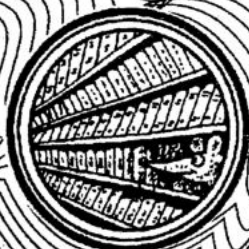


# Трикладная Дифференциальная Динамика



12  
2002



#### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Ю.В. Гуляев*, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

#### ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*Д.И. Трубецков*, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет  
*Д.А. Усанов*, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

#### ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

*Б.П. Безручко*, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СО ИРЭ РАН

#### ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

*В.С. Анищенко*, профессор, Саратовский государственный университет  
*Ю.А. Данилов*, ведущий научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва  
*А.С. Дмитриев*, ведущий научный сотрудник, Институт радиоэлектроники РАН, Москва  
*С.П. Кузнецов*, профессор, ведущий научный сотрудник, СО ИРЭ РАН  
*П.С. Ланда*, профессор, Московский государственный университет  
*Г.Г. Малинецкий*, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики РАН, Москва  
*Ю.М. Романовский*, профессор, Московский государственный университет  
*О.В. Руденко*, профессор, Московский государственный университет  
*Э.Е. Сон*, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный  
*В.В. Тучин*, профессор, Саратовский государственный университет  
*В.Д. Шалфеев*, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет  
*В.К. Юлпатов*, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород  
*В.Г. Яхно*, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

**ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 10, № 1-2, 2002, Саратов

---

---

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

**ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ**

- Короновский А.А., Храмов А.Е.* Введение в непрерывный вейвлетный анализ для специалистов в области нелинейной динамики. Часть 2. Пути в хаос с точки зрения вейвлетного анализа . . . . . 3
- Подлазов А.В.* Распределение конкурентов, масштабная инвариантность состояния и модели линейного роста . . . . . 20
- БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ**
- Блехман И.И., Ланда П.С.* Сопряженные резонансы в нелинейных системах при двухчастотном воздействии. Виброиндуцированные бифуркации. . . 44
- ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**
- Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* Восстановление уравнений системы с задержкой по экспериментальному временному ряду . . . . . 52
- Пономаренко В.П.* Синхронизация и развитие несинхронных режимов в связанных системах с фазовым управлением . . . . . 65
- Высоцкий Л.И.* Один способ описания и анализа турбулентности. . . . . 84
- Крысько В.А., Сопенко А.А., Салий Е.В.* Сложные колебания геометрически и физически нелинейных пологих оболочек на прямоугольном плане . . . . . 92
- Егоров Е.Н., Короновский А.А.* Сравнение динамики радиофизической системы «Токус» в случае гладкой и кусочно-линейной вольт-амперной характеристики . . . . . 104

**ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС**

- Найденов С.В., Яновский В.В.* Геометрические особенности нелинейной динамики систем с упругими отражениями. I. Бильярд и его инволюция . . . 113

**МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ**

- Бобров К. Е., Искольдский А. М.* Устойчивость численных оценок характеристик временных последовательностей . . . . . 127

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ДЕЙСТВИИ**

- Алексеева Е.И., Медведев И.Г.* Математическая модель выборов в экстремальных ситуациях с транспограничными потоками . . . . . 137
- Короновский А.А., Лопатников Д.И., Храмов А.Е.* Некоторые аспекты изменения численности народонаселения США с точки зрения нелинейной динамики . . . . . 146
- Ласт Е.В., Фрисман Е.Я.* Влияние промысла на популяционную динамику проходных видов рыб. . . . . 157
- Музычук О.В.* Релаксации вероятностных характеристик системы «хищник - жертва» в среде с марковскими флуктуациями параметра . . . . . 170

**КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ**

- Эбелинг В., Энгель А., Файстель Р.* Физика процессов эволюции. . . . . 181

**КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА**

- Кузнецов С.П.* Динамический хаос . . . . . 189

DEPARTMENT OF EDUCATION OF RUSSIAN FEDERATION  
Izvestiya VUZ  
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

*scientific-technical journal*  
published since 1993

Published 6 times a year

Vol.10, № 1-2, 2002, Saratov

C O N T E N T S

REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

- An introduction to continuous wavelet analysis for specialists in field of nonlinear dynamics. Part 2. Routes to chaos from point of wavelet analysis. *A.A. Koronovskii, A.E. Hramov* . . . . . 3
- Competitors' probability distribution law, state scale invariance and linear growth models. *A.V. Podlasov* . . . . . 20

BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Conjugate resonances in nonlinear systems under biharmonic action. Vibro-induced bifurcations. *I.I. Blekhman, P.S. Landa* . . . . . 44

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Reconstruction of time-delay systems equations over experimental time series. *V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov* . . . . . 52
- Synchronization and development of nonsynchronous regimes in coupled systems with phase control. *V.P. Ponomarenko* . . . . . 65
- The technique of description and analysis of turbulence. *L.I. Vysotsky* . . . . . 84
- Complex vibrations of geometrically and physically nonlinear shallow shells of rectangular planform. *V.A. Krysko, A.A. Sopenko, E.V. Salii* . . . . . 92
- Comparison of dynamics of «Torus» system with smooth or piecewise-linear VA-characteristics. *E.N. Egorov, A.A. Koronovskii* . . . . . 104

DETERMINISTIC CHAOS

- Geometrical nonlinear dynamics features of systems with elastic reflections. I. Billiard and its involution. *S.V. Naydenov, V.V. Yanovsky* . . . . . 113

METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

- Stability of numerical estimations of time series characteristics. *K. E. Bobrov, A. M. Iskoldsky* . . . . . 127

NONLINEAR DYNAMICS IN ACTION

- Mathematical model of election under extreme conditions with transborder flows. *E.I. Alekseeva, I.G. Medvedev* . . . . . 137
- Some aspects of USA population number changing with nonlinear dynamics view. *A.A. Koronovskii, D.I. Lopatnikov, A.E. Hramov* . . . . . 146
- Craft influence on population dynamics of anadrom fishes. *E.V. Last, E.Ya. Frisman* . . . . . 157
- Relaxation of probability characteristics of «beast - sacrifice» system in the medium with Markoff fluctuations of parameters. *O.V. Muzychuk* . . . . . 170

BOOK REVIEW

- Physics of evolution processes. *W. Ebeling, A. Engel, R. Feistel* . . . . . 181

STUDENT'S BOOKSHELF

- Dynamical chaos. *S.P. Kuznetsov* . . . . . 189



## **ВВЕДЕНИЕ В НЕПРЕРЫВНЫЙ ВЕЙВЛЕТНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ СПЕЦИАЛИСТОВ В ОБЛАСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ**

### **Часть 2. Пути в хаос с точки зрения вейвлетного анализа**

*А.А. Короновский, А.Е. Храмов*

Данная статья является продолжением работы «Введение в непрерывный вейвлетный анализ для специалистов в области нелинейной динамики. Часть 1» опубликованной в журнале «Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика». 2001. Т. 9, № 4,5. С. 3. В работе с позиций непрерывного вейвлетного анализа иллюстрируются особенности универсальных путей в хаос, реализующихся в нелинейных конечномерных динамических системах: переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу через перемежаемость.

Хорошо известно, что в динамических системах с малой размерностью<sup>1</sup> фазового пространства - системах с дискретным и непрерывным временем - наблюдаются универсальные маршруты перехода от регулярных режимов колебаний к хаотическим так называемые «пути в хаос». На данный момент известны три таких перехода к хаосу, обладающие универсальными свойствами:

- переход к хаосу через субгармонический каскад;
- переход к хаосу через перемежаемость;
- переход к хаосу через разрушение квазипериодических движений.

В данной части мы постараемся проиллюстрировать сценарии перехода к хаосу через удвоения периода и перемежаемость с позиций вейвлетного анализа, а также выявить характерные особенности вейвлетного преобразования анализируемых сигналов, соответствующих различным типам перехода к хаосу.

### **2.1. Переход к хаосу через субгармонический каскад**

Классической конечномерной потоковой системой, демонстрирующей переход к хаосу через каскад удвоений периода, является система Ресслера [1]

<sup>1</sup> то есть с малым числом степеней свободы.

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ey, \\ \dot{z} = w - mz + xz. \end{cases} \quad (2.1)$$

Рассмотрим именно эту систему в качестве базовой для анализа каскада бифуркаций удвоения периода с помощью вейвлетного анализа.

Для численного решения системы уравнений (1) использовался метод Рунге - Кутты 4-го порядка с шагом по времени  $\Delta t=0.001$ . Система исследовалась при фиксированных значениях параметров  $e=w=0.2$ , параметр  $m$  изменялся в пределах  $2.0 < m < 6.0$ . В этом диапазоне управляющего параметра наблюдается переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. На рис. 2.1 представлена соответствующая бифуркационная диаграмма колебаний в системе при изменении параметра  $m$  в пределах  $2.0 \leq m \leq 6.0$ .

Рассмотрим, что наблюдается в этом случае при анализе временных рядов, порождаемых системой Ресслера, с помощью вейвлетного анализа с базовым морлет-вейвлетом. На рис. 2.2 показаны соответствующие проекции поверхностей распределения амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования  $|W(t, f_s)|$ , спектры мощности в логарифмическом масштабе, проекции фазовых портретов временных реализаций переменной  $x(t)$ , построенные по методу Такенса<sup>2</sup> [2], и распределения энергии  $\langle E(f_s) \rangle$  по временным масштабам ( $f_s=1/s$ ) при различных значениях управляющего параметра  $m$ . Анализировались временные ряды, из которых предварительно был удален переходной процесс.

На рис. 2.2, а демонстрируются характеристики колебаний для периодического режима с периодом  $T_1$  ( $m=2.6$ ). Поверхность распределения амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования  $|W|$  в этом случае качественно подобна поверхности характерной для периодического сигнала (см., например, рис. 1.4, а из [3], на котором было представлено распределение  $|W|$ , полученное для синусоидального сигнала). Наличие фурье-гармоник основной частоты сигнала с малой амплитудой практически не оказывает влияние на вид вейвлетного спектра.

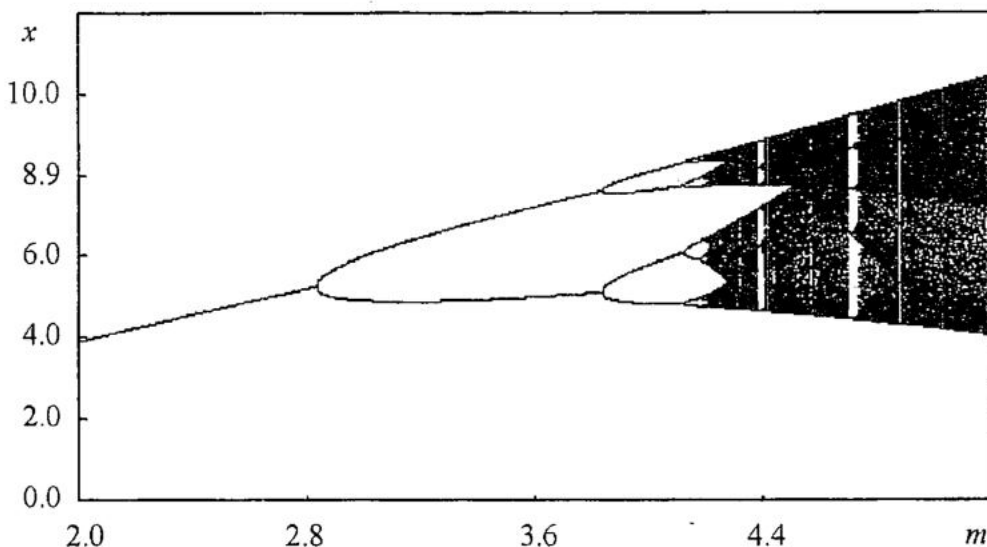


Рис. 2.1. Бифуркационная диаграмма колебаний в системе Ресслера при изменении параметра  $m$  ( $e=w=0.2$ )

<sup>2</sup> То есть по временному ряду  $x(t)$  строится  $n$ -мерный вектор вида  $x(t), x(t+2\tau), x(t+\pi\tau)$ , который, как показано Такенсом, может рассматриваться как вектор в фазовом пространстве. Здесь  $\tau$  - время задержки, которое выбирается произвольно [2].

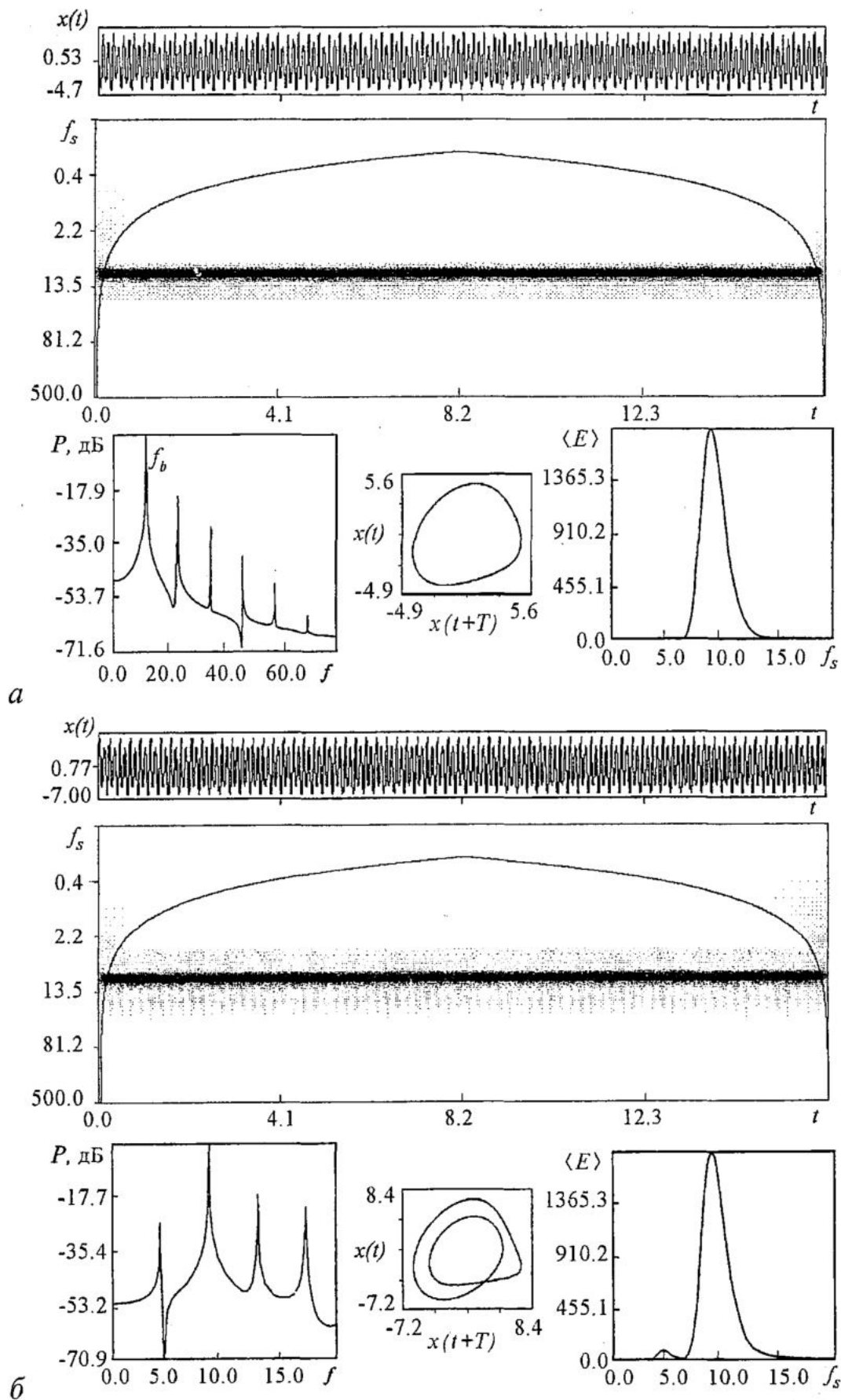


Рис. 2.2, а - Проекция поверхности  $|W(t, f_s)|$ , спектры мощности, фазовые портреты и распределения энергии по временным масштабам  $\langle E(f_s) \rangle$ , полученные с базовым морлетвейвлетом по временным реализациям  $x(t)$  системы Ресслера (2.1) с бифуркационными параметрами: а -  $m=2.6$  (цикл  $T_1$ ), длительность временной реализации  $N=2^{14}$  отсчетов,  $\Delta t=0.001$ ; б -  $m=3.6$  (цикл  $T_2$ ), длительность временной реализации  $N=2^{14}$  отсчетов,  $\Delta t=0.001$

Аналогичные результаты можно наблюдать и анализируя усредненное распределение энергии  $\langle E \rangle$  по временным масштабам колебаний. Оно имеет единственный максимум, который соответствует (с точностью до коэффициента 1.03) базовой частоте сигнала  $f_b$  (отмечена на рисунке) в спектре мощности  $P(f)$ .

Рассмотрим теперь, как трансформируется распределение амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования с увеличением бифуркационного параметра  $m$ . На рис. 2.2, б показаны характеристики сигнала после первой бифуркации прибавления периода ( $m=3.6$ ). На вейвлетной поверхности  $W$  появляется второй максимум (более темная область при  $f_s \sim 5.0$ ). Это хорошо видно на распределении  $\langle E \rangle$ , на котором появляется второй максимум, соответствующий субгармонике  $f_b/2$  в спектре мощности. Причем соотношение между амплитудами локальных максимумов в распределении энергии по масштабам вейвлетного преобразования и фурье-спектре мощности существенно разное. Оно, в соответствии с выражением (10) из [3], имеет вид

$$P(f_b)/P(f_b/2) = 1/4 [P(f_{bs})P(f_{bs}/2)]. \quad (2.2)$$

Следует также обратить внимание на характерную структуру вейвлетной поверхности в области больших частот (малых временных масштабов). Эта структура представляет собой периодически наблюдающиеся горбы на поверхности  $|W|$ , локализованные вблизи максимумов (причем максимумов с наибольшей амплитудой) на временной реализации процесса. Это связано с тем, что именно вблизи этих максимумов вид временной реализации  $x(t)$  наиболее сильно отличается от вида гармонической функции, и для описания его необходимо наибольшее число гармоник в разложении Фурье (ср. с рис. 1.12 из [3], на котором представлены результаты непрерывного вейвлетного преобразования сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов). Здесь особо четко проявляется различие между фурье-анализом и вейвлетным анализом. Для первого - данные эффекты могут быть учтены только в «среднем»: они выражаются в наличии у сигнала гармоник базовой частоты. На временных масштабах даже порядка одного периода колебаний вейвлетный анализ четко показывает, когда сигнал действительно существенно отличается от гармонического, а когда близок к нему.

Рис. 2.2, в демонстрирует характеристики колебаний при значении управляющего параметра  $m=4.2$  (цикл периода 10, что хорошо видно на фазовом портрете). Усредненное распределение энергии по масштабам практически не изменяется по сравнению с предыдущим случаем. Сама поверхность коэффициентов вейвлетного спектра  $|W|$  имеет в области временных масштабов  $f_s \in (f_b/2, f_b)$  более сложную структуру. Однако, интенсивность данных временных масштабов существенно меньше, чем интенсивность временного масштаба, соответствующего субгармонике  $f_b/2$ .

Характеристики режима ленточного хаоса ( $m=5.1$ ) в системе Ресслера показаны на рис. 2.2, г. Спектр мощности имеет высокий шумовой пьедестал, на котором выделяются основная частота, ее гармоники и субгармоники. На проекции поверхности распределения амплитуды коэффициентов вейвлетного преобразования наблюдается максимум, соответствующий базовой частоте  $f_b$ . Однако в отличие от предыдущих случаев амплитуда этого максимума (а следовательно, и энергия движения системы, соответствующая этому временному масштабу  $s_b=1/f_b$ ) меняется с течением времени. Это выражается в изменении толщины и тона соответствующей линии на проекции  $|W|$  на плоскость  $(t, f_s)$ . Что касается динамики на временных масштабах больших  $1/f_b$ , то она сильно нерегулярна (это хорошо видно из анализа вейвлетной поверхности в диапазоне  $f_s \in (2.0, 7.0)$ ). Однако энергия, заключенная в этих масштабах, существенно меньше, чем энергия основного масштаба (см. распределение энергии  $\langle E \rangle$ ).



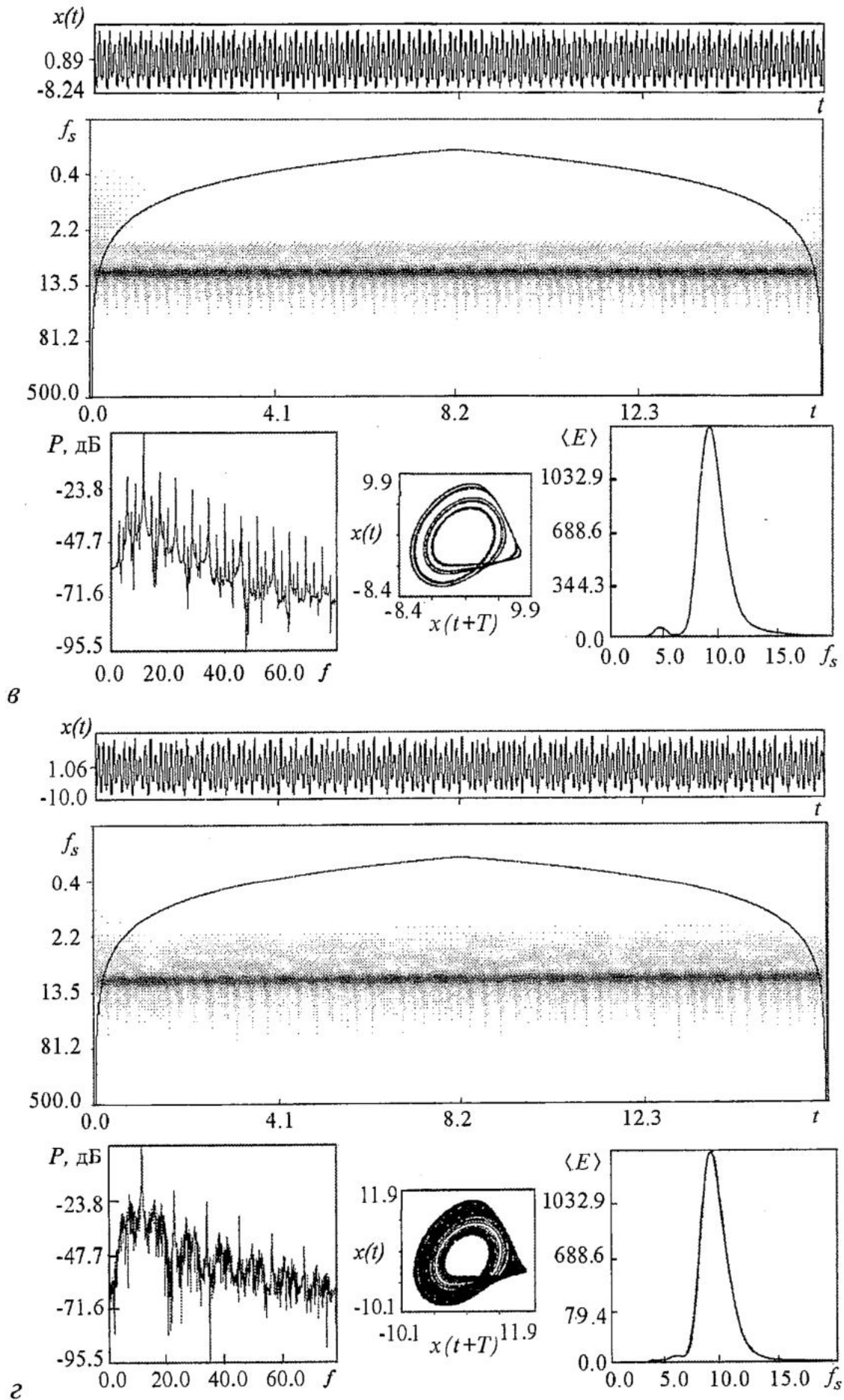


Рис. 2.2. а -  $m=4.2$  (цикл  $T_{10}$ ), длительность временной реализации  $N=2^{14}$  отсчетов,  $\Delta t=0.001$ ;  
 б -  $m=5.1$  (режим хаотической динамики), длительность временной реализации  $N=2^{14}$  отсчетов,  
 $\Delta t=0.001$

Заметим также, что нерегулярная динамика на малых частотах приводит к тому, что на кривой  $\langle E \rangle$  наблюдаются равномерно спадающие «хвосты» распределения. К последним распределениям мы еще вернемся, когда будем рассматривать результаты вейвлетного анализа перехода к хаосу через перемежаемость на примере системы Лоренца.

Для сравнения вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом на рис. 2.3 приведена проекция поверхности  $|W|$ , построенная с материнским МНАТ-вейвлетом для временной реализации переменной  $x(t)$  системы Ресслера с параметрами  $e=w=0.2$  и  $m=4.2$  (цикл периода 10). Интерпретация данной поверхности существенно сложнее. Что касается распределения энергии  $\langle E \rangle$  по масштабам, то оно существенно шире и не демонстрирует тонкую структуру в области малых частот, как в случае вейвлетного анализа с морлет-вейвлетом. Заметим также, что в данном случае временной масштаб вейвлетного преобразования, соответствующий максимуму энергии в вейвлетном спектре, не совпадает по величине с периодом фурье-преобразования (ср. с рис. 2.2, в)<sup>3</sup>.

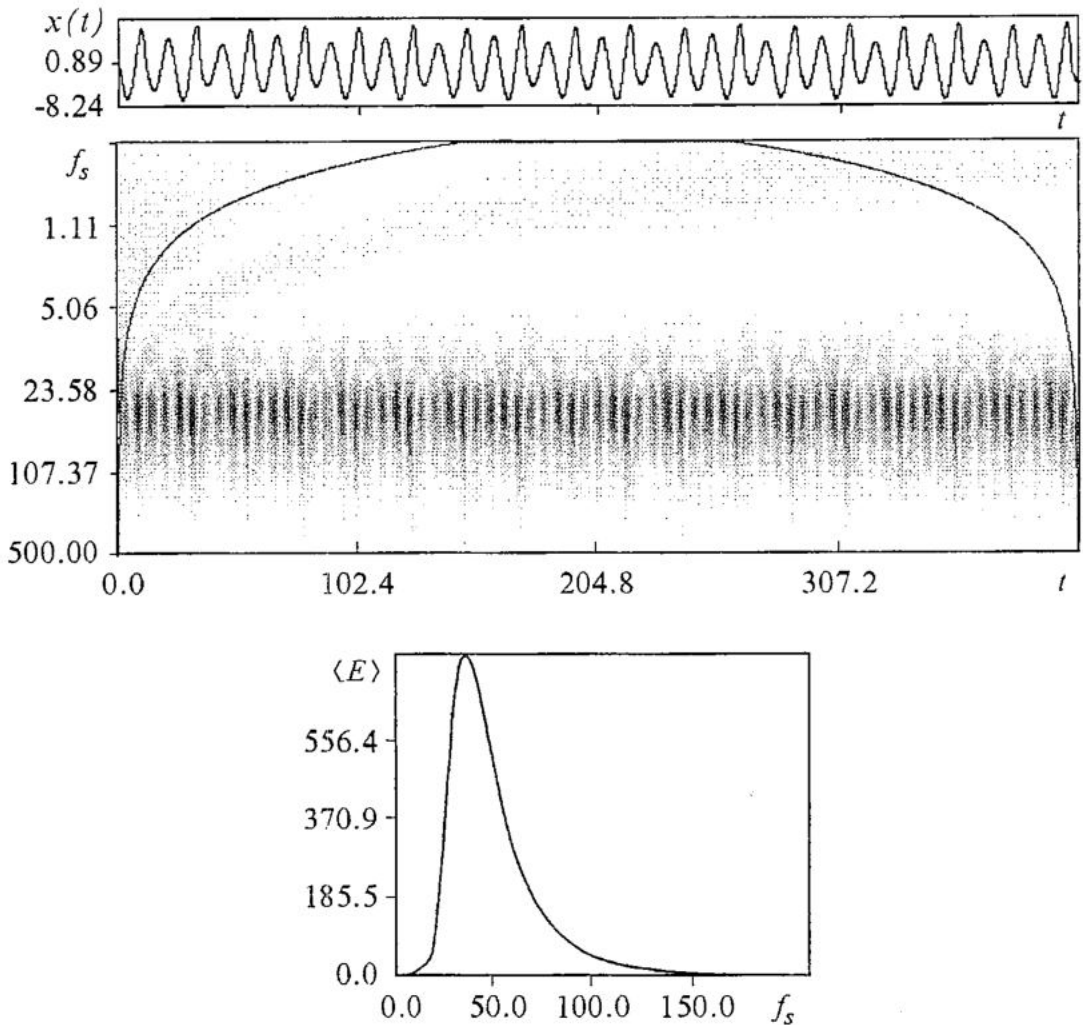


Рис. 2.3. Проекция поверхности распределения амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования<sup>6</sup>  $|W(t, f_s)|$  и распределение энергии по временным масштабам  $\langle E(f_s) \rangle$ , полученные с базовым МНАТ-вейвлетом по временной реализации  $x(t)$  системы Ресслера (2.1) с бифуркационным параметром  $m=4.2$  (параметры  $e=w=0.2$ , цикл  $T_{10}$ ). Длительность временной реализации  $N=2^{12}$  отсчетов,  $\Delta t=0.001$

<sup>3</sup> Данные вопросы подробно обсуждались в первой части работы [3, табл.]

<sup>6</sup> Для МНАТ-вейвлета, который является действительным вейвлетом, фаза коэффициентов вейвлетного спектра тождественно равна нулю.

Таким образом, можно сделать вывод, что анализ распределения амплитуды коэффициентов вейвлетного спектра  $|W|$  позволяет эффективно обнаружить только первую бифуркацию удвоения периода, благодаря тому, что интенсивность первой субгармоники основной частоты после удвоения в спектре достаточно велика. Следующие бифуркации удвоения приводят к усложнению вейвлетной поверхности  $|W|$  в области больших временных масштабов  $s$ , но интенсивность данных масштабов мала. Вследствие конечной ширины фурье-образа  $\hat{\psi}$  базовой вейвлетной функции появление все новых слабовыраженных в спектре временных масштабов  $s_{i+1}=2s_i$ , где  $i$  - номер бифуркации, выражается в появлении размытого, очень слабо выраженного пьедестала в области малых величин  $f_s$  в распределении  $\langle E \rangle$ . Но вейвлетный анализ не позволяет выделить каждый из этих временных масштабов отдельно. Даже применение более «частотноизбирательного» вейвлета Морлета с  $\omega_0=16$  (см. рис. 1.3 и табл. из [3]) позволяет «заметить» в распределении энергий по масштабам только масштаб  $s=4T$ , соответствующий третьей бифуркации удвоения. Дальнейшее увеличение параметра  $\omega_0$  материнской вейвлетной функции Морлета (последнее соответствует уменьшению ширины вейвлета Морлета в фурье-пространстве, а следовательно, повышает частотную избирательность вейвлетного преобразования) сводит на нет основное достоинство вейвлетного преобразования, а именно: возможность эффективного выделения локальных особенностей анализируемого сигнала. Фактически, увеличивая параметр  $\omega_0$ , мы приходим к оконному преобразованию Фурье, достоинства и недостатки которого обсуждались во Введении.

Аналогичная ситуация складывается и при анализе распределения фаз  $\varphi_W(t, f_s)$  коэффициентов вейвлетного спектра сигналов, генерируемых динамическими системами при переходе к хаосу через удвоение периода. В качестве примера на рис. 2.4 представлены результаты расчета поверхности  $\varphi_W$  вейвлетного спектра (полученного с базовым морлет-вейвлетом) сигналов, генерируемых системой Ресслера при переходе к хаосу через удвоение периода. Из рисунков видно, что распределения фаз вейвлетных коэффициентов в различных режимах качественно не отличаются друг от друга.

Некоторые отличия проявляются, во-первых, в высокочастотной области, где правильная картина распределения фаз коэффициентов вейвлетного преобразования искажается с увеличением управляющего параметра  $m$ . Последнее связано с изменением спектрального состава колебаний при их усложнении в результате перехода к хаосу в области высоких частот, существенно превышающих базовую частоту в спектре сигнала. И во-вторых, происходит изменение поверхности  $\varphi_W$  в области низких частот, которые уже определяются явлением последовательных прибавлений периода с увеличением  $m$ . Однако это изменение не существенно, и поэтому, распределение фаз коэффициентов вейвлетного преобразования также не может быть эффективным средством анализа характерных особенностей различных режимов колебаний динамических систем, демонстрирующих каскад удвоений периода.

## 2.2. Переход к хаосу через перемежаемость

Переход к хаосу через перемежаемость (исследованный впервые в работах И. Помо и П. Манневилля [4, 5]) обычно рассматривается на примере модели Лоренца [6, 7]

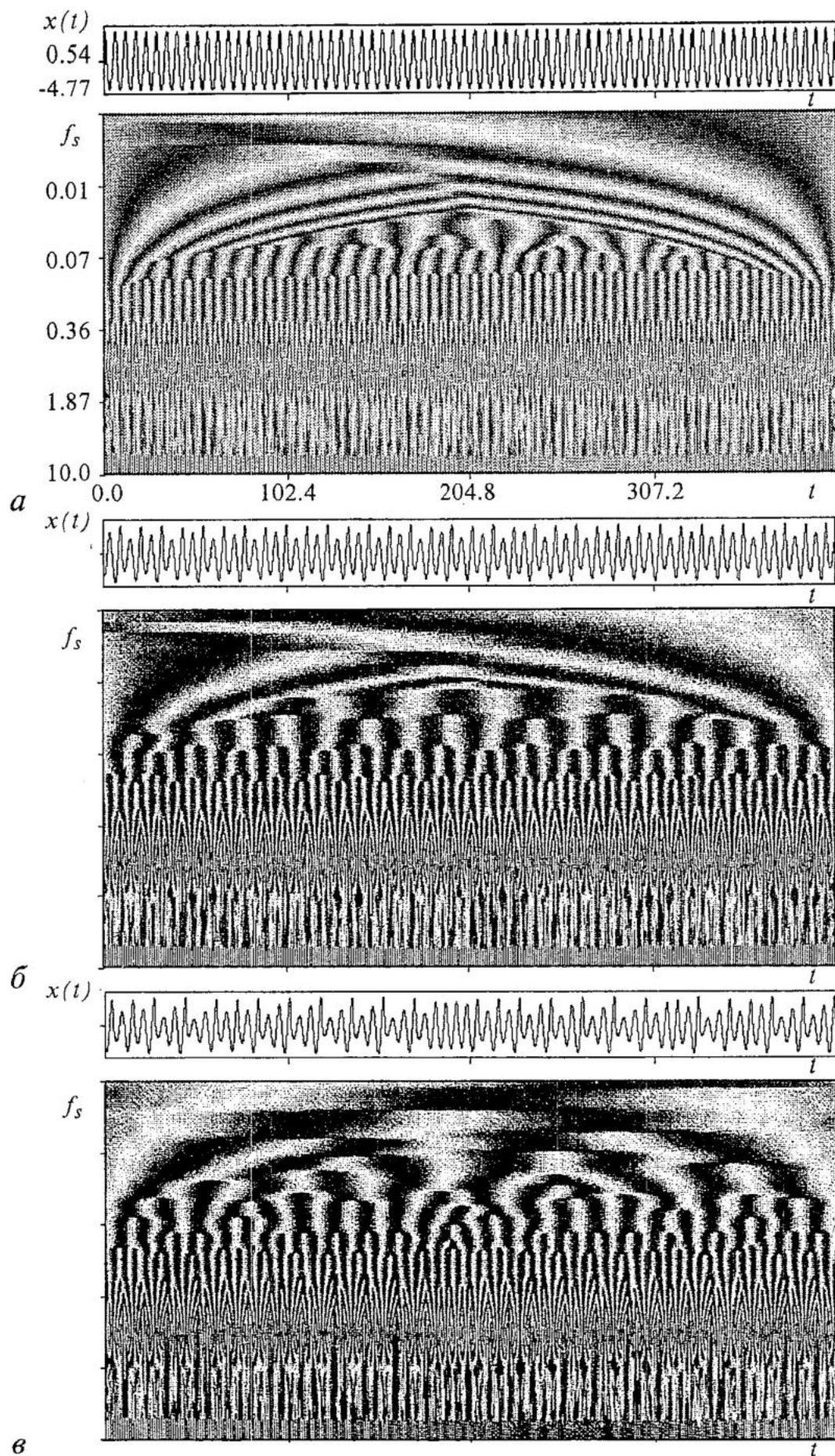


Рис. 2.4. Распределение фазы  $\varphi_W(t, f_s)$  коэффициентов вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом по временной реализации  $x(t)$  системы Ресслера (2.1) с бифуркационными параметрами: *a* -  $m=2.6$  (цикл  $T_1$ ); *б* -  $m=4.2$  (цикл  $T_{10}$ ); *в* -  $m=5.1$  (режим хаотической динамики)

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(x - z), \\ \dot{y} = rx - xz - y, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (2.3)$$

При значениях управляющих параметров  $s = 10$ ,  $b = 8/3$  и при  $r < r^*$  временная реализация, генерируемая системой Лоренца (например, величины  $x$ , которую мы и будем рассматривать в дальнейшем), представляет собой периодическое движение. При превышении порога  $r^* \approx 166.07$  регулярные колебания  $x(t)$  (ламинарная фаза) начинают прерываться хаотическими всплесками, которые с ростом управляющего параметра  $r$  становятся все более и более длительными, пока движение полностью не хаотизируется. Перемежаемость в системе Лоренца классифицируется как перемежаемость I-го рода [8, 9].

Проанализируем результаты вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом соответствующих сигналов  $x(t)$ , порождаемых системой Лоренца при вышеуказанных значениях параметров. Временные реализации были получены, как и в предыдущем случае, методом Рунге - Кутты 4-го порядка с шагом по времени  $\Delta t = 0.0001$ .

На рис. 2.5 демонстрируется временная реализация  $x(t)$  и проекция поверхности  $|W|$ . На вейвлетной поверхности четко выделяются характерные структуры, соответствующие ламинарной и турбулентной фазам во временной реализации.

Структура вейвлетной поверхности для регулярной фазы движения имеет профиль  $|W(t = \text{const}, f_s)|$ , на котором наблюдаются два глобальных максимума (см. рис. 2.5) - им соответствуют две темные области, расположенные параллельно оси времени. В пределах ламинарной фазы с течением времени коэффициенты вейвлетного преобразования остаются неизменными. Наличие структуры, демон-

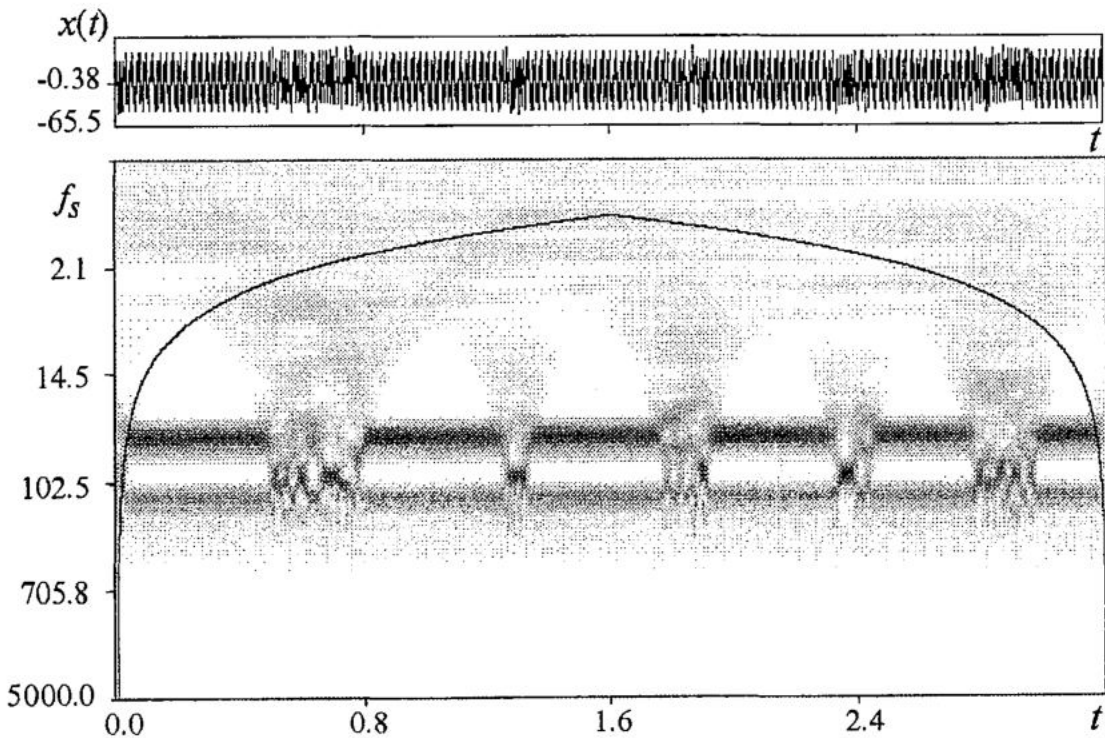


Рис. 2.5. Вейвлетная поверхность  $W(t, f_s)$ , полученная по временной реализации  $x(t)$  системы Лоренца (2.3) с параметром надкритичности  $r - r^* = 0.03$  ( $r = 166.1$ ). Длительность временной реализации  $N = 2^{15}$  отсчетов,  $\Delta t = 0.0001$

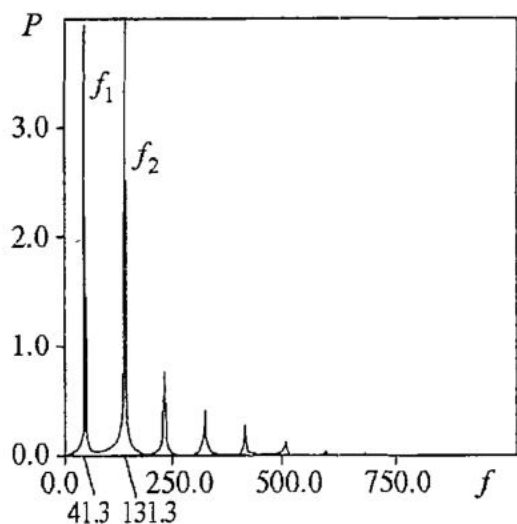


Рис. 2.6. Спектр мощности Фурье (в нелогарифмическом масштабе) временной реализации  $x(t)$ , генерируемой системой Лоренца при значении бифуркационного параметра  $r=166.1$ , построенный для ламинарной фазы движения ( $t \in (0.2, 0.6)$ ); см. рис. 2.4)

в режиме хаотической динамики наблюдается «всплеск» разномасштабных колебательных явлений, причем основная энергия приходится на масштабы  $s$ , соответствующие  $f_s \in (f_1, f_2)$ . Заметим, что области на поверхности  $|W|$ , соответствующие хаотическим фазам, четко локализованы во времени.

На рис. 2.7 представлена вейвлетная поверхность, полученная в результате вейвлетного преобразования одной турбулентной фазы, соответствующей отрезку временной реализации  $t \in (0.25, 1.06)$  - первый турбулентный всплеск на рис. 2.5. Проанализируем структуру этой поверхности. Как уже обсуждалось, в течение ламинарной фазы структура поверхности не меняется во времени. Мгновенное распределение энергии по масштабам в этом случае также не зависит от времени (рис. 2.8, *a*). Оно имеет два характерных глобальных максимума, которые связаны с наличием частот  $f_1$  и  $f_2$ , доминирующих в спектре Фурье, построенном для

стрирующей два глобальных максимума, связано, в первую очередь, с особенностями спектра Фурье сигнала. На рис. 2.6 приведен этот спектр в нелогарифмическом масштабе, построенный по отрезку временной реализации  $x(t)$ , соответствующему ламинарной фазе движения. Хорошо видно наличие двух преобладающих в спектре гармоник с частотами  $f_1 = 41.3$  и  $f_2 = 131.3$ . Эти временные масштабы также хорошо заметны на вейвлетном спектре (см. рис. 2.5) на тех же частотах. Именно благодаря наличию их в спектре мощности на вейвлетной поверхности наблюдается картина из двух максимумов.

С входом системы в турбулентную фазу вид поверхности  $|W|$  сильно изменяется. Можно сказать, что в

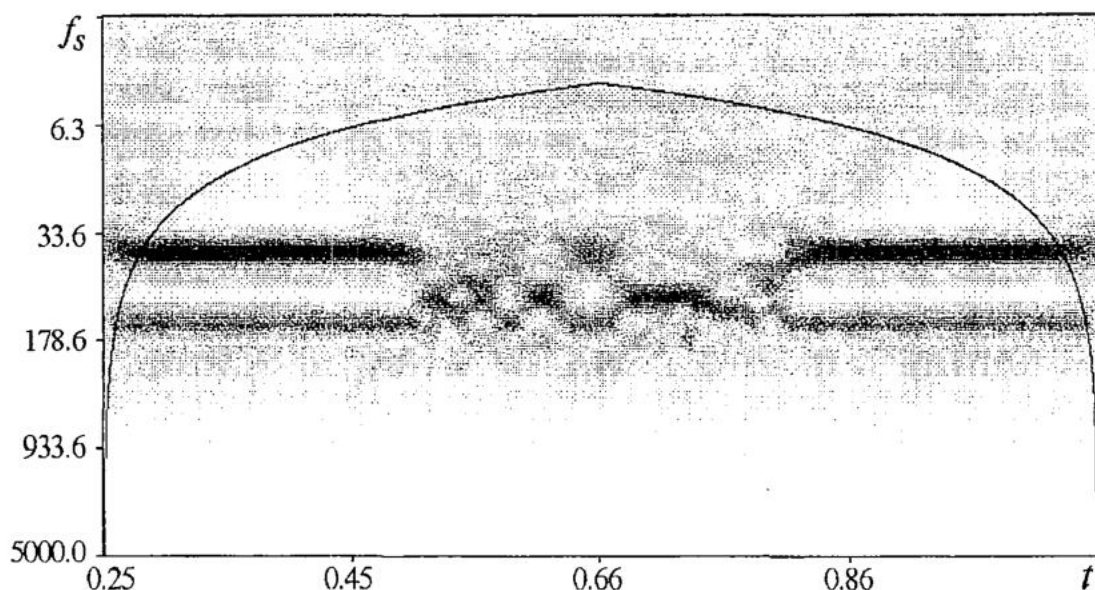


Рис. 2.7. Вейвлетная поверхность  $W(t, f_s)$ , полученная по временной реализации  $x(t)$  системы Лоренца (2.3) с одной турбулентной фазой при параметре надкритичности  $r - r^* = 0.03$  ( $r = 166.1$ ). Длительность временной реализации  $N = 2^{13}$  отсчетов,  $\Delta t = 0.0001$

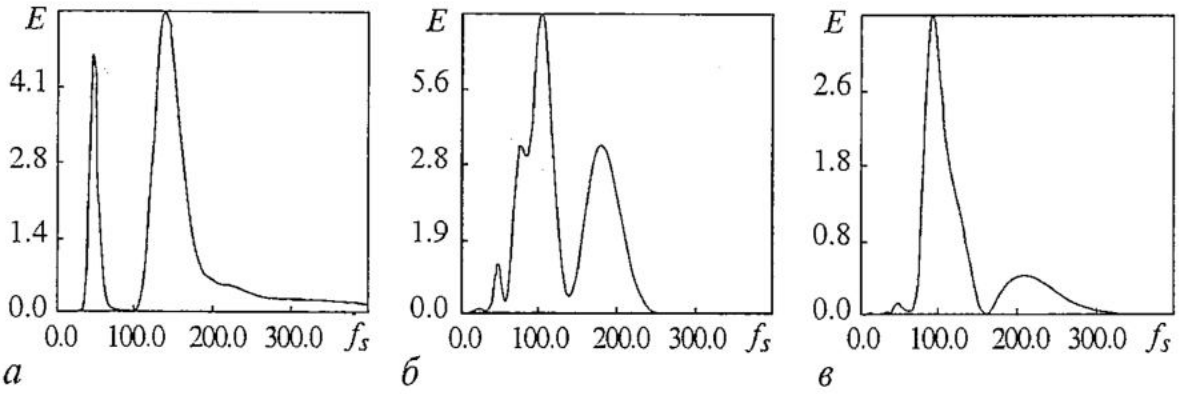


Рис. 2.8. Мгновенные распределения по энергиям, полученные в результате вейвлетного преобразования (см. рис. 2.7), для двух фаз движения в системе Лоренца *a* - ламинарной,  $t=0.36$ ; *б* - турбулентной,  $t=0.56$ ; *в* - турбулентной,  $t=0.72$

ламинарной фазы. Переход к турбулентной фазе начинается с «расщепления» масштабов  $1/f_1$  и  $1/f_2$ . В результате этого наблюдается выделение в энергетическом спектре одного преобладающего масштаба. Далее на протяжении всей турбулентной фазы наблюдается возбуждение и подавление колебаний в системе на различных временных масштабах, но преимущественно меньших, чем временной масштаб  $s_1 = 1/f_1$ . Распределение по энергиям существенно нестационарно в хаотической фазе. Единственной его особенностью, наблюдающейся в течение всего хаотического «всплеска», является наличие преобладающего масштаба  $1/f_s \sim 0.011$  (знак « $\sim$ » поставлен ввиду того, что расположение максимума меняется и величина 0.011 является усредненной по длительности нескольких турбулентных фаз). Само распределение по энергиям сильно меняется с течением времени. Для иллюстрации на рис. 2.8, *б*, *в* представлены мгновенные распределения  $E(f_s)$  для моментов времени  $t = 0.56$  и  $t = 0.72$ . Хорошо видно, что они существенно различаются как числом максимумов в спектре, так и расположением их в спектре.

С ростом бифуркационного параметра длительность ламинарных фаз уменьшается, и при  $r > 167.0$  ламинарные фазы практически исчезают из временной реализации. Вместе с тем вейвлетный анализ успешно выделяет ламинарные фазы с длительностью порядка 2-3-х периодов колебаний на основной частоте в спектре. Это иллюстрирует рис. 2.9, на котором представлены результаты вейвлетного преобразования для величины  $r=167.0$  (выделены области ламинарных фаз движения). Видно, что на вейвлетной поверхности в соответствующих местах появляется характерная для ламинарной фазы структура в распределении амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования  $W_1$ .

Аналогичная ситуация наблюдается не только при анализе временных реализаций, порождаемых системой Лоренца и другими потоковыми системами. Это подтверждается, например, результатами анализа временной реализации, порожденной логистическим отображением

$$x_{n+1} = \varepsilon x_n(1-x_n). \quad (2.4)$$

На рис. 2.10 приведены результаты анализа временной реализации длиной 256 итераций с исключенным переходным процессом. Значение управляющего параметра  $\varepsilon^* = \varepsilon = 0.002$ . При критическом значении  $\varepsilon^* = 1 + (8)^{1/2}$  [8] наблюдался регулярный цикл периода 3, а ниже, при  $\varepsilon < \varepsilon^*$ , ламинарные фазы прерывались хаотическими всплесками.

Из анализа вейвлетной поверхности и ее сопоставления с временной реализацией видно, что ламинарным фазам движения соответствует также особая

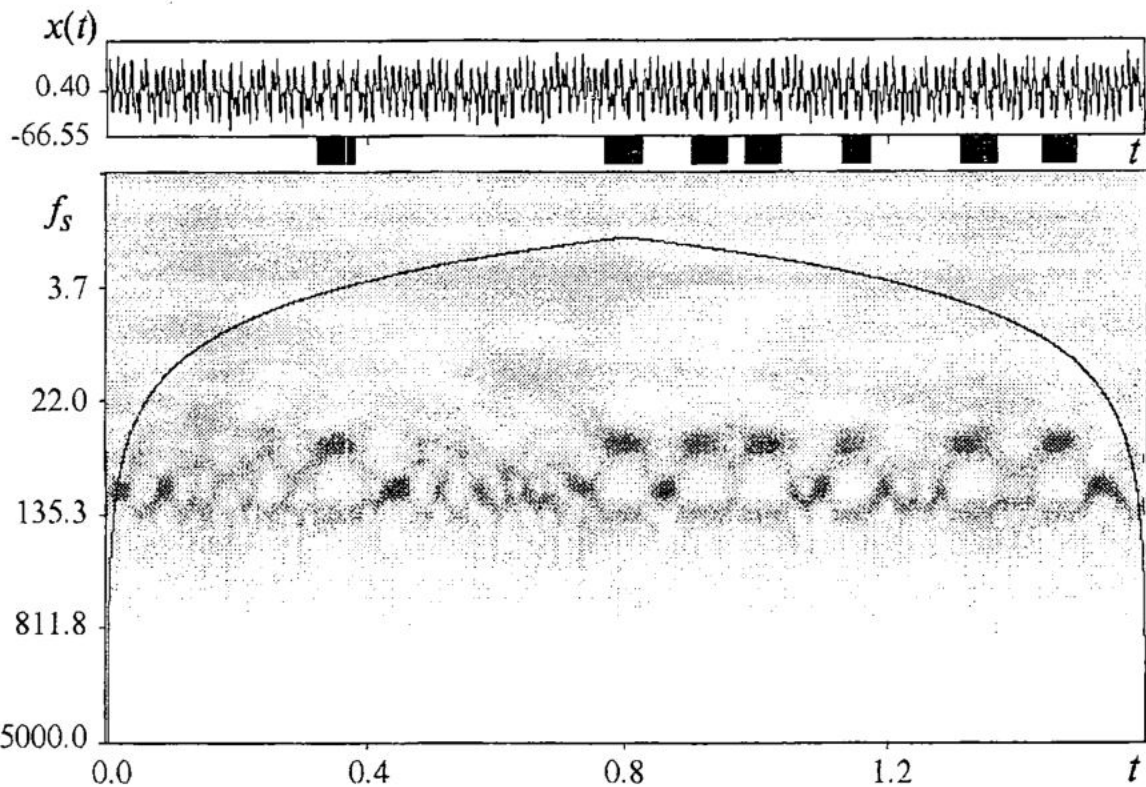


Рис. 2.9. Поверхность  $W(t, f_s)$ , полученная по временной реализации  $x(t)$  системы Лоренца с параметром надкритичности  $r-r^*=0.93$  ( $r=167.0$ ). Черными прямоугольниками выделены ламинарные фазы движения

типичная структура поверхности. Выход из области ламинарной фазы движения, как и в случае динамики системы Лоренца, сопровождается характерным расслоением временного масштаба, соответствующего регулярным колебаниям системы. Также существенно различаются характерные распределения энергии

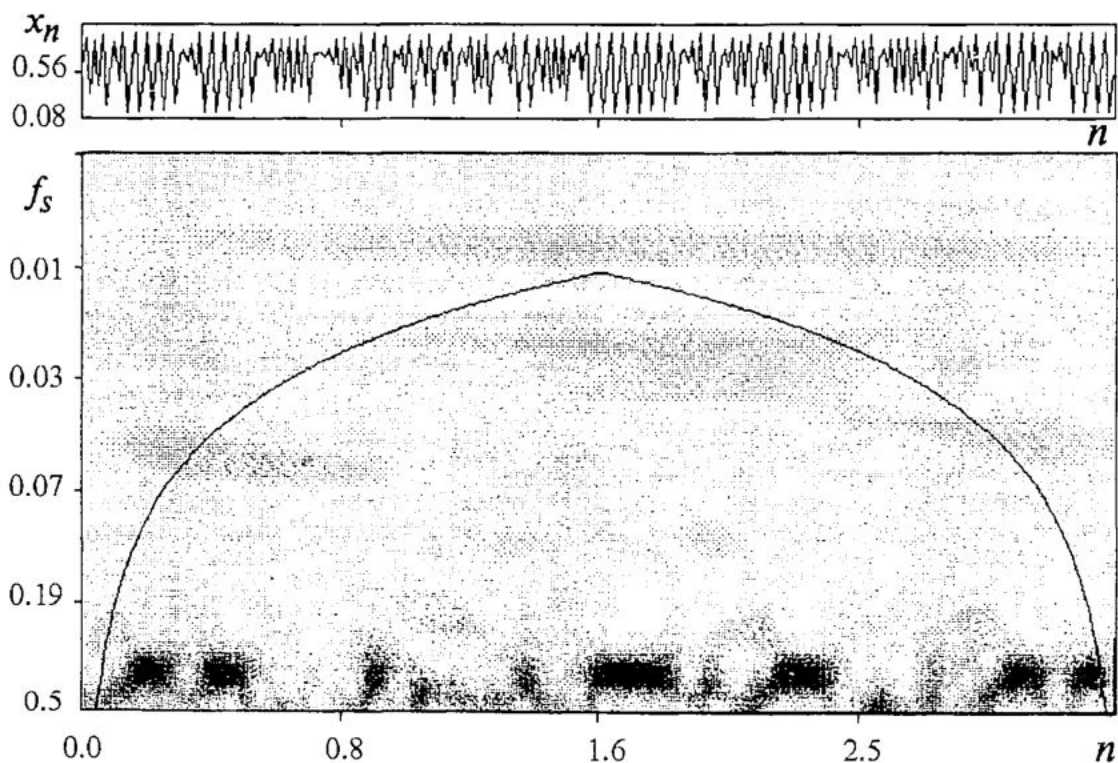


Рис. 2.10. Поверхность  $W(n, f_s)$ , полученная по временной реализации  $x_n$  логистического отображения с параметром  $\epsilon=1+(8)^{1/2} - 0.002$



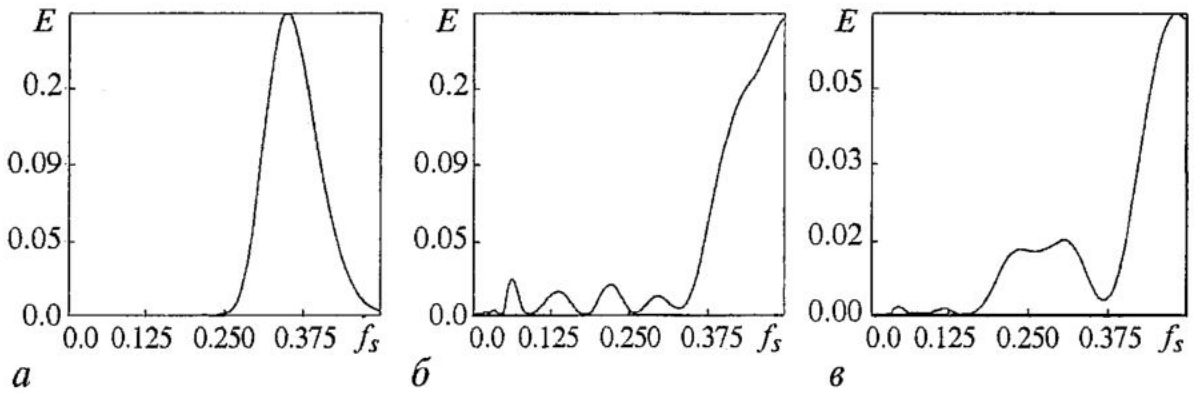


Рис. 2.11. Мгновенные распределения по энергиям, полученные в результате вейвлетного преобразования (см. рис. 2.10) для различных фаз движения в логистическом отображении *a* - ламинарной ( $n=136$ ); *б* - турбулентной ( $n=62$ ); *в* - турбулентной ( $n=220$ )

колебаний по временным масштабам в режимах хаоса и ламинарной фазы. В последнем случае распределение  $E(f_s)$  не меняется и имеет вид, приведенный на рис. 2.11, *a*. В турбулентной фазе движения распределение по энергиям зависит от времени (рис. 2.11, *б*, *в*). Таким образом, результаты вейвлетного анализа, представленные ранее для модели Лоренца, имеют достаточно универсальный характер в плане рассмотрения сценария перехода к хаосу через перемежаемость<sup>4</sup>.

Результаты, рассмотренные выше, свидетельствуют о возможности использования особенностей вейвлетного преобразования временных реализаций систем, демонстрирующих переход к хаосу через перемежаемость, применительно к анализу длительности ламинарных (и турбулентных) фаз движения.

Классическими методами выделения регулярных фаз движения являются методы, основанные на анализе «текущего» периода или амплитуды колебаний. Очевидно, что первый метод может работать лишь тогда, когда ламинарная фаза представляет сигнал очень близкий к строго регулярному, что не всегда имеет место. Реально ламинарная фаза представляет собой **почти** периодическое движение, что затрудняет применение данного метода и снижает его точность. Второй метод может быть применен только в том случае, когда в хаотической области амплитуда колебаний существенно отличается от амплитуды колебаний в регулярном режиме. В противном случае мы опять сталкиваемся с необходимостью иметь строгую периодичность колебаний в фазе ламинарного движения.

С другой стороны, метод выделения регулярных фаз, основанный на вейвлетном преобразовании, оказывается более предпочтительным. Как было обнаружено, структура вейвлетной поверхности в области ламинарной и турбулентной фаз движения существенно различна. Причем слабая нерегулярность сигнала в течение ламинарной фазы движения практически не отражается на структуре вейвлетной поверхности и, следовательно, не будет приводить к ошибке в определении длительности каждой из характерных фаз движения. Поэтому, если тем или иным образом анализировать структуру вейвлетной поверхности, то можно достаточно просто осуществить поиск и определение длительностей ламинарных и турбулентных фаз при перемежаемости [11].

В качестве простейшего метода анализа структуры вейвлетной поверхности

<sup>4</sup> По крайней мере, это справедливо для перемежаемости I-го рода. К этому типу перемежаемости относится динамика и логистического отображения, и системы Лоренца [8]. Вместе с тем можно ожидать, что анализ поведения систем, демонстрирующих перемежаемость II-го и III-го рода, покажет подобную описанной здесь картину, конечно, с соответствующими особенностями, характерными именно для этих типов.

может быть предложена методика, основанная на определении числа максимумов  $F$  на мгновенных распределениях энергии по масштабам колебаний  $E(f_s)|_{t=\text{const}}$ . В течение ламинарной фазы число максимумов постоянно, при переходе к турбулентной фазе величина  $F$  начинает сильно зависеть от времени. На рис. 2.12, а демонстрируются результаты такого расчета для сигнала, генерируемого системой Лоренца при значении управляющего параметра  $r=166.1$ . Из него видно, что предложенная методика позволяет эффективно выделить ламинарные фазы движения. Учитывая, что величина  $F$  принимает только целые значения, определить, например, длительность ламинарной фазы движения по зависимости  $F(t)$  не представляет сложности. Описанная методика успешно работает и при увеличении параметра надкритичности. Рис. 2.12, б демонстрирует результаты расчета зависимости  $F(t)$  при значении  $r=167.0$  (см. рис. 2.9, на котором

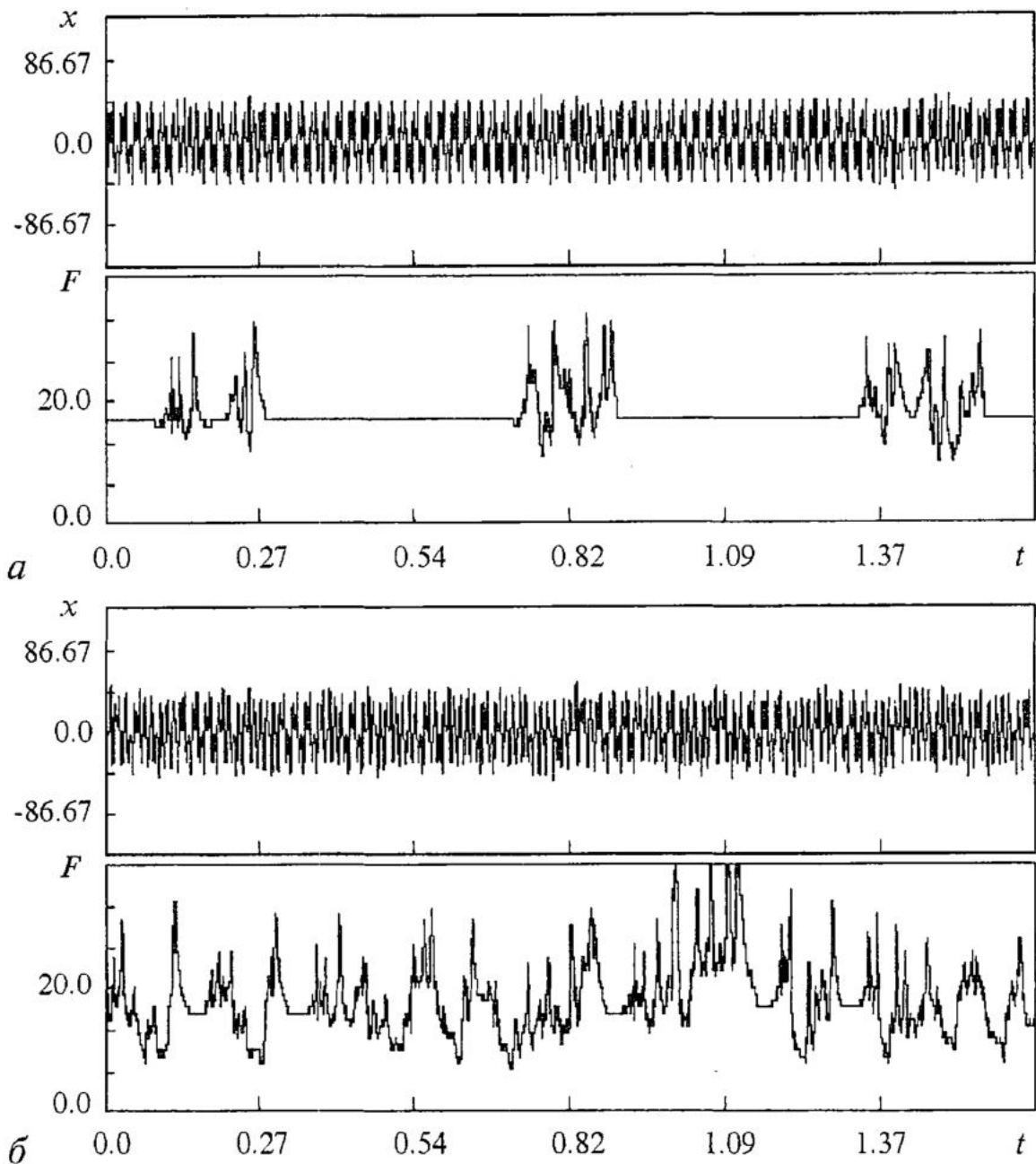


Рис. 2.12. Зависимости от времени числа максимумов  $F$  на мгновенных распределениях энергии  $E$ , определенные по временным реализациям системы Лоренца для следующих значений управляющего параметра  $r$ : а - 166.1; б - 167.0

представлена соответствующая поверхность амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования при таком значении параметра  $r$ ). Видно, что и в этом случае существенно более короткие ламинарные фазы легко обнаруживаются с применением описанной методики анализа вейвлетной поверхности.

Для иллюстрации данного метода были определены средние длительности  $l$  ламинарных и турбулентных фаз движения в зависимости от параметра надкритичности  $r$ . Число ламинарных фаз (а соответственно, и турбулентных фаз), по которым определялись данные характеристики, составляло порядка  $600 \div 800$ . На рис. 2.13 представлены результаты расчета для системы Лоренца<sup>5</sup>. Средняя длительность ламинарной фазы движения уменьшается с ростом  $r$ , а средняя длительность хаотической фазы меняется существенно слабее, хотя и имеет тенденцию к увеличению с ростом надкритичности. Последнее вполне объяснимо, так как хаотическая фаза движения есть ничто иное как стадия реламинаризации, то есть возвращение к регулярному движению. Понятно, что длительность реламинаризации не зависит от параметра надкритичности  $r$ . На рис. 2.14 показана зависимость  $\ln l$  от величины  $\ln(r - r^*)$ . Благодаря логарифмическому масштабу легко можно убедиться, что уменьшение длительности ламинарной фазы происходит пропорционально квадратному корню из расстояния  $(r - r^*)$  от порога переменяемости (по крайней мере, при небольших значениях величины  $(r - r^*)$ ), что и предсказывает теория переменяемости I-го рода. Таким образом, предложенный метод подтверждает результаты, хорошо известные в литературе.

Аналогичные результаты были получены для длительностей ламинарных и турбулентных фаз при анализе логистического отображения в диапазоне управляющего параметра  $\epsilon \in (1.738, 1.752)$ . На рис. 2.15 приведены зависимости длительностей ламинарных и турбулентных фаз от  $\epsilon$ . Как и в случае соответствующих зависимостей, полученных для системы Лоренца, длительность регулярной фазы коле-

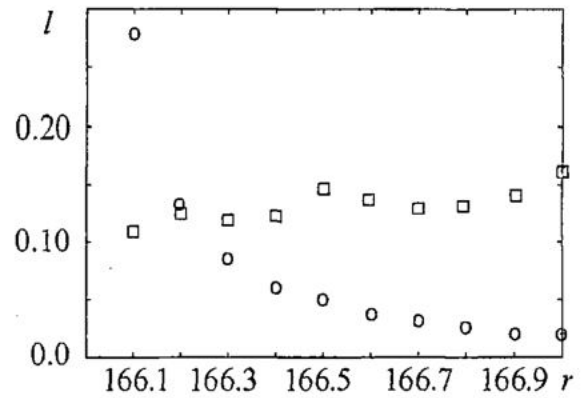


Рис. 2.13. Средняя длительность ламинарной (o) и турбулентной (□) фаз колебаний  $x(t)$  в модели Лоренца вблизи порога переменяемости в зависимости от параметра надкритичности  $r$

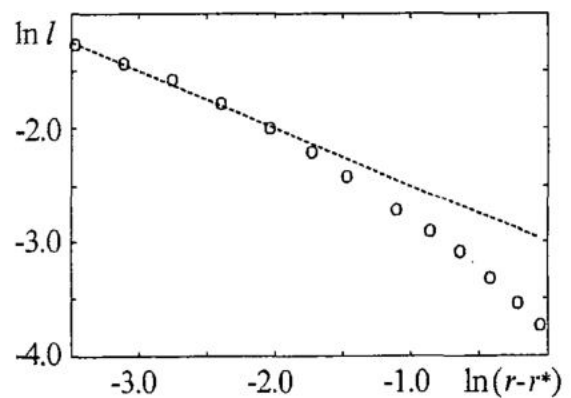


Рис. 2.14. Средняя длительность ламинарной фазы движений вблизи порога переменяемости (двойной логарифмический масштаб): (o) - результаты работы процедуры выделения ламинарных фаз с помощью вейвлетного преобразования; пунктирная линия - степенная функция от величины  $(r - r^*)$  с показателем « $1/2$ ». Хорошо видно, что при малом превышении порога переменяемости ( $r > r^*$ ) рост длительности  $\langle l \rangle$  пропорционален  $(r - r^*)^{1/2}$ , как и предсказывает теория. При больших величинах надкритичности наблюдается отклонение роста длительности ламинарной фазы от степенного закона

<sup>5</sup> Машинное время обработки одной реализации такой длительности на персональном компьютере с процессором PII 400 MHz и ОЗУ 128 MB составляло примерно 40 мин.

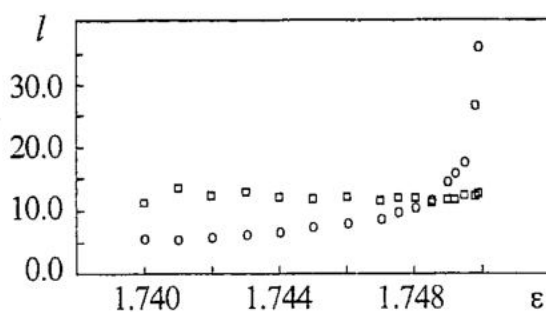


Рис. 2.15. Средняя длительность ламинарной (○) и турбулентной (□) фаз колебаний  $x_n$  в логистическом отображении вблизи порога перемежаемости в зависимости от управляющего параметра  $\varepsilon$

баний растет с ростом параметра по степенному закону, а длительность турбулентной фазы остается примерно постоянной при различных значениях  $\varepsilon$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 01-02-17392 и 02-02-16531) и CRDF REC-006.

### Библиографический список

1. Rössler O.E. An equation for continuous chaos // Phys. Lett. 1976. Vol. 57A. P. 397.
2. Takens F. Detecting strange attractors in dynamical systems and turbulence / In: Lectures Notes in Mathematics. Warwick, 1980 / Eds Rand D. and Young L.-S. N.Y.: Springer-Verlag, 1981. P. 366.
3. Короновский А.А., Храмов А.Е. Введение в непрерывный вейвлетный анализ для специалистов в области нелинейной динамики. Часть 1 // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9. № 4,5. С. 3.
4. Manneville P., Pomeau Y. Different ways to turbulence in dissipative dynamical system // Physica D. 1980. Vol. 1. P. 219.
5. Manneville P., Pomeau Y. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical system // Comm. Math. Phys. 1980. Vol. 74. P. 189.
6. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodical flow // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 20. P. 130.
7. Manneville P., Pomeau Y. Intermittency and the Lorenz model // Phys. Lett. 1979. Vol. 75A. P. 1.
8. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
9. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.
10. Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е. Вейвлетный анализ и его использование для анализа динамики нелинейных динамических систем различной природы // Изв. РАН, сер. физическая. 2000. Т. 64, № 12. С. 2383.
11. Короновский А.А., Храмов А.Е. Об эффективном анализе перехода к хаосу через перемежаемость с помощью вейвлетного преобразования // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27, № 1. С. 3.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 18.01.2002

# AN INTRODUCTION TO CONTINUOUS WAVELET ANALYSIS FOR SPECIALISTS IN FIELD OF NONLINEAR DYNAMICS.

## Part 2. Routes to chaos from point of wavelet analysis

*A.A. Koronovskii, A.E. Hramov*

This article is continuation of the work earlier published at the same journal. From positions of the continuous wavelet analysis the features of universal routes to the chaos realized in nonlinear finite-dimensional systems are illustrated: transition to the chaos through the bifurcation cascade of the period doubling and transition to the chaos through the intermittency.



*Короновский Алексей Александрович* - родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Опубликовал в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым монографию «Нелинейная динамика в действии» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996). Автор ряда статей в центральной печати.



*Храмов Александр Евгеньевич* - окончил Саратовский государственный университет (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика (1999). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика распределенных систем, методы анализа и моделирования динамических систем, мощная СВЧ-электроника.

E-mail: [aeh@cas.ssu.runnet.ru](mailto:aeh@cas.ssu.runnet.ru)



Изв. вузов «ПНД», т.10, № 1-2, 2002

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНКУРЕНТОВ, МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ СОСТОЯНИЯ И МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО РОСТА

А.В. Подлазов

Масштабная инвариантность является одним из отличительных признаков целостного поведения. Примеры ее возникновения демонстрируют самоорганизованно критические системы и системы с когерентным шумом, состоящие из существенно нелинейных элементов. В настоящей работе, напротив, построены модели линейного роста, имеющие масштабно-инвариантные свойства, что является принципиально новым.

Поскольку целостность не может возникнуть на основе линейных механизмов, в правила предлагаемых моделей она заложена изначально в виде использования информации об интегральных характеристиках системы. Наличие такой «затравки целостных свойств» оказывается вполне достаточно для того, чтобы распределение составляющих систему частей по размеру приняло степенной вид.

Также в работе рассматриваются вопросы обработки статистических выборок при построении ранговых зависимостей, анализ роли входящих в эти зависимости параметров и качественные свойства систем, описываемых степенными законами распределения вероятностей.

### Введение

Свойства многих сложных систем, изучаемых естественными и, в особенности, общественными науками, описываются *степенными законами распределения вероятностей* (СЗРВ) [1-15]

$$u(n) \sim n^{-(1+\alpha)}, \quad (1)$$

где  $u(n)$  - плотность вероятности того, что рассматриваемая величина принимает значение  $n$ , а показатель  $\alpha > 0$  является основной характеристикой распределения.

На практике распределение (1) представляет интерес, как правило, лишь при  $\alpha < 2$ , поскольку на значение показателя, равное двойке, приходится «водораздел» свойств СЗРВ.

При  $\alpha > 2$  свойства распределения (1) схожи со свойствами *нестепенных распределений* (плотность вероятности которых убывает быстрее любой степени  $n$ : нормальное, экспоненциальное и т.п.). То есть случайная величина, распределенная в соответствии с формулой (1), имеет при  $\alpha > 2$  конечную дисперсию и может быть описана *характерным значением* и отклонением от него.

Если же дисперсия мала, то вероятностное описание иногда вообще заменяется детерминированным, что типично для многих естественных дисциплин, в которых наблюдаемые величины часто трактуются как «невероятностные» [1-6].

При  $\alpha < 2$  ситуация оказывается в корне иной, поскольку из-за бесконечности дисперсии становится неприменимой центральная предельная теорема. Распределение суммы случайных величин, плотность вероятности которых удовлетворяет формуле (1), стремится к *устойчивому распределению*, асимптотика которого при больших  $n$  по-прежнему описывается этой формулой [7, 8, 16]. То есть усреднение не устраняет *масштабной инвариантности* (отсутствия характерных значений), присущей СЗРВ. Соответственно, и выделение характерного значения оказывается невозможным. Подобная ситуация наблюдается при описании социально-экономических систем, а также сложных систем естественного происхождения, где наблюдаемые величины имеют существенно вероятностную природу, то есть их ни в каком приближении нельзя рассматривать как детерминированные [1-6].

Вообще говоря, распределение наблюдаемых аддитивных величин не может иметь бесконечных моментов (физика «не знает» бесконечностей). Поэтому формула (1) является лишь приближением, справедливым в *промежуточной асимптотике* и нарушающимся при достаточно малых (иначе распределение не будет нормируемо) и при достаточно больших  $n$  [1,2]. Данное обстоятельство при анализе реальных данных практически исключает из рассмотрения СЗРВ с показателем, превышающим двойку. Такие распределения слишком быстро убывают, чтобы можно было достоверно отличить их от нестепенных распределений или, тем более, выделить область промежуточной асимптотики.

Подробный анализ степенных распределений с различных точек зрения можно найти в работах [1-9]. Здесь же мы уделим внимание еще одному «водоразделу» их свойств, приходящемуся на значение  $\alpha=1$ , который является существенным для всего дальнейшего рассмотрения.

### **Распределение конкурентов**

Если  $\alpha \leq 1$ , то распределение (1) характеризуется не только бесконечной дисперсией, но и бесконечным математическим ожиданием. При этом основной вклад в выборочное среднее вносит сравнительно небольшое число крупнейших значений, а сумма всех значений из некоторой выборки по порядку величины совпадает с максимальным из них. Если же  $\alpha > 1$ , то основной вклад в среднее и в сумму, напротив, вносит основная масса малых значений [1, 2, 7, 8, 16].

Область доминирующих выборочных значений определяется величиной  $n_b$ , удовлетворяющей уравнению

$$\int_{n_{\min}}^{n_b} n \cdot u(n) dn = \int_{n_b}^{n_{\max}} n \cdot u(n) dn, \quad (2)$$

которую уместно назвать *рубежом* распределения. Рубеж разделяет диапазон выборочных значений  $[n_{\min}; n_{\max}]$  на части, вносящие равные вклады в среднее (сумму). Найдем для него явное выражение.

Подстановка плотности вероятности (1) в определение (2) дает уравнение

$$2(n_b/n_{\min})^{1-\alpha} = A^{1-\alpha} + 1, \quad (3)$$

где  $A = n_{\max}/n_{\min}$  - *амплитуда* выборки. Воспользовавшись очевидным тождеством  $(1+e^x)/2 = e^{x/2} \cdot \text{ch}(x/2)$ , формулу (3) можно переписать в виде

$$(n_b/n_{\min})^{1-\alpha} = A^{(1-\alpha)/2} \cdot \text{ch}((1-\alpha)(\ln A)/2).$$

Откуда получаем следующее выражение для величины рубежа

$$n_b = (n_{\min} n_{\max})^{1/2} \cdot [\text{ch}((1-\alpha)(\ln A)/2)]^{1/(1-\alpha)}. \quad (4)$$

Пограничное значение показателя  $\alpha = 1$ , при котором распределение (1) принимает вид

$$u(n) \sim n^{-2}, \quad (5)$$

характеризуется рубежом  $n_b = (n_{\min} n_{\max})^{1/2}$  (см. формулу (6) ниже), равным среднему геометрическому величин  $n_{\min}$  и  $n_{\max}$ . Баланс малых и больших значений, имеющий место при  $\alpha=1$ , означает, что весь диапазон изменения величины  $n$  одинаково важен. Такая ситуация является наиболее интересной с точки зрения сложности изучаемых систем и разнообразия их свойств.

Разумеется, точно равенство  $\alpha=1$  никогда не выполняется. Однако, как следует из формулы (4), баланс значений сохраняется, пока второй множитель в ее правой части близок к единице. Разложив его по степеням  $(1-\alpha)\ln A$  до квадратичного члена, получаем

$$[\text{ch}((1-\alpha)(\ln A)/2)]^{1/(1-\alpha)} = 1 + \frac{(1-\alpha)\ln^2 A}{8} + \dots, \quad (6)$$

что дает критерий баланса малых и больших значений

$$|1 - \alpha| \cdot \lg^2 A \ll 1. \quad (7)$$

Таким образом, если амплитуда выборки не очень велика, что довольно часто имеет место, то при  $\alpha \sim 1$  распределение (5) может служить в какой-то степени адекватным описанием, коль скоро выполнено условие (7). И действительно, распределение (5) возникало во многих областях знания (подробнее - ниже), получая в каждой из них свое название.

Мы полагаем правильным использовать для него название «*распределение конкурентов*», предложенное Б.А. Трубниковым в работе [10]. Эта работа была, по-видимому, первой попыткой дать теоретическое объяснение природы часто возникающих степенных распределений с  $\alpha \sim 1$  с общих позиций, а не на основе анализа частных механизмов, специфичных для той или иной области.

Б.А. Трубников рассматривал процесс роста частиц, представляя его как движение «вдоль координаты масс». Полагая скорость роста частицы  $v$  пропорциональной ее массе  $m$ , для интенсивности потока  $j_m$  вдоль координаты масс он получает выражение

$$j_m = mvn_m \sim m^2 n_m,$$

где  $n_m$  - концентрация частиц массы  $m$ , что в предположении постоянства потока дает  $n_m \sim m^{-2}$  [10].

Разумеется, понятие потока вдоль координаты массы требует пояснений, а его постоянство - обоснований. Тем не менее, описанная схема дает принципиальное представление о природе распределения (5). Оно служит отражением конкурентной природы роста, происходящего по формуле «на деньги деньги бежит», когда достигнутый успех является подспорьем для дальнейшего развития, что типично для систем, характеризующихся степенным распределением размеров составляющих их частей. Модели, построенные в настоящей работе (см. ниже, раздел 2), являются, по существу, развитием этой идеи. Однако прежде чем переходить к ним, мы уделим внимание теоретическому рассмотрению некоторых свойств степенных распределений, а также вопросам практической работы с ними (см. ниже, раздел 1).



## Ранговое представление

Степенные распределения, по сравнению с нестепенными, требуют для анализа существенно большего объема выборок. Как показывает практика, для уверенного установления того, что распределение имеет степенной вид, необходимо порядка  $10^2$  значений, а для надежного определения его показателя - не менее  $10^4$ . Поскольку такие массивы данных зачастую недоступны, вместо плотности вероятности рассматривается *зависимость ранг - размер*.

Если расположить выборочные значения в порядке убывания величины  $n$  (провести ранжировку), то номер  $r$  значения в полученном списке называется его рангом. Процедура нумерации выполняется, вообще говоря, с точностью до произвольной аддитивной константы, то есть последовательные выборочные значения будут иметь ранги  $r_0, r_0+1, r_0+2...$  Ранг  $r_0$ , приписываемый крупнейшему значению, будем, следуя работам [3, 4], называть *величиной рангового искажения*.

Если плотность вероятности имеет степенной вид (1), то зависимость ранг - размер также задается степенной функцией

$$n(r) \sim r^{-\alpha}, \quad (8)$$

причем показатели  $\alpha$  и  $\gamma$  связаны тривиальным соотношением<sup>1</sup>

$$\alpha\gamma = 1. \quad (9)$$

В самом деле, ранг значения  $n$  определяется числом превосходящих его выборочных значений

$$r(n) = \int_n^{n_{\max}} m \cdot u(n') dn' + r_0, \quad (10)$$

где  $m$  - объем выборки. Дифференцируя равенство (10) по  $n$ , получаем выражение плотности вероятности через ранговую зависимость

$$u(n) = (-1/m) dr(n)/dn,$$

которое, как легко видеть, устанавливает эквивалентность степенного вида формул (1) и (8) при выполнении соотношения (9). В частности, при  $\alpha = 1$  зависимость ранг - размер (8) принимает гиперболический вид

$$n(r) \sim 1/r, \quad (11)$$

называемый *законом Ципфа* [3-6, 10, 11], который, таким образом, является альтернативной записью распределения конкурентов.

По сравнению с представлением степенных распределений в виде плотности вероятности ранговое описание содержит дополнительный параметр - величину рангового искажения. Выразив амплитуду выборки при помощи формулы (8) как

$$A = n_{\max}/n_{\min} = r_0^{-\alpha} / (m-1+r_0)^{-\alpha},$$

для рангового искажения находим [3]

$$r_0 = (m - 1)/(A^\alpha - 1). \quad (12)$$

Обыкновенно, в силу дискретной природы измеряемых величин или из-за

<sup>1</sup> В силу простоты связи между показателями  $\alpha$  и  $\gamma$  в дальнейшем будем характеризовать все распределения величиной  $\alpha$  вне зависимости от того, получено ли значение путем анализа плотности вероятности или зависимости ранг - размер.

ограниченной чувствительности измерительных приборов и методик  $n_{\min}$  практически не зависит от объема выборки, то есть  $A \sim n_{\max}$ . В этом случае максимальное значение выборки данного объема можно оценить при помощи формулы (1), что дает

$$m \sim A^\alpha. \quad (13)$$

Сравнение формул (12) и (13) показывает, что при не очень больших  $m$ , пока отклонением плотности вероятности от степенного вида можно пренебречь, ранговое искажение имеет величину порядка единицы и отслеживает, главным образом, флуктуации  $n_{\max}$ . При больших объемах выборки часть ее значений выходит из области промежуточной асимптотики, где справедлива формула (1). При этом амплитуда выборки становится меньше, чем предсказывает соотношение (13), что выражается в росте  $r_0$ .

Таким образом, ранговое искажение представляет собой поправку, которая учитывает нестепенной характер убывания функции  $u(n)$  при больших  $n$ , а также флуктуации в конкретной статистической выборке. Иными словами, величина  $r_0$  содержит в агрегированном виде ту информацию, которая не только не представляет самостоятельного интереса, но и препятствует определению показателя распределения при анализе плотности вероятности  $u(n)$ .

### *Два типа степенных распределений. Примеры*

Масштабно-инвариантные системы можно отнести к одному из двух типов, которые определяются порядком реализации объектов или событий, описываемых степенным распределением.

Если такие события происходят последовательно, как, например, землетрясения или колебания биржевых индексов, то имеет место *масштабная инвариантность динамики*, обусловленная, как правило, самоорганизацией рассматриваемой системы в критическое состояние. При этом идущие в ней процессы не имеют характерных размеров и ее *поведение* можно рассматривать как целостное. Подробнее эта тема освещается в работах [1, 2, 9].

Отличной является ситуация сосуществования объектов, распределенных степенным образом, когда система складывается из не имеющих характерного размера частей, то есть *сама* является в некотором смысле целостной. Примеры подобной *масштабной инвариантности состояния* не менее многочисленны, чем примеры масштабной инвариантности динамики.

Так, в наукометрии широко известны имеющие вид (1) с  $\alpha \sim 1$  *закон Брэдфорда* концентрации и рассеяния публикаций, описывающий распределение научных журналов по числу помещенных в них статей определенной тематики, и *закон Лотки* распределения ученых по научной продуктивности [3-6]. Степенной зависимостью описываются также распределения языков по числу выполненных на них научных публикаций ( $\alpha \approx 0.54$ ) [3], имен ученых по частоте встречаемости в наборе учебников по психологии ( $\alpha \approx 1.56$ ) [3], изданий в некоторой области по частоте цитирования ( $\alpha \approx 0.64$ ) [3], разделов универсального десятичного каталога по числу подразделов ( $\alpha = 0.8 \div 1.6$  для различных тем) [4], связанных между собой сотрудничеством групп ученых по их размеру ( $\alpha \approx 1.17$ ) [4] и т.д.

«Именными» степенными законами распределения могут похвастаться также экономика (*закон Парето* распределения граждан по доходам с показателем, меняющимся в диапазоне от единицы до двойки и более в зависимости от страны и исторического периода [3,10]), математическая лингвистика (*закон Эсту-Цинфа* встречаемости различных словоформ в текстах с  $\alpha \approx 1$  [3, 5, 6, 11, 13]) и география (*закон Ауэрбаха* распределения городов по числу жителей с  $\alpha \approx 1$  [3, 10, 12, 17]).

Однако немало СЗРВ осталось безымянными. Из них отметим распределения фирм по числу служащих [3, 10], малых космических тел по массам [10], родов по числу входящих в их состав видов и отрядов по числу семейств [3, 14, 15], также характеризуемые значением показателя, близким к единице.

## 1. Практическая обработка выборок

Несмотря на широкую распространенность степенных распределений в самых различных областях знания, методики, которые позволяли бы с высокой степенью достоверности определить, что же именно мы наблюдаем, практически отсутствуют. Связано это не столько со скудностью имеющихся выборок, сколько со специфическими свойствами систем, описываемых СЗРВ, и самих распределений.

Обсуждение этих вопросов нельзя проводить отвлеченно, необходим конкретный фактический материал, в качестве которого нами было избрано распределение стран, а также крупных населенных пунктов (городов и агломераций<sup>2</sup>) по числу жителей. Анализ этих распределений позволяет обозначить основные препятствия, возникающие на пути изучения масштабно-инвариантных систем, и предложить способы преодоления некоторых из этих препятствий.

### 1.1. Определение параметров распределения

При анализе выборок основная сложность связана с необходимостью выделения области промежуточной асимптотики. Как уже было сказано, отклонение распределений от степенного вида в области больших значений учитывается введением рангового искажения. Однако, чтобы воспользоваться этим обстоятельством, все же необходимо найти величину  $r_0$ . Непосредственное использование для этого формулы (12), как предлагается в работе [3], представляется ошибочным. Поскольку то, что хорошо в теории, не всегда оказывается столь же хорошо на практике.

Даже если предположить, что нам каким-то способом удалось с удовлетворительной точностью определить показатель  $\alpha$ , рассчитанная по формуле (12) величина  $r_0$  все равно не заслуживает доверия. Связано это с тем, что входящие в эту формулу величины  $A$  и  $-$  в особенности  $-m$  сами по себе являются «довольно случайными», что ощутимо сказывается на результатах обработки выборки.

Хотя формально объем выборки  $m$  известен точно, на практике он может быть существенно занижен по сравнению с идеальной ситуацией<sup>3</sup> за счет *отсева* части малых значений, что приводит к завалу зависимости ранг - размер в области больших  $r$  (рис. 1). Отсев может быть обусловлен как ошибками при подготовке выборок или недостаточной точностью измерений, пропускающих часть малых значений, так и свойствами самих систем, по тем или иным причинам дискриминирующих свои малые части.

Так или иначе, но обычно возникает необходимость исключить из

---

<sup>2</sup> «Агломерация - компактная территориальная группировка городских и сельских поселений, объединенная в сложную локальную систему многообразными интенсивными связями..., а также совместным использованием ресурсов данного ареала.» [17]

<sup>3</sup> Под «идеальной ситуацией» понимается результат исследования конкретной системы, точно описываемой степенной зависимостью ранг - размер, при заданной величине минимально измеримого значения.

рассмотрения часть значений, наблюдаемая статистика которых не имеет степенного вида. Удовлетворительным оказался следующий алгоритм сокращения выборки. Из нее последовательно изымаются значения с наибольшим рангом до тех пор, пока величина рангового искажения, полученная при помощи аппроксимации данных зависимостью (8) по методу наименьших квадратов (в логарифмическом представлении), не сравняется со значением, которое дает формула (12).

Необходимо отметить, что описанная процедура не всегда выполнима. Связано это с флуктуациями максимального значения выборки и, соответственно, ее амплитуды  $A$ , что обычно приводит к занижению величины рангового искажения, вычисленной по формуле (12), из-за того, что максимальное значение «слишком» велико<sup>4</sup>. Поэтому вместо формулы (12), которая основывается лишь на максимальном значении выборки, для оценки  $r_0$  уместно использовать усреднение по небольшому числу  $K < 10$  крупнейших значений

$$r_0 = 1/K \sum_{i=1}^K \{ (m-i) / [ (n(r_0+i-1)/n(r_0))^\alpha - 1 ] - i \}. \quad (14)$$

После такой модификации алгоритм определения параметров зависимости ранг - размер сбоев уже не дает. Однако усовершенствование процедуры обработки выборки достигается ценой перехода к двухкритериальной оптимизации. С одной стороны, необходимо охватить степенной зависимостью возможно больший кусок выборки. А с другой - не слишком увеличивать  $K$  из формулы (14), иначе есть риск, что степенная зависимость перестанет быть адекватным описанием.

Может так случиться, что алгоритм выдаст несколько решений, то есть наборов параметров  $r_0$  и  $\alpha$ , полученных при различных  $K$  и различающихся объемом удовлетворительно описываемой части выборки (Парето-оптимум). При этом необходимо как-то выбирать между ними.

Здесь сложно дать какие-либо рекомендации общего порядка. Единственно, необходимо предостеречь от чрезмерного доверия методам определения статистической значимости гипотез, поскольку они не могут служить критериями предпочтения, позволяя лишь отвергать неудовлетворительные гипотезы.

Кроме того, различные аппроксимации одних и тех же экспериментальных данных могут являться не конкурирующими гипотезами, а вариантами одного и того же описания, различающимися учетом тех или иных факторов. А коли так, то выбор между различными решениями должен быть обусловлен нашими представлениями о процессах, действующих в изучаемой системе. А в этом деле, тем более, нельзя полагаться на формальные методы.

Эту ситуацию наглядно демонстрирует рассмотрение зависимости ранг - размер для распределения стран по их населению по состоянию на 1950 и 1989 годы (см. рис. 1). Алгоритм дает два приемлемых решения - при  $K = 1$  (рис. 1, а) и при  $K = 7$  (рис. 1, б). Второй из них описывает почти вдвое большее количество стран и, соответственно, имеет меньшие показатели<sup>5</sup>.

В чем разница между этими решениями?

Степенные ранговые зависимости, представленные на рис. 1, служат отражением масштабно-инвариантных свойств системы народонаселения. Однако масштабно-инвариантное описание есть лишь некоторое приближение, и, по-

<sup>4</sup> «Слишком» мало оно окажется не может потому, что тогда оно уже не будет максимальным.

<sup>5</sup> Это обусловлено наличием в системе народонаселения небольшого числа доминирующих стран. По мере увеличения рассматриваемого куска выборки их относительная доля в нем падает, что компенсируется уменьшением показателя  $\alpha$ .

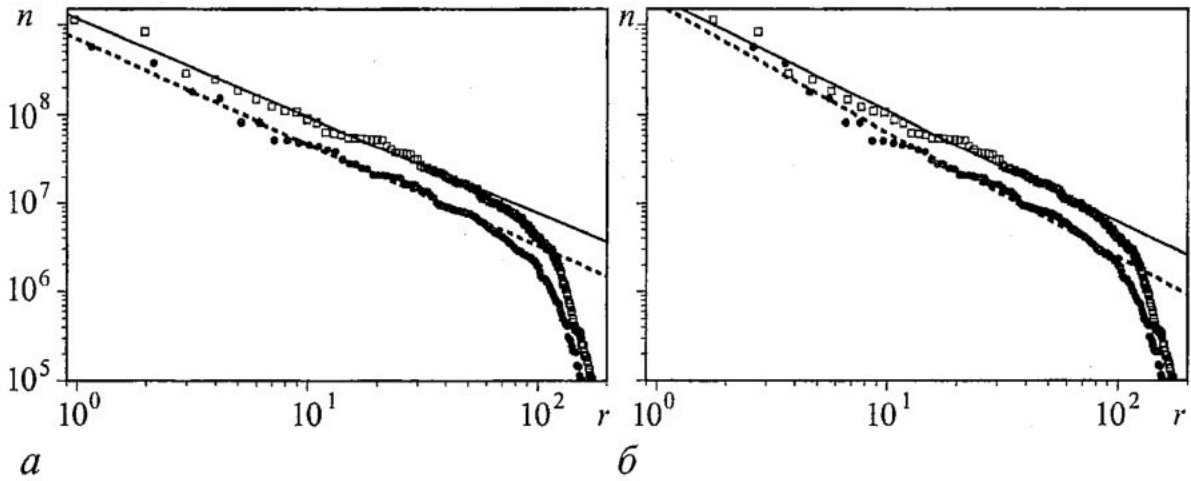


Рис. 1. Зависимость ранг - размер для распределения стран по населению. Зависимость имеет степенной вид на графиках (а) и (б) для пяти-шести десятков и почти сотни крупнейших стран, соответственно. При больших рангах наблюдается отклонение от степенной зависимости. Его можно интерпретировать как «нехватку» небольших стран или как недостаток населения в них. а - 1950:  $r_0=1.15$ ,  $\alpha=0.86$  ( $K=1$ ); 1989:  $r_0=0.97$ ,  $\alpha=0.92$  ( $K=1$ ). б - 1950:  $r_0=2.63$ ,  $\alpha=0.70$  ( $K=7$ ); 1989:  $r_0=1.75$ ,  $\alpha=0.79$  ( $K=7$ ). По данным [18]

видимому, имеется определенный порог, при превышении которого населением страны изменяются механизмы, управляющие ее положением в системе народонаселения.

Зависимости, показанные на рис. 1, а, описывают лишь достаточно крупные страны, попадающие, вероятно, в область действия одних и тех же механизмов, специфичных именно для крупных стран. Рис. 1, б, напротив, дает описание стран в более широком диапазоне численностей населения. Однако при этом проявляются лишь наиболее общие механизмы, значимые на протяжении всего этого диапазона, в результате чего графики получаются менее «опрятными» и точки на них располагаются «волной» (отличительный признак завышенного  $K$ ). С другой стороны, рис. 1, б визуализирует индивидуальные демографические особенности некоторых стран. Так, например, две крупнейшие страны мира (Китай и Индия) заметно выбиваются из общей зависимости, а две следующие по размеру (СССР и США), бывшие в 1950-м еще «на уровне», к 1989 году, напротив, стали отставать.

Таким образом, в случае, когда есть несколько значений  $K$ , при которых получаемая зависимость ранг - размер описывает достаточный кусок выборки, конкретное предпочтение определяется тем, какие свойства изучаемой системы мы хотим учесть.

Справедливости ради необходимо отметить, что рассмотренная ситуация конкуренции нескольких решений не очень типична и в большинстве случаев предложенный алгоритм дает приемлемое описание лишь при каком-то одном значении  $K$ . Кроме того, в многообразии решений есть и свой плюс - разброс получающихся значений показателя распределения может служить некоторой оценкой его погрешности, которая обычно составляет примерно 0.05...0.10.

## 1.2. Проблемы измерений и формирования выборок

Задачи, связанные с обработкой выборок и интерпретацией получаемых результатов, являются в известной мере вторичными. Они решаются уже после того, как определено существо вопроса. Поэтому проблемы, возникающие на этой стадии, сравнительно легко преодолимы.

Основные же сложности кроются на первичной стадии - стадии

формирования выборок и контекста, в рамках которого они должны исследоваться. Возникающие здесь проблемы можно подразделить на связанные с процедурой измерений и с процедурой подготовки выборок.

Первая проблема - *проблема измерений* - обусловлена существенной произвольностью определения размеров измеряемых объектов и разбиения системы на части, которые трактуются как отдельные объекты. При изучении любой сложной системы принципиальным является выделение из огромного множества измеримых величин тех, которые могут адекватно характеризовать данную систему или ее части. Так, например, если границы и население стран известны еще более-менее точно, то корректно определить границы города уже практически невозможно. Соответственно, сложно указать, как измерить число его жителей. В геурбанистике выделяется несколько уровней городских систем: автономный город, городская агломерация, урбанизированный район и зона, мегалополис [17]. Однако эти понятия не имеют строгих самостоятельных (то есть вне иерархии уровней) определений. Конкретные же способы определения границ городских систем и подсчета числа их жителей определяются национальными стандартами, которые во многом произвольны.

Мы не имеем возможности каким-либо образом усовершенствовать определения или процедуру измерения и единственное, что нам остается, - это проанализировать те данные, которые могут предоставить географы и демографы, и посмотреть, что получится.

На рис. 2 приведены зависимости ранг - размер для распределения городов и агломераций, имеющих более ста тысяч жителей. Степенная зависимость, будучи хорошим приближением в обоих случаях, имеет, однако, существенно различные показатели  $\alpha_C=1.28$  и  $\alpha_A=1.08$  (что хорошо видно на рис. 2, графики (а) и (б) которого построены в одном масштабе).

Это обстоятельство можно было бы трактовать как отражение каких-то важных свойств различных уровней городских систем, если бы оно не было артефактом!

Построив зависимость населения агломерации  $n_A$  от населения образующего ее города  $n_C$ , мы видим (рис. 3), что она может быть приближена аллометрическим соотношением

$$n_A \sim n_C^\lambda, \quad (15)$$

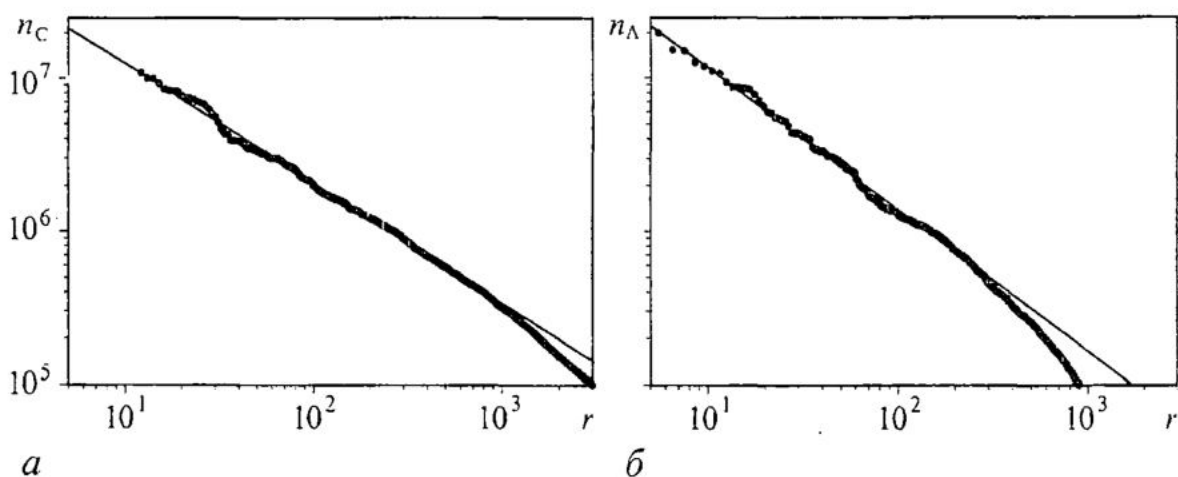


Рис. 2. Зависимость ранг - размер для городов (а) и агломераций (б), насчитывающих свыше 100 тыс. жителей. Степенная зависимость ранг - размер хорошо описывает порядка 30% крупнейших городов и агломераций. а -  $r_0=12.1$ ,  $\alpha_C=1.28$  ( $K=2$ ), объем выборки 2991; б -  $r_0=5.51$ ,  $\alpha_A=1.08$  ( $K=2$ ), объем выборки 892. По сравнению с рис. 1 завал графиков менее выражен, что говорит о значительно меньшей (по сравнению со странами) нехватке небольших городов и агломераций. По данным [19]

где  $\lambda = 0.99 \pm 0.02$ , то есть фактически имеет место прямая пропорциональность

$$n_A = kn_C, \quad (16)$$

с  $k \approx 1.6$ .

Строго говоря, формулы (15) и (16) справедливы лишь по порядку величины или в среднем. Более подробно вопрос о том, как их трактовать, рассматривается в прил. 1. Там же выводится соотношение (П. 1.4) для показателей распределений взаимосвязанных характеристик (население городов и агломераций), с которым найденные значения  $\lambda = 0.99$ ,  $\alpha_C = 1.28$  и  $\alpha_A = 1.08$  находятся в противоречии.

В известной мере прояснить ситуацию позволяет рис. 4, который аналогичен рис. 2 с тем отличием, что для построения последнего использовались данные только по населенным пунктам, для которых в базе [19] приведены численности населения как города, так и агломерации. В этом случае показатели распределений становятся заметно ближе друг к другу, как и должно быть в соответствии с формулой (П. 1.4) при  $\lambda \approx 1$ , то есть противоречие в значительной степени снимается<sup>6</sup>.

Таким образом, полная выборка городов-стотысячников и ее часть, для которой имеется некоторая дополнительная информация, обладают разными статистическими свойствами. Здесь мы сталкиваемся со второй проблемой первичного анализа - *проблемой формирования выборок*. Она является достаточно типичной при описании систем с масштабной инвариантностью состояния.

Рис. 4. Зависимость ранг - размер для тех населенных пунктов, насчитывающих свыше 100 тыс. жителей, для которых одновременно приводится численность населения как города, так и агломерации. На степенную зависимость укладываются не менее двух третей городов и половины агломераций. Объем обеих выборок 663 (тот же массив данных, что и для рис. 3). Параметры графиков: города -  $r_0 = 4.66$ ,  $\alpha_C = 1.10$  ( $K=1$ ); агломерации -  $r_0 = 6.02$ ,  $\alpha_A = 1.01$  ( $K=2$ ). По данным [19]

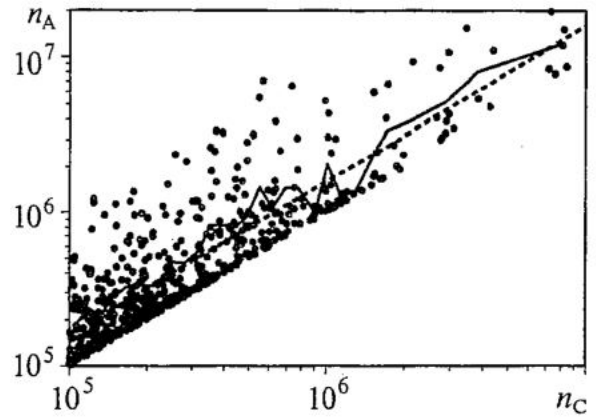
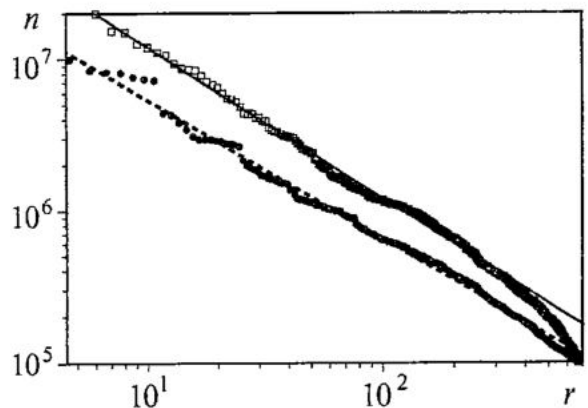


Рис. 3. Зависимость населения агломерации от населения образующего ее города по данным [19]. Хотя разброс точек довольно велик, сглаженная зависимость близка в двойных логарифмических координатах к прямой пропорциональности (показана пунктиром). То есть среднее население агломераций, образуемых городами с определенным населением, можно считать пропорциональным последнему. Отметим отчетливо видимый провал сглаженной зависимости для городов с населением чуть больше и чуть меньше 1 млн. чел. Данное искажение связано с чисто психологическим стремлением «дотянуть» официальное население города до миллионной отметки за счет включения в его черту предместий и городов-спутников. А когда ядро агломерации переваливает за миллион, начинается обратный процесс. Вызванные этим обстоятельством искажения можно обнаружить при внимательном рассмотрении ранговых зависимостей, приведенных на рис. 2, б и рис. 4.



<sup>6</sup> Отметим, что алгоритм обработки выборки дает еще одно приемлемое решение для агломераций при  $K=1$ , имеющее  $\alpha_A = 1.08$ . Хотя оно описывает лишь чуть более трети выборки, если принять его, то соответствие с формулой (П. 1.4) становится отличным.

Так, например, закон Эсту - Циффа выполняется лишь для целых текстов, но не выполняется ни для их фрагментов или объединений, ни для языка в целом [13]. Аналогичные сложности, связанные с формированием выборки, имеют место при описании научной продуктивности ученых [3].

Большой разброс показателей распределения родов по числу входящих в них видов для разных групп организмов, вероятно, обусловлен различиями подходов к классификации, применявшихся разными исследователями [14]. Распределение отрядов по числу семейств для ископаемых организмов характеризуется большими значениями показателя  $\alpha$ , чем для живущих [15], что также может быть обусловлено различиями в методах их классификации.

Еще одним примером может служить приведенная на рис. 5 зависимость ранг - размер для 320 агломераций, население которых в 1996 году превысило 1 млн. жителей, по состоянию на 1995 и 1950 годы.

С точки зрения критерия формирования выборки анализ этих данных для 1950 года является бессмысленным, однако он позволяет наглядно продемонстрировать один из механизмов отсева малых значений. Многие агломерации среднего размера, существовавшие в 1950 году, не попали в выборку на основании критерия, не имеющего прямого отношения к положению дел на тот момент времени. В самом деле, нет никаких оснований при изучении размеров агломераций принимать или не принимать их к рассмотрению, исходя не из их населения, а из его прироста, который произойдет в течение полувека после момента рассмотрения. Здесь ситуация искусственно доведена до абсурда, но в других случаях неадекватность критерия может и не быть столь очевидной.

Необходимо отметить еще одно весьма существенное обстоятельство. Хотя показатели, полученные нами для разных лет, близки (см. рис. 5), при неаккуратном анализе ранговой зависимости, имеющей завал в области больших рангов, возможно завышение показателя  $\gamma$  (занижение  $\alpha$ ), что означает преувеличение роли крупных значений.

Сравнение показателей распределения агломераций, полученных на основе данных из книги [17] и базы [19], не позволяет сделать однозначных выводов.

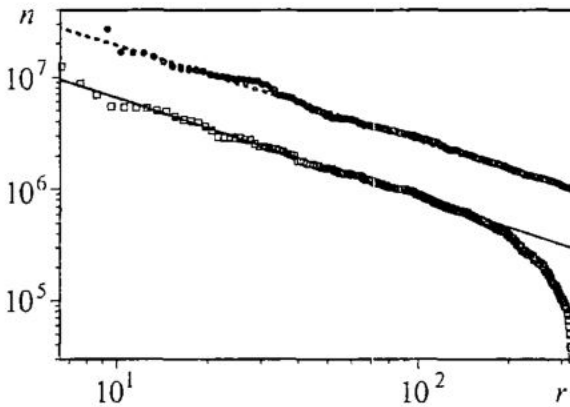


Рис. 5. Зависимости ранг - размер для агломераций, достигших к 1996 г. миллионного рубежа. Зависимость, имеющая степенной вид для данных, относящихся к 1995 г., демонстрирует завал в области малых значений при попытке построить ее для того же самого набора агломераций, но по состоянию на 1950 г. В то время как для 1995 г. степенная зависимость описывает 100% агломераций, для 1950 г. - чуть более 50%. Объем обеих выборок 320. Параметры графиков: 1995 -  $r_0=9.27$ ,  $\alpha=1.18$  ( $K=3$ ); 1950 -  $r_0=6.56$ ,  $\alpha=1.13$  ( $K=5$ ). По данным [17]

С одной стороны, эти показатели нельзя считать в точности совпадающими. Их различие может быть обусловлено как тем, что в первом случае данные приведены к одной дате, а во втором - относятся к разным датам 1960-1995 годов, так и различными оценками численности населения агломераций (отличие порой значительно, - например, население агломерации Токио, согласно данным [17], в 1990 году превышало 25 млн. чел., а по данным [19] к октябрю 1989 - не достигало и 12 млн. чел.).

С другой стороны, несмотря на все эти обстоятельства, описание зависимости ранг - размер степенной функцией в обоих случаях является удовлетворительным, а различие показателей не очень велико. Это, по-видимому, означает, что формирование выборок потенциально является источ-



ником более сильных и разнообразных искажений, чем непосредственно измерения.

Подводя итог обсуждению практической обработки выборок, можно сказать следующее.

Даже если мы имеем корректные определения анализируемых объектов и процедуру измерения, это не служит гарантией того, что мы сформируем выборки, способные служить отражением действующих в изучаемой системе процессов. Неадекватные выборки могут приводить к «открытию» паразитных закономерностей, исключить или выправить которые без ясных теоретических сведений о конкретной системе, вообще говоря, невозможно.

Единственным подспорьем здесь может быть общее представление о том, какие закономерности в принципе возможны в сложных системах и каким образом они возникают. То есть необходимо понимание универсальных механизмов, которые могут действовать в системах любой природы. Подробному анализу одного из таких механизмов, обуславливающего масштабную инвариантность состояния, посвящен раздел 2.

## 2. Линейные модели, приводящие к степенным распределениям

Широкая распространенность СЗРВ в системах различной природы означает, что их возникновение должно быть обусловлено простыми механизмами [1, 2]. По этой причине при теоретическом исследовании уместно отрешиться от любой конкретной специфики и строить схематичные модели, упрощенные настолько, насколько это возможно при сохранении изучаемого явления.

### 2.1. Модель А - простейшие правила

Рассмотрим систему, представляющую собой набор агентов, характеризуемых своим размером  $n$ . На каждом шаге времени в нее извне приходит единица ресурса. С вероятностью  $p$  она становится новым агентом единичного размера, а с вероятностью  $q=1-p$  прилипает к одному из уже имеющихся агентов, который избирается для этого случайно с вероятностью, пропорциональной его размеру (конкуренция за поступающий ресурс).

Сформулированные правила описывают систему, элементы которой взаимодействуют непосредственно с системой в целом, но не друг с другом. Причем сама система, как и входящие в нее агенты, характеризуется лишь своим размером, который равен суммарному размеру всех составляющих ее агентов.

Будем считать, что исходно система пуста и приходящие единицы ресурса «проходят мимо» до тех пор, пока одна из них не становится первым агентом. Для определенности положим, что он появился на нулевом шаге времени. Тогда размер системы к моменту  $t$

$$S(t) = t, \quad (17)$$

а среднее количество агентов в ней

$$m(t) \cong pt. \quad (18)$$

Без потери общности можно считать, что чем раньше появился агент, тем больше его размер. В самом деле, если более молодой агент обгоняет в росте более старого, то в момент равенства размеров они находятся в одинаковых условиях, что позволяет провести переобозначение. Таким образом, ранги агентов однозначно связаны с порядком их возникновения. Среднее время появления агента ранга  $r$  дается формулой

$$t(r) = 1 + (r - r_0)/p, \quad (19)$$

где  $r_0$  - ранг, приписываемый крупнейшему агенту.

Усредненный рост агентов описывается уравнением

$$n(r, t+1) = p_+(r, t) \cdot (n(r, t) + 1) + (1 - p_+(r, t)) \cdot n(r, t) = p_+(r, t) + n(r, t), \quad (20)$$

где  $p_+(r, t) = q \cdot n(r, t) / S(t)$  - вероятность, что именно агенту ранга  $r$  достанется пришедшая в момент времени  $t$  единица ресурса.

При переходе от дискретного времени к непрерывному с учетом формулы (17) уравнение (20) превращается в дифференциальное уравнение

$$dn(r)/n(r) = q dt/t,$$

решение которого, удовлетворяющее условию (19), есть

$$n(r, t) = \{m(t)/[r - (r_0 - p)]\}^q, \quad (21)$$

так как на момент своего появления все агенты имеют единичный размер.

Если положить  $r_0 = p$ , формула (21) превращается в степенную зависимость ранг - размер (8) с  $\gamma = q$ , которая, в свою очередь, переходит при  $p \ll 1$  в закон Ципфа (11). Соответственно, плотность вероятности распределения агентов по размеру описывается формулой (1) с  $\alpha = 1/\gamma = 1 + p/q$ .

Типичный вид ранговых зависимостей, получающихся при компьютерном прогоне модели, представлен на рис. 6. Видно, что зависимость (21), полученная рассмотрением процесса роста в среднем, удовлетворительно описывает его.

Вместе с тем необходимо отметить, что теоретическая зависимость огибает сверху данные, полученные при моделировании. Соответственно, при их усреднении или сглаживании зависимость ранг - размер «приобретает» завал в области больших  $r$ , обусловленный дискретной природой ранжируемой величины.

Отсюда можно сделать вывод, что одной из возможных причин отсева малых значений может служить дискретность. Если дискретность привносится процедурой измерений, то ее можно легко выявить по «ступенькам», пример которых мы можем видеть на рис. 6, и компенсировать при анализе. Если же

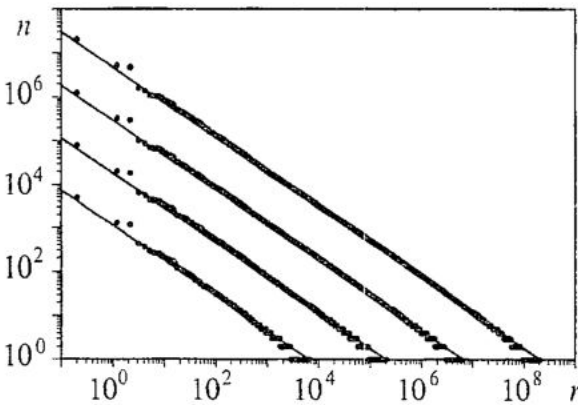


Рис. 6. Результаты прогона модели А с  $p=0.2$ . Полученная зависимость ранг - размер приведена на моменты времени  $t = 2^{15}, 2^{20}, 2^{25}$  и  $2^{30}$  (снизу вверх). Для сравнения приведены также графики теоретической зависимости (21). Отметим, что отклонения экспериментальной зависимости от теоретического вида в области малых  $r$ , возникшие на ранних стадиях, со временем не демонстрируют тенденций к исчезновению

дискретность заключена в природе происходящих в системе процессов (они могут, например, иметь пороговый характер), то для элиминации порожденных дискретностью искажений необходима, вообще говоря, уже специальная обработка выборки типа той, которая была описана в разделе 1.

Завершая рассмотрение модели, остановимся на следующем принципиально важном обстоятельстве. Самоорганизованно критические системы, обладающие масштабно-инвариантной динамикой, состоят из локально взаимодействующих элементов с нелинейными свойствами [1, 2, 9]. Предложенная модель формирования масштабной инвариантности имеет иную природу. Она описывает систему линейных элементов, друг с другом непосредственно не

взаимодействующих. Однако в правила модели изначально заложена целостность системы. Несмотря на «примитивный» характер этой целостности (информация о суммарном размере системы), она все же необходима для возникновения масштабной инвариантности в линейной системе без тонкой подстройки параметров модели.

Отметим, что схожая ситуация имеет место в моделях с когерентным шумом, где воздействие на ансамбль невзаимодействующих нелинейных элементов как на единое целое приводит к масштабной инвариантной динамике [20-22]. Тем не менее, настоящая модель принципиально отличается от моделей с когерентным шумом линейностью элементов.

## 2.2. Временная динамика модели А

Хотя описанные правила быстро приводят систему в состояние, описываемое СЗРВ, ее состояние продолжает меняться со временем, а качественные свойства оказываются вовсе не такими, как можно было бы ожидать на первый взгляд.

Как указывалось выше, величина рангового искажения обыкновенно больше или порядка единицы. Однако для зависимости (21)  $r_0 = p$ , то есть возможна ситуация, когда  $r_0 \ll 1$ .

Кроме того, значение показателя  $\alpha > 1$  означает, что основной вклад в размер системы вносят мелкие агенты. Тем не менее, как следует из формулы (21), размер только одного крупнейшего агента есть  $n_{\max}(t) = n(r_0, t) = t^q$ . Его доля в полном размере системы составляет  $n_{\max}(t)/S(t) = t^{-p}$ , уменьшаясь в  $e$  раз за время  $t^* = e^{1/p}$ .

При  $p \ll 1$  величина  $t^*$  астрономически велика, и на разумных временах имеет место ситуация доминирования одного или нескольких (в зависимости от начальных условий) крупнейших агентов над остальными. Поскольку она не является типичной для реальных масштабных инвариантных систем, в них должны существовать механизмы, направленные против крупных агентов. Таковыми могут быть, например, замедление темпов их роста или даже их исчезновение по причинам истощения ресурса роста, старения и т.п. Модель В, включающая подобный механизм, строится в п. 2.3, а сейчас выведем еще одну формулу, дающую представление о временной динамике модели А.

При анализе ранговых зависимостей иногда рассматривается величина  $r_b = r(n_b)$ , которую, следуя логике данного изложения, уместно именовать *рангом рубежа*. Она разделяет ранжировку на два отрезка, суммы значений в которых равны. По аналогии с формулой (4) для ранга рубежа можно вывести соотношение

$$r_b = (r_0 m)^{1/2} \cdot [\text{ch}((1-\gamma)/2 \cdot \ln(m/r_0))]^{1/(1-\gamma)}, \quad (22)$$

второй множитель в котором неотличим от единицы при  $|1-\gamma|(\lg^2(m/r_0)) \ll 1$ . Если, кроме того,  $r_0 \sim 1$ , то формула (22) переходит в так называемый *закон квадратного корня* [3]

$$r_b \approx m^{1/2},$$

гласящий, что для выборки, описываемой законом Ципфа, количество крупных значений, вносящих половинный вклад в сумму, составляет приблизительно корень квадратный из объема выборки.

Применительно к модели А соотношение (22) можно упростить на основании формул (18) и (21), переписав его в виде

$$r_b/m = 1/t^{1/2} [\text{ch}(p \ln(t^{1/2}))]^{1/p} \cong \begin{cases} 1/t^{1/2} & \text{при } p \lg^2 t \ll 1 \\ 2^{-1/p} & \text{при } p \lg^2 t \gg 1. \end{cases}$$

Таким образом, отношение ранга рубежа к полному количеству агентов в течение долгого времени убывает, асимптотически приближаясь к очень малой, но постоянной величине. С формальной точки зрения это может означать, что на больших временах (в стационарном режиме) основной вклад в среднее и в сумму вносит конечная доля выборки, как и должно быть при  $\alpha > 1$ <sup>7</sup>. Однако эта доля весьма невелика, что является следствием наличия на начальном этапе времени доминирующих агентов и слишком длительного переходного процесса.

Данное обстоятельство служит дополнительным доводом в пользу введения в модель факторов, противодействующих чрезмерному росту крупных агентов и способствующих скорейшему ее выходу на стационарный режим.

### 2.3. Модель В - правила с выбытием

Рассмотрим модификацию модели А такую, что захваченная агентом единица ресурса с некоторой вероятностью  $p' < p/q$  оказывается «смертельной», вызывая его исчезновение.

Выкладки на этот раз проведем в терминах плотности вероятности. Обозначим через  $N(n,t)$  количество агентов размера  $n$  на момент времени  $t$ . Для  $n > 1$  эта величина за один шаг времени в среднем изменяется на

$$\dot{N}(n,t) \cong N(n,t+1) - N(n,t) = -q[N(n,t)n/S(t)] + qq'[N(n-1,t)(n-1)/S(t)], \quad (23)$$

где отношение  $N(n,t)n/S(t)$  определяет вероятность слипания пришедшей единицы ресурса с агентом размера  $n$ , а  $q' = 1 - p'$  - вероятность выживания агента после слипания.

Плотность вероятности распределения агентов по размерам есть не что иное как

$$u(n,t) = N(n,t)/m(t), \quad (24)$$

где  $m(t) = (p - qp')t$ . В стационарном режиме, когда  $u$  не зависит от  $t$ , уравнение (23) сводится с учетом формулы (24) к равенству

$$[u(n)/q] \cdot S(t)/t = -u(n)n + q'u(n-1)(n-1). \quad (25)$$

Поскольку его правая часть не зависит от времени, левая также не должна зависеть. Введя обозначение  $S(t)/t = a$ , окончательно перепишем формулу (25) в виде разностного уравнения относительно  $v_n = u(n)n$

$$a/(qn) = -1 + q'v_{n-1}/v_n. \quad (26)$$

Выразив отношение последовательных значений  $v_n$  как

$$v_{n-1}/v_n = (1/q')[1 + a/(qn)] \approx q'^{n-1}/q^n [(n-1)/n]^{-a/q},$$

<sup>7</sup> При  $\alpha < 1$ , как следует из формулы (22),  $r_b \sim r_0$  на больших временах, то есть ранг рубежа не меняется с увеличением  $t$  (конечно в области применимости формулы (1)), а отношение  $r_b/m$ , соответственно, неограниченно убывает.

легко находим решение уравнения (26), а следовательно, и выражение для плотности вероятности при  $n \gg 1$

$$u(n) = Bn^{-(1+\alpha)}e^{-\beta n}, \quad (27)$$

где  $\beta = -\ln q'$  и  $\alpha = a/q$ , а  $B$  - нормировочный коэффициент.

Как следует из формулы (27), при  $\beta n \ll 1$  распределение агентов имеет степенной вид. Явное выражение  $\beta$  через параметры модели позволяет свести обработку результатов моделирования к определению параметров линейной зависимости, что продемонстрировано на рис. 7.

С другой стороны, показатель может быть найден на основе данных о скорости роста системы как  $\alpha = S(t)/qt$  (см. врезку на рис. 7). При компьютерном моделировании сложных систем всегда существует риск возникновения ошибок, вызванных недостаточным для установления стационарного режима временем моделирования. Наличие двух независимых оценок  $\alpha$  позволяет если и не избежать подобных ошибок, то, по крайней мере, выявить их.

Компьютерное моделирование показывает, что распределение агентов действительно может быть описано формулой (27). Для полноты картины осталось связать входящие в нее величины  $\alpha$  и  $B$  с параметрами модели.

Аналитическое определение нормировочного коэффициента  $B$  затруднено, поскольку нормировочный интеграл  $\int u(n)dn$  набирает свое значение в области малых значений  $n$ , где формула (27) неточна. Вытекающая из нее грубая оценка  $B \approx \alpha$  вряд ли может быть улучшена.

В отличие от нормировочного коэффициента, конкретная величина которого принципиального значения не имеет, показатель  $\alpha$  является основной характеристикой распределения, поэтому мы приводим для него выкладки, несмотря на их громоздкость.

Размер системы  $S$  удовлетворяет (в среднем) уравнению

$$\dot{S}(t) \approx S(t+1) - S(t) = (1 - qp') - qp' \sum_n [N(n,t)n/S(t)]n = 1 - qp'(1 + Scn),$$

где  $Scn = \langle n^2 \rangle / \langle n \rangle$  - масштаб агентов [1, 2, 23], а  $\langle n \rangle = S(t)/m(t)$  - их средний размер. Как было указано выше,  $S(t) = at = \alpha qt$ . Следовательно,

$$\alpha q = 1 - qp'(1 + Scn), \quad (28)$$

что дает выражение, связывающее показатель распределения с масштабом.

С другой стороны, величина масштаба может быть рассчитана непосредственно на основе формулы (27). Вычислим для этого его  $i$ -й момент распределения

$$\langle n^i \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n^i u(n) \approx \int_{n_0}^{\infty} u(n) n^i dn = \int_0^{\infty} u(n) n^i dn - \int_0^{n_0} u(n) n^i dn. \quad (29)$$

Введение нижнего предела  $n_0 \sim 1$  при переходе от суммирования к интегрированию

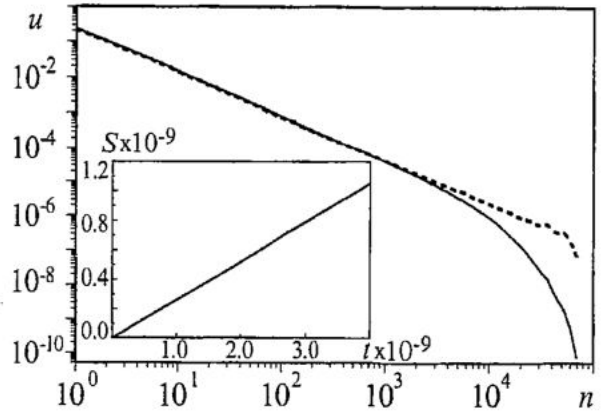


Рис. 7. Результаты моделирования при  $p=10^{-3}$  и  $p'=10^{-4}$ . Моделирование проводилось до достижения системой размера  $S=2^{30} \approx 1.07 \cdot 10^9$ , что при данных параметрах потребовало  $t \approx 4.05 \cdot 10^9$  шагов. Пунктиром показана экспериментальная плотность вероятности, домноженная на  $e^{\beta n}$ . Видно, что эта функция имеет в двойных логарифмических координатах линейный вид, как и следует из формулы (27). Показатель  $\alpha = 0.265 \pm 0.005$ . На врезке дана зависимость размера системы от времени

учитывает дискретность величины  $n$ . После подстановки плотности вероятности (27) в формулу (29) первый интеграл в ней вычисляется точно, а во втором можно пренебречь экспоненциальным множителем, что дает

$$\langle n^i \rangle \sim \beta^{\alpha-i} \cdot \Gamma(i-\alpha) - n_0^{i-\alpha} / (i-\alpha),$$

откуда окончательно получаем

$$Scn = \frac{1-\alpha}{\beta} \cdot \frac{1 - (\beta n_0)^{2-\alpha} / \Gamma(3-\alpha)}{1 - (\beta n_0)^{1-\alpha} / \Gamma(2-\alpha)} \approx \frac{1-\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{1 - \beta^{1-\alpha} / \Gamma(2-\alpha)}. \quad (30)$$

При  $\beta \ll 1$  поправкой в числителе можно пренебречь, в то время как поправка, входящая в знаменатель, оказывается существенной при  $\alpha$ , близких к 1, даже для малых  $\beta$ , так как  $\beta$  возводится в степень, близкую к нулю (по этой же причине можно пренебречь и возможным отклонением  $n_0$  от 1).

Система уравнений (28) - (30) в общем случае слишком сложна для аналитического исследования. Ее приближенное исследование при  $p' \ll 1$  дается в прил. 2, а численные решения изображены сплошными линиями на рис. 8. На этом рисунке приведены также результаты моделирования при различных  $p$  и  $p'$ , полученные на момент достижения системой размера  $S = 2^{30}$ .

Поскольку при достаточно малых  $p$  и  $p'$  система даже на столь больших временах не демонстрировала выхода на стационар, было применено итерирование. В качестве начального состояния для последующих итераций устанавливался набор агентов общей суммой  $S_0 = 2^{24}$  (против  $S_0 = 1$  для первой итерации), размеры которых выбирались из распределения, найденного в результате предыдущей итерации. Для получения приведенных результатов потребовалось от одной до трех итераций в зависимости от значений  $p$  и  $p'$ .

Анализ результатов, приведенных на рис. 8, и выкладки из прил. 2 позволяют сделать следующие выводы.

- Как и следовало ожидать, при фиксированном  $p$  и  $p' \rightarrow 0$  модель В переходит в модель А, имеющую показатель  $\alpha = 1 + p/q$ ;
- При фиксированном  $p'$  показатель распределения монотонно уменьшается по мере приближения  $p$  к  $p'$ .

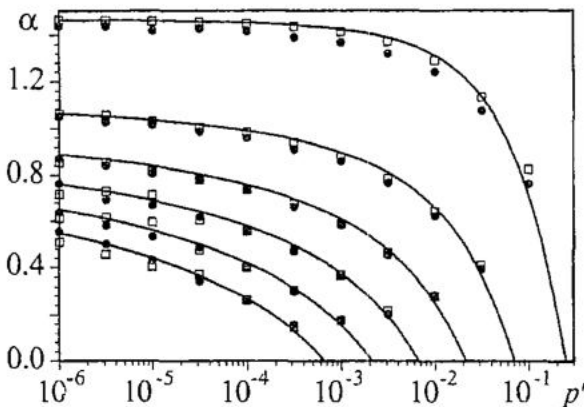


Рис. 8. Значения показателя  $\alpha$  в зависимости от вероятностей  $p$  и  $p'$ . Кружочками показаны значения, полученные на основе результатов компьютерного моделирования при анализе плотности вероятности с помощью формулы (27), а квадратиками - из зависимости  $S(t)$ . Сплошные линии - теоретическая зависимость. Графики (снизу вверх) соответствуют значениям  $p=0.001, 0.0032, 0.01, 0.032, 0.1$  и  $0.32$

Таким образом, несмотря на то, что при  $p' = 0$  модели А и В идентичны, при сколь угодно малом, но ненулевом  $p'$  их свойства оказываются принципиально различны. В то время как модель А дает СЗРВ с  $\alpha > 1$ , модель В может иметь  $\alpha \ll 1$  при близких  $p'$  и  $p$ . При этом диапазон значений, описываемый степенным законом распределения, который определяется условием  $\beta n \ll 1$ , может быть сколь угодно расширен путем уменьшения  $p'$ .

## 2.4. Линейный рост. Общий анализ

Как уже отмечалось выше, правила рассматриваемых моделей линейны. Так, например, для модели А рост агентов описывается (в среднем) уравнением

$$\dot{n} = f(t, n),$$

правая часть которого  $f(t, n) = qn/t$  - линейна по  $n$ , а количество агентов  $m(t)$  задается формулой (18).

Рассмотрим случай произвольных функций  $f(t, n)$  и  $m(t)$ .

Количество агентов размером  $n > 1$  подчиняется уравнению неразрывности

$$N_i + (fN)_n = 0. \quad (31)$$

В стационарном режиме плотность вероятности  $u$  не зависит от времени. Подстановкой  $N(n, t) = m(t)u(n)$  уравнение (31) сводится к

$$-(fu)_n / u = \dot{m}/m. \quad (32)$$

Решение уравнения (32)

$$u(n) \sim 1/f(n, t) \exp\{-\dot{m}/m \int dn'/f(n', t)\}$$

в случае линейного роста с  $f(n, t) = n \cdot g(t)$  представляет собой СЗРВ (1) с показателем

$$\alpha = \dot{m}/(mg) \quad (33)$$

(разумеется, при условии, что эта комбинация не зависит от времени, - в противном случае стационарная плотность вероятности может не иметь степенного вида или даже не существовать вовсе).

Таким образом, показатель распределения при линейном росте может принимать, вообще говоря, произвольное положительное значение, определяемое соотношением скоростей появления новых агентов и роста уже имеющихся. Процессы появления и роста агента являются противоположенными в том смысле, что первый усиливает роль мелких агентов, а второй - крупных. Значение  $\alpha = 1$ , которое дает модель А при  $p \rightarrow 0$ , соответствует балансу этих процессов.

Отметим, что отражающая целостность системы информация ее размере существенна для получения  $\alpha \sim 1$ . В противном случае говорить о масштабной инвариантности не приходится, поскольку при  $\alpha \gg 1$  распределение будет практически неотличимо от нестепенного, а при  $\alpha \ll 1$  - от равномерного. Однако для ансамбля агентов, рост и появление которых описываются произвольными функциями  $g(t)$  и  $m(t)$ , шансы на то, что отношение (33) окажется порядка единицы (даже если оно будет постоянным), не больше, чем шансы, что управляющий параметр сложной системы случайно окажется в окрестности критической точки. Поэтому для возникновения масштабной инвариантности необходима либо искусственная подстройка отношения (33) к значению, близкому к единице, либо прямое согласование скоростей процессов появления и роста агентов через информацию о полном размере системы.

Схожим образом устроены самоорганизованно критические системы, где вместо подстройки управляющего параметра к *a priori* неизвестному критическому значению производится установка параметра порядка в +0 [1, 2, 24]. Для этого не требуется никакая дополнительная информация, что отличает самоорганизованно критичное поведение от линейного роста в целостной системе. Разница между ними состоит также в том, что при линейном росте значение показателя распределения можно без труда варьировать, в то время как самоорганизованно критические системы являются грубыми и произвольное изменение их параметров обыкновенно не приводит к изменению показателя [1, 2, 9, 25].

Наряду с определением вида плотности вероятности по заданной функции  $f$  интерес представляет рассмотрение обратной задачи: какова должна быть эта функция, чтобы плотность вероятности имела определенный вид? Для случая  $u(n) \sim n^{-(1+\alpha)}$  на основании формулы (32) легко находим общий вид функции

$$f(t, n) = (\dot{m}/m) \cdot (n/\alpha) + c(t) \cdot n^{1+\alpha}, \quad (34)$$

где  $c(t)$  - произвольная функция времени. Отметим, что при  $\alpha=1$  правая часть формулы (34) представляет собой полином и может рассматриваться как два первых члена разложения произвольной функции от  $n$  по степеням аргумента. Данное обстоятельство является дополнительным доводом в пользу «особенности» случая  $\alpha=1$ .

### Обсуждение и выводы

Одной из основных числовых характеристик масштабно-инвариантного поведения являются показатели степенных распределений. Преимущественный интерес представляет ситуация, когда показатель не превышает двойки. В противном случае принципиальных отличий между статистическими свойствами величин, подчиняющихся такому степенному распределению и быстро убывающим нестепенным распределениям, нет.

Случайную величину, не имеющую характерного значения, можно также характеризовать областью значений, вносящих доминирующий вклад в сумму (среднее). При показателе, меньшем единицы, доминируют крупные значения выборки, а при большем - мелкие. Введенная в работе величина рубежа, разделяющего диапазон значений на части, вносящие равный вклад в сумму, может здесь служить ориентиром.

На практике вместо распределений вероятностей часто используются зависимости ранг - размер, менее требовательные к объему выборок. Кроме того, для точного определения показателя распределения необходимо выделение области промежуточной асимптотики, где только и применимо степенное описание. А если размер этой области невелик, то существенным становится знание о том, как именно нарушается степенной вид плотности вероятности при очень больших значениях. Ранговый подход дает возможность обойти эти препятствия, сосредоточив всю важную информацию о нестепенном поведении распределения в одном числе - величине рангового искажения.

Менее очевидной является ситуация с отсевом малых значений, приводящим к нестепенному виду функции распределения и ранговой зависимости на другом конце диапазона значений. Предложенный в работе алгоритм обработки выборок позволяет эту ситуацию удовлетворительно разрешить. Однако при этом иногда получается несколько решений, имеющих различные показатели и описывающих различные объемы данных. В этом случае окончательный выбор может основываться только на конкретных сведениях о рассматриваемой системе.

Изучение сложных масштабно-инвариантных систем затрудняется также проблемами измерений и формирования выборок, заключающимися в отсутствии формальных критериев, определяющих, соответственно, размеры и границы измеряемых объектов и правила отбора данных. Следствием этого может явиться ошутимое искажение результатов - вплоть до ошибок в величине показателей.

Помочь здесь могут только общетеоретические представления о механизмах, действующих в системах, демонстрирующих масштабную инвариантность состояния. Их общей чертой является конкурентный рост, при котором увеличение размеров отдельных частей системы - агентов - представляет собой результат дележа общего прироста размеров системы или перераспре-



деления между агентами долей участия в системе, если ее размер постоянен. В первом случае рост происходит тем быстрее, чем больше уже достигнутый размер, а во втором - чем больше контролируемая агентом доля системы, тем больше он сможет отобрать у конкурентов в дальнейшем. Так, рост населения городов или стран представляет собой часть глобального демографического процесса, а распределение граждан по доходам или фирм по числу служащих формируется в результате рыночной конкуренции. Однако в большинстве случаев выбор между этими вариантами - лишь вопрос трактовки. Например, изменение объема тематических разделов научных журналов можно рассматривать и как часть процесса увеличения числа тем вследствие общего развития науки, и как конкуренцию между различными ее областями.

В любом случае, наличие во многих системах связи между размером ее частей и перспективами их развития не вызывает сомнений. Как показывает проведенный анализ, для возникновения степенных распределений достаточно, чтобы эта связь носила характер прямой пропорциональности (мальтузианский рост), хотя возможны и более сложные зависимости. Существенным, однако, является также постоянное появление новых мелких агентов.

В построенных моделях линейного роста предполагается, что коэффициент пропорциональности между скоростью роста и размером одинаков для всех агентов. Это, вообще говоря, не так, и иногда имеет место ситуация, когда агенты одинакового размера растут с различной скоростью. При этом систему можно разбить на группы агентов, существующих как бы в разное время (для одних оно может идти быстрее, для других - медленнее, а для третьих - и вовсе останавливаться). Однако темп времени не оказывает влияния на показатель распределения, который определяется лишь отношением скоростей появления новых агентов и роста имеющихся, но не их абсолютными значениями. Если это отношение будет различным для различных временных групп, то окажется невозможным установление стационарного вида плотности вероятности, а если одинаковым - то их наличие не скажется на величине показателя. Таким образом, сделанное упрощение, по-видимому, является вполне законным.

Введение в модель механизма выбытия агентов, действующего также по линейным правилам, помимо ускорения процесса ее выхода на стационар, оказывает влияние на показатель. Парадоксальным является то, что увеличение вероятности гибели агента приводит к уменьшению показателя, то есть к увеличению роли крупных агентов, против которых в первую очередь и направлен механизм выбытия.

Чтобы линейные правила приводили к масштабной инвариантности, необходима их дополнительная настройка, ориентированная именно на целостные свойства системы. В рамках предложенных моделей она осуществляется естественным образом через информацию о полном размере системы (мы назначаем каждому агенту именно такие вероятности захвата проходящих частичек ресурса, чтобы имел место баланс между ростом и появлением агентов). В то же время, нелинейные правила самоорганизованно критических систем, как это следует из самого их названия, не требуют никакой настройки для возникновения масштабной инвариантной динамики.

Самопроизвольное появление целостных свойств возможно только в нелинейных системах, но, как показывает данная работа, линейным системам не хватает для этого совсем чуть-чуть.

В заключение пользуюсь приятной возможностью поблагодарить Г.Г. Малинецкого за плодотворное обсуждение и помощь при подготовке настоящей статьи, а также В.А. Шупера, А.И. Ноарова и Ю.А. Данилова за консультации по ряду важных вопросов.

**Связь показателей**

Пусть есть две произвольные характеристики  $x$  и  $y$  одного и того же явления. Их плотности вероятностей связаны соотношением

$$p_y(y) = \int p(y|x) \cdot p_x(x) dx, \quad (\text{П.1.1})$$

где  $p(y|x)$  - условное распределение  $y$  при данном  $x$ .

Если между величинами  $x$  и  $y$  имеется функциональная зависимость, то  $p(x|y) = \delta(y(x) - y)$  и соотношение (П.1.1) сводится к формуле  $p_y(y) dy = p_x(x) dx$ , по сути означающей, что при переходе от одной характеристики к другой должна сохраняться вероятность. Однако характеристики сложных систем обычно связаны между собой лишь вероятностным образом, что не позволяет при строгом рассмотрении пользоваться этой формулой (хотя даже она в некоторых случаях приводит к верным результатам).

В масштабно-инвариантных системах величины  $x$  и  $y$  подчиняются СЗРВ с некоторыми показателями  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$ , соответственно. При этом запись условного распределения также не должна содержать характерных значений, что ограничивает его общий вид функцией

$$p(y|x) = x^{-\lambda} f(yx^{-\mu}). \quad (\text{П.1.2})$$

В случае произвольности рассматриваемых характеристик, по-видимому, нельзя сделать больше никаких утверждений относительно вида функции  $p(y|x)$ . Однако ситуация меняется, если мы предполагаем наличие взаимной связи между  $x$  и  $y$ , выражающееся в существовании некоторой функциональной комбинации  $z = z(x, y)$ , условное распределение которой

$$p(z|x) = g(z)$$

не зависит от  $x$ . Тогда дифференциал условной вероятности есть

$$g(z) dz = p(z|x) dz = p(y|x) dy = f(yx^{-\mu}) d(yx^{-\lambda}),$$

что возможно лишь при выполнении равенства  $z = h(yx^{-\lambda})$ , где  $h$  - некоторая функция, и  $\lambda = \mu$ . При этом условное среднее есть

$$\langle y(x) \rangle = \int y \cdot p(y|x) dy \sim x^\lambda, \quad (\text{П.1.3})$$

что проясняет смысл показателей в формуле (П.1.2) и позволяет переписать ее в более наглядной форме

$$p(y|x) \sim f(y/\langle y(x) \rangle) / \langle y(x) \rangle.$$

Подставив условное распределение (П.1.2) в формулу (П.1.1)

$$y^{-(1+\alpha_y)} \sim \int x^{-\lambda} (yx^{-\lambda}) \cdot x^{-(1+\alpha_x)} dx \sim y^{-(\lambda+\alpha_x)/\lambda},$$

окончательно получаем формулу

$$\lambda = \alpha_x / \alpha_y. \quad (\text{П.1.4})$$

Соотношение (П.1.4), связывающее показатели распределений и условного среднего, в известной степени узаконивает использование аллометрических соотношений или сглаженных зависимостей для вероятностно связанных величин.

**Приближенное вычисление показателя для модели В**

При  $p' \ll 1$  можно пренебречь разницей между  $p'$  и  $\beta$ . Тогда система (28)-(30) сводится к уравнению

$$\Gamma(1 - \alpha)/\beta^{1-\alpha} = 1/(1-\alpha) + 1/\epsilon, \tag{П.2.1}$$

где величина  $\epsilon = p/q - \beta$  характеризует разность скоростей образования и гибели агентов.

При  $\beta \rightarrow 0$  модель В должна переходить в модель А, имеющую  $\alpha > 1$ . При этом левую часть уравнения (П.2.1) можно положить равной нулю и оно сводится к

$$\alpha \approx 1 + \epsilon, \tag{П.2.2}$$

что, естественно, совпадает со значением показателя для модели А.

Если  $\alpha \sim 1$ , то положив  $x = 1 - \alpha$ , перепишем уравнение (П.2.1) в виде

$$\beta^{-x}\Gamma(1+x) = 1 + x/\epsilon.$$

Воспользовавшись разложением для логарифма гамма-функции

$$\ln\Gamma(1+x) = -Cx + \frac{\pi^2}{12}x^2 + \dots$$

(где  $C \approx 0.577\dots$  - постоянная Эйлера), находим

$$\alpha = 1-x \approx 1 - [1/\epsilon + C + \ln\beta]/[1/2\epsilon^2 + \pi^2/12]. \tag{П.2.3}$$

В случае  $\alpha \ll 1$  решение уравнения (П.2.1) находится разложением по степеням  $\alpha$  до линейного члена и имеет вид

$$\alpha = (1 - \beta/\epsilon)/[\ln(1/\beta) - C]. \tag{П.2.4}$$

Необходимо отметить, что, хотя при  $p < 2\beta$  решение (П.2.4), очевидно, становится неудовлетворительным, оно, тем не менее, дает адекватное представление о поведении показателя. Приближение  $p$  к  $p'$  приводит к уменьшению  $\alpha$  до нуля.

В исследованном диапазоне значений  $p$  и  $p'$  (см. рис. 8) отклонение лучшей из аппроксимаций (П.2.2), (П.2.3) и (П.2.4) от решения системы (28) - (30) не превышает 15%.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №01-01-00628) и РГНФ (проект № 99-03-19696).*

**Библиографический список**

1. Подлазов А.В. Самоорганизованная критичность и анализ риска // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т.9, № 1. С. 49.
2. Владимиров В.А., Воробьев Ю.Л. и др. Управление риском: риск, устойчивое развитие, синергетика (Сер. Кибернетика: Неограниченные возможности и возможные ограничения). М.: Наука, 2000. 431 с.
3. Хайтун С.Д. Наукометрия. Состояние и перспективы. М.: Наука, 1983. 279 с.
4. Хайтун С.Д. Проблемы количественного анализа науки. М.: Наука, 1989. 280 с.

5. Петров В.М., Яблонский А.И. Математика и социальные процессы: Гиперболические распределения и их применение (Сер. Математика и кибернетика). М.: Знание, 1980. 64 с.
6. Яблонский А.И. Математические модели в исследовании науки. М.: Наука, 1986. 352 с.
7. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения (Сер. Теория вероятностей и математическая статистика). М.: Наука, 1983. 304 с.
8. Золотарев В.М. Устойчивые законы и их применения (Сер. Математика и кибернетика, № 11). М.: Знание, 1984. 64 с.
9. Bak P. How nature works: the science of self-organized criticality. Springer-Verlag, New York, Inc. 1996.
10. Трубников Б.А. Закон распределения конкурентов // Природа. 1993. Т.11. С. 3.
11. Пиотровский Р.Г., Бектаев К.Б., Пиотровская А.А. Математическая лингвистика. М.: Высш. школа, 1977.
12. Хаггет П. География: синтез современных знаний. М.: Прогресс, 1979.
13. Орлов Ю.К. Невидимая гармония // Сб. Число и мысль. Вып. 3. М.: Знание, 1980. С. 70.
14. Burlando B. The fractal dimension of taxonomic systems// J. Theor. Biol. 1990. Vol. 146. P. 99.
15. Burlando B. The fractal geometry of evolution// J. Theor. Biol. 1993. Vol. 163. P. 161.
16. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М.: Мир, 1967. 752 с.
17. Пивоваров Ю.Л. Основы геоурбанистики. Урбанизация и городские системы. М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999. 232 с.
18. Rank Countries by Population. <http://www.census.gov/ipc/www/idbrank.html>
19. Demographic Yearbook. Capital cities and cities of 100,000 and more inhabitants. <http://www.un.org/Depts/unsd/demog/index.html>
20. Newman M.E.J., Sneppen K. Avalanches, scaling and coherent noise// Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 6, p.6226-6231. <http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9606066>
21. Newman M.E.J. Self-organized criticality, evolution and the fossil extinction record// Proc. R. Soc. London B. 1996. Vol.263. P. 1605. <http://xxx.lanl.gov/abs/adap-org/9607002>
22. Sneppen K., Newman M.E.J. Coherent noise, scale invariance and intermittency in large systems // Physica D. 1997. Vol. 110, № 3-4. P. 209. <http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9611229>
23. Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В. Парадигма самоорганизованной критичности. Иерархия моделей и пределы предсказуемости// Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т.5, № 5. С. 89.
24. Sornette D., Johansen A., Dornic I. Mapping self-organized criticality onto criticality. J. Phys. I (France). 1995. Vol. 5. P.325.
25. Подлазов А.В. Модель гекатонхейров освобождения поверхности и мягкая универсальность в теории самоорганизованной критичности// Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т.7, № 6. С. 3.

Институт прикладной  
математики РАН

Поступила в редакцию 13.12.01

# COMPETITORS' PROBABILITY DISTRIBUTION LAW, STATE SCALE INVARIANCE AND LINEAR GROWTH MODELS

*A.V. Podlasov*

The scale invariance is one of the distinguishers of the holistic behavior. Self-organized critical systems and systems with coherent noise giving examples of the scale invariance consist of essentially nonlinear elements. On the contrary, linear growth models with scale invariant properties are formulated in the paper.

Since the wholeness can't arise from linear schemes, it is initially included in the rules of the proposed models by means of using the information about the cumulative characteristics of the system. The presence of such «seed of the holistic properties» is quite enough for the distribution of system parts sizes to be power-law.

Besides that the questions of statistical samples processing for the construction of rank dependences, the analysis of the role of their parameters and the qualitative properties of systems described by power law probability distributions are considered in the paper.



*Подлазов Андрей Викторович* - родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996), к.ф.-м.н. В настоящее время работает в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Область научных интересов - нелинейная динамика, теория самоорганизованной критичности, математическая история, теоретическая демография, теория управления риском. E-mail: Tiger@Keldysh.ru



## **СОПРЯЖЕННЫЕ РЕЗОНАНСЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ ДВУЧАСТОТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ. ВИБРОИНДУЦИРОВАННЫЕ БИФУРКАЦИИ**

*И.И. Блехман, П.С. Ланда*

На примере бистабильного осциллятора, описываемого уравнением Дуффинга, рассматриваются резонансы при возбуждении бигармонической внешней силой с существенно различающимися частотами. Показано, что эти резонансы являются сопряженными: они возникают как при изменении низкой частоты, так и при изменении высокой. Резонансы имеют место также при изменении амплитуды высокочастотного возмущения. Кроме того показано, что высокочастотное воздействие индуцирует бифуркацию изменения числа устойчивых состояний в системе, причем кажущийся резонанс в так называемом передемпфированном осцилляторе обусловлен именно этой бифуркацией.

В работе [1] численно было показано, что высокочастотное воздействие на бистабильную систему существенно изменяет ее свойства, приводя к появлению своеобразных «резонансов» даже в передемпфированной системе, где никаких резонансов вообще быть не должно. Такие резонансы получили название вибрационных. По своей природе они подобны широко известному стохастическому резонансу (см., например, [2]), где роль высокочастотного воздействия играет шум. Появление таких резонансов обусловлено не совпадением частоты сигнала с частотой флуктуационных переходов из одного устойчивого состояния в другое, как до сих пор предполагается многими исследователями [2], а изменением эффективной жесткости системы [3].

В настоящей работе указанные эффекты исследуются теоретически путем использования метода прямого разделения движений и подхода вибрационной механики [4]. С точки зрения такого подхода рассматриваемые эффекты являются частным проявлением общего свойства нелинейных систем, заключающегося в том, что высокочастотное воздействие может значительно изменять их реакцию на медленные воздействия. Показано, что теоретические результаты находятся в хорошем согласии с результатами численного счета, заимствованными из работы [1].

# 1. Вибрационные резонансы в бистабильном осцилляторе с малым затуханием

Рассмотрим простейший бистабильный осциллятор, описываемый уравнением Дуффинга

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} - x + x^3 = A\cos\omega t + C\cos(\Omega t + \theta), \quad (1)$$

где  $A\cos\omega t$  - низкочастотный сигнал;  $C\cos(\Omega t + \theta)$  - высокочастотное воздействие;  $A, C, \delta, \omega, \Omega$  - постоянные величины.

Двухчастотное воздействие на слабо нелинейный осциллятор рассматривалось в значительном числе работ; сошлемся, в частности, на [5, 6, 7]. Однако изучаемые здесь эффекты в этих работах не были обнаружены.

Как уже отмечалось, в данной работе мы воспользуемся для решения уравнения (1) методом прямого разделения движений [4]. Согласно этому методу при  $\Omega \gg 1$  решение уравнения (1) разыскивается в форме

$$x = X(t) + \Psi(t, \Omega t), \quad (2)$$

где  $X(t)$  - переменная, описывающая медленное движение, а  $\Psi(t, \Omega t)$  -  $2\pi$ -периодическая функция быстрого времени  $\tau = \Omega t$  с нулевым средним значением по этому аргументу, то есть

$$\overline{\Psi(t, \tau)} \equiv 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} \Psi(t, \tau) d\tau = 0. \quad (3)$$

Здесь черта сверху означает усреднение за период  $2\pi$  по аргументу  $\tau = \Omega t$ .

Принимая во внимание (3), для функций  $X(t)$  и  $\Psi(t, \Omega t)$  получаем следующую систему уравнений:

$$\ddot{X} + 2\delta\dot{X} - X + X^3 + 3\overline{\Psi^2}X + \overline{\Psi^3} = A\cos\omega t, \quad (4)$$

$$\ddot{\Psi} + 2\delta\dot{\Psi} - \Psi + 3X^2(\Psi - \overline{\Psi}) + 3X(\Psi^2 - \overline{\Psi^2}) + \Psi^3 - \overline{\Psi^3} = C\cos(\Omega t + \theta). \quad (5)$$

Уравнение быстрых движений (5) можно решать приближенно, не внося существенной погрешности в решение уравнения (4) для медленных движений. Здесь при решении этого уравнения мы ограничимся так называемым чисто инерционным приближением [4], которое справедливо при  $\Omega \gg 1$ . В этом приближении всеми членами в левой части уравнения (5), кроме первого, можно пренебречь. Тогда периодическое решение этого уравнения будет иметь вид

$$\Psi = - (C/\Omega^2)\cos(\Omega t + \theta). \quad (6)$$

Следует отметить, что решение (6) может значительно отличаться от точного. Тем не менее, оно позволяет получить как качественную, так и довольно близкую количественную картины исследуемого явления.

Подставив (6) в уравнение (4), получим следующее приближенное уравнение медленных движений:

$$\ddot{X} + 2\delta\dot{X} + [3/2(C/\Omega^2)^2 - 1]X + X^3 = A\cos\omega t. \quad (7)$$

Уравнение (7) позволяет найти новые положения равновесия системы, относительно которых совершаются медленные колебания. При

$$3/2(C/\Omega^2)^2 < 1 \quad (8)$$

система имеет два таких положения равновесия

$$X_{1,2} = \pm [1 - \frac{3}{2} (C/\Omega^2)^2]^{1/2}, \quad (9)$$

а при

$$\frac{3}{2} (C/\Omega^2)^2 > 1 \quad (10)$$

- только одно  $X=0$ . Таким образом, высокочастотные колебания индуцируют в системе бифуркацию, состоящую в уменьшении числа устойчивых состояний равновесия с двух до одного.

Вначале предположим, что выполняется условие (8), и запишем уравнение для отклонения от одного из положений равновесия  $X_{1,2}$ . Вводим переменную  $Y = X - X_{1,2}$  и получаем следующее уравнение для  $Y$ :

$$\ddot{Y} + 2\delta\dot{Y} + 2[1 - \frac{3}{2} (C/\Omega^2)^2]Y + Y^3 + 3X_{1,2}Y^2 = A\cos\omega t. \quad (11)$$

Отсюда видно, что резонансная частота системы

$$\omega_r = \omega_{r1} = \{2[1 - \frac{3}{2} (C/\Omega^2)^2]\}^{1/2} \quad (12)$$

при увеличении амплитуды  $C$  от 0 до значения  $C_0 = (\frac{2}{3})^{1/2}\Omega^2$  должна уменьшаться по параболическому закону от значения  $(2)^{1/2}$  до 0. Наоборот, при выполнении условия (10) резонансная частота

$$\omega_r = \omega_{r2} = [\frac{3}{2} (C/\Omega^2)^2 - 1]^{1/2}. \quad (13)$$

должна увеличиваться с ростом амплитуды  $C$  от значения  $C_0$ . Зависимость резонансной частоты от  $C$ , вычисленная по приведенным выше формулам для  $\Omega = 9.842$ , и соответствующая зависимость, найденная из результатов численного счета, показаны на рис. 1. Видно, что эти зависимости довольно близки, за исключением того, что численная зависимость не достигает нуля.

Рассчитаем теперь резонансные кривые, исходя из уравнений (11) (для  $C < C_0$ ) и (7) (для  $C > C_0$ ) в пренебрежении нелинейными членами, и сравним их с соответствующими кривыми, найденными численно. Обозначив отношение амплитуды медленных колебаний системы к амплитуде низкочастотной составляющей внешней силы  $A$  через  $Q$ , а сдвиг фаз между колебаниями через  $\psi$ , найдем

$$Q = 1/[(\omega^2 - \omega_r^2)^2 + 4\delta^2\omega^2]^{1/2}, \quad \psi = -\arctan[2\delta\omega/(\omega_r^2 - \omega^2)], \quad (14)$$

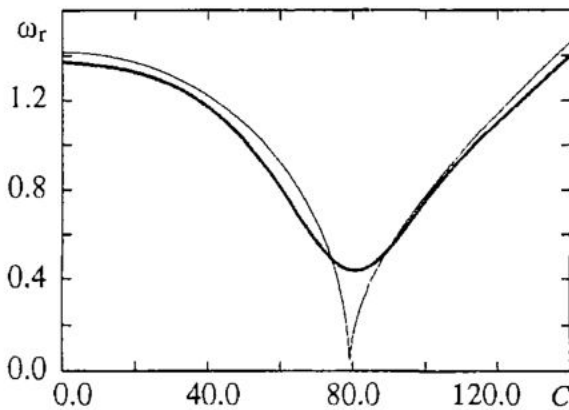


Рис. 1. Зависимость резонансной частоты  $\omega_r$  от  $C$ , вычисленная теоретически для  $\Omega = 9.842$  (тонкие линии) и найденная из результатов численного счета (жирная линия)

где  $\omega_r$  определяется выражениями (12), (13), соответственно. Графики  $Q(\omega)$  и  $\psi(\omega)$ , а также соответствующие зависимости, найденные численно, приведены на рис. 2 для ряда значений амплитуды  $C$ . Из рисунка видно, что вдали от точки бифуркации  $C = C_0$  совпадение теоретических и численных результатов довольно хорошее; только при  $C$ , близком к  $C_0$ , отличия получаются весьма значительными.

Вместе с тем имеется и одно существенное отличие между теоретическими и численными результатами. Численный счет показывает, что при  $C < C_0$  система является мягкой, то есть



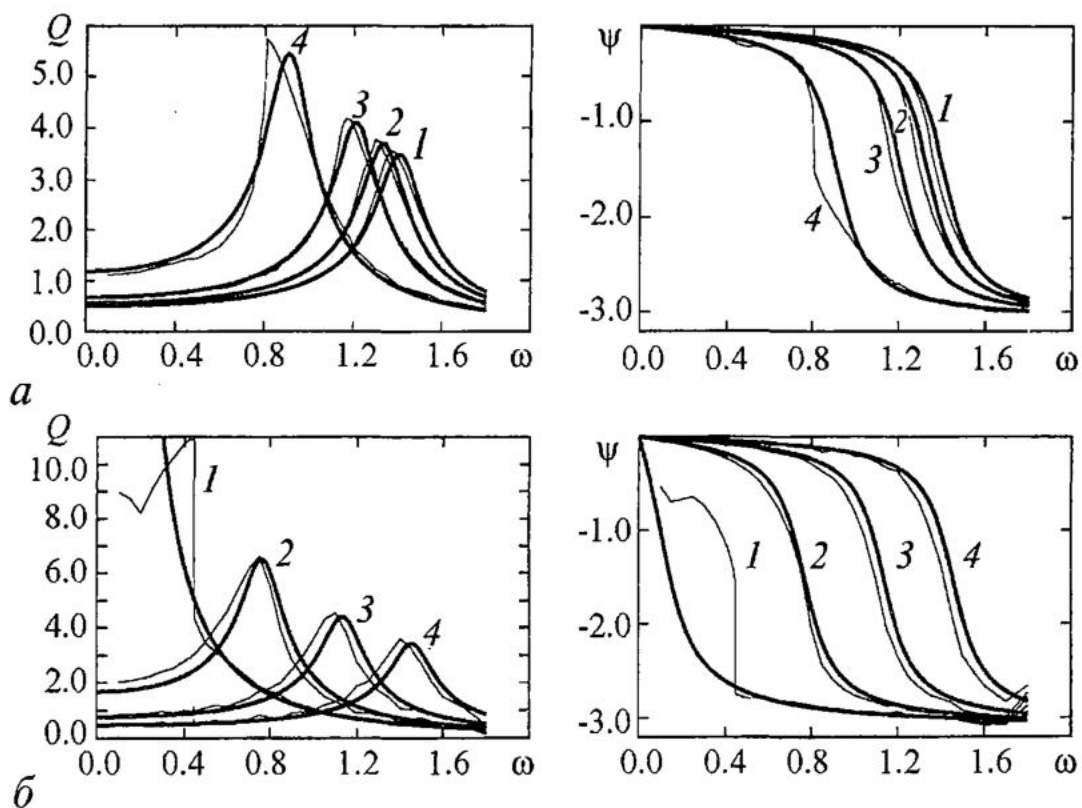


Рис. 2. Зависимости  $Q(\omega)$  и  $\psi(\omega)$ , вычисленные из уравнений (7), (11) и найденные численно для  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 9.842$ ,  $A = 0.05$ : а -  $C = 0, C = 25, C = 40, C = 60$  (кривые 1, 2, 3 и 4, соответственно); б -  $C = 80, C = 100, C = 120, C = 140$  (кривые 1, 2, 3 и 4, соответственно)

ее резонансная частота уменьшается с ростом амплитуды, тогда как при  $C > C_0$  система становится жесткой, то есть ее резонансная частота увеличивается с ростом амплитуды. Из теории же следует, что система всегда является жесткой.

Как видно из уравнений (11) и (7), резонанс существует не только при изменении низкой частоты при фиксированной высокой, но и при изменении высокой частоты при фиксированной низкой. Эти два типа резонансов мы называем *сопряженными*. Кроме того, резонанс возникает и при изменении амплитуды высокочастотного воздействия при фиксированных значениях низкой и высокой частоты. Примеры таких резонансов рассмотрены ниже. Следует отметить, что резонансы при изменении высокой частоты не были замечены при численном счете в работе [1], поскольку не было известно, что они должны существовать (подобного эффекта при стохастическом резонансе не существует). Однако после получения теоретических результатов стало ясно, что они должны иметь место.

Зависимости  $Q(C)$  и  $\psi(C)$  при  $\Omega = 9.842$ , двух значениях  $\omega$  и нескольких значениях амплитуды  $A$ , найденные численно, показаны на рис. 3 тонкими линиями. Эти зависимости сравниваются с теоретическими, найденными в линейном приближении по  $A$ . Видно, что теория для обоих значений  $\omega$  дает два резонанса, которые тем больше разделены, чем больше  $\omega$ . Численные же расчеты показывают, что при  $\omega = 0.5$  и не очень малых  $A$  эти резонансы сливаются, причем нелинейные эффекты проявляются очень сильно. При  $\omega = 1.0$  как теория, так и численные расчеты, дают два резонанса.

Аналогичные результаты получаются и при изменении частоты  $\Omega$  при фиксированном значении  $C$ , если только  $C$  не очень мало. При  $C = 40$  и двух значениях  $\omega$  ( $\omega = 0.5$  и  $\omega = 1.0$ ) эти результаты приведены на рис. 4. Для простоты здесь показаны результаты численных расчетов только для  $A = 0.025$ , которые и сравниваются с теоретическими. Видно, что при  $\omega = 1.0$  теоретические и численные

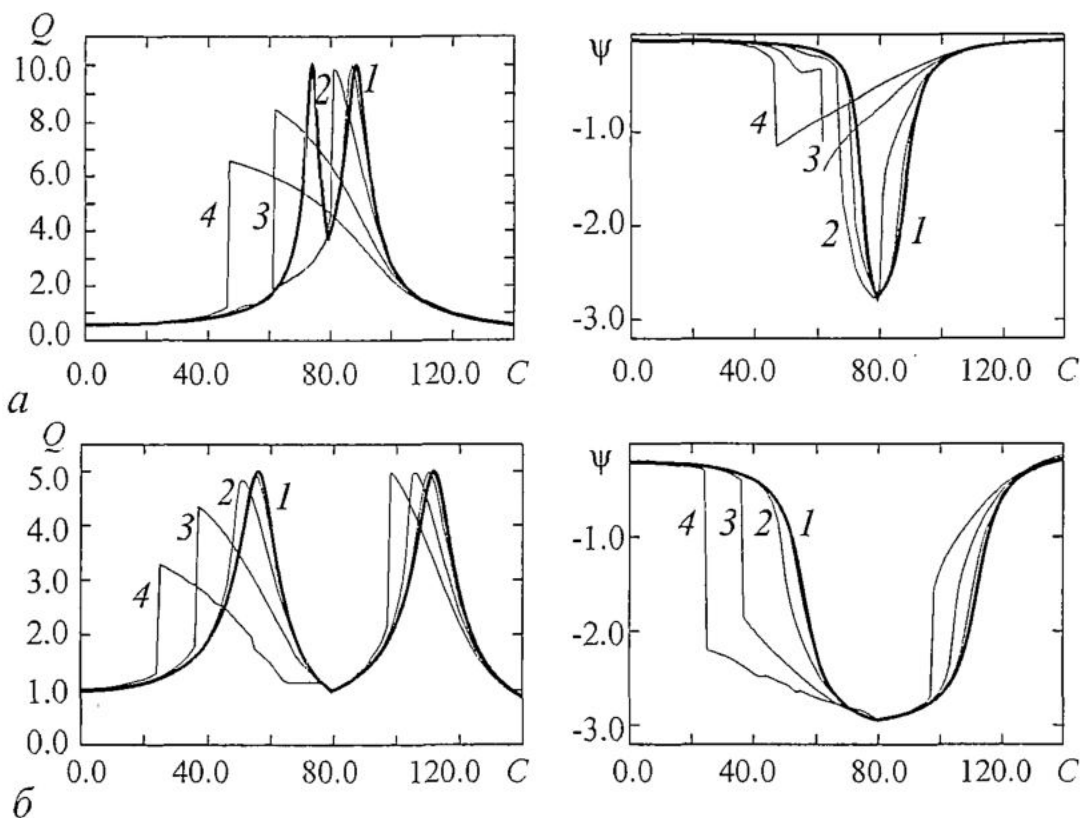


Рис. 3. Зависимости  $Q(C)$  и  $\psi(C)$ , вычисленные из уравнений (7), (11) и найденные численно для  $\delta=0.1$ ,  $\Omega=9.842$ ,  $\omega=0.5$  (а) и  $\omega=1.0$  (б); кривые 1 соответствуют  $A=0.025$ , 2 - 0.05, 3 - 0.1 и 4 - 0.15

результаты согласуются очень хорошо, тогда как при  $\omega=0.5$  имеются заметные различия.

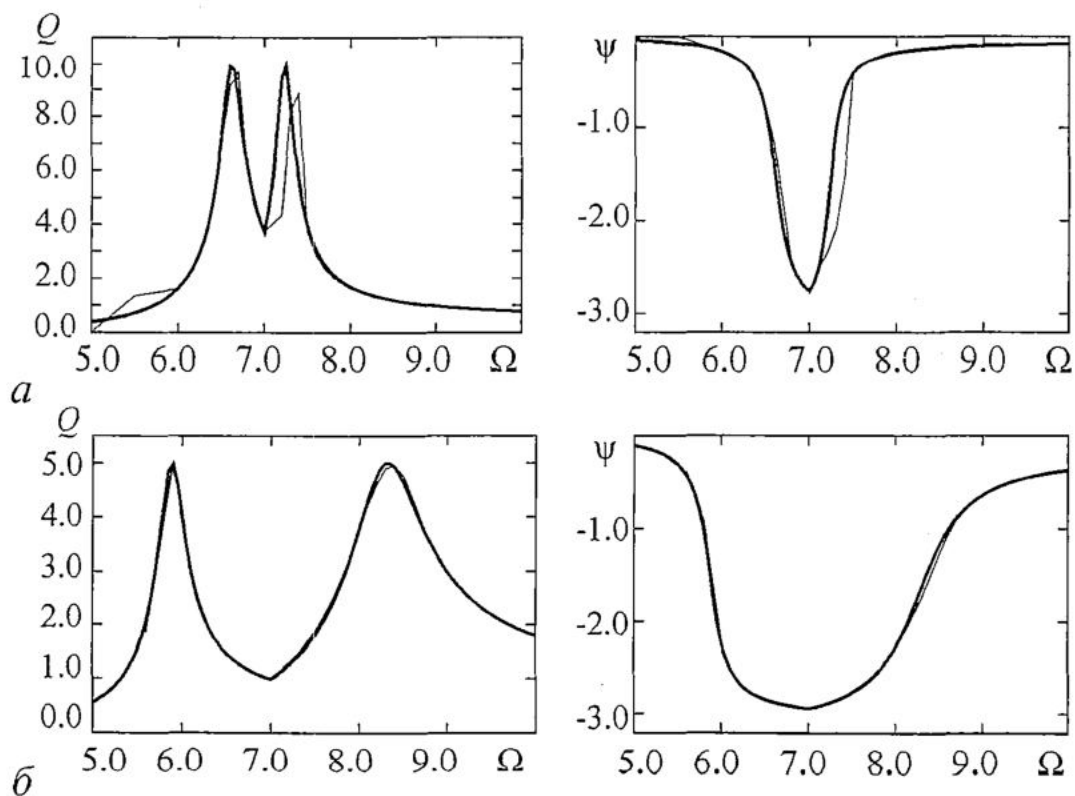


Рис. 4. Зависимости  $Q(\Omega)$  и  $\psi(\Omega)$ , вычисленные из уравнений (7), (11) и найденные численно для  $\delta=0.1$ ,  $A=0.025$ ,  $\omega=0.5$  (а) и  $\omega=1.0$  (б)

## 2. Вибрационные резонансы в передемпфированном бистабильном осцилляторе

Рассмотрим далее эффект кажущегося резонанса в передемпфированном бистабильном осцилляторе, описываемом уравнением

$$\dot{x} - x + x^3 = A \cos \omega t + C \cos (\Omega t + \theta), \quad (15)$$

где  $\Omega \gg \omega$ . Численные результаты для этого уравнения, как и для рассмотренного выше, взяты из [1].

Используя тот же метод, что и выше, получаем следующие уравнения для быстрых и медленных движений:

$$\dot{X} - X + X^3 + 3\bar{\Psi}^2 X + \bar{\Psi}^3 = A \cos \omega t, \quad (16)$$

$$\dot{\Psi} - \Psi + 3X^2(\Psi - \bar{\Psi}) + 3X(\Psi^2 - \bar{\Psi}^2) + \Psi^3 - \bar{\Psi}^3 = C \cos (\Omega t + \theta). \quad (17)$$

Из уравнения (17) аналогично предыдущему находим следующее приближенное решение:

$$\Psi \approx (C/\Omega) \sin (\Omega t + \theta). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (16), получаем уравнение медленных движений

$$\dot{X} + k_1 X + X^3 = A \cos \omega t, \quad (19)$$

где

$$k_1 = 3C^2 / (2\Omega^2) - 1 \quad (20)$$

- эффективная жесткость. Здесь, как и в первом случае, следует рассматривать по отдельности значения  $C$ , большие и меньшие бифуркационного значения  $C=C_1$ , где  $C_1=(2/3)^{1/2}\Omega$ . При  $C>C_1$  колебания происходят относительно положения равновесия  $X=0$ , и их можно описывать уравнением (19). При  $C<C_1$  колебания происходят относительно одного из положений равновесия  $X=\pm X_0$ , где  $X_0=(-k_1)^{1/2}$ . В этом случае следует ввести переменную  $Y=X \mp X_0$ , уравнение для которой имеет вид

$$\dot{Y} + k_2 Y + 3X_0 Y^2 + Y^3 = A \cos \omega t, \quad (21)$$

где

$$k_2 = 2[1 - 3C^2 / (2\Omega^2)]. \quad (22)$$

Решение уравнений (19), (21) показывает, что, как и следовало ожидать, резонанса при изменении низкой частоты нет: амплитуда колебаний монотонно убывает с ростом частоты. Однако при изменении высокой частоты  $\Omega$  или амплитуды высокочастотных колебаний  $C$  амплитуда низкочастотных колебаний изменяется немонотонно. Ее изменение имеет характер резонансной кривой с максимумом в точке бифуркации, где изменяется характер зависимости эффективной жесткости от амплитуды высокочастотных колебаний: до точки бифуркации эффективная жесткость убывает с ростом этой амплитуды, а после точки бифуркации - растет. Это продемонстрировано на рис. 5, где показаны зависимости относительной амплитуды низкочастотных колебаний  $Q$  и сдвига фаз  $\psi$  от  $C/\Omega$  при  $\omega=0.1$ , вычисленные теоретически из уравнений (19), (21) в линейном приближении и найденные численно для разных значений амплитуд. Видно, что точки «резонанса» в теоретических и численных расчетах для малых амплитуд приблизительно совпадают, однако ширина резонансной кривой и зависимость сдвига фаз существенно отличаются. Несмотря на указанное отличие, приведенная теория позволяет понять механизм наблюдаемой резонансной зависимости: максимум

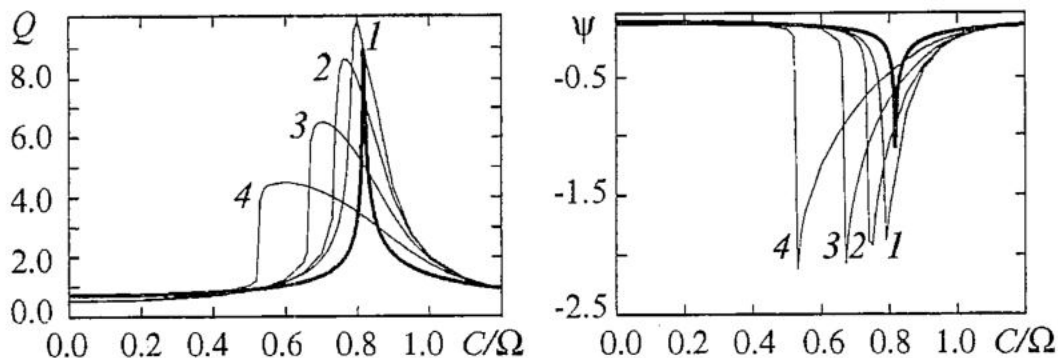


Рис. 5. Зависимости  $Q(C/\Omega)$  и  $\psi(C/\Omega)$ , вычисленные из уравнений (19), (21) (жирные линии) и найденные численно (тонкие линии) для  $\omega=0.1$ ,  $A=0.025$  (кривая 1),  $A=0.05$  (кривая 2),  $A=0.1$  (кривая 3) и  $A=0.2$  (кривая 4)

кривой определяется наличием точки бифуркации, где эффективная жесткость имеет наименьшее (теоретически - нулевое) значение.

Следует отметить, что, как показано в [3], механизм стохастического резонанса в передемпфированном осциляторе тот же самый: при изменении интенсивности шума в системе изменяется эффективная жесткость, которая при некотором значении интенсивности имеет минимум.

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант 01-01-00227) и в рамках Комплексной программы 19 Президиума РАН (проект 1.4).*

### Библиографический список

1. Landa P.S., McClintock P.V.E. Vibrational resonance // J. Phys. A: Math. Gen. 2000. Vol. 33. P.L433.
2. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // УФН. 1999. Т. 169. С.7.
3. Landa P.S. Regular and chaotic oscillations. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2001.
4. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
5. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
6. Коловский М.З. О влиянии высокочастотных возмущений на резонансные колебания в нелинейной системе // Труды ЛПИ. 1963. № 226. С. 7.
7. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. Wiley-Interscience, New York, 1979.

## CONJUGATE RESONANCES IN NONLINEAR SYSTEMS UNDER BIHARMONICAL ACTION. VIBRO-INDUCED BIFURCATIONS

*I.I. Blekhman, P.S. Landa*

Using a bistable oscillator described by a Duffing equation as an example, we consider resonances caused by a biharmonic external force with essentially different frequencies. We show that these resonances are conjugate; they appear when either the

low or high frequency changes. The resonances take place also as the amplitude of the high-frequency action varies. Besides we show that the high-frequency action induces the bifurcation of the change in the number of stable steady states in the system; so the seeming resonance in an overdamped oscillator is caused just this bifurcation.



*Блекман Илья Израилевич* - профессор, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией вибрационной механики Института проблем машиноведения РАН и ОАО «Механобр-Техника» (Санкт-Петербург). Область научных интересов: прикладная математика и механика, нелинейная динамика, теория колебаний, теория синхронизации динамических систем, вибрационная техника и технология. Автор 3 научных открытий, 9 монографий, более 200 научных работ и изобретений. Лауреат премий Правительства Российской Федерации, имени Гумбольдта (Германия) и Аль-Хорезми (Иран). E-mail: blekhan@vibro.ipme.ru



*Ланда Полина Соломоновна* - родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий сотрудник МГУ. Область научных интересов - теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор пяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика». E-mail: planda@ipi.ru



## ВОССТАНОВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ С ЗАДЕРЖКОЙ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ВРЕМЕННОМУ РЯДУ

*Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.*

Предложен новый метод реконструкции по временным рядам уравнений с запаздыванием, опирающийся на закономерности расположения экстремумов во временных реализациях наблюдаемых колебаний. На основе информации о времени задержки определяется вид нелинейной функции и параметр инерционности. Работоспособность метода продемонстрирована при реконструкции дифференциальных уравнений с запаздыванием по их хаотическим решениям, в том числе с добавленным шумом, а также при конструировании моделей реальных систем с запаздыванием по хаотическим временным реализациям.

### Введение

Системы с задержкой широко распространены в природе. В частности, динамика изменения состава крови [1], электрические сигналы мозга [2], колебания в радиофизических [3, 4] и оптических [5] системах и другие явления могут быть описаны с использованием уравнений с задержкой. Это во многом объясняет высокую популярность уравнений с задержкой у исследователей, занимающихся проблемами нелинейной динамики, в частности, реконструкцией уравнений по временным рядам, что и является предметом предлагаемой работы.

Использование при реконструкции модельных уравнений по временным рядам универсальных методик, не учитывающих особенностей объекта, как правило, не приводит к успеху. На хороший результат обычно можно рассчитывать лишь при использовании специальных технологий реконструкции для достаточно узких классов объектов [6-8]. Мы ограничиваемся рассмотрением систем, описываемых уравнениями первого порядка, с запаздыванием вида

$$\epsilon_0 \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_0)), \quad (1)$$

где  $x(t)$  - состояние системы в момент времени  $t$ ,  $f$  - нелинейная функция,  $\tau_0$  - время запаздывания,  $\epsilon_0$  - параметр, характеризующий инерционность системы. В достаточно общем случае уравнение (1) является математической моделью колебательной системы, в радиофизическом варианте представляемой кольцом из трех идеализированных элементов: нелинейного усилителя, линии задержки и инерционного элемента (рис. 1).

Для однозначного определения состояния системы (1) необходимо задать начальные условия на непрерывном временном интервале  $[-\tau_0, 0]$ . Таким образом, система обладает бесконечно большим числом степеней свободы. Это вносит трудности в решение задачи реконструкции по временному ряду. Действительно, при больших временах задержки даже скалярные дифференциальные уравнения с запаздыванием могут демонстрировать хаотические движения очень высокой размерности [9]. Поэтому для реконструкции систем с запаздыванием разрабатываются специальные приемы. Одним из них является проецирование траектории, задаваемой уравнением (1), из бесконечномерного фазового пространства в трехмерное  $(x(t - \tau_0), x(t), \dot{x}(t))$ . При этом множество точек, посещаемых системой в этом пространстве, располагается на двумерной поверхности [10, 11]. Сечение этой поверхности плоскостью  $\dot{x}(t)=0$  позволяет определить вид нелинейной функции, входящей в уравнение (1),

$$x(t) = f(x(t - \tau_0)). \quad (2)$$

Поскольку заранее время задержки  $\tau_0$  неизвестно, приходится проецировать траекторию в пространство  $(x(t - \tau), \dot{x}(t), x(t))$  при различных значениях  $\tau$ , добываясь однозначной зависимости в сечении  $\dot{x}(t)$ , которая возможна лишь при  $\tau = \tau_0$ . В качестве количественного критерия однозначности при таком поиске  $\tau_0$  используют, например, минимальную длину линии  $L(\tau)$ , соединяющей экстремальные точки на плоскости  $(x(t - \tau), x(t))$ , упорядоченные по величине координаты  $x(t - \tau)$  [11]. В других методах, опирающихся на аналогичное проецирование бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием в подпространства малой размерности, используются свои критерии качества, например, минимальная ошибка прогноза построенной модели [12-14], минимальная величина информационной энтропии [15] или различные меры сложности спроецированного временного ряда [12, 16, 17]. Известны также методы исследования систем с запаздыванием, основанные на применении регрессионного анализа [18, 19] и на построении корреляционной функции [20, 21].

В нашей работе предложен новый метод реконструкции по временным рядам уравнений с запаздыванием вида (1), опирающийся на закономерности расположения экстремумов во временных реализациях наблюдаемых колебаний. В предлагаемом подходе проводится выделение экстремумов в исходной временной реализации и анализируется длительность временных интервалов между ними (раздел 1). Для различных значений времени  $\tau$  определяется число  $N$  пар экстремумов во временной реализации, удаленных друг от друга на время  $\tau$  (рис. 2). Характерные особенности зависимости  $N(\tau)$  позволяют с большой точностью найти значение времени запаздывания  $\tau_0$  без введения каких-либо дополнительных количественных критериев. На основе информации о  $\tau_0$  определяется вид нелинейной функции и параметр инерционности. Возможна оценка параметра  $\epsilon_0$  и непосредственно из вида зависимости  $N(\tau)$ . В разделе 2 особенности метода и его работоспособность при наличии шумов иллюстрируются как на примере реконструкции динамических систем по их решениям, так и на примере



Рис. 1. Обобщенная схема генератора с запаздывающей обратной связью

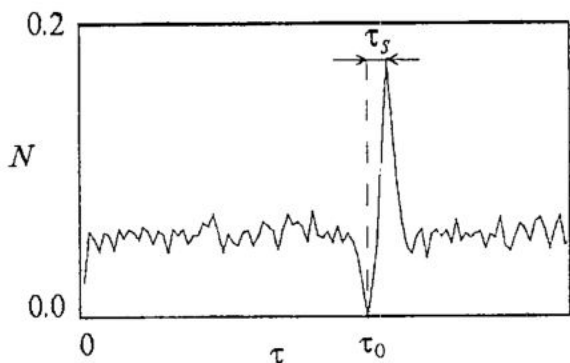


Рис. 2. Число  $N$  пар экстремумов в реализации уравнения (1) при  $\epsilon_0 > 0$ , удаленных друг от друга на время  $\tau$  в зависимости от величины  $\tau$ .  $N(\tau)$  имеет четкий минимум при времени, соответствующем времени запаздывания системы. Положение максимума определяется величиной параметра  $\epsilon_0$

моделирования реальных радиофизических систем. Достоинства подхода и возможные приложения обсуждаются в заключении.

## 1. Описание метода восстановления нелинейной функции, времени задержки и параметра инерционности

Предлагаемый метод базируется на обнаруженных нами особенностях формы и расположения экстремумов в зависимости переменной  $x$  от времени  $t$  для системы (1) при различных значениях  $\epsilon_0$  [22, 23]. Особенности расположения экстремумов во времени наглядно иллюстрирует зависимость  $N(\tau)$  (см. рис. 2). Такую зависимость можно построить, определив для различных значений  $\tau$  число  $N$  пар экстремумов во временной реализации  $x(t)$ , удаленных друг от друга на время  $\tau$ . Если нормировать  $N$  на общее число экстремумов, то при достаточно большом их числе полученная величина будет иметь смысл оценки вероятности обнаружить во временной реализации пару экстремумов, разделенных интервалом  $\tau$ . Поясним качественные особенности зависимости  $N(\tau)$  при различных значениях параметра  $\epsilon_0$ .

В отсутствие инерционности ( $\epsilon_0 = 0$ ) уравнение (1) принимает вид (2). Проинтегрировав его по  $t$ , получим

$$\dot{x}(t) = [df(x(t - \tau_0))/dx(t - \tau_0)]\dot{x}(t - \tau_0). \quad (3)$$

Откуда следует, что если  $\dot{x}(t - \tau_0) = 0$ , то и  $\dot{x}(t) = 0$ . Таким образом, при  $\epsilon_0 = 0$  за каждым экстремумом через время  $\tau_0$  во временной реализации  $x(t)$  всегда следует экстремум<sup>1</sup>. В результате в зависимости  $N(\tau)$  при  $\tau = \tau_0$  будет наблюдаться максимум (рис. 3, а).

Ситуацию в отсутствие инерционности можно наглядно проиллюстрировать с помощью отображений последования и кольцевой схемы (см. рис. 1), для которой  $\epsilon_0 = 0$  эквивалентно отсутствию инерционного элемента и неограниченной полосе пропускания оставшихся элементов. Сигнал  $x(t)$  распространяется по кольцу в одну сторону, при этом линия задержки обеспечивает его запаздывание на время  $\tau_0$ , а нелинейный усилитель преобразует его в соответствии со своей передаточной функцией  $f(x(t - \tau_0))$ . В этом случае сигнал на выходе нелинейного усилителя в момент времени  $t$  определяется только сигналом на входе линии задержки в момент времени  $t - \tau_0$  (локально). То есть эволюция во времени точек реализации может быть представлена диаграммой Ламерея на графике одномерного отображения  $x(t - \tau_0) \rightarrow x(t)$  (рис. 3, б) при этом одному шагу дискретного времени соответствует сдвиг на  $\tau_0$  непрерывного времени. Графические построения отображения нескольких соседних точек, выделенных на временной реализации  $x(t)$  в окрестности экстремума (рис. 3, в), свидетельствуют, что

<sup>1</sup> Так как в хаотических временных реализациях исследуемых систем практически все критические точки, в которых  $\dot{x}(t) = 0$ , являются экстремальными, в дальнейшем всюду в статье мы будем называть точки, в которых  $\dot{x}(t) = 0$ , экстремальными.



экстремум в непрерывной реализации  $x(t)$  всегда отображается в экстремум. Из этого же рисунка следует, что экстремумов, удаленных друг от друга на  $\tau$ , незначительно отличающемся от  $\tau_0$ , должно быть относительно мало, чему соответствует наличие минимумов на рис. 3, а. В реальности мы имеем дело не с непрерывной реализацией  $x(t)$ , а с дискретным рядом  $\{x_i\}_{i=1}^M$ , полученным в результате численного решения дифференциального уравнения или экспериментального измерения наблюдаемой величины  $x$  в дискретные моменты времени. Однако и в этом случае, как видно из рис. 3, в, типичной является ситуация, когда за экстремальной точкой временного ряда через время  $\tau_0$  следует экстремум.

При наличии инерционности ( $\varepsilon_0 > 0$ ), что соответствует реальным ситуациям, наиболее вероятная величина временного интервала между экстремумами во временной реализации  $x(t)$  смещается от  $\tau_0$  в сторону больших значений. Наблюдаемый эффект можно истолковать с помощью представлений кольцевой системы (см. рис. 1): инерционный элемент вносит в систему некоторую дополнительную задержку. В результате экстремумы наиболее часто располагаются на удалении  $\tau_0 + \tau_s$  друг от друга (см. рис. 2). Например, численные исследования уравнения (1) с квадратичной нелинейной функцией  $f(x) = \lambda - x^2$  при больших значениях параметра нелинейности  $\lambda$  позволили сделать оценку:  $\tau_s \approx \varepsilon_0/2$ .

При  $\varepsilon_0 > 0$  экстремумы во временной реализации  $x(t)$  близки к квадратичным, а следовательно, в экстремальных точках  $\dot{x}(t) = 0$ ,  $\ddot{x}(t) \neq 0$ . Можно показать, что в этом случае во временной реализации решения уравнения (1) должны отсутствовать экстремумы, удаленные друг от друга на  $\tau_0$ . Для доказательства этого продифференцируем (1) по времени:

$$\varepsilon_0 \ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) + \frac{df(x(t-\tau_0))}{dx(t-\tau_0)} \dot{x}(t-\tau_0). \quad (4)$$

Если при  $\dot{x}(t) = 0$  в общем случае  $\ddot{x}(t) \neq 0$ , то, как видно из уравнения (4), при

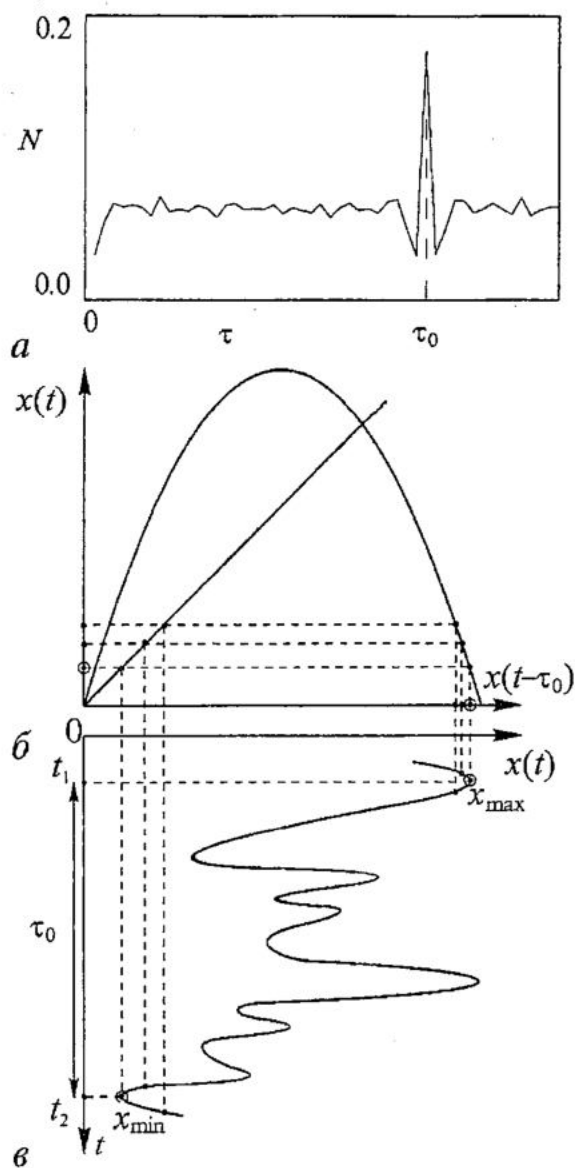


Рис. 3. а - Число  $N$  пар экстремумов в реализации уравнения (1) при  $\varepsilon=0$ , удаленных друг от друга на время  $\tau$  в зависимости от величины  $\tau$ .  $N(\tau)$  имеет резкий максимум при времени, соответствующем времени запаздывания системы. б - Типичная передаточная функция нелинейного элемента и отображение множества значений входного сигнала на выход. в - Временная реализация сигнала с выделенными вблизи экстремумов точками временного ряда. Экстремальные точки показаны кружочками

$\varepsilon_0 \neq 0$  должно выполняться условие  $\dot{x}(t - \tau_0) \neq 0$ . То есть на удалении  $\tau_0$  от квадратичного экстремума не должно быть другого экстремума, а следовательно, значение  $N(\tau_0) \rightarrow 0$ . При  $\tau \neq \tau_0$  производные  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{x}(t - \tau)$  могут быть равны нулю одновременно, то есть на удалении  $\tau$  друг от друга экстремумы можно обнаружить. Характерная конфигурация на графике  $N(\tau)$  в окрестности  $\tau = \tau_0$ , представленная на рис. 2, дублируется при больших  $\tau$  в окрестностях  $\tau = 2\tau_0, 3\tau_0, \dots$

Предложенная процедура определения  $\tau_0$  не требует больших вычислительных затрат, поскольку для нахождения экстремумов и построения зависимости  $N(\tau)$  могут быть использованы только операции сравнения и сложения.

Вид зависимостей  $N(\tau)$ , построенных по конечным временным рядам  $\{x_t\}_{t=1}^M$ , будет определяться длиной ряда, шагом дискретизации, уровнем шума и точностью измерения. Влияние этих факторов на вид  $N(\tau)$  и на качество реконструкции модельного уравнения рассмотрено в разделе 2.

Для определения по хаотической временной реализации параметра инерционности  $\varepsilon_0$  и нелинейной функции  $f$  системы (1) мы предлагаем новый метод, суть которого заключается в следующем. Из уравнения (1) получаем

$$\varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t) = f(x(t - \tau_0)). \quad (5)$$

Таким образом, если для временной реализации  $x(t)$  системы (1) построить на плоскости множество точек с координатами  $(x(t - \tau_0), \varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t))$ , то оно воспроизведет функцию  $f$ . Поскольку заранее величина  $\varepsilon_0$  не известна, приходится строить зависимости  $(\varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t))$  от  $x(t - \tau_0)$  для различных значений  $\varepsilon$ , добиваясь однозначной зависимости на плоскости  $(x(t - \tau_0), \varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t))$ , которая возможна лишь при  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . В качестве количественного критерия однозначности при поиске  $\varepsilon_0$  будем использовать минимальную длину линии  $L(\varepsilon)$ , соединяющей точки на плоскости  $(x(t - \tau_0), \varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t))$ , упорядоченные по величине координаты  $x(t - \tau_0)$ . Минимум зависимости  $L(\varepsilon)$  будет наблюдаться при  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , а построенная при этом значении зависимость на плоскости  $(x(t - \tau_0), \varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t))$  воспроизведет нелинейную функцию, которую при необходимости можно аппроксимировать. В отличие от других методов [10, 11], использующих для восстановления нелинейной функции только экстремальные точки или удовлетворяющие определенным условиям, предлагаемый нами подход использует все точки временного ряда. Это позволяет по коротким временным рядам более полно восстанавливать нелинейную функцию даже в случаях слаборазвитого хаоса.

## 2. Примеры восстановления уравнения систем с задержкой

Для проверки работоспособности предлагаемого нами подхода мы реконструировали уравнения систем с запаздыванием вида (1) по временным рядам, полученным при их численном решении, а также получали модельные дифференциальные уравнения реальных кольцевых генераторов по экспериментальным временным рядам. Для построения зависимостей  $N(\tau)$  всюду в работе мы использовали 10000 точек временного ряда, а для построения зависимостей  $L(\varepsilon)$  и восстановления функции  $f$  лишь 1000 точек временного ряда (раздел 2.1) и 2000 точек (раздел 2.2). Для оценки производной по временному ряду мы использовали параболическую аппроксимацию.

**2.1. Реконструкция уравнения Маккея - Гласса.** Мы применили метод к временным рядам, полученным из уравнения Маккея - Гласса

$$\dot{x}(t) = -bx(t) + \frac{ax(t - \tau_0)}{1 + x^c(t - \tau_0)}, \quad (6)$$

которое может быть приведено к виду (1) с  $\varepsilon_0 = 1/b$  и

$$f(x(t - \tau_0)) = \frac{ax(t - \tau_0)}{b[1 + x^c(t - \tau_0)]}, \quad (7)$$

Временной ряд был получен численным решением уравнения (6) методом Рунге - Кутты 4-го порядка с интерполяцией промежуточных значений внутри шага интегрирования. Параметры соответствовали движению системы на хаотическом аттракторе высокой размерности [9]. На рис. 4, а приведена часть временного ряда. Масштабы таковы, что 300 точек ряда занимали временной интервал, равный времени задержки  $\tau_0 = 300$ . Весь ряд содержал около 600 экстремумов. На рис. 4, б приведена зависимость числа  $N$  пар экстремумов временного ряда, удаленных друг от друга на время  $\tau$ , от величины  $\tau$ . На этом и последующих рисунках  $N$  нормировано на общее число экстремумов временного ряда. В отсутствие шума для выделения экстремумов и построения  $N(\tau)$  можно даже обойтись без оценки  $\dot{x}_t$ , определяя экстремумы как локальные минимумы и максимумы временного

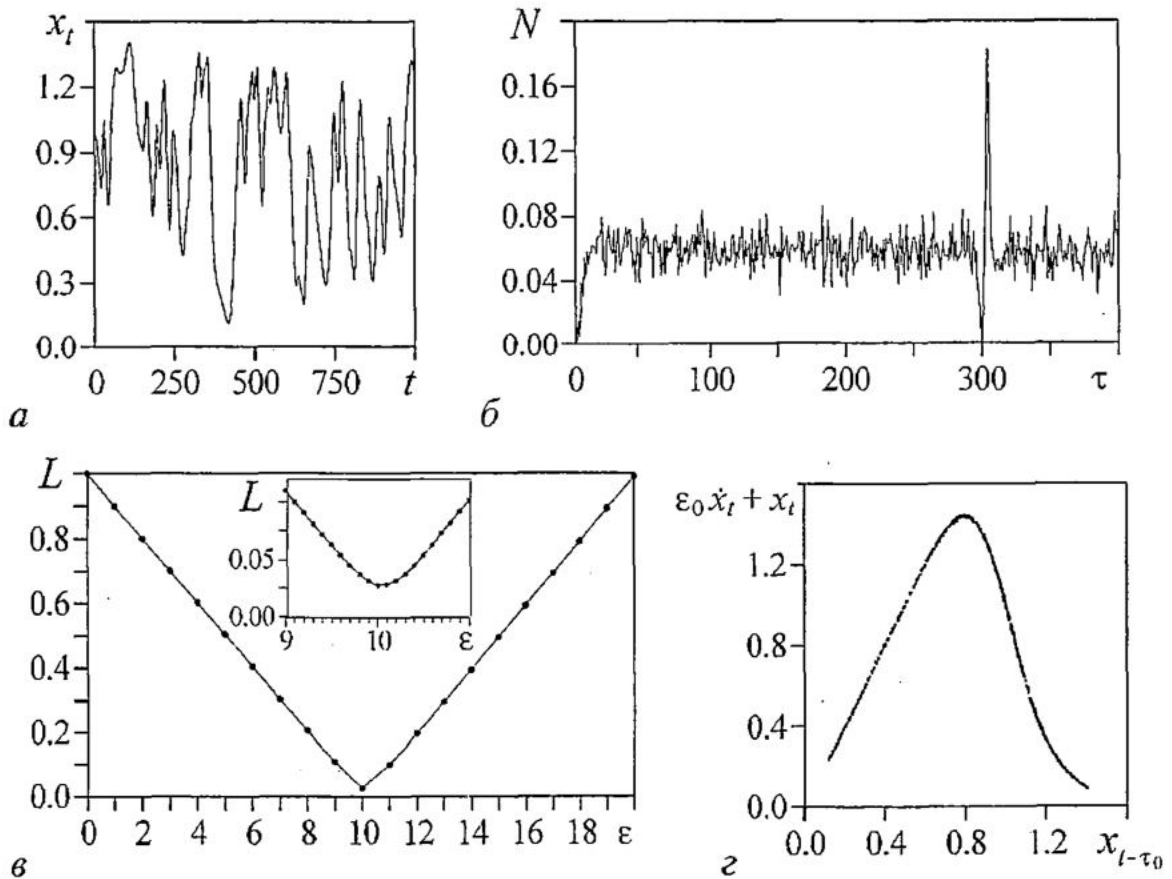


Рис. 4. а - 1000 точек реализации уравнения (6) при  $a=0.2, b=0.1, c=10, \tau_0=300$ . б - Нормированное число  $N$  пар экстремумов временного ряда, удаленных на  $\tau$  друг от друга при  $\tau=1, \dots, 400$ .  $N(\tau)$  нормировано на общее число экстремумов временного ряда. в - Длина  $L$  цепи, соединяющей упорядоченные по величине  $x_{t-\tau_0}$  точки уравнения (6) на плоскости  $(x_{t-\tau_0}, \varepsilon \dot{x}_t + x_t)$  в зависимости от  $\varepsilon$ .  $L(\varepsilon)$  нормировано таким образом, что наиболее неупорядоченному множеству точек соответствует  $L=1.0$ ;  $L_{\min}(\varepsilon) = L(10.0) = 0.027$ . г - Восстановленная нелинейная функция

ряда. Абсолютный минимум  $N(\tau)$  наблюдается точно при  $\tau=\tau_0=300$ , причем  $N(300)=0$ . При уменьшении длины  $M$  ряда и, соответственно, числа экстремумов, этот минимум на графике  $N(\tau)$  становится все менее ярко выраженным, а при  $M<2500$ , когда ряд содержит порядка 150 экстремумов, появляются дополнительные минимумы с  $N(\tau)=0$ . На рис. 4, в представлена зависимость длины линии  $L$ , соединяющей последовательно точки на плоскости  $(x_{t-\tau_0}, \varepsilon \dot{x}_t + x_t)$ , от  $\varepsilon$ . Для уменьшения времени счета начальный шаг изменения параметра  $\varepsilon$  можно выбрать большим, а затем уменьшить его в окрестности минимума  $L(\varepsilon)$ . Так, на выделенном фрагменте шаг изменения  $\varepsilon$  уменьшен до 0.1. Минимум зависимости

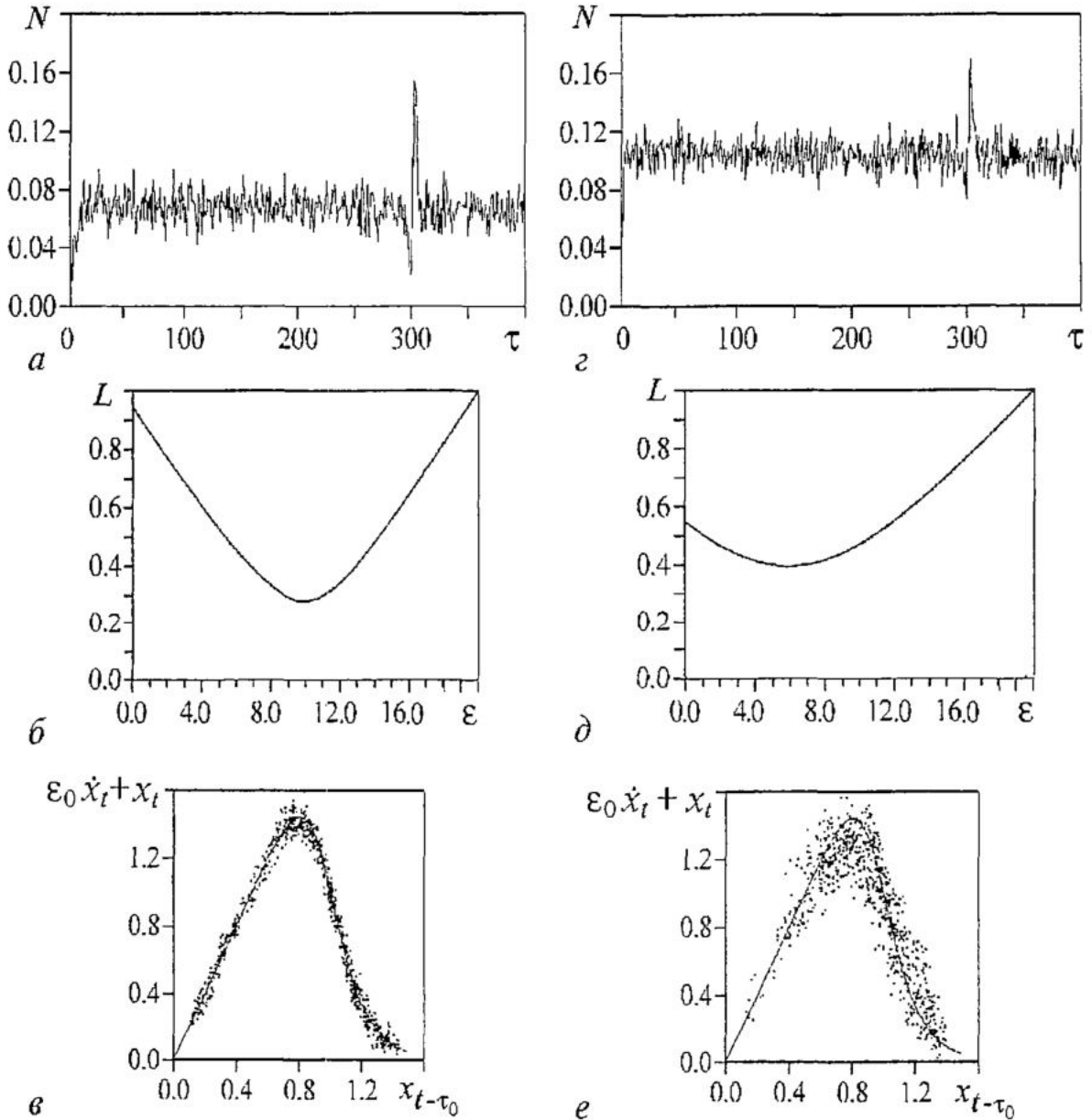


Рис. 5. Оценка времени запаздывания, параметра инерционности и восстановление функции по временным рядам уравнения Маккея - Гласса с добавленным гауссовым белым шумом. а, з - Нормированное число  $N$  пар экстремумов временного ряда, удаленных на  $\tau$  друг от друга, при 3% (а) и 10% (з) шуме.  $N(\tau)$  нормировано на общее число экстремумов временного ряда.  $N_{\min}(\tau)=N(300)=0.02$  (а),  $N_{\min}(\tau)=N(300)=0.07$  (з). б, д - Зависимость длины линии  $L$ , соединяющей последовательно точки на плоскости  $(x_{t-\tau_0}, \varepsilon \dot{x}_t + x_t)$ , от  $\varepsilon$  при 3% и 10% шуме, соответственно.  $L_{\min}(\varepsilon)=L(9.9)=0.28$  (б),  $L_{\min}(\varepsilon)=L(6.0)=0.39$  (д). в, е - Нелинейная функция (7) (сплошная линия) и восстановленная функция (точки) при 3% (в) и 10% (е) шуме и  $\varepsilon$ , соответствующем минимуму  $L(\varepsilon)$

$L(\varepsilon)$  позволяет точно определить параметр  $\varepsilon_0=1/b=10$ . На рис. 4, з приведена нелинейная функция, восстановленная при найденном  $\varepsilon_0$ . Она практически совпадает с истинной функцией (7).

Для демонстрации возможностей метода при наличии шума мы использовали ряды, полученные при добавлении к временному ряду уравнения (6) гауссова белого шума, имеющего нулевое среднее значение и среднеквадратичное отклонение, составляющее 3% и 10% от среднеквадратичного отклонения исходного ряда. При увеличении уровня шума абсолютный минимум на графике  $N(\tau)$  становится все менее ярко выраженным, параметр инерционности определяется по минимуму  $L(\varepsilon)$  менее точно, а множество точек на плоскости  $(x_{t-\tau_0}, \varepsilon \dot{x}_t + x_t)$  становится все более рассредоточенным (рис. 5). При более высоких уровнях шума на  $\tau=\tau_0$  уже более не наблюдается абсолютный минимум зависимости  $N(\tau)$ .

**2.2. Восстановление уравнения генератора с запаздывающей обратной связью.** На рис. 6, а приведена блок-схема генератора с запаздывающей обратной связью для случая, когда фильтром является низкочастотный  $RC$ -фильтр первого порядка. Мы использовали для восстановления уравнения временные ряды двух модельных систем: полученные в численном эксперименте и в физическом с использованием реального фильтра, компьютера, аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразователей. Реконструкция велась по временному ряду напряжения  $V$  на конденсаторе фильтра. Из законов Кирхгофа можно получить модельное уравнение такой системы

$$RC\dot{V}(t) = -V(t) + f(V(t - \tau_0)), \quad (8)$$

где  $V(t)$  и  $V(t-\tau_0)$  - напряжения на входе и выходе линии задержки,  $R$  и  $C$  - сопротивление и емкость элементов фильтра. Уравнение (8) имеет вид (1) с  $\varepsilon_0=RC$ . На рис. 6, б представлены первые 2000 точек исследуемого временного ряда, полученного путем численного решения уравнения (8), нелинейная функция в котором имела вид

$$f(V) = \lambda - V^2, \quad (9)$$

где  $\lambda$  - параметр нелинейности. Масштабы таковы, что 1000 точек ряда занимали временной интервал, равный времени задержки  $\tau_0=1000$ . Весь ряд содержал около 400 экстремумов. Зависимость  $N(\tau)$  (рис. 6, в), позволяет точно определить  $\tau_0$ , а  $L(\varepsilon)$  - точно определить  $\varepsilon_0$  (рис. 6, з). На рис. 6, д показана восстановленная нелинейная функция. Значение  $RC$  может быть оценено по величине  $\tau_s = \tau_m - \tau_0$ , где  $\tau_m$  - значение, при котором наблюдается абсолютный максимум зависимости  $N(\tau)$  (см. рис.2). Меняя в широких пределах значения  $RC$ ,  $\lambda$  и  $\tau_0$ , мы получили эмпирическую зависимость  $\tau_s \approx RC/2 = \varepsilon_0/2$ . То есть для приближенной оценки величины  $RC$  может быть непосредственно использована зависимость  $N(\tau)$  и соотношение  $RC \approx 2\tau_s$ . Заметим, что при наличии шума такая оценка может оказаться точнее других. Поскольку максимум зависимости  $N(\tau)$  четко различим при уровне шума, в 2-3 раза большем минимального, значение  $\tau_m$  может быть использовано для оценки  $\tau_0$  сверху по сильно зашумленным временным рядам.

На рис. 7 представлены результаты применения метода к экспериментальному временному ряду, полученному при использовании радиофизического  $RC$ -фильтра в схеме на рис. 6, а. Нелинейный элемент и линия задержки моделировались на компьютере. По временному ряду, записанному с шагом выборки на порядок меньшим времени инерционности системы, время задержки определяется точно (рис. 7, а). Об этом свидетельствует и близость восстановленной нелинейной функции (рис. 7, б) к однозначной зависимости.

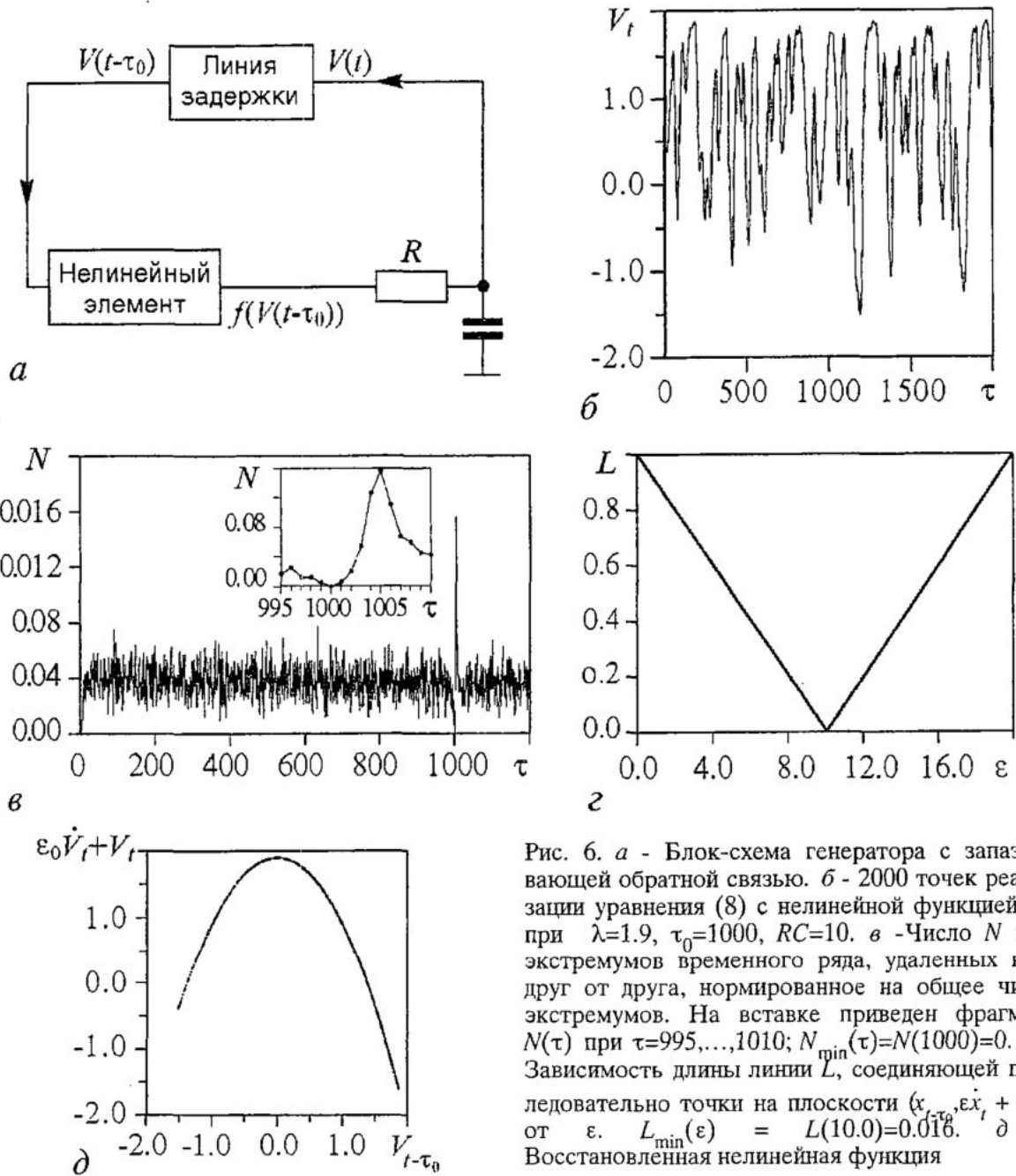


Рис. 6. *a* - Блок-схема генератора с запаздывающей обратной связью. *б* - 2000 точек реализации уравнения (8) с нелинейной функцией (9) при  $\lambda=1.9$ ,  $\tau_0=1000$ ,  $RC=10$ . *в* - Число  $N$  пар экстремумов временного ряда, удаленных на  $\tau$  друг от друга, нормированное на общее число экстремумов. На вставке приведен фрагмент  $N(\tau)$  при  $\tau=995, \dots, 1010$ ;  $N_{\min}(\tau)=N(1000)=0$ . *г* - Зависимость длины линии  $L$ , соединяющей последовательно точки на плоскости  $(x_{t-\tau_0}, \epsilon x_t + x_t)$ , от  $\epsilon$ .  $L_{\min}(\epsilon) = L(10.0)=0.016$ . *д* - Восстановленная нелинейная функция

## Заключение

Нами предложен метод реконструкции по экспериментальным временным рядам дифференциальных уравнений первого порядка с запаздыванием вида (1). Метод опирается на характерное расположение квадратичных экстремумов во временных рядах и статистический анализ временных интервалов между ними. Так как при наличии инерционности квадратичность экстремумов типична, практически можно сопоставлять все экстремумы ряда. По абсолютному минимуму зависимости  $N(\tau)$  удастся определить значение времени запаздывания  $\tau_0$ , а затем использовать его для оценки величины  $\epsilon_0$  и восстановления нелинейной функции. Продемонстрирована работоспособность метода при реконструкции дифференциальных уравнений с запаздыванием по сгенерированным ими временным рядам, в том числе и при наличии достаточно высокого уровня шума, а также при конструировании моделей реальных систем с запаздыванием. Поскольку максимум зависимости  $N(\tau)$  более ярко выражен, чем ее минимум, и

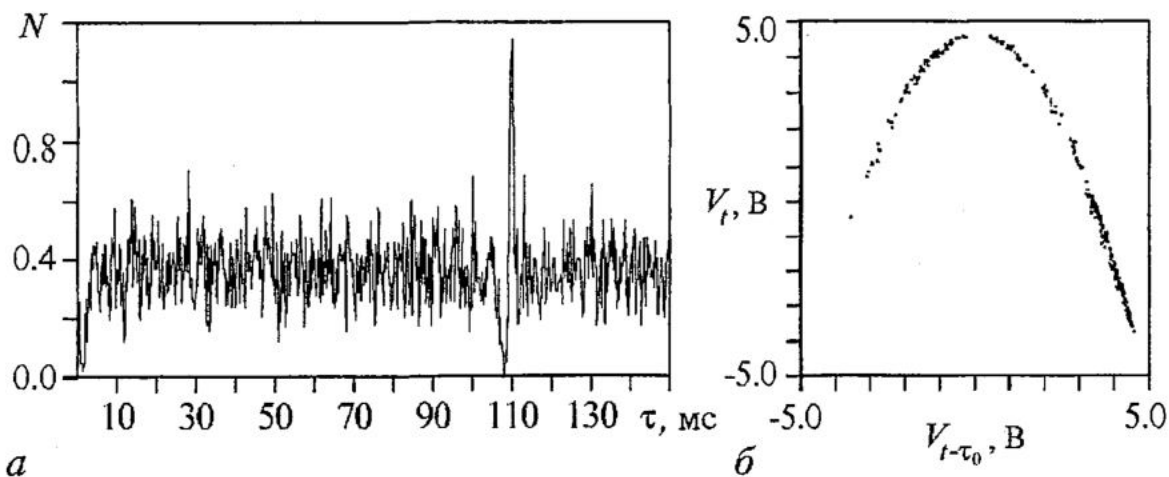


Рис. 7. а - Число  $N$  пар экстремумов экспериментального временного ряда, удаленных на  $\tau$  друг от друга, нормированное на общее число экстремумов.  $\tau_0=108$  мс,  $N_{\min}(\tau)=N(108 \text{ мс})=0$ . б - Восстановленная нелинейная функция

четко различим при уровне шума, в 2-3 раза большем минимального, его положение может быть использовано само по себе для оценки времени запаздывания  $\tau_0$  сверху по сильно зашумленным временным рядам. Предложенный способ определения времени запаздывания использует только операции сравнения и сложения, не применяя ни сортировку точек, ни вычисление ошибки аппроксимации или каких-либо мер сложности движения, а поэтому не требует больших вычислительных затрат. Последнее перспективно для обработки данных в реальном времени и для создания устройств экспресс-анализа с помощью компактных вычислительных устройств. Применение метода может также оказаться перспективным при разработке подходов, альтернативных предложенным в [14, 24], для решения задачи выделения сигнала сообщения, зашумленного хаотическим сигналом системы с запаздыванием.

Рассмотренный на примере систем вида (1) способ определения времени запаздывания по графику зависимости  $N(\tau)$  может быть успешно применен к временным рядам систем с запаздыванием более общего вида

$$\dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau_0)). \quad (10)$$

Продифференцировав уравнение (10) по времени, получим

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial F(x(t), x(t - \tau_0))}{\partial x(t)} \dot{x}(t) + \frac{\partial F(x(t), x(t - \tau_0))}{\partial x(t - \tau_0)} \dot{x}(t - \tau_0). \quad (11)$$

Для этого уравнения, так же как и для уравнения (4), в случае квадратичных экстремумов  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{x}(t - \tau_0)$  одновременно в ноль не обращаются: если  $\dot{x}(t) = 0$ , то  $\dot{x}(t - \tau_0) \neq 0$ .

Предложенный нами способ определения  $\tau_0$  по временному ряду в принципе может быть распространен на системы с запаздыванием более высокого порядка, имеющие вид

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} \dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau_0)), \quad (12)$$

где  $x^{(n)}(t)$  -  $n$ -я производная переменной  $x(t)$  по времени,  $a_1, \dots, a_{n-1}$  - коэффициенты. Дифференцирование уравнения (12) по  $t$  дает

$$x^{(n+1)}(t) + a_1 x^{(n)}(t) + \dots + a_{n-1} \ddot{x}(t) = \frac{\partial F(x(t), x(t - \tau_0))}{\partial x(t)} \dot{x}(t) + \frac{\partial F(x(t), x(t - \tau_0))}{\partial x(t - \tau_0)} \dot{x}(t - \tau_0). \quad (13)$$

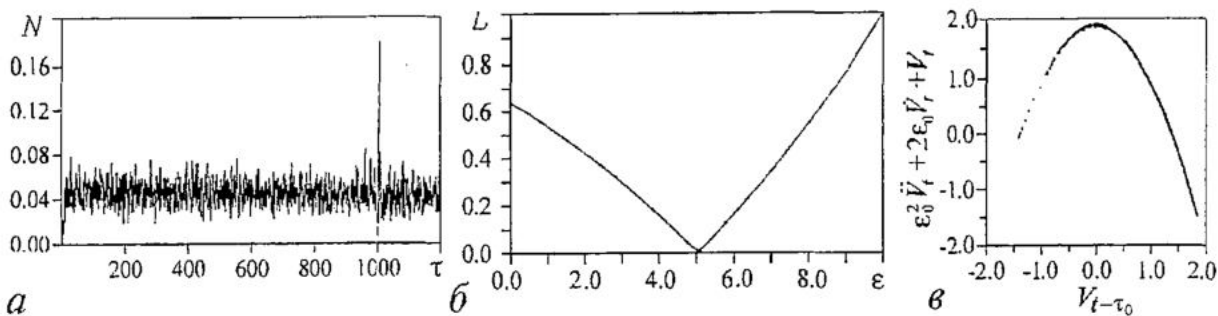


Рис. 8. *а* - Число  $N$  пар экстремумов временного ряда системы (14), удаленных на  $\tau$  друг от друга, нормированное на общее число экстремумов.  $\tau_0=1000$ ,  $\lambda=1.9$ ,  $\epsilon=5$ .  $N_{\min}(\tau)=N(1000)=0.006$ . *б* - Зависимость  $L(\epsilon)$ ,  $L_{\min}(\epsilon)=L(5.0)=0.013$ . *в* - Восстановленная нелинейная функция

При  $\dot{x}(t)=0$  условие  $\dot{x}(t - \tau_0) \neq 0$  должно выполняться в тех случаях, когда левая часть уравнения (13) отлична от нуля. Вероятность обращения левой части уравнения (13) в нуль в общем случае очень мала и поэтому график зависимости  $N(\tau)$  качественно должен иметь описанный нами вид.

В качестве иллюстрации мы применили метод к временным рядам генератора с запаздывающей обратной связью, изображенного на рис. 6, *а*, в котором последовательно с  $RC$ -фильтром был включен второй  $RC$ -фильтр, идентичный первому. Выведенное из законов Кирхгофа модельное уравнение такого генератора с двухзвенным фильтром имеет вид уравнения второго порядка с запаздыванием

$$\epsilon_0^2 \ddot{V}(t) + 2\epsilon_0 \dot{V}(t) = -V(t) + f(V(t - \tau_0)), \quad (14)$$

где  $V(t)$  и  $V(t - \tau_0)$  - напряжения на входе и выходе линии задержки,  $\epsilon = RC$ . На рис. 8, *а* график  $N(\tau)$  построен для временного ряда, полученного из численного решения уравнения (14) для случая, когда нелинейная функция имела вид (9). Абсолютный минимум зависимости  $N(\tau)$  позволяет точно определить  $\tau_0$ . Строя зависимости  $(\epsilon^2 \ddot{V}(t) + 2\epsilon \dot{V}(t) + V(t))$  от  $V(t - \tau_0)$  при вариации  $\epsilon$ , мы можем также оценить параметр  $\epsilon_0$  по минимуму  $L(\epsilon)$  и восстановить функцию  $f$  (рис. 8, *б*, *в*). Качество восстановления, однако, несколько ухудшается, так как процедура связана с численным определением второй производной. Таким образом, предложенный метод восстановления уравнений систем с задержкой по временному ряду может быть успешно применен к широкому классу систем с запаздыванием.

Авторы выражают благодарность профессору Б.П. Безручко за постоянное внимание к работе и ряд ценных замечаний, сделанных при подготовке публикации.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-02-17578), гранта молодых ученых № 23 РАН, гранта CRDF № REC-006.*

### Библиографический список

1. *M.C. Mackey, L. Glass. Oscillations and chaos in physiological control systems // Science, 1977. Vol. 197. P. 287.*
2. *Gribkov D., Gribkova V. Learning dynamics from nonstationary time series: Analysis of electroencephalograms // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. P. 6538.*
3. *Кузнецов С.П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью (обзор) // Изв. вузов, Радиофизика. 1982. Т. 25. С. 1410.*
4. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике М.: Наука, 1989. 280 с.*



5. Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system // *Opt. Commun.*, 1979. Vol. 30. P. 257.
6. Bezruchko B.P., Smirnov D.A. Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63, 016207.
7. Horbelt W., Timmer J., Bünner M. J., Meucci R., Ciofini M. Identifying physical properties of a CO<sub>2</sub> laser by dynamical modeling of measured time series // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 64. 016222.
8. Anishchenko V.S., Pavlov A.N., Janson N.B. Global reconstruction in the presence of a priori information // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1998. Vol. 8. P. 1267.
9. Farmer J.D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // *Physica D*. 1982. Vol. 4. P. 366.
10. Bünner M.J., Popp M., Meyer Th., Kittel A., Rau U., Parisi J. Recovery of scalar time-delay systems from time series // *Phys. Lett. A*. 1996. Vol. 211. P. 345.
11. Bünner M.J., Popp M., Meyer Th., Kittel A., Parisi J. Tool to recover scalar time-delay systems from experimental time series // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 54. P. 3082.
12. Fowler A.C., Kember G. Delay recognition in chaotic time series // *Phys. Lett. A*. 1993. Vol. 175. P. 402.
13. Hegger R., Bünner M.J., Kantz H. Identifying and modeling delay feedback systems // *Phys. Rev. Lett.*, 1998. Vol. 81. P. 558.
14. Zhou C., Lai C.-H. Extracting messages masked by chaotic signals of time-delay systems // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60. P. 320.
15. Tian Y.-C., Gao F. Extraction of delay information from chaotic time series based on information entropy // *Physica D*. 1997. Vol. 108. P. 113.
16. Kaplan D.T., Glass L. Coarse-grained embeddings of time series: random walks, gaussian random process, and deterministic chaos // *Physica D*. 1993. Vol. 64. P. 431.
17. Bünner M.J., Meyer Th., Kittel A., Parisi J. Recovery of the time-evolution equation of time-delay systems from time series // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 56. P. 5083.
18. Voss H., Kurths J. Reconstruction of non-linear time delay models from data by the use of optimal transformations // *Phys. Lett. A*. 1997. Vol. 234. P. 336.
19. Ellner S.P., Kendall B.E., Wood S.N., McCauley E., Briggs C.J. Inferring mechanism from time-series data: delay differential equations // *Physica D*. 1997. Vol. 110. P. 182.
20. Eurich C.W., Milton J.G. Noise-induced transitions in human postural sway // *Phys. Rev. E*, 1996. Vol. 54. P. 6681.
21. Ohira T., Sawatari R. Delay estimation from noisy time series // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55. P. 2077.
22. Bezruchko B.P., Karavaev A.S., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Reconstruction of time-delay systems from chaotic time series // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol.64. 056216.
23. Карavaев А.С., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. Восстановление моделей скалярных систем с запаздыванием по временным рядам // *Письма в ЖТФ*, 2001. Т.27. В.10. С. 43.
24. Mensour B., Longtin A. Synchronization of delay-differential equations with application to private communication // *Phys. Lett. A*. 1998. Vol. 244. P. 59.

Саратовское отделение Института  
радиотехники и электроники РАН

Поступила в редакцию 21.02.02

# RECONSTRUCTION OF TIME-DELAY SYSTEMS EQUATIONS OVER EXPERIMENTAL TIME SERIES

*V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov*

We propose a new method to reconstruct the time-delay differential equations over time series. The method is based on extreme location in the time series. On the base of information about time delay we determine nonlinear function and inertiality parameter. We verify our method by using it for the reconstruction of the time-delay differential equations from their chaotic solutions and for modelling experimental systems with delay-induced dynamics from their chaotic time series.



*Пономаренко Владимир Иванович* - родился в Саратове (1960). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992, СГУ). Работает старшим научным сотрудником в Саратовском отделении института радиотехники и электроники РАН, доцент ФНП. Область научных интересов - нелинейная динамика, экспериментальное моделирование сложных систем, методы параллельной обработки информации. Имеет более 40 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



*Прохоров Михаил Дмитриевич* - родился в Саратове (1968). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1992). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997, СГУ). Работает старшим научным сотрудником в Саратовском отделении института радиотехники, и электроники РАН. Область научных интересов - нелинейная динамика, экспериментальное и численное моделирование сложных систем, исследование систем с запаздыванием. Имеет более 40 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях. E-mail: SBIRE@sgu.ru



## СИНХРОНИЗАЦИЯ И РАЗВИТИЕ НЕСИНХРОННЫХ РЕЖИМОВ В СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ С ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

*В.П. Пономаренко*

Приведены результаты исследования динамических режимов и бифуркаций в нелинейной модели с двумя с половиной степенями свободы, описывающей процессы в связанных системах синхронизации по частоте и задержке во времени в случае, когда одна из подсистем индивидуально демонстрирует как регулярные, так и хаотические режимы поведения, а другая - только регулярные режимы. Установлено, что в зависимости от начальной частотной расстройки и параметров инерционности цепей управления в системе возможно возбуждение разнообразных регулярных и хаотических несинхронных режимов. Определены границы областей синхронизации, исследованы сценарии преобразования несинхронных режимов при изменении параметров. Результаты представлены в виде двухпараметрического портрета движений и однопараметрических бифуркационных диаграмм.

**1.** В настоящее время проводятся интенсивные исследования разнообразных нелинейных динамических моделей, способных демонстрировать хаотическое поведение. Большой интерес проявляется к моделям связанных автоколебательных систем, к углубленному изучению возникающих в них явлений коллективной динамики, условий и механизмов возбуждения хаотических колебаний при различных свойствах индивидуального поведения подсистем. В широком классе связанных автоколебательных систем важное место занимают системы взаимодействующих автогенераторов, управляемых по частоте с использованием принципа фазовой синхронизации [1, 2]. Среди таких систем значительный интерес для многочисленных приложений представляют взаимосвязанные системы, состоящие из небольшого числа (двух, трех) подсистем, - так называемые низкоразмерные системы. Изучение возникающих в них процессов сложной динамики и выяснение роли параметров цепей управления и связей между подсистемами в характере этих процессов имеют как теоретический интерес, так и прикладное значение.

В данной работе представлены результаты исследования динамических режимов и бифуркаций в двухкольцевой системе синхронизации (ДСС), которая объединяет подсистемы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) и автоподстройки задержки во времени (АПЗ). Такие системы широко применяются при решении задач передачи и обработки информации в радиотехнических системах со сложными сигналами в качестве схемной реализации оптимальных

алгоритмов следящей оценки фазового угла  $\Theta(t)$  и задержки  $T(t)$  сигналов с псевдослучайной фазовой манипуляцией [3,4]. Основные элементы системы - управляемые генераторы, при помощи которых синтезируется опорный сигнал с параметрами  $\Theta^*(t)$  и  $T^*(t)$  (оценками изменяющихся параметров входного сигнала  $\Theta(t)$  и  $T(t)$ ), нелинейные дискриминаторы рассогласований  $\varphi = \Theta(t) - \Theta^*(t)$  и  $\eta = T(t) - T^*(t)$  и цепи управления с фильтрами низких частот (ФНЧ), типы которых определяются используемыми моделями динамики оцениваемых параметров  $\Theta(t)$  и  $T(t)$ . Благодаря нелинейности и инерционности цепей управления и связям между подсистемами в рассматриваемых ДСС наряду с возможностью слежения за параметрами входного сигнала создаются условия для возбуждения сложных автомодуляционных колебаний, проявления эффектов динамического хаоса и управления свойствами и областями существования генерируемых колебаний. Богатый набор колебательных режимов и возможность эффективного воздействия на их свойства и области существования делает взаимодействующие ДСС интересными объектами для исследования динамических закономерностей поведения, свойственных связанным автоколебательным системам.

Мы рассматриваем динамику одной из базовых структур ДСС, в которой взаимодействие подсистем реализуется через связь с выхода подсистемы АПЗ на вход подсистемы ФАПЧ, необходимую для демодуляции входного сигнала, и через связь по цепям управления, посредством которой сигнал о фазовом рассогласовании, образующийся в петле фазовой автоподстройки, передается в цепь управления задержкой [3, 5-7]. Традиционное назначение систем с такой структурой состоит в обеспечении и поддержании стационарного состояния, в котором величины  $\varphi$  и  $\eta$  имеют минимальные значения. Это состояние принято называть режимом синхронизации опорного сигнала, формируемого с помощью подсистем ФАПЧ и АПЗ по входному сигналу. Режиму синхронизации отвечает устойчивое состояние равновесия в фазовом пространстве соответствующей динамической модели. Отыскание условий реализации синхронного режима тесно связано с исследованием асинхронных режимов с непостоянными величинами рассогласований  $\varphi$  и  $\eta$ , которым соответствуют автоколебательные движения динамической модели. Бифуркации, в результате которых появляются асинхронные режимы, определяют в пространстве параметров модели границы областей захвата в синхронный режим. Исследование асинхронных режимов актуально также в целях расширения функциональных возможностей ДСС, в частности, для использования системы в качестве синтезатора шумоподобных колебаний с управляемыми характеристиками.

В зависимости от типа ФНЧ в цепях управления отдельные подсистемы ФАПЧ и АПЗ могут демонстрировать регулярную или хаотическую динамику. В работах [6, 7] исследовалась динамика ДСС, описываемой уравнениями (1), в случае, когда ее подсистемы характеризуются регулярным поведением. Оказалось, что взаимодействие подсистем ФАПЧ и АПЗ приводит к появлению новых колебательных режимов и к существенно более сложной картине бифуркационных переходов, не свойственных одиночным подсистемам. В данной работе, продолжающей исследования [6, 7], рассматриваются особенности динамического поведения ДСС в случае, когда подсистема ФАПЧ автономно демонстрирует только регулярное поведение, а в автономной подсистеме АПЗ наряду с регулярными возможны хаотические асинхронные режимы. Такой случай реализуется при использовании в цепях управления ФАПЧ и АПЗ фильтров, соответственно, первого и третьего порядка.

**2.** Уравнения динамики рассматриваемой ДСС, записанные в операторной форме ( $p = d/dt$ ) для рассогласований  $\varphi$  и  $\eta$ , имеют вид [3, 7]

$$p \varphi / k = \gamma - F_1(p) R(x) \sin \varphi, \quad (1)$$

$$x = \sigma - b F_2(p) (D(x) + \alpha b^{-1} R(x) \sin \varphi),$$

где  $x = \eta / \Delta$  ( $\Delta$  - длительность одного элемента манипулирующего псевдослучайного сигнала);  $k$  и  $b$  - коэффициенты усиления по цепям управления;  $\alpha$  - степень связи через управляющие сигналы;  $\gamma = p \Theta / k$  и  $\sigma = (T - T_0) / \Delta$  - начальная частотная и временная расстройки,  $T_0$  - начальное значение задержки сигнала, генерируемого в подсистеме АПЗ;  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$  - коэффициенты передачи ФНЧ в цепях управления ФАПЧ и АПЗ;  $R(x)$  и  $D(x)$  - нелинейности, представляемые зависимостями

$$R(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad D(x) = \begin{cases} -2-x, & -2 \leq x \leq -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

В уравнениях (1)  $R(x)$  - корреляционная функция манипулирующего сигнала, а функции  $\sin \varphi$  и  $D(x) = R(x-1) - R(x+1)$  представляют характеристики дискриминаторов рассогласований фаз и задержек.

В соответствии с постановкой задачи рассмотрим коэффициенты передачи ФНЧ

$$F_1(p) = (1 + m T_1 p) / (1 + T_1 p),$$

$$F_2(p) = 1 / (1 + (T_2 + T_3 + T_4)p + (T_2 T_3 + T_2 T_4 + T_3 T_4)p^2 + T_2 T_3 T_4 p^3),$$

где  $T_1, T_2, T_3$  и  $T_4$  - постоянные времена,  $0 \leq m < 1$ . Соответствующие выбранным операторам  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$  уравнения, описывающие динамику процессов в исследуемой ДСС, на основании (1) после перехода к безразмерному времени  $\tau = k t$  записываются в виде

$$d\varphi/d\tau = u - m R(x) \sin \varphi,$$

$$\varepsilon_1 du/d\tau = \gamma - u - (1 - m) R(x) \sin \varphi, \quad (2)$$

$$dx/d\tau = y,$$

$$dy/d\tau = z,$$

$$\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 dz/d\tau = \sigma - x - b D(x) - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) y - (\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_4 + \varepsilon_3 \varepsilon_4) z - \alpha R(x) \sin \varphi = V(\varphi, x, y, z),$$

где  $\varepsilon_i = k T_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) - параметры инерционности. Система (2) имеет цилиндрическое фазовое пространство  $U = \{\varphi(\text{mod } 2\pi), u, x, y, z\}$ .

Поведение отдельной подсистемы ФАПЧ определяется двумя первыми уравнениями модели (2), в которых надо положить  $R(x) = 1$ . В цилиндрическом «парциальном фазовом пространстве»  $(\varphi(\text{mod } 2\pi), u)$  существует два типа аттракторов: состояние равновесия и вращательный ( $2\pi$ -периодический по  $\varphi$ ) предельный цикл [8]. Уравнения динамики отдельной системы АПЗ с ФНЧ третьего порядка получаем из трех последних уравнений системы (2), полагая в них  $\alpha = 0$ . Отметим, что получаемые уравнения совпадают с уравнениями динамики автогенератора с частотной автоподстройкой [9]. На основании результатов [9] в «парциальном фазовом пространстве»  $(x, y, z)$  модели подсистемы АПЗ наряду с состояниями равновесия следует ожидать существования периодических и хаотических аттракторов.

Отметим, что при  $\varepsilon_4 \ll \min(1, \varepsilon_1, (\varepsilon_2 \varepsilon_3)^{-1})$  система (2) имеет малый параметр

при производной  $dz/dt$ . Так как  $V'_z = -(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4 + \varepsilon_3\varepsilon_4) < 0$ , то система (2) имеет в фазовом пространстве  $U$  асимптотически устойчивую интегральную поверхность  $W: \{z = (\sigma - x - bD(x) - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)y - \alpha R(x) \sin \varphi)(\varepsilon_2 \varepsilon_3)^{-1}\}$ , движения на которой определяются системой уравнений, рассмотренной в [6, 7].

Движения модели (2), развивающиеся в фазовом пространстве  $U$ , зависят от девяти параметров. Для того чтобы получить представление о возможных динамических состояниях и бифуркациях модели (2), мы выбрали в качестве управляющих параметров начальную расстройку  $\gamma$  и параметр инерционности  $\varepsilon_4$ , который характеризует степень влияния ФНЧ третьего порядка подсистемы АПЗ на режимы поведения ДСС. В силу существенной нелинейности модели (2) ее нелокальное исследование сопряжено с большими трудностями, в связи с чем применено компьютерное моделирование, которое базируется на качественно-численных методах анализа нелинейных динамических систем [10, 11] и использовании программного комплекса [12], обеспечивающего решение задач обнаружения периодических и хаотических движений и исследование их бифуркаций в динамических моделях с цилиндрическим фазовым пространством. Исследование периодических движений проведено при помощи анализа неподвижных точек отображения Пуанкаре  $T_\varphi$  плоскости  $\varphi = \varphi^0$  в плоскость  $\varphi = \varphi^0 + 2\pi$ .

**3.** Исследование динамики ДСС естественно начать с анализа устойчивости режима синхронизации. Система (2), как и в случае, рассмотренном в [6, 7], при значениях параметров  $(\sigma, \gamma, b, \alpha) \in C_0$ , где

$$C_0 = \{\max(\gamma_3, \gamma_4) < \gamma < \min(\gamma_1, \gamma_2)\}, \quad (4)$$

$$\gamma_{1,2} = (1+b \mp \sigma)/(1+b \mp \alpha), \quad \gamma_{3,4} = -(1+b \pm \sigma)(1+b \mp \alpha),$$

имеет два состояния равновесия  $A_1(\varphi_1, m\gamma, x_1, 0, 0)$  и  $A_2(\pi - \varphi_1, m\gamma, x_1, 0, 0)$ , расположенные в области  $-1 < x < 1$  фазового пространства  $U$ . Координаты  $\varphi_1$  и  $x_1$  определяются равенствами

$$\varphi_1 = \arcsin(\gamma/(1 - x_1 \operatorname{sign}(\sigma - \alpha\gamma))), \quad x_1 = (\sigma - \alpha\gamma)/(1+b). \quad (5)$$

Состояние равновесия  $A_1$  может быть как устойчивым, так и неустойчивым, состояние равновесия  $A_2$  - неустойчивое седлового типа. Устойчивость состояния равновесия  $A_1$  определяем из анализа коэффициентов характеристического уравнения

$$\lambda^5 + q_1 \lambda^4 + q_2 \lambda^3 + q_3 \lambda^2 + q_4 \lambda + q_0 = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} q_1 &= -(a_1 + b_1 + c_1), \\ q_2 &= b_1(a_1 + c_1) + a_1c_1 - b_2 - c_2, \\ q_3 &= -(a_1b_1c_1 - (a_1 + b_1)c_2 + c_3 - b_2c_1), \\ q_4 &= -(c_2(a_1b_1 - b_2) + a_2c_4 - c_3(a_1 + b_1)), \\ q_0 &= c_4(a_2b_1 - b_3) + c_3(b_2 - a_1b_1), \\ a_1 &= -m((1 - (\sigma - \alpha\gamma) \operatorname{sign}(\sigma - \alpha\gamma)/(1+b))^2 - \gamma^2)^{1/2}, \\ a_2 &= m\gamma \operatorname{sign}(\sigma - \alpha\gamma) / (1 - (\sigma - \alpha\gamma) \operatorname{sign}(\sigma - \alpha\gamma)/(1+b)), \\ b_1 &= -1/\varepsilon_1, \\ b_2 &= (1-m)a_1(m\varepsilon_1)^{-1}, \\ c_1 &= -(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4 + \varepsilon_3\varepsilon_4)(\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)^{-1}, \\ c_2 &= -(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)(\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)^{-1}, \\ c_3 &= (\alpha a_2 - m(1+b))(m\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)^{-1}, \\ c_4 &= \alpha a_1(m\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)^{-1}. \end{aligned}$$

Условия устойчивости записываются в виде

$$q_1, q_2, q_3, q_4, q_0 > 0, \quad q_1 q_2 - q_3 > 0, \quad (q_1 q_2 - q_3) (q_3 q_4 - q_2 q_0) - (q_1 q_4 - q_0)^2 > 0. \quad (7)$$

При выполнении условий (7) существует синхронный режим ДСС, соответствующий состоянию равновесия  $A_1$ . Величины  $\varphi_1$  и  $x_1$ , определяемые (5), характеризуют точность оценки параметров входного сигнала. Область значений параметров  $C_s$ , в которой выполняются условия (7), соответствует области удержания режима синхронизации.

4. Рассмотрим динамические процессы, развивающиеся в модели (2) с изменением параметров  $\gamma$  и  $\epsilon_4$  при фиксированных значениях остальных параметров. Как показали результаты численного исследования, система (2) может иметь большое число разнообразных предельных циклов в фазовом пространстве, и полная картина расположения бифуркационных кривых на плоскости  $(\epsilon_4, \gamma)$  представляется достаточно сложной. На рис. 1 приведены некоторые из таких кривых, соответствующие бифуркациям состояний равновесия (кривые  $l_1 - l_5$ ) и предельных циклов (кривые  $l_6 - l_8, r_0 - r_9$ ) системы (2), построенные при значениях  $\sigma=0.5, b=10, \epsilon_1=1, \epsilon_2=2, \epsilon_3=3, m=0.1, \alpha=5$ .

Линия  $l_1$  - это граница  $\gamma_2$  области  $C_0$  существования состояний равновесия  $A_1$  и  $A_2$ , определяемая (4). Линии  $l_2$  и  $l_3$  - границы области  $C_s$  устойчивости состояния равновесия  $A_1$ , определяемой условиями (7); область  $C_s$  расположена слева от кривой  $l_2$  и справа от кривой  $l_3$ . При переходе с увеличением (уменьшением)  $\epsilon_4$  через кривую  $l_2$  ( $l_3$ ) в модели (2) наблюдается бифуркация Андронова - Хопфа,

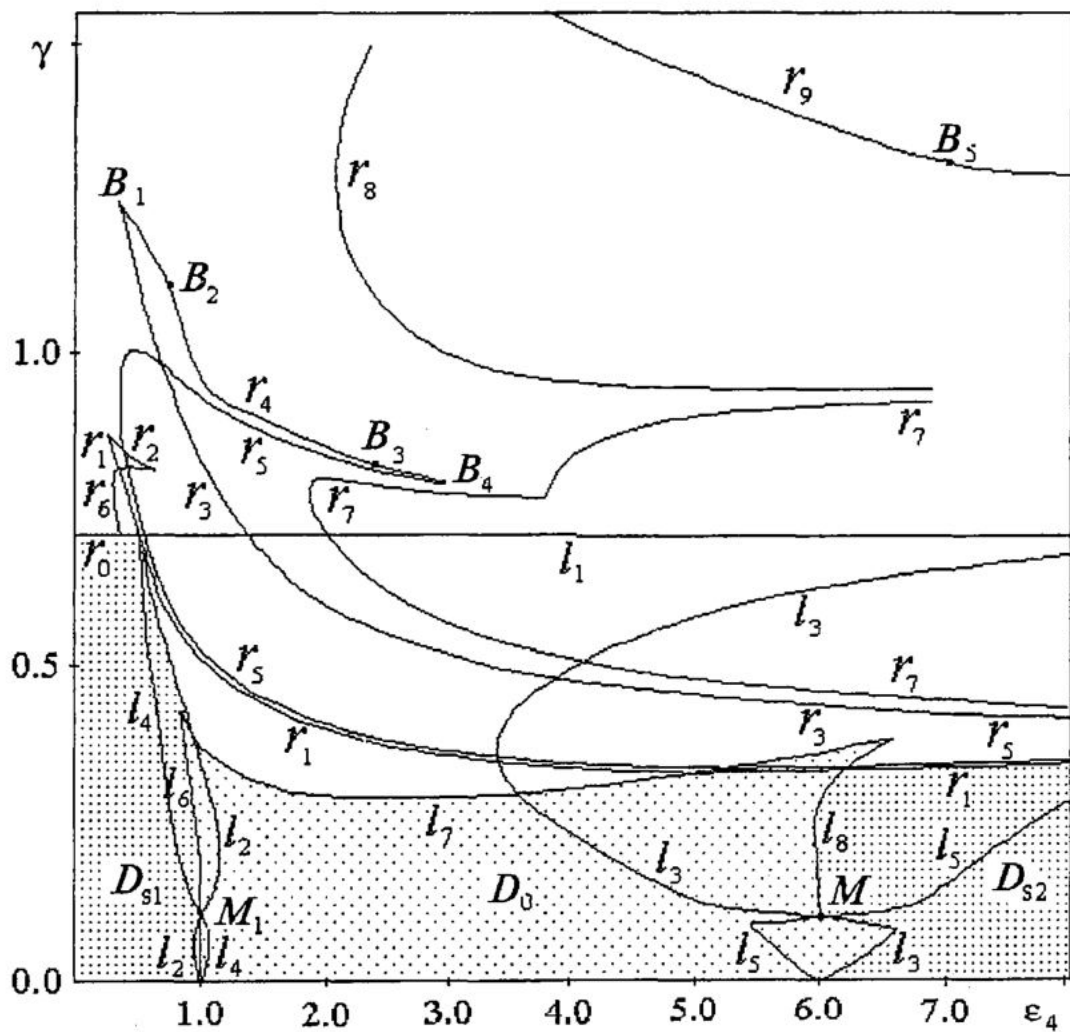


Рис. 1. Параметрический портрет  $(\epsilon_4, \gamma)$  модели (2)

когда в решении характеристического уравнения (6) появляется пара комплексно-сопряженных корней с положительной реальной частью. Эта бифуркация является суперкритической на линии  $l_2$  и на части  $l'_3$  линии  $l_3$  ниже точки  $M$  и субкритической на части  $l''_3$  линии  $l_3$  выше точки  $M$ . При пересечении линии  $l_2$  (линии  $l'_3$ ) с увеличением (уменьшением)  $\epsilon_4$  в фазовом пространстве системы (2) мягко рождается устойчивый предельный цикл  $L_0$ , соответствующий квазисинхронному режиму ДСС.

В этом режиме наблюдаются автомодуляционные колебания относительно ставшего неустойчивым состояния равновесия  $A_1$ . При переходе с уменьшением  $\epsilon_4$  через линию  $l''_3$  состояние равновесия  $A_1$  становится неустойчивым в результате стягивания к нему седлового предельного цикла  $S_0$ .

Линии  $l_4$  и  $l_5$  соответствуют бифуркации Андронова - Хопфа для состояния равновесия  $A_2$ . При переходе с увеличением (уменьшением)  $\epsilon_4$  через линию  $l_4$  ( $l_5$ ) в фазовом пространстве системы (2) рождается седловой предельный цикл колебательного типа  $S_0$ . Линии  $l_6$ ,  $l_7$  и  $l_8$  соответствуют седло-узловым бифуркациям предельных циклов колебательного типа. Установлено существование еще двух кривых  $l_9$  и  $l_{10}$ , отвечающих седло-узловой бифуркации колебательных предельных циклов. Кривая  $l_9$  проходит вблизи части кривой  $l_2$  выше точки  $M_1$  справа от кривой  $l_2$ , кривая  $l_{10}$  - между частями кривых  $l_4$  и  $l_6$  ниже точки  $M_1$  (на рис.1 кривые  $l_9$  и  $l_{10}$  не построены).

В результате седло-узловых бифуркаций происходит рождение в фазовом пространстве пары устойчивого и седлового предельных циклов при пересечении линий  $l_6$ ,  $l_9$  и  $l_{10}$  (кривой  $l_8$ ) с увеличением (уменьшением) параметра  $\epsilon_4$  и при пересечении линии  $l_7$  с уменьшением параметра  $\gamma$  или исчезновении этих циклов при обратном движении по параметрам  $\epsilon_4$  и  $\gamma$ . На рис. 2, а представлена  $(\varphi, x)$ -проекция фазового портрета колебательного предельного цикла  $L_0$ .

Представленное на рис. 1 расположение бифуркационных кривых  $l_1$ - $l_8$  позволяет выделить в области  $C_0 = \{0 \leq \gamma < \gamma_2\}$  области существования  $C_s$  синхронного и  $D_0$  квазисинхронных режимов ДСС. Область  $C_s = C_{s1} \cup C_{s2}$ , где область  $C_{s1}$  ограничена частью кривой  $l_1$  и кривой  $l_2$ , а область  $C_{s2}$  охватывает значения  $\epsilon_4$  и  $\gamma$  справа от линии  $l_3$ . Область  $D_0$  ограничена частью линии  $l_2$  ниже точки  $M_1$ , частью линии  $l_6$  выше точки  $M_1$ , линиями  $l_7$  и  $l_8$  и частью линии  $l_3$  ниже точки  $M$ . Отметим, что квазисинхронный режим ДСС существует также вне  $D_0$  в узкой области между линиями  $l_2$  и  $l_9$ . Обратим внимание и на то, что в  $D_0$  для значений параметров из невидных в масштабе рис.1 узких областей между линиями  $l_2$  и  $l_9$  и между линиями  $l_6$  и  $l_{10}$  в фазовом пространстве существуют два устойчивых колебательных предельных цикла; какой из двух квазисинхронных режимов, определяемых этими циклами, реализуется в системе для указанных узких областей, зависит от начального состояния системы.

Выход из области  $D_0$  через границы  $l_2$  и  $l_3$  (через границы  $l_6$ ,  $l_8$  и часть границы  $l_7$  в области  $C_{s1}$ ) приводит к мягкому (жесткому) прекращению автомодуляционных колебаний и установлению в системе синхронного режима. При переходе с увеличением  $\gamma$  через часть границы  $l_7$  между областями  $C_{s1}$  и  $C_{s2}$  одновременно с исчезновением квазисинхронного режима появляется перемежаемость - чередование длинной стадии колебательных движений с относительно короткими нерегулярными всплесками вращательных движений. Через перемежаемость в фазовом пространстве возникает хаотический аттрактор  $P_1$  колебательно-вращательного типа, соответствующие ему  $(\varphi, x)$ - и  $(u, x)$ -проекции фазового портрета, зависимости  $\varphi(\tau)$  и  $u(\tau)$  приведены на рис. 2, б-д. Поведение фазовой траектории на аттракторе  $P_1$  представляет собой чередование движений в окрестности исчезнувшего седло-узлового колебательного предельного цикла и вращательных движений с нарастанием разности фаз  $\varphi$ . С удалением от границы  $l_7$



частота и длительность вращательных движений возрастают (рис. 2, *e, ж*). Переход из области  $D_0$  через часть границы  $l_7$ , расположенной в области  $C_{s2}$ , сопровождается либо возникновением колебательно-вращательного хаотического аттрактора, либо установлением синхронного режима.

Линии  $r_0 - r_9$ , построенные на рис. 1, соответствуют бифуркациям вращательных однооборотных ( $2\pi$ -периодических по  $\varphi$ ) предельных циклов системы (2). Линии  $r_1, r_2, r_3$  и части линии  $r_4$  между точками  $B_1$  и  $B_2$  и между точками  $B_3$  и  $B_4$  отвечают седло-узловым бифуркациям (при этом появление устойчивого и седлового циклов происходит при пересечении линий  $r_1$  и  $r_3$  с увеличением  $\gamma$  и линий  $r_2$  и  $r_4$  с уменьшением  $\gamma$ ). На линиях  $r_5, r_6, r_7$  и на части линии  $r_9$  справа от точки  $B_5$  происходят бифуркации удвоения периода. Линия  $r_8$ , часть линии  $r_4$  между точками  $B_2$  и  $B_3$  и часть линии  $r_9$  слева от точки  $B_5$  являются линиями бифуркации рождения двумерного тора (тор рождается при пересечении линий  $r_4$  и  $r_8$  с увеличением  $\epsilon_4$ , а линии  $r_9$  - с уменьшением  $\gamma$ , когда пара комплексно-сопряженных мультипликаторов предельного цикла пересекает единичную окружность). Линия

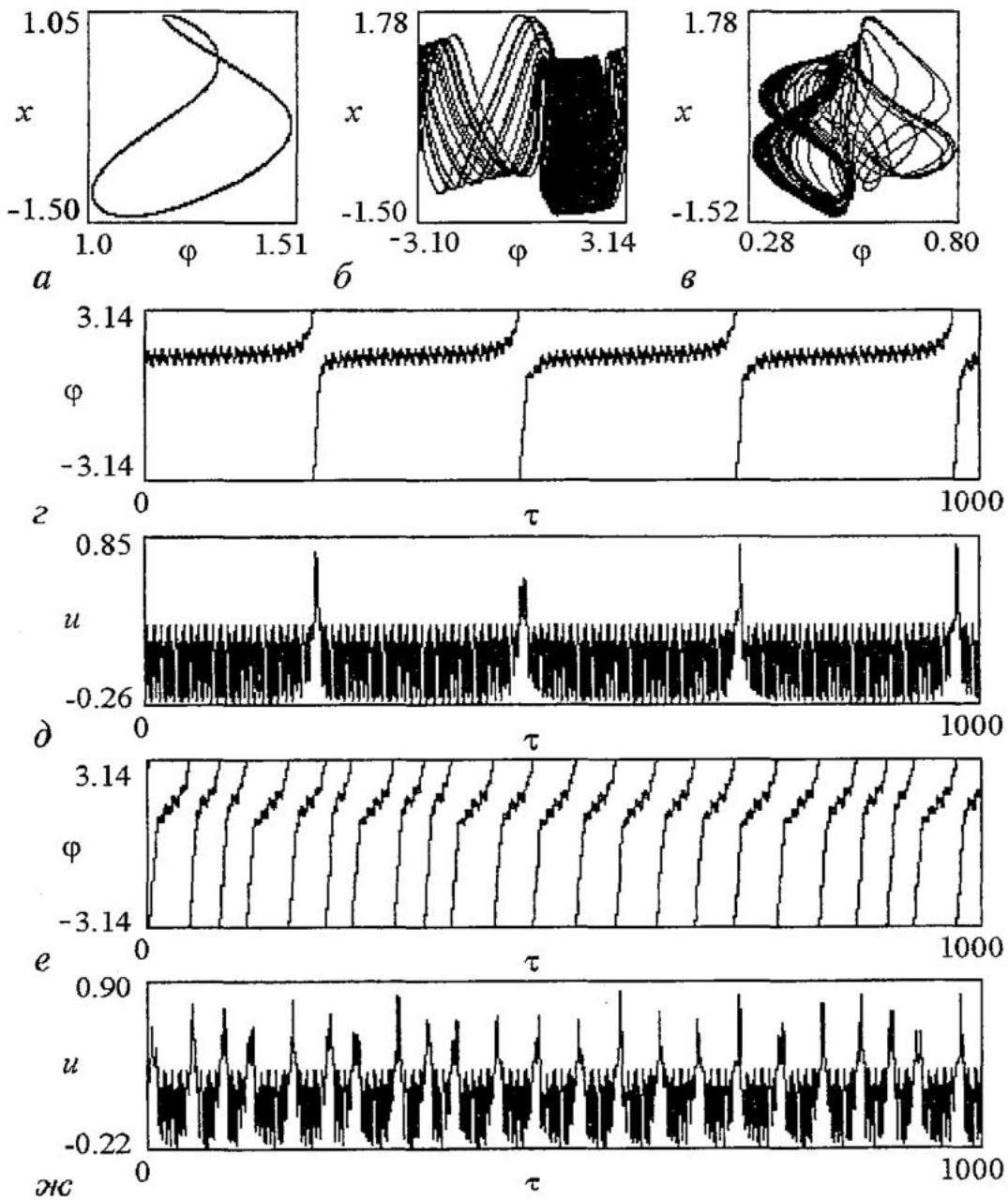


Рис. 2. Проекция фазовых портретов и зависимости  $\varphi(\tau)$  и  $u(\tau)$  при  $\epsilon_4=2.5$ ;  $\gamma=0.28$  (*a*),  $0.289$  (*б-д*),  $0.31$  (*е, ж*)

$r_6$  смыкается с линией  $r_0$ , соответствующей бифуркации петли сепаратрисы седло-фокуса  $A_2$  с отрицательной седловой величиной  $\sigma_c = \lambda_5 + \text{Re } \lambda_i$  ( $i=1,2,3,4$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_5$  - корни характеристического уравнения (6) для точки  $A_2$ ,  $\lambda_{1,2} < 0$ ,  $\text{Re } \lambda_{3,4} < 0$ ,  $\text{Im } \lambda_{3,4} \neq 0$ ,  $\lambda_5 > 0$ ); линия  $r_0$  проходит вблизи (ниже) линии  $l_1$ . При переходе с увеличением  $\gamma$  через линию  $r_0$  из петли сепаратрисы появляется устойчивый вращательный ( $2\pi$ -периодический по  $\varphi$ ) предельный цикл.

Обратим внимание на то, что линия  $r_0$  проходит в области  $C_{s1}$ , а части линий  $r_1$ ,  $r_3$ ,  $r_5$  и  $r_7$  расположены в области  $C_{s2}$ . Это означает, что вращательные предельные циклы системы (2), рождающиеся при пересечении линий  $r_1$ ,  $r_3$  и  $r_0$ , существуют в фазовом пространстве одновременно с устойчивым состоянием равновесия  $A_1$ . Из характера расположения бифуркационных линий на рис.1 следует, что в области  $D_{s1} = C_{s1} \setminus C_p$ , где  $C_p = \{C_{s1} \cap D_0\} \cup C_r$ , а область  $C_r$  заключена между частью линии  $l_1$  и линией  $r_0$ , и в области  $D_{s2}$ , охватывающей значения  $\epsilon_4$  и  $\gamma$  ниже линии  $r_1$  справа от линии  $l_8$  и части линии  $l_3$  ниже точки  $M$ , аттрактором системы (2) в фазовом пространстве служит состояние равновесия  $A_1$ . При значениях  $\epsilon_4$  и  $\gamma$  в областях  $D_{s1}$  и  $D_{s2}$  синхронный режим реализуется в ДСС при любых начальных условиях. Переход через границы областей  $D_{s1}$  и  $D_{s2}$  приводит к возможности установления в системе квазисинхронного или асинхронного режимов.

5. Рассмотрим динамические режимы и бифуркации, реализуемые в системе после прекращения синхронного режима при значениях  $\gamma$  и  $\epsilon_4$  вне областей  $C_{s1}$  и  $C_{s2}$ . На рис. 3 приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма ( $\gamma, y$ ), соответствующая  $\epsilon_4 = 0.4$ , а на рис. 4 даны  $(\varphi, y)$ -проекции фазовых портретов аттракторов ( $a, в - e, з$ ) и  $(y, x)$ -проекции точечного отображения  $T_\varphi$ , порождаемого траекториями модели (2) ( $б, ж$ ). Диаграмма ( $\gamma, y$ ) отражает динамику асинхронных режимов, возникающих после перехода границы области  $C_{s1}$ .

Из  $(\gamma, y)$ -диаграммы видно, что после прекращения синхронного режима система переходит к хаотическому асинхронному режиму на аттракторе  $P_2$  колебательно-вращательного типа (рис. 4,  $a, б$ ). При увеличении  $\gamma$  режим аттрактора  $P_2$  преобразуется в режим двухоборотного ( $4\pi$ -периодического по  $\varphi$ ) предельного цикла  $L_1^2$  ( $в$ ), который затем жестко сменяется режимом колебаний на однооборотном ( $2\pi$ -периодическом по  $\varphi$ ) предельном цикле  $L_1^1$  ( $з$ ). В свою

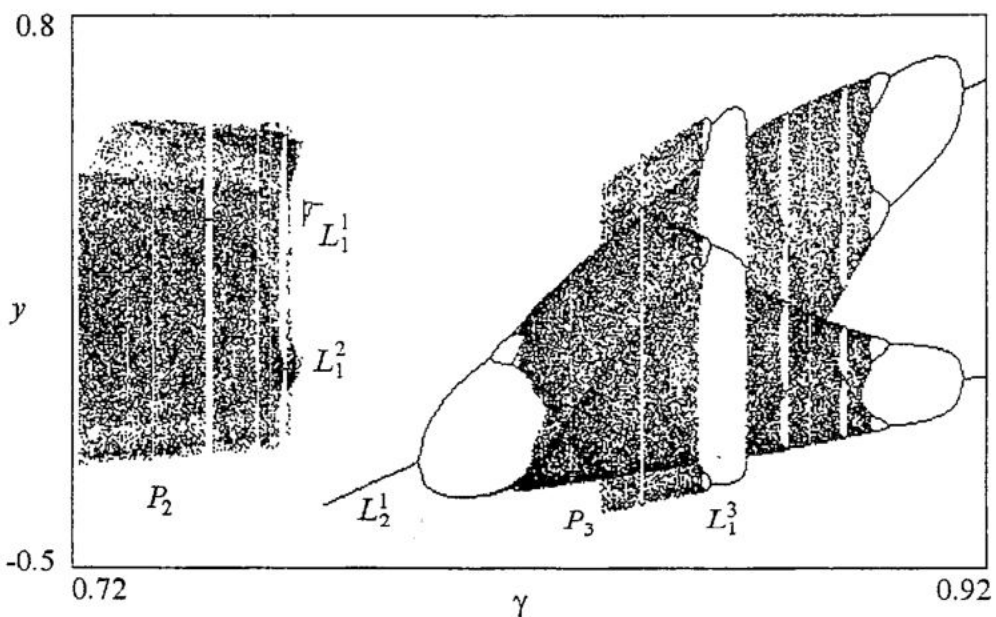


Рис. 3. Диаграмма развития асинхронных режимов при изменении  $\gamma$ , соответствующая  $\epsilon_4 = 0.4$

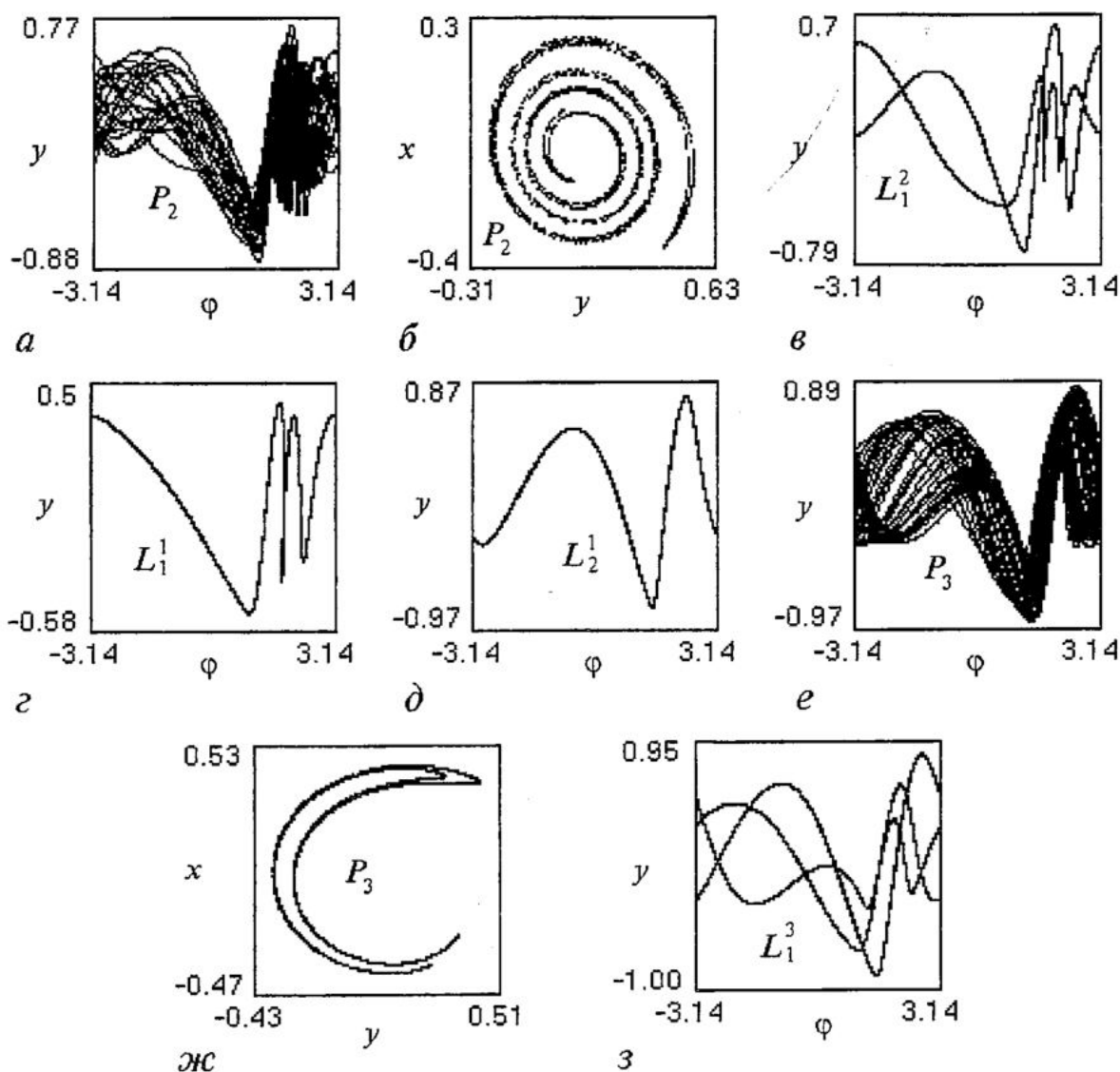


Рис. 4. Проекция фазовых портретов и отображения  $T_\varphi$ , соответствующие аттракторам модели (2), при  $\varepsilon_4=0.4$ ;  $\gamma=0.74$  (а, б), 0.769 (в), 0.772 (г), 0.79 (д), 0.84 (е, ж), 0.86 (з)

очередь, режим цикла  $L_1^1$  при  $\gamma > 0.7736$  жестко преобразуется в режим однооборотного вращательного предельного цикла  $L_2^1$  (д). Цикл  $L_2^1$  через бифуркации удвоения периода преобразуется в хаотический вращательный аттрактор  $P_3$  (е, ж). В интервале  $0.8171 < \gamma < 0.8943$  наблюдается чередование хаотических и периодических асинхронных режимов на сложных вращательных предельных циклах (на рис. 4, з дан фазовый портрет одного из таких циклов - трехоборотного, бипериодического по  $\varphi$ , предельного цикла  $L_1^3$ ). От колебаний на аттракторе  $P_3$  система возвращается при  $\gamma > 1.037$  к режиму предельного цикла  $L_2^1$  через бифуркации, обратные бифуркациям удвоения.

Развитие асинхронных режимов, реализуемых в системе после перехода границы области  $S_{22}$ , показывает бифуркационная диаграмма  $(\gamma, x)$ , соответствующая  $\varepsilon_4=5.75$  (рис. 5, а). Здесь после прекращения синхронного режима система также переходит к режиму колебательно-вращательного хаотического аттрактора  $P_4$ . Для движений на этом аттракторе характерно нерегулярное чередование колебаний относительно ставшего неустойчивым состояния равновесия  $A_1$  и колебаний с вращением разности фаз  $\varphi$ . На рис. 5, б даны фазовый портрет и зависимость  $x(\tau)$ , соответствующие аттрактору  $P_4$  вблизи границы области  $S_{22}$ . При увеличении  $\gamma$  длительность стадии колебательных движений на аттракторе  $P_4$  уменьшается. Как видно из рис. 5, а, для поведения системы с возрастанием  $\gamma$

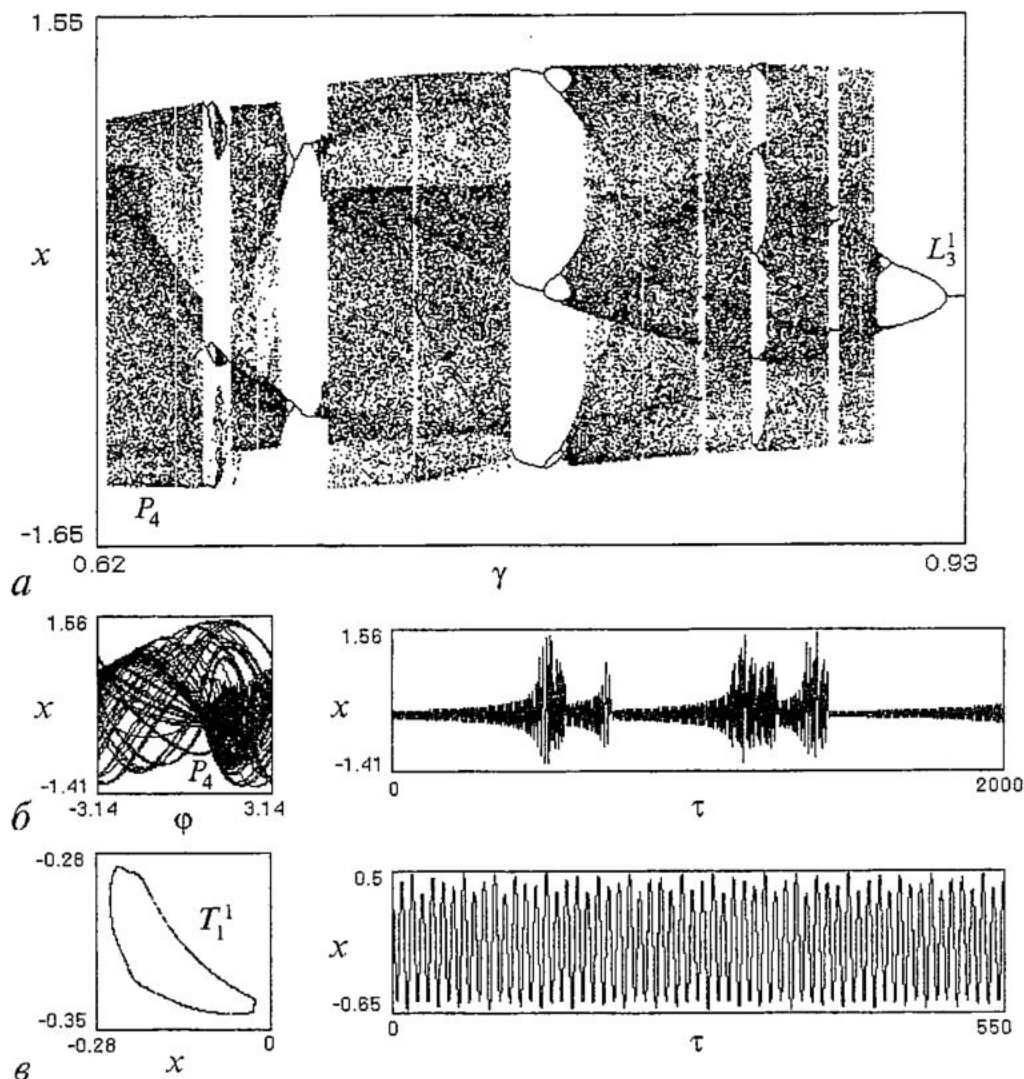


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма  $(\gamma, x)$  при  $\epsilon_4=5.75$  (а), фазовые портреты и зависимости  $x(\tau)$ , соответствующие хаотическому аттрактору  $P_4$  при  $\gamma=0.63$  (б) и тору  $T_1^1$  при  $\gamma=0.95$  (в)

свойственно чередование регулярных и хаотических асинхронных режимов. При этом для большей части интервала  $0.62 < \gamma < 0.93$  наблюдаются хаотические режимы, которые формируются на базе двухоборотного, трехоборотных и пятиоборотного ( $10\pi$ -периодического по  $\varphi$ ) предельных циклов системы (2).

При достижении параметром  $\gamma$  величины  $0.9237$  происходит мягкий переход к асинхронному режиму на однооборотном вращательном предельном цикле  $L_3^1$ . При  $\gamma > 0.9437$  (то есть при пересечении кривой  $r_8$ ) цикл  $L_3^1$  теряет устойчивость и в фазовом пространстве возникает двумерный тор  $T_1^1$ .

На рис. 5, в даны  $(x, \varphi)$ -проекция точечного отображения  $T_\varphi$  и зависимость  $x(\tau)$ , соответствующие тору  $T_1^1$ . При увеличении  $\gamma$  тор  $T_1^1$  разрушается, через хаотизацию колебаний система переходит в асинхронный режим на двухоборотном предельном цикле  $L_2^2$ , который существует в относительно широком интервале  $0.9632 < \gamma < 1.3474$ .

При  $\gamma > 1.3474$  возбуждается хаотический асинхронный режим, затем наблюдается мягкий переход к периодическому асинхронному режиму на пятиоборотном предельном цикле. С увеличением  $\gamma$  этот режим жестко сменяется режимом другого пятиоборотного цикла  $L_5^5$ , который при  $\gamma > 1.4908$  жестко преобразуется в режим однооборотного вращательного предельного цикла  $L_4^1$ . Этот режим поддерживается в системе при дальнейшем увеличении расстройки  $\gamma$ .

При значениях  $\gamma > 1.487$  кроме указанных выше обнаружены следующие

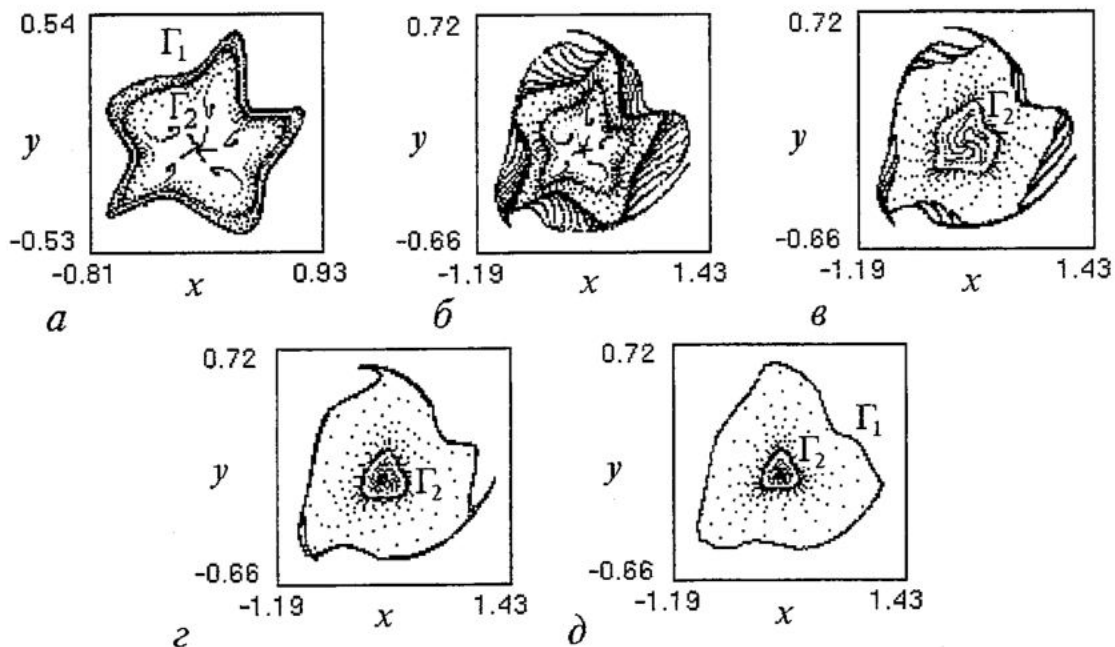


Рис. 6. Проекция отображения  $T_\varphi$  при  $\varepsilon_4=5.75$ ;  $\gamma=1.488$  (а), 1.4895 (б), 1.5 (в), 1.54 (г), 1.576 (д)

динамические режимы системы. С переходом при увеличении  $\gamma$  через значение 1.487 в фазовом пространстве при наличии устойчивых предельных циклов  $L_4^1$  и  $L_5^1$  рождаются два тора: устойчивый  $T_2^1$  и неустойчивый  $T_3^1$ . Рис.6, а, на котором дана  $(x,y)$ -проекция отображения  $T_\varphi$ , иллюстрирует одновременное существование этих торов (замкнутые кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ) и предельных циклов  $L_4^1$  (центральная неподвижная точка) и  $L_5^1$  (цикл из пяти неподвижных точек). При  $\gamma > 1.489$  на базе тора  $T_2^1$  возникает режим тор-хаоса (рис. 6, б), который при  $\gamma > 1.576$  преобразуется (рис.6, б-г) снова в режим тора  $T_2^1$  (рис. 6, д). С превышением параметром  $\gamma$  значения 1.585 наблюдается разрушение квазипериодических колебаний и жесткий переход к асинхронному режиму на шестиоборотном ( $12\pi$ -периодическом по  $\varphi$ ) предельном цикле. Далее через бифуркацию, обратную бифуркации удвоения периода, этот режим преобразуется в режим трехоборотного предельного цикла, который при  $\gamma > 1.802$  жестко сменяется асинхронным режимом на цикле  $L_4^1$ .

Когда  $\gamma$  переходит через значение 1.954, в фазовом пространстве вновь возникают устойчивый  $T_2^1$  и неустойчивый  $T_3^1$  торы при наличии устойчивого предельного цикла  $L_4^1$  (рис. 7, а). Циклу  $L_4^1$  отвечает неподвижная точка  $K$  отображения  $T_\varphi$ . При  $\gamma > 1.976$  тор  $T_2^1$  разрушается, фазовые траектории устремляются к семиоборотному ( $14\pi$ -периодическому по  $\varphi$ ) предельному циклу  $L^7$  (рис. 7, б). На рис. 7, б этому циклу отвечают семикратные неподвижные точки  $O_1, O_2, \dots, O_7$  отображения  $T_\varphi$ . С увеличением  $\gamma$  цикл  $L^7$  теряет устойчивость и из него рождается устойчивый тор  $T^7$  (цикл замкнутых кривых  $C_1, C_2, \dots, C_7$  на рис. 7, в), после разрушения которого вновь возникает устойчивый тор  $T_2^1$  (рис. 7, г); неустойчивая инвариантная кривая  $\Gamma_2$  исчезает в результате перестройки инвариантных сепаратрисных кривых семикратных седловых неподвижных точек. На рис. 7, г внутри замкнутой инвариантной кривой  $\Gamma_1$ , соответствующей тору  $T_2^1$ , существует цикл из семи ставших неустойчивыми неподвижных точек  $O_1, O_2, \dots, O_7$ , цикл из семи седловых неподвижных точек и устойчивая неподвижная точка  $K$  отображения  $T_\varphi$ . При возрастании  $\gamma$  семикратные неподвижные точки  $O_1, O_2, \dots, O_7$  вновь обретают устойчивость и, кроме этого, снова появляется неустойчивая инвариантная кривая  $\Gamma_2$ , отвечающая неустойчивому тору  $T_3^1$ , в результате перестройки сепаратрисных инвариантных кривых семикратных седловых

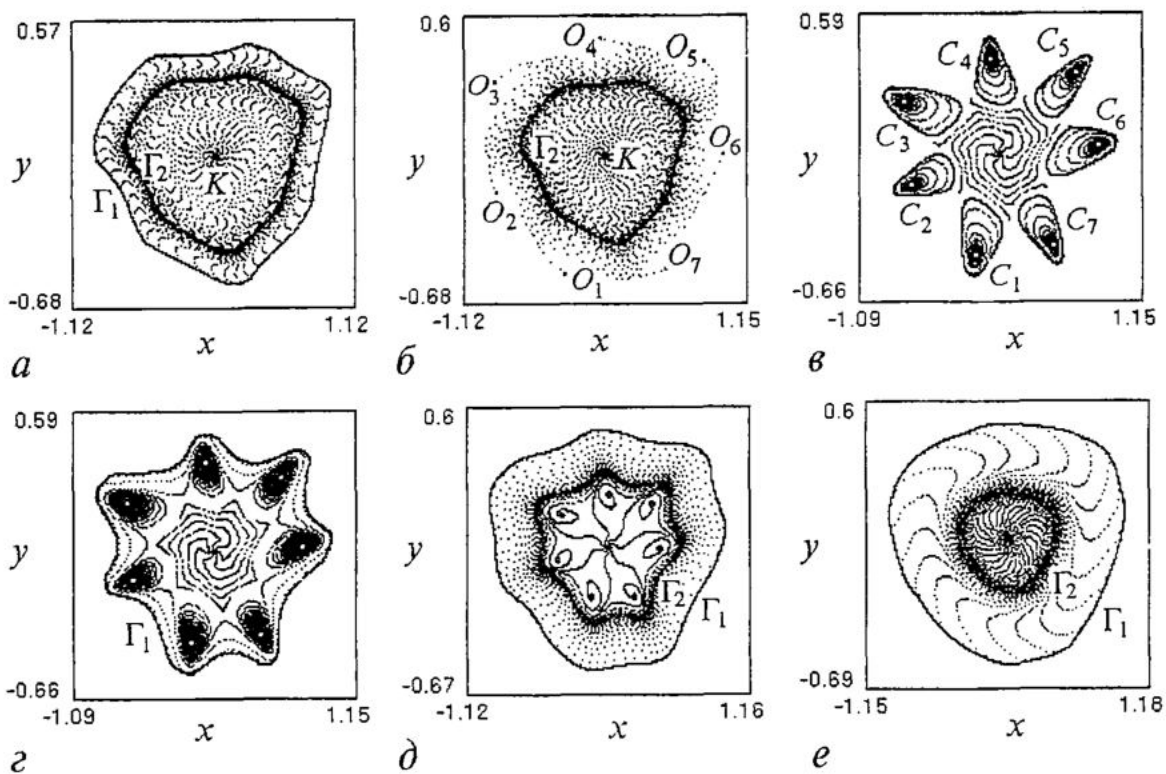


Рис. 7. Проекция отображения  $T_\varphi$  при  $\varepsilon_4=5.75$ ;  $\gamma = 1.9744$  (а), 1.98 (б), 2.0004 (в), 2.001 (г), 2.008 (д), 2.05 (е)

неподвижных точек (рис. 7, д). Когда  $\gamma$  становится больше 2.0111, семикратные неподвижные точки исчезают в результате седло-узловой бифуркации, в фазовом пространстве существуют устойчивые тор  $T^1_2$  и предельный цикл  $L^1_4$  (рис.7, е). Поведение системы при дальнейшем увеличении  $\gamma$  характеризуется чередованием режима тора  $T^1_2$  и периодических асинхронных режимов вращательных предельных циклов, число оборотов по  $\varphi$  на которых последовательно увеличивается на единицу, начиная с четырех.

Если теперь рассмотрим асинхронный режим на цикле  $L^1_4$  в качестве начального состояния системы и проследим за эволюцией колебаний при уменьшении параметра  $\gamma$ , то обнаружим качественно иной характер развития динамических режимов в области значений  $\gamma > 0.93$ , в поведении системы проявляется гистерезис. При переходе через значение 1.386 (то есть при пересечении кривой  $r_9$  на рис. 1) цикл  $L^1_4$  теряет устойчивость с рождением устойчивого двумерного тора  $T^1_4$ . Соответствующая тору  $T^1_4$   $(y, x)$ -проекция отображения  $T_\varphi$  приведена на рис. 8, а. Здесь внутри замкнутой инвариантной кривой  $\Gamma_3$  существует неподвижная точка  $K$  с парой мультипликаторов, расположенных вне единичного круга, отвечающая ставшему неустойчивым циклу  $L^1_4$ . Когда  $\gamma$  становится меньше 1.3432, один из этих мультипликаторов проходит через значение (-1) и перемещается внутрь единичного круга. При этом реализуется (в соответствии с [13]) бифуркация рождения цикла неустойчивых двукратных неподвижных точек  $(K_1, K_2)$  отображения  $T_\varphi$ , соответствующих неустойчивому двухоборотному вращательному предельному циклу  $L^2_3$  (рис. 8, б).

При переходе с уменьшением  $\gamma$  через значение 1.3356 пара комплексно-сопряженных мультипликаторов цикла  $L^2_3$  пересекает границу единичного круга, перемещаясь внутрь него. Это приводит к превращению неустойчивого предельного цикла  $L^2_3$  в устойчивый, одновременно от него отделяется [13] неустойчивый двумерный тор  $T^2_1$ . На рис. 8, в дана картина отображения  $T_\varphi$ , соответствующая одновременному существованию устойчивого  $T^1_4$  (кривая  $\Gamma_3$ ) и

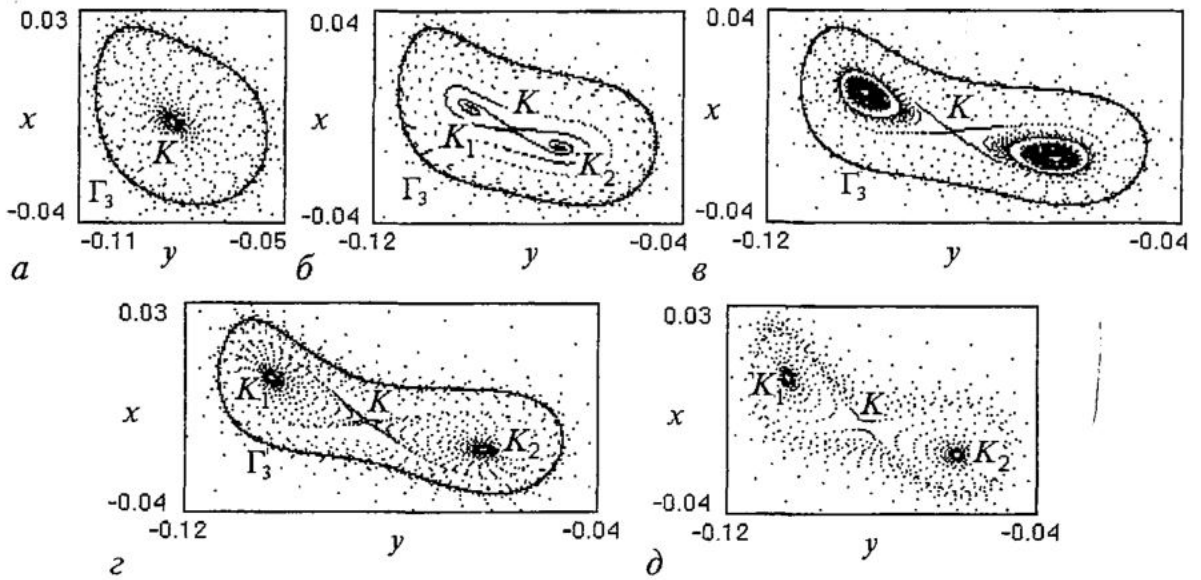


Рис. 8. Проекция отображения  $T_\varphi$  при  $\varepsilon_4=5.75$ ;  $\gamma=1.36$  (а), 1.34 (б), 1.335 (в), 1.3332 (г), 1.332 (д)

неустойчивого  $T^2_1$  (замкнутые инвариантные кривые  $\Gamma_4$  и  $\Gamma_5$ , охватывающие соответственно неподвижные точки  $K_1$  и  $K_2$ ) торов, устойчивого двухоборотного предельного цикла  $L^2_3$  (неподвижные точки  $K_1, K_2$ ) и неустойчивого предельного цикла  $L^1_4$  (седловая неподвижная точка  $K$ ). При уменьшении  $\gamma$  происходит слияние замкнутых инвариантных кривых отображения  $T_\varphi$ , отвечающих тору  $T^2_1$ , с петлями сепаратрисных инвариантных кривых седловой неподвижной точки  $K$  и образуется неустойчивый тор  $T^1_5$ . Соответствующая этому тору замкнутая инвариантная кривая  $\Gamma_6$  отображения  $T_\varphi$  расположена внутри инвариантной кривой  $\Gamma_3$  и охватывает неподвижные точки  $K, K_1$  и  $K_2$  (рис. 8, г). С дальнейшим уменьшением  $\gamma$  торы  $T^1_4$  и  $T^1_5$  сближаются и исчезают при переходе через значение  $\gamma=1.3321$ . В результате этой бифуркации происходит прекращение квазипериодического асинхронного режима и жесткий переход системы к режиму двухоборотного цикла  $L^2_3$  (рис. 8, д).

Когда  $\gamma$  становится меньше 1.295, при наличии в фазовом пространстве цикла  $L^2_3$  в результате седло-узловой бифуркации появляется еще один двухоборотный цикл  $L^2_4$ , который при  $\gamma < 1.2908$  становится неустойчивым и из него рождается устойчивый тор  $T^2_2$ . На рис. 9, а-в даны  $(\varphi, y)$ - и  $(\varphi, x)$ -проекции

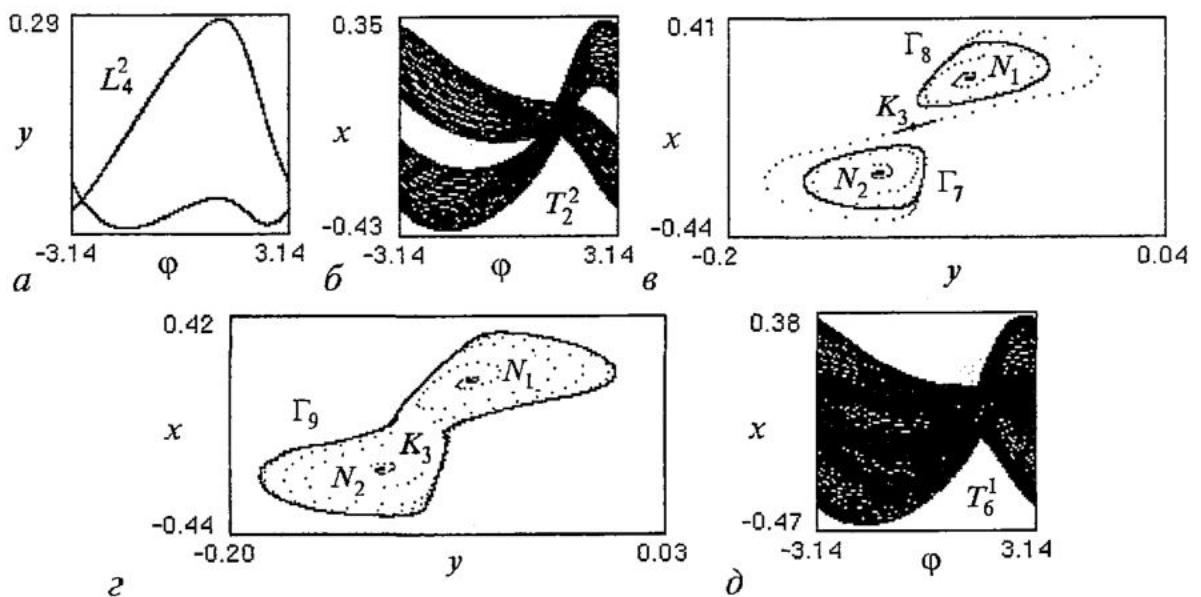


Рис. 9. Проекция фазовых портретов и отображения  $T_\varphi$  при  $\varepsilon_4=5.75$ ;  $\gamma=1.294$  (а), 1.2861 (б, в), 1.2844 (г, д)

фазового портрета, соответствующие устойчивому циклу  $L_4^2$  и тору  $T_2^2$ , и  $(y,x)$ -проекция отображения  $T_\varphi$ , соответствующая тору  $T_2^2$ . На рис. 9, в, г тору  $T_2^2$  отвечают замкнутые инвариантные кривые  $\Gamma_7$  и  $\Gamma_8$ , неподвижная точка  $K_3$  соответствует седловому предельному циклу  $L_3^1$ , а неподвижные точки  $N_1$  и  $N_2$  - неустойчивому двухоборотному циклу  $L_4^2$ . При уменьшении  $\gamma$  тор  $T_2^2$  преобразуется в тор  $T_6^1$  (рис. 9, з, д) в результате слияния замкнутых инвариантных кривых  $\Gamma_7$  и  $\Gamma_8$  с петлями сепаратрисных инвариантных кривых седловой неподвижной точки  $K_3$ . На рис. 9, з тору  $T_6^1$  отвечает замкнутая инвариантная кривая  $\Gamma_9$  отображения  $T_\varphi$  (напомним, что при этом в фазовом пространстве одновременно существуют двухоборотные предельные циклы  $L_3^2$ -устойчивый и  $L_3^2$ -седловой). Далее при  $\gamma < 1.2841$  тор  $T_6^1$  разрушается в результате перестройки сепаратрисных инвариантных кривых седловых неподвижных точек отображения  $T_\varphi$ , отвечающих циклу  $L_3^2$ , после чего происходит переход к предельному циклу  $L_3^2$ .

Дальнейшие преобразования, наблюдаемые в системе при уменьшении  $\gamma$  характеризует бифуркационная диаграмма  $\gamma, x$ , приведенная на рис. 10, а, которая отображает развитие режима цикла  $L_3^2$  при изменении  $\gamma$  от 1.285 до 0.93. Процесс эволюции цикла  $L_3^2$  сопровождается следующими явлениями. Вначале (при

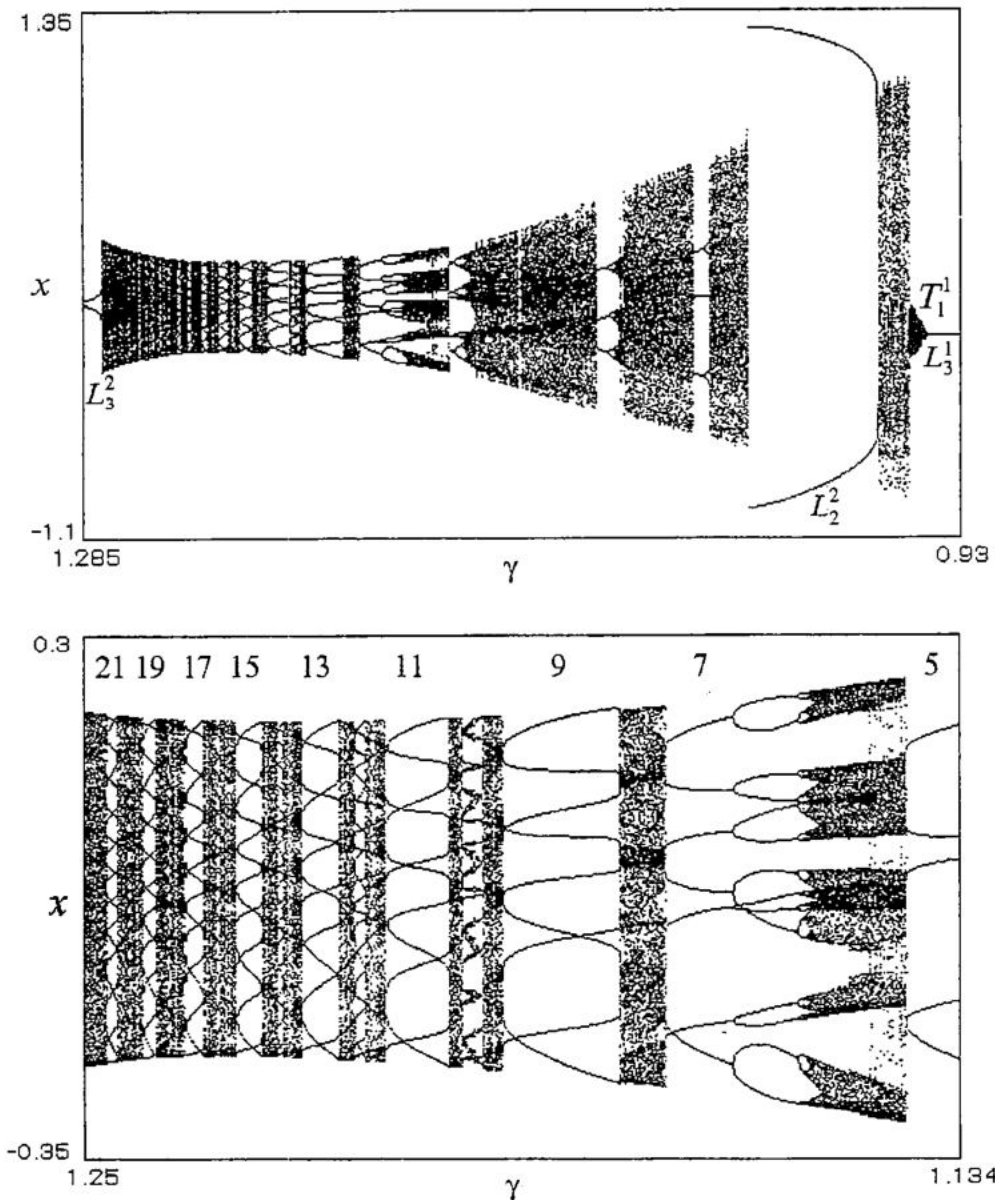


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма  $(\gamma, x)$ , соответствующая  $\varepsilon_4 = 5.75$  (а) и ее фрагмент (б)



$\gamma < 1.2771$ ) снова происходит переход к режиму тора  $T_6^1$ . Далее появляется большое количество «окон» предельных циклов, число оборотов по  $\varphi$  на которых последовательно уменьшается на два. Последнее из этих окон соответствует однооборотному предельному циклу  $L_3^1$  при  $\gamma < 0.9428$ . На рис. 10, б дан фрагмент  $(\gamma, x)$ -диаграммы в интервале  $1.134 < \gamma < 1.25$ , где отчетливо видны окна предельных циклов с числом оборотов от 21 до 5. Видно также, что внутри окон семи-, пяти- и трехоборотного циклов реализуются бифуркации удвоения периода с переходами к хаосу.

Изучение структуры отображения  $T_\varphi$  в окнах между циклами показывает, что после окна 15-оборотного цикла наблюдается искажение формы замкнутой инвариантной кривой, что свидетельствует о постепенном вырождении тора  $T_6^1$  в тор-хаос. На рис. 11 даны  $(x, y)$ -проекции отображения  $T_\varphi$ , показывающие изменения в структуре хаотического аттрактора, происходящие в интервале между окнами пятнадцати- и однооборотного циклов. При  $\gamma < 1.0161$  режим хаотических колебаний жестко сменяется асинхронным режимом на двухоборотном предельном цикле  $L_2^2$ , затем при  $\gamma < 0.963$  после исчезновения цикла  $L_2^2$  через перемежаемость вновь возбуждаются хаотические колебания. При  $\gamma < 0.9506$  наблюдается переход от хаотических колебаний к квазипериодическим колебаниям, соответствующим тору  $T_1^1$  (см. рис. 5, в), через перемежаемость типа хаос-тор, а при  $\gamma < 0.9428$  - мягкий переход от квазипериодических колебаний к асинхронному режиму предельного цикла  $L_3^1$ .

Представленные сценарии поведения модели (2) при изменении начальной расстройки  $\gamma$  интересны еще и тем, что дают представление о возможных несинхронных режимах рассматриваемой ДСС, возникающих на пути к синхронному режиму при уменьшении  $\gamma$ .

Приведенные выше результаты о динамике модели (2) не исчерпывают всех колебательных режимов и бифуркационных переходов, которые наблюдаются в исследуемой ДСС. В частности, при численном исследовании модели (2) обнаружены широкие области параметров, соответствующие двух- и трехоборотному предельным циклам, претерпевающим при изменении параметров

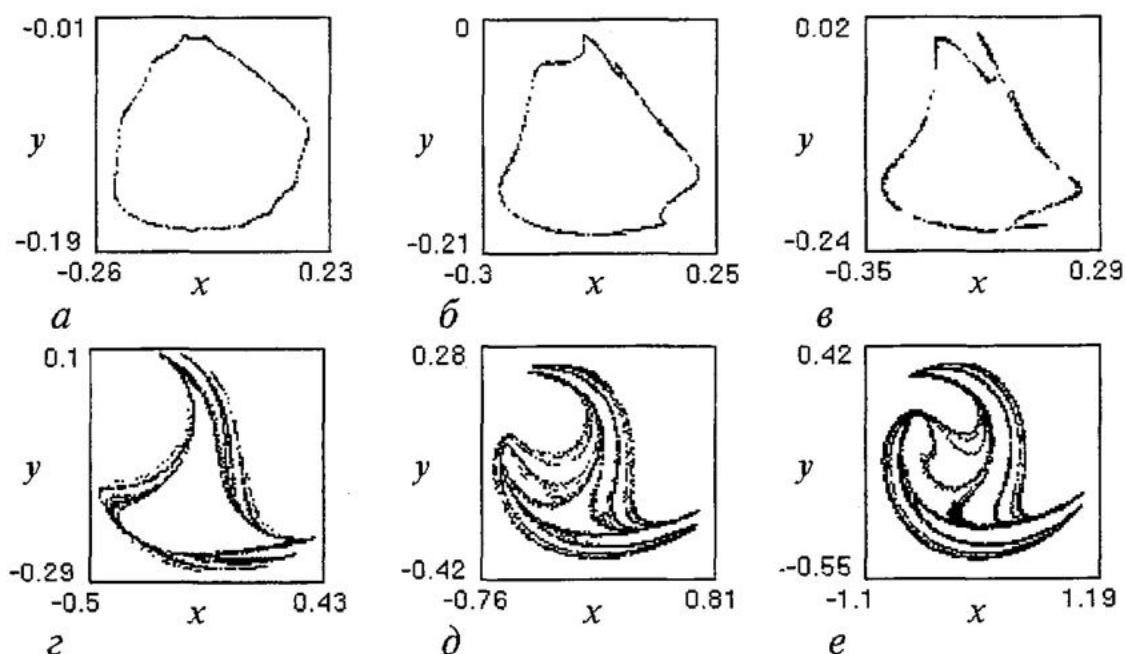


Рис. 11. Проекция отображения  $T_\varphi$  при  $\varepsilon_4=5.75$ ;  $\gamma = 1.225$  (а), 1.176 (б), 1.142 (в); 1.09 (г), 1.022 (д), 0.953 (е)

бифуркации удвоения периода и рождения торов и эволюционирующих к хаотическим аттракторам.

**6.** Рассмотрим влияние параметров инерционности  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  на поведение модели (2). Численное исследование модели (2) показывает, что увеличение  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  ведет в итоге к дехаотизации колебаний системы и переходу к периодическому асинхронному режиму однооборотного вращательного предельного цикла или к синхронному режиму.

На рис. 12 приведены бифуркационные диаграммы, соответствующие значениям  $\gamma=0.73$ ,  $\epsilon_4=5.75$  и тем же значениям остальных параметров, при которых построен параметрический портрет на рис. 1. Исходным состоянием системы

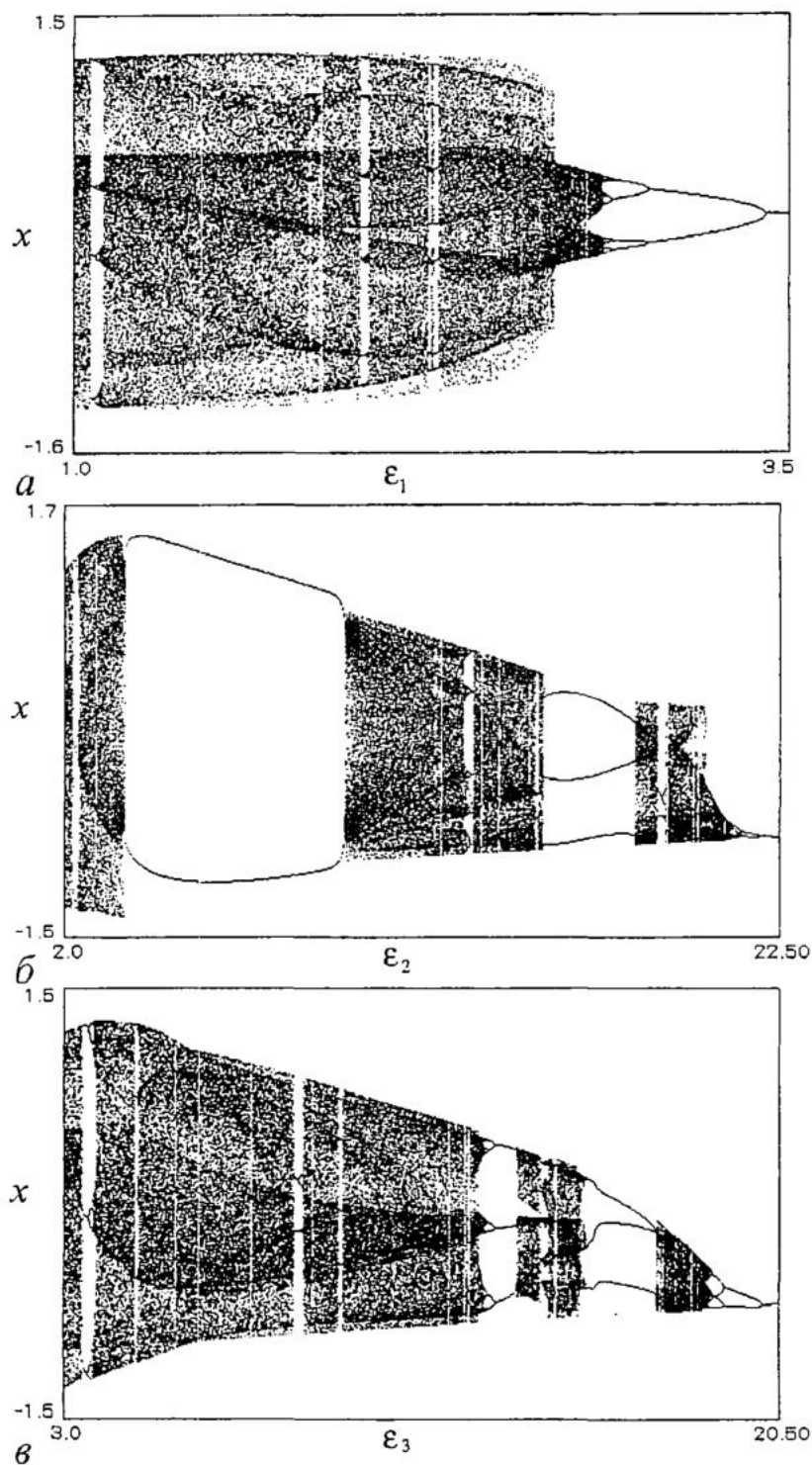


Рис. 12. *а* - Эволюция хаотического асинхронного режима при изменении  $\epsilon_1$ . *б* - Бифуркационная диаграмма ( $\epsilon_2, x$ ). *в* - Эволюция хаотического асинхронного режима при изменении  $\epsilon_3$ .

является режим колебательно-вращательного хаотического аттрактора  $P_4$  (см. рис. 5, а, б). Видно, что в случае диаграмм  $(\epsilon_1, x)$  и  $(\epsilon_3, x)$  для большей части значений  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_3$  из исследуемых интервалов в системе поддерживаются хаотические режимы. Периодические асинхронные режимы при изменении параметра  $\epsilon_1$  в интервале  $1.0 < \epsilon_1 < 2.8537$  наблюдаются в узких (в масштабах рис. 12, а, в) областях значений  $\gamma$  и соответствуют четырех- и семиоборотному предельным циклам. Такие же узкие области, соответствующие трех-, двух- и пятиоборотному предельным циклам, существуют и при изменении параметра  $\epsilon_3$  в интервале  $3.0 < \epsilon_3 < 13.5912$  (рис. 12, в). В интервале  $13.5912 < \epsilon_3 < 18.7816$  для поведения системы с увеличением  $\epsilon_3$  характерно чередование периодических асинхронных режимов на трехоборотных предельных циклах и хаотических режимов. На  $(\epsilon_2, x)$ -диаграмме (рис. 12, б) наблюдаются узкие области шести-, четырех- и двухоборотного предельных циклов и относительно широкие области двух- и трехоборотного предельных циклов. Переход от хаоса к режиму однооборотного предельного цикла при увеличении каждого из параметров  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  происходит через бифуркации, обратные бифуркациям удвоения периода. Режим однооборотного цикла поддерживается в системе при дальнейшем увеличении  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  или  $\epsilon_3$ .

Обнаруженный характер влияния параметров инерционности  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  на динамическое поведение системы открывает возможность перевода ее из хаотического асинхронного режима в желаемого типа периодический асинхронный режим, а также из периодического асинхронного режима в хаотический подходящим изменением этих параметров.

7. Проведенное качественно-численное исследование динамической модели (2) с двумя с половиной степенями свободы в цилиндрическом фазовом пространстве позволило выявить закономерности коллективного поведения связанных систем с фазовым управлением в случае, когда одна из подсистем (автоподстройки частоты) характеризуется регулярной динамикой, а другая (автоподстройки задержки) автономно может демонстрировать как регулярные, так и хаотические режимы. Результаты исследования показывают, что в такой системе могут реализоваться как динамические режимы, наблюдаемые в случае подсистем с регулярной индивидуальной динамикой [6, 7] (синхронный режим, периодические и хаотические асинхронные режимы), так и режимы и явления сложной динамики, обязанные своим происхождением применению фильтра третьего порядка в цепи управления задержкой (потеря устойчивости синхронного режима, появление периодических квазисинхронных режимов, определяемых колебательными предельными циклами, и асинхронных режимов, соответствующих колебательно-вращательным предельным циклам и двумерным торам в фазовом пространстве модели (2)).

Выделены области параметров, соответствующие установлению и удержанию синхронного режима (эти области представляют основной интерес для традиционных задач синхронизации и слежения) и квазисинхронным режимам. При значениях параметров вне этих областей рассматриваемая система ведет себя как автоколебательная система со сложной динамикой. Анализ перестроек поведения системы после нарушения синхронного и квазисинхронного режимов позволил выявить большое разнообразие асинхронных режимов и бифуркационных переходов при изменении начальной частотной расстройки  $\gamma$  и параметров инерционности цепей управления  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$  и  $\epsilon_4$ . Хаотические режимы формируются через бифуркации удвоения периода и седло-узловые бифуркации вращательных предельных циклов; через перемежаемость и разрушение двумерных торов. Примечательно, что сложные режимы и переходы к хаосу наблюдаются в системе при сравнительно небольших величинах параметров  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$  и  $\epsilon_4$ , когда обе взаимодействующие подсистемы в отдельности демонстрируют

регулярное поведение. Показано, что увеличение параметров  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  способствует процессам дехаотизации асинхронных режимов. Обнаружено явление потери и последующего восстановления устойчивости синхронного режима при монотонном увеличении параметра  $\epsilon_4$ . Результаты исследования сценариев преобразования асинхронных режимов при изменении расстройки  $\gamma$  объясняют механизмы сложного поведения системы в процессе ввода в режим слежения, а также после нарушения этого режима. Сильная зависимость динамических состояний системы от параметров  $\gamma$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$  и  $\epsilon_4$  позволяет при помощи изменения этих параметров переходить от несинхронных режимов к синхронному или, наоборот, стимулировать возбуждение несинхронных режимов, отвечающих различным аттракторам модели (2), и решать на этой основе задачи генерации разнообразных сложных, в том числе случайноподобных, колебаний.

*Работа выполнена при поддержке научной программы Минобразования РФ «Университеты России - фундаментальные исследования» (проект № 992870) и РФФИ (грант № 99-02-17742).*

### **Библиографический список**

1. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
2. Капранов М.В. Взаимодействующие многосвязные СФС // Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В.Шахгильдяна, Л.Н.Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. Гл. 4. С. 55.
3. Тузов Г.И., Сивов В.А., Прытков В.И. и др. Помехозащищенность радиосистем со сложными сигналами / Под ред. Г.И.Тузова. М.: Радио и связь, 1985.
4. Бабич О.А. Обработка информации в радионавигационных комплексах. М.: Машиностроение, 1991.
5. Мищенко И.Н., Вольнкин А.И., Волосов П.С., Григорьев М.И. Глобальная навигационная система «NAVSTAR» // Зарубежная радиоэлектроника. 1980. № 8. С. 52.
6. Пономаренко В.П. Динамика нелинейной двухконтурной следящей системы с однонаправленными связями // Известия РАН. Теория и системы управления. 1999. № 1. С.115.
7. Пономаренко В.П., Кузовкин С.А. Колебания в двухкольцевой системе связанных управляемых генераторов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т.6. № 5. С.28.
8. Белюстина Л.Н., Белых В.Н. Качественное исследование динамической системы на цилиндре // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9. № 3. С.403.
9. Заулин И.А., Пономаренко В.П. Динамические режимы и бифуркационные явления в нелинейных статических системах синхронизации // Радиотехника и электроника. 1993. Т.38. № 5. С. 889.
10. Белюстина Л.Н., Кивелева К.Г., Фрайман Л.А. Качественно-численный метод в исследовании трехмерных нелинейных СФС // Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В.Шахгильдяна и Л.Н.Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. Гл.2. С. 21.
11. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
12. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Автоматизация исследований нелинейной динамики систем синхронизации // Вестник Верхне-Волжского отделения

АТН РФ. Высокие технологии в радиоэлектронике. Н.Новгород. 1997. Вып.2(4). С. 15.

13. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания.- М.: Наука, 1987.

*Нижегородский государственный университет*

*Поступила в редакцию 26.11.01*

## SYNCHRONIZATION AND DEVELOPMENT OF NONSYNCHRONOUS REGIMES IN COUPLED SYSTEMS WITH PHASE CONTROL

*V.P. Ponomarenko*

Dynamical regimes and bifurcations in nonlinear model with two-and-half-degree-of-freedom are investigated, which describes the behaviour of two coupled phase-locked and delay-locked systems. One of the interacting systems demonstrates only regular regimes of behaviour while the other system exhibits both regular and chaotic regimes. Numerical simulations of the model reveals various periodic and chaotic oscillatory regimes. The boundaries of lock range are determined, scenarios of development of nonsynchronous regimes under variation of the system parameters are shown. The results are presented in the form of one- and two-parameter bifurcation diagrams.



*Пономаренко Валерий Павлович* родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский государственный университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года - заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов - теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Соавтор коллективных монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше.



## ОДИН СПОСОБ ОПИСАНИЯ И АНАЛИЗА ТУРБУЛЕНТНОСТИ

*Л.И. Высоцкий*

Цель настоящей работы - обратить внимание на возможность описания и анализа турбулентности на базе нетрадиционного представления компонент скорости, построения новых моделей турбулентности и анализа с их помощью некоторых устоявшихся понятий и представлений. В результате предлагаемого подхода удалось показать, что в выражение для турбулентной вязкости входит не «длина пути смешения» (которой просто не существует), а чистое расстояние от стенки. Новая структура рейнольдсовых напряжений расширяет возможности для их анализа и т.д.

Процедура получения уравнений О. Рейнольдса, описывающих осредненное турбулентное течение жидкости, производится расщеплением в уравнениях Навье - Стокса действительной скорости  $\mathbf{u}$  и давления  $p$  (при постоянной плотности жидкости,  $\rho_{ж} = \text{const}$ ) на две части, осредненную  $\langle \mathbf{u} \rangle$  и  $\langle p \rangle$  и пульсационную  $\mathbf{u}'$  и  $p'$ , с последующим некоторым их осреднением. Чаще всего считают возможным применить, следуя Рейнольдсу [1], осреднение уравнений Навье - Стокса по времени. Как правило, все необходимые операции производят с использованием декартовой системы координат и представлением компонент скорости в виде

$$u_i = \langle u_i \rangle + u_i', \quad \text{где } i = x, y, z. \quad (1)$$

Реже используются цилиндрическая или иные системы координат [2], однако и в этом случае компоненты скорости представляют в виде (1), то есть за  $u_i$  принимают ковариантную компоненту  $\mathbf{u}$ .

В [3] показано преимущество использования неортогональной криволинейной координатной системы  $l, y_1, z^*$  (рис. 1), благодаря которой получено новое представление уравнений Навье - Стокса. Оно отличается тем, что в них в явном виде входят геометрические параметры пространственно искривленного потока (кривизны  $1/R$  и  $1/\rho$  и углы поворота  $\alpha$  и  $\beta$  линий тока  $l$ ). Эта форма уравнений Навье - Стокса была названа геометризованной.

Представление декартовых компонент скорости в координатной системе  $l, y_1, z^*$  имеет вид

$$\begin{aligned} u_x &= u \cos \alpha \cos \beta, \\ u_y &= u \sin \alpha \cos \beta, \\ u_z &= u \sin \beta, \end{aligned} \quad (2)$$

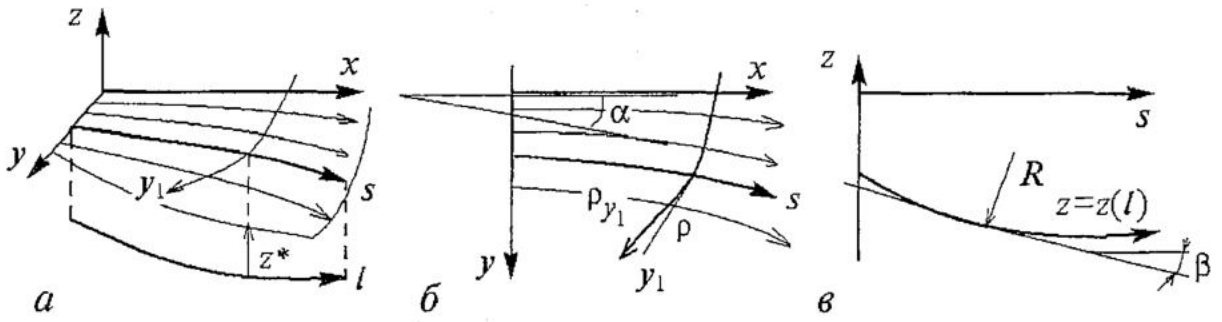


Рис. 1. а - Неортогональная криволинейная система координат:  $S$  - проекция линий тока  $l$  на плоскость  $(x,y)$ ;  $y_1$  - координата, ортогональная семейству  $S$ ;  $z^*$  - координата, отсчитываемая от  $l$ . б - Проекция линий тока на плоскость  $(x,y)$ ;  $\rho$  - радиус кривизны линий  $S$ ;  $\rho_{y_1}$  - радиус кривизны линий  $y_1$ . в - Развертка линий тока в цилиндрической поверхности  $(z, S)$ ;  $R^1$  - радиус кривизны линий  $l$  в этой поверхности ( $1/R$  - геодезическая кривизна линий  $l$ )

где  $u = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  - углы, составленные касательной к проекции линии тока на координатную плоскость  $xOy$  и осью  $x$  и касательной к линии тока  $l$  с плоскостью  $xOy$ , соответственно [3].

Представим в той же координатной системе действительные скорости при турбулентном движении не в традиционном виде (1), а в форме (2)

$$\begin{aligned} u_x &= \langle u \rangle \cos \langle \alpha \rangle \cos \langle \beta \rangle + u' \cos (\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos (\langle \beta \rangle + \beta'), \\ u_y &= \langle u \rangle \sin \langle \alpha \rangle \cos \langle \beta \rangle + u' \sin (\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos (\langle \beta \rangle + \beta'), \\ u_z &= \langle u \rangle \sin \langle \beta \rangle + u' \sin (\langle \beta \rangle + \beta'), \end{aligned} \quad (3)$$

где угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  обозначают осредненные, а штрихи - пульсационные значения скорости и углов  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha'$  и  $\beta'$  представляют собой пульсационное отклонение углов  $\alpha$  и  $\beta$  от их осредненного значения). Кроме того, в координатной системе  $l, y_1, z^*$  за  $l$  принимается конфигурация осредненной линии тока  $\langle l \rangle$ .

Легко заключить, что вторые слагаемые в правой части равенств (3) имеют смысл пульсационных декартовых компонент скорости, то есть

$$\begin{aligned} u' \cos (\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos (\langle \beta \rangle + \beta') &= u'_x, \\ u' \sin (\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos (\langle \beta \rangle + \beta') &= u'_y, \\ u' \sin (\langle \beta \rangle + \beta') &= u'_z. \end{aligned} \quad (4)$$

Но тогда получается, что **первые моменты** случайной скорости являются на самом деле **третьими либо вторыми моментами**. Правило осреднения по времени случайных величин приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \langle u' \cos (\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos (\langle \beta \rangle + \beta') \rangle &= 0, \\ \langle u' \sin (\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos (\langle \beta \rangle + \beta') \rangle &= 0, \\ \langle u' \sin (\langle \beta \rangle + \beta') \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Выпишем выражения для вторых статистических одноточечных моментов, входящих в тензор напряжений Рейнольдса,

$$\begin{aligned}
\langle u'_x u'_x \rangle &= \langle u'^2 \cos^2(\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos^2(\langle \beta \rangle + \beta') \rangle, \\
\langle u'_y u'_y \rangle &= \langle u'^2 \sin^2(\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos^2(\langle \beta \rangle + \beta') \rangle, \\
\langle u'_z u'_z \rangle &= \langle u'^2 \sin^2(\langle \beta \rangle + \beta') \rangle, \\
\langle u'_x u'_y \rangle &= \langle (u'^2/2) \sin[2(\langle \alpha \rangle + \alpha')] \cos(\langle \beta \rangle + \beta') \rangle, \\
\langle u'_x u'_z \rangle &= \langle (u'^2/2) \sin[2(\langle \beta \rangle + \beta')] \cos(\langle \alpha \rangle + \alpha') \rangle, \\
\langle u'_y u'_z \rangle &= \langle (u'^2/2) \sin[2(\langle \beta \rangle + \beta')] \sin(\langle \alpha \rangle + \alpha') \rangle,
\end{aligned} \tag{6}$$

где  $(u'^2/2) = (u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z)/2 = k$ ,  $k$  - кинетическая энергия турбулентности.

Таким образом, из выражений (6) непосредственно вытекает зависимость рейнольдсовых напряжений от кинетической энергии турбулентности и, кроме того, они оказываются моментами не второго, а шестого - четвертого порядков. Более того, в традиционной форме выражения вторых моментов содержат **взаимозависимые случайные** величины (компоненты пульсационной скорости  $u'_x$ ,  $u'_y$  и  $u'_z$  связаны уравнением неразрывности), а в предлагаемой форме - некоррелируемые случайные величины  $u'$ ,  $\alpha'$  и  $\beta'$ .

Представление компонент пульсационной скорости в виде (4) позволяет предложить целый набор упрощенных моделей турбулентности. Они представлены на рис. 2. Здесь «а», «б» типичные модели, «в»-«г» - новые предлагаемые модели турбулентности.

Можно ожидать, что модель турбулентности «в» и близкая ей модель «г» окажутся приемлемыми для многих случаев турбулентных течений. Если допустить, что углы  $\alpha'$  и  $\beta'$  малы настолько, что их квадратами и произведениями друг на друга можно пренебречь и, кроме того, можно считать, что  $\cos \alpha' \approx \cos \beta' \approx 1$ , а  $\sin \alpha' \approx \alpha'$  и  $\sin \beta' \approx \beta'$ , то это резко упрощает дальнейший анализ.

В частности, при указанных предположениях осредненные геометризованные уравнения Навье - Стокса [3] переходят в геометризованные уравнения Рейнольдса [4], а именно:

для  $l$  направления

$$\begin{aligned}
-\partial/\partial l (\Pi_{(m)} + P) &= \partial/\partial l (\langle u \rangle^2/2 + \langle k \rangle) - \langle \beta' \partial/\partial l (u'^2/2) \rangle \operatorname{tg} \beta + \langle \beta' \partial/\partial z (u'^2/2) \rangle (1/\cos \beta) + \\
&+ \langle \alpha' \partial/\partial y_1 (u'^2/2) \rangle \cos \beta - \langle u'^2 \beta' \rangle / R,
\end{aligned} \tag{8}$$

для  $y_1$  направления

$$\begin{aligned}
-\partial/\partial y_1 (\Pi_{(m)} + P) &= [(\langle u \rangle^2 + 2\langle k \rangle) \cos^2 \beta] / \rho + \langle u' \partial/\partial l (u' \alpha') \rangle \cos \beta + \\
&+ \langle u'^2 \alpha' \rangle [(\cos^2 \beta) / \rho_{y_1} - \sin \beta / R] - (\langle u'^2 \beta' \rangle \sin 2\beta) / \rho,
\end{aligned} \tag{9}$$

для  $z$  направления

$$\begin{aligned}
-\partial/\partial z (\Pi_{(m)} + P) &= \partial/\partial l (\langle u \rangle^2/2 + \langle k \rangle) \sin \beta + [(\langle u \rangle^2 + 2\langle k \rangle) \cos^2 \beta] / R + \\
&+ \langle u' \partial/\partial l (u' \beta') \rangle \cos \beta + \langle u'^2 \beta' \rangle (2 \sin \beta / R - \partial \beta / \partial z) - \langle \beta' \partial/\partial l (u'^2/2) \rangle \sin \beta \operatorname{tg} \beta + \\
&+ \langle \beta' \partial/\partial z (u'^2/2) \rangle \operatorname{tg} \beta + \langle \alpha' \partial/\partial y_1 (u'^2/2) \rangle \sin \beta \cos \beta + \langle u'^2 \alpha' \rangle \cos^2 \beta \partial \beta / \partial y_1.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь  $\Pi_{(m)}$  - потенциал массовых сил,  $P$  - функция давления (функция Громеки). Уравнение неразрывности при этом примет вид [2]



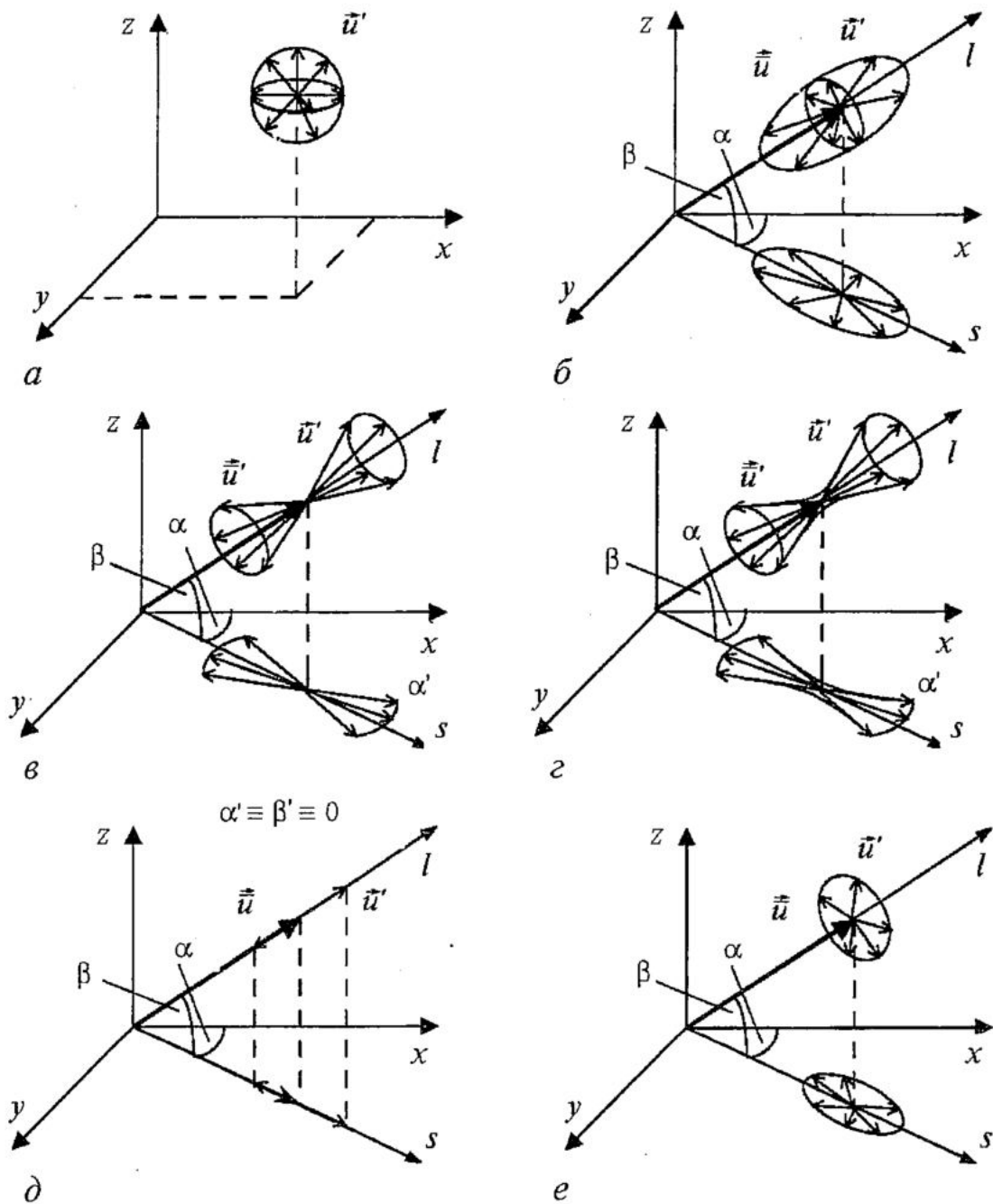


Рис. 2. Варианты моделей турбулентности. Традиционные модели: *a* - изотропная турбулентность; *б* - неизотропная турбулентность. Новые модели: *в* - случай малых значений  $\alpha'$  и  $\beta'$ ; *г* - случай малых значений  $u'$  вне пределов малых значений  $\alpha'$  и  $\beta'$  в модели «в»; *д* - продольно пульсирующее течение; *е* - поперечно пульсирующее течение

$$\begin{aligned}
 \langle k \rangle = & (k_0) + \int_{l_0}^l \langle u' \partial(u' \beta') / \partial l \rangle \operatorname{tg} \beta dl - \int_{l_0}^l \langle u' \partial(u' \beta') / \partial y_1 \rangle \cos \beta dl - \\
 & - \int_{l_0}^l \langle u' \partial(u' \beta') / \partial z \rangle (dl / \cos \beta) + \int_{l_0}^l \langle u'^2 \alpha' \rangle [\sin \beta \partial \beta / \partial y_1 + \cos \beta / \rho] dl + \\
 & + \int_{l_0}^l \langle u'^2 \beta' \rangle [1 / (R \cos^2 \beta) + \sin \beta / \rho_{y_1}] dl - \int_{l_0}^l \langle u'^2 \rangle [\cos \beta / \rho_{y_1} + \partial \beta / \partial z] dl. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Полученная форма уравнений Рейнольдса интересна тем, что в них прослеживается связь турбулентных параметров течения с геометрическими параметрами осредненного течения ( $R$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{y_1}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и т.д.).

В тех же предположениях (то есть для моделей турбулентности «в» и «г») можно установить, что выражения (6) упрощаются и пульсационные величины не находятся под знаком тригонометрических функций

$$\begin{aligned}
 \langle u_x'^2 \rangle &= \langle u'^2 \rangle \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \langle u'^2 \alpha' \rangle \sin 2\alpha \cos^2 \beta - \langle u'^2 \beta' \rangle \cos^2 \alpha \sin 2\beta, \\
 \langle u_y'^2 \rangle &= \langle u'^2 \rangle \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \langle u'^2 \alpha' \rangle \sin 2\alpha \cos^2 \beta - \langle u'^2 \beta' \rangle \sin^2 \alpha \sin 2\beta, \\
 \langle u_z'^2 \rangle &= \langle u'^2 \rangle \sin^2 \beta + \langle u'^2 \beta' \rangle \sin 2\beta, \\
 \langle u_x'^2 \rangle + \langle u_y'^2 \rangle + \langle u_z'^2 \rangle &= 2\langle k \rangle, \\
 \langle u_x' u_y' \rangle &= \langle k \rangle \sin 2\alpha \cos^2 \beta + \langle u'^2 \alpha' \rangle \cos^2 \beta \cos 2\alpha - \langle u'^2 \beta' / 2 \rangle \sin 2\alpha \sin 2\beta, \\
 \langle u_x' u_z' \rangle &= \langle k \rangle \cos \alpha \sin 2\beta - \langle u'^2 \alpha' / 2 \rangle \sin \alpha \sin 2\beta + \langle u'^2 \beta' \rangle \cos \alpha \cos 2\beta, \\
 \langle u_y' u_z' \rangle &= \langle k \rangle \sin \alpha \sin 2\beta - \langle u'^2 \alpha' / 2 \rangle \cos \alpha \sin 2\beta + \langle u'^2 \beta' \rangle \sin \alpha \cos 2\beta, \\
 \partial \langle u' \alpha' \rangle / \partial q_i &= 0, \quad \partial \langle u' \beta' \rangle / \partial q_i = 0, \quad \partial \langle u' \alpha' \beta' \rangle / \partial q_i = 0, \quad q_i = l, y_1, z^*.
 \end{aligned} \tag{12}$$

В случае продольно однородного течения ( $\alpha = 0, \beta = \text{const}$ ) эти соотношения упрощаются

$$\begin{aligned}
 \langle u_x'^2 \rangle &= 2\langle k \rangle \cos^2 \beta - \langle u'^2 \beta' \rangle \sin 2\beta, \quad \langle u_y'^2 \rangle = 0, \\
 \langle u_z'^2 \rangle &= 2\langle k \rangle \sin^2 \beta + \langle u'^2 \beta' \rangle \sin 2\beta, \\
 \langle u_x'^2 \rangle + \langle u_z'^2 \rangle &= 2\langle k \rangle, \\
 \langle u_x' u_y' \rangle &= \langle u'^2 \alpha' \rangle \cos^2 \beta, \\
 \langle u_x' u_z' \rangle &= \langle k \rangle \sin 2\beta + \langle u'^2 \beta' \rangle \cos 2\beta, \\
 \langle u_y' u_z' \rangle &= \langle u'^2 \alpha' / 2 \rangle \sin 2\beta.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Осредненные одноточечные моменты

$$\langle u' \partial(u' \beta') / \partial z \rangle, \quad \langle u' \partial(u' \alpha') / \partial y \rangle, \quad \langle \partial u' / \partial l [\partial(u' \alpha') / \partial q_i] \rangle, \quad \langle \partial u' / \partial l [\partial(u' \beta') / \partial q_i] \rangle,$$

$\langle \partial k / \partial l [\partial(u' \alpha') / \partial q_i] \rangle$ ,  $\langle \partial k / \partial l [\partial(u' \beta') / \partial q_i] \rangle$ ,  $\langle u' \alpha' \partial k / \partial l \rangle$ ,  $\langle \alpha' \partial k / \partial l \rangle$ ,  $\langle \beta' \partial k / \partial l \rangle$  и  $\langle \partial u' \beta' / \partial l \rangle$  равны нулю.

Кроме уже отмеченных, можно выявить другие важные результаты. Так, например, сопоставляя соответствующие члены уравнений Рейнольдса, записанные в координатах  $l, y_1, z^*$  и декартовых, легко установить следующие соотношения для касательных компонент напряжения  $\tau$ :

$$-\partial \tau_{xz} / \partial z = \rho_{\text{ж}} \langle \beta' \partial k / \partial z \rangle, \tag{14}$$

$$-\partial \tau_{xy} / \partial y = \rho_{\text{ж}} \langle \alpha' \partial k / \partial y \rangle. \tag{15}$$

Проинтегрируем выражение (14) по  $z$

$$-\int_0^z (\partial \tau_{xz} / \partial z) dz = -\tau_{xz} \Big|_0^z = -\tau_{xz} = \rho_{\text{ж}} \int_0^z \langle \beta' \partial k / \partial z \rangle dz.$$

Здесь учтено, что  $\tau_{xz} \Big|_{z=0} = 0$ . Следовательно,

$$\tau_{xz} = -\rho_{ж} \int_0^z \langle \beta'(\partial k / \partial z) \rangle dz. \quad (16)$$

Выражение (16) является новой интегральной формой представления рейнольдсова напряжения.

Поскольку  $\tau_{xz} = -\rho_{ж} \langle u'_x u'_z \rangle$ , то можно заключить, что должно выполняться соответствие

$$\langle u'_x u'_z \rangle = \int_0^z \langle \beta'(\partial k / \partial z) \rangle dz, \quad (17)$$

которое должно подвергнуться экспериментальной проверке.

Так как принято рейнольдсовы напряжения выражать по Буссинеску

$$\tau_{xz} = -\rho_{ж} \langle u'_x u'_z \rangle = \mu_z \partial \langle u \rangle / \partial z,$$

то получим

$$\mu_z \partial \langle u \rangle / \partial z = -\rho_{ж} \int_0^z \langle \beta'(\partial k / \partial z) \rangle dz$$

или

$$v_z = -[\int_0^z \langle \beta'(\partial k / \partial z) \rangle dz] / (\partial \langle u \rangle / \partial z), \quad (18)$$

где  $v_z = \mu_z / \rho_{ж}$  - кинематическая турбулентная вязкость, являющаяся по сути своей некоей согласующей функцией, которую во избежание путаницы лучше было бы назвать, например, функцией Буссинеска.

Поскольку в размерность  $v_z$  входит длина  $L$ , а также скорость  $u$ , то Л. Прандтль ввел знаменитую гипотетическую «длину пути смешения». Многочисленными исследователями было предложено значительное число формул, базирующихся на опытных данных, для расчета длины пути смешения  $L$ . Лишь, пожалуй, Л. Ландау [5] принял за  $L$  просто расстояние от стенки, не приведя, впрочем, никаких доказательств. С помощью выражения (18) легко показать, что он был прав и что «длины пути смешения» **не существует**. На самом деле, по теореме о среднем значении имеем

$$\int_0^z \langle \beta'(\partial k / \partial z) \rangle dz = \langle \beta'(\partial k / \partial z) \rangle_z \cdot z, \quad (19)$$

где нижний индекс  $z$  означает осреднение подынтегральной функции на расстоянии  $z$  от стенки. Тогда получим, что

$$v_z = \frac{\langle \beta'(\partial k / \partial z) \rangle_z \cdot z}{\partial \langle u \rangle / \partial z}. \quad (20)$$

Из формулы (20) непосредственно следует, что  $L \equiv z$ . Таким образом, гипотезу Прандтля, давшую (в свое время) мощный импульс анализу турбулентности, следует признать имеющей лишь историческое значение.

Аналогично можно установить, что

$$v_y = -\frac{\int_0^y \langle \alpha' \partial k / \partial y \rangle dy}{\partial \langle u \rangle / \partial y} = -\frac{\langle \alpha' \partial k / \partial y \rangle_y \cdot b}{\partial \langle u \rangle / \partial y}, \quad (21)$$

где  $b$  - расстояние от боковой стенки.

Далее, в продольно однородном потоке на свободной поверхности (при  $z = H$ , где  $H$  - глубина потока) или на оси симметрии (при  $z = r_0$ , где  $r_0$  - радиус трубы)

градиент скорости должен быть нулевым ( $\partial\langle u \rangle / \partial z = 0$ ). Во избежание неопределенности в (21) должно быть

$$-\langle \beta' \partial k / \partial z \rangle_{z=H} = 0. \quad (22)$$

Применяя правило Лопиталья, найдем

$$v_z = \frac{-\langle \beta' \partial k / \partial z \rangle}{\partial^2 \langle u \rangle / \partial z^2} \Big|_{z=H} \neq \infty, \quad (23)$$

где

$$\partial^2 \langle u \rangle / \partial z^2 \Big|_{z=H} \neq 0, \quad \langle \beta' \partial k / \partial z \rangle = \langle \partial(\beta' k) / \partial z \rangle - \langle k \partial \beta' / \partial z \rangle. \quad (24)$$

Аналогичный анализ пригоден и для  $v_y$ .

Кстати, легко заключить, что турбулентная кинематическая вязкость в случае продольно однородного течения будет скаляром, то есть будут удовлетворяться условия

$$v_z = v_y = v_T, \quad (25)$$

при соблюдении соотношения

$$\frac{\langle \beta' \partial k / \partial z \rangle_z}{\langle \alpha' \partial k / \partial y \rangle_y} = \frac{v(\partial \langle u \rangle / \partial z)}{z(\partial \langle u \rangle / \partial y)} \quad (26)$$

в каждой точке сечения потока.

Изложенным не исчерпываются возможности дальнейшего анализа турбулентности с использованием предложенных моделей.

## Заключение

Анализ некоторых турбулентных параметров, основанный на новом представлении осредненных уравнений Навье - Стокса и упрощенной модели турбулентности, позволяет получить некоторые новые результаты, отличные от традиционных:

- в то время как компоненты пульсационной скорости  $u'_x$ ,  $u'_y$  и  $u'_z$  являются коррелируемыми величинами,  $u'$ ,  $\alpha'$  и  $\beta'$  имеют нулевую корреляцию;
- осредненные величины типа  $\langle u'_i u'_j \rangle$  определяют как вторые одноточечные моменты, однако они содержат третьи моменты типа  $\langle u'^2 \beta' \rangle$ , что должно наложить отпечаток на их анализе;
- $v_T$  должно содержать некоторую характерную длину, Прандтль назвал ее «длиной пути смещения», в то время как эта длина есть просто расстояние от стенки;
- традиционный анализ приводит к условию  $v_T = 0$  на оси симметрии, а использование нового представления показывает, что  $v_T \neq 0$  на той же оси.

Кроме того, этот же подход позволяет установить, что целый ряд одноточечных моментов имеет нулевые значения, что турбулентные параметры связаны с геометрическими (например, кривизной и углами расхождения линий тока) и т.д.

По мнению автора, возможности предлагаемого подхода далеко не исчерпаны как в теоретическом, так и экспериментальном смысле. В данной статье автор не касался проблем возникновения и развития турбулентности, проблем замыкания уравнений Рейнольдса, а также новых подходов к трактовке турбулентности, превосходно описанных в статье Ю.Л. Климонтовича [6] и ряде других статей, опубликованных там же, а сосредоточил внимание на результатах, к

которым приводит введенный им способ расщепления вектора пульсационной скорости.

### Библиографический список

1. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Phil. Trans. of the Royal Society. 1895: F186. 123 p.
2. Таунсенд А.А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: 1959. 394 с.
3. Высоцкий Л.И. Геометризованная форма уравнений Навье - Стокса (часть первая). Саратов: Изд-во СГТУ, 1995. 212 с.
4. Vysotsky L.I. The geometrized form of Reynolds equations. Proc. of Hydro-informatic - 98. CD ROM.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
6. Климонтович Ю.Л. Что же такое турбулентность? // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т.3, №2. С.7.

Саратовский государственный  
технический университет

Поступила в редакцию 01.03.2002  
после доработки 15.05.2001

## THE TECHNIQUE OF DESCRIPTION AND ANALYSIS OF TURBULENCE

L.I. Vysotsky

The purpose of the paper is to call attention to the possible description and analysis of turbulence based on non-traditional representation of the velocity components, development of new models of turbulence and their analysis using traditional methods. The suggested technique allows to show that the turbulent viscosity expression contains not the «mixing way lenght» (actually it doesn't exist) but the distance from the wall. The new structure of Reynolds stresses provides new possibilities of their analysis etc.



Высоцкий Лев Ильич - родился в 1931 году. Выпускник Саратовского автодорожного института по специальности «Мосты и тоннели» (1953). Кандидат технических наук (1960), доктор технических наук (1970). В 1972 году присвоено профессорское звание, а в 1981 году - звание заслуженного деятеля науки и техники РСФСР. С 1972 года заведует кафедрой гидравлики, геодезии и водоснабжения (и гидравлических машин) Саратовского государственного технического университета. Автор 15 монографий, учебников и учебных пособий, опубликовал более 200 статей, имеет более 50 изобретений. Круг научных интересов - трехмерные течения пространственно деформированных потоков по криволинейным поверхностям, решение прикладных обратных задач гидравлики по управлению бурными потоками на водосбросах на основе предложенной им теории, разработка и совершенствование теории лопастных фильтрующих центрифуг.

E-mail: vys@sfire.san.ru



## СЛОЖНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПЛАНЕ

*В.А. Крысько, А.А. Сопенко, Е.В. Салий*

### Введение

В работе рассматриваются колебания геометрически и физически нелинейной полой оболочки под действием переменной во времени поперечной нагрузки. Уравнения движения были выведены с помощью вариационного принципа Гамильтона - Остроградского. Численный алгоритм интегрирования этих уравнений применен для описания процессов перехода от периодических колебаний к хаотическим для некоторых конкретных оболочечных систем. Предложен критерий динамической потери устойчивости для оболочек, находящихся под действием гармонического возбуждения.

С начала 1970-х годов исследования нелинейных колебаний составляют один из важнейших разделов динамики оболочек. Им посвящены, например, монографии [1-4], а также многие работы, опубликованные в научной периодике. Этот интерес вызван практической необходимостью учета в новых технологиях больших прогибов и использования материалов, упругие свойства которых не позволяют применять классический закон Гука, что и приводит к принятию нелинейных соотношений между деформациями и перемещениями (геометрическая нелинейность), а также между деформациями и усилиями (физическая нелинейность).

При рассмотрении зависимости прогиба от нагрузки особое внимание привлекает переходный процесс в движении оболочки от ее регулярных колебаний к полной потере устойчивости. Такой процесс обычно включает в себе скачкообразные переходы (бифуркации) от установившегося режима одного типа к некоторому другому режиму при достижении определенного критического уровня внешнего воздействия. Изучение подобных процессов для элементов различных конструкций (стержней, балок, пластин, оболочек) показало, что указанные последовательности бифуркаций при условии нелинейности могут приводить не только к многорежимным периодическим и квазипериодическим колебаниям, но и к хаотическим движениям, представляющим собой установившиеся нерегулярные колебания, в принципе допускающие воспроизведение. Естественную трактовку эти явления получили в рамках общей теории динамических систем, новый этап в развитии которой начался также в 1970-е

годы. Появление понятий детерминированного хаоса и странного аттрактора позволило лучше понять эволюцию колебательных процессов. В теории упругих систем все шире используются идеи и методы нелинейной динамики, изложенные в ориентированных на приложения монографиях (например, [5-8]). Особую роль при этом играет вычислительная техника, без применения которой невозможно было бы даже подступиться к численному решению уравнений в частных производных, образующих соответствующие математические модели. Отметим некоторые важнейшие в смысле рассматриваемой тематики публикации.

В 1979 году Холмс [9] подробно исследовал хаотические движения слегка выпученного стержня, подвергающегося боковому синусоидальному возмущению. Мун [10], рассматривая гармонически вынужденное движение выгнутого стержня, предложил критерий установления порогового для возникновения хаоса значения амплитуды. В обзорном докладе Ханагуда и Алани [11] для стержневых систем описаны различные пути перехода к хаосу в колебательных процессах. Начиная с 1985 года, Саймондс с сотрудниками опубликовал серию работ, в которых изучаются хаотические реакции балок с закрепленными концами (см. например, [12]). Эти исследования были продолжены и расширены в статьях У. Лепика (например, [13]). В частности, им была получена оценка пороговой величины поперечной динамической нагрузки, при которой колебания упругопластической балки становятся хаотическими. Бифуркационные механизмы перехода к хаосу в сложных колебаниях балок под действием квазипериодического нагружения проанализированы в работе Ягасаки [14]. Я. Аврейцевич, В.А. Крысько и А.В. Крысько [15] изучали общие механизмы перехода к хаосу в диссипативных пластинчатых конструкциях. Детально описали механизмы возникновения хаоса в случае вынужденных параметрических колебаний пластинок В.А. Крысько, Т.В. Вахлаева и А.В. Крысько [16].

Условиям, при которых реализуется переходный сценарий Фейгенбаума для нелинейных колебаний тонких пластинок, посвящена работа Я. Аврейцевича и В.А. Крысько [17]. У. Лепик [18] исследовал возможность возникновения хаотических эффектов в установившихся осесимметричных колебаниях упругопластических цилиндрических оболочек. Сценарий перехода к хаотическим колебаниям для консервативных и диссипативных систем в теории гибких цилиндрических панелей при действии знакопеременных продольных нагрузок рассматривали А.В. Крысько, С.А. Мицкевич и Ю.В. Чеботаревский [19]. Хаотические движения квадратной в плане оболочки под действием импульсной периодической нагрузки исследовали В.А. Крысько и А.В. Кириченко [20].

Из приведенного краткого обзора видно, что в отличие от впечатляющих успехов, достигнутых в изучении нелинейных колебательных систем, связанных в первую очередь с электроникой и радиотехникой, хаотическая динамика упругих систем пока находится в стадии становления, в основном идет накопление фактического материала. В особенности это относится к теории пластин и оболочек.

В настоящей работе объектом исследования являются сложные колебания геометрически и физически нелинейной пологой оболочки с прямоугольным планом, вызванные действием поперечной равномерно распределенной знакопеременной нагрузки. На основе разработанных авторами [21] математической модели и численного алгоритма проведены компьютерные эксперименты с целью выявления возможных бифуркационных механизмов перехода к хаосу. Обнаруженные закономерности позволили также впервые сформулировать динамический критерий потери устойчивости для оболочечных систем с зависящей от времени нагрузкой, - в условиях геометрической и физической нелинейностей вопрос о потере устойчивости до сих пор не рассматривался.

## Математическая модель

Рассмотрим прямоугольную в плане пологую оболочку с размерами  $a, b, h$  вдоль осей  $x_1, x_2, x_3$ , соответственно. Начало координат расположено в левом верхнем углу оболочки в ее срединной поверхности. Оси  $x_1, x_2$  параллельны сторонам оболочки, ось  $x_3$  направлена внутрь кривизны. Через  $u_1, u_2$  обозначим перемещения вдоль осей  $x_1, x_2$ . При этом прогиб (вдоль оси  $x_3$ ) для удобства в отличие от остальных перемещений будем записывать как  $w$ . Материал оболочки считается изотропным. Принимается гипотеза Кирхгофа - Лява о недеформируемости нормалей.

Соотношения между деформациями  $\varepsilon$  и перемещениями в срединной поверхности задаются в нелинейном виде (геометрическая нелинейность)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ii} &= \partial u_i / \partial x_i - k_i w + 1/2 (\partial w / \partial x_i)^2, \quad (i=1,2), \\ \varepsilon_{12} &= \partial u_1 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_1 + (\partial w / \partial x_1)(\partial w / \partial x_2).\end{aligned}\tag{1}$$

Зависимость между компонентами напряжения и деформациями выбирается в форме Каудерера [22] (физическая нелинейность)

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 3K\alpha(e_0)e_0 + 2G\gamma(e_i)(e_{11} - e_0), \\ \sigma_{22} &= 3K\alpha(e_0)e_0 + 2G\gamma(e_i)(e_{22} - e_0), \\ \sigma_{12} &= G\gamma(e_i)e_{12},\end{aligned}\tag{2}$$

где  $K$  - модуль объемного сжатия;  $G$  - модуль сдвига;  $e_0 = 1/3(e_{11} + e_{22} + e_{33})$  - средняя деформация;  $e_i$  - интенсивность деформаций;  $\alpha(e_0)$  - функция удлинения;  $\gamma(e_i)$  - функция сдвига. Функции  $\alpha(e_0)$  и  $\gamma(e_i)$  характеризуют физическую нелинейность материала. Для многих материалов с большой точностью можно считать  $\alpha(e_0)=1$ , что мы и примем. Пусть  $\sigma_i(e_i)$  обозначает зависимость интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от интенсивности деформаций  $e_i$ . Она для каждого материала является вполне определенной и не зависит от характера напряженного состояния. В случае малых упругопластичных деформаций  $\gamma(e_i) = 1 - \omega(e_i)$ , где  $\omega(e_i) = [3Ge_i - \sigma_i(e_i)]/(3Ge_i)$  - функция А.А. Ильюшина. Таким образом,  $\gamma(e_i) = \sigma_i(e_i)/(3Ge_i)$ . Для получения исходных уравнений использовался вариационный принцип Гамильтона - Остроградского.

Уравнения движения получены в смешанной форме и приведены к безразмерному виду

$$\begin{aligned}1/[12(1 - \nu^2)]\nabla^4 w - L(w, F) - \nabla_k^2 F - \\ - \lambda^{-1}(\Delta M_{11})_{x_1 x_1} - \lambda(\Delta M_{22})_{x_2 x_2} - 2(\Delta M_{12})_{x_1 x_2} - q + \alpha(\ddot{w} + \varepsilon w) = 0, \\ \nabla^4 F + \nabla_k^2 w + 1/2 L(w, w) - \\ - \lambda^{-1}(\Delta T_{22} - \nu \Delta T_{11})_{x_1 x_1} - \lambda(\Delta T_{11} - \nu \Delta T_{22})_{x_2 x_2} + 2(1 + \nu)(\Delta T_{12})_{x_1 x_2} = 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь  $F$  - функция усилий;  $q$  - поперечная нагрузка;  $\varepsilon$  - коэффициент демпфирования; члены вида  $\Delta T$  и  $\Delta M$  - учитывающие физическую нелинейность слагаемые в выражениях, соответственно для усилий и моментов;  $\lambda = a/b$ ,  $\alpha = (a^2 b^2 \rho)/(Eh^6)$ ,  $\rho$  - плотность материала,  $E$  - модуль Юнга;  $\nu$  - коэффициент Пуассона;  $L$  и  $\nabla_k^2$  - дифференциальные операторы:  $L(\cdot, \circ) = \partial^2(\cdot)/\partial x_1^2 \partial^2(\circ)/\partial x_2^2 + \partial^2(\cdot)/\partial x_2^2 \partial^2(\circ)/\partial x_1^2 - 2\partial^2(\cdot)/(\partial x_1 \partial x_2) \partial^2(\circ)/(\partial x_1 \partial x_2)$ ,  $\nabla_k^2(\cdot) = k_1 \partial^2(\cdot)/\partial x_2^2 + k_2 \partial^2(\cdot)/\partial x_1^2$ ;  $k_1, k_2$  - безразмерные параметры кривизны.



Использованы следующие безразмерные переменные:

$$\bar{x}_1 = x_1/a, \quad \bar{x}_2 = x_2/b, \quad \bar{w} = w/h, \quad \bar{F} = F/(Eh^3), \quad \bar{q} = qa^2b^2/(Eh^4), \quad (4)$$

$$\bar{\Delta T}_{ij} = \Delta T_{ij} \, abl/(Eh^3), \quad \bar{\Delta M}_{ij} = \Delta M_{ij} \, abl/(Eh^4).$$

Полученная система уравнений в частных производных и является математической моделью динамики дважды нелинейной пологой оболочки на прямоугольном плане с приложенной поперечной нагрузкой.

В качестве начальных условий в общем случае принимаются  $w|_{t=0} = f_1(x_1, x_2)$ ,  $\dot{w}|_{t=0} = f_2(x_1, x_2)$ . Из различных возможных граничных условий в проведенных численных экспериментах использовались шарнирное опирание на гибкие нерастяжимые в касательной плоскости ребра и скользящая заделка.

### Численные эксперименты

Рассматривается диссипативная ( $\varepsilon = 1$ ) система в виде квадратной в плане ( $\lambda = a/b = 1$ ) сферической оболочки, совершающая колебания под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности  $q = q_0 \sin \omega t$ . Оболочка изготовлена из сплава АМц и имеет следующие геометрические и физические параметры:  $a = b = 0,1$  м,  $h = 0,89 \cdot 10^{-3}$  м,  $E = 69$  ГПа,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 2800$  кг/м<sup>3</sup>,  $a/h = 110$ . Зависимость  $\sigma_i(e_i)$  аппроксимирована билинейной диаграммой

$$\sigma_i = E e_i, \quad e_i \leq e_s, \quad (5)$$

$$\sigma_i = E e_s + E^* (e_i - e_s), \quad e_i > e_s,$$

где  $e_s = 1,35 \cdot 10^{-3}$ ;  $E^*/E = 0,4478$ .

Возникновение остаточных деформаций не учитывается.

В качестве начальных условий примем  $w|_{t=0} = 0$ ,  $\dot{w}|_{t=0} = 0$ .

Краевые условия:

• шарнирное опирание на гибкие нерастяжимые в касательной плоскости ребра

$$w = 0, M_{11} = 0, \dot{\varepsilon}_{22} = 0, \partial \varepsilon_{22} / \partial x_1 - \partial \varepsilon_{12} / \partial x_2 = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a; \quad (6)$$

$$w = 0, M_{22} = 0, \dot{\varepsilon}_{11} = 0, \partial \varepsilon_{11} / \partial x_2 - \partial \varepsilon_{12} / \partial x_1 = 0 \quad \text{при } x_2 = 0, x_2 = b;$$

• скользящая заделка

$$w = 0, \partial w / \partial x_1 = 0, T_{11} = 0, \varepsilon_{22} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a, \quad (7)$$

$$w = 0, \partial w / \partial x_2 = 0, \varepsilon_{11} = 0, T_{22} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0, x_2 = b.$$

Для изучения характера колебаний была взята оболочка под действием знакопеременной нагрузки с частотой, совпадающей с собственной линейной частотой колебаний оболочки, и частотами, находящимися в окрестностях собственной линейной частоты. Колебания рассматривались на интервале времени  $t \in [0, 50]$ , так как увеличение временного интервала не приводило к появлению новых качественных и количественных явлений. Исследования показали, что качественная картина процесса колебаний для всех точек оболочки одинакова, поэтому дальнейший анализ отнесен к ее центральной точке  $w(0,5, 0,5)$ . Описывая переходные процессы в движениях оболочки, будем устанавливать вид ее

колебаний с помощью временного ряда, фазового портрета, сечения Пуанкаре, спектра мощности и др. Детальное исследование переходных процессов в нелинейных колебаниях диссипативных оболочечных систем в настоящей работе проводится впервые. Наблюдения, полученные в ходе компьютерных экспериментов, сопоставляются с известными сценариями переходов динамических систем к хаосу: Фейгенбаума, Помо - Манневила, Рюэля - Такенса. Заметим, что, говоря, например, о сценарии Рюэля - Такенса, мы имеем в виду аналогичную, но с допустимыми отклонениями, эволюцию движения оболочки, то есть сценарий типа Рюэля - Такенса.

В результате численного эксперимента было выявлено несколько типов колебательных режимов. На рис. 1 представлены наиболее характерные для каждого типа графики: временной ряд  $w(t)$ , проекция фазовой траектории  $w_i(w)$ , сечение Пуанкаре, спектр мощности. Символом П обозначены периодические колебания на соответствующих частотах, К - квазипериодические колебания, Пе - перемежаемость, Х - хаотические колебания.

Рассмотрим сценарии перехода в хаотическое состояние колебаний оболочек с краевыми условиями (6), шарнирное опирание, при безразмерном параметре кривизны  $k_1 = k_2 = a^2/hR = 18$  и частоте вынуждающих колебаний  $\omega \in [16, 21]$ , собственная линейная частота  $\omega_0 \approx 17.6$ . Для фиксированной частоты вынуждающих колебаний  $\omega$  изменяется величина нагрузки  $q_0$  и при этом прослеживается эволюция процесса движения оболочки от периодических колебаний до появления хаотических эффектов. Результаты наблюдений представлены в табл. 1.

Таблица 1

$\omega=16.0$	$\text{П}(k\omega_1) \rightarrow \text{К}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{П}(k\omega_1) \rightarrow \text{Х}$
<b>17.6</b>	$\text{П}(k\omega_1) \rightarrow \text{К}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{П}(k\omega_1) \rightarrow \text{К}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{Х}$
19.0	$\text{П}(k\omega_1) \rightarrow \text{П}(k\omega_1/2) \rightarrow \text{К}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{Х}$
21.0	$\text{П}(k\omega_1) \rightarrow \text{К}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{К}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow \text{П}(k\omega_1/4) \rightarrow \text{Х}$

Таким образом, в случае шарнирного опирания при  $k_1 = k_2 = 18$  переход к хаосу происходит через разрушение квазипериодических колебаний, что можно условно назвать сценарием типа Рюэля - Такенса.

В табл. 2 представлены результаты, полученные для шарнирно опертой оболочки при кривизне  $k_1 = k_2 = 24$  и частотах  $\omega \in [18; 26]$ ,  $\omega_0 \approx 21.5$ .

Таблица 2

$\omega=18.0$	$\text{П}(k\omega_1) \rightarrow \text{П}(k\omega_1/2) \rightarrow \text{П}(k\omega_1) \rightarrow \text{П}(k\omega_1/3) \rightarrow \text{Х}$
20.0	$\text{П}(k\omega_1) \rightarrow \text{П}(k\omega_1/2) \rightarrow \text{К}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{Х}$
<b>21.5</b>	$\text{П}(k\omega_1) \rightarrow \text{П}(k\omega_1/3) \rightarrow \text{П}(k\omega_1/4) \rightarrow \text{П}(k\omega_1/3) \rightarrow \text{П}(k\omega_1) \rightarrow \text{П}(k\omega_1/3) \rightarrow \text{Х}$
24.0	$\text{П}(k\omega_1) \rightarrow \text{К}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{П}(k\omega_1/3) \rightarrow \text{К}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{Х}$
26.0	$\text{П}(k\omega_1) \rightarrow \text{К}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{П}(k\omega_1) \rightarrow \text{П}(k\omega_1/2) \rightarrow \text{Х}$

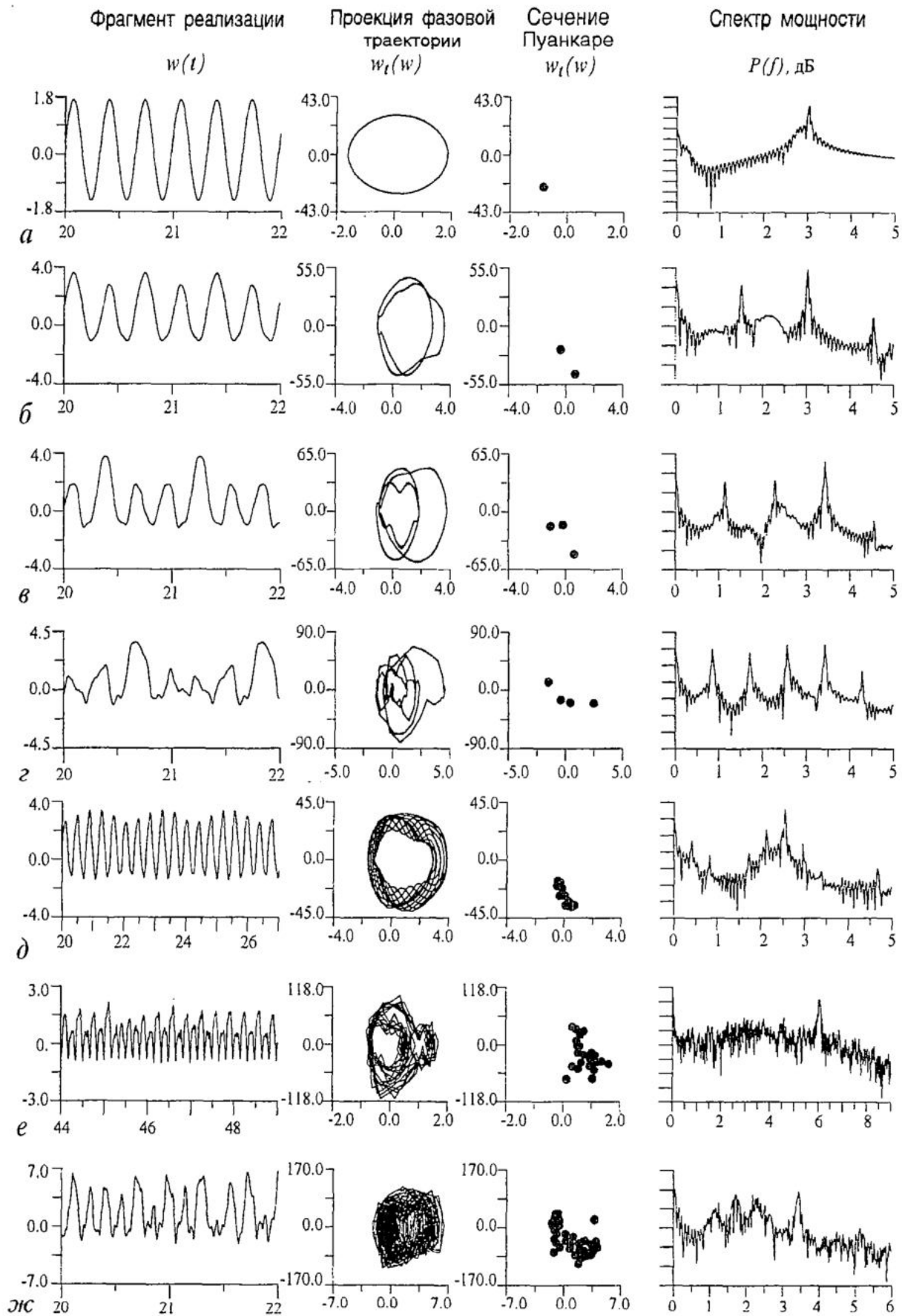


Рис. 1. Характеристики выявленных колебательных режимов: а -  $\Pi(k\omega_1)$ ; б -  $\Pi(k\omega_1/2)$ ; в -  $\Pi(k\omega_1/3)$ ; г -  $\Pi(k\omega_1/4)$ ; д -  $K(\omega_1, \omega_2)$ ; е -  $\Pi_e$ ; ж -  $X$

Итак, в случае шарнирного опирания при  $k_1 = k_2 = 24$  наряду со схемой Рюэля - Такенса (с небольшими отклонениями от нее) при некоторых значениях вынуждающей частоты переход к хаотическому движению происходит через серию бифуркаций периодических колебаний.

Сценарии перехода в хаотическое состояние колебаний оболочки с краевыми условиями (7) - скользящая заделка, безразмерным параметром кривизны  $k_1 = k_2 = 18$ , частотой вынуждающих колебаний  $\omega \in [28, 37]$ ,  $\omega_0 \approx 33$  представлены в табл. 3.

Таблица 3

$\omega = 28.0$	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \text{Пе} \rightarrow X$
30.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \text{Пе} \rightarrow X$
<b>33.0</b>	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow K(\omega_1, \omega_2) \rightarrow X$
35.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \text{Пе} \rightarrow K(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{Пе} \rightarrow \Pi(k\omega_1) \rightarrow X$
37.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \Pi(k\omega_1/2) \rightarrow K(\omega_1, \omega_2) \rightarrow X$

Видно, что в случае скользящей заделки с  $k_1 = k_2 = 18$  при совпадении вынуждающей частоты с собственной частотой колебаний переходная схема может быть описана как сценарий типа Рюэля - Такенса; для вынуждающих частот, меньших собственной частоты, имеет место схема, подобная сценарию Помо - Манневилля; для вынуждающих частот, больших собственной частоты, четкая аналогия со стандартными сценариями не прослеживается.

В табл. 4 представлены результаты вычислительного эксперимента с математической моделью оболочки при  $k_1 = k_2 = 24$  и  $\omega \in [38, 46]$  для  $\omega_0 \approx 41.9$ .

Таблица 4

$\omega = 38.0$	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \text{Пе} \rightarrow X$
40.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \Pi(k\omega_1/2) \rightarrow \Pi(k\omega_1/3) \rightarrow X$
<b>41.9</b>	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow K(\omega_1, \omega_2) \rightarrow X$
44.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \Pi(k\omega_1/2) \rightarrow \Pi(k\omega_1/4) \rightarrow X$
46.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \text{Пе} \rightarrow X$

Таким образом, в случае скользящей заделки с  $k_1 = k_2 = 24$  при совпадении вынуждающей частоты с собственной частотой колебаний переходная схема может быть описана как сценарий типа Рюэля - Такенса; для вынуждающих частот, отличающихся от собственной частоты, переходные процессы протекают по аналогии со сценариями Помо - Манневилля или Фейгенбаума.

Общий вывод по результатам проведенных вычислительных экспериментов: в оболочечных системах исследуемого вида процессы перехода от регулярных колебаний к хаотическим в основном укладываются в рамки схем, аналогичных известным в нелинейной динамике сценариям, хотя полного совпадения не наблюдается; единого сценария, который не зависел бы от кривизны и краевых условий, нет.

## Динамическая потеря устойчивости

В случае автономных (то есть с не зависящей от времени нагрузкой) оболочечных систем известно несколько динамических критериев потери устойчивости. Так, Б.Я. Кантор [23] в качестве динамического критерия условно принимает, что оболочка прохлопывает, если прогиб в центре достигает значения, большего относительной высоты  $w \approx 2f$ , где  $f$  - высота подъема оболочки над планом. А.С. Вольмир [1] в качестве динамического критерия принимает быстрый рост прогиба при незначительном изменении нагрузки. Шио, Сунг и Рот [24] отметили, что в начале динамического процесса потери устойчивости при увеличении нагрузки время, необходимое для достижения значительной амплитуды прогиба, также растет до тех пор, пока не будет достигнуто некоторое значение нагрузки, выше которого рассматриваемый диапазон времени начинает убывать. Нагрузка, при которой начинается обратный процесс изменения времени, необходимого для достижения первого максимума, считается критической.

Для неавтономных оболочечных систем в настоящий момент динамические критерии потери устойчивости не разработаны, хотя свойства, обнаруженные упомянутыми авторами, во многих конкретных случаях отмечаются и здесь. В частности, Холмс [9] провел физический эксперимент по слегка выпученному стержню, подвергающемуся боковому синусоидальному возмущению. Этот стержень можно рассматривать как бесконечно длинную пологую цилиндрическую панель. Показаны две близкие конфигурации потери устойчивости, два закритических равновесных состояния. Качественно данное явление обнаружено и в наших исследованиях.

В настоящей работе сделана попытка дать точную формулировку динамического критерия потери устойчивости для случая колебания пологой оболочки на прямоугольном плане под действием поперечного знакопеременного нагружения. Для этого строятся зависимости «нагрузка - прогиб» и «нагрузка - интенсивность деформаций» на верхней поверхности оболочки при  $x_1 = x_2 = 0.5$ ,  $x_3 = -0.5$ , а также зависимость «нагрузка - усилие». Все зависимости строились в одни и те же моменты времени, соответствующие максимальным прогибам оболочки.

Анализ полученных результатов позволяет установить следующие закономерности. В тех случаях, когда прогиб быстро растет при незначительном увеличении нагрузки, наблюдается убывание интенсивности деформаций. При этом точке перегиба функции  $w(q_0)$  соответствует точка экстремального значения на графике  $e_i(q_0)$  (см. рис. 2). Как отмечалось, быстрый рост прогиба при незначительном увеличении нагрузки является динамическим критерием потери устойчивости в случае постоянной во времени нагрузки. Можно считать, что указанные экстремальные точки функции  $e_i(q_0)$  являются индикаторами качественной перестройки колебательного процесса оболочки. Кроме того, оболочка в начальном своем состоянии под действием нагрузки имеет отрицательные усилия в срединной поверхности, при увеличении интенсивности нагрузки происходит смена знака усилий. Это свидетельствует о том, что оболочка выгнулась и начинает колебаться вокруг нового состояния равновесия. Указанные три зависимости хорошо согласуются между собой и в совокупности дают критерий динамической потери устойчивости для неавтономных оболочечных систем рассматриваемого типа.

Рассмотрим пример шарнирно опертой по контуру оболочки при  $k_1 = k_2 = 24$ ;  $\omega = 24$ . На рис. 2 видно, что в точке I при нагрузке  $q_0 = 100$  усилие в срединной поверхности меняет свой знак с минуса на плюс. Одновременно, начиная с этой же точки, наблюдается быстрый рост прогибов при незначительном увеличении

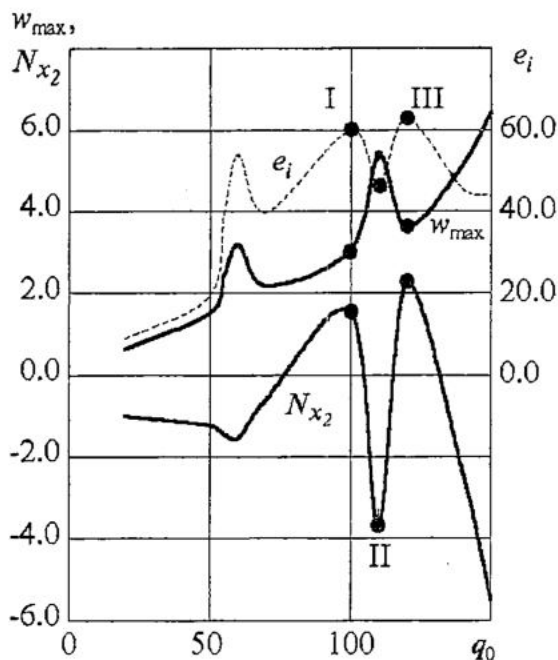


Рис. 2. Зависимость максимального прогиба  $w_{\max}$ , усилия  $N_{x_2}$  и интенсивности деформаций  $e_i$  от нагрузки  $q_0$  для краевых условий (6) - шарнирное опирание

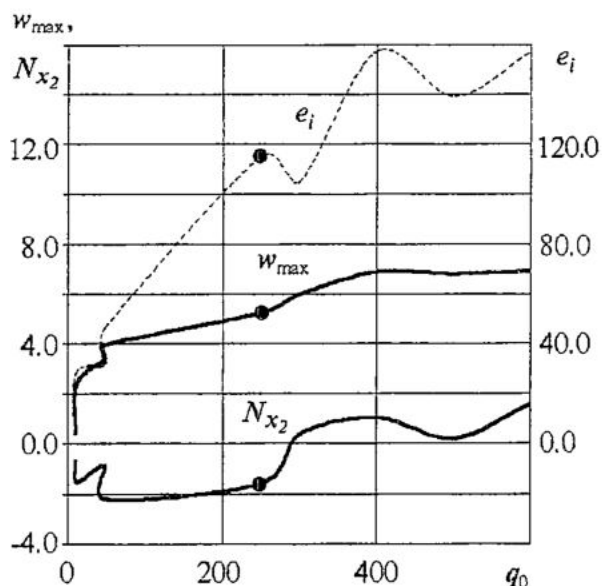


Рис. 3. Зависимость максимального прогиба  $w_{\max}$ , усилия  $N_{x_2}$  и интенсивности деформаций  $e_i$  от нагрузки  $q_0$  для краевых условий (7) - скользящая заделка

нагрузки, а на графике  $e_i(q_0)$  при той же величине нагрузки появляется экстремальная точка. Анализируя основные характеристики (временной ряд, фазовый портрет, сечение Пуанкаре и спектр мощности), мы видим, что при  $q_0=60$  начинается переход системы из режима квазипериодических в режим периодических колебаний.

В точке II на графике усилия  $N_{x_2}(q_0=110)$  происходит новая смена знака с плюса на минус (выхлоп оболочки). На графике  $e_i(q_0)$  появляется вторая экстремальная точка, а на графике  $w(q_0)$  начинается быстрое изменение значений прогибов. Одновременно происходит бифуркация периодических колебаний. В точке III ( $q_0=120$ ) происходит повторная потеря устойчивости. Усилие в очередной раз меняет знак с минуса на плюс. Значения прогибов вновь начинают возрастать, на зависимости «нагрузка - интенсивность деформаций» появляется очередная экстремальная точка. В колебаниях оболочки происходит качественная перестройка: периодический режим сменяется двухчастотным квазипериодическим. После этого происходит последняя смена знака усилий, и оболочка переходит к хаотическим движениям в вывернутом состоянии.

Рассмотрим еще пример, но уже для скользящей заделки при  $k_1=k_2=12$ ,  $\omega=23$ ,  $\omega_0 \approx 25.2$  (рис.3). При величине нагрузки  $q_0=250$  (точка I) происходит бифуркация периодических колебаний, в результате которой наступают колебания типа  $\Pi(k\omega_1/3)$ . В этот момент на графике зависимости  $w(q_0)$  появляется точка перегиба, на графике  $e_i(q_0)$  наблюдается экстремальная точка, а на зависимости  $N_{x_2}(q_0)$  происходит смена знака на плюс. Оболочка, меняя режим колебаний сначала на квазипериодический ( $q_0=410$ ), а затем на хаотический ( $q_0=520$ ), продолжает находиться в новом равновесном состоянии.

### Выводы

- С помощью вычислительных экспериментов выявлены бифуркационные механизмы перехода в хаотическое состояние колебаний геометрически и физически нелинейных оболочек под действием гармонического возбуждения.

Установлено, что переходные процессы зависят от кривизны оболочки, краевых условий, частоты вынуждающих колебаний и некоторых других параметров, то есть единого сценария перехода нет. При этом составными элементами полученных сценариев являются известные в нелинейной динамике схемы перехода к хаосу.

- На основании анализа зависимостей «нагрузка - прогиб», «нагрузка - интенсивность деформаций» и «нагрузка - усилие» сформулирован динамический критерий потери устойчивости для неавтономных, то есть с зависящей от времени нагрузкой оболочечных систем. В предлагаемом критерии важным моментом является знак усилия в срединной поверхности: смена этого знака характеризует выпучивание оболочки. В критических точках происходит качественная перестройка формы колебаний системы.

## Библиографический список

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
2. Крысько В.А. Нелинейная статистика и динамика неоднородных оболочек. Саратов: СГУ, 1976.
3. Пальмов В.А. Колебания упругопластических тел. М.: Наука, 1976.
4. Агамиров В.Л. Динамические задачи нелинейной теории оболочек. М.: Наука, 1990.
5. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.
6. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
7. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
8. Kapitaniak T. Chaos for engineers: theory, applications, and control. Berlin - Heidelberg - New York: Springer, 1998.
9. Holms P.J. A nonlinear oscillator with a strange attractor // Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 1979. 292. P. 419.
10. Moon F.C. Experimental models for strange attractor vibrations in elastic systems // New approaches to non-linear problems in dynamics (Proc. Conf., Pacific Grove, Calif., 1979). Philadelphia, Pa.: SIAM, 1980, p. 487.
11. Hanagud S., Ashlani F. Routes to chaos in structural dynamic systems // 18th Int. Congr. Theor. and Appl. Mech., Haifa, Aug. 22-28, 1992. Haifa, 1992 P.70.
12. Lee J.-X., Symonds P.S., Borino G. Chaotic responses of a two-degree-of-freedom elastic-plastic beam model to short pulse loading // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1992. 59, №4. P.711.
13. Lepik Ulo. Elastic-plastic vibrations of a buckled beam // Int. J. Non-Linear Mech. 1999. 30, №2. P. 129.
14. Yagasaki Takao. Bifurcations and chaos in quasi-periodically forced beam. Theory, simulation and experiment // J. Sound and Vibr. 1995. 183, № 1. P. 1.
15. Аврейтевич Я., Крысько В.А., Крысько А.В. Переход к хаосу в диссипативных пластинчатых конструкциях // Материалы II Белорусского конгресса по теоретической и прикладной механике. Минск, 1999. С. 3.
16. Крысько В.А., Вахлаева Т.В., Крысько А.В. Диссипативные колебания гибких пластинок и сценарий перехода их к пространственно-временному хаосу при гармонических продольных воздействиях // В кн.: Нелинейная динамика механических и биологических систем. Саратов: СГТУ, 2000. С. 8.
17. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Feigenbaum scenario exhibited by thin plate dynamics // Nonlinear Dynamics. 2001. 24. P. 373.

18. *Lepik U.* Axisymmetric vibrations of elastic-plastic cylindrical shells by Galerkin's method // *Int. J. Impact. Eng.* 1996. 18. №3. P. 489.

19. *Крысько А.В., Мицкевич С.А., Чеботаревский Ю.В.* Динамика цилиндрических панелей при действии продольных знакопеременных нагрузок (консервативные и диссипативные системы) // В кн.: *Нелинейная динамика механических и биологических систем.* Саратов: СГТУ, 2000. С. 119.

20. *Крысько В.А., Кириченко А.В.* О динамических критериях потери устойчивости гибких пологих оболочек // В кн.: *Нелинейная динамика механических и биологических систем.* Саратов: СГТУ, 2000. С. 144.

21. *Крысько В.А., Сопенко А.А., Салий Е.В.* Сценарий перехода в хаос физически и геометрически нелинейных оболочек при действии знакопеременной поперечной нагрузки // В кн.: *Нелинейная динамика механических и биологических систем.* Саратов: СГТУ, 2000. С. 108.

22. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961.

23. *Кантор Б.Я.* Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. Киев: Наукова Думка, 1971.

24. *Shian A.C., Soong T.T., Roth R.S.* Dynamic buckling of conical shells with imperfections // *AIAA Journal.* 1974. 12, № 6. P. 121.

*Саратовский государственный  
технический университет*

*Поступила в редакцию 8.01.02*

## COMPLEX VIBRATIONS OF GEOMETRICALLY AND PHYSICALLY NONLINEAR SHALLOW SHELLS OF RECTANGULAR PLANFORM

*V.A. Krysko, A.A. Sopenko, E.V. Salii*

The paper deals with the problem of dynamic response of geometrically and physically nonlinear shallow shell of rectangular planform to time-dependent transverse loading. Equations of motion were derived from the Hamilton - Ostrogradskii principle. A numerical algorithm of these equations integrating is applied to describe transition processes from periodic to chaotic vibrations for some concrete shell systems. A criterion of the loss of stability is proposed for shells subjected to alternating excitation.



*Крысько Вадим Анатольевич* - родился в Киеве (1937), окончил Саратовский автомобильно-дорожный институт в 1960 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (1967) и доктора технических наук (1978) в области устойчивости оболочек и деформируемых конструкций, взаимодействующих с полями различной физической природы. Автор 4-х монографий и более 260 научных работ. «Заслуженный деятель науки и техники РСФСР» (1993); обладатель двух грантов РФФИ (1993, 1997). С 1978 года возглавляет кафедру «Высшая математика» Саратовского государственного технического университета. Соросовский профессор.





*Сопенко Александр Анатольевич* - родился в Красноярске (1959), окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета (1981). После окончания работает в СГТУ на кафедре «Высшая математика». Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1986) в области механики деформируемого твердого тела. Опубликовал ряд статей по указанному направлению.



*Салий Екатерина Вячеславовна* - родилась в Саратове (1971), окончила Саратовский государственный университет по специальности «Геофизика» (1993). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2001). В настоящее время ассистент кафедры «Высшая математика» Саратовского государственного технического университета. Публикации по нелинейной динамике оболочек.



## СРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ РАДИОФИЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «TORUS» В СЛУЧАЕ ГЛАДКОЙ И КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ВОЛЬТ-АМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

*Е.Н. Егоров, А.А. Короновский*

В настоящей работе рассматривается поведение генератора «Torus» с гладкой и кусочно-линейной функциями нелинейности. Показано, что при хорошей степени соответствия кусочно-линейной и гладкой функций, поведение систем оказывается качественно подобным. В то же самое время, неудачный выбор гладкой функции нелинейности ведет к существенному изменению поведения системы.

Исследуемая в настоящей работе радиофизическая система впервые была предложена Л. Чуа с соавторами [1] и является одной из классических кусочно-линейных «схем Чуа». Данная система представляет собой простейшую радиотехническую схему третьего порядка (рис. 1), состоящую из индуктивности, емкостей и нелинейного элемента, который имеет трехсегментную кусочно-линейную вольт-амперную характеристику. В данной работе исследуется поведение указанной системы при замене кусочно-линейной характеристики нелинейного элемента на гладкую. Как правило, подобная замена кусочно-линейной функции на гладкую (или наоборот) при удачном выборе заменяющей функции не приводит к серьезным качественным изменениям поведения системы (см., например, [2]). Вопрос о том, сколь значительны будут изменения в динамике системы, если новая функция нелинейности будет лишь «в общих чертах» соответствовать исходной, также исследуется в настоящей работе.

Следует отметить, что ранее [3] для системы «TORUS» было показано существование «тонких» режимов, когда в фазовом пространстве системы образуются двумерные торы высоких порядков (на двумерном торе при изменении управляющих параметров возникает резонансный цикл, затем новый двумерный тор на базе резонансного цикла и т.д.). Эти режимы наблюдались в очень узком диапазоне управляющих параметров, и, вообще говоря, вопрос о влиянии замены характеристики на такое поведение системы оставался открытым. В данной работе показано, что при удачном выборе гладкой функции вышеупомянутые «тонкие» режимы существуют в рассматриваемой системе. Продемонстрирован также пример неудачного подбора замены. Проведен сравнительный анализ результатов эксперимента с гладкой функцией нелинейности и результатов, полученных ранее для кусочно-линейной характеристики.

Как показали предыдущие исследования [3-5], данная система, несмотря на простоту описывающих ее уравнений, может демонстрировать периодические, квазипериодические и хаотические колебания. Периодические режимы колебаний идентифицировались с помощью чисел вращения  $\rho$ , характеризующих соотношение двух частот. Причем из-за существования мультистабильности поведение системы в пространстве управляющих параметров является довольно сложным. Отличительной особенностью описываемой системы является также «жесткий» характер появления второй частоты в системе, что влечет за собой гистерезис вблизи линии бифуркации рождения двумерного тора.

Приведенная на рис. 1 схема генератора «TORUS» описывается тремя дифференциальными уравнениями. В безразмерных переменных они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= -(\alpha/\gamma) f(y-x), \\ dy/d\tau &= -(1/\gamma)[f(y-x)+z], \\ dz/d\tau &= \gamma y, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x = V_{C_1}/E_1$ ,  $y = V_{C_2}/E_1$ ,  $z = i_L/I_m$ ,  $\tau = t/(LC_2)^{1/2}$ ,  $\alpha = C_2/C_1$ ,  $\gamma = (1/m_1)(C_2/L)^{1/2}$ ,  $m_0/m_1$ . Функция  $f(\xi)$  в данном случае есть ВАХ нелинейного элемента. Она имеет следующий вид:

$$f(\xi) = -(m_0/m_1) \xi + 1/2(m_0/m_1 + 1)[|\xi + 1| - |\xi - 1|]. \quad (2)$$

Наибольший интерес представлял вопрос о том, какие изменения произойдут в поведении исследуемой системы (1), если заменить кусочно-линейную функцию (2) на ее «гладкий аналог», а также, насколько существенно влияние подбора параметров новой функции на динамику системы.

В качестве гладкого аналога кусочно-линейной функции (2) была предложена функция вида

$$f(x) = (th(tx) - k_r x)k_i, \quad (3)$$

где  $t$ ,  $k_r$ ,  $k_i$  - параметры. Фактически гладкая функция представляет собой результат сложения гиперболического тангенса и линейной функции. Методом наименьших квадратов были подобраны значения параметров ( $t = 1.19$ ,  $k_r = 0.33$  и  $k_i = 1.59$ ) таким образом, чтобы функция (3) как можно меньше отличалась от исходной кусочно-линейной функции (2). Вид функции (3) представлен на рис. 2. Для сравнения на том же рисунке приведена кусочно-линейная функция (2), использованная в предыдущих работах [3 - 5]. В данном случае очень важным было выполнение требования возможно более точного совпадения функций, за исключением точек излома функции (2), где искомая функция (3) должна быть

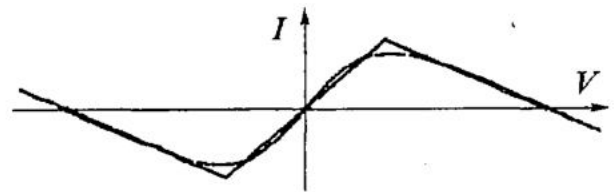
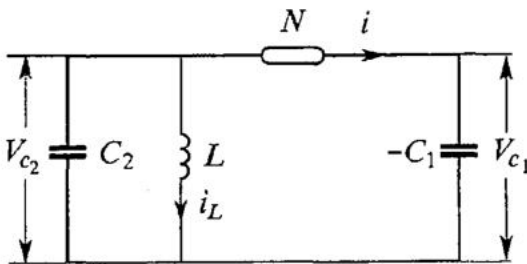


Рис. 1. Эквивалентная схема генератора «TORUS» Рис. 2. Гладкая (3) и исходная кусочно-линейная (2) вольт-амперные характеристики нелинейного элемента

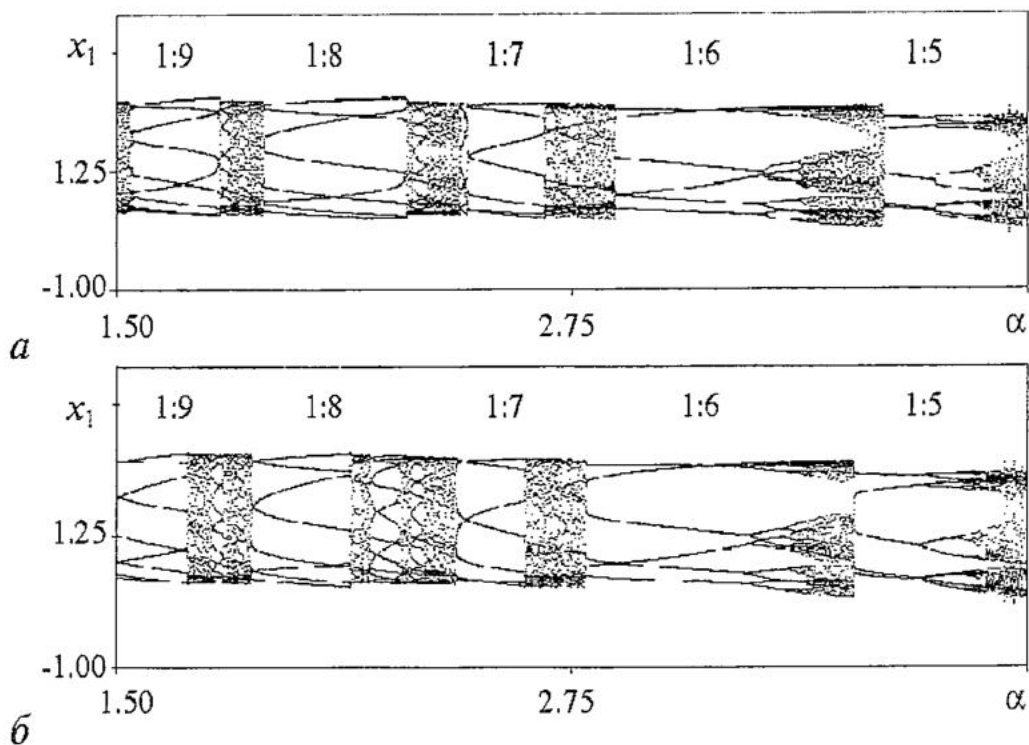


Рис. 3. Две бифуркационные диаграммы для одних и тех же значений управляющих параметров ( $\alpha=1.5\div 4$ ,  $\gamma=3.7$ ): а - управляющий параметр  $\alpha$  увеличивается; б - управляющий параметр  $\alpha$  уменьшается. Численное моделирование системы (1) осуществлялось с гладкой функцией нелинейности (3)

гладкой. Как будет показано ниже, невыполнение этого требования приводит к неудовлетворительным результатам.

В ходе работы полученная система дифференциальных уравнений (1) численно исследована, для чего было проведено ее моделирование методом Рунге - Кутты 4-го порядка с шагом интегрирования  $h=0.01$  [6]. Построены двухпараметрическая карта режимов с помощью бифуркационных диаграмм, фазовые портреты и сечения Пуанкаре. Периодические режимы классифицировались с помощью чисел вращения  $\rho$  [2].

Мультистабильность системы на плоскости управляющих параметров обуславливает метод исследования, при котором каждая бифуркационная диаграмма строится дважды: в первом случае управляющий параметр  $\alpha$  увеличивается, а во втором - уменьшается. Таким образом, проходя карту параметров в прямом, а затем в обратном направлении, учитываем мультистабильность. Значения управляющего параметра, при которых происходит переход от одного режима к другому, для обеих диаграмм сравниваются между собой и их несоответствие отражается на карте режимов гистерезисной складкой. На рис. 3 приведены бифуркационные диаграммы при одинаковых параметрах  $\gamma$  и  $\alpha$ , а на рис. 4 для сравнения показана бифуркационная диаграмма для случая кусочно-линейной ВАХ. Видно, что качественных различий двух систем на данном этапе исследования нет. Режимы, характеризующиеся рациональным отношением частот, чередуются с областями, закрашенными относительно равномерно. На данных участках диаграмм реализуются квазипериодические режимы, а также режимы синхронизации более высоких порядков, числа вращения которых по своим значениям расположены между основными периодическими режимами, отчетливо представленными на данных диаграммах.

На рис. 5 показана «чертова лестница», представляющая собой зависимость числа вращения  $\rho$  от управляющего параметра  $\alpha$ . На рисунке, построенном в том же диапазоне изменения управляющего параметра  $\alpha$ , что и бифуркационные диаграммы (см. рис. 3), можно отчетливо различить «полочки», соответствующие

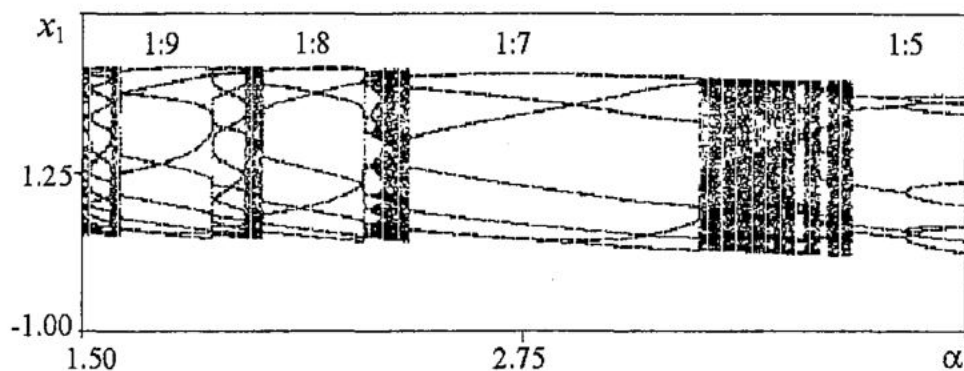


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма для управляющих параметров ( $\alpha=1.5-4$ ,  $\gamma=3.7$ ), кусочно-линейная вольт-амперная характеристика (2)

областям синхронизации на диаграммах. Между областями синхронизации находятся «переходные» области, которые по своей структуре качественно повторяют всю «лестницу» в целом. В этих областях также видны более мелкие ступеньки, соответствующие областям синхронизации более высокого порядка. Вид зависимости  $\rho(\alpha)$  типичен для систем, в которых наблюдаются квазипериодические колебания. Так же как и бифуркационные диаграммы, она строилась дважды для учета мультистабильности системы. На приведенном рисунке наиболее крупные области гистерезиса отмечены стрелками. Строение «лестницы» подтверждает сказанное выше о структуре плоскости параметров.

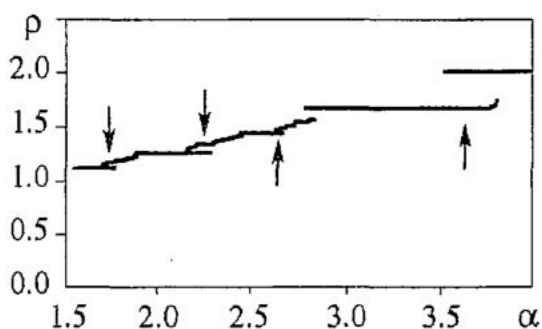


Рис. 5 «Чертова лестница» для системы (1) с функцией (3)

По семейству однопараметрических бифуркационных диаграмм, полученных при малых изменениях параметров системы, в ходе численного эксперимента был построен участок карты режимов (рис. 6). Сравнивая его с полученными ранее результатами (рис. 7) видим удовлетворительное качественное совпадение карт для двух типов функций нелинейности. На приведенных рисунках горизонтальной

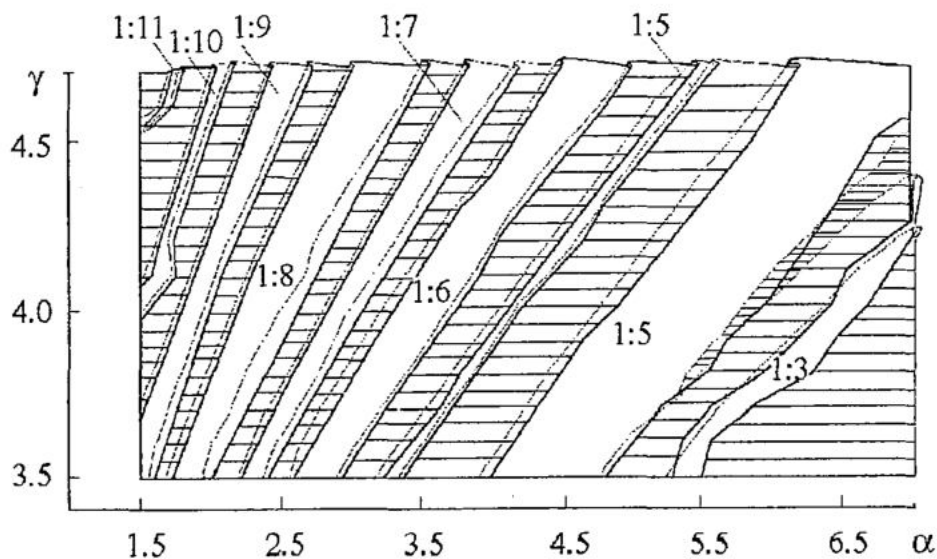


Рис. 6. Двупараметрическая карта режимов системы (1) для гладкой функции нелинейности (3)

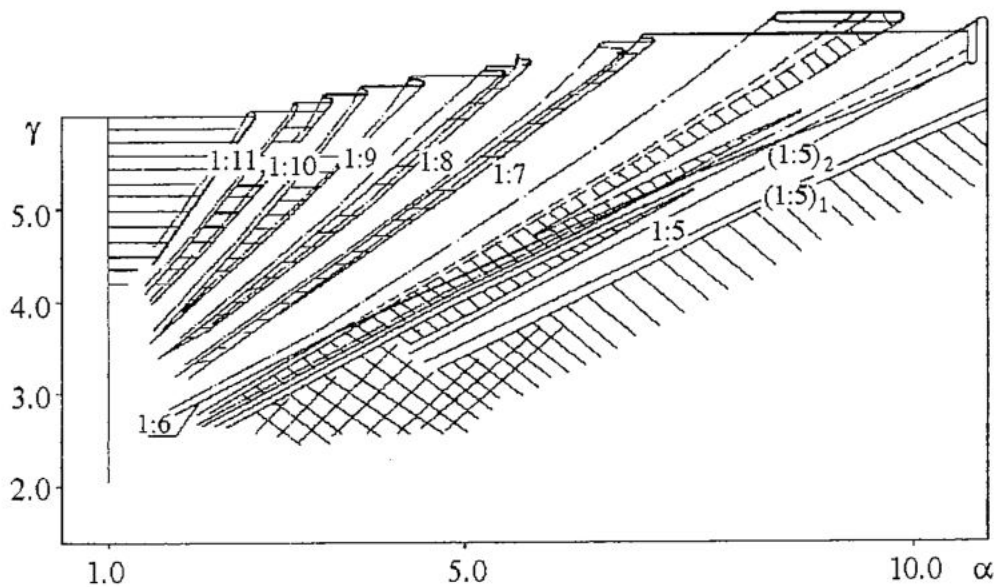


Рис. 7. Двухпараметрическая карта режимов, снятая в ходе численного эксперимента для кусочно-линейной функции (2). Из работы [4]

штриховкой показаны области квазипериодических колебаний, а наклонной - хаотических (см. рис. 7). Поведение системы в области с двойной штриховкой до конца не выяснено [4]. Незаштрихованные области соответствуют режимам, характеризующимся рациональным соотношением частот (значение соотношений обозначено цифрами). Отчетливо видны области гистерезиса, то есть области, которым при одних и тех же значениях управляющих параметров соответствуют различные колебательные режимы.

Строя фазовые портреты и сечения Пуанкаре в конкретных точках этой карты, можно определить какому режиму соответствует тот или иной участок. На рис. 8 представлен фазовый портрет и сечение Пуанкаре для точки с координатами  $\alpha=2.2$  и  $\gamma=3.7$ . Видно, что в данной точке реализуются колебания с периодом 8. Сходство динамики двух систем подтверждается также видом фазовых портретов и сечений Пуанкаре, которые практически полностью совпадают по виду с приведенными на рис. 9 для кусочно-линейной ВАХ.

Как видно из приведенных рисунков, в фазовом пространстве этой системы реализуется тор, что соответствует наличию в системе двух собственных частот (в силу схематических особенностей системы). Кроме того, данный генератор

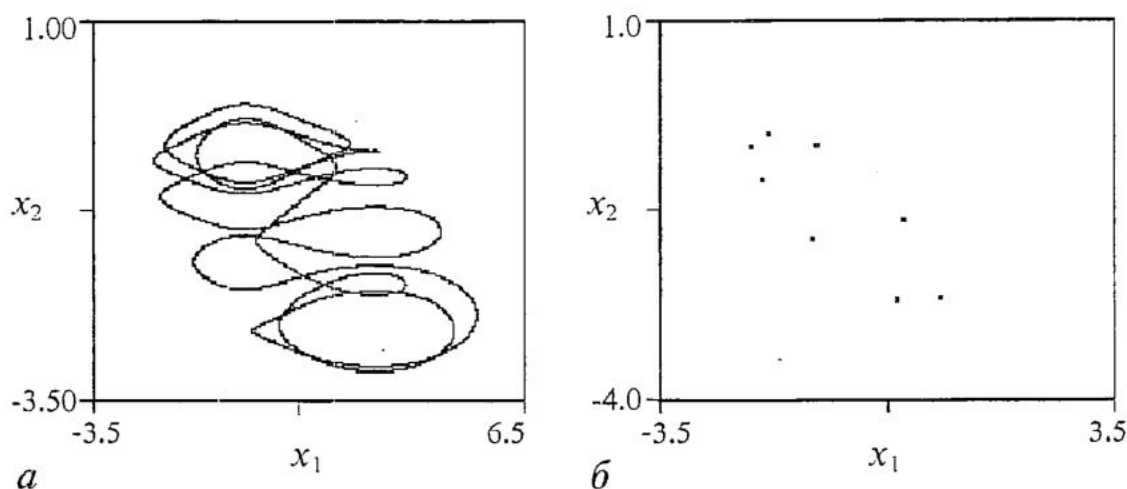


Рис. 8. Фазовый портрет (а) и сечение Пуанкаре (б) при значениях управляющих параметров  $\alpha=2.2$ ,  $\gamma=3.7$  для гладкой функции (3). В системе реализуется режим 1:8. Начальные условия  $x=-1.3500$ ,  $y=0.7350$ ,  $z=-2.0000$

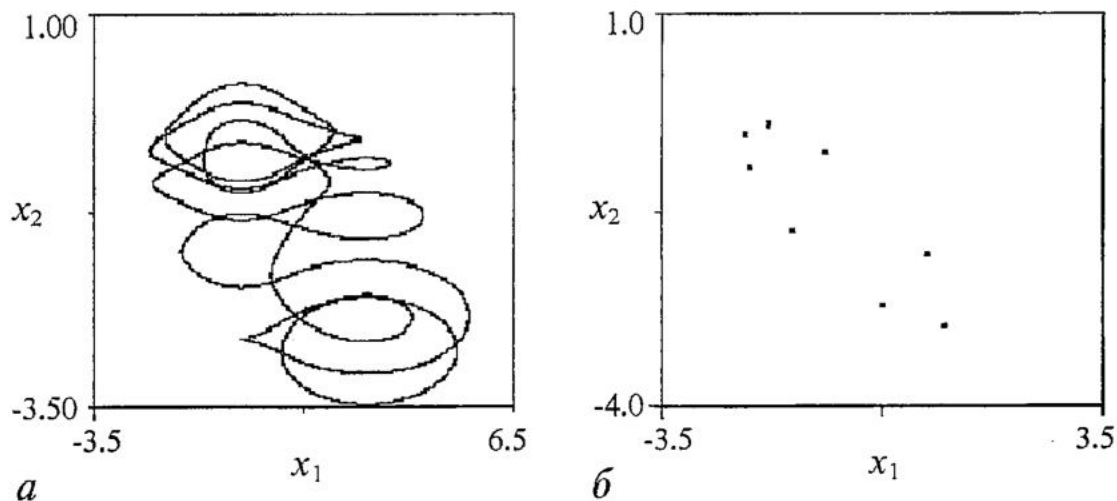


Рис. 9. Фазовый портрет (а) и сечение Пуанкаре (б) при значениях управляющих параметров для кусочно-линейной функции (2). В системе реализуется режим 1:8. Начальные условия  $x=0.3500$ ,  $y=0.7350$ ,  $z=-2.0000$

способен генерировать частоты более высоких порядков благодаря наличию в схеме нелинейного элемента. Это обусловлено также видом вольт-амперной характеристики генератора.

Было обнаружено, что такое негрубое поведение наблюдается в системе в области линии бифуркации рождения двумерного тора  $\alpha=1$ . Например, при значениях параметров  $\alpha=1$  и  $\gamma=2.5$  наблюдалось рождение двумерного тора «второго порядка» на базе режима с соотношением частот 1:7 (рис. 10). Такое поведение системы совпадает с динамикой изученной ранее схемы [3]. На рис. 11 приведен похожий режим для кусочно-линейной функции. Область параметров, в которой существует этот режим, очень узкая и находится только на линии  $\alpha=1$ . Уменьшение параметра  $\alpha$  приводит к переходу на предельный цикл, а увеличение - к переходу колебаний на основной режим, соответствующий тем же значениям параметров.

Высокая чувствительность к начальным условиям, а также длительные переходные процессы существенно затрудняли исследование «тонких режимов». Даже при малом изменении начальных условий можно либо отыскать режимы, характеризующиеся другим числом вращения, либо вообще уйти из рассматриваемой области. В ходе работы при одинаковых значениях параметров, но разных

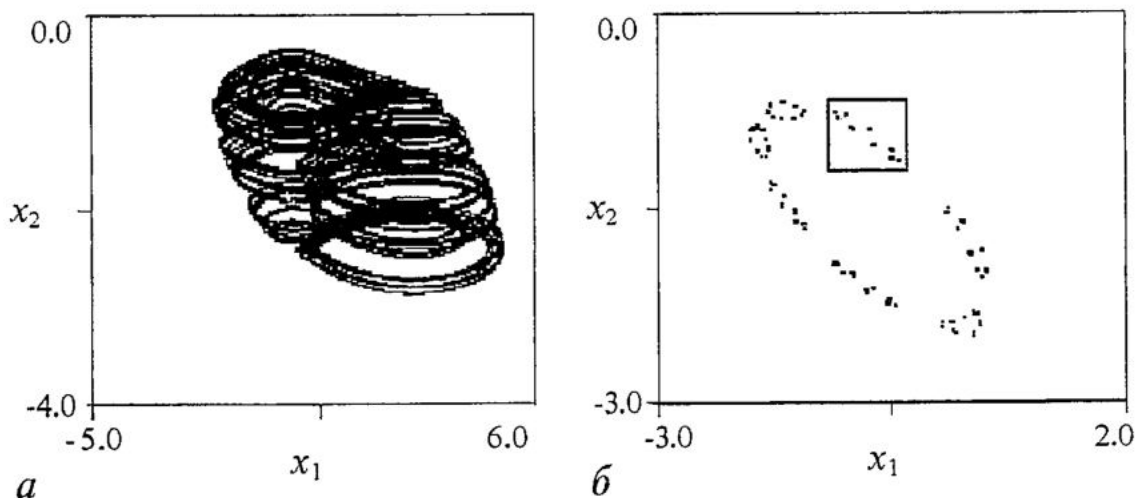


Рис. 10. Фазовый портрет (а) и сечение Пуанкаре (б) для гладкой функции нелинейности (3). Значения управляющих параметров  $\alpha=1$ ,  $\gamma=2.53$ . Начальные условия  $x=-2.0585$ ,  $y=-0.1794$ ,  $z=-4.2366$

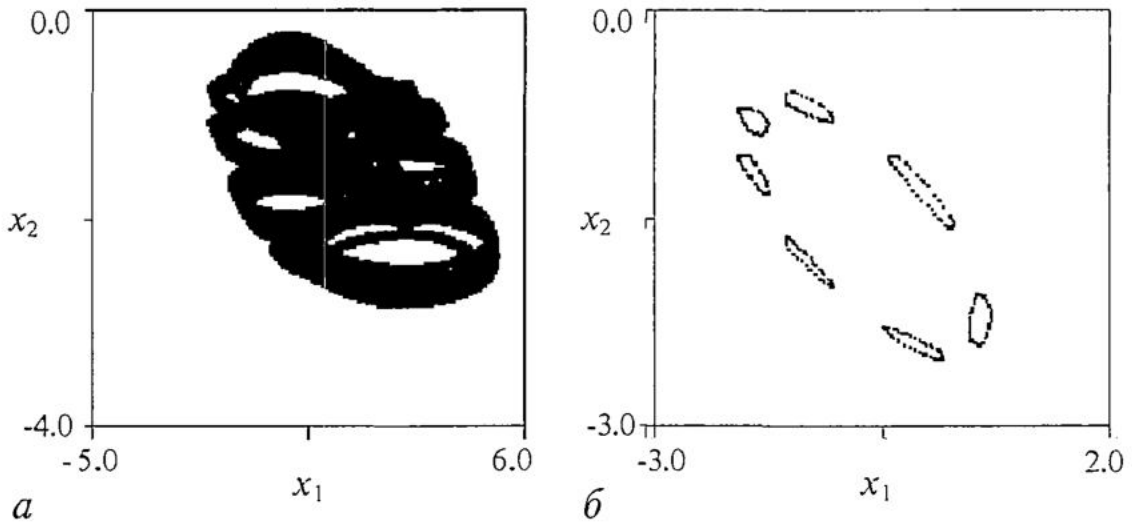


Рис. 11. Фазовый портрет (а) и сечение Пуанкаре (б) для кусочно-линейной функции (2). Значения управляющих параметров  $\alpha=1$ ,  $\gamma=2.5$ . Начальные условия  $x=-1.3843$ ,  $-1.3102$ ,  $-6.4256$

начальных условиях наблюдались режимы на базе областей синхронизации с соотношением частот 1:6, 1:7, 1:8.

Нужно отметить, что такое поведение системы не может являться следствием ошибок в процессе проведения компьютерного моделирования, так как в ходе эксперимента менялся шаг интегрирования, что не приводило ни к каким качественным изменениям. В ходе работы были повторены некоторые результаты, полученные ранее для кусочно-линейной ВАХ [3, 4], что тоже может послужить гарантией от незапланированных ошибок, связанных с используемым методом интегрирования.

Выше говорилось о требовании, предъявляемом к гладкой функции нелинейности. Был поставлен вопрос о том, насколько сильно изменится поведение системы в случае неудачного выбора «гладкого аналога». В качестве такого «аналога» была выбрана функция вида

$$f(\xi) = 1/19(-\xi^3 + 9\xi)c, \quad (4)$$

где

$$\xi = \begin{cases} ax & \text{при } |x| \leq 1, \\ a + (x - 1)b/2 & \text{при } x > 1, \\ -[a + (|x| - 1)b/2] & \text{при } x < -1, \end{cases}$$

$a=1.732$ ,  $b=1.268$ ,  $c=1.55$ . Она лишь примерно аппроксимировала исходную ВАХ (рис. 12). Для нее также была построена карта режимов на плоскости управляющих параметров (рис. 13, обозначения те же). По виду карты можно

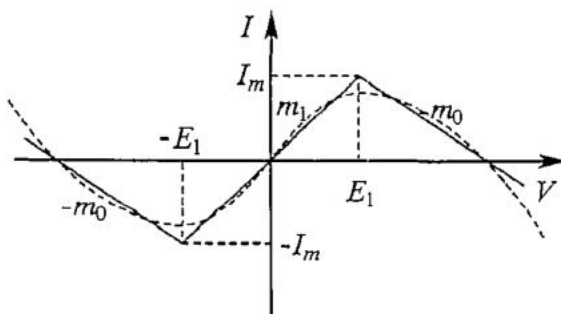


Рис. 12. Гладкая функция нелинейности (4)

судить о том, что данная система, так же как и исходная, демонстрирует двухчастотную динамику с различным соотношением частот, а также хаотические колебания. Однако расположение листов синхронизации сильно отличается от приведенного на рис. 6. На карте рис. 13 расположение областей синхронизации беспорядочное и нет четкой структуры языков Арнольда, сходящихся к линии



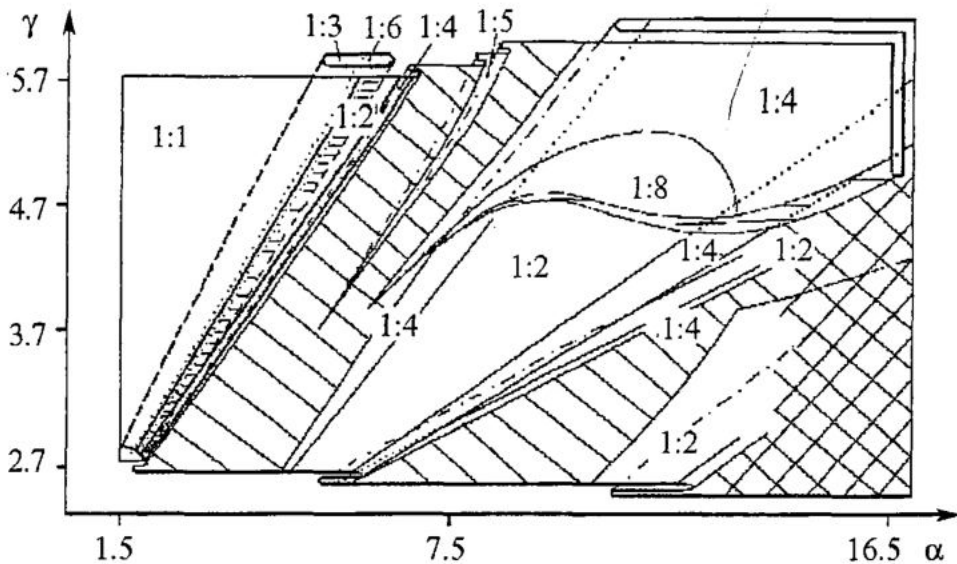


Рис. 13. Карта режимов, полученная для системы (1) с гладкой функцией нелинейности (4)

бифуркации рождения тора, что демонстрирует исходная система, а также система с функцией (3).

Таким образом, результаты, полученные в ходе данного исследования, показывают, что гладкая функция, выбранная для описания ВАХ нелинейного элемента, подобрана удачно и все «тонкие» эффекты поведения в данном случае сохраняются. Сравнение полученных результатов с предыдущими исследованиями показало качественное совпадение динамики систем с гладкой и кусочно-линейной ВАХ. Следовательно, на данном этапе исследований можно сделать вывод, что наличие изломов в точках экстремумов функции нелинейности не имеет определяющего значения для поведения данной системы. В то же время, существенной оказывается степень аппроксимации кусочно-линейной функции ее гладким аналогом на всей области определения функции.

Авторы выражают признательность В.В. Захарову за помощь в проведении численного эксперимента.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 01-02-17392 и 02-02-16351).*

### Библиографический список

1. Matsumoto T., Chua L.O., Tokunaga R. // IEEE Trans. Circuits and Syst. 1987. Vol. 34, № 3. P.240.
2. Андрушкевич А.В. и др. Путь к хаосу в кусочно-линейной модели генератора на туннельном диоде // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. Т. 1. № 1,2. 1993. С. 93.
3. Кипчатов А.А., Короновский А.А. Тонкие эффекты самоподобного поведения кусочно линейной системы вблизи линии бифуркации рождения тора // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т.5. № 2. С. 17.
4. Андрушкевич А.В. и др. Экспериментальное двухпараметрическое исследование неоднозначных режимов колебаний // Изв.вузов. Радиофизика. 1995. Т. XXXVIII, N 11. С 1195.

5. *Короновский А.А.* Мультипликаторы периодических решений для генератора с кусочно-линейным элементом // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т 5, № 2.С.24.

6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров.М.: Наука,1974.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 30.07.01  
после доработки 20.12.01*

## COMPARISON OF DYNAMICS OF «TORUS» SYSTEM WITH SMOOTH OR PIECEWISE-LINEAR VA-CHARACTERISTICS

*E.N. Egorov, A.A. Koronovskii*

The dynamics of «Torus» generator with smooth or piecewise-linear volt-ampere characteristics is considered. It was shown that the systems at high degree of coincidence of smooth and piecewise-linear volt-ampere characteristics have a qualitative similar behaviour. Incorrect choice of the smooth function leads to the essential modification of the system behaviour.



*Егоров Евгений Николаевич* - родился в Саратове (1980). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2002). Инженер учебной лаборатории нелинейной динамики факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика систем с сосредоточенными параметрами.



## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМ С УПРУГИМИ ОТРАЖЕНИЯМИ.

### 1. Бильярд и его инволюция

*С.В. Найдёнов, В.В. Яновский*

В рамках нового геометро-динамического подхода с бильярдными системами связан специальный класс динамических систем - обратимых отображений с проективной инволюцией на «симметричном» фазовом пространстве. Исследованы основные геометрические особенности локально гладких бильярдных инволюций - проективность и кусочная разрывность; указана их роль в формировании той или иной (регулярной и хаотической) нелинейной динамики бильярда.

### Введение

Динамические системы - фазовые потоки и точечные отображения занимают центральное место во многих вопросах нелинейной динамики, особенно, в проблеме детерминированного хаоса [1 - 3]. Среди динамических систем с особенностями [4] наиболее важная роль отводится бильярдам, в которых свободное движение сопряжено с упругими отражениями от границы заданной геометрии. Бильярды выделяются внешней простотой и физической наглядностью; они удобны для получения строгих аналитических результатов и компьютерного моделирования. В то же время происходящие в этих системах нелинейные явления обнаруживают глубокое физическое и математическое содержание. В известном смысле бильярд можно считать парадигмой детерминированного хаоса в классической механике, а в последнее время своеобразным «мостом», связывающим хаотические системы и их квантовые «двойники» в проблеме квантового хаоса.

В начале становления теории динамических систем бильярды привлекались для описания типичных свойств гамильтонового движения (Дж. Биркгоф [5]). Затем на бильярдных моделях отработывались такие фундаментальные положения хаотической (и не только) динамики как локальная неустойчивость траекторий и ее роль в обосновании эргодической гипотезы статистической физики (модель сталкивающихся шаров А. Крылова [6]); перемешивание и эргодичность с их строгим доказательством для систем с малым числом степеней свободы (рассеивающие бильярды Я. Синая [7] и их связь с геодезическими потоками на многообразиях отрицательной кривизны); гиперболичность как типичное свойство не только рассеивающих, но и локально фокусирующих близкие траектории

систем (бильярды Л. Бунимовича [8] типа «стадион») и др. Важную роль сыграли бильярды в спектральной теории оператора Лапласа (вычисление квазимод В. Лазуткиным [9]) и получении ответа на известный вопрос «можно ли услышать форму барабана?» (см., например, [10]). Уместно отметить, что физически глубокую концепцию бильярда использовали задолго до создания современной математической теории подобных систем. Так Кельвин проверял справедливость закона Максвелла для распределения идеального газа по скоростям, рассматривая механику бильярдных шаров, а Н. Бор использовал специфику движения выделенной частицы (нейтрона) среди остальных шаров бильярда (нуклонов) для интерпретации своей модели составного ядра.

Непросто даже перечислить все физические приложения бильярдных шаров. Модель сталкивающихся шаров остается популярной при исследовании поведения взаимодействующих молекул, атомов, нуклонов. Газ Лоренца (бильярдное движение частицы в системе с фиксированным или случайным расположением рассеивателей определенной формы) привлекается для описания кинетических и диффузионных явлений. Модель с упругими отражениями естественно возникает при описании (в приближении геометрической оптики) распространения электромагнитных колебаний в микроволновых резонаторах [11], волноводах [3] и оптических полостях [12]; при исследовании динамики нейтральных и заряженных частиц в твердотельных кавернах, мезоскопических квантовых точках и магнито-оптических ловушках, а также при описании светособирания в сцинтилляционных детекторах [13] и т.д.

В последнее время бильярды широко используются для отработки квазиклассического сценария перехода к квантовому хаосу и выявлению его связи с теорией случайных матриц [14]. Кроме того бильярды могут оказаться удобной системой для изучения особенностей многомерного хаоса [15].

Нелинейная система (бильярд) со столь широким спектром приложений должна обладать универсальными динамическими свойствами. Источник этой универсальности следует искать в геометрической природе бильярда, так как динамические свойства его траекторий в целом определяются геометрией области бильярдного движения (в плоском случае - геометрией границы бильярда). Вместе с тем имеются особенности, выделяющие бильярды из широкого класса динамических систем с регулярным и хаотическим поведением.

Несомненным достоинством бильярдных шаров является то, что в самой их динамике заложено свойство дискретности для траекторий, испытывающих последовательные отражения от границы. В подавляющем большинстве задач хаотической динамики именно возможность описать систему в терминах разностных уравнений в дискретном времени (чаще всего отображений, например, сечений Пуанкаре соответствующего дифференциального потока) позволяет наиболее продвинуться как в качественном, так и в количественном описании ее сложного поведения. Мощные методы, в рамках которых были получены практически все наиболее важные результаты современной теории бильярдных шаров [7 - 9, 16, 17 и др.] использовали консервативные отображения (сечения Пуанкаре) в (ко)касательном расслоении гамильтонового потока бильярда. В рамках геометрического подхода, развиваемого в данной статье, оказывается возможным естественным образом свести произвольный бильярд к динамической системе более широкого класса - обратимому отображению в новом (симметричном) фазовом пространстве, непосредственно учитывающем топологию геометрической границы бильярда.

Обратимость бильярда как динамической системы относится к числу его принципиальных свойств. Заметим, что обратимые системы относятся, пожалуй, к наиболее часто встречающимся физическим системам, так как большинство физических законов (кроме статистических) обратимо во времени. Интерес к

обратимым динамическим системам, начало исследованиям которых было положено в работах Дж. Биркгофа [5], и получившим толчок в своем развитии в работах В. Арнольда и М. Севрюка [18]; в последнее время также усилился и, в первую очередь, связан с тем, что они обнаруживают (возможное) одновременное сосуществование элементов гамильтоновой и диссипативной динамики [19].

Бильярдное отображение в «симметричном» фазовом пространстве с равноправными координатами строится естественным образом изначально как отображение, описывающее последовательность точек отражения произвольного луча от границы бильярда, а не как сечение соответствующего гамильтонового потока. Этот подход сродни идее сокращенного описания системы, так как итерации построенного обратимого отображения связывают лишь координаты последовательных точек отражения от границы бильярда, а прохождение бильярдного луча между ними не рассматривается. Однако никакой потери динамической информации при таком «огрублении» не происходит, так как движение луча между отражениями всегда может быть восстановлено по последовательности этих точек, лежащих на границе бильярда. По этому поводу отметим, что подобная процедура получения отображений, связывающих (в явном виде) последовательные отражения бильярдной траектории с успехом использовалась и ранее как для отдельных бильярдов [3], так и, например, для газа Лоренца [17] и т.д., но при условии достаточно простой формы границы («плиссируемый» бильярд; правильная сферическая или прямоугольная геометрия границы или рассеивателей). При этом получались консервативные отображения, якобиан которых строго равен единице.

Отображение, охватывающее любой тип бильярда содержит проективную инволюцию, появление которой отражает факт обратимости бильярда и связано со способом построения нового фазового пространства. Проективный характер инволюции вызван геометрической природой бильярда. А именно, закон упругого отражения, если его рассматривать как геометрическое преобразование падающего и отраженного лучей бильярдной траектории в точке отражения, является проективным преобразованием. Проективная особенность бильярда позволяет установить ряд его общих свойств, однако в данной работе большее внимание уделим не самим свойствам инволюции бильярда, а их следствиям с точки зрения допустимой фазовой динамики и исследуем ее общую структуру для произвольного бильярда (с достаточно гладкой границей) в «симметричном» фазовом пространстве. При этом ограничимся наиболее простым, но практически наиболее распространенным случаем двумерного бильярда на плоскости. В большинстве последующих рассуждений гладкость границы особой роли не играет, хотя наиболее далеко идущие геометро-динамические связи [20] появляются для бильярдов с кривизной (гладкость границы не ниже класса  $C^3$ ).

### **Бильярд как специальная геометро-динамическая система**

Обычно, с бильярдом произвольной формы (границей  $\partial\Omega$ ) связывается фазовый поток в касательном или кокасательном расслоении к геометрической области  $\Omega$  бильярдного движения. Затем строится подходящее сечение Пуанкаре и исследуются его свойства. В первом случае (касательное расслоение [4]) выбранный подход оказывается родственным изучению геодезических (с особенностями) на многообразиях с кривизной. Второй способ по сути связан с гамильтоновым формализмом. В обоих случаях получаются консервативные отображения. Они описывают бильярд как каскад на соответствующем фазовом пространстве, координаты которого не равноправны по отношению друг к другу

(обычная координата и скорость или координата и импульс, соответственно). Переход от непрерывного потока к дискретному отображению - нетривиальная процедура, тем более, что для бильярда она осложняется не всегда трансверсальным характером векторного поля исходного потока, суженного на границу бильярда  $\partial\Omega$  (особыми будут траектории касающиеся границы или попадающие в особые точки границы), с чем связаны трудности аналитического исследования бильярдов как динамических систем с особенностями. Кроме того, некоторые очевидные, геометрические по своей природе, свойства бильярда при подобном рассмотрении оказываются скрытыми за вспомогательными (математическими) конструкциями.

Рассмотрим другой способ описания бильярда. Основным моментом этого, по сути геометрического, подхода является выбор нового фазового пространства с симметричными (равноправными) координатами и введение на нем специального класса отображений, выделяющих бильярд среди остальных динамических систем с гамильтоновыми особенностями. Подобный подход применялся к реальной системе - описанию светособирания в сцинтилляционном детекторе [13].

Предварительно напомним, что границу бильярда  $\partial\Omega \subset R^2$  можно параметризовать одним из удобных способов (см., например, [21]) гомеоморфизмом  $I = [0,1] \xrightarrow{\varphi} \mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi) \in \partial\Omega$ . В силу замкнутости границы гомеоморфизм будет периодическим,  $\mathbf{r}(\varphi + 2\pi) = \mathbf{r}(\varphi)$ , что по-другому можно обеспечить, изменив топологию отрезка  $I$  на окружность  $S^1$ . Итак,  $\partial\Omega$  топологически эквивалентна окружности,  $\partial\Omega \sim S^1$ . Поле внешних нормалей  $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(\mathbf{r}(\varphi))$  (или касательных  $\tau$ ) к границе, равно как и ее ориентированную кривизну  $\hat{K}(\varphi)$  (см., например, [22]) по постановке задачи также считаем известными.

Рассмотрим произвольный луч (говоря точнее, направленный отрезок) какой-нибудь бильярдной траектории между ее двумя последовательными отражениями в точках  $\mathbf{r}(\varphi_1)$  и  $\mathbf{r}(\varphi_2)$  с координатами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (рис. 1). Взятый в качестве начального, такой луч однозначно определяет всю дальнейшую эволюцию этой бильярдной траектории. При каждом последующем отражении координаты луча изменяются так, что бывшая точка отражения  $\mathbf{r}(\varphi_2)$  становится новой точкой вылета  $\mathbf{r}(\bar{\varphi}_1) = \mathbf{r}(\varphi_2)$ , а старая точка вылета  $\mathbf{r}(\varphi_1)$  переходит в новую точку отражения  $\mathbf{r}(\bar{\varphi}_2) = \mathbf{r}(\varphi_3)$ , где  $\varphi_3 = f(\varphi_1, \varphi_2)$  - некоторая (периодическая) функция. Условие, по которому строится отраженный луч с координатами  $(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2)$ , есть закон упругого отражения. Это приводит к определенной специализации функции  $f(\varphi_1, \varphi_2)$ . Таким образом, возникает динамическая система - отображение  $(\varphi_1, \varphi_2) \xrightarrow{B} (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2)$ . Фазовое пространство  $Z$  образуют точки  $z = (\varphi_1, \varphi_2) \in Z$ , координаты которых задают всевозможные лучи бильярдных траекторий. Каждая точка  $z_0 = (\varphi_{1,0}, \varphi_{2,0})$  фазового пространства может считаться начальной (фазовой) точкой некоторой бильярдной траектории, содержащей (начальный) луч, соединяющий точки  $\mathbf{r}(\varphi_{1,0})$  и  $\mathbf{r}(\varphi_{2,0})$ . Симметрично расположенная в  $Z$  фазовая точка с переставленными координатами  $z_0^T = (\varphi_{2,0}, \varphi_{1,0})$ , с одной стороны, соответствует противоположно направленному по отношению к предыдущему отрезку (лучу бильярдной траектории). С другой стороны, рассмотренная как начальная фазовая точка она определяет ту же самую траекторию (последовательность точек отражения), но проходимость в обратном порядке из  $\mathbf{r}(\varphi_{2,0})$  в  $\mathbf{r}(\varphi_{1,0})$  (обращенную во времени траекторию).

Топологически фазовое пространство  $Z$  строится как прямое произведение  $Z = S^1 \otimes S^1 = T^2$ , следовательно, в данном случае оказывается двумерным тором  $T^2$ . В более сложных (с топологической точки зрения) случаях, например, для многосвязных или многомерных бильярдов, «симметричное» фазовое

пространство, по-прежнему, строится по правилу  $Z=M \otimes M$ ,  $M \sim \partial\Omega$ , но его топология будет другой. Для 3D бильярдов оно выглядит как  $Z=\Sigma_g \otimes \Sigma_g$ , где  $\Sigma_g \sim \partial\Omega$  - сфера с  $g$  ручками, которой гомеоморфна замкнутая евклидова поверхность  $\partial\Omega \subset R^3$  (2D граница бильярда). По построению две координаты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (в многомерном случае они станут векторными) точек фазового пространства оказываются равноправными по отношению друг к другу. Размерность  $Z$  сохраняется четной. Равноправие координат вызвано отмеченной обратимостью системы и приводит к симметричности (в целом) фазового портрета бильярдных отображений относительно диагонали  $\Delta$  фазового пространства,  $\Delta = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in Z \mid \varphi_1 = \varphi_2\}$ .

Таким образом бильярдное отображение примет вид

$$Z \xrightarrow{B} Z; \quad B := \begin{cases} \bar{\varphi}_1 = \varphi_2 \pmod{2\pi}, \\ \bar{\varphi}_2 = f(\varphi_1, \varphi_2) \pmod{2\pi}. \end{cases} \quad (1)$$

Из-за обратимости системы функция  $f$  должна быть инволюцией

$$f[f(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_2] = \varphi_1 \Leftrightarrow f \circ f = id, \quad f = f_{\varphi_2}(\varphi_1), \quad f \in C^r(T^2; S^1), \quad (2)$$

где  $id$  - тождественная функция, а гладкость границы должна быть класса  $C^{r+1}$ . Появление условия (2) очевидно. Если падающий луч заменить отраженным (это соответствует замене  $(\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (\bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_1)$  в системе (1)), то в результате его отражения должен получиться исходный луч, приходим к выражению  $f(\bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_1) = \varphi_1$ , откуда и следует (2).

Остается получить выражение для инволюции бильярда. Каждая из функций  $f$  для бильярда с фиксированной формой границы представляет собой семейство инволюций, зависящих от второго аргумента как от параметра,  $f(\varphi_1, \varphi_2) \stackrel{\text{def}}{=} f_{\varphi_2}(\varphi_1)$ . Воспользуемся условием угол падения  $\theta$  равен углу отражения  $\bar{\theta}$ . С учетом направленности углов, отсчитываемых от внешней нормали  $\mathbf{n}$  к границе  $\partial\Omega$ , перепишем это условие в виде  $\cot\theta = -\cot\bar{\theta}$  или в декартовых координатах на плоскости

$$\begin{aligned} & \frac{n_x(\varphi_2)(x(f) - x(\varphi_2)) + n_y(\varphi_2)(y(f) - y(\varphi_2))}{n_x(\varphi_2)(y(f) - y(\varphi_2)) - n_y(\varphi_2)(x(f) - x(\varphi_2))} = \\ & = - \frac{n_x(\varphi_2)(x(\varphi_1) - x(\varphi_2)) + n_y(\varphi_2)(y(\varphi_1) - y(\varphi_2))}{n_x(\varphi_2)(y(\varphi_1) - y(\varphi_2)) - n_y(\varphi_2)(x(\varphi_1) - x(\varphi_2))}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3 = f(\varphi_1, \varphi_2)$  определяют координаты точек вылета, отражения и после-

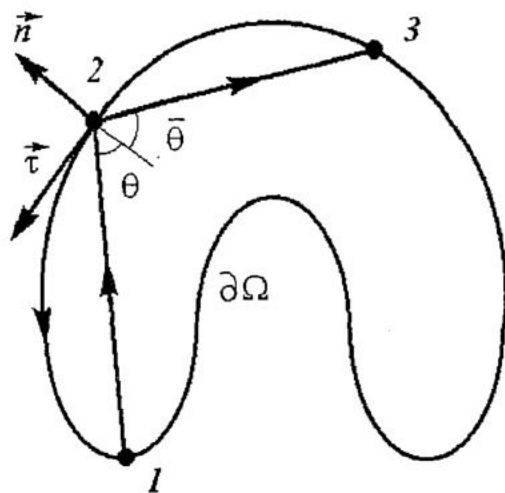


Рис. 1. Геометрическое распространение лучей бильярда. Произвольный луч распространяется из точки вылета 1 (координата  $\varphi_1$ ) в точку отражения 2 ( $\varphi_2$ ), а затем в точку 3 ( $\varphi_3 = f(\varphi_1, \varphi_2)$ ) на границе  $\partial\Omega$  с положительным обходом против часовой стрелки, по полю внешних нормалей  $\mathbf{n}$  и касательных  $\boldsymbol{\tau}$ . В точке отражения угол падения  $\theta$  равен углу отражения  $\bar{\theta}$

дующего падения на  $\partial\Omega$ ;  $\mathbf{r}=(x,y)$ ,  $\mathbf{n}=(n_x,n_y)$ ,  $\mathbf{n}^2=1$ . Преобразовав выражение (3), получим

$$\frac{x(f) - x(\varphi_2)}{y(f) - y(\varphi_2)} = \frac{(n_x^2(\varphi_2) - n_y^2(\varphi_2))(x(\varphi_2) - x(\varphi_1)) + 2n_x(\varphi_2)n_y(\varphi_2)(y(\varphi_2) - y(\varphi_1))}{(n_x^2(\varphi_2) - n_y^2(\varphi_2))(y(\varphi_2) - y(\varphi_1)) - 2n_x(\varphi_1)n_y(\varphi_2)(x(\varphi_2) - x(\varphi_1))}. \quad (4)$$

В неявном виде последнее соотношение определяет инволюцию бильярда  $f=f(\varphi_1,\varphi_2)$  по заданному уравнению границы  $\mathbf{r}(\varphi)\in\partial\Omega$  и полю нормалей  $\mathbf{n}(\varphi)\perp\partial\Omega$  к ней (оба эти векторных уравнения связаны друг с другом и однозначно задают форму  $\partial\Omega$  с точностью до аффинных преобразований). Выражение (4) пригодно для определения инволюции произвольного бильярда, в том числе с не гладкой (многоугольники), не выпуклой (рассеивающе-фокусирующие бильярды), а также не замкнутой границей (не компактные бильярды), так как при его выводе никаких подобных ограничений не вводилось. Заменой переменных в (4) можно получить уравнение инволюции в произвольных, а не только декартовых координатах. Среди всех координатных представлений бильярда выделенной будет натуральная параметризация из-за ее однозначности для любой формы границы  $\partial\Omega$ .

В качестве примера вычислим несколько конкретных инволюций. Для эллиптического бильярда с уравнением границы  $x = a\cos\varphi$ ,  $y = b\sin\varphi$  получим в явном виде

$$f(\varphi_1,\varphi_2) = -\varphi_2 - 2\arctan \left[ \frac{(a^2\sin^2\varphi_2 - b^2\cos^2\varphi_2) \tan[(\varphi_1 + \varphi_2)/2] + b^2\sin 2\varphi_2}{(a^2\sin^2\varphi_2 - b^2\cos^2\varphi_2) - a^2\sin 2\varphi_2 \tan[(\varphi_1 + \varphi_2)/2]} \right] \pmod{2\pi}. \quad (5)$$

В случае  $a=b$  приходим к бильярду на окружности с инволюцией

$$f(\varphi_1,\varphi_2) = 2\varphi_2 - \varphi_1 \pmod{2\pi}, \quad (6)$$

сохраняющую точно такой же вид и в натуральной параметризации границы  $\partial\Omega$ .

Бильярд на замкнутых (четного порядка) выпуклых алгебраических кривых удобно рассматривать в полярных координатах. Например, обычному овалу 4 порядка,  $x^4 + y^4 = 1$ , в полярных координатах,  $r(\varphi) = 2^{1/2}(3 + \cos 4\varphi)^{-1/4}$ , соответствует инволюция вида

$$f(\varphi_1,\varphi_2) = z^{-1}\{R[z(\varphi_1,\varphi_2),\varphi_2], \varphi_2\}, \quad R(u,\varphi_2) = [\alpha(\varphi_2)u - \beta(\varphi_2)]/[\beta(\varphi_2)u - \alpha(\varphi_2)], \quad (7)$$

$$z(\varphi_1,\varphi_2) = \frac{(3 + \cos 4\varphi_2)^{1/4}\cos\varphi_1 - (3 + \cos 4\varphi_1)^{1/4}\cos\varphi_2}{(3 + \cos 4\varphi_2)^{1/4}\sin\varphi_1 - (3 + \cos 4\varphi_1)^{1/4}\sin\varphi_2}. \quad (8)$$

$$\alpha(\varphi) = (15\cos 2\varphi + \cos 6\varphi)/(10 + 6\cos 4\varphi), \quad (9)$$

$$\beta(\varphi) = (3\sin 2\varphi - \sin 6\varphi)/(10 + 6\cos 4\varphi).$$

Для ее вычисления необходимо взять обратную к введенной функции  $z=z(\varphi_1,\varphi_2)$ , что представляет самостоятельную задачу. Отметим, что обратная функция оказывается многозначной. Для бильярда однозначный выбор ее ветви диктуется вариационным принципом наименьшего действия. Движение между отражениями носит свободный характер, следовательно, происходит по геодезическим геометрического пространства, для плоского бильярда - по прямым линиям. Расстояние между точками  $\mathbf{r}(\varphi_1)$  и  $\mathbf{r}(\varphi_2)$  до отражения и между точками  $\mathbf{r}(\varphi_2)$  и  $\mathbf{r}(f(\varphi_1,\varphi_2))$  после него должно быть минимальным среди всех возможных путей, полученных с



помощью различных ветвей функции  $z^{-1}$ , определяющих вид  $f$ , то есть  $|\mathbf{r}(f(\varphi_1, \varphi_2)) - \mathbf{r}(\varphi_2)| = \min$ . Часть «формальных» траекторий, не удовлетворяющих последнему условию, проходит в области геометрической тени бильярда или выходит в комплексную проективную плоскость и для классического движения недоступна.

### Геометрический «портрет» инволюции бильярда

Используем идеи теории категорий для многообразий (фазовое пространство) и отображений на них. Тогда бильярд, с одной стороны, можно отождествить с динамической системой (отображением) в «симметричном» фазовом пространстве  $Z$ . С другой стороны, его динамические свойства можно воспринимать как проявление геометрических особенностей некоторой поверхности  $\Phi$ , соответствующей семейству его инволюций  $f_{\varphi_2}(\varphi_1)$ , зависящих от параметра (второго аргумента  $\varphi_2$ ). Эта поверхность задается уравнением в виде неявной функции  $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, f) = 0$  (уравнение (4)) в прямом произведении  $M \otimes Z = M \otimes M \otimes M$ ;  $M \sim \partial\Omega$ . Из теоремы о дифференцировании неявной функции следует, что гладкость этой поверхности на единицу меньше гладкости границы бильярда  $\Phi \in C^r \Leftrightarrow \partial\Omega \in C^{r+1}$ . Отличительными свойствами поверхности  $\Phi$  как многообразия, вложенного в  $R^3$  будет инвариантность относительно локальных (координата  $\varphi_2$  точки отражения при этом фиксирована) проективных преобразований, а также ее разрывный характер, так что в целом эта поверхность состоит из большого числа локально гладких компонент, между которыми существуют конечные разрывы.

Появление разрывов легче всего понять непосредственно из геометрического рассмотрения инволюции. Фиксируя один из ее аргументов и следя за изменением другого, можно обнаружить скачки, которые связаны либо с траекториями касающимися границы бильярда (рис. 2, а), либо с траекториями, попадающими в особые точки его границы (рис. 2, б), в которых нарушено условие  $C^1$  гладкости (угловые точки в многоугольниках или точки, где терпит скачок

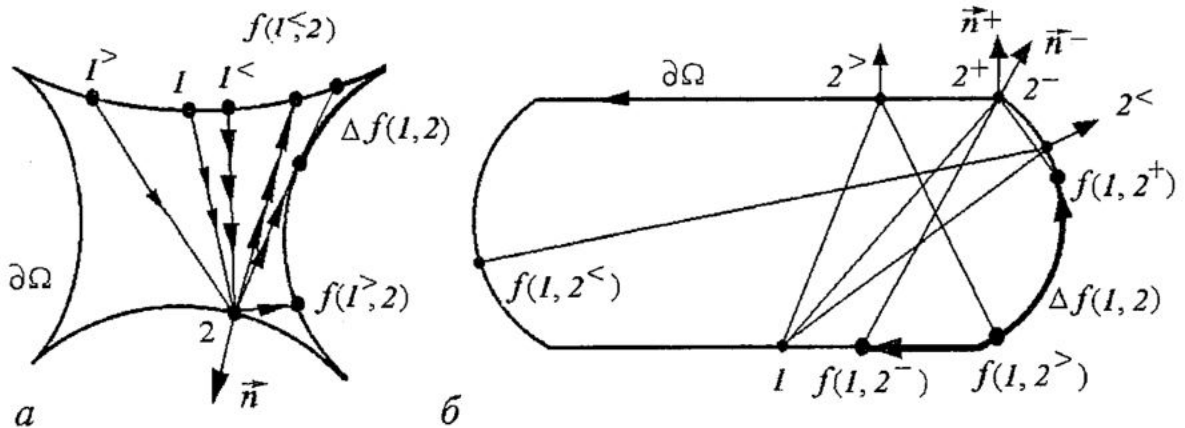


Рис. 2. Геометрические причины разрывности бильярдной инволюции. а - Скачки вызванные наличием лакун (геометрической тени) для бильярдов с рассеивающими участками границы. Инволюция терпит разрыв в точке вылета  $I$ , равный  $\Delta f(I, 2)$ . Траектории, вышедшие слева  $I^<$  и справа  $I^>$  от точки  $I$  и отраженные в одной и той же точке  $2$  переходят на разные компоненты границы и становятся расходящимися. б - Скачки инволюции вызваны прохождением бильярдной траектории через особые точки негладко состыкованных между собой компонент границы  $\partial\Omega$ . Обозначены точка вылета  $I$ , точки отражения  $2^<$ ,  $2^>$  (слева и справа от нее) и  $2^\pm$  - бесконечно близкие к  $2$  точки отражения на разных компонентах границы  $\partial\Omega$  с нормальными  $\vec{n}^\pm$ . Отмечены точки последующего отражения, определяемые инволюцией  $f$ . Скачок инволюции равен  $\Delta f(I, 2) = f(I, 2^+) - f(I, 2^-)$  (по второму аргументу инволюция является возрастающей для выпуклого участка границы)

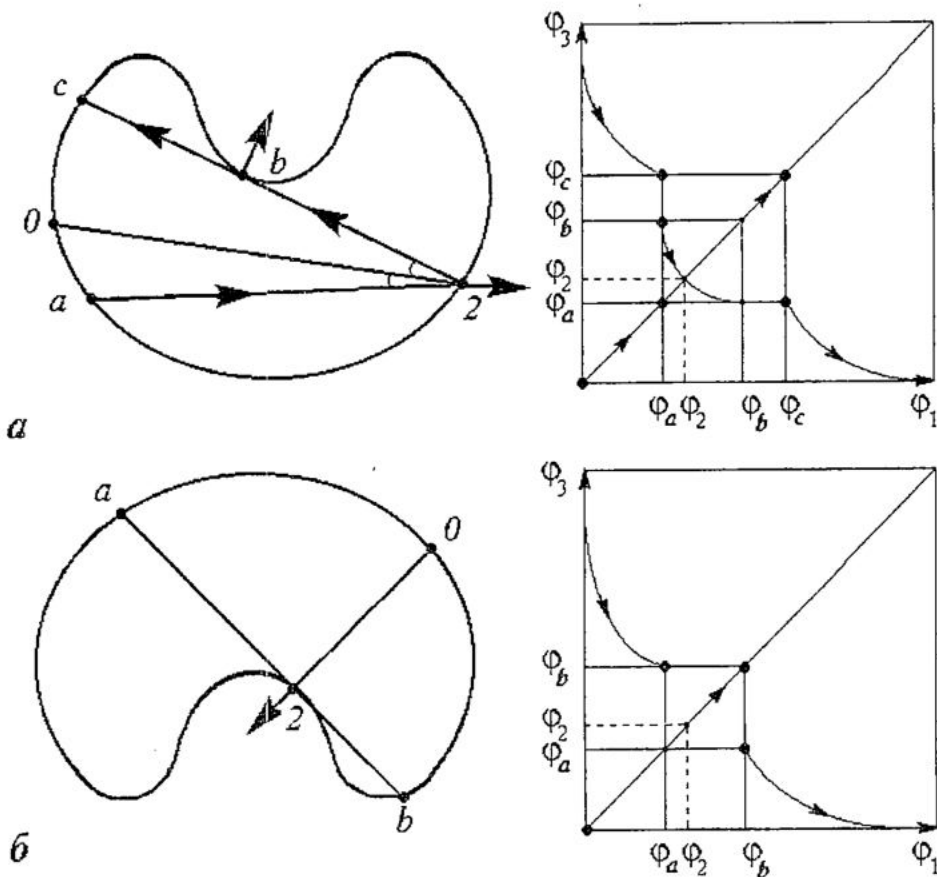


Рис. 3. Особенности бильярдной инволюции в ее сечении. *а* - Симметричный скачок бильярдной инволюции в сечении  $\varphi_2 = \text{const}$ . Точки *a* и *c* определяют падающий и отраженный луч; *b* - точка касания отраженного луча с границей  $\partial\Omega$ ; 2 - точка отражения (с координатой  $\varphi_2$ ). *б* - «Окно» в качестве разрыва на сечении инволюции ( $\varphi_2 = \text{const}$ ). На геометрическом портрете (слева) в точке отражения 2 проведены касательная *ab* и нормаль *ZO*, причем точка *O*  $\in \partial\Omega$  принята за начальную на границе  $\partial\Omega$

нормаль для бильярдов, составленных из дуг отдельных кривых). Для бильярдов с отрицательной кривизной разрывы связаны с появлением классически недоступных участков геометрической тени, они происходят как по первому, так и по второму аргументу инволюции  $f(\varphi_1, \varphi_2)$ , хотя характер разрывов может быть разным. По первому аргументу им может быть только «симметричный» скачок (рис. 3, *а*) или «окно» (рис. 3, *б*), тогда как по второму могут появляться несимметричные скачки и «окна». «Окна» возникают, когда точка падения (отражения) скачком переходит между участками противоположной кривизны (с выпуклого на вогнутый или наоборот). Отличие, связанное с симметричностью скачка или «окна» связано с тем, что переменные  $\varphi_1$  или  $f_{\varphi_2 = \text{const}}(\varphi_1)$  являются сопряженными друг другу по условию инволютивности  $f \circ f = id$ , тогда как величины  $\varphi_2$  и  $f_{\varphi_1 = \text{const}}(\varphi_2)$  этим свойством, вообще говоря, не обладают. (За исключением этого различия вид сечений ( $\varphi_2 = \text{const}$ ) инволюций  $f(\varphi_1, \varphi_2)$  аналогичен сечениям ( $\varphi_1 = \text{const}$ ), поэтому их графики здесь не приводим.)

Для выпуклых бильярдов нетривиальные скачки отличные от естественного фактора  $\text{mod } 2\pi$ , связанного с периодичностью инволюции бильярда с замкнутой границей, происходят только по второму аргументу, причем при попадании падающего луча в точку (отражения) со скачком кривизны. В выпуклых бильярдах с непрерывной кривизной по каждому из аргументов инволюции допустим только тривиальный скачок (рис. 4). Таким образом, локально, поверхность  $\Phi$ , остается гладкой как и граница бильярда, тогда как в целом она состоит из некоторого числа односвязных компонент. Разрывы (в сечениях) между ними в случае

гладкого выпуклого бильярда (с кривизной) все одинаковы и равны фактору  $\text{mod } 2\pi$ , поэтому при переходе на тор  $T^2$  они исчезают (ветви инволюции подклеиваются друг к другу гладким образом). В этом проявляется преимущество выпуклого бильярда при исследовании его динамики и в решении задачи Дирихле для оператора Лапласа. В бильярдах с отрицательной кривизной, содержащих как выпуклые, так и вогнутые участки границы, инволюция терпит разрывы, отличные от тривиального, причем их тем больше, чем больше длина вогнутых участков  $\partial\Omega$ ,

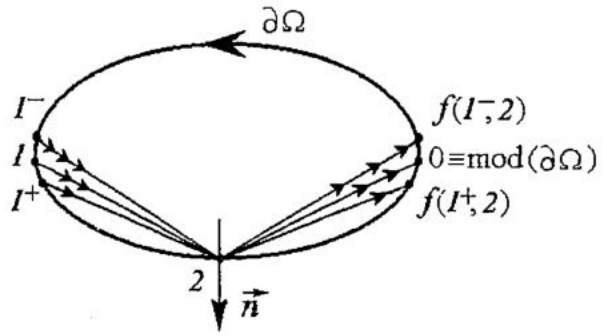


Рис. 4. Естественный скачок периодической инволюции  $f$  (по  $\text{mod } 2\pi \equiv \text{mod } 2|\partial\Omega|$ ) для гладкого выпуклого бильярда. Точки  $I$ ,  $2$ ,  $f$  - точки вылета, отражения и прилета;  $O$  - начало отсчета на границе

где  $\hat{K} < 0$ . В этом смысле полностью рассеивающий бильярд Синая со всюду отрицательной кривизной,  $\hat{K} < 0$ , является предельным случаем наиболее нерегулярного характера поверхности бильярдной инволюции. Как известно [4], бильярд Синая относится к сильно перемешивающим  $K$ -системам и изоморфен сдвигу Бернулли. Можно предположить, что соответствующее движению бильярдного луча движение фазовой точки по «сегментам» бильярдной инволюции эквивалентно соответствующей символической динамике, если каждый из них параметризовать некоторой двоичной точкой единичного интервала. Для выпуклых, но не достаточно гладких бильярдов (ниже класса  $C^1$ ) вместо скачков, вызванных наличием геометрической тени (лакун в конфигурационном и фазовом пространствах), как в бильярдах отрицательной кривизны, возникают другие ее особенности, которые также приводят к разрывности инволюции. Число появляющихся разрывов инволюции при изменении границы бильярда может быстро увеличиваться, что в конечном итоге будет приводить к сильной стохастизации бильярда. Рассмотренная картина стохастичности является сугубо качественной, однако исследовать «динамику» инволюции бильярда при изменении его границы всегда можно численно. Степень ее кусочной разрывности (изрезанности поверхности инволюции над симметричным фазовым пространством, причем после склейки тривиальных разрывов  $\text{mod } 2\pi$  на торе) может говорить о мере хаотизации бильярда. Для интегрируемых бильярдов эллипса и окружности их «хорошие» инволюции (присутствует только  $\text{mod } 2\pi$  разрыв) как соответствующие поверхности изображены на (рис. 5). Таким образом, рельеф инволюции, как и фазовый портрет бильярдного отображения, дает возможность представить динамику бильярда в целом и оценить ее сложность.

Формально инволюция  $f$  играет такую большую роль из-за того, что первое уравнение бильярдного отображения (1) является тривиальным. (Если вместо каскадов рассматривать потоки, то оно выглядит аналогично определению скорости  $v$  для потоков,  $\bar{\psi} = \varphi \leftrightarrow \dot{x} = v$ ) Инволюция же определяет «силовое поле» для бильярда ( $\bar{\varphi} = f(\psi, \varphi) \leftrightarrow \dot{v} = F(x, v)$  в рамках той же аналогии). Появление инволюции как нового геометрического объекта для динамического описания бильярда вызвано переходом к «симметричному» фазовому пространству. Отметим в этой связи два момента. В инволюции бильярда переплетаются локальные и глобальные свойства последнего. Действительно, для каждой фиксированной точки отражения  $\varphi_2$  зависимость  $f$  от  $\varphi_1$  определяется геометрией границы  $\partial\Omega$ . Далее, если в выражении (4) ввести новые координаты

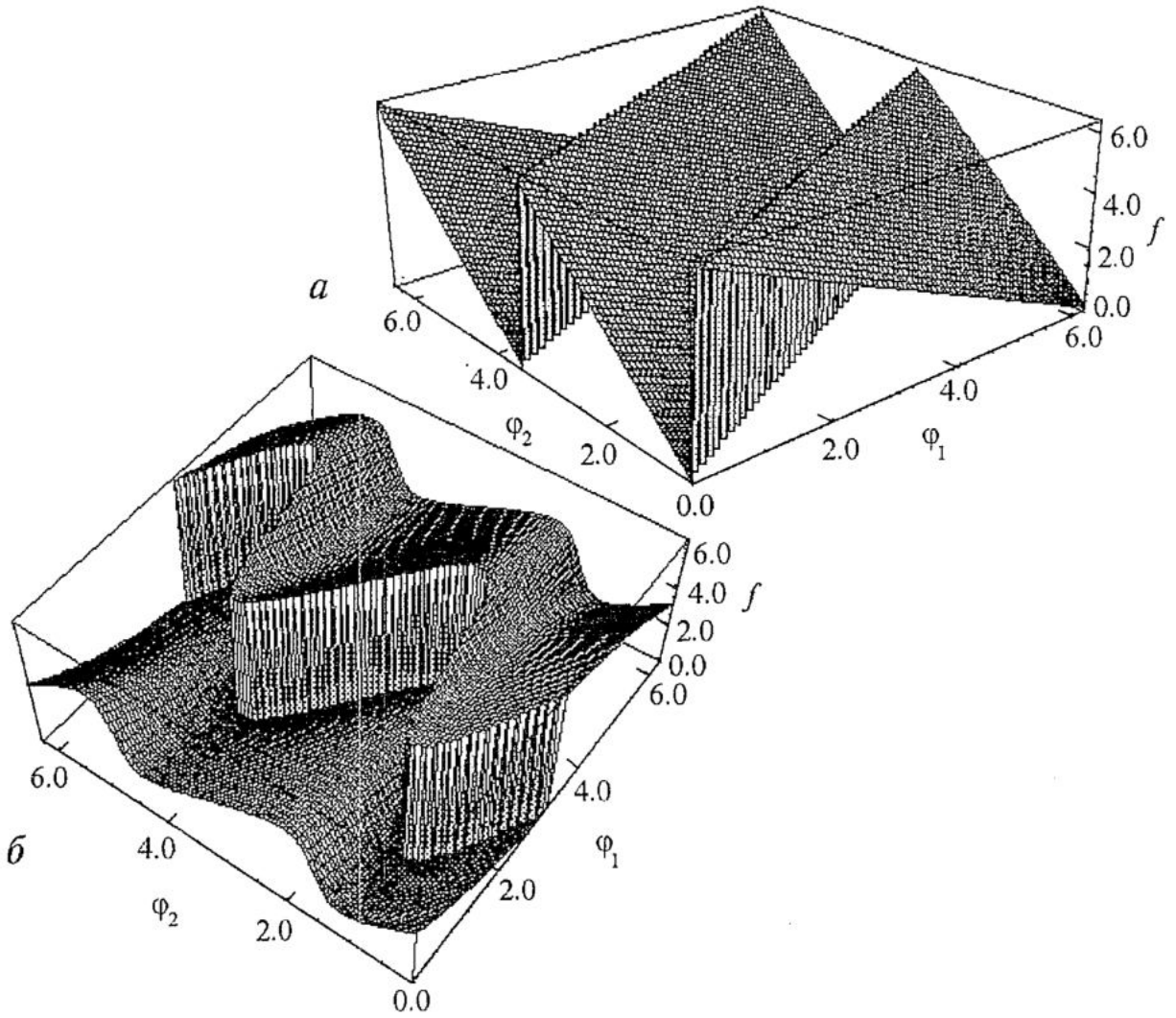


Рис. 5. Инволюция  $f$  окружности (а) и эллипса (с полуосями  $a=5$  и  $b=4$ ) (б) как поверхность над фазовым пространством (канонической разверткой тора) с переменными  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Изображенный разрыв ( $\text{mod}2\pi$ ) при переходе на тор исчезает

$$(\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (z_{\varphi_2}(\varphi_1) = [x(\varphi_1) - x(\varphi_2)] / [y(\varphi_1) - y(\varphi_2)], \varphi_2), \quad (10)$$

то в них оно примет вид функционального уравнения

$$z_{\varphi_2}[f_{\varphi_2}(\varphi_1)] = R^B_{\varphi_2}[z_{\varphi_2}(\varphi_1)] \Leftrightarrow z \circ f = R^B \circ z \circ R^B_{\varphi_1}(z) = [\alpha(\varphi)z - \beta(\varphi)] / [\beta(\varphi)z - \alpha(\varphi)], \quad (11)$$

где  $\alpha(\varphi) = n_x^2(\varphi) - n_y^2(\varphi)$ ,  $\beta = 2n_x(\varphi)n_y(\varphi)$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 = \mathbf{n}^2 = 1$ . Дробно-рациональная функция  $R^B$  является инволюцией,  $R^B(R^B(z)) = z$ . Так как граница  $\partial\Omega$  считается простой достаточно гладкой кривой, то существует обратный диффеоморфизм к замене  $z_{\varphi_2}(\varphi_1)$ ,  $z^{-1} = z_{\varphi_2}^{-1}(z)$ ;  $z^{-1} \circ z = z \circ z^{-1} = id$ . Следовательно, уравнение (11) можно записать в виде

$$f = z^{-1} \circ R^B \circ z. \quad (12)$$

Это означает, что в «проективных» координатах (10) инволюция бильярда локально с фиксированной точкой отражения  $\varphi_2 = \text{const}$  является дробно-рациональным, а значит, проективным преобразованием, параметры ( $\alpha$  и  $\beta$ ) которого однозначно определяются формой границы бильярда.

С проективностью инволюции бильярда связаны следующие геометрические особенности, записанные в алгебраическом виде,

$$\partial f(\varphi_1, \varphi_2) / \partial \varphi_1 < 0, \quad \text{sign}[\partial f(\varphi_1, \varphi_2) / \partial \varphi_2] = \text{sign} \hat{K}(\varphi_2). \quad (13)$$

Выводятся соотношения (13) геометрически или из выражений (11) - (12) с использованием формул Френе [22] для сопровождающего репера плоской кривой. С бильярдом связана строго убывающая инволюция,  $f'_{\varphi_1} < 0$ . Отметим, что только убывающая инволюция имеет неподвижные точки. В бильярде это согласуется с известным фактом существования большого числа периодических траекторий. Например, для выпуклых бильярдов с кривизной теорема Биркгофа гарантирует существование периодических орбит всех периодов. Характер роста инволюции по второму аргументу зависит от типа границы бильярда. Для бильярдов с  $\hat{K} < 0$  - рассеивающий тип (растяжение), в случае  $\hat{K} > 0$  - фокусирующий тип, для  $\hat{K} = 0$  - нейтральное поведение. Для бильярдов с изменяющимся знаком кривизны возможна смешанная (в указанном смысле) «динамика».

Зависимость инволюции  $f$  от второго аргумента  $\varphi_2$  определяет глобальные свойства бильярда, так как с ней связано изменение параметров локального (по первому аргументу  $\varphi_1$ ) проективного преобразования. В фазовом пространстве (пространстве состояний) системы переменные  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  равноправны (их перестановка меняет только направление движения), тогда как для инволюции бильярда они играют разную роль, что, впрочем, следует уже из определения (2). Чтобы выделить это различие отметим, что математическим выражением обратимости системы помимо условия (2) является инвариантность всех соотношений именно относительно замены

$$\varphi_1 \rightarrow f(\varphi_1, \varphi_2), \quad f \rightarrow f(f(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_2) = \varphi_1, \quad (14)$$

использующей основное свойство инволюции  $f$ .

Другим важным моментом является типичность появления разрывов в бильярдных системах. О том, что бильярды являются наиболее важным примером динамических систем с особенностями указывалось уже в классических работах по бильярдам [4]. Особенности лишь осложняли аналитическое исследование неравномерно полных гиперболических систем, тогда как сама хаотичность (или гиперболичность) связывалась с рассеивающим ( $\hat{K} < 0$  при нашем определении кривизны границы) или дефокусирующим ( $\hat{K} \geq 0$ ) характером бильярда. В «симметричном» фазовом пространстве принципиальную роль играют сами разрывы бильярдного отображения, а не только точки, где они возникают, и траектории, проходящие через них. Кроме того, предполагается, что разрывы оказывают прямое влияние на динамику бильярда. Так как многие динамические системы можно достаточно хорошо аппроксимировать бильярдными, по крайней мере, в хаотическом случае, это означает, что разрывность может оказаться одной из возможных причин как самой хаотизации, так и связанных с ней особенностей поведения системы в фазовом пространстве. Фазовое пространство типичного бильярда с достаточно гладкой границей заведомо содержит как регулярную, так и хаотическую компоненты, а инволюция при этом может быть в значительной степени кусочно-разрывной (состоять из большого числа локально гладких компонент).

Отметим еще такое наблюдение: степень изрезанности инволюции (как поверхности над фазовым пространством  $Z$ ) «пропорциональна» степени интегрируемости бильярда, то есть объему его регулярной компоненты в фазовом пространстве. Наибольшей регулярностью обладают, очевидно, выпуклые бильярды с аналитической границей, в том числе рассмотренный ранее обычный овал. Как уже отмечалось, в них допустимы только тривиальные скачки, и на торе инволюция становится гладкой. Стохастизация при этом происходит не за счет разрывности отображения, а по тем же причинам, что и в большинстве гладких систем - из-за их нелинейности. (Ясно, что и фактор  $\text{mod } 2\pi$  по своей природе

нелинейный.) Хаос развивается не столь быстро, как при наличии нетривиальных разрывов, и в основном связан с развитием сложной (гомо)гетероклинической структуры вблизи сепаратрис неустойчивых (гиперболических) неподвижных точек и последующим перекрытием резонансов. В этих особенностях можно убедиться на примере численного исследования фазового портрета различных бильярдов. Используя введенные представления о бильярде как отображении с инволюцией можно выполнить и аналитические исследования и в этом направлении. Как видим, в бильярдах могут одновременно реализоваться несколько сценариев стохастизации - как за счет нелинейности, так и за счет разрывности динамической системы.

### Заключение

В данной работе в рамках геометро-динамического подхода к бильярдам как динамическим системам специального класса (обратимые отображения с проективной инволюцией) выявлены роль и геометрические особенности их инволюции. От свойств инволюции зависит характер динамики бильярдного движения. Особое внимание было уделено таким ее свойствам, как проективность и кусочно-разрывность, типичным для бильярдных систем. Оба свойства имеют сугубо геометрическое происхождение. Проективность является следствием зеркального характера отражения от границы бильярда, а разрывность вызвана геометрическими особенностями его границы - сменой знака кривизны, наличием точек, в которых нормаль к границе определена неоднозначно. Указано, что разрывность бильярда (инволюции) в определенном смысле имеет не менее важное значение для его регулярной и хаотической динамики, чем нелинейность рассматриваемой динамической системы. На примере простейших алгебраических кривых показан способ вычисления инволюции бильярда. С использованием общего выражения (4) для инволюции произвольного бильярда, получены алгебраические соотношения (12) - (13), выражающие основные геометрические закономерности бильярда.

### Библиографический список

1. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
2. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528с.
3. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности. М.: Наука, 1988.
4. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы - 2. Т. 2. Под ред. Я.Г. Синая. М.: Изд-во ВИНТИ, 1985. 312с.
5. Биркгоф Дж. Динамические системы. М.: Гостехиздат, 1941.
6. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
7. Синай Я.Г. К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 6. С.1261; Динамические системы с упругими отражениями // УМН 1970. Т.25, №2. С.141.
8. Бунимович Л.А. О бильярдах, близких к рассеивающим // Мат. сборник. 1974. Т. 94, № 1. С.49.

- 9 *Лазуткин В.Ф.* Выпуклый бильярд и собственные функции оператора Лапласа. Л.: ЛГУ, 1981. 196с.
- 10 *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432с.
11. *Alt H., Graf H.D. et al.* Chaotic Dynamics in a Three-Dimensional Superconducting Microwave Billiard // *Phys.Rev.E.* 1996. Vol. 54. P. 2303.
12. *Nocel J.U., Stone A.D., Chen G. et al.* Directional emission from asymmetric resonant cavities // *Optics Letters.* 1996. Vol. 21. P. 1609.
13. *Naydenov S.V., Yanovsky V.V.* Stochastic theory of light collection. I. Detectors and billiards // *Functional Materials.* 2000. Vol. 7. №. 4(2). P. 743.
14. *Guhr T., Muller-Groeling A., Weidenmuller H.A.* Random-Matrix Theories in Quantum Physics: Common Concepts // *Phys.Rep.* 1998. Vol. 299. P. 189.
15. *Bunimovich L., Casati G., Guarneri I.* Chaotic Focusing Billiards in Higher Dimensions // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol.77. P.2941.
16. *Табачников С.* Внешние бильярды // *УМН.* 1993. Т. 48, № 6. С. 75.
17. *Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б., Акиншин Л.Г.* Механизм ускорения Ферми в рассеивающих бильярдах с возмущаемыми границами // *ЖЭТФ.* 1999. Т.116. С. 1781.
18. *Arnold V.I., Sevryuk M.B.* in *Nonlinear phenomena in plasma physics and hydrodynamics.* Moscow: Mir, 1986. P. 31.
19. *Roberts J.A.G., Qwispel G.R.W.* Chaos and Time-reversal Symmetry. Order and Chaos in Reversible dynamical systems // *Phys.Rep.* 1992. Vol. 216. P. 1.
20. *Найдёнов С.В., Яновский В.В.* Геометро-динамический подход к бильярдным системам. I-II // *Теоретическая Математическая Физика.* 2001. Т. 126. С.110; 2001. Т. 128. С.116.
21. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. М., 1969. 176с.
22. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986. 760с.
23. *Ефимов Н.В.* Высшая геометрия. М.: ФМ, 1961. 580 с.

*Институт монокристаллов  
НАН Украины*

*Поступила в редакцию 04.09.2000  
после доработки 13.03.2002*

## **GEOMETRICAL NONLINEAR DYNAMICS FEATURES OF SYSTEMS WITH ELASTIC REFLECTIONS**

### **I. Billiard and its involution**

*S.V. Naydenov, V.V. Yanovsky*

Within the framework of the new geometrical-dynamic approach a special class of dynamic systems - reversible mappings with projective involutions on «symmetric» phase space - is linked with billiard systems. Basic geometrical features of locally smooth billiard involutions - projectivity and piecewise discontinuity are explored and their role in making of one or another (regular and random) nonlinear billiard dynamics is indicated. Billiard involutions for simple algebraic curves are obtained and their common properties are set.



*Найдёнов Сергей Вячеславович* - родился в Харькове (1968), окончил Харьковский государственный университет (1993). После окончания ХГУ работает в Институте монокристаллов НАН Украины. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в ИМ НАНУ (1998) в области теоретической физики. Область научных интересов - теоретическая и математическая физика, хаотическая динамика, теория конденсированных сред. Автор более 20 научных публикаций.

E-mail: naydenov@isc.kharkov.com



*Яновский Владимир Владимирович* - родился в Полтаве (1950), окончил Харьковский государственный университет (1973). После окончания ХГУ работал в Физико-техническом институте (Харьков), Институте космических исследований РАН (Москва). В настоящее время работает в Институте монокристаллов НАН Украины. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в Институте космических исследований РАН (1983) и доктора физико-математических наук в ИМ НАНУ (1996) в области теоретической физики. Область научных интересов - теоретическая физика, хаос и теория турбулентности, нелинейная физика. Автор более 160 научных публикаций.





## УСТОЙЧИВОСТЬ ЧИСЛЕННЫХ ОЦЕНОК ХАРАКТЕРИСТИК ВРЕМЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

*К. Е. Бобров, А. М. Искольдский*

Обсуждаются численные методы анализа данных (конечных упорядоченных последовательностей натуральных двоичных кодов), отвечающих фрагментам траекторий, полученных численным решением конечного числа нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти уравнения представляют детерминированные диссипативные хаотические динамические системы.

Измеряемые свойства таких последовательностей характеризуются оценкой, которой считается код, полученный в результате переработки входной последовательности данных по заданному алгоритму, реализованному на ЭВМ и не предполагающего участия эксперта. Формализуется понятие устойчивости оценки. Исследуется устойчивость получаемых оценок по отношению к моделируемым численно малым вариациям параметров схемы измерения, а также - к параметрам алгоритма обработки. Рассматриваются примеры последовательностей данных, параметры которых (разрядность, шаг по времени, длина последовательности) являются типичными для многих реальных экспериментов.

Показано, что оценка, получаемая по алгоритму, основанному на анализе свойств, существенно зависящих от поведения траектории в каждой точке, является неустойчивой. В то же время оценка, получаемая по алгоритму, основанному на анализе свойств, определяемых некоторым «осредненным» для различных точек поведением траектории, является устойчивой.

### Введение

Процедуры, описанные в данной работе, имеют отношение к анализу маломодовых моделей быстропротекающих процессов в электрофизике (см., например, [1, 2]). Представляет интерес рассмотреть последовательности данных, параметры которых (разрядность, шаг по времени, длина последовательности) являются типичными для этих (и многих других) реальных экспериментов.

При вычислении оценок величин, характеризующих временные последовательности, важно формализовать и определить их устойчивость по отношению к малым (в определенном ниже смысле) изменениям режимов регистрации. Мы будем моделировать численно следующие изменения режимов регистрации: шага квантования по времени, квантования по амплитуде, длины последовательности. Проверка устойчивости оценок, получаемых в результате работы вычислительных процедур, позволяет сделать вывод о том, является ли эта величина характеристикой данной последовательности. Оценка не должна

зависеть от параметров процедуры обработки, а сами процедуры не должны предполагать участия эксперта.

В работе исследуются конечные упорядоченные последовательности кодов, полученных в результате численного решения нелинейных дифференциальных уравнений, представляющих динамическую систему, которая находится в режиме детерминированного хаоса. Результаты численного или натурального экспериментов представляют собой упорядоченные последовательности кодов (отсчетов), которые интерпретируются как целые (конструктивные) числа. В случае натурального эксперимента аналого-цифровой преобразователь (АЦП) выдает на каждом такте код, интерпретируемый как одно из целых чисел в диапазоне, определяемом разрядностью АЦП. В случае численного эксперимента формат чисел, получаемых на каждом такте работы расчетного алгоритма, может быть и форматом с плавающей точкой. Множество таких чисел конечно. Для удобства будем производить нормировку и округлять до ближайшего целого числа данные, выдаваемые программой решения системы дифференциальных уравнений.

Предполагаем, что оценка, получаемая по алгоритму, основанному на анализе свойств, существенно зависящих от поведения траектории в каждой точке, будет неустойчивой. В то же время оценка, получаемая по алгоритму, основанному на анализе свойств, определяемых некоторым «осредненным» для различных точек поведением траектории, будет устойчивой.

## 1. Реализации и процедуры вычислений

В результате преобразования, осуществляемого АЦП, получаем упорядоченные двоичные коды разрядностью  $k$  ( $k$  - разрядность АЦП). В численном эксперименте используем разностные схемы решения дифференциальных уравнений. Далее применяется стандартная процедура округления числа до ближайшего целого в сочетании с процедурой нормировки на диапазон кодов, определяемых заданной разрядностью. Для моделирования перехода от  $k$ -разрядного АЦП к АЦП с меньшей разрядностью используем процедуру сдвига вправо исходных кодов. Для получения последовательностей с более редким шагом применяется процедура прореживания.

Для изучения свойств аттрактора динамической системы по результатам регистрации конечного фрагмента траектории одной переменной, используется процедура Паккарда и Такенса [3, 4], основанная на теореме Такенса [5, 6]. Когда имеется только одна последовательность кодов конечной длины  $N$ , строится массив размерностью  $(N - n \times m) \times n$ , в котором каждая следующая последовательность получается сдвигом относительно исходной на некоторое фиксированное и одинаковое для всех сдвигов количество кодов  $m$ . Обычно  $n$  называется размерностью соответствующего псевдофазового портрета.

Будем называть строку длиной  $n$  массива, построенного по процедуре Паккарда и Такенса, вектором размерностью  $n$ .

При описанных ниже вычислениях обычно применяется понятие евклидовой метрики. В используемых нами процедурах реализуется иной критерий близости: векторы в  $n$ -мерном пространстве считаются близкими, если равны все коды, составляющие векторы. Возможность использования такого критерия близости демонстрируется, например, в [7].

Для вычисления оценки минимальной размерности вложения аттрактора динамической системы в [8, 9] предлагается нижеприведенный порядок действий, основанный на следующем положении. Назовем вектор, который используется для сравнения с другими векторами той же размерности, опорным. Если следующий за

опорным вектором отсчет функционально связан с предыдущими, то, встретив близкий (по евклидовой метрике) к опорному вектор, мы вправе ожидать близости отсчетов, следующих непосредственно за опорным и близким к нему.

Для оценок используются величины:  $\rho$  - евклидово расстояние между опорным вектором, составленным из первых  $n$  отсчетов вектора размерностью  $(n+1)$ , и вектором, составленным из первых  $n$  отсчетов вектора размерностью  $(n+1)$ , сравниваемого с опорным;  $r$  - евклидово расстояние между  $(n+1)$ -м отсчетом опорного вектора и  $(n+1)$ -м отсчетом сравниваемого с ним вектора.

Строится график функциональной зависимости  $\rho$  от  $r$ . Затем оценивается степень достижения искомого числа (интерпретируемого как размерность вложения) по «монотонности огибающей сверху к этому графику в области малых  $\rho$  при повышении  $n$ », либо - по отсутствию пар векторов, у которых первые  $n$  отсчетов близки, а  $(n+1)$ -е - нет.

Для расчетов была предложена следующая процедура, основанная на положениях работ [8, 9].

**Процедура 1.** Производится сравнение с опорным вектором векторов размерностью  $n$ , составленных из первых  $n$  отсчетов векторов размерностью  $(n+1)$ . Если вектора размерностью  $n$  близки, проверяется близость  $(n+1)$ -х отсчетов векторов размерностью  $(n+1)$ . Данное  $n$  считается искомой оценкой, если сочетания векторов, построенных из данной последовательности, у которых первые  $n$  отсчетов близки, а  $(n+1)$ -е - нет, отсутствуют.

Пары, для которых первые  $n$  отсчетов близки, а  $(n+1)$ -е - нет, получили название «ложных ближайших соседей» (false nearest neighbours, FNN [10 - 12]). В этих же работах для получения искомой оценки предлагается оценивать количество FNN, получающихся на каждом шаге при увеличении  $n$ . Когда это число становится малым и меняется слабо при увеличении  $n$ , данное  $n$  считается искомой оценкой. В наших расчетах на основании положений этих работ была предложена следующая более «гибкая» процедура.

**Процедура 2.** Также, как и в предыдущем случае, сравниваются векторы размерностью  $n$ . Если при увеличении  $n$  доля FNN не превышает некоторое, наперед заданное число (верхний порог) и меняется при каждом последующем увеличении  $n$  не более, чем в некоторое другое наперед заданное число раз (нижний порог), данное  $n$  считается искомой оценкой.

Если результат работы процедуры является устойчивым, можно заключить, что он характеризует обрабатываемую последовательность данных. В этом случае результаты работы двух описанных выше процедур можно рассматривать как оценку минимальной размерности вложения аттрактора динамической системы, от которой получена данная последовательность кодов.

Для получения оценки размерности вложения аттрактора динамической системы в работах [13-16] предлагается такая схема действия.

Исследуется зависимость энтропийной или корреляционной размерности при увеличении размерности псевдофазового портрета, который строится из  $n$  последовательностей, полученных сдвигом. Строится график зависимости логарифма числа разных векторов размерности  $n$  или корреляционной суммы для векторов размерности  $n$  от логарифма максимального расстояния, при котором вектора в  $n$ -мерном пространстве еще считаются близкими в евклидовой метрике. Такое построение делается для некоторого набора этих максимальных расстояний. Поделив логарифм числа разных векторов размерности  $n$  или логарифм отношения корреляционной суммы к квадрату числа векторов  $N$  для векторов размерности  $n$  на логарифм максимального расстояния  $\epsilon$ , можно получить числа, интерпретируемые соответственно как оценка энтропийной или корреляционной размерности. Эти величины определяют характерный наклон графиков. Затем

предлагается определить число  $n$ , начиная с которого графики этих зависимостей идут параллельно и близко друг от друга, и это число называется в качестве оценки для минимальной размерности вложения.

Используя положения работ [11-14, 6], мы разработали и применили в расчетах следующую процедуру.

**Процедура 3.** При фиксированной разрядности  $n$  подсчитывается число разных векторов  $\tilde{N}$  размерностью  $n$ . Затем логарифм по основанию 2 от этого числа делится на разрядность, то есть на логарифм по основанию 2 от  $1/\epsilon$

$$d_E = [\ln(\tilde{N})/\ln(1/\epsilon)] = [\log_2(\tilde{N})/\log_2(e)]/[\log_2(1/\epsilon) \log_2(e)] = (1/k)\log(\tilde{N}).$$

Здесь  $1/\epsilon$  - число кодов разрядности  $k$ . Как и в предыдущем случае находится такая размерность массива  $n$ , при которой  $d_E$  изменяется не больше, чем на некоторую наперед заданную величину порога  $l$ . Получившееся число  $n$  - «первый результат» процедуры 3. Конструктивное действительное число  $d_E$ , соответствующее той размерности массива  $n$ , при которой  $d_E$  меняется не больше, чем на 1 - «второй результат» процедуры 3.

Если оценка, получаемая в результате применения процедуры 3 к данной последовательности кодов, устойчива, она может рассматриваться как характеристика этой последовательности. Результаты ее работы можно рассматривать как оценки минимальной размерности вложения аттрактора соответствующей динамической системы и энтропийной размерности аттрактора динамической системы, от которой получена данная последовательность кодов.

При эксперименте необходимо выбрать оптимальные для работы процедур обработки параметры регистрации - длину последовательности  $N$ , шаг квантования сигнала по времени  $\tau$ , разрядность АЦП  $k$ , а также параметры процедур обработки последовательностей - величины сдвига  $m$  и порога  $l$ . Получаемые оценки должны быть устойчивы в определенном ниже смысле. Если для данной модели оцениваемая величина известна априори, то представляет интерес ее сравнение с полученной оценкой.

Под устойчивостью результатов процедур 1 и 2, а также первого результата процедуры 3 будем понимать ее неизменность при независимых, малых в определенном ниже смысле вариациях  $N$ ,  $\tau$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $l$ . Под устойчивостью второго результата процедуры 3 будем понимать его относительное изменение не более, чем на  $1/k$  при таких же вариациях этих параметров.

На основании анализа результатов численных экспериментов и априорных предположений об оптимальных параметрах регистрации и процедур обработки сформулирован ряд требований к последовательностям.

- Мгновенное значение амплитуды сигнала не должно выходить за допустимые границы.

- Число отсчетов  $N$  в последовательности для процедуры 1 равно  $2^{n+k}$ , а для процедур 2 и 3 -  $2^{nk}$ .

- Шаг по времени  $\tau$  выбирается таким образом, чтобы при заданной длине  $N$  в последовательности было не менее двух экстремумов.

- Последовательности с разрядностью по амплитуде ниже 4 не рассматриваются.

- После получения последовательности  $m$  выбирается как число отсчетов между экстремумами ближайшими к началу. Для процедуры 2 значение верхнего порога выбирается равным  $1/\log_2(N)$ , а значение нижнего порога - равным 2. Для процедуры 3 значение порога  $l$  выбирается как  $2/k$ .

Установленные требования обеспечивают соответствие псевдофазового портрета «случаю общего положения». В частности, портрет должен быть

достаточно «представительным» (требования к длине последовательности) и «невырожденным», например, в диагональ (требования к величине сдвига и шагу по времени).

Если эти требования не удовлетворяются, данная последовательность считается непригодной для работы дальнейших процедур обработки, так как при работе с такой последовательностью не следует ожидать устойчивости результатов и их близости априорно известным характеристикам соответствующей гладкой динамической системы.

## 2. Рассматриваемые модели

### 2.1. Система Лоренца [17]:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ.\end{aligned}$$

При  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$ ,  $r=26$  система находится в режиме странного аттрактора. Рассматривается реализация  $X$ -компоненты системы. Энтропийная размерность странного аттрактора динамической системы в данном режиме равна 2.08 [15, 16], минимальная размерность вложения - 3.

### 2.2. Система Рассела - Хансона [18]:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y(Z - 1 + Y^2) + \gamma X, \\ \dot{Y} &= X(3Z + 1 - X^2) + \gamma Y, \\ \dot{Z} &= -2Z(v + XY).\end{aligned}$$

При  $v=1.1$ ,  $\gamma=0.87$  система находится в режиме странного аттрактора. Рассматривается реализация  $X$ -компоненты системы. Энтропийная размерность странного аттрактора динамической системы в данном режиме равна 2.38 [18], минимальная размерность вложения - 3.

### 2.3. Система Ресслера [19]:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -Z - Y, \\ \dot{Y} &= X + aY, \\ \dot{Z} &= b + Z(X - c).\end{aligned}$$

При  $a=0.15$ ,  $b=0.2$ ,  $c=10$  система находится в режиме странного аттрактора. Рассматривается реализация  $X$ -компоненты системы. Энтропийная размерность странного аттрактора динамической системы в данном режиме равна 2.03 [20], минимальная размерность вложения - 3.

### 3. Результаты вычислений

#### 3.1. Процедура 1.

Система уравнений	Разрядность	Длина последовательности		
	$k$	$N/2$	$N$	$N \times 2$
Лоренца	6		4	
	5	3	6	8
	4		7	
Рассела - Хансона	6		5	
	5	4	6	9
	4		8	
Ресслера	6		5	
	5	4	6	9
	4		8	

Оценки не являются устойчивыми по отношению к выбранным изменениям разрядности данных и длине последовательности ни в одном из трех рассматриваемых примеров. На основании этого полагаем, что данные оценки не могут характеризовать выбранные последовательности.

#### 3.2. Процедура 2.

Система уравнений	Разрядность	Длина последовательности		
	$k$	$N/2$	$N$	$N \times 2$
Лоренца	6		3	
	5	3	3	5
	4		4	
Рассела - Хансона	6		3	
	5	3	3	4
	4		5	
Ресслера	6		3	
	5	3	3	3
	4		3	
Ресслера	Шаг по времени	Сдвиг для построения последовательности		
	$\tau$	$m/2$	$m$	$m \times 2$
	$\tau \times 2$		3	
	$\tau$	3	3	3
	$\tau/2$		3	

Только в последнем из трех рассматриваемых примеров оценка является устойчивой по отношению к выбранным изменениям разрядности данных, длины последовательности, шага по времени и величины сдвига. Дальнейшие численные эксперименты показали также устойчивость данной оценки (в последнем примере) при  $l=3$  и  $l=5$ . На основании этого полагаем, что лишь в этом примере данная оценка может характеризовать выбранную последовательность.

### 3.3. Процедура 3. Первый результат.

Система уравнений	Разрядность	Длина последовательности		
	$k$	$N/2$	$N$	$N \times 2$
Лоренца	6	3		
	5	3	3	3
	4		3	
Рассела - Хансона	6		3	
	5	3	3	3
	4		3	
Ресслера	6		3	
	5	3	3	3
	4		3	
	Шаг по времени	Сдвиг для построения последовательности		
	$\tau$	$m/2$	$m$	$m \times 2$
	$\tau \times 2$		3	
Ресслера	$\tau$	3	3	3
	$\tau/2$		3	

Дальнейшие численные эксперименты во всех трех рассматриваемых примерах также показали устойчивость данной оценки при  $l=3$  и  $l=5$ . На основании этого полагаем, что полученные для этих примеров оценки могут характеризовать выбранные последовательности.

### Процедура 3. Второй результат.

Система уравнений	Разрядность	Длина последовательности			
	$k$	$N/2$	$N$	$N \times 2$	
Лоренца	6		2.61		
	5	2.57	2.59	2.59	
	4		2.54		
		Шаг по времени	Сдвиг для построения последовательности		
		$\tau$	$m/2$	$m$	$m \times 2$
		$\tau \times 2$		2.58	
		$\tau$	2.59	2.59	2.62
		$\tau/2$		2.60	
Рассела - Хансона	6		2.39		
	5	2.40	2.42	2.44	
	4		2.47		
		Шаг по времени	Сдвиг для построения последовательности		
		$\tau$	$m/2$	$m$	$m \times 2$
		$\tau \times 2$		2.43	
		$\tau$	2.41	2.42	2.42
		$\tau/2$		2.44	
Ресслера	6		2.49		
	5	2.50	2.51	2.54	
	4		2.58		
		Шаг по времени	Сдвиг для построения последовательности		
		$\tau$	$m/2$	$m$	$m \times 2$
		$\tau \times 2$		2.53	
		$\tau$	2.51	2.51	2.52
		$\tau/2$		2.54	

Во всех рассматриваемых примерах изменения оценок не превышают  $1/5$ . На основании этого полагаем, что данные оценки могут характеризовать выбранные последовательности.

## Выводы

Получены оценки путем переработки входных последовательностей данных по заданному алгоритму, реализованному на ЭВМ и не предполагающему участие эксперта. Исследована устойчивость оценок по отношению к численно моделируемым малым вариациям параметров схемы измерения, а также - к параметрам процедур обработки. Рассмотрены примеры последовательностей данных, параметры которых (разрядность, шаг по времени, длина последовательности) являются типичными для многих реальных экспериментов.

Показано, что оценка, получаемая по алгоритму, основанному на анализе свойств, существенно зависящих от поведения траектории в каждой точке таких последовательностей данных (то есть локальных свойств), является неустойчивой. В то же время оценка, получаемая по алгоритму, основанному на анализе свойств, определяемых некоторым «осредненным» для различных точек поведением траектории, является устойчивой. Процедуры 1 и 2 обработки данных можно отнести к первому типу, процедуру 3 - ко второму. Процедура 2 демонстрирует, тем не менее, лучшую устойчивость результатов, чем процедура 1. Кроме того, анализ результатов численных экспериментов, выполненных непосредственно по другим известным методам, в частности, упомянутым в тексте, также подтвердил справедливость этих выводов. Оценки минимальной размерности вложения, полученные по процедурам 3 и 2 для численной модели системы уравнений Ресслера, совпадают с априорно известными. Отклонения оценок величины  $d_E$ , получаемых по процедуре 3, от априорно известных связаны, по нашему мнению, с весьма низкой разрядностью рассматриваемых последовательностей данных. Это обстоятельство необходимо учитывать при анализе данных реальных экспериментов, для которых получение таких последовательностей является типичным.

В предлагаемых процедурах операции с плавающей точкой либо отсутствуют, либо их количество минимально. Это позволяет легко реализовать соответствующие вычисления с использованием алгоритмов и аппаратных структур распараллеливания при обработке больших объемов данных.

## Библиографический список

1. Волков Н. Б., Искольдский А. М. Об аналогии между начальными стадиями зарождения турбулентности и электрического взрыва проводников // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51, вып. 11. С. 560.
2. Волков Н. Б., Зубарев Н. М., Зубарева О. В., Шкатов В. Т. Динамическое прерывание тока и вихревые структуры в токнесущей плазмоподобной среде // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, вып. 13. С. 43.
3. Packard N. H., Crutchfield J. P., Farmer J. D., Shaw R. S. Geometry from a Time Series // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 712.
4. Broomhead D. S. and King G. P. Extracting qualitative dynamics from experimental data // Physica D. 1986. Vol. 20, №. 2. P. 217.
5. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence / Lect. Notes in Math. Vol. 898. N. Y.: Springer, 1981. P. 366.
6. Sauer T., Yorke J., Casdagli M. Embedology // Journal of Statistical Physics. 1991. Vol. 65. P. 579.
7. Малинецкий Г. Г., Потанов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.
8. Лукацук С. Н., Предтеченский А. А., Фалькович Г. Е., Черных А. И. О



вычисления размерности аттракторов по экспериментальным данным. Препринт № 280. Институт автоматики и электрометрии. Новосибирск, 1985.

9. Лукацук С. Н., Фалькович Г. Е., Черных А. И. О вычислении размерности аттракторов по экспериментальным данным // ПМТФ. 1989. № 1(173). С. 99. СО АН СССР.

10. Kennel M. B., Brown R., Abarbanel H. D. I. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45, № 6. P. 3403.

11. Abarbanel H. D. I., Kennel M. B. Local false nearest neighbors and dynamical dimensions from observed chaotic data // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 47. P. 3057.

12. Schreiber T. Efficient neighbor searching in nonlinear time series analysis // Int. J. Bifurcations and Chaos. 1995. Vol. 5. P. 349.

13. Grassberger P., Procaccia I. Estimation of the Kolmogorov Entropy from a Chaotic Signal // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 28. P. 2591.

14. Grassberger P., Procaccia I. Characterization of Strange Attractors // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50. P. 346.

15. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the Strangeness of Strange Attractors // Physica D. 1983. Vol. 9. P. 189.

16. Grassberger P., Procaccia I. Dimensions and Entropies of Strange Attractors from a Fluctuating Dynamics Approach // Physica D. 1983. Vol. 13. P. 34.

17. Лоренц Э. Странные аттракторы. М.: Мир. 1981. С. 88.

18. Russel D. A., Hanson J. D., Ott E. // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 1175.

19. Rössler O. E. // Phys. Lett. A. 1976. Vol. 57. P. 397.

20. Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L. and Vastano J. A. // Physica D. 1985. Vol. 16. P. 285.

Институт электрофизики  
УрО РАН

Поступила в редакцию 4.07.01  
после переработки 17.05.02

## STABILITY OF NUMERICAL ESTIMATIONS OF TIME SERIES CHARACTERISTICS

*K. E. Bobrov, A. M. Iskoldsky*

The numerical methods of a data analysis (finite ordered sequences of natural binary codes), corresponding to fragments of trajectories, obtained by the numerical solving of a finite number of nonlinear ordinary differential equations are discussed. These equations represent the determined dissipative chaotic dynamic systems.

Measuring properties of such sequences are characterized by the estimation which assumes the code, obtained as a result of processing of source sequence of data by given algorithm, realized on the computer and not supposing the participation of the expert. The concept of stability of the estimation is formalized. The stability of obtained estimations in relation to numerically simulated small variations of registration scheme parameters and to parameters of the algorithm of processing is investigated. Examples of data sequences with typical parameters (digit capacity, time step, length of sequence) for many real experiments are considered.

It is shown that estimation, obtained by the algorithm based on the analysis of properties essentially depended on behavior of trajectory in every point, is unstable. At the same time, the estimation, obtained by the algorithm based on the analysis of properties, essentially depended on some «average» for different points behavior of trajectory, is stable.



*Бобров Константин Евгеньевич* - родился в 1966 году. Окончил физико-технический факультет Уральского политехнического института по специальности «электроника и автоматика физических установок» (1992). С 1992 года работает в лаборатории моделирования электрофизических процессов Института электрофизики Уральского Отделения РАН в должности программиста. E-mail: [cn@ami.uran.ru](mailto:cn@ami.uran.ru)



*Искольдский Александр Михайлович* - родился в 1939 году. Окончил Новосибирский университет по специальности «физика плазмы» (1963). С 1963 по 1968 год учился в аспирантуре и работал в Новосибирском институте ядерной физики, с 1968 по 1980 в Институте автоматизации и элетрометрии СОАН. Был зам. директора этого института, зам. главного редактора журнала «Автометрия». В 1985 году защитил докторскую диссертацию по специальности «электрофизика». Долгое время был председателем Совета по автоматизации научных исследований. В начале Томского филиала СО АН, затем Уральского филиала АН. В настоящее время - заведующий лабораторией моделирования электрофизических процессов Института электрофизики УрО РАН. Имеет открытие и несколько изобретений. E-mail: [ami@ami.uran.ru](mailto:ami@ami.uran.ru)



## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫБОРОВ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СИТУАЦИЯХ С ТРАНСГРАНИЧНЫМИ ПОТОКАМИ

*Е.И. Алексеева, И.Г. Медведев*

С позиций нелинейной динамики, социальной психологии и социологии исследовано электоральное поведение населения в условиях альтернативных выборов. Построены, описаны и исследованы математические модели механизмов изменения социально-психологической динамики в конкретных этнических очагах, а также вопросы устойчивости в целом применительно к модели с трансграничными потоками. Рассмотрены приложения теории к проблеме оценки ресурсов управления предвыборной кампанией.

### Введение

В последнее время все большую актуальность приобретает проблема социальной безопасности общества, государства. При этом социальная безопасность трактуется как уровень реализации жизненных интересов большинства членов общества, как результат взаимодействия угроз с управляемыми воздействиями государства, направленными на их реализацию. Когда государству не удается подавлять различные угрозы обществу, в нем нарастает напряженность в виде различных социальных конфликтов, вплоть до массовых беспорядков или организованных акций протеста. Отсюда тот интерес, который вызывают попытки математического исследования вопросов социальной безопасности или причин и процессов проявления социальной напряженности в обществе.

Настоящая работа является одной из таких попыток применения математического аппарата динамических систем на сетях для анализа некоторых вопросов общей проблемы социальной безопасности. В частности, исследованию подвергнуто электоральное поведение населения как отражение социальной безопасности общества.

События последних лет в мире показывают, что моральный, нравственный, социально-психологический потенциалы становятся факторами, используемыми при прогнозах социально-политической динамики общества или при анализе региональных конфликтов. Если раньше на исторические и политические процессы смотрели как на последовательность бифуркаций в некоторой системе [1], то сейчас возник и альтернативный подход. В рамках этого подхода

предполагается, что в разных состояниях общества (в разных точках фазового пространства) ведущими переменными (параметрами порядка) являются разные величины [2]. Более того, участки простого, предсказуемого на длительный срок поведения (по терминологии [3, 4] - *русла*) чередуются с областями резких, плохо прогнозируемых изменений (областями *джокеров*). Например, изменение социальной ориентации в отдельном регионе, республике, социальной группе, выборы в условиях манипулирования общественным сознанием являются примером такого критического поведения, попадания в область джокера. При этом особое значение при таких манипуляциях приобретает «прозрачность границ», и, как следствие, беспрепятственная миграция населения, давление с помощью военных угроз или прямого насилия, а также свободное движение денежных потоков.

## 1. Концептуальная модель электорального поведения в отдельном субъекте федерации

Все дееспособное население (условно «электорат»)  $N0$  - разбивается на три категории:  $X$  - сторонники выбранного режимом курса,  $Y$  - его противники,  $Z$  - не участники политического противостояния, то есть  $N0 = X + Y + Z$ . Иногда будут для простоты рассматриваться ситуации, когда  $Z = 0$  или  $Z \gg X, Y$ . Таким образом, рост политической апатии - это  $Z \rightarrow N0$ .

Каждая из введенных групп электората разбивается на четыре категории:  $A_1$  - убежденные носители ценностей выбранной позиции (по данным социальной психологии таких существенно меньшинство - от долей процента до нескольких процентов);  $A_2$  - действующие на стороне  $A_1$  в силу иерархического подчинения или взявшие на себя электоральные обязательства за вознаграждение;  $A_3$  - население, находящееся под воздействием пропаганды, СМИ - таковых от 20 до 40%;  $A_4$  - присоединяющиеся к  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  под воздействием механизмов «подражания поведению» и в силу «зараженности настроением», в том числе мобилизующиеся из  $Z$ . Таким образом, можно записать общую для  $X$  и  $Y$  структуру электората:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \quad (1)$$

где  $A = X$  или  $Y$ . Предполагается также, что каждый из большинства индивидов, за исключением категорий  $A_1$  и  $A_2$ , представляет собой амбивалентную социальную единицу, в которой представлены ценности как сторонников ( $X$ ), так и противников ( $Y$ ). Поэтому логично рассматривать не столько «жесткое» деление на сторонников и противников, сколько объемы совершаемых поступков в некоторую единицу времени в пользу  $X$  или  $Y$ . Предполагается, что в нормальных условиях существует средняя «производительность» этих поступков в защиту той или иной позиции, обозначаемых  $C_x$  и  $C_y$ , соответственно. Предполагается также, что эта «производительность» одинакова для сторонников как  $X$ , так и  $Y$ , то есть, что  $C_x = C_y = c$ . Тогда, очевидно, можно записать итоговый объем «произведенных» поступков в защиту, например  $X$ , в виде

$$Q = c(X - Y). \quad (2)$$

В данной работе за основу в модельном описании выбран социально-психологический потенциал (СПП). Введем определение СПП данного социального субъекта или социальной общности, а также его меры. СПП - готовность данного социального субъекта или социальной общности осуществлять поведение в защиту выбранной системы ценностей или направления своего развития. Мера величины СПП - функция от  $Q$  и  $S$ , где  $S$  есть производная от  $Q$  по

времени, то есть скорость изменения соотношения между сторонниками и противниками в электорате. В качестве одной из форм записи СПП как функции от  $Q$  и  $S$  предлагается

$$P = P(Q, S) = \alpha_1 P_1(Q) + \alpha_2 P_2(S) + \alpha_3 P_3(Q, S), \quad (3)$$

где  $S = dQ/dt$ ;  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ .

Уравнения, описывающие в предлагаемой модели поведение переменных  $Q$  и  $S$  в зависимости от времени, порождаются некоторыми функциональными условиями. Эти функциональные условия в зависимости от разных сценариев развития социально-политических и социально-экономических ситуаций порождают различные классы моделей. Общим условием в этих сценариях мы выбрали постоянство потенциала  $P$

$$dP/dt = [\alpha_1 \partial P_1 / \partial Q + \alpha_3 \partial P_3 / \partial Q] dQ/dt + [\alpha_2 \partial P_2 / \partial S + \alpha_3 \partial P_3 / \partial S] dS/dt = 0. \quad (4)$$

Из соотношения (4) следует система дифференциальных уравнений, описывающая широкий класс моделей:

$$\begin{cases} dQ/dt = \pm [\alpha_2 \partial P_2 / \partial S + \alpha_3 \partial P_3 / \partial S], \\ dS/dt = \mp [\alpha_1 \partial P_1 / \partial Q + \alpha_3 \partial P_3 / \partial Q], \end{cases} \quad (5)$$

где выбор знака правых частей определяется из содержательного анализа механизмов действия социально-психологического потенциала.

В предлагаемой работе мы ограничиваемся достаточно специфическим классом моделей, порождаемым требованиями сохранения максимального значения социально-психологического потенциала  $P$  в условиях мобилизации ничем не ограничиваемых ресурсов для его поддержания (в некотором определенном регионе). Предполагается, что в формуле (3)  $\alpha_3 = 0$ , а потенциалы  $P_1$  и  $P_2$  имеют определенное функциональное выражение. Тогда формула (4) преобразуется следующим образом:

$$dP/dt = \alpha_1 (\partial P / \partial Q) (dQ/dt) + \alpha_2 (\partial P / \partial S) (dS/dt) = 0, \quad (6)$$

а система (5) принимает вид

$$\begin{cases} dQ/dt = -\alpha_2 (\partial P / \partial S), \\ dS/dt = \alpha_1 (\partial P / \partial Q). \end{cases} \quad (7)$$

Выбирая определенные функциональные зависимости для потенциала, характеризующего поведение электората (см. [5,6]), получаем

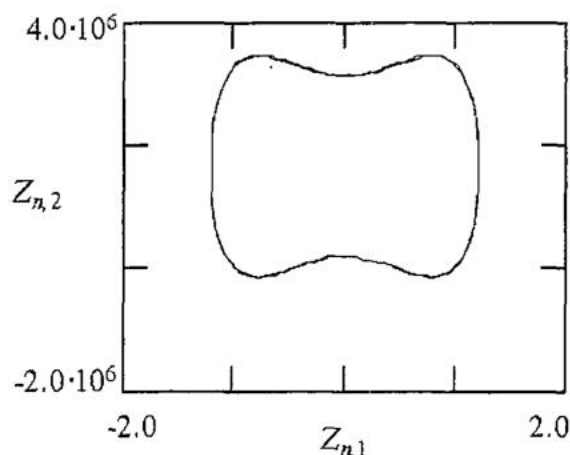
$$\begin{cases} dQ/dt = 2\chi_1 S - (2\chi_2 + Q_0)S^3 - (2\chi_2 - Q_0)S^5, \\ dS/dt = -\chi_1 Q_0 \gamma + \chi_1 \gamma^2 Q. \end{cases} \quad (8)$$

причем  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $Q_0$ ,  $\gamma$  - коэффициенты привязки значений данных функций к эмпирически установленным функциональным зависимостям в законах Вебера - Фехнера, Бугера - Вебера и Стивенса [7 - 9].

Согласно определению (см., например, [10]), система (7) является консервативной. Нетрудно видеть, что множество особых точек  $\{(S^*, Q^*)\}$  системы (7) всегда конечно. Оно может быть представлено в координатной форме - см. Таблицу, где по строкам расположены координаты  $Q$ , по столбцам - координаты  $S$ ,  $y^* = [-2\chi_2 - Q_0 + (20\chi_2^2 - 4\chi_2 Q_0 + Q_0^2)^{1/2}] / [2(2\chi_2 - Q_0)]$ . Из свойств консерватив-

ности исходной системы (7), а также из симметрии системы (8) по  $S$  вытекает, что в фазовом портрете системы (8) возможны простые состояния равновесия типа центра и седла, а замкнутые траектории, соответствующие периодическим решениям этой системы, не являются изолированными, а заполняют целые области [10]. Типы поведения траекторий вблизи особых точек легко устанавливаются из структуры таблицы.

Таблица



$S$	$-(y^*)^{1/2}$	0	$(y^*)^{1/2}$
$Q$			
$Q_0/\gamma$	3-я	2-я	1-я

Рис. 1. Фазовый портрет поведения электората в координатах  $Q=Z_{n,1}$  и  $S=Z_{n,2}$  для отдельного региона

Из содержательного анализа следует, что только 1-я точка (лежащая в первом квадранте) является существенной в данном контексте. Таким образом, для рассматриваемого класса моделей характерно периодическое поведение переменных  $Q$  и  $S$  в окрестности особых точек (центров), около которых при постоянстве СПП происходят колебания возможного исхода «голосования» (рис. 1.). В дальнейшем будем называть эти центры точками потенциального выбора (для конкретного региона).

На этом типичном фазовом портрете для поведения переменных  $S$  и  $Q$ , определяющих СПП электората отдельного очага, характерно «сшивание» фазовых портретов в центрах, имеющее достаточно прозрачное истолкование. Во-первых, будем все время иметь в виду, что двухкомпонентный СПП в нашей модели является инвариантом. Во-вторых, свяжем особые точки справа и слева от 0 по оси абсцисс с экстремальными значениями для  $P_2(S)$  при  $S = \pm (y^*)^{1/2}$ . Пусть точка на фазовой траектории находится в самом «верхнем левом» положении второго квадранта. Это состояние означает максимальную скорость снижения перевеса  $cX$  над  $cY$  (см. (5)), то есть уменьшение  $P_1(Q)$  при росте  $P_2(S)$ , или возрастание  $S$  из отрицательной области до положительных значений. Но переход  $S$  в область положительных значений означает новое возрастание  $Q$ , что с неизбежностью ведет к росту  $P_1(Q)$  и соответствующему снижению  $P_2(S)$ . Однако это снижение начинается при прохождении фазовой траекторией верхнего правого положения, что соответствует началу убывания  $P_2(S)$ . Это, в свою очередь, ведет к уменьшению как  $P_1(Q)$ , так и  $Q$  при возвратном движении  $S$  к 0, что означает переход точки фазовой траектории на свой нижний след, который симметрично повторяет все «верхние» движения и тем самым замыкает фазовую траекторию.

## 2. Влияние миграционных процессов в системе взаимодействующих социально-территориальных общностей на характеристики электорального поведения

Представленная выше модель социальной системы (5) описывает поведение социальных переменных  $Q$  и  $S$  для отдельно выбранной территориальной общности (очага). Как правило, территориальные общности в социально-эконо-

мической действительности не только граничат между собой, но и обмениваются как материальными, так и миграционными потоками. Потоки представляют собой как собственно миграцию, приводящую к изменениям в численном балансе между сторонниками и противниками, так и политическое влияние, выражающееся в возможности «открепительного» голосования и в прямой «покупке» голосов избирателей. Проблемной ситуацией в данном контексте является критическое влияние обозначенных выше факторов - их мы в контексте данной работы назовем трансграничными потоками - на устойчивость социально-экономических и социально-психологических процессов как в отдельных очагах, так и в системе в целом.

Эффективный алгоритм для исследования влияния потоков между связанными очагами на устойчивость как отдельных очагов, так и системы в целом, был разработан в рамках теории динамических систем на сетях (см., например, [11, 12]).

С учетом трансграничных потоков исследуемая динамическая система может быть записана в виде

$$\begin{aligned} dQ_i/dt &= F_i(Q_i, S_i, \Theta) = \pm(\alpha_2 \partial P_{2i} / \partial S_i + \alpha_3 \partial P_{3i} / \partial S_i) - c_{ii} Q_i + \sum_{i \neq j} c_{ij} Q_j \\ dS_i/dt &= G_i(Q_i, S_i, \Theta) = \mp(\alpha_1 \partial P_{1i} / \partial Q_i + \alpha_3 \partial P_{3i} / \partial Q_i), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $c_{ij}$  обозначают интенсивности потоков из очага  $j$  в  $i$ ;  $c_{ii}$  равно интенсивности суммарного потока из  $i$ -го очага во все остальные;  $i, j = 1, \dots, N$ ,  $N$  - количество очагов;  $\Theta_i$  - набор «внутренних» параметров, соответствующих  $i$ -му очагу.

Пусть  $(Q_i^*, S_i^*)$  - координаты 1-й особой точки  $i$ -го очага (см. таблицу), являющейся, как было показано в п. 1, центром, и соответствующей точке потенциального выбора для  $i$ -го очага.

В предположении малости параметров миграции  $c_{ij}$  критерий стабилизации системы связанных очагов записывается в следующей форме (см. [11]):

$$\Omega_i (c_{ii} Q_i^* - \sum_{k=1, k \neq i}^N c_{ik} Q_k^*) - \Delta_i c_{ii} < 0, \quad i=1, \dots, N, \quad (10)$$

где  $\Delta_i$  - определитель матрицы Якоби в особой точке  $(Q_i^*, S_i^*)$ ;  $\Omega_i$  - скобка Пуассона в точке  $(Q_i^*, S_i^*)$

$$\Omega_i = [\sigma_i, G_i](Q_i^*, S_i^*, \Theta_i),$$

$\sigma_i$  - след указанного Якобиана.

Согласно теории, в зависимости от соотношения локальных характеристик каждый из очагов можно отнести к одному из трех введенных типов: регулярному, субдоминантному и супердоминантному [11]. Регулярный очаг характеризуется тем, что при любых ненулевых миграционных потоках переходит в область устойчивости параметрического пространства. Субдоминантный очаг становится устойчивым при превышении притока над оттоком, и супердоминантный - при превышении оттока над притоком. Таким образом, зная внутреннее состояние каждого из очагов, мы получаем средство (алгоритм, программу) для отслеживания влияния обобщенных миграционных потоков на исход «голосования», а также реальный компонент технологии воздействия на этот исход.

Актуальный интерес представляет выяснение вопроса об изменении социально-психологического потенциала на фоне медленно меняющейся социально-экономической ситуации в отдельных регионах. Как было упомянуто в

предыдущем параграфе, при таких ограничениях для описания локального очага мы выбрали для исследования систему уравнений (8). В этом случае каждая рассматриваемая точка (центр) потенциального выбора всегда соответствует случаю нейтрального равновесия (след матрицы Якоби в соответствующем центре равен нулю). Нетрудно видеть, что критерий (10) будет выполнен при любых (малых) параметрах миграции для любого количества связанных очагов. Другими словами, вне зависимости от внутренних параметров, характеризующих локальное состояние каждого из очагов, описываемых системой вида (7), появление миграции неизбежно приводит к сдвигу рассматриваемой точки потенциального выбора в область устойчивости параметрического пространства. Таким образом, всякое межочаговое взаимодействие электоратов, динамика которых отвечает выписанным выше условиям, приводит к обязательному снижению неопределенности электорального выбора.

### 3. Миграция в системе двух регионов

Рассматривается система (9) с локальными очагами вида (8), причем количество очагов равно двум. Рассматривались случаи, когда параметры обмена не только малые, но и большие, а также случаи, когда траектории стартовали вдали от локального равновесия.

Так, был рассмотрен ряд ситуаций, где в роли очагов выступали конкретные республиканские электораты. Для иллюстрации среди них были выбраны достаточно типичные варианты. Компьютерное моделирование было проведено с использованием пакета Mathcad 7.0 PRO. Как правило, во всех приведенных ниже примерах стартовые значения выбирались в первом квадранте (см. таблицу). При этом, учитывая особенности фазовых портретов исходных систем (наличие центров и седловых точек), переменная  $Q$  оставалась положительной, а переменная  $S$  изменяла знак, что не противоречит логике колебаний активности электората.

Выше (рис. 1) приведен фазовый портрет, качественно характеризующий поведение отдельного очага в интересующей области параметров. На рис. 2 показана соответствующая интегральная кривая, представляющая периодические колебания «перевеса» в численности сторонников позиции  $X$  над противниками  $Y$  (см. формулу (2), где выражен очевидный смысл переменной  $Q$ ).

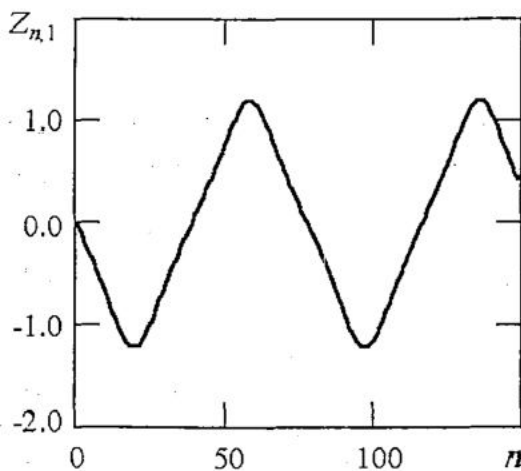


Рис. 2. Зависимость численности перевеса сторонников позиции  $X$  над  $Y$  от времени. По оси ординат отложены значения  $Q$ , по оси абсцисс время - в днях

Далее моделировалось взаимодействие двух очагов. Фазовое пространство в этом случае четырехмерно и состоит из точек с координатами  $(Q_1, S_1, Q_2, S_2)$  - см. уравнение (9) при  $i = 2$ . Результаты моделирования показаны на рис. 3, 4. Из приведенных качественных фазовых портретов следует вывод о стабилизирующем воздействии межэлекторальных потоков на исход электорального выбора. Иными словами, при наличии ненулевых констант обмена (параметров  $p$  и  $q$ , что соответствует  $c_{ij}$  в (10) при  $N=2$ ) на соответствующих интегральных кривых быстрее происходит затухание со временем амплитуды колебаний позиций



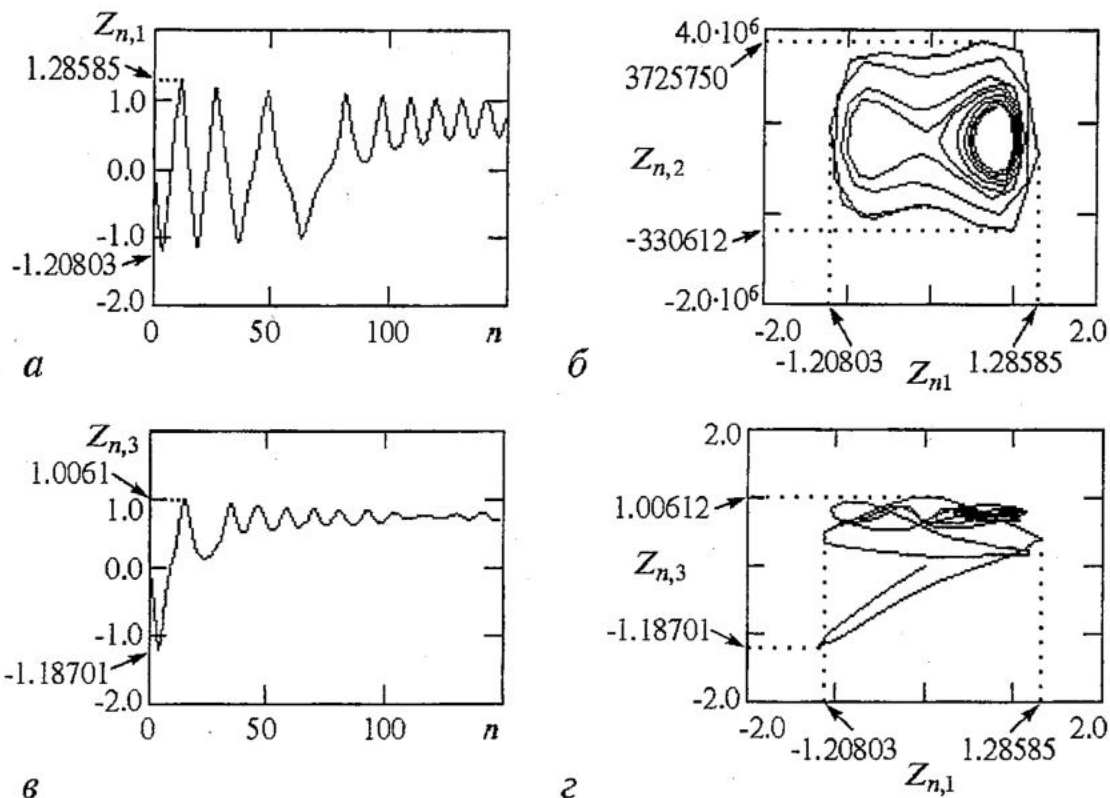


Рис. 3: *а* - Интегральная кривая  $Q_1(n)$ , соответствующая 1-му региону. *б* - Проекция фазовой кривой в 4-мерном пространстве на плоскость  $(Q_1, S_1)$ , соответствующая 1-му региону. *в* - Интегральная кривая  $Q_2(n)$ , соответствующая 2-му региону. *г* - Проекция фазовой кривой в 4-мерном пространстве на плоскость  $(Q_1, Q_2)$

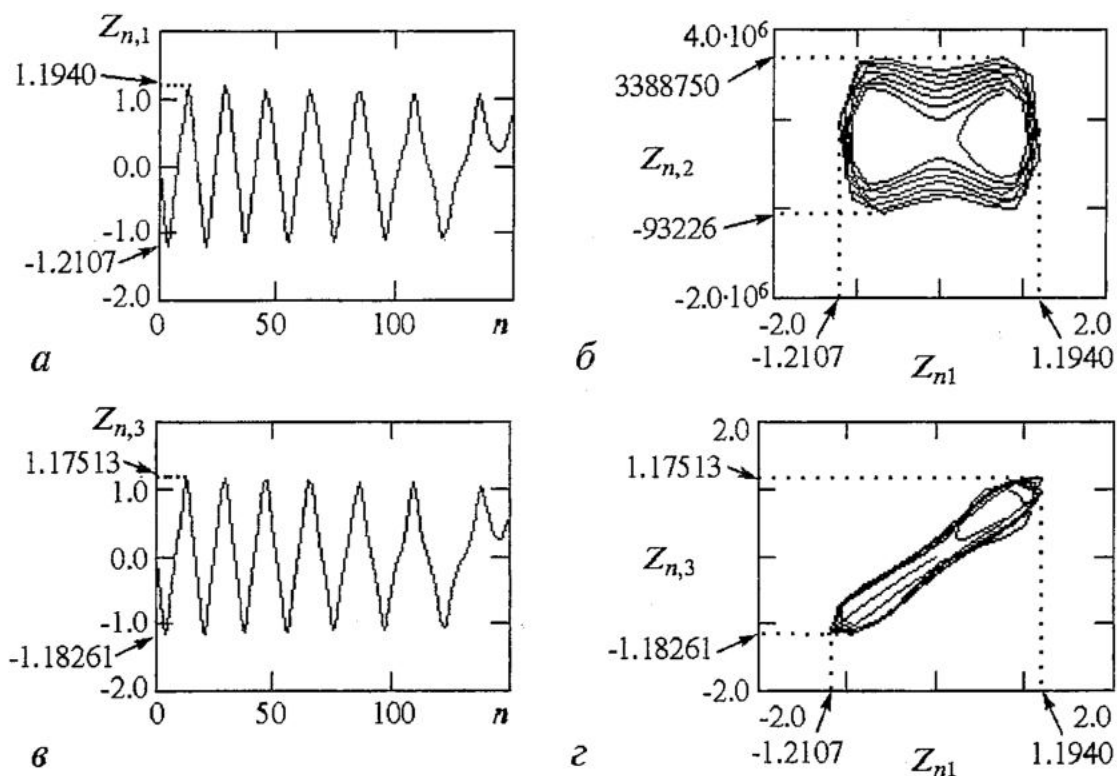


Рис. 4: *а* - Интегральная кривая  $Q_1(n)$ , соответствующая 1-му региону. *б* - Проекция фазовой кривой в 4-мерном пространстве на плоскость  $(Q_1, S_1)$ , соответствующая 1-му региону. *в* - Интегральная кривая  $Q_2(n)$ , соответствующая 2-му региону. *г* - Проекция фазовой кривой в 4-мерном пространстве на плоскость  $(Q_1, Q_2)$

электората (ср. рис. 3, а и 4, а, 3, с и 4, с с рис. 2). При этом на соответствующих проекциях фазовых кривых происходит «сжатие» областей притяжения (рис. 3, б, г и 4, б, г).

На рис. 3 показаны результаты моделирования двух взаимодействующих очагов со следующими параметрами обмена:  $p=0.3$ ;  $q=0.8$ . Остальные константы, при которых осуществлялось объединение двух электоратов:  $\gamma_1=0.1811$ ;  $\gamma_2=0.181$ ;  $Q_{0,1}=0.3 \cdot 10^6$ ;  $Q_{0,2}=0.3 \cdot 10^6$ ;  $\chi_1=0.0001$ ;  $\chi_2=0.005 \cdot 10^9$ .

Далее (рис. 4) моделировались 2 очага с равными трансграничными потоками:  $p=0.55$ ,  $q=0.55$ . Остальные параметры те же, что и для рис. 3.

Компьютерные исследования различных вариантов обмена приводят к заключению, которое не противоречит выводам, сделанным в п.2, а именно: и при большой интенсивности обмена голосов сторонников и противников между регионами поведение электората выходит на более устойчивую определенность в выражении своей позиции при наличии ненулевых трансграничных потоков.

**Выводы:** в приведенном материале с помощью математического моделирования получены результаты, демонстрирующие влияние трансграничных потоков между регионами на электоральное поведение населения. Тем самым продемонстрировано, что структура и интенсивность трансграничных потоков могут приводить к качественным изменениям в поведении системы в целом - к бифуркациям, даже на фоне сохранения локальной динамики поведения в очагах. Этот результат представляет большой интерес, так как он демонстрирует принципиальную возможность управления процессом снижения социальной напряженности с помощью формирования и регулирования интенсивности трансграничных потоков между регионами.

### Библиографический список

1. *Моисеев Н.Н.* Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979.
2. *Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г.* Синергетика и прогнозы будущего. М.: Наука, 1997.
3. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Руслы и джокеры: нейросетевой взгляд на сложную динамику // Прикладная нелинейная динамика, 1998, Т. 6, №4.
4. *Малинецкий Г.Г.* «Историческая механика» и нелинейная динамика // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, №4.
5. *Чернавский Д.С.* Синергетика и информация. М.: Наука, 2001 (в печати).
6. *Шведовский В.А.* О возникновении случайных флуктуаций в модели подражательного поведения // В сб. Вопросы моделирования социально-экономических объектов. М: ЦЭМИ АН СССР, 1978. С. 87.
7. Психологические измерения. Под ред. Л.Д.Мешалкина. М.: Мир, 1967. С. 195.
8. Психофизика дискретных и непрерывных задач / Под ред. Ю.М. Забродина и А.П.Пахомова. М.: Наука, 1985. С. 214.
9. *Бурдые П.* Социология политики. М.: Socio-Logos, 1993. С. 333.
10. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990.
11. *Алексеева Е.И., Киржнер В.М.* Зависимость устойчивости набора динамических систем от структуры связи между ними // Доклады АН СССР. 1990. Т.313, № 3. С. 521.
12. *Алексеева Е.И., Киржнер В.М., Кузнецов В.А.* Структуры и коллективное поведение. М.: Знание, Математика и кибернетика. 1991. № 3.

# MATHEMATICAL MODEL OF ELECTION UNDER EXTREME CONDITIONS WITH TRANSBORDER FLOWS

*E.I. Alekseeva, I.G. Medvedev*

The electoral behavior of population under condition of alternative election is investigated from the point of view of nonlinear dynamics, social psychology and sociology. Mathematical models of mechanisms of socio-psychological dynamics have been described and analyzed for the concrete local ethnic region. Also the problem of stability as a whole of the model with transborder flows has been evaluated. Some applications of the theory to the estimation of the resources of social security control have been considered.



*Алексеева Елена Игоревна* - окончила с отличием механико-математический факультет МГУ (1980). Окончила аспирантуру Отделения математики под руководством И.М. Гельфанда, защитила кандидатскую диссертацию (1989). С 1985 года работает научным сотрудником в Вычислительном Центре РАН. Лауреат премии Сороса. В 2000 г. получила Диплом MBA (Master of Business Administration) международного образца.

Основные направления научной деятельности: нелинейный анализ, теория бифуркаций, динамические системы на сетях, приложения в биофизике, экономике, социологии.



*Медведев Игорь Георгиевич* - окончил Харьковский политехнический институт им. В.И. Ленина (1956). Защитил кандидатскую диссертацию (1975). С 1999 года исполняет обязанности директора Центра компьютерного моделирования и экспертного анализа при Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Имеет более 150 научных работ.

Основные направления научной деятельности: системный анализ, теория управления, разработка систем принятия решений, компьютерное моделирование.



## НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ИЗМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ НАРОДОНАСЕЛЕНИЯ США С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

*А.А. Короновский, Д.И. Лопатников, А.Е. Храмов*

В работе представлены результаты проведенной кластеризации демографических данных по динамике численности народонаселения США по степени близости их к решению логистического уравнения с соответствующими параметрами. Обсуждается предложенная классификация в контексте исторических аспектов заселения территории США, а также причины, ответственные за появление различий в динамике численности населения, проживающего на различных территориях.

В настоящее время вопросы, связанные с построением математических моделей демографических процессов, происходящих как в отдельных странах, так и во всем мире, привлекают внимание исследователей [1, 2, 3]. Анализ процессов роста народонаселения позволяет выявить основные тенденции данного процесса и дает возможность как прогнозировать динамику на ближайшее время, так и сделать долгосрочный прогноз на будущее.

В работах [3,4] сделана попытка описания изменения численности народонаселения как отдельных стран (на примере США), так и всего мира в целом, с помощью таких эталонных моделей нелинейной динамики, как уравнение Ферхюльста [5] и нелинейное уравнение диффузии [6]. В вышеупомянутых работах проводилось сопоставление результатов моделирования с реальными статистическими данными и было достигнуто их хорошее соответствие. Вместе с тем, с учетом полученных результатов возникла необходимость детального анализа существующих демографических данных и их классификации с точки зрения соответствия предлагаемым моделям. Такая классификация, связанная с выделением характерных особенностей в имеющихся демографических данных, позволит более глубоко понять процессы, связанные с ростом народонаселения, и внести соответствующие корректировки в рассматриваемые нами ранее модели.

В настоящей работе приводятся результаты анализа демографических данных роста народонаселения США за период с 1790 по 1990 годы. Структура данных такова, что численность населения каждого штата представлена с десятилетним интервалом, начиная с момента присоединения штата к США. Имеются данные о динамике численности населения с десятилетним интервалом и в каждом административном округе штата, однако данные такой степени агрегации

не используются в работе. Заметим, что имеющиеся данные представлены в таком виде, что при изменении границ территориальной единицы происходит «скачок» численности населения этой территории. Это существенно затрудняет рассмотрение и требует ретроспективного (исторического) подхода к анализу демографических процессов. Использование именно штата в качестве «элементарной» единицы имеет то преимущество, что штат является достаточно большой территориальной единицей, на которой проживает большое число жителей, так что небольшие флуктуации численности, обусловленные локальными демографическими факторами (которые очень сильно влияют на динамику численности более мелких территориальных единиц), не оказывают существенного влияния на интегральную численность населения. Кроме того, для штата даже в первом приближении можно не учитывать пространственную распределенность и неоднородность расселения жителей на его территории. Последнее существенно для рассматриваемой ниже модели (см. также работу [4]). Можно отметить, что, как правило, изменение границ штатов не сильно влияло на численность населения штата. Естественно, не принимается в рассмотрение случай, когда штат делился пополам, например, из штата Вирджиния в 1863 году выделился штат Восточная Вирджиния. Но более мелкие территориальные образования (административные округа) претерпевали значительно более серьезные изменения (см. рис. 1), и данные, «привязанные» к названию соответствующей небольшой территориальной единицы, без учета всех изменений ее границ, не имеют большого смысла. Поэтому в основу рассмотрения положены именно штаты.

В качестве базовой модели, которая используется для сравнения с демографическими данными, выбрана модель Ферхюльста (логистическое уравнение) [5], которая имеет вид

$$dN/dt = \mu N(K-N)/K, \quad (1)$$

где  $N$  - текущая численность той или иной популяции;  $K$  - параметр, называемый емкостью среды и имеющий смысл числа особей, которые могут одновременно проживать на рассматриваемом пространственном ареале;  $t$  - время;  $\mu$  - коэффициент, характеризующий скорость роста популяции при малом числе особей  $N$ . Уравнение широко применяется для описания динамики простых биологических систем. Однако в работах [3, 4] показана возможность использования этой модели и для описания численности народонаселения<sup>1</sup>.

Наиболее существенным требованием к возможности такого описания является требование однородности распределения популяции и отсутствия направленного дрейфа особей по ареалу проживания. Это требование не выполняется для Соединенных Штатов Америки. Действительно, в работе [3] было показано, что решение логистического уравнения недостаточно хорошо коррелирует с реальными статистическими данными по США, и было предложено искать решение с учетом распределенного характера заселения территории США. В качестве базовой модели в работе [3] использовалось нелинейное уравнение диффузии. Далее, в работе [4] была выявлена принципиально важная роль рассинхронизации во времени динамики численности населения отдельных территориальных единиц (применительно к США - штатов).

Фактически, «теоретическое» изменение численности населения США с учетом рассинхронизма может быть представлено в виде суммы решений

<sup>1</sup> Заметим, что впервые попытка описания динамики численности народонаселения с помощью логистического уравнения была сделана в двадцатых годах XX века в работе Перла (см., например, [7]).

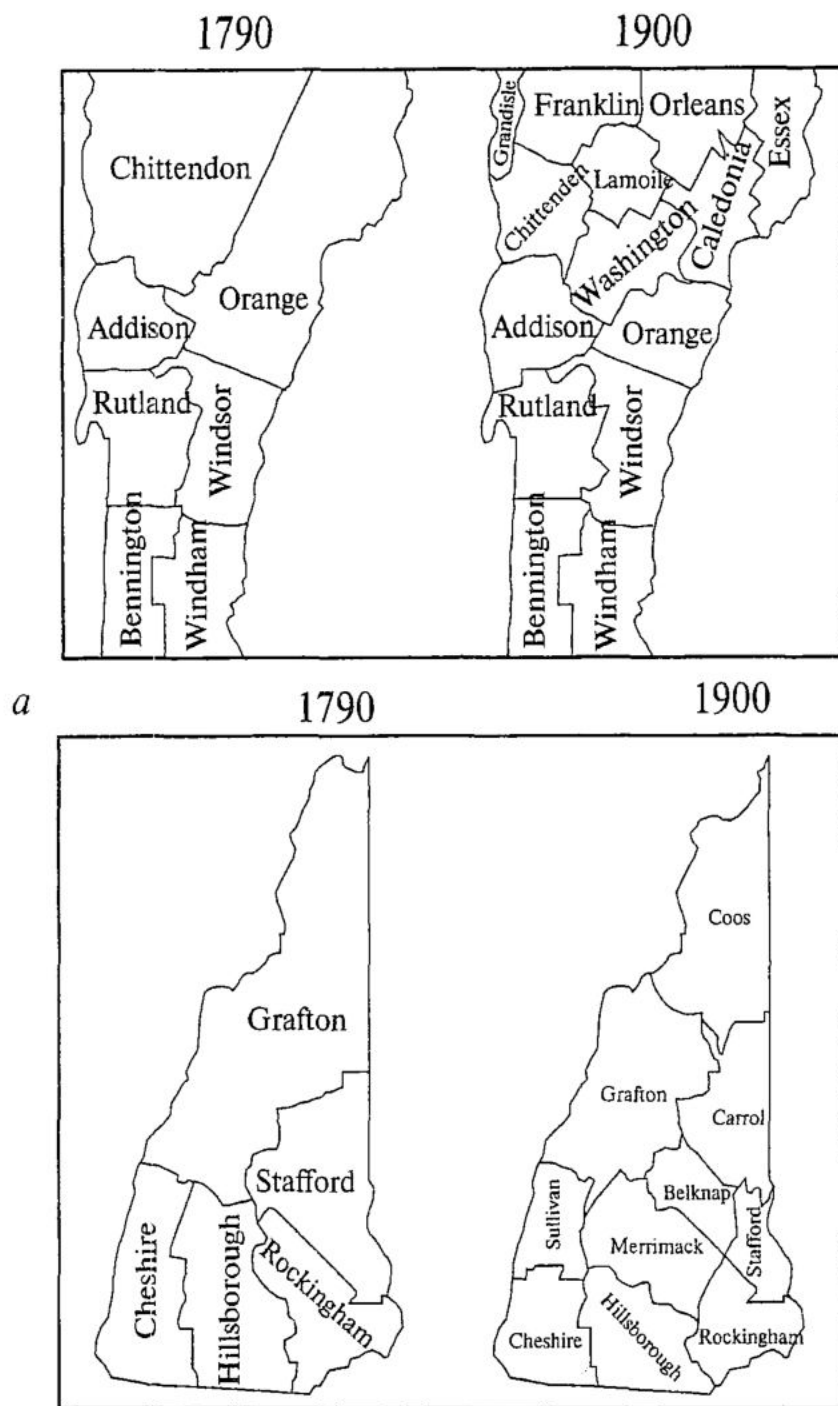


Рис. 1. Изменение границ административных округов штатов Вермонт (а) и Нью-Хэмпшир (б)

логистического уравнения для каждой отдельной территориальной единицы (в нашем случае - штата):

$$N(t) = \sum_i N_i(t), \quad (2)$$

где  $N_i(t)$  есть решение уравнения вида

$$dN_i/dt = \mu_i N_i (K_i - N_i) / K_i, \quad N_i(0) = N_{0i}. \quad (3)$$

Рассинхронизация во времени динамики населения различных территориальных единиц учитывается в этой модели в распределении значений начальных условий для логистических уравнений.

Для каждого штата методом наименьших квадратов были найдены

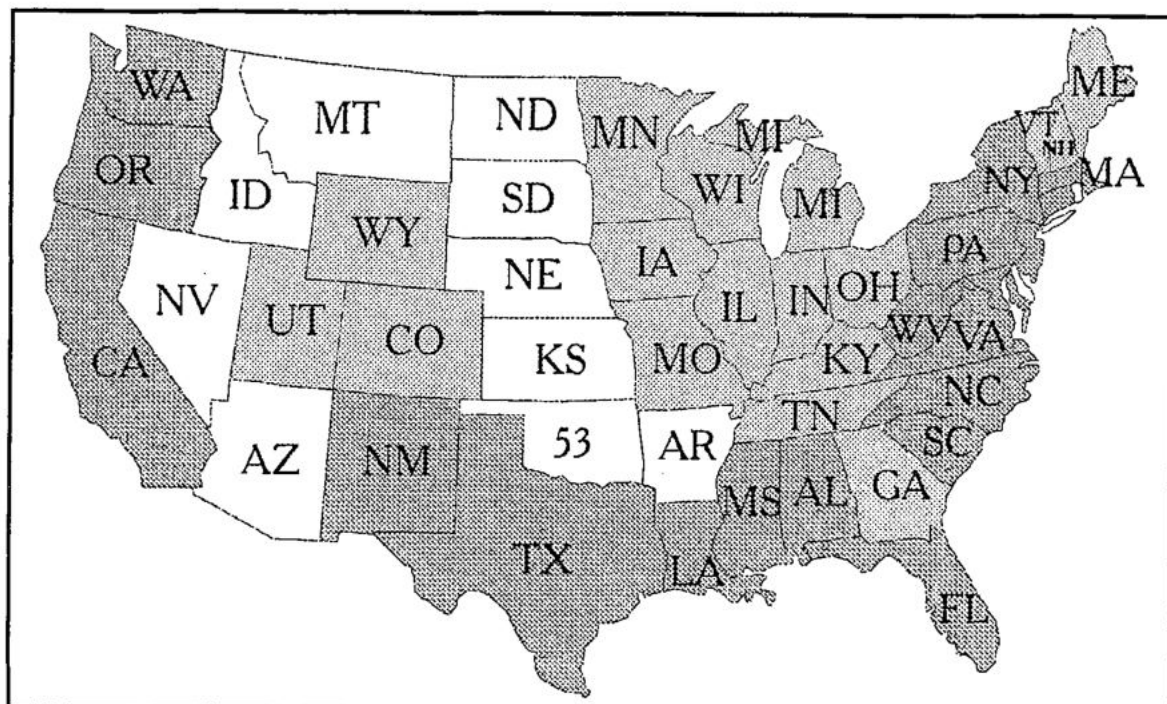


Рис. 2. Деление штатов на группы по степени соответствия демографических данных для каждого штата решению логистического уравнения. Темным цветом отмечены штаты группы А, серым - группы В и белым - группы С. Расшифровка обозначений штатов приведена в приложении

параметры  $\mu_i$  и  $K_i$  логистического уравнения и начальные условия  $N_{0i}$ , дающие наилучшее соответствие решения демографическим данным.

Оказалось, что все штаты США можно условно разделить на три группы по степени соответствия демографических данных решению логистического уравнения с определенными параметрами и начальными условиями (рис. 2).

К группе А относятся штаты, изменение численности населения которых хорошо «ложится» на логистическую кривую (см. рис. 3, а, на котором представлены соответствующие данные для штатов Калифорния и Северная Каролина). Группу В составляют штаты, зависимость численности населения которых имеет характерную точку перегиба относительно кривой решения логистического уравнения (рис. 3, б). Наконец, группа С соответствует штатам, изменение численности населения которых практически не описывается логистической кривой (рис. 3, в).

Из рис. 2 видно, что группы штатов, выделенные на основе анализа демографических данных на их соответствие решению логистического уравнения, локализованы также и по территориальному признаку. Так, штаты группы А расположены, в первую очередь, на юге США, а также на побережье Атлантического (на востоке) и Тихого (на западе) океанов. Штаты группы В располагаются в западной части США, примыкая непосредственно к штатам группы А; три штата группы В находятся в центральной части, образуя компактную территорию.

Сравнение этих данных с историческими сведениями по колонизации территорий Соединенных Штатов выявило определенную связь между датой присоединения штата к США, или начала заселения территории штата, и степени соответствия роста численности населения в нем логистическому уравнению. На рис. 4 приведена карта, на которой разными оттенками показаны времена присоединения различных территорий к США. Утолщенной линией отмечены те штаты, территории которых вошли в состав Соединенных Штатов во вторую

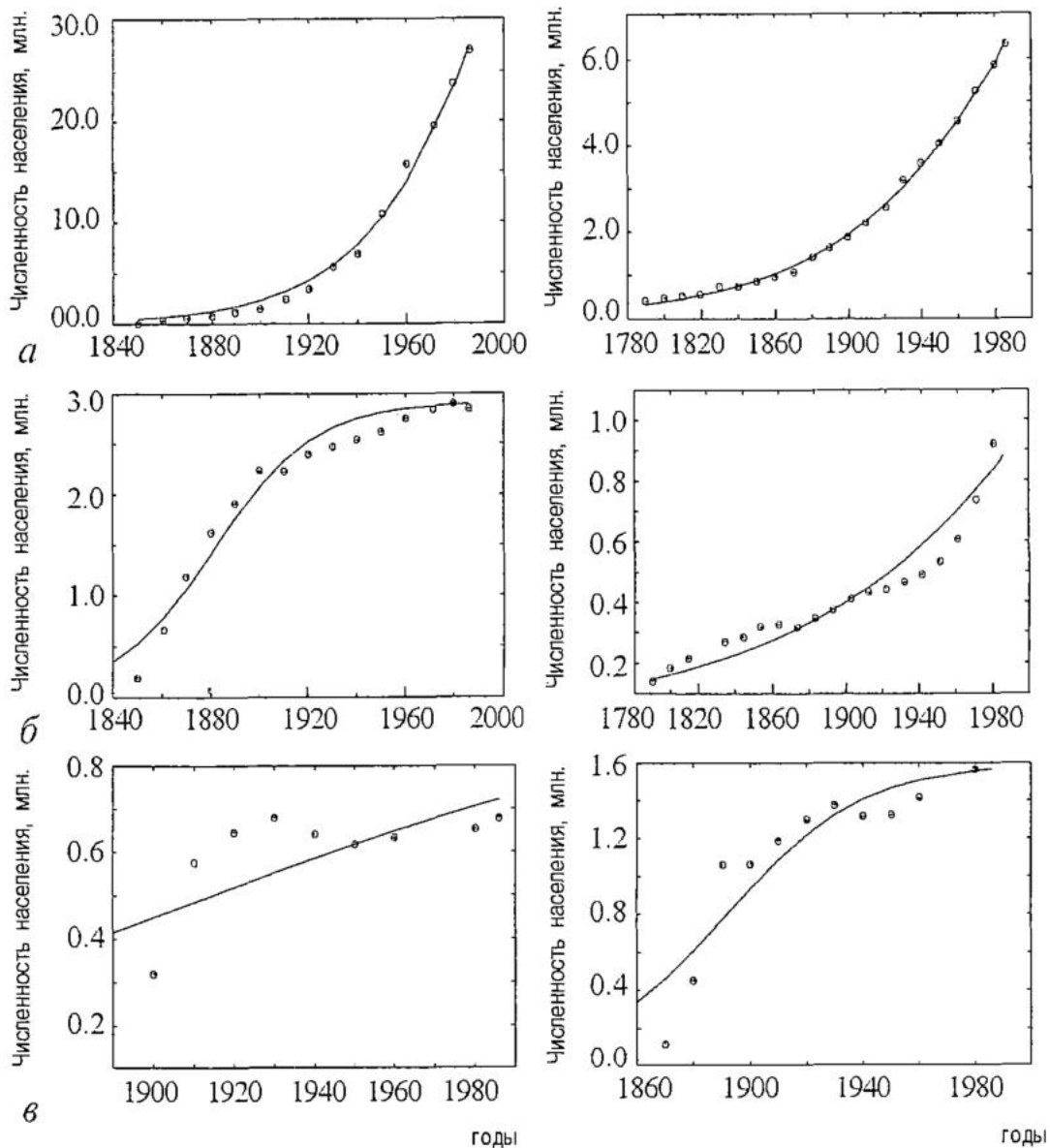


Рис. 3. Динамика численности населения (кружки) и ее аппроксимация логистической кривой (линия) для штатов группы А - Калифорния и Северная Каролина (а); группы В - Айова и Нью-Хэмпшир (б); группы С - Северная Дакота и Небраска (в)

(1790–1860) или даже третью (позже 1890 года) очередь, но были к этому моменту уже плотно заселены. Это территории, которые исторически интенсивно колонизировались, начиная с момента заселения европейцами Американского материка.

Если сравнить распределение штатов на группы по степени соответствия демографических данных решению логистического уравнения (рис. 2) и карты истории колонизации территории США (рис. 4), то можно увидеть, что географическое местоположение штатов группы А (штатов, численность населения которых подчиняется логистическому уравнению) почти идеально соответствует наиболее рано заселенным территориям (на карте рис. 4 окрашенным темным цветом и ограниченным утолщенной линией). Между группами штатов В и С и штатами, которые вошли в состав США позже, также наблюдается определенное соответствие (ср. рис. 2 и рис. 4 - области, закрашенные светло серым и белым).

В группу А входят преимущественно штаты, заселение которых началось в первый период колонизации Американского континента (примерно до 1820 года) - Флорида, Калифорния, Северная и Южная Каролина, Коннектикут, Нью-Йорк и



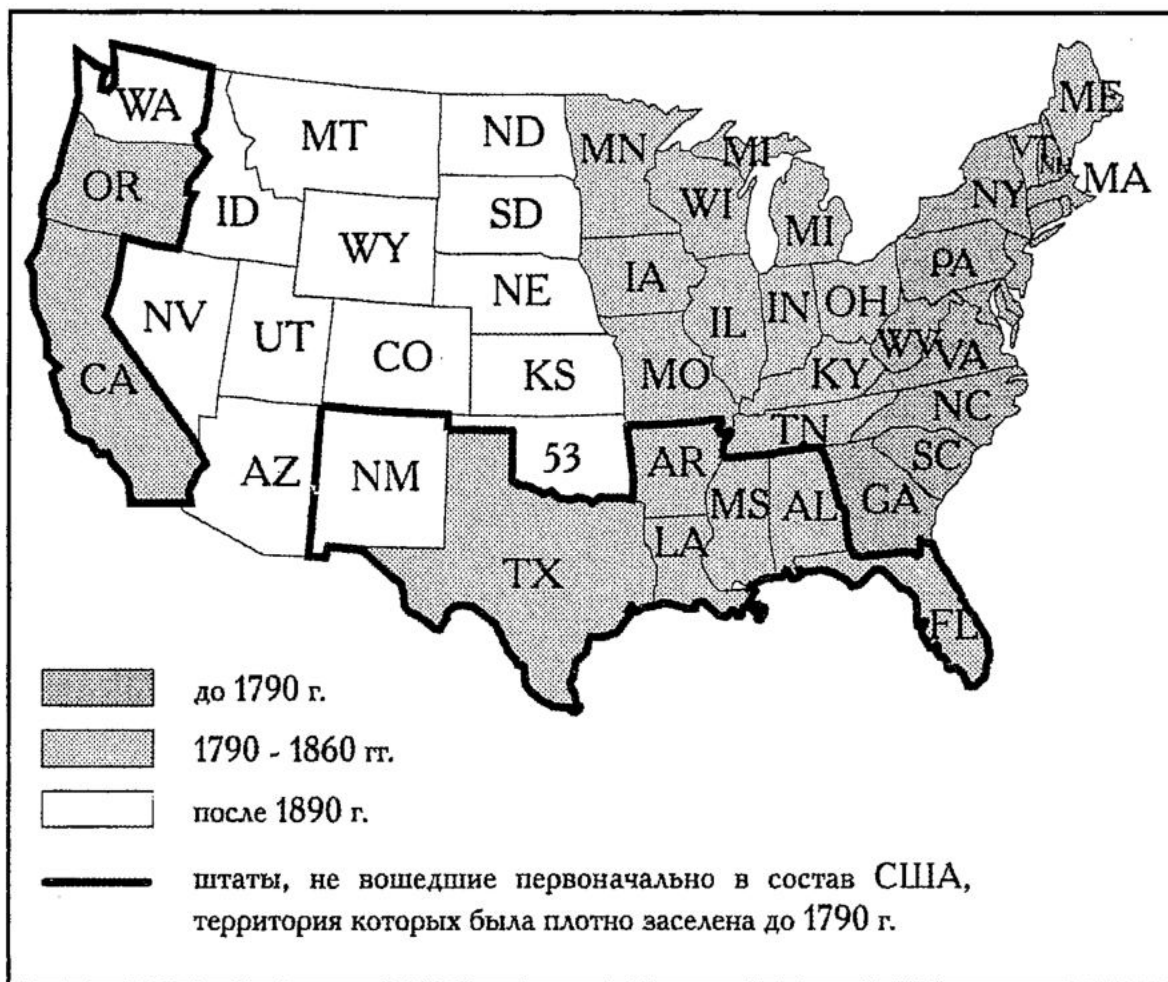


Рис. 4. История заселения территории Соединенных Штатов Америки

др. Из части штатов именно этой группы и были первоначально образованы Соединенные Штаты. Другие штаты этой группы вошли в состав США несколько позже. Как уже обсуждалось, для группы А численность населения как функция времени хорошо описывается решением уравнения Ферхюльста. Кроме того, у этих штатов наибольшая плотность населения и, как следствие, наиболее равномерное распределение населения по территории.

Группа В охватывает штаты, присоединенные в период с 1822 по 1861 годы. Это внутренние территории, на которых вначале присутствовало только коренное население, причем плотность расселения его была мала. Затем началась их колонизация, появились переселенцы (освоение Дикого Запада), их количество увеличивалось, и в итоге земли получали статус территорий, на которые правительство США заявляло свои претензии. Далее соответствующие территории получали статус штатов. К штатам этой группы относятся, например, Айова, Миннесота, Иллинойс, Индиана, Арканзас и др. (см. рис. 2). Фактическая численность населения этих штатов сначала превышала значения, задаваемые соответствующей логистической кривой (с одной стороны, здесь играло роль большое число переселенцев, с другой стороны - имело место коренное население), а затем отставала от нее. То есть на графике рис. 3 существует точка перегиба реальной численности популяции относительно соответствующей ей кривой решения уравнения Ферхюльста.

Третью группу составляют штаты, присоединенные существенно позже, после 1890 года. Численность населения этих штатов далека от насыщения, плотность населения невелика, а ее распределение по территории проживания

сильно неравномерно. Поэтому не представляется возможным описать динамику численности населения в этом случае решением логистического уравнения. Другими словами, разумно предположить, что эти штаты все еще находятся в начале своего интенсивного и более плотного заселения.

Найденные закономерности хорошо соответствуют результатам, полученным в работах [3, 4]. В них обсуждается принципиальная роль учета неоднородности и запаздывания в заселении различных областей ареала проживания. В работе [4] с помощью предложенной модели решеточного газа показано, что динамика численности популяции принципиально определяется характером заселения ареала. Так, в случае изначально близкой к однородной плотности расселения на некоторой территории, динамика численности населения хорошо описывается решением логистического уравнения. Причем соответствие тем лучше, чем ближе к однородному было начальное распределение населения. Ситуация усложняется при сильной начальной неоднородности (например, когда происходит заселение ареала проживания извне). В этом случае наблюдаются отклонения роста численности популяции от соответствующего решения логистического уравнения. Причем вид этих отклонений подобен поведению числа жителей штатов, включенных в группу В: вначале наблюдается более быстрый рост населения (связанный с миграцией), чем предсказывает логистическое уравнение, а затем он резко замедляется (ср. рис. 3 данной работы и рис. 8 из работы [4]).

Для подтверждения полученных закономерностей в динамике численности населения различных штатов США был проведен анализ зависимости удельной емкости  $k$  территорий, на которых проживает население различных штатов, от времени начала заселения соответствующей территории. Для каждого  $i$ -го штата удельная емкость определялась как отношение емкости среды, то есть максимальной численности населения, которое может проживать на территории данного штата, к его площади  $S_i$

$$k_i = K_i / S_i.$$

В качестве емкости среды  $K_i$  (максимального числа жителей, которые могут проживать на территории штата) бралось значение, полученное из аппроксимации демографических данных решением логистического уравнения (3).

Величина удельной емкости является в некотором смысле характеристикой привлекательности той или иной территории для проживания на ней населения. Дело в том, что применительно к народонаселению понятие емкости среды  $K$  не является в чистом виде той максимальной численностью населения, которое может проживать на рассматриваемой территории. Такая характеристика, как максимальная численность, видимо, вообще не может быть применима к человеческой популяции. Например, в крупных мегаполисах плотность населения на несколько порядков превосходит плотность населения в сельской местности. Поэтому для человеческого общества если и имеет смысл говорить о величине максимальной численности, то в усредненном виде, по всей стране (штату). Эта величина будет определяться географическими (ландшафт, климат и т.д.), экономическими, политическими и другими причинами. Причем максимальная численность населения той или иной страны имеет тенденцию возрастать с развитием экономики, научно-техническим прогрессом и т.д. Поэтому величину удельной емкости следует рассматривать как некоторую усредненную по территории характеристику привлекательности штата для проживания населения на его территории. В этом случае оценка параметра  $K$  логистического уравнения для различных штатов позволяет объективно выявить наиболее предпочтительные для населения земли США. Более того, эта оценка является усредненной за все

время существования штата, так как параметр емкости среды  $K$  определяется по демографическим данным от начала присоединения штата до сегодняшнего времени.

Таблица

Значения удельной емкости территорий штатов, входящих в различные группы

Группа	Штат	$k$ , человек/миль <sup>2</sup>
А	Калифорния	61.25
	Северная Каролина	114.07
	Нью - Йорк	144.90
В	Айова	18.95
	Мэн	10.19
	Джорджия	28.20
С	Северная Дакота	3.8
	Небраска	1.02
	Вайоминг	2.34

В результате проведенных исследований было показано, что по значению удельной емкости  $k$  все штаты могут быть снова разделены примерно на три группы, причем наибольшую удельную емкость имеют штаты, заселенные ранее всего, а наименьшую - заселенные в последнюю очередь. В таблице показаны значения удельных емкостей для штатов с характерной динамикой численности населения для каждой из групп соответствия решению логистического уравнения.

Заметим, что при расчете и анализе удельной емкости невозможно столь точно, как это было сделано выше, провести классификацию штатов. Границы групп с различной удельной емкостью пересекаются, имеются штаты, удельная емкость которых не подчиняется вышеописанным закономерностям. Однако общая тенденция выделения именно трех характерных групп все же прослеживается. Для иллюстрации этого на рис. 5 приведена карта США, на которой интенсивность окраски штатов соответствует различным значениям удельной емкости (чем светлее, тем меньше значение удельной емкости). Из рис. 5 видно, что качественно степень его соответствия рис. 2 меньше, чем рис. 4, на котором приведена карта заселения США. Тем не менее, степень соответствия достаточна, чтобы говорить о возможности аналогичного предыдущим случаям деления штатов США на три группы по уровню величины удельной плотности населения<sup>2</sup>.

Таким образом, в рамках проведенной кластеризации демографических данных по динамике численности населения США на степень ее соответствия решению логистического уравнения было показано, что все штаты можно разделить на три основные группы. Предлагаемая классификация подтверждается

<sup>2</sup> Заметим, что здесь есть и исключения. Так, например, штат Нью-Хэмпшир, отнесенный ранее к группе В, имеет одну из самых высоких величин удельной емкости территории  $k=248.29$ . Видимо, это следует связать с конкретными историческими особенностями развития данного штата. Однако такое несоответствие - все же исключение из найденной закономерности. Более того, если говорить о площади территории штатов, чья удельная емкость сильно не укладывается в предложенную нами классификацию по степени соответствия логистическому уравнению, то она невелика. То есть относительная площадь таких «нестандартных» штатов мала.

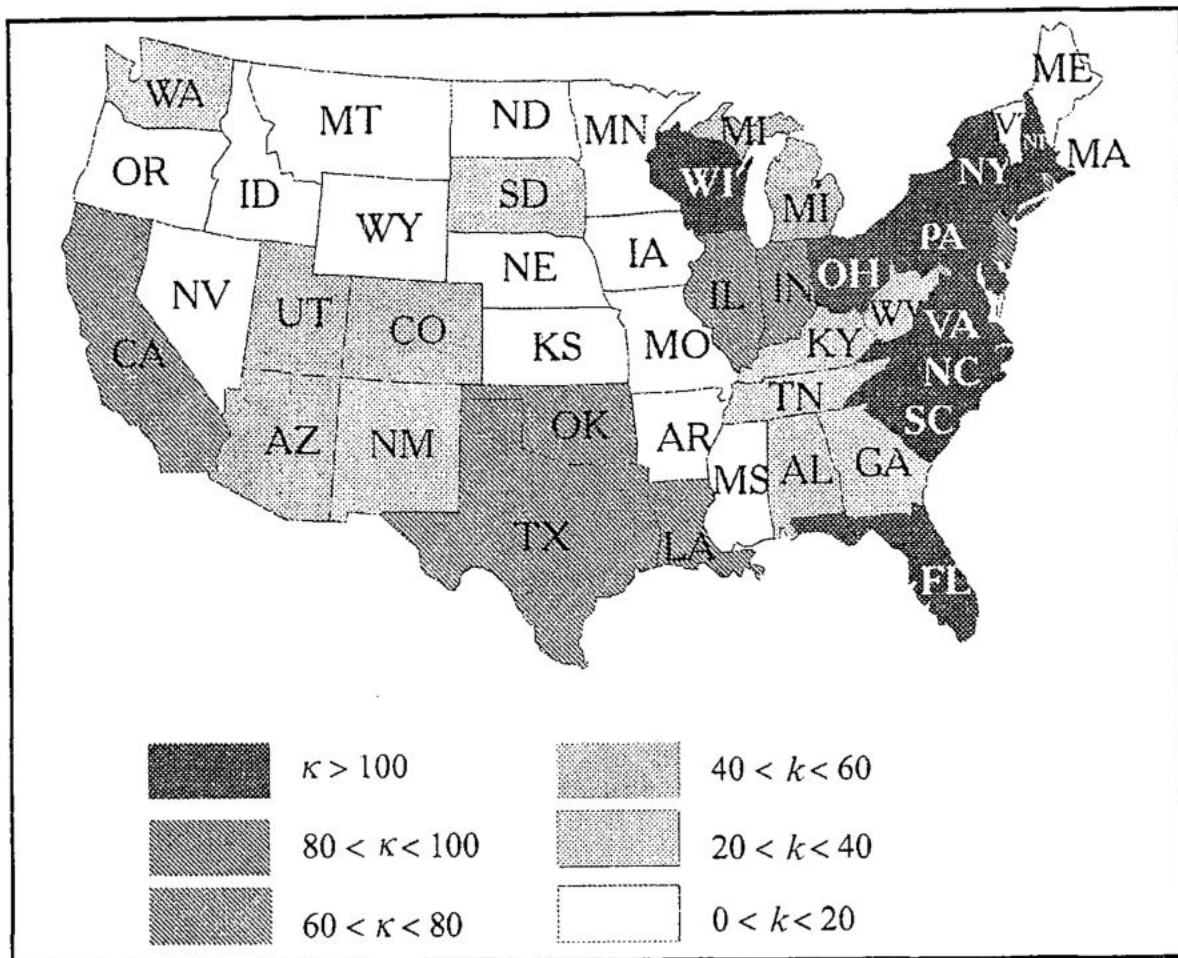


Рис. 5. Распределение штатов по величине удельной емкости (привлекательности) территории как историей заселения США, так и расчетами удельной емкости населения каждого из штатов.

Группа А - штаты, заселение которых началось с момента колонизации Американского материка; численность населения в некоторых из них приближается к предельной, определяемой емкостью среды  $K$ .

Группа В - штаты, территории которых заселялись переселенцами из штатов первой группы. Поэтому сильная неоднородность начального распределения населения по территории и рассинхронизация заселения их привела к отличиям динамики численности населения в них от предсказываемой уравнением Ферхюльста (см. работы [3, 4]).

Группа С - соответствует территориям, численность населения которых не подчиняется логистическому уравнению, а емкость (или привлекательность) их очень мала.

Заметим, что в представленном анализе никаким образом не учитывалась внешняя и внутренняя миграция населения. Видимо следует полагать, что учет этого фактора позволит уточнить полученные результаты.

*Работа выполнена при поддержке грантами CRDF REC-006 и РФФИ № 02-02-16351.*

## Расшифровка сокращенных названий штатов

Alabama	AL	Maine	ME	Ohio	OH
Arizona	AZ	Maryland	MD	Oklahoma	OK
Arkansas	AR	Massachusetts	MA	Oregon	OR
California	CA	Michigan	MI	Pennsylvania	PA
Colorado	CO	Minnesota	MN	Rhode Island	RI
Connecticut	CT	Mississippi	MS	South Carolina	SC
Delaware	DE	Missouri	MO	South Dakota	SD
Florida	FL	Montana	MT	Tennessee	TN
Georgia	GA	Nebraska	NE	Texas	TX
Idaho	ID	Nevada	NV	Utah	UT
Illinois	IL	New Hampshire	NH	Vermont	VT
Indiana	IN	New Jersey	NJ	Virginia	VA
Iowa	IA	New Mexico	NM	Washington	WA
Kansas	KS	New York	NY	Wisconsin	WI
Kentucky	KY	North Carolina	NC	West Virginia	WV
Louisiana	LA	North Dakota	ND	Wyoming	WY

**Библиографический список**

1. Капица С.П. // УФН. 1996. Т.166. №1. С. 6379.
2. Капица С.П. Сколько людей жило, живет и будет жить на Земле: Очерк теории роста человечества. М.: Ин-т физ. проблем, 1999.
3. Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. К вопросу об описании численности народонаселения нелинейным уравнением диффузии // ДАН. 2000. Т. 372, № 3. С. 397.
4. Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е. Некоторые модели класса решеточных газов, связанные с описанием численности популяций // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8. № 4. С. 74.
5. Короновский А.А., Трубецков Д.И. Нелинейная динамика в действии. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996.
6. Трубецков Д.И. Колмогоров, Петровский, Пискунов, Фишер и нелинейное уравнение диффузии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т.5. № 6. С. 85.
7. Гиляров А.М. // Природа. 1998. № 2.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 15.10.01

## SOME ASPECTS OF USA POPULATION NUMBER CHANGING WITH NONLINEAR DYNAMICS VIEW

*A.A. Koronovskii, D.I. Lopatnikov, A.E. Hramov*

The results of carried out clusterization of demographic data of population number dynamics of USA on a degree of their proximity to solution of the logistic equation are presented. The suggested classification is discussed with reference to historical settlement of USA territory. Also reasons of difference arising in the dynamics of populations number in different territories are considered.



*Лопатников Дмитрий Игоревич* родился в Саратове (1982). Студент 3 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Соросовский студент 2001 года. Область научных интересов - применение аппарата клеточных автоматов к моделированию социальных и биологических систем.



## ВЛИЯНИЕ ПРОМЫСЛА НА ПОПУЛЯЦИОННУЮ ДИНАМИКУ ПРОХОДНЫХ ВИДОВ РЫБ

*Е.В. Ласт, Е.Я. Фрисман*

Предлагается и обосновывается математическая модель (рекуррентное уравнение с запаздыванием) динамики численности неоднородной популяции проходных видов рыб. Найдены условия, при которых в системе возникают регулярные и хаотические колебания. Исследуется влияние на популяционную динамику двух различных стратегий промыслового изъятия. Предполагается, что объем изъятия зависит от величины промысловых усилий и текущего значения численности. Показано, что если величина промысловых усилий нелинейно зависит от численности популяции, то интенсификация такого промысла неизбежно приводит либо к колебаниям и хаотической динамике численности, либо к вырождению популяции.

### Введение

На современном этапе развития общества антропогенное воздействие на природные системы стало сравнимо по своим масштабам с естественными явлениями и процессами. Человек активно вмешивается в протекание глобальных геофизических процессов, причем в большинстве ситуаций это вмешательство носит негативный характер: нарушение озонового слоя, исчезновение лесов и полезных ископаемых, загрязнение мирового океана и т.д. В то же время человечество, несмотря на развитие техники и технологий, все так же зависит от окружающей среды.

Особенностью биологических систем является их способность к самоорганизации, то есть возникновению сложных динамических режимов при отсутствии внешних воздействий. Поэтому нельзя заниматься проблемами управления экосистемами и отдельными популяциями без предварительного качественного анализа. Уникальность природных систем не позволяет проводить крупномасштабные эксперименты, а последствия неверного решения могут оказаться катастрофическими. В связи с этим особое значение приобретает метод математического моделирования реальных систем с обязательным учетом особенностей и результатов их эксплуатации.

Проблеме моделирования динамики численности локальных однородных популяций, а также решению задачи оптимального управления для таких популяций посвящены сотни исследований. Над этой проблемой работали Р. Мэй,

А.П. Шапиро, Е.И. Скалецкая и многие другие. Классифицированы типы динамических режимов, исследованы сценарии переходов от регулярного поведения к хаотическому и обратно, для многих конкретных популяций выработаны стратегии эксплуатации, сохраняющие численность на оптимальном уровне из года в год (см., например, [1-3]). Однако наиболее ценные объекты промысла имеют, как правило, многолетние жизненные циклы и сложную возрастную структуру. В качестве примера здесь можно привести осетровых, сиговых и лососевых рыб, некоторые виды которых представлены двадцатью и более возрастными группами, имеющими различную промысловую ценность. Кроме того, для интенсивно эксплуатируемых популяций часто невозможно определить, какие динамические изменения вызваны внутривидовыми механизмами, а какие обусловлены именно антропогенным воздействием. Математическое моделирование в данной ситуации является основным методом, позволяющим изучить отдельно влияние биотических и абиотических факторов на популяционную динамику. В данной работе исследуется характер изменений в динамике численности проходных промысловых рыб, вызванных промыслом. Естественно, при этом необходимо провести предварительное исследование модели без учета промыслового изъятия. Работа носит теоретический характер и направлена, в первую очередь, на решение проблемы изучения влияния оптимального управления на динамику сложноструктурированной популяции.

### Вывод модельного уравнения

Опишем динамику численности свободной, неэксплуатируемой локальной популяции проходных рыб. Особенность таких видов состоит в том, что их жизненный цикл начинается в реке, затем особи скатываются в море (это может происходить в разном возрасте), а после нагула возвращаются на нерест в родную реку. Будем предполагать, что сразу после размножения все особи погибают. Популяцию считаем изолированной, то есть исключим возможность прихода на нерест рыб из других водоемов. Структуру такой популяции можно условно изобразить в виде схемы, приведенной на рис. 1. Здесь приняты следующие обозначения:

$x$  - количество личинок от икры, отложенной самками всех нерестовых групп;

$y_{ij}, x_{ij}$  - неполовозрелые и нерестовые возрастные группы самок, соответственно;

$\gamma_{ij}$  - плодовитость соответствующей нерестовой возрастной группы, то есть среднее число икринок от одной самки;

$i \in [0, m], j \in [0, r]$  - количество лет, прожитых в реке и море, соответственно;

$p_{ij}$  и  $q_{ij}$  - коэффициенты перехода из одной возрастной группы в другую ( $q_{ij}$  - коэффициент перехода в нерестовую группу) представляют собой произведения соответствующего коэффициента выживания и доли распределения по соответственным ветвям схемы.

Долю самок в когорте возраста  $ij$  считаем равной  $\alpha_{ij}$ . Будем считать, что выживаемость личинок зависит от их количества, коэффициент выживаемости обозначим как  $f(x)$ . Параметр  $n$  определяет номер года, в который ведется наблюдение. Тогда количество личинок, вылупившихся из икры в  $n$ -ом году,

$$x_n = \sum_{\xi} \sum_{\eta} \gamma_{\xi\eta}(n) x_{\xi\eta}(n). \quad (1)$$

В соответствии со схемой можем записать



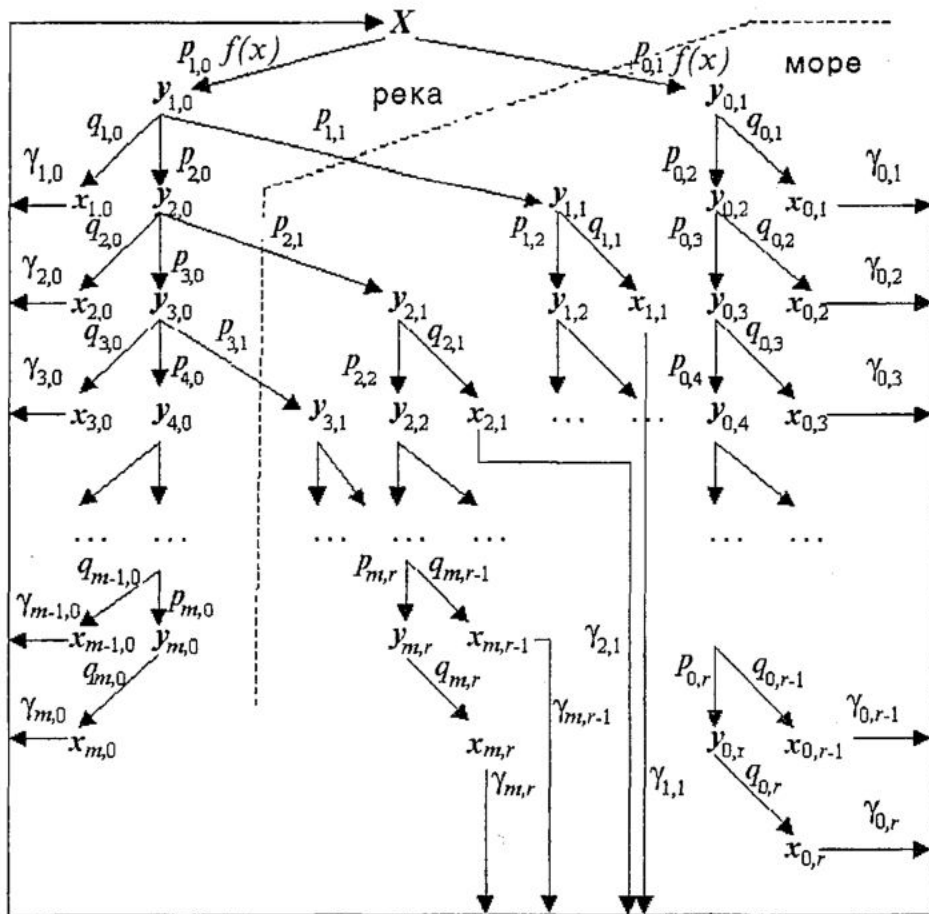


Рис.1. Схема возрастной структуры типичной популяции лососевого вида рыб

$$y_{1,0}(n) = p_{1,0} x_{n-1} f(x_{n-1}),$$

$$x_{1,0}(n) = \alpha_{1,0} q_{1,0} p_{1,0} y_{1,0}(n) = \alpha_{1,0} q_{1,0} p_{1,0} x_{n-1} f(x_{n-1}),$$

$$y_{1,1}(n) = p_{1,1} y_{1,0}(n-1) = p_{1,1} p_{1,0} x_{n-2} f(x_{n-2}),$$

$$x_{1,1}(n) = \alpha_{1,1} q_{1,1} y_{1,1}(n) = \alpha_{1,1} q_{1,1} p_{1,1} p_{1,0} x_{n-2} f(x_{n-2}),$$

Выделим только нерестовые группы самок

$$x_{0,1}(n) = \alpha_{0,1} q_{0,1} p_{0,1} x_{n-1} f(x_{n-1}),$$

$$x_{0,2}(n) = \alpha_{0,2} q_{0,2} p_{0,2} p_{0,1} x_{n-2} f(x_{n-2}),$$

$$x_{0,r}(n) = \alpha_{0,r} q_{0,r} \prod_{l=1}^r p_{0,l} x_{n-r} f(x_{n-r}).$$

В случае, если рыба перед нагулом в море и последующим нерестом проводит один год в реке, имеем

$$x_{1,0}(n) = \alpha_{1,0} q_{1,0} p_{1,0} x_{n-1} f(x_{n-1}),$$

$$x_{1,1}(n) = \alpha_{1,1} q_{1,1} p_{1,1} p_{1,0} x_{n-2} f(x_{n-2}),$$

$$x_{1,r}(n) = \alpha_{1,r} q_{1,r} p_{1,r} \prod_{l=0}^r p_{1,l} x_{n-r-1} f(x_{n-r-1}).$$

В общей формуле численности нерестовой группы вида  $x_{2,j}(n)$  появится второе произведение коэффициентов вида  $p_{i,0}$

$$x_{2,r}(n) = \alpha_{2,r} q_{2,r} \prod_{l=0}^{r-1} p_{2,l} \prod_{s=1}^2 p_{s,0} x_{n-r-2} f(x_{n-r-2}).$$

Продолжая процесс далее по схеме, получим формулу численности произвольной группы

$$x_{m,r}(n) = \alpha_{m,r} q_{m,r} \prod_{l=0}^{r-1} p_{m,l} \prod_{s=1}^m p_{s,0} x_{n-r-m} f(x_{n-r-m}).$$

Теперь можно переписать уравнение (1) в виде

$$x_n = \sum_{\xi=0}^m \sum_{\substack{\eta=0 \\ \xi+\eta \geq 1}}^r \gamma_{\xi\eta} \alpha_{\xi\eta} q_{\xi\eta} \prod_{l=0}^{\xi-1} p_{\xi,l} \prod_{s=1}^{\xi} p_{s,0} x_{n-\xi-\eta} f(x_{n-\xi-\eta}).$$

Пусть  $k = m + r$  ( $k$  - максимально возможный возраст рыбы рассматриваемого вида), тогда получаем

$$x_{n+k} = \sum_{\xi=0}^m \sum_{\substack{\eta=0 \\ \xi+\eta \geq 1}}^r \gamma_{\xi\eta} \alpha_{\xi\eta} q_{\xi\eta} \prod_{l=0}^{\xi-1} p_{\xi,l} \prod_{s=1}^{\xi} p_{s,0} x_{n+i} f(x_{n+i}),$$

где  $i = k - \xi - \eta$ . Для данного диапазона изменения индексов  $\xi$  и  $\eta$  имеем  $i \in [0, k - 1]$ . Чтобы записать полученное общее уравнение динамики численности в более компактном виде, сделаем замену переменных

$$\sigma_i = \sum_{\substack{\xi+\eta=k-i}} \gamma_{\xi\eta} \alpha_{\xi\eta} q_{\xi\eta} \prod_{l=0}^{\xi-1} p_{\xi,l} \prod_{s=1}^{\xi} p_{s,0}, \quad a = \sum_{i=0}^{k-1} \sigma_i, \quad \alpha_i = \sigma_i / a.$$

Коэффициенты  $\alpha_i$  показывают долю в нерестовом стаде рыб возраста  $k - i$ , а их сумма равна 1. Биологический смысл мультипликативного параметра  $a$  - среднее число выживших мальков, вылупившихся из икры, отложенной одной самкой.

Итак, теперь можно записать окончательный вид модельного уравнения

$$x_{n+k} = a \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x_{n+i} f(x_{n+i}). \quad (2)$$

В соответствии с моделью Рикера коэффициент выживаемости личинок  $f(x)$  можно выбрать, в частности, в виде

$$f(x) = \exp(-\beta x),$$

где параметр  $\beta$  характеризует внутривидовую конкуренцию. Такой вид зависимости был получен У.Е. Рикером при изучении связи запаса и пополнения в рыбных популяциях и получил хорошее экспериментальное подтверждение при исследованиях динамики лососевых видов рыб [4, 5]. Введем в рассмотрение относительные единицы численности, то есть сделаем замену  $\beta x \rightarrow x$ . Тогда коэффициент выживаемости примет вид

$$f(x) = \exp(-x). \quad (*)$$

В дальнейшем все общие результаты будем иллюстрировать на этом примере.

### Неподвижные точки и их устойчивость

Рассмотрим уравнение вида (2) при следующих предположениях:

- коэффициенты  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum \alpha_i = 1$ ,  $a > 0$ ;

• функция  $f(x)$  монотонно убывает на  $[0, +\infty)$ ,  $f(0) = 1$ .

Точка  $x_0 = 0$  существует всегда. Ее устойчивость зависит от корней характеристического уравнения

$$\lambda^k = a \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \lambda^i. \quad (3)$$

При  $a > 1$ , то среди корней есть превосходящий по величине 1, то есть тривиальная точка будет неустойчивой [6].

*Лемма 1.* Пусть  $\mu^k = \sum_{i=0}^{k-1} A_i \mu^i$ ,  $\sum |A_i| < 1$ . Тогда  $|\mu| < 1$ .

*Доказательство.* Предположим противное:  $|\mu| \geq 1 \Rightarrow 1/|\mu| \leq 1$ .

$$1 = |\sum A_i \mu^{i-k}| \leq \sum |A_i| < 1.$$

Таким образом, при  $0 < a < 1$  все корни уравнения (3) по модулю меньше 1, и нулевая неподвижная точка устойчива; при  $a = 1$  уравнение (3) имеет корень, равный 1. Данный корень простой, поэтому устойчивость теряется и в системе в этот момент «рождается» нетривиальная неподвижная точка [6]. Она задается уравнением

$$1 = af(x^*),$$

поэтому существует при  $a > 1$ . Положим

$$\varphi(x^*) = a(f(x^*) + x^* f'(x^*)) = 1 + x^* f'(x^*)/f(x^*) \leq 1.$$

Характеристическое уравнение принимает вид

$$\lambda^k = \varphi(x^*) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \lambda^i. \quad (4)$$

Функция  $x^*(a)$  монотонно возрастает при  $a \rightarrow \infty$ , поэтому для изучения  $x^*$  достаточно исследовать поведение корней уравнения вида

$$\lambda^k = \Phi \sum \alpha_i \lambda^i \quad (5)$$

при  $\Phi \leq 1$ . Из леммы 1 следует, что при  $|\Phi| < 1$  все корни этого уравнения по модулю меньше 1.

### Важный частный случай

В качестве примера рассмотрим подробно случай  $k=2$ , то есть максимально возможный возраст особи - 2 года. В природе примером такой ситуации могут служить популяции горбуши (*Oncorhynchus gorbuscha*). Этот случай можно разобрать до конца. Уравнение (5) принимает вид

$$\lambda^2 - \Phi \alpha_1 \lambda - \Phi \alpha_0 = 0.$$

Обозначим  $p = -\Phi \alpha_1$ ,  $q = -\Phi \alpha_0$  и изобразим в плоскости  $(p, q)$  область, внутри которой стационарная точка остается устойчивой. Она имеет вид треугольника (рис. 2). При выходе параметров модели за границы треугольника неподвижная точка теряет устойчивость, и динамика системы становится нелинейной. Потеря устойчивости происходит, когда корень характеристического уравнения становится больше (-1), в этом случае уравнение имеет вид:  $1 + \Phi \alpha_1 - \Phi \alpha_0 = 0$ , то есть  $\Phi = 1/(\alpha_0 - \alpha_1) = 1/[\alpha_0 - (1 - \alpha_0)] = 1/(2\alpha_0 - 1)$ . При комплексной потере устойчивости  $\Phi = -1/\alpha_0$ . Видно, что значения  $\Phi$  в этих двух случаях совпадают при  $\alpha_0 = 1/3$ . Итак, если  $\alpha_0 < 1/3$ , то потеря устойчивости происходит через -1; если  $\alpha_0 > 1/3$ , то она комплексная.

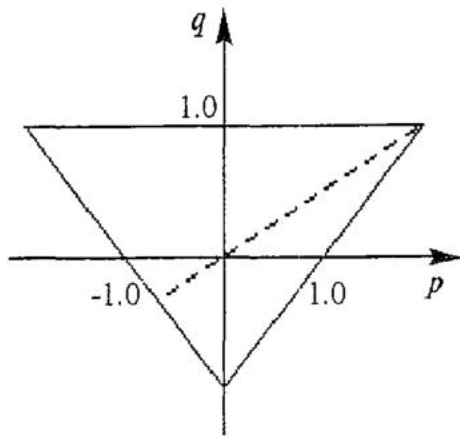


Рис. 2. Треугольник устойчивости в случае  $k=2$

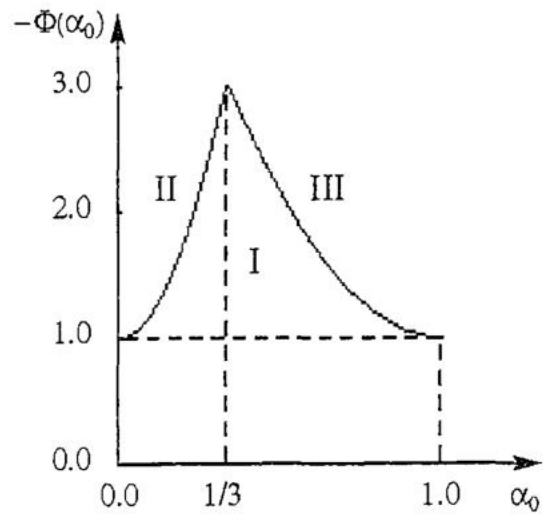


Рис. 3. Области устойчивости стационарной точки при  $k=2$

Области значений параметров, при которых стационарная точка устойчива, а также области, в которых известен тип популяционной динамики (циклы, инвариантные кривые и т.д.) представлены на рис. 3. Если параметры модели попадают в область I, стационарная точка будет устойчива; при переходе в область II в системе наблюдаются циклы периодов 2, 4, 8 и т.д.; при переходе из области I в область III в системе возникают колебания, а в фазовом пространстве - замкнутые инвариантные кривые.

Рассмотрим случай  $0 < \alpha_0 < 1/3$ . В момент потери устойчивости уравнение имеет вид  $\lambda^2 - (\Phi\alpha_0 - 1)\lambda - \Phi\alpha_0 = 0$ . Это квадратное уравнение, имеющее два различных действительных корня (-1) и  $\Phi\alpha_0 = \alpha_0 / (2\alpha_0 - 1) < 1$ . Следовательно, (-1) - простой корень и динамика системы будет представлена циклом с периодом в 2 года [6].

Самый простой случай комплексной потери устойчивости - через  $(1)^{1/3}$ . Он соответствует значениям параметров  $\alpha_0 = \alpha_1 = 1/2$ . При таких параметрах в системе  $x_{n+2} = a[1/2 x_{n+1} f(x_{n+1}) + 1/2 x_n f(x_n)]$  возникает цикл периода 3 [6]. Бифуркационная диаграмма системы (при варьировании параметра  $a$ ) для этого случая представлена на рис. 4. Как видно на диаграмме, стационарная точка теряет устойчивость при  $a \approx 7.89$  и в системе действительно реализуется цикл периода 3. Далее, после нескольких бифуркаций, динамика становится хаотической.

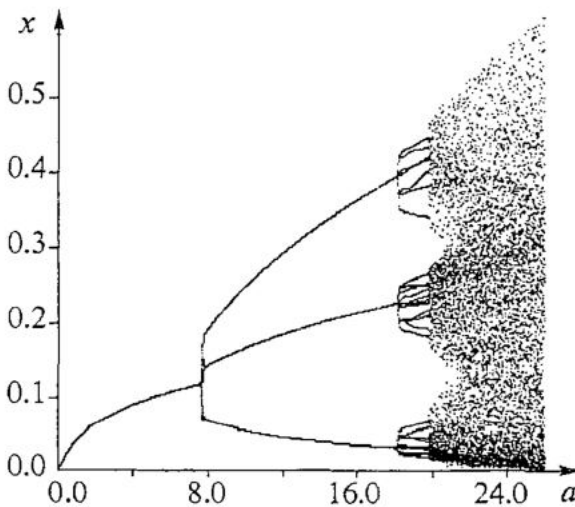


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма системы при  $k=2, \alpha_0 = \alpha_1 = 0.5$

Построенная модель применялась для численного исследования динамики ряда реальных камчатских популяций лососевых, а именно: популяций кеты (*Oncorhynchus keta*), кижуча (*Oncorhynchus kizhutch*) и чавычи (*Oncorhynchus tshawytscha*) р. Большая и нерки (*Oncorhynchus nerka*) оз. Азабачьего. Популяционная структура тихоокеанских лососей полностью соответствует схеме (см. рис. 1) и сделанным при выводе основного уравнения предположениям [7]. Оказалось, что популяции, обладающие совершенно различной возрастной структурой, тем не менее имеют сходное динамическое пове-

дение. Исследование выявило наличие у всех рассматриваемых популяций как предельных стационарных колебаний, так и весьма сложных хаотических режимов и странных аттракторов. Отметим, что хаотические изменения численности возникают при значениях параметра  $a$ , близких к реальным данным (для лососевых число выживших потомков от одной самки составляет в среднем 8-14 особей). Кроме того, оказалось, что устойчивые циклические траектории появляются в системе тем раньше (в зависимости от  $a$ ), чем больше возрастных групп в нерестовом стаде, независимо от процентного распределения особей по этим группам. Более подробно полученные результаты описаны в работах [7, 8].

### Решение задачи оптимального управления

Итак, мы исследовали динамику численности неэксплуатируемой популяции с возрастной структурой. Обратимся теперь к основной цели проводимого исследования: решим задачу оптимального управления и выявим изменения, происходящие в динамике модели под действием этого управления. Для биологических популяций термин «управление» означает внешнее вмешательство с целью регулирования численности. Одним из основных и при этом наиболее «гибких» методов такого вмешательства является ведение промысла. В этом случае под оптимальным управлением в стационарном случае мы понимаем изъятие такого числа особей, которое обеспечивает максимальную прибыль от их реализации, а численность популяции сохраняется неизменной с течением времени [1]. Рассмотрим две наиболее популярные методики промысла: изъятие фиксированной доли особей из каждой возрастной группы и стратегию, при которой доля вылавливаемых особей зависит от плотности нерестового стада.

**Случай постоянной доли промыслового изъятия.** Допустим, стратегия промысла такова, что из каждой возрастной группы изымается одна и та же доля  $U$  от численности группы, тогда уравнение (2) видоизменится

$$x_{n+k} = a(1 - U)\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x_{n+i} f(x_{n+i}). \quad (6)$$

Стационарная точка задается уравнением

$$1 = a(1 - U)f(x^*). \quad (7)$$

Объем равновесного промысла определяется формулой

$$R = aUx^*f(x^*) \quad (**)$$

или, принимая во внимание (7), формулой

$$R = x^*[af(x^*) - 1]. \quad (***)$$

Из условия максимального объема равновесного промысла

$$dR/dx^* = af(x^*) - 1 + ax^*f'(x) = 0,$$

с учетом конкретного вида коэффициента выживаемости  $f(x^*)$  (\*) получаем уравнение для определения оптимального равновесного уровня численности  $x_m^*$ , обеспечивающего максимальный равновесный уровень изъятия,

$$a \exp(-x_m^*)(1 - x_m^*) = 1 \quad \text{или} \quad a = \exp(x_m^*)/(1 - x_m^*).$$

Используя полученное выражение для  $a$  в формуле (\*\*\*) для объема равновесного промысла, получаем

$$R = x_m^{*2}/(1 - x_m^*).$$

С другой стороны, подставляя выражение для  $a$  в (\*\*), получаем

$$R = Ux_m^*/(1 - x_m^*).$$

Приравнявая два выражения для  $R$ , получаем оптимальное значение доли изъятия

$$U_0 = x_m^*$$

в относительных единицах численности. Для других видов коэффициента выживаемости в первый год жизни значение  $U_0$  будет иным.

Исследуем полученное значение оптимальной равновесной численности на устойчивость. Характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\lambda^k = \varphi(x^*) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \lambda^i, \quad (8)$$

где  $\varphi(x^*) = \varphi(x_m^*) = a(1 - U_0)(f(x_m^*) + x_m^* f'(x_m^*))$ .

Для выбранного вида коэффициента выживаемости (\*) получаем

$$\varphi(x_m^*) = \exp(x_m^*)/(1 - x_m^*)(1 - x_m^*)[\exp(-x_m^*) - x_m^* \exp(-x_m^*)] = 1 - x_m^*.$$

Отсюда  $|\varphi(x_m^*)| < 1$ , а из леммы 1 следует, что все корни уравнения (8) по модулю будут меньше единицы. Таким образом, стационарная точка устойчива во всей области значений параметров. Напомним, что в отсутствие промысла возрастание репродуктивного потенциала  $a$  вызывает появление колебательных режимов динамики (см. рис. 4). При оптимальном управлении такое возрастание приводит лишь к увеличению максимальной доли изъятия (и росту прибыли), численность популяции сохраняется на равновесном уровне.

**Случай переменной доли промыслового изъятия.** Однако обычно зависимость объемов промысла от численности является более сложной функцией, нежели прямая пропорциональность. Усиленный промысел ведется при большой плотности популяции, а в период спада численности он практически прекращается [3]. В рассмотренном случае постоянной доли изъятия никак не учитывается зависимость величины промыслового изъятия от интенсивности промысла, которая обычно измеряется величиной промысловых усилий. Под промысловыми усилиями понимается количество использованных стандартизированных орудий промысла (количество вынутых сетей, время траления, тоннаж рыболовецких судов и т.п.). Здесь могут возникнуть некоторые трудности, связанные с возможностью использования при промысле одного и того же вида весьма разных орудий и методик промысла, но будем считать эти трудности преодолимыми (в большинстве случаев так и бывает) и формализуем зависимость объема изъятия от величины промысловых усилий, которую обозначим буквой  $u$ . В зависимости от соотношения величин промысловых усилий и текущего значения численности объем промысла будет пропорционально зависеть либо только от численности популяции (если величина промысловых усилий велика, а численность популяции мала), либо только от величины промысловых усилий (при очень большой численности популяции и малом количестве усилий). Коэффициент пропорциональности при этом определяется биологическими особенностями вида и методами промысла.

Этим требованиям можно удовлетворить, если выбрать функцию объема промысла  $R(x^*)$  в виде «трофической» функции с насыщением как по стационарной численности популяции  $x^*$ , так и по числу усилий  $u$

$$R(x^*) = r u x^* / [(m + u)(1 + \mu x^*)].$$

Здесь  $r$  - максимально возможная доля изъятия (при  $u \rightarrow \infty, x^* \rightarrow 0$ ; ясно, что  $r \leq 1$ );  $m$  - величина промысловых усилий, обеспечивающая долю изъятия, равную половине от максимально возможной при заданном уровне численности;  $1/\mu$  - величина численности популяции, при которой изымаемая доля равна половине от максимально возможной при заданных промысловых усилиях. Такой вид функции  $R(x^*)$  отражает хорошо известный факт, заключающийся в том, что величина изъятия, приходящегося на одно промысловое усилие, падает с ростом числа усилий. В дальнейшем будем рассматривать частный случай этой зависимости, когда  $r = 1, \mu = 0$  (можно выловить все, а численность популяции не очень велика), то есть  $R = u x^* / (m + u)$  и доля изъятия однозначно определяется величиной промысловых усилий  $U = u / (m + u)$ . Статистические исследования показывают, что для некоторых видов (в частности, для минтая, палтуса, салаки и др.) оправданно выбирать число усилий в виде степенной функции от текущей численности популяции [3]. По-видимому, и для проходных многовозрастных рыб такая зависимость будет адекватной, поскольку их промысел подчиняется тем же экономическим и технологическим зависимостям. Итак, число промысловых усилий будем полагать степенной функцией от общей численности нерестового стада, то есть в стационарном случае  $u = [a x^* f(x^*)]^\alpha$ , где  $\alpha$  - параметр, показывающий зависимость интенсивности изъятия от численности популяции. Получаем функцию  $U$  в виде

$$U = [a x^* f(x^*)]^\alpha / \{m + [a x^* f(x^*)]^\alpha\}.$$

Итак, объем промысла определяется выражением

$$R = [a x^* f(x^*)]^{\alpha+1} / \{m + [a x^* f(x^*)]^\alpha\} = a x^* f(x^*) - x^*.$$

Объем максимален при

$$\partial R / \partial x^* = a [f(x^*) + x^* f'(x^*)] - 1 = 0.$$

Для конкретного вида коэффициента выживаемости получаем, как и в случае постоянного изъятия,

$$R = x^* [a \exp(-x^*) - 1] = x_m^{*2} / (1 - x_m^*).$$

С другой стороны,

$$R = [a x_m^* f(x_m^*)]^{\alpha+1} / \{m + [a x_m^* f(x_m^*)]^\alpha\}.$$

Приравнивая эти выражения, получаем оптимальные значения доли изъятия

$$U_0 = [x_m^* / (1 - x_m^*)]^\alpha / \{m + [x_m^* / (1 - x_m^*)]^\alpha\} = x_m^*$$

и промысловых усилий

$$m_0 = [x^* / (1 - x_m^*)]^{\alpha-1}.$$

Найдем области устойчивости стационарной точки при описанной стратегии промысла. Характеристическое уравнение, как и в предыдущем случае, имеет вид (8), но здесь

$$\varphi(x^*) = \varphi(x_m^*) = a(1 - U)[f(x_m^*) + x_m^* f'(x_m^*)] - U a x_m^* f(x_m^*).$$

В этом случае

$$U' = \{[a x_m^* f(x_m^*)]^\alpha / [m + (a x_m^* f(x_m^*))^\alpha]\}' = \{[a x_m^* f(x_m^*)]^\alpha\}' / [m + (a x_m^* f(x_m^*))^\alpha] - [a x_m^* f(x_m^*)]^\alpha [(a x_m^* f(x_m^*))^\alpha]' / [m + (a x_m^* f(x_m^*))^\alpha]^2,$$

то есть

$$U'_0 = [a^\alpha m \alpha x_m^{*\alpha-1} f^{\alpha-1}(x_m^*)][f(x_m^*) + x_m^* f'(x_m^*)] / [m + [a x_m^* f(x_m^*)]^\alpha]^2.$$

Окончательно

$$\varphi(x_m^*) = 1 - x_m^* - [a^\alpha m \alpha x_m^{*\alpha} f^\alpha(x_m^*)] / [m + (a x_m^* f(x_m^*))^\alpha]^2 = (1 - x_m^*)(1 - \alpha x_m^*).$$

Стационарная точка устойчива при  $|\varphi(x^*)| < 1$  и теряет устойчивость при  $|\varphi(x^*)| = 1$ . Найдем, при каких значениях параметра  $\alpha$  выполняются эти условия.

$$|\varphi(x_m^*)| = |(1 - x_m^*)(1 - \alpha x_m^*)| \leq 1,$$

$$|1 - \alpha x_m^*| \leq 1 / (1 - x_m^*).$$

Итак, неподвижная точка будет устойчивой при

$$-1 / (1 - x_m^*) \leq \alpha < (2 - x_m^*) / [x_m^* (1 - x_m^*)].$$

На рис. 5 показаны области устойчивости стационарной точки на плоскости  $(x^*, \alpha)$ . Если значения  $x^*, \alpha$  попадают в область I, неподвижная точка при ведении

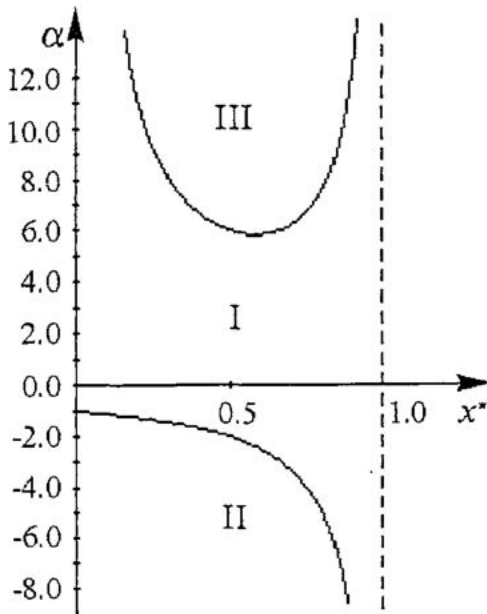
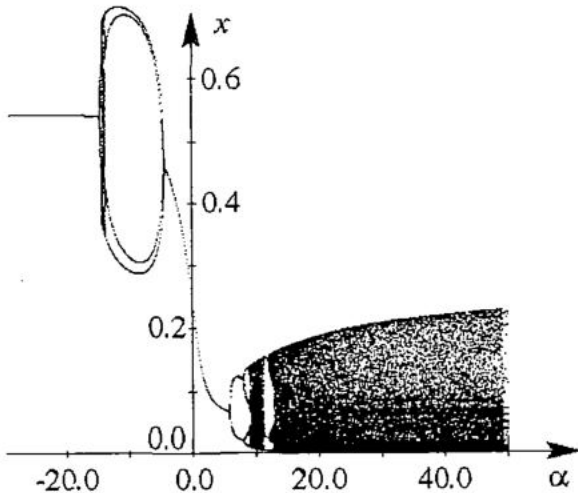


Рис. 5. Области регулярной и нерегулярной динамики при неравновесном промысле

промысла остается устойчивой; в области III в системе наблюдаются колебания, вызванные ведением промысла. При  $\alpha = -\varphi(x_m^*) / [1 - x_m^*] = 1$  и корень  $\lambda$  характеристического уравнения также равен 1. Следовательно, в области II промысел обеспечивает максимальную прибыль в неустойчивом равновесии  $x_m^*$ . Если начальный уровень численности  $x_0 < x_m^*$ , то при ведении промысла популяция вырождается, то есть численность  $x_n \rightarrow 0$ . Статистический анализ промысловых данных для некоторых популяций показывает, что реальные значения параметра  $\alpha$  обычно отрицательны и достаточно велики по модулю [3]. Таким образом, предположение о схожести промысловых характеристик для проходных и непроходных видов рыб приводит к выводу об опасности перелома при использовании такой стратегии.



На рис. 6 и 7 показаны бифуркационные диаграммы модели при изменении промыслового параметра  $\alpha$  для фиксированного значения  $m$  и для оптимального  $m$ , соответственно. Как видим (см. рис. 6), при  $m=0.5$  и отрицательных  $\alpha$  в системе существует стационарная точка; при увеличении  $\alpha$  появляется небольшая область аттракторов (нерегулярного поведения), которая далее «схлопывается» в цикл

Рис. 6. Бифуркационная диаграмма системы при  $k=2, a=11.0, m=0.5$



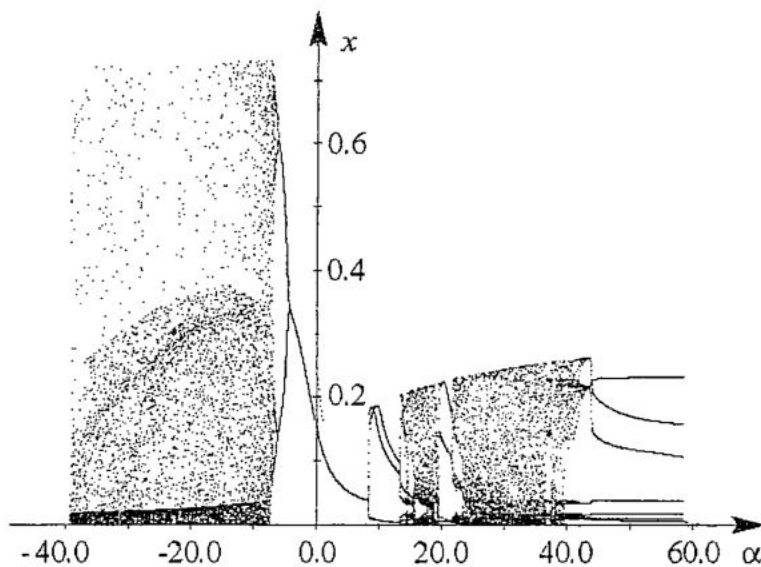


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма системы при  $k=2$ ,  $a=11.0$  и оптимальном значении промыслового параметра  $m$

периода 4. Далее вновь появляется стационарная точка (значительно меньшая по абсолютному значению), при потере устойчивости которой возникает цикл периода 2, затем - 4 и т.д. При больших положительных  $\alpha$  наблюдается хаотическая динамика. В случае оптимального ведения промысла картина несколько иная (см. рис. 7). Сначала при отрицательных  $\alpha$  в системе наблюдается нерегулярная динамика, которая далее «порождает» цикл периода 2. Далее появляется стационарная точка, уменьшающаяся по абсолютному значению при увеличении  $\alpha$ , что свидетельствует о снижении репродуктивного потенциала популяции, вызванном оптимальным управлением; при потере устойчивости стационарной точки возникает цикл периода 3, что говорит о возможности хаотической динамики [6]. На рисунке видно, что при больших значениях параметра  $\alpha$  в системе действительно наблюдается хаос, перемежающийся участками регулярного циклического поведения. В отсутствие промысла снижение репродуктивного потенциала до  $a=1$  имеет стабилизирующий эффект; повышение же интенсивности промысла, влекущее за собой уменьшение  $a$ , напротив, приводит к усложнению динамики. Более того, при отрицательных  $\alpha$  оптимальное управление может привести к «перелому» и значениям параметра  $a < 1$ , то есть к вырождению популяции.

Таким образом, неравновесный промысел в неоднородной популяции проходных рыб может стабилизировать популяционную динамику, но может также и вызвать колебания численности, не связанные с естественными причинами, при выходе параметра  $\alpha$  за рамки определенного нами интервала. Если интенсивность промысла слишком велика, популяция либо попадает в хаотический режим, что делает невозможным предсказание ее дальнейшей судьбы, либо вообще вырождается.

### Заключение

Итак, нами построена и проанализирована модель динамики численности популяции со сложной возрастной структурой, в которой особи после размножения погибают. Для этой модели были найдены стационарные точки, получены критерии их устойчивости в зависимости от значения параметров системы. Для модельного примера - популяции с нерестовым стадом, представленным двумя возрастными группами, - исследованы все возможные случаи потери устойчивости

стационарной точкой. Выделены области значений параметров модели, при которых такая потеря устойчивости сопровождается каскадом бифуркаций удвоения периода, а также тех параметров, при которых потеря устойчивости происходит при комплексных значениях собственных чисел.

Рассмотрены изменения в популяционной динамике при антропологическом вмешательстве для двух различных стратегий промысла. При ведении промысла таким образом, что из каждой возрастной группы вылавливается одна и та же фиксированная доля от общей численности группы, популяция вводится в динамический режим, при котором исключена возможность как регулярных, так и хаотических колебаний численности. Это объясняется тем, что в стационарном случае при описанной стратегии промысла и оптимальной доле изъятия неподвижная точка остается устойчивой независимо от значения параметров системы. Кроме того, вычислена оптимальная доля изъятия в стационарном режиме. Оказалось, что для неоднородной популяции она не зависит явно от распределения возрастов в нерестовом стаде, а определяется общей численностью популяции и значением ее репродуктивного потенциала. Повышение потенциала  $a$  в этом случае приведет к увеличению прибыли при сохранении устойчивой равновесной численности.

Неравновесный промысел сам может дестабилизировать численность популяции, так как при выходе промыслового параметра  $\alpha$  за рамки определенного интервала стационарная точка теряет устойчивость. Для этого случая также были определены оптимальные параметры ведения промысла. Исследование динамических режимов при такой стратегии промыслового изъятия показало, что оптимальное управление полностью изменяет картину бифуркаций в зависимости от репродуктивного потенциала популяции: уменьшение  $a$  приводит не к упрощению и стабилизации, а напротив, - к появлению более сложных регулярных и хаотических колебаний. Кроме того, при слишком большой интенсивности промысла популяция может вообще выродиться.

Проведенное исследование носит академический характер и, вообще говоря, не предполагает непосредственное применение для описания природных популяций. Вместе с тем некоторые аргументы могут свидетельствовать о возможности использования модели с этой целью. Так, все управляющие параметры в модели имеют биологический смысл; кроме того, возрастная структура описанной популяции полностью соответствует структуре некоторых реальных рыбных популяций, например, Дальневосточных лососевых рыб. Функция, выбранная для описания промыслового изъятия, также соответствует реальным методикам ведения промысла для многих видов рыб. Полученные результаты представляются важными для дальнейшего изучения воздействия оптимального управления на динамику природных неоднородных популяций, а также для разработки оптимальных промысловых стратегий.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00633).*

### **Библиографический список**

1. Бивертон Р., Холт С. Динамика численности промысловых рыб. М.: Пищ. пром., 1969.
2. Абакумов А.И. Управление и оптимизация в моделях эксплуатируемых популяций. Владивосток: Дальнаука, 1993.
3. Фрисман Е.Я., Сычева Э.В., Израильский Ю.Г. Динамическая неустойчивость промыслового вида, связанная с воздействием промысла // Докл. РАН. 2001. Т. 380, № 3. С. 425.

4. Ricker W.E. Stock and recruitment// J. Fish. Res. Board Canada. 1960. Vol. 20. P. 559.

5. Рикер У.Е. Методы оценки и интерпретации биологических показателей популяции рыб. М.: Пищ. пром., 1979.

6. Шапиро А.П., Луннов С.П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. М. : Наука, 1983.

7. Ласт Е.В., Луннов С.П., Фрисман Е.Я. Динамическая неустойчивость в математической модели динамики численности популяций лососевых видов рыб // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2, №1. С. 114.

8. Frisman E.Ya., Last E.V. Oscillations and Chaos in the Model of the Pacific Salmon's Number Dynamics // Proceedings of the 2nd International Conference «Control of Oscillations and Chaos». Institute of Electrical and Electronics Engineers, St. Petersburg, 2000. Vol. 3 , №3. P. 573.

Институт автоматизации и процессов  
управления Дальневосточного  
отделения РАН

Поступила в редакцию 20.07.02  
после переработки 18.02.01

## CRAFT INFLUENCE ON POPULATION DYNAMICS OF ANADROM FISHES

*E.V. Last, E.Ya. Frisman*

The following mathematical model (recurrent equation with time lag) for describing of the non-uniform anadrom fish population number dynamics is suggested. Conditions causing regular and chaotic fluctuations in the system were found. The influence of two different craft methods on the population dynamics is investigated. It is supposed that volume of a craft depends on trade efforts and current value of number. It is shown that if the value of trade efforts depends on number nonlinearly then intensification of such craft inevitably brings the population either into oscillation (or chaotic) regim or to degeneration.



*Ласт Елена Валерьевна* - родилась в пос. Кировском Приморского края (1976), окончила факультет прикладной математики Дальневосточного государственного технического университета (1999). В настоящее время учится в аспирантуре института автоматизации и процессов управления ДВО РАН по специальности «Биофизика», работает младшим научным сотрудником в лаборатории математического моделирования экологических систем ИАПУ ДВО РАН. Область научных интересов - математическое моделирование популяционных процессов, теория колебаний и хаоса в экологических системах. Результаты по этим направлениям представлялись на 5-ти международных и 8 всероссийских научных конференциях. Соросовский аспирант.



*Фрисман Ефим Яковлевич* - родился в 1948 году в Сталинабаде (ныне Душанбе), окончил Новосибирский государственный университет (1971). После окончания НГУ работает в Институте автоматизации и процессов управления ДВО РАН. С 1988 года зав. лабораторией математического моделирования экологических систем ИАПУ ДВО РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук (1982, Институт цитологии и генетики СО АН, Новосибирск) и доктора биологических наук (1989, Институт биофизики ДВО АН, Красноярск) в области математической теории эволюции. Автор 4-х монографий (Изд-во «Наука» и Изд-во ДВО АН СССР). Опубликовал более 120 научных работ по общим вопросам математического моделирования и по конкретным моделям экологических и популяционных систем. Соросовский профессор.



## РЕЛАКСАЦИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ «ХИЩНИК - ЖЕРТВА» В СРЕДЕ С МАРКОВСКИМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРА

*О.В. Музычук*

Рассмотрена известная схема Лотки - Вольтерры для саморегулирующихся сообществ типа «хищник - жертва» при наличии гауссовых марковских флуктуаций трофического коэффициента. Получено численное решение замкнутой определенной системой уравнений релаксации средних численностей сообществ и их дисперсий, на основании которого построена эволюция модельных вероятностных распределений. Хотя использован приближенный метод анализа, для рассматриваемой системы он дает точные результаты для установившихся вероятностных характеристик в предельных случаях как дельта-коррелированных, так и квазистатических флуктуаций параметра. В последней ситуации исследована релаксация вероятностных характеристик путем непосредственного усреднения исходных стохастических уравнений.

Выполненный анализ позволил установить существенные отличия влияния широкополосных и низкочастотных флуктуаций параметра на статистическую динамику системы.

Взаимодействие саморегулирующихся сообществ относится к классическим задачам нелинейной динамики. Хорошо известна схема Лотки - Вольтерры, описывающая взаимодействие сообществ типа «хищник - жертва» (см., напр., [1]). При наличии флуктуаций параметров среды система становится стохастической; ряд вопросов вероятностного описания подобных систем рассматривался в монографиях [2, 3]. В работе [4] для системы с дельта-коррелированными флуктуациями трофического коэффициента найдены стационарные вероятностные распределения численностей сообществ. Поскольку аналитическое решение соответствующего нестационарного уравнения Фоккера - Планка найти не удастся, статистическое описание релаксации вероятностных характеристик системы можно осуществлять, только комбинируя аналитические и численные методы анализа. В статье [5] таким путем исследована релаксация моментов численностей для случая белых флуктуаций параметра.

Ниже рассмотрена схема Лотки - Вольтерры системы «хищник - жертва» с гауссовыми экспоненциально-коррелированными (то есть марковскими) флуктуациями трофического коэффициента, имеющими произвольный масштаб корреляции. Для замыкания уравнений релаксации моментов используется гауссово приближение по статистическим связям совокупности: «динамические переменные

- флуктуации параметра». При этом стационарные значения средних численностей сообщества и их дисперсий находятся аналитически, а их релаксация - численным путем. На основании уравнений релаксации средних численностей и дисперсий строится эволюция модельных вероятностных распределений. Интересно отметить, что используемый приближенный метод анализа рассматриваемой системы приводит к точным результатам для установившихся значений дисперсий (и, соответственно, стационарных вероятностных распределений) в предельных случаях как дельта-коррелированных, так и квазистатических флуктуаций параметра. В последней ситуации исследована релаксация среднеквадратичных характеристик численностей путем непосредственного усреднения исходных стохастических уравнений. На основании выполненного анализа установлены существенные различия влияния широкополосных и низкочастотных флуктуаций на статистическую динамику системы.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} Tdx/dt &= (1+\xi(t))x - \beta xy - \gamma x^2, \\ Tdy/dt &= k\beta xy - \mu y, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x(t)$  и  $y(t)$  - численности «жертв» и «хищников», соответственно. Используя принятую терминологию, будем называть  $\gamma$  коэффициентом внутривидовой конкуренции жертв, а  $\mu$  коэффициентом смертности хищников. Параметр  $\beta$  характеризует степень взаимодействия влияния популяций. Постоянная времени  $T = 1/a$ , где  $a$  - среднее значение трофического коэффициента, входящего множителем перед скобкой в первое уравнение; все коэффициенты в правых частях (1) безразмерны. Флуктуации  $\xi(t)$  считаем гауссовым марковским процессом, определив его стохастическим уравнением

$$d\xi/dt + \Pi\xi = \eta(t), \quad (2)$$

где  $\eta(t)$  - чисто вспомогательный дельта-коррелированный шум, то есть

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle = D_\eta \delta(\tau). \quad (3)$$

Усредняя уравнения (1) после деления на  $x$  и  $y$ , соответственно, находим, что установившиеся средние значения численностей независимо от наличия и вида флуктуаций  $\xi(t)$  совпадают с соответствующими «невозмущенными» величинами

$$\langle x \rangle_{st} = \mu/k\beta, \quad \langle y \rangle_{st} = (1-\gamma, \langle x \rangle_{st})/\beta \quad \text{при } q < 1, \quad (4)$$

$$\langle x \rangle_{st} = 1/\gamma, \quad \langle y \rangle_{st} = 0 \quad \text{при } q \geq 1, \quad (4a)$$

где параметр  $q = \gamma\mu/(k\beta)$ . В последнем случае, означающем гибель «хищников», численность «жертв» удовлетворяет известному уравнению Ферхюльста. Заметим, что средняя численность «жертв» убывает с ростом  $\beta$ , а средняя численность «хищников» имеет максимум при  $\beta = \beta_{opt} = 2\gamma\mu/k$  (или  $q = 1/2$ ). Соответствующие стационарные значения (назовем их оптимальными) таковы:

$$\langle x \rangle_{opt} = 1/(2\gamma), \quad \langle y \rangle_{opt} = 1/(2\beta). \quad (5)$$

2. Прежде всего установим средние значения и дисперсии численностей сообществ. На основании (1) - (4) можно получить уравнения релаксации совместных моментов (или кумулянтов) марковской совокупности  $\{x, y, \xi\}$ . Из-за нелинейности исходных уравнений и отличного от нуля времени корреляции шума они не будут замкнуты. Рассмотрим гауссово приближение по статистическим

связям этой совокупности, опуская совместные кумулянты, начиная с третьего порядка. Это, конечно, не означает, что мы «навязываем» гауссову плотность вероятности самим переменным  $x$  и  $y$ . Этот подход адекватен широко используемому в теории стохастических линейных систем приближению Бурре. Полученная таким путем замкнутая система уравнений релаксации имеет вид (здесь и ниже используем безразмерное время  $\theta = t/T$ )

$$\begin{aligned}
 \langle x \rangle' &= (1 - \gamma \langle x \rangle - \beta \langle y \rangle) \langle x \rangle - \gamma D_x - \beta \langle x, y \rangle + \langle x, \xi \rangle, \\
 \langle y \rangle' &= (k_1 \langle x \rangle - \mu) \langle y \rangle + k_1 \langle x, y \rangle, \\
 1/2 D_x' &= (1 - 2\gamma \langle x \rangle - \beta \langle y \rangle) D_x + \langle x \rangle (\langle x, \xi \rangle - \beta \langle x, y \rangle), \\
 1/2 D_y' &= (k_1 \langle x \rangle - \mu) D_y + k_1 \langle y \rangle \langle x, y \rangle, \\
 \langle x, y \rangle' &= (1 - 2\gamma \langle x \rangle - \beta \langle y \rangle + k_1 \langle x \rangle - \mu) \langle x, y \rangle + \beta (k_1 \langle y \rangle D_x - \langle x \rangle D_y) + \langle x \rangle \langle y, \xi \rangle, \\
 \langle x, \xi \rangle' &= (1 - \nu - 2\gamma \langle x \rangle - \beta \langle y \rangle) \langle x, \xi \rangle + \langle x \rangle (p - \beta \langle y, \xi \rangle), \\
 \langle y, \xi \rangle' &= (k_1 \langle x \rangle - \mu - \nu) \langle y, \xi \rangle + k_1 \langle y \rangle \langle x, \xi \rangle.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь  $k_1 = \beta k$ ;  $p = \langle \xi^2 \rangle$  и  $\nu = \Pi T$  - соответственно мощность и относительная ширина спектра шума  $\xi(t)$ ,

$$D_u = \langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2, \quad \langle u, v \rangle = \langle uv \rangle - \langle u \rangle \langle v \rangle,$$

$u, v = x, y, \xi$  - дисперсии численностей и вторые совместные кумулянты, соответственно.

Найдем стационарные значения искомым переменных. Используя (4), из второго (или четвертого) уравнения системы (6) находим, что совместная корреляция численностей в стационарном режиме отсутствует

$$\langle x, y \rangle_{st} = 0, \tag{7}$$

на основании (4) и (7) нетрудно найти и остальные стационарные значения

$$\begin{aligned}
 (D_x)_{st} &= \langle x, \xi \rangle_{st} / \gamma = D \langle x \rangle_{st} / [\gamma (1 + \gamma \tau \langle x \rangle_{st} + \mu \beta \tau^2 \langle y \rangle_{st})], \\
 (D_y)_{st} &= k \langle y \rangle_{st} (D_x)_{st} / \langle x \rangle_{st} + \langle y, \xi \rangle_{st} / \beta, \\
 \langle y, \xi \rangle_{st} &= D \mu \langle y \rangle_{st} / [\mu \beta \tau \langle y \rangle_{st} + \gamma \langle x \rangle_{st} + 1/\tau].
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь и ниже используем параметры

$$\tau = \nu^{-1} \quad \text{и} \quad D = p\tau, \tag{9}$$

имеющие смысл относительного времени корреляции шума и его спектральной плотности «в нуле» ( $D = 2\pi S_\xi(0)$ ). Предельным переходом

$$\tau \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty, \quad D = \text{const} \tag{10}$$

получим стационарные значения искомым величин, соответствующие белому шуму  $\xi(t)$

$$(D_x)_{st} = D \langle x \rangle_{st} / \gamma, \quad (D_y)_{st} = k \langle y \rangle_{st} (D_x)_{st} / \langle x \rangle_{st}, \quad \langle y, \xi \rangle_{st} = 0. \tag{11}$$

Как известно [4, 5], выражения (7), (11) являются точными при дельта-коррелированном процессе  $\xi(t)$ .

В противоположном случае медленных (квазистатических) флуктуаций

$$\tau \rightarrow \infty, \quad D \rightarrow \infty, \quad p = \text{const} \tag{12}$$

из формул (8) находим

$$(D_x)_{st} = 0, (D_y)_{st} = p/\beta^2. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что эти выражения также являются точными. В самом деле, считая в исходной системе (1)  $\xi$  случайной величиной, а не процессом, для стационарных значений динамических переменных имеем

$$x_{st} = \mu/k\beta, \quad y_{st} = (1 - \gamma x_{st} + \xi)/\beta. \quad (14)$$

Следовательно, при квазистатическом воздействии численность «жертв», в сущности, не является случайной и ее дисперсия равна нулю. Усредняя в (14)  $y_{st}$ , очевидным образом приходим к выражению (13).

**3.** Обратимся теперь к построению релаксации вероятностных характеристик системы. Заметим предварительно, что при дельта-коррелированном шуме со спектральной плотностью  $D/2\pi$  можно найти стационарные плотности вероятности, имеющие вид гамма-распределений [4, 5]

$$\begin{aligned} w_x(x) &= C_x x^{\langle x \rangle / D - 1} \exp[(-\gamma x) / D], & x > 0 \\ w_y(y) &= C_y y^{\langle y \rangle / (kD) - 1} \exp[(-\gamma y) / (kD)], & y > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

(здесь  $\langle x \rangle, \langle y \rangle$  - стационарные значения (4)). С учетом (11), последние выражения можно записать совершенно симметричным образом

$$\begin{aligned} w_x(x) &= C_x x^{1/d_x - 1} \exp[-x / (\langle x \rangle d_x)], \\ w_y(y) &= C_y y^{1/d_y - 1} \exp[-y / (\langle y \rangle d_y)], \end{aligned} \quad (16)$$

где  $d_u = D_u / \langle u \rangle^2$  - нормированные дисперсии численностей. Константы  $C_x$  и  $C_y$  зависят от этих же параметров

$$C_u^{-1} = (\langle u \rangle d_u)^{1/d_u - 1} \Gamma(1/d_u), \quad u = x, y, \quad (17)$$

$\Gamma$  - гамма-функция.

Для моделирования эволюции вероятностных распределений  $W_x(x; t)$  и  $W_y(y; t)$  будем использовать выражения (16) с «размороженными» средними значениями и дисперсиями, то есть положим<sup>1</sup>

$$W_u(u; t) = w_u[u; \langle u(t) \rangle, d_u(t)], \quad u = x, y, \quad (18)$$

где средние и дисперсии находим численным решением уравнений релаксации (6). Поскольку в предельных случаях белого и квазистатического шума мы имеем при этом истинную стационарную асимптотику, есть основания считать данный прием предпочтительным перед традиционным использованием гауссовой модельной плотности вероятности или распределений, основанных на наборе нескольких первых кумулянтов [10].

Как известно, гамма-распределения (16), (18) являются асимптотически гауссовыми при малых дисперсиях. Отметим также, что при  $d_u \rightarrow 0$  эти распределения стягиваются в дельта-функции, что позволяет использовать детерминированные начальные условия

<sup>1</sup> Этот прием предложен в [8] для моделирования нестационарных вероятностных распределений систем, связанных с уравнением Ферхюльста; там же оценена точность такой процедуры. Релаксация вероятностных характеристик уравнения Ферхюльста с марковскими флуктуациями параметра исследована этим путем в работе [9]

$$\langle u(0) \rangle = u_0, \quad D_u(0) = 0 \quad \text{или} \quad W_u(u; 0) = \delta(u - u_0), \quad u = x, y. \quad (19)$$

На основании релаксации средних значений и дисперсий можно следить за установлением максимумов вероятностных распределений (16)

$$x^* = \langle x \rangle (1 - d_x), \quad y^* = \langle y \rangle (1 - d_y), \quad d_x, d_y < 1. \quad (20)$$

(При  $d_x$  или  $d_y$  больших единицы соответствующая плотность вероятностей имеет интегрируемую особенность в нуле).

4. В другом предельном случае квазистатического случайного воздействия  $\xi$  стационарные плотности вероятности величин  $x$  и  $y$  очевидным образом находятся на основании (14):

$$w_x(x) = \delta(x - \langle x \rangle), \quad w_y(y) = \gamma w_\xi[\gamma(y - \langle x \rangle) - 1], \quad (21)$$

где  $w_\xi(u)$  - распределение случайной величины  $\xi$ . Для гауссовой  $\xi$  квазистатическое распределение  $w(y)$  также будет гауссовым с дисперсией (13), поэтому гауссова плотность вероятности может служить моделью соответствующих нестационарных распределений при низкочастотном шуме с  $\tau \gg 1$ .

«Квазистатическую» релаксацию вероятностных характеристик можно найти и непосредственно из исходных динамических уравнений. Положив в системе (1)  $\xi$  случайной константой и численно интегрируя, находим ее решение

$$x = X(\xi, t), \quad y = Y(\xi, t). \quad (22)$$

Затем выполняем усреднение (также численно) по переменной  $\xi$ . Таким образом, получим

$$\langle f(x, y, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f[X(\xi, t), Y(\xi, t)] w_\xi(\xi) d\xi, \quad (23)$$

где  $\langle f(x, y, t) \rangle$  - искомая статистическая характеристика.

5. Обсудим теперь некоторые результаты, полученные изложенным методом. Заметим предварительно, что статистическая динамика системы зависит от довольно большого набора параметров, поэтому, в основном, ограничимся исследованием зависимости вероятностных характеристик от интенсивности и времени корреляции процесса  $\xi(t)$ . Динамические же параметры ( $\beta, \gamma, \mu$ ) положим соответствующими оптимальному режиму (5). На приведенных ниже рисунках показаны стационарные значения и релаксация наиболее вероятных значений численностей и соответствующих среднеквадратичных отклонений  $\sigma_u = (D_u)^{1/2}$ ,  $u = x, y$ , а также эволюция модельных вероятностных распределений. Фиксированные значения динамических параметров, соответствующие каждому рисунку, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Фиксированные параметры рисунков

рис. №	$\beta$	$\gamma$	$\mu$	$\langle x \rangle_{st}$	$\langle y \rangle_{st}$
1, 2	0.05	0.025	0.25	20	10
3, 4	0.04	0.02	0.2	25	12
5	0.02	0.015	0.2	33	25



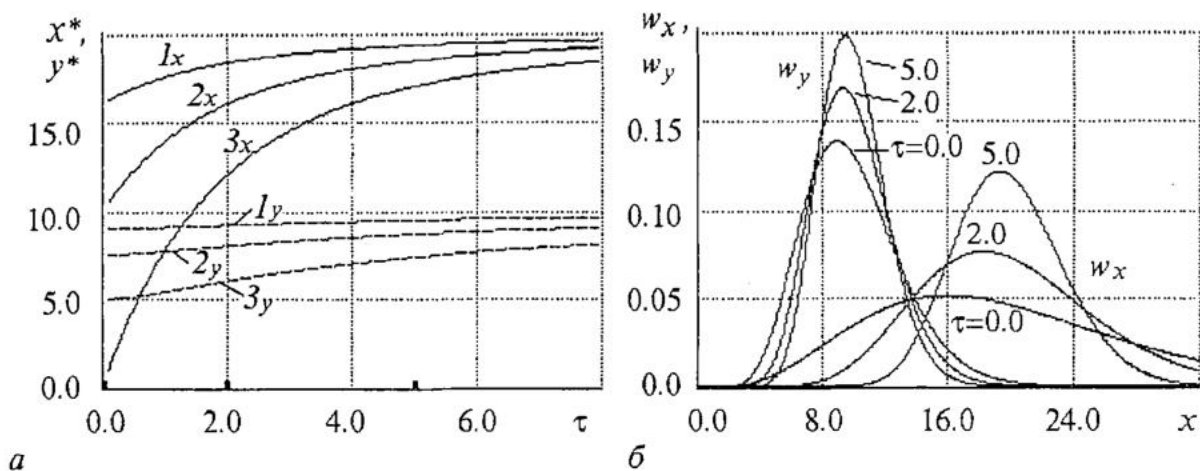


Рис. 1. Стационарные вероятностные характеристики при  $D = \text{const}$

На рис. 1 приведены стационарные вероятностные характеристики системы. Здесь и ниже индексы номеров кривых  $x, y$  относятся к характеристикам жертв и хищников, соответственно. На рис. 1, *a* показана зависимость наиболее вероятных значений (20) от относительного времени корреляции флуктуаций  $\tau$ , а на рис. 1, *б* - стационарные модельные распределения (16) при фиксированных значениях  $\tau$ , показанных метками на оси  $\tau$  рис. 1, *a* (всюду при изменении  $\tau$  здесь считалось, что спектральная плотность флуктуаций «в нуле»  $D = \text{const}$ ). Кривым 1-3 соответствуют значения  $D = 0.1; 0.25; 0.5$ . На рис. 1, *б* нижние кривые, соответствующие значению  $\tau = 0$ , - точные вероятностные распределения (15); соответствующие модельные плотности вероятности при  $\tau < 0.5$  практически совпадают с ними. Как следует из приведенных результатов, при  $D = \text{const}$  большее дестабилизирующее действие оказывает широкополосный (в данном случае, более интенсивный) шум. Заметим, что характеристики численности «жертв» реагируют на изменение  $\tau$  значительно сильнее.

На рис. 2, *a* показана зависимость наиболее вероятных значений и среднеквадратичных отклонений (номера кривых  $\sigma_x, \sigma_y$  отмечены штрихами) от времени корреляции при фиксированной мощности шума  $p = \text{const}$ . В этом случае с ростом  $\tau$  увеличиваются низкочастотные компоненты спектра. Кривые 1 получены для значения  $p = 0.1$ , 2 - для  $p = 0.25$ . Кружками на вертикали  $\tau = 16$  показаны квазистатические значения  $\sigma_y$ , вытекающие из (13). Отметим наличие слабовыраженного максимума в процессе релаксации дисперсии «жертв» (кривые  $1'_x, 2'_x$ ), что связано с отмеченным выше обращением  $D_x$  в ноль при квазистатическом шуме  $\xi$ . Заметим

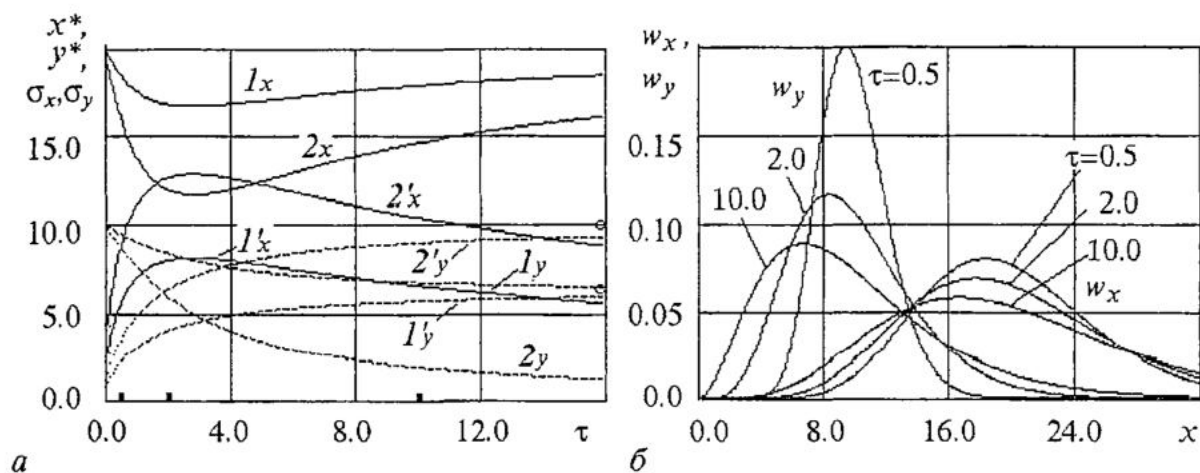


Рис. 2. Стационарные вероятностные характеристики при  $p = \text{const}$

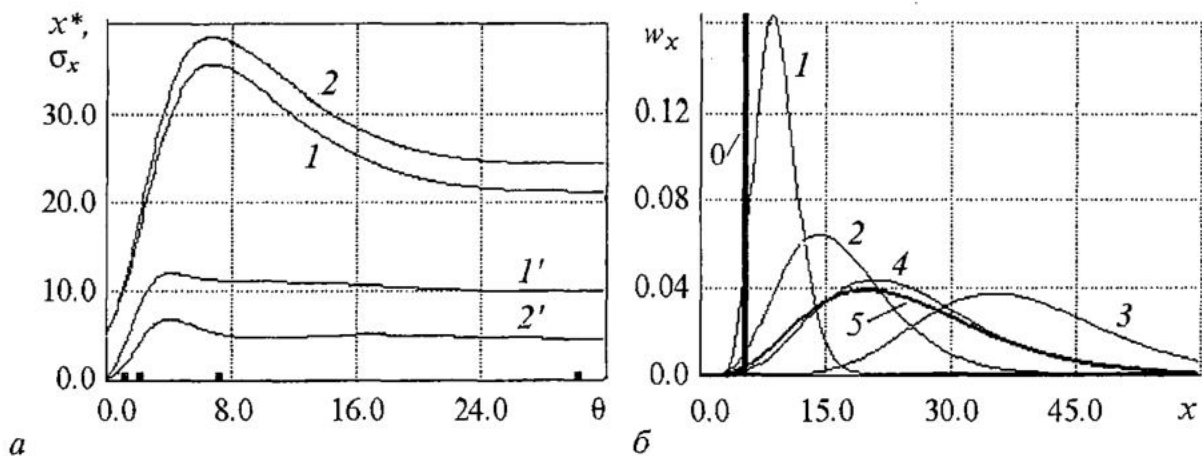


Рис. 3. Релаксация вероятностных характеристик при  $D = \text{const}$

однако, что уменьшение  $\sigma_x$  с ростом  $\tau$  происходит очень медленно. На рис. 2, б приведены модельные вероятностные распределения при значениях  $\tau$ , показанных метками на рис. 2, а. Естественно, зависимость  $w_x$  от времени корреляции шума здесь немонотонна. Как видно из этих рисунков, в случае  $p = \text{const}$  большее дестабилизирующее действие оказывает низкочастотный шум, причем на распределение хищников он влияет более сильно.

Рис. 3 иллюстрирует релаксацию вероятностных характеристик «жертв». На рис. 3, а показана релаксация наиболее вероятных значений и среднеквадратичных отклонений (номера кривых  $\sigma_x$  отмечены штрихами). Кривые 1, 2 получены для значений времени корреляции  $\tau = 0.5$  и  $5.0$ , соответственно. При изменении  $\tau$  здесь (как и на рис. 1) полагалось  $D = \text{const}$ . Процесс релаксации имеет слабовыраженный осцилляторный характер, соответствующий оптимальным значениям параметров (5)<sup>2</sup>. Отметим слабое влияние на вероятностные характеристики популяции «хищников» существенного изменения времени корреляции шума, не связанного с изменением низкочастотной части спектра. На рис. 3, б показана эволюция модельного вероятностного распределения  $w_x(x, \theta)$  при широкополосном шуме  $\xi(t)$  ( $\tau = 0.5$ ). Естественно, она идет не монотонно: здесь «0» - начальное дельта-распределение, а нумерация кривых 1 - 4 соответствует росту времени, показанного метками на рис. 3, а ( $\theta = 1; 2; 7; 30$ ). Кривая 5 - истинная стационарная плотность вероятности (15) для белого шума  $\xi(t)$ . Отметим, что дисперсия устанавливается быстрее среднего значения (ширина распределений 3, 4 почти одинакова).

На рис. 4 показана релаксация вероятностных характеристик «хищников» для значений времени корреляции, соответствующих «розовым» ( $\tau = 1.0$ , кривые 1 на рис. 4, а) и низкочастотным ( $\tau = 8.0$ , кривые 2) флуктуациям параметра. Нумерация кривых здесь аналогична рис. 3. В данном случае (как и на рис. 2) при изменении  $\tau$  фиксировалась мощность шума  $p$ . На рис. 4, б приведена эволюция модельного распределения для низкочастотного шума ( $\tau = 8.0$ ). В качестве модельной здесь использована гауссова плотность вероятности, являющаяся точной при квазистатическом шуме (для предыдущих рисунков использовалось гамма-распределение (16) - (18)). Как видно из рисунка, кривая 4, соответствующая установившимся значениям параметров ( $\theta = 30$ ), весьма мало отличается от квазистатического гауссова распределения с дисперсией (13).

<sup>2</sup> Как показывает анализ (см. также [5]), колебания в процессе установления средних и наиболее вероятных значений существенно зависят от начальных условий и динамических параметров системы. При отклонении последних от оптимальных значений колебания, как правило, растут.

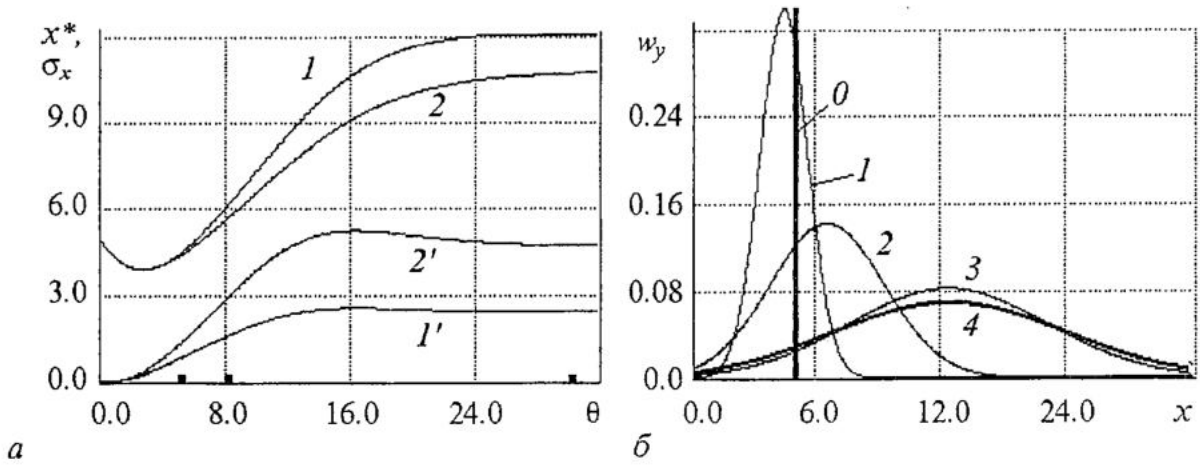


Рис. 4. Релаксация вероятностных характеристик при  $p = \text{const}$

Рис. 5 иллюстрирует релаксацию вероятностных характеристик системы с квазистатическим флуктуациями  $\xi$ , определенную с помощью выражений (22), (23). На рис. 5, а показана релаксация средних значений и дисперсий; обозначения кривых аналогичны рис. 3. Кривая 1 соответствует интенсивности шума  $p = 0.04$ ; кривая 2 -  $p = 0.15$ . Отметим существенно различное поведение дисперсий  $D_x$  и  $D_y$  при больших  $\theta$  и очень медленное спадание к нулю дисперсии «жертв». На рис. 5, б приведена эволюция гауссовых модельных вероятностных распределений для мощности шума  $p = 0.04$ , построенных в указанные метками на рис. 5, а моменты времени (распределение  $w_y(y; \theta)$  в первой отсчетной точке, фактически, имеет вид дельта-функции в силу малости дисперсии). Релаксация распределения «жертв», естественно, идет не монотонно. Отметим, что распределение «хищников» (кривая 4<sub>y</sub>) в последней отсчетной точке  $\theta = 18$  практически совпадает с точным выражением (21), а соответствующее распределение «жертв» (кривая 4<sub>x</sub>) релаксирует к дельта-функции.

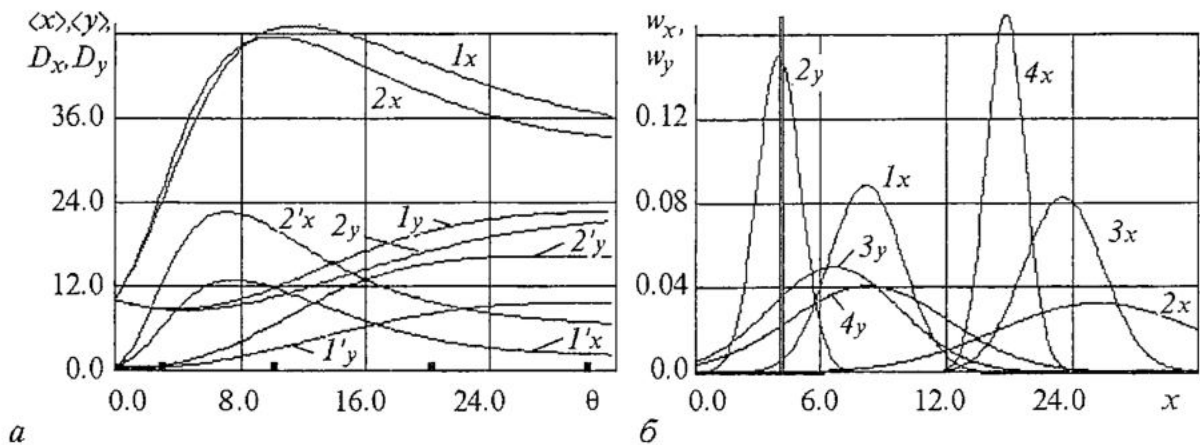


Рис. 5. «Квазистатическая» релаксация вероятностных характеристик

6. Важной характеристикой нестационарных процессов является время релаксации. Для рассматриваемой системы таковым будем считать время, при котором текущее значение нормированной вероятностной характеристики (например, дисперсии  $D_{ii}(t)$ ) отличается от стационарной величины меньше чем на заданное число  $\epsilon$ . Как показывает анализ, времена релаксации средних значений зависят, главным образом, от текущих значений численностей сообщества, которые определяются динамическими параметрами системы и начальными условиями. Естественно, времена релаксации наиболее вероятных значений и дисперсий

численностей также сильно зависят от этих величин, причем при относительно малых флуктуациях параметра процесс установления наиболее вероятных значений  $u^*(t)$  ( $u = x, y$ ) качественно подобен «динамической» релаксации соответствующих средних. Интенсивность и вид спектра флуктуаций параметра также влияют на характер и время установления вероятностных характеристик (см. рис. 2, 3), а степень этого влияния сильно зависит от динамических параметров системы.

Табл. 2 наряду с приведенными выше рисунками иллюстрирует влияние характеристик флуктуаций трофического коэффициента на дисперсию численностей и на их времена релаксации  $\tau_{Dx}$  и  $\tau_{Dy}$ . (Значение  $\varepsilon$  взято равным 0.2). В таблице приведены оптимальные значения параметров, при которых стационарные средние значения численностей определяются выражениями (5) при  $\langle x \rangle_{st} = 2\langle y \rangle_{st}$ . Здесь  $p$  и  $\tau$  - интенсивность и время корреляции флуктуаций. В верхних строчках клеток слева направо даны величины  $\sigma_x, \sigma_y$ , в нижних -  $\tau_{Dx}, \tau_{Dy}$ .

Таблица 2

$\tau \backslash p$	0.05		0.15		0.4	
0.5	5 11.1	1.8 9.8	8.6 7.9	3.0 9.8	14.6 6.3	5.0 9.6
2	7.2 5.3	3.2 9.4	12.5 5.0	5.6 9.8	20.4 4.5	9.1 9.4
6	7.0 6.7	4.4 10.1	12.2 5.5	7.7 9.9	19.5 13.3	12.6 9.4

С увеличением мощности широкополосного шума времена релаксации уменьшаются (более существенно у распределения «жертв»), для «розового» шума это менее заметно. Отметим, что время релаксации дисперсии «хищников» при фиксированной мощности шума практически не зависит от его времени корреляции, а дисперсии «жертв» зависят немонотонно (последнее, по-видимому, связано с наличием максимума в зависимости  $\sigma_x$  от  $\tau$ ). В целом же, можно заключить, что основное дестабилизирующее влияние как на стационарные вероятностные характеристики (смещение максимумов распределений к нулю, рост дисперсий), так и на соответствующие времена релаксации оказывают низкочастотные компоненты спектра флуктуаций параметра.

Табл. 3 дает представление об изменении основных вероятностных характеристик при отклонении динамических параметров от оптимальных значений при фиксированных параметрах шума ( $p = 0.15$ ,  $\tau = 1$ ). Центральная строчка соответствует приведенным выше оптимальным значениям; «вверх» уменьшается коэффициент  $\beta$ , «вниз» - коэффициент  $\gamma$ . Естественно, эти изменения противоположным образом влияют на численности «жертв» и «хищников». Как видно из табл. 3, времена релаксации дисперсий также по-разному реагируют на изменение динамических параметров, но есть общая тенденция: при сильно отличающихся численностях членов сообщества времена релаксации также сильно отличаются, причем более многочисленное распределение устанавливается быстрее (верхняя строчка). При близости максимумов распределений близки и времена релаксации (нижняя строчка).

Заметим в заключение, что исследование статистической динамики

рассматриваемой системы и более общих многомерных уравнений Ферхюльста, подверженных влиянию не дельта-коррелированных случайных сил, является весьма непростой задачей. В настоящей работе сделаны лишь некоторые шаги в этом направлении.

Таблица 3

$\beta, \gamma$	$x^*(\langle x \rangle)$	$y^*(\langle y \rangle)$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{Dx}$	$\tau_{Dy}$
$\beta=0.025$ $\gamma=0.02$	36(40)	7(8)	12.8	3.4	2.2	27.4
$\beta=0.032$ $\gamma=0.02$	27(31)	10(12)	11.7	4.1	4.6	15.5
$\beta=0.04$ $\gamma=0.02$	20(25)	11(13)	10.8	4.2	5.3	9.8
$\beta=0.04$ $\gamma=0.15$	18(25)	14(16)	12.9	5.4	11.5	12.2
$\beta=0.04$ $\gamma=0.1$	14(25)	16(19)	15.4	7.1	18.1	16.2

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 99-02-17544, № 00-15-96620 и Минвуза РФ № E00-3.5-216.

### Библиографический список

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
3. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.
4. Диментберг М.Ф. Точные решения уравнения Фоккера - Планка - Колмогорова для некоторых многомерных динамических систем // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 555.
5. Музычук О.В. Вероятностные характеристики системы «хищник - жертва» со случайно изменяющимися параметрами // Изв. вузов. ПНД. 1997. Т. 5. № 2, 3. С. 80.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964. Т. 1, 2.
7. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
8. Музычук О.В. Аналитико-численное построение нестационарных вероятностных распределений для одного класса нелинейных стохастических систем // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т.43. № 9. С.827.
9. Музычук О.В. Релаксация вероятностных характеристик динамических

систем, описываемых уравнением Ферхюльста с «розовым» шумом // Изв. вузов. ПНД, 2000. Т. 8. № 5. С. 36.

10. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М.: Сов.радио, 1978.

Нижегородский архитектурно-  
строительный университет

Поступила в редакцию 22.01.02

## RELAXATION OF PROBABILITY CHARACTERISTICS OF «BEAST - SACRIFICE» SYSTEM IN THE MEDIUM WITH MARKOFF FLUCTUATIONS OF PARAMETERS

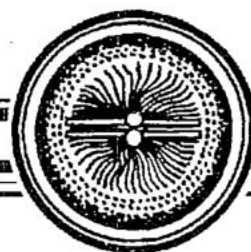
*O.V. Muzychuk*

Well-known Lotky - Volterra scheme for self-regulated «beast - sacrifice» associations with Gaussian Markoff fluctuations of trophical coefficient was considered. Numerical solution of the system of relaxation equations, closed by special way, for population number mean values and dispersions was obtained. On this base the evolution of model probability distributions was constructed. Though we used the approximative method of analysis, for considering stochastic system it leads to exact results for stationary probability characteristics for both  $\delta$ -correlated and quasi-static parameter's fluctuations. For the last situation the relaxation of probability characteristics was investigated by numerical averaging of stochastic equations.

Such analysis gave us the possibility to detect essential difference in results of the influence of wide-band or low-frequency parameter's fluctuations on statistical dynamics of the system.



*Музычук Олег Владимирович* - родился в 1947 году. Окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1970). Работал на кафедре бионики и статистической радиофизики ГГУ. Защитил кандидатскую диссертацию в области исследования линейных стохастических систем (1978). С 2001 года - доктор физико-математических наук. С 1978 года работает на кафедре физики Нижегородского архитектурно-строительного университета. Круг интересов - статистическая радиофизика, нелинейная динамика, вероятностное описание динамических систем, находящихся под воздействием интенсивных случайных сил. Автор более 40 статей в центральных научных журналах. E-mail: physics @ bi-zed.da.ru



Изв. вузов «ПНД», т.10, № 3, 2002

## ФИЗИКА ПРОЦЕССОВ ЭВОЛЮЦИИ

*В. Эбелинг, А. Энгель, Р. Файстель*

Перевод с немецкого *Ю.А. Данилов*

- © Оригинал: В. Эбелинг, А. Энгель, Р. Файстель, 1990
- © Перевод с немецкого: *Ю.А. Данилов*, 2001
- © Произведение на русском языке: Эдиториал УРСС, 2001
- © Оформление, оригинал-макет: Эдиториал УРСС, 2001

М.: Эдиториал УРСС, 2001. 328 с.  
ISBN 5-8360-0233-9

### Предисловие

Вопрос о разработке физикой процессов эволюции возник с тех пор, как появились термодинамика и статистическая физика. Основополагающие идеи в этом направлении были высказаны еще Майером, Гельмгольцем, Клаузиусом, Больцманом, Пуанкаре и другими выдающимися физиками прошлого века. В первые три четверти XIX столетия идеи развития играли в физике лишь относительно узкую роль, но в последней четверти они оказались в самом центре всеобщего интереса. Причины наблюдаемой в наше время интенсификации работ по физике и химии процессов эволюции будут подробно рассмотрены в этой книге. Назовем самые главные предпосылки этой интенсификации:

- разработка Гамовым и другими авторами гипотезы Большого Взрыва и постепенное экспериментальное обоснование вытекающих из этой гипотезы следствий;
- разработка Пригожиным, Хакеном и др. теории самоорганизации (синергетики);
- разработка Эйгеном, Шустер и др. физико-химической теории биогенеза.

Двое из авторов этой книги в своей более ранней работе выдвинули программу «наведения мостов» между уже хорошо разработанной физикой самоорганизации и физикой процессов эволюции (*Ebeling, Feistel, 1982*). В этой книге мы продолжаем намеченную линию, для чего нам в известной мере придется напомнить уже достигнутое состояние интересующей нас области знания. Сложность проблематики не позволяет нам изложить все относящиеся к затронутому кругу проблем основы и все наиболее важные приложения. Особое значение мы придавали изложению стохастической теории, так как единство

необходимого и случайного составляет самую сущность эволюции и тем самым составляет центральный пункт теории. Затем мы обсуждаем вопросы стратегий эволюции и уже наметившиеся технические приложения. Ядро нашего изложения составляют вопросы эволюции информации. Относительно ранних фаз космической эволюции и их теоретико-полевого моделирования наша книга содержит лишь элементарные утверждения и ссылки на литературу для дальнейшего чтения.

Особое значение мы придавали подробному указателю литературы с полными названиями работ, в том числе и журнальных публикаций.

Для замысла этой книги решающее значение имели обсуждения на регулярно работающих семинарах «Необратимые процессы и самоорганизация» и «Система Лотки - Вольтерры» в Берлине, а также на московском семинаре «Синер-гетика». Особую благодарность мы хотели бы выразить своим коллегам М. Конраду, Г. Хакену, Б. Хессу, Ю. Л. Климонтовичу, Л. Кунерту, Г. Линде, А. С. Михайлову, М. Пешелю, И. Пригожину, Ю. М. Романовскому, Г.-П. Швэфелю, Е. Е. Селькову, П. Шустер, М. В. Волькенштейну, Г. Уинстону и Я. Б. Зельдовичу. Мы выражаем свою искреннюю признательность нашим друзьям, сотрудникам и студентам сектора 04 физического факультета университета имени Гумбольдта в Берлине, а также ответственным сотрудникам издательства Akademie - Verlag в Берлине за эффективное сотрудничество. В заключение мы хотели бы выразить особую благодарность Ю.А.Данилову за перевод нашей книги на русский язык и тщательную работу над текстом.

## Глава 1

### Введение

Скрытая и замкнутая сущность Вселенной не обладает силой, которая могла бы позволить ей оказывать сопротивление мужеству познания.

*Георг Фридрих Вильгельм Гегель*

#### 1.1. Возникновение сложного

Взглянув на окружающий нас мир, мы обнаружим неисчерпаемое многообразие вещей и явлений: солнце, ветер, дождь и многочисленные сложные погодные процессы, изобилующий формами и красками мир растений, царство животных и окружающий нас рукотворный мир человека. Ночью мы наблюдаем звездное небо и получаем возможность заглянуть в процессы, разыгрывающиеся на больших пространственных и временных расстояниях от нас. Все это - в движении, все развивается.

С самого начала существования человечества люди созерцали парциальные процессы эволюции нашего мира, и всегда находились такие личности, которые поднимались над повседневными заботами и ставили далеко идущие вопросы. Что кроется за непрерывной сменой и развитием, рождением и гибелью? Почему так много одних явлений происходит без видимых причин, тогда как другие явления столь регулярны и взаимосвязаны? От накопленной жизненной мудрости стариков, передающих свой опыт молодым, через первые «научные» записки к основам научных знаний наших дней путь был длинным и трудным. Из многообразия пережитого необходимо было извлекать существенное и абстрагироваться от несущественного, намечать упрощенную модель. Когда за внешне совершенно различными явлениями удавалось обнаружить одну и ту же сущность, например, единое физическое строение атомов всех химически столь



различных элементов, это всегда становилось значительным шагом в познании мира. Наиболее радикально такая редукция к существенному происходила в физике. Ныне наиболее существенное содержание основных законов нашего мира спрессовано в немногочисленных теориях и уравнениях, и ведется напряженная работа по достижению объединения и этих теорий. Ведется поиск элементарных «кирпичиков» мироздания, и, судя по всему, построение единой теории станет возможным в обозримом будущем. Нет никаких сомнений в том, что такая единая теория мельчайших «кирпичиков» мироздания будет иметь огромное научное, теоретико-познавательное и практическое значение.

Но достаточно ли мы знаем для того, чтобы построить такую теорию? Все ли известно нам о веществе, если мы понимаем строение атомов? Достаточно ли мы сведущи в архитектуре, если основательно разбираемся в черепице? Целое часто представляет нечто большее, чем сумму отдельных частей. Именно это «большее» и представляет собой тот стержень, вокруг которого разворачивается в основном действие в нашей книге. Как получается, что при наложении физических процессов совершенно неожиданно возникают новые свойства? Как может быть, что из многих «мертвых» молекул возникает нечто живое? Существуют ли какие-нибудь законы помимо известных элементарных законов физики? Как может возникнуть сам собой сложный современный мир? Таковы вопросы, изучением которых занимается молодой раздел физики - физика процессов эволюции.

С давних пор физика представляет собой научную дисциплину, которая изучает самые общие, самые универсальные и самые фундаментальные законы природы и облачает их в как можно более строгую математическую форму. То же можно сказать и о физике процессов эволюции: занимаясь ею, мы хотим установить, какие правила и законы управляют развитием сложного, и тем самым определить структуру и функцию сложных процессов и образований. Мы ищем такие законы, которые, как и «обычные» физические законы, не зависят от того, являются ли исследуемые объекты физическими, химическими, биологическими или даже социальными структурами. Иначе говоря, мы пытаемся навести мосты между физикой неживого и физикой живого. Правда, и поныне имеется немало открытых вопросов, а иногда нам неизвестна даже правильная постановка вопросов. Однако имеются и установившиеся утверждения, концепции и идеи, и о них-то и пойдет речь в нашей книге.

## **1.2. Какую цель ставит перед собой физика процессов эволюции?**

Опыт повседневной жизни и целенаправленное наблюдение процессов в природе и общественных явлений учат нас, что многие сложные системы, состоящие из большого числа взаимодействующих подсистем, при определенных условиях обладают способностью к самоорганизации и эволюции. Самым замечательным тому примером могут служить живые существа и их развитие на нашей планете. Сколь ни очевиден этот факт, научная интерпретация его весьма сложна и требует слияния результатов исследований многих областей науки. Основная задача настоящей книги состоит в систематическом изложении возможного вклада физики в разработку этой чрезвычайно сложной проблематики.

Под самоорганизацией мы понимаем в дальнейшем необратимый процесс, приводящий в результате кооперативного действия подсистем к образованию более сложных структур всей системы. Самоорганизация - элементарный процесс эволюции, состоящей из неограниченной последовательности процессов самоорганизации. Термин «самоорганизация» используется в этой книге в смысле

Пригожина для обозначения диссипативной самоорганизации, т.е. образования диссипативных структур. Наряду с диссипативной самоорганизацией существуют и другие формы самоорганизации, такие, как консервативная самоорганизация (образование структур кристаллов, биополимеров и т. д.) и дисперсионная самоорганизация (образование солитонных структур). Такие формы самоорганизации упоминаются в нашей книге лишь бегло.

Значение самоорганизации и эволюции для естественных и общественных процессов очевидно, и изучение ее закономерностей стало предметом бесчисленных исследований со времен Канта, Гегеля, Маркса и Дарвина. С другой стороны, в последнее время физика самоорганизации в открытых системах сформировалась в качестве новой области физики. Эта наука занимается изучением закономерностей нелинейных кооперативных процессов вдали от термодинамического равновесия; ее основные идеи восходят к Шрёдингеру, Тьюрингу, Бергаланффи, Пригожину, Эйгену и Хакену. В настоящее время физика самоорганизации переживает период определенного завершения, появились первые обзоры и монографии, последовательно излагающие весь круг затрагиваемых проблем (*Glansdorff, Prigogine, 1971; Жаботинский, 1974; Романовский, Степанова и Чернавский, 1984; Эбелинг, 1979; Хакен, 1980; Haken, 1983; Николис и Пригожин, 1979, 1990; Пригожин, 1979; Ebeling, Klimonovich, 1984; Hofbauer, Sigmund, 1984; Васильев и др., 1987; Feistel, Ebeling, 1989*).

Решающее значение для создания физики самоорганизации имели развитие и разработка методологии следующих дисциплин:

- а) термодинамики необратимых процессов в открытых системах;
- б) нелинейной механики, электрофизики и физики лазеров;
- в) химической кинетики сильно неравновесных процессов;
- г) нелинейной динамики популяций и экологии;
- д) нелинейной теории регулирования, кибернетики и системного анализа.

Из приведенного выше перечня отчетливо виден междисциплинарный характер физики самоорганизации. Исходя из этого, физик Хакен предложил для новой области науки название синергетика (*Хакен, 1980; Haken, 1973, 1975, 1981*). Синергетика, по Хакену, должна охватывать все проблемы, связанные с образованием упорядоченных структур в сложных системах в результате кооперативного поведения подсистем. Если относительно названия новой области не удалось прийти к единому мнению, то интерес ученых к постановке проблем самоорганизации ныне, как показывает резкое увеличение оригинальных работ и монографий, не вызывает никаких сомнений. Таким образом, контуры физики самоорганизации очерчены достаточно четко, чего нельзя сказать о физике процессов эволюции. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы навести мост между физикой самоорганизации и физикой процессов эволюции.

Разумеется, мы должны прежде всего задать себе вопрос, разумно ли вообще наше намерение. Не суждено ли ему разбиться вдребезги о такой общеизвестный факт, как то, что даже отдельная клетка неизмеримо сложнее любого традиционного объекта физического исследования? Мы хотим поделиться с читателем своими взглядами по этому вопросу, сформулировав их в нескольких фразах. Законы физики остаются в силе и действуют беспрепятственно и в области процессов эволюции. Никаких исключений никто и никогда не наблюдал, и их никто не ожидает. Физика входит в самые общие основы процессов эволюции, поскольку она указывает возможности и запреты. С другой стороны, мы считаем, что физика сама по себе не в состоянии установить основные законы и сущность эволюции, поскольку в этом круге вопросов необходимо учитывать весьма сложные аспекты. Поэтому стремиться надлежит не к тому, чтобы, например,

«свести Дарвина к Пригожину», а к тому, чтобы вооружить тех, кто изучает эволюцию, добытыми физиками достоверными знаниями и фактами, которые могут оказаться полезными при решении чрезвычайно сложных проблем эволюции. Позицию физиков относительно решения этих проблем мы продемонстрируем на двух подходящих к случаю примерах.

Николис и Пригожин пишут (*Николис, Пригожин, 1979, с. 20*): «В каком-то смысле мы находимся в положении пришельца с другой планеты, который, обнаружив пригородный дом, хочет разобраться в сути этого явления. Конечно, дом сам по себе не противоречит законам механики, иначе он развалился бы. Однако это не относится к существу дела, поскольку интерес представляют технология, которую использовали строители дома, потребности его обитателей и т.д. Понять все это невозможно, не имея представления о соответствующей цивилизации». Здесь, как мы отчетливо видим, позиция физика состоит в сотрудничестве с биологами и представителями других наук, занимающихся исследованием эволюции. При возведении здания эволюции физик выполняет функции специалиста по статике сооружений: он может выполнять важные совместные работы, но в решающих вопросах относительно смысла, цели и назначения здания должен присоединяться к мнению архитекторов.

Непревзойденное художественное описание того положения, в котором оказывается пришелец на чужой планете, принадлежит Станиславу Лему. Фантазия Лема породила планету Солярис, поверхность которой покрыта «живым Океаном», своеобразные формообразования которого остаются загадочными и непонятными для земных наблюдателей, придумывающих для них самые необычные названия. Особенно отличается в измышлении названий для причудливых формообразований приверженец систематики Гизе: «Столько лет тянулись непримиримые споры по поводу всего происходящего в «долгунах», миллионы которых бороздят необъятные просторы живого Океана. Их считали какими-то органами, полагая, что в них происходит обмен веществ, процессы дыхания и пищеварения и что-то еще, о чем помнят теперь лишь пыльные библиотечные полки. Каждая из этих гипотез была опровергнута тысячами труднейших, а подчас и опасных опытов...

Антропоморфизм (или зооморфизм) вновь и вновь проглядывал в отчаянных поисках исследователей, они усматривали в различных видоизменениях живого Океана то «органы чувств», то «конечности»; какое-то время ученые принимали за «конечности» «хребетники» и «мелькальцы». Но эти протуберанцы живого Океана, вздымающиеся иногда на две мили в атмосферу, так же можно назвать «конечностями», как землетрясения - «гимнастикой» земной коры.

Насчитывается около трехсот форм, повторяющихся с относительным постоянством и порождаемых живым Океаном сравнительно часто. За сутки можно обнаружить несколько десятков или сотен их на поверхности. Самые «нечеловеческие», то есть абсолютно не похожие ни на что земное, формы, по утверждению школы Гизе, - это симметриады ...

Хотя от этих исполинов могут сниться кошмары, самое страшное в симметриадах вовсе не их вид. Ужас наводит скорее то, что в границах симметриад нет ничего постоянного и определенного, там не действуют даже физические законы. Именно исследователи симметриад настойчивее всех утверждают, что живой Океан разумен»<sup>1</sup>.

Но довольно о Станиславе Леме с его неповторимыми видениями чуждого людям мира, ускользающего от человеческого понимания. Земной физик, занимающийся изучением эволюционных процессов на нашей планете, находится в

<sup>1</sup> Станислав Лем. Солярис / Пер. Г. Гудяковой и В. Перельман // Станислав Лем. Избранное. М.: Прогресс, 1976. С. 125-130.

более благоприятной ситуации, чем исследователь Соляриса у Станислава Лема. Он может, во-первых, исходить из того, что нарушение физических законов никогда не наблюдалось и потому может быть исключено из рассмотрения, а во-вторых - рассчитывать на сотрудничество соответствующих специалистов. Обе основные позиции должны стать исходным пунктом любых последующих рассуждений.

Соответствующие специалисты заведомо принесут с собой понимание того, что в дальнейшем язык физиков станет пригодным для описания областей знания, не относящихся к физике. К физикам в полной мере относится то, что Гете некогда сказал о математиках: «Физики (в оригинале у Гете - математики) - своего рода французы: стоит сказать им что-нибудь, как они переведут это на свой язык, и тогда получается нечто совсем другое».

Язык выступает здесь лишь как внешняя форма определенного метода подхода к исследованию вещей, о котором Ромпе и Тредер (*Rompe, Treder, 1979*) говорят следующее: «Культивируемая физикой методика исследования есть не что иное, как единственно возможный путь точного познания природы, ставящего своей целью овладение природой. Оно не ограничивается рамками физики и отнюдь не является монополией физики».

С другой стороны, исследования процессов эволюции привнесли в физику новое мышление и новый метод работы, которые до того были достоянием только биологических и общественных наук: историческое мышление и исторический метод. Эволюция по самой своей сути является историческим процессом. Результаты эволюционных процессов, как правило, могут быть поняты не из их мгновенного состояния, а лишь на основе исследования истории их возникновения.

Именно в этом смысле мы ставим также старый вопрос: что такое жизнь? Какие свойства живой системы не могут быть описаны или объяснены в рамках традиционной физики и химии? Мы убеждены в том, что исследование эволюции требует междисциплинарного и исторического подхода. Именно поэтому физика процессов эволюции не может сводиться к совокупности законов и методов, а должна включать в себя также историю физических аспектов эволюции.

История эволюции есть история возникновения все более сложных структур из более простых; ведь суть эволюции состоит как раз в интеграции более простых элементов в целостные образования более высокого уровня, т. е. в более сложные системы, характеризующиеся новыми качествами.

Наиболее важными фазами эволюции окружающего нас мира были следующие:

- космическая эволюция (Большой Взрыв, образование элементарных частиц, формирование атомов и молекул, возникновение галактик, звезд и планет, образование «фотонной мельницы»);

- химическая эволюция (образование системы химических элементов и соединений, возникновение органических соединений, полимеризация в цепи органических молекул);

- геологическая эволюция (образование структур земной коры, гор, вод и т.д.);

- эволюция протоклетки (самоорганизация биополимеров и хранение информации на молекулярном уровне, пространственная индивидуализация, возникновение молекулярного языка);

- дарвиновская эволюция (развитие видов животных и растений и их взаимодействие, возникновение экосистемы на Земле);

- эволюция человека (развитие труда, языка и мышления);

- эволюция общества (развитие распределения труда, общественная организация, техника, общественные формации и т.д.);

- эволюция информации и обмена информации (обогащение и хранение знания, развитие связи, науки и т.д.).

Существенная задача «физики эволюции» состоит в том, чтобы разработать физические основы, необходимые для понимания этих отчасти весьма сложных процессов. Во избежание недоразумений сформулируем нашу точку зрения еще раз:

для понимания сложных процессов одной лишь физики недостаточно, но весьма существенные аспекты эволюционных процессов не могут быть поняты без физики. Наконец, физик, занимающийся проблемами эволюции, должен способствовать не только углублению знаний, но и (в соответствии с традициями своей науки) их техническому использованию. Эволюционные стратегии берут начало в работах Бремермана (*Bremermann*, 1970), Рехенберга (*Rechenberg*, 1973), Холланда (*Holland*, 1975) и Швевеля (*Schwefel*, 1977). Авторы настоящей книги убеждены, что перед эволюционными методами открывается прекрасное будущее, и усматривают в их разработке основное назначение физики процессов эволюции.

Эволюционистическое мышление, т.е. понимание мира как процесса эволюции, существовало еще у древних греков. Именно оно неизменно находилось и находится в фокусе мировоззренческих споров (см., например, *Fuchs-Kittowski*, 1976; *Löther*, 1972; *Ley*, 1975; *Hörz*, 1974; *Hörz*, *Wessel*, 1983), поскольку, как заметил Энгельс, всегда было «источником дальнейшего прогресса». Современное эволюционистическое мышление сложилось в XVIII и XIX веках и неразрывно связано с великими именами Канта, Гегеля, Маркса, Дарвина и Клаузиуса. Своего рода предтечей стало сочинение Канта «Всеобщая естественная история и теория неба». В нем Кант предпринял попытку объяснить происхождение мира, исходя из физических законов, и в необычайно остром полемическом стиле утверждал: «Если отрешиться от старых лишенных каких бы то ни было оснований предрассудков и дурацкой мировой мудрости, которая пытается под многозначительной миной скрыть глубокое невежество, то я надеюсь, опираясь на противоречивые основы, обосновать свое незыблемое убеждение в том, что мир от самого сотворения может быть познан, исходя из общих законов природы, как механическое развитие». То, что Кант - с немалой претензией - сделал для исследования космической эволюции, Гегель совершил для открытия наиболее общих законов диалектики. Марксу мы обязаны знанием некоторых законов общественной эволюции, а Дарвину (1938) - обоснованной теорией происхождения видов. Дарвин сформулировал принцип отбора и продемонстрировал его значение для эволюции в биологии. К сожалению, слишком мало кому известно, что лингвист Шлейхер около 1850 г. совершенно независимо от Дарвина установил аналогичный принцип для развития естественных языков и тем самым заложил основы теории эволюции языковой коммуникации (*Schleicher*, 1863; *Scharf*, 1975). Наконец, нельзя не упомянуть о великой заслуге Клаузиуса в формулировке важнейшего физического закона процессов эволюции - второго начала термодинамики. К Клаузиусу восходят и первые соображения относительно физически обоснованных моделей космического развития. Сколь ни сомнительным может казаться с современной точки зрения вывод Клаузиуса о «тепловой смерти» Вселенной, именно этот вывод послужил толчком к развитию теоретической мысли, которая в работах Эйнштейна, Фридмана и Гамова привела к ныне широко принятой релятивистско-термодинамической модели эволюции.

Разумеется, в связи с исследованием различных фаз эволюции следовало бы назвать еще много других имен; например, в связи с космической эволюцией - имена Гельмгольца, Больцмана, Хаббла, Толмена, Шрёдингера, Альфера, Зельдовича, Пензиаса и Вильсона, в связи с химической эволюцией - имена Оствальда, Опарина, Кальвина, Бернала, Ури и Миллера, в связи с геологической эволюцией - имена Лайеля, Вегенера и Вернадского, в связи с биологической эволюцией -

имена Геккеля, Т. Хаксли (Гексли), Холдейна, Райта, Фишера, Четверикова, Лотки, Вольтерры, Дж. Хаксли, Тимофеева-Рессовского, Шмальгаузена, Т. Добжанского, Дельбрюка, Эйгена и многих других.

\* \* \*

## Содержание

### Предисловие

**Глава 1. Введение.** 1.1. Возникновение сложного. 1.2. Какую цель ставит перед собой физика процессов эволюции? 1.3. Об общей структуре процессов эволюции

**Глава 2. Сценарий эволюции Метагалактики, Земли и жизни.** 2.1. Большой Взрыв и расширение. 2.2. Многократное нарушение симметрии и возникновение элементов. 2.3. Структурирование протоплазмы и образование фотонной мельницы. 2.4. Возникновение жизни

**Глава 3. Термодинамические условия эволюции.** 3.1. Энергия и энтропия. 3.2. Начала термодинамики и самоорганизация. 3.3. Глобальные условия самоорганизации. 3.4. Локальные равновесия и критерии эволюции. 3.5. Термодинамические действующие силы эволюции Земли. 3.6. Термодинамика самоорганизации живых организмов. 3.7. Термодинамика экологических систем

**Глава 4. Неустойчивости и пространственно-временные структуры.** 4.1. Термодинамические неустойчивости. 4.2. Кинетические неустойчивости в жидких средах. 4.3. Кинетические неустойчивости в химических системах

**Глава 5. Самовоспроизведение.** 5.1. Динамика простого самовоспроизведения. 5.2. Стохастика простого самовоспроизведения. 5.3. Самовоспроизводящиеся автоматы. 5.4. Динамика нелинейного самовоспроизведения. 5.5. Стохастика нелинейного самовоспроизводства. 5.6. Самовоспроизводство в сложных системах

**Глава 6. Процессы конкуренции и отбора.** 6.1. Эволюция как проблема оптимизации. 6.2. Отбор в случае простой конкуренции. 6.3. Конкуренция и отбор в сетях. 6.4. Сосуществование и гиперотбор. 6.5. Отбор в сложных системах

**Глава 7. Индивидуальное развитие как новая стратегия эволюции.** 7.1. Роль онтогенеза в эволюции. 7.2. Дискретные модели циклов жизни. 7.3. Модель старения Маккендрика - фон Ферстера. 7.4. Процессы отбора в моделях с непрерывным старением. 7.5. Сложные возрастные структуры

**Глава 8. Мутации и спирали эволюции.** 8.1. Частота ошибок при последовательной репликации. 8.2. Основы теории Эйгена - Шустер. 8.3. Стохастика процессов эволюции. 8.4. Игра в имитацию. 8.5. Инновации в сложных системах

**Глава 9. Эволюция в пространстве фенотипов.** 9.1. Адаптивный ландшафт. 9.2. Скачкообразный характер эволюции в простой модели. 9.3. Индивидуальное развитие фенотипа

**Глава 10. Фрустрация и иерархическое упорядочение.** 10.1. Дарвиновская эволюция как задача фрустрированной оптимизации. 10.2. Некоторые результаты теории спиновых стекол. 10.3. Модель Андерсона пребиологической эволюции

**Глава 11. Эволюция информации.** 11.1. Переработка информации как процесс самоорганизации. 11.2. Информация и жизнь. 11.3. Биопоследовательности и дерево эволюции. 11.4. Энтропия и сложность. 11.5. Генетический язык и грамматика биопоследовательностей

**Глава 12. Перспективы использования.** 12.1. Проблемы энергии, материалов и физических элементов. 12.2. Проблемы автоматизации и оптимизации. 12.3. Проблемы биотехнологии. 12.4. Ассоциативная память. 12.5. Сетевые автоматы и нейрокомпьютеры

### Послесловие к русскому изданию

### Литература

### Предметный указатель



*Современная теория колебаний и волн*

## **ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС**

**Курс лекций**

*С.П. Кузнецов*

© Центр «Интеграция», 2001

© С.П. Кузнецов, 2001

М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001. 296 с.  
ISBN 5-94052-044-8

В монографии излагаются основы представлений о динамическом хаосе - феномене, который активно исследуется в последнее время и встречается в нелинейных системах различной природы - механических, электрических, оптических, химических, биологических. Обсуждаются как простые модельные системы, в которых присутствие хаоса допускает полное обоснование, так и примеры реалистичных физических систем с хаотической динамикой (модель Лоренца, нелинейные осцилляторы, электронные схемы). Разъясняются основные концепции науки о динамическом хаосе, в том числе подкова Смейла, гомоклиническая структура, показатели Ляпунова, фрактальная природа странных аттракторов, фрактальная размерность, обсуждается проблема определения характеристик хаоса на основе обработки наблюдаемых реализаций. Специальное внимание уделено сценариям перехода к хаосу (через каскад бифуркаций удвоения периода, перемежаемость, квазипериодические режимы) и методу ренормгруппы, представляющему собой общий теоретический подход к исследованию динамики на пороге возникновения хаоса.

Книга может использоваться как учебное пособие для студентов-физиков, специализирующихся в области нелинейной динамики, теории колебаний и в радиофизике, будет полезна также для аспирантов и докторантов соответствующих специальностей и для исследователей, работающих в области нелинейной динамики и ее приложений.

## СОДЕРЖАНИЕ

### Предисловие

**Лекция 1. Динамические системы и хаос.** Историческое введение. 1.1. Механика. 1.2. Статистическая физика. 1.3. Теория колебаний, радиофизика и электроника. 1.4. Гидродинамика. 1.5. Дискретные отображения. 1.6. Математика. 1.7. Прикладной хаос

**Лекция 2. Хаос в простых моделях динамических систем.** 2.1. Одномерные отображения. 2.2. Двумерные отображения, сохраняющие площадь. 2.3. Странные хаотические аттракторы

**Лекция 3. Система Лоренца.** 3.1. Задача о конвекции в подогреваемом снизу слое. 3.2. Конвекция в замкнутой петле и водяное колесо. 3.3. Уравнения динамики одномодового лазера. 3.4. Диссипативный осциллятор с инерционной нелинейностью

**Лекция 4. Динамика системы Лоренца.** 4.1. Результаты численного решения уравнений Лоренца. 4.2. Аналитическое исследование уравнений Лоренца. 4.3. Бифуркации в модели Лоренца

**Лекция 5. Хаос в реалистичных моделях физических систем: дифференциальные уравнения и рекуррентные отображения.** 5.1. Модели с дискретным временем. 5.2. Искусственно сконструированные дифференциальные уравнения. 5.3. Нелинейные осцилляторы под периодическим внешним воздействием. 5.4. Автономные системы - электронные генераторы

**Лекция 6. Сечение Пуанкаре, подкова Смейла, теорема Шильникова.** 6.1. Сечение Пуанкаре и отображение последования. 6.2. Подкова Смейла. 6.3. Теорема Шильникова о петле сепаратрисы седлофокуса

**Лекция 7. Гомоклиническая структура.** 7.1. Устойчивое и неустойчивое многообразие неподвижной точки и их пересечение. 7.2. Связь гомоклинической структуры и подковы Смейла. 7.3. Критерий Мельникова

**Лекция 8. Функция распределения, инвариантная мера, эргодичность и перемешивание.** 8.1. Функция распределения и инвариантная мера. 8.2. Эргодичность и перемешивание. 8.3. Одномерные отображения: инвариантные распределения и уравнение Фробениуса - Перрона. 8.4. Системы с непрерывным временем, уравнение для функции распределения и портреты странных аттракторов

**Лекция 9. Устойчивость и неустойчивость. Ляпуновские показатели.** 9.1. Устойчивость по Лагранжу. 9.2. Устойчивость по Пуассону и возвраты Пуанкаре. 9.3. Устойчивость по Ляпунову

**Лекция 10. Ляпуновские показатели для отображений. Методы численной оценки ляпуновских показателей.** 10.1. Обобщение ляпуновских показателей на рекуррентные отображения. 10.2. Примеры аналитического расчета ляпуновских показателей. 10.3. Алгоритм вычисления старшего ляпуновского показателя. 10.4. Ортогонализация Грама - Шмидта и вычисление спектра ляпуновских показателей. 10.5. Примеры численного расчета ляпуновских показателей. 10.6. Зависимость ляпуновского показателя от параметров. 10.7. Двухпараметрический анализ и карты ляпуновских показателей

**Лекция 11. Геометрия странных аттракторов и фрактальная размерность.** 11.1. Фракталы. 11.2. Фрактальная размерность - емкость. 11.3. Размерность Хаусдорфа



и ее связь с емкостью. 11.4. Фрактальная размерность двухмасштабного канторова множества и странного аттрактора в обобщенном отображении пекаря

**Лекция 12. Обобщенные размерности и мультифрактальный формализм.** 12.1. Информационная размерность. 12.2. Корреляционная размерность и алгоритм Грассбергера - Прокаччия. 12.3. Спектр обобщенных размерностей Реньи. 12.4. Усовершенствованное определение и спектр размерностей аттрактора обобщенного отображения пекаря. 12.5. Скейлинг-спектр. 12.6. Ляпуновская размерность и формула Каплана - Йорке

**Лекция 13. Обработка реализаций: реконструкция аттрактора по наблюдаемой, проблема вложения, вычисление характеристик хаотической динамики.** 13.1. Реконструкция фазового пространства методом запаздывания (delay-time reconstruction). 13.2. Оценка корреляционной размерности по наблюдаемой. 13.3. О технических проблемах, возникающих при вычислении размерности. Оценка Экмана - Рюэля. 13.4. Теорема о вложении. 13.5. Вычисление ляпуновских показателей по реализации. 13.6. Идея реконструкции уравнений динамической системы по наблюдаемой реализации

**Лекция 14. Сценарии перехода к хаосу. Общая дискуссия**

**Лекция 15. Сценарий Фейгенбаума: ренормгруппа, универсальность, скейлинг.** 15.1. Переход к хаосу в логистическом отображении. 15.2. Уравнение РГ. 15.3. Линеаризованное уравнение РГ. 15.4. Скейлинг

**Лекция 16. Критический аттрактор Фейгенбаума.** 16.1. Критический аттрактор как фрактал. 16.2. О последовательности посещения точек на критическом аттракторе. 16.3. Символическая динамика в критической точке. 16.4. Сигма-функция. 16.5. Спектр Фурье. 16.6. О переходе к хаосу через удвоения периода в реальных системах и моделях в виде дифференциальных уравнений

**Лекция 17. Переमेжаемость.** 17.1. Перемежаемость типа I: примеры. 17.2. Перемежаемость типа I: теория. 17.3. Ренормгрупповой подход к анализу перемежаемости

**Лекция 18. Квазипериодическая динамика и переход к хаосу в отображении окружности.** 18.1. Отображение окружности. 18.2. Динамика отображения окружности. 18.3. Цепные дроби. 18.4. Уравнение РГ: общий случай. 18.5. РГ анализ критической точки, отвечающей золотому среднему

**Лекция 19. Критическая динамика и свойства скейлинга в случае числа вращения, заданного золотым средним.** 19.1. Критический аттрактор GM. 19.2. Скейлинг на критической линии. 19.3. Скейлинг языков Арнольда на плоскости параметров

**Список литературы**

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*  
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*  
Художник *Д.В. Соколов*  
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой,*  
*О.Н. Афанасьевой* на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136  
Банковские реквизиты  
р/с № 40603810900000000378 в ЗАО АКБРИР «Экономбанк» г. Саратова,  
БИК 046311722, кор.счет банка 30101810100000000722

**Подписка на I-ое полугодие 2003 года**

по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498,  
стоимость подписки на I полугодие 150 руб.

Подписка на весь год (300 руб.) по заявочным письмам  
непосредственно в редакции.

**Зарубежная подписка** в России оформляется в ЗАО «МК-Периодика»

по адресу: 129110, Россия, Москва, ул. Гиляровского, 39  
ЗАО «МК-Периодика».

Тел.: (095) 281-93-45, 284-50-08; факс: (095) 281-37-98.

E-mail: [info@periodicals.ru](mailto:info@periodicals.ru)

**Правила подписки за рубежом** на сайте: <http://www.periodicals.ru>

Сдано в набор 10.06.02. Подписано к печати 23.07.02. Формат 70x108/16  
Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная. Гарнитура Латинская  
Усл. печ. л. 16,8(12,0). Уч.-изд. л. 16,0. Тираж 200. Заказ 265

Издательство ГосУНЦ «Колледж». Лицензия ЛР №020773 от 15.05.98

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Тел. (845-2)523864, факс (845-2) 523864

E-mail: [and@cas.ssu.runnet.ru](mailto:and@cas.ssu.runnet.ru)

<http://cas.ssu.runnet.ru>

Отпечатано на ризографе GR 3750 издательства ГосУНЦ «Колледж»

© Издательство ГосУНЦ «Колледж» 

© Оформление художника Д.В. Соколова, 2002



EDITOR-IN-CHIEF

*Yu.V. Gulyaev*, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow

EDITORS

*D.I. Trubetskov*, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

*D.A. Usanov*, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

*B.P. Bezruchko*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Saratov University

EDITORIAL BOARD

*V.S. Anishchenko*, Professor, Saratov University

*Yu.A. Danilov*, Professor, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

*A.S. Dmitriev*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow

*S.P. Kuznetsov*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Saratov

*P. S. Landa*, Professor, Moscow University

*G.G. Malinetskii*, Professor, Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow

*O.V. Rudenko*, Professor, Moscow University

*Yu.M. Romanovsky*, Professor, Moscow University

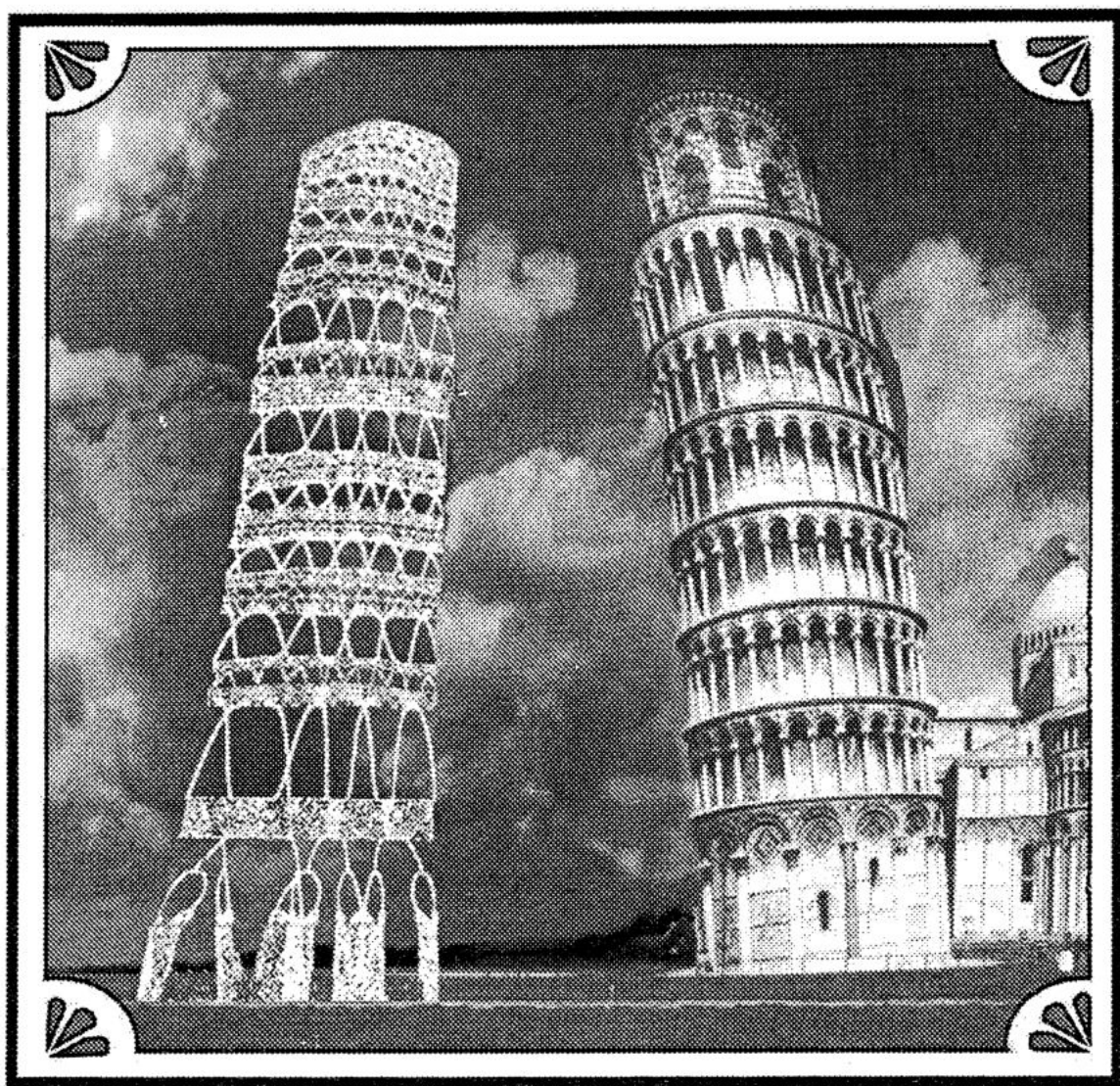
*E.E. Son*, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

*V.D. Shalfeev*, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

*V.V. Tuchin*, Professor, Saratov University

*V.K. Yulpatov*, PhD, Institute of Applied Physics of RAS, Nizhny Novgorod

*V.G. Yakhno*, Professor, Institute of Applied Physics of RAS, Nizhny Novgorod



*Что есть лучшего? - Сравнив прошедшее,  
свести его с настоящим.*

*Козьма Прутков*

В оформлении обложки использован фрагмент рисунка из статьи  
В.П.Пономаренко, помещенной в настоящем номере журнала.  
Приносим автору извинения за некоторую деформацию фрагмента.