $\sigma_{\Delta\phi}$ (*b*) восстановленной разности фаз (цвет онлайн)

Fig. 3. The effect of the number of samples for the period n_T and the time of accumulation of the signal τ on the error $\Delta\phi$ (*a*) and the standard deviation $\sigma_{\Delta\phi}$ (*b*) of the restored phase difference (color online)

Таблица 2. Значения параметров математической модели сигналов

Table 2. Parameters values of the mathematical model of signals

Параметр	Значение
Разрядность АЦП	12
Среднее значение объектного сигнала	2048
Среднее значение опорного сигнала	2048
Амплитуда объектного сигнала	2048
Амплитуда опорного сигнала	2048
Период сигнала, с	0.1
Количество отсчетов на период	100...1000
Длительность накопления сигнала, с	5...100

4.3. Влияние соотношения амплитуд сигналов. Поскольку интенсивность объектного и опорного лучей может быть неодинаковой, рассмотрим влияние соотношения амплитуд сигналов на погрешность и СКО. Для этого можно провести моделирование при различных значениях коэффициента ослабления амплитуды сигналов K_i . Параметры математической модели приведены в табл. 3.

Таблица 3. Значения параметров математической модели сигналов

Table 3. Parameters values of mathematical model of signals

Параметр	Значение
Разрядность АЦП	12
Среднее значение объектного сигнала	$K_1 \cdot 2048$
Среднее значение опорного сигнала	$K_2 \cdot 2048$
Амплитуда объектного сигнала	$K_1 \cdot 2048$
Амплитуда опорного сигнала	$K_2 \cdot 2048$
Период сигнала, с	0.1
Количество отсчетов на период	1000
Длительность накопления сигнала, с	30

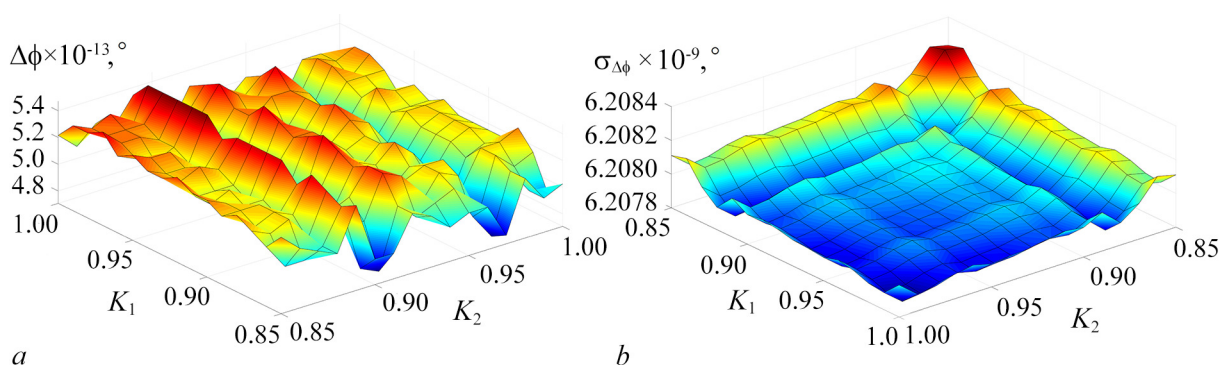


Рис. 4. Влияние коэффициента ослабления сигналов K_i на погрешность $\Delta\phi$ (a) и СКО $\sigma_{\Delta\phi}$ (b) восстановленной разности фаз (цвет онлайн)

Fig. 4. The effect of the signal attenuation coefficient K_i on the error $\Delta\phi$ (a) and the standard deviation $\sigma_{\Delta\phi}$ (b) of the restored phase difference (color online)

По результатам моделирования (рис. 4) можно сделать вывод, что изменение отношения амплитуд сигналов в пределах 15% не будет оказывать значимого влияния на погрешность вычислений.

4.4. Влияние амплитудного шума. Моделирование по п. 4.1–4.3 проводилось для случая отсутствия шумов случайных составляющих $\eta(t)$ и $\eta_\phi(t)$ — амплитудного и фазового шума. Далее рассмотрим влияние на погрешность алгоритма этих параметров.

Уровень амплитудного шума задавался изменением СКО шума объектного и опорного сигналов σ_1 и σ_2 с помощью размерного коэффициента η , варьируемого в диапазоне 0.001...0.01. Амплитуды сигналов при этом примем за 95% от максимального значения. Значения погрешности и СКО будем рассматривать в зависимости от отношения сигнал/шум μ_A , которое для опорного сигнала вычисляется по формуле

$$\mu_A = 20 \lg(M_1/\sigma_1), \quad (6)$$

Параметры математической модели приведены в табл. 4.

Таким образом, значение амплитудного шума (рис. 5, a, b) оказывает заметное влияние на погрешность алгоритма, и желательно добиваться повышения отношения сигнал/шум в измерительной системе до уровня 50 дБ и выше.

Таблица 4. Значения параметров математической модели сигналов
 Table 4. Parameters values of mathematical model of signals

Параметр	Значение
Разрядность АЦП	12
Среднее значение объектного сигнала	2048
Среднее значение опорного сигнала	2048
Амплитуда объектного сигнала	$0.95 \cdot 2048$
Амплитуда опорного сигнала	$0.95 \cdot 2048$
СКО шума объектного сигнала	$\eta \cdot 4096$
СКО шума опорного сигнала	$\eta \cdot 4096$
Период сигнала, с	0.1
Количество отсчетов на период	1000
Длительность накопления сигнала, с	30

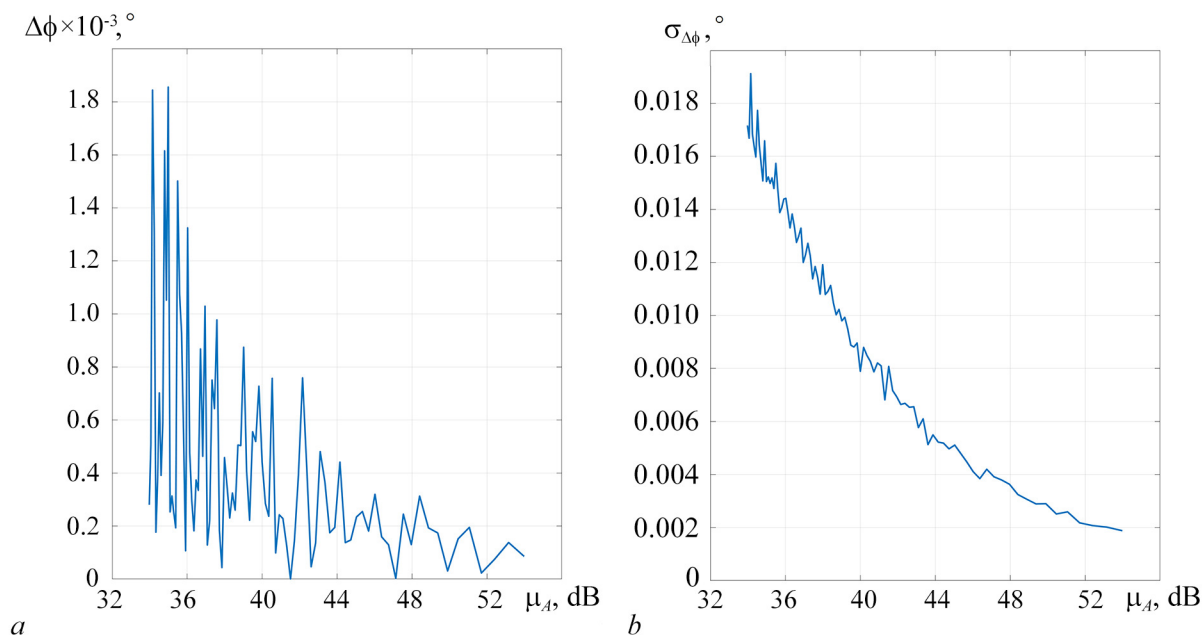


Рис. 5. Влияние отношения сигнал/шум μ_A на погрешность $\Delta\phi$ (a) и СКО $\sigma_{\Delta\phi}$ (b) восстановленной разности фаз

Fig. 5. The effect of the signal-to-noise ratio μ_A on the error $\Delta\phi$ (a) and the standard deviation $\sigma_{\Delta\phi}$ (b) of the restored phase difference

4.5. Влияние фазового шума. Рассмотрим также влияние фазового шума, вызванного неравномерностью вращения анализатора, которую можно оценить через коэффициент неравномерности вращения δ [19], определяемый по формуле

$$\delta = (\omega_{\max} - \omega_{\min})/\omega_0, \quad (7)$$

где ω_{\max} , ω_{\min} , ω_0 — максимальное, минимальное и среднее значения угловой скорости за 1 цикл. Данный коэффициент зависит от типа электродвигателя, вращающего поляризатор, и типовые значения δ составляют 0.001...0.01 [19], поэтому было проведено моделирование влияния нерав-

номерности вращения при наличии низкочастотного фазового шума в диапазоне от 0 до $0.01\omega_0$. Параметры математической модели приведены в табл. 5.

Из полученных результатов можно сделать вывод (рис. 6), что неравномерность вращения анализатора в пределах $0...0.01\omega_0$ компенсируется алгоритмом обработки и слабо влияет на результаты измерений.

Таблица 5. Значения параметров математической модели сигналов

Table 5. Parameters values of mathematical model of signals

Параметр	Значение
Разрядность АЦП	12
Среднее значение объектного сигнала	2048
Среднее значение опорного сигнала	2048
Амплитуда объектного сигнала	2048
Амплитуда опорного сигнала	4096
Амплитуда фазового шума объектного сигнала	$0...0.01\omega_0$
Амплитуда фазового шума опорного сигнала	$0...0.01\omega_0$
Период сигнала, с	0.1
Количество отсчетов на период	1000
Длительность накопления сигнала, с	30

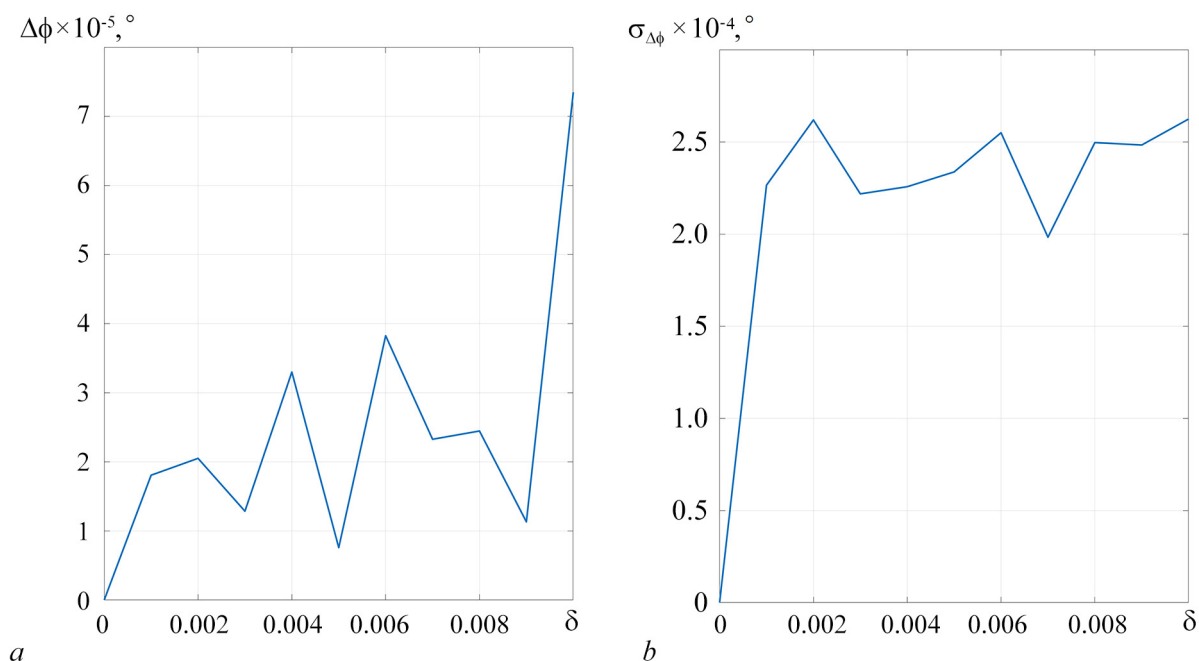


Рис. 6. Влияние коэффициента неравномерности вращения поляризатора δ на погрешность $\Delta\phi$ (a) и СКО $\sigma_{\Delta\phi}$ (b) восстановленной разности фаз

Fig. 6. The effect of the coefficient of rotation unevenness of the polarizer δ on the error $\Delta\phi$ (a) and the standard deviation $\sigma_{\Delta\phi}$ (b) of the restored phase difference

Заключение

В работе представлены результаты анализа погрешности алгоритма обработки сигналов дифференциального поляриметра, в котором угловые измерения заменены фазовыми. Благодаря отказу от угловых измерений положения анализатора существенно снижаются требования к поворотному устройству и фотоприемникам, что удешевляет устройство поляриметра. Для расчета УВПП предложен алгоритм обработки сигналов, основанный на преобразовании Фурье. Для оценки погрешности алгоритма проведено математическое моделирование процесса обработки измерительной информации при различных параметрах сигналов. Полученные результаты позволяют оценить требования к элементам поляриметра (разрядности и частоты дискретизации АЦП, скорости и неравномерности вращения двигателя, отношения сигнал/шум), а также оптимизировать режим его работы.

Список литературы

1. Волкова Е. А. Поляризационные измерения. М.: Изд-во стандартов, 1974. 156 с.
2. Хасанов Т. Измерение оптических постоянных подложек на основе отражения // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. 2011. Т. 8, № 3. С. 62–71.
3. Клочкова В. Г., Панчук В. Е., Романенко В. П., Найденов И. Д. Поляриметрия и спектрополяриметрия звезд. Приборы и методы // Бюллетень Специальной астрофизической обсерватории РАН. 2005. Т. 58. С. 132–144.
4. Дмитриев А. В., Чимитдоржиев Т. Н., Гусев М. А., Дагуров П. Н., Емельянов К. С., Захаров А. И., Кирбижекова И. И. Базовые продукты зондирования земли космическими радиолокаторами с синтезированной апертурой // Исследование Земли из космоса. 2014. № 5. С. 83–91. DOI: 10.7868/S0205961414050042.
5. ГОСТ 12517-2013. Сахар. Метод определения сахарозы. М.: Стандартинформ, 2016. 10 с.
6. Орлова А. В., Кононов Л. О. Поляриметрия как метод изучения структуры водных растворов углеводов: корреляция с другими методами // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2020. Т. 12, № 1. С. 95–106. DOI: 10.17725/rensit.2020.12.095.
7. Сыроешкин А. В., Оготовева Д. Д., Галкина Д. А., Джавахян М. А., Елизарова Т. Е., Успенская Е. В., Плетенева Т. В. Поляриметрия и динамическое светорассеяние в контроле качества настоек // Вопросы биологической, медицинской и фармацевтической химии. 2022. Т. 25, № 9. С. 3–9. DOI: 10.29296/25877313-2022-09-01.
8. Руднева М. А. Ранняя диагностика и контроль динамики прогрессирования глаукомы методом сканирующей лазерной поляриметрии (GDxVCC) // Глаукома. 2006. № 4. С. 41–44.
9. Уткин Г. И. Схемы построения прецизионных спектрополяриметров для физико-химического анализа // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 7 (19). С. 1–15. DOI: 10.18698/2308-6033-2013-7-941.
10. Снопко В. Н. Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения. Минск: Наука и техника, 1992. 336 с.
11. Вишняков Г. Н., Левин Г. Г., Ломакин А. Г. Измерение угла вращения плоскости поляризации методом дифференциальной поляриметрии с вращающимся анализатором // Оптический журнал. 2011. Т. 78, № 2. С. 53–60.
12. Webster J. G. Electrical Measurement, Signal Processing, and Displays. Boca Raton: CRC Press, 2003. 768 p. DOI: 10.1201/9780203009406.
13. Павельева Е. А. Обработка и анализ изображений на основе использования информации о фазе // Компьютерная оптика. 2018. Т. 42, № 6. С. 1022–1034. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-6-1022-1034.
14. Goldberg K. A., Bokor J. Fourier-transform method of phase-shift determination // Applied Optics. 2001. Vol. 40, no. 17. P. 2886–2894. DOI: 10.1364/AO.40.002886.
15. Вишняков Г. Н., Левин Г. Г., Лоцилов К. Е., Сухоруков К. А. Фурье-синтез профиля поверхно-

сти трехмерных объектов методом многоакурсной проекции полос // Оптика и спектроскопия. 2005. Т. 99, № 4. С. 680–684.

16. *Яворский Б. М., Детлаф А. А.* Справочник по физике. 4-е изд. М.: Наука, 1968. 940 с.
17. *Oppenheim A. V., Schaffer R. W., Buck J. R.* Discrete-Time Signal Processing. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 1999. 893 p.
18. MATLAB [Electronic resource]. Available from: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>.
19. *Артоболевский И. И.* Теория механизмов и машин: Учебное пособие для вузов. 4-е изд. М.: Наука, 1988. 640 с.

References

1. Volkova EA. Polarization Measurements. Moscow: Nauka; 1974. 156 p. (in Russian).
2. Khasanov T. Measurement of optical constants of substrates based on reflection. Basic Problems of Material Science. 2011;8(3):62–71 (in Russian).
3. Klochkova VG, Panchuk VE, Romanenko VP, Naidenov ID. Polarimetry and spectropolarimetry of stars. Devices and methods. Bulletin of the Special Astrophysical Observatory. 2005;58:132–144 (in Russian).
4. Dmitriev AV, Chimitdorzhiev TN, Gusev MA, Dagurov PN, Emelyanov KS, Zakharov AI, Kirbizhekova II. Basic products of Earth remote sensing by means of spaceborne synthetic aperture radars. Earth Observation and Remote Sensing. 2014;(5):83–91 (in Russian). DOI: 10.7868/S0205961414050042.
5. GOST 12517-2013. Sugar. Method for Determination of Sucrose. Moscow: Standartinform; 2016. 10 p. (in Russian).
6. Orlova AV, Kononov LO. Polarimetry as a method for studying the structure of aqueous carbohydrate solutions: Correlation with other methods. Radioelectronics. Nanosystems. Information Technology. 2020;12(1):95–106. DOI: 10.17725/rensit.2020.12.095.
7. Syroeshkin AV, Ogotoeva DD, Galkina DA, Dzhavakhyan MA, Elizarova TE, Pleteneva TV, Uspenskaya EV. Identification of tinctures by the polarimetric method. Problems of Biological, Medical and Pharmaceutical Chemistry. 2022;25(9):3–9 (in Russian). DOI: 10.29296/25877313-2022-09-01.
8. Rudneva MA. Early diagnosis and monitoring of glaucoma progression by method of scanning laser polarimetry (GDxVCC). Glaucoma. 2006;(4):41–44 (in Russian).
9. Utkin GI. Construction arrangement of precision spectropolarimeters for physical and chemical analysis. Engineering Journal: Science and Innovation. 2013;7(19):1–15 (in Russian). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-7-941.
10. Snopko VN. Polarization Characteristics of Optical Radiation and Methods of Measurement. Minsk: Nauka i Tekhnika; 1992. 336 p. (in Russian).
11. Vishnyakov GN, Levin GG, Lomakin AG. Measuring the angle of rotation of the plane of polarization by differential polarimetry with a rotating analyzer. Journal of Optical Technology. 2011;78(2):124–128. DOI: 10.1364/JOT.78.000124.
12. Webster JG. Electrical Measurement, Signal Processing, and Displays. Boca Raton: CRC Press; 2003. 768 p. DOI: 10.1201/9780203009406.
13. Pavelyeva EA. Image processing and analysis based on the use of phase information. Computer Optics. 2018;42(6):1022–1034 (in Russian). DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-6-1022-1034.
14. Goldberg KA, Bokor J. Fourier-transform method of phase-shift determination. Applied Optics. 2001;40(17):2886–2894. DOI: 10.1364/AO.40.002886.
15. Vishnyakov GN, Levin GG, Loshchilov KE, Sukhorukov KA. Fourier synthesis of a three-dimensional surface by the method of multiangle projection of fringes. Optics and Spectroscopy. 2005;99(4):654–658. DOI: 10.1134/1.2113386.

16. Yavorsky BM, Detlaf AA. Handbook of Physics. Moscow: Mir Publishers; 1972. 965 p.
17. Oppenheim AV, Schafer RW, Buck JR. Discrete-Time Signal Processing. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall; 1999. 893 p.
18. MATLAB [Electronic resource]. Available from: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>.
19. Artobolevskii II. Theory of Mechanisms and Machines. 4th edition. Moscow: Nauka; 1988. 640 p. (in Russian).



Вишняков Геннадий Николаевич — доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией Всероссийского научно-исследовательского института оптико-физических измерений. Область научных интересов: оптика, метрология, рефрактометрия, поляриметрия, эллипсометрия.

Россия, 119361 Москва, ул. Озерная, 46
 Всероссийский научно-исследовательский институт оптико-физических измерений
 E-mail: vish@vniiofi.ru
 ORCID: 0000-0003-0237-4738
 AuthorID (eLibrary.Ru): 36013



Юрин Александр Игоревич — родился в 1979 году. Окончил Московский институт электроники и математики по специальности «Метрология и метрологическое обеспечение» (2002). Кандидат технических наук, доцент Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». Область научных интересов: метрология, коррекция погрешностей, оптико-физические измерения, рефрактометрия.

Россия, 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
 E-mail: ayurin@hse.ru
 ORCID: 0000-0002-6401-5530
 AuthorID (eLibrary.Ru): 675922



Минаев Владимир Леонидович — родился в 1978 году. Доктор технических наук, заведующий научно-исследовательским отделением голографии, оптической томографии, нанотехнологий и наноматериалов Всероссийского научно-исследовательского института оптико-физических измерений. Область научных интересов: оптика, голография, оптическая томография, оптическая микроскопия.

Россия, 119361 Москва, ул. Озерная, 46
 Всероссийский научно-исследовательский институт оптико-физических измерений
 E-mail: minaev@vniiofi.ru
 ORCID: 0000-0002-4356-301X
 AuthorID (eLibrary.Ru): 383772



Голополосов Александр Андреевич — окончил Московский государственный университет геодезии и картографии по специальности «Электронные и оптико-электронные приборы и системы специального назначения» (2022). Работает техником во Всероссийском научно-исследовательском институте оптико-физических измерений. Область научных интересов: математическое моделирование, оптико-физические измерения.

Россия, 119361 Москва, ул. Озерная, 46
 Всероссийский научно-исследовательский институт оптико-физических измерений
 E-mail: goloplosov@vniiofi.ru
 ORCID: 0000-0002-1223-204X
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1122568



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(4)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003048
EDN: VASLIL

Введение в статистическую теорию относительной передачи информации на основе хаотических сигналов

А. С. Дмитриев, А. И. Рыжов[✉], К. М. Сьерра-Теран

Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Москва, Россия

E-mail: chaos@cplire.ru, ✉mef.box@gmail.com, serra@phystech.edu

Поступила в редакцию 10.02.2023, принята к публикации 24.04.2023,

опубликована онлайн 3.07.2023, опубликована 31.07.2023

Аннотация. Целью данной работы является анализ статистических характеристик системы относительной передачи информации на основе хаотических радиоимпульсов в канале связи с аддитивным белым гауссовским шумом, где хаотический сигнал задаётся различными распределениями мгновенных значений. **Методы.** Для достижения этой цели в работе проводится численное моделирование помехоустойчивости прямохаотической системы относительной передачи информации и его сопоставление с результатами аналитического исследования. **Результаты.** Изучены закономерности, связанные с использованием хаотических сигналов с различными статистическими распределениями мгновенных значений. Получены минимальные значения отношения средней энергии хаотического радиоимпульса к спектральной плотности белого гауссовского шума, обеспечивающие заданные вероятности ошибок. **Заключение.** Показано, что предложенная система работает эффективно при больших значениях коэффициента процессинга, и с увеличением коэффициента процессинга нивелируется зависимость помехоустойчивости от конкретного вида статистического распределения хаотического сигнала.

Ключевые слова: хаотические радиоимпульсы, относительная передача, численное моделирование, статистические характеристики, вероятность ошибки на бит.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-29-00070).

Для цитирования: Дмитриев А. С., Рыжов А. И., Сьерра-Теран К. М. Введение в статистическую теорию относительной передачи информации на основе хаотических сигналов // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 421–438. DOI: 10.18500/0869-6632-003048. EDN: VASLIL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Introduction to the statistical theory of differential communication based on chaotic signals

A. S. Dmitriev, A. I. Ryzhov✉, C. M. Sierra-Teran

Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of RAS, Moscow, Russia

E-mail: chaos@cplire.ru, ✉mef.box@gmail.com, serra@phystech.edu

Received 10.02.2023, accepted 24.04.2023, available online 3.07.2023, published 31.07.2023

Abstract. The *purpose* of this paper is to analyse the statistical characteristics of a Direct Chaotic Differentially Coherent communication scheme based on chaotic radio pulses in a communication channel with additive white Gaussian noise, where the chaotic signal is given by different instantaneous distributions. *Methods.* To achieve this goal, numerical modelling of the noise immunity of Direct Chaotic Differentially Coherent communication is conducted and compared with the results of analytical research. *Results.* The regularities associated with the use of chaotic signals with various statistical distributions of instantaneous values were studied. The minimum values of energy per bit to white Gaussian noise power spectral density ratio were obtained, providing the required error probabilities. *Conclusion.* It is shown that the proposed system works efficiently at high values of processing gain, and as the processing gain increases, the dependence of noise immunity on the specific statistical distribution of the chaotic signal is levelled out.

Keywords: chaotic radio pulses, differential communication scheme, numerical simulation, statistic characteristics, bit-error probability.

Acknowledgements. The research was funded by the Russian Science Foundation (project No. 23-29-00070).

For citation: Dmitriev AS, Ryzhov AI, Sierra-Teran CM. Introduction to the statistical theory of differential communication based on chaotic signals. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(4):421–438. DOI: 10.18500/0869-6632-003048

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Явление динамического хаоса (ДХ) было открыто и активно исследовалось, начиная с середины 60-х годов XX века. За первые 20 лет этот феномен был изучен детально с примерами в различных областях естествознания. Многие свойства ДХ оказались удивительными, к ним, безусловно, относится и возможность синхронизации двух и более систем с динамическим хаосом. Именно это свойство вызвало первоначальный интерес к хаосу, как к потенциальному носителю информации. И, хотя первые схемы передачи информации, предложенные на основе хаотической синхронизации, оказались недостаточно эффективными с точки зрения помехоустойчивости [1–12], начало использования динамического хаоса для передачи и обработки информации было положено.

Следует отметить, что задача передачи информации очень сильно зависит от физических условий, в которых она осуществляется. Реально сейчас имеется значительное число примеров использования ДХ для передачи информации в радиодиапазоне электромагнитных волн (по кабелю и через свободное пространство) [7–9, 13–15], оптических системах связи (по волоконно-оптическим кабелям) [10, 11, 16–18], в водной среде (ультразвуковой хаос) [12, 13, 19, 20] и др.

Хотя результаты, представленные в данной статье, могут иметь отношение к любой из упомянутых областей применения ДХ к передаче и обработке информации, прежде всего она посвящена беспроводной передаче информации с помощью высокочастотных и сверхвысокочастотных электромагнитных сигналов (радиоволн). Эти результаты также могут быть использованы при создании средств для наблюдения окружающей среды с помощью ламп радиосвета —

миниатюрных источников широкополосного некогерентного микроволнового излучения на основе динамического хаоса [21, 22].

Специфика применения хаотических сигналов для беспроводных средств связи определяется двумя факторами: 1) нужно обеспечить определенное отношение энергии сигнала к спектральной плотности шума на требуемой дальности передачи, что в условиях ограничений на спектральную плотность излучаемой мощности регулируется процессингом (базой) сигнала; 2) необходимо принять меры защиты от многолучевой интерференции, например, за счет использования импульсных режимов и защитных интервалов.

Хотя попытки применения ДХ в качестве сигналов, несущих информацию, начинались, в первую очередь, с идей, связанных с синхронизацией, на самом деле он обладает и целым рядом других свойств, привлекательных с точки зрения передачи данных. Поэтому после относительных неудач по использованию хаотической синхронизации было обращено внимание на другие возможности.

Среди них — относительные методы передачи и использование энергетического приема. Здесь речь пойдет об относительной передаче: совокупности методов передачи, в которых сигнал сравнения передается вместе с информационным сигналом по каналу связи [14–16, 23, 24]. Однако, прежде чем переходить к анализу этих систем, обозначим, в каких ситуациях представляет интерес использование хаотических сигналов для передачи информации.

Эти ситуации являются прямыми следствиями следующих двух свойств самих хаотических сигналов.

Во-первых, для передачи символа используется фрагмент хаотического сигнала, достаточный по длительности для того, чтобы его можно было охарактеризовать как отрезок шумоподобного процесса.

Во-вторых, хаотический сигнал, как правило, характеризуется достаточно широким спектром.

Совокупность этих двух свойств приводит к тому, что использование хаоса для передачи информации производится широкополосными сигналами с базой, значительно превосходящей единицу или, другими словами, сигналами со значительным расширением спектра.

1. Сигналы, расширяющие спектр

В отличие от узкополосного сигнала, мощность которого сконцентрирована внутри полосы, численно примерно равной скорости передачи данных, сигнал с расширенным спектром «размазывает» свою мощность на значительно большую полосу частот [17, 25] и, при равной с узкополосным сигналом мощности, имеет более низкую спектральную плотность мощности. Как следствие, в зоне уверенного приема спектральная плотность мощности принимаемого сигнала может быть близка к спектральной плотности мощности фонового шума и даже может быть значительно ниже нее. Однако без предварительного (априорного) знания структуры и параметров коммуникационной системы не так-то просто зафиксировать даже само наличие сигнала. Но даже если присутствие сигнала обнаружено, без наличия соответствующей дополнительной информации сообщение сложно извлечь.

Основные требования для систем связи с расширением спектра можно суммировать в следующем виде.

1. Передаваемый сигнал занимает полосу частот значительно более широкую, чем скорость передачи информации.
2. Полоса частот передаваемого сигнала не зависит от скорости передачи данных.
3. Демодуляция может быть осуществлена, в частности, путем корреляции принятого сигнала с репликой (копией) сигнала, использованного в передатчике для расширения данных.

Первоначально технологии расширения спектра создавались вокруг двух главных схем: прямой последовательности (Direct Sequence — DS) и перескоков частоты (Frequency Hopping — FH) [1–3, 14–17].

Позднее к этим двум технологиям расширения спектра добавилась технология «chirp» — импульсная частотная модуляция, при которой носитель свипирует частоту по некоторой широкой полосе в данном импульсном интервале. Она используется, например, в малопотребляющих сетях большого радиуса действия типа LoRaWAN [26].

Ширина полосы несущего сигнала сама по себе не характеризует сигнал с точки зрения расширения спектра. Например, сверхширокополосный ультракороткий импульс как носитель информации имеет процессинг (или базу) сигнала порядка единицы, то есть он сверхширокополосный, но при этом не является сигналом с расширением спектра, поскольку ширина спектра совпадает со скоростью передачи. Но пачка N ультракоротких импульсов псевдослучайной полярности, с помощью которой передается один бит информации, имеет процессинг N , поскольку для этого сигнала $K = \Delta T \Delta F = N$, и представляет собой сигнал с расширением спектра.

Идея технологии расширения спектра следует из соотношения К. Шеннона для пропускной способности канала

$$C = W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right), \quad (1)$$

где C — пропускная способность канала в битах в секунду, W — полоса частот в герцах, N — мощность шума, S — мощность сигнала. Уравнение (1) показывает связь между возможностью канала передавать информацию без ошибок в зависимости от отношения сигнал/шум, имеющего место в канале, и полосы частот, используемой для передачи информации.

Итак, пусть C — желаемая скорость передачи информации, тогда, переходя от двоичного логарифма к натуральному, получаем

$$\frac{C}{W} = 1.44 \cdot \log_e \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad (2)$$

и для малых значений отношения $\frac{S}{N}$, скажем, меньше 0.1 (поскольку мы хотим использовать их в помехоустойчивой системе), разлагая логарифм в ряд и используя первый член разложения, имеем

$$\frac{C}{W} = 1.44 \cdot \frac{S}{N}. \quad (3)$$

Откуда следует, что

$$W = \frac{C \cdot N}{1.44 \cdot S}. \quad (4)$$

То есть для любого заданного отношения шума к сигналу можно обеспечить низкий поток информационных ошибок, увеличивая полосу, используемую для передачи информации: например, если мы хотим иметь связь, в которой шум интерференции (воздействие шума) в 100 раз (на 20 дБ) больше чем сигнал, и поток составляет 10 кбит/с, то 10 кбит информации должны передаваться в канале с полосой частот

$$W = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{1.44} = 6.7 \cdot 10^5 \text{ Гц}. \quad (5)$$

На практике сама информация может быть введена в сигнал с расширенным спектром несколькими методами. Наиболее общий заключается в добавлении информации в расширенный спектр путем использования расширяющей модуляции. Эта технология применима к любой системе, расширяющей спектр, которая использует кодовую последовательность для определения радиочастотной полосы (и системы прямой расширяющей последовательности, и системы с перескоком частоты являются хорошими кандидатами).

2. Связь на хаотических сигналах

Хаотические сигналы с присущей им широкополосностью являются естественными кандидатами для расширения полосы частотного спектра исходного информационного сигнала. Поскольку при использовании хаотических сигналов для кодирования информации результирующие сигналы являются сигналами с расширенным спектром, имеющими более широкую по сравнению с исходными информационными сигналами полосу и более низкую спектральную плотность, они обладают всеми преимуществами сигналов с расширением спектра, такими как сложность детектирования без дополнительной информации о системе, устойчивость к многолучевым замираниям, к воздействию помех и т. д. Более того, как следствие высокой чувствительной зависимости от начальных условий и вариации параметров, легко может быть воспроизведено большое число разных расширяющих сигналов (wave forms). Поэтому динамический хаос представляет собой недорогое и универсальное решение для систем связи с расширением спектра.

С начала 1990-х годов был предложен ряд схем модуляции и демодуляции с расширением спектра на основе динамического хаоса. При этом практическое значение имеют в первую очередь те из них, которые не используют хаотическую синхронизацию.

Среди них DCC — Direct Chaotic Communications [5, 10, 13–15, 19, 20], а также идеологически близкая к DCC схема COOK — Chaos on-off Keying [6, 11] относятся к первому типу (энергетический прием), а DCSK — Differential Chaotic Shift Keying [6, 11, 23, 24, 27, 28] и CDSK — Correlation Delay Shift Keying [6, 11, 25, 29] — к относительным методам.

По своим статистическим характеристикам упомянутые системы были близки к классическим узкополосным системам связи. Но экспериментально из них, вплоть до сегодняшнего дня, реализована только схема DCC. Что касается относительных хаотических систем связи, то даже у лучшей из них на то время — DCSK — возникли проблемы с практической реализацией.

Формально как DCC, так и DCSK принадлежат к системам связи с расширением спектра, однако из-за отсутствия копий формы сигнала на приемной стороне, в них используется зашумленная форма сигнала, передаваемая по эфиру, что приводит к ухудшению их статистических характеристик по сравнению с «истинно» когерентным приемом. Особенно это заметно при использовании сигналов с большими и очень большими коэффициентами процессинга. Вместе с тем эффект накопления сигнала в них все же работает, что позволяет извлекать полезный сигнал даже при уровне сигнал/шум меньше нуля.

2.1. Структура сигнала и метод модуляции. В настоящей работе рассматривается схема прямохаотической относительной передачи информации (DC^2 — Direct Chaotic Differentially Coherent), где используются в качестве носителя информации хаотические радиоимпульсы [30–33]. Относительная передача информации на основе хаотических радиоимпульсов DC^2 с точки зрения практической реализации отличается от схемы передачи DCSK [11, 27, 28] тем, что задержки в ней имеют существенно меньшую длительность.

В упомянутых работах [30–33] была показана работоспособность схемы связи DC^2 и ее эффективность при средних и больших отношениях сигнал/шум, проведены аналитические исследования влияния наличия белого шума в канале на вероятность возникновения ошибок при передаче цифровых данных.

В данной работе проведены исследования статистических характеристик системы DC^2 методами численного моделирования для различных распределений мгновенных значений хаотического сигнала, которые в совокупности с ранее полученными аналитическими оценками позволяют сформулировать основные теоретические положения статистической теории схемы прямохаотической относительной передачи информации DC^2 .

3. Относительная передача информации на основе хаотических радиоимпульсов

Так же, как и в прямохаотической системе связи с энергетическим приемом [5, 7–10, 13–15, 19, 20], носителем информации в DC^2 системе связи являются хаотические радиоимпульсы. Хаотический сигнал имеет шумоподобную реализацию и быстро спадающую функцию автокорреляции. Эти ключевые свойства используются в рассматриваемой схеме относительной передачи информации. Полоса частот хаотического радиоимпульса определяется полосой частот исходного хаотического сигнала и в широких пределах изменения длины импульса не зависит от длительности импульса.

Если длительность хаотического радиоимпульса $\Delta T \gg 1/(2\Delta F)$, то спектр мощности потока хаотических радиоимпульсов практически не будет отличаться от спектра мощности исходного хаотического сигнала. Поскольку величина $K = \Delta T \Delta F$ представляет собой коэффициент процессинга сигнала, то увеличение длины хаотического радиоимпульса приводит к увеличению его коэффициента процессинга.

Для схемы DC^2 важной характеристикой является время автокорреляции хаотического радиоимпульса, которое обратно пропорционально полосе частот хаотического сигнала $\Delta\tau \sim 1/\Delta F$. Если хаотический радиоимпульс сместить на время большее, чем время автокорреляции, то можно эти два радиоимпульса рассматривать как некоррелированные. Эта особенность лежит в основе схемы DC^2 для модуляции и передачи данных.

Рассматриваемая схема передачи данных относится к относительному когерентному приему, где, в отличие от классической схемы когерентного приема, копия передаваемого сигнала не хранится в приемнике, а пересылается по радиоканалу.

Для передачи данных в DC^2 в канал передается промодулированный хаотический радиоимпульс и его не промодулированная копия с задержкой между ними больше, чем время автокорреляции. При приеме производится корреляция (когерентный прием) между промодулированным радиоимпульсом и его задержанной не промодулированной копией. При модуляции для передачи логической единицы хаотический радиоимпульс передается без изменений, для передачи логического нуля хаотический радиоимпульс умножается на -1 . Таким образом, после относительного когерентного приема в приемнике возникают импульсы с положительными и отрицательными значениями.

Рассмотрим более подробно функциональные структуры передатчика и приемника предложенной схемы DC^2 . Передатчик системы (рис. 1, а) состоит из источника хаотических радиоимпульсов; делителя; модулятора, управляемого внешним информационным сигналом; задержки на время τ , превышающее время автокорреляции сигнала; сумматора и передающей антенны. Источник хаотических радиоимпульсов формирует импульсы длительностью T_p ; промежутки между импульсами — защитные интервалы — имеют длительность T_{gi} . Суммарная длительность импульса и защитного интервала представляет собой длительность передаваемого бита T_b . Каждый импульс поступает в делитель, после которого попадает в два канала. В первом канале его модулируют информационным сигналом путем умножения на 1, а во втором канале задерживают на время τ . Умножение на $+1$ соответствует передаче «1», умножение на -1 — передаче «0». После этого сигналы суммируют, суммарный сигнал усиливают, он поступает в антенну и излучается. При этом длина излучаемого суммарного импульса равна $T_r = T_p + \tau$.

Приемник системы (рис. 1, б) состоит из антенны, малошумящего усилителя, делителя, задержки на время τ , перемножителя, интегратора и порогового устройства. Принятый антенной сигнал усиливают до нужного уровня в малошумящем усилителе, делят пополам и подают в два канала. В первом канале никаких действий с сигналом не производят, и он поступает на перемножитель. Во втором канале сигнал задерживают на время τ , после чего он также поступает

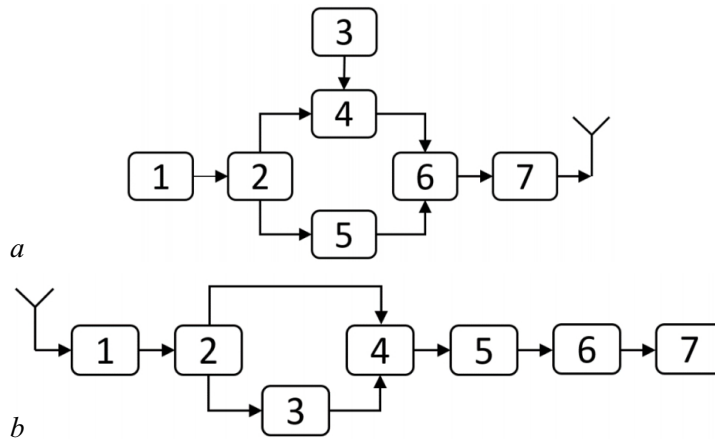


Рис. 1. *a* – Структура передатчика: 1 – источник хаотических радиоимпульсов, 2 – делитель, 3 – информационная последовательность, 4 – модулятор, 5 – задержка, 6 – сумматор, 7 – усилитель; *b* – структура приемника: 1 – малозумящий усилитель, 2 – делитель, 3 – задержка, 4 – перемножитель, 5 – интегратор, 6 – пороговое устройство, 7 – информационная последовательность

Fig. 1. *a* – Transmitter structure: 1 – source of chaotic pulses, 2 – divider, 3 – information data, 4 – modulator, 5 – time delay, 6 – combiner, 7 – amplifier; *b* – receiver structure: 1 – low-noise amplifier, 2 – divider, 3 – time delay, 4 – multiplier, 5 – integrator, 6 – threshold device, 7 – information data

на перемножитель. Заметим, что длительность импульса, полученного путем перемножения импульсов, поступивших на перемножитель, равна T_p . Импульс, полученный с выхода перемножителя, интегрируется в течение времени T_p . Затем сигнал поступает на пороговое устройство с нулевым порогом. Если поступивший сигнал больше нуля, то пороговое устройство фиксирует прием «1», если же он меньше нуля, то фиксируется прием «0».

3.1. Демодуляция сигнала. При исследовании процесса приема схемы DC² рассматривается следующая модель ее функционирования [30–33].

Пусть $S_k(t)$ – k -й хаотический импульс в потоке, формируемом источником хаотических радиоимпульсов (их необходимо индексировать, поскольку, в силу хаотичности, они все разные); $\alpha_k \in \{-1, 1\}$ – значение информационного модулирующего сигнала. При передаче k -го двоичного информационного символа сигнал на выходе передатчика будет выглядеть следующим образом:

$$Y_k(t) = (\alpha_k S_k(t) + S_k(t - \tau)) / 2, \quad (6)$$

В приемнике, при отсутствии шумов, импульс на выходе блока перемножения, соответствующий k -му информационному символу, поступает на интегратор, после которого приобретает вид:

$$Z_k(t) = \left[\int_{\tau}^{T_p + \tau} \alpha_k S_k(t - \tau) S_k(t - \tau) dt \right] / 4 + \theta_k(t), \quad (7)$$

где

$$\theta_k(t) = \left[\int_{\tau}^{T_p + \tau} \alpha_k S_k(t) S_k(t - \tau) dt + \int_{\tau}^{T_p + \tau} \alpha_k S_k(t) S_k(t - 2\tau) dt + \int_{\tau}^{T_p + \tau} \alpha_k S_k(t - \tau) S_k(t - 2\tau) dt \right] / 4. \quad (8)$$

Составляющая $\theta_k(t)$ сигнала (8) представляет собой шум, создаваемый самой схемой. Поскольку время задержки τ превышает время автокорреляции, все компоненты $\theta_k(t)$ будут существенно меньшими по сравнению с первым членом в выражении (7), являющимся полезным сигналом. Таким образом, знак α_k («+» или «-») определяет и знак $Z_k(t)$. Сигнал с выхода интегратора поступает на блок принятия решения, где осуществляется его сравнение с нулевым порогом. По знаку определяется значение выходного двоичного информационного символа.

4. Аналитические оценки помехоустойчивости в канале с белым шумом

Аналитические оценки помехоустойчивости для относительной схемы передачи DC² получены в работе [30] в предположении, что к сигналу k -го на входе приемника добавляется флуктуационный шум с гауссовским распределением мгновенных значений и постоянной спектральной плотностью:

$$V_k(t) = Y_k(t) + \eta_k(t). \quad (9)$$

Вероятность ошибки при приеме каждого битового сообщения можно представить в виде:

$$P_{\text{err}} = f \left(N_c \Delta F T_p / \sqrt{N_c N_0 \Delta F T_p \left(2 + \frac{N_0}{2N_c} + \frac{5N_c}{2N_0} \right)} \right), \quad (10)$$

где

$$f(x) = \left[1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right]. \quad (11)$$

Здесь N_c — спектральная плотность хаотического сигнала, ΔF — полоса хаотического сигнала, N_0 — спектральная плотность шума.

При анализе аналитической формы для вероятности ошибки было выяснено, что она обладает интересным асимптотическим свойством, а именно, при стремлении отношения сигнал/шум к бесконечности вероятность ошибки стремится не к нулю, а к некоторому пределу:

$$P_{\text{err lim}} = f \left(\sqrt{\frac{2\Delta F T_p}{5}} \right). \quad (12)$$

Аналитические оценки помехоустойчивости дают надёжную основу для практических расчетов при проектировании средств сверхширокополосной относительной связи на основе хаотических радиоимпульсов. Однако им свойственны определенные ограничения, которые могут быть преодолены путем статистического моделирования для тех случаев, когда необходимо выяснить, например, границы применимости аналитических оценок.

К таким случаям относятся вопросы влияния статистических характеристик хаотического сигнала на помехоустойчивость. Дело в том, что приведенные выше аналитические оценки произведены для случая, когда вероятностное распределение мгновенных значений хаотического сигнала является гауссовским. То есть, в принципе, для такого сигнала существуют выбросы со сколь угодно большой амплитудой. Реальные же хаотические сигналы являются ограниченными по амплитуде. Влияние ограниченности значений сигнала по сравнению с сигналами, имеющими Гауссово распределение, удобно рассматривать путем прямого статистического моделирования, используя сигналы с соответствующими вероятностными распределениями мгновенных значений.

5. Статистическое моделирование помехоустойчивости

Ниже для численного анализа помехоустойчивости относительной передачи информации на основе хаотических радиоимпульсов используется дискретная модель сигнала во времени. Дискретный во времени хаотический сигнал формируется псевдослучайными отсчетами, соответствующими трём различным распределениям (нормальному, равномерному и телеграфному), покрывающим типичные случаи распределения мгновенных значений сигналов.

Другими словами, для анализа помехоустойчивости схемы связи DC^2 осуществляется дискретизация сигнала по времени, в результате чего сигналы $S_k(t)$ и $Y_k(t)$ заменяются на сигналы $S_k(i)$ и $Y_k(i)$, а шум $\eta(t)$ — на шумовые отсчеты $\eta(i)$, где i — номер отсчета, $S_k(i) = S_k(iT/B)$, $Y_k(i) = Y_k(iT/B)$, $\eta(i) = \eta(iT/B)$, где B — база сигнала, $B = 2K$.

Как и в непрерывном случае, если на выходе интегрирующего устройства (в данном случае сумматора) сигнал отрицательный, то принимается решение о том, что принят символ «0», если положительный, то — «1».

Число отсчетов случайного сигнала, моделирующего хаотический сигнал, составляет $KS+1$, где K — коэффициент процессинга, S — скважность. Для вычисления вероятности ошибки сравниваются исходный информационный сигнал и сигнал на выходе детектора при разных значениях отношения энергии на бит к спектральной плотности шума.

Зная значение отношения энергии бита к спектральной плотности шума, коэффициент процессинга и измеряя уровень мощности на выходе передатчика, можно рассчитать необходимое значение уровня мощности шумового сигнала для различных случаев

$$\frac{P_S}{P_N} \text{ дБ} + 10 \log_{10} K = \frac{E_b}{N_0} \text{ дБ}, \quad (13)$$

где P_S — уровень мощности сигнала на выходе передатчика, P_N — уровень мощности шумового сигнала на входе приемника, K — коэффициент процессинга.

Белый гауссовский шум в канале связи моделировался отсчетами псевдослучайных чисел с нормальным распределением, генерируемых при помощи стандартной библиотечной функции «randi()» в пакете MATLAB.

Полоса шумового сигнала согласуется с полосой хаотического сигнала ввиду того, что в процессе математического моделирования оба сигнала формируются дискретным образом с одной и той же частотой дискретизации.

5.1. Моделирование для канала без шума. Схема связи DC^2 моделировалась в соответствии с моделью, описанной выше. В результате была получена зависимость вероятности ошибки на бит от значений коэффициента процессинга (рис. 2). По данному графику видно, что система связи начинает работать при уровнях ошибок $P = 10^{-3}$ при высоких

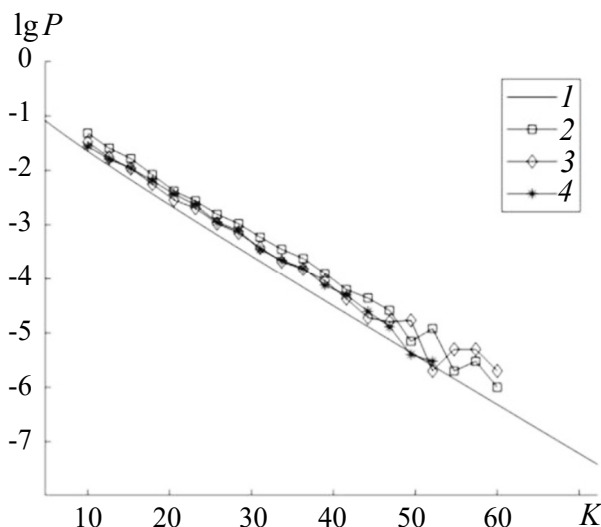


Рис. 2. Зависимость вероятности ошибки от коэффициента процессинга сигнала при отсутствии флуктуационных помех. Линия 1 соответствует аналитической оценке, 2 — компьютерному расчету с гауссовским распределением, 3 — с равномерным распределением, а кривая 4 — с телеграфным распределением

Fig. 2. Error probability versus processing coefficient graph without fluctuation noise. Line 1 corresponds to analytical estimate, 2 — to computer modeling with gaussian distribution, 3 — to uniform distribution, and 4 — to telegraph distribution

значениях коэффициента процессинга (начиная с $K \sim 25$), и при его повышении можно рассчитывать на более низкие значения вероятности ошибки на бит.

Аналитическая оценка для этой зависимости в соответствии с формулой (10) и результаты моделирования находятся в хорошем соответствии.

5.2. Моделирование для канала с гауссовским шумом. Перейдём к статистическому моделированию схемы связи DC^2 при наличии шума в канале связи и сравнению полученных результатов с аналитическими оценками по формулам (8)–(10) из работ [30–33].

Статистическое численное моделирование, при помощи которого была рассчитана помехоустойчивость относительной схемы передачи информации DC^2 , осуществлялось для следующих значений коэффициента процессинга: $K = 5, 10, 15, 20, 50, 100, 200, 300, 500, 10000$. Сначала проводились расчеты для случая модели хаотического сигнала в виде потока значений с гауссовским распределением. Его результаты для небольших значений коэффициента процессинга $K = 5, 10$ и 20 представлены на рис. 3. Видно, что при $K = 5, 10$ и 20 невозможно достичь вероятности ошибки $P < 10^{-3}$ при любых отношениях энергии хаотического радиоимпульса E_b к спектральной плотности гауссовского полосового шума N_0 .

Эксперименты, проведенные с другими типами распределений моделей хаотического сигнала, а именно равномерным и телеграфным распределением показывают, что и при этих распределениях сигнала вероятность ошибки P меньше 10^{-3} не достигается при малых значениях K . При этом следует отметить, что при малых коэффициентах процессинга K модели хаотического сигнала с телеграфным и равномерным распределениями более помехоустойчивы по отношению к модели с гауссовским распределением (рис. 4).

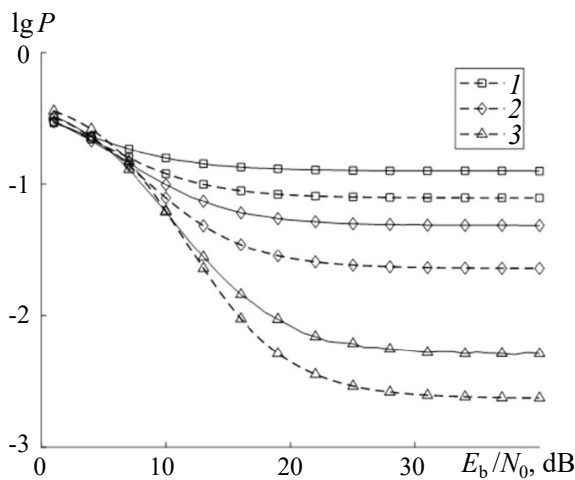


Рис. 3. Зависимости вероятности ошибки от отношения энергии бита к спектральной плотности шума при малых значениях коэффициента процессинга K (гауссовское распределение). Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $K = 5; 10; 20$ (сплошная линия — экспериментальные результаты, пунктирная — аналитическая оценка)

Fig. 3. Bit error probability as a function of E_b/N_0 obtained for the low values of the processing coefficient K (gaussian distribution). Dashed series 1, 2, 3 correspond to the simulation results for $K = 5; 10; 20$ and solid curves 1, 2, 3 — to the analytical estimates for $K = 5; 10; 20$ respectively

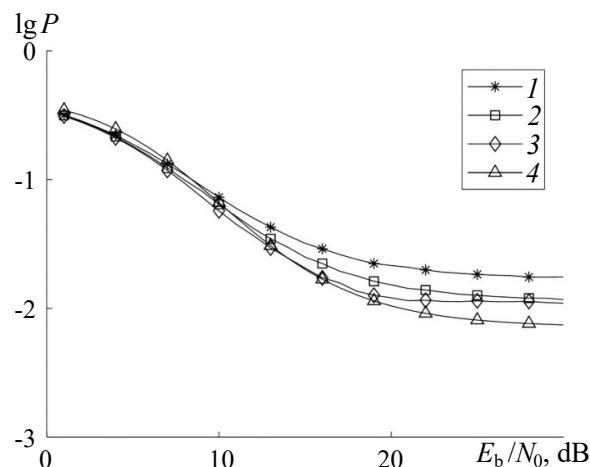


Рис. 4. Зависимости вероятности ошибки от отношения энергии бита к спектральной плотности шума при значении коэффициента процессинга $K = 15$. Кривая 1 соответствует компьютерному расчету для сигнала с гауссовским распределением, 2 — с равномерным распределением, 3 — с телеграфным распределением, а кривая 4 — аналитической оценке

Fig. 4. Bit error probability as a function of E_b/N_0 obtained for $K = 15$. Line 1 corresponds to computer modeling with gaussian distribution, 2 — to uniform distribution, 3 — to telegraph distribution, and 4 — to analytical estimate

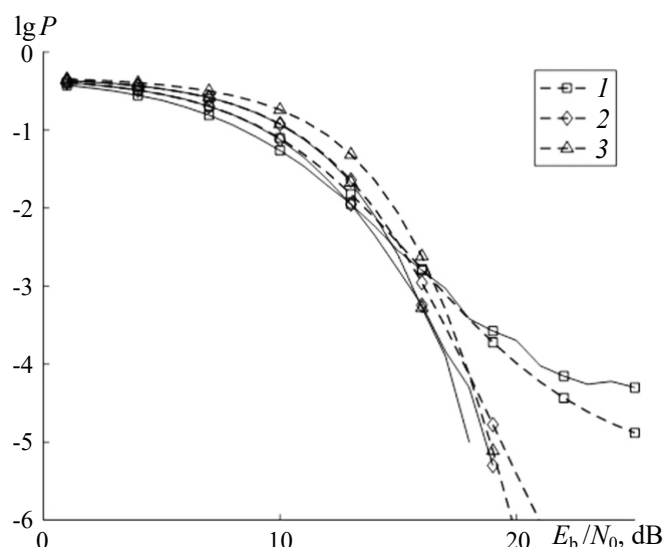


Рис. 5. Зависимости вероятности ошибки от отношения энергии бита к спектральной плотности шума при значениях $K = 50; 100; 200$ (соответствуют кривым 1, 2, 3), сплошные линии соответствуют экспериментальным результатам, а пунктирные — аналитической оценке

Fig. 5. Bit error probability as a function of E_b/N_0 obtained for $K = 15; 100; 200$ (corresponding to curves 1, 2, 3), solid lines correspond to experimental results and dashed ones — to analytical estimate

Реальные хаотические сигналы имеют ограниченную амплитуду и не имеют длинных хвостов, как при гауссовском распределении. Поэтому для них более справедливыми являются оценки, относящиеся к равномерно распределенному сигналу и к случайному телеграфному сигналу.

Расчеты показывают, что с увеличением коэффициента процессинга зависимость результатов моделирования от типа распределения модели хаотического сигнала нивелируется, и при оценке характеристик можно ограничиться каким-то одним типом сигнала, например, моделью сигнала с гауссовским распределением.

При увеличении коэффициента процессинга до $K = 50$ минимальное значение E_b/N_0 , обеспечивающее вероятность ошибки $P < 10^{-3}$, составляет 15.3 дБ (рис. 5).

Хаотический сигнал моделируется случайным сигналом с гауссовским распределением. При увеличении K значения вероятности ошибки на бит в зависимости от уровня внешнего шума для различных распределений становятся близки друг к другу и ложатся на одну и ту же кривую (рис. 6).

Отдельный интерес представляет исследование возможностей системы связи при очень больших коэффициентах процессинга. Так, на рис. 7 приведены результаты расчетов для коэффициента процессинга $K = 10000$. Они показывают, что система связи в этом случае может работать с вероятностью ошибки на бит 10^{-3} при уровне отношения $E_b/N_0 = 22.2$ дБ. Однако, если перейти непосредственно к зависимости от отношения сигнал/шум (С/Ш — SNR) (рис. 7, б), то можно видеть, что благодаря высокому коэффициенту процессинга необходимый уровень С/Ш (SNR) в этом случае составляет менее -10 дБ, что говорит о том, что система связи работоспособна при уровне сигнала намного ниже уровня шумов в канале связи.

Далее дополнительно было проведено компьютерное моделирование с целью выявления оптимального значения коэффициента процессинга, которое позволяет обеспечить заданную вероятность ошибки на бит (в данном случае, $P = 10^{-3}$) при минимальном значении отношения средней энергии хаотического сигнала хаотического радиоимпульса E_b к спектральной плотности гауссовского полосового шума N_0 (рис. 8).

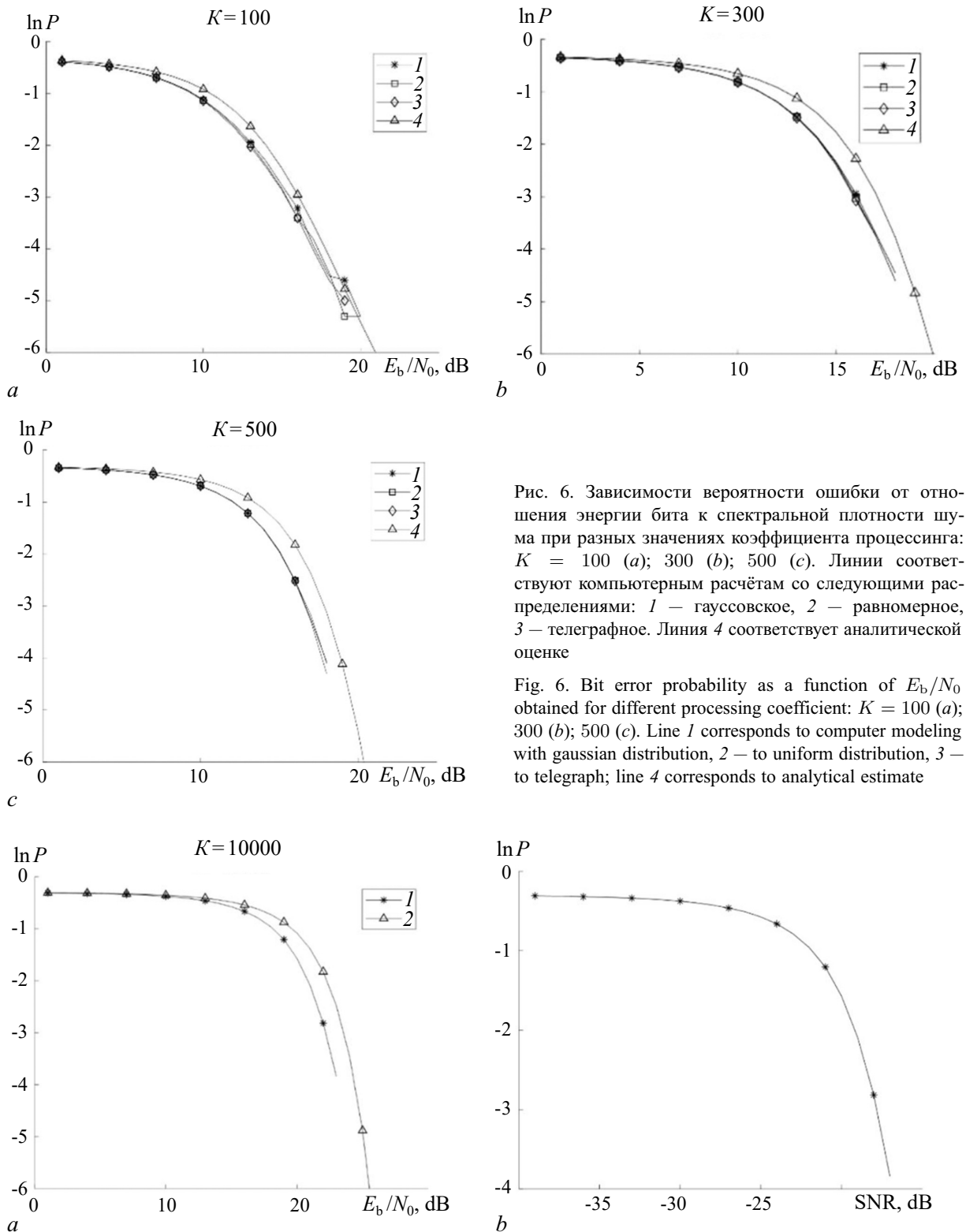


Рис. 6. Зависимости вероятности ошибки от отношения энергии бита к спектральной плотности шума при разных значениях коэффициента процессинга: $K = 100$ (a); 300 (b); 500 (c). Линии соответствуют компьютерным расчётам со следующими распределениями: 1 – гауссовское, 2 – равномерное, 3 – телеграфное. Линия 4 соответствует аналитической оценке

Fig. 6. Bit error probability as a function of E_b/N_0 obtained for different processing coefficient: $K = 100$ (a); 300 (b); 500 (c). Line 1 corresponds to computer modeling with gaussian distribution, 2 – to uniform distribution, 3 – to telegraph; line 4 corresponds to analytical estimate

Рис. 7. Зависимости вероятности ошибки при $K = 10000$ от: a – отношения энергии бита к спектральной плотности шума; b – отношения уровня сигнала к уровню шума (SNR). На рис. a линия 1 – компьютерный расчет для гауссовского распределения, 2 – аналитическая оценка

Fig. 7. Error probability as a function of: a – E_b/N_0 with $K = 10000$; b – signal to noise ratio (SNR). Figure a shows line 1 corresponding to computer modeling for gaussian distribution, and line 2 corresponding to analytical estimate

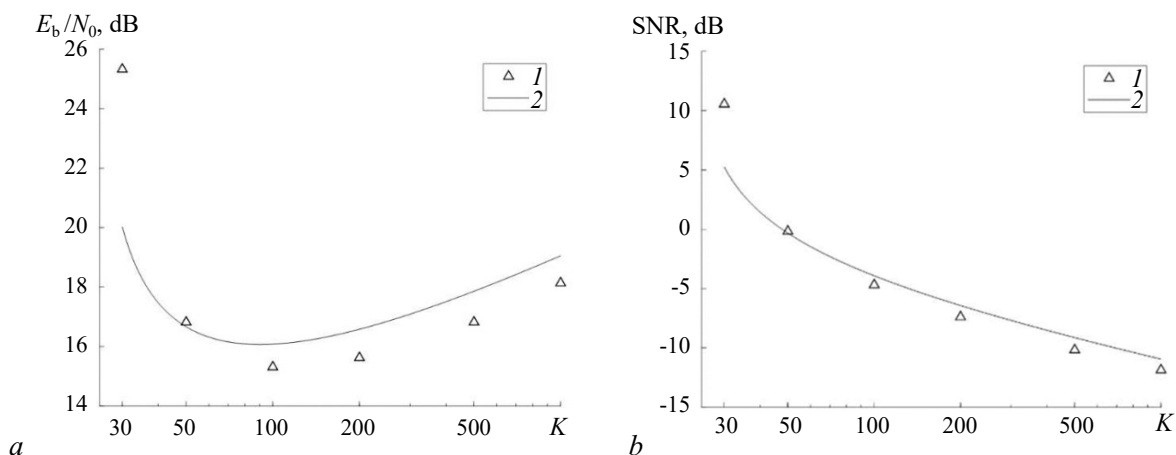


Рис. 8. *a* — График зависимости E_b/N_0 от коэффициента процессинга, когда достигается вероятность ошибки $P = 10^{-3}$; *b* — график зависимости SNR от коэффициента процессинга, когда достигается вероятность ошибки $P = 10^{-3}$. Кривая 1 соответствует компьютерному эксперименту (гауссовское распределение), 2 — аналитической оценке

Fig. 8. *a* — E_b/N_0 versus processing coefficient graph, where error probability $P = 10^{-3}$ is reached; *b* — SNR versus processing coefficient graph, where error probability $P = 10^{-3}$ is reached. Line 1 corresponds to computer modeling for gaussian distribution, and line 2 corresponds to analytical estimate

Результаты, представленные на рис. 8, показывают, что у графика зависимости E_b/N_0 от K имеется экстремум при $K = 100$, в котором достигается минимальное значение $E_b/N_0 = 15.3$ дБ. Далее, при повышении K увеличивается значение E_b/N_0 , обеспечивающее вероятности ошибки $P = 10^{-3}$ в системе связи, что делает её работу с такими параметрами менее энергетически выгодной. Однако, несмотря на это, необходимо отметить, что, согласно рис. 8, *b*, с ростом значения коэффициента процессинга уменьшается необходимое отношение SNR, обеспечивающее в системе связи вероятность ошибки $P = 10^{-3}$, что делает выгодным использование сигналов с большой базой в прямохаотической относительной схеме передачи информации с точки зрения скрытности и работы ниже уровня шумов.

Заключение

В работе исследованы статистические характеристики новой схемы относительной передачи информации на основе хаотических радиоимпульсов, в которой используются задержки с длительностью, определяемой временем затухания автокорреляционной функции хаотического сигнала. В этом — принципиальное отличие рассматриваемой схемы от классической относительной схемы DCSK, в которой время задержки определяется длиной передаваемого бита. Проведено численное моделирование и его сопоставление с ранее полученными аналитическими оценками, касающимися зависимости вероятностей ошибки на бит от отношения энергии на бит к спектральной плотности белого гауссовского полосового шума. Изучены закономерности, связанные с использованием хаотических сигналов с различными статистическими распределениями мгновенных значений.

Показано, что при больших значениях процессинга ($K > 30$) рассматриваемая схема связи работает эффективно как в канале без внешних флуктуационных помех, так и в канале с белым гауссовским шумом. При этом с увеличением коэффициента процессинга нивелируется зависимость помехоустойчивости от конкретного вида статистического распределения хаотического сигнала. Эта закономерность в значительной степени связана с тем, что при малых значениях процессинга для хаотических сигналов с гауссовским или равномерным распределением вариабельность принимаемой энергии от импульса к импульсу значительна, и это ухудшает вероятность

правильного приема. В то же время при телеграфном распределении, соответствующем в исходной системе хаотическому сигналу с постоянной амплитудой (например, фазовый хаос) энергия импульсов в потоке одинакова даже при небольших процессингах. При больших процессингах при всех трех типах распределений вариабельность энергии от импульса к импульсу стремится к нулю.

Совокупность полученных результатов представляет собой основу статистической теории схемы относительной прямохаотической передачи. Дальнейшее развитие этой теории возможно при использовании методов измерения и оценки параметров шумоподобных сигналов на фоне шумов и помех [34].

Список литературы

1. *Kocarev L., Halle K. S., Eckert K., Chua L. O., Parlitz U.* Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1992. Vol. 2, no. 3. P. 709–713. DOI: 10.1142/S0218127492000823.
2. *Parlitz U., Chua L. O., Kocarev L., Halle K. S., Shang A.* Transmission of digital signals by chaotic synchronization // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1992. Vol. 2, no. 4. P. 973–977. DOI: 10.1142/S0218127492000562.
3. *Cuomo K. M., Oppenheim A. V.* Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71, no. 1. P. 65–68. DOI: 10.1103/PhysRevLett.71.65.
4. *Бельский Ю. Л., Дмитриев А. С.* Передача информации с использованием детерминированного хаоса // *Радиотехника и электроника.* 1993. Т. 38, № 7. С. 1310–1315.
5. *Волковский А. Р., Рульков Н. В.* Синхронный хаотический отклик нелинейной системы передачи информации с хаотической несущей // *Письма в ЖТФ.* 1993. Т. 19, № 3. С. 71–75.
6. *Dedieu H., Kennedy M. P., Hasler M.* Chaos shift keying: modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits // *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing.* 1993. Vol. 40, no. 10. P. 634–642. DOI: 10.1109/82.246164.
7. *Halle K. S., Wu C. W., Itoh M., Chua L. O.* Spread spectrum communications through modulation of chaos // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1993. Vol. 3, no. 2. P. 469–477. DOI: 10.1142/S0218127493000374.
8. *Dmitriev A. S., Panas A., Starkov S. O.* Transmission of complex analog signals by means of dynamical chaos // In: *Proceedings of the 3rd International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems.* Dublin, Ireland, 28–29 July 1995. Dublin: NDES, 1995. P. 241–244.
9. *Dmitriev A. S., Panas A. I., Starkov S. O.* Experiments on speech and music signals transmission using chaos // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1995. Vol. 5, no. 4. P. 1249–1254. DOI: 10.1142/S0218127495000910.
10. *Дмитриев А. С., Панас А. И.* Динамический хаос: Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.
11. *Lau F. C. M., Tse C. K.* Chaos-Based Digital Communication Systems: Operating Principles, Analysis Methods, and Performance Evaluation. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. 228 p. DOI: 10.1007/978-3-662-05183-2.
12. *Kaddoum G.* Wireless chaos-based communication systems: A comprehensive survey // *IEEE Access.* 2016. Vol. 4. P. 2621–2648. DOI: 10.1109/ACCESS.2016.2572730.
13. *Дмитриев А. С., Панас А. И., Старков С. О., Андреев Ю. В., Кузьмин Л. В., Кяргинский Б. Е., Макисмов Н. А.* Способ передачи информации с помощью хаотических сигналов // Патент № 2185032 С2 Российская Федерация, МПК Н04К 1/00, Н04В 1/02, Н04J 13/00: заявл. 06.10.2000; опубл. 10.07.2002. 20 с.
14. *Дмитриев А. С., Кяргинский Б. Е., Панас А. И., Старков С. О.* Прямохаотические схемы передачи информации в сверхвысокочастотном диапазоне // *Радиотехника и электроника.* 2001. Т. 46, № 2. С. 224–233.
15. *Dmitriev A. S., Kyarginsky B. Y., Panas A. I., Starkov S. O.* Experiments on direct chaotic communi-

- cations in microwave band // *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2003. Vol. 13, no. 6. P. 1495–1507. DOI: 10.1142/S0218127403007345.
16. *VanWiggeren G. D., Roy R.* Optical communication with chaotic waveforms // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81, no. 16. P. 3547–3550. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.3547.
 17. *Ke J., Yi L., Hou T., Hu W.* Key technologies in chaotic optical communications // *Front. Optoelectron.* 2016. Vol 9, no. 3. P. 508–517. DOI: 10.1007/s12200-016-0570-y.
 18. *Kingni S. T., Ainamon C., Tamba V. K., Chabi Orou J. B.* Directly modulated semiconductor ring lasers: Chaos synchronization and applications to cryptography communications // *Chaos. Theory and Applications*. 2020. Vol. 2, no. 1. P. 31–39.
 19. *Bai C., Ren H.-P., Grebogi C., Baptista M. S.* Chaos-based underwater communication with arbitrary transducers and bandwidth // *Appl. Sci.* 2018. Vol. 8, no. 2. P. 162–172. DOI: 10.3390/app8020162.
 20. *Chen M., Xu W., Wang D., Wang L.* Multi-carrier chaotic communication scheme for underwater acoustic communications // *IET Communications*. 2019. Vol. 13, no. 14. P. 2097–2105. DOI: 10.1049/iet-com.2018.5524.
 21. *Дмитриев А. С., Ефремова Е. В., Герасимов М. Ю., Ицков В. В.* Радиоосвещение на основе сверхширокополосных генераторов динамического хаоса // *Радиотехника и электроника*. 2016. Т. 61, № 11. С. 1073–1083. DOI: 10.7868/S0033849416110024.
 22. *Dmitriev A. S., Efremova E. V., Ryzhov A. I., Petrosyan M. M., Itskov V. V.* Artificial radio lighting with sources of microwave dynamic chaos // *Chaos*. 2021. Vol. 31, no. 6. P. 063135. DOI: 10.1063/5.0053504.
 23. *Петрович Н. Т., Размахнин М. К.* Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Советское радио, 1969. 233 с.
 24. *Варакин Л. Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1985. 384 с.
 25. *Dixon R. C.* Spread Spectrum Systems with Commercial Applications. 3rd Edition. New York: Wiley, 1994. 592 p.
 26. *Almuhaya M. A. M., Jabbar W. A., Sulaiman N., Abdulmalek S.* A survey on LoRaWAN technology: Recent trends, opportunities, simulation tools and future directions // *Electronics*. 2022. Vol. 11, no. 1. P. 164–195. DOI: 10.3390/electronics11010164.
 27. *Kolumbán G., Kennedy M. P., Chua L. O.* The role of synchronization in digital communications using chaos. I. Fundamentals of digital communications // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*. 1997. Vol. 44, no. 10. P. 927–936. DOI: 10.1109/81.633882.
 28. *Kolumbán G., Vizvári B., Schwarz W., Abel A.* Differential chaos shift keying: A robust coding for chaos communication // In: *Proceedings of the 4th International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*. Seville, Spain, 27–28 June 1996. Seville: NDES, 1996. P. 87–92.
 29. *Sushchik M., Tsimring L. S., Volkovskii A. R.* Performance analysis of correlation-based communication schemes utilizing chaos // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*. 2000. Vol. 47, no. 12. P. 1684–1691. DOI: 10.1109/81.899920.
 30. *Дмитриев А. С., Мохсени Т. И., Сьерра-Теран К. М.* Относительная передача информации на основе хаотических радиоимпульсов // *Радиотехника и электроника*. 2018. Т. 63, № 10. С. 1074–1082. DOI: 10.1134/S0033849418100078.
 31. *Дмитриев А. С., Мохсени Т. И., Сьерра-Теран К. М.* Сверх- и гиперширокополосная относительная передача информации на основе хаотических радиоимпульсов // *Известия вузов. ПНД*. 2018. Т. 26, № 4. С. 59–74. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-59-74.
 32. *Dmitriev A. S., Mokhseni T. I., Sierra-Terant C. M.* Differentially coherent communication scheme based on chaotic radio pulses // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2018. Vol. 21, no. 3. P. 237–246.

33. *Дмитриев А. С., Мохсени Т. И., Сьерра-Теран К. М.* Моделирование системы относительной передачи информации на основе хаотических радиоимпульсов в среде ADS // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 5. С. 72–86. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-5-72-86.
34. *Клюев В. Ф., Самарин В. П., Клюев А. В.* Нелинейные алгоритмы измерения мощности шумового сигнала на фоне помех // Известия вузов. Радиоэлектроника. 2013. Т. 56, № 6. С. 48–55.

References

1. Kocarev L, Halle KS, Eckert K, Chua LO, Parlitz U. Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization. *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1992;2(3):709–713. DOI: 10.1142/S0218127492000823.
2. Parlitz U, Chua LO, Kocarev L, Halle KS, Shang A. Transmission of digital signals by chaotic synchronization. *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1992;2(4):973–977. DOI: 10.1142/S0218127492000562.
3. Cuomo KM, Oppenheim AV. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Phys. Rev. Lett.* 1993;71(1):65–68. DOI: 10.1103/PhysRevLett.71.65.
4. Belskii YL, Dmitriev AS. Information transmission using deterministic chaos. *J. Commun. Technol. Electron.* 1993;38(7):1310–1315 (in Russian).
5. Volkovskii AR, Rul'kov NF. Synchronous chaotic response of a nonlinear oscillator system as a principle for the detection of the information component of chaos. *Tech. Phys. Lett.* 1993;19(2): 97–99.
6. Dedieu H, Kennedy MP, Hasler M. Chaos shift keying: modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing.* 1993;40(10):634–642. DOI: 10.1109/82.246164.
7. Halle KS, Wu CW, Itoh M, Chua LO. Spread spectrum communications through modulation of chaos. *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1993;3(2):469–477. DOI: 10.1142/S0218127493000374.
8. Dmitriev AS, Panas A, Starkov SO. Transmission of complex analog signals by means of dynamical chaos. In: *Proceedings of the 3rd International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems.* Dublin, Ireland, 28-29 July 1995. Dublin: NDES; 1995. P. 241–244.
9. Dmitriev AS, Panas AI, Starkov SO. Experiments on speech and music signals transmission using chaos. *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1995;5(4):1249–1254. DOI: 10.1142/S0218127495000910.
10. Dmitriev AS, Panas AI. *Dynamic Chaos: Novel Type of Information Carrier for Communication Systems.* Moscow: Fizmatlit; 2002. 252 p. (in Russian).
11. Lau FCM, Tse CK. *Chaos-Based Digital Communication Systems: Operating Principles, Analysis Methods, and Performance Evaluation.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2003. 228 p. DOI: 10.1007/978-3-662-05183-2.
12. Kaddoum G. Wireless chaos-based communication systems: A comprehensive survey. *IEEE Access.* 2016;4:2621–2648. DOI: 10.1109/ACCESS.2016.2572730.
13. Dmitriev AS, Panas AI, Starkov SO, Andreev JV, Kuz'min LV, Kjarginskij BE, Maksimov NA. Method for data transmission by means of chaotic signals. Patent No. 2185032 C2 Russian Federation, IPC H04K 1/00, H04B 1/02, H04J 13/00: appl. 06.10.2000: publ. 10.07.2002. 20 p. (in Russian).
14. Dmitriev AS, Kyarginskii BE, Panas AI, Starkov SO. Plain scheme of chaotic-carrier data communications at microwave frequencies. *J. Commun. Technol. Electron.* 2001;46:207–214.
15. Dmitriev AS, Kyarginsky BY, Panas AI, Starkov SO. Experiments on direct chaotic communications in microwave band. *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2003;13(6):1495–1507. DOI: 10.1142/S0218127403007345.
16. VanWiggeren GD, Roy R. Optical communication with chaotic waveforms. *Phys. Rev. Lett.* 1998;81(16):3547–3550. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.3547.

17. Ke J, Yi L, Hou T, Hu W. Key technologies in chaotic optical communications. *Front. Optoelectron.* 2016;9(3):508–517. DOI: 10.1007/s12200-016-0570-y.
18. Kingni ST, Ainamon C, Tamba VK, Chabi Orou JB. Directly modulated semiconductor ring lasers: Chaos synchronization and applications to cryptography communications. *Chaos. Theory and Applications.* 2020;2(1):31–39.
19. Bai C, Ren HP, Grebogi C, Baptista MS. Chaos-based underwater communication with arbitrary transducers and bandwidth. *Appl. Sci.* 2018;8(2):162–172. DOI: 10.3390/app8020162.
20. Chen M, Xu W, Wang D, Wang L. Multi-carrier chaotic communication scheme for underwater acoustic communications. *IET Communications.* 2019;13(14):2097–2105. DOI: 10.1049/iet-com.2018.5524.
21. Dmitriev AS, Efremova EV, Gerasimov MY, Itskov VV. Radio lighting based on ultrawideband dynamic chaos generators. *J. Commun. Technol. Electron.* 2016;61(11):1259–1268. DOI: 10.1134/S1064226916110024.
22. Dmitriev AS, Efremova EV, Ryzhov AI, Petrosyan MM, Itskov VV. Artificial radio lighting with sources of microwave dynamic chaos. *Chaos.* 2021;31(6):063135. DOI: 10.1063/5.0053504.
23. Petrovich NT, Razmahnin MK. *Communications With Noise Like Signals.* Moscow: Sovetskoe Radio; 1969. 233 p. (in Russian).
24. Varakin LE. *Communication Systems With Noise Like Signals.* Moscow: Radio i Svyaz; 1985. 384 p. (in Russian).
25. Dixon RC. *Spread Spectrum Systems with Commercial Applications.* 3rd Edition. New York: Wiley; 1994. 592 p.
26. Almuahaya MAM, Jabbar WA, Sulaiman N, Abdulmalek S. A survey on LoRaWAN technology: Recent trends, opportunities, simulation tools and future directions. *Electronics.* 2022;11(1): 164–195. DOI: 10.3390/electronics11010164.
27. Kolumbán G, Kennedy MP, Chua LO. The role of synchronization in digital communications using chaos. I. Fundamentals of digital communications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications.* 1997;44(10):927–936. DOI: 10.1109/81.633882.
28. Kolumbán G, Vizvári B, Schwarz W, Abel A. Differential chaos shift keying: A robust coding for chaos communication. In: *Proceedings of the 4th International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems.* Seville, Spain, 27–28 June 1996. Seville: NDES; 1996. P. 87–92.
29. Sushchik M, Tsimring LS, Volkovskii AR. Performance analysis of correlation-based communication schemes utilizing chaos. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications.* 2000;47(12):1684–1691. DOI: 10.1109/81.899920.
30. Dmitriev AS, Mokhseni TI, Sierra-Teran KM. Differentially coherent information transmission based on chaotic radio pulses. *J. Commun. Technol. Electron.* 2018;63(10):1183–1190. DOI: 10.1134/S1064226918100078.
31. Dmitriev AS, Mokhseni TI, Sierra-Teran CM. Ultra- and hyper-wideband differentially coherent information transmission based on chaotic radio pulses. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2018;26(4):59–74. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-59-74.
32. Dmitriev AS, Mokhseni TI, Sierra-Terant CM. Differentially coherent communication scheme based on chaotic radio pulses. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* 2018;21(3):237–246.
33. Dmitriev AS, Mokhseni TI, Sierra-Teran CM. Simulation of differentially coherent information transmission system based on chaotic radio pulses in ADS environment. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2019;27(5):72–86 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-5-72-86.
34. Klyuev VF, Samarin VP, Klyuev AV. Nonlinear algorithms for measuring the noise signal power against the background of interferences. *Radioelectronics and Communications Systems.* 2013;56(6):304–311. DOI: 10.3103/S073527271306006X.



Дмитриев Александр Сергеевич — окончил факультет общей и прикладной физики Московского физико-технического института (1971). Кандидат физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (1974), доктор физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (1988). Профессор (с 1995). Заведующий отделом статистической радиофизики в ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Профессор Московского физико-технического института. Область научных исследований и разработок: информационные и коммуникационные технологии на основе динамического хаоса. Автор и соавтор более 230 статей в журналах, 9 монографий, более 25 патентов и авторских свидетельств. Дважды Лауреат Премии Совета Министров СССР. Заслуженный радист Российской Федерации.

Россия, 125009 Москва, ул. Моховая, д. 11, корп. 7
Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: chaos@cplire.ru
ORCID: 0000-0003-2079-3020
AuthorID (eLibrary.Ru): 5128



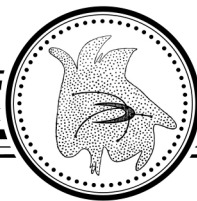
Рыжов Антон Игоревич — родился в Москве (1986). Окончил Московский физико-технический институт (2010). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики (2016). Старший научный сотрудник лаборатории информационных и коммуникационных технологий на основе динамического хаоса в Институте радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Автор более 40 публикаций (в соавторстве).

Россия, 125009 Москва, ул. Моховая, д. 11, корп. 7
Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: mef.box@gmail.com
ORCID: 0000-0001-6725-7984
AuthorID (eLibrary.Ru): 746678



Сьерра-Теран Кристиан Маурисио — родился в Картахене, Колумбия (1990). Окончил радиотехнический факультет Московского физико-технического института (2014). Аспирант МФТИ. Область научных интересов — применение динамического хаоса в информационных системах связи. Имеет более 10 научных публикаций.

Россия, 141701 Долгопрудный, Институтский переулок, 9
Московский физико-технический институт
E-mail: serra@phystech.edu



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(4)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003049

EDN: VDDRLX

Оптимальный баланс индивидуального и коллективного в кормодобывании медоносных пчёл

В. М. Терешко

Институт теоретической и экспериментальной биофизики, Пущино, Россия

E-mail: ✉val.ter@virgin.net

Поступила в редакцию 11.01.2023, принята к публикации 10.04.2023,

опубликована онлайн 30.06.2023, опубликована 31.07.2023

Аннотация. Цель. Ранее мы разработали минимальную модель кормодобывания в колонии медоносных пчёл, применимую для описания как процесса принятия решений, так и фазового перехода между двумя поведенческими модами колонии, индивидуальной и коллективной. В данной работе мы показываем, что эта модель применима также для определения оптимального разделения труда в колонии, а именно для определения оптимальных пропорций между разными типами фуражиров, разведчиками и рекрутами. Модель. Мы представляем этапы процесса кормодобывания в виде реакций химической кинетики, что приводит к уравнениям реакции–диффузии. Реакционная часть описывает динамические моды процесса кормодобывания: вербовку безработных фуражиров к прибыльным источникам пищи, отказ работающих фуражиров от источников, которые стали неприбыльными в результате их эксплуатации, и разведку. Диффузия описывает передачу информации в колонии медоносных пчёл. Мы предполагаем практически идеальную точность передачи и использования информации об источниках пищи в колонии, что моделируется очень малым коэффициентом диффузии работающих фуражиров в информационном пространстве. Напротив, коэффициент диффузии безработных фуражиров выбирается большим, чтобы обеспечить их полное перемешивание в информационном пространстве. Это моделирует одинаковую доступность к передаваемой информации для всех безработных фуражиров в улье. Результаты. Мы рассматриваем прибыль колонии на эксплуатируемом источнике пищи как количество фуражиров, работающих на данном источнике, взвешенное по его ценности для колонии. Найдено, что при росте интенсивности разведки прибыль колонии сначала растёт, а затем начинает падать, иллюстрируя таким образом, что существует оптимальный баланс разведчиков и рекрутов, который обеспечивает наибольший приток пищевого ресурса в колонию. Заключение. Оптимальное разделение труда в колонии медоносных пчёл, определяющее динамический баланс между исследованием и эксплуатацией в постоянно меняющейся окружающей среде, является залогом выживания колонии. Учитывая, что разведчики используют исключительно личную информацию, а рекруты пользуются всем преимуществом социума, то есть социальной информацией, можно сказать, что наша модель описывает оптимальный баланс между индивидуальным и коллективным в колонии.

Ключевые слова: колония медоносных пчёл, кормодобывание, разведка, вербовка к источнику, индивидуальное поведение, коллективное поведение, прибыль колонии, оптимальное соотношение фуражиров.

Благодарности. Работа проведена в рамках государственного задания № 075-00381-21-00.

Для цитирования: Терешко В. М. Оптимальный баланс индивидуального и коллективного в кормодобывании медоносных пчёл // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 439–451. DOI: 10.18500/0869-6632-003049. EDN: VDDRLX

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Optimal balance of individual and collective in honeybee foraging

V. M. Tereshko

Institute of Theoretical and Experimental Biophysics of the RAS, Pushchino, Russia

E-mail: ✉val.ter@virgin.net

Received 11.01.2023, accepted 10.04.2023, available online 30.06.2023, published 31.07.2023

Abstract. *Purpose.* Previously, we developed a minimal foraging model in a honey bee colony that is applicable to describe both the decision-making process and the phase transition between two behavioral modes of the colony, individual and collective. In this paper, we show that this model is also applicable to determine the optimal division of labor in the colony, namely, to determine the optimal proportions between different types of foragers, scouts and recruits. *Model.* We represent the steps in the foraging process as reactions of chemical kinetics, which leads to reaction–diffusion equations. The reaction part describes the dynamic modes of the foraging process: the recruitment of unemployed foragers to profitable food sources, that have become unprofitable as a result of their exploitation, and scouting. Diffusion describes the transfer of information in a honey bee colony. We assume almost perfect accuracy in the transmission and use of information about food sources in the colony, which is modeled by a very small diffusion coefficient of working foragers in the information space. On the contrary, the diffusion coefficient of unemployed foragers is chosen large to ensure their full mixing in the information space. This models the equal accessibility to transmitted information for all unemployed foragers in the hive. *Results.* We consider the profit of a colony on an exploited food source as the number of foragers working on that source, weighted by its value to the colony. It was found that with an increase in the intensity of scouting, the profit of the colony first grows, and then begins to fall, thus illustrating that there is an optimal balance of scouts and recruits, which ensures the greatest influx of food resources into the colony. *Conclusion.* An optimal division of labor in a honey bee colony, defining a dynamic balance between exploration and exploitation in a constantly changing environment, is essential to the survival of the colony. Considering that scouts use exclusively personal information, and recruits take advantage of social information, we can say that our model describes the optimal balance between the individual and the collective in the colony.

Keywords: honey bee colony, foraging, scouting, recruitment to the source, individual behaviour, collective behaviour, colony profit, optimal ratio of foragers.

Acknowledgements. The work was fulfilled within the framework of the state assignment No. 075-00381-21-00.

For citation: Tereshko VM. Optimal balance of individual and collective in honeybee foraging. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(4):439–451. DOI: 10.18500/0869-6632-003049

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Для успешной жизнедеятельности колония медоносных пчёл должна эффективно исследовать и эксплуатировать окружающее пространство, то есть находить и использовать привлекательные источники, богатые нектаром и пыльцой. Считается, что на индивидуальном уровне такое поведение демонстрируют два типа фуражиров: разведчики, которые самостоятельно ищут пищу, и рекруты, которых товарищи по гнезду направляют к источникам пищи с помощью так называемого виляющего танца [1]. Первые ответственны главным образом за исследование окружающего пространства и в меньшей степени за эксплуатацию, а вторые сосредоточены исключительно на эксплуатации источников пищи.

Между эксплуатацией уже известных ресурсов и поиском новых должен существовать определённый (динамический) баланс. С одной стороны, даже при эксплуатации богатых источников всегда есть вероятность существования ещё не разведанных источников, которые обильнее, доступнее (в том числе и по сложности извлечения нектара из цветка), превосходят качеством пищевых компонентов и т. п. Использование последних сможет как увеличить объём, так и

повысить качество собираемого ресурса. Поэтому среди фуражиров должно быть достаточное количество разведчиков, способных отыскать новые источники.

Вышесказанное справедливо для произвольной, в том числе неизменной, окружающей среды. Последняя, конечно, является идеализацией в реальном мире. В процессе эксплуатации источники истощаются и становятся менее привлекательными для пчёл. В итоге фуражиры отказываются от таких источников, становятся временно безработными и ожидают в улье информацию о других, более привлекательных источниках. Такую информацию приносят в улей как фуражиры, работающие на рентабельных в данный момент источниках, так и разведчики.

В реальности же картина ещё сложнее из-за естественной изменчивости окружающей среды. В любой день одни растения расцветают, а другие естественным образом истощаются. Количество нектара в цветке зависит от относительной скорости секреции и реабсорбции. У разных цветков пики секреции наблюдаются в разное время суток [2]. Также концентрация нектара тесно связана с относительной влажностью окружающей среды. После дождя некоторые истощенные растения могут восстановить способность давать нектар [3]. Также следует учитывать, что неблагоприятные условия окружающей среды, такие как ураганы, ливни, град, могут повредить растения и кардинально изменить цветочный ландшафт.

Таким образом, колонии требуется достаточное количество разведчиков, чтобы в постоянно меняющейся среде находить прибыльные (на текущий момент) источники. Однако их количество не должно быть настолько большим, чтобы ограничить число рекрутов. Исследуя окружающее пространство, разведчики находят источники разного качества, как ценные для колонии, так и не очень. Рекруты же всегда нанимаются исключительно на прибыльные источники и совершают полёты на свой источник до тех пор пока последний сохраняет привлекательность в их глазах, что обеспечивает устойчивый поток пищевого ресурса в улей. Также танцоры, рекламируя свой источник, могут завербовать не одного, а несколько рекрутов, что максимизирует пищевой поток. Именно механизм вербовки новобранцев, или рекрутирование, обеспечивает эффективность эксплуатации.

Исходя из вышесказанного, естественным образом возникает вопрос: как найти компромисс между исследованием и эксплуатацией? Другими словами, как колония медоносных пчёл регулирует количество разведчиков и рекрутов в быстро меняющихся условиях окружающей среды? Как оказалось, это во многом зависит от структуры и распределения кормовых участков в окружающей среде [4, 5], но это по-прежнему является вопросом дискуссий [6].

Очевидно, что танцы полезны, если вероятность самостоятельного обнаружения источников пищи невысока, когда, например, участки цветов очень маленькие или очень далекие [7]. В этих условиях танцы полезны, поскольку достаточно единственного фуражира, который вовлечёт в процесс других [7]. Во всех случаях, когда ресурсы были малой плотности, танцующие колонии работают лучше, чем разведочные колонии [8].

Исследовать важность рекрутирующих танцев помогает техника создания так называемых дезориентированных танцев, когда без света или только с рассеянным светом пчёлы не могут передать местоположение источника пищи в процессе танца [4, 9, 10]. Исследования на уровне колонии при нормальном и дезориентированном танце показывают, что танец виляния улучшает кормопроизводство колонии в случаях сложности нахождения источников пищи [9], их непостоянства или недолговечности [5]. Также информация о местоположении источников была полезной, когда ресурсы были распределены неравномерно [4].

Также необходимо учитывать, что пчелиные семьи могут набирать вес всего за несколько недель в году. По этой причине критически важно, чтобы колония могла использовать доступные высококачественные ресурсы при хороших условиях кормодобывания, и танец, вероятно, будет играть важную роль в максимизации эффективности кормодобывания в такие периоды [8].

Однако в условиях высокой плотности ресурсов вербовка может нанести ущерб добыче пищи, потому что пчёлам не нужна социальная информация для достижения успеха в этом случае [10, 11]. Если затраты энергии и времени, связанные с использованием социальной информации, высоки и не приносят значительных преимуществ, то стратегия ожидания социальной информации становится контрпродуктивной [12].

Существуют две гипотезы о пчёлах-разведчиках: (i) только некоторые особи имеют склонность к разведке [13] или (ii) все пчёлы склонны к разведке [14].

Первая гипотеза предполагает генетически предопределённую специализацию пчёл. С. Дреллер предположил, что склонность собирателя к разведке имеет сильную генетическую основу, так что некоторые рабочие колонии будут преимущественно разведывать, а не следовать за вербовочными танцами. С помощью деструктивного отбора проб он определил, что есть генетическая основа для того, чтобы быть разведчиком или рекрутом [13]. Подобное влияние генотипа на склонность индивидуума к выполнению определенных задач было обнаружено ранее между сборщиками пыльцы и сборщиками нектара [15–19]. Вышеуказанное может привести к мысли, что разведчики являются генетически детерминированными специалистами-исследователями.

Вторая гипотеза предполагает универсальность агентов колонии и её возможную адаптивность к изменению внутренних и внешних условий. К первым относится, например, уровень запасов пищи в улье, а ко вторым изменения в окружающей среде. В рамках данной концепции роль насекомого определяется его реакцией на различные уровни стимулов, то есть функциональная организация колонии определяет роль индивидуума в ней [20, 21]. В свете такого понимания считается, что строгое разделение между разведчиком и рекрутом маловероятно [1]. Ключевой задачей здесь становится изучение механизмов, регулирующих распределение задач и разделение труда в сообществах насекомых [14, 22].

В средах, где наличие пищи меняется быстро и непредсказуемо, адаптивное распределение фуражиров между разведкой и наймом на работу (с помощью вербовки) является жизненно важным для колонии [23]. Вместе с тем, механизмы, определяющие адаптивность, не исключают влияния генетики, поскольку на порог ответа индивидуума вполне может влиять его генотип [24, 25].

Существуют несколько моделей, определяющих оптимальные пропорции фуражиров [26–28]. Все эти модели являются специализированными, то есть они специально разрабатывались под решение вышеуказанной задачи.

В данной работе мы покажем, что наша минимальная модель кормодобывания медоносных пчёл способна демонстрировать оптимальную пропорцию разведчиков. В отличие от вышеуказанных моделей, она универсальна. Даже в усечённом виде (без учёта разведки) эта модель демонстрирует базовый принцип принятия решений, обеспечивающий успех колонии — выбор и эксплуатацию наилучших источников (из известных колонии на рассматриваемый момент времени) [29–31]. А полная модель уже демонстрирует как выбор лучших источников [32], так и фазовый переход от индивидуального поведения к комбинированному, индивидуальному плюс коллективному, где последнее играет доминантную роль в сборе ресурсов [33].

1. Минимальная модель кормодобывания

Выделим основные компоненты и стадии процесса добычи корма или фуражирования. Все фуражиры подразделяются на *работающих* и *безработных* [31, 33].

Работающие фуражиры ассоциированы со своим местом работы — цветочным участком. Возвращаясь в улей с добытым нектаром или пыльцой, фуражиры также несут информацию об источнике пищи и передают её сородичам в улье с помощью виляющего танца [20, 31, 33].

Безработные фуражиры не связаны с каким-либо определённым источником пищи. Можно сказать, что они не имеют «рабочего контракта». Безработные фуражиры делятся на *наблюдателей* и *разведчиков* [31, 33]. Первые — это резервная рабочая сила, которая ожидает в улье информацию об источниках пищи, и, получив эту информацию, может последовать к источнику и «устроиться» туда на работу. Сам процесс получения информации происходит путём наблюдения за танцами на небольшом участке возле входа в улей, называемого танцполом [20]. Вторые самостоятельно ищут источники пищи в окружающей среде. Если разведчики найдут ценный источник, то они могут перейти в разряд работающих на данном источнике.

Медоносные пчёлы оценивают источник по своей внутренней шкале, главными критериями которой являются близость источника к улью, лёгкость извлечения нектара и его пищевая ценность, определяемая по концентрации сахаров, аминокислот и витаминов [20]. Несмотря на то, что пчёлы оценивают качество источника по множеству факторов, мы описываем фактор предпочтения единственным параметром, который можно назвать ценностью или прибыльностью источника [31, 33]. Эксперименты показывают, что таким параметром может быть чистая энергетическая эффективность источника нектара [20].

Обозначив работающих и безработных фуражиров X и Y , соответственно, представим этапы процесса кормодобывания в виде реакций химической кинетики.

Вербовка или рекрутирование в улье может быть описана автокаталитической реакцией, когда нанятый на работу наблюдатель, ставший после этого рекрутом, после отработки своей «смены», становится нанимателем для других наблюдателей:



Ранее прибыльный источник может потерять свою привлекательность для колонии, как вследствие его истощения в процессе эксплуатации, так и по природным причинам, естественным или катастрофическим. Отказ от неприбыльного источника нектара происходит обратно пропорционально его текущей ценности. В этом случае работающий фуражир переходит в пул безработных:



где f — ценность источника.

Разведка окружающего пространства — важная составляющая поведения пчелиной семьи. Разведчики также могут собирать нектар и пыльцу из обнаруженного ими источника, пополняя запасы в улье. В этом случае они переходят в разряд работающих фуражиров, однако становятся ими не в результате общественного найма, а самостоятельным путем:



Так как число разведчиков в общей массе фуражиров колонии невелико (в среднем 10% [20]), мы полагаем ε малым.

Разведчики, использующие *личную* информацию об источниках, которые они самостоятельно разыскали в ходе исследования окружающей среды, формируют *индивидуальный* режим кормодобывания. Напротив, рекруты, получающие работу посредством вербовки, то есть используя *социальную* информацию, формируют *коллективный* режим кормодобывания.

Стадии (1)–(3) приводят к следующим уравнениям реакции–диффузии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \left(y(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{f(\mathbf{r}, t)} \right) x(\mathbf{r}, t) + \varepsilon y(\mathbf{r}, t) + D_x \frac{\partial^2 x(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}^2}, \\ \frac{\partial y(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= - \left(y(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{f(\mathbf{r}, t)} \right) x(\mathbf{r}, t) - \varepsilon y(\mathbf{r}, t) + D_y \frac{\partial^2 y(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где x и y — плотности, а D_x и D_y — коэффициенты диффузии работающих и безработных фуражиров, соответственно, а $f(\mathbf{r}, t)$ — *пищевой ландшафт*, который присваивает значение ценности каждой точке пространства \mathbf{r} .

Отдельно следует сказать о пространстве \mathbf{r} . Мы полагаем, что в своём мозге пчёлы способны создавать информационную карту физического пространства для навигации и поиска нужных источников. В общем случае, пространство \mathbf{r} есть именно информационное пространство. Работающие фуражиры приносят информацию об используемых источниках в улей и передают её наблюдателям посредством танца. Точность передаваемой информации может моделироваться значением D_x . Полагаем, что эта информация используется рекрутами практически идеально, то есть они точно находят нужный источник и эксплуатируют его. Это моделируется очень малым коэффициентом диффузии D_x (информация об источнике не расплывается в пространстве \mathbf{r} , а точно локализуется на требуемом источнике). Обратная ситуация с коэффициентом диффузии D_y , который мы выбираем большим. Этот коэффициент моделирует доступ наблюдателей к передаваемой (танцорами) информации. Мы предполагаем, что передаваемая информация одинаково доступна всем наблюдателям в улье, что можно смоделировать, полностью перемешав последних в информационном пространстве. Таким образом, система (4) фактически моделирует динамику информации в колонии медоносных пчёл.

Однако для пищевого ландшафта и работающих фуражиров, а именно динамикой и распределением последних мы интересуемся в первую очередь, это пространство может быть рассмотрено как физическое пространство. В этом случае пищевой ландшафт представляет собой распределение источников в реальном физическом пространстве, на которых концентрируются работающие фуражиры.

2. Динамический баланс

Для простоты анализа мы считаем, что пищевая ценность источников не меняется со временем. Вместе с тем ландшафт может меняться по своей структуре: в нём могут появляться новые компоненты — обнаруженные новые источники пищи, которые мы тоже считаем неизменными по их пищевой ценности. После того как пчёлы обнаружат все источники в рассматриваемом пространстве, далее они функционируют в «замороженном» ландшафте, когда $f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r})$.

Проведём компьютерное моделирование, решив систему (4) численно. Мы используем явный метод численного интегрирования уравнений в частных производных, когда пространство и время разбиваются на дискретные равномерные подынтервалы, а производные заменяются их конечно-разностными аппроксимациями. Численное интегрирование выполняется на двумерной решетке размером 10 на 10, с шагом по пространству и времени 0.2 и 0.0002, соответственно, что гарантирует устойчивость и сходимости явной схемы. На границах данного пространства, Ω , отсутствуют потоки: $\frac{\partial x}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{\mathbf{r} \in \Omega} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{\mathbf{r} \in \Omega} = 0$.

Предполагается, что в начальный момент подавляющее число фуражиров являются безработными: начальная плотность работающих и безработных фуражиров в каждой из ячеек составляет $x_0 = 0.001$ и $y_0 = 1$, соответственно. Другими словами, в начальный момент колония обладает минимальной информацией о доступных источниках, но её информационный ресурс велик. Коэффициент диффузии работающих фуражиров $D_x = 0.001$, что предполагает практически идеальную идентификацию источников пищи рекрутами. С другой стороны, коэффициент диффузии безработных фуражиров $D_y = 10$, что обеспечивает равную доступность наблюдателей к передаваемой (танцорами) информации.

Зададим пищевой ландшафт набором значений ценности q : $f = f(q(\mathbf{r}, t))$. Так как мы проводим численное интегрирование на двумерной решётке, то этот набор конечен, а его размер определяется соответственно размером решётки и шагом интегрирования по пространству.

Рассмотрим ландшафт с тремя пространственно разделёнными нишами, определяемыми ярко выраженными значениями ценности, за пределами которых ценность минимальна. Везде за пределами ниш уровень ценности может быть сколь угодно мал, но не равен нулю, чтобы предотвратить уход в бесконечность коэффициента отказа от неприбыльных источников, который обратно пропорционален ценности (см. уравнение (2)). Предполагается, что сначала, а именно до момента времени $t = 60$, пчёлам известна информация только о двух источниках пищи:

$$q(r_1, r_2, t < 60) = \begin{cases} 0.8 & \text{для } r_1 = 1, r_2 = 9, \\ 0.6 & \text{для } r_1 = 9, r_2 = 9, \\ 0.001 & \text{для всех остальных } r_1, r_2, \end{cases} \quad (5a)$$

а с наступлением этого момента они открывают третий источник, и им открывается весь ландшафт:

$$q(r_1, r_2, t \geq 60) = \begin{cases} 0.8 & \text{для } r_1 = 1, r_2 = 9, \\ 0.6 & \text{для } r_1 = 9, r_2 = 9, \\ 2 & \text{для } r_1 = 5, r_2 = 1, \\ 0.001 & \text{для всех остальных } r_1, r_2. \end{cases} \quad (5b)$$

Вышеуказанные ландшафты представлены на рис. 1, *a* и *b*, соответственно.

Заметим, что для чистоты эксперимента мы провели численное интегрирование с двумя вариантами пищевого ландшафта. Первый вариант описан в этой статье. Альтернативно мы «сгладдили» вышеприведённый ландшафт оператором диффузии. Коэффициент такой диффузии и время её действия были малыми, что предотвратило сколь-нибудь значимое расплывание источников, но, в то же время, действие диффузии было достаточным, чтобы обеспечить гладкость функции. В итоге получились гауссовы пики, как и должно быть при работе диффузии. Проведённое интегрирование этих двух вариантов привело к качественно идентичным результатам.

Пчёлы считают источник прибыльным, если его ценность превышает уровень, называемый порогом прибыльности [29–31, 33]. В нашей системе этот порог составляет $T_p = \frac{1}{x_0 + y_0 - \varepsilon}$. Пчёлы начинают танцевать только за те источники, ценность которых превышает этот порог. В этом случае привлекаются рекруты, то есть включается коллективная мода кормодобыывания. Для источников, ценность которых ниже этого порога, добыча пищи происходит только индивидуально,

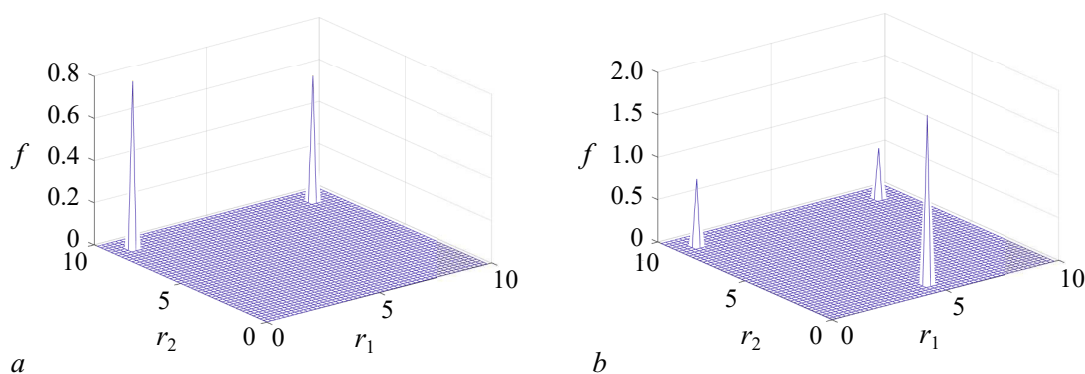


Рис. 1. Пищевой ландшафт, доступный колонии до $t = 60$ (*a*) и после $t = 60$ (*b*). Ценность источников на заднем плане обоих рисунков составляет, слева направо, $f(\mathbf{r}) = 0.8$ и 0.6 , а ценность источника на ближнем плане на рис. *b* составляет $f(\mathbf{r}) = 2$

Fig. 1. Food landscape available to the colony before $t = 60$ (*a*) and so after $t = 60$ (*b*). The background source value for both figures is, from left to right, $f(\mathbf{r}) = 0.8$ and 0.6 respectively, and the foreground source value in figure *b* is $f(\mathbf{r}) = 2$

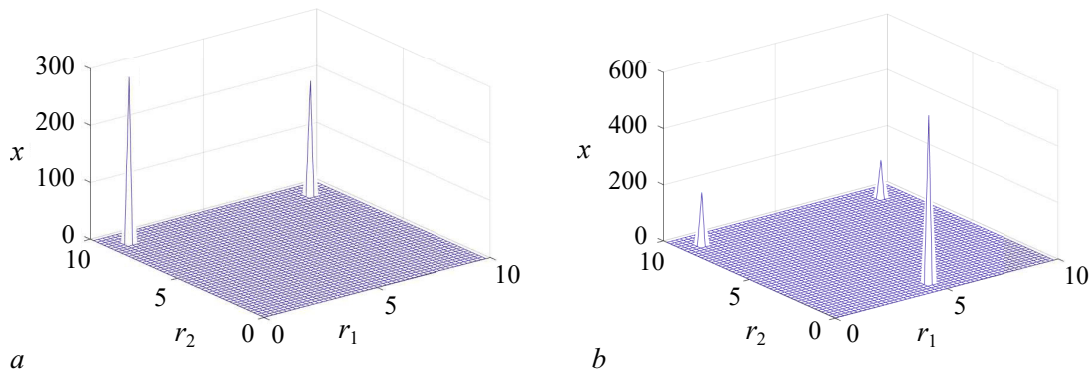


Рис. 2. Распределение плотности работающих фуражиров по пространству при $t = 59.8$ (a); $t = 200$ (b)
 Fig. 2. Density distribution of working foragers at $t = 59.8$ (a); $t = 200$ (b)

без передачи информации товарищам по улью. В нашем случае ценность первоначально доступных источников (см. рис. 1, a) ниже порога, и поэтому при $t < 60$ система находится в индивидуальной фазе кормодобывания. Далее колония находит прибыльный источник, ценность которого выше порога (см. рис. 1, b), и переходят к комбинированной фазе, включающей, как индивидуальную, так и коллективную компоненты поведения. В комбинированной фазе коллективная составляющая играет доминирующую роль, так как именно она (через вербовку) генерирует большинство фуражиров [33]. Поэтому не будет преувеличением называть комбинированную фазу коллективной, что отражает её суть.

Рассмотрим распределение плотности работающих фуражиров в заданном пищевом ландшафте для колонии с интенсивностью разведки $\varepsilon = 0.1$. Рис. 2, a демонстрирует распределение при $t = 59.8$, то есть в индивидуальной фазе. Как видно, фуражиры концентрируются на двух, известных к этому времени, источниках (плотности 293.3 и 201.9, соответственно). Если представить, что далее по времени пчёлам будут известны только эти два источника, указанные выше плотности не меняются, то есть это стационарные плотности для заданных параметров системы. Рис. 2, b демонстрирует распределение при $t = 200$, то есть уже в коллективной фазе кормодобывания. Сразу бросается в глаза, что основная масса работающих фуражиров концентрируется на прибыльном источнике, где плотность достигает 598.8. Вместе с тем плотность фуражиров на двух неприбыльных источниках уменьшается по сравнению с индивидуальной фазой (187.4 и 134, соответственно). Эти значения не меняются со временем, что говорит о их стационарности. При других значениях интенсивности разведки меняются только значения плотностей фуражиров, но картина качественно остаётся той же.

Таким образом, в коллективной фазе происходит перераспределение фуражиров: часть разведчиков переключается на наблюдение за танцами и становятся в итоге рекрутами. Так система подстраивается к изменившимся условиям (найденному прибыльному источнику в нашем случае), и возникает динамический баланс между разведчиками и рекрутами или, в более глобальном смысле, между исследованием и эксплуатацией.

3. Динамика прибыли и её оптимум

В стационарном, не зависящем от времени, пищевом ландшафте рассмотрим прибыль колонии P как общую по пространству плотность работающих фуражиров, взвешенных по ценности (в глазах пчёл) этого пространства:

$$P = \int_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r})x(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (6)$$

Упростим задачу, рассматривая дискретный набор пищевых источников с соответствующим им дискретным набором плотностей фуражиров. В этом случае определим прибыль P_d , как взвешенную (по ценности источников) сумму таких плотностей:

$$P_d = \sum_{i=1}^n f_i x_i, \quad (7)$$

где n — число источников пищи.

В принципе, можно рассматривать простые (невзвешенные) интеграл или сумму, и это тоже будет отражением прибыли колонии. Однако, если учесть, что ценность источника пищи — это комплексный показатель, включающий, например, такой компонент, как сложность извлечения нектара из цветка, мы считаем представленные выше определения прибыли более аргументированными.

Рассмотрим теперь динамику прибыли колонии, P_d , при разных уровнях интенсивности разведки ε . За образец выберем колонию с очень низкой интенсивностью разведки, $\varepsilon = 0.001$, которую фактически можно считать системой без разведки. На рис. 3, *a-d* прибыль такой колонии отображена сплошной линией. Как и ожидается при таком низком уровне разведки, прибыль колонии минимальна в индивидуальной фазе, то есть при $t < 60$. Однако в коллективной фазе происходит взрывной рост прибыли, стабилизируемый с течением времени (см. рис. 3, *a-d*, $t \geq 60$). Для простоты назовём рассмотренную динамику базовой.

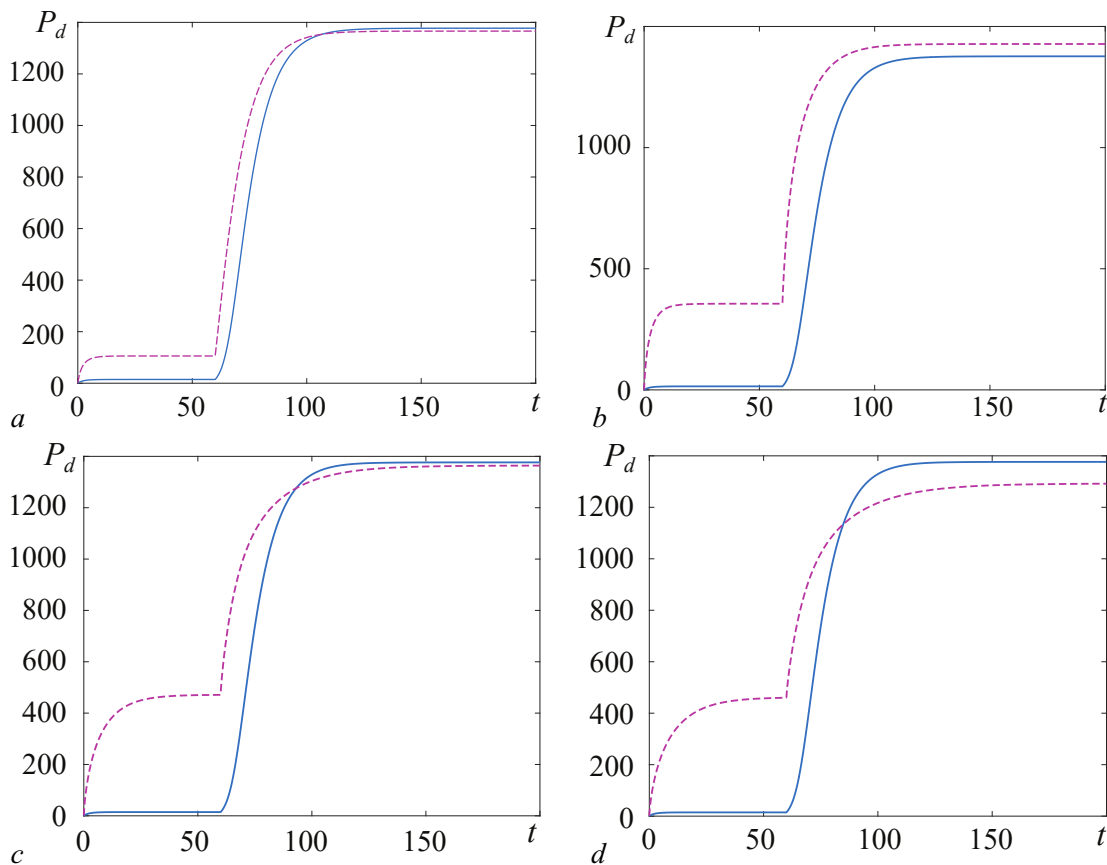


Рис. 3. Динамика прибыли колонии для разных уровней интенсивности разведки. Везде сплошная линия показывает динамику для $\varepsilon = 0.001$. Штриховая линия показывает динамику для: $\varepsilon = 0.01$ (a); 0.1 (b); 0.7 (c); 1.0 (d)

Fig. 3. Colony profit dynamics for different levels of scouting intensity. Everywhere the solid line shows the dynamics for $\varepsilon = 0.001$. The dashed line shows the dynamics for: $\varepsilon = 0.01$ (a); 0.1 (b); 0.7 (c); 1.0 (d)

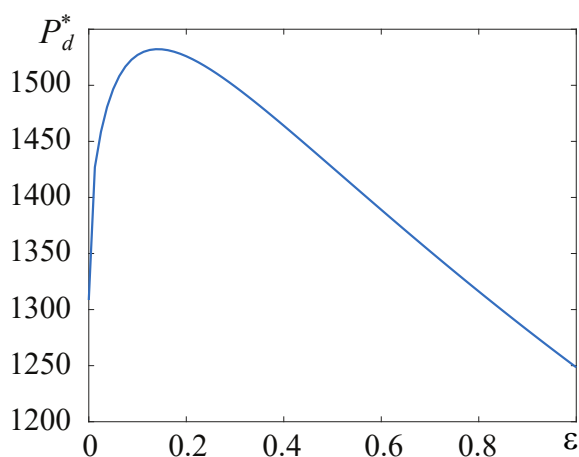


Рис. 4. Зависимость стационарного уровня прибыли колонии от интенсивности разведки

Fig. 4. Dependence of the stationary level of profit of the colony on the intensity of scouting

ясь немного ниже (см. рис. 3, *a*). С увеличением интенсивности разведки прибыль становится выше базовой (рис. 3, *b*, $\epsilon = 0.1$). Однако дальнейшее увеличение интенсивности разведки приводит уже к снижению прибыли, которая падает ниже базовой (см. рис. 3, *c*, $\epsilon = 0.7$ и рис. 3, *d*, $\epsilon = 1.0$).

В соответствии с вышесказанным можно предположить, что существует некое оптимальное значение интенсивности разведки, которое обеспечивает наибольший приток пищевого ресурса в колонию. Чтобы подтвердить это, проведём простой эксперимент. В этот раз, для простоты, предположим, что пищевой ландшафт состоит из единственного источника, ценность которого достаточна для вербовки к нему безработных фуражиров из улья (источник на переднем плане, см. рис. 1, *b*). Предположим также, что этот источник известен пчёлам сразу, а не по прошествии некоторого времени, как ранее. Последнее просто ускорит выход прибыли колонии на её стационарный уровень, P_d^* . В нашем случае такой уровень стабильно обеспечивается при $t \geq 60$ для любых значений ϵ , рассматриваемых в этом эксперименте. Мы рассчитали стационарную прибыль колонии для интенсивности разведки от 0 до 1, и нашли, что оптимум прибыли достигается в диапазоне $\epsilon = 0.125 \dots 0.15$ (рис. 4).

Заключение

Фактически оптимальное разделение труда является залогом выживания колонии медоносных пчёл. Поэтому так важен правильный баланс между исследованием и эксплуатацией. Как мы увидели, система сама адаптивно подстраивается под значимые для колонии изменения в окружающей среде. Очевидно, что если разведчики обнаружат ценные, богатые пищевым ресурсом, источники, то рационально подключить других фуражиров колонии к их эксплуатации. Это происходит путём обмена информацией о найденном источнике с другими обитателями улья, используя универсальный язык пчёл — танец. В этом случае включается процесс вербовки рекрутов, то есть активизируется коллективная мода кормодобывания. Наша модель демонстрирует подобную адаптивность, когда при обнаружении прибыльного источника происходит поведенческий сдвиг в сторону усиления коллективной составляющей за счёт уменьшения разведчиков-индивидуалистов.

В отличие от разведчиков рекруты получают и используют социальную информацию. Насколько последняя эффективна, показывает взрывной рост прибыли колонии в коллективной фазе (см. рис. 3, *a-d*). Он начинается именно в тот момент, когда колония обнаруживает прибыльный источник и начинает вербовку на него безработных фуражиров. Механизм вербовки

Сравним вышеуказанную колонию с колониями, в которых разведка играет более значимую роль, а именно рассмотрим колонии с $\epsilon = 0.01, 0.1, 0.7$ и 1.0 (см. рис. 3, *a-d*, штриховая линия для каждого варианта интенсивности разведки, соответственно). Во всех случаях динамика прибыли таких колоний напоминает базовую динамику, но с разными стационарными уровнями в индивидуальной и коллективной фазах. Как видим, в индивидуальной фазе прибыль для таких колоний везде выше базовой, причём рост прибыли пропорционален увеличению интенсивности разведки. Для коллективной фазы, а именно эта фаза является ведущей в кормодобывании реальной колонии, дело обстоит иначе. При $\epsilon = 0.01$ в стационарном состоянии прибыль колонии практически равноценна прибыли базовой колонии, остава-

не что иное, как петля положительной обратной связи, то есть самоусиливающийся, автокаталитический, процесс. Такой рост ограничен конечностью пула безработных фуражиров, и заканчивается выходом системы в стационарное состояние. Сравнение стационарных уровней прибыли индивидуального и коллективного поведения наглядно иллюстрирует силу коллектива.

Учитывая, что вышеуказанный взрывной рост количества фуражиров соответствует изменению прибыльности пищевого ландшафта, можно фактически говорить о фазовом переходе в данном случае. Драматическое изменение количества работающих фуражиров связано с поведенческой перестройкой в колонии. Поэтому данный фазовый переход можно также назвать поведенческим переходом от индивидуального к коллективному.

При увеличении интенсивности разведки прибыль колонии сначала резко растёт, быстро достигая максимума, минуя который, она начинает медленно падать (см. рис. 4). Это косвенно подтверждает экспериментальные данные о том, что число разведчиков составляет в среднем 10% от общего числа фуражиров колонии [20].

Существует гипотеза, что разведчики — это неудавшиеся рекруты [25]. То есть это те наблюдатели, которые не смогли идентифицировать танец, а следовательно, и соответствующий ему источник, и решили искать пищу самостоятельно. Также есть потерявшиеся рекруты — те, которые смогли идентифицировать танец, но на пути к источнику потерялись, и случайно обнаружили другие, возможно даже новые, источники пищи [1, 14]. И тех и других можно назвать разведчиками поневоле. Учитывая вышесказанное, количество разведчиков коррелирует с количеством ошибок в системе, что, в свою очередь, говорит о некоем оптимальном (ненулевом) уровне ошибок в системе, дающем максимальную эффективность кормодобывания. Это тема для дальнейших исследований.

References

1. Biesmeijer JC, de Vries H. Exploration and exploitation of food sources by social insect colonies: a revision of the scout-recruit concept. *Behavioral Ecology and Sociobiology*. 2001;49(2–3):89–99. DOI: 10.1007/s002650000289.
2. Corbet SA, Unwin DM, Prÿs-Jones OE. Humidity, nectar and insect visits to flowers, with special reference to *Crataegus*, *Tilia* and *Echium*. *Ecol. Entomol.* 1979;4(1):9–22. DOI: 10.1111/j.1365-2311.1979.tb00557.x.
3. Moore D, Van Nest BN, Seier E. Diminishing returns: the influence of experience and environment on time-memory extinction in honey bee foragers. *Journal of Comparative Physiology A*. 2011;197(6):641–651. DOI: 10.1007/s00359-011-0624-y.
4. Dornhaus A, Chittka L. Why do honey bees dance? *Behavioral Ecology and Sociobiology*. 2004;55(4):395–401. DOI: 10.1007/s00265-003-0726-9.
5. Seeley TD. Progress in understanding how the waggle dance improves the foraging efficiency of honey bee colonies. In: Galizia C, Eisenhardt D, Giurfa M, editors. *Honeybee Neurobiology and Behavior*. Dordrecht: Springer; 2012. P. 77–87. DOI: 10.1007/978-94-007-2099-2_7.
6. Schürch R, Grüter C. Dancing bees improve colony foraging success as long-term benefits outweigh short-term costs. *PLoS ONE*. 2014;9(8):e104660. DOI: 10.1371/journal.pone.0104660.
7. Beekman M, Lew JB. Foraging in honeybees—when does it pay to dance? *Behavioral Ecology*. 2008;19(2):255–261. DOI: 10.1093/beheco/arm117.
8. G'Anson Price R, Dulex N, Vial N, Vincent C, Grüter C. Honeybees forage more successfully without the “dance language” in challenging environments. *Science Advances*. 2019;5(2):eaat0450. DOI: 10.1126/sciadv.aat0450.
9. Sherman G, Visscher PK. Honeybee colonies achieve fitness through dancing. *Nature*. 2002;419(6910):920–922. DOI: 10.1038/nature01127.
10. Donaldson-Matasci MC, Dornhaus A. How habitat affects the benefits of communication in

- collectively foraging honey bees. *Behavioral Ecology and Sociobiology*. 2012;66(4):583–592. DOI: 10.1007/s00265-011-1306-z.
11. Dornhaus A, Klügl F, Oechslein C, Puppe F, Chittka L. Benefits of recruitment in honey bees: effects of ecology and colony size in an individual-based model. *Behavioral Ecology*. 2006;17(3):336–344. DOI: 10.1093/beheco/arj036.
 12. Dechaume-Moncharmont FX, Dornhaus A, Houston AI, McNamara JM, Collins EJ, Franks NR. The hidden cost of information in collective foraging. *Proc. R. Soc. B*. 2005;272(1573):1689–1695. DOI: 10.1098/rspb.2005.3137.
 13. Dreller C. Division of labor between scouts and recruits: genetic influence and mechanisms. *Behavioral Ecology and Sociobiology*. 1998;43(3):191–196. DOI: 10.1007/s002650050480.
 14. Seeley TD. Division of labor between scouts and recruits in honeybee foraging. *Behavioral Ecology and Sociobiology*. 1983;12(3):253–259. DOI: 10.1007/BF00290778.
 15. Calderone NW, Page Jr RE. Genotypic variability in age polyethism and task specialization in the honey bee, *Apis mellifera* (Hymenoptera: Apidae). *Behavioral Ecology and Sociobiology*. 1988;22(1):17–25. DOI: 10.1007/BF00395694.
 16. Calderone NW, Page Jr RE. Effects of interactions among genotypically diverse nestmates on task specialization by foraging honey bees (*Apis mellifera*). *Behavioral Ecology and Sociobiology*. 1992;30(3–4):219–226. DOI: 10.1007/BF00166706.
 17. Dreller C, Fondrk MK, Page Jr RE. Genetic variability affects the behavior of foragers in a feral honeybee colony. *Naturwissenschaften*. 1995;82(5):243–245. DOI: 10.1007/BF01133602.
 18. Page Jr RE, Waddington KD, Hunt GJ, Fondrk MK. Genetic determinants of honey bee foraging behaviour. *Animal Behaviour*. 1995;50(6):1617–1625. DOI: 10.1016/0003-3472(95)80015-8.
 19. Page Jr RE, Erber J, Fondrk MK. The effect of genotype on response thresholds to sucrose and foraging behavior of honey bees (*Apis mellifera* L.). *Journal of Comparative Physiology A*. 1998;182(4):489–500. DOI: 10.1007/s003590050196.
 20. Seeley TD. *The Wisdom of the Hive: The Social Physiology of Honey Bee Colonies*. Cambridge, MA: Harvard University Press; 1995. 318 p.
 21. Theraulaz G, Bonabeau E, Deneubourg JN. Response threshold reinforcements and division of labour in insect societies. *Proc. R. Soc. Lond. B*. 1998;265(1393):327–332. DOI: 10.1098/rspb.1998.0299.
 22. Fewell JH, Bertram SM. Division of labor in a dynamic environment: response by honeybees (*Apis mellifera*) to graded changes in colony pollen stores. *Behavioral Ecology and Sociobiology*. 1999;46(3):171–179. DOI: 10.1007/s002650050607.
 23. Visscher PK, Seeley TD. Foraging strategy of honeybee colonies in a temperate deciduous forest. *Ecology*. 1982;63(6):1790–1801. DOI: 10.2307/1940121.
 24. Jones JC, Myerscough MR, Graham S, Oldroyd BP. Honey bee nest thermoregulation: Diversity promotes stability. *Science*. 2004;305(5682):402–404. DOI: 10.1126/science.1096340.
 25. Beekman M, Gilchrist AL, Duncan M, Sumpter DJT. What makes a honeybee scout? *Behavioral Ecology and Sociobiology*. 2007;61(7):985–995. DOI: 10.1007/s00265-006-0331-9.
 26. Johnson LK, Hubbell SP, Feener Jr DH. Defense of food supply by eusocial colonies. *American Zoologist*. 1987;27(2):347–358. DOI: 10.1093/icb/27.2.347.
 27. Jaffe K, Deneubourg JL. On foraging, recruitment systems and optimum number of scouts in eusocial colonies. *Insectes Sociaux*. 1992;39(2):201–213. DOI: 10.1007/BF01249295.
 28. Anderson C. The adaptive value of inactive foragers and the scout-recruit system in honey bee (*Apis mellifera*) colonies. *Behavioral Ecology*. 2001;12(1):111–119. DOI: 10.1093/oxfordjournals.beheco.a000372.
 29. Tereshko V. Reaction-diffusion model of a honeybee colony's foraging behaviour. In: *Parallel*

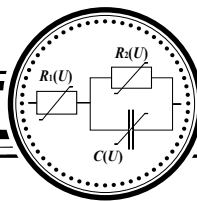
Problem Solving from Nature PPSN VI. PPSN 2000. Vol. 1917 of Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer; 2000. P. 807–816. DOI: 10.1007/3-540-45356-3_79.

30. Tereshko V, Lee T. How information-mapping patterns determine foraging behaviour of a honey bee colony. *Open Systems & Information Dynamics*. 2002;9(2):181–193. DOI: 10.1023/A:1015652810815.
31. Tereshko V, Loengarov A. Collective decision making in honey-bee foraging dynamics. *Computing and Information Systems*. 2005;9(3):1.
32. Loengarov A, Tereshko V. Phase transitions and bistability in honeybee foraging dynamics. *Artificial Life*. 2008;14(1):111–120. DOI: 10.1162/artl.2008.14.1.111.
33. Tereshko V. Kinetic phase transition in honeybee foraging dynamics: Synergy of individual and collective. *Advances in Complex Systems*. 2020;23(6):2050019. DOI: 10.1142/S0219525920500198.

Терешко Валерий Михайлович — окончил Могилёвский машиностроительный институт (ныне Белорусско-Российский университет) по специальности «Автоматизированные системы управления» (1986). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по специальности «Математическая физика» (МГУ, 1993). Работал исследователем и преподавателем в Институте физики (Могилёв, Беларусь), McMaster University (Hamilton, Canada), DAMPT (Cambridge, UK), UMIST (Manchester, UK), Max Planck Institute for Mathematics in Sciences (Leipzig, Germany), University of the West of Scotland (Paisley, UK) и Объединённом институте проблем информации (Минск, Беларусь). В настоящее время работает ведущим научным сотрудником в Институте теоретической и экспериментальной биофизики РАН. Научные интересы — возникающее коллективное поведение, нелинейная динамика и управление хаосом, биологически основанная обработка информации, реакционно-диффузионная динамика и образование структур.

Россия, 142290 г. Пущино, Московская обл., ул. Институтская, 3
Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН
E-mail: val.ter@virgin.net
ORCID: 0000-0002-0303-8990
AuthorID (eLibrary.Ru): 1035653





Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(4)

Научная статья
УДК 621.385.6

DOI: 10.18500/0869-6632-003050
EDN: UWBSKL

О теории гибрида ЛБВО и усилителя с комплексной диэлектрической проницаемостью

А. А. Фунтов

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: aaafuntov@mail.ru

Поступила в редакцию 6.03.2023, принята к публикации 5.04.2023,
опубликована онлайн 18.07.2023, опубликована 31.07.2023

Аннотация. Цель настоящей работы — построение нелинейной теории гибрида лампы бегущей волны и усилителя с комплексной диэлектрической проницаемостью. **Методы.** Рассматривается следующая модель: ионнокомпенсированный одномерный электронный поток пронизывает входную секцию (лампа бегущей волны), затем влетает в среду с комплексной диэлектрической проницаемостью, а далее попадает в выходную секцию (лампа бегущей волны). Построена линейная теория указанного гибрида, и проведено сравнение её результатов с результатами хорошо известной линейной теории лампы бегущей волны. Построена нелинейная теория указанного гибрида модифицированным волновым методом и проведено сравнение результатов с нелинейной теорией лампы бегущей волны, полученной классическим волновым методом Овчарова–Солнцева. Кроме того, для проверки пределов применимости полученных результатов была построена стационарная нелинейная теория гибрида, полученная с помощью метода крупных частиц. Результаты этой теории были также сравнены со стационарной нелинейной теорией лампы бегущей волны, построенной с помощью метода крупных частиц. **Результаты и заключение.** По результатам развитых теорий показано, что при определенных параметрах линейная теория и нелинейные теории (как по модифицированному волновому методу Овчарова–Солнцева, так и по методу крупных частиц) позволяют получить сопоставимые результаты для классической лампы бегущей волны и исследуемого гибрида. Показано, что при определенных параметрах за счет резистивной неустойчивости может заметно улучшаться группировка электронов и, как следствие, коэффициент усиления гибрида может превышать коэффициент усиления классической лампы бегущей волны при одинаковых параметрах и при той же полной длине прибора в линейном режиме работы. В нелинейном режиме работы исследуемый гибрид при оптимальных параметрах среды может иметь значительно большие значения выходной мощности и коэффициент полезного действия, чем у лампы бегущей волны при том же значении параметра пространственного заряда и параметра Пирса.

Ключевые слова: резистивный усилитель, метаматериал, лампа бегущей волны.

Благодарности. Автор выражает благодарность доценту В. Н. Титову за ценные советы и обсуждение полученных результатов.

Для цитирования: Фунтов А. А. О теории гибрида ЛБВО и усилителя с комплексной диэлектрической проницаемостью // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 452–468. DOI: 10.18500/0869-6632-003050. EDN: UWBSKL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

About theory of hybride TWTO and an amplifire with a complex permittivity

A. A. Funtov

Saratov State University, Russia

E-mail: ✉aafuntov@mail.ru

Received 6.03.2023, accepted 5.04.2023, available online 18.07.2023, published 31.07.2023

Abstract. The *purpose* of this work is to construct a nonlinear theory of a hybrid between travelling wave tube (TWT) and an amplifier with a complex permittivity. *Methods.* The following model is considered: an ion-compensated one-dimensional electron beam penetrates the input travelling wave tube section, then flies into a medium with a complex permittivity, and then enters the output travelling wave tube section. A linear theory of this hybrid is constructed, and its results are compared with the results of the well-known linear theory of travelling wave tube. A nonlinear theory of this hybrid was constructed by a modified wave method, and the results were compared with the nonlinear travelling wave tube theory obtained by the classical Ovcharov–Solntsev’s wave method. In addition, to test the limits of applicability of the obtained results, a stationary nonlinear theory of the hybrid was constructed, obtained using the large particle method. The results of this theory were also compared with the stationary nonlinear travelling wave tube theory constructed using the large particle method. *Results and conclusion.* Based on the results of the developed theories, it is shown that, under certain parameters, the linear theory and nonlinear theories (both by the modified Ovcharov–Solntsev’s wave method and by the large particle method) make it possible to obtain comparable results both in the case of a classical travelling wave tube and for the hybrid under study. It is shown that under certain parameters, due to the resistive instability, the bunching of electrons can be noticeably improved and, as a result, the gain of the hybrid can exceed the gain in a classical travelling wave tube with the same parameters and the same total length of the device in the linear mode of operation. In the nonlinear mode of operation, the specified hybrid, with optimal environmental parameters, can have significantly higher values of output power and efficiency than travelling wave tube with the same value of the space charge parameter and the Pierce parameter.

Keywords: resistive wall amplifier, metamaterial, travelling wave tube.

Acknowledgements. The author is grateful to associate professor V. N. Titov for valuable advice and discussion of the results.

For citation: Funtov AA. About theory of hybride TWTO and an amplifire with a complex permittivity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(4):452–468. DOI: 10.18500/0869-6632-003050

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Вопросы улучшения выходных параметров за счет применения метаматериалов важны для вакуумной СВЧ-электроники и ускорителей [1]. Также работы, посвященные различным вариантам и модификациям замедляющих систем (ЗС) в ЛБВ (в том числе и с метаматериалами), по-прежнему остаются актуальными и востребованными.

Например, как показано в работе [2], можно нагрузить ЗС ЛБВ метаматериалом с отрицательной диэлектрической проницаемостью. Численный эксперимент проводился на частоте 48 ГГц при постоянном токе 200 мА и радиусе пучка, равном половине радиуса области, в которой движется электронный поток. Показано, что при исследуемых параметрах в нагруженной ЛБВ возможен коэффициент усиления, равный 29 дБ, что существенно превышает усиление в ненагруженной ЛБВ.

С другой стороны, можно сделать метаматериал из ЗС. В работе [3] смоделирован ЛБВ-усилитель, работающий на частоте 92 ГГц, на основе планарной замедляющей структуры, являющейся метаматериалом из меандров. В модели использовался цилиндрический электронный

поток с ускоряющим потенциалом 16 кВ и током 60 мА, использовалось магнитное поле с индукцией 0.35 Тл. Численный эксперимент показал, что максимальный коэффициент усиления при рассматриваемых параметрах равен 36.4 дБ, а в полосе пропускания 5 ГГц — 30 дБ. На частоте 92 ГГц зафиксирована выходная мощность 17.4 Вт.

В настоящей работе предлагается гибридный ЛБВ с усилителем с комплексной диэлектрической проницаемостью (в дальнейшем КДП)¹. Как известно по классической теории резистивного усилителя [4–6], ему необходимы модулирующее и съемное устройства. В первых экспериментах для этого использовались и резонаторы, и отрезки спирали [5]. Смысл вставки с КДП состоит в улучшении группировки за счет взаимодействия пучка с полями наведенного заряда в среде.

Насколько известно, не было попыток построения указанного гибрида. Ранее (в том числе и автором настоящей работы) рассматривался резистивный усилитель с модулирующим и съемным устройством в виде отрезков спирали в приближении заданного поля на модуляторе и заданного тока на съемнике (результаты не опубликованы). Показано, что если среда обладает активной или индуктивной проводимостью, то коэффициент усиления значительно больше, чем для вакуумной трубы дрейфа. Кроме того, неизвестно о попытках создания нелинейной теории резистивного усилителя с отрезками спирали в качестве модулирующего и съемного устройств.

Цель настоящей работы — построение теории гибрида ЛБВ и КДП-усилителя (ЛБВ – среда с КДП – ЛБВ)², а также приближенной нелинейной теории на основе модифицированного волнового метода Овчарова–Солнцева.

1. Классическая линейная теория

Прежде всего построим классическую линейную теорию гибрида ЛБВ и резистивного усилителя. Используем следующую модель: ионнокомпенсированный одномерный электронный поток пронизывает входную ЛБВ-секцию, затем влетает в среду с КДП, а далее попадает в выходную ЛБВ-секцию. Предполагаем, что первая ЛБВ играет роль модулятора и может работать в срыве Компфнера. Вторая ЛБВ работает в обычном режиме. Полагаем, что характеристики ЛБВ-секций, если не указано иначе, одинаковы.

Заметим, что для КДП-секции, в которой отсутствует ЗС, а следовательно, и ВЧ-поле в ней, вводить координату и параметр пространственного заряда (ПЗ) привычным для ЛБВ образом³ не представляется удобным, поэтому используется следующая нормировка: $F(\xi) = E(x) e^{j\beta_e x} / (2\beta_e V_0)$ — безразмерная амплитуда поля в ЗС (E — размерная напряженность электрического поля), $C = \sqrt[3]{I_0 K / (4V_0)}$ — параметр усиления Пирса, I_0 — средний ток пучка, K — сопротивление связи ЗС, V_0 — ускоряющее напряжение, $\beta_e = \omega / v_0$, ω — рабочая частота, v_0 — средняя скорость пучка, $N = \beta_e x / (2\pi)$, $\xi = 2\pi CN / C = \beta_e x$, $\omega_p^2 = e\rho_0 / (m\epsilon_0)$ — квадрат плазменной частоты, ρ_0 — средняя плотность заряда в пучке, $j = \sqrt{-1}$, $b = (v_0 - v_f) / v_{ph}$ — параметр рассинхронизма, v_{ph} — фазовая скорость волны в ЗС без пучка, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, e/m — удельный заряд электрона, $q = (\omega_p / \omega)^2$ — параметр ПЗ.

Так как ЗС отсутствует в КДП-секции, будем применять метод дисперсионного уравнения для расчета возмущения тока. В качестве начальных условий на вторую и третью секции выступает ток и его производная в конце предыдущей. Предполагаем, что в первую ЛБВ влетает

¹Заметим, что усилитель с комплексной диэлектрической проницаемостью является одним из вариантов хорошо известного резистивного усилителя.

²Электронный поток пронизывает входную ЛБВ-секцию, затем влетает в среду с КДП, а далее попадает в выходную ЛБВ-секцию.

³То есть с параметром Пирса.

немодулированный пучок и на неё подают входной сигнал. Во второй ЛБВ, кроме условия на ток, добавляется равенство нулю начального возмущения напряженности электрического поля.

При малом параметре усиления $C \ll 1$ и при отсутствии распределенных потерь в ЗС в первой ЛБВ-секции (в нормировке настоящей работы) поле в ЗС определяется следующим выражением [7]:

$$F = F_0 \left[\frac{(\delta_1^2 + q) e^{\xi \delta_1}}{(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 - \delta_3)} + \frac{(\delta_2^2 + q) e^{\xi \delta_2}}{(\delta_2 - \delta_3)(\delta_2 - \delta_1)} + \frac{(\delta_3^2 + q) e^{\xi \delta_3}}{(\delta_3 - \delta_1)(\delta_3 - \delta_2)} \right], \quad (1)$$

где F_0 – входной сигнал, δ_i – корни нормированного дисперсионного уравнения

$$(\delta + jb)(\delta^2 + q) = -j(1 + b)^2 C^3, \quad (2)$$

поскольку корни ненормированного дисперсионного уравнения имеют вид $\beta_e(1 + j\delta)$. Заметим, что такой вид δ_i , q и b позволяет не только исключить влияние параметра Пирса C на параметры рассинхронизма и ПЗ, но и упрощает последующие выкладки, сохраняя близкий к привычной записи вид выражений. Чтобы получить привычные значения параметров ПЗ и рассинхронизма, q и b в настоящей нормировке нужно разделить на C^2 и C , соответственно. Переменный, нормированный на $I_0 e^{-j\beta_e x}$ ток в начале КДП-секции найдем из

$$I(0) = jF_0 \left[\frac{e^{l_1 \delta_1}}{(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 - \delta_3)} + \frac{e^{l_1 \delta_2}}{(\delta_2 - \delta_3)(\delta_2 - \delta_1)} + \frac{e^{l_1 \delta_3}}{(\delta_3 - \delta_1)(\delta_3 - \delta_2)} \right], \quad (3)$$

где l_1 – нормированная длина 1-й ЛБВ.

Из линейной теории резистивного усилителя [6] для переменного тока в КДП-секции справедливо выражение

$$I(\xi) = \frac{1}{j(\psi_1 - \psi_2)} \left[- (I'(l_1) + j\psi_2 I(l_1)) e^{-j\psi_1(\xi - l_1)} + (I'(l_1) + j\psi_1 I(l_1)) e^{-j\psi_2(\xi - l_1)} \right], \quad (4)$$

где $\psi_{1,2} = \pm \sqrt{q/\varepsilon}$ – нормированные корни соответствующего дисперсионного уравнения с учетом введенной нормировки тока.

Для расчета КДП воспользуемся моделью Друде

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pM}^2}{\omega(\omega + j\gamma)}, \quad (5)$$

где ω_{pM}^2 – квадрат плазменной частоты среды/метаматериала, γ – коэффициент затухания. Если ввести $\Gamma = \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2$ и $s = \left(\frac{\omega_{pM}}{\omega}\right)^2$, то КДП можно записать в виде

$$\varepsilon = 1 - \frac{s}{1 + j\Gamma}. \quad (6)$$

Для второй ЛБВ-секции амплитуды парциальных волн тока находятся с помощью решения системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \delta_1^2 + q & \delta_2^2 + q & \delta_3^2 + q \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} I(0)_p \\ I'(0)_p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

методом Крамера, где $I(0)_p$, $I'(0)_p$ — ток и его производная на выходе КДП-секции, получаемые из уравнения (4), а индекс « p » обозначает 2-ю ЛБВ. Третье уравнение (фактически это уравнение сгруппированного тока) соответствует отсутствию входного сигнала во 2-й ЛБВ.

Коэффициент усиления будем определять как

$$G = 20 \lg \left| \frac{F}{F_0} \right| = 20 \lg \left| \frac{1}{jF_0} \left(qI(l_2)_p + \frac{d^2 I(l_2)_p}{d\xi^2} \right) \right|, \quad (8)$$

где l_2 — нормированная длина 2-й ЛБВ.

Введем величины h_1 и h_2 — координаты начала и конца КДП-секции в долях от полной длины гибрида. Например, если $h_1 = 0.15$, $h_2 = 0.6$, то входная ЛБВ занимает первые 15% полной длины ($l_1 = 0.15\beta_e x$, где x — длина гибрида), КДП-секция $h_2 - h_1 = 0.45$, то есть 45% полной длины, а выходная ЛБВ — оставшиеся 40% ($l_2 = 0.4\beta_e x$).

В качестве опорных возьмем параметры из статьи [9], в которой приводятся данные натурального эксперимента для ЛБВ с частотой 220 ГГц, током 52.4 мА, ускоряющим потенциалом 20.5 кВ, сопротивлением связи 1.6 Ом (и соответственно $C = 0.01$), длиной ЗС (без учета длины поглотителя) — 53 мм и радиусом пролетного канала 0.12 мм. С учетом геометрии ЗС (петляющего волновода) $CN = 1.44$.

Сравним три варианта: 1 — классическая ЛБВ без разрыва и локального поглотителя; 2 — указанный гибрид (ЛБВ – КДП – ЛБВ); 3 — ЛБВ с разрывом — вакуумным промежутком дрейфа, имеющим ту же длину и положение, что среда с КДП в гибриде ЛБВ – КДП – ЛБВ. Предполагаем, что все они имеют одинаковую полную длину⁴. Такое сравнение позволит уточнить и разделить влияние секции дрейфа и влияние среды с КДП на происходящие процессы. По умолчанию будем использовать следующие границы КДП-секции $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.85$.

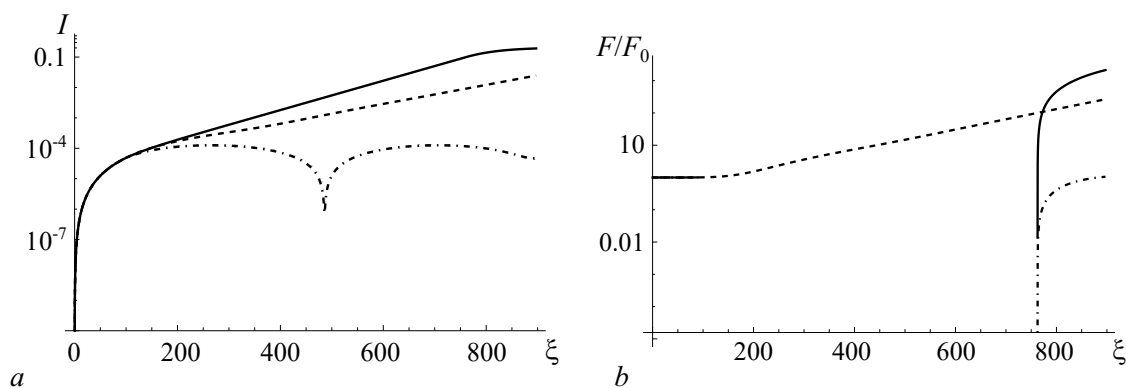


Рис. 1. Зависимости (в логарифмическом масштабе) нормированного тока (а) и отношения поля к входному сигналу (b) от нормированной координаты. Здесь и далее: сплошная — гибрид, пунктир — ЛБВ, штрих-пунктир — ЛБВ с разрывом. При $b = b_1 = 0$, $q = 5 \cdot 10^{-5}$, $F_0 = 10^{-8}$, $s = 1.4$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$

Fig. 1. Dependences (on a logarithmic scale) of the normalized current (a) and the ratio of the field to the input signal (b) on the normalized coordinate. Here and below: solid line — hybrid, dotted line — travelling wave tube (TWT), dash-dotted line — TWT with a break. At $b = b_1 = 0$, $q = 5 \cdot 10^{-5}$, $F_0 = 10^{-8}$, $s = 1.4$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$

Отметим, что на рис. 1 отчетливо видны границы секций. Кроме того, видно, как в них меняется группировка электронов. Напомним, что в ЛБВ с разрывом на участке без ЗС группировка при малом ПЗ обеспечивается только баллистическим эффектом, как в пространстве дрейфа клистрона, а потому следует ожидать периодичность изменения тока.

⁴Полной длиной считаем расстояние от входа 1-й секции до выхода 3-й.

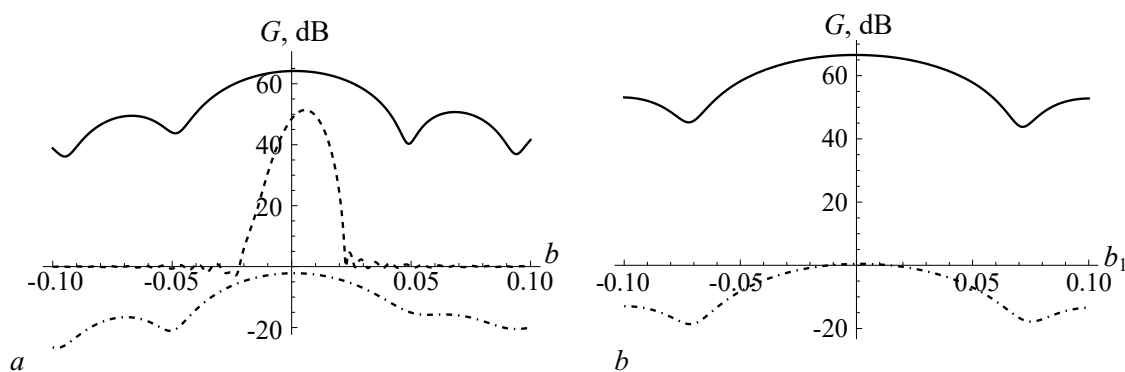


Рис. 2. Зависимости усиления G от параметра рассинхронизма 2-й секции⁵ при 1-й секции, работающей в режиме подавления $b_1 = -0.029$ (а), и при $b = 0$ от параметра рассинхронизма 1-й секции (б); $q = 5 \cdot 10^{-5}$, $F_0 = 10^{-8}$, $s = 1.4$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$

Fig. 2. Dependences of G on the desynchronism parameter of the 2nd section⁵ with the 1st section operating in the suppression mode $b_1 = -0.029$ (a), and at $b = 0$ on the desynchronism parameter of the 1st section (b); at $q = 5 \cdot 10^{-5}$, $F_0 = 10^{-8}$, $s = 1.4$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$

Из рис. 2 видно, что гибрид (как и ЛБВ с разрывом) слабо зависит от параметра рассинхронизма 2-й секции, а также что выигрыша в использовании подавления в 1-й секции не наблюдается. Это происходит потому, что при выбранной длине 1-й секции подавление мало (на уровне -0.8 дБ) и срыв Компфнера в этой секции при выбранных параметрах недостижим⁶. Также видно, что при выбранных параметрах G гибрида больше, чем у классической ЛБВ в оптимуме. В дальнейшем предполагаем, что параметры рассинхронизма обеих ЛБВ-секций одинаковы, то есть $b = b_1$.

Нужно отметить, что в работе [9] $G = 31.2$ дБ. Однако там рассматривается ЛБВ с локальным поглотителем, причем точно не указаны ни его длина, ни положение, а также не указаны величины, позволяющие вычислить параметр ПЗ. Кроме того, необходимая для расчетов длина не указана точно и выбранная величина — результат оценки данных статьи [9].

Как видно из рис. 3–4, есть условия зависимости оптимума от свойств КДП-секции. Как в линейной теории ЛБВ важно местоположение и длина локального поглотителя, так и для рассматриваемого гибрида важна КДП-секция. Из рис. 3 видно, что при малом q , когда преобладает конвективная неустойчивость в ЛБВ-секциях, наиболее важно сгруппировать пучок за счет увеличения доли первой ЛБВ (нижний правый угол на рис. 3, а). При увеличении q конвективная неустойчивость уступает главную роль резистивной неустойчивости, и появляется оптимум при достаточно длинной КДП-секции (левый верхний угол на рис. 3, б).

Таким образом, для малых ПЗ, для достижения оптимума почти половина длины должна приходиться на модулятор, столько же — на среду с КДП, и оставшаяся короткая область — на выходную ЛБВ. Для больших ПЗ — короткий модулятор, длинная область среды с КДП и короткая область выходной ЛБВ.

Одной из возможных реализаций КДП-секции является использование структуры из отрезков меандра, расположенных на одинаковом расстоянии между собой вдоль пучка (над и под ним)

⁵Для классической ЛБВ просто от параметра рассинхронизма / For a classical TWT, simply from the desynchronism parameter.

⁶Режимы эффективной модуляции электронного потока по скорости в первой секции, когда значительная часть энергии электромагнитной волны передается электронному потоку — не рассматривались, поскольку они требуют существенно большей длины секции модулятора.

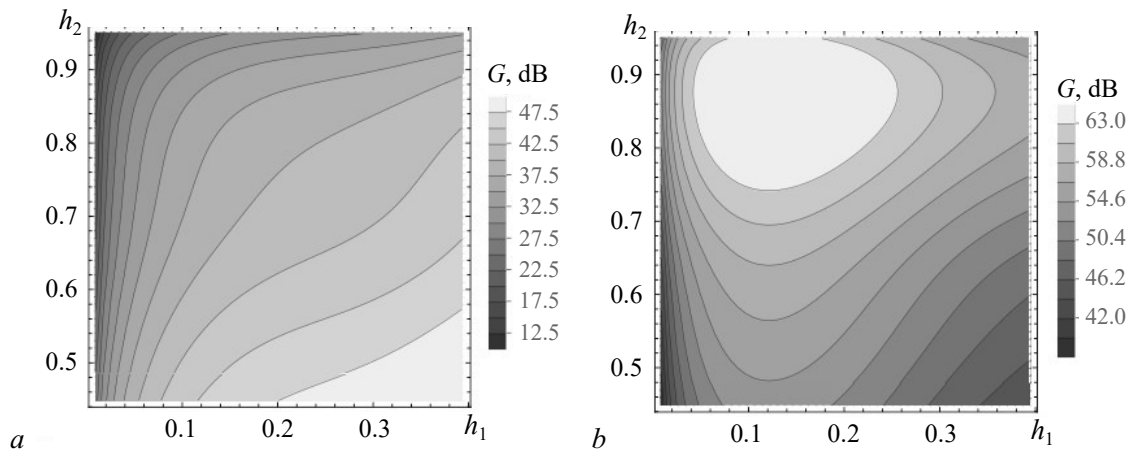


Рис. 3. Зависимости G от границ КДП-секции (a, b) и пример возможной реализации КДП-секции из отрезков меандров (из статьи [8]) (c). При $b = b_1 = 0$, $F_0 = 10^{-8}$, $s = 1.4$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$; $q = 10^{-5}$ (a), $q = 5 \cdot 10^{-5}$ (b)

Fig. 3. Dependences of G on the boundaries of the CP⁷ section (a, b) and an example of a possible implementation of the CP section from meander segments (from [8]) (c). At $b = b_1 = 0$, $F_0 = 10^{-8}$, $s = 1.4$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$; $q = 10^{-5}$ (a), $q = 5 \cdot 10^{-5}$ (b)

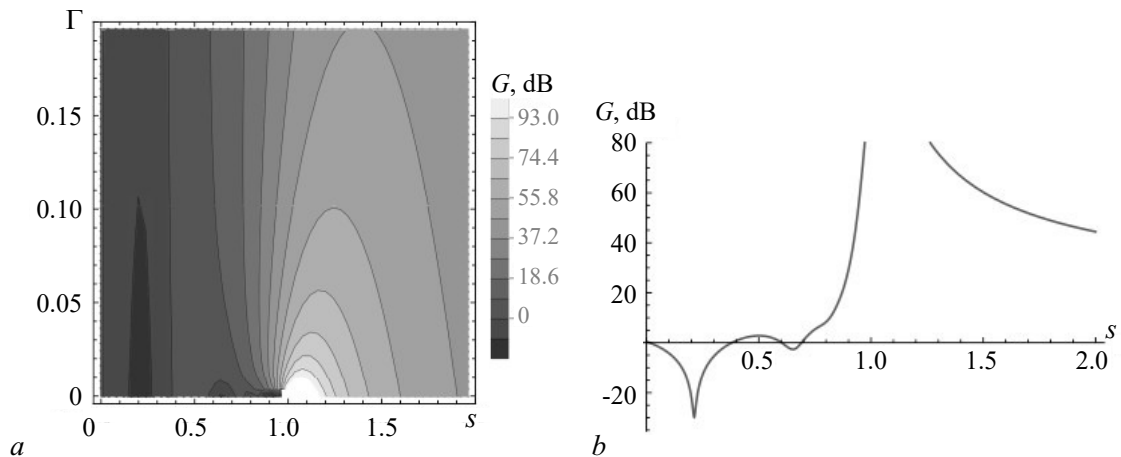
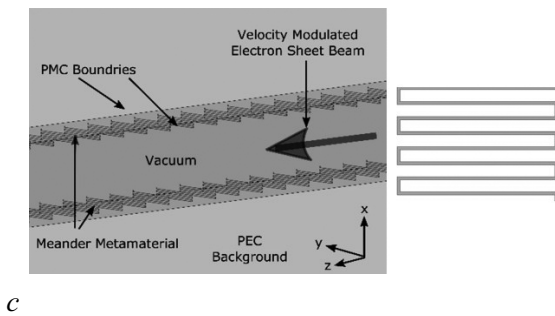


Рис. 4. Зависимости G от свойств КДП-секции (a, b) и зависимость тока от длины (c) при $b = b_1 = 0$, $q = 5 \cdot 10^{-5}$, $F_0 = 10^{-8}$; $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$ (b, c); $s = 0.212$ (c)

Fig. 4. Dependences of G on the properties of the CP section (a, b) and dependence of the current on the length (c) at $b = b_1 = 0$, $q = 5 \cdot 10^{-5}$, $F_0 = 10^{-8}$; $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$ (b, c); $s = 0.212$ (c)

⁷Complex permittivity.

и ориентированных перпендикулярно пучку [8] (рис. 3, *c*). В случае правильно подобранного расстояния между меандрами, а также их размеров, пучок «видит» среду с отрицательной действительной частью эффективной КДП. В случае рис. 3, *c* входная ЛБВ-секция должна располагаться справа, а выходная слева. Проблема корректного соединения секций может являться достаточно непростой, но технически выполнимой задачей, а потому выходит за рамки настоящей работы и рассматриваться не будет.

Из рис. 4 видно влияние свойств среды на коэффициент усиления. Наибольшее значение коэффициента усиления, как и следовало ожидать, наблюдается вблизи резонанса $s = 1$ при достаточно малом Γ . Этот резонанс, как и в теории резистивного усилителя, можно объяснить (по аналогии с [10]) следующим: токи смещения и индуктивные токи в среде становятся равными друг другу по величине, а наведенный заряд стремится к бесконечности. Область большего коэффициента усиления при $s > 1$ можно в этом случае объяснить тем, что силы ПЗ в пучке и силы, создаваемые наведенным зарядом, оказываются в противоположных фазах, что приводит к улучшению условий группировки электронов в пучке. А область меньшего коэффициента усиления при $s < 1$ — тем, что напряженность электрического поля, создаваемого наведенным зарядом, складывается в фазе с силами ПЗ в пучке. В результате увеличивается продольное расталкивание электронов и усиление волны пространственного заряда оказывается невозможным.

Кроме того, при некоторых Γ и s появляется зона подавления (см., например, рис. 4, *b*). В этой зоне среда не является метаматериалом и обладает действительной частью ϵ , близкой к единице. С изменением CN и q координаты подавления и его глубина меняются. Из рис. 4, *c* видно, что при выбранных параметрах в зоне подавления гибрид демонстрирует поведение, схожее с ЛБВ с разрывом (подобно баллистическому эффекту), и группировка значительно хуже, чем в случае метаматериала, и сравнима с группировкой в вакуумном пространстве дрейфа. Таким образом, этот эффект не объясняется только влиянием параметра затухания в среде Γ . В этой зоне, по-видимому, в среде ухудшается группировка из-за продольного расталкивания электронов.

Из рис. 5 видно, что при малом ПЗ коэффициент усиления классической ЛБВ вблизи $b = 0$ превосходит коэффициент усиления гибрида, а по мере увеличения параметра ПЗ, наоборот. Из этого можно сделать вывод, что в гибриде действуют две неустойчивости, свойственные ЛБВ и КДП, причем при малом ПЗ преобладает конвективная неустойчивость в ЛБВ-секциях.

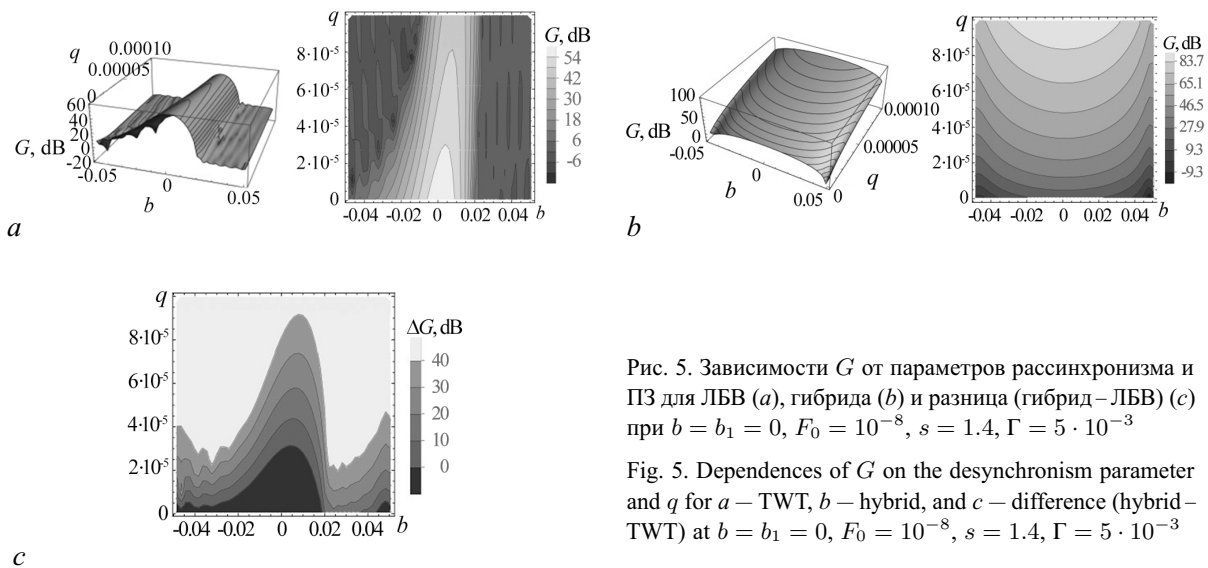


Рис. 5. Зависимости G от параметров рассинхронизма и ПЗ для ЛБВ (*a*), гибрида (*b*) и разницы (гибрид – ЛБВ) (*c*) при $b = b_1 = 0$, $F_0 = 10^{-8}$, $s = 1.4$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$

Fig. 5. Dependences of G on the desynchronism parameter and q for *a* – TWT, *b* – hybrid, and *c* – difference (hybrid – TWT) at $b = b_1 = 0$, $F_0 = 10^{-8}$, $s = 1.4$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$

Наличие среды с КДП, как видно из рис. 5, делает прибор менее чувствительным к параметру рассинхронизма (область положительного G с ростом b увеличивается). Также видно, что в области сравнительно малого рассинхронизма коэффициент усиления в ЛБВ больше чем у гибрида, а область, где коэффициент усиления больше у гибрида, увеличивается с ростом q .

2. Модификация волнового метода Овчарова–Солнцева

В этом разделе исследуем ту же модель, что и в разделе 1: ионнокомпенсированный одномерный электронный поток пронизывает входную ЛБВ-секцию, затем влетает в среду с КДП, а далее попадает в выходную ЛБВ-секцию. Считаем, что на все электроны данного поперечного сечения пучка действует одинаковое усредненное по сечению электрическое поле, и что движение электронов однонаправленное. Кроме того, предполагается, что модуляция электронов по скорости мала, однако никаких ограничений на глубину модуляции потока электронов по току и плотности не накладываемся. Полагаем, что характеристики ЛБВ-секций (за исключением длины) одинаковы.

Следуя методике работы [11], в качестве исходных используем следующие нелинейные уравнения ЛБВ в переменных Лагранжа с учетом введённой ранее нормировки:

$$-\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \operatorname{Re} \left[F e^{j(\omega t_0 + \theta)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j p_n^2}{n} q I_n e^{jn(\omega t_0 + \theta)} \right], \quad (9)$$

$$\frac{dF}{d\xi} + j b F = -(1 + b)^2 C^3 I_1, \quad (10)$$

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jn(\omega t_0 + \theta)} d(\omega t_0), \quad (11)$$

где $\theta(\xi, t_0)$ – возмущение угла пролета электронов под действием поля, $p_n^2 = n^2/(n^2 + k^2)$, $k = 2/(\beta_e r)$ – нормированный обратный радиус пучка (r – соответственно размерный радиус пучка), t_0 – время влета электронов в пространство взаимодействия, I_n – нормированная амплитуда n -й гармоники тока.

Представим возмущение угла пролета электронов под действием поля в виде ряда Фурье:

$$\theta = \frac{\theta_0(\xi)}{2} + \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m e^{jm\omega t_0}, \quad (12)$$

где $\theta_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \theta(x, t_0) e^{-jm\omega t_0} d(\omega t_0)$. Умножим (9) на $\frac{1}{\pi} e^{-jm\omega t_0}$ и проинтегрируем по t_0 от 0 до 2π , тогда с учетом (12) получим:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[F e^{j(\omega t_0 + \theta)} \right] e^{-jm\omega t_0} d(\omega t_0) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j p_n^2}{n} q I_n e^{jn(\omega t_0 + \theta)} \right] e^{-jm\omega t_0} d(\omega t_0). \end{aligned} \quad (13)$$

Для приближенного вычисления интегралов ограничимся 1-м членом в уравнении (12) и введем

$$\theta = \frac{\theta_0}{2} + \operatorname{Re} [B e^{j\omega t_0}]. \quad (14)$$

Тогда в уравнении (11) получим

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jn\left(\omega t_0 + \frac{\theta_0}{2} + \operatorname{Re}[Be^{j\omega t_0}]\right)} d(\omega t_0). \quad (15)$$

С использованием введенных ранее обозначений для $m = 0$ уравнение (13) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[F e^{j\left(\omega t_0 + \frac{\theta_0}{2} + \operatorname{Re}[Be^{j\omega t_0}]\right)} \right] d(\omega t_0) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} q \frac{p_n^2}{n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[j I_n e^{jn\left(\omega t_0 + \frac{\theta_0}{2} + \operatorname{Re}[Be^{j\omega t_0}]\right)} \right] d(\omega t_0). \end{aligned} \quad (16)$$

Для $m = 1$ уравнение (13) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[F e^{j\left(\omega t_0 + \frac{\theta_0}{2} + \operatorname{Re}[Be^{j\omega t_0}]\right)} \right] e^{-j\omega t_0} d(\omega t_0) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} q \frac{p_n^2}{n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[j I_n e^{jn\left(\omega t_0 + \frac{\theta_0}{2} + \operatorname{Re}[Be^{j\omega t_0}]\right)} \right] e^{-j\omega t_0} d(\omega t_0). \end{aligned} \quad (17)$$

Для КДП-секции, в которой отсутствует ЗС, а следовательно и ВЧ поле в ней, уменьшается количество основных уравнений: остается уравнение (15), а выражения для компонент угла пролета электронов принимают вид

$$-\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \xi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} q \frac{p_n^2}{n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{j}{\varepsilon} I_n e^{jn\left(\omega t_0 + \frac{\theta_0}{2} + \operatorname{Re}[Be^{j\omega t_0}]\right)} \right] d(\omega t_0), \quad (18)$$

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} q \frac{p_n^2}{n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{j}{\varepsilon} I_n e^{jn\left(\omega t_0 + \frac{\theta_0}{2} + \operatorname{Re}[Be^{j\omega t_0}]\right)} \right] e^{-j\omega t_0} d(\omega t_0). \quad (19)$$

С учетом разложения по временным гармоникам КДП примет вид

$$\varepsilon(n) = 1 - \frac{sM}{n(n + j\Gamma)}. \quad (20)$$

Если разложить B на модуль и фазу, то уравнение (15) примет вид

$$I_n = 2J_n(n|B|) e^{-jn\left(\frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arg} B\right)}. \quad (21)$$

А уравнения (16), (17) и (10) запишутся в виде

$$\frac{dF}{d\xi} + jbF = -(1+b)^2 C^3 2J_1(|B|) e^{j\left(\text{Arg}B - \frac{\theta_0}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \xi^2} = -J_1(|B|) 2 \operatorname{Re} \left(F e^{-j\left(\text{Arg}B - \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)} \right), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} = & - \left[F J_0(|B|) e^{j\frac{\theta_0}{2}} + F^* J_2(|B|) e^{-j\left(\frac{\theta_0}{2} - 2[\text{Arg}B - \frac{\pi}{2}]\right)} + \right. \\ & \left. + 2j \sum_{n=1}^{\infty} q J_n(n|B|) e^{jn\left(\text{Arg}B - \frac{\pi}{2}\right)} \frac{p_n^2}{n} (J_{n-1}(n|B|) - J_{n+1}(n|B|)) \right], \quad (24) \end{aligned}$$

где знаком «*» обозначается комплексное сопряжение. Уравнения (18) и (19) запишутся как

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \xi^2} = -2j \sum_{n=1}^{\infty} q \frac{p_n^2}{n} J_n^2(n|B|) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^*} \right), \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} = -2j \sum_{n=1}^{\infty} q \frac{p_n^2}{n} J_n(n|B|) e^{jn\left(\text{Arg}B - \frac{\pi}{2}\right)} \left(\frac{J_{n-1}(n|B|)}{\varepsilon(n)} - \frac{J_{n+1}(n|B|)}{\varepsilon^*(n)} \right). \quad (26)$$

Таким образом, ЛБВ-секции описывает система уравнений (22)–(24), а КДП-секцию — уравнения (25) и (26).

В качестве начальных условий для первой (входной) ЛБВ-секции возьмем

$$F(0) = F_0, \quad B(0) = 0, \quad \frac{dB(0)}{d\xi} = 0, \quad \theta_0(0) = 0. \quad (27)$$

Для КДП-секции начальными условиями будут

$$\frac{dB(0)}{d\xi} = \frac{dB}{d\xi} \Big|_{TWT_1}, \quad B(0) = B|_{TWT_1}, \quad \frac{d\theta_0(0)}{d\xi} = \frac{d\theta_0}{d\xi} \Big|_{TWT_1}, \quad \theta_0(0) = \theta_0|_{TWT_1}. \quad (28)$$

Начальные условия во второй (выходной) ЛБВ-секции примут вид

$$\frac{dB(0)}{d\xi} = \frac{dB}{d\xi} \Big|_{CP_1}, \quad B(0) = B|_{CP_1}, \quad \frac{d\theta_0(0)}{d\xi} = \frac{d\theta_0}{d\xi} \Big|_{CP_1}, \quad \theta_0(0) = \theta_0|_{CP_1}, \quad F(0) = 0. \quad (29)$$

Коэффициент усиления будем искать по формуле

$$G = 20 \lg \left| \frac{F}{F_0} \right|. \quad (30)$$

При выбранных параметрах результаты, полученные волновым методом при слабом сигнале, показывают хорошее соответствие результатам линейной теории в довольно большой области параметров со следующими особенностями. В зависимости коэффициента усиления от границ КДП-секции в отличие от рис. 3 в нелинейной теории оптимумы проступают отчетливее и смещены к соответствующим углам. Также зависимости коэффициента усиления от параметра рассинхронизма хорошо совпадают в обеих теориях при $|b| < 0.03^8$. При $|b| > 0.03$, по-видимому, проявляются особенности волнового метода, а точнее, границы его применимости из-за отброшенных членов. Возможно, здесь происходит нарушение баланса между торможением всего пучка и движением частиц в пучке.

⁸Заметим, что это значение параметра рассинхронизма в обычной для ЛБВ нормировке равно 2.98.

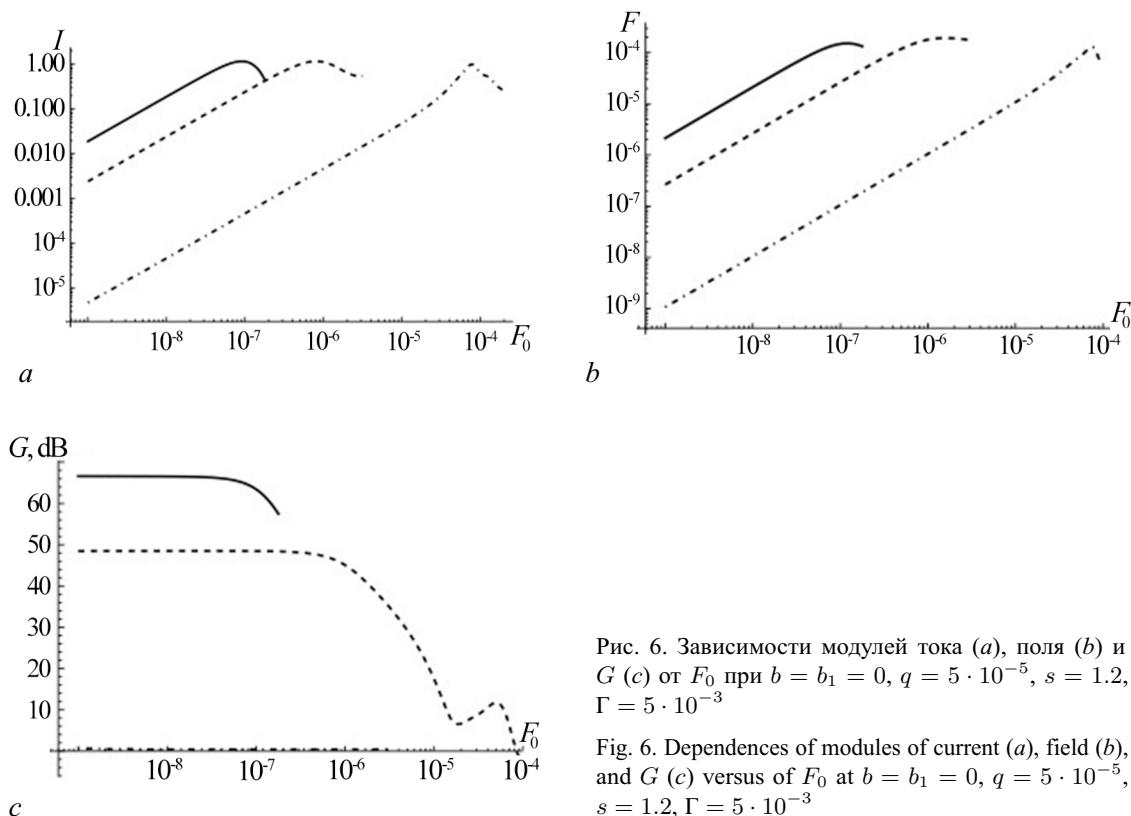


Рис. 6. Зависимости модулей тока (а), поля (b) и G (с) от F_0 при $b = b_1 = 0$, $q = 5 \cdot 10^{-5}$, $s = 1.2$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$

Fig. 6. Dependences of modules of current (a), field (b), and G (c) versus of F_0 at $b = b_1 = 0$, $q = 5 \cdot 10^{-5}$, $s = 1.2$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$

Из рис. 6 видно, что у гибрида лучшая группировка — значение параметра B , соответствующее максимуму тока, достигается при меньшей входной мощности, причем коэффициент усиления гибрида значительно выше, чем у ЛБВ. Для ЛБВ с разрывом из-за малой длины модулятора электроны не успели достаточно изменить свою скорость относительно волны и потому коэффициент усиления пренебрежимо мал по сравнению с остальными случаями, и в дальнейшем ЛБВ с разрывом рассматривать не будем. Из графиков также видна граница применимости метода, то есть когда все гармоники кроме первой можно отбросить, а именно пока ток не превысит 1.16 — значение, обусловленное свойствами функции Бесселя, и поэтому зависимости за этим значением не рассматриваются.

3. Стационарная нелинейная теория (метод крупных частиц)

Рассмотрим результаты стационарной нелинейной теории для гибрида ЛБВ–КДП–ЛБВ, полученной методом крупных частиц, и сравним их с приведенными ранее. В ЛБВ-секции используем аппроксимацию коэффициента редукции [12] и основные уравнения из [13], которые примут вид для n -й частицы:

$$\frac{\partial^2 \theta_n}{\partial \zeta^2} = -(2\pi N)^2 \left(1 + \frac{1}{2\pi N} \frac{\partial \theta_n}{\partial \zeta}\right)^3 \operatorname{Re} \left[F e^{j\theta_n} + jq \sum_{m=1}^M \frac{R_m e^{jm\theta_n}}{m} \left(\sum_n^{N_p} \frac{2e^{-jm\theta_n}}{N_p} \right) \right], \quad (31)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} + 2j\pi N b F = -2C^3 N \sum_n^{N_p} \frac{2\pi}{N_p} e^{-jm\theta_n}, \quad (32)$$

где $\zeta = x/l$, l — длина пространства взаимодействия в метрах, N_p — число крупных частиц, M — число исследуемых гармоник, R_n — фактор редукции. Для всех представленных результатов $N_p = 64$, $M = 7$.

Для КДП-секции уравнение движения n -й частицы примет вид

$$\frac{\partial^2 \theta_n}{\partial \zeta^2} = -(2\pi N)^2 \left(1 + \frac{1}{2\pi N} \frac{\partial \theta_n}{\partial \zeta} \right)^3 \operatorname{Re} \left[jq \sum_{m=1}^M \frac{R_m e^{jm\theta_n}}{m\varepsilon(m)} \left(\sum_n^{N_p} \frac{2e^{-jm\theta_n}}{N_p} \right) \right]. \quad (33)$$

В качестве граничных условий считаем, что θ и $\partial\theta/\partial\zeta$ непрерывны на концах секций, а на входе во вторую ЛБВ-секцию ВЧ-поле в ЗС отсутствует.

В настоящей работе, в основном, исследовался бесконечно широкий пучок. Для учета конечности заполнения необходимо R_n рассчитывать по формуле [13]

$$R_n = \left(1 + \frac{7.5214(r/a)^2 - 4.3178(r/a) + 2.4895}{n^2 \beta_e^2 r^2} \right)^{-1}, \quad (34)$$

где a — радиус пролетного канала.

При слабом сигнале результаты по методу крупных частиц хорошо совпадают с представленными выше, а потому не приводятся. Большой интерес представляет анализ гибрида для сравнительно больших сигналов.

Необходимо отметить, что группировка электронов (в том числе и в гибриде), предсказываемая волновым методом и методом крупных частиц, существенно отличается. Пока группировка сравнительно мала, предсказываемые этими методами токи первой гармоники совпадают, однако с увеличением входного сигнала, как видно из рис. 7, начинаются заметные различия: отличаются количество и «место» формирования сгустков. Кроме того, ближе к выходу ток первой гармоники, предсказываемый методом крупных частиц, превышает расчеты по волновому методу. Таким образом, несмотря на то, что волновой метод и метод крупных частиц описывают существенно разную группировку в исследуемой модели, «интегрально» (то есть по току первой гармоники и, следовательно, коэффициенту усиления) они (как будет показано ниже) показывают неплохое соответствие в достаточно широкой области параметров.

На рис. 8 изображены результаты по обоим рассматриваемым методам и их разница. Видно, что при сравнительно больших входных сигналах в рассматриваемом диапазоне есть четкий

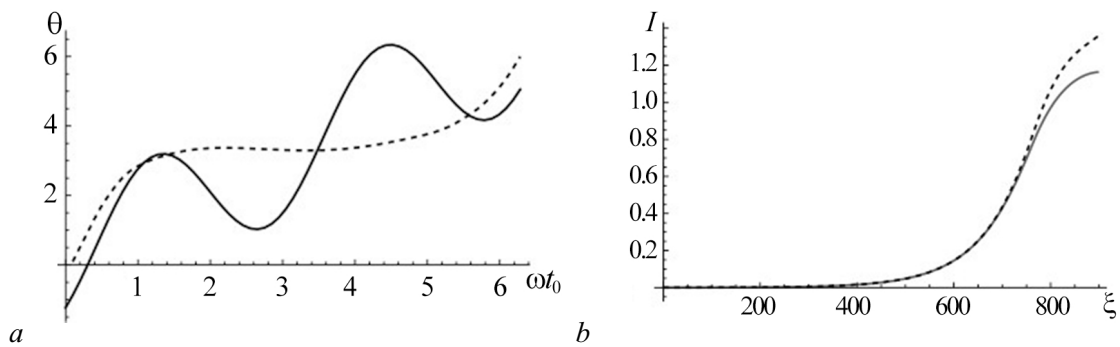


Рис. 7. Зависимость возмущения угла пролета от начальной фазы в гибриде (а) и распределение 1-й гармоники тока на полной длине гибрида (b) при $F_0 = 8.9 \cdot 10^{-8}$, $s = 1.4$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$, $q = 5 \cdot 10^{-5}$, $b = 0$. Сплошная линия построена по волновому методу, пунктирная — по методу крупных частиц

Fig. 7. Dependence of the transit angle perturbation on the initial phase in the hybrid (a) and distribution of the 1st harmonic of the current over the full length of the hybrid (b) at $F_0 = 8.9 \cdot 10^{-8}$, $s = 1.4$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$, $q = 5 \cdot 10^{-5}$, $b = 0$. Solid line is based on the wave method, the dotted line is based on the large particle method

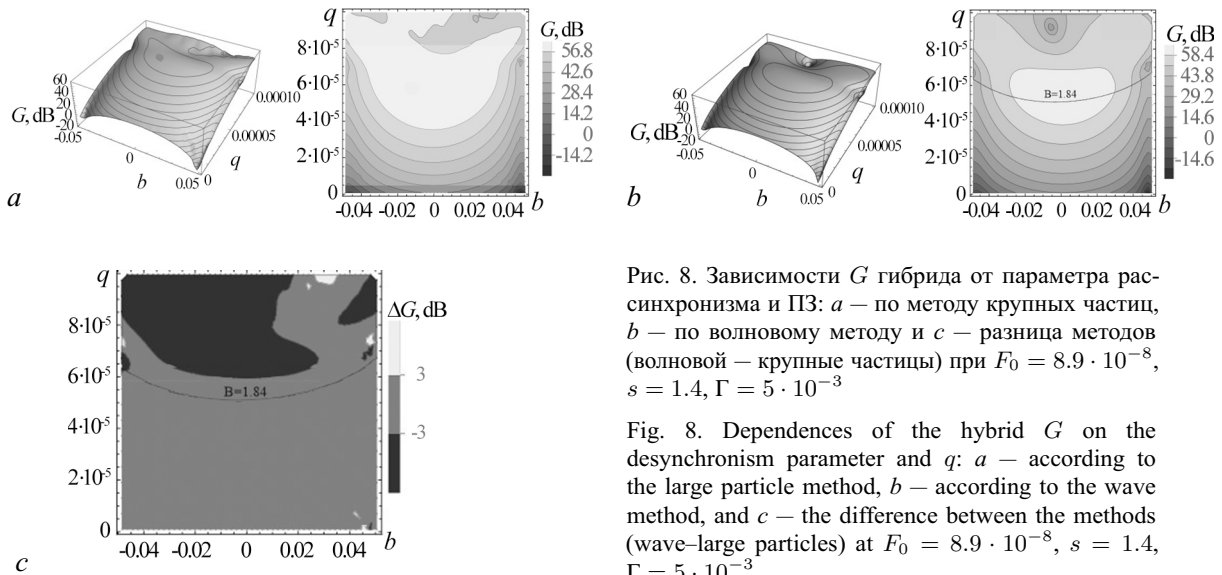


Рис. 8. Зависимости G гибрида от параметра рас- синхронизма и ПЗ: a – по методу крупных частиц, b – по волновому методу и c – разница методов (волновой – крупные частицы) при $F_0 = 8.9 \cdot 10^{-8}$, $s = 1.4$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$

Fig. 8. Dependences of the hybrid G on the desynchronism parameter and q : a – according to the large particle method, b – according to the wave method, and c – the difference between the methods (wave–large particles) at $F_0 = 8.9 \cdot 10^{-8}$, $s = 1.4$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$

оптимум, положение и значения G в котором довольно непротиворечиво описывают оба метода. Следовательно, можно предположить, что ему способствует в основном 1-я гармоника. Также с увеличением ПЗ оба метода предсказывают область заметного ухудшения группировки (которая наступает, когда в волновом методе $B > 1.84$, то есть за первым максимумом 1-й гармоники тока), однако указывают разное её местоположение. Можно предположить, что там начинают ощутимо влиять высшие гармоники и волновой метод вышел за пределы допущений. Таким образом, волновой метод позволяет оценить границы области, где учета только 1-й гармоники недостаточно.

Приведем оценки выходных параметров гибрида и ЛБВ в случае бесконечно широкого пучка и при конечном полном заполнении пролетного канала. Выходную мощность и электронный КПД вычислим с учетом введенной нормировки по формулам [14]

$$P_{\text{out}} = I_0 V_0 \frac{|F|^2}{2^3} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{|F|^2}{2^3}. \quad (35)$$

Как видно из табл. 1, при выбранных (сравнительно грубых) методах учета конечности заполнения пучка, рассмотренном в случае полного заполнения, гибрид показывает сравнимые

Таблица 1. Коэффициент усиления (в линейном режиме) для гибрида и ЛБВ. Обозначения соответствуют: ∞ – бесконечно широкому пучку, 1 – полному заполнению пролетного канала при $F_0 = 10^{-8}$, $q = 5 \cdot 10^{-5}$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$, $s = 1.4$, $b = 0$

Table 1. Gain factor (in linear mode) for hybrid and TWT. The designations correspond to: ∞ – infinitely wide beam, 1 – full filling of the span channel at $F_0 = 10^{-8}$, $q = 5 \cdot 10^{-5}$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$, $s = 1.4$, $b = 0$

	G , дБ	
	∞	1
Модификация волнового метода		
ЛБВ	48.5	53.6
Гибрид	66.5	48.8
Модификация волнового метода		
ЛБВ	48.5	48.7
Гибрид	66.5	66.4

выходные характеристики (G , мощность и КПД) с классической ЛБВ, причем вблизи, а не в резонансе рабочей частоты с частотой метаматериала. Незначительное (против волнового метода) уменьшение коэффициента усиления по методу крупных частиц может также объясняться вкладом высших гармоник.

Конечно, учет неполного заполнения, чаще используемого в современных СВЧ-приборах, также внесет свою лепту, однако и у реальных ЛБВ изменяются параметры за счет локального поглотителя, который в вышеприведенных расчетах не учитывался. Также не следует забывать, что для всех иных частот, не совпадающих с узкой полосой резонансных свойств среды, метаматериал будет действовать как обычный для ЛБВ разрыв с вакуумным пространством дрейфа⁹.

В работе [9], параметры из которой были использованы для расчетов, в линейном режиме у ЛБВ на частоте 220 ГГц коэффициент усиления 31.2 дБ, а при входном сигнале 25 мВт выходная мощность 15 Вт, причем максимальная мощность 30 Вт достигалась на частоте 217 ГГц, а максимально достижимое КПД 2.79%. Ранее в расчетах локальный поглотитель в ЛБВ не учитывался. Оценка данных из статьи [9] показывает, что полная длина лампы с учетом поглотителя в CN увеличится до 1.58, а сам поглотитель в нормировке настоящей работы имеет координаты $h_1 = 0.328$, $h_2 = 0.42$. В табл. 2 приведены расчеты с параметрами, которые без учета омических потерь позволяют для ЛБВ получить схожую с описываемой в [9] выходную мощность. Локальный поглотитель учитывается как разрыв (то есть аналогично гибриду в случае $s = 0$).

Из табл. 2 можно заключить, что, во-первых, замена вакуумного дрейфа/разрыва на среду с КДП с сохранением длины и положения не приводит к значительному ухудшению выходных характеристик, но при правильно подобранной среде их можно улучшить. Во-вторых, подбором свойств среды, а также изменяя положение и длину КДП-секции, можно добиться существенного увеличения выходной мощности и КПД. Кроме того, что предлагаемый гибрид можно использовать в более широкой области по синхронизму¹⁰, сравнимые с ЛБВ выходные характеристики в гибриде можно получить при значительно меньшем входном сигнале, что может быть полезно, так как на сотнях гигагерц мощность генераторов (в первую очередь, полупроводниковых) сравнительно мала.

Таблица 2. Выходная мощность и электронный КПД для ЛБВ и гибрида, рассчитанные по методу крупных частиц, в случае полного заполнения пролетного канала при $F_0 = 3.53 \cdot 10^{-5}$ (25 мВт), $b = 2.4 \cdot 10^{-2}$, $q = 5.9 \cdot 10^{-5}$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$. Первой строкой приведены данные из [9]

Table 2. The output power and the electronic efficiency for TWT and hybrid, calculated by the method of large particles, in the case of full filling of the span channel at $F_0 = 3.53 \cdot 10^{-5}$ (25 mW), $b = 2.4 \cdot 10^{-2}$, $q = 5.9 \cdot 10^{-5}$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-3}$. The first line contains data from [9]

	P_{out} , Вт	η , %
ЛБВ из [9]	15	1.4 ¹¹
ЛБВ	14.98	1.33
Гибрид $s = 1.35$	17.02	1.52
Гибрид с оптимальными параметрами ¹²	75.22	6.94

⁹Напомним, что согласно [4–6], одно из преимуществ резистивного усилителя — в практически полном отсутствии обратной связи между выходом и входом.

¹⁰Уместно вспомнить, что в натурном эксперименте [4] резистивный усилитель показал слабую зависимость от ускоряющего потенциала пучка.

¹¹Данные для КПД на рассматриваемой частоте 220 ГГц не приводятся, поэтому значение 1.4% является экстраполяцией.

¹² $b = 0.02$, $s = 0.4$, $h_1 = 0.274$, $h_2 = 0.545$, длина, входной сигнал и ПЗ не менялись.

Заключение

По результатам настоящей работы можно сделать следующие выводы.

1. При определенных параметрах нелинейная теория, полученная модифицированным волновым методом Овчарова–Солнцева, позволяет получить результаты сопоставимые как с результатами нелинейной стационарной теории, полученной методом крупных частиц, так и с результатами линейной теории как в случае классической ЛБВ, так и для исследуемого гибрида. Этот факт говорит о её достоверности, а также позволяет оценить область доминирования первой гармоники.
2. В нелинейной теории по модифицированному волновому методу Овчарова–Солнцева сделано допущение о характере группировки. Этим объясняются различия в результатах при некоторых параметрах с нелинейной стационарной теорией по методу крупных частиц. В остальных случаях наблюдается хорошее совпадение.
3. За счет резистивной неустойчивости может заметно улучшаться группировка электронов. И, как следствие, коэффициент усиления гибрида может превышать коэффициент усиления классической ЛБВ (как с разрывом, так и без него).
4. В случае большого сигнала при рассматриваемых параметрах показано, что подбором свойств КДП-секции можно добиться существенного увеличения выходной мощности и КПД по сравнению с ЛБВ, и, как следствие, можно достигнуть сравнимых с ЛБВ значений мощности и КПД при меньшем входном сигнале.

Список литературы

1. *Duan Z., Shapiro M. A., Schamiloglu E., Behdad N., Gong Y., Booske J. H., Basu B. N., Temkin R. J.* Metamaterial-inspired vacuum electron devices and accelerators // *IEEE Transactions on Electron Devices*. 2019. Vol. 66, no. 1. P. 207–218. DOI: 10.1109/TED.2018.2878242.
2. *Rashidi A., Behdad N.* Metamaterial-enhanced traveling wave tubes // In: *IEEE International Vacuum Electronics Conference (IVEC)*. 22-24 April 2014, Monterey, CA, USA. New York: IEEE, 2014. P. 199–200. DOI: 10.1109/IVEC.2014.6857559.
3. *Ulisse G., Krozer V.* W-band traveling wave tube amplifier based on planar slow wave structure // *IEEE Electron Device Letters*. 2017. Vol. 38, no. 1. P. 126–129. DOI: 10.1109/LED.2016.2627602.
4. *Birdsall C. K., Brewer G. R., Haeff A. V.* The resistive-wall amplifier // *Proceedings of the IRE*. 1953. Vol. 41, no. 7. P. 865–875. DOI: 10.1109/JRPROC.1953.274425.
5. *Birdsall C. K., Whinnery J. R.* Waves in an electron stream with general admittance walls // *J. Appl. Phys.* 1953. Vol. 24, no. 3. P. 314–323. DOI: 10.1063/1.1721272.
6. *Лопухин В. М., Веденов А. А.* Усилитель на поглощении // *УФН*. 1954. Т. 53, № 1. С. 69–86. DOI: 10.3367/UFNr.0053.195405c.0069.
7. *Цейтлин М. Б., Кац А. М.* Лампа с бегущей волной. М.: Советское радио, 1964. 308 с.
8. *Rowe T., Behdad N., Booske J. H.* Metamaterial-enhanced resistive wall amplifier design using periodically spaced inductive meandered lines // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2016. Vol. 44, no. 10. P. 2476–2484. DOI: 10.1109/TPS.2016.2599144.
9. *Jiang Y., Lei W., Hu P., Song R., Ma G., Chen H., Jin X.* Demonstration of a 220-GHz continuous wave traveling wave tube // *IEEE Transactions on Electron Devices*. 2021. Vol. 68, no. 6. P. 3051–3055. DOI: 10.1109/TED.2021.3075922.
10. *Касаткин Л. В.* Об усилении волн пространственного заряда при прохождении пучков электронов в средах с индуктивной проводимостью // *Радиотехника и электроника*. 1961. Т. 6, № 2. С. 267–274.
11. *Овчаров В. Т., Солнцев В. А.* Упрощенные нелинейные уравнения лампы бегущей волны // *Радиотехника и электроника*. 1962. Т. 7, № 11. С. 1931–1940.
12. *Datta S. K., Kumar L.* Plasma frequency reduction factor // *Defence Science Journal*. 2008. Vol. 58, no. 6. P. 768–770. DOI: 10.14429/dsj.58.1705.

13. Branch G.M., Mihran T.G. Plasma frequency reduction factors in electron beams // IRE Transactions on Electron Devices. 1955. Vol. 2, no. 2. P. 3–11. DOI: 10.1109/T-ED.1955.14065.
14. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Советское радио, 1973. 399 с.

References

1. Duan Z, Shapiro MA, Schamiloglu E, Behdad N, Gong Y, Booske JH, Basu BN, Temkin RJ. Metamaterial-inspired vacuum electron devices and accelerators. IEEE Transactions on Electron Devices. 2019;66(1):207–218. DOI: 10.1109/TED.2018.2878242.
2. Rashidi A, Behdad N. Metamaterial-enhanced traveling wave tubes. In: IEEE International Vacuum Electronics Conference (IVEC). 22-24 April 2014, Monterey, CA, USA. New York: IEEE; 2014. P. 199–200. DOI: 10.1109/IVEC.2014.6857559.
3. Ulisse G, Krozer V. W-band traveling wave tube amplifier based on planar slow wave structure. IEEE Electron Device Letters. 2017;38(1):126–129. DOI: 10.1109/LED.2016.2627602.
4. Birdsall CK, Brewer GR, Haeff AV. The resistive-wall amplifier. Proceedings of the IRE. 1953;41(7):865–875. DOI: 10.1109/JRPROC.1953.274425.
5. Birdsall CK, Whinnery JR. Waves in an electron stream with general admittance walls. J. Appl. Phys. 1953;24(3):314–323. DOI: 10.1063/1.1721272.
6. Lopukhin VM, Vedenov AA. Absorption amplifier. Sov. Phys. Usp. 1954;53(1):69–86 (in Russian). DOI: 10.3367/UFNr.0053.195405c.0069.
7. Tseitlin MB, Kats AM. Travelling Wave Tube. Moscow: Sovetskoe Radio; 1964. 308 p. (in Russian).
8. Rowe T, Behdad N, Booske JH. Metamaterial-enhanced resistive wall amplifier design using periodically spaced inductive meandered lines. IEEE Transactions on Plasma Science. 2016;44(10):2476–2484. DOI: 10.1109/TPS.2016.2599144.
9. Jiang Y, Lei W, Hu P, Song R, Ma G, Chen H, Jin X. Demonstration of a 220-GHz continuous wave traveling wave tube. IEEE Transactions on Electron Devices. 2021;68(6):3051–3055. DOI: 10.1109/TED.2021.3075922.
10. Kasatkin LV. On amplification of space charge waves during the passage of electron beams in media with inductive conductivity. Radio Engineering and Electronic Physics. 1961;6(2):267–274 (in Russian).
11. Ovcharov VT, Solntsev VA. Simplified nonlinear equations of a traveling wave lamp. Radio Engineering and Electronic Physics. 1962;7(11):1931–1940 (in Russian).
12. Datta SK, Kumar L. Plasma frequency reduction factor. Defence Science Journal. 2008;58(6):768–770. DOI: 10.14429/dsj.58.1705.
13. Branch GM, Mihran TG. Plasma frequency reduction factors in electron beams. IRE Transactions on Electron Devices. 1955;2(2):3–11. DOI: 10.1109/T-ED.1955.14065.
14. Vainshtein LA, Solntsev VA. Lectures on Microwave Electronics. Moscow: Sovetskoe Radio; 1973. 399 p. (in Russian).



Фунтов Александр Андреевич — родился в Балакове Саратовской области (1992). Окончил СГУ (2014). В настоящее время — ассистент кафедры электроники, колебаний и волн. Автор 13 научных публикаций. Область научных интересов — вакуумная СВЧ-электроника.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: aafuntov@mail.ru
 ORCID: 0000-0002-9121-1449
 AuthorID (eLibrary.Ru): 920783



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(4)

Научная статья
УДК 51-76, 57.087.23

DOI: 10.18500/0869-6632-003051
EDN: ZTBPSQ

Расчёт циклических характеристик электроэнцефалограммы для исследования электрической активности мозга

В. В. Аристов¹, О. В. Кубряк^{2,3}, И. В. Степанян⁴✉

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

²Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия

³НИИ нормальной физиологии им. П. К. Анохина, Москва, Россия

⁴Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия

E-mail: aristovvl@yandex.ru, o.kubryak@lab17.ru, ✉neurocomp.pro@gmail.com

Поступила в редакцию 25.10.2022, принята к публикации 21.04.2023,

опубликована онлайн 12.07.2023, опубликована 31.07.2023

Аннотация. Цель исследования — экспериментальная проверка предлагаемого способа анализа ЭЭГ, основанного на построении графа связности анализируемого сигнала, в котором амплитуды отображаются вершинами, а их взаимное расположение друг относительно друга — дугами. Отображение ЭЭГ-сигнала в структуре графа обуславливает появление циклических структур с возможностью расчёта их численных характеристик. В результате исследования разработаны критерии инициализации начальных условий счётного алгоритма. Рассчитаны следующие параметры: число циклов и число Эйлера в записи ЭЭГ. Приведены клубочные представления графов. Предлагаемый алгоритм имеет масштабирующий параметр, выбор которого влияет на итоговые результаты. Вторым свободным параметром предложенного алгоритма является степень искусственного загробления сигнала. Рассмотрены варианты применения алгоритма для многоканальных ЭЭГ-сигналов с обработкой многоканального сигнала путём поканального выявления семантических единиц и построением обобщённого семантического графа связности. Приведён пример проанализированного многоканального сигнала ЭЭГ, который был предварительно обработан с приведением всех амплитуд к натуральным числам в соответствии с рассчитанными характеристиками. Приведён пример ЭЭГ испытуемого с закрытыми глазами во время спокойного бодрствования и ЭЭГ испытуемого с открытыми глазами. В *Заключении* показано, что итоговые показатели могут варьироваться в значительных пределах (от нуля до десятков тысяч и более) в зависимости от конкретного отведения канала ЭЭГ. Анализ циклических структур электроэнцефалограммы представляется потенциальным способом оценки различных состояний человека за счёт возможности их различения с помощью предлагаемого способа. Исследование имеет ограниченный, пилотный характер.

Ключевые слова: электроэнцефалография, анализ электроэнцефалограммы, функциональные состояния.

Для цитирования: Аристов В. В., Кубряк О. В., Степанян И. В. Расчёт циклических характеристик электроэнцефалограммы для исследования электрической активности мозга // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 469–483. DOI: 10.18500/0869-6632-003051. EDN: ZTBPSQ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Calculation of the cyclic characteristics of the electroencephalogram for investigation of the electrical activity of the brain

V. V. Aristov¹, O. V. Kubryak^{2,3}, I. V. Stepanyan⁴✉

¹Federal Research Center «Computer Science and Control» of the RAS, Moscow, Russia

²National Research University «Moscow Power Engineering Institute», Moscow, Russia

³Research Institute of Normal Physiology named after P. K. Anokhin, Moscow, Russia

⁴Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: aristovv1@yandex.ru, o.kubryak@lab17.ru, ✉neurocomp.pro@gmail.com

Received 25.10.2022, accepted 21.04.2023, available online 12.07.2023, published 31.07.2023

Abstract. The purpose of the study is experimental verification of the proposed EEG analysis method based on the construction of a connectivity graph of the analyzed signal, in which the amplitudes are displayed by vertices, and their relative position relative to each other by arcs. The display of the EEG signal in the graph structure causes the appearance of cyclic structures with the possibility of calculating their numerical characteristics. As a result of the study, criteria for initialization of the initial conditions of the counting algorithm have been developed. The following parameters were calculated: the number of cycles and the Euler number in the EEG recording. Coil representations of graphs are given. The proposed algorithm has a scaling parameter, the choice of which affects the final results. The second free parameter of the proposed algorithm is the degree of artificial signal coarsening. Variants of the algorithm application for multichannel EEG signals with multichannel signal processing by channel-by-channel detection of semantic units and construction of a generalized semantic connectivity graph are considered. An example of an analyzed multichannel EEG signal, which was pre-processed with reduction of all amplitudes to natural numbers in accordance with the calculated characteristics, is given. An example of an EEG of a subject with closed eyes during quiet wakefulness and an EEG of a subject with open eyes is given. In Conclusion, it is shown that the final indicators can vary significantly (from zero to tens of thousands or more) depending on the particular derivation of the EEG channel. Analysis of the cyclic structures of the electroencephalogram seems to be a potential way to assess various human states due to the possibility of distinguishing them using the proposed method. The study has a limited, pilot character.

Keywords: electroencephalography, electroencephalogram analysis, functional states.

For citation: Aristov VV, Kubryak OV, Stepanyan IV. Calculation of the cyclic characteristics of the electroencephalogram for investigation of the electrical activity of the brain. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(4):469–483. DOI: 10.18500/0869-6632-003051

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Большое число известных нам работ, где проводился анализ электроэнцефалограммы человека, можно условно назвать «альфа-ритм и другие». По сути, там использовались подходы к анализу, предложенные Греем Уолтером и другими пионерами таких исследований в середине XX века [1]. В наши дни электроэнцефалография (ЭЭГ) имеет самое широкое распространение в медицине и психологии, это касается и нейроэргономики, саморегуляции, игр и развлечений, нейромаркетинга, образования, безопасности и аутентификации [2]. В этой связи, а также с расширением вычислительных возможностей, набор «классических» способов проведения и анализа данных ЭЭГ и связанных с получаемыми результатами представлений о работе мозга дополняется новыми исследовательскими устремлениями [3], среди которых следует выделить применение ЭЭГ в нейроинтерфейсах [4] и их использование для оценки состояний человека [5, 6]. Вариант классификации современных задач в анализе данных ЭЭГ включает: распознавание эмоций, контроль воображаемых движений, оценку умственного напряжения, контроль и инструментальный элемент диагностики эпилепсии, исследование структуры сна, исследование вызванных потенциалов мозга [3].

Для анализа данных ЭЭГ получили широкое распространение подходы, которые можно обозначить как «элементы искусственного интеллекта» (например, [3, 7]). Используются расчётные

Аристов В. В., Кубряк О. В., Степанян И. В.
Известия вузов. ПНД, 2023, т. 31, № 4

характеристики сигнала, частыми способами для которых являются комплексное преобразование, пространственная фильтрация (метод общих пространственных паттернов), динамическая энергия, быстрое преобразование Фурье, средняя абсолютная разность, спектральная плотность мощности, кратковременное преобразование Фурье, сингулярное разложение, разложение роя [3]. Следует отметить, что достаточно давно существует мнение об отсутствии явных преимуществ сложных новых методов математической обработки сигналов ЭЭГ по сравнению с «классическим» спектральным анализом, если нет ясного понимания, какой конкретный вклад в практическую работу пользователя вносят эти новые способы [8].

На наш взгляд, развитие анализа данных ЭЭГ связано также с попытками «формализации» разных концепций работы мозга, включая поиск нервных основ сознания [9], когда разрабатывается или эксплуатируется тот или иной вариант анализа, направленный на индуктивное подтверждение представлений авторов. В какой-то мере к этому возможно отнести попытки выделения ритмических паттернов в электроэнцефалограмме человека и соотнесения их с явлением резонанса Шумана (например, [10, 11]). Развитие фрактального анализа, например, может соотноситься с изучением циркадианных ритмов, сна [12]. В свою очередь, представляется перспективным развитие идей о фрагментарности процессов восприятия, когнитивного контроля [13], отражающихся в биологических ритмах — в том числе, изложенных нами [14]. Существуют и более новые попытки связать, например, кардиоритм или дыхание (циклическую активность) с активностью мозга [15, 16].

В данном случае, наоборот, полагаем, что общая математическая идея, предложенная В. В. Аристовым [17], может оказаться полезной для развития представлений о работе мозга. Суть этого предложения заключается в поисках циклических структур сигналов, которые, вероятно, могут свидетельствовать об изменении уровня общей активации или регуляции функций (или, по предположению В. В. Аристова — проявлении на разных уровнях феномена сознания). Для формализации этого положения рассматривается рост дерева графа. При определенном усложнении в точке «фазового перехода» происходит возникновение гигантских циклов. Данные представления основываются на том, что для более простой структуры нейросети (условно можно назвать ее структурой нервной системы животного, включая и нейросеть мозга) характерна передача сигнала от «рецептора» к «эффектору». Такую структуру можно моделировать графом в виде дерева (или пары деревьев). Но при усложнении сети, как было показано в [17], способен происходить так называемый перколяционный («фазовый») переход, известный в кинетико-статистической теории. Он означает появление кластеров, циклов, которые уже не имеют такого простого вида траекторий в системе графа от «входа» в «выходу» («from input to output»). Появление «запутанных» траекторий сигналов в нейросети мозга и предполагается сопоставить с изменением уровня общей активации или регуляции функций (или даже с проявлениями сознания и самосознания). Именно возникновение подобных структур может создать предпосылки, способствовать развитию некоторого абстрагирования, появлению возможности оперировать со знаками, словами, числами, вообще элементами семиотики. Однако требуется всестороннее развитие модели. Выявление и выделение таких автономных образований, что математически было получено и показано на моделях растущих графов в [17], и представляет собой возможную перспективную цель. В данном случае изучается возможность исследования данных ЭЭГ с помощью математической модели, основанной на теории графов. Таким образом, это исследование имеет ограничения для надёжной интерпретации результатов применительно к состояниям мозга, но рассматривается нами как предварительное, поисковое, направленное на развитие метода. В этой связи, цель работы была ограничена принципиальным описанием потенциально полезного, на наш взгляд, подхода к возможному способу анализа электроэнцефалограммы. В более широком смысле, исследование касается разработки математических основ выявления циклических структур сигналов на основе теоретико-графового подхода с демонстрацией возможностей новых алгоритмов

на примере обработки ЭЭГ-сигналов. Для оценки чувствительности предлагаемого подхода к оценке функциональных состояний, различных режимов работы психики и организма требуется значительный объем статистических данных. В настоящей работе не предполагалось исследовать разрабатываемый метод применительно к конкретной практической задаче. Отметим, что этим методом можно оценивать любые биоритмы, включая ЭЭГ, ЭКГ, пульсовые волны, дыхание, циркадные ритмы и другие. Также данный метод может быть применён для обработки и анализа циклических структур в сигналах произвольной природы (радио- и акустические сигналы, речь, солнечную и звёздную активность в задачах астрофизики), то есть везде, где требуется количественная оценка скрытых циклических структур в обрабатываемых сигналах. Таким образом, данное исследование является узконаправленным и, преимущественно, математико-методологическим.

1. Материалы и методы

В проспективном исследовании анализировались с соблюдением современных этических норм полученные ранее в лаборатории физиологии функциональных состояний человека НИИ нормальной физиологии им. П. К. Анохина записи электроэнцефалограмм 10 условно здоровых 20-летних испытуемых. Регистрация ЭЭГ производилась на электроэнцефалографе Neurovisor (Россия), монополярно, с постановкой электродов по системе 10–20. Частота оцифровки 512000 Гц синхронно по всем каналам, далее цифровая фильтрация и прореживание. Разрешение не хуже 2 мкВ. Динамический диапазон сигнала ± 130 мВ (22 разряда АЦП). Полоса пропускания 0...70 Гц (по уровню -3 дБ). Программные ВЧ-фильтры 0.02, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 1.0 Гц, режекторный на 50 Гц. Для демонстрации предлагаемого способа анализа были выбраны 16-секундные фрагменты записи ЭЭГ без визуально определяемых артефактов. Условия — спокойное вертикальное стояние с открытыми глазами в шумоизолированном помещении, при дневном свете. Предлагаемый способ представляет собой анализ «циклических структур» в анализируемой записи ЭЭГ, где в формальном смысле под «циклической структурой» примем обычное для обработки сигналов любое воспроизведение фрагмента произвольной длины (любое повторение цепочки «слов») в соответствии с приведенным алгоритмом анализа данных ЭЭГ на основе построения и анализа параметров графа. Новизна исследования связана с предлагаемым подходом и способом выделения циклических структур, а также потенциальной возможностью связывания таких параметров с функциональными состояниями человека. Для поиска таких повторяющихся структур здесь используется свободный масштабирующий параметр N , задающий фиксированную длину фрагмента (далее называемую длиной «слова»). Меняя параметр N , можно анализировать ЭЭГ на различных масштабах, что, полагаем, может быть полезно, в частности, для выявления фрактальных характеристик сигнала. При этом масштабирующий параметр N можно соотнести с частотой ЭЭГ. Данное направление исследований заимствовано из нейросемантики [18, 19] и является ее дальнейшим развитием. Заметим, что на теории графов базируются разные методики описания структурной и функциональной связи между нервными элементами [20, 21].

Предлагаемый способ включает следующие этапы.

1. Искусственное закругление сигнала (понижение точности) методом округления до L -го знака после запятой. Это вводится для снижения нагрузки на расчетные модули и коррекции количества вариантов параметров с возможностью регулирования итогового количества циклических структур в анализируемом сигнале. Данный этап не является обязательным.
2. Нарезка данных по N точкам методом максимального перекрытия слов.
3. Построение графа связности, в котором соседние точки отображаются вершинами, а их прямое соседство — смежными дугами. Единственность отображения слова в виде вершины графа обуславливает появление циклических структур в графе, который будем называть семантическим графом связности.

- Оценка параметров графа с точки зрения свойств циклических структур в соответствии с гипотезой исследования. Параметрами являются число Эйлера и число простых циклов семантического графа связности.

Рассмотрим подробнее эти этапы. Приведение компонентов информационного потока (амплитуды ЭЭГ) к множеству натуральных чисел включает:

- определение и фиксацию количества знаков после запятой и выбор соответствующего нормирующего параметра L ;
- умножение каждой компоненты сигнала (амплитуды ЭЭГ) на нормирующий параметр 10^L ;
- отбрасывание лишних знаков после запятой для каждой компоненты сигнала для получения натурального числа (в дальнейших построениях — семантическая единица или ее элемент).

Функционал качества ϕ при определении параметра L :

- для одноканального ЭЭГ: $\phi(L) : (E \rightarrow \max; C \rightarrow \max; T \rightarrow \max)$;
- для многоканального ЭЭГ:

$\phi(L) : (E1 \rightarrow \min; E2 \rightarrow \max; C1 \rightarrow \min; C2 \rightarrow \max; T1 \rightarrow \min; T2 \rightarrow \max)$, при этом $E \in (E1, E2), C \in (C1, C2), T \in (T1, T2)$,

где E — число Эйлера, C — число простых циклов, T — число простых путей результирующего семантического графа G . Функционал качества может определяться не только показателями E , C и T , но и другими характеристиками, например, на основе оценки эффективности алгоритмов последующей обработки сигнала. Выделение семантических единиц заключается в определении масштабирующего параметра N путём выделения слов длиной N в последовательности длиной M элементов с параметром перекрытия K . При этом: $\exists M = n \cdot N, n \in N, K = N$. В общем виде (для произвольного значения параметра K):

$$K \in N, \quad n = 1 + \left\lfloor \frac{M - N}{K} \right\rfloor,$$

где квадратные скобки — процедура взятия целой части от числа. Очевидно, при $K = 1$ получаем максимальное число слов длиной N .

Анализ исходного сигнала на основе различных значений N порождает мультимасштабный подход. В многоканальном потоке слова могут отбираться по принципу, согласно которому каждое последующее слово берется из следующего канала. Это даст возможность построения обобщенного семантического графа и выявления каузальных связей в структуре многоканального потока. На рис. 1 схематично приведен этот случай, с перекрытием в один элемент.

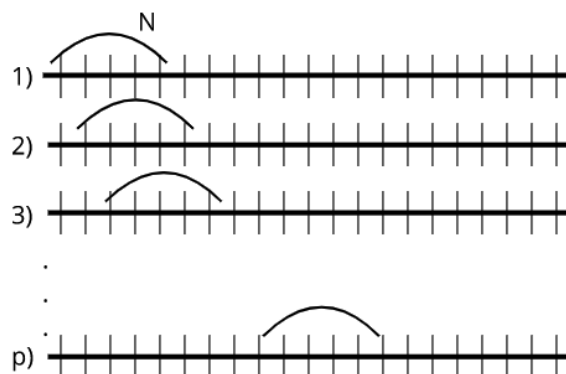


Рис. 1. Пример обобщённой обработки p -канального сигнала путём поканального выявления слов длиной N при $K = 1$

Fig. 1. An example of a generalized processing of a p -channel signal by channel-by-channel detection of words of length N at $K = 1$

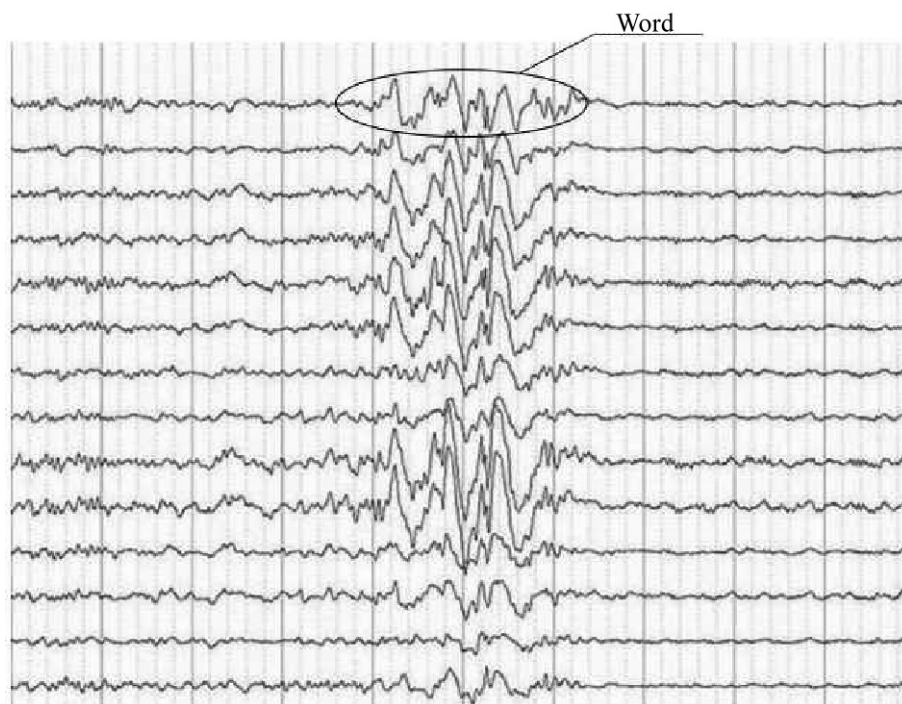


Рис. 2. Пример слова внутри одного из каналов многоканальной ЭЭГ

Fig. 2. An example of a word inside one of the channels of a multichannel EEG

На рис. 2 приведен пример реального сигнала ЭЭГ и достаточно большой фрагмент, выделенный в качестве одиночного слова.

Отметим, что L — это количество знаков после запятой, а нормирующий множитель — это 10^L . Таким образом, иницирующими параметрами алгоритма являются параметры L , N , K .

Поясним подробнее, что означает целочисленный параметр L . Нами была создана программа, которая округляет значения амплитуд до определённого количества знаков после запятой. Выбор округления существенно влияет на результат, так как на данном этапе определяются все семантические единицы. От запятой можно избавиться с помощью операции умножения на параметр 10^L . При этом отношения между округлёнными значениями амплитуд сохраняются. Таким образом, служебный параметр L позволяет произвести некоторую предварительную обработку, которая существенным образом повлияет на частоты и значения всех семантических единиц и структуру связей между ними.

Следует отметить, что если информационные каналы никак не связаны между собой, то построение графа, в том числе выделение слов, целесообразно проводить в каждом канале независимо.

Энцефалограмма представляет собой систему каналов, в которой каждый канал коррелирован с остальными. Поэтому возможно расширение области применения алгоритма для того, чтобы строить семантический граф сразу по результатам обработки всех каналов. В таком случае каждое слово будет кодировать значение амплитуд во всех каналах. При этом не так важно, как именно будет кодироваться набор амплитуд, так как независимо от кодировки (которая должна быть функциональна и однозначна) частоты встречаемости определённых слов будут сохранены. Таким образом, способ кодировки является инвариантом относительно операции кодирования. Например, для создания слов можно перечислить через запятую или другой служебный символ все амплитуды по первому каналу, затем все амплитуды по второму каналу и т. д.

Семантический граф $G\langle X, Y \rangle$ задаётся множеством вершин X и ребер Y , при этом множество вершин тождественно множеству слов. Для повторяющихся слов считаем количество повторов, задающих вес, который может отображаться как размер соответствующей вершины (рис. 3).

При построении матрицы инцидентности графа $G\langle X, Y \rangle$ считывается последовательность слов. Вес \mathcal{W} каждой вершины $x_1 \dots x_c \in X$ на шаге k определяется как $\mathcal{W}(x_i, x_j)_k = \mathcal{W}(x_i, x_j)_{k-1} + 1$, если $\exists \{x_i, x_j\}$, при этом начальные веса равны нулю и веса вершин и ребер могут принимать только натуральные значения. Условием возникновения связи с увеличением соответствующего веса связи является наличие пары $\{x_i, x_j\}$ в анализируемой последовательности. При построении направленного графа можно учитывать последовательность расположения элементов x_i, x_j относительно друг друга (в таком случае матрица инцидентности будет несимметричной).

При наличии сложной структуры возможны «клубочные» представления графов (см. ниже, рис. 7). Для оптимизации восприятия структурированной графовой информации целесообразно использовать нормализацию размеров вершин и ребер в соответствии с их весами \mathcal{W} на основе формулы:

$$f(w) = \frac{1}{1 + e^{-\mathcal{W}}}.$$

Опишем подробнее, как рассчитываются веса вершин и ребер. Начальный вес каждой вершины и связи равен единице. В случае, если определённая связь появилась в графе более одного раза, её вес увеличивается на единицу. То же самое касается вершин, которые отображают семантические единицы (слова) — если некая вершина или семантическая единица встречается более одного раза, её вес увеличивается также на единицу. Если на семантическом графе отображать размеры вершин и ребер пропорционально их весам, то некоторые вершины могут оказаться больше чем сам граф и рисунок станет абсолютно непригодным для восприятия. Поэтому при построении графов применяется нелинейная зависимость, которая плавно отображает изменение размеров и весов ребер и вершин. Возможен некий максимальный и минимальный предел этих размеров. Таким образом происходит нелинейная нормализация данных для более удобного отображения на графе.

Характеристическими отображениями могут быть любые параметры семантического графа или семейства графов для соответствующих иницирующих параметров L, N, K . Рассмотрим построение характеристических отображений на примере анализа циклических характеристик семантического графа. Для этого в полученном графе G вычисляется число Эйлера, число простых циклов, число простых путей.

Для графов характеристика Эйлера определяется следующим образом:

$$E = N_{\text{links}} - N_{\text{nodes}},$$

то есть надо из общего числа связей (ребер) N_{links} вычесть общее число узлов N_{nodes} .

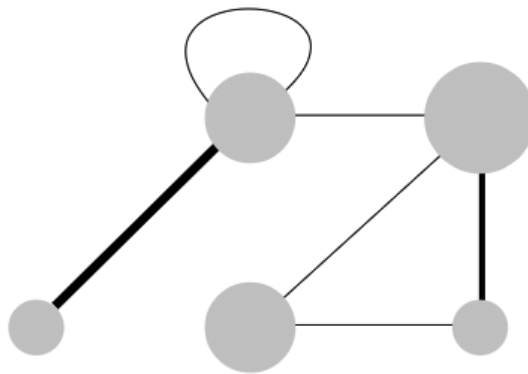


Рис. 3. Пример ненаправленного взвешенного семантического графа. Вершины и ребра графа имеют разный размер для отображения частоты встречаемости соответствующих элементов. Петля у верхней левой вершины соответствует циклу

Fig. 3. An example of an undirected weighted semantic graph. The vertices and edges of the graph have different sizes to display the frequency of occurrence of the corresponding elements. The loop at the top left vertex corresponds to the cycle

Для любого дерева $E = -1$. Для унициклического кластера (содержащего единственный цикл) $E = 0$. Для сложного графа $E > 0$.

Для получения характеристических отображений на основе семантической мультимасштабной декомпозиции возможно построение диаграмм зависимости выходных данных от иницирующих параметров алгоритма.

В целом, представленный нами метод призван выявить скрытые циклические структуры на заданном масштабе с целью их последующей математической оценки. Очень часто в таких зашумленных сигналах, как электроэнцефалограммы, эти циклические структуры на глаз не видны. Их присутствие можно обнаружить, масштабируя некоторые фрагменты ЭЭГ при определённых режимах работы мозга. Речь идёт о ритмической активности коры головного мозга. Тем не менее определённые характеристики циклов внутри этой активности трудно выявляются другими методами в связи с высокой зашумленностью сигналов и чрезвычайной сложностью природы электрической активности центральной нервной системы и головного мозга, в частности. На рис. 4 представлен фрагмент электроэнцефалограммы человека с достаточным увеличением для отображения некоторых ритмических структур.

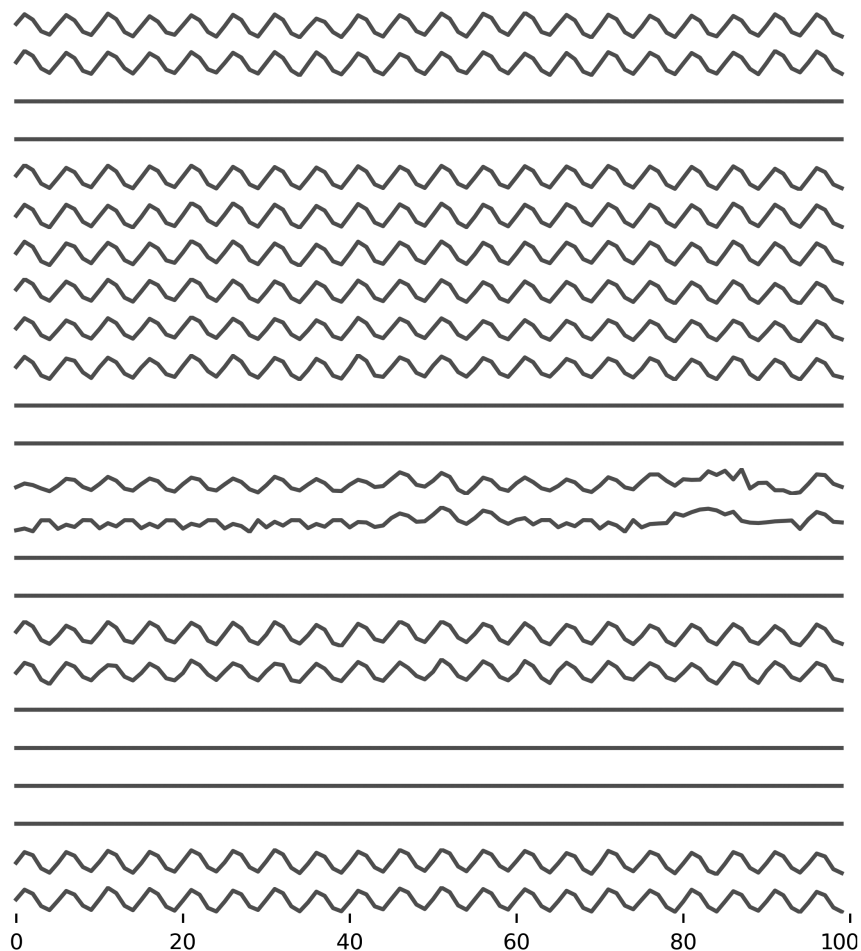


Рис. 4. Пример увеличенного фрагмента многоканальной ЭЭГ, на котором видны циклические структуры для обработки алгоритмом на соответствующем масштабе

Fig. 4. An example of an enlarged fragment of a multichannel EEG, which shows cyclic structures for processing by the algorithm at the appropriate scale

2. Результаты и обсуждение

В результате проведенных расчетных экспериментов было установлено, что итоговые показатели могут варьироваться в значительных пределах. При $L = 4$ и $N = 150$ число Эйлера в многоканальном ЭЭГ-сигнале находится в диапазоне от 0 до 15848 в зависимости от конкретного отведения канала ЭЭГ, число циклов от 1 до 411. Число простых путей в данном исследовании не рассматривалось. Пример проанализированного многоканального сигнала ЭЭГ, который был предварительно обработан с приведением всех амплитуд к натуральным числам с рассчитанными характеристиками, приведён на рис. 5, 6. При этом на рис. 5 приведён пример ЭЭГ испытуемого с закрытыми глазами во время спокойного бодрствования, на рис. 6 — ЭЭГ испытуемого с открытыми глазами.

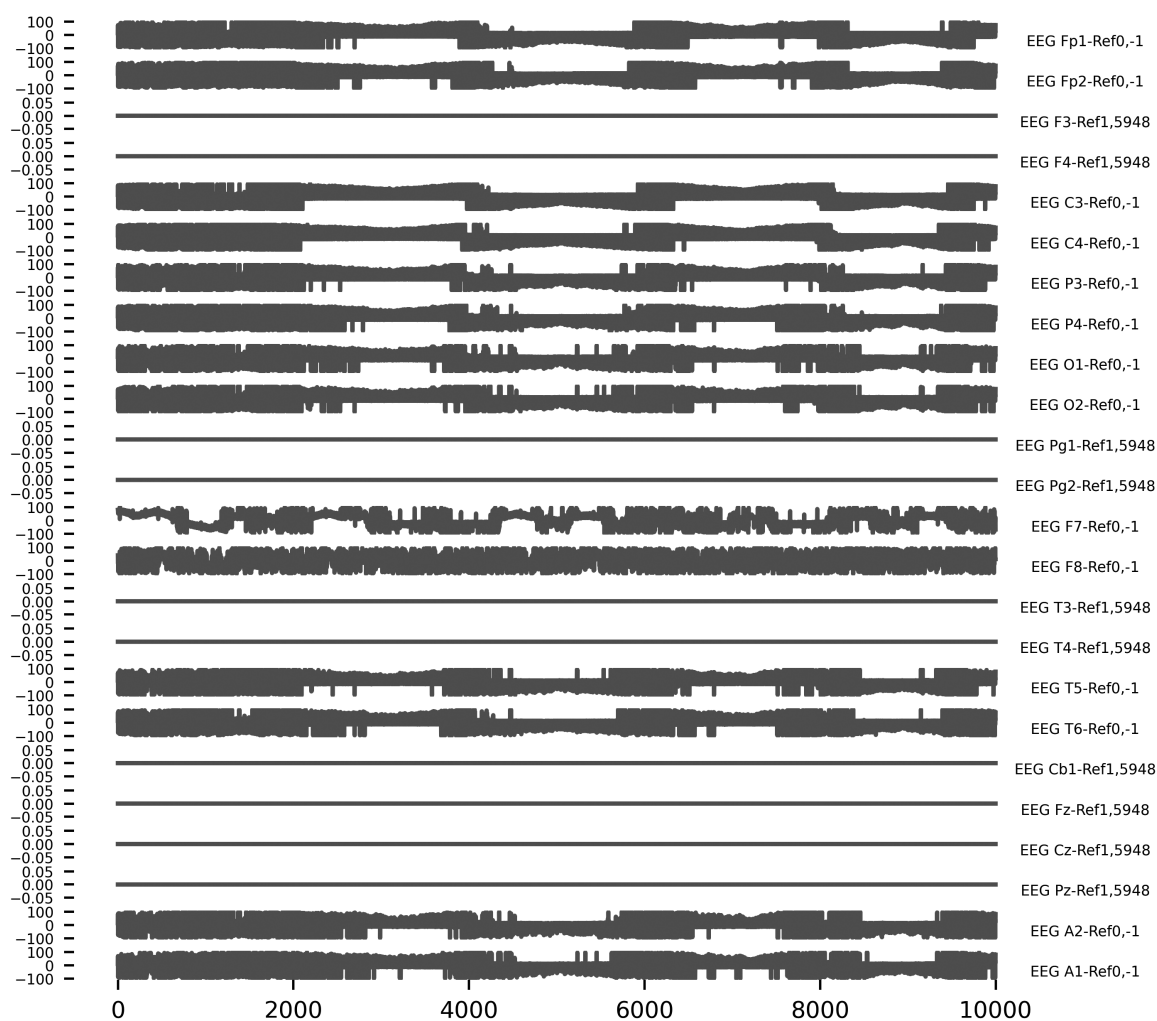


Рис. 5. Пример записи многоканальной ЭЭГ с закруглением сигналов в каждом отведении ($L = 4$, при длине «слова» $N = 150$ точек). Справа от каждого канала показана его маркировка и число Эйлера. По горизонтальной оси — миллисекунды. Спокойное бодрствование испытуемого с закрытыми глазами

Fig. 5. An example of a multichannel EEG recording with signal coarsening in each lead ($L = 4$, with a “word” length of $N = 150$ points). To the right of each channel, its labeling and Euler number are shown. The horizontal axis is milliseconds. Quiet wakefulness of the subject with closed eyes

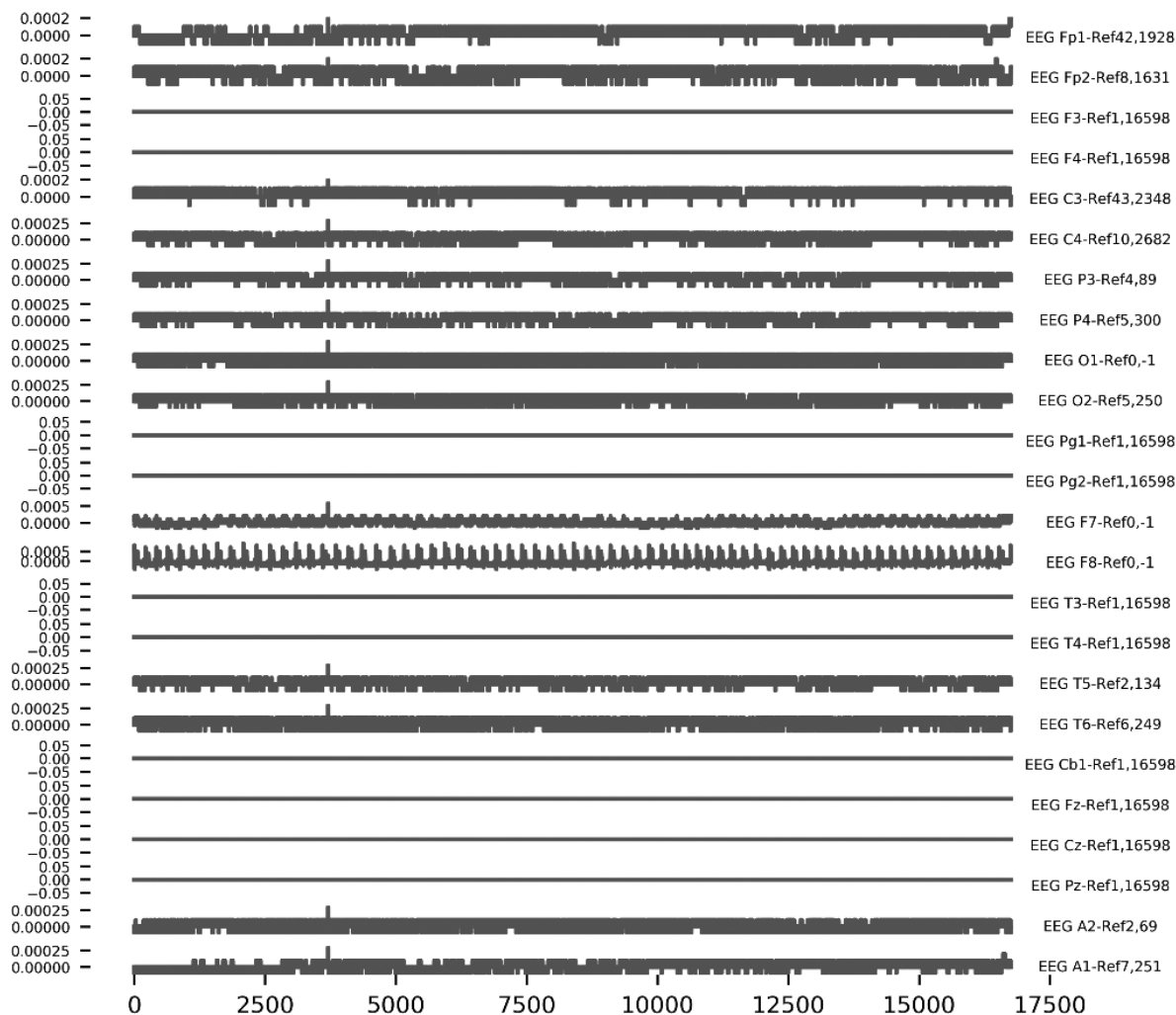


Рис. 6. Пример записи многоканальной ЭЭГ с загрузлением сигналов в каждом отведении ($L = 4$, при длине «слова» $N = 150$ точек). Справа от каждого канала показана его маркировка и число Эйлера. По горизонтальной оси — миллисекунды. Испытуемый с открытыми глазами

Fig. 6. An example of a multichannel EEG recording with signal coarsening in each lead ($L = 4$, with a “word” length of $N = 150$ points). To the right of each channel, its labeling and Euler number are shown. The horizontal axis is milliseconds. Subject with open eyes

Полагаем, что разработанный функционал качества был достигнут за счёт достижения достаточно широкого диапазона изменений регистрируемых параметров. На наш взгляд, это свидетельствует о высокой чувствительности разработанного математического аппарата и алгоритмов к таким характеристикам энцефалограммы как параметры циклических характеристик. В связи с этим предложенный метод может являться перспективным методом анализа функциональных состояний человека по результатам электроэнцефалографии, что требует дальнейшего изучения.

Также было установлено, что компьютерный счет циклических характеристик сложных графовых структур (см. рис. 5) может занимать широкий диапазон времени от нескольких минут до десятков часов на одном и том же масштабе N у одного и того же человека в зависимости

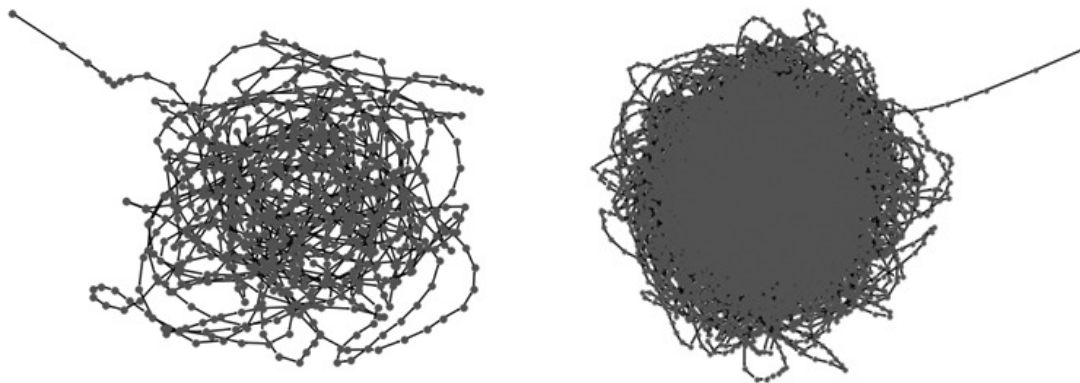


Рис. 7. «Клубочные» представления ЭЭГ — графы связности, построенные по одному каналу ЭЭГ испытуемого. Слева при $N = 4000$, $L = 2$, справа при $N = 250$, $L = 4$

Fig. 7. EEG “tangled” representations — connectivity graphs constructed from one EEG channel of the subject. Left at $N = 4000$, $L = 2$, right at $N = 250$, $L = 4$

от отведения. Полагаем, что это может отражать разнообразие и сложность процессов, происходящих в мозге, и позволяет сделать вывод о том, что счетное время может являться информативным и значимым параметром оценки ЭЭГ.

Заключение

Изложенный методический подход обосновывает и демонстрирует на примере анализа ЭЭГ способ вычисления количественных характеристик, связанных с циклическими структурами и скрытыми процессами внутри ЭЭГ, которые мы пока можем трактовать лишь только гипотетически. Необходимость применения данного метода именно для решения практических задач, связанных с обработкой ЭЭГ сигналов, предстоит обосновать путём проведения серии экспериментов, в соответствии с требованиями доказательной медицины, что выходит за рамки нашего математического исследования. Данные исследования планируется провести в дальнейшем. Также данный подход предполагается разрабатывать с целью выяснения структурных особенностей нейросетей, отвечающих за различные психические проявления. В настоящей работе предложенная в [17] гипотеза о моделировании элементов сознания с помощью исследования циклических сложных структур, появляющихся при перкаляционном переходе в структурах деревьев на графах, получила свое развитие с помощью исследования конкретных ЭЭГ и их представлениях. Формализм циклических структур, принятый при обработке сигналов, позволяет отмечать воспроизводимость фрагментов различной длины. Были выявлены структуры с достаточно большими числами Эйлера, характеризующими характер цикличности. Полагаем, что данный математический подход к анализу ЭЭГ может оказаться полезным в качестве метода оценки различных состояний человека, что требует дополнительного изучения.

Вклад авторов

Авторы перечислены по алфавиту. Общий подход и разработка математического аппарата — В. В. Аристов. Данные ЭЭГ и участие в подготовке текста — О. В. Кубряк. Разработка алгоритма синтеза графа и вычислительная реализация — И. В. Степанян.

Список литературы

1. *Freeman W.J.* W.G. Walter: The living brain // In: Palm G., Aertsen A. (eds) Brain Theory. Berlin, Heidelberg: Springer, 1986. P. 237–238. DOI: 10.1007/978-3-642-70911-1_17.
2. *Fontanillo Lopez C. A., Li G., Zhang D.* Beyond technologies of electroencephalography-based brain-computer interfaces: A systematic review from commercial and ethical aspects // *Front. Neurosci.* 2020. Vol. 14. P. 611130. DOI: 10.3389/fnins.2020.611130.
3. *Craik A., He Y., Contreras-Vidal J. L.* Deep learning for electroencephalogram (EEG) classification tasks: a review // *J. Neural Eng.* 2019. Vol. 16, no. 3. P. 031001. DOI: 10.1088/1741-2552/ab0ab5.
4. *Douibi K., Le Bars S., Lemontey A., Nag L., Balp R., Breda G.* Toward EEG-based BCI applications for industry 4.0: Challenges and possible applications // *Front. Hum. Neurosci.* 2021. Vol. 15. P. 705064. DOI: 10.3389/fnhum.2021.705064.
5. *Alimardani M., Hiraki K.* Passive brain-computer interfaces for enhanced human-robot interaction // *Front. Robot. AI.* 2020. Vol. 7. P. 125. DOI: 10.3389/frobt.2020.00125.
6. *Batista A.* Brain-computer interfaces for basic neuroscience // *Handbook of Clinical Neurology.* 2020. Vol. 168. P. 233–247. DOI: 10.1016/B978-0-444-63934-9.00017-2.
7. *Lotte F., Bougrain L., Cichocki A., Clerc M., Congedo M., Rakotomamonjy A., Yger F.* A review of classification algorithms for EEG-based brain-computer interfaces: a 10 year update // *J. Neural Eng.* 2018. Vol. 15, no. 3. P. 031005. DOI: 10.1088/1741-2552/aab2f2.
8. *Schwilden H.* Concepts of EEG processing: from power spectrum to bispectrum, fractals, entropies and all that // *Best Practice & Research Clinical Anaesthesiology.* 2006. Vol. 20, no. 1. P. 31–48. DOI: 10.1016/j.bpa.2005.09.001.
9. *Анохин К. В.* Когнитом: в поисках фундаментальной нейронаучной теории сознания // *Журнал высшей нервной деятельности им. И.П. Павлова.* 2021. Т. 71, № 1. С. 39–71. DOI: 10.31857/S0044467721010032.
10. *Побаченко С. В., Колесник А. Г., Бородин А. С., Калюжин В. В.* Сопряженность параметров энцефалограммы мозга человека и электромагнитных полей шумановского резонатора по данным мониторинговых исследований // *Биофизика.* 2006. Т. 51, № 3. С. 534–538.
11. *Saroka K. S., Vares D. E., Persinger M. A.* Similar spectral power densities within the Schumann resonance and a large population of quantitative electroencephalographic profiles: Supportive evidence for Koenig and Pobachenko // *PLoS ONE.* 2016. Vol. 11, no. 1. P. e0146595. DOI: 10.1371/journal.pone.0146595.
12. *Ma Y., Shi W., Peng C.-K., Yang A. C.* Nonlinear dynamical analysis of sleep electroencephalography using fractal and entropy approaches // *Sleep Medicine Reviews.* 2018. Vol. 37. P. 85–93. DOI: 10.1016/j.smr.2017.01.003.
13. *Lutz A., Lachaux J.-P., Martinerie J., Varela F. J.* Guiding the study of brain dynamics by using first-person data: Synchrony patterns correlate with ongoing conscious states during a simple visual task // *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 2002. Vol. 99, no. 3. P. 1586–1591. DOI: 10.1073/pnas.032658199.
14. *Kubryak O.* The Anticipating heart // In: Nadin M. (eds) Anticipation and Medicine. Cham: Springer, 2017. P. 49–65. DOI: 10.1007/978-3-319-45142-8_4.
15. *Adelhöfer N., Schreiter M. L., Beste C.* Cardiac cycle gated cognitive-emotional control in superior frontal cortices // *NeuroImage.* 2020. Vol. 222. P. 117275. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2020.117275.
16. *Heck D. H., Kozma R., Kay L. M.* The rhythm of memory: how breathing shapes memory function // *J. Neurophysiol.* 2019. Vol. 122, no. 2. P. 563–571. DOI: 10.1152/jn.00200.2019.
17. *Aristov V., Stepanyan I.* Hypothesis of cyclic structures of pre- and consciousness as a transition

in neuron-like graphs to a special type of symmetry // *Symmetry*. 2022. Vol. 14, no. 3. P. 505. DOI: 10.3390/sym14030505.

18. *Stepanyan I. V., Mekler A. A.* Chaotic algorithms of analysis of cardiovascular systems and artificial intelligence // In: Hu Z., Petoukhov S., He M. (eds) *Advances in Artificial Systems for Medicine and Education III*. AIMEE 2019. Vol. 1126 of *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Cham: Springer, 2020. P. 231–240. DOI: 10.1007/978-3-030-39162-1_21.
19. *Stepanyan I. V., Lednev M. Y., Aristov V. V.* Genetic interpretation of neurosemantics and kinetic approach for studying complex nets: Theory and experiments // In: Hu Z., Petoukhov S., He M. (eds) *Advances in Artificial Systems for Medicine and Education IV*. AIMEE 2020. Vol. 1315 of *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Cham: Springer, 2020. P. 13–28. DOI: 10.1007/978-3-030-67133-4_2.
20. *Iakovidou N. D.* Graph theory at the service of electroencephalograms // *Brain Connect.* 2017. Vol. 7, no. 3. P. 137–151. DOI: 10.1089/brain.2016.0426.
21. *Sporns O.* Graph theory methods: applications in brain networks // *Dialogues in Clinical Neuroscience*. 2018. Vol. 20, no. 2. P. 111–121. DOI: 10.31887/DCNS.2018.20.2/osporns.

References

1. Freeman WJ. W.G. Walter: The living brain // In: Palm G, Aertsen A, editors. *Brain Theory*. Berlin, Heidelberg: Springer; 1986. P. 237–238. DOI: 10.1007/978-3-642-70911-1_17.
2. Fontanillo Lopez CA, Li G, Zhang D. Beyond technologies of electroencephalography-based brain-computer interfaces: A systematic review from commercial and ethical aspects. *Front. Neurosci.* 2020;14:611130. DOI: 10.3389/fnins.2020.611130.
3. Craik A, He Y, Contreras-Vidal JL. Deep learning for electroencephalogram (EEG) classification tasks: a review. *J. Neural Eng.* 2019;16(3):031001. DOI: 10.1088/1741-2552/ab0ab5.
4. Douibi K, Le Bars S, Lemontey A, Nag L, Balp R, Breda G. Toward EEG-based BCI applications for industry 4.0: Challenges and possible applications. *Front. Hum. Neurosci.* 2021;15:705064. DOI: 10.3389/fnhum.2021.705064.
5. Alimardani M, Hiraki K. Passive brain-computer interfaces for enhanced human-robot interaction. *Front. Robot. AI.* 2020;7:125. DOI: 10.3389/frobt.2020.00125.
6. Batista A. Brain-computer interfaces for basic neuroscience. *Handbook of Clinical Neurology*. 2020;168:233–247. DOI: 10.1016/B978-0-444-63934-9.00017-2.
7. Lotte F, Bougrain L, Cichocki A, Clerc M, Congedo M, Rakotomamonjy A, Yger F. A review of classification algorithms for EEG-based brain-computer interfaces: a 10 year update. *J. Neural Eng.* 2018;15(3):031005. DOI: 10.1088/1741-2552/aab2f2.
8. Schwilden H. Concepts of EEG processing: from power spectrum to bispectrum, fractals, entropies and all that. *Best Practice & Research Clinical Anaesthesiology*. 2006;20(1):31–48. DOI: 10.1016/j.bpa.2005.09.001.
9. Anokhin KV. The cognitome: Seeking the fundamental neuroscience of a theory of consciousness. *Neuroscience and Behavioral Physiology*. 2021;51(7):915–937. DOI: 10.1007/s11055-021-01149-4.
10. Pobachenko SV, Kolesnik AG, Borodin AS, Kalyuzhin VV. The contingency of parameters of human encephalograms and Schumann resonance electromagnetic fields revealed in monitoring studies. *Biophysics*. 2006;51(3):480–483. DOI: 10.1134/S0006350906030225.
11. Saroka KS, Vares DE, Persinger MA. Similar spectral power densities within the Schumann resonance and a large population of quantitative electroencephalographic profiles: Supportive

- evidence for Koenig and Pobachenko. PLoS ONE. 2016;11(1):e0146595. DOI: 10.1371/journal.pone.0146595.
12. Ma Y, Shi W, Peng CK, Yang AC. Nonlinear dynamical analysis of sleep electroencephalography using fractal and entropy approaches. Sleep Medicine Reviews. 2018;37:85–93. DOI: 10.1016/j.smr.2017.01.003.
 13. Lutz A, Lachaux JP, Martinerie J, Varela FJ. Guiding the study of brain dynamics by using first-person data: Synchrony patterns correlate with ongoing conscious states during a simple visual task. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 2002;99(3):1586–1591. DOI: 10.1073/pnas.032658199.
 14. Kubryak O. The Anticipating heart. In: Nadin M, editor. Anticipation and Medicine. Cham: Springer; 2017. P. 49–65. DOI: 10.1007/978-3-319-45142-8_4.
 15. Adelhöfer N, Schreiter ML, Beste C. Cardiac cycle gated cognitive-emotional control in superior frontal cortices. NeuroImage. 2020;222:117275. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2020.117275.
 16. Heck DH, Kozma R, Kay LM. The rhythm of memory: how breathing shapes memory function. J. Neurophysiol. 2019;122(2):563–571. DOI: 10.1152/jn.00200.2019.
 17. Aristov V, Stepanyan I. Hypothesis of cyclic structures of pre- and consciousness as a transition in neuron-like graphs to a special type of symmetry. Symmetry. 2022;14(3):505. DOI: 10.3390/sym14030505.
 18. Stepanyan IV, Mekler AA. Chaotic algorithms of analysis of cardiovascular systems and artificial intelligence. In: Hu Z, Petoukhov S, He M, editors. Advances in Artificial Systems for Medicine and Education III. AIMEE 2019. Vol. 1126 of Advances in Intelligent Systems and Computing. Cham: Springer; 2020. P. 231–240. DOI: 10.1007/978-3-030-39162-1_21.
 19. Stepanyan IV, Lednev MY, Aristov VV. Genetic interpretation of neurosemantics and kinetic approach for studying complex nets: Theory and experiments. In: Hu Z, Petoukhov S, He M, editors. Advances in Artificial Systems for Medicine and Education IV. AIMEE 2020. Vol. 1315 of Advances in Intelligent Systems and Computing. Cham: Springer; 2020. P. 13–28. DOI: 10.1007/978-3-030-67133-4_2.
 20. Iakovidou ND. Graph theory at the service of electroencephalograms. Brain Connect. 2017;7(3):137–151. DOI: 10.1089/brain.2016.0426.
 21. Sporns O. Graph theory methods: applications in brain networks. Dialogues in Clinical Neuroscience. 2018;20(2):111–121. DOI: 10.31887/DCNS.2018.20.2/osporns.



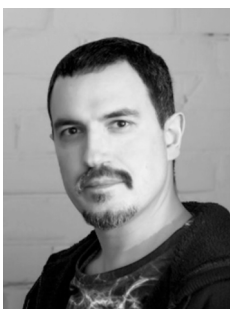
Аристов Владимир Владимирович — окончил Московский физико-технический институт, факультет управления и прикладной математики (1974). Защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук (1977) и доктора физико-математических наук (1996). С 1977 года работает в Вычислительном центре РАН (сейчас входит в структуру Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН), в настоящее время в должности главного научного сотрудника. Член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, член международного наблюдательного консультативного комитета (International Advisory Committee) конференции Asian Conference on Computational Fluid Dynamics (ACFD), входит в редакционный совет международных научных журналов Entropy и Fluids. Автор более 180 научных публикаций, в том числе нескольких монографий.

Россия, 119333 Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор. 2
 Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН
 E-mail: aristovvl@yandex.ru
 ORCID: 0000-0003-2568-3453
 AuthorID (eLibrary.Ru): 101994



Кубряк Олег Витальевич — окончил Сеченовский университет (Московскую медицинскую академию им. И. М. Сеченова) в 1993 году. Кандидат (2005) и доктор (2017) биологических наук. Профессор НИУ «МЭИ», главный научный сотрудник НИИ нормальной физиологии им. П. К. Анохина. Научные интересы: функциональное состояние, когнитивные процессы.

Россия, 111250 Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, стр. 1
Национальный исследовательский университет «МЭИ»
Россия, 125315 Москва, ул. Балтийская, 8
НИИ нормальной физиологии им. П. К. Анохина
E-mail: o.kubryak@lab17.ru
ORCID: 0000-0001-7296-5280
AuthorID (eLibrary.Ru): 358198



Степанян Иван Викторович — защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (2006) и доктора биологических наук (2012). Ведущий научный сотрудник Института машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, профессор департамента механики и мехатроники Инженерной академии РУДН, член редколлегии журнала «Нейрокомпьютеры: разработка, применение», ведущий научный сотрудник Центра междисциплинарных исследований музыкального творчества Московской государственной консерватории им. П. И. Чайковского. Научные интересы: биомеханика, биоматематика, психоакустика, медицина и психофизиология умственного труда, искусственный интеллект, биоинформатика и нейроинформационные технологии. Автор более 200 научных работ, ряда монографий и патентов на изобретения.

Россия, 101000 Москва, Малый Харитоньевский переулок, д. 4
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН
E-mail: neurocomp.pro@gmail.com
ORCID: 0000-0003-3176-5279
AuthorID (eLibrary.Ru): 443261





Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(4)

Научная статья
УДК 004.032.26, 530.152.2

DOI: 10.18500/0869-6632-003052
EDN: XGRKMR

Влияние шума на рекуррентные нейронные сети с нелинейными нейронами

В. М. Москвитин, Н. И. Семенова 

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: vmoskvitin@gmail.com, semenovani@sgu.ru

Поступила в редакцию 6.03.2023, принята к публикации 2.05.2023,
опубликована онлайн 12.07.2023, опубликована 31.07.2023

Аннотация. Цель настоящего исследования — установить особенности распространения и накопления шумов в рекуррентной нейронной сети на примере упрощенной эхо-сети. В данной работе исследовалось влияние типа функции активации искусственных нейронов и матриц связи между ними. *Методы.* В качестве источников шумов рассматриваются источники белого Гауссова шума. В зависимости от способа воздействия шума на искусственные нейроны использовались аддитивный, мультипликативный и смешанный шум. Оценка шумового воздействия проводилась с использованием дисперсии (вариации) выходного сигнала. *Результаты.* Показано, что функция активации играет существенную роль в накоплении шумов. Рассмотрены две нелинейные функции активации: гиперболический тангенс и сигмоида со значениями от 0 до 1. Показано, что для второй функции происходит подавление некоторых типов шумов. В результате рассмотрения влияния матриц связи было выявлено, что диагональные матрицы связи с большим коэффициентом рассеяния приводят к меньшему накоплению шума в резервуаре эхо-сети при увеличении влияния памяти резервуара. *Заключение.* Показано, что функции активации вида сигмоиды со значениями от 0 до 1 подходят для подавления мультипликативных и смешанных шумов. Было рассмотрено накопление шума в резервуаре для трех типов матриц связи внутри резервуара: однородная матрица, ленточная матрица с малым коэффициентом рассеяния и ленточная матрица с большим коэффициентом рассеяния. Было установлено, что эхо-сети с ленточной матрицей с большим коэффициентом рассеяния накапливают шумы меньше всех остальных. Это работает как для аддитивных, так и для мультипликативных шумов.

Ключевые слова: нейронные сети, рекуррентные нейронные сети, эхо-сети, шумовое воздействие, белый шум, нелинейная функция активации.

Благодарности. Работа была поддержана грантом Российского Научного Фонда 21-72-00002.

Для цитирования: Москвитин В. М., Семенова Н. И. Влияние шума на рекуррентные нейронные сети с нелинейными нейронами // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 484–500. DOI: 10.18500/0869-6632-003052. EDN: XGRKMR

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Noise influence on recurrent neural network with nonlinear neurons

V. M. Moskvitin, N. I. Semenova✉

Saratov State University, Russia

E-mail: vmmoskvitin@gmail.com, ✉semenovani@info.sgu.ru

Received 6.03.2023, accepted 2.05.2023, available online 12.07.2023,
published 31.07.2023

Abstract. The purpose of this study is to establish the features of noise propagation and accumulation in a recurrent neural network using a simplified echo network as an example. In this work, we studied the influence of activation function of artificial neurons and the connection matrices between them. *Methods.* We have considered white Gaussian noise sources. We used additive, multiplicative and mixed noise depending on how the noise is introduced into artificial neurons. The noise impact was estimated using the dispersion (variance) of the output signal. *Results.* It is shown that the activation function plays a significant role in noise accumulation. Two nonlinear activation functions have been considered: the hyperbolic tangent and the sigmoid function with range from 0 to 1. It is shown that some types of noise are suppressed in the case of the second function. As a result of considering the influence of coupling matrices, it was found that diagonal coupling matrices with a large blurring coefficient lead to less noise accumulation in the echo network reservoir with an increase in the reservoir memory influence. *Conclusion.* It is shown that activation functions of the form of sigmoid with range from 0 to 1 are suitable for suppressing multiplicative and mixed noise. The accumulation of noise in the reservoir was considered for three types of coupling matrices inside the reservoir: a uniform matrix, a band matrix with a small blurring coefficient, and a band matrix with a large blurring coefficient. It has been found that the band matrix echo networks with a high blurring coefficient accumulates the least noise. This holds for both additive and multiplicative noise.

Keywords: neural networks, recurrent neural networks, echo-state networks, noise influence, white noise, nonlinear activation function.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation (Project no. 21-72-00002).

For citation: Moskvitin VM, Semenova NI. Noise influence on recurrent neural network with nonlinear neurons. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(4):484–500. DOI: 10.18500/0869-6632-003052

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

На данный момент искусственные нейронные сети (ИНС) уже успешно используются в многочисленных областях машинного обучения и решают задачи различной сложности [1]. К таким задачам можно отнести распознавание образов [2, 3], их классификация, улучшение звуковых записей, распознавание речи [4], предсказание климатических явлений [5] и многое другое.

В данной работе рассматриваются рекуррентные сети на примере упрощенной эхо-сети. Такие сети характеризуются тем, что часть их нейронов обладает запаздывающей обратной связью, что позволяет сети «запоминать» свои предыдущие состояния. Подобные сети часто используются для решения задач прогнозирования [6] или распознавания в реальном времени [7].

Усложнение топологий ИНС и поставленных задач может вскоре привести к кризису [8, 9], когда возможностей современных компьютеров и вычислительных кластеров уже не будет достаточно для удовлетворения растущих потребностей. Здесь на помощь приходит новое направление конструирования ИНС — аппаратные нейронные сети [10]. Согласно этому подходу, нейронные сети не создаются с помощью компьютера, а представляют собой реальное устройство, способное обучаться и решать задачи. Сами нейроны и связь между ними реализуются на физическом уровне, то есть система не моделируется на компьютере, а реализуется аппаратно согласно соответствующим физическим принципам. В последние годы наблюдается экспоненциальный рост работ с аппаратными реализациями ИНС. Наибольшую эффективность на данный момент

показывают ИНС, в основе которых лежат лазеры [11], мемристоры [12], спин-трансферные осцилляторы [13]. Связь между нейронами в оптических реализациях ИНС основывается на принципах голографии [14], дифракции [15, 16], интегрированных сетях модуляторов Маха–Цендера [17], спектрального уплотнения каналов [18], оптических связях, реализованных при помощи 3D принтера [19–21].

Основным принципом построения ИНС является распространение сигнала между нейронами при помощи связей с некоторыми коэффициентами (весами). При этом наибольшей эффективности и быстродействия можно добиться при помощи распараллеливания вычислений на высокопроизводительных вычислительных кластерах. Однако в этом случае «узким горлышком» служит скорость обращения к памяти и обработка данных. Максимальная производительность вычислений может быть достигнута только в том случае, если ИНС реализована полностью аппаратно. В этом случае исчезает проблема обращения к памяти и математических операций над большим количеством данных, так как каждый нейрон соответствует аппаратному нелинейному компоненту, а каждое соединение — физическому каналу связи. Физическая реализация ИНС принципиально меняет особенности влияния шумов. В случае цифровой компьютерной реализации ИНС шум может попадать в систему исключительно с входным сигналом, тогда как в аппаратной ИНС существует множество внутренних источников шума с различными свойствами. Настоящая статья направлена на исследование особенностей распространения внутренних шумов в рекуррентных ИНС, выявление способов подавления таких шумов и обоснование устойчивости сетей к некоторым типам шумов.

В наших предыдущих работах мы уже рассматривали влияние шумов на глубокие нейронные сети [22, 23] и предлагали стратегии подавления шума в них [24]. Данная статья является существенным усложнением поставленной задачи, так как рекуррентные сети обладают свойством памяти о своих предыдущих состояниях, следовательно накопление шумов в них должно происходить сложнее, чем в ИНС, не зависящих от временной реализации. В качестве примера рекуррентной сети будет рассмотрена упрощенная эхо-сеть.

Основным предметом исследования данной работы является влияние функции активации и свойства памяти эхо-сети на накопление шума. По этой причине рассматриваются упрощенные матрицы связи между нейронами. Конкретный вид матриц связи существенно зависит от задач, для которых была обучена ИНС, и их статистические особенности могут существенно влиять на накопление шума. Поэтому влияние особых матриц связи уже обученных ИНС на накопление шума будет предметом исследования в последующих работах.

1. Влияние шума на один нейрон

1.1. Основные уравнения. ИНС состоят из искусственных нейронов, чья роль заключается в линейном или нелинейном преобразовании входного сигнала. Это преобразование реализуется при помощи так называемой функции активации. Тип функции активации зависит от поставленной задачи и от эффективности обучения. Так, в рекуррентных нейронных сетях часто используются кусочно-линейные функции и семейство функций класса «сигмоиды». В данной статье будут рассмотрены две функции этого класса: гиперболический тангенс $f(x) = \tanh ax$ и сигмоида вида $f(x) = \frac{1}{1+e^{-ax}}$. В обеих функциях множитель a отвечает за «крутизну» нелинейности. Таким образом, выходной сигнал i -го искусственного нейрона без влияния шума определяется следующим образом:

$$x_i^{\text{out}}(t) = f(x_i^{\text{in}}(t)), \quad (1)$$

где $x_i^{\text{out}}(t)$ — выходной сигнал i -го нейрона в момент времени t , а $x_i^{\text{in}}(t)$ — его входной сигнал.

Для того чтобы указать, какие именно нейроны находятся под шумовым воздействием, мы будем использовать оператор шума \hat{N} , который будет применяться к выходному сигналу без шумового воздействия: $y_i^{\text{out}} = \hat{N}x_i^{\text{out}}$.

В данной статье рассматриваются аддитивный и мультипликативный шумы. Особенность аддитивного шума заключается в том, что он добавляется к выходному сигналу, а мультипликативный умножается на него:

$$y_i^{\text{out}}(t) = \hat{N}x_i^{\text{out}}(t) = x_i^{\text{out}}(t) \cdot (1 + \xi_M(t, i)) + \xi_A(t, i), \quad (2)$$

где ξ — это независимые источники аддитивного (индекс «А») и мультипликативного (индекс «М») белого Гауссова шума с нулевым средним и соответствующими дисперсиями σ_A^2 и σ_M^2 . Свойство независимости источников шума в этом разделе роли не играет, так как рассматривается всего один нейрон. Однако в следующих разделах, в которых изучаются особенности поведения ИНС, это свойство является важным и будет влиять на последующие выводы. Также стоит отметить, что изучение особенностей влияния коррелированного шума на ИНС и его накопления тоже представляет большой интерес, и будет предметом исследования в последующих работах.

1.2. Оценка шумового воздействия. В наших предыдущих работах [22–24] для оценки уровня шума использовалась характеристика «отношение сигнал–шум» (signal-to-noise ratio, SNR), которая вычислялась как отношение среднего сигнала к его стандартному отклонению. Использование такой интерпретации SNR имеет некоторые ограничения. В частности, она может быть применена только к положительным сигналам. Так как в этой статье одной из функций активации является гиперболический тангенс, выходные значения которого находятся в диапазоне от -1 до 1 , такую формулу расчета SNR уже нельзя использовать. По этой причине в данной статье используется более универсальная характеристика, дисперсия $\sigma^2[\cdot]$, которая является мерой разброса значений случайной величины относительно ее математического ожидания и вычисляется следующим образом:

$$\sigma^2[X] = \text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2], \quad (3)$$

где X — некоторая дискретная случайная величина, $E[X]$ — ее математическое ожидание (среднее значение). Для оценки уровня дисперсии в качестве множества X берется множество выходных значений, которые являются откликом сети или одного отдельно взятого нейрона на один и тот же входной сигнал. Такая интерпретация позволяет оценить, какой диапазон значений наиболее подвержен разным шумовым воздействиям. Независимо от знака выходного сигнала, дисперсия будет всегда положительной, и чем ближе ее значение к нулю, тем меньше зашумленность выходного сигнала. Далее в тексте используются общепринятые обозначения математического ожидания $E[\cdot]$ и вариации $\text{Var}[\cdot]$ для оценки уровня шума.

Дисперсия выходного сигнала одного зашумленного нейрона для одного и того же входного сигнала может быть вычислена следующим образом:

$$\sigma^2[y^{\text{out}}] = \text{Var}[x^{\text{out}} \cdot (1 + \xi_M) + \xi_A] = \left(E[y^{\text{out}}]\right)^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_A^2. \quad (4)$$

Как видно из этого уравнения, функция активации не влияет на зависимость дисперсии от среднего выходного сигнала. В случае аддитивного шума дисперсия не зависит от выходного сигнала и определяется только дисперсией источника аддитивного шума. В случае мультипликативного шума зависимость дисперсии выходного сигнала от его среднего является квадратичной. Для оценки справедливости этих выводов далее рассмотрены результаты численного моделирования для двух функций активации с различной крутизной нелинейности.

Для численного моделирования дисперсия выходного сигнала вычисляется следующим образом. Искусственный нейрон в каждый момент времени t получает входной сигнал $x_i^{\text{in}}(t)$ и выдает выходной сигнал $y_i^{\text{out}}(t)$, включающий в себя влияние функции активации и шума.

Для того чтобы оценить его статистические характеристики, каждый входной сигнал $x_i^{\text{in}}(t)$ повторяется $K = 1000$ раз. В результате для каждого t получается набор из K значений $y_i^{\text{out}}(k, t)$, по которому вычисляется среднее и дисперсия: $\mu[y_i^{\text{out}}(t)]$ и $\sigma^2[y_i^{\text{out}}(t)]$. В дальнейшем такая же техника будет использоваться для оценки зашумленности выходного сигнала эхо-сети.

1.3. Один нейрон с функцией активации \tanh . Рассмотрим особенности влияния шумового воздействия на один нейрон с функцией активации «гиперболический тангенс». В качестве входного сигнала используем $T = 200$ случайных значений из диапазона от -1 до 1 . На рис. 1, *a* приведен график функции $f(x) = \tanh \alpha x$ при $\alpha = 1$.

Для того чтобы оценить влияние шума на нейрон, на рис. 1, *b* приведены значения дисперсии в зависимости от среднего значения выходного сигнала. Зеленым цветом показаны зависимости, полученные для аддитивного шума с дисперсией $\sigma_A^2 = 10^{-2}$. Оранжевым цветом показаны зависимости, полученные для мультипликативного шума с $\sigma_M^2 = 10^{-2}$, а синим — смешанный

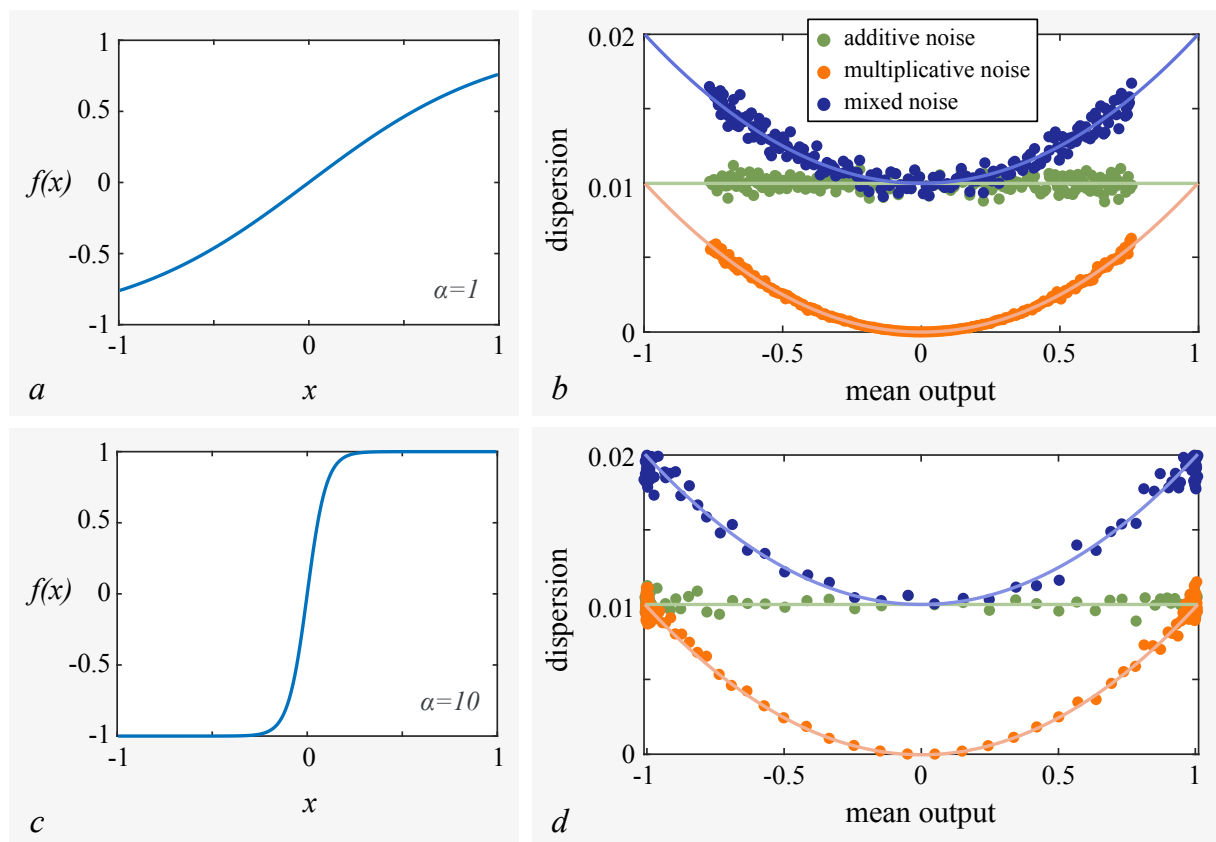


Рис. 1. Влияние шума на один нейрон с функцией активации $f(x) = \tanh \alpha x$. Входной сигнал нейрона — случайные числа из диапазона от -1 до 1 . Нелинейная функция с параметром $\alpha = 1$ (*a*) использовалась для получения зависимости дисперсии от среднего выходного сигнала (*b*) для аддитивного шума (зеленые точки), мультипликативного шума (оранжевые точки) и смешанного шума (синие точки) с дисперсиями $\sigma_A^2 = \sigma_M^2 = 10^{-2}$. Аналогично построены фрагменты *c*, *d* для параметра $\alpha = 10$. На фрагментах *b*, *d* при помощи линий соответствующих цветов показана теоретическая оценка уровня шума, полученная исходя из (4) (цвет онлайн)

Fig. 1. Noise impact on one neuron with activation function $f(x) = \tanh \alpha x$. Input signal contains random numbers from the range $[-1; 1]$. Nonlinear function with $\alpha = 1$ (*a*) was used to calculate the dependencies of dispersion on the mean output signal (*b*) for additive (green points), multiplicative (orange points) and mixed noise (blue points) with dispersions $\sigma_A^2 = \sigma_M^2 = 10^{-2}$. Panels *c*, *d* were prepared in the same manner for parameter $\alpha = 10$. Panels *b*, *d* contain analytical estimation of the noise level based on Eq. (4) shown by the lines of corresponding colors (color online)

шум, совмещающий аддитивный и мультипликативный шумы. Выбранные характеристики шума соответствуют шумам, наблюдаемым в ИНС, реализованным в фотонном эксперименте [15]. Линиями этих же цветов показаны зависимости, полученные исходя из уравнения (4).

Несмотря на то, что функция гиперболического тангенса может принимать значения из диапазона от -1 до 1 , на рис. 1, *b* диапазон средних выходных значений гораздо меньше. Это объясняется следующей особенностью. Если диапазон значений переменной x составляет от -1 до 1 при значении $\alpha = 1$, тогда этому соответствует диапазон значений $f(x)$ от -0.76 до 0.76 . Таким образом, из-за небольшого коэффициента крутизны α диапазон принимаемых значений может быть сильно уменьшен. В остальном сам вид зависимостей дисперсии, а также распределение точек по ним, очень похожи на то, что нами уже было получено для линейных нейронов [22]. Зависимости, полученные для мультипликативного шума, совмещают в себе уровни дисперсий, полученных для аддитивного и мультипликативного шума по отдельности.

Рассмотрим, что происходит с выходным сигналом зашумленного нейрона при увеличении крутизны нелинейности. На рис. 1, *c* приведен график гиперболического тангенса при $\alpha = 10$, что сопровождается существенным изменением крутизны нелинейности по сравнению с графиком на рис. 1, *a*. Как видно из графиков рис. 1, *d*, общий уровень дисперсии остается примерно тем же, как и для $\alpha = 1$, их небольшое изменение вызвано тем, что теперь $f(x)$ простирается уже на весь диапазон значений от -1 до 1 . Строго говоря, это должна быть та же самая зависимость, описываемая уравнением (4). Основной особенностью рис. 1, *d* является фокусирование точек. Если при $\alpha = 1$ точки были однородно распределены вдоль всего диапазона принимаемых значений, то теперь при $\alpha = 10$ точки сфокусированы около средних значений выходного сигнала -1 и 1 .

Свойство фокусирования точек можно объяснить следующим образом. Возвращаясь к графику рис. 1, *c*, можно отметить, что из-за ярко выраженной нелинейности и особенностей класса функций сигмоид большинство отрицательных значений x соответствуют значениям $f(x) \approx -1$, а большинство положительных значений x — значениям $f(x) \approx 1$. По этой причине для ярко выраженной нелинейности точки начинают фокусироваться около двух значений. Далее мы будем называть их *точками фокусирования*.

1.4. Один нейрон с функцией активацией «сигмоида». Рассмотрим, что происходит при другой нелинейности — сигмоиде. Соответствующие графики приведены на рис. 2. Так же, как и для гиперболического тангенса здесь рассматриваются два значения коэффициента крутизны нелинейности $\alpha = 1$ (рис. 2, *a, b*) и $\alpha = 10$ (рис. 2, *c, d*). Сравнивая сами функции активации на рис. 1 и 2, можно заметить, что в случае сигмоиды диапазон принимаемых значений изменяется до $(0; 1)$. Этим объясняется то, что дисперсия теперь имеет несколько другой вид. Однако, если сравнить эти зависимости с тем, что было получено для гиперболического тангенса, то видно, что в случае сигмоиды мы видим только правую часть зависимостей, полученных для гиперболического тангенса. Общий уровень шума остается примерно тем же, и при больших α снова появляются точки фокусирования. Если для гиперболического тангенса точки фокусирования были -1 и 1 , то для сигмоиды это 0 и 1 .

Стоит обратить внимание, что если одна из точек фокусирования равна нулю, то половина точек дисперсии будет сфокусирована около значения 0 . В случае мультипликативного шума (оранжевые точки) получается, что половина выходных значений лишается шумового воздействия из-за умножения на 0 . Таким образом, в случае такого шумового воздействия лучше использовать функцию активации типа сигмоиды, так как половина выходного сигнала перестает испытывать шумовое воздействие. Для аддитивного шума это не работает, а для мультипликативного и смешанного шумов такая стратегия может быть успешно применена. Это подтверждают графики рис. 2, *b, d*.

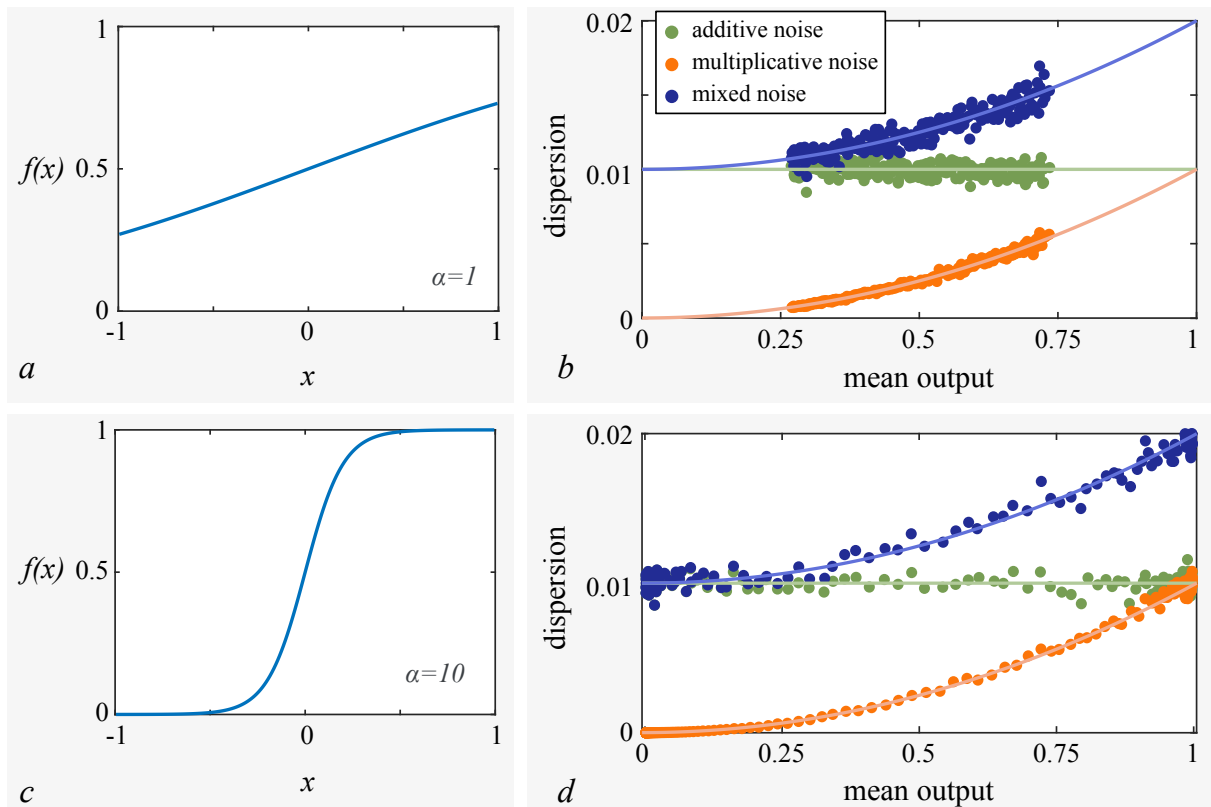


Рис. 2. Влияние шума на один нейрон с функцией активации $f(x) = 1/(1 + e^{-\alpha x})$. Входной сигнал нейрона — случайные числа из диапазона от -1 до 1 . Нелинейная функция с параметром $\alpha = 1$ (a) использовалась для получения зависимости дисперсии от среднего выходного сигнала (b) для аддитивного шума (зеленые точки), мультипликативного шума (оранжевые точки) и смешанного шума (синие точки) с дисперсиями $\sigma_A^2 = \sigma_M^2 = 10^{-2}$. Аналогично построены фрагменты c, d для параметра $\alpha = 10$. На фрагментах b, d при помощи линий соответствующих цветов показана теоретическая оценка уровня шума, полученная исходя из (4) (цвет онлайн)

Fig. 2. Noise impact on one neuron with activation function $f(x) = 1/(1 + e^{-\alpha x})$. Input signal contains random numbers from the range $[-1; 1]$. Nonlinear function with $\alpha = 1$ (a) was used to calculate the dependencies of dispersion on the mean output signal (b) for additive (green points), multiplicative (orange points) and mixed noise (blue points) with dispersions $\sigma_A^2 = \sigma_M^2 = 10^{-2}$. Panels c, d were prepared in the same manner for parameter $\alpha = 10$. Panels b, d contain analytical estimation of the noise level based on Eq. (4) shown by the lines of corresponding colors (color online)

Все перечисленные выше результаты подтверждаются аналитической оценкой зашумленности выходного сигнала (4).

Рассмотрим, как ведет себя дисперсия при изменении параметра крутизны нелинейности α и входного сигнала x^{in} (рис. 3). На рисунке цветом показана вариация в зависимости от параметра α и входного сигнала. В случае обеих функций активации уровень аддитивного шума не зависит ни от входного сигнала, ни от крутизны нелинейности (рис. 3 a, d).

Как видно из рис. 3, b, в случае гиперболического тангенса наименьшей дисперсии можно добиться при работе с малыми значениями $|\alpha|$ или малыми $|x^{\text{in}}|$. Однако при этом функция активации близка к линейной, и для некоторых задач это не применимо. Если увеличивать $|\alpha|$, то общий уровень дисперсии растет. Как видно из рис. 3, e, наиболее эффективной функцией активации с точки зрения подавления мультипликативного шума является нелинейность вида $f(x) = 1/(1 + e^{-\alpha x})$. Свойство уменьшения шума при малых $|\alpha|$ и $|x^{\text{in}}|$ справедливо и для этой функции активации, однако к этому еще добавляется свойство больших $|\alpha|$, которое заключается

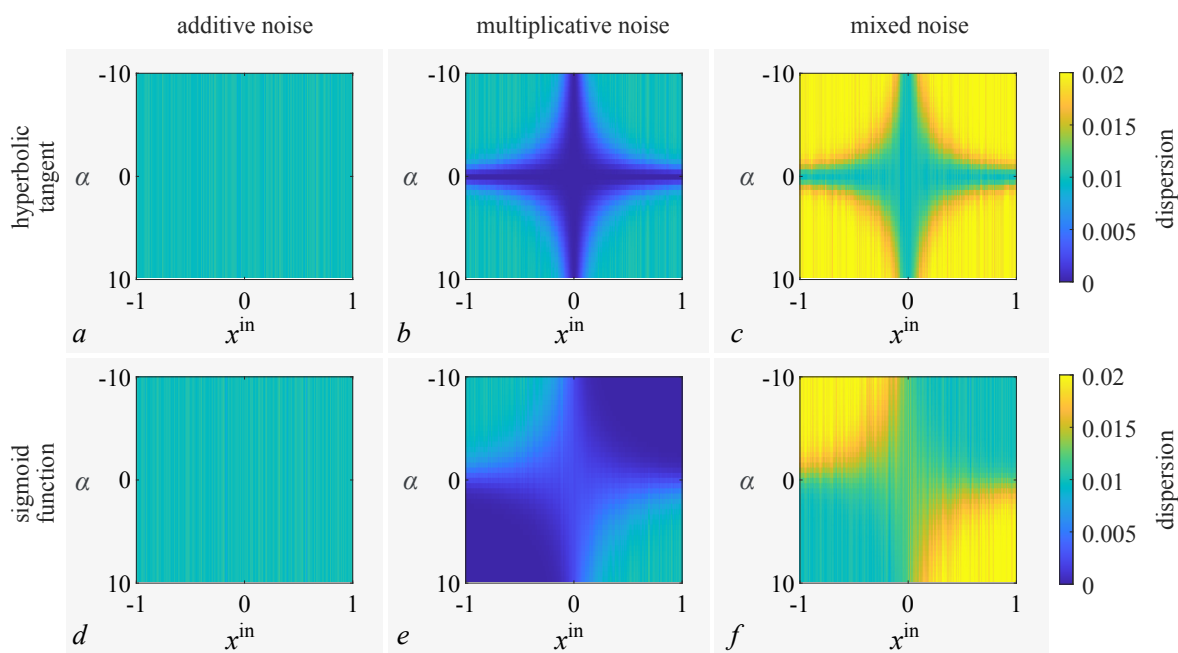


Рис. 3. Влияние входного сигнала x^{in} и параметра α на дисперсию выходного сигнала одного нейрона с функцией активации $f(x) = \tanh \alpha x$ (a-c) и функцией активации $f(x) = 1/(1 + e^{-\alpha x})$ (d-f). Типы шумов: a, d – аддитивный шум, b, e – мультипликативный шум, c, f – смешанный шум. Остальные параметры: $\sigma_A^2 = \sigma_M^2 = 10^{-2}$ (цвет онлайн)

Fig. 3. The influence of input signal x^{in} and parameter α on dispersion of the output signal of one neuron with activation function $f(x) = \tanh \alpha x$ (a-c) and activation function $f(x) = 1/(1 + e^{-\alpha x})$ (d-f). Noise types: a, d – additive noise, b, e – multiplicative noise, c, f – mixed noise. Other parameters: $\sigma_A^2 = \sigma_M^2 = 10^{-2}$ (color online)

в том, что при высокой крутизне нелинейности половина точек дисперсии фокусируется около 0, обнуляя при этом шумовое воздействие. Эта нелинейность оптимальна для мультипликативного и смешанного шума.

Все выводы, сделанные для мультипликативного шума, справедливы и для смешанного шума (рис. 3, c, f). Качественный вид дисперсии и его зависимость от входного сигнала и параметра α для обоих типов шумов одинаков. Количественно уровень дисперсии является суммой дисперсий, полученных для аддитивного и мультипликативного шума по отдельности.

2. Рекуррентные нейронные сети

2.1. Основные определения и составляющие сети. Существует большое количество разных типов нейронных сетей. Их топология и тип искусственных нейронов существенно зависит от решаемой задачи. Для решения задач прогнозирования или распознавания во времени, как правило, применяются рекуррентные сети. В данной работе в качестве примера таких сетей будет рассмотрена эхо-сеть, схема которой приведена на рис. 4.

Эхо-сеть характеризуется наличием входного слоя, отвечающего за получение и трансформацию входного сигнала. Далее этот сигнал передается в скрытый слой, который называется резервуаром. Резервуар состоит из N нейронов, которые связаны как с входными нейронами, которые передают входной сигнал в момент времени t , так и с тем же резервуаром, принимая сигнал резервуара в предыдущий момент времени ($t - 1$). Связь с входным слоем осуществляется при помощи матрицы связи \mathbf{W}^{in} . Если входной слой состоит из одного нейрона, то размер этой

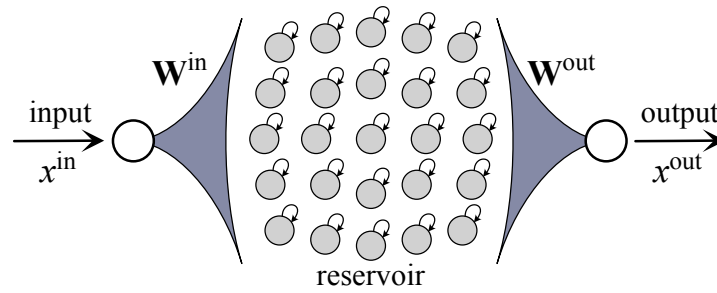


Рис. 4. Схема рассматриваемой эхо-сети. Белым цветом показаны входной и выходной нейроны без шумового воздействия. Серым показаны нейроны резервуара с нелинейной функцией активации, находящиеся под шумовым воздействием

Fig. 4. Schematic representation of considered echo state network (ESN). Input and output neurons without noise impact are shown by white color. The neurons of reservoir with nonlinear activation function receiving noise influence are colored in gray

матрицы составляет $(1 \times N)$. Матрица связи внутри резервуара \mathbf{W}^{res} имеет размер $(N \times N)$. Тогда состояние нейронов в момент времени t можно задать при помощи следующего уравнения:

$$\mathbf{x}_t^{\text{res}} = f\left(\beta x_t^{\text{in}} \cdot \mathbf{W}^{\text{in}} + \gamma \mathbf{y}_{t-1}^{\text{res}} \cdot \mathbf{W}^{\text{res}}\right); \quad \mathbf{y}_t^{\text{res}} = \hat{\mathbf{N}} \mathbf{x}_t^{\text{res}}, \quad (5)$$

где индексы t и $t - 1$ обозначают моменты времени, функция $f(\cdot)$ — функция активации. Жирным шрифтом обозначены \mathbf{x}^{res} и \mathbf{y}^{res} , которые являются векторами $(1 \times N)$, описывающими состояние N нейронов резервуара. В дальнейшем значение $N = 100$ не будет изменяться. Было показано, что описанная выше эхо-сеть позволяет предсказывать квазипериодическую и хаотическую динамику [25, 26].

Параметры β и γ отвечают за вклад входного сигнала и «памяти» резервуара, соответственно. В уже обученной сети нет возможности изменять матрицы связи \mathbf{W}^{in} и \mathbf{W}^{res} , и поэтому невозможно контролировать, что в большей степени влияет на состояние резервуара: входной сигнал или предыдущие состояния резервуара. В данной работе основной задачей является установление общих особенностей влияния шума, поэтому планируется рассмотреть, как сильно свойство памяти влияет на выходной сигнал путем введения дополнительного параметра γ . Однако, если изменять только параметр γ , то это приведет к увеличению или уменьшению амплитуды выходного сигнала. Для того чтобы сохранить диапазон выходных значений, был добавлен параметр β , управляющий вкладом входного сигнала, с условием $\beta + \gamma = 1$. Похожий подход использовался в работе [27].

В случае эхо-сети количество нейронов в выходном слое, как правило, совпадает с количеством нейронов во входном слое. Это делается для того, чтобы нейронную сеть можно было замкнуть саму на себя для решения задач прогнозирования, когда выход нейронной сети подается на ее же вход. Таким образом, как видно из рис. 4, выходной слой состоит из одного нейрона. Выходной сигнал этого нейрона, как и выходной сигнал всей сети задается как

$$\mathbf{x}_t^{\text{out}} = \mathbf{y}_t^{\text{res}} \cdot \mathbf{W}^{\text{out}}, \quad (6)$$

где матрица \mathbf{W}^{out} размером $(N \times 1)$ отвечает за связь резервуара с выходным слоем.

В данной статье нас в первую очередь интересует вопрос накопления шума внутри резервуара. Поэтому шумовое воздействие подается только в нейроны резервуара (см. (5)). Таким образом, входной и выходной нейрон являются линейными без шумового воздействия, поэтому на рис. 4 они обозначены белым цветом, а нейроны резервуара — серым. Входная матрица состоит из N элементов, равных единице, то есть каждый нейрон резервуара получает один и тот же входной сигнал. Для того чтобы исключить влияние матриц связи на статистику, выходная матрица будет состоять из значений $1/N$.

В эхо-сетях матрица связи внутри резервуара задается один раз и не меняется в процессе обучения. Как правило, в процессе обучения изменяется только матрица, связывающая резервуар с выходным слоем [28]. В следующем разделе рассмотрены и описаны основные типы матриц \mathbf{W}^{res} , которые часто используются в эхо-сетях.

2.2. Матрицы связи внутри резервуара. В данной статье рассмотрены два основных типа матриц связи \mathbf{W}^{res} .

Один из них — однородная матрица связи (uniform connection matrix), в которой элементы равны $1/N$. Как уже было показано в наших предыдущих работах [23, 24], с точки зрения распространения шумового воздействия это аналогично матрице, состоящей из случайных значений со средним значением $1/N$.

С другой стороны, в рекуррентных нейронных сетях матрицы связи внутри резервуара иногда имеют особый вид, когда все элементы задаются равными нулю, кроме элементов главной диагонали и некоторых параллельных им [15, 28]. Такие матрицы часто называют ленточными (band matrix). При такой конфигурации элементы главной диагонали оказываются больше остальных элементов, то есть наибольший вклад в состояние i -го нейрона резервуара вносит этот же i -й элемент в предыдущий момент времени. Для того чтобы воссоздать похожую ситуацию, введем дополнительный коэффициент рассеяния ζ , при помощи которого будем задавать ширину полосы, то есть сколько элементов слева и справа от главной диагонали не равны нулю. Для сравнения шумового воздействия необходимо сохранить общий диапазон значений $y_{t-1}^{\text{res}} \cdot \mathbf{W}^{\text{res}}$, то есть чтобы суммы элементов каждой строки и столбца были равны единице. Чтобы задать матрицу, удовлетворяющую описанным выше условиям, воспользуемся Гауссовой функцией. Тогда ненулевые элементы диагональной матрицы с коэффициентом рассеяния ζ будут задаваться следующим образом:

$$W_{k,i}^{\text{res}} = \frac{e^{-(k/\zeta^2)}}{\sum_{j=i-\zeta}^{i+\zeta} e^{-(j/\zeta^2)}}, \quad k \in [i - \zeta; i + \zeta]. \quad (7)$$

Примеры заданных таким образом матриц приведены на рис. 5 для коэффициентов рассеяния $\zeta = 2$ (a) и $\zeta = 20$ (b), соответствующих ширине полосы ленточной матрицы 4 и 40.

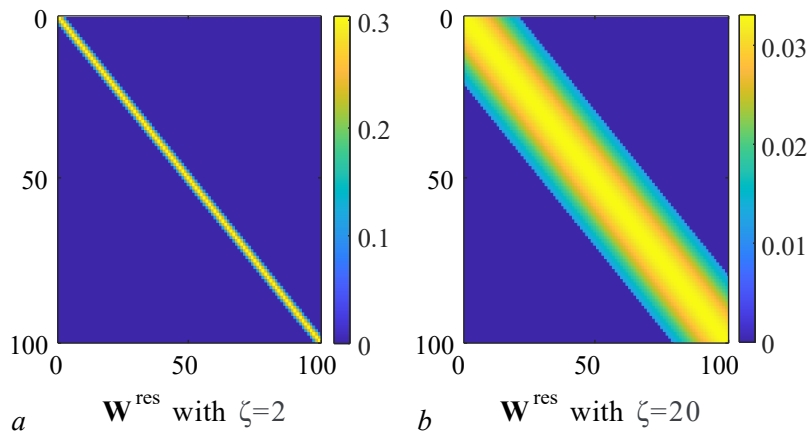


Рис. 5. Примеры рассматриваемых ленточных матриц, заданных при помощи (7) с коэффициентами рассеяния $\zeta = 2$ (a) и $\zeta = 20$ (b), которые соответствуют ширине полосы ленточной матрицы 4 и 40 (цвет онлайн)

Fig. 5. Examples of considered band matrices obtained using (7) with blurring coefficient $\zeta = 2$ (a) and $\zeta = 20$ (b). These values correspond to bandwidth of a band matrix equal to 4 and 40 (color online)

3. Влияние матрицы связи \mathbf{W}^{out}

Рассмотрим, как влияет шумовое воздействие внутри резервуара на статистические характеристики выходного сигнала эхо-сети. Ранее был рассмотрен один нейрон, и для оценки его выходного сигнала использовалась дисперсия.

Например, на рис. 6, *a* приведена зависимость дисперсии выходного сигнала эхо-сети x_t^{out} от среднего выходного значения. Одновременно по тем же данным был построен график зависимости дисперсии от времени (рис. 6, *b*) для эхо-сети, в которой входной сигнал меняется во времени согласно графику рис. 6, *c*. Эти результаты были получены для резервуара с нейронами, у которых в качестве функции активации выступает гиперболический тангенс. Аналогично были построены графики рис. 6, *d-f* для функции активации $f(x) = 1/(1 + e^{-\alpha x})$.

Для того чтобы понять, как свойство памяти резервуара влияет на конечный результат, сначала рассмотрим случай, когда $\gamma = 0$. Это соответствует ситуации, когда нейроны резервуара лишены свойства памяти, и получают только входной сигнал в момент времени t . Эти результаты приведены на рис. 6 для обеих функций активации. Сравнивая этот график с результатами, полученными для одного нейрона, можно заметить, что формы зависимостей совпадают, но количественно порядок дисперсии для сети изменяется с 10^{-2} до 10^{-4} . Падение общего уровня дисперсии до 10^{-4} вызвано выходной матрицей связи с элементами $1/N$. Выходной сигнал задается следующим образом:

$$x^{\text{out}} = \sum_{i=1}^N y_i^{\text{res}} \cdot W_i^{\text{out}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^{\text{res}}. \quad (8)$$

По правилам вычисления вариации, вариация суммы некоррелированных независимых случайных величин вычисляется как сумма вариаций этих величин: $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$.

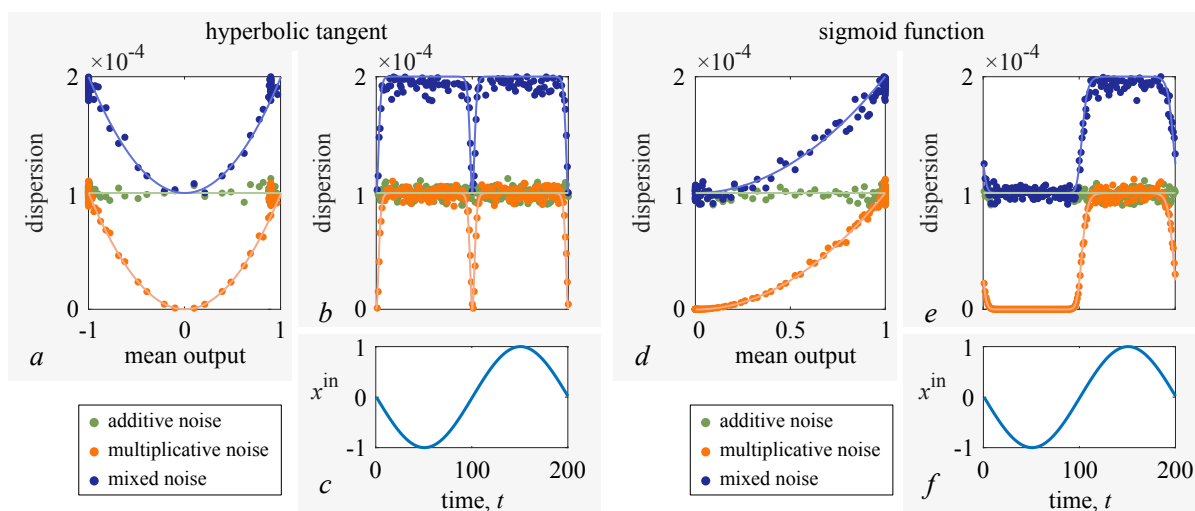


Рис. 6. Зависимость дисперсии выходного сигнала от среднего выходного сигнала (*a, d*), зависимость дисперсии (*b, e*) и входного (*c, f*) сигнала от времени для эхо-сети с однородной матрицей связи \mathbf{W}^{res} . Фрагменты *a-c* построены для сети с функцией активации $f(x) = \tanh \alpha x$, а фрагменты *d-f* — для функции $f(x) = 1/(1 + e^{-\alpha x})$. Параметры: $\gamma = 0$, $\alpha = 10$, $\sigma_A^2 = \sigma_M^2 = 10^{-2}$. На фрагментах *a, b, d, e* при помощи линий соответствующих цветов показана теоретическая оценка уровня шума, полученная исходя из (4) (цвет онлайн)

Fig. 6. Dependencies of dispersion of the output ESN signal on mean output signal (*a, d*), and how this dispersion (*b, e*) and input signal (*c, f*) changes in time in ESN with uniform connection matrix \mathbf{W}^{res} . Panels *a-c* were prepared for ESN with activation function $f(x) = \tanh \alpha x$, while panels *d-f* correspond to function $f(x) = 1/(1 + e^{-\alpha x})$. Parameters: $\gamma = 0$, $\alpha = 10$, $\sigma_A^2 = \sigma_M^2 = 10^{-2}$. Panels *a, b, d, e* contain analytical estimation of the noise level based on Eq. (4) shown by the lines of corresponding colors (color online)

Если случайная величина умножается на некоторую константу, то результирующая вариация вычисляется как произведение квадрата этой константы и вариации случайной величины: $\text{Var}[c \cdot X] = c^2 \cdot \text{Var}[X]$. Тогда если на резервуар действует аддитивный шум, вариация выходного сигнала вычисляется как

$$\text{Var}[x^{\text{out}}] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \text{Var}[y_i^{\text{res}}] = \frac{1}{N} \cdot \sigma_A^2. \quad (9)$$

Для одного изолированного нейрона вариация составляла σ_A^2 . Таким образом, вариация выходного сигнала уменьшается в $N = 100$ раз. Аналогичные выводы можно сделать и для мультипликативного шума.

Конкретный вид матрицы связи \mathbf{W}^{out} напрямую зависит от решаемой задачи и процесса обучения. Однако с точки зрения распространения шума эта матрица может быть рассмотрена как набор случайных значений с некоторым средним значением и средним квадратическим значением. Подобный подход несмотря на упрощение был нами успешно применен для глубокой сети [23] и показал свою эффективность для обученной сети. В общем случае множитель $1/N$ не может быть вынесен за пределы суммы в формуле (9), и тогда дисперсия выходного сигнала может быть вычислена следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Var}[x^{\text{out}}] &= \sum_{i=1}^N \text{Var}[y_i^{\text{res}} \cdot W_i^{\text{out}}] = \sum_{i=1}^N (W_i^{\text{out}})^2 \cdot \text{Var}[y_i^{\text{res}}] = \\ &= \sum_{i=1}^N (W_i^{\text{out}})^2 \cdot (\sigma_A^2 + \sigma_M^2 \cdot (E[y_i^{\text{res}}])^2) = \sigma_A^2 \cdot N \eta^2(\mathbf{W}^{\text{out}}) + \sigma_M^2 \cdot \sum_{i=1}^N (W_i^{\text{out}})^2 (E[y_i^{\text{res}}])^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\eta^2(\mathbf{W}^{\text{out}})$ — среднее квадратическое значение матрицы \mathbf{W}^{out} , которое вычисляется как $\eta^2(\mathbf{W}^{\text{out}}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (W_i^{\text{out}})^2$. Таким образом, если на резервуар действует только аддитивный шум, дисперсия выходного сигнала в общем случае выглядит как $N \cdot \eta^2(\mathbf{W}^{\text{out}}) \cdot \sigma_A^2$. Если матрица \mathbf{W}^{out} состоит из элементов $1/N$, то это значение может быть сведено к формуле (9).

В следующих разделах главным образом рассмотрено влияние матриц связи *внутри* резервуара на полученные результаты. Для того чтобы выходная матрица связи \mathbf{W}^{out} не искажала полученные результаты, мы будем задавать ее однородной и состоящей из элементов $1/N$.

4. Распространение шума в эхо-сети с однородной матрицей \mathbf{W}^{res}

В этом разделе рассматривается в том числе и влияние параметра γ на накопление шума. Параметр γ отвечает за вклад предыдущих состояний резервуара в новый выходной сигнал. По сути, этот параметр отвечает за «память» эхо-сети. Это говорит о том, что теперь недостаточно использовать в качестве входного сигнала случайную последовательность чисел, так как форма входного сигнала также может иметь большое значение. По этой причине теперь мы будем приводить зависимость дисперсии не только от среднего выходного сигнала, но и от времени t .

Рассмотрим, что происходит с дисперсией, если нейроны резервуара принимают на вход одновременно и сигнал от входного нейрона, и предыдущий сигнал резервуара. На рис. 7 приведены результаты расчета дисперсии для случая $\gamma = 0.5$ для обоих типов функции активации. Из сравнения рис. 6 и 7 видно, что общий вид зависимостей меняется.

В случае $\gamma = 0$ вид зависимости дисперсии от среднего выходного сигнала совпадает с соответствующими графиками для одного нейрона. Что же касается зависимостей дисперсии от времени, то их можно охарактеризовать следующим образом. Аддитивный шум приводит к постоянному уровню дисперсии независимо от времени для обеих функций активации, а влияние мультипликативного шума существенно зависит от входного сигнала. Дисперсия находится на том же уровне, что и для аддитивного шума, если входной сигнал соответствует выходному

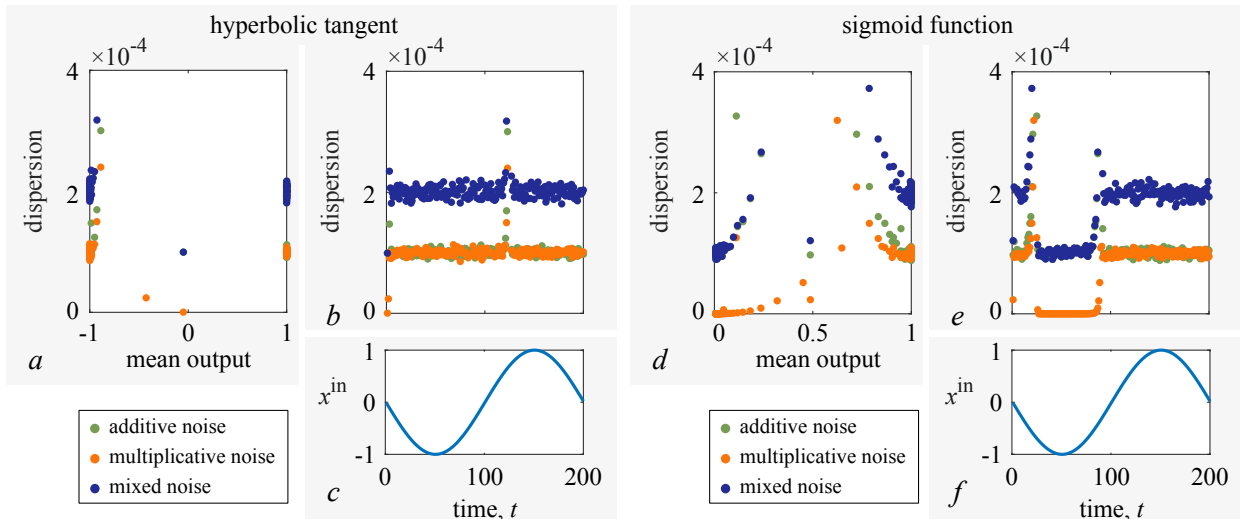


Рис. 7. Зависимость дисперсии выходного сигнала эхо-сети от его среднего и времени. Рисунок подготовлен аналогично рис. 6, но для параметра $\gamma = 0.5$ (цвет онлайн)

Fig. 7. Dispersion of the output ESN signal depending on its mean and time. This figure was prepared in the same manner as Fig. 6 but for parameter $\gamma = 0.5$ (color online)

сигналу, близкому к 1 или -1 . Например, в случае гиперболического тангенса (см. рис. 6, b) левая половина оранжевой зависимости соответствует отрицательному входному сигналу (см. рис. 6, c), а правая — положительному. Аналогично для сигмоиды: положительные значения входного сигнала приводят к тому же уровню дисперсии (см. рис. 6, e). Если же значения входного сигнала приводят к нулевому выходному сигналу, то уровень дисперсии мультипликативного шума падает до нулевого уровня. Для выбранной формы входного сигнала в сочетании с функцией активации \tanh (см. рис. 6, b) это приводит к резкому падению уровня дисперсии около значений $t = 0, 100, 200$, когда входной сигнал равен нулю. В случае сигмоиды нулевому выходному сигналу соответствует не одно значение входного сигнала, а целый диапазон отрицательных значений входного сигнала, поэтому дисперсия для мультипликативного шума в этом случае становится близкой к нулю для времени $t \in [0; 100]$ (см. рис. 6, e). Кроме этого, для обеих нелинейностей, как и для одного нейрона, характерно фокусирование точек.

В случае $\gamma = 0.5$ это свойство фокусирования проявляется сильнее (рис. 7, a, d). Увеличение «памяти» эхо-сети приводит к росту дисперсии промежуточных точек. По этой причине, несмотря на то, что большинство точек зависимостей находится на том же уровне, что и для $\gamma = 0$, средний уровень дисперсии растет с увеличением γ . В случае функции активации «сигмоида» количество точек, соответствующих нулевому уровню дисперсии, уменьшается при увеличении параметра γ , и при $\gamma \rightarrow 1$ все точки зависимости дисперсии становятся на один уровень, как это было для гиперболического тангенса. Падение дисперсии в случае мультипликативного шума почти до нуля объясняется тем, что для части отрицательного входного сигнала выходной сигнал равен нулю, как это было и для одного нейрона и для $\gamma = 0$.

5. Распространение шума в эхо-сети с ленточной матрицей \mathbf{W}^{res}

В случае, если рассматривается эхо-сеть с диагональной матрицей, зависимости дисперсии от среднего выходного сигнала и времени качественно остаются такими же, как для однородной матрицы. Существуют лишь незначительные количественные отличия.

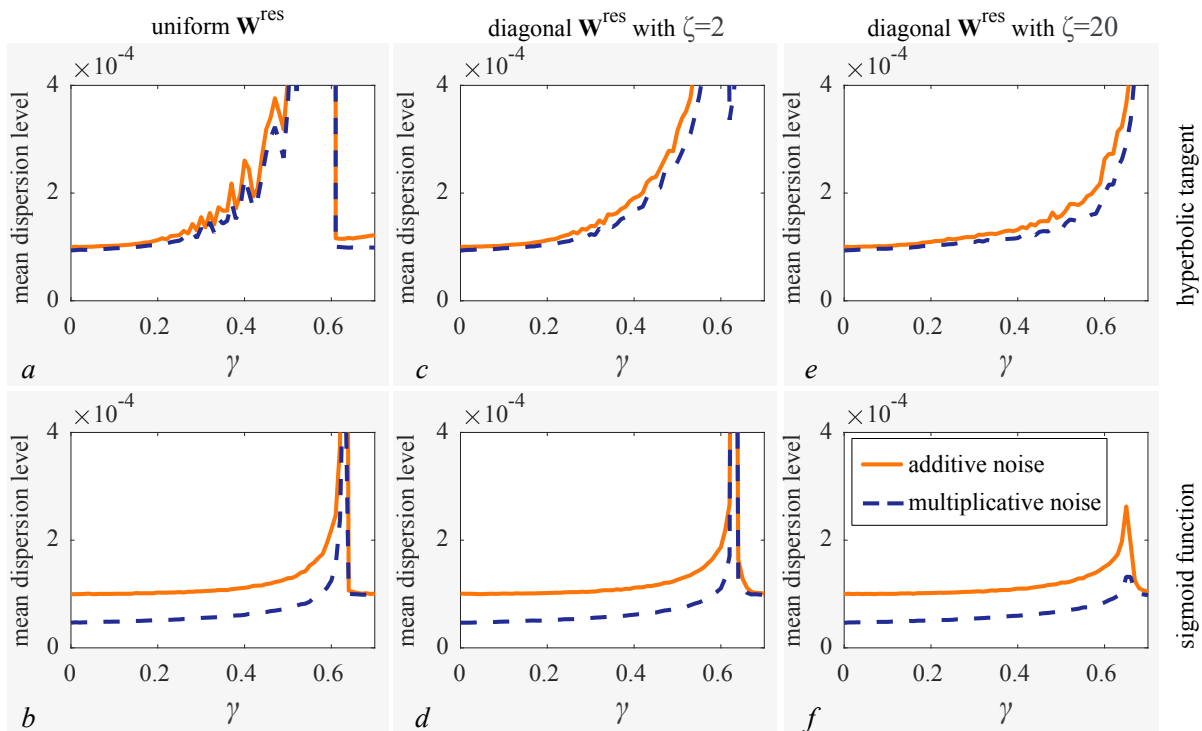


Рис. 8. Зависимость среднего уровня дисперсии от параметра γ . Дисперсия рассчитывалась по выходному сигналу эхо-сети с однородной матрицей \mathbf{W}^{res} (a, b), ленточной матрицей \mathbf{W}^{res} с $\zeta = 2$ (c, d), ленточной матрицей \mathbf{W}^{res} с $\zeta = 20$ (e, f). Верхние фрагменты подготовлены для функции активации $f(x) = \tanh \alpha x$, а нижние – для функции $f(x) = 1/(1 + e^{-\alpha x})$. Остальные параметры: $\alpha = 10$, $\sigma_A^2 = \sigma_M^2 = 10^{-2}$ (цвет онлайн)

Fig. 8. Dependencies of mean dispersion level on parameter γ . Dispersion is calculated by the output signal of ESN with uniform matrix \mathbf{W}^{res} (a, b), band matrix \mathbf{W}^{res} with $\zeta = 2$ (c, d), band matrix \mathbf{W}^{res} with $\zeta = 20$ (e, f). Top panels were prepared for activation function $f(x) = \tanh \alpha x$, while bottom panels correspond to function $f(x) = 1/(1 + e^{-\alpha x})$. Parameters: $\alpha = 10$, $\sigma_A^2 = \sigma_M^2 = 10^{-2}$ (color online)

В случае гиперболического тангенса дисперсия находится на примерно одном уровне 10^{-4} независимо от входного сигнала для аддитивного и мультипликативного шума. В случае сигмоиды и аддитивного шума дисперсия находится примерно на том же уровне. Если функция активации задается как сигмоида и на нейроны резервуара действует мультипликативный или смешанный шум, тогда для значений дисперсии характерно падение почти до нулевого уровня при отрицательном входном сигнале. При увеличении параметра γ количество таких точек уменьшается, и при $\gamma \rightarrow 1$ точки зависимости дисперсии тоже стремятся к одному уровню. Таким образом, все выводы про качественный вид зависимостей совпадают с выводами, описанными в разделе 4. Поэтому далее рассмотрим количественные аспекты.

Рассмотрим, что происходит со средним уровнем дисперсии при изменении параметра γ . На рис. 8 приведена зависимость дисперсии выходного сигнала от степени влияния запаздывающей обратной связи резервуара γ для трех матриц связи \mathbf{W}^{res} : однородная матрица связи, рассмотренная в предыдущем разделе (рис. 8, a, b), и диагональные матрицы с коэффициентами рассеяния $\zeta = 2$ (рис. 8, c, d) и $\zeta = 20$ (рис. 8, e, f). Эти зависимости были построены для обоих типов функции активации: гиперболический тангенс (верхние фрагменты) и сигмоида (нижние фрагменты).

Параметр γ отвечает за вклад памяти резервуара. При $\gamma > 0.5$ вклад входного сигнала уменьшается ($\beta < 0.5$), и больший вклад поступает со стороны резервуара с зашумленными нейронами в предыдущий момент времени. Так как источники шума независимые, это приводит

к существенному накоплению шума. По этой причине при $\gamma < 0.5$ общий уровень шума остается примерно на одном уровне, а при $\gamma > 0.5$ он начинает резко расти.

Как видно из рис. 8, при $\gamma \rightarrow 0.6$ на всех зависимостях наблюдается рост. Это связано с тем, что на зависимостях дисперсии от времени присутствуют некоторые выбросы (см. рис. 7). Их количество и амплитуда увеличивается с ростом γ , что сказывается на вычислении среднего уровня дисперсии. Строго говоря, независимо от параметра γ большинство точек зависимости дисперсии от времени принадлежит уровню 10^{-4} для аддитивного и мультипликативного шумов при функции активации, заданной как гиперболический тангенс. Такая же ситуация наблюдается, если функция активации задана как сигмоида и в резервуаре присутствуют только аддитивные шумы. Если в системе есть мультипликативные шумы, то правильнее использовать сигмоиду в качестве функции активации, так как средний уровень дисперсии выходного сигнала для нее ниже (синие графики на рис. 8, *b, d, f*). Сравнивая зависимости, изображенные на рис. 8, можно также сделать вывод, что накопление выбросов и увеличение среднего уровня дисперсии происходит медленнее, если матрица резервуара \mathbf{W}^{res} задана как диагональная матрица с большим коэффициентом рассеяния $\zeta = 20$, нежели при $\zeta = 2$ или для однородной матрицы.

Для некоторых фрагментов рис. 8 характерно резкое падение среднего уровня дисперсии при $\gamma > 0.6$. Из-за этого может сложиться неверное впечатление, что оптимальным будет выбор $\gamma > 0.6$. Однако этот эффект вызван тем, что в системе наблюдается почти полное замещение входного сигнала. В связи с этим такой коэффициент γ используется крайне редко.

Заключение

В данной работе рассмотрено влияние шума на рекуррентные сети на примере эхо-сети, а также влияние нелинейности функции активации и типов матриц связи на распространение и накопление аддитивного, мультипликативного и смешанного шумов.

На примере функции сигмоиды вида $f(x) = 1/(1 + e^{-\alpha x})$ с одной из точек фокусирования около нуля мы показали, что такие функции активации хорошо подходят для подавления мультипликативного и смешанного шумов. Влияние аддитивного шума и дисперсия выходного сигнала не зависят от входного сигнала и типа функции активации.

Кроме того, было рассмотрено накопление шума в резервуаре эхо-сети для трех типов матриц связи внутри резервуара: однородная матрица, ленточная матрица с малым коэффициентом рассеяния и ленточная матрица с большим коэффициентом рассеяния. Для того чтобы показать влияние шума в чистом виде, были рассмотрены упрощенные модели основных типов матриц связи внутри резервуара.

Рассмотренная однородная матрица соответствует матрице, заданной случайным образом с некоторым средним значением. Еще одним типом матриц, которые часто используются в рекуррентных нейронных сетях, являются ленточные матрицы, в которых все элементы кроме элементов главной диагонали и некоторых элементов параллельных им, равны нулю. Похожие матрицы были воссозданы в этой статье, когда элементы матрицы задавались при помощи Гауссовой функции с коэффициентом рассеяния ζ , задающим, сколько ненулевых элементов слева и справа от главной диагонали не равны нулю. Нами было установлено, что эхо-сети с диагональной матрицей связи с большим коэффициентом рассеяния меньше накапливают шумы с увеличением влияния памяти сети, контролируемого параметром γ .

References

1. LeCun Y, Bengio Y, Hinton G. Deep learning. Nature. 2015;521(7553):436–444. DOI: 10.1038/nature14539.
2. Krizhevsky A, Sutskever I, Hinton GE. ImageNet classification with deep convolutional neural networks. Commun. ACM. 2017;60(6):84–90. DOI: 10.1145/3065386.

3. Maturana D, Scherer S. VoxNet: A 3D Convolutional Neural Network for real-time object recognition. In: 2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 28 September 2015–02 October 2015, Hamburg, Germany. New York: IEEE; 2015. P. 922–928. DOI: 10.1109/IROS.2015.7353481.
4. Graves A, Mohamed AR, Hinton G. Speech recognition with deep recurrent neural networks. In: 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 26–31 May 2013, Vancouver, BC, Canada. New York: IEEE; 2013. P. 6645–6649. DOI: 10.1109/ICASSP.2013.6638947.
5. Kar S, Moura JMF. Distributed consensus algorithms in sensor networks with imperfect communication: Link failures and channel noise. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2009;57(1):355–369. DOI: 10.1109/TSP.2008.2007111.
6. Mandic DP, Chambers JA. *Recurrent Neural Networks for Prediction: Learning Algorithms, Architectures and Stability*. New York: Wiley; 2001. 304 p. DOI: 10.1002/047084535X.
7. Bailador G, Roggen D, Tröster G, Triviño G. Real time gesture recognition using continuous time recurrent neural networks. In: 2nd International ICST Conference on Body Area Networks. 11th–13th Jun 2007, Florence, Italy. ICST; 2007. 8 p. DOI: 10.4108/bodynets.2007.149.
8. Hasler J, Marr H. Finding a roadmap to achieve large neuromorphic hardware systems. *Frontiers in Neuroscience*. 2013;7:118. DOI: 10.3389/fnins.2013.00118.
9. Gupta S, Agrawal A, Gopalakrishnan K, Narayanan P. Deep learning with limited numerical precision. In: *Proceedings of the 32nd International Conference on International Conference on Machine Learning - Volume 37*. 6-11 July 2015, Lille, France. JMLR; 2015. P. 1737–1746.
10. Karniadakis GE, Kevrekidis IG, Lu L, Perdikaris P, Wang S, Yang L. Physics-informed machine learning. *Nature Reviews Physics*. 2021;3(6):422–440. DOI: 10.1038/s42254-021-00314-5.
11. Brunner D, Soriano MC, Mirasso CR, Fischer I. Parallel photonic information processing at gigabyte per second data rates using transient states. *Nature Communications*. 2013;4(1):1364. DOI: 10.1038/ncomms2368.
12. Tuma T, Pantazi A, Le Gallo M, Sebastian A, Eleftheriou E. Stochastic phase-change neurons. *Nature Nanotechnology*. 2016;11(8):693–699. DOI: 10.1038/nnano.2016.70.
13. Torrejon J, Riou M, Araujo FA, Tsunegi S, Khalsa G, Querlioz D, Bortolotti P, Cros V, Yakushiji K, Fukushima A, Kubota H, Yuasa S, Stiles MD, Grollier J. Neuromorphic computing with nanoscale spintronic oscillators. *Nature*. 2017;547(7664):428–431. DOI: 10.1038/nature23011.
14. Psaltis D, Brady D, Gu XG, Lin S. Holography in artificial neural networks. *Nature*. 1990;343(6256):325–330. DOI: 10.1038/343325a0.
15. Bueno J, Maktoobi S, Froehly L, Fischer I, Jacquot M, Larger L, Brunner D. Reinforcement learning in a large-scale photonic recurrent neural network. *Optica*. 2018;5(6):756–760. DOI: 10.1364/OPTICA.5.000756.
16. Lin X, Rivenson Y, Yardimci NT, Veli M, Luo Y, Jarrahi M, Ozcan A. All-optical machine learning using diffractive deep neural networks. *Science*. 2018;361(6406):1004–1008. DOI: 10.1126/science.aat8084.
17. Shen Y, Harris NC, Skirlo S, Prabhu M, Baehr-Jones T, Hochberg M, Sun X, Zhao S, Larochelle H, Englund D, Soljačić M. Deep learning with coherent nanophotonic circuits. *Nature Photonics*. 2017;11(93):441–446. DOI: 10.1038/nphoton.2017.93.
18. Tait AN, de Lima TF, Zhou E, Wu AX, Nahmias MA, Shastri BJ, Prucnal PR. Neuromorphic photonic networks using silicon photonic weight banks. *Scientific Reports*. 2017;7(1):7430. DOI: 10.1038/s41598-017-07754-z.
19. Moughames J, Porte X, Thiel M, Ulliac G, Larger L, Jacquot M, Kadic M, Brunner D. Three-dimensional waveguide interconnects for scalable integration of photonic neural networks. *Optica*. 2020;7(6):640–646. DOI: 10.1364/OPTICA.388205.
20. Dinc NU, Psaltis D, Brunner D. Optical neural networks: The 3D connection. *Photonics*. 2020;(104):34–38. DOI: 10.1051/photon/202010434.

21. Moughames J, Porte X, Larger L, Jacquot M, Kadic M, Brunner D. 3D printed multimode-splitters for photonic interconnects. *Opt. Mater. Express*. 2020;10(11):2952–2961. DOI: 10.1364/OME.402974.
22. Semenova N, Porte X, Andreoli L, Jacquot M, Larger L, Brunner D. Fundamental aspects of noise in analog-hardware neural networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019;29(10):103128. DOI: 10.1063/1.5120824.
23. Semenova N, Larger L, Brunner D. Understanding and mitigating noise in trained deep neural networks. *Neural Networks*. 2022;146:151–160. DOI: 10.1016/j.neunet.2021.11.008.
24. Semenova N, Brunner D. Noise-mitigation strategies in physical feedforward neural networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2022;32(6):061106. DOI: 10.1063/5.0096637.
25. Jaeger H. Tutorial on training recurrent neural networks, covering BPPT, RTRL, EKF and the “echo state network” approach. GMD-Report 159. Bonn: German National Research Center for Information Technology; 2002. 48 p.
26. Prokhorov D. Echo state networks: appeal and challenges. In: *Proceedings. 2005 IEEE International Joint Conference on Neural Networks*. Vol. 3. 31 July 2005 – 04 August 2005, Montreal, QC, Canada. New York: IEEE; 2005. P. 1463–1466. DOI: 10.1109/IJCNN.2005.1556091.
27. Cerina L, Santambrogio MD, Franco G, Gallicchio C, Micheli A. EchoBay: Design and optimization of echo state networks under memory and time constraints. *ACM Transactions on Architecture and Code Optimization*. 2020;17(3):1–24. DOI: 10.1145/3404993.
28. Lukoševičius M, Jaeger H. Reservoir computing approaches to recurrent neural network training. *Computer Science Review*. 2009;3(3):127–149. DOI: 10.1016/j.cosrev.2009.03.005.



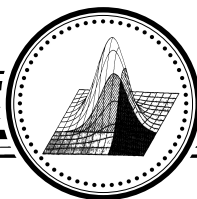
Москвитин Виктор Максимович — родился в Саратове (2004). С сентября 2022 года проходит обучение в Институте физики Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского по профилю «Информационные технологии и компьютерное моделирование в радиофизике». Научные интересы — компьютерное моделирование, объектно-ориентированное программирование, анализ данных, нейронные сети, машинное обучение.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: vmmoskvitin@gmail.com



Семенова Надежда Игоревна — родилась в Саратове (1992). Окончила с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика и электроника» (2014). Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2017, СГУ). Получила PhD степень по специальности «Оптика» в университете Бургундии Франш-Конте (Франция, 2021). С 2021 года работает на кафедре «Радиофизика и нелинейная динамика» Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского в должности доцента и старшего научного сотрудника. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, нейронные сети, машинное обучение, влияние шумов, пространственно-временные режимы в ансамблях и сетях, химерные состояния, уединенные состояния, запаздывающая обратная связь. Опубликовала свыше 40 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: semenovani@sgu.ru
 ORCID: 0000-0002-9180-3030
 AuthorID (eLibrary.Ru): 850757



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(4)

Научная статья
УДК 517.957

DOI: 10.18500/0869-6632-003053
EDN: WZPQWD

Неустойчивость Тьюринга в однопараметрической системе Гирера–Мейнхардта

С. В. Ревина^{1,2}✉, А. С. Рябов¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

²Южный математический институт ВЦ РАН, Владикавказ, Россия

E-mail: ✉svrevina@sfnu.ru, asryabov@sfnu.ru

Поступила в редакцию 30.11.2022, принята к публикации 5.04.2023,

опубликована онлайн 18.07.2023, опубликована 31.07.2023

Аннотация. Цель настоящей работы — найти область необходимых и достаточных условий диффузионной неустойчивости на плоскости параметров (τ, d) системы Гирера–Мейнхардта, где τ — параметр релаксации, d — безразмерный коэффициент диффузии; вывести аналитическую зависимость критического волнового числа от характерного размера пространственной области; получить явные представления вторичных пространственно распределенных структур, образующихся в результате бифуркации пространственно-однородного положения равновесия, в виде рядов по степеням надкритичности. **Методы.** Для нахождения области неустойчивости Тьюринга применяются методы линейного анализа устойчивости. Для отыскания вторичных решений (тьюринговских структур) применяется метод Ляпунова–Шмидта в форме, развитой В. И. Юдовичем. **Результаты.** Получены выражения критического коэффициента диффузии через собственные значения оператора Лапласа для произвольной ограниченной области. В явном виде найдена зависимость критического коэффициента диффузии от характерного размера области в двух случаях: для интервала и прямоугольника. Построены явные выражения первых членов разложений вторичных стационарных решений по параметру надкритичности в одномерном случае, а также для прямоугольника, когда одно из волновых чисел равно нулю. В указанных случаях найдены достаточные условия мягкой потери устойчивости, приведены примеры вторичных решений. **Заключение.** Предложен общий подход для нахождения области неустойчивости Тьюринга и построения вторичных пространственно распределенных структур. Данный подход может быть применен к широкому классу математических моделей, описываемых системой двух уравнений реакции–диффузии.

Ключевые слова: неустойчивость Тьюринга, системы реакции–диффузии, необходимые и достаточные условия диффузионной неустойчивости, критический коэффициент диффузии.

Для цитирования: Ревина С. В., Рябов А. С. Неустойчивость Тьюринга в однопараметрической системе Гирера–Мейнхардта // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 501–522. DOI: 10.18500/0869-6632-003053. EDN: WZPQWD

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Turing instability in the one-parameter Gierer–Meinhardt system

S. V. Revina^{1,2}✉, A. S. Ryabov¹

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

²Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz, Russia

E-mail: ✉svrevina@sfedu.ru, asryabov@sfedu.ru

Received 30.11.2022, accepted 5.04.2023,

available online 18.07.2023, published 31.07.2023

Abstract. The purpose of this work is to find the region of necessary and sufficient conditions for diffusion instability on the parameter plane (τ, d) of the Gierer–Meinhardt system, where τ is the relaxation parameter, d is the dimensionless diffusion coefficient; to derive analytically the dependence of the critical wave number on the characteristic size of the spatial region; to obtain explicit representations of secondary spatially distributed structures, formed as a result of bifurcation of a spatially homogeneous equilibrium position, in the form of series in degrees of supercriticality. *Methods.* To find the region of Turing instability, methods of linear stability analysis are applied. To find secondary solutions (Turing structures), the Lyapunov–Schmidt method is used in the form developed by V.I. Yudovich. *Results.* Expressions for the critical diffusion coefficient in terms of the eigenvalues of the Laplace operator for an arbitrary bounded region are obtained. The dependence of the critical diffusion coefficient on the characteristic size of the region is found explicitly in two cases: when the region is an interval and a rectangle. Explicit expressions for the first terms of the expansions of the secondary stationary solutions with respect to the supercriticality parameter are constructed in the one-dimensional case, as well as for a rectangle, when one of the wave numbers is equal to zero. In these cases, sufficient conditions for a soft loss of stability are found, and examples of secondary solutions are given. *Conclusion.* A general approach is proposed for finding the region of Turing instability and constructing secondary spatially distributed structures. This approach can be applied to a wide class of mathematical models described by a system of two reaction–diffusion equations.

Keywords: Turing instability, reaction–diffusion systems, necessary and sufficient conditions for diffusion instability, critical diffusion coefficient.

For citation: Revina SV, Ryabov AS. Turing instability in the one-parameter Gierer–Meinhardt system. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(4):501–522. DOI: 10.18500/0869-6632-003053

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Уравнения реакции–диффузии применяются при математическом моделировании различных природных явлений, им посвящено большое количество публикаций (см., например, [1], а также недавние работы [2, 3] и цитируемую в них литературу). В результате бифуркаций пространственно-однородных состояний в системах реакции–диффузии возникают пространственно неоднородные режимы. На границе рассматриваемой области при этом возможно выполнение различных типов краевых условий. Особый интерес, на наш взгляд, представляет исследование систем реакции–диффузии аналитическими методами. В [4] для бесконечномерного аналога системы Рэля (который также можно рассматривать как частный случай системы ФитцХью–Нагумо) найдены явные асимптотические представления автоколебательных режимов, а в [5] — стационарные режимы при краевых условиях Дирихле и смешанных краевых условиях. В [6] для системы Рэля изучены бифуркации на инвариантных подпространствах системы при выполнении краевых условий Неймана, в [7] при тех же условиях исследовано бифуркационное поведение стационарных режимов, ответвляющихся от нулевого положения равновесия системы ФитцХью–Нагумо.

Начатое А. Тьюрингом в его классической работе [8] исследование диффузионной неустойчивости, впоследствии названной неустойчивостью Тьюринга, продолжают многие авторы

по настоящее время. В монографии [9] положено начало изучению области в пространстве параметров системы, называемой областью неустойчивости Тьюринга.

В [10] на примере системы Шнакенберга предложен подход для аналитического описания области неустойчивости Тьюринга в пространстве параметров системы, а также для нахождения диапазона критических волновых чисел, для которых имеет место эта неустойчивость. Показано, что граница области необходимых условий является огибающей границы области достаточных условий. В случае системы Шнакенберга точки пересечения двух соседних кривых достаточных условий лежат на прямой, угловой коэффициент которой зависит от собственных значений оператора Лапласа в рассматриваемой области. В [10] также показано, что полуось $d > 1$, где d — коэффициент диффузии, можно представить в виде объединения полуинтервалов, каждому из которых соответствует критическое волновое число, при котором происходит потеря устойчивости положения равновесия системы.

В [11] дано обобщение результатов работы [10] на некоторый класс систем реакции–диффузии, которые помимо коэффициента диффузии содержат два параметра. При этом предполагается, что коэффициенты линеаризованной в окрестности положения равновесия системы подчиняются некоторым ограничениям (гипотезам). Предложена замена переменных, при которой область неустойчивости Тьюринга принимает некоторый стандартный вид. Система Гирера–Мейнхардта, рассматриваемая в настоящей работе, содержит лишь один параметр помимо коэффициента диффузии. Для двухпараметрической системы Гирера–Мейнхардта [12] одна из гипотез работы [11] не выполняется.

Система Гирера–Мейнхардта была предложена в [12], описание математической модели при различных значениях параметров дано в [13]. В настоящей работе рассматривается частный случай общей модели — система Гирера–Мейнхардта с параметром релаксации $\tau > 0$ [1] в m -мерной ограниченной области $\Omega \subset R^m$ при $t > 0$ с краевыми условиями Неймана на границе

$$u_t = \Delta u - u + \frac{u^2}{v}, \quad \tau v_t = d\Delta v - v + u^2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Здесь $u = u(x, t)$ — активатор, $v = v(x, t)$ — ингибитор, $d > 0$ — безразмерный коэффициент диффузии, равный отношению коэффициентов диффузии ингибитора и активатора, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$ — оператор Лапласа. Система (1), (2) имеет единственное пространственно-однородное положение равновесия

$$(u_0, v_0) = (1, 1). \quad (3)$$

Решения сингулярно возмущенной системы Гирера–Мейнхардта с параметром релаксации исследованы в [14], неустойчивость Экхауса и зигзаг-неустойчивость аналитически и численно исследовались для системы Гирера–Мейнхардта в [15].

Целью настоящей работы является вывод необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга положения равновесия (3), нахождение критического коэффициента диффузии и его зависимости от характерного размера области Ω , нахождение вторичных тьюринговых структур в окрестности положения равновесия при малых отклонениях коэффициента диффузии от критического значения. Для описания области неустойчивости Тьюринга используется подход работы [10]. Все построения носят аналитический характер, результаты расчетов приведены лишь для иллюстрации теоретического материала.

1. Необходимые условия неустойчивости Тьюринга

Результаты настоящего раздела известны, мы приводим их для полноты изложения и с целью введения обозначений. Общий подход для нахождения необходимых условий неустойчивости Тьюринга разработан в [9], для системы Гирера–Мейнхардта с параметром релаксации необходимые условия сформулированы в [1]. Разделив второе уравнение системы (1) на τ , введем обозначения для слагаемых реакции

$$f(u, v) = -u + \frac{u^2}{v}, \quad g(u, v) = -\frac{v}{\tau} + \frac{u^2}{\tau} \quad (4)$$

и найдем матрицу Якоби J

$$J = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} \Big|_{(u_0, v_0)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{2}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Система (1), (2) в бездиффузионном приближении принимает форму

$$\frac{du}{dt} = -u + \frac{u^2}{v}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau} + \frac{u^2}{\tau}, \quad (6)$$

соответствующее (6) линеаризованное в окрестности (u_0, v_0) уравнение имеет вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = J\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in R^2, \quad (7)$$

где J определена в (5). Собственные значения матрицы Якоби J лежат строго в левой полуплоскости тогда и только тогда, когда

$$\text{Tr}(J) \equiv f_u + g_v = 1 - \frac{1}{\tau} < 0, \quad \text{Det}(J) \equiv f_u g_v - f_v g_u = \frac{1}{\tau} > 0. \quad (8)$$

Из (8) получим условие асимптотической устойчивости в бездиффузионном приближении

$$0 < \tau < 1. \quad (9)$$

Теперь рассмотрим линеаризованную систему с диффузией (1), (2)

$$u_t = \Delta u + f_u \cdot u + f_v \cdot v, \quad v_t = \frac{d}{\tau} \Delta v + g_u \cdot u + g_v \cdot v, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (11)$$

где элементы матрицы Якоби заданы в (5).

Пусть μ_k и ψ_k — собственные значения и собственные функции оператора $-\Delta$ с краевыми условиями Неймана, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\Delta \psi_k + \mu_k \psi_k = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (12)$$

Собственное значение линейного оператора называется простым, если размерность пространства всех собственных и присоединенных векторов, отвечающих данному собственному значению, равна единице. В настоящей работе так же, как и в [10], предполагается простота собственных значений μ_k .

Пусть H — гильбертово пространство вектор-функций $w = (u, v)$ с компонентами $u, v \in L_2(\Omega)$. Пусть оператор $A_0 : H \rightarrow H$, действующий по правилу $A_0 = D\Delta$, определен на множестве вектор-функций $w = (u, v)$ с компонентами из пространства Соболева $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющими краевым условиям (2), где D — это матрица

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{\tau} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тогда линеаризованная система (10), (11) сводится к уравнению в H

$$w_t = Aw, \quad A = A_0 + J, \quad w \in H. \quad (14)$$

Спектр оператора A дискретен в силу компактности его резольвенты в H .

Определение 1. *Положение равновесия (u_0, v_0) называется неустойчивым по Тьюрингу, если все собственные значения линеаризованной задачи в бездиффузионном приближении (7) лежат строго в левой полуплоскости и существует собственное значение линеаризованной задачи с диффузией (14), которое лежит в правой полуплоскости.*

Рассмотрим линейную спектральную задачу для оператора A (14) в H :

$$A\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi \neq 0. \quad (15)$$

Получим необходимые условия существования собственного значения оператора A в правой полуплоскости.

Разыскивая собственную функцию φ (15) в виде ряда по собственным функциям оператора Лапласа с векторными коэффициентами

$$\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k \psi_k, \quad C_k = (c_k^1, c_k^2), \quad (16)$$

после подстановки рядов (16) в (15) и приравнивания коэффициентов при одинаковых собственных функциях ψ_k , для любого фиксированного k получим линейную систему с матрицей J_k , которой соответствует собственное значение λ_k и собственный вектор C_k :

$$J_k C_k = \lambda_k C_k, \quad C_k \neq 0, \quad (17)$$

где J_k определена формулой

$$J_k = \begin{pmatrix} f_u - \mu_k & f_v \\ g_u & g_v - \frac{d}{\tau} \mu_k \end{pmatrix} \Big|_{(u_0, v_0)} = \begin{pmatrix} 1 - \mu_k & -1 \\ \frac{2}{\tau} & -\frac{1}{\tau} - \frac{d}{\tau} \mu_k \end{pmatrix}, \quad (18)$$

причем определитель и след матрицы J_k подчиняются соотношениям

$$\begin{aligned} \text{Tr}(J_k) &= \text{Tr}(J) - \left(1 + \frac{d}{\tau}\right) \mu_k < \text{Tr}(J) < 0, \\ \text{Det}(J_k) &= \frac{d}{\tau} \mu_k^2 - \left(\frac{d}{\tau} \cdot f_u + g_v\right) \mu_k + \text{Det}(J). \end{aligned}$$

Так как $\text{Tr}(J_k) < \text{Tr}(J) < 0$, то потеря устойчивости равновесия (u_0, v_0) может произойти, только если определитель обратится в нуль: $\text{Det}(J_k) = 0$. Так как $\text{Det}(J) > 0$ (8), то $k > 0$ и, следовательно, $\mu_k > 0$.

Через $h(\mu)$ обозначим многочлен

$$h(\mu) = d\mu^2 - (d-1)\mu + 1. \quad (19)$$

Равенство $\text{Det}(J_k) = 0$ возможно тогда и только тогда, когда $h(\mu_k) = 0$.

Для того чтобы линеаризованная система с диффузией (8), (9) имела собственное значение в правой полуплоскости, необходимо, чтобы трехчлен $h(\mu)$ имел положительные корни. Для этого дискриминант трехчлена должен быть неотрицательным, а второй коэффициент отрицательным. Отсюда получаем ограничение на коэффициент диффузии

$$d \geq (1 + \sqrt{2})^2. \quad (20)$$

В совокупности неравенства (9) и (20) приводят к необходимым условиям неустойчивости Тьюринга на плоскости параметров (τ, d) [1]:

$$0 < \tau < 1, \quad d \geq (1 + \sqrt{2})^2. \quad (21)$$

2. Достаточные условия неустойчивости Тьюринга

Применяя подход [10], получим ограничения на параметры системы, при которых у линеаризованной системы реакции–диффузии (8), (9) существует собственное значение в правой полуплоскости. Учтем дискретность спектра оператора A . Выразим из уравнения $h(\mu_k) = 0$, где $h(\mu)$ задано в (19), коэффициент диффузии d :

$$d_k = \frac{\mu_k + 1}{\mu_k(1 - \mu_k)}. \quad (22)$$

Условие положительности коэффициента диффузии (22) приводит к ограничению

$$\mu_k < 1. \quad (23)$$

Если это условие не выполняется, то неустойчивость Тьюринга не возникает. В одномерном случае $\Omega = (0, \ell)$, когда $\mu_k = (\frac{\pi k}{\ell})^2$, приходим к оценке снизу на размер области: $\ell > \pi k$.

Введем обозначение для $k \in N$

$$\gamma_k = \mu_k + \mu_{k+1} + \mu_k \mu_{k+1}. \quad (24)$$

Заметим, что выражение (24) участвует также в описании области достаточных условий неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга [10], брюсселятора и других систем [11].

С помощью элементарных выкладок доказывается утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\mu_k < 1$ и $\mu_{k+1} < 1$. Равенство $d_k = d_{k+1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\gamma_k = 1$, причем неравенство $d_k < d_{k+1}$ равносильно неравенству $\gamma_k > 1$.

Заметим, что для функции

$$d(y) = \frac{y + 1}{y(1 - y)}, \quad 0 < y < 1, \quad (25)$$

значение $y = \sqrt{2} - 1$ является точкой глобального минимума, причем $d(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} + 1)^2$. Следовательно, для d_k (22) выполняется неравенство: $d_k \geq (1 + \sqrt{2})^2$.

Определение 2. Критическим значением волнового числа назовем такое число k , для которого собственное значение μ_k является корнем многочлена $h(\mu)$: $h(\mu_k) = 0$, при этом для $d < d_k$ все собственные значения линеаризованной системы с диффузией (14) лежат строго в левой полуплоскости, а для $d > d_k$ существует собственное значение системы (14) в правой полуплоскости. При выполнении этих условий d_k называется критическим коэффициентом диффузии.

Для нахождения критического коэффициента диффузии нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, которое доказывается аналогично утверждению 1.

Утверждение 2. Пусть $1 \leq k < m$, $\mu_k < 1$ и $\mu_m < 1$, введем обозначение

$$\gamma_{k,m} = \mu_k + \mu_m + \mu_k \mu_m.$$

Равенство $d_k = d_m$ выполняется тогда и только тогда, когда $\gamma_{k,m} = 1$, причем неравенство $d_k < d_m$ равносильно неравенству $\gamma_{k,m} > 1$.

Утверждения 1 и 2 справедливы для произвольной ограниченной области Ω , в которой оператор Лапласа имеет простые собственные значения μ_k (12). Опишем алгоритм нахождения критического волнового числа k и установим зависимость критического коэффициента диффузии d_k от характерного размера области Ω . Сначала проведем рассуждения для одномерного случая $\Omega = (0, \ell)$.

2.1. Одномерный случай. В этом случае $\mu_k = (\frac{\pi k}{\ell})^2$. Через $\ell_{k,k+1}$ обозначим длину отрезка, для которой $d_k = d_{k+1}$, $k \in N$. Найдем $\ell_{k,k+1}$ из уравнения $\gamma_k = 1$:

$$\ell_{k,k+1}^2 = \frac{\pi^2}{2} \left(\sqrt{(k^2 + (k+1)^2)^2 + 4k^2(k+1)^2} + k^2 + (k+1)^2 \right). \quad (26)$$

Аналогично, следуя утверждению 2, при $1 \leq k < m$, через $\ell_{k,m}$ обозначим длину отрезка, для которой $d_k = d_m$. Найдем $\ell_{k,m}$ из уравнения $\gamma_{k,m} = 1$:

$$\ell_{k,m}^2 = \frac{\pi^2}{2} \left(\sqrt{(k^2 + m^2)^2 + 4k^2 m^2} + k^2 + m^2 \right). \quad (27)$$

Очевидно, что при $m < n$ выполняется неравенство $\ell_{k,m} < \ell_{k,n}$. Найдем значение критического коэффициента диффузии в зависимости от характерного размера области.

Приближенные значения границ отрезка $\ell_{k,k+1}$, соответствующие нескольким первым критическим значениям волнового числа k , приведены в табл. 1.

Таблица 1. Границы отрезка $\ell_{k,k+1}$, соответствующие критическим значениям волнового числа k
Table 1. Boundaries of the segment $\ell_{k,k+1}$, corresponding to the critical values of the wave number k

Критическое волновое число	Промежуток	Границы
$k = 1$	$\ell \in (\pi, \ell_{1,2})$	$\ell_{1,2} = 2.38779 \cdot \pi$
$k = 2$	$\ell \in (\ell_{1,2}, \ell_{2,3})$	$\ell_{2,3} = 3.91738 \cdot \pi$
$k = 3$	$\ell \in (\ell_{2,3}, \ell_{3,4})$	$\ell_{3,4} = 5.46148 \cdot \pi$
$k = 4$	$\ell \in (\ell_{3,4}, \ell_{4,5})$	$\ell_{4,5} = 7.00999 \cdot \pi$
$k = 5$	$\ell \in (\ell_{4,5}, \ell_{5,6})$	$\ell_{5,6} = 8.56046 \cdot \pi$
$k = 6$	$\ell \in (\ell_{5,6}, \ell_{6,7})$	$\ell_{6,7} = 10.11195 \cdot \pi$
$k = 7$	$\ell \in (\ell_{6,7}, \ell_{7,8})$	$\ell_{7,8} = 11.66406 \cdot \pi$
$k = 8$	$\ell \in (\ell_{7,8}, \ell_{8,9})$	$\ell_{8,9} = 13.21656 \cdot \pi$
$k = 9$	$\ell \in (\ell_{8,9}, \ell_{9,10})$	$\ell_{9,10} = 14.76934 \cdot \pi$
$k = 10$	$\ell \in (\ell_{9,10}, \ell_{10,11})$	$\ell_{10,11} = 16.3223 \cdot \pi$

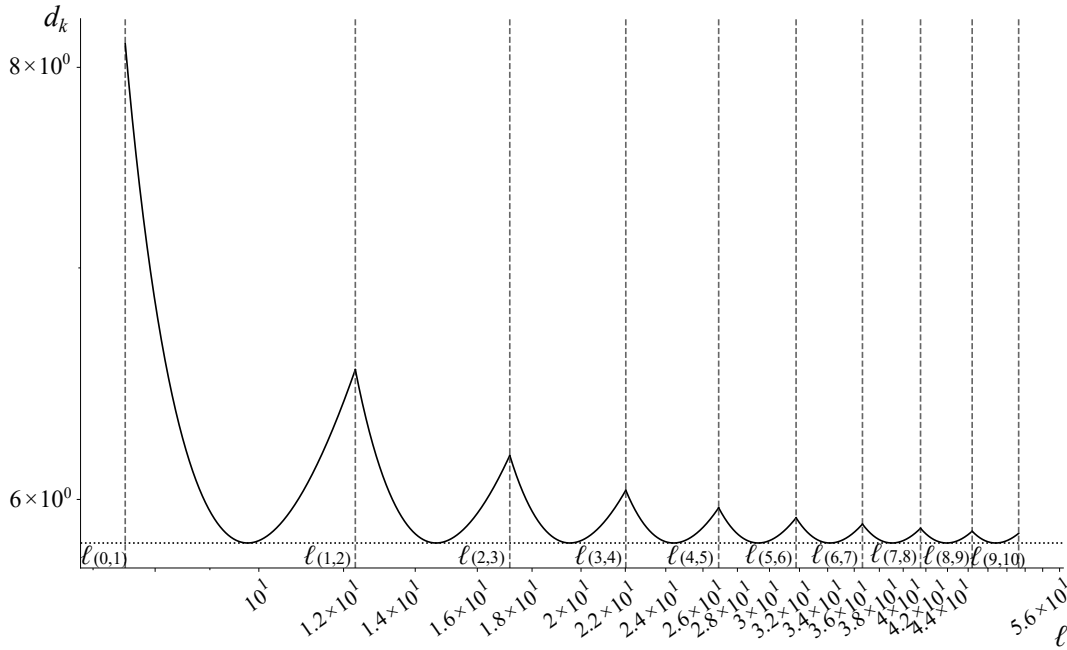


Рис. 1. Зависимость критического коэффициента диффузии $d_k(\ell)$ от длины отрезка (в логарифмическом масштабе)

Fig. 1. Dependence of the critical diffusion coefficient $d_k(\ell)$ on the length of the segment (on a logarithmic scale)

Утверждение 3. Пусть $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$, где $k \in \mathbb{N}$ и $\ell_{0,1} = \pi$. Тогда

$$d_k = \min_m d_m, \quad (28)$$

где минимум берется по всем m , для которых определено выражение d_m .

Доказательство. Докажем утверждение 3. Рассмотрим промежуток $\ell \in (\ell_{0,1}, \ell_{1,2})$. При $\ell \in (\pi, 2\pi]$ определено только значение d_1 . При $\ell \in (2\pi, \ell_{1,2})$ определены d_1 и d_2 , но из неравенства $\gamma_1 > 1$ следует, что $d_1 < d_2$. Аналогичные рассуждения проводятся для нескольких первых значений k .

Пусть теперь $k > 1$, $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$. С ростом ℓ функции $\mu_k(\ell)$, а также $\gamma_k(\ell)$ убывают, и на промежутке $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$ могут быть определены несколько коэффициентов диффузии d_m . Покажем, что d_k — минимальный из них.

Сначала докажем, что $d_m > d_k$ при $m < k$. Действительно, неравенство $d_m > d_k$ равносильно неравенству $\gamma_{m,k} < 1$, которое, в свою очередь, равносильно $\ell > \ell_{m,k}$. Так как $\max_{m < k} \ell_{m,k} = \ell_{k-1,k}$, то на указанном промежутке неравенство выполняется.

Далее убедимся, что $d_k < d_n$ при $n > k$. Действительно, данное неравенство равносильно следующему: $\gamma_{k,n} > 1$, которое выполняется при $\ell < \ell_{k,n}$. Так как $\min_{n > k} \ell_{k,n} = \ell_{k,k+1}$, то требуемое неравенство доказано. \square

Из утверждения 3 следует, что формула (28) дает критическое значение коэффициента диффузии d_k , где k — критическое волновое число. В переменных (τ, d) при $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$ область достаточных условий неустойчивости Тьюринга имеет вид

$$0 < \tau < 1, \quad d \geq d_k. \quad (29)$$

Пусть $d_k(\ell) = d\left(\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2\right)$, где функция $d_k(y)$ определена в (25). Для описания взаимного расположения кривых $d_k(\ell)$ докажем следующее утверждение.

Утверждение 4. На каждом промежутке $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$, $k \in N$, существует единственная точка минимума $\ell = \ell_*$ функции $d_k(\ell)$, причем $d_k(\ell_*) = (1 + \sqrt{2})^2$ и

$$\ell_*^2 = (1 + \sqrt{2})(\pi k)^2; \quad \ell_{k-1,k}^2 \leq (1 + \sqrt{2})(\pi k)^2 \leq \ell_{k,k+1}^2. \quad (30)$$

Доказательство. Для доказательства утверждения 4 сделаем в (25) замену переменных $\xi = \frac{1}{\mu}$. Тогда

$$d(\xi) = \frac{\xi(\xi + 1)}{\xi - 1}. \quad (31)$$

Легко убедиться, что $\xi_* = 1 + \sqrt{2}$ является точкой глобального минимума функции $d(\xi)$, соответствующее критическое значение длины отрезка равно $\ell_*^2 = (\pi k)^2 \xi_*$.

Далее, из (26) получаем неравенство

$$\frac{\ell_{k,k+1}^2}{(\pi k)^2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{(k+1)^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{(k+1)^2}{k^2}} + 1 + \frac{(k+1)^2}{k^2} \right) \geq 1 + \sqrt{2}. \quad (32)$$

Аналогично

$$\frac{\ell_{k-1,k}^2}{(\pi k)^2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{(k-1)^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{(k-1)^2}{k^2}} + 1 + \frac{(k-1)^2}{k^2} \right) \leq 1 + \sqrt{2}. \quad (33)$$

Из (32) и (33) вытекает (30). □

2.2. Случай прямоугольника. Пусть теперь $\Omega = (0, a) \times (0, b)$. Так как по предположению собственные значения оператора Лапласа простые, то рассмотрим случай несоизмеримых квадратов сторон прямоугольника. Для определенности

$$b^2 = \frac{a^2}{\sqrt{2}}. \quad (34)$$

Введя обозначение $z = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2$, выпишем собственные значения оператора Лапласа:

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (m^2 + \sqrt{2}n^2) = \frac{m^2 + \sqrt{2}n^2}{z}, \quad m, n = 0, 1, \dots \quad (35)$$

Упорядочим $\lambda_{m,n}$ по возрастанию:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \lambda_{1,0}; & \mu_2 &= \lambda_{0,1}; & \mu_3 &= \lambda_{1,1}; \\ \mu_4 &= \lambda_{2,0}; & \mu_5 &= \lambda_{2,1}; & \mu_6 &= \lambda_{0,2}; \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом,

$$\mu_k = \frac{\nu_k}{z}; \quad \nu_k = m^2 + \sqrt{2}n^2. \quad (37)$$

Через $a_{k,m}$ обозначим длину стороны прямоугольника, для которой $d_k = d_m$. Найдем $a_{k,k+1}$ из уравнения $\gamma_k = 1$. Имеем

$$z^2 - (\nu_k + \nu_{k+1})z - \nu_k \nu_{k+1} = 0. \quad (38)$$

Так как $z > 0$, то

$$a_{k,k+1}^2 = \frac{\pi^2}{2} \left(\sqrt{(v_k + v_{k+1})^2 + 4v_k v_{k+1}} + v_k + v_{k+1} \right). \quad (39)$$

Пусть $d_k(a) = d\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 v_k\right)$, где $d_k(y)$ определено в (25). Аналогично утверждению 4 доказывается следующее утверждение.

Утверждение 5. На каждом промежутке $a \in (a_{k-1,k}, a_{k,k+1})$, $k \in N$, существует единственная точка минимума $a = a_*$ функции $d_k(a)$, причем $d_k(a_*) = (1 + \sqrt{2})^2 v_k$

$$a_*^2 = (1 + \sqrt{2})\pi^2 v_k; \quad a_{k-1,k}^2 \leq (1 + \sqrt{2})\pi^2 v_k \leq a_{k,k+1}^2. \quad (40)$$

Из утверждений 4 и 5, а также условий (21) и (29) вытекает, что на каждом промежутке $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$ и $a \in (a_{k-1,k}, a_{k,k+1})$, соответственно, существует единственное значение характерного размера области ℓ_* (соответственно, a_*), для которого необходимые и достаточные условия неустойчивости Тьюринга совпадают. Для систем реакции–диффузии с двумя параметрами, например, для системы Шнакенберга, возникает похожая ситуация [10, 11]. В точке пересечения кривых необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга происходит касание этих кривых. Для однопараметрической системы Гирера–Мейнхардта кривая достаточных условий $d_k(\ell)$ (или $d_k(a)$) в точке минимума касается кривой необходимых условий $d = (1 + \sqrt{2})^2$.

Приближенные значения границ длины стороны прямоугольника $a_{k,k+1}$, соответствующие нескольким первым значениям волнового числа k , приведены в табл. 2.

Таблица 2. Границы стороны $a_{k,k+1}$, соответствующие критическим значениям волнового числа k

Table 2. Boundaries $a_{k,k+1}$ of the side corresponding to the critical values of the wave number k

Критическое волновое число	Промежуток	Границы
$k = 1$	$a \in (\pi, a_{1,2})$	$a_{1,2} = 1.70341 \cdot \pi$
$k = 2$	$a \in (a_{1,2}, a_{2,3})$	$a_{2,3} = 2.13887 \cdot \pi$
$k = 3$	$a \in (a_{2,3}, a_{3,4})$	$a_{3,4} = 2.76998 \cdot \pi$
$k = 4$	$a \in (a_{3,4}, a_{4,5})$	$a_{4,5} = 3.36546 \cdot \pi$
$k = 5$	$a \in (a_{4,5}, a_{5,6})$	$a_{5,6} = 3.65555 \cdot \pi$
$k = 6$	$a \in (a_{5,6}, a_{6,7})$	$a_{6,7} = 3.85352 \cdot \pi$
$k = 7$	$a \in (a_{6,7}, a_{7,8})$	$a_{7,8} = 4.3402 \cdot \pi$
$k = 8$	$a \in (a_{7,8}, a_{8,9})$	$a_{8,9} = 4.74518 \cdot \pi$
$k = 9$	$a \in (a_{8,9}, a_{9,10})$	$a_{9,10} = 4.92167 \cdot \pi$
$k = 10$	$a \in (a_{9,10}, a_{10,11})$	$a_{10,11} = 5.28149 \cdot \pi$

3. Вторичные стационарные решения

Будем интересоваться вторичными стационарными решениями исходной нелинейной системы (1), (2), которые возникают при критическом значении коэффициента диффузии $d = d_k$ в результате потери устойчивости положения равновесия (u_0, v_0) . При рассмотрении неустойчивости Тьюринга такие решения называются тьюринговыми структурами.

Для отыскания тьюринговых структур применим метод Ляпунова–Шмидта в форме, развитой В. И. Юдовичем [16, 17]. Этот метод, наряду с методом центрального многообразия, применяется в задачах, описываемых параболическими уравнениями, в частности, уравнениями гидродинамики [18], а также уравнениями реакции–диффузии [4–7]. Сначала рассматриваются линейная спектральная и линейная сопряженная задачи, затем решение нелинейных уравнений разыскивается в виде ряда по степеням надкритичности. Для отыскания членов ряда получаем линейные неоднородные уравнения, из условия разрешимости которых находим коэффициенты уравнения разветвления.

3.1. Линейная спектральная и линейная сопряженная задачи. Здесь и далее k — критическое волновое число, оператор A определен в (14). Тогда сопряженный к оператору A имеет вид: $A^* = A_0 + J^*$, где через J^* обозначен конечномерный оператор, которому соответствует транспонированная к J (5) матрица J^* . Найдем собственные функции операторов A и A^* , соответствующие нулевому собственному значению:

$$A\varphi_k = 0, \quad A^*\Phi_k = 0, \quad \varphi_k \neq 0, \quad \Phi_k \neq 0. \quad (41)$$

Из (15)–(17) следует, что собственные функции имеют вид

$$\varphi_k(x) = C_k \psi_k(x), \quad \Phi_k(x) = D_k \psi_k(x), \quad (42)$$

где $\psi_k(x)$ — собственные функции оператора Лапласа (12), а векторные коэффициенты C_k и D_k являются собственными векторами матриц J_k и J_k^* , соответственно:

$$J_k C_k = 0, \quad J_k^* D_k = 0, \quad C_k \neq 0, \quad D_k \neq 0. \quad (43)$$

Из (43) находим координаты C_k и D_k :

$$C_k = (1; 1 - \mu_k), \quad D_k = \left(1; -\frac{\tau}{2}(1 - \mu_k)\right). \quad (44)$$

Заметим, что в силу ограничений на собственные значения $0 < \mu_k < 1$ и параметр релаксации $0 < \tau < 1$ скалярное произведение векторов φ_k и Φ_k положительно

$$\int_{\Omega} \varphi_k(x) \Phi_k(x) dx = \left(1 - \frac{\tau}{2}(1 - \mu_k)^2\right) \int_{\Omega} \psi_k^2(x) dx > 0. \quad (45)$$

Из условия (45) следует отсутствие клеток в матричном представлении оператора A .

3.2. Уравнение возмущений. После замены переменных в окрестности положения равновесия $(u_0; v_0) = (1; 1)$ (для удобства оставим прежние обозначения $(u; v)$):

$$u \rightarrow u + 1; \quad v \rightarrow v + 1 \quad (46)$$

из (1) приходим к уравнению возмущений

$$u_t = \Delta u - (u + 1) + \frac{(u + 1)^2}{v + 1}, \quad \tau v_t = d \Delta v - (v + 1) + (u + 1)^2. \quad (47)$$

Преобразуем нелинейное слагаемое в первом уравнении (1). Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора и оставляя слагаемые не выше третьей степени

$$\begin{aligned}\frac{1}{v+1} &= 1 - v + v^2 - v^3 + \dots, \\ -(u+1) + (1+u)^2(1-v+v^2-v^3+\dots) &= u - v + (u-v)^2 - v(u-v)^2 + \dots,\end{aligned}$$

приведем уравнения (46) к виду

$$u_t = \Delta u + u - v + (u-v)^2 - v(u-v)^2, \quad \tau v_t = d\Delta v + 2u - v + u^2. \quad (48)$$

Пусть $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$, где k – критическое волновое число. Введем параметр надкритичности ε с помощью замены переменных

$$d = d_k + \varepsilon^2. \quad (49)$$

Тогда уравнение возмущений (48) принимает вид:

$$u_t = \Delta u + u - v + (u-v)^2 - v(u-v)^2, \quad \tau v_t = d_k \Delta v + 2u - v + u^2 + \varepsilon^2 \Delta v. \quad (50)$$

Будем разыскивать стационарное решение системы (50) в виде рядов по степеням параметра ε

$$u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k u_k(x), \quad v(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(x). \quad (51)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . При ε^1 приходим к задаче

$$0 = \Delta u_1 + u_1 - v_1, \quad 0 = d_k \Delta v_1 + 2u_1 - v_1, \quad (52)$$

решением которой является

$$(u_1; v_1) = \beta_1 \Phi_k(x) = \beta_1 C_k \psi_k(x), \quad (53)$$

где $\Phi_k(x)$, C_k определены в (41), (44), амплитуда β_1 пока не определена.

3.3. Уравнения при ε^2 . Приравнявая в (50) выражения при ε^2 , для нахождения (u_2, v_2) приходим к системе

$$\Delta u_2 + u_2 - v_2 = -(u_1 - v_1)^2, \quad d_k \Delta v_2 + 2u_2 - v_2 = -u_1^2. \quad (54)$$

Учитывая выражения u_1, v_1 (53), найдем вектор-функцию правой части системы (54)

$$f_2(x) = -(\mu_k^2; 1) \beta_1^2 \psi_k^2(x). \quad (55)$$

Условием разрешимости системы (54) является ортогональность правой части f_2 собственному вектору $\Phi_k(x)$ линейного сопряженного оператора A^* :

$$\int_{\Omega} f_2(x) \Phi_k(x) dx = -\beta_1^2 \left(\mu_k^2 - \frac{\tau}{2}(1 - \mu_k) \right) \int_{\Omega} \psi_k^3(x) dx = 0. \quad (56)$$

Условие (56) выполняется в одномерном случае, а также в случае прямоугольного параллелепипеда в силу равенства нулю интеграла от куба собственной функции. Далее рассмотрим одномерный случай.

3.3.1. Нелинейная добавка в одномерном случае. В одномерном случае формула (55) принимает вид

$$f_2(x) = -(\mu_k^2; 1)\beta_1^2 \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi k}{\ell} x \right) \right). \quad (57)$$

Следовательно, решение системы (54) имеет следующую структуру

$$(u_2; v_2) = \beta_2 \Phi_k(x) + z_0 + z(x), \quad (58)$$

где первое слагаемое есть решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (54), а второе и третье — неоднородного:

$$z_0 = (C_1^0; C_2^0); \quad z(x) = (C_1^1; C_2^1) \cos \left(\frac{2\pi k}{\ell} x \right). \quad (59)$$

Для нахождения z_0 из (54) приходим к системе

$$C_1^0 - C_2^0 = -\frac{1}{2}\beta_1^2\mu_k^2, \quad 2C_1^0 - C_2^0 = -\frac{1}{2}\beta_1^2, \quad (60)$$

решением которой является

$$C_1^0 = \frac{1}{2}\beta_1^2(\mu_k^2 - 1), \quad C_2^0 = \frac{1}{2}\beta_1^2(2\mu_k^2 - 1). \quad (61)$$

Теперь найдем $z(x)$. Коэффициенты C_1^1 и C_2^1 удовлетворяют уравнениям

$$C_1^1(1 - \mu_{2k}) - C_2^1 = -\frac{1}{2}\beta_1^2\mu_k^2, \quad 2C_1^1 - C_2^1(d_k\mu_{2k} + 1) = -\frac{1}{2}\beta_1^2. \quad (62)$$

Определитель системы (62) имеет вид

$$\Delta(\mu_k) = d_k\mu_{2k}(\mu_{2k} - 1) + \mu_{2k} + 1. \quad (63)$$

Если $\mu_{2k} \geq 1$, то из (63) следует, что определитель системы $\Delta(\mu_k) > 0$. Если $\mu_{2k} < 1$, то определен коэффициент диффузии d_{2k} и, преобразовав выражение (63), вновь получим положительность определителя системы:

$$\Delta(\mu_k) = \mu_{2k}(\mu_{2k} - 1)(d_k - d_{2k}) > 0, \quad (64)$$

так как при $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$ имеем $d_k < d_{2k}$.

Для дальнейшего нам понадобится еще одно выражение $\Delta(\mu_k)$. Учитывая соотношение $\mu_{2k} = 4\mu_k$, преобразуем (64) к виду

$$\Delta(\mu_k) = \frac{3(4\mu_k^2 + 5\mu_k - 1)}{1 - \mu_k} = \frac{3(\gamma_{k,2k} - 1)}{1 - \mu_k} > 0. \quad (65)$$

Теперь из (62) найдем C_1^1 и C_2^1

$$C_1^1 = \frac{1}{2} \frac{\beta_1^2}{\Delta(\mu_k)} (\mu_k^2(d_k\mu_{2k} + 1) - 1), \quad C_2^1 = \frac{1}{2} \frac{\beta_1^2}{\Delta(\mu_k)} (2\mu_k^2 - (1 - \mu_{2k})). \quad (66)$$

3.3.2. Нелинейная добавка в случае прямоугольника. Пусть $\Omega = (0, a) \times (0, b)$, стороны прямоугольника связаны соотношением (34), k – критическое значение волнового числа. Для удобства введем следующие обозначения: $\mu_k = \lambda_{m,n}$ и $\psi_k = \Psi_{m,n}(x_1, x_2)$ – собственные значения и собственные функции оператора $-\Delta$ с краевыми условиями Неймана

$$\Delta \Psi_{m,n} + \lambda_{m,n} \Psi_{m,n} = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \Psi_{m,n}}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (67)$$

Возможны три типа собственных значений и собственных функций.

Тип 1. При $m \neq 0, n = 0$

$$\mu_k = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot m^2; \quad \Psi_{m,n} = \cos\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right). \quad (68)$$

В этом случае собственное значение задачи в прямоугольнике совпадает с собственным значением μ_m в одномерном случае при $\ell = a$, а собственная функция – с собственной функцией $\psi_m(x_1)$ в одномерном случае.

Таким образом, коэффициенты разложений вторичных решений при ε^2 имеют вид (58), (59), где $\mu_k = \lambda_{m,0}, \mu_{2k} = \lambda_{2m,0}$, а собственную функцию $\cos\left(\frac{2\pi k}{\ell} x\right)$ надо заменить на $\cos\left(\frac{2\pi m}{a} x_1\right)$.

Тип 2. При $m = 0, n \neq 0$

$$\mu_k = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cdot n^2; \quad \Psi_{m,n} = \cos\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right). \quad (69)$$

В этом случае собственное значение задачи в прямоугольнике совпадает с собственным значением μ_n при $\ell = b$ в одномерном случае, а собственная функция – с собственной функцией $\psi_n(x_2)$ в одномерном случае.

Тогда, как и для типа 1, уравнения при ε^2 уже решены в одномерном случае. Коэффициенты разложений вторичных решений при ε^2 имеют вид (58), (59), где $\mu_k = \lambda_{0,n}, \mu_{2k} = \lambda_{0,2n}$, а собственную функцию $\cos\left(\frac{2\pi k}{\ell} x\right)$ надо заменить на $\cos\left(\frac{2\pi n}{b} x_2\right)$.

Тип 3. При $m \neq 0, n \neq 0$

$$\mu_k = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot m^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cdot n^2; \quad \Psi_{m,n} = \cos\left(\frac{\pi m}{b} x_2\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right). \quad (70)$$

Заметим, что в прямоугольнике связь между k и ν_k в общем случае неизвестна.

Очевидно, что для собственных функций первого и второго типов уравнения при ε^2 уже рассмотрены в одномерном случае. Рассмотрим собственные функции третьего типа. Из равенства

$$\Psi_{m,n}^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi m}{a} x_1\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{b} x_2\right) + \cos\left(\frac{2\pi m}{a} x_1\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{b} x_2\right) \right) \quad (71)$$

следует, что в выражении (58) слагаемое $z_0 = C^0$ имеет тот же вид, что и в (59), а слагаемое $z(x)$ имеет следующую структуру

$$z(x) = C^1 \cos\left(\frac{2\pi m}{a} x_1\right) + C^2 \cos\left(\frac{2\pi n}{b} x_2\right) + C^3 \cos\left(\frac{2\pi m}{a} x_1\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{b} x_2\right). \quad (72)$$

Константы C^1, C^2, C^3 находятся с помощью тех же рассуждений, что и для собственных функций первого и второго типов. В настоящей работе третий тип собственных функций не рассматривается.

3.4. Уравнения при ε^3 . Приравнивая в (50) выражения при ε^3 , для нахождения (u_3, v_3) приходим к системе

$$\begin{aligned}\Delta u_3 + u_3 - v_3 &= -2(u_1 - v_1)(u_2 - v_2) + v_1(u_1 - v_1)^2 \equiv F_1, \\ d_k \Delta v_3 + 2u_3 - v_3 &= -\Delta v_1 - 2u_1 u_2 \equiv F_2.\end{aligned}\quad (73)$$

3.4.1. Условие разрешимости в одномерном случае. Учитывая выражения u_1, v_1 (53) и u_2, v_2 (58), найдем вектор-функцию правой части системы (74) $\mathbf{f}_3(x) = (F_1; F_2)$:

$$\begin{aligned}F_1 &= -2\beta_1 \beta_2 \mu_k^2 \psi_k^2(x) - 2\beta_1 \mu_k (C_1^0 - C_2^0) \psi_k(x) - 2\beta_2 \mu_k (C_1^1 - C_2^1) \psi_k \psi_{2k} + \\ &\quad + \beta_1^3 \mu_k^2 (1 - \mu_k) \psi_k^3(x), \\ F_2 &= \beta_1 \mu_k (1 - \mu_k) \psi_k(x) - 2\beta_1 \beta_2 \psi_k^2(x) - 2\beta_1 C_1^0 \psi_k(x) - 2\beta_1 C_1^1 \psi_k(x) \psi_{2k}(x).\end{aligned}\quad (74)$$

Условие разрешимости уравнения при ε^3 — ортогональность правой части системы решению однородного сопряженного уравнения:

$$\int_{\Omega} \mathbf{f}_3(x) \Phi_k(x) dx = 0. \quad (75)$$

Оно имеет вид

$$\begin{aligned}2\mu_k (C_1^0 - C_2^0) + \mu_k (C_1^1 - C_2^1) - \frac{3}{4} \beta_1^2 \mu_k^2 (1 - \mu_k) + \\ + \frac{\tau}{2} (1 - \mu_k) [\mu_k (1 - \mu_k) - 2C_1^0 - C_1^1] = 0.\end{aligned}\quad (76)$$

После подстановки коэффициентов $C_1^0, C_2^0, C_1^1, C_2^1$ в (76) условие разрешимости (75) принимает вид

$$\beta_1^2 f(\mu_k) = \tau \mu_k (1 - \mu_k)^2. \quad (77)$$

Так как правая часть (77) положительна, то знак β_1^2 совпадает со знаком выражения $f(\mu_k)$:

$$\begin{aligned}f(\mu_k) &= f_1(\mu_k) + \tau f_2(\mu_k); \\ f_1(\mu_k) &= \mu_k \left(\frac{1}{2} \mu_k^2 + \frac{3}{2} \mu_k \right) - \frac{\mu_k}{\Delta(\mu_k)} (d_k \mu_k^2 \cdot \mu_{2k} - \mu_k^2 - \mu_{2k}); \\ f_2(\mu_k) &= (1 - \mu_k) \left(\mu_k^2 - 1 + \frac{1}{2\Delta(\mu_k)} (\mu_k^2 (d_k \mu_{2k} + 1) - 1) \right).\end{aligned}\quad (78)$$

3.4.2. Мягкая и жесткая потеря устойчивости. Если $\beta_1^2 > 0$, то происходит мягкая потеря устойчивости — вторичные решения (тьюринговы структуры) существуют и устойчивы в закритической области $d > d_k$, где d_k — критическое значение коэффициента диффузии. Если же $\beta_1^2 < 0$, то происходит жесткая потеря устойчивости — вторичные решения существуют в докритической области $d < d_k$, и они неустойчивы [16, 17].

Найдем условия, при которых происходит мягкая или жесткая потеря устойчивости. С учетом (65), преобразуем (78) к виду

$$\begin{aligned} f_1(\mu_k) &= \frac{\mu_k^2(\mu_k + 1)}{6(4\mu_k^2 + 5\mu_k - 1)} \cdot g_1(\mu_k); \\ f_2(\mu_k) &= \frac{(1 - \mu_k^2)}{6(4\mu_k^2 + 5\mu_k - 1)} \cdot g_2(\mu_k), \end{aligned} \quad (79)$$

где $g_1(\mu_k)$ и $g_2(\mu_k)$ находятся по формулам

$$\begin{aligned} g_1(\mu_k) &= 12\mu_k^2 + 29\mu_k - 1; \\ g_2(\mu_k) &= 24\mu_k^3 + 9\mu_k^2 - 34\mu_k + 5. \end{aligned} \quad (80)$$

Введем обозначение $y = \mu_k$, $0 < y < 1$. Тогда $f(y)$ в (77) имеет вид

$$f(y) = \frac{(1 + y)(y^2 g_1(y) + \tau(1 - y)g_2(y))}{6(4y^2 + 5y - 1)}. \quad (81)$$

Наша цель — исследовать знак функции $f(y)$. Воспользовавшись выражением $\mu_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2$, найдем пределы изменения y , когда длина отрезка $\ell \in [\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1}]$. Имеем неравенство

$$\left(\frac{\pi k}{\ell_{k,k+1}}\right)^2 \leq y \leq \left(\frac{\pi k}{\ell_{k-1,k}}\right)^2, \quad (82)$$

где $\ell_{k,m}$ определены в (27).

При $k = 1$ имеем:

$$\left(\frac{\pi}{\ell_{1,2}}\right)^2 \leq y \leq \left(\frac{\pi}{\ell_{0,1}}\right)^2. \quad (83)$$

Учитывая выражения $\ell_{0,1} = \pi$ и $\ell_{1,2}$, при $k = 1$ приходим к неравенству

$$y_* \leq y \leq 1, \quad y_* = \frac{\sqrt{41} - 5}{8} \approx 0.1754, \quad (84)$$

где y_* — положительный корень уравнения $4y^2 + 5y - 1 = 0$, которое получается из условия $\gamma_1 = 1$. Таким образом, при $y > y_*$ знаменатель в (81) положителен.

При $k = 2$ из (82) и (84) приходим к равенству

$$4 \left(\frac{\pi}{\ell_{2,3}}\right)^2 \leq y \leq 4y_*; \quad 0.2607 \leq y \leq 0.7016. \quad (85)$$

Последнее неравенство в (85) получено в результате приближенных вычислений.

Легко видеть, что с ростом волнового числа k длина промежутка изменения y (82) уменьшается. С учетом неравенств (32), (33) легко показать, что в пределе данный промежуток стягивается в точку, которая принадлежит всем рассматриваемым промежуткам.

Утверждение 6. При $k \rightarrow \infty$ промежуток изменения y стягивается в точку минимума $y_0 = \sqrt{2} - 1$ функции $d(y)$ (25).

Из (81) и (84) заключаем, что для того, чтобы выражение β_1^2 имело знак плюс, достаточно, чтобы функция

$$G(y) = y^2 g_1(y) + \tau(1 - y)g_2(y) \quad (86)$$

была положительна, когда y принадлежит промежутку (83), а τ меняется на интервале $(0, 1)$.

Заметим, что при $\tau = 0$ функция $G(y)$ положительна. Исследование $G(y)$ показывает, что она положительна при всех y , принадлежащих максимально возможному промежутку изменения $y \in [y_*, 1]$, если параметр τ мал, а именно $\tau \in (0; 0.2059)$.

Кроме того, существует промежуток изменения $y \in (y_1; 1)$, где $y_1 \approx 0.47$, на котором $G(y)$ положительна при всех $\tau \in (0; 1)$.

3.4.3. Условие разрешимости в двумерном случае. Для рассмотренных ранее собственных значений первого и второго типа, когда один из индексов n или m обращается в нуль, проходят рассуждения одномерного случая (74)–(81).

Пусть для определенности $m \neq 0$, $n = 0$. Тогда для нахождения квадрата амплитуды получим то же выражение, что и в одномерном случае (77). Для определения типа потери устойчивости необходимо найти промежуток изменения переменной $y = \mu_k$.

Воспользовавшись выражением $\mu_k = \frac{\pi^2 \nu_k}{a^2}$, найдем пределы изменения y , когда сторона прямоугольника $a \in (a_{k-1,k}, a_{k,k+1})$. Вместо (82) приходим к неравенству

$$\frac{\pi^2 \nu_k}{a_{k,k+1}^2} \leq y \leq \frac{\pi^2 \nu_k}{a_{k-1,k}^2}, \quad (87)$$

где $a_{k,k+1}$ определены в (39).

При $k = 1$ имеем:

$$\frac{\pi^2 \nu_1}{a_{1,2}^2} \leq y \leq \frac{\pi^2 \nu_1}{a_{0,1}^2}. \quad (88)$$

Учитывая выражения $a_{0,1}$ и $a_{1,2}$, при $k = 1$ приходим к неравенству

$$y_0 \leq y \leq 1, \quad y_0 = \frac{\sqrt{3 + 6\sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \approx 0.3445. \quad (89)$$

Так как $y_0 > y_*$, то при $y > y_0$ знаменатель в (81) положителен. Легко видеть, что утверждение 6 справедливо и в двумерном случае. Достаточные условия мягкой потери устойчивости, сформулированные в конце предыдущего пункта, справедливы также и в двумерном случае.

3.4.4. Стационарные решения. Рассмотрев старшие члены разложения решения по степеням ε , заключаем, что в (75) коэффициент $\beta_2 = 0$. Суммируя полученные результаты, приходим к утверждению.

Утверждение 7. Пусть k – критическое волновое число; в одномерном случае длина отрезка ℓ заключена в промежутке $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$, в двумерном случае при $m \neq 0$, $n = 0$ (68) сторона прямоугольника a принадлежит промежутку $a \in (a_{k-1,k}, a_{k,k+1})$. Тогда при $\tau \in (0; 0.2059)$ происходит мягкая потеря устойчивости положения равновесия (1; 1) нелинейной системы и при малых $d > d_k$ возникают устойчивые вторичные пространственно неоднородные решения

$$(u(x); v(x)) = \pm (d - d_k)^{1/2} \beta_1 \mathbf{C}_k \cos\left(\frac{\pi k}{\ell} x_1\right) + (d - d_k) (\mathbf{z}_0 + \mathbf{z}(x)) + O((d - d_k)^{3/2}), \quad (90)$$

где \mathbf{C}_k определены в (44),

$$\mathbf{z}_0 = (C_1^0; C_2^0); \quad \mathbf{z}(x) = (C_1^1; C_2^1) \cos\left(\frac{2\pi k}{\ell} x_1\right), \quad (91)$$

коэффициенты C_1^0, C_2^0 найдены в (61), а C_1^1, C_2^1 найдены в (66).

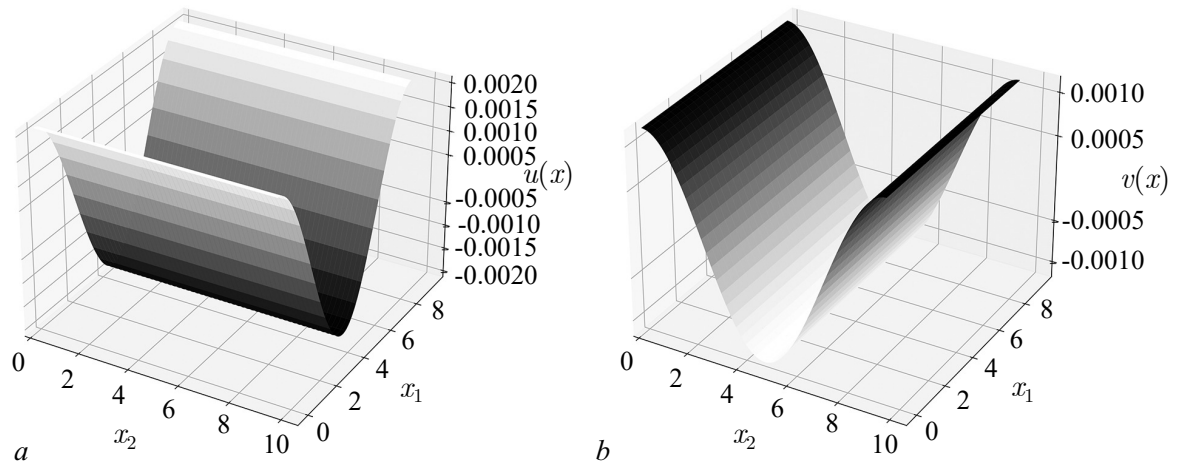


Рис. 2. Компоненты вторичного решения $u(x)$ (a) и $v(x)$ (b) при $k = 2, \ell = 3\pi$
 Fig. 2. Components of the secondary solution $u(x)$ (a) и $v(x)$ (b) at $k = 2, \ell = 3\pi$

На рис. 2 приведен пример вторичного пространственно неоднородных решения, полученного аналитически, в случае, когда пространственная переменная меняется в прямоугольнике.

Численные расчеты полностью согласуются с утверждениями, полученными аналитически. На рис. 3 приведены результаты численного интегрирования нелинейной системы (48) в случае мягкой потери устойчивости в одномерном случае при начальном условии

$$u(x, 0) = \varepsilon \cos\left(\frac{2}{3}x\right); \quad v(x, 0) = \frac{5}{9}\varepsilon \cos\left(\frac{2}{3}x\right) \quad (92)$$

при критическом волновом числе $k = 2$ и значениях параметров $\ell = 3\pi, \tau = 0.15, \varepsilon = 0.1, d = d_2 + \varepsilon^2$, где критический коэффициент диффузии $d_2 = 5.85$ в соответствии с формулой (22). Решение нестационарной системы за короткий промежуток времени выходит на стационарный режим (90), соответствующий положительному $\beta_1 = 0.2$. Если в начальном условии (92) заменить

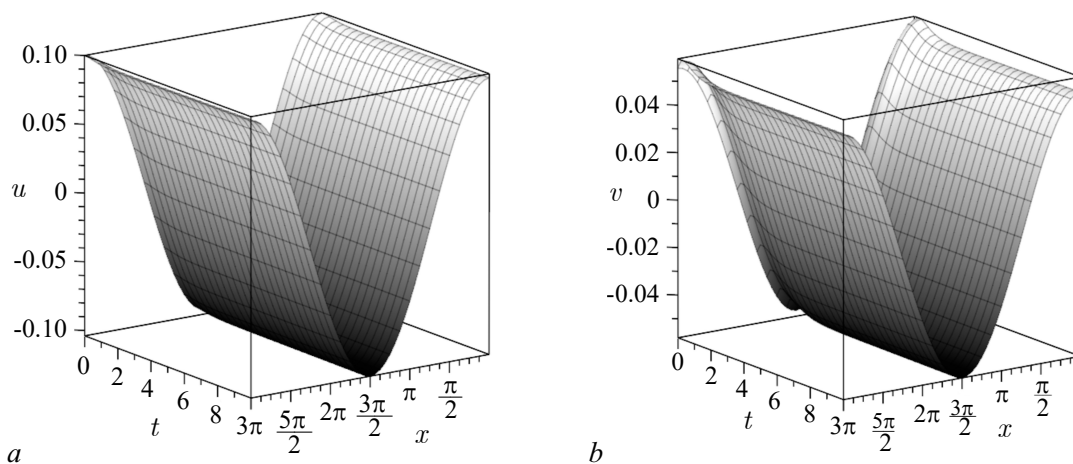


Рис. 3. Численное решение $u(x, t)$ (a) и $v(x, t)$ (b) нелинейной нестационарной системы при $\tau = 0.15$ с начальными условиями, близкими к стационарному состоянию

Fig. 3. Numerical solution $u(x, t)$ (a) and $v(x, t)$ (b) of a non-linear non-stationary system for $\tau = 0.15$ with initial conditions close to the stationary state

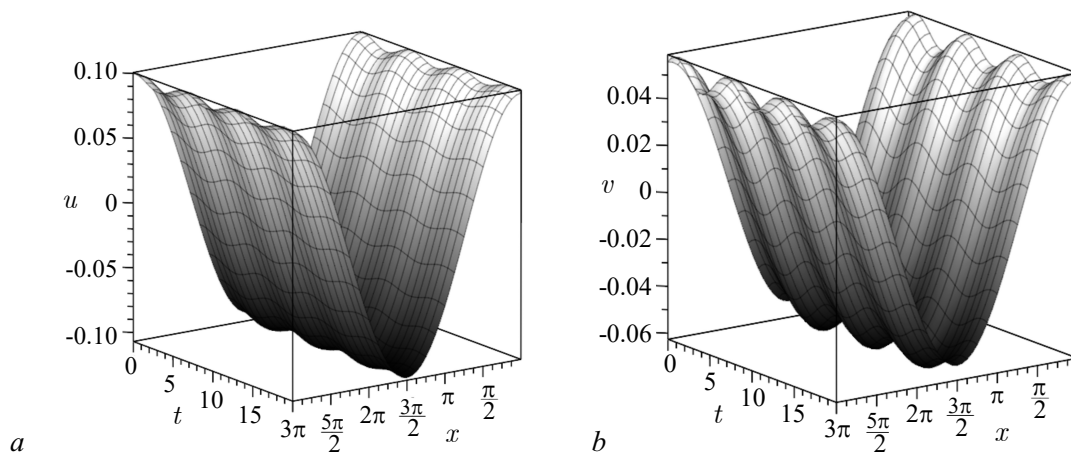


Рис. 4. Численное решение $u(x, t)$ (a) и $v(x, t)$ (b) нелинейной нестационарной системы при $\tau = 0.95$ с начальными условиями, близкими к стационарному состоянию

Fig. 4. Numerical solution $u(x, t)$ (a) and $v(x, t)$ (b) of a non-linear non-stationary system for $\tau = 0.95$ with initial conditions close to the stationary state

ε на $-\varepsilon$, то в нелинейной системе устанавливается режим, соответствующий знаку «минус» в формуле (90).

Если значение τ берется из области, соответствующей жесткой потере устойчивости, то есть близко к единице (на рис. 4 значение $\tau = 0.95$, остальные параметры те же, что на рис. 3), то в численных экспериментах положение равновесия теряет устойчивость, но выхода на стационарный режим не происходит.

Заключение

1. **Область неустойчивости Тьюринга.** Найдена область необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга для системы Гирера–Мейнхардта с параметром релаксации на плоскости параметров (τ, d) , где τ – параметр релаксации, а d – коэффициент диффузии.
2. **Критический коэффициент диффузии.** Найдено явное выражение критического коэффициента диффузии, когда система рассматривается в произвольной ограниченной области. Показано, что критический коэффициент диффузии зависит от собственных значений оператора Лапласа в данной области. Установлена зависимость критического коэффициента диффузии от характерного размера области в случае отрезка и прямоугольника. Явно найдены выражения длины отрезка и длины стороны прямоугольника, при которых происходит «смена» критического волнового числа. Данные выражения найдены из условия равенства единице некоторой комбинации собственных значений оператора Лапласа γ_k . Показано, что для указанных областей для каждого критического волнового числа существует единственное значение характерного размера, при котором необходимые и достаточные условия неустойчивости Тьюринга совпадают. Этому значению соответствует точка минимума коэффициента диффузии, рассматриваемого как функция от длины отрезка в одномерном случае или стороны прямоугольника в двумерном случае. Проведено сравнение с условиями неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга.
3. **Тьюринговы структуры.** Методом Ляпунова–Шмидта явно найдены несколько первых членов рядов по степеням надкритичности, когда коэффициент диффузии находится в окрестности критического значения. Рассмотрения проведены для отрезка, а также для прямоугольника в случае, когда собственные функции оператора Лапласа имеют ту же структуру,

что в одномерном случае. Получены достаточные условия мягкой потери устойчивости, приведены примеры вторичных решений нелинейных уравнений. Предложенный подход носит общий характер и может быть распространен на другие системы реакции–диффузии. Например, систему Шнакенберга, ФитцХью–Нагумо, Грэй–Скотта, модель «брюселлятор» и другие.

Список литературы

1. *Wei J., Winter M.* Mathematical Aspects of Pattern Formation in Biological Systems. London: Springer, 2014. 319 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-5526-3.
2. *Костин В. А., Осипов Г. В.* Неустойчивость однородного состояния и двухдоменные пространственно-временные структуры в реакционно-диффузионных системах с глобальной связью // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 1. С. 186–207. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-186-207.
3. *Цибулин В. Г., Ха Т. Д., Зеленчук П. А.* Нелинейная динамика системы хищник–жертва на неоднородном ареале и сценарии локального взаимодействия видов // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 751–764. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764.
4. *Казарников А. В., Ревина С. В.* Возникновение автоколебаний в системе Рэля с диффузией // Вестник ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». 2016. Т. 9, № 2. С. 16–28. DOI: 10.14529/mmp160202.
5. *Казарников А. В., Ревина С. В.* Асимптотика стационарных решений в системе Рэля с диффузией // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2016. № 3 (191). С. 13–19. DOI: 10.18522/0321-3005-2016-3-13-19.
6. *Казарников А. В., Ревина С. В.* Бифуркации в системе Рэля с диффузией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, № 4. С. 499–514. DOI: 10.20537/vm170402.
7. *Казарников А. В., Ревина С. В.* Монотонная неустойчивость в системе ФитцХью–Нагумо с диффузией // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2018. № 4 (200). С. 18–24. DOI: 10.23683/0321-3005-2018-4-18-24.
8. *Turing A. M.* The chemical basis of morphogenesis // Phil. Trans. R. Soc. Lond. B. 1952. Vol. 237, no. 641. P. 37–72. DOI: 10.1098/rstb.1952.0012.
9. *Murray J. D.* Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications. 3d edition. New York: Springer, 2003. 814 p. DOI: 10.1007/b98869.
10. *Ревина С. В., Лысенко С. А.* Достаточные условия неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, № 3. С. 424–442. DOI: 10.35634/vm210306.
11. *Ревина С. В.* Область диффузионной неустойчивости для систем параболических уравнений // Владикавказский математический журнал. 2022. Т. 24, № 4. С. 117–126. DOI: 10.46698/d6373-9335-7338-n.
12. *Gierer A., Meinhardt H.* A theory of biological pattern formation // Kybernetik. 1972. Vol. 12, no. 1. P. 30–39. DOI: 10.1007/BF00289234.
13. *Meinhardt H.* Models of biological pattern formation: From elementary steps to the organization of embryonic axes // Current Topics in Developmental Biology. 2008. Vol. 81. P. 1–63. DOI: 10.1016/S0070-2153(07)81001-5.
14. *Gomez D., Ward M. J., Wei J.* An asymptotic analysis of localized three-dimensional spot patterns for the Gierer–Meinhardt model: Existence, linear stability, and slow dynamics // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2021. Vol. 81, no. 2. P. 378–406. DOI: 10.1137/20M135707X.
15. *Chen M., Wu R., Chen L.* Pattern dynamics in a diffusive Gierer–Meinhardt model // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2020. Vol. 30, no. 12. P. 2030035. DOI: 10.1142/S0218127420300359.

16. Юдович В. И. Пример потери устойчивости и рождения вторичного течения жидкости в замкнутом сосуде // Математический сборник (новая серия). 1967. Т. 74(116), № 4. С. 565–579.
17. Юдович В. И. Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // Прикладная математика и механика. 1972. Т. 36, № 3. С. 450–459.
18. Revina S. V. Long wavelength asymptotics of self-oscillations of viscous incompressible fluid // In: Kusraev A. G., Totieva Z. D. (eds) Operator Theory and Differential Equations. Trends in Mathematics. Cham: Birkhäuser, 2021. P. 185–203. DOI: 10.1007/978-3-030-49763-7_15.

References

1. Wei J, Winter M. Mathematical Aspects of Pattern Formation in Biological Systems. London: Springer; 2014. 319 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-5526-3.
2. Kostin VA, Osipov GV. Instability of homogeneous state and two-domain spatiotemporal structures in reaction-diffusion systems with global coupling. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(1):186–207 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-186-207.
3. Tsybulin VG, Ha TD, Zelenchuk PA. Nonlinear dynamics of the predator – prey system in a heterogeneous habitat and scenarios of local interaction of species. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(5):751–764 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764.
4. Kazarnikov AV, Revina SV. The onset of auto-oscillations in Rayleigh system with diffusion. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 2016;9(2):16–28 (in Russian). DOI: 10.14529/mmp160202.
5. Kazarnikov AV, Revina SV. Asymptotics of stationary solutions of Rayleigh reaction-diffusion system. *Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*. 2016;(3(191)):13–19 (in Russian). DOI: 10.18522/0321-3005-2016-3-13-19.
6. Kazarnikov AV, Revina SV. Bifurcations in a Rayleigh reaction–diffusion system. *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2017;27(4):499–514 (in Russian). DOI: 10.20537/vm170402.
7. Kazarnikov AV, Revina SV. Monotonous instability in Fitzhugh-Nagumo reaction-diffusion system. *Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*. 2018;(4(200)):18–24 (in Russian). DOI: 10.23683/0321-3005-2018-4-18-24.
8. Turing AM. The chemical basis of morphogenesis. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B*. 1952;237(641):37–72. DOI: 10.1098/rstb.1952.0012.
9. Murray JD. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*. 3d edition. New York: Springer; 2003. 814 p. DOI: 10.1007/b98869.
10. Revina SV, Lysenko SA. Sufficient Turing instability conditions for the Schnakenberg system. *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2021;31(3):424–442. DOI: 10.35634/vm210306.
11. Revina SV. Diffusion instability region for systems of parabolic equations. *Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2022;24(4):117–126 (in Russian). DOI: 10.46698/d6373-9335-7338-n.
12. Gierer A, Meinhardt H. A theory of biological pattern formation. *Kybernetik*. 1972;12(1):30–39. DOI: 10.1007/BF00289234.
13. Meinhardt H. Models of biological pattern formation: From elementary steps to the organization of embryonic axes. *Current Topics in Developmental Biology*. 2008;81:1–63. DOI: 10.1016/S0070-2153(07)81001-5.
14. Gomez D, Ward MJ, Wei J. An asymptotic analysis of localized three-dimensional spot patterns for the Gierer–Meinhardt model: Existence, linear stability, and slow dynamics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2021;81(2):378–406. DOI: 10.1137/20M135707X.

15. Chen M, Wu R, Chen L. Pattern dynamics in a diffusive Gierer–Meinhardt model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2020;30(12):2030035. DOI: 10.1142/S0218127420300359.
16. Yudovich VI. An example of loss of stability and generation of a secondary flow in a closed vessel. *Mathematics of the USSR-Sbornik*. 1967;3(4):519–533. DOI: 10.1070/SM1967v003n04ABEH002764.
17. Iudovich VI. Investigation of auto-oscillations of a continuous medium, occurring at loss of stability of a stationary mode. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1972;36(3): 424–432. DOI: 10.1016/0021-8928(72)90055-X.
18. Revina SV. Long wavelength asymptotics of self-oscillations of viscous incompressible fluid. In: Kusraev AG, Totieva ZD, editors. *Operator Theory and Differential Equations. Trends in Mathematics*. Cham: Birkhäuser; 2021. P. 185–203. DOI: 10.1007/978-3-030-49763-7_15.

Ревина Светлана Васильевна — окончила механико-математический факультет Ростовского государственного университета по направлению «Прикладная математика и информатика» (1986). Кандидат физико-математических наук (1993, РГУ). С 1998 года работает на кафедре вычислительной математики и математической физики Южного федерального университета в должности доцента, с 2008 года является по совместительству научным сотрудником Южного математического института — филиала ВЦ РАН. Научные интересы — теория устойчивости и бифуркаций, математическая гидродинамика, уравнения Навье–Стокса, уравнения реакции–диффузии. Опубликовала свыше 50 научных статей по указанным направлениям.

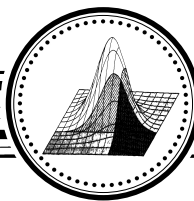


Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
 Южный федеральный университет
 Россия, 362025 Владикавказ, ул. Вагутина, 53
 Южный математический институт ВЦ РАН
 E-mail: svrevina@sfedu.ru
 ORCID: 0000-0002-9216-8892
 AuthorID (eLibrary.Ru): 15908

Рябов Анатолий Сергеевич — окончил бакалавриат, а затем магистратуру Института математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича в Южном федеральном университете по направлению «Прикладная математика и информатика» (2018), затем аспирантуру по направлению «Математика и механика» (2022, квалификация — исследователь, преподаватель-исследователь). Научные интересы — теория устойчивости и бифуркаций, уравнения реакции–диффузии, теория информации, компьютерные эксперименты. С 2019 года работает инженером-программистом.



Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
 Южный федеральный университет
 E-mail: calliing-windows@yandex.ru
 ORCID: 0009-0000-9435-9513
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1191270



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(4)

Научная статья
УДК 517.9

DOI: 10.18500/0869-6632-003054
EDN: YSXPTE

Динамика полностью связанных цепочек из большого количества осцилляторов с большим запаздыванием в связях

С. А. Кащенко

Региональный научно-образовательный математический центр
при Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова, Россия
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 8.04.2023, принята к публикации 4.05.2023,
опубликована онлайн 18.07.2023, опубликована 31.07.2023

Аннотация. Цель настоящего исследования — изучить локальную динамику полностью связанных цепочек из большого количества осцилляторов с большим запаздыванием в связях. От дискретной модели, описывающей динамику большого количества связанных осцилляторов осуществлен переход к нелинейному интегродифференциальному уравнению, непрерывно зависящему от времени и пространственной переменной. Рассматривается класс полностью связанных систем. Основное предположение заключается в том, что величина запаздывания в связях является достаточно большой. Это предположение открывает путь к использованию специальных асимптотических методов исследования. Выделены параметры, при которых реализуется критический случай в задаче об устойчивости состояния равновесия. Показано, что они имеют бесконечную размерность. Построены аналоги нормальных форм — нелинейные краевые задачи типа Гинзбурга–Ландау. В ряде случаев эти краевые задачи содержат и интегральные составляющие. Их нелокальная динамика описывает поведение всех решений исходных уравнений в окрестности состояния равновесия. **Методы.** Применительно к рассматриваемым задачам развивается методика построения квазинормальных форм на центральных многообразиях. Разработан алгоритм построения асимптотики решений, основанный на использовании квазинормальных форм для определения медленно меняющихся амплитуд. **Результаты.** Построены квазинормальные формы, определяющие динамику исходной краевой задачи. Получены главные члены асимптотических приближений для решений рассматриваемых цепочек. На основе приведенных утверждений выявлен ряд интересных динамических эффектов. Например, бесконечное чередование прямых и обратных бифуркаций при увеличении коэффициента запаздывания. Их отличительная особенность заключается в том, что они имеют две или три пространственные переменные.

Ключевые слова: краевая задача, динамика, запаздывание, осцилляторы, нормальная форма, устойчивость.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-30011, <https://rscf.ru/project/21-71-30011/>.

Для цитирования: Кащенко С. А. Динамика полностью связанных цепочек из большого количества осцилляторов с большим запаздыванием в связях // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 523–542. DOI: 10.18500/0869-6632-003054. EDN: YSXPTE

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Dynamics of full-coupled chains of a great number of oscillators with a large delay in couplings

S. A. Kashchenko

Regional Scientific and Educational Mathematical Center
of the Yaroslavl State University, Russia
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

*Received 8.04.2023, accepted 4.05.2023,
available online 18.07.2023, published 31.07.2023*

Abstract. The subject of this work is the study of local dynamics of full-coupled chains of a great number of oscillators with a large delay in couplings. From a discrete model describing the dynamics of a great number of coupled oscillators, a transition has been made to a nonlinear integro-differential equation, continuously depending on time and space variable. A class of full-coupled systems has been considered. The main assumption is that the amount of delay in the couplings is large enough. This assumption opens the way to the use of special asymptotic methods of study. The parameters under which the critical case is realized in the problem of the equilibrium state stability have been distinguished. It is shown that they have infinite dimension. The analogues of normal forms — nonlinear boundary value problems of Ginzburg–Landau type have been constructed. In some cases, these boundary value problems contain integral components too. Their nonlocal dynamics describes the behavior of all solutions of the original equations in the balance state neighbourhood. *Methods.* As applied to the considered problems, methods of constructing quasinormal forms on central manifolds are developed. An algorithm for constructing the asymptotics of solutions based on the use of quasinormal forms for determining slowly varying amplitudes has been created. *Results.* Quasinormal forms that determine the dynamics of the original boundary value problem have been constructed. The dominant terms of asymptotic approximations for solutions of the considered chains have been obtained. On the basis of the given statements, a number of interesting dynamical effects have been revealed. For example, an infinite alternation of direct and reverse bifurcations when the delay coefficient increases. Their distinguishing feature is that they have two or three spatial variables.

Keywords: boundary value problem, dynamics, delay, oscillators, normal form, stability.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-71-30011), <https://rscf.ru/project/21-71-30011/>.

For citation: Kashchenko SA. Dynamics of full-coupled chains of a great number of oscillators with a large delay in couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(4):523–542. DOI: 10.18500/0869-6632-003054

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Сначала рассмотрим цепочку из N связанных осцилляторов второго порядка с запаздывающими связями

$$\ddot{u}_j + a\dot{u}_j + u_j + F(u_j, \dot{u}_j) = \sum_{k=1}^N a_k u_{j+k}(t - T), \quad (1)$$

$F(u, v)$ — достаточно гладкая нелинейная функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого, $T > 0$ — запаздывание, индекс j меняется от 1 до N и для любого целого k значения $u_{k+N}(t)$ отождествляются с $u_k(t)$. Такого типа модели возникают во многих прикладных задачах радиофизики [1–8], лазерной физики [9–13], математической экологии [14, 15], теории нейронных сетей [16–21] и см., например, [22].

Удобно значения $u_j(t)$ ассоциировать со значениями функции двух переменных $u(t, x_j)$, где точки x_j ($j = 1, \dots, N$) равномерно распределены на некоторой окружности.

Предполагаем, что количество элементов цепочки N является достаточно большим:

$$N \gg 1. \quad (2)$$

Это условие дает основание перейти от дискретной относительно $u(t, x_j)$ системы (1) к уравнению с распределенными на отрезке $[0, 2\pi]$ параметрами для функции $u(t, x)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + u + F\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s) u(t - T, x + s) ds \quad (3)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (4)$$

Функция $\Phi(s)$ определяет связи между элементами и, вообще говоря, зависит от параметра ε . Например, в случае односторонней [17] и диффузионной [2] связей значения $\Phi(s)$ сосредоточены в окрестности одной или нескольких точек отрезка $[0, 2\pi]$. Здесь предполагаем, что функция $\Phi(s)$ от параметра ε не зависит. В этом случае цепочки принято называть полновязными.

Основное предположение, которое открывает путь к применению асимптотических методов, заключается в том, что параметр запаздывания T в (3) является достаточно большим:

$$\varepsilon = T^{-1} \ll 1. \quad (5)$$

В краевой задаче (3), (4) проведем замену времени $t \rightarrow Tt$. В результате приходим к сингулярно возмущенной краевой задаче

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a \frac{\partial u}{\partial t} + u + F\left(u, \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s) u(t - 1, x + s) ds, \quad (6)$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (7)$$

Поставим задачу об исследовании поведения всех решений из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия в (6), (7) при достаточно малых значениях ε . При изучении локальной динамики (6), (7) центральное место занимает анализ вопросов устойчивости решений линеаризованного в нуле уравнения

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a \frac{\partial u}{\partial t} + u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s) u(t - 1, x + s) ds \quad (8)$$

с краевыми условиями (7).

Рассмотрим характеристическое уравнение для (8), (7)

$$\varepsilon^2 \lambda^2 + \varepsilon a \lambda + 1 = f_k \exp(-\lambda), \quad (9)$$

где f_k — коэффициенты Фурье функции $\Phi(s)$:

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s) \exp(-iks) ds, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В том случае, когда все корни уравнения (9) при всех $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественные части, решения краевой задачи (8), (7) асимптотически устойчивы, и решения (6), (7) с достаточно малыми и не зависящими от ε (по норме $C_{[0,2\pi]} \times C(R^2)$) начальными условиями стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если же уравнение (9) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью, то решения (8), (7) неустойчивы и задача о динамике (6), (7) становится нелокальной.

Здесь будет рассматриваться критический случай, когда в (9) нет корней с положительной и отделенной от нуля вещественной частью, но есть корни, которые стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отметим, что в случае конечной размерности критического случая методика исследования локальной динамики хорошо известна. Она опирается на метод интегральных многообразий и метод нормальных форм (см., например, [23–25]). Характерной особенностью всех рассматриваемых ниже задач является то обстоятельство, что в них реализуются бесконечномерные критические случаи, когда бесконечно много корней характеристического уравнения стремится к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому методы интегральных многообразий и нормальных форм непосредственно неприменимы. Здесь существенно используется разработанный в [17, 26–30] подход, связанный с построением бесконечномерных квазинормальных форм.

В разделах 1–3 представлены исследования наиболее важных критических случаев. В качестве основных результатов построены так называемые квазинормальные формы, нелокальная динамика которых определяет поведение всех решений исходной краевой задачи (6), (7) в малой окрестности состояния равновесия.

В разделе 4 рассмотрен существенно более сложный по сравнению с разделами 1–3 критический случай, который реализуется для несколько иной, но близкой к (6), (7) краевой задаче

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a \frac{\partial u}{\partial t} + u + F\left(u, \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s) \left[u(t-1, x+s) - u(t-1, x) \right] ds, \quad u(t, x+2\pi) \equiv u(t, x). \quad (10)$$

Содержание раздела 5 посвящено обобщению результатов предыдущих разделов на более общую краевую задачу

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a \frac{\partial u}{\partial t} + u + F\left(u, \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_1(s) u(t-1, x+s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_2(s) \frac{\partial u(t-1, x+s)}{\partial t} ds, \quad (11)$$

$$u(t, x+2\pi) \equiv u(t, x). \quad (12)$$

Сделаем одно упрощающее предположение относительно нелинейной функции $f(u, \dot{u})$. Выше говорилось, что эта функция достаточно гладкая и имеет в нуле порядок малости выше первого. Чисто технически проще использовать нелинейность $f(u, \dot{u})$ третьего порядка малости, то есть для простоты ниже считаем, что в (1)

$$f(u, \dot{u}) = b_1 u^3 + b_2 u^2 \dot{u} + b_3 u \dot{u}^2 + b_4 \dot{u}^3. \quad (13)$$

Опишем здесь структуру всех следующих разделов. Она для всех них одинакова. Сначала выделяются параметры задачи, при которых наблюдается критический случай в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия. Затем рассматривается линеаризованная краевая задача и приводится ее характеристическое уравнение. После этого исследуется асимптотика всех тех корней характеристического уравнения, вещественная часть которых стремится к нулю при стремлении к нулю малого параметра ε . Таких корней оказывается бесконечно много. На их основе для линеаризованной задачи строится совокупность специальных решений. Такие решения удается записать в форме, которая допускает использование их для анализа решений (с неизвестными амплитудами) исходной нелинейной краевой задачи. Удастся определить явную форму для главного приближения (по параметру ε) соответствующего решения. Условно обозначим ее здесь через εU_1 . Решения нелинейной краевой задачи ищем тогда в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon U_1 + \varepsilon^3 U_3 + \dots$$

Заметим, что отсутствие здесь квадратичных по ε коэффициентов связано с тем, что в исходном уравнении нет квадратичной нелинейности. Относительно U_3 заранее известно, что она периодическая по нескольким своим аргументам. Подставляя вместо $u(t, x, \varepsilon)$ приведенное выражение, для определения U_3 приходим к специальной линейной неоднородной краевой задаче. Условие разрешимости этой краевой задачи в указанном классе функций позволяет выписать уравнение для неизвестных амплитуд, входящих в U_1 . Получение таких уравнений и является конечной целью. Нелокальная динамика этих уравнений, их еще называют квазинормальными формами, позволяет описать локальное поведение решений исходной краевой задачи. Отметим, что выполнение условий разрешимости уравнений для U_3 позволяет в явном виде определить эту функцию. Ниже будем использовать функцию U_3 , но формулы для этой функции для краткости изложения иногда приводить не будем.

1. Описание критических случаев

Рассмотрим характеристическое уравнение (9). Через f обозначим наибольшее из чисел $|f_k|$:

$$f = \max_{-\infty < k < \infty} |f_k|. \quad (14)$$

Воспользуемся методикой работ [26–28, 31]. Введем в рассмотрение величину

$$\gamma_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } a^2 \geq 2, \\ \frac{a^2}{4} (4 - a^2)^{1/2}, & \text{если } a^2 < 2. \end{cases}$$

Отметим, что

$$\gamma_0 \leq 1 \text{ и } 0 < \gamma_0 < 1 \text{ при } a^2 < 2$$

и

$$\gamma_0 = 0 \text{ при } a = 0.$$

В [28] показано, что имеют место следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть выполнено неравенство

$$f < \gamma_0.$$

Тогда при всех достаточно малых ε все корни (9) имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественные части.

Лемма 2. Пусть выполнено неравенство

$$f > \gamma_0.$$

Тогда при всех достаточно малых ε уравнение (9) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью.

Отметим, что в условии леммы 1 все решения краевой задачи (8), (7) и (6), (7) из малой и не зависящей от ε окрестности нуля стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если же выполнены условия леммы 2, то задача о динамике (6), (7) является нелокальной: в окрестности нулевого решения не может быть устойчивых решений.

В дальнейшем предполагается, что имеет место критический случай: при произвольном фиксированном γ_1 для параметра f выполнено либо равенство

$$f = \gamma_0 + \varepsilon^2 \gamma_1, \quad (15)$$

либо

$$f = -\gamma_0 - \varepsilon^2 \gamma_1. \quad (16)$$

Тем самым исследуются краевые задачи (8), (7) и (6), (7) в критическом случае.

Рассмотрим вопрос об асимптотике всех тех корней уравнения (9), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Соответствующие асимптотические разложения принципиально различаются для случая, когда $a_0^2 > 2$ и для случая, когда $a_0^2 < 2$.

Лемма 3. Пусть выполнено условие

$$a_0^2 > 2. \quad (17)$$

Тогда $\gamma_0 = 1$ и для тех корней $\lambda_k(\varepsilon)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) уравнения (9), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеют место асимптотические равенства:

1) в случае

$$f = 1 + \varepsilon^2 \gamma_1 \quad (18)$$

имеем

$$\lambda_k(\varepsilon) = 2\pi i k + \varepsilon \lambda_{k1} + \varepsilon^2 \lambda_{k2} + o(\varepsilon^3), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где

$$\lambda_{k1} = -2\pi i k a, \quad \lambda_{k2} = -2\pi^2 k^2 (a^2 - 2) + 2\pi i k a^2 + \gamma_1;$$

2) в случае

$$f = -1 - \varepsilon^2 \gamma_1 \quad (19)$$

имеем

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\pi(2k + 1) + \varepsilon \lambda_{k1} + \varepsilon^2 \lambda_{k2} + o(\varepsilon^3), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где

$$\lambda_{k1} = -\pi(2k + 1)a, \quad \lambda_{k2} = -\frac{1}{2}\pi^2(2k + 1)^2(a^2 - 2) + i\pi(2k + 1)a^2 + \gamma_1.$$

Рассмотрим затем случай, когда

$$0 < a^2 < 2. \quad (20)$$

Введем несколько обозначений. Пусть $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ такое значение, которое дополняет до целого выражение $\omega_0 \varepsilon^{-1}$, где

$$\omega_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } a^2 > 2, \\ \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{1/2}, & \text{если } a^2 < 2. \end{cases}$$

Положим

$$\begin{aligned} R_1 &= (ia - 2\omega_0)\gamma_0^{-1} \exp(-i\Omega_0), \\ R_2 &= \frac{1}{2}R_1^2 + \gamma_0^{-1} \exp(-i\Omega_0), \\ R_3 &= (a - 2i\omega_0)R_1\gamma_0^{-1} \exp(-i\Omega_0). \end{aligned}$$

Лемма 4. Пусть выполнены неравенства (20). Тогда для тех корней $\lambda_k(\varepsilon)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) уравнения (9), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеют место асимптотические равенства

$$\lambda_k(\varepsilon) = i(\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta - \Omega_0 + 2\pi k) + \varepsilon\lambda_{k1} + \varepsilon^2\lambda_{k2} + o(\varepsilon^3),$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{k1} &= R_1(\theta - \Omega_0 + 2\pi k), \\ \lambda_{k2} &= R_2(\theta - \Omega_0 + 2\pi k)^2 + R_3(\theta - \Omega_0 + 2\pi k) + \gamma_1 \exp(-i\Omega_0), \end{aligned}$$

причем выполнены соотношения

$$\operatorname{Re} R_1 = 0, \quad \operatorname{Re} R_2 < 0. \quad (21)$$

2. Критический случай на нулевой моде

Здесь предполагаем, что

$$\gamma_0 = |f_0| \quad \text{и} \quad |f_0| > |f_k| \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (22)$$

Исследование проведем отдельно для случаев (17) и (20). Сразу отметим, что соответствующие результаты для них существенно различны. При условии (17) решения формируются на частотах порядка 1, их назовем медленно осциллирующими. При условии (20) решения содержат частоты порядка ε^{-1} , поэтому назовем их быстро осциллирующими.

2.1. Медленно осциллирующие решения. Пусть сначала выполнено неравенство (17), то есть $a_0^2 > 2$ и $\gamma_0 = 1$. Тогда тем корням $\lambda_k(\varepsilon)$, о которых речь шла в лемме 3, отвечают решения $v_k(t, \varepsilon)$ линейной краевой задачи (8), (7) и $v_k(t, \varepsilon) = \exp(\lambda_k(\varepsilon)t)$, а значит, решением (8), (7) являются функции

$$v(t, \varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \exp(\lambda_k(\varepsilon)t),$$

где ξ_k – произвольные комплексные постоянные. Для случаев (15) и (16) это выражение можно представить соответственно в виде

$$v(t, \varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(2\pi i k y) = \xi(\tau, y)$$

и

$$v(t, \varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(\pi i (2k + 1)y) = \xi(\tau, y),$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $y = (1 - \varepsilon a)t$, $\xi_k(\tau) = \xi_k \exp((\lambda_{k2} + o(\varepsilon))\tau)$.

Решения $u(t, y, \varepsilon)$ нелинейной краевой задачи (6) и (7), «близкие к критическим» решениям $v(t, \varepsilon)$ линейной краевой задачи (8), (7), ищем в виде

$$u(t, y, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\xi(\tau, y) + \varepsilon^{3/2}u_3(\tau, y) + o(\varepsilon^2), \quad (23)$$

где $\xi(\tau, y)$ – неизвестная вещественная функция, для которой выполнены условия:

1) в случае (15) – условие периодичности по y

$$\xi(\tau, y + 1) \equiv \xi(\tau, y); \quad (24)$$

2) в случае (16) – условие антипериодичности по y

$$\xi(\tau, y + 1) \equiv -\xi(\tau, y). \quad (25)$$

Подставим формальный ряд (23) в краевую задачу (8), (7) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . Тогда, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получим уравнение для $u_3(\tau, y)$. Из условия его разрешимости приходим к выводу, что $\xi(\tau, y)$ является решением краевой задачи

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \left(\frac{a^2}{2} - 1\right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + \gamma_1 \xi - b_1 \xi^3 \quad (26)$$

с краевыми условиями соответственно (24) или (25). Сформулируем итоговый результат.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (17), (18) ((17), (19)) и $b_1 \neq 0$. Пусть функция $\xi(\tau, y)$ является ограниченным при $\tau \rightarrow \infty$, $y \in [0, 1]$ решением краевой задачи (26), (24) ((26) и (25)). Тогда функция

$$u(t, y, \varepsilon) = \varepsilon \xi(\tau, y) + \varepsilon^3 u_3(\tau, y) \quad (27)$$

при $\tau = \varepsilon^2 t$, $y = (1 - \varepsilon a)t$ удовлетворяет краевой задаче (6), (7) с точностью до $o(\varepsilon^3)$.

Из этой теоремы следует, что при сформулированных условиях построенные краевые задачи (26), (24) и (26), (25) играют роль нормальных форм для краевой задачи (6), (7). Отметим, что если $b_1 = 0$, то есть условие теоремы 1 не выполняется, и $b_2 \neq 0$, то изменения невелики. Последнее слагаемое в (26) заменяется на $-b_2 \xi^2 \partial \xi / \partial y$ и формула (27) принимает вид

$$u(t, y, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \xi(\tau, y) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, y).$$

2.2. Быстро осциллирующие решения. Пусть выполнено неравенство (20), то есть $a^2 < 2$. Корням $\lambda_k(\varepsilon)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), о которых говорилось в лемме 4, отвечают решения $v_k(t, \varepsilon)$ линейной краевой задачи (8), (7) $v_k(t, \varepsilon) = \exp(\lambda_k(\varepsilon)t)$. Значит и функция

$$v(t, \varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \exp(\lambda_k(\varepsilon)t), \quad (28)$$

где ξ_k – произвольные комплексные постоянные тоже удовлетворяют краевой задаче (8), (7). Учитывая асимптотические формулы для $\lambda_k(\varepsilon)$, представленные в лемме 4, выражение (28) можно записать в виде

$$v(t, \varepsilon) = E(t, \varepsilon) \xi(\tau, y).$$

Здесь положено $E(t, \varepsilon) = \exp [(i(\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta - \Omega_0) + \varepsilon R_1(\theta - \Omega_0))t]$,

$$\xi(\tau, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(2\pi i k y), \quad \tau = \varepsilon^2 t, \quad y = (1 + i\varepsilon R_1)t,$$

$\xi_k(\tau) = \xi_k \exp((\lambda_{k2} + o(\varepsilon))\tau)$. Напомним, что согласно (21) значение iR_1 вещественно.

Решения $u(t, y, \varepsilon)$ нелинейной краевой задачи (6), (7) в рассматриваемом случае ищем в виде формального ряда

$$u(t, y, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, y)E(t, \varepsilon) + \bar{\xi}(\tau, y)\bar{E}(t, \varepsilon)) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, y) + \dots \quad (29)$$

В этом выражении $\xi(\tau, y)$ – неизвестная, подлежащая определению комплексная функция, которая является 1-периодической по пространственной переменной y :

$$\xi(\tau, y + 1) \equiv \xi(\tau, y), \quad (30)$$

а зависимость от аргумента t функции u_3 – периодическая.

Подставим (29) в (6), (7) и будем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε . Тогда, собирая коэффициенты при ε^3 , приходим к уравнению относительно u_3 . Условие разрешимости этого уравнения в классе периодических по t функций состоит в выполнении равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = & -R_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + R_4 \frac{\partial \xi}{\partial y} + R_5 \xi - \xi^2 \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} - \\ & - (3b_1 + i\omega_0 b_2 + \omega_0^2 b_3 + 3i\omega_0^3 b_4) \exp(-i\Omega_0) \xi |\xi|^2, \end{aligned} \quad (31)$$

в котором $R_4 = -i(2R_2(\theta - \Omega_0) + R_3)$, $R_5 = R_2(\theta - \Omega_0)^2 + R_3(\theta - \Omega_0) + \gamma_1 \exp(-i\Omega_0)$.

Введем обозначение. Здесь и ниже через $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\theta_0)$ будем обозначать такую последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$, для которой $\theta(\varepsilon_n) = \theta_0$. Сформулируем основной результат.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (20) и (15) и пусть для произвольно фиксированного значения $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ краевая задача (31), (30) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $y \in [0, 1]$ решение $\xi(\tau, y)$. Тогда на последовательности $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\theta_0)$ функция

$$u(t, y, \varepsilon_n(\theta_0)) = \varepsilon_n(\theta_0) [\xi(\tau, y)E(t, \varepsilon_n(\theta_0)) + \bar{\xi}(\tau, y)\bar{E}(t, \varepsilon_n(\theta_0))] + \varepsilon_n^3(\theta_0) u_3(t, \tau, y)$$

при $\tau = \varepsilon_n^2(\theta_0)t$, $y = (1 - \varepsilon_n(\theta_0)a)t$ удовлетворяет краевой задаче (6), (7) с точностью до $o(\varepsilon_n^3(\theta_0))$.

Таким образом, краевая задача (31), (30) является квазинормальной формой для (6), (7) в рассматриваемом критическом случае. В силу условий (21) эта краевая задача является параболической. Структура ее решений может быть сложной. Эта краевая задача определяет главные члены асимптотических приближений решений исходной задачи краевой задачи (6), (7). Отсюда следует, что и локальная динамика (6), (7) также может быть сложной. Отметим еще, что по форме кубические нелинейности уравнения (31) сложнее, чем в классическом уравнении Гинзбурга–Ландау.

2.3. Система с малыми коэффициентами связей. Выше было показано, что критический случай для краевой задачи (6), (7) при $a = 0$ реализуется при $f = 0$. Здесь предполагаем, что коэффициенты a и f являются достаточно малыми, то есть для некоторых a_1 и γ_1 имеем соотношения

$$a = \varepsilon a_1, \quad f = \varepsilon \gamma_1 \quad (0 < \varepsilon \ll 1). \quad (32)$$

Ниже рассмотрим задачу именно такого типа, то есть с краевыми условиями (7) исследуем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a_1 \frac{\partial u}{\partial t} + u + f(u, \dot{u}) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s) u(t - \varepsilon^{-1}, x + s) ds. \quad (33)$$

Для линеаризованного в нуле уравнения характеристический квазиполином имеет вид

$$\lambda^2 + \varepsilon a_1 \lambda + 1 = \varepsilon f_k \exp(-\lambda \varepsilon^{-1}).$$

Бесконечно много корней $\lambda_k(\varepsilon)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) этого характеристического уравнения стремится к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$ и нет корня с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью. Тем самым в задаче об устойчивости нулевого решения (33) реализуется критический случай бесконечной размерности. Для $\lambda_k(\varepsilon)$ имеют место асимптотические представления

$$\lambda_k(\varepsilon) = i + \varepsilon \lambda_{k1} + \dots,$$

а λ_{k1} является корнем квазиполинома

$$\lambda_{k1} + \frac{1}{2} a_1 = -\frac{i}{2} \gamma_1 \exp(i\theta - T_1 \lambda_{k1}). \quad (34)$$

Фигурирующая в (34) величина $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ дополняет значение $T\varepsilon^{-1}$ до целого кратного 2π . Отметим, что квазиполином (34) имеет бесконечно много корней.

Решения нелинейного уравнения ищем в виде формального ряда

$$u = \varepsilon^{1/2} (\xi(\tau, x) \exp(it) + \bar{\xi}(\tau, x) \exp(-it)) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau, x) + \dots, \quad (35)$$

в котором зависимость от аргумента $t - 2\pi$ -периодическая. Подставим (35) в (33). Производя стандартные действия, приходим к уравнению для u_3 . Из условия его разрешимости в классе 2π -периодических по t функций получаем уравнение с фиксированным запаздыванием для определения неизвестной комплексной амплитуды $\xi(\tau, x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = & -\frac{1}{2} a_1 \xi - \frac{i}{2} \exp(i\theta) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s) \xi(\tau - 1, x + s) ds + \\ & + \frac{1}{2} (3ib_1 - b_2 + ib_3 - 3b_4) \xi |\xi|^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 3. Пусть выполнено условие (32) и для произвольно фиксированного значения $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ уравнение (36) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$ решение $\xi(\tau, x)$. Тогда на последовательности $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\theta_0)$ функция

$$u(t, x, \varepsilon_n) = \varepsilon_n^{1/2} (\xi(\tau, x) \exp(it) + \bar{\xi}(\tau, x) \exp(-it)) + \varepsilon_n^{3/2} u_3(t, \tau, x)$$

при $\tau = \varepsilon_n t$ удовлетворяет уравнению (33) с точностью до $o(\varepsilon_n^{3/2})$.

Из этой теоремы следует, что распределенное уравнение (36) является квазинормальной формой в рассматриваемом случае. Для уравнения (36) просто исследовать вопросы о существовании и устойчивости простейших циклов вида $\rho \exp(i\sigma t)$. Подробнее на этом не останавливаемся.

3. Критический случай на ненулевой моде

Здесь предполагаем, что наибольший по модулю коэффициент Фурье f_k функции $\Phi(s)$ имеет отличный от нуля номер k_0 , то есть

$$f = \max_{-\infty < k < \infty} |f_k| = |f_{k_0}|, \quad k_0 \neq 0$$

и

$$|f_{k_0}| > |f_k| \quad \text{при } k \neq \pm k_0.$$

Рассмотрим критический в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия краевой задачи (6), (7) случай, когда для некоторого δ

$$f_{k_0} = (\gamma_0 + \varepsilon^2 \gamma_1) \exp(i\delta). \quad (37)$$

Приведем асимптотические формулы для всех тех корней характеристического уравнения (9), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Напомним, что характеристическое уравнение (9) получается в результате подстановки в (8) решений Эйлера

$$u_k^\pm(t, x, \varepsilon) = \exp[\pm ikx + \lambda_k(\varepsilon)t]. \quad (38)$$

Для нахождения корней $\lambda_k(\varepsilon)$ приходим к уравнению

$$\varepsilon^2 \lambda^2 + \varepsilon a \lambda + 1 = (\gamma_0 + \varepsilon^2 \gamma_1) \exp(\pm i\delta - \lambda). \quad (39)$$

Отсюда получаем асимптотику $\lambda_k^\pm(\varepsilon)$:

- 1) при $a^2 > 2$ имеем $\lambda_k^-(\varepsilon) = \bar{\lambda}_k^+(\varepsilon)$ и $\lambda_k^+(\varepsilon) = i\delta + 2\pi k i + \varepsilon \lambda_{k1} + \varepsilon^2 \lambda_{k2} + \dots$, где

$$\lambda_{k1} = -ia(2\pi k + \delta),$$

$$\lambda_{k2} = \frac{1}{2}(2 - a^2)(\delta + 2\pi k)^2 + \gamma_1 + ia^2(\delta + 2\pi k);$$

- 2) при $a^2 < 2$ имеем $\lambda_k^\pm(\varepsilon) = i(\omega_0/\varepsilon + \theta \pm \delta - \Omega_0 + 2\pi k) + \varepsilon \lambda_{k1}^\pm + \varepsilon^2 \lambda_{k2}^\pm + \dots$, где

$$\lambda_{k1}^\pm = -i(\gamma_0 \exp(i\Omega_0))^{-1}(2i\omega_0 - a)K_k^\pm, \quad K_k^\pm = \theta \pm \delta - \Omega_0 + 2\pi k,$$

$$\lambda_{k2}^\pm = \frac{1}{2}(\lambda_{k1}^\pm)^2 - \gamma_1 \gamma_0^{-1} - (R_k^\pm)^2 - a \lambda_{k1}^\pm - 2i\omega_0 \lambda_{k1}^\pm = A^\pm (K^\pm)^2 + B^\pm K^\pm + \gamma_1 \gamma_0^{-1},$$

$$K^\pm = \theta - \Omega_0 + 2\pi k \pm \delta,$$

$$A^\pm = \left(\gamma_0 \exp(i(\Omega_0 \mp \delta))\right)^{-1} - \frac{1}{2} \left((a - 2i\omega)(\gamma_0 \exp[i(\Omega_0 \mp \delta)])^{-1}\right)^2,$$

$$B^\pm = -i(a^2 + 4\omega^2)(\gamma_0 \exp[i(\Omega_0 \mp \delta)])^{-1}.$$

Отметим, что $\operatorname{Re} \lambda_{k1}^\pm = \operatorname{Re} \lambda_{k1} = 0$, $\operatorname{Re} \lambda_{k2} < 0$ и $\operatorname{Re} \lambda_{k2}^\pm < 0$.

3.1. Случай $a^2 > 2$. В этом случае построения в критической ситуации на ненулевой моде мало отличаются от построений раздела 2. Решения нелинейной краевой задачи (6), (7) ищем в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \left(\xi(\tau, y) \exp [i\delta(1 - \varepsilon a)t + ik_0 x] + \bar{\xi}(\tau, y) \exp [-i\delta(1 - \varepsilon a)t - ik_0 x] \right) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y) + \dots, \quad (40)$$

где по t, x и y зависимость периодическая, $\tau = \varepsilon^2 t, y = (1 - \varepsilon a)t$. Подставляя (40) в (6), (7) и совершая стандартные действия, получаем следующий результат.

Теорема 4. Пусть $k_0 \neq 0$ и $a^2 > 2$ и пусть $\xi(\tau, y)$ является ограниченным при $\tau \rightarrow \infty, y \in [0, 1]$ решением краевой задачи

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}(a^2 - 2) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + (a^2 + i\delta(a^2 - 2)) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\frac{1}{2}\delta^2(2 - a^2) + \gamma_1 + ia^2\delta \right) \xi - 3b_1 \xi |\xi|^2, \quad (41)$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi, y) \equiv \xi(\tau, x, y) \equiv \xi(\tau, x, y + 1). \quad (42)$$

Тогда функция

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \left(\xi(\tau, y) \exp [i\delta(1 - \varepsilon a)t + ik_0 x] + \bar{\xi}(\tau, y) \exp [-i\delta(1 - \varepsilon a)t - ik_0 x] \right) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y) \quad (43)$$

удовлетворяет краевой задаче (6), (7) с точностью до $o(\varepsilon^3)$.

Отметим, что при $b_1 = 0$ и $b_2 \neq 0$ последнее слагаемое в уравнении (41) заменяется на

$$-b_2 \left[i\delta \xi |\xi|^2 + 3\xi^2 \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} + 2|\xi|^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \right],$$

а асимптотика решений в (43) идет не по целым степеням ε , а по степеням $\varepsilon^{1/2}$.

3.2. Случай $a^2 < 2$. Здесь, в отличие от результатов раздела 2.2, задействованы не одна, а две цепочки корней $\lambda_k^+(\varepsilon)$ и $\lambda_k^-(\varepsilon)$. Сначала введем обозначения. Положим

$$E^\pm = \exp [ik_0 x + i(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta - \Omega \pm \delta)t].$$

Решения нелинейной краевой задачи (6), (7) ищем в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon (\xi^+(\tau, y) E^+ + \bar{\xi}^+(\tau, y) \bar{E}^+ + \xi^-(\tau, y) E^- + \bar{\xi}^-(\tau, y) \bar{E}^-) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y) + \dots, \quad (44)$$

где зависимость от t, x и y — периодическая. После подстановки (44) в (6) и после стандартных действий получаем для определения неизвестных амплитуд $\xi^\pm(\tau, y)$ краевую задачу параболического типа

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi^\pm}{\partial \tau} = & -A^\pm \frac{\partial^2 \xi^\pm}{\partial y^2} - i(2A^\pm(\theta - \Omega_0 \pm \delta) + B^\pm) \frac{\partial \xi^\pm}{\partial y} + \\ & + A^\pm(\theta - \Omega_0 \pm \delta)^2 - B^\pm(\theta - \Omega_0 \pm \delta) + \gamma_1 \gamma_0^{-1} + \\ & + 3\xi^\pm (|\xi^\pm|^2 + 2|\xi^\mp|^2) (b_1 - \omega_0^2 b_3 - ib_4) + i\omega_0 b_2 \xi^\pm |\xi^\pm|^2 \end{aligned} \quad (45)$$

с краевыми условиями

$$\xi^\pm(\tau, y + 1) \equiv \xi^\pm(\tau, y). \quad (46)$$

Сформулируем полученное утверждение в виде теоремы.

Теорема 5. Пусть $0 < a^2 < 2$ и пусть для произвольно фиксированного значения $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ краевая задача (45), (46) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $y \in [0, 1]$ решение $\xi(\tau, y)$. Тогда на последовательности $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\theta_0)$ функция

$$u(t, x, \varepsilon_n) = \varepsilon_n(\xi^+(\tau, y)E^+ + \bar{\xi}^+(\tau, y)\bar{E}^+ + \xi^-(\tau, y)E^- + \bar{\xi}^-(\tau, y)\bar{E}^-) + \varepsilon_n^3 u_3(t, \tau, x, y),$$

где $\tau = \varepsilon_n^2 t$, $y = (1 - \varepsilon_n a)t$, удовлетворяет краевой задаче (6), (7) с точностью до $o(\varepsilon_n^3)$.

4. Критические случаи в краевой задаче (10)

Принципиально новые эффекты могут возникать в ситуации, когда критические случаи реализуются одновременно на бесконечном множестве мод. Рассмотрим такую ситуацию на одном наиболее распространенном примере, когда в краевой задаче (10) имеем

$$\Phi(s) \equiv \text{const} \equiv f_0. \quad (47)$$

Линеаризуем в нуле эту краевую задачу. В результате получим линейное уравнение

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a \frac{\partial u}{\partial t} + u = f_0 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t-1, x+s) ds - u(t-1, x) \right] \quad (48)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (49)$$

Характеристическое уравнение для (48), (49) имеет вид

$$\varepsilon^2 \lambda^2 + \varepsilon a \lambda + 1 = f_k \exp(-\lambda), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (50)$$

где

$$f_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0, \\ -f_0, & \text{если } k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (51)$$

Фиксируем произвольно γ_1 и полагаем

$$f_0 = \gamma_0 + \varepsilon^2 \gamma_1. \quad (52)$$

При этом условии для всех, кроме одного, уравнений в (50) имеет место бесконечномерный критический случай. Следуя разработанной выше методике, решения нелинейной краевой задачи (10) ищем в виде формального ряда:

- 1) при условии $a^2 > 2$ имеем $\gamma_0 = 1$ и

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \xi(\tau, x, y) + \varepsilon^3 u_3(\tau, x, y) + \dots \quad (53)$$

- 2) при условии $a^2 < 2$ имеем

$$\gamma_0 = \frac{a^2}{4} (4 - a^2)^{1/2}$$

и

$$\begin{aligned} u(t, x, \varepsilon) = & \varepsilon \left(\xi(\tau, x, y) \exp [i(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta + \delta - \Omega_0)t] + \right. \\ & \left. + \bar{\xi}(\tau, x, y) \exp [-i(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta + \delta - \Omega_0)t] \right) + \\ & + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y) + \dots \end{aligned} \quad (54)$$

В (53) и (54) $\tau = \varepsilon^2 t$, $y = (1 - \varepsilon a)t$, зависимость от x — 2π -периодическая, от y — 1 -антипериодическая, от t в (54) — $2\pi/\omega_0$ -периодическая, где $\omega_0 = (1 - a^2/2)^{1/2}$. В силу условия (51), на функцию $\xi(\tau, x, y)$ необходимо наложить условие

$$M_x(\xi) = 0, \quad \text{где } M_x(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\tau, x, y) dx. \quad (55)$$

Подставим выражение (54) в (10). Совершая стандартные действия, получим уравнение относительно u_3 . Из условия его разрешимости в указанном классе функций получим равенства:

1) при $a^2 > 2$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \left(\frac{a^2}{2} - 1 \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + \gamma_1 \xi - b_1 (\xi^3 - M_x(\xi^3)), \quad (56)$$

$$\xi(\tau, x, y + 1) \equiv -\xi(\tau, x, y), \quad \xi(\tau, x + 2\pi, y) \equiv \xi(\tau, x, y); \quad (57)$$

2) при $a^2 < 2$ (в обозначениях раздела 2.2)

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -R_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + R_4 \frac{\partial \xi}{\partial y} + R_5 \xi - \xi^2 \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} - 2|\xi|^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - M \left(\xi^2 \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} + 2|\xi|^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \quad (58)$$

с условиями (57).

Приведем итоговые утверждения.

Теорема 6. 1) Пусть $a^2 > 2$ и пусть $\xi(\tau, x, y)$ — ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 2\pi]$, $y \in [0, 1]$ решение краевой задачи (56), (57). Тогда функция

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \xi(\tau, x, y) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y)$$

удовлетворяет краевой задаче (48), (49) при $\tau = \varepsilon^2 t$, $y = (1 - \varepsilon a)t$ с точностью до $o(\varepsilon^3)$.

2) Пусть $0 < a^2 < 2$ и пусть $\xi(\tau, x, y)$ — ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 2\pi]$, $y \in [0, 1]$ решение краевой задачи (58), (57). Тогда функция

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \left(\xi(\tau, x, y) \exp [i(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta + \delta - \Omega_0)t] + \bar{\xi}(\tau, x, y) \exp [-i(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta + \delta - \Omega_0)t] \right) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y)$$

удовлетворяет краевой задаче (48), (49) при $\tau = \varepsilon^2 t$, $y = (1 - \varepsilon a)t$ с точностью до $o(\varepsilon^3)$.

Таким образом, краевые задачи (56), (57) и (58), (57) являются квазинормальными формами для (48), (49). Отметим, что наличие в уравнениях (56) и (58) интегральных слагаемых по пространственной переменной позволяет в явном виде находить гладкие по τ и y и ступенчатые по x решения. Детально эти вопросы исследовались в работах [32–34], поэтому здесь на них не останавливаемся.

5. Об одном обобщении результатов

Коротко остановимся на рассмотрении более общей краевой задачи (11), (12). Выпишем характеристическое уравнение для его линеаризации в нуле

$$\varepsilon^2 \lambda^2 + \varepsilon a \lambda + 1 = (f_{k1} + \varepsilon \lambda f_{k2}) \exp(-\lambda), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (59)$$

где f_{k1} и f_{k2} — коэффициенты разложения функций $\Phi_1(s)$ и $\Phi_2(s)$, соответственно, в ряд Фурье. Положим в (59) $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$. В результате приходим к уравнению

$$(1 - \omega^2 + ia\omega)(f_{k1} + i\omega f_{k2})^{-1} = \exp(-i\omega\varepsilon^{-1}). \quad (60)$$

Изучим вопрос о существовании вещественного корня ω_0 в уравнении (60). Обозначим через $p_k(\omega)$ функцию

$$p_k(\omega) = |1 - \omega^2 + ia\omega| \cdot |f_{k1} + i\omega f_{k2}|^{-1}.$$

Эта функция неограниченно растет при $\omega \rightarrow \pm\infty$. Поэтому существует такое ω_0 , что

$$p_k(\omega_0) = \min_{-\infty < \omega < \infty} p_k(\omega).$$

Сформулируем один простой результат.

Лемма 5. Пусть $p(\omega_0) < 1$. Тогда при всех достаточно малых значениях ε все корни уравнения (59) имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественные части. Если же $p(\omega_0) > 1$, то при всех достаточно малых значениях ε уравнение (59) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью.

Таким образом, критический случай в задаче об устойчивости реализуется при условии $p(\omega_0) = 1$. После этого приведенная выше методика переносится на краевую задачу (11), (12).

Заключение

Рассмотрен вопрос о локальной динамике полностью связанной системы осцилляторов. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Показано, что они имеют бесконечную размерность. Основные результаты состоят в том, что разработан алгоритм построения специальных нелинейных краевых задач — квазинормальных форм. Их нелокальная динамика определяет асимптотику всех решений исходного уравнения в окрестности состояния равновесия.

Квазинормальными формами являются пространственно распределенные нелинейные краевые задачи, например, классические уравнения Гинзбурга–Ландау, поэтому можно сделать вывод о том, что для класса рассмотренных здесь задач характерны сложные и нерегулярные колебания.

В зависимости от величины параметра a — коэффициента при \dot{u} в (1) — решения являются либо медленно осциллирующими (при $a^2 > 2$), либо быстро осциллирующими (при $a^2 < 2$) с асимптотически большой частотой. Квазинормальные формы из раздела 4 содержат еще одну пространственную переменную. Это, конечно, приводит к усложнению динамических свойств решений.

Показано, что количество связанных уравнений в квазинормальной форме определяется числом равных по модулю коэффициентов Фурье функции $\Phi(s)$. Важная роль принадлежит и значению аргумента δ для соответствующих коэффициентов $\Phi(s)$.

Особо отметим, что в ряде квазинормальных форм присутствуют интегральные по пространственной переменной слагаемые от нелинейной функции. Это приводит к тому, что решения квазинормальных форм могут структурно усложниться. Например, в явном виде можно определить гладкие и периодические по времени, и ступенчатые по пространственной переменной решения и в некоторых случаях исследовать их устойчивость.

Обратим внимание, что в случае медленно осциллирующих решений для построения квазинормальных форм задействована только нелинейность $b_1 u^3$ функции $f(u, \dot{u})$. Если $b_1 = 0$ и $b_2 \neq 0$, то происходит структурное усложнение решений и смена асимптотики решений исходного уравнения. Для быстро осциллирующих решений задействованы все коэффициенты функции $f(u, \dot{u})$.

Динамические свойства исходной краевой задачи (3), (4) при $a^2 < 2$ чувствительны к изменению параметров. Этот вывод следует из того факта, что, во-первых, в квазинормальной форме присутствует величина $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$, которая при $\varepsilon \rightarrow 0$ бесконечно много раз пробегает все значения от 0 до 2π . Во-вторых, при различных значениях θ динамика квазинормальной формы может различаться [35], а значит, при $\varepsilon \rightarrow 0$ может происходить неограниченный процесс прямых и обратных бифуркаций.

Важный вывод касается роли большого запаздывания в рассматриваемых цепочках. С одной стороны, все аналитические построения при больших T позволяют явно выделить критические случаи, найти асимптотику корней характеристических уравнений и получить асимптотические формулы для решений. С другой стороны, при $T \gg 1$, все квазинормальные формы содержат еще одну пространственную переменную, поэтому можно сделать вывод об усложнении динамики свойств.

Список литературы

1. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Turukina L. V.* About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // *Physics Letters A*. 2013. Vol. 377, no. 45–48. P. 3291–3295. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.013.
2. *Osipov G. V., Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55, no. 3. P. 2353–2361. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.2353.
3. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
4. *Dodla R., Sen A., Johnston G. L.* Phase-locked patterns and amplitude death in a ring of delay-coupled limit cycle oscillators // *Phys. Rev. E*. 2004. Vol. 69, no. 5. P. 056217. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.056217.
5. *Williams C. R. S., Sorrentino F., Murphy T. E., Roy R.* Synchronization states and multistability in a ring of periodic oscillators: Experimentally variable coupling delays // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2013. Vol. 23, no. 4. P. 043117. DOI: 10.1063/1.4829626.
6. *Rao R., Lin Z., Ai X., Wu J.* Synchronization of epidemic systems with Neumann boundary value under delayed impulse // *Mathematics*. 2022. Vol. 10, no. 12. P. 2064. DOI: 10.3390/math10122064.
7. *Van der Sande G., Soriano M. C., Fischer I., Mirasso C. R.* Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators // *Phys. Rev. E*. 2008. Vol. 77, no. 5. P. 055202. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.055202.
8. *Клиньшов В. В., Некоркин В. И.* Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // *Успехи физических наук*. 2013. Т. 183, № 12. С. 1323–1336. DOI: 10.3367/UFNr.0183.201312c.1323.
9. *Heinrich G., Ludwig M., Qian J., Kubala B., Marquardt F.* Collective dynamics in optomechanical arrays // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 107, no. 4. P. 043603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.043603.
10. *Zhang M., Wiederhecker G. S., Manipatruni S., Barnard A., McEuen P., Lipson M.* Synchronization of micromechanical oscillators using light // *Phys. Rev. Lett.* 2012. Vol. 109, no. 23. P. 233906. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.233906.
11. *Lee T. E., Sadeghpour H. R.* Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 111, no. 23. P. 234101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.234101.
12. *Yanchuk S., Wolfrum M.* Instabilities of stationary states in lasers with long-delay optical feedback // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2010. Vol. 9, no. 2. P. 519–535. DOI: 10.20347/WIAS.PREPRINT.962.

13. *Grigorieva E. V., Haken H., Kashchenko S. A.* Complexity near equilibrium in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // In: 1998 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'98). 14-17 September 1998, Crans-Montana, Switzerland. NOLTA Society, 1998. P. 495–498.
14. *Kashchenko S. A.* Quasinormal forms for chains of coupled logistic equations with delay // *Mathematics*. 2022. Vol. 10, no. 15. P. 2648. DOI: 10.3390/math10152648.
15. *Кащенко С. А.* Динамика цепочки логистических уравнений с запаздыванием и с антидиффузионной связью // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 502, № 1. С. 23–27. DOI: 10.31857/S2686954322010064.
16. *Thompson J. M. T., Stewart H. B.* *Nonlinear Dynamics and Chaos*. 2nd edition. New York: Wiley, 2002. 460 p.
17. *Kashchenko S. A.* Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2021. Vol. 31, no. 3. P. 033147. DOI: 10.1063/5.0040689.
18. *Kanter I., Zigzag M., Englert A., Geissler F., Kinzel W.* Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor // *Europhysics Letters*. 2011. Vol. 93, no. 6. P. 60003. DOI: 10.1209/0295-5075/93/60003.
19. *Rosin D. P., Rontani D., Gauthier D. J., Schöll E.* Control of synchronization patterns in neural-like Boolean networks // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 110, no. 10. P. 104102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.104102.
20. *Yanchuk S., Perlikowski P., Popovych O. V., Tass P. A.* Variability of spatio-temporal patterns in non-homogeneous rings of spiking neurons // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2011. Vol. 21, no. 4. P. 047511. DOI: 10.1063/1.3665200.
21. *Klinshov V., Nekorkin V.* Synchronization in networks of pulse oscillators with time-delay coupling // *Cybernetics and Physics*. 2012. Vol. 1, no. 2. P. 106–112.
22. *Клиньшов В. В.* Коллективная динамика сетей активных элементов с импульсными связями: Обзор // *Известия вузов. ПНД*. 2020. Т. 28, № 5. С. 465–490. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-5-465-490.
23. *Hale J. K.* *Theory of Functional Differential Equations*. 2nd edition. New York: Springer, 1977. 366 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2.
24. *Hartman P.* *Ordinary Differential Equations*. New York: Wiley, 1965. 632 p.
25. *Marsden J. E., McCracken M. F.* *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. New York: Springer, 1976. 408 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6.
26. *Кащенко С. А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 5. С. 1049–1052.
27. *Kaschenko S. A.* Normalization in the systems with small diffusion // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1996. Vol. 6, no. 6. P. 1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
28. *Кащенко С. А.* Уравнение Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1998. Т. 38, № 3. С. 457–465.
29. *Кащенко И. С., Кащенко С. А.* Локальная динамика систем разностных и дифференциально-разностных уравнений // *Известия вузов. ПНД*. 2014. Т. 22, № 1. С. 71–92. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-1-71-92.
30. *Кащенко С. А.* Бифуркации в окрестности цикла при малых возмущениях с большим запаздыванием // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2000. Т. 40, № 5. С. 693–702.

31. *Kashchenko S. A.* Van der Pol equation with a large feedback delay // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, no. 6. P. 1301. DOI: 10.3390/math11061301.
32. *Grigorieva E. V., Kashchenko S. A.* Rectangular structures in the model of an optoelectronic oscillator with delay // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2021. Vol. 417. P. 132818. DOI: 10.1016/j.physd.2020.132818.
33. *Григорьева Е. В., Кащенко С. А.* Локальная динамика модели цепочки лазеров с оптоэлектронной запаздывающей однонаправленной связью // *Известия вузов. ПНД*. 2022. Т. 30, № 2. С. 189–207. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-189-207.
34. *Кащенко С. А.* Квазинормальные формы в задаче о колебаниях пешеходных мостов // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*. 2022. Т. 506, № 1. С. 49–53. DOI: 10.31857/S2686954322050113.
35. *Kashchenko I., Kaschenko S.* Infinite process of forward and backward bifurcations in the logistic equation with two delays // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2019. Vol. 22, no. 4. P. 407–412. DOI: 10.33581/1561-4085-2019-22-4-407-412.

References

1. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Sataev IR, Turukina LV. About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators. *Physics Letters A*. 2013;377(45–48):3291–3295. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.013.
2. Osipov GV, Pikovsky AS, Rosenblum MG, Kurths J. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators. *Phys. Rev. E*. 1997;55(3):2353–2361. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.2353.
3. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press; 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
4. Dodla R, Sen A, Johnston GL. Phase-locked patterns and amplitude death in a ring of delay-coupled limit cycle oscillators. *Phys. Rev. E*. 2004;69(5):056217. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.056217.
5. Williams CRS, Sorrentino F, Murphy TE, Roy R. Synchronization states and multistability in a ring of periodic oscillators: Experimentally variable coupling delays. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2013;23(4):043117. DOI: 10.1063/1.4829626.
6. Rao R, Lin Z, Ai X, Wu J. Synchronization of epidemic systems with Neumann boundary value under delayed impulse. *Mathematics*. 2022;10(12):2064. DOI: 10.3390/math10122064.
7. Van der Sande G, Soriano MC, Fischer I, Mirasso CR. Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*. 2008;77(5):055202. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.055202.
8. Klinshov VV, Nekorkin VI. Synchronization of delay-coupled oscillator networks. *Phys. Usp.* 2013;56(12):1217–1229. DOI: 10.3367/UFNe.0183.201312c.1323.
9. Heinrich G, Ludwig M, Qian J, Kubala B, Marquardt F. Collective dynamics in optomechanical arrays. *Phys. Rev. Lett.* 2011;107(4):043603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.043603.
10. Zhang M, Wiederhecker GS, Manipatruni S, Barnard A, McEuen P, Lipson M. Synchronization of micromechanical oscillators using light. *Phys. Rev. Lett.* 2012;109(23):233906. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.233906.
11. Lee TE, Sadeghpour HR. Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions. *Phys. Rev. Lett.* 2013;111(23):234101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.234101.
12. Yanchuk S, Wolfrum M. Instabilities of stationary states in lasers with long-delay optical feedback. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2010;9(2):519–535. DOI: 10.20347/WIAS.PREPRINT.962.

13. Grigorieva EV, Haken H, Kashchenko SA. Complexity near equilibrium in model of lasers with delayed optoelectronic feedback. In: 1998 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'98). 14-17 September 1998, Crans-Montana, Switzerland. NOLTA Society; 1998. P. 495–498.
14. Kashchenko SA. Quasinormal forms for chains of coupled logistic equations with delay. *Mathematics*. 2022;10(15):2648. DOI: 10.3390/math10152648.
15. Kashchenko SA. Dynamics of a chain of logistic equations with delay and antidiffusive coupling. *Doklady Mathematics*. 2022;105(1):18–22. DOI: 10.1134/S1064562422010069.
16. Thompson JMT, Stewart HB. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. 2nd edition. New York: Wiley; 2002. 460 p.
17. Kashchenko SA. Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2021;31(3):033147. DOI: 10.1063/5.0040689.
18. Kanter I, Zigzag M, Englert A, Geissler F, Kinzel W. Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor. *Europhysics Letters*. 2011;93(6):60003. DOI: 10.1209/0295-5075/93/60003.
19. Rosin DP, Rontani D, Gauthier DJ, Schöll E. Control of synchronization patterns in neural-like Boolean networks. *Phys. Rev. Lett.* 2013;110(10):104102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.104102.
20. Yanchuk S, Perlikowski P, Popovych OV, Tass PA. Variability of spatio-temporal patterns in non-homogeneous rings of spiking neurons. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2011;21(4):047511. DOI: 10.1063/1.3665200.
21. Klinshov V, Nekorkin V. Synchronization in networks of pulse oscillators with time-delay coupling. *Cybernetics and Physics*. 2012;1(2):106–112.
22. Klinshov VV. Collective dynamics of networks of active units with pulse coupling: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(5):465–490 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-5-465-490.
23. Hale JK. *Theory of Functional Differential Equations*. 2nd edition. New York: Springer; 1977. 366 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2.
24. Hartman P. *Ordinary Differential Equations*. New York: Wiley; 1965. 632 p.
25. Marsden JE, McCracken MF. *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. New York: Springer; 1976. 408 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6.
26. Kaschenko SA. Quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion. *Soviet Mathematics. Doklady*. 1988;37(2):510–513.
27. Kaschenko SA. Normalization in the systems with small diffusion. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1996;6(6):1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
28. Kashchenko SA. The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1998;38(3):443–451.
29. Kashchenko IS, Kashchenko SA. Local dynamics of difference and difference-differential equations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2014;22(1):71–92 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-1-71-92.
30. Kashchenko SA. Bifurcations in the neighborhood of a cycle under small perturbations with a large delay. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2000;40(5):659–668.
31. Kashchenko SA. Van der Pol equation with a large feedback delay. *Mathematics*. 2023;11(6):1301. DOI: 10.3390/math11061301.
32. Grigorieva EV, Kashchenko SA. Rectangular structures in the model of an optoelectronic oscillator with delay. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2021;417:132818. DOI: 10.1016/j.physd.2020.132818.

33. Grigorieva EV, Kashchenko SA. Local dynamics of laser chain model with optoelectronic delayed unidirectional coupling. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(2):189–207. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-189-207.
34. Kashchenko SA. Quasi-normal forms in the problem of vibrations of pedestrian bridges. *Doklady Mathematics*. 2022;106(2):343–347. DOI: 10.1134/S1064562422050131.
35. Kashchenko I, Kaschenko S. Infinite process of forward and backward bifurcations in the logistic equation with two delays. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2019;22(4):407–412. DOI: 10.33581/1561-4085-2019-22-4-407-412.



Кащенко Сергей Александрович — родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1989) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, директор Объединенного института математики и компьютерных наук им. А. Н. Колмогорова. Автор монографий «Модели волновой памяти» (совместно с В. В. Майоровым) и «Релаксационные колебания в лазерах» (совместно с Е. В. Григорьевой). Опубликовал более 500 научных работ и 10 монографий. Награжден почетным званием «Заслуженный деятель науки Российской Федерации» (2020) и медалью «За вклад в реализацию государственной политики в области образования и научно-технологического развития» Министерства науки и высшего образования РФ (2023).

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru
ORCID: 0000-0002-8777-4302
AuthorID (eLibrary.Ru): 8238

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

A. N. Chumachenko, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

S. Boccaletti, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

A. M. Bykov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

V. A. Vakorin, Ph.D., Simon Fraser University (Vancouver, Canada)

S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

N. S. Ginzburg, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

A. V. Kraskov, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

N. V. Kuznetsov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

G. van Luijelaar, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

A. Lüttjohann, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

G. G. Malinetskii, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

V. V. Matrosov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

I. I. Mokhov, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)

A. B. Neiman, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

V. I. Nekorkin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Pkovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, University of Potsdam (Potsdam, Germany)

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

V. V. Tuchin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

V. A. Tsarev, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

V. A. Cherepenin, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >