

Трикладная нелинейная динамика

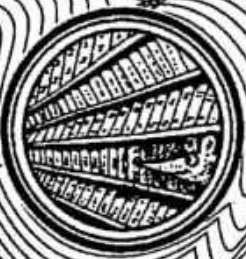


25 лет

универсальности Фейгенбаума

(Feigenbaum M.J. Quantitative Universality for a Class of nonlinear Transformations//J.Stat.Phys. 21, 1978,25.)





ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СО ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

А.С. Дмитриев, ведущий научный сотрудник, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, СО ИРЭ РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Г.Г. Малинецкий, профессор, заместитель директора, Институт прикладной математики РАН, Москва

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

О.В. Руденко, член-корреспондент РАН, Московский государственный университет

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В. К. Юлпатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

В.Г. Яхно, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 11, № 6, 2003, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

- Семенов М.Б.* Двумерные туннельные бифуркации 3
Кузнецов А.П., Савин А.В. Об одном типе перехода порядок - хаос в связанных отображениях с удвоением периода 16
Ряшко Л.Б., Башкирцева И.А., Стихин П.В. Стохастическая чувствительность циклов системы Рёсслера при переходе к хаосу 32
Кузнецов А.П., Паксютов В.И. О динамике двух осцилляторов Ван дер Поля - Дуффинга с диссипативной связью 48
Павлов А.Н., Думский Д.В. Динамика времен возврата в зависимости от выбора секущей Пуанкаре 65

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Пономаренко В.П., Тихонов Е.А.* Динамика автогенератора с частотно-фазовым управлением при инверсии характеристики частотного дискриминатора 75
Дмитриев А.А. Хаотическая синхронизация на основе идентификации состояния ведущей системы 92
Постнов Д.Э., Шишкин А.В., Сецинский Д.В. Стохастическая динамика возбудимой системы в области подпороговых колебаний 104

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ

- Дудко Г.М., Малюгина М.А., Шараевский Ю.П.* Распространение импульсов магнитостатических волн в двухслойной ферромагнитной структуре . . 116

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

- Долов А.М.* Прохождение импульсного сигнала через лампу бегущей волны 130

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ДЕЙСТВИИ

- Рыскин М.И., Иванов А.В.* Нелинейная динамика в науках о Земле: информация к размышлению 138

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

- Рабинович М.* Время внутри нас 149

КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ

- Чернавский Д.С.* Синергетика и информация. Динамическая теория информации. 156

DEPARTMENT OF EDUCATION OF RUSSIAN FEDERATION

Izvestiya VUZ

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

scientific-technical journal

published since 1993

Published 6 times a year

Vol.11, № 6, 2003, Saratov

CONTENTS

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Two-dimensional tunnel bifurcations. *M.B. Semenov* 3
On some type of transition from order to chaos in the system of coupled maps with
period doubling. *A.P. Kuznetsov, A.V. Savin* 16
Stochastical sensitivity of cycles of Roessler system in transition to chaos.
L.B. Ryashko, I.A. Bashkirtseva, P.V. Stichin 32
About dynamics of two Van der Pol - Duffing oscillators with dissipative coupling.
A.P. Kuznetsov, V.I. Paksutov 48
Return time dynamics in dependence to choice of the Poincare section. *A.N. Pavlov,*
D.V. Dumsky 65

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Dynamics of a phase-frequency-feedback oscillator with an inverted frequency
discriminator characteristic. *V.P. Ponomarenko, E.A. Tikhonov* 75
Chaotic synchronization via identification of drive system state. *A.A. Dmitriev* . . 92
Stochastic dynamics of excitable system near the canard explosion.
D.E. Postnov, A.V. Shishkin, D.V. Setsinsky 104

NONLINEAR WAVES. SOLITONS

- Magnetostatic waves impulses distribution in two-layer ferromagnetic structure.
G.M. Dudko, M.A. Malugina, Yu.P. Sharaevsky 116

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Passage of impulse signal through traveling-wave tube. *A.M. Dolov* 130

NONLINEAR DYNAMICS IN ACTION

- Nonlinear dynamics in earth sciences: information to reflect on. *M.I. Ryskin,*
A.V. Ivanov 138

NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES

- Time inside us. *M. Rabinovich* 149

BOOK REVIEW

- Synergetics and information. Dynamical theory of information. *D.S. Chernavskii*. . . 156



ДВУМЕРНЫЕ ТУННЕЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ

М.Б. Семенов

Изучены два возможных типа двумерных туннельных бифуркаций в рамках науки о квантовом туннелировании с диссипацией. Выявлены квантовые биения в окрестности точки бифуркации в случае параллельного туннельного переноса взаимодействующих частиц, а также хаотизация режима переноса вблизи критической эффективной температуры при антипараллельном переносе.

Введение

В системах различной природы - в ряде макрокластерных структур [1,2], в биомолекулах типа порфиринов [3,4], в некоторых двумерных низкотемпературных адиабатических химических реакциях (например, для 7-азаиндола [5,6]), в различных предмезоскопических и мезоскопических системах [7] - весьма важным может оказаться изучение двумерной туннельной диссипативной динамики взаимодействующих зарядов, движущихся по параллельным или антипараллельным «координатам реакции». Впервые в рамках науки о квантовом туннелировании с диссипацией [7-22] особенности двумерной туннельной динамики были изучены на примере взаимодействующих контактов Джозефсона [7]. Был обнаружен эффект «бифуркации» двумерных туннельных траекторий и прослежена возможность визуализации этого эффекта в виде излома на соответствующей токовой зависимости. В некотором смысле «аналогичная» бифуркация наблюдалась в системах типа порфиринов, хотя и оказалась неустойчивой [4]. Макроскопическая визуализация этого эффекта проявлялась в изломе на температурной зависимости (при достаточно низких температурах) скорости соответствующей химической реакции. Учитывая также возможности современных нанотехнологий в создании искусственных двумерных структур с заданными свойствами, интерес к изучению двумерных туннельных бифуркаций, позволяющих визуализировать смену механизма туннельного переноса взаимодействующих зарядов, значительно возрос [2,23-25].

1. Постановка задачи

В случае параллельного туннелирования выберем потенциалы $U(q_1)$ и $U(q_2)$ как функции линеаризованных координат зарядов в виде

$$U(q_1) = 1/2 \omega^2 (q_1 + a)^2 \theta(-q_1) + [-\Delta I + 1/2 \omega^2 (q_1 - b)^2] \theta(q_1), \quad (1)$$

$$U(q_2) = 1/2 \omega^2 (q_2 + a)^2 \theta(-q_2) + [-\Delta I + 1/2 \omega^2 (q_2 - b)^2] \theta(q_2),$$

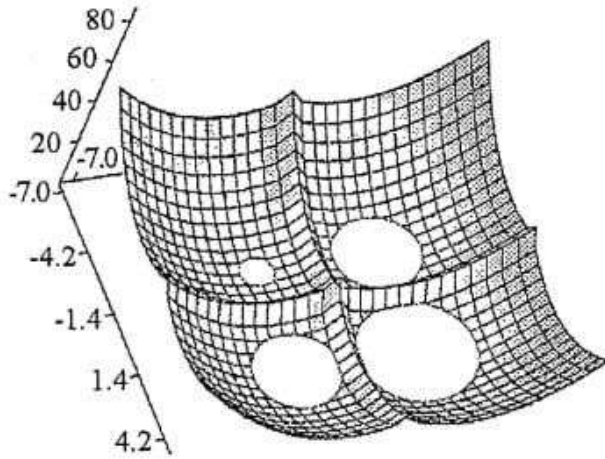


Рис. 1. Пространственная визуализация потенциала $U(q_1, q_2)$; $a=2, b=2.5, \alpha^*=0.0001$

где сумма $a+b$ определяет «длину связи» в соответствующем фрагменте макрокластера; $\Delta I = 1/2 \omega^2 (b^2 - a^2)$ - параметр асимметрии потенциала, ω - частота потенциала, введение которой обсуждалось в [26].

Взаимодействие между электронами (зарядами) берется в диполь-дипольном приближении [27] в виде

$$V_{\text{INT}}(q_1, q_2) = -1/2 \alpha (q_1 - q_2)^2, \quad (2)$$

где α - положительная константа. Общая форма двумерного потенциала с взаимодействием

$$U(q_1, q_2) = 2\tilde{U}(q_1, q_2)/\omega^2 = (q_1 + a)^2 \theta(-q_1) + [-(b^2 - a^2) + (q_1 - b)^2] \theta(q_1) + (q_2 + a)^2 \theta(-q_2) + [-(b^2 - a^2) + (q_2 - b)^2] \theta(q_2) - 1/2 \alpha^* (q_1 - q_2)^2, \quad (3)$$

где $\alpha^* = 2\alpha/\omega^2 < 1$ - безразмерный параметр; $\alpha \approx e^2/(\epsilon_0 R_0^3)$, e - заряд электрона, R_0 - «расстояние» между «координатами реакции» q_1 и q_2 туннелирующих электронов, ϵ_0 - диэлектрическая постоянная. Пространственная визуализация потенциала (3) представлена на рис. 1.

В случае антипараллельного туннелирования общая форма двумерного туннельного потенциала с взаимодействием принимает вид

$$U(q_1, q_2) = 2\tilde{U}'(q_1, q_2)/\omega^2 = (q_1 + a)^2 \theta(-q_1) + [-(b^2 - a^2) + (q_1 - b)^2] \theta(q_1) + (q_2 - a)^2 \theta(q_2) + [-(b^2 - a^2) + (q_2 + b)^2] \theta(-q_2) - 1/2 \tilde{\alpha}^* (q_1 - q_2)^2, \quad (4)$$

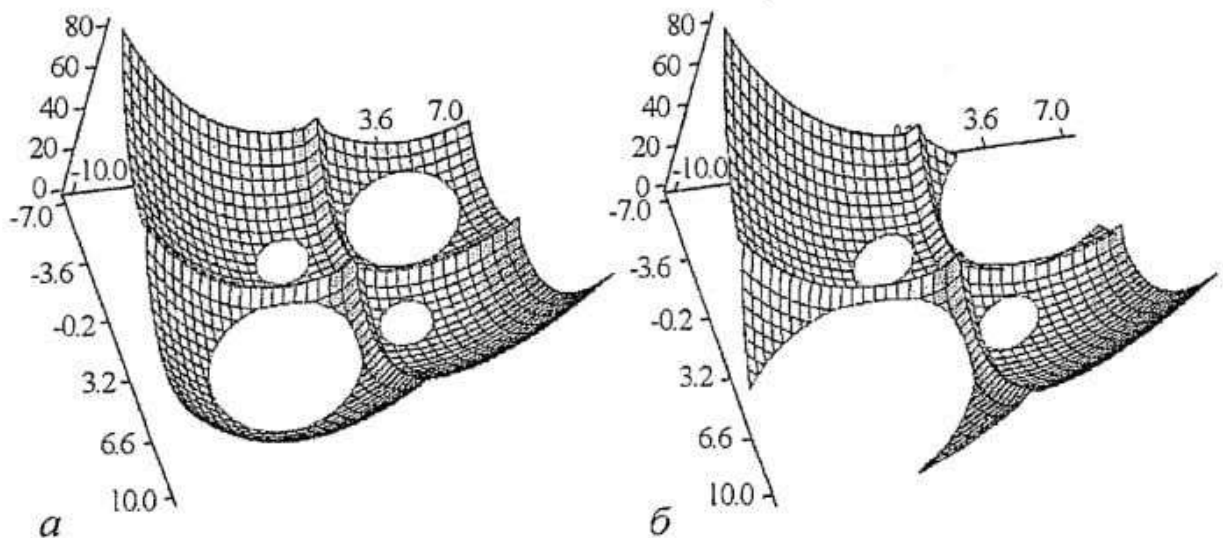


Рис. 2. Пространственная визуализация потенциала (4) при $a=2, b=2.3; \alpha^*=0.1$ (а); $\alpha^*=0.5$ (б)

где $\tilde{\alpha}^* = 2\tilde{\alpha}/\omega^2 < 1$ - безразмерный параметр. Пространственная визуализация потенциала (4) представлена на рис. 2.

Потенциал (3) будем условно называть «параллельным», а (4) - «антипараллельным». Кроме того, может быть определен «симметричный» потенциал, который можно рассматривать как частный случай потенциала (4) при условии $a=b$,

$$U''(q_1, q_2) = 2\tilde{U}''(q_1, q_2)/\omega^2 = (q_1+a)^2\theta(-q_1) + (q_1-a)^2\theta(q_1) + (q_2-a)^2\theta(q_2) + (q_2+a)^2\theta(-q_2) - 1/2 \tilde{\alpha}^{**}(q_1-q_2)^2, \quad \tilde{\alpha}^{**} < 1. \quad (5)$$

2. Вероятность двухчастичного туннельного перехода

Поскольку изучаемые двумерные фрагменты предполагаются включенными в структуру макрокластера и среду-термостат, вводим взаимодействие с осцилляторами среды (в линейном приближении). Динамика среды описывается осцилляторным гамильтонианом

$$H_{ph} = 1/2 \sum_i (P_i^2 + \omega_i^2 Q_i^2). \quad (6)$$

Предполагается, что каждая из частиц (электронов или «эффективных» зарядов) взаимодействует линейно с осцилляторами среды

$$V_{p-ph}^{(1)}(q_1, Q_i) = q_1 \sum_i C_i Q_i, \quad V_{p-ph}^{(2)}(q_2, Q_i) = q_2 \sum_i C_i Q_i. \quad (7)$$

Как и в работе [27], будем интересоваться вероятностью перехода в единицу времени или, строго говоря, только ее экспоненциальной частью, которая может быть определена как

$$\Gamma = 2\text{Im}Z/\text{Re}Z, \quad (8)$$

причем для метастабильных уровней при нулевой температуре

$$\Gamma = -2\text{Im}E, \quad E = E_0 - i\Gamma/2. \quad (9)$$

Соотношение (8) получается, как известно [7-22], путем обобщения (9) на конечные температуры

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2\sum_i \exp(-E_{0i}/T) \text{Im}E_i / \sum_i \exp(-E_{0i}/T) = \\ &= 2\text{Im}\sum_i \exp(-E_i/T) / \text{Re}\sum_i \exp(-E_i/T) = 2\text{Im}Z/\text{Re}Z. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь i - номер уровня энергии метастабильного состояния, Z - статистическая сумма системы, T - температура. При вычислении Γ удобно представить Z в виде интеграла по траекториям [7-22]

$$Z = \Pi_i \int Dq_1 Dq_2 DQ_i \exp[-S\{q_1, q_2, Q_i\}], \quad D - \text{дифференциальный оператор}. \quad (11)$$

Появление мнимой части в статистической сумме происходит из-за распадности уровней исходного состояния (более подробно эта проблема обсуждается в [28]). S - действие всей системы. После точного интегрирования по фоновым координатам [27] получим

$$S\{q_1, q_2\} = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \{ \dot{q}_1^2/2 + \dot{q}_2^2/2 + V(q_1, q_2) + \\ + 1/2 \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt' D(\tau - \tau') [q_1(\tau) + q_2(\tau)] [q_1(\tau') + q_2(\tau')] \}, \quad (12)$$

где $D(\tau) = 1/\beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} D(v_n) \exp(iv_n \tau) -$ (13)

функция Грина фононов,

$$D(v_n) = -\sum_i [C_i^2 / (\omega_i^2 + v_n^2)]; \quad (14)$$

$\beta = \hbar / (k_B T)$ - обратная температура, (\hbar и k_B полагаются равными единице); $v_n = 2\pi n / \beta$ - мацубаровская частота.

Двумерная квазиклассическая траектория (инстантон), минимизирующая функционал действия S , определяется из системы уравнений движения. Для определенности рассматриваем «антипараллельный» потенциал

$$-\ddot{q}_1 + \Omega_0^2 q_1 + \tilde{\alpha}_1 q_2 + \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt' K(\tau - \tau') [q_1(\tau') + q_2(\tau')] + \\ + \omega^2 a \theta(-q_1) - \omega^2 b \theta(q_1) = 0, \quad (15)$$

$$-\ddot{q}_2 + \Omega_0^2 q_2 + \tilde{\alpha}_1 q_1 + \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt' K(\tau - \tau') [q_1(\tau') + q_2(\tau')] - \\ - \omega^2 a \theta(q_2) + \omega^2 b \theta(-q_2) = 0. \quad (16)$$

В уравнениях (15) и (16) ядро K определяется соотношением

$$K(\tau) = 1/\beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \exp(iv_n \tau), \quad (17)$$

где ξ_n выражается путем переопределения (14)

$$D(v_n) = -\sum_i C_i^2 / \omega_i^2 + \xi_n, \quad (18)$$

тем самым выделяется член с нулевой частотой. Будем искать решение системы уравнений (15) и (16) в виде ряда Фурье по частотам v_n

$$q_1 = 1/\beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n^{(1)} \exp(iv_n \tau), \quad (19)$$

$$q_2 = 1/\beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n^{(2)} \exp(iv_n \tau).$$

Введем перенормированную частоту и константу взаимодействия

$$\Omega_0^2 = \omega^2 - \sum_i C_i^2 / \omega_i^2 - \tilde{\alpha}, \quad \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha} - \sum_i C_i^2 / \omega_i^2. \quad (20)$$

Подставляя соотношения (19) в систему уравнений (15) и (16), получим для $n=0$

$$q_0^{(1)} + q_0^{(2)} = 2\omega^2(a+b)\varepsilon / (\Omega_0^2 + \tilde{\alpha}_1), \quad (21)$$

$$q_0^{(1)} - q_0^{(2)} = -2\omega^2 a \beta / (\Omega_0^2 - \tilde{\alpha}_1) + 4\omega^2(a+b)\tau_0 / (\Omega_0^2 - \tilde{\alpha}_1),$$

и для $n \neq 0$

$$q_n^{(1)} + q_n^{(2)} = 2\omega^2(a+b)[\sin(v_n \tau_1) - \sin(v_n \tau_2)]/[v_n(v_n^2 + \Omega_0^2 + \tilde{\alpha}_1 + 2\xi_n)], \quad (22)$$

$$q_n^{(1)} - q_n^{(2)} = 2\omega^2(a+b)[\sin(v_n \tau_1) + \sin(v_n \tau_2)]/[v_n(v_n^2 + \Omega_0^2 - \tilde{\alpha}_1)],$$

где

$$\varepsilon \equiv \tau_1 - \tau_2, \quad \tau_0 \equiv (\tau_1 + \tau_2)/2. \quad (23)$$

Времена τ_1, τ_2 задают моменты прохождения частицами, движущимися из исходного положения, вершины соответствующего потенциального барьера и определяются из уравнений

$$q_1(\tau_1) = 0, \quad q_2(\tau_2) = 0. \quad (24)$$

Уравнения (24) позволяют нам изменить аргументы θ -функций - единичных функций Хевисайда. Таким образом, вместо зависимости от координат q_1, q_2 можем получить для θ -функций зависимость от времени, что позволит привести систему уравнений движения (15) и (16) к линейному виду. Времена $\pm\tau_1$ и $\pm\tau_2$ соответствуют моментам, когда частицы движутся квазиклассически «через» вершины барьера. Подставляя траекторию, определенную из соотношений (19), (21) и (22), в выражение (12), получим квазиклассическое (инстантонное) действие

$$\begin{aligned} S = & 4\omega^4 a(a+b)\tau_0/(\Omega_0^2 - \tilde{\alpha}_1) - \omega^4(a+b)^2\varepsilon^2/[\beta(\Omega_0^2 + \tilde{\alpha}_1)] - 4\omega^4(a+b)^2\tau_0^2/[\beta(\Omega_0^2 - \tilde{\alpha}_1)] - \\ & - 8\omega^4(a+b)^2/\beta \sum_{n=1}^{\infty} \{ \sin^2(v_n \tau_0) \cos^2(v_n \varepsilon/2) / [(v_n^2 + \Omega_0^2 - \tilde{\alpha}_1)v_n^2] + \\ & + \sin^2(v_n \varepsilon/2) \cos^2(v_n \tau_0) / [(v_n^2 + \Omega_0^2 + \tilde{\alpha}_1 + 2\xi_n)v_n^2] \}, \end{aligned} \quad (25)$$

которое с экспоненциальной точностью определяет вероятность двухчастичного перехода в потенциале с взаимодействием в единицу времени.

3. Параллельное движение туннелирующих частиц

В этом случае функционал действия S с учетом взаимодействия со средой находится по аналогии с (12). Двумерная квазиклассическая траектория (инстантон), минимизирующая функционал действия S , определяется из уравнений движения, аналогичных (15) и (16). Мы ищем решение этих уравнений в виде ряда Фурье по частотам v_n (19). Отметим, что решения системы уравнений движения ищутся при условии, что взаимодействующие частицы начинают двигаться одновременно. Времена τ_1 и τ_2 , соответствующие временам прохождения частиц под вершинами барьеров (вдоль координат реакции), определяются из уравнений (24).

В случае «параллельного» движения туннелирующих частиц (потенциальная энергия $U(q_1, q_2)$ (3)) выражение для действия через параметры τ_1, τ_2 имеет вид

$$\begin{aligned} S = & 2a(b+a)(\tau_1 + \tau_2)\omega^2 - \omega^2(a+b)^2(\tau_1 + \tau_2)^2/\beta - \omega^4(a+b)^2(\tau_1 - \tau_2)^2/[(\omega^2 - 2\alpha)\beta] - \\ & - 2\omega^4(a+b)^2/\beta \sum_{n=1}^{\infty} \{ [\sin(v_n \tau_1) + \sin(v_n \tau_2)]^2 / [v_n^2(v_n^2 + \omega^2 + \xi_n)] + \\ & + [\sin(v_n \tau_1) - \sin(v_n \tau_2)]^2 / [v_n^2(v_n^2 + \omega^2 - 2\alpha)] \}, \end{aligned} \quad (26)$$

где ξ_n определяется из соотношения (18).

Введем обозначения: $\varepsilon = \varepsilon^* \omega = (\tau_1 - \tau_2) \omega$; $\tau = 2\tau^* \omega = (\tau_1 + \tau_2) \omega$; $\beta^* = \beta \omega / 2$; $\alpha^* = 2\alpha / \omega^2$; $b^* = b/a$, $b \geq a$.

Система уравнений (24) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\begin{cases} \text{sh} \varepsilon [\text{cht} \text{cth} \beta^* - \text{sh} \tau - \text{cth} \beta^*] + 1/(1-\alpha^*) \text{sh}(\varepsilon(1-\alpha^*)^{1/2}) \times \\ \times [\text{ch}(\tau(1-\alpha^*)^{1/2}) \text{cth}(\beta^*(1-\alpha^*)^{1/2}) - \text{sh}(\tau(1-\alpha^*)^{1/2}) + \text{cth}(\beta^*(1-\alpha^*)^{1/2})] = 0, \\ 3 - 4/(1+b^*) - 1/(1-\alpha^*) + \text{ch} \varepsilon [\text{sh} \tau \text{cth} \beta^* - \text{ch} \tau - 1] + \text{sh} \tau \text{cth} \beta^* - \text{ch} \tau + \\ + 1/(1-\alpha^*) \text{ch}(\varepsilon(1-\alpha^*)^{1/2}) [\text{sh}(\tau(1-\alpha^*)^{1/2}) \text{cth}(\beta^*(1-\alpha^*)^{1/2}) - \text{ch}(\tau(1-\alpha^*)^{1/2}) + 1] - \\ - 1/(1-\alpha^*) [\text{sh}(\tau(1-\alpha^*)^{1/2}) \text{cth}(\beta^*(1-\alpha^*)^{1/2}) - \text{ch}(\tau(1-\alpha^*)^{1/2})] = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Решения уравнений (27) имеют следующий вид:

$$\varepsilon = (\tau_1 - \tau_2) \omega = 0, \quad \forall \beta, \quad \alpha < \omega^2/2, \quad (28)$$

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau / (2\omega) = 1/(2\omega) \text{Arcsh}[(1-b^*)/(1+b^*) \text{sh}(\beta \omega / 2)] + \beta/4.$$

При достаточно «низких» температурах, $\omega \beta \gg 1$, с экспоненциальной точностью для $1 < b/a < 3$, $(b-a)/(2(b+a)) \leq 2\alpha/\omega^2 < 2(b-a)/(3b-a) = \alpha_c^*$

$$\begin{aligned} \exp(-\tau(1-\alpha^*)^{1/2}) &\approx [3-4/(1+b^*)-1/(1-\alpha^*)](1-\alpha^*)^{1/(1-\alpha^*)^{1/2}} \times \\ &\times \{1+(1-\alpha^*)^{1/(1-\alpha^*)^{1/2}}[-1/(1-\alpha^*)+(3-4/(1+b^*)-1/(1-\alpha^*))/(1-(1-\alpha^*)^{1/2})]\}^{-1}, \\ \exp(-\varepsilon) &\approx \{[3-4/(1+b^*)-1/(1-\alpha^*)]+1/(1-\alpha^*) \exp(-\tau(1-\alpha^*)^{1/2})\} / \exp(-\tau(1-\alpha^*)^{1/2}), \end{aligned} \quad (29)$$

где $\alpha^* = 2\alpha/\omega^2$, $b^* = b/a$.

Решение (29) справедливо, когда

$$\beta > -1/\omega \ln\{\exp(-\tau(1-\alpha^*)^{1/2})\} = \beta_c. \quad (30)$$

Двумерные туннельные траектории, инстантоны (19), соответствуют решениям (29) и (30). При некоторой «критической» температуре $\beta_{c(\text{eff})}$ происходит «расщепление» основной туннельной траектории ($\varepsilon=0$) на две близких подбарьерных траектории ($\varepsilon \neq 0$) (рис. 3).

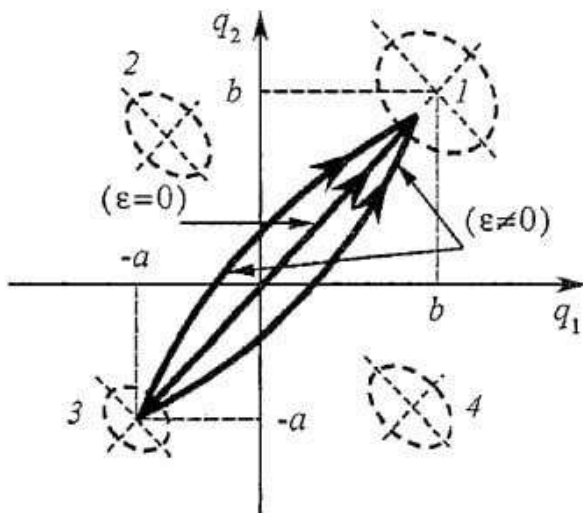


Рис. 3. Двумерные туннельные траектории - основная ($\varepsilon=0$) и «отщепленные» ($\varepsilon \neq 0$) - при $\omega \beta \gg 1$ для двух взаимодействующих частиц, движущихся параллельно; цифрами 1-4 обозначены проекции минимумов потенциальной энергии $U(q_1, q_2)$ (3)

При $\beta > \beta_c$ ($T < T_c$) реализуется последний случай ($\varepsilon \neq 0$), так как из сравнения величин действий видно, что $S_{\varepsilon=0} > S_{\varepsilon \neq 0}$.

Для $\beta < \beta_c$ ($T > T_c$) и $\alpha > \alpha_c$ (см. (29)) реализуется только основная траектория. В случае симметричного потенциала ($b=a$) двумерное туннелирование происходит только по основной траектории во всем диапазоне температур.

Более подробный численный анализ системы трансцендентных уравнений (27) позволяет получить еще ряд интересных результатов для случая параллельного двумерного двухчас-

точного туннелирования с учетом взаимодействия между частицами. Из приведенных на рис. 4-6 результатов численного анализа видно, что с уменьшением температуры уменьшается и величина α_c , определяющая смену режимов туннелирования - синхронного на асинхронный. Кроме того, существует низкотемпературный предел для α_c (см. рис. 5). Рис. 4, а-в демонстрирует, во-первых, способ получения при численном расчете точек β_c смены режимов туннелирования (синхронного на асинхронный) с уменьшением температуры. Фактически, одновременно происходит получение точек графиков рис. 5 и 6. Во-вторых, и это представляет значительный интерес, рисунок 4, б, в демонстрирует возникновение дополнительной точки перехода в асинхронный режим туннелирования, что позволяет уточнить картину смены режимов туннелирования в целом и выявить тонкую структуру перехода в окрестности точки бифуркации. Можно показать, что из двух точек перехода из синхронного в асинхронный режим туннелирования или наоборот (см. рис. 4, в) по величине действия выгодной оказывается лишь одна из них, именно она и реализуется. Но в момент возникновения (бифуркации) этих двух точек перехода, когда они достаточно близки, величины действия в них сравнимы, хотя и не равны. Тем самым, вероятным становится режим флуктуаций, связанный с перескоками из одной точки в другую и наоборот. По мере дальнейшего понижения температуры (роста β) флуктуации этой природы практически исчезают, и устойчивость режима асинхронного туннелирования восстанавливается. Есть также основания надеяться, что этот теоретический

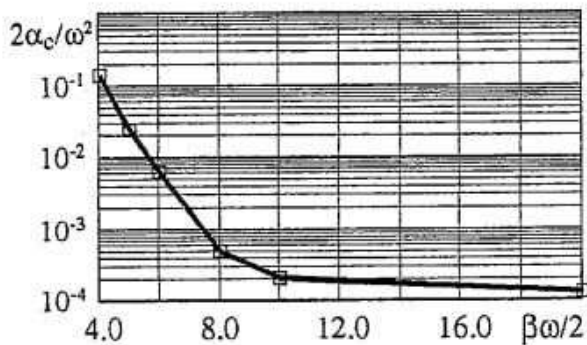


Рис. 5. Зависимость α_c от температуры ($1/T$) при фиксированной частоте и параметре асимметрии потенциала b/a

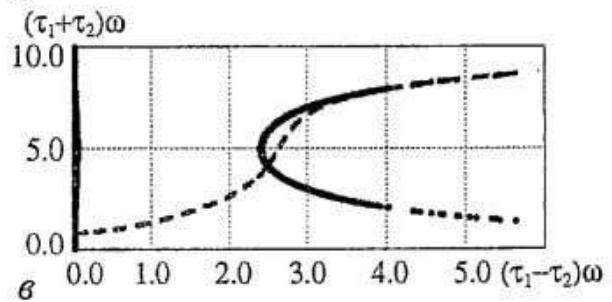
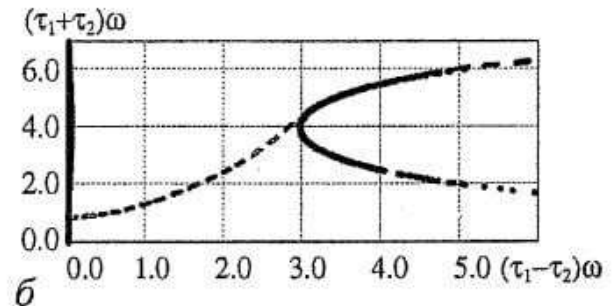
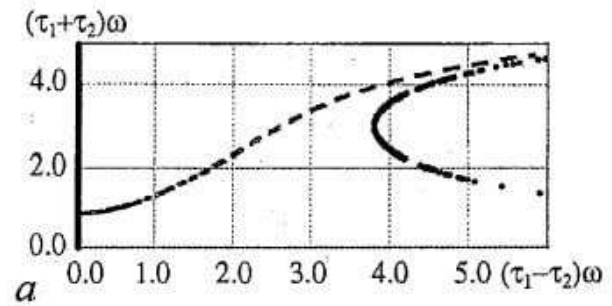


Рис. 4. Результаты численного решения системы трансцендентных уравнений (27). Помимо всегда существующего решения $\tau_1 = \tau_2$, на рис. б, в с ростом или с уменьшением температуры появляются дополнительные решения $\tau_1 \neq \tau_2$. Рис. б показывает момент бифуркации - появления дополнительного решения, более предпочтительного по величине квазиклассического действия. На рис. в таких дополнительных решений уже два, но по величине действия предпочтительным оказывается только одно из них

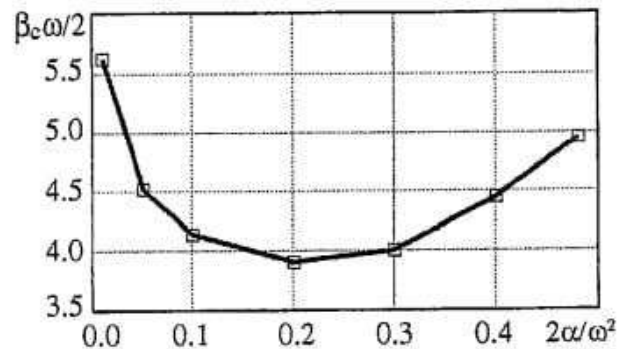


Рис. 6. Зависимость β_c от коэффициента взаимодействия между туннелирующими частицами

вывод вполне может быть проверен экспериментально при изучении искусственных двумерных структур, для которых реализуем данный тип двумерного потенциала. Для известных и упомянутых выше двумерных химических реакций, где наблюдается смена режимов туннелирования, показано, что этот эффект (излом на зависимости скорости реакции от температуры) является неустойчивым, а следовательно, более тонкие нюансы экспериментально не наблюдаемы, хотя теоретическое рассмотрение этой ситуации может быть (в некотором смысле) аналогичным представленному. Более точно эта экспериментальная ситуация соответствует случаю антипараллельного туннельного переноса взаимодействующих частиц.

4. Антипараллельное движение туннелирующих частиц

В случае антипараллельного туннельного переноса (4) действие как функция параметров ϵ и τ определяется формулой (25). Параметры ϵ и τ ($\xi_n=0$) подчиняются следующей системе уравнений (см. (24))

$$\begin{cases} -sh\epsilon[cth\beta^* + ch\tau cth\beta^* - sh\tau] + 1/(1-\tilde{\alpha}^*)sh(\epsilon(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2}) \times \\ \times \{cth(\beta^*(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2}) - ch(\tau(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2})cth(\beta^*(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2}) + sh(\tau(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2})\} = 0, \\ -1 - 4/[(1+b^*)(1-\tilde{\alpha}^*)] + 1/(1-\tilde{\alpha}^*) + (ch\epsilon - 1)(sh\tau cth\beta^* - ch\tau) + ch\epsilon + 1/(1-\tilde{\alpha}^*) \times \\ \times \{ [ch(\epsilon(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2}) + 1][sh(\tau(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2})cth(\beta^*(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2}) - ch(\tau(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2})] - ch(\epsilon(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2}) \} = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Решения системы (31) находим в следующем виде

$$\epsilon = (\tau_1 - \tau_2)\omega = 0, \quad \forall \beta, \quad \tilde{\alpha} < \omega^2/2, \quad (32)$$

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau/(2\omega) = 1/(2\omega(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2}) \text{Arcsh}[(1-b^*)/(1+b^*)sh^{1/2} \beta\omega(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2}] + \beta/4.$$

Подобно случаю параллельного переноса, при эффективно низких температурах ($\omega\beta \gg 1$) и с экспоненциальной точностью

$$\exp(-\tau(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2}) \approx A(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/\gamma} [1 - (1-\tilde{\alpha}^*)^{1/\gamma} [A/\gamma - 1/(1-\tilde{\alpha}^*)]]^{-1}, \quad (33)$$

$$\exp(\epsilon) \approx \{A - 1/(1-\tilde{\alpha}^*)\exp(-\tau(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2})\} / \exp(-\tau(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2}),$$

где $A = -1 - 4/[(1+b^*)(1-\tilde{\alpha}^*)] + 3/(1-\tilde{\alpha}^*)$; $\gamma = 1 - (1-\tilde{\alpha}^*)$ и $\tilde{\alpha}^*$, b^* , ϵ , τ определяются аналогично предыдущему случаю. Это решение справедливо для $\tilde{\alpha}_{c1}^* < \tilde{\alpha}^* < \tilde{\alpha}_{c2}^*$, где $\tilde{\alpha}_{c1}^*$ и $\tilde{\alpha}_{c2}^*$ находятся из громоздкого трансцендентного уравнения, которое здесь опущено. Но для $a=b$, $1/4 < 2\tilde{\alpha}/\omega^2 < 1$. Приближенное решение может быть написано также для больших значений параметра $b^* = b/a$ (и для меньших $\tilde{\alpha}^*$), но ограничимся физически более важным решением (33).

Решение (33) справедливо для

$$\beta > -1/(\omega(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/2}) \ln \{A(1-\tilde{\alpha}^*)^{1/\gamma} / [1 - (1-\tilde{\alpha}^*)^{1/\gamma} (A/\gamma - 1/(1-\tilde{\alpha}^*))]\} = \tilde{\beta}_{c(\text{eff})}; \quad (34)$$

A и γ определены выше.

При $\beta > \tilde{\beta}_c$ и соответствующих $\tilde{\alpha}^* S_{\epsilon \neq 0} > S_{\epsilon=0}$.

По аналогии со случаем параллельного переноса двумерные туннельные траектории находятся с помощью соотношений (32), (33). Эти траектории на плоскости (q_1, q_2) изображены на рис. 7. Аналогично происходит расщепление основной траектории на две вырожденные при $\beta > \tilde{\beta}_c$. В отличие от параллельного переноса такое «расщепление» может иметь место при любых параметрах потенциала. Для $\beta > \tilde{\beta}_c$ $S_{\varepsilon \neq 0} > S_{\varepsilon = 0}$ и, следовательно, последняя величина определяет скорость туннелирования.

При $\beta < \tilde{\beta}_c$ вырожденные подбарьерные траектории преобразуются в основную $(q_1 = -q_2)$, что соответствует синхронному антипараллельному переносу.

Таким образом, при одночастичном туннелировании существует одна траектория, инстантон, на которой действие принимает минимальное значение. При туннелировании двух частиц (в двумерном случае) возможно появление как одной основной, так и двух отщепленных траекторий, вносящих равноценный вклад в константу туннелирования. В этом случае, то есть при параллельном переносе на отщепленных траекториях, частицы уже не проходят вершины барьера одновременно по каждой из координат туннелирования ($\tau_1 \neq \tau_2$), что означает несинхронность (неодновременность) переноса частиц. Однако при определенном (малом) значении параметра взаимодействия α^* (29) и при $\beta < \tilde{\beta}_c$ (30), симметрия двумерной траектории может измениться: «отщепления» (бифуркации) траекторий от основной $(q_1 = q_2)$ уже не происходит, по каждой из координат туннелирования частицы проходят вершины барьера в одно и то же время ($\tau_1 = \tau_2$), то есть перенос частиц происходит синхронным образом (одновременно).

Выбранный тип взаимодействия не влияет на движение по координате «центра масс» $(q_1 = q_2)$. Поэтому для параллельного переноса по основной координате квазиклассическое действие не зависит от параметра взаимодействия. Поскольку энергетически выгодным оказывается состояние с максимальным значением относительной координаты $(q_1 = -q_2)$, становится понятным, почему для параллельного переноса по отщепленным траекториям величина действия уменьшается с ростом величины параметра взаимодействия, а для антипараллельного переноса, наоборот, увеличивается.

Для антипараллельного переноса наиболее выгодным оказывается движение по единственной двумерной траектории, для которой $\tau_1 = \tau_2$ (синхронный перенос), а асинхронный перенос является невыгодным, поскольку он дает больший вклад в квазиклассическое действие.

Условие применимости нашей модели в адиабатическом приближении слабовзаимодействующего газа пар «инстантон - антиинстантон» рассмотрено в [26]. Учет взаимодействия со средой (конкретизация спектра осцилляторов среды) качественно не влияет на рассмотренные эффекты макрокорреляций.

Численный анализ системы трансцендентных уравнений (31), подобно случаю параллельного туннелирования, выявляет интересные особенности эффекта смены режимов туннелирования (тонкую структуру в окрестности

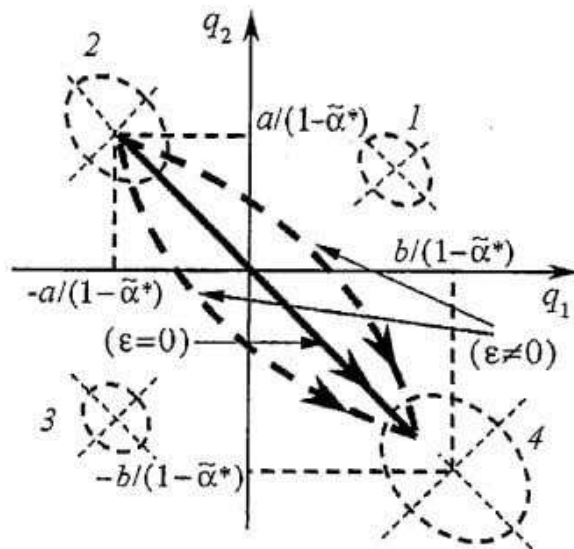


Рис. 7. Двумерные туннельные траектории - основная ($\varepsilon=0$) и «отщепленные» ($\varepsilon \neq 0$) при $\omega\beta \gg 1$ для двух взаимодействующих частиц, движущихся антипараллельно; цифрами 1-4 обозначены проекции минимумов потенциальной энергии $U'(q_1, q_2)$ (4)

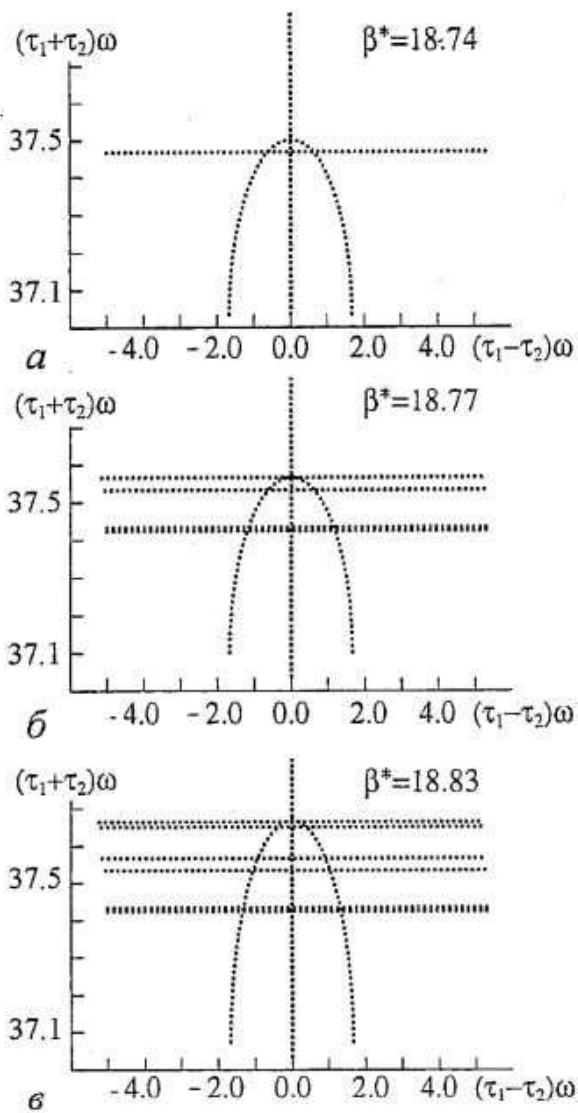


Рис. 8. Численный анализ системы трансцендентных уравнений (31). В дополнение к всегда существующему «синхронному» решению $\tau_1 = \tau_2$, с ростом β (уменьшением температуры) появляются отцепленные «асинхронные» решения $\tau_1 \neq \tau_2$: а - одна пара, б - четыре пары и в - шесть пар «асинхронных» решений

Что касается характера зависимостей $\alpha_c(\beta)$ и $\beta_c(\alpha)$, то они оказываются подобными аналогичным зависимостям для параллельного переноса, представленным на рис. 5 и 6. Таким образом, удастся рассмотреть тонкую структуру бифуркаций режимов туннелирования как для параллельного, так и для антипараллельного переноса и провести их сравнительный анализ.

При фиксированной константе взаимодействия α и в отсутствие взаимодействия с осцилляторами среды величина критической температуры T_c , характеризующей смену синхронного (одновременного) и асинхронного (неодновременного) режимов туннелирования, с учетом значений α_c (см. (29) и (33)), определяется формулами (30) и (34). Эти соотношения могут быть обобщены и на случай взаимодействия с выделенной колебательной модой. Для различных конкретных соединений величина этой критической температуры T_c может быть оценена в диапазоне значений $T_c = 10 \dots 400$ К. В стеклах величина T_c может быть малой; в химических реакциях она, как правило, возрастает. Ее величина может изменяться с изменением расстояния между туннелирующими

первоначальной бифуркации). Результаты представлены на рис. 8, из которого видно, что с понижением температуры помимо первой бифуркации - появления пары отцепленных решений (рис. 8, а) - происходит последующий каскад бифуркаций: появляется 4 и 6 пар отцепленных решений (рис. 8, б и в). Далее при $\beta^* = 19.2009$ ($\alpha^* = 0.05$) появляется уже 12 пар отцепленных решений, что напоминает один из возможных сценариев перехода к хаосу. И хотя по величине действия (Euclidean action) более выгодным остается, как отмечалось выше, режим синхронного туннелирования $\tau_1 = \tau_2$, но в небольшом интервале температур величины действий на основной траектории $\tau_1 = \tau_2$ и каскаде отцепленных туннельных траекторий $\tau_1 \neq \tau_2$ остаются сравнимыми, и оказываются возможными квантовые биения. Они в отличие от параллельного переноса перестают носить регулярный характер, а начинают напоминать хаос. Более того, важной особенностью изучаемых бифуркаций является для антипараллельного переноса (в отличие от параллельного) неустойчивый переход от синхронного к асинхронному туннелированию по типу «плавного перехода второго рода», тогда как для параллельного переноса такой устойчивый переход осуществляется скачком, по типу «перехода первого рода» (см. также рис. 4). На похожую особенность обращали внимание авторы работы [7].

частицами и, следовательно, с изменением их концентрации. Квантовое туннелирование может вносить существенный вклад в константу скорости переноса взаимодействующих частиц в указанном диапазоне температур T_c (при $k_B T_c / (\hbar \omega) \leq 1$), несмотря на их возможные высокие значения (для порфиринов T_c не превосходит 200 К). Следовательно, эффект смены режимов синхронного (одновременного) и асинхронного (неодновременного) переноса взаимодействующих частиц существенно квантовый.

Заключение

Таким образом, как для параллельного (3), так и для антипараллельного (4) и (5) движения туннелирующих частиц учет взаимодействия со средой качественно не влияет на характер переноса. Но количественно взаимодействие со средой по-разному влияет на антипараллельный и параллельный перенос частиц. Из выражения (12) следует, что влияние взаимодействия со средой на величину действия отлично от нуля при движении вдоль координаты «центра масс» $q_1 = q_2$. Следовательно, среда влияет всегда на параллельное движение туннелирующих частиц и не влияет на величину действия вдоль основной траектории $q_1 = -q_2$ при антипараллельном движении туннелирующих частиц.

В одноинстантонном приближении найдены выражения для действия (12) в моделях с «адиабатическими» потенциальными энергиями ((3), (4)) и (5) и проведен сравнительный анализ туннелирования двух взаимодействующих частиц, движущихся параллельно и антипараллельно, с учетом диссипации.

Условие применимости теории, гарантирующее квазистационарное протекание кинетического процесса (экспоненциальное затухание во времени вероятности туннелирования), было получено в [26].

Рассмотрен туннельный перенос с диссипацией двух квантовых частиц, взаимодействующих между собой и движущихся параллельно или антипараллельно. В случае движения туннелирующих частиц по параллельным координатам реакции в одном направлении в асимметричном адиабатическом потенциале, при некоторой температуре T_c в зависимости от величины коэффициента взаимодействия между частицами происходит отщепление от основной туннельной траектории $q_1 = q_2$ двух близких к ней подбарьерных траекторий. Подобное отщепление оказывается энергетически не выгодным для антипараллельного туннельного переноса частиц. Можно показать, что условие (30) определяет величину T_c , начиная с которой обеспечиваются устойчивые двумерные синхронные туннельные корреляции всех отмеченных в работе типов.

В заключение отметим, что ожидаемая продуктивность развития науки о квантовом туннелировании с диссипацией применительно к изучению эффективно одномерных и существенно двумерных нелинейных низкотемпературных адиабатических химических реакций как туннельных систем с диссипацией оказалась вполне оправданной.

Автор благодарен А.И. Ларкину, А.А. Овчинникову и Б.И. Ивлеву за внимание и обсуждение результатов настоящей работы.

Библиографический список

1. Meyer R., Ernst R.R. Hydrogen transfer in double minimum potential: kinetic properties derived from quantum dynamics // J. Chem. Phys. 1987. Vol. 86, № 2. P. 784.

2. Жуковский В.Ч., Кревчик В.Д., Семенов М.Б., Тернов А.И. Квантовые эффекты в мезоскопических системах. Ч. I. Квантовое туннелирование с диссипацией. М.: Изд-во физического ф-та МГУ, 2002. 108 С.
3. Smedarchina Z., Siebrand W., Wildman T.A. Intramolecular tunneling exchange of the inner hydrogen atoms in free-base porphyrins // Chem. Phys. Lett. 1988. Vol. 143, № 4. P. 395.
4. Smedarchina Z., Siebrand W., Zerbetto F. Comparison of synchronous and asynchronous hydrogen transfer mechanisms in free-base porphyrins // Chem. Phys. 1989. Vol. 136, № 2. P. 285.
5. Tokumura K., Watanabe Y., Itoh M. Deuterium isotope effects of excited-state and ground-state double-proton-transfer processes of the 7-azaindole H-bonded dimer in 3-methylpentane // J. Phys. Chem. 1986. Vol. 90, № 11. P. 2362.
6. Benderskii V.A., Goldanskii V.I., Ovchinnikov A.A. Effect of molecular motion on low-temperature and other anomalously fast chemical reactions in the solid phase // Chem. Phys. Lett. 1980. Vol. 73, № 3. P. 492.
7. Ивлев Б.И., Овчинников Ю.Н. Распад метастабильных состояний при наличии близких подбарьерных траекторий // ЖЭТФ. 1987. Т. 93, № 2(8). С. 668.
8. Caldeira A.O., Leggett A.J. Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, № 4. P. 211.
9. Affleck I. Quantum-statistical metastability // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, № 6. P. 388.
10. Wolynes P.G. Quantum theory of activated events in condensed phases // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 47, № 13. P. 968.
11. Ларкин А.И., Овчинников Ю.Н. Квантовое туннелирование с диссипацией // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 37, № 7. С. 322.
12. Grabert H., Weiss U. Thermal enhancement of the quantum decay rate in a dissipative system // Z. Phys. B. 1984. Vol. 56, № 2. P. 171.
13. Caldeira A.O., Leggett A.J. Quantum tunnelling in a dissipative system // Ann. of Phys. 1983. Vol. 149, № 2. P. 374.
14. Мельников В.И. Активационно-туннельный распад метастабильных состояний // ЖЭТФ. 1984. Т. 87, № 2(8). С. 663.
15. Dekker H. Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator // Phys. Repts. 1981. Vol. 80, № 1. P. 1-112.
16. Schmid A. Quasiclassical wave function in multidimensional quantum decay problems // Ann. of Phys. 1986. Vol. 170, № 2. P. 333.
17. Заикин А.Д., Панюков С.В. К теории квантового туннелирования с линейной диссипацией // ЖЭТФ. 1985. Т. 89, № 5(11). С. 1890.
18. Каган Ю., Прокофьев Н.В. О туннелировании с «диссипацией» // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 43, № 9. С. 434.
19. Grabert H., Weiss U. Quantum tunneling rates for asymmetric double-well systems with Ohmic dissipation // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54, № 15. P. 1605.
20. Сумецкий М.Ю. Неупругое туннелирование частицы, взаимодействующей с колебаниями // ЖЭТФ. 1985. Т. 89, № 2(8). С. 618.
21. Овчинников Ю.Н. Динамика частицы в двухъямном потенциале // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, № 5. С. 365.
22. Ивлев Б.И. О динамике частицы в двухъямном потенциале // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, № 7. С. 333.
23. Benderskii V.A., Vetoshkin E.V., Kats E.I., Trommsdorff H.P. Competing tunneling trajectories in a 2D potential with variable topology as a model for quantum bifurcations. <http://www.arxiv.org/cond-mat/0209030>.
24. Овчинников А.А., Дахновский Ю.И., Кревчик В.Д., Семенов М.Б.,

Арынгазин А.К. Управляемая модуляция низкоразмерных структур (монография). М: Наука, 2003 (в печати), 510 с.

25. *Dakhnovskii Yu.I., Ovchinnikov A.A., Semenov M.B.* Quantum tunneling with dissipation. Low-temperature adiabatic chemical reactions considered as dissipative tunnel systems // *Hadronic Journal*. 2002. Vol. 25, № 3. P. 303.

26. *Дахновский Ю.И., Овчинников А.А., Семенов М.Б.* Низкотемпературные химические реакции как туннельные системы с диссипацией // *ЖЭТФ*. 1987. Т. 92, № 3. С. 955.

27. *Dakhnovskii Yu.I., Semenov M.B.* Tunneling of two interacting particles: Transition between separate and cooperative tunneling // *J. Chem. Phys.* 1989. Vol. 91, № 12. P. 7606.

28. *Ovchinnikov A.A., Aringazin A.K., Dakhnovskii Yu.I., Krevchik V.D., Semenov M.B., Yamamoto K.* Two-dimensional tunnel correlations with dissipation // *Phys. Rev. B*. 2003. Vol. 68. P. 155426. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/0212623>.

Пензенский государственный
университет

Поступила в редакцию 8.04.03

TWO-DIMENSIONAL TUNNEL BIFURCATIONS

M.B. Semenov

Two possible types of two-dimensional tunnel bifurcations have been studied in frames of the «quantum tunneling with dissipation» science. Quantum oscillations near bifurcation point have been revealed in case of parallel tunnel transition for interacting particles. Also, the chaotic regime near the critical effective temperature in case of antiparallel tunnel transfer has been revealed.



Семенов Михаил Борисович - родился в Пензенской области (1960), окончил с отличием физический факультет МГУ (1985), аспирантуру кафедры теоретической физики МГУ (1988), до 1995 года - младший научный сотрудник той же кафедры. В настоящее время - доцент кафедры «Физика» Пензенского государственного университета, а также professor of the Institute for Basic Research, P.O. Box 1577, Palm Harbor, Fl. 34682, USA. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1991). Область научных интересов - квантовое туннелирование с диссипацией, мезоскопика низкоразмерных систем, нелинейные квантовые низкоразмерные системы. Соавтор монографии «Управляемая модуляция низкоразмерных структур», соавтор учебного пособия для студентов физического факультета МГУ «Квантовые эффекты в мезоскопических системах», соавтор учебного пособия «Введение в современную мезоскопiku». Опубликовал более 30 научных статей по направлениям, указанным выше. Член редколлегии журнала «Известия вузов. Поволжский регион» по секции «Естественные науки».



ОБ ОДНОМ ТИПЕ ПЕРЕХОДА ПОРЯДОК - ХАОС В СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ С УДВОЕНИЕМ ПЕРИОДА

А.П. Кузнецов, А.В. Савин

Исследовано поведение на пороге хаоса системы связанных обратимых двумерных отображений. Показано, что тип критического поведения на пороге хаоса, обнаруженный в системе связанных одномерных необратимых отображений, сохраняется и при переходе к двумерным отображениям, но лишь при некотором определенном способе введения связи. В пространстве параметров такой системы определены координаты критической точки и продемонстрирован скейлинг в ее окрестности.

Введение

Связанные системы со сложной динамикой являются популярным в нелинейной динамике объектом исследования. К настоящему времени имеется большое количество посвященных им работ, в которых рассматриваются проблемы синхронизации (в том числе хаотической) [1-5], пространственно-временные явления в цепочках и более сложных структурах из связанных систем [6-9] и т.д. В центре внимания настоящего сообщения - один из возможных типов критического поведения на пороге хаоса, который может наблюдаться в связанных системах. К пониманию возможности этого типа поведения можно прийти с помощью следующего рассуждения. Представим себе сначала две однонаправленно связанные системы с удвоениями периода, например, два связанных логистических отображения. В этом случае первая подсистема полностью независима от второй. Будем варьировать управляющий параметр первой подсистемы. В силу независимости она будет демонстрировать классический фейгенбаумовский переход к хаосу. Зафиксируем значение управляющего параметра, соответствующее точно порогу возникновения хаоса - *критическое* значение. Затем, варьируя управляющий параметр второй подсистемы, выведем и ее на порог хаоса. В этом случае вторая подсистема будет демонстрировать некоторый новый тип критичности, известный как бикритическое поведение и исследованный в работах [10-12]. Ясно, что, поскольку бикритический тип поведения достигается вариацией двух параметров, то ему отвечает коразмерность два, в то время как классическому переходу через удвоения периода по Фейгенбауму соответствует коразмерность один. Далее включим небольшое обратное воздействие второй подсистемы на первую. Можно ожидать, и это действительно так, что подстройкой обоих управляющих

параметров подсистем можно вновь реализовать критическое поведение на пороге хаоса. Его свойства, однако, оказываются иными, чем при однонаправленной связи. Такой тип поведения получил специальное название FQ. В его окрестности встречаются и фейгенбаумовский сценарий перехода через удвоения периода (F - Feigenbaum), и переход через квазипериодичность (Q - Quasiperiodicity) [13]. В работах [13-16] для системы неидентичных логистических отображений с квадратичной связью этот тип динамики был достаточно подробно изучен, в том числе с помощью ренормгруппового анализа. Были также рассчитаны соответствующие константы скейлинга, универсальные мультипликаторы и т.д.

Рассмотренная в [13] система представляла собой два связанных *необратимых* отображения. В настоящей работе исследован вопрос, будет ли наблюдаться тип критичности FQ в связанных *обратимых* системах? Скажем несколько слов о том, почему этот вопрос нетривиален. Действительно, простейший сценарий перехода к хаосу коразмерности один (фейгенбаумовский сценарий) по своим свойствам одинаков для любых типов динамических систем - необратимых одномерных отображений, обратимых двумерных отображений, систем дифференциальных уравнений. В то же время, оказывается, что при переходе к критическим явлениям, связанным с двумя и более управляющими параметрами, необратимые и обратимые отображения проявляют различные свойства на пороге хаоса. Простейшим и важнейшим примером является так называемая трикритическая динамика, которой в случае одномерных необратимых отображений отвечают концевые точки фейгенбаумовских линий. (Подробности см. в [17,18].) Таким образом, вопрос о том, возможно ли критическое поведение типа FQ коразмерности два на пороге хаоса в связанных обратимых отображениях, заслуживает специального исследования.

1. Эмпирический переход к связанным обратимым отображениям

Рассмотренная в [13] система, в которой был обнаружен обсуждаемый тип критического поведения, имела следующий вид:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - C y_n^2, \\y_{n+1} &= 1 - A y_n^2 - B x_n^2.\end{aligned}\tag{1}$$

Константы связи фиксировались ($B=0.375$; $C=-0.25$), и исследование проводилось на плоскости управляющих параметров парциальных подсистем (A, λ). Наиболее популярным и изученным в нелинейной динамике вариантом обратимого отображения является отображение Эно [19]

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - b y_n, \quad y_{n+1} = x_n,\tag{2}$$

которое содержит еще один параметр b , ответственный за степень сжатия фазового пространства, и которое при $b=0$ превращается в логистическое отображение. Поэтому очень просто перейти от системы связанных логистических отображений (1) к системе связанных отображений Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - b y_n - C u_n^2, \quad y_{n+1} = x_n, \\u_{n+1} &= 1 - A u_n^2 - b v_n - B x_n^2, \quad v_{n+1} = u_n.\end{aligned}\tag{3}$$

Значения параметров связи выберем такими же, как и в [13], а параметр диссипации b зафиксируем равным 0.2.

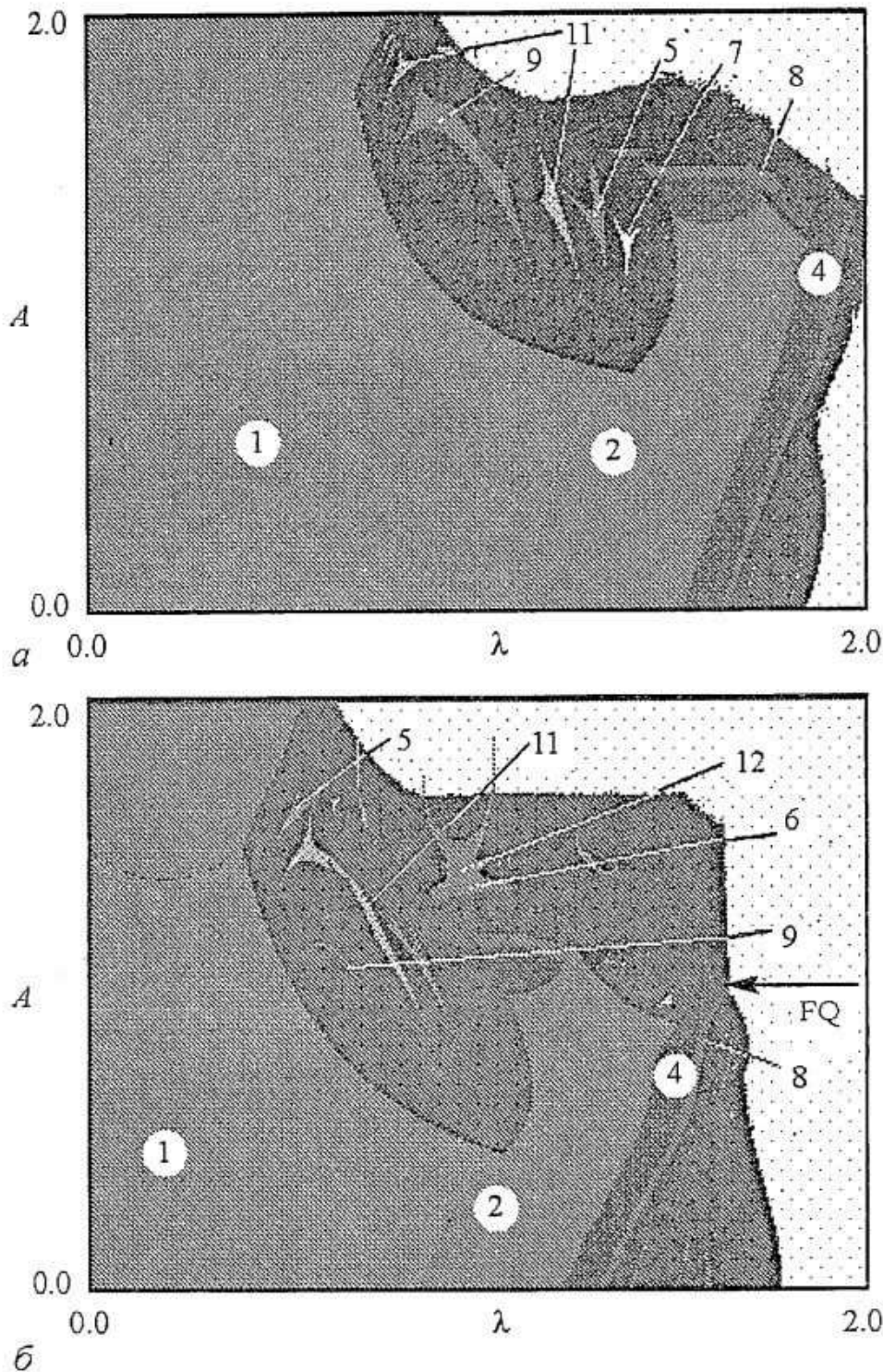


Рис. 1. Карты динамических режимов: *a* - связанных отображений Эно (3) и *б* - связанных логистических отображений (1) на плоскости управляющих параметров подсистем

На рис. 1, *a* приведена карта динамических режимов для системы (3) на плоскости параметров (λ, A) , а на рис. 1, *б* для сравнения - аналогичная карта для системы (1). На картах оттенками серого цвета показаны найденные численно области различных периодических режимов, некоторые из них обозначены соответствующими цифрами. Черный цвет отвечает неперiodическим режимам, то есть хаосу и квазипериодике, а белый - убеганию траекторий на бесконечность. Критическая точка FQ имеет координаты $A_c = 1.030837593\dots$, $\lambda_c = 1.654524590\dots$ и показана стрелкой на рис. 1, *б*. Видно, что по общей структуре карты весьма похожи, в частности, наряду с переходом к хаосу по сценарию Фейгенбаума наблюдаются и области квазипериодических движений. В то же время при рассмотрении более тонких деталей на увеличенных фрагментах карт (рис. 2)

можно обнаружить достаточно существенные различия. На рис. 2 для удобства визуализации системы языков синхронизации все периодические режимы обозначены одним и тем же оттенком серого цвета. Это позволяет ясно увидеть, что системы языков оказываются устроенными по-разному, особенно в центре рисунка. В частности, для системы связанных отображений Эно в этой области наблюдаются языки Арнольда, представляющие собой либо «полуокружности», опирающиеся своими основаниями на линию бифуркации Неймарка - Сакера, либо даже структуры, свернутые в кольцо и оторванные от этой линии (см. рис. 2, *a*). Аналогичных своеобразных языков в системе связанных логистических отображений нет.

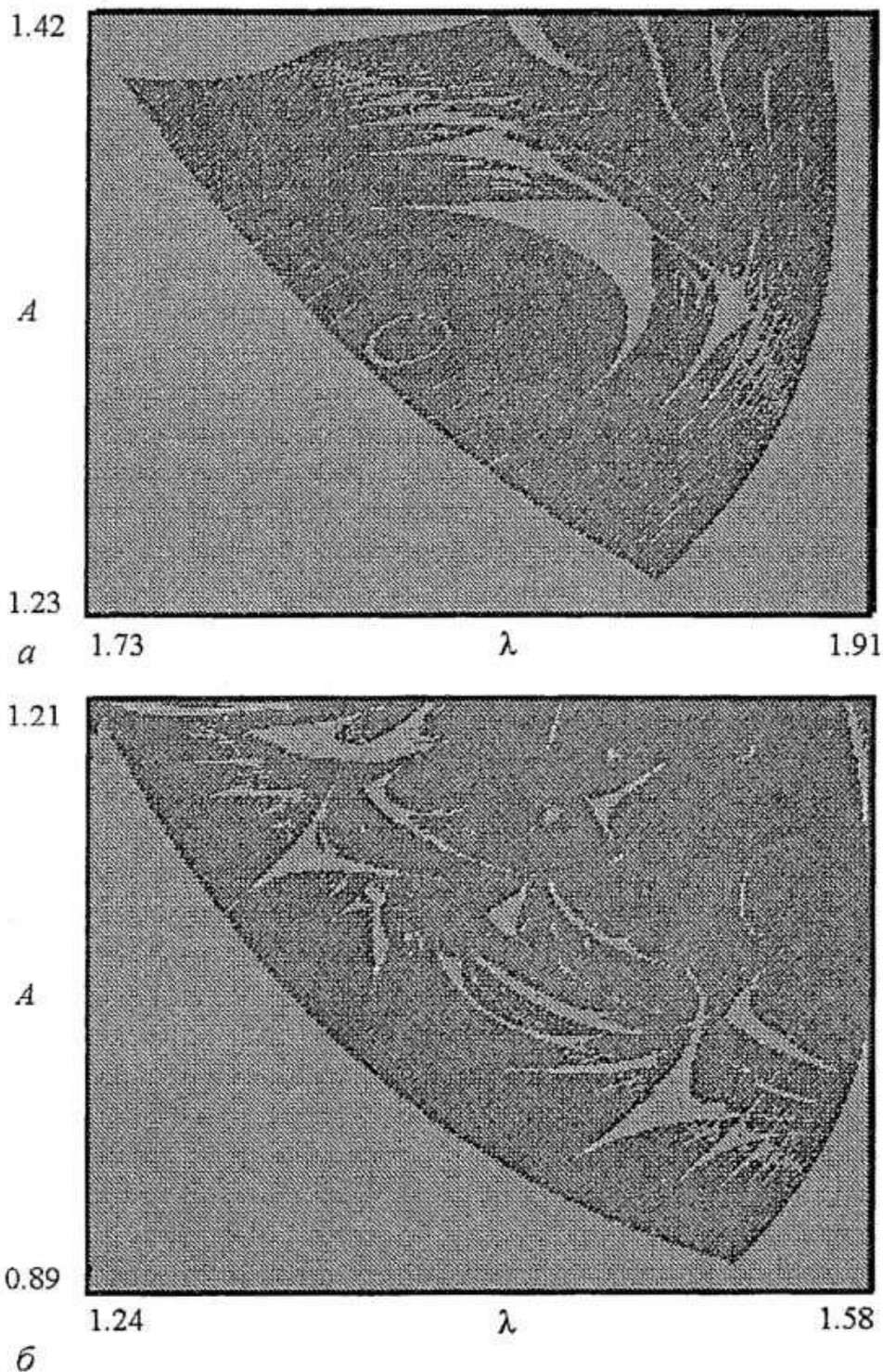


Рис. 2. Увеличенный фрагмент плоскости параметров, демонстрирующий структуру системы языков синхронизации: *a* - связанных отображений Эно и *б* - связанных логистических отображений

Для того чтобы идентифицировать тип критичности FQ в связанных отображениях Эно, нужно найти соответствующую критическую точку на плоскости управляющих параметров и определить константы скейлинга. В настоящей работе для этой цели были применены прямые численные методы.

2. Методы поиска критической точки FQ



Рис. 3. Схематическая иллюстрация устройства плоскости параметров в окрестности PDT-точки цикла периода n

Обратившись к рис. 1, можно убедиться, что основным элементом устройства плоскости параметров является конструкция из бифуркационных линий и разделяемых ими областей, схематически изображенная на рис. 3. Для такой «элементарной ячейки» область устойчивости цикла периода n ограничена линиями бифуркаций удвоения периода и рождения инвариантной кривой (бифуркации Неймарка - Сакера). Эти линии встречаются в некоторой точке коразмерности два, после чего обрываются. (Продолжающаяся далее линия является линией касательной бифуркации цикла периода $2n$.) Такую точку

естественно назвать *точкой обрыва линии удвоения периода* или, для краткости, PDT-точкой (от *period-doubling terminal point*). В свою очередь, критическая точка FQ является предельной для накопления PDT-точек на базе циклов удвоенного периода. Нетрудно видеть, что PDT-точка определяется условием обращения в (-1) двух мультипликаторов цикла периода n одновременно.

Остановимся несколько подробнее на некоторых особенностях поиска точки PDT численными методами. Условие равенства (-1) двух мультипликаторов эквивалентно фиксации только двух из четырех инвариантов матрицы монодромии, являющихся коэффициентами следующего характеристического уравнения:

$$\mu^4 - Sp\mu^3 + I_2\mu^2 - I_3\mu + Det = 0. \quad (4)$$

Нетрудно показать, однако, что для системы (3) эти инварианты связаны условием:

$$Det = b^{2n}, \quad I_3 = Sp(Det)^{1/2}, \quad (5)$$

где n - период цикла. Поэтому точку PDT можно найти, решив численно систему двух алгебраических уравнений

$$Sp(\lambda, A) = -2 - 2b^n, \quad I_2(\lambda, A) = 1 + 2b^n + b^{2n} \quad (6)$$

относительно параметров λ и A .

Далее можно оценить константы и направления скейлинга в пространстве параметров как собственные числа и векторы так называемой скейлинговой матрицы $\delta^{(n)}$, элементы которой определяются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\lambda_{n-1} = \delta_{11}^{(n)}\Delta\lambda_n + \delta_{12}^{(n)}\Delta A_n, \\ \Delta A_{n-1} = \delta_{21}^{(n)}\Delta\lambda_n + \delta_{22}^{(n)}\Delta A_n, \\ \Delta\lambda_n = \delta_{11}^{(n)}\Delta\lambda_{n+1} + \delta_{12}^{(n)}\Delta A_{n+1}, \\ \Delta A_n = \delta_{21}^{(n)}\Delta\lambda_{n+1} + \delta_{22}^{(n)}\Delta A_{n+1}, \end{array} \right. \quad (7)$$

где $\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n$, $\Delta A_n = A_{n+1} - A_n$, а λ_n и A_n - координаты PDT-точки периода n на плоскости управляющих параметров.

Другим способом поиска точки FQ является *метод приравнивания мультипликаторов (eigenvalue-matching method)* [20, 12]. Он основан на том, что в критической точке циклы всех периодов асимптотически имеют одинаковые мультипликаторы, равные универсальным для данного типа критичности. Поэтому последовательность точек в пространстве параметров, в которых совпадают мультипликаторы циклов с периодами n и $2n$, должна сходиться к критической точке. Скейлинговая матрица при этом может быть определена из соотношения

$$\Delta_n = \Gamma_n^{-1} \Gamma_{2n}, \quad (8)$$

где

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} \partial Sp_n / \partial \lambda & \partial Sp_n / \partial A \\ \partial \text{Det}_n / \partial \lambda & \partial \text{Det}_n / \partial A \end{pmatrix}, \quad (9)$$

причем производные в (9) находятся численно в точке совпадения мультипликаторов.

3. Поиск точки FQ в системе связанных отображений Эно

Естественно, что применение обоих методов к системе связанных логистических отображений (1) дает результаты, находящиеся в хорошем соответствии с известными из [13]. Результаты же исследования системы связанных отображений Эно (3) для приведенных выше значений параметров связи и параметра b приведены в табл. 1.

Таблица 1

N	λ	A
1	1.40443502928989	0.79643741735745
2	1.86175463183402	1.23944066580457
4	1.97335903306898	1.35074553299430
8	1.99056056299470	1.36629930670432
16	1.99624541595448	1.37214442850807
32	1.99617991542720	1.37183053629896
64	1.99670754154512	1.37245686703393
128	1.99678555442172	1.37254857436948
256	1.99680474820096	1.37257100453603
512	1.99680426655928	1.37257029885968
1024	1.99680723586445	1.37257387623783
2048	1.9968080269575	1.37257483016671
	1.99681...	1.372575...

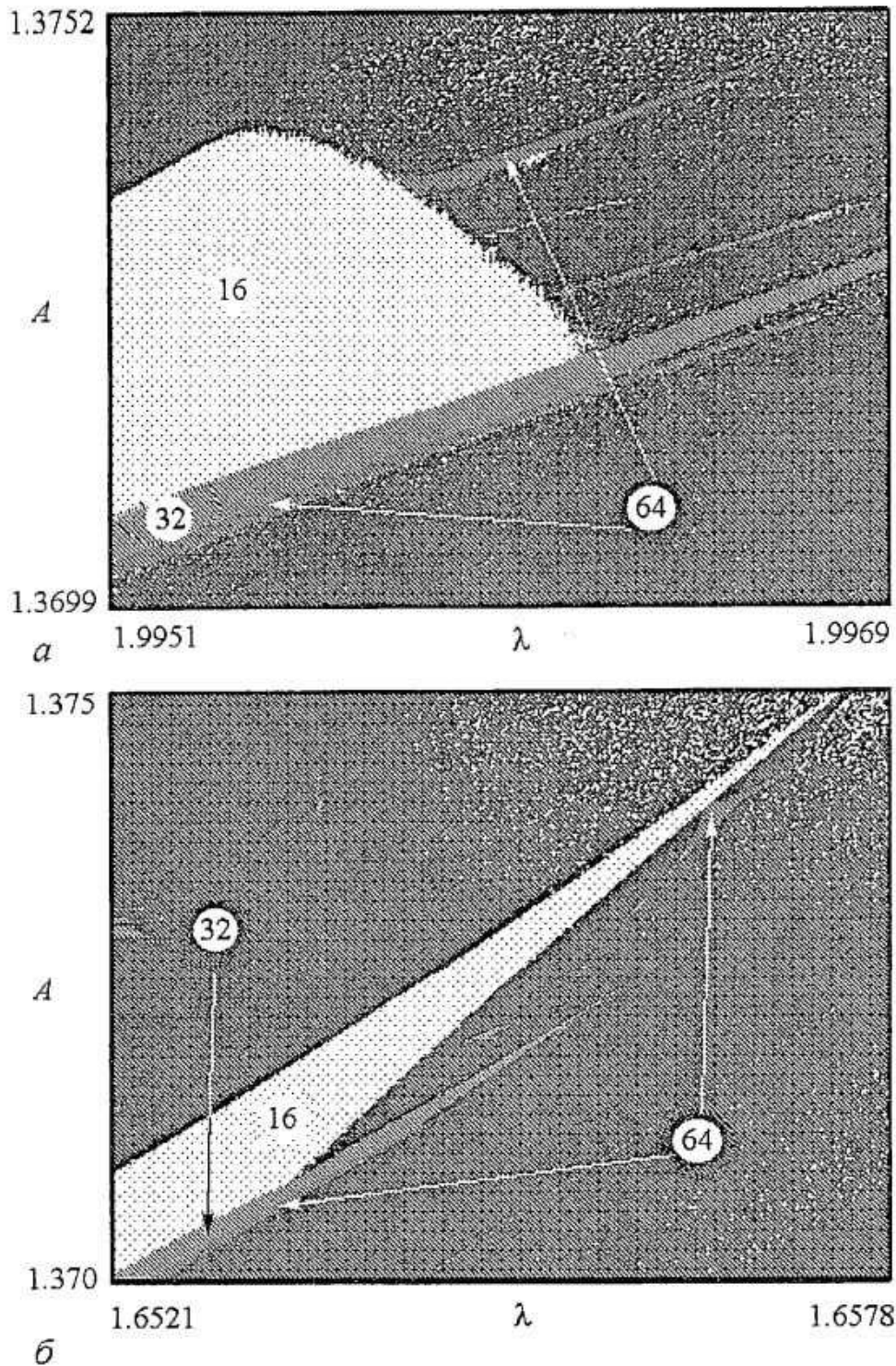


Рис. 4. Тонкая структура плоскости параметров вблизи точки накопления PDT-точек: *a* - для системы связанных отображений Эно (3) и *б* - связанных логистических отображений (1)

Из этих численных данных видно, что последовательность PDT-точек хотя и не является монотонной, но достаточно хорошо сходится к точке с координатами $\lambda_c = 1.99681\dots$ и $A_c = 1.372575\dots$. Если, однако, обратиться к окрестности предельной точки, то можно видеть, что по своему устройству плоскости параметров связанных отображений Эно и логистических отображений в некоторых деталях различаются (сравните рис. 4, *a* и *б*). Так, по-разному устроена область периода 16. В случае логистических отображений она вытянута аналогично области периода 32, причем к нижней ее границе примыкает характерный язык синхронизации периода 64 (см. рис. 4, *б*). В то же время, для связанных отображений Эно область периода 16 ограничена справа линией, идущей в

противоположную сторону, а примыкающая к ней область периода 64 имеет совершенно другую форму.

В табл. 2 приведены определенные из последовательности PDT-точек значения собственных чисел и векторов¹ скейлинговой матрицы, то есть констант и направлений скейлинга в пространстве параметров. Хорошо видно, что полученные значения не только не сходятся к какому-либо пределу, но даже не являются близкими к характерным для типа FQ значениям $\delta_1=6,32631925\dots$ и $\delta_2=3,44470967\dots$ [13].

Метод приравнивания мультипликаторов дает аналогичные результаты (см. табл. 3 и 4). Последовательность значений параметров сходится к тем же значениям, что и последовательность PDT-точек, а константы скейлинга и мультипликаторы не демонстрируют сходимости.

Таблица 2

N	δ_1	k_1	δ_2	k_2
32	4.8933154462	1.0527078332	-1.7677933141	0.8136146977
64	5.7735161148	1.0618518238	-1.9484228812	0.7917875975
128	5.9926045444	0.8483763694	-53.676711965	0.7934952985
256	8.6510607419	0.8402148829	1.6728600590	0.8741604923
512	1.9132819289+ +i2.4126309404	—	1.9132819289- -i2.4126309404	—
1024	7.8519009324	0.8678952769	-0.9655094017	0.8264079992
2048	35.8392805175	0.8234232061	4.2114730875	0.8292153379

Таблица 3

N	$2N$	λ	A	μ_1	μ_2
32	64	1.9969124398	1.3727041660	-1.55854083+ + i0.3607099	-1.55854083- - i0.36070989
64	128	1.9968004145	1.3725655428	-1.63021166	-0.99523694
128	256	1.9968134885	1.3725813958	-1.68722397	-1.17913205
256	512	1.9968021017	1.3725676291	-1.58523901	-0.57471264
512	1024	1.9968083843	1.3725752629	-1.48235261+ + i0.1773832	-1.48235261- - i0.17738321

Таблица 4

N	$2N$	δ_1	k_1	δ_2	k_2
32	64	10.922514659	0.6199830434	3.5720883442	0.8220440721
64	128	3.8395331550+ +i0.44904466	—	3.8395331550- -i0.44904466	—
128	256	10.496833297	0.7691942096	3.6876523713	0.8373123253
256	512	4.8531849223	0.8698848848	1.8060630873	0.8195198177
512	1024	8.9414001110	0.8046329966	3.6714378890	0.8270404275

¹ Для собственных векторов приведены их угловые коэффициенты (тангенсы углов наклона к оси λ) k_1 и k_2 .

Эти результаты позволяют сделать вывод, что при переходе от связанных логистических отображений к системе связанных отображений Эно тип критичности FQ не сохраняется.

Можно предложить объяснение этому факту. Как известно из строгого ренормгруппового анализа, у соответствующего ренормгруппового уравнения кроме двух собственных чисел $\delta_1=6,32631925\dots$ и $\delta_2=3,44470967\dots$, ответственных за скейлинг на плоскости управляющих параметров подсистем, имеется и третье собственное число $\delta_3=-1,900\dots$ [13-16]. Это число оказывается «незадействованным» в системе связанных логистических отображений из-за присутствующей скрытой симметрии аналогично тому, как оказываются незадействованными все три собственных числа для трикритической динамики [17,18]. Его «включение» при переходе к обратимым отображениям Эно приводит к разрушению критичности типа FQ, поскольку теперь соответствующая точка имеет коразмерность три. Таким образом, критическая динамика связанных отображений с удвоениями периода дает еще один пример ситуации, когда переход к обратимым отображениям повышает коразмерность соответствующего феномена (сценария перехода к хаосу) на единицу.

4. Система диссипативно связанных отображений Эно

Можно ли все же каким-то образом пронаблюдать критическую динамику типа FQ в системе связанных обратимых отображений Эно? Устранить влияние третьего собственного числа можно введением связи специального вида - так называемой диссипативной связи [13-15].

В общем виде две автономные системы с диссипативной связью можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + C(f(x_n) - g(y_n)), \\y_{n+1} &= g(y_n) + B(g(y_n) - f(x_n)),\end{aligned}\tag{10}$$

где B и C - параметры связи². Такая связь стремится «выровнять» значения динамических переменных парциальных систем.

Записав систему (10) с использованием отображений Эно в качестве автономных систем и произведя замену параметров (для того чтобы система переходила в (1) с теми же константами связи при $b=0$), получим систему диссипативно связанных отображений Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - b(1-C')y_n - C u_n^2 - bC'v_n, & y_{n+1} &= (1-C')x_n + C'u_n, \\u_{n+1} &= 1 - A u_n^2 - b(1-B')v_n - B x_n^2 - bB'y_n, & v_{n+1} &= (1-B')u_n + B'x_n.\end{aligned}\tag{11}$$

Здесь введены обозначения $C'=C(\lambda-B)/(A\lambda-CB)$, $B'=B(A-C)/(A\lambda-CB)$, а значения параметров выбраны такими же, как в разделе 1: $B=0.375$, $C=-0.25$, $b=0.2$.

На рис. 5 приведена карта динамических режимов системы (11). Видно, что устройство плоскости параметров практически полностью совпадает с характерным для связанных логистических отображений (1) (сравните рис. 5 и рис. 1, б). Определенную особенность представляют появляющиеся вдоль осей управляющих параметров области «убегания» траектории на бесконечность.

² В системе (1) квадратичная связь была диссипативной. При переходе к системе (2) диссипативность связи нарушилась, поскольку появились еще две переменные.

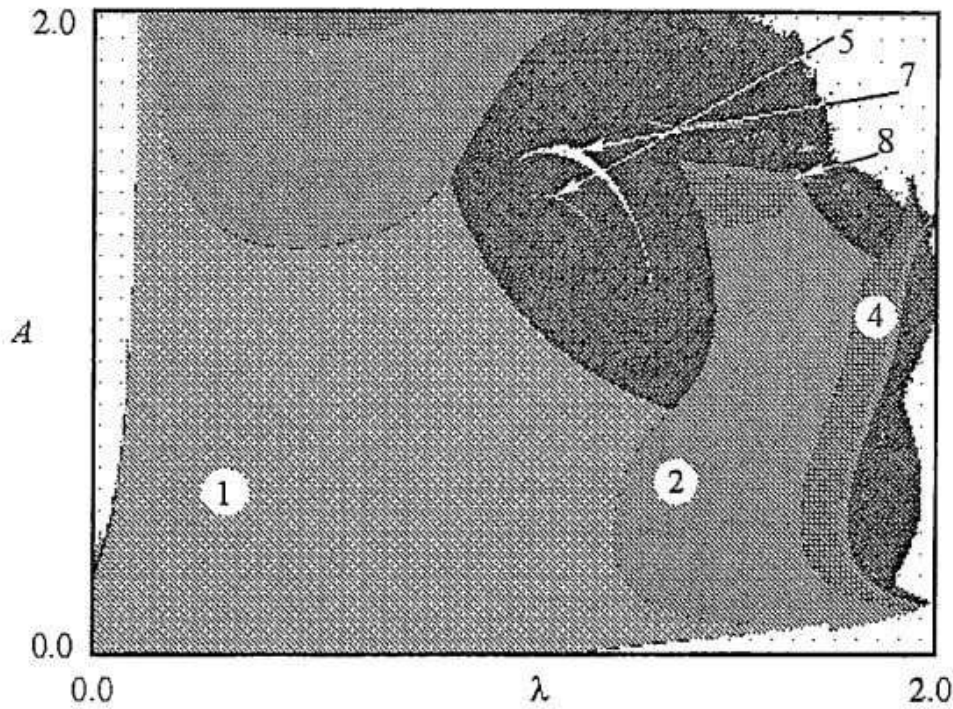


Рис. 5. Карта динамических режимов для системы связанных отображений Эно с диссипативной связью (11)

Весьма любопытно, что в окрестности границы между областями устойчивости цикла периода 1 и глобальной неустойчивости располагается очень узкая область квазипериодических движений, в которую встроены языки Арнольда (рис. 6; обратите внимание на масштаб рисунка). Эта особенность связанных отображений Эно, хотя и очень интересна, располагается вдали от точки накопления PDT-точек и не сказывается на картине в ее окрестности.

Попробуем найти точку FQ в системе (11), используя представленные выше

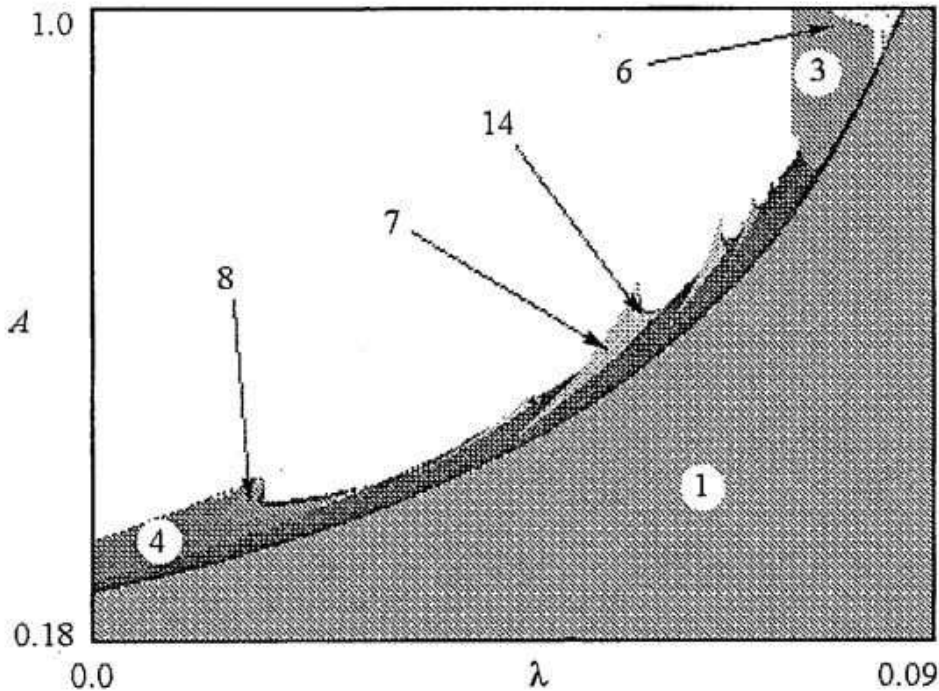


Рис. 6. Узкая область квазипериодических движений на границе области устойчивости на плоскости параметров диссипативно связанных отображений Эно (11) в увеличенном виде

методы. В табл. 5 приведены координаты PDT-точек, а в табл. 6 - соответствующие значения констант и направлений скейлинга³.

Таблица 5

n	λ	A
1	1.38086158309370	0.767475147912510
2	1.86757505232277	1.2465952177085
4	1.97122317625588	1.34817658582353
8	1.99205486911043	1.36816213548345
16	1.99586986012335	1.37171420874537
32	1.99658765207043	1.37237639851598
64	1.99679762782443	1.37259964564689
128	1.99686780498146	1.37268023315623
256	1.99688666711350	1.37270235786756
512	1.99689167237394	1.37270830331782
1024	1.99689328976159	1.37271024552807
2048	1.99689374523250	1.37271079464915
FQ	1.99689...	1.372711...

Таблица 6

n	δ_1	k_1	δ_2	k_2
64	6.3443901435	2.1783225565	2.6224980367	0.8182342331
128	9.1135776261	0.7378513318	4.2230717098	0.8403653521
256	6.0336077820	0.5289292370	3.8482016876	0.8246878272
512	5.7675233495	0.8700967996	2.3145232861	0.8224543110
1024	7.5488624760	8.0161196451	3.9563831279	0.8265435416

Видно, что последовательность PDT-точек хорошо сходится к точке $\lambda_c=1.99689\dots$, $A_c=1.372711\dots$, а значения констант скейлинга хоть и медленно, но все же приближаются к характерным для типа FQ значениям $\delta_1=6.32631925\dots$ и $\delta_2=3.44470967$. (Отметим, что скорость сходимости хотя и не очень высока, но практически такая же, как и в случае связанных логистических отображений. Добиться более высокой точности численными методами не удастся, поэтому для более точного определения скейлинговых факторов необходим ренормгрупповой анализ.)

Обратим также внимание на то, что собственное направление, соответствующее константе δ_2 , демонстрирует достаточно хорошую сходимость, а соответствующее константе δ_1 (параметр k_1 в табл. 8) - нет. Совершенно аналогичная ситуация наблюдается и при исследовании системы связанных логистических отображений (1) с помощью данного метода. Это свидетельствует о том, что константе δ_1 не отвечает фиксированное направление в пространстве параметров.

В табл. 7 и 8 приведены результаты исследования системы (11) методом приравнивания мультипликаторов. Координаты критической точки в этом случае можно определить более точно ($\lambda_c=1.9968939\dots$, $A_c=1.3727110\dots$), а константы

³ В отличие от системы (3), инварианты матрицы монодромии системы (11) связаны более сложным образом. Однако при фиксированных параметрах связи и диссипации ее определитель постоянен, а три остальных инварианта зависят только от выражений $A\mu$ и $\lambda\mu$, поэтому в качестве независимых можно выбрать два любых инварианта из трех.

Таблица 7

n	λ	A	μ_1	μ_2
16	1.99687691641775	1.37268668506845	-1.6170589314	-1.0112255964
32	1.99688585640509	1.37270094253325	-1.5843693263	-1.0369086877
64	1.99689573668345	1.37271326317861	-1.5683321681	-1.0871398197
128	1.99689414055984	1.37271127155012	-1.5903527325	-1.0525173079
256	1.99689375950757	1.37271081030431	-1.5844004769	-1.0359465453
512	1.99689395237675	1.37271104530920	-1.5684327452	-1.0771637002
1024	1.99689392799765	1.37271101559994	-1.5847107614	-1.0545699415
FQ	1.9968939...	1.3727110...		

Таблица 8

n	δ_1	δ_2	k_1	k_2
32	6.37230587644639	3.35439783114072	-0.1599570414666	0.82328552366704
64	6.40710291097091	3.47269258053367	-0.4845874935710	0.82499823121141
128	6.28763506485056	3.49448642834621	-4.6695291430479	0.82569786364289
256	6.29957692687017	3.37416298825241	0.02514259807977	0.82520711519217
512	6.38625353078327	3.41934418784381	0.19201772847962	0.82515911805565
1024	6.29424829695937	3.46133630862438	1.43131919277669	0.82518215509976

скейлинга несколько лучше сходятся к характерным значениям для типа FQ. Величины мультипликаторов также приближаются к универсальным для типа FQ значениям $\mu_1 = -1.057149\dots$ и $\mu_2 = -1.579739\dots$. Это позволяет сделать вывод, что в системе (11) обратимых двумерных отображений, связанных диссипативной связью, реализуется тип критичности FQ.

5. Скейлинг в окрестности точки FQ на плоскости параметров системы диссипативно связанных отображений Эно

Для того чтобы окончательно убедиться в существовании критической точки типа FQ в системе связанных отображений Эно (11), продемонстрируем скейлинг в ее окрестности с универсальными константами. Для этого, как и обычно для критических явлений, необходимо выбрать соответствующим образом систему скейлинговых координат (C_1, C_2) , по которым будет производиться перемасштабирование с константами δ_1 и δ_2 . В нашем случае для демонстрации скейлинга достаточно косоугольной системы координат, отвечающей линейной связи между «естественными» и скейлинговыми переменными. Ось C_2 направим вдоль собственного направления, соответствующего константе δ_2 (см. табл. 8). Поскольку константе δ_1 не отвечает определенное направление, то ось C_1 можно выбирать произвольно. Выберем ее совпадающей с осью λ . Тогда «естественные» и скейлинговые координаты будут связаны следующим соотношением:

$$A = A_c + C_2, \quad (12)$$

$$\lambda = \lambda_c + C_1 + kC_2,$$

где $A_c = 1.3727110\dots$ и $\lambda_c = 1.9968939\dots$ - координаты критической точки, $k = 0.8452\dots$ - угловой коэффициент оси C_2 в «естественной» системе координат.

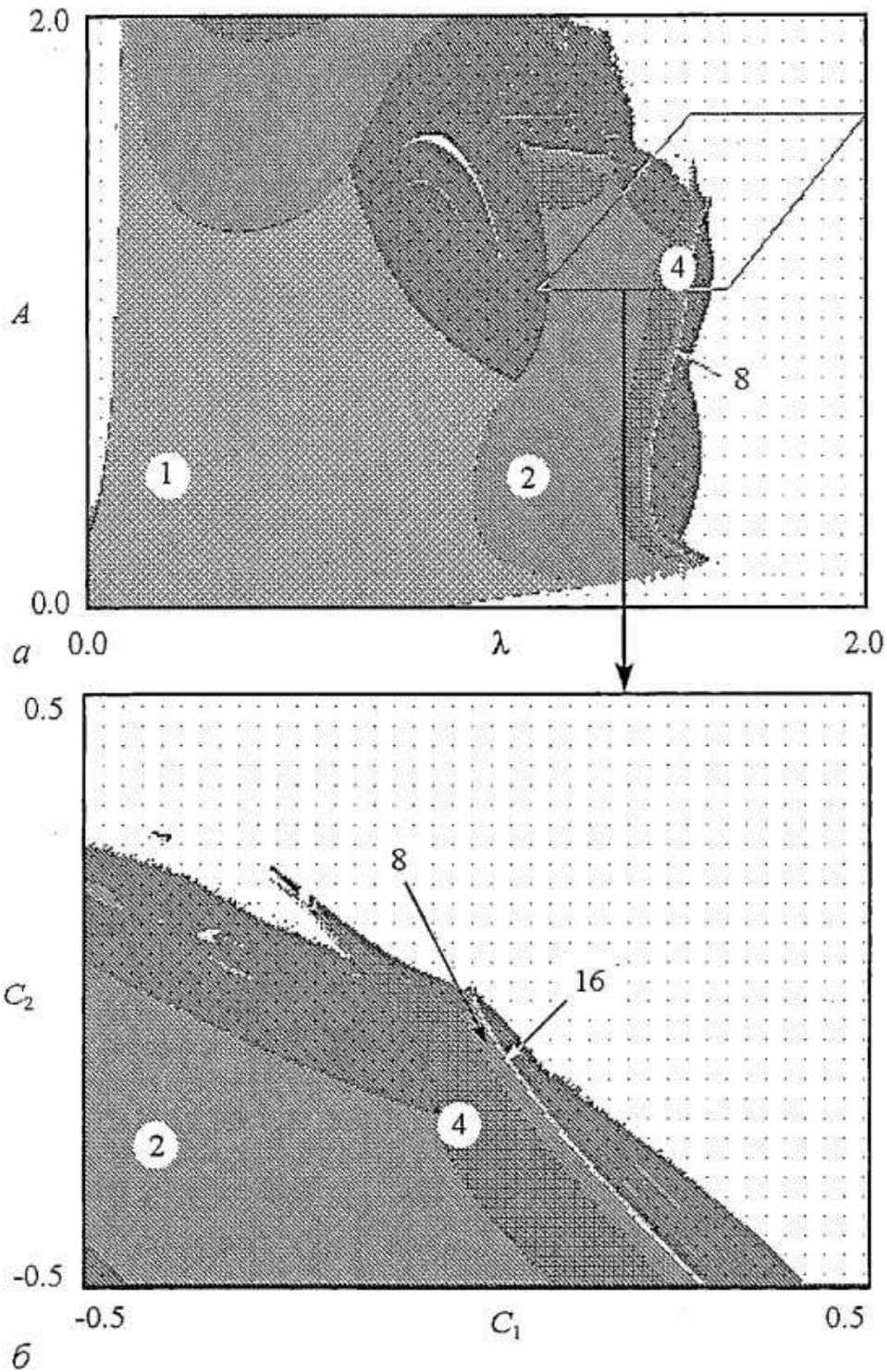


Рис. 7. Карта динамических режимов диссипативно связанных отображений Эно (11) и ее выделенный фрагмент в скейлинговых координатах

На рис. 7 продемонстрировано, как происходит преобразование карты динамических режимов в скейлинговые координаты. На верхнем рисунке показан выделенный фрагмент, задающий оси косоугольной системы, а внизу - этот же фрагмент, перестроенный в скейлинговые координаты. Соответствующие иллюстрации скейлинга дает пара рисунков 8, а, на которых показана достаточно малая окрестность критической точки и ее увеличенный в соответствующее число раз $\delta_1=6.32631925\dots$ и $\delta_2=3.44470967\dots$ фрагмент. Цифрами обозначены периоды циклов, при этом «цвет» областей изменен так, чтобы на исходном рисунке и его увеличенном фрагменте они были одинаковы для циклов удвоенного периода. Видно, что устройство плоскости параметров очень хорошо воспроизводится при

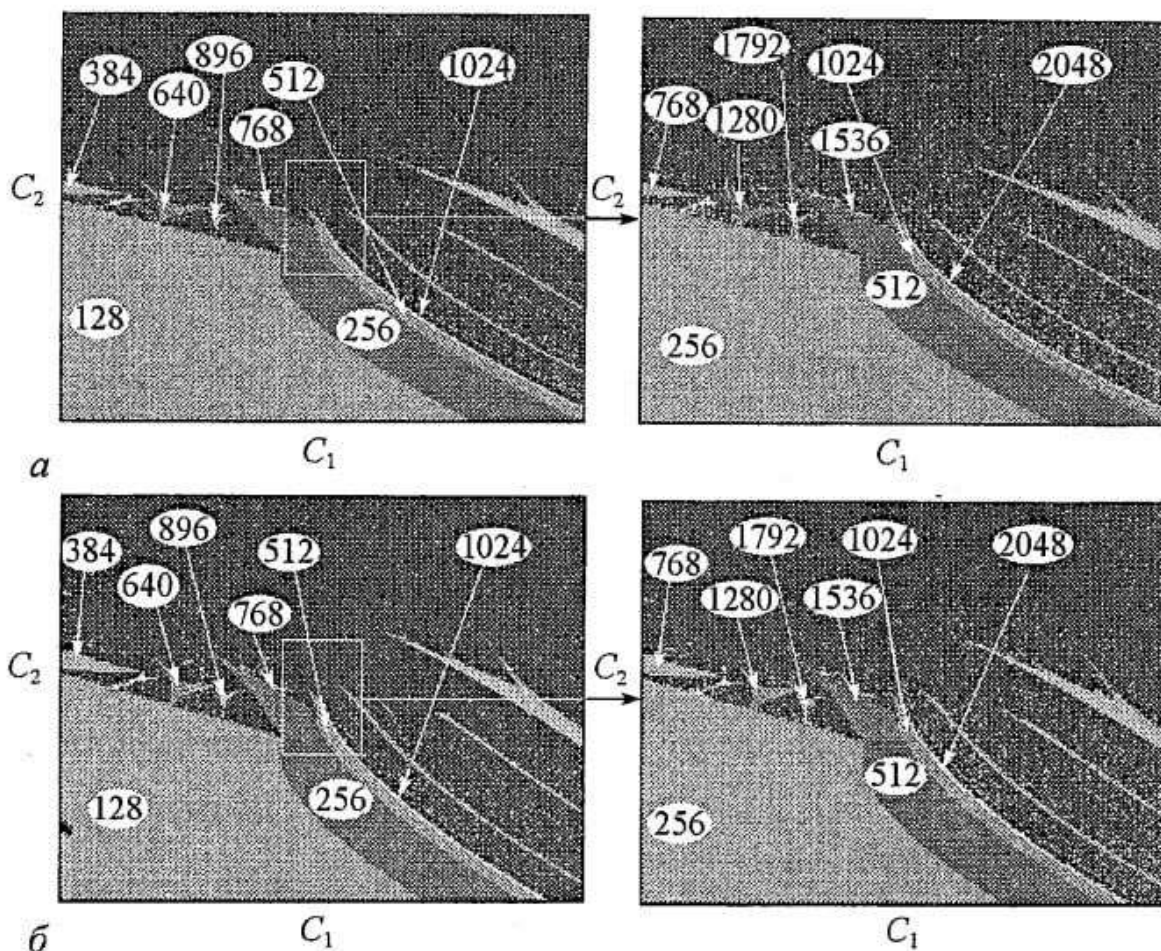


Рис. 8. Иллюстрация скейлинга на плоскости параметров системы: *а* - диссипативно связанных отображений Эно (11) и *б* - логистических отображений (1). Справа - увеличенные в соответствующее число раз выделенные фрагменты рисунков. Пересчет масштабов производится в δ_1 раз по оси C_1 и в δ_2 раз по оси C_2

соответствующем преобразовании подобия. Заметим также, что оно практически полностью совпадает с устройством аналогичной области параметров для системы связанных логистических отображений (1), показанной на нижней паре рисунков 8, *б*. Это является еще одним аргументом в пользу универсальности данного типа критичности.

Заключение

Таким образом, характерный для связанных необратимых отображений тип критичности FQ «не выживает» как феномен коразмерности 2 при переходе к связанным обратимым отображениям. Эта ситуация, наряду с трикритической динамикой, является еще одним примером того, что при рассмотрении критических явлений (сценариев перехода к хаосу) переход к обратимым отображениям может приводить к повышению на единицу коразмерности соответствующего типа поведения. В то же время этот тип критичности можно наблюдать и при двухпараметрическом анализе, для чего необходимо ввести между системами связь специальным образом. В этом случае устройство плоскости параметров в окрестности критической точки демонстрирует соответствующий скейлинг (подобие) и полностью аналогично наблюдающемуся в системе одномерных необратимых связанных отображений. Связанные обратимые отображения могут демонстрировать интересные особенности устройства

плоскости управляющих параметров - языки синхронизации, замкнутые в кольцо, и тонкие области квазипериодики со встроенными языками, разделяющие области периодических режимов и разбегания траекторий.

Авторы благодарны д.ф.-м.н., профессору Кузнецову С.П. и к.ф.-м.н. Сатаеву И.Р., а также профессору Сан Юн Киму (университет Кангвон, Республика Корея) за полезные консультации и обсуждение.

Работы выполнены при поддержке грантов CRDF REC-006, РФФИ № 03-02-16074 и № 03-02-16192.

Библиографический список

1. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во СГУ, 1999.
2. Fujisaka H., Yamada Y. Stability theory of synchronized motions in coupled oscillatory systems // Progr. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. P. 32.
3. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, №8. С. 991.
4. Ashwin P., Buescu J., Stewart I. From attractor to chaotic saddle: tale of transverse instability // Nonlinearity. 1994. Vol. 9. P. 703.
5. Ott E., Sommerer J.C. Blowout bifurcation in chaotic dynamical systems // Phys. Lett. A. 1994. Vol. 188. P. 39.
6. Kaneko K. Spatiotemporal chaos in one- and two-dimensional coupled map lattices // Physica D. 1989. Vol. 32. P. 60.
7. Kuznetsov S.P. Universality and scaling in two-dimensional coupled map lattices // Chaos, Solitons and Fractals. 1992. Vol. 2, №3. P. 281.
8. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, №10-12. С. 1079.
9. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И. Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, №1. С. 35.
10. Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П. Новый тип критического поведения связанных систем при переходе к хаосу // ДАН СССР. 1986. Т. 287, №3. С. 619.
11. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Variety of types of critical behavior and multistability in period doubling systems with unidirectional coupling near the onset of chaos // Int. J. of Bif. & Chaos. 1993. Vol. 3, №1. P. 139.
12. Kim S.Y. Bicritical behavior of period-doublings in unidirectionally coupled maps // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59, №6. P. 6585.
13. Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Period-doubling for two-dimensional non-invertible maps: renormalization group analysis and quantitative universality // Physica D. 1997. Vol. 101. P. 249.
14. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. A variety of period-doubling universality classes in multiparameter analysis of transition to chaos // Physica D. 1997. Vol. 109. P. 91.
15. Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Universality and scaling in non-invertible two-dimensional maps // Physica Scripta. 1996. Vol. T67. P. 184.
16. Кузнецов С.П. Хаос: сценарий Фейгенбаума и его обобщения // Империя математики. 2000, №1. С. 1.
17. Kuznetsov S.P. Tricriticality in two-dimensional maps // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 169. P. 438.
18. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Turukina L.V. Two-parameter

analysis of the scaling behavior at the onset of chaos: tricritical and pseudo-tricritical points //Physica A. 2001. Vol. 300. P. 367.

19. *Henon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor //Commun. Math. Phys. 1976. Vol. 50. P. 69.

20. *Derrida B., Gervois A., Pomeau Y.* Universal metric properties of bifurcation of endomorphisms // J. Phys. A. 1979. Vol. 12. P. 269.

*Саратовский государственный
университет
Саратовское отделение Института
радиотехники и электроники РАН*

Поступила в редакцию 10.06.03

ON SOME TYPE OF TRANSITION FROM ORDER TO CHAOS IN THE SYSTEM OF COUPLED MAPS WITH PERIOD DOUBLING

A.P. Kuznetsov, A.V. Savin

The critical behavior at the onset of chaos in the system of coupled invertible 2D-maps is investigated. It is shown that the type of critical behavior which was found in the system of coupled noninvertible 1D-maps exists also in the system of coupled invertible 2D-maps, but only for the special type of coupling. For this system we obtained the coordinates of critical point and demonstrated scaling in the parameter plane near this point.



Кузнецов Александр Петрович - родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики».

E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.tserv.ru



Савин Алексей Владимирович - родился в Саратове (1980), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002). В настоящее время аспирант кафедры динамических систем СГУ. Соавтор 3 статей в научных журналах. Область научных интересов - исследование критической динамики модельных нелинейных систем.



СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ЦИКЛОВ СИСТЕМЫ РЕССЛЕРА ПРИ ПЕРЕХОДЕ К ХАОСУ

Л.Б. Ряшко, И.А. Башкирцева, П.В. Стихин

На примере нелинейной модели Ресслера исследуется чувствительность автоколебаний систем к случайным возмущениям. Анализ стохастической чувствительности осуществляется при помощи эмпирического подхода и с использованием метода квазипотенциала. Демонстрируются возможности описания пространственной ориентации и формы разброса пучка случайных траекторий в виде эллипсов рассеивания. Полученные результаты позволяют проследить динамику роста стохастической чувствительности циклов системы Ресслера в цепи бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу.

Введение

Случайные воздействия могут оказать существенное влияние на качественное поведение динамических систем. Изучение автоколебаний нелинейных систем в присутствии случайных возмущений было начато в [1] и продолжено в большом числе работ [2-7]. Обзор некоторых последних результатов можно найти в [8,9].

Анализ хаотических аттракторов с учетом случайных флуктуаций рассматривался в [10-12].

Под воздействием стохастических возмущений траектория, стартующая из некоторой точки цикла, формирует вокруг него так называемый пучок случайных траекторий. Исчерпывающее описание плотности распределения пучка случайных траекторий дается уравнением Фоккера - Планка - Колмогорова (ФПК). Следует отметить, что прямое использование этого уравнения даже в простейшем случае нелинейного стохастического осциллятора с одной степенью свободы является затруднительным. Если характер переходного процесса является несущественным, то обычно ограничиваются рассмотрением стационарного уравнения ФПК. Аналитическое исследование данного уравнения даже в случае цикла на плоскости представляет собой весьма сложную задачу.

В последнее время при исследовании стохастической динамики активно применяется новый подход, связанный с использованием некоторой функции, получившей название квазипотенциала. Данная функция появилась в связи с решением задачи Колмогорова о выходе случайной траектории из окрестности устойчивой точки покоя [13-16]. Квазипотенциал позволяет находить такие

важные вероятностные характеристики, как среднее время выхода случайной траектории из области устойчивой точки покоя и наиболее вероятную точку выхода. При помощи функции квазипотенциала удастся предсказывать тонкие эффекты воздействий внешних помех на рассматриваемую систему. Метод квазипотенциала в анализе чувствительности предельных циклов рассматривался в [8,15,17-20]. Следует отметить, что двумерный случай цикла на плоскости является достаточно хорошо изученным [8,18]. Трехмерный случай, представляющий особый интерес в связи с исследованием возможных переходов к хаосу, только начинает рассматриваться [19,20].

В настоящее время одной из классических моделей нелинейной хаотической динамики является система, предложенная О.Е.Ресслером [21] для описания химической периодической реакции Белоусова - Жаботинского [21,22]. У системы Ресслера, состоящей из трех нелинейных дифференциальных уравнений, наблюдаются предельные циклы с каскадом бифуркаций удвоения периода.

Данная работа посвящена исследованию чувствительности предельных циклов модели Ресслера к малым случайным возмущениям. В первом разделе дается описание детерминированной модели Ресслера (точки покоя, предельные циклы, бифуркационная диаграмма). В зоне бифуркаций удвоения периода представлены зависимости мультипликаторов и локальных экспонент - основных характеристик детерминированной устойчивости наблюдаемых здесь циклов - от параметра системы.

Второй раздел посвящен исследованию чувствительности циклов модели Ресслера к случайным возмущениям. Для оценки разброса пучка случайных траекторий относительно орбит предельных циклов использовались два подхода: эмпирический и теоретический.

Эмпирический анализ использует результаты прямого численного моделирования случайных траекторий и сводится к расчету ковариационных матриц для точек пересечения пучка с нормальными плоскостями.

В основе теоретического подхода лежит метод квазипотенциала. При описании квазипотенциала используется новая конструкция - функция чувствительности [18,19], которая позволяет сравнивать между собой чувствительность различных частей цикла к стохастическим помехам.

Приводятся эллипсы рассеивания - теоретические оценки разброса точек пересечений пучка случайных траекторий с нормальными плоскостями. Эллипсы рассеивания дают наглядное представление об изменении формы и пространственной ориентации пучка случайных траекторий вдоль орбиты цикла.

Показано, что увеличение кратности цикла сопровождается ростом его стохастической чувствительности и жесткости. Проводится сопоставление эмпирических и теоретических результатов.

Демонстрируется разница в поведении функции стохастической чувствительности и экспоненциального показателя системы.

1. Детерминированная модель Ресслера

Рассмотрим детерминированную систему Ресслера [21]

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + \alpha y, \\ \dot{z} = \alpha + z(x - \mu), \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha > 0$, $\mu > 0$ - параметры системы.

1.1 Предельные циклы. В данной работе рассматриваются предельные циклы системы Ресслера для фиксированного значения $\alpha=0.2$, при изменении параметра μ на интервале $(0.4;10)$. На рис. 1, *a-e* представлены графики детерминированных циклов системы Ресслера для различных значений μ . При

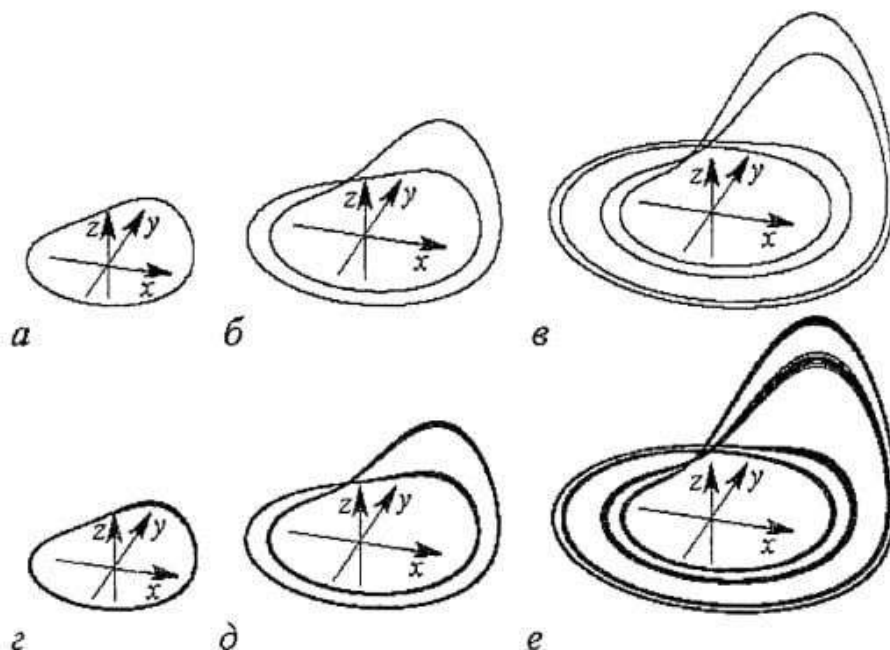


Рис. 1. Детерминированные циклы системы Ресслера для различных значений μ : *a* - 2, *б* - 3, *в* - 4 и пучки случайных траекторий модели Ресслера при возмущении $\epsilon=0.003$ и различных значениях μ : *г* - 2, *д* - 3, *е* - 4

компьютерном моделировании решений системы (1) использовался метод Рунге - Кутты 4-го порядка с шагом по времени $h=10^{-3}$.

При увеличении параметра в указанном диапазоне система Ресслера демонстрирует сценарий каскада бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу. Здесь можно выделить зоны структурной устойчивости с постоянной кратностью циклов - интервалы I_0, I_1, \dots . На интервале I_k наблюдается 2^k -цикл. Таким образом, при $\alpha=0.2$ имеем $I_0=(2\alpha; \mu_{0,1})=(0.400; 2.830)$, $I_1=(\mu_{0,1}; \mu_{1,2})=(2.830; 3.836)$, $I_2=(\mu_{1,2}; \mu_{2,3})=(3.836; 4.123)$, $I_3=(\mu_{2,3}; \mu_{3,4})=(4.123; 4.186)$ и т.д.

1.2 Бифуркационная диаграмма. Общая картина бифуркаций хорошо прослеживается при помощи бифуркационной диаграммы. На рис. 2 для каждого

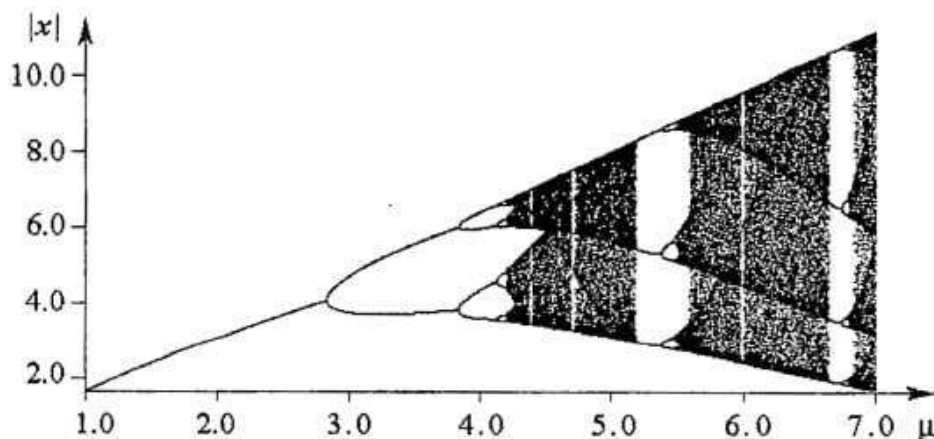


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма детерминированной модели Ресслера при $\alpha=0.2$

$\mu \in [1; 7]$ представлены точки пересечения аттрактора системы (1) с полуплоскостью $x < 0, y = 0$.

На приведенном рисунке можно наблюдать «зоны порядка» - интервалы, аттракторами в которых являются предельные циклы. Наиболее широкие «зоны порядка» для системы Ресслера лежат в интервалах (0.4; 4.2), (5.2; 5.5), (6.7; 6.8). На бифуркационной диаграмме кроме «зон порядка» наблюдаются «зоны хаоса», в которых аттракторы выглядят как множества, состоящие из сплошных зачерненных интервалов.

В данной работе исследуется устойчивость циклов в «зоне порядка» $0.4 \leq \mu \leq 4.2$. Традиционными характеристиками устойчивости детерминированных циклов служат мультипликаторы и локальные экспоненты.

1.3. Мультипликаторы. Рассмотрим общую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = f(u), \quad (2)$$

где u - n -мерный вектор, $f(u)$ - вектор-функция.

Предполагается, что у системы (2) существует T -периодическое решение $u = \xi(t)$ (цикл Γ). Рассмотрим систему первого приближения для отклонений $y = u - \xi(t)$ решений u системы (2) от решения $\xi(t)$

$$dy/dt = F(t)y, \quad (3)$$

где $F(t) = \frac{\partial f(\xi(t))}{\partial u}$ - T -периодическая матрица размерности $n \times n$.

Предположим, что система (3), получив в начальный момент времени некоторый внешний импульс, повлекший за собой сход с орбиты Γ , движется далее идеально, без каких-либо внешних воздействий, асимптотически приближаясь к Γ . Тогда мультипликаторы ρ_j ($j=1, \dots, n$) - собственные числа матрицы монодромии системы (3) характеризуют смещения начальной точки за один оборот цикла Γ вдоль соответствующих собственных векторов матрицы монодромии [23]. Один из мультипликаторов всегда равен единице ($\rho_1 = 1$) в силу наличия периодического решения Γ .

Неравенство $|\rho_j| < 1$ ($j=2, \dots, n$) является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости цикла [23].

Для системы (1) - нелинейной модели Ресслера - матрица $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ \xi_z(t) & 0 & \xi_x(t) - \mu \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $\xi(t) = (\xi_x(t), \xi_y(t), \xi_z(t))^T$.

Степень устойчивости циклов модели Ресслера за оборот определяется мультипликаторами ρ_2 и ρ_3 . На рис. 3 представлены зависимости $|\rho_2(\mu)|$ и $|\rho_3(\mu)|$. Значения мультипликаторов были получены численно (с использованием метода Рунге - Кутты) как собственные числа матрицы монодромии при изменении параметра μ в диапазоне $0.4 \leq \mu \leq 4.2$.

Отметим, что на самом деле мультипликаторы ρ_2 и ρ_3 становятся комплексными лишь в малой окрестности нуля.

Мультипликатор ρ_3 (рис. 3, б) практически не реагирует на увеличение параметра μ и при $\mu > 2$ лежит в диапазоне $|\rho| < 2 \cdot 10^{-4}$.

Мультипликатор ρ_2 позволяет сравнивать между собой циклы, соответствующие различным значениям параметра μ . Как видим, график $|\rho_2|$ (рис. 3, а)

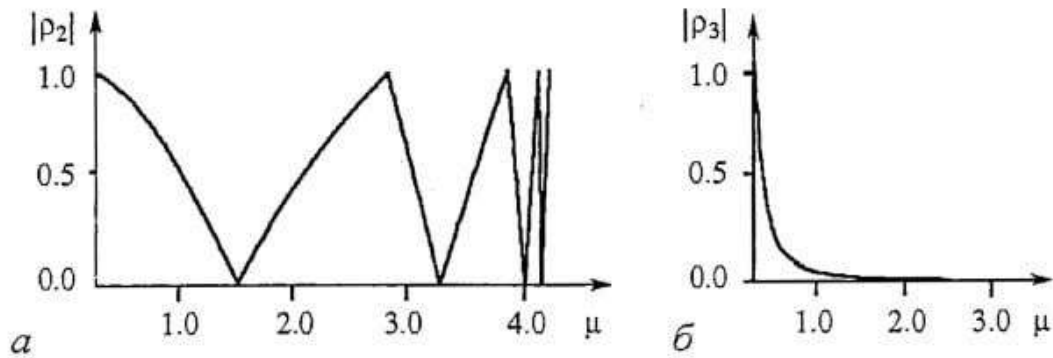


Рис. 3. Мультипликаторы циклов системы Ресслера

ведет себя «пилообразно», меняясь от 0 до 1. В точках бифуркации $|\rho_2|=1$. Цикл Γ при параметре $\mu_k^* = \operatorname{argmin}_{\mu \in I_k} |\rho_2(\mu)|$ будем называть 2^k -суперциклом. Такой 2^k -суперцикл является наиболее устойчивым циклом кратности 2^k на интервале I_k .

Для модели Ресслера 1-суперцикл наблюдается при $\mu_0^* = 1.549$, 2-суперцикл при $\mu_1^* = 3.277$, 4-суперцикл при $\mu_2^* = 3.985$, 8-суперцикл при $\mu_3^* = 4.156$ и 16-суперцикл при $\mu_4^* = 4.194$.

1.4. Локальные экспоненты. В качестве характеристик устойчивости цикла в точке $\xi(t)$ можно рассматривать локальные экспоненты $\lambda_j(t)$ ($j=1, \dots, n$) - собственные числа матрицы $F(t)$ системы первого приближения (3).

На рис. 4 приведены графики $\operatorname{Re}(\lambda_1(t))$ и $\operatorname{Re}(\lambda_2(t)) = \operatorname{Re}(\lambda_3(t))$ для системы

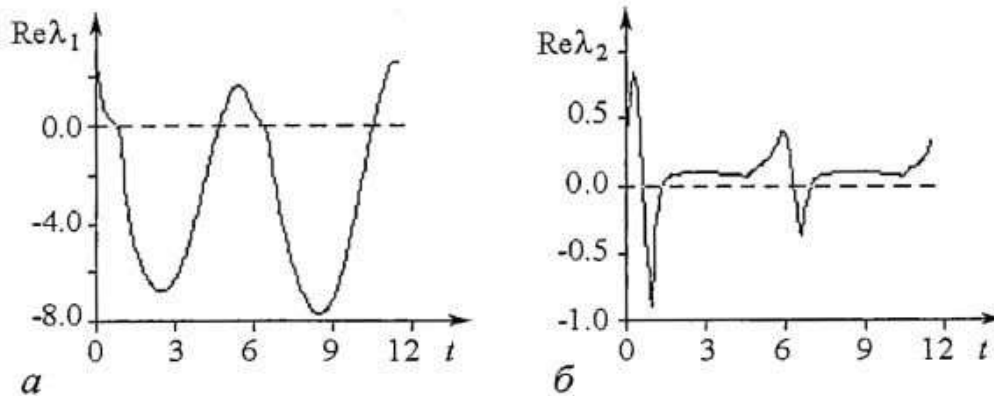


Рис. 4. Локальные экспоненты системы Ресслера для $\mu=3$

Ресслера (1) при $\mu=3$. Локальные экспоненты находились численно при решении характеристического уравнения для матрицы $F(t)$. Приведенные графики позволяют сделать вывод о локальной устойчивости и неустойчивости отдельных участков цикла. Как видим, интервалы устойчивости ($\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$) чередуются с интервалами неустойчивости ($\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$).

В связи с локальными экспонентами $\lambda_j(t, \mu)$ естественно ввести величину $L(\mu) = \max_{0 \leq t \leq T(\mu), 1 \leq j \leq n} \operatorname{Re}(\lambda_j(t, \mu))$. Функция $L(\mu)$ представляет собой экспоненциальный показатель, характеризующий степень «разбегания» траекторий в зоне максимальной неустойчивости цикла. На рис. 5 для системы

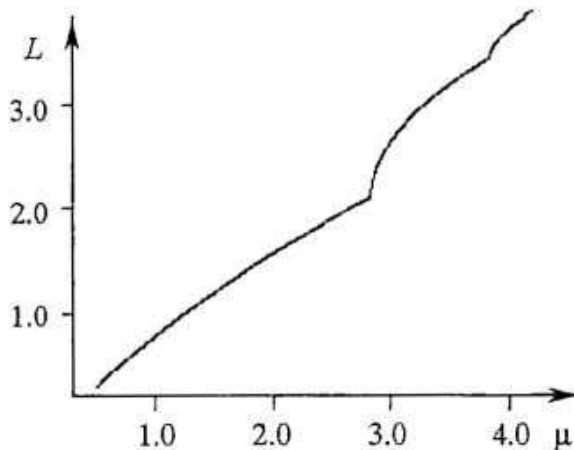


Рис. 5. График функции $L(\mu)$ для системы Ресслера

(1) представлен график $L(\mu)$. Из рисунка видно, что с приближением параметра μ к зоне хаоса рассматриваемое значение экспоненциального показателя $L(\mu)$ возрастает, что соответствует росту локальной неустойчивости циклов модели Ресслера.

2. Стохастическая модель Ресслера

Математическая модель стохастически возмущенной системы Ресслера имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y+z) + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{y} = x + \alpha y + \varepsilon \dot{w}_2, \\ \dot{z} = \alpha + z(x-\mu) + \varepsilon \dot{w}_3, \end{cases} \quad (5)$$

где $w_i(t)$ - независимые стандартные винеровские процессы ($i=1,2,3$), а ε - малый параметр (интенсивность случайных возмущений).

Наличие случайных возмущений приводит к тому, что траектории, стартующие из точек детерминированной орбиты (см. рис. 1, *a-b*), покидают ее, формируя вокруг цикла пучок случайных траекторий (рис. 1, *z-e*). Оценить влияние случайных помех при различных значениях параметра можно при помощи стохастической бифуркационной диаграммы (рис. 6).

Можно считать, что стохастическая бифуркационная диаграмма получается из уже рассмотренной бифуркационной диаграммы (см. рис. 2) «размыванием» линий графика под воздействием случайных возмущений. При этом пропадают все тонкие детали бифуркационной структуры, а остаются лишь первые наиболее грубые. Ширина «размывания» на графике представляет собой оценку ширины пучка случайных траекторий при соответствующем значении μ в выбранном сечении.

На рис. 6 хорошо видно, что эта ширина, характеризующая чувствительность цикла к действующим возмущениям весьма неоднородна. Для более детальной оценки стохастической чувствительности предельных циклов рассмотрим два метода: эмпирический и теоретический.

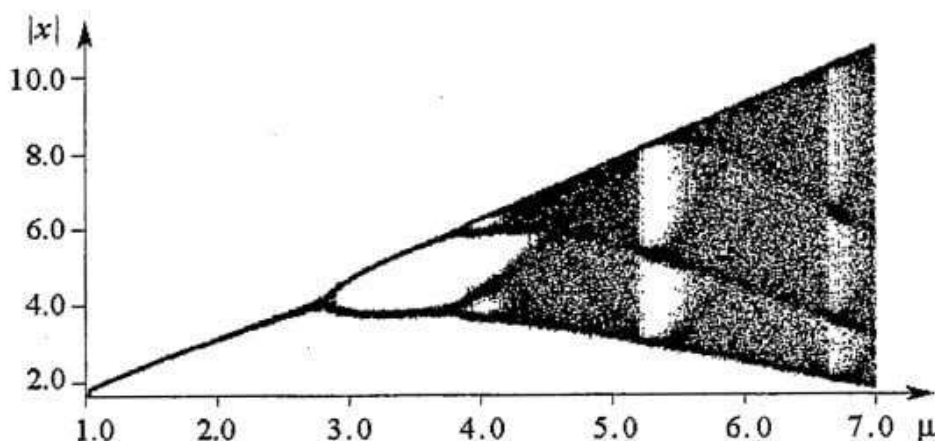


Рис. 6. Стохастическая бифуркационная диаграмма модели Ресслера при $\alpha=0.2$, $\varepsilon=0.003$

2.1. Эмпирический анализ стохастической чувствительности. Рассмотрим систему (2) с T -периодическим решением $u=\xi(t)$ (циклом Γ) и связанную с ней систему стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\dot{u} = f(u) + \varepsilon \sigma(u) \dot{w}, \quad (6)$$

где $w(t)$ - n -мерный стандартный винеровский процесс; $\sigma(u)$ - достаточно гладкая $n \times n$ - функция, характеризующая распределение случайных возмущений по координатам; ε - интенсивность случайных возмущений.

Под действием случайных возмущений траектория системы (6) покидает детерминированную орбиту и формирует вокруг Γ некоторый пучок. По ширине пучка случайных траекторий вокруг цикла можно судить как о степени устойчивости отдельных участков орбиты, так и о чувствительности всего цикла Γ в целом к случайным возмущениям.

Эмпирический анализ стохастической чувствительности опирается на прямое численное моделирование случайных траекторий системы (6). Для трехмерного случая ($n=3$) рассмотрим статистический способ оценки чувствительности цикла Γ системы (6) к случайным возмущениям. Эмпирические функции чувствительности для системы (6) строятся следующим образом.

1. На детерминированном решении $\xi(t)$, задающем цикл Γ , выбираются контрольные точки $\xi_i = \xi(t_i)$ с фиксированным шагом по времени $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ ($i=1, \dots, m$). В каждой точке ξ_i строится плоскость Π_i , ортогональная циклу Γ .

2. Для стохастической системы (6) на интервале $[0, kT]$ численно моделируется решение, стартующее из точки ξ_1 . Здесь k - количество витков пучка траекторий, статистически достаточное для оценки стохастической чувствительности.

3. В процессе прохождения траектории вдоль Γ на j -м витке последовательно фиксируются A_{ij} - точки пересечения траектории с плоскостями Π_i ($i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, k$).

4. Для каждой секущей плоскости Π_i по массиву A_{ij} ($j=1, \dots, n$) находится эмпирическая ковариационная матрица \bar{C}_i и матрица чувствительности $\bar{S}_i = \bar{C}_i / \varepsilon^2$ как отношение «выхода» \bar{C}_i ко «входу» ε^2 .

5. Для матрицы \bar{S}_i вычисляются собственные числа $\bar{D}_1(t_i) \geq \bar{D}_2(t_i) \geq \bar{D}_3(t_i)$. Собственное число $\bar{D}_3(t_i)$ равно нулю в силу вырожденности матрицы \bar{C}_i (так как все точки A_{ij} при фиксированном i лежат в плоскости Π_i).

Собственные числа $\bar{D}_1(t_i)$ и $\bar{D}_2(t_i)$ являются эмпирическими скалярными характеристиками чувствительности цикла системы (6) в точке ξ_i к случайным помехам. Значения рассматриваемых собственных чисел дискретно задают эмпирические функции чувствительности $\bar{D}_1(t)$ и $\bar{D}_2(t)$. Функции чувствительности характеризуют ширину пучка случайных траекторий в точке орбиты $\xi(t)$ вдоль соответствующих собственных векторов (ортогональных друг другу).

На рис. 7 приведены графики 10 функций $\bar{D}_1(t)$ и $\bar{D}_2(t)$, полученных для 10 выборочных экспериментов при $\mu=2.830075$ (значение параметра близкое к бифуркационному $\mu_{0,1}$) и для $\mu_1^*=3.277$ (значение параметра 2-суперцикла). Прямое численное моделирование случайных траекторий проводилось методом Рунге - Кутты четвертого порядка с добавлением на каждом шаге $h=10^{-3}$ соответствующего случайного возмущения интенсивности $\varepsilon=10^{-5}$ с количеством оборотов $k=150$.

Из рис. 7 следует, что значения функции $\bar{D}_1(t)$ превосходят значения функции $\bar{D}_2(t)$ на несколько порядков. Это говорит о том, что при воздействии стохастических возмущений разброс пучка случайных траекторий в плоскости ортогональной циклу является весьма неравномерным. Случайные траектории отклоняются преимущественно вдоль собственного вектора, соответствующего

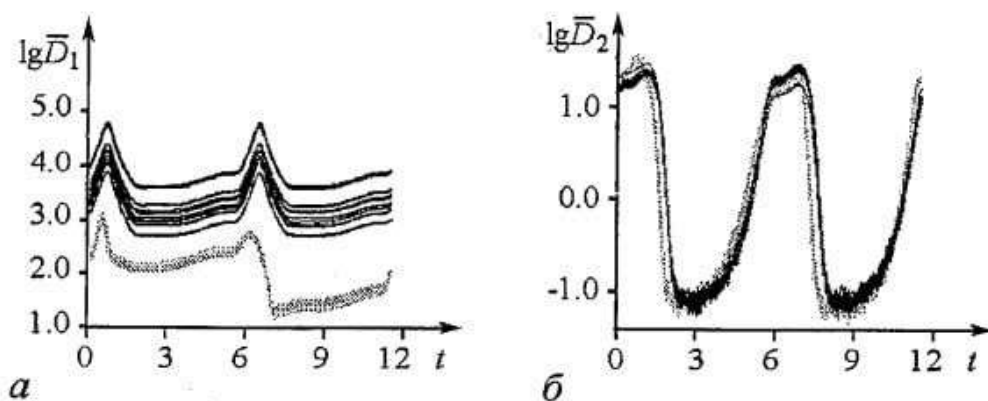


Рис. 7. Графики эмпирических функций чувствительности 2-циклов модели Ресслера для $\mu=2.830075$ (черный цвет) и $\mu=3.277$ (серый цвет) при $\epsilon=10^{-5}$

собственному значению $\bar{D}_1(t)$. Само значение $\bar{D}_1(t)$ определяет величину этого разброса. Поэтому именно функцию $\bar{D}_1(t)$ можно считать «индикатором» стохастической чувствительности цикла к случайным возмущениям.

Эксперименты, проведенные при значениях интенсивности случайных возмущений в диапазоне от $\epsilon=10^{-7}$ до $\epsilon=10^{-3}$, дали аналогичные результаты. Таким образом, эмпирические функции чувствительности в указанном диапазоне слабо зависят от ϵ .

Другой важной особенностью стохастических циклов модели Ресслера является существенный перепад значений функций чувствительности при движении вдоль цикла. На рис. 7 у $\bar{D}_1(t)$ и $\bar{D}_2(t)$ отчетливо видны два характерных всплеска, отражающие неравномерность ширины пучка случайных траекторий вокруг 2-цикла (см. рис. 1, б).

Отмеченные особенности в поведении эмпирических функций чувствительности наблюдаются как при значении $\mu=2.830075$, близком к бифуркационному, так и при $\mu=3.277$, отвечающему 2-суперциклу. Для \bar{D}_2 имеем практически полное совпадение. Для \bar{D}_1 имеем очевидное подобие. При приближении параметра μ к бифуркационному значению отмеченные выше акценты в поведении пучка вокруг цикла разве лишь усиливаются.

Кроме того, как видно на рис. 7, выборка из 10 графиков $\bar{D}_1(t)$ для окоlobифуркационного значения имеет гораздо больший разброс, что является еще одним свидетельством повышенной стохастической чувствительности.

Рассмотрим теперь эмпирические функции чувствительности в более широком диапазоне параметра μ - зоне бифуркаций удвоения периода. Здесь удобно перейти к функциям $\bar{M}_j(\mu) = \max_{0 \leq t \leq T(\mu)} \bar{D}_j(t, \mu)$, $j=1,2$, характеризующим чувствительность цикла (при параметре μ) в целом.

На рис. 8, где представлены графики функций $\bar{M}_j(\mu)$, полученные при интенсивности помех $\epsilon=10^{-5}$, видна общая тенденция увеличения чувствительности стохастических циклов при переходе параметра μ в зону циклов большой кратности.

При этом $\bar{M}_1(\mu)$ имеет в точках бифуркации отчетливо выраженные острые пики, отвечающие всплескам стохастической чувствительности. В графиках $\bar{M}_1(\mu)$ и $\bar{M}_2(\mu)$ присутствует весьма ощутимая шумовая составляющая, не позволяющая отследить возможные тонкие детали в поведении, например, функции $\bar{M}_2(\mu)$. Ослабление этой шумовой составляющей в рамках эмпирического подхода, основанного на прямом численном моделировании случайных траекторий,

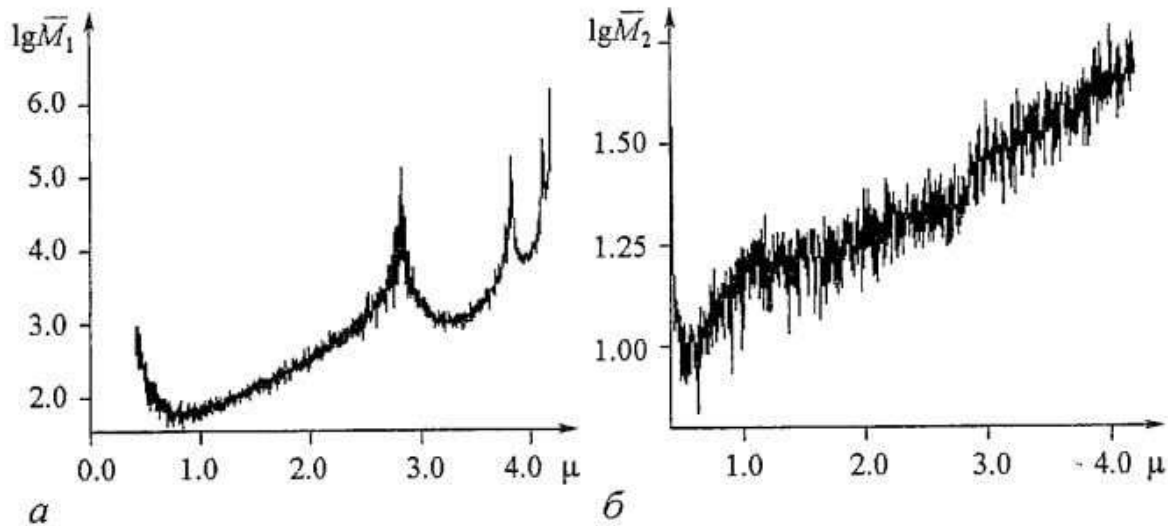


Рис. 8. Эмпирические функции чувствительности: а - $\bar{M}_1(\mu)$; б - $\bar{M}_2(\mu)$ при $\epsilon=10^{-5}$

возможно лишь за счет увеличения объема используемой выборки, что требует больших вычислительных ресурсов.

Эмпирический подход позволяет, как правило, получить лишь грубые приближения. Более тонкий анализ, использующий теоретические функции чувствительности и конструкцию квазипотенциала, рассматривается в следующем пункте.

2.2. Метод квазипотенциала в анализе стохастической чувствительности. Впервые квазипотенциал появился в работах А.Д. Вентцеля и М.И. Фрейдлина [13] в связи с решением задачи Колмогорова о выходе случайной траектории из окрестности устойчивой точки покоя. Предполагается, что фазовая кривая (цикл Γ) T -периодического решения $u=\xi(t)$ системы (2) является экспоненциально устойчивой. Плотность распределения $\rho(t, u, \epsilon)$ решения u стохастической системы (6) удовлетворяет уравнению ФПК

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = L\rho, \quad L\rho = \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 (a_{ij}\rho)}{\partial u_i \partial u_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f_i \rho)}{\partial u_i}, \quad a_{ij} = [\sigma \sigma^T]_{ij} \quad (7)$$

Если основной интерес представляет установившийся в (6) режим стохастических автоколебаний (а не характер переходного процесса), то можно ограничиться исследованием стационарной плотности распределения $\rho(u, \epsilon)$, которая задается стационарным уравнением ФПК: $L\rho=0$.

Квазипотенциал $v(u)$ определяет следующую асимптотику [13-15] стационарной плотности распределения

$$v(u) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \rho(u, \epsilon), \quad \rho(u, \epsilon) \approx K e^{-v(u)/\epsilon^2}. \quad (8)$$

Квазипотенциал связан с некоторой вариационной задачей минимизации функционала действия и удовлетворяет уравнению Гамильтона - Якоби

$$(f(u), \frac{\partial v}{\partial u}) + \frac{1}{2} (\frac{\partial v}{\partial u} \sigma(u) \sigma^T(u) \frac{\partial v}{\partial u}) = 0 \quad (9)$$

с условиями: $v|_{\Gamma}=0, v|_{D\Gamma}>0$.

Квазипотенциал $v(u)$ в окрестности D является функцией Ляпунова для системы (2) и позволяет показать асимптотическую устойчивость цикла Γ . Уравнение Гамильтона - Якоби (9) выглядит проще, чем исходное уравнение ФПК (7), однако и его точное решение является по-прежнему весьма сложной задачей.

Здесь возможен конструктивный подход [17,26], связанный с введением еще одной асимптотики - малой окрестности исследуемого цикла.

Аппроксимацией квазипотенциала $v(u)=\varphi(u)+O(\|\Delta(u)\|^3)$ (здесь $\Delta(u)=u-\gamma(u)$ - отклонение точки u от цикла Γ , γ - ближайшая к u точка цикла Γ) служит орбитальная квадратичная форма

$$\varphi(u) = 1/2 (\Delta(u), \Phi^+(\gamma(u))\Delta(u)), \quad (10)$$

задаваемая определенной на Γ симметрической $n \times n$ -матрицей $\Phi(\gamma)$.

В итоге при условии, что шумы и отклонения от цикла малы, асимптотика стационарной плотности распределения может быть записана в форме нормального распределения

$$\rho(u, \varepsilon) \approx \rho_*(u, \varepsilon) = K e^{-(\Delta(u), \Phi^+(\gamma(u))\Delta(u))/(2\varepsilon^2)}. \quad (11)$$

Матрица $\Phi(\gamma)$ из соотношения (11) характеризует разброс точек пересечения пучка случайных траекторий системы гиперплоскостью, ортогональной Γ и проходящей через точку γ . Другими словами, функция $\Phi(\gamma)$ характеризует реакцию системы (6) вблизи цикла на случайные воздействия и позволяет описать неравномерность ширины пучка случайных траекторий по всем направлениям вдоль собственных векторов, указать наиболее и наименее чувствительные к случайным возмущениям участки цикла [18]. Заметим, что матрица $\Phi(\gamma)$ является вырожденной, так как распределение сосредоточено в нормальной гиперплоскости. Следовательно, одно из собственных чисел матрицы $\Phi(\gamma)$ равно нулю, остальные собственные числа задают разброс случайных траекторий вокруг Γ в направлении соответствующих им собственных векторов.

Значение функции $\Phi(\gamma)$ удобно искать в параметрической форме [18]. Решение $\xi(t)$, связывающее точки Γ с точками интервала $[0;T]$, задает следующую параметризацию: $\Phi(\xi(t))=W(t)$. Матрица $W(t)$ для экспоненциально устойчивого цикла Γ является единственным решением уравнения Ляпунова

$$\dot{W} = F(t)W + WF^T(t) + P(t)S(t)P(t) \quad (12)$$

с условиями

$$W(0) = W(T) \quad (13)$$

$$W(t)r(t) \equiv 0, \quad (14)$$

где $F(t) = \frac{\partial f(\xi(t))}{\partial u}$, $S(t) = \sigma(\xi(t))\sigma^T(\xi(t))$; $r(t) = f'(\xi(t))$; $P(t) = P_{r(t)}$; $P_{r(t)} = I - rr^T/r^T r$ - матрица

проектирования на подпространство, ортогональное вектору $r \neq 0$.

Собственные числа $D_j(t)$ ($j=1, \dots, n$) матрицы $W(t)$ будем называть теоретическими функциями чувствительности. Будем считать, что $D_1(t) \geq D_2(t) \geq \dots \geq D_n(t)$, при этом $D_n(t) \equiv 0$.

Рассмотрим теоретические функции чувствительности $D_1(t)$ и $D_2(t)$ для стохастической системы Ресслера (5). На рис. 9 приведены графики функций чувствительности $D_1(t)$ и $D_2(t)$ для параметров $\mu=2.830075$ (значение параметра, близкое к бифуркационному) и $\mu=3.277$ (2-суперцикл) - тех же самых, что и для эмпирических функций чувствительности, изображенных на рис. 7.

Сопоставляя рис. 7 и рис. 9, можно отметить следующее. Кривые $D_2(t)$ и $\bar{D}_2(t)$ практически совпадают. Такое же совпадение есть и у кривых $D_1(t)$ и $\bar{D}_1(t)$ для значения параметра, соответствующего 2-суперциклу. При околобифуркационном значении параметра μ наблюдается несоответствие кривых $D_1(t)$ и $\bar{D}_1(t)$ по уровню расположения. По форме кривых соответствие можно считать полным.

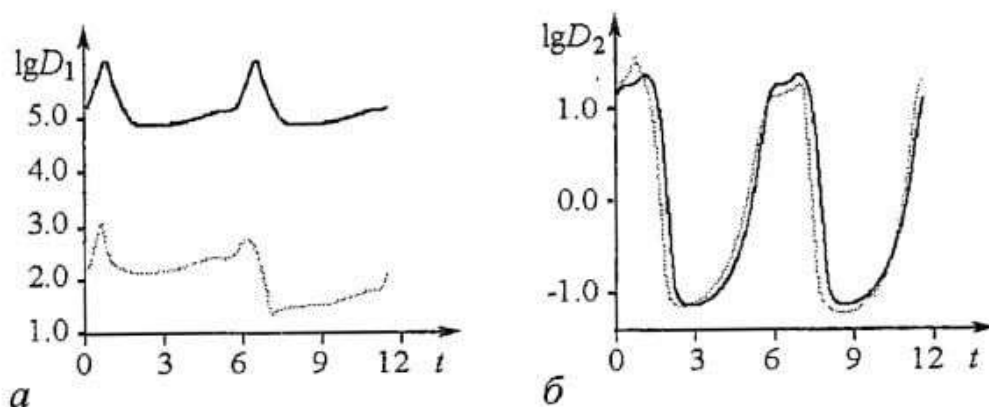


Рис. 9. Графики теоретических функций чувствительности 2-циклов модели Ресслера для $\mu=2.830075$ (черный цвет) и $\mu=3.277$ (серый цвет)

Кроме того, сопоставляя рис. 4, а и рис. 9, а, можно отметить, что пики функций локальных экспонент и функции чувствительности наблюдаются при разных значениях t , то есть приходится на разные точки орбиты цикла. Это означает, что есть несовпадение между точками цикла наиболее чувствительными к случайным шумам и наименее устойчивыми точками орбиты.

На рис. 10 представлены теоретические функции чувствительности $D_1(t)$ для значений параметра μ суперциклов. Из приведенного рисунка видно, что с увеличением параметра μ происходит возрастание среднего уровня функции чувствительности.

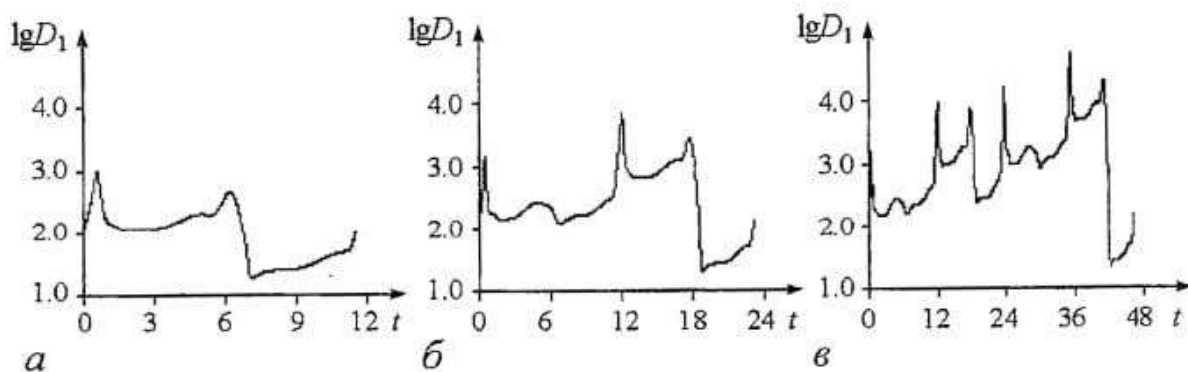


Рис. 10. Графики теоретических функций чувствительности суперциклов модели Ресслера при различных значениях μ : а - 3.277 (2-суперцикл); б - 3.985 (4-суперцикл); в - 4.156 (8-суперцикл)

Значения $D_1(t)$ и $D_2(t)$ - собственные числа матрицы $W(t)$ решения системы (12) - (14) и соответствующие им собственные векторы позволяют построить в каждой точке цикла эллипс рассеивания. Эллипсы рассеивания, изображенные на рис. 11 для 1-цикла ($\mu=2$) и 2-цикла ($\mu=3$), позволяют наглядно проиллюстрировать особенности стохастической чувствительности этих циклов не только по величине, но и по направлению, и получить отчетливое представление об изменении формы и пространственной ориентации пучка случайных траекторий вдоль орбиты цикла.

По аналогии с эмпирическим методом (см. п. 2.1) определим для стохастической системы Ресслера (5) функции $M_j(\mu) = \max_{0 \leq t \leq T(\mu)} D_j(t, \mu)$, $j=1,2$. На рис. 12 для системы (5) представлены графики зависимостей $M_1(\mu)$ и $M_2(\mu)$ в сопоставлении с графиками эмпирических $\bar{M}_1(\mu)$ и $\bar{M}_2(\mu)$. Можно отметить некоторые особенности качественного поведения функции $M_1(\mu)$. Интервалы возрастания $M_1(\mu)$ чередуются с интервалами убывания, в то время как экспоненциальный показатель $L(\mu)$ представляет собой монотонную функцию (см.

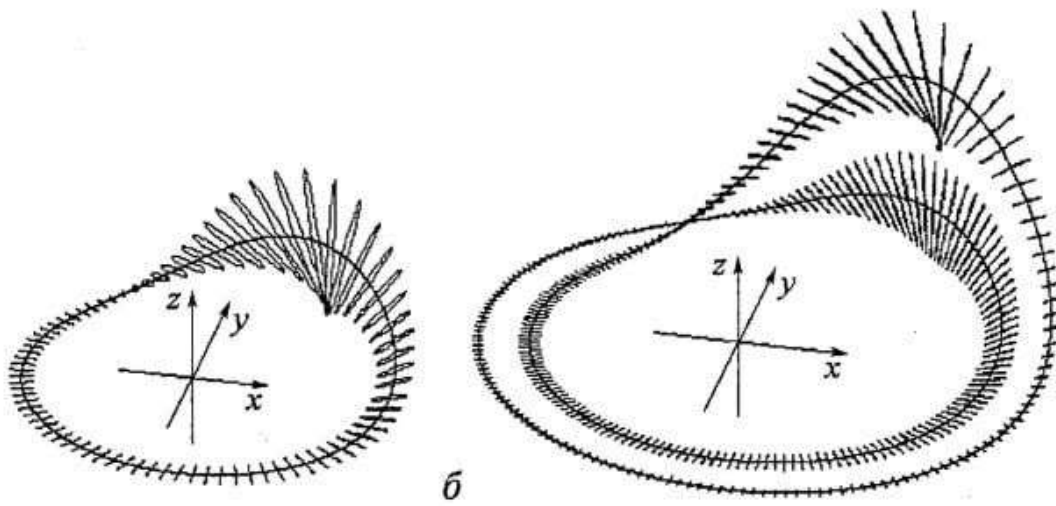


Рис. 11. Эллипсы распределения пучка случайных траекторий на орбите цикла при $\mu=2$ (а) и $\mu=3$ (б)

рис. 5). Это говорит о том, что существуют такие интервалы параметра μ , в которых одновременно с увеличением неустойчивости цикла Γ , происходит уменьшение чувствительности Γ к внешним случайным воздействиям. С увеличением параметра μ значения локальных минимумов $M_1(\mu)$ увеличиваются, то есть по мере приближения параметра μ к зоне хаоса стохастическая чувствительность циклов системы Ресслера неограниченно возрастает. Значения μ , в которых наблюдаются острые пики, соответствуют точкам бифуркации. На графике функции $M_2(\mu)$ (в отличие от графика эмпирической $\bar{M}_2(\mu)$) можно заметить реакцию на точки бифуркации - кривая $M_2(\mu)$ имеет характерные изломы. Следует отметить хорошее соответствие друг другу графиков эмпирических $\bar{M}_1(\mu)$, $\bar{M}_2(\mu)$ и теоретических функций $M_1(\mu)$, $M_2(\mu)$.

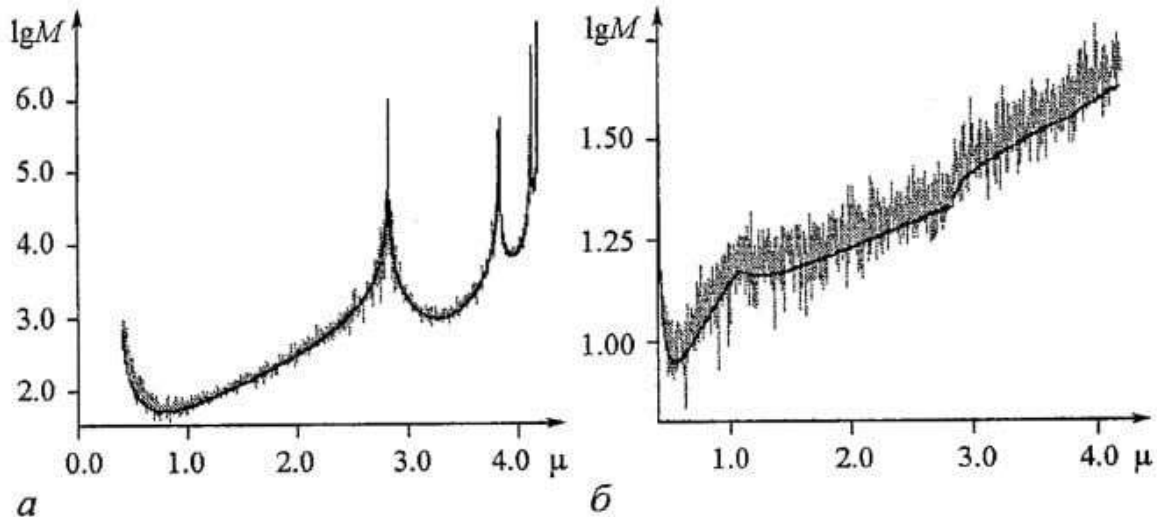


Рис. 12. Графики теоретических (черный цвет) и эмпирических (серый цвет) зависимостей функций чувствительности: а - $M_1(\mu)$ и $\bar{M}_1(\mu)$; б - $M_2(\mu)$ и $\bar{M}_2(\mu)$ при $\epsilon=10^{-5}$

2.3. Геометрический рост чувствительности циклов в цепи бифуркаций. Для стохастической системы Ресслера (5) рассмотрим величины $m_k = \min_{\mu \in I_k} M_1(\mu) = M_1(\bar{\mu}_k)$, $\bar{\mu}_k = \operatorname{argmin}_{\mu \in I_k} M_3(\mu)$. Цикл Γ_k при параметре $\mu = \bar{\mu}_k$ будем называть стохастическим 2^k -суперциклом. Цикл Γ_k является наименее восприимчивым к случайным возмущениям среди всех 2^k -циклов. Чувствительность Γ_k к случайным возмущениям равна $m_k = M_3(\bar{\mu}_k)$. Рассмотрим величины $d_k = m_{k+1}/m_k$. Величина d_k представляет собой отношение степеней чувствительности соседних в

цепи бифуркаций стохастических 2^{k+1} -суперцикла и 2^k -суперцикла. Для системы Ресслера получены значения $d_0=18.047$, $d_1=7.004$, $d_2=7.558$, $d_3=6.985$. Как видим, в последовательных значениях d_k устанавливается некоторая закономерность: $d_1 \approx d_2 \approx d_3$. Это означает, что чувствительность стохастических суперциклов при удвоении периода увеличивается примерно в 7 раз. Отмеченная закономерность (рост чувствительности) близка к результатам, полученным в [24,25] для дискретных моделей.

2.4. Стохастическая жесткость. Важной характеристикой стохастической чувствительности системы Ресслера (5) является величина $\eta(\mu) = \max_{0 \leq t \leq T} D_1(t, \mu) / \min_{0 \leq t \leq T} D_1(t, \mu)$, характеризующая перепад дисперсии случайного пучка траекторий при движении вдоль цикла. Функция $\eta(\mu)$ носит название стохастической жесткости.

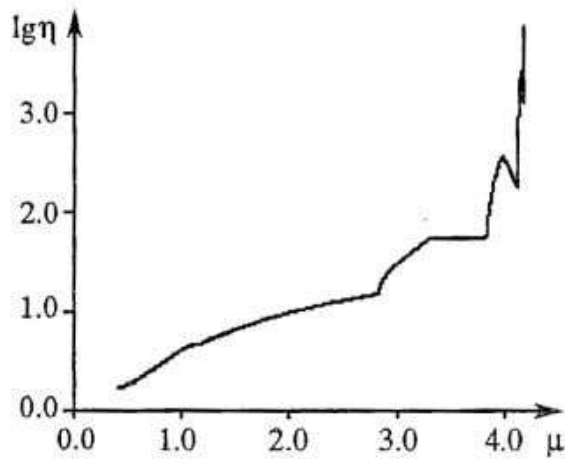


Рис. 13. График стохастической жесткости

Отметим некоторые особенности поведения функции $\eta(\mu)$. Как видно из рис. 13, график функции $\eta(\mu)$ реагирует не только на точки бифуркации системы, но и на значения $\bar{\mu}_k$ (значения μ точек стохастических 2^k -суперциклов). Кроме того, график $\eta(\mu)$ имеет горизонтальный участок, то есть существует интервал изменения параметра μ , в котором отношение максимумов и минимумов функции $D_1(t, \mu)$ остается постоянным. Этот интервал начинается в $\bar{\mu}_1$ и заканчивается бифуркационным значением $\mu_{1,2}$ (переход от зоны 2-циклов к зоне 4-циклов).

3. Заключение

В данной статье были рассмотрены детерминированные и стохастические циклы системы Ресслера в зоне бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу.

Для исследования устойчивости детерминированных циклов к малым возмущениям начальных данных использовались такие функции, как мультипликаторы и локальные экспоненты. Показано снижение устойчивости циклов при переходе к хаосу.

Для системы Ресслера со случайными возмущениями представлена стохастическая бифуркационная диаграмма, дающая общую картину чувствительности аттракторов системы к случайным воздействиям. Более точно реакция предельных циклов этой системы к случайным возмущениям определяется при помощи функции чувствительности. Данная функция позволяет сравнивать между собой отдельные участки орбиты цикла по степени восприимчивости к случайным воздействиям. Для построения функции чувствительности использовался эмпирический подход, а также метод, основанный на привлечении квазипотенциала.

Получена ясная картина увеличения чувствительности системы Ресслера к случайным возмущениям в цепи бифуркаций удвоения периода. Зафиксированы отличия в поведении экспоненциального показателя и функции стохастической

чувствительности. Установлен рост стохастической жесткости, а также закономерность в росте чувствительности стохастических суперциклов. Можно отметить также хорошее совпадение эмпирических и теоретических функций чувствительности. Эллипсы рассеивания, построенные по функции чувствительности, дают ясное представление об изменении формы и пространственной ориентации пучка случайных траекторий вдоль орбиты цикла.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ (№ 04-01-96098урал).

Библиографический список

1. *Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А.* О статистическом рассмотрении динамических систем. // ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С. 165.
2. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. Радио, 1961.
3. *Рытов С.М.* Введение в стохастическую радиофизику. М.: Наука, 1976.
4. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979.
5. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980.
6. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
7. *Soong T.T., Grigoriu M.* Random vibration of mechanical and structural systems // RTR Prentice-Hall. Englewood Cliffs. New Jersey, 1993.
8. *Smelyanskiy V.N., Dykman M.I., Maier R.S.* Topological features of large fluctuations to the interior of a limit cycles. // Physical Review E. 1997. Vol. 55, № 3. P.2369.
9. *Landa P.S., McClintock P.V.E.* Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise // Physics Reports. 2000. Vol. 323. P. 1.
10. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979. С. 192.
11. *Kifer Yu.* Attractors via random perturbations // Commun. math. phys. 1989. Vol. 121. P.445.
12. *Копейкин А.С., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Особенности процесса установления вероятностной меры на хаотических аттракторах в системах Лоренца и Ресслера с учетом флуктуаций // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 6. С.65.
13. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
14. *Day M.V.* Regularity of boundary quasi-potentials for planar systems// Applied Mathematics and Optimization. 1994. Vol. 30. P.79.
15. *Naeh T., Klosek M.M., Matkowsky B.J., Schuss Z.* A direct approach to the exit problem// SIAM Journal Appl.Math. 1990. Vol. 50, № 2. P. 595.
16. *Нейман А.Б.* Применение кумулянтного анализа для исследования бифуркаций динамических систем, возмущаемых внешним шумом // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С.8.
17. *Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б.* Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями // Прикл. математика и механика 1995. Т. 59, вып. 1. С.51.
18. *Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в анализе чувствительности автоколебаний к стохастическим возмущениям // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 5. С.19.

19. Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б. Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным воздействиям // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 6. С.104.

20. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // Dynamic systems and applications. 2002. Vol. 11. P.293.

21. Roessler O.E., Wegman K. Chaos in Zhabotinski reaction // Nature. 1978. Vol. 271. P. 89.

22. Кузнецов С.П. Динамический хаос. (Сер. Современная теория колебаний и волн). М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2001. 296с.

23. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

24. Кузнецов А.П., Капустина Ю.В. Свойства скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 6. С.78.

25. Crutchfield J., Nauenberg M., Rudnick J. Scaling for external noise at the onset of chaos // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46. P.933.

26. Ряшко Л.Б. Об устойчивости стохастически возмущенных орбитальных движений // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 4. С. 582.

Уральский государственный
университет

Поступила в редакцию 25.05.2003
после доработки 11.11.2003

STOCHASTICAL SENSITIVITY OF CYCLES OF ROESSLER SYSTEM IN TRANSITION TO CHAOS

L.B. Ryashko, I.A. Bashkirtseva, P.V. Stichin

The response problem of limit cycles for stochastically forced Roessler system is considered. For stochastic sensitivity analysis two approaches are used: empirical (based on direct numerical simulation) and theoretical (based on quasipotential function). The possibilities are demonstrated to describe stochastic bundles spatial orientation and scatter form using scatter ellipses. The increase of Roessler system sensitivity to external disturbances in the period-doubling bifurcation zone under transition to chaos is shown.



Ряшко Лев Борисович родился в 1953 году, окончил Уральский госуниверситет (1975), кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой вычислительной математики Уральского госуниверситета, Соросовский доцент (1996,1998). Область научных интересов - устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике.

E-mail: Lev.Ryashko@usu.ru



Башкирцева Ирина Адольфовна родилась в 1965 году, окончила Уральский госуниверситет (1987), кандидат физико-математических наук (1997), старший преподаватель кафедры вычислительной математики Уральского госуниверситета. Область научных интересов - асимптотический анализ и численное моделирование нелинейных динамических систем.



Стихин Павел Викторович родился в 1979 году, окончил Уральский госуниверситет (2002), аспирант кафедры математической физики. Область научных интересов - анализ чувствительности к возмущениям и моделирование стохастических нелинейных систем.

E-mail: paul-st@mail.ru



О ДИНАМИКЕ ДВУХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ - ДУФФИНГА С ДИССИПАТИВНОЙ СВЯЗЬЮ

А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов

Рассматриваются связанные дифференциальные системы Ван дер Поля - Дуффинга в случае диссипативной и активной связи. Обсуждается устройство пространства параметров и возможные физические эффекты.

Введение

В настоящей работе мы исследуем взаимодействие двух осцилляторов Ван дер Поля - Дуффинга. Рассматриваемая система является классической в теории колебаний и нелинейной динамике. Однако, несмотря на целый ряд посвященных ей работ, она все еще достаточно полно не исследована. Это можно отчасти объяснить большим числом факторов, влияющих на ее динамику. На поведение системы могут влиять величины управляющих параметров подсистем, параметры фазовой нелинейности (неизохронности), расстройка собственных частот осцилляторов, величина, знак и тип связи. Соответственно наблюдаются интересные эффекты, которые невозможны в случае динамики только одного осциллятора, даже когда он находится под внешним воздействием.

Исследование двух связанных осцилляторов можно проводить двумя способами: в терминах полных дифференциальных уравнений или в терминах укороченных уравнений. Большинство работ [1-5] посвящено изучению динамики системы после проведенного усреднения по времени. Основополагающей и наиболее цитируемой является статья D. Aronson, G. Ermentrout и N. Kopell [2]. В ней представлены и объяснены некоторые существенные эффекты, в частности, возможность описания разности фаз осцилляторов с помощью классического уравнения Адлера при диссипативной связи, а также эффект «гибели колебаний», о котором мы поговорим ниже. Фундаментальное обсуждение явлений в связанных укороченных системах и их физических основ можно найти в книге А. Пиковского, М. Розенблома, Ю. Куртца [1]. Однако весьма интересно изучить случай, когда система представляет собой два связанных дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 - (\lambda_1 - x^2)dx/dt + x + \beta x^3 + \varepsilon(x-y) + \mu(dx/dt - dy/dt) &= 0, \\ d^2y/dt^2 - (\lambda_2 - y^2)dy/dt + (1+\delta)y + \beta y^3 + \varepsilon(y-x) + \mu(dy/dt - dx/dt) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Это система двух связанных осцилляторов Ван дер Поля - Дуффинга, причем λ_1 и λ_2 - управляющие параметры, δ - расстройка собственных частот осцилляторов, β - параметр фазовой нелинейности (или неизохронности), μ и ϵ - коэффициенты связи. При выбранном представлении осцилляторов Ван дер Поля - Дуффинга для автономных осцилляторов имеет место бифуркация Андронова - Хопфа, когда значения параметров $\lambda_{1,2}$ переходят через ноль*.

Уравнения (1) содержат члены, отвечающие двум типам связи осцилляторов, по-разному влияющим на динамику системы. Инерционная связь (члены, пропорциональные коэффициенту ϵ) создает поправку к собственным частотам осцилляторов, не влияя при этом непосредственно на фазы колебаний осцилляторов. Однако этот тип связи изменяет амплитуды колебаний и воздействует на фазу благодаря наличию неизохронности в системе. Соответственно, рассмотрения только динамики фаз осцилляторов недостаточно для адекватного описания системы. Механизмы влияния различных видов инерционной связи на систему подробно описываются в книге [1].

В данной статье рассмотрен только второй тип связи - диссипативный. За него в уравнениях (1) ответственны члены, пропорциональные коэффициенту μ . Заметим, что иногда связь вводят несколько иначе, в соответствии со следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 - (\lambda_1 - x^2)dx/dt + x + \beta x^3 - \epsilon y - \mu dy/dt &= 0, \\ d^2y/dt^2 - (\lambda_2 - y^2)dy/dt + (1 + \delta)y + \beta y^3 - \epsilon x - \mu dx/dt &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Такую связь называют «прямой».

Диффузионная связь вносит в каждую из систем дополнительное затухание. Когда различие собственных частот связанных осцилляторов достаточно велико, то это затухание не может быть скомпенсировано энергией другого осциллятора, что привнесит в общую картину поведения системы новый режим - гибели колебаний. Он проявляется в том, что состояние, при котором амплитуды колебаний осцилляторов равны нулю, становится единственным устойчивым положением равновесия. Этот эффект подробно рассмотрен в работе [2] под названием эффекта Bar-Eli. Он не может проявляться ни в случае прямой связи, ни в случае внешнего воздействия. Однако все остальные характерные режимы поведения связанных систем возможны как при диффузионной, так и при прямой связи. Поэтому в дальнейшем практически без потери общности можно рассматривать лишь диффузионную связь.

Формально знаки параметров связи в уравнениях (2) могут быть различными. Оказывается, что изменение знака приводит к существенной модификации динамики и к появлению новых эффектов. Ситуацию с отрицательными значениями параметра μ будем называть «активной» связью. Смысл этого термина вполне ясен из уравнений (1). Такой случай представляет интерес как минимум с математической точки зрения. Если же система связанных осцилляторов реализована в виде радиотехнического устройства, то изменения знака связи можно добиться, применяя соответствующие схемные решения.

* Отметим, что обычно нормировку выбирают несколько иначе - параметры λ_1 и λ_2 выносят за скобку [1,2]. Выбранный нами способ удачнее в том отношении, что в автономных осцилляторах возможна бифуркация Андронова - Хопфа рождения предельного цикла. Это позволит нам изучить динамику связанных систем при рождении предельных циклов в подсистемах. Кроме того, в рамках одной и той же системы (1) можно будет рассмотреть не только «запороговые» ($\lambda_{1,2} > 0$), но и «допороговые» осцилляторы ($\lambda_{1,2} < 0$), что, как станет ясно из дальнейшего, оказывается важным.

1. Укороченные уравнения. Предшествующие результаты

Как уже отмечалось, популярным способом изучения системы связанных осцилляторов Ван дер Поля - Дуффинга является переход к укороченным уравнениям. Осуществить этот переход можно при помощи метода медленно меняющихся амплитуд, произведя замену в уравнениях (1)

$$x = ae^{it} + a^*e^{-it}, \quad y = be^{it} + b^*e^{-it} \quad (3)$$

и полагая

$$e^{it}da/dt + e^{-it}da^*/dt = 0, \quad e^{it}db/dt + e^{-it}db^*/dt = 0. \quad (4)$$

Здесь a и b - комплексные амплитуды колебаний первого и второго осцилляторов. Они изменяются с течением времени относительно медленно. После проведенного усреднения получаем уравнения для комплексных амплитуд a и b

$$da/dt = \lambda_1 a - |a|^2 a + ia/\omega + 3\beta i |a|^2 a/\omega + i\epsilon a/\omega - i\epsilon b/\omega - \mu a + \mu b - i\omega a, \quad (5)$$

$$db/dt = \lambda_2 b - |b|^2 b + i(1+\delta)b/\omega + 3\beta i |b|^2 b/\omega + i\epsilon b/\omega - i\epsilon a/\omega - \mu b + \mu a - i\omega b.$$

Комплексные амплитуды a и b можно представить в следующем виде: $a = Re^{i\varphi_1}$, $b = re^{i\varphi_2}$, где R , r - действительные амплитуды колебаний первого и второго осциллятора, соответственно, $\varphi_{1,2}$ - фазы колебаний осцилляторов. Тогда получаем систему из четырех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dR/dt &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \epsilon r \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \\ dr/dt &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \epsilon R \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ d\varphi_1/dt &= (1 + \epsilon)/\omega + 3\beta R^2/\omega - (\epsilon/\omega)(r/R)e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} - \omega, \\ d\varphi_2/dt &= (1 + \delta + \epsilon)/\omega + 3\beta r^2/\omega - (\epsilon/\omega)(R/r)e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} - \omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку фазы колебаний осцилляторов входят в уравнения только в виде разности $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, то можно вычесть из третьего уравнения четвертое и получить систему уже из трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dR/dt &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos\psi - \epsilon r \sin\psi, \\ dr/dt &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos\psi + \epsilon R \sin\psi, \\ d\psi/dt &= -\delta - 3\beta(R^2 - r^2) + \mu(r/R + R/r)\sin\psi - \epsilon(r/R - R/r)\cos\psi. \end{aligned} \quad (7)$$

Хотя система (7) и получается методом медленно меняющихся амплитуд из конкретной дифференциальной системы (1), она имеет и большое самостоятельное значение, так как укороченные уравнения автономных систем представляют собой нормальную форму бифуркации Андронова - Хопфа.

Получить соотношения, описывающие полную картину бифуркаций в пространстве параметров системы (7) в общем виде трудно, и до сих пор эта задача полностью не решена. Однако, если ввести определенные допущения, например, предположить идентичность осцилляторов или исследовать только изохронные осцилляторы, то можно получить ряд результатов. Авторы работы [2] рассмотрели случай только диссипативной связи и провели исследования системы в терминах укороченных уравнений. Ими получены соотношения для линий бифуркаций на плоскости параметров (δ, μ) . При этом были рассмотрены два случая - симметричной и несимметричной систем. Когда система симметрична, связанные осцилляторы являются абсолютно идентичными. Тогда в случае

синхронизации будет справедливо равенство $R=r$, и можно уменьшить число уравнений до двух, поскольку первые два уравнения системы (7) становятся одинаковыми,

$$\begin{aligned} dR/dt &= R(\lambda - \mu) - R^3 + \mu r \cos \psi - \epsilon r \sin \psi, \\ d\psi/dt &= -\delta + \mu \sin \psi. \end{aligned} \quad (8)$$

Можно видеть, что для разности фаз осцилляторов получилось классическое уравнение Адлера [1]. Для системы (8) линии бифуркаций на плоскости параметров (частотная расстройка δ , величина связи μ) и фазовые портреты, соответствующие различным динамическим режимам системы, показаны на рис. 1. Заметим, что в этом случае параметр λ можно убрать перенормировкой или просто положить $\lambda=1$.

Фазовый дрейф - единственное решение, возможное в области $\{0 < \mu < \min(1/2|\delta|, 1)\}$ и оно устойчиво (область 1 на рис. 1). При этом разность фаз ψ монотонно возрастает либо убывает. Тогда на фазовом портрете на плоскости фазовых переменных $(R^2 \cos \psi, R^2 \sin \psi)$ (рис. 1) можно видеть предельный цикл. Такой способ введения фазовых переменных для данной задачи предложен в работе [2]. При $|\delta| \in (0, 2)$ фазовый дрейф заканчивается с появлением решения с захватом фазы

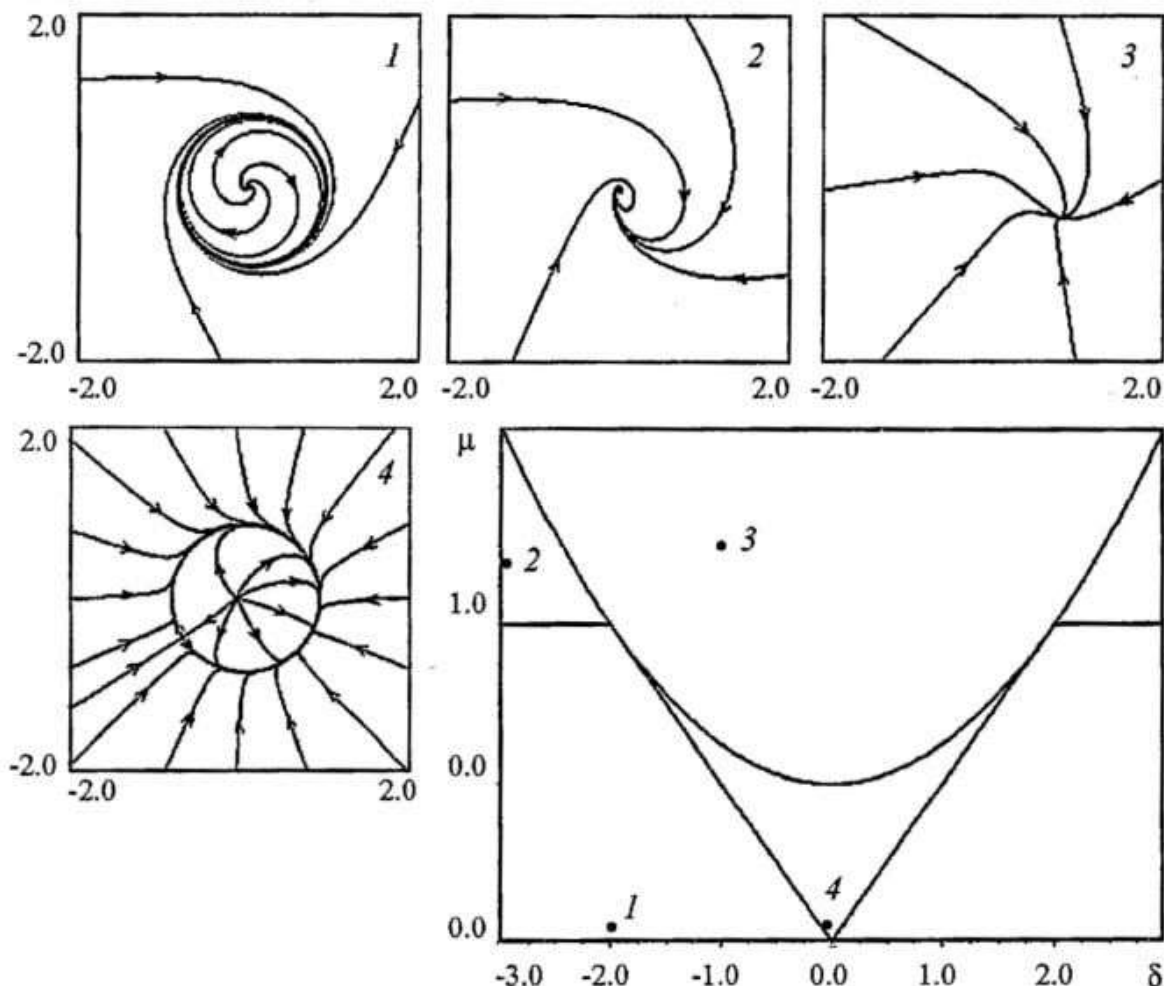


Рис. 1. Линии бифуркаций на плоскости параметров (расстройка частот δ , коэффициент связи μ) для связанных осцилляторов, описываемых укороченными уравнениями (7). В области 1 на фазовом портрете, построенном в «сферических» координатах (R^2, ψ) , можно видеть устойчивый предельный цикл, который отвечает режиму фазового дрейфа. В области 2 наблюдается эффект гибели колебаний. В области 4 сосуществуют неустойчивая, устойчивая неподвижные точки и седло. При переходе из области 4 в область 3 седло сливается с неустойчивой точкой, и в области 3 можно видеть лишь одну устойчивую ненулевую точку

при переходе через линию $\mu = 1/2 |\delta|$ (область 4 на рис. 1). Здесь на фазовом портрете существуют три неподвижные точки, одна из которых является устойчивым узлом, вторая - седлом, а третья - неустойчивым узлом. На линии $\mu = 1/2 (1 + 1/4 \delta^2)$ седло сливается с неустойчивым узлом, и они исчезают. В области $\{\mu > 1/2 (1 + 1/4 \delta^2)\}$ существует только одна неподвижная устойчивая точка (область 3 на рис. 1).

Действительно, для случая идентичных осцилляторов разность фаз ψ удовлетворяет уравнению Адлера. В соответствии с этим, как и в классической задаче о синхронизации внешним сигналом, на плоскости параметров (δ, μ) имеем язык синхронизации (см. рис. 1). Согласно рисунку при $|\delta| < 2\mu$ происходит захват фаз. При этом координаты неподвижной точки даются соотношениями

$$R_0^2 = 1 - \mu \pm (\mu^2 - 1/4 \delta^2)^{1/2},$$

$$\psi_0 = -\arcsin(\delta/(2\mu)).$$
(9)

В задаче о связанных системах, однако, возникает эффект гибели колебаний [1,2]. Он заключается в том, что колебания обоих осцилляторов затухают. При этом реализуется единственная устойчивая неподвижная точка в начале координат ($R=0, r=0$). Можно показать [2], что для укороченной системы (7) он проявляется в области $\{1 < \mu < 1/2 (1 + 1/4 \delta^2)\}$. Отметим, что эффект гибели колебаний характерен не просто для конкретной системы (7), а имеет «общеколебательное» значение (см., например, недавнюю работу [7] по его экспериментальному наблюдению).

С другой стороны, границы области, в которой проявляется эффект гибели колебаний, были получены, исходя из анализа укороченных уравнений (7). Вопрос о границах этого эффекта на плоскости параметров в случае полных дифференциальных уравнений интересен и будет обсужден в разделе 2 настоящей статьи.

Необходимые условия для проявления этого эффекта в случае диссипативной связи определены в работе [1]. Именно наличие связи между осцилляторами, динамика которых при данном значении параметров должна выходить на предельный цикл, может привести к эффекту гибели колебаний при выполнении следующих необходимых условий.

- Связь между осцилляторами должна быть достаточно велика, чтобы она была способна подавить колебания. Точнее, сила связи должна быть соизмерима по величине с силой притяжения осцилляторов к предельному циклу.

- Связь должна быть диффузионного типа. При прямой связи или, скажем, при внешнем воздействии эффект не наблюдается.

- Взаимодействующие осцилляторы должны быть различны, то есть они должны иметь достаточно большую расстройку собственных частот. Дело в том, что связь привносит в каждый осциллятор дополнительное затухание, и оно не может быть в этом случае скомпенсировано за счет энергии другого осциллятора, так как сумма переданной за период колебаний энергии будет близка к нулю.

В дальнейшем мы будем исследовать систему связанных осцилляторов Ван дер Поля - Дуффинга в терминах исходных дифференциальных уравнений (1). Наше исследование будет проводиться преимущественно численным образом. Форма и структура хаотических аттракторов, а также возможности сосуществования различных динамических режимов уже изучались [6]. Основной целью нашего исследования является существенно более полный анализ устройства пространства параметров системы (1). Необходимо понять также, как соотносятся данные о поведении системы, полученные в терминах укороченных и полных уравнений. Оказывается, изучение полных уравнений дает возможность наблюдать ряд новых эффектов.

2. Полные дифференциальные уравнения. Анализ неподвижных точек

Если в системе связанных осцилляторов Ван дер Поля - Дуффинга присутствует только диссипативная диффузионная связь, то можно записать уравнения (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 - (\lambda_1 - x^2)dx/dt + x + \beta x^3 + \mu(dx/dt - dy/dt) &= 0, \\ d^2y/dt^2 - (\lambda_2 - y^2)dy/dt + (1 + \delta)y + \beta y^3 + \mu(dy/dt - dx/dt) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Исследуем эту систему уравнений, введя дополнительные переменные u и v , так что она преобразуется к виду

$$\begin{aligned} dx/dt &= v, \\ dv/dt &= (\lambda_1 - x^2)v - x - \beta x^3 - \mu(v - u), \\ dy/dt &= u, \\ du/dt &= (\lambda_2 - y^2)u - (1 + \delta)y - \beta y^3 - \mu(u - v). \end{aligned} \quad (11)$$

Такая запись уравнений облегчает анализ системы и делает возможным численное моделирование ее динамики. Легко показать, что у системы уравнений (11) может быть либо одна, нулевая, либо три неподвижные точки: $x=v=y=u=0$ и $x=\pm(-1/\beta)^{1/2}$, $y=\pm(-(1+\delta)/\beta)^{1/2}$, $v=u=0$.

Исследуем сначала нулевое положение равновесия на устойчивость. Эта неподвижная точка интересна в первую очередь тем, что ее наличие обуславливает возможность возникновения эффекта гибели колебаний. Чтобы эффект был возможен, достаточно, чтобы эта точка была устойчивой. Линеаризуем систему уравнений (11) в окрестности нулевой точки равновесия. Для этого введем малые отклонения от положения равновесия x^* , v^* , y^* , u^* , для которых справедливы уравнения

$$\begin{aligned} dx^*/dt &= v^*, \\ dv^*/dt &= \lambda_1 v^* - x^* - \mu(v^* - u^*), \\ dy^*/dt &= u^*, \\ du^*/dt &= \lambda_2 u^* - (1 + \delta)y^* - \mu(u^* - v^*). \end{aligned} \quad (11')$$

Соответствующая матрица Якоби для этой системы будет выглядеть следующим образом:

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda_1 - \mu & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mu & -1 - \delta & \lambda_2 - \mu \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Используя матрицу Якоби, можно получить соотношения, задающие в пространстве параметров поверхность седло-узловой бифуркации

$$\det M = -1 - \delta = 0 \Rightarrow \delta = -1. \quad (13)$$

эффект гибели колебаний, полученной в статье [2] в терминах укороченных уравнений.

3. Полные дифференциальные уравнения. Численное исследование

3.1. Диссипативная связь. Обратимся теперь к численному исследованию двух осцилляторов Ван дер Поля - Дуффинга с диссипативной связью (11). На рис. 2 и далее представлены карты динамических режимов, на которых черным цветом и оттенками серого показаны найденные численно области с различными периодами колебаний одного из связанных осцилляторов. Белый цвет обозначает хаотические и квазипериодические режимы. Буквами ГК обозначена область гибели колебаний.

Периоды циклов при построении карт динамических режимов определялись с использованием метода сечений Пуанкаре. После достаточно длительного переходного процесса, когда можно считать фазовую траекторию выпшедшей на предельный цикл, определялись точки ее пересечения с секущей плоскостью. Но при этом рассматривались только траектории, «протыкающие» сечение Пуанкаре в одном направлении. Количество точек пересечения секущей плоскости принималось за период предельного цикла. Однако период, определенный таким образом, зависит от выбора сечения Пуанкаре. Поэтому каждый раз для одних и тех же значений параметров и начальных условий были построены карты динамических режимов при двух различных сечениях Пуанкаре: $x=0$ и $y=0$, то есть нулевых значений координат первого и второго осцилляторов, соответственно. Поскольку траектория должна пересекать сечение Пуанкаре только в одном направлении, то дополнительно наложены условия $dx/dt > 0$ и $dy/dt > 0$.

Тем не менее, численное исследование показало, что для любого выбора сечения форма языков синхронизации на картах динамических режимов одинакова. Наиболее характерные режимы синхронизации обозначены m/n , где m - период колебаний первого осциллятора, в точности соответствующий цвету на карте, а n - период колебаний второго осциллятора.

Рис. 2 отвечает случаю одинаковых управляющих параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и изохронному случаю $\beta = 0$. В области малых значений отстройки собственных частот осцилляторов δ можно видеть большой основной язык синхронизации $1/1$, что совпадает с предсказаниями на основе анализа укороченной системы. Однако наблюдаются и весьма существенные отличия. Опишем их подробнее.

Во-первых, основной язык синхронизации $1/1$ является несимметричным. В левой своей части он обрезан линией, отвечающей частотной расстройке $\delta = -1$. Напомним, что линия $\delta = -1$ дает седло-узловую бифуркацию. Физически ее происхождение очень понятно из исходной системы (2) - при $\delta < -1$ за счет влияния связи осцилляторы перестают быть колебательными системами.

Если говорить о глобальной картине языков синхронизации, то можно отметить следующие моменты. Основной язык синхронизации окружен теперь областью квазипериодики, внутри которой наблюдаются языки синхронизации высших порядков. При положительных расстройках (справа от основного языка) эти языки оказываются очень узкими, значительно более узкими, чем в задаче о синхронизации одного осциллятора Ван дер Поля внешним гармоническим сигналом. Однако в области отрицательных расстройек, слева от основного языка, структура вторичных резонансов выражена очень хорошо, что видно из увеличенного фрагмента карты на рис. 2, б. Можно видеть множество языков синхронизации $2/1$, $3/1$, $4/1$, $5/1$ и т.д. Все они имеют вид узких полос с остриями у основания и вершины и однородны, то есть не обладают внутренней структурой.

Еще один существенно новый момент - появление больших, с характерным основанием и вершиной, языков синхронизации $1/3$, $1/2$, $1/6$, $1/9$ и т.д. при достаточно больших положительных частотных расстройках δ .

На рис. 3 показаны фазовые портреты системы (1) в характерных точках плоскости параметров. При этом использованы два варианта фазовых переменных -

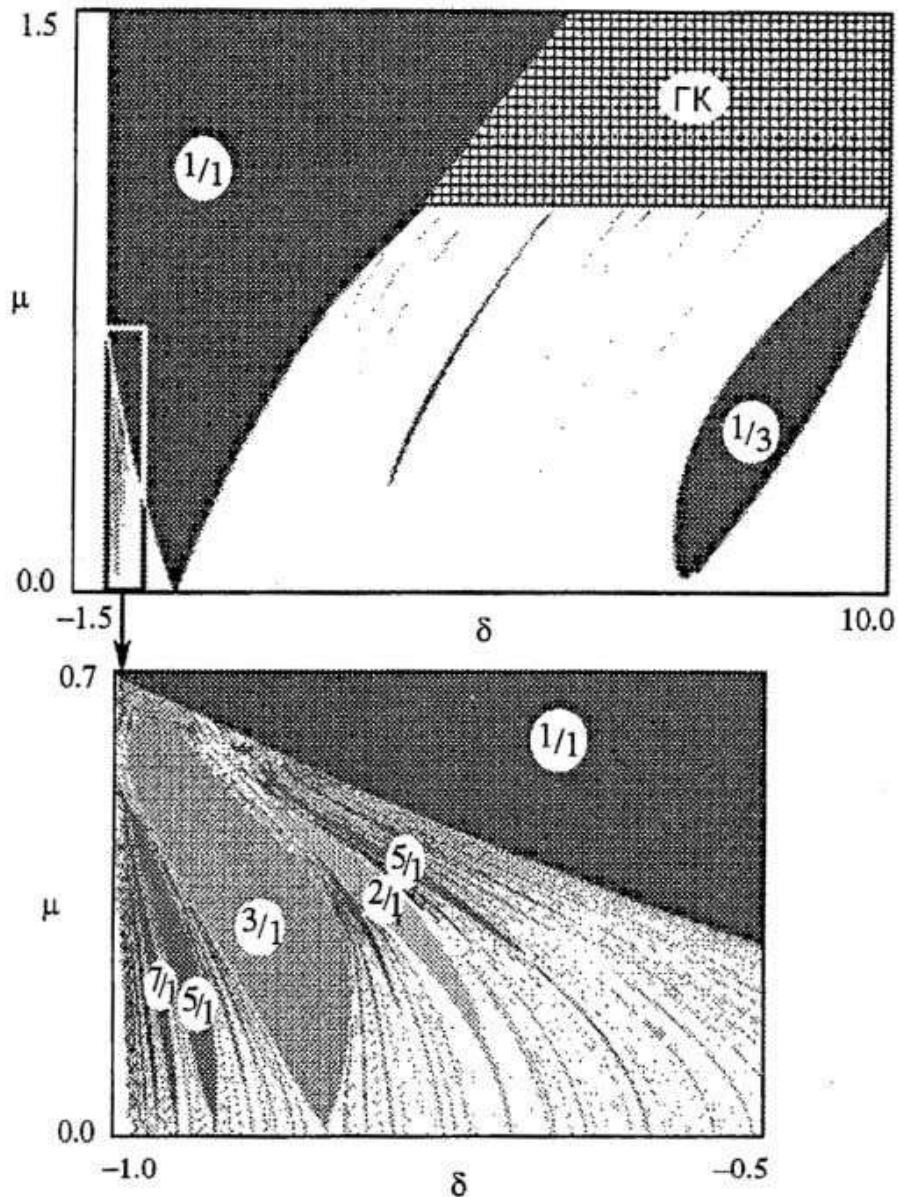


Рис. 2. Карта динамических режимов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля (1) на плоскости параметров (μ, δ) для случая диссипативной связи и ее увеличенный фрагмент. Значения параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\beta = 0$. Дробями обозначены режимы синхронизации, где числитель и знаменатель - периоды колебаний первого и второго осциллятора, соответственно

пара верхних рисунков относится к координате и скорости первого и второго осциллятора, соответственно, а нижняя пара представляет смешанные переменные - координаты обоих осцилляторов и скорости обоих осцилляторов. Таким образом, это разные сечения четырехмерного фазового пространства системы. Интересно сравнить фазовые портреты, относящиеся к разным языкам синхронизации 1/1.

Перейдем теперь к обсуждению эффекта гибели колебаний. Для укороченной системы (7) картина бифуркаций симметрична относительно линии $\delta = 0$ (см. рис. 1), причем величина параметра частотной расстройки δ может быть по модулю сколь угодно большой. Соответственно эффект гибели колебаний может наблюдаться как в области отрицательных, так и в области положительных расстроек. В дифференциальной системе, как мы уже отмечали, область отрицательных расстроек ограничена значением $\delta = -1$. Неудивительно поэтому, что на рис. 2 эффект гибели колебаний в области отрицательных расстроек вообще отсутствует.

Однако эффект гибели колебаний в дифференциальной системе в области отрицательных частотных расстроек все-таки можно наблюдать. Для этого надо уменьшить значения управляющих параметров λ_1 и λ_2 подсистем. Действительно, пороговое значение расстройки, при котором наблюдается этот эффект в

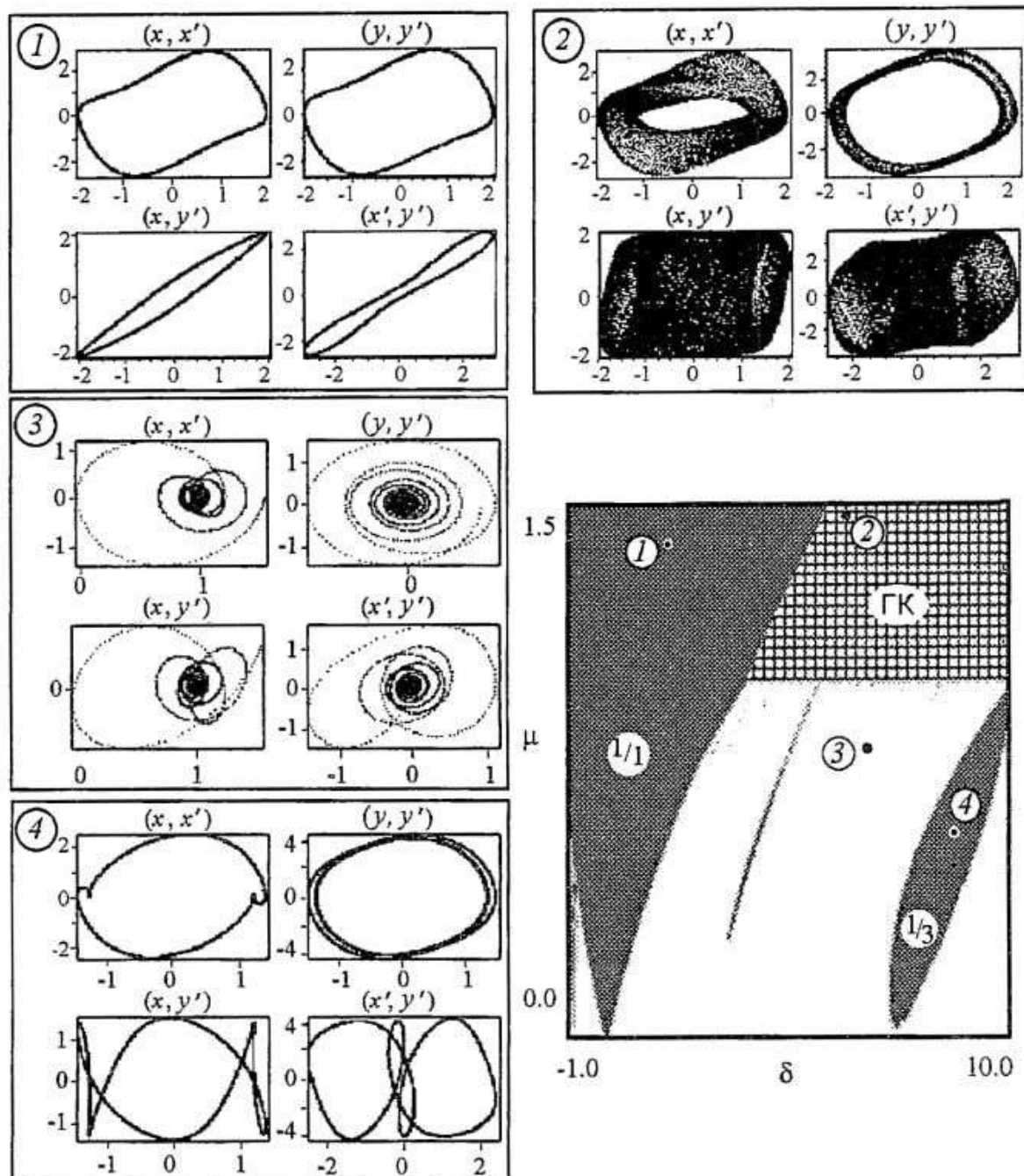


Рис. 3. Примеры фазовых портретов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля (1), наблюдаемых в различных точках карты динамических режимов. Случай диссипативной связи. Значения параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\beta = 0$

укороченной системе, будет постепенно уменьшаться по абсолютной величине и наступит момент, когда он сможет проявиться в дифференциальной системе. Это хорошо видно на фрагментах карты рис. 4, когда этот эффект появляется в области между значениями $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.6$. При уменьшении управляющих параметров подсистем область гибели колебаний расширяется. При очень малых значениях $\lambda_{1,2}$ язык становится симметричным и все более похожим на давашмый укороченной моделью (см. рис. 1).

3.2. Активная связь. Рассмотрим случай диссипативной связи осцилляторов с отрицательным коэффициентом связи μ . Это позволит нам более глубоко оценить свойства исходной дифференциальной системы. С другой стороны, как мы уже отмечали, можно надеяться и на экспериментальное исследование соответствующих эффектов в электронных системах. Случай отрицательных μ будем называть активной связью.

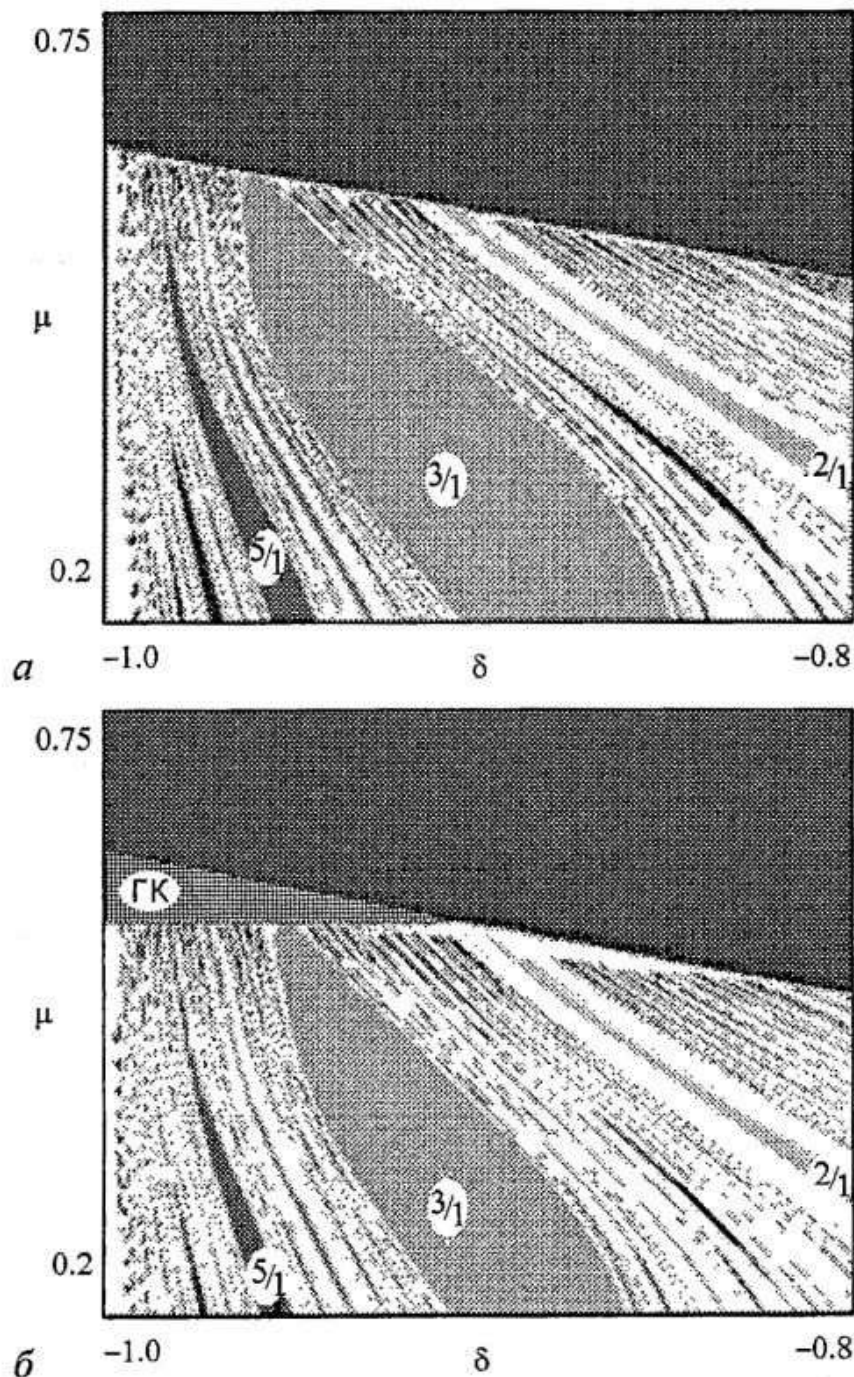


Рис. 4. Фрагменты карт динамических режимов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля (1), демонстрирующие возникновение эффекта гибели колебаний в области отрицательных частотных расстройок. Значения управляющих параметров: $a - \lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$, $b - \lambda_1 = \lambda_2 = 0.6$

На рис. 5 представлены карты динамических режимов системы с активной связью. Снова рассмотрены одинаковые управляющие параметры $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и изохронный случай $\beta = 0$. Помимо основного языка синхронизации $1/1$, находящегося в области нулевой расстройки частот, существуют еще более широкие, чем при диссипативной связи с $\mu > 0$, дополнительные языки синхронизации $1/2$, $1/3$, $1/6$ и т.д., наблюдаемые при увеличении параметра δ . При активной связи, что достаточно естественно, отсутствует область гибели колебаний. Можно сделать вывод, что синхронизация системы при помощи активной связи возможна в значительно более широких областях значений параметров, чем при диссипативной связи с $\mu > 0$. Тем не менее, при $\delta < -1$ периодические колебания наблюдаться по-прежнему не будут, так как условие для седло-узловой бифуркации (13) здесь справедливо.

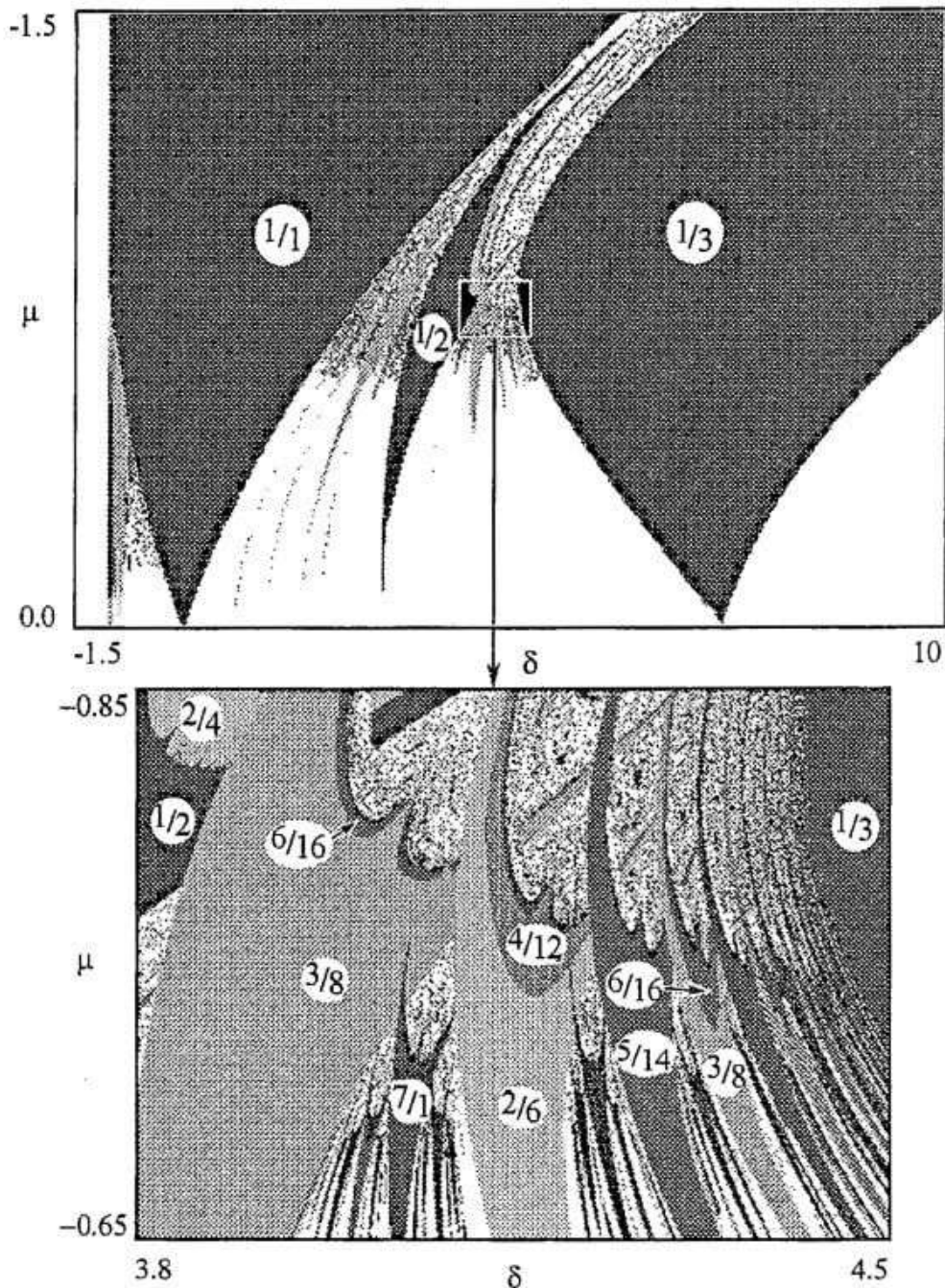


Рис. 5. Карта динамических режимов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля для случая активной связи и ее выделенный фрагмент при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\beta = 0$

Второе существенное отличие случая активной связи - наличие выраженных языков Арнольда кратных периодов колебаний осцилляторов во всем диапазоне частотных расстройек. Более того, как видно из увеличенного фрагмента рис. 5, эти языки имеют четкую внутреннюю структуру, характерную для классического синус-отображения окружности. Можно видеть также области удвоенного периода, которые часто называют *crossroad-area*. В отличие от случая диссипативной связи с $\mu > 0$, возможен переход к хаосу через удвоения периода внутри этих языков.

Если же посмотреть на общую картину языков синхронизации на рис. 5, то можно констатировать, что достаточно неплохо просматривается линия начала перекрытия языков синхронизации, что также вполне близко к картине, даваемой классическим синус-отображением окружности. Таким образом, при активной связи могут сосуществовать циклы различных периодов и режим динамического хаоса, то есть имеет место мультистабильность. Отметим, что мультистабильность в системе связанных осцилляторов Ван дер Поля исследовалась М. Poliashenko,

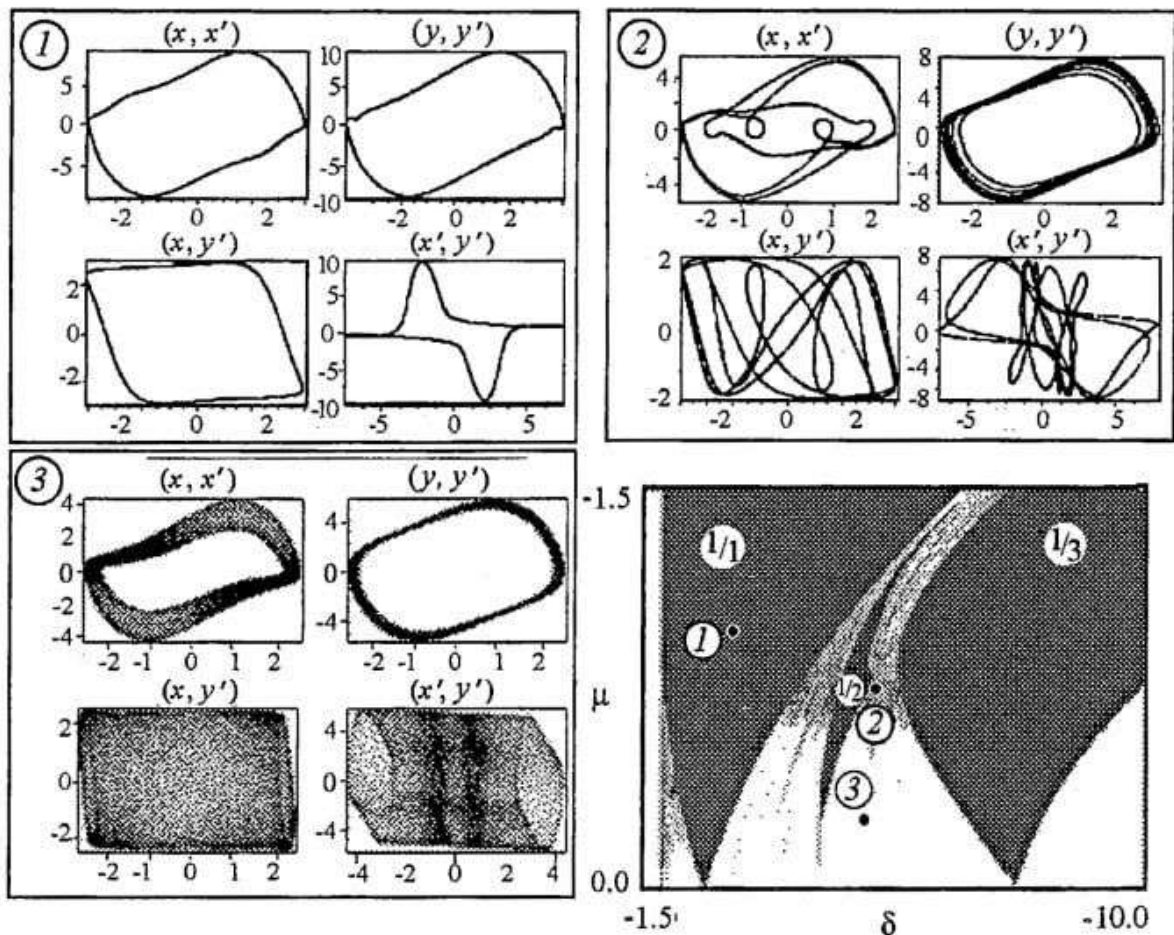


Рис. 6. Примеры фазовых портретов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля, наблюдаемых в различных точках карты динамических режимов. Случай активной связи. Значения параметров $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\beta = 0$

S. McKay, C. Smith [4]. При анализе укороченных уравнений ими аналитически было обосновано существование мультистабильности. Это проявлялось в сосуществовании устойчивых неподвижных точек при решении системы укороченных уравнений, что соответствует устойчивым предельным циклам решения системы полных дифференциальных уравнений (11), и режима дрейфа фазы - аналога динамического хаоса в полной системе. Однако эти режимы можно отнести к другому типу мультистабильности.

В случае активной связи в области отрицательной расстройки собственных частот также существует множество языков Арнольда. Однако они идентичны языкам, возникающими при диссипативной связи с $\mu > 0$.

На рис. 6 представлены фазовые портреты системы (11) для случая активной связи. Можно видеть, что форма фазовой траектории сильно модифицировалась по сравнению со случаем диссипативной связи с $\mu > 0$.

До этого мы рассматривали случай только положительных значений управляющих параметров индивидуальных осцилляторов. Пусть теперь управляющие параметры осцилляторов, λ_1 и λ_2 , отрицательны. При этом колебания автономных осцилляторов будут затухать, поскольку осцилляторы будут находиться до порога бифуркации Андронова - Хопфа. В случае активной связи можно обнаружить новый эффект раскачки колебаний за счет действия связи. Действительно, обратимся к показанной на рис. 7 карте динамических режимов на плоскости параметров (δ, μ) для $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Параметр связи μ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Показаны также фазовые портреты для характерных точек на плоскости параметров, в которых реализуются различные режимы. Поскольку осцилляторы сами по себе колебаться не будут, то логично ожидать на карте динамических режимов

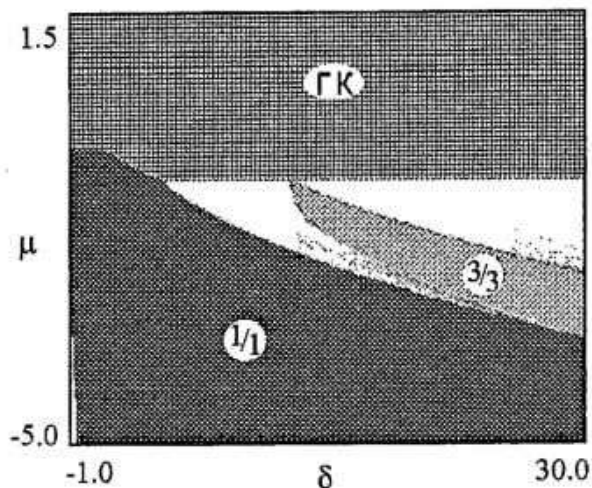


Рис. 7. Карта динамических режимов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля при отрицательных значениях управляющих параметров $\lambda_1=\lambda_2=-1$

существование обширной области эффекта гибели колебаний, так как этот эффект как раз соответствует отсутствию каких-либо колебаний. Действительно, при диссипативной связи с $\mu > 0$ колебаний не будет. Однако для активной связи, при $\mu < 0$, наблюдаются различные колебательные динамические режимы. В частности, имеются области синхронизации 1/1, 3/3

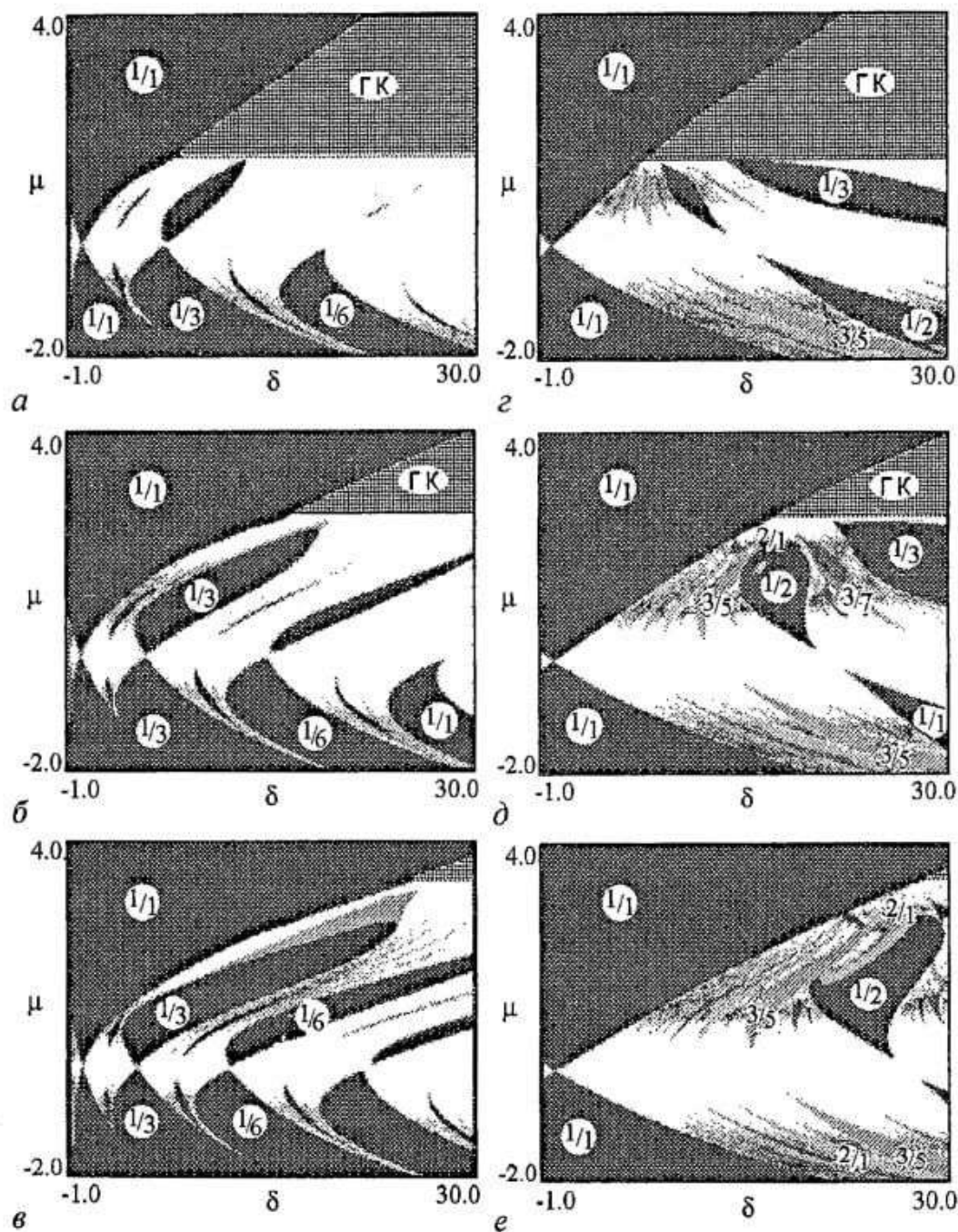


Рис. 8. Карты динамических режимов осцилляторов Ван дер Поля - Дuffинга. Левая колонка - $\beta=0$ (отсутствие фазовой нелинейности), правая - $\beta=1$ (наличие фазовой нелинейности). Значения параметров: $\lambda_1=\lambda_2=1.5$ (а, г); $\lambda_1=\lambda_2=2.5$ (б, д); $\lambda_1=\lambda_2=3.5$ (в, е)

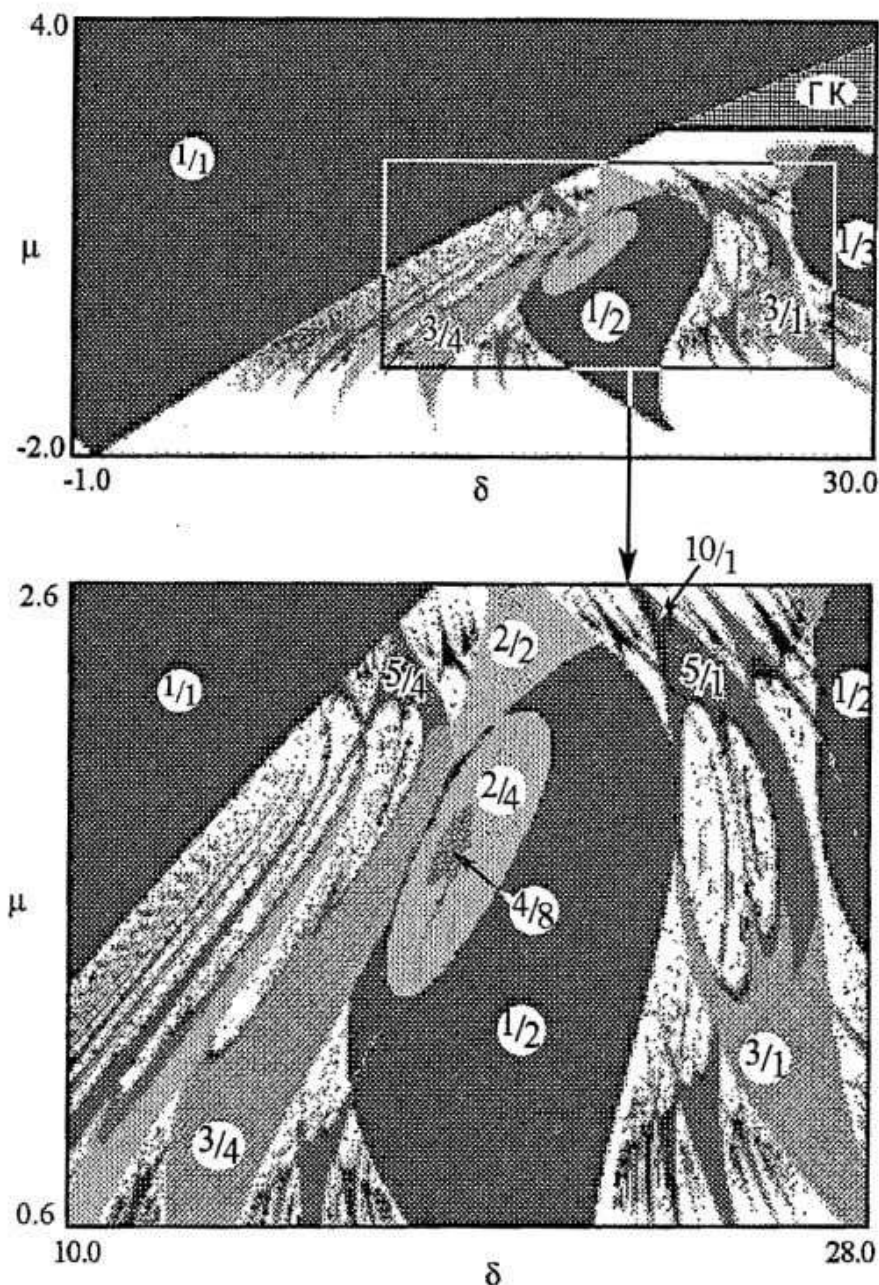


Рис. 9. Пример существования сложной внутренней структуры языков Арнольда, связанной с наличием фазовой нелинейности в системе. Значения параметров $\beta=1, \lambda_1=\lambda_2=3$

и т.д. Есть также области неперIODических колебаний. Таким образом, мы видим проявление эффекта, состоящего в том, что за счет наличия активной связи реализуется колебательный режим системы связанных осцилляторов, которые сами по себе колебаться не могут. Чтобы это стало возможным, необходимо, чтобы сила связи была сравнима с силой притяжения осцилляторов к устойчивому нулевому положению. Однако следует заметить, что внутри языков синхронизации периоды колебаний обоих осцилляторов равны между собой.

3.3. Различные управляющие параметры осцилляторов и неизохронный случай. До сих пор исследовалось поведение системы в зависимости от величины связи μ и частотной расстройки осцилляторов δ . (Фактически, это аналог плоскости амплитуда - частота воздействия для автономного гармонически возбуждаемого осциллятора.) При этом управляющие параметры осцилляторов λ_1, λ_2 оставались постоянными, а фазовая нелинейность отсутствовала (параметр $\beta=0$). Рассмотрим теперь, как зависит динамика системы от управляющих параметров λ_1 и λ_2 и параметра неизохронности β . Исследуем одновременно

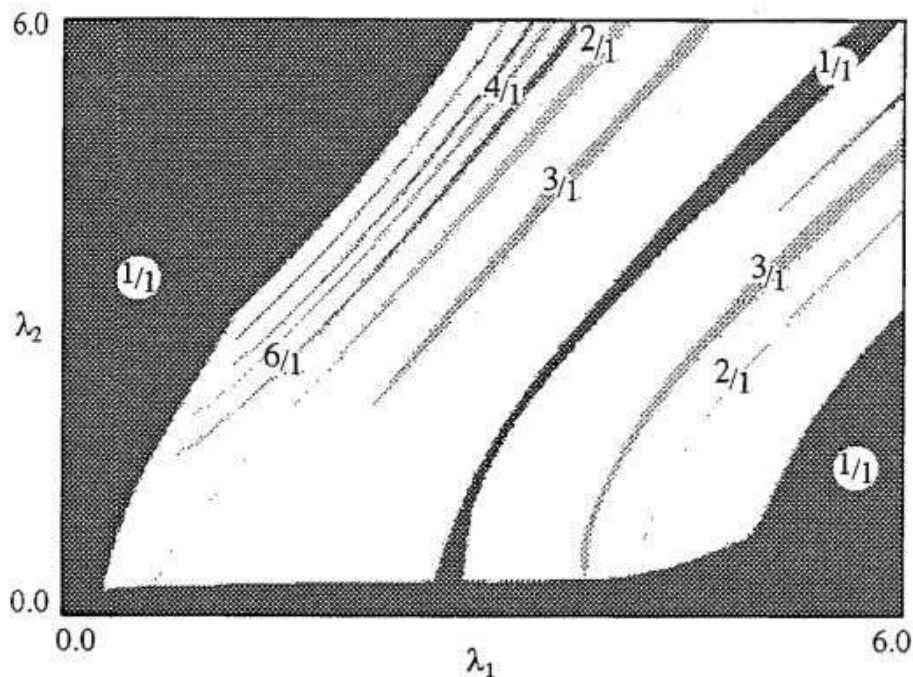


Рис. 10. Карта динамических режимов на плоскости управляющих параметров осцилляторов (λ_1, λ_2) при $\mu=0.3, \delta=1.5$

случаи диссипативной связи, строя карты динамических режимов и изменяя величину коэффициента связи μ от отрицательных до положительных значений. Результаты таких расчетов для значений параметров $\lambda_1=\lambda_2$, равных 1,5; 2,5; 3,5 показаны на рис. 8. Левая колонка отвечает системе без фазовой нелинейности, $\beta=0$, а правая - значению параметра фазовой нелинейности $\beta=1$. Поскольку эффект гибели колебаний наблюдается если $\mu > (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, то при увеличении λ_1 и λ_2 необходима большая сила связи для подавления колебаний, что хорошо видно на картах. Также увеличение λ_1 и λ_2 в области диссипативной связи приводит к заметному увеличению языков синхронизации. Для случая активной связи вид карт практически не меняется, за исключением того, что языки заметно сближаются.

Введение фазовой нелинейности гораздо более существенно модифицирует картину языков. Прежде всего, отметим, что основные языки не сближаются, а

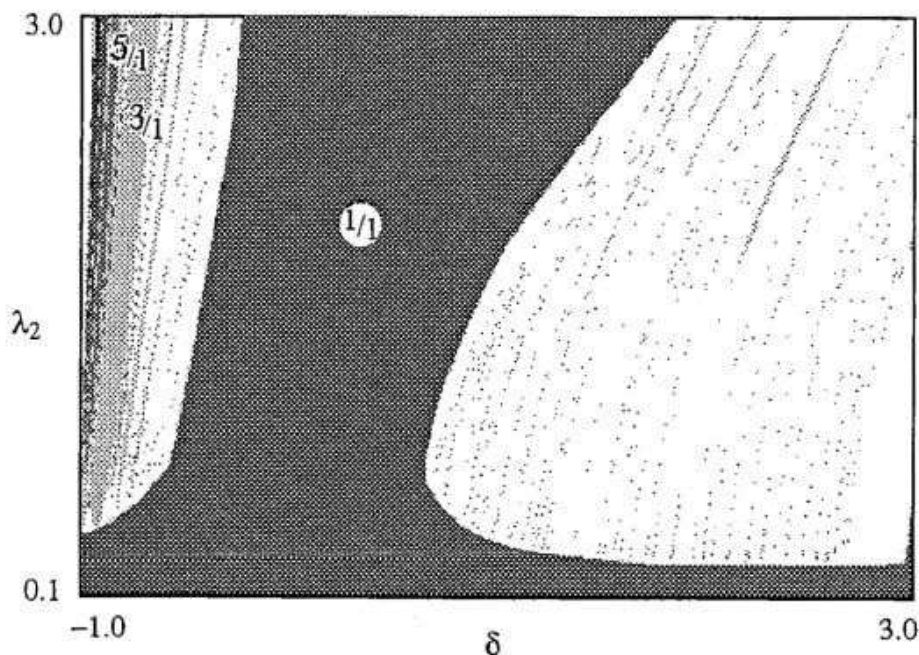


Рис. 11. Карта динамических режимов на плоскости параметров частотная расстройка - управляющий параметр второй подсистемы (δ, λ_2) при $\mu=0.3, \lambda_1=1$

удаляются друг от друга (правая колонка рис. 8). При этом область между основными языками заполняется хорошо выраженными языками более высоких порядков, причем начинает просматриваться линия перекрытия языков синхронизации. Происходит деформация формы языков Арнольда, и внутри них образуются гораздо более сложные структуры. Пример таких структур проиллюстрирован на рис. 9. Хорошо видно, что центральный язык $1/2$ ограничен сверху теперь областью синхронизации $2/2$, которая, в свою очередь, имеет острие, упирающееся в располагающийся слева основной язык периода $1/1$. Внутри же самого языка образовались острова других периодов. На двух, расположенных слева и справа от центрального, языках $3/4$ и $3/1$ также хорошо видно сопряжение двух областей разных периодов, образующих верхнее и нижнее острия, а также разрывы в языках, ограниченные сверху и снизу весьма характерными структурами типа crossroad-area. На выделенном фрагменте рис. 9 очень хорошо видны две системы языков больших периодов, упирающихся остриями в основной (левый) язык периода $1/1$ и в линию нулевой связи.

Рассмотрим, наконец, случай несимметричной системы, когда сами осцилляторы различаются по значениям управляющих параметров λ_1 и λ_2 . На рис. 10 показаны карты динамических режимов на плоскости управляющих параметров (λ_1, λ_2) . Заметим, что нулевые значения этих параметров отвечают бифуркации Андронова - Хопфа в изолированном осцилляторе. Хорошо видно, что вблизи этих линий реализуются области $1/1$ - основные языки синхронизации, принявшие своеобразную форму. Внутри охватываемой этой областью части плоскости параметров реализуются необычайно узкие, вытянутые в направлении диагонали языки высших периодов и обширные зоны квазипериодических режимов. На плоскости параметров частотная расстройка δ , управляющий параметр второй подсистемы λ_2 (рис. 11) можно также видеть весьма своеобразный язык синхронизации периода $1/1$ и множество крайне узких языков более высоких периодов.

Таким образом, динамика двух связанных дифференциальных систем Ван дер Поля - Дуффинга оказывается очень богатой и демонстрирует существенно более сложную картину, нежели предсказанную с помощью укороченных уравнений. Можно ожидать, что некоторые элементы этой картины могут быть характерными и для других дифференциальных систем.

Авторы выражают благодарность Аркадию Пиковскому за полезное обсуждение.

Работа поддержана грантом Американского фонда гражданских исследований (REC 006) и Российским фондом фундаментальных исследований (03-02-16074).

Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. Москва: Техносфера, 2003. 496 с.
2. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // *Physica D*. 1990. Vol. 41. P. 403.
3. Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. Chaos and nonisochronism in weakly coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 44. P. 3452.
4. Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. Hysteresis of synchronous - asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 43. P. 5638.
5. Ivanchenko M.V., Osipov G.B., Shalfeev V.D. Self-synchronization of nonscalar-coupled limit-cycle oscillators.

6. Pastor I., Perez-Garcia V.M., Encinas-Sanz F., Guerra J.M. Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48. P. 171.

7. Herrero M., Figueras M., Rius J., Pi F., Orriols G. Experimental observation of the amplitude death effect in two coupled nonlinear oscillators // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84. P. 5312.

Саратовский государственный университет Поступила в редакцию 10.06.03
Саратовское отделение Института
радиотехники и электроники РАН

ABOUT DYNAMICS OF TWO VAN DER POL - DUFFING OSCILLATORS WITH DISSIPATIVE COUPLING

A.P. Kuznetsov, V.I. Paksutov

Coupled van der Pol - Duffing differential systems are considered for the case of dissipative and active coupling. The arrangement of the parameter space is studied, and possible physical effects are discussed.



Паксутов Владимир Игоревич - родился в 1982 году. Окончил Лицей колледжа прикладных наук (1999). Студент пятого курса факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается научной работой на базовой кафедре динамических систем СГУ в Саратовском отделении Института радиотехники и электроники РАН по направлению: динамические режимы и синхронизация в автоколебательных системах различной природы. С 2000 года постоянный участник ежегодной научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых», принял участие в трех международных конференциях. Имеет пять научных публикаций.



ДИНАМИКА ВРЕМЕН ВОЗВРАТА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВЫБОРА СЕКУЩЕЙ ПУАНКАРЕ

А.Н. Павлов, Д.В. Думский

В данной работе мы исследуем чувствительность различных характеристик хаотического режима динамики, вычисляемых по последовательности времен возврата, к выбору секущей Пуанкаре. Мы показываем, что динамические характеристики хаотических колебаний в меньшей степени зависят от смещения секущей плоскости по сравнению с метрическими и скейлинговыми характеристиками эволюционной динамики.

Введение

Широко используемым подходом к изучению структуры и свойств хаотического аттрактора является метод секущей Пуанкаре. Данный подход понижает на единицу размерность фазового пространства, что порой облегчает дальнейшие численные исследования. В общем случае существует две возможности. С одной стороны, можно анализировать множество точек, являющихся координатами последовательных пересечений фазовой траекторией выбранной секущей плоскости. С другой стороны, могут рассматриваться интервалы времени I_i ($i=1,2,3,\dots,n$) между данными пересечениями - времена возврата. Последний тип процессов (так называемые *точечные процессы* [1]) достаточно часто встречается во многих областях естествознания, например, в нейродинамике [2].

В рамках теории динамических систем секущая Пуанкаре вводится таким образом, чтобы все фазовые траектории, принадлежащие аттрактору, пересекали ее трансверсально, то есть под ненулевым углом. В этом случае можно говорить о корректном введении секущей. Ситуация усложняется, если мы лишены возможности задавать уравнение секущей плоскости. В частности, последовательность времен возврата может представлять собой процесс на выходе порогового устройства с внешним воздействием (примером могут служить различные простейшие модели нейронов [3]). При больших значениях порогового уровня или, что эквивалентно, при малых амплитудах внешнего воздействия часть фазовых траекторий будет пропускаться, и мы можем говорить о некорректном введении секущей. Проводя обработку последовательностей времен возврата некоторой динамической системы, может быть сложно или даже невозможно определить, с каким из двух вариантов мы имеем дело. Соответственно возникает

вопрос: можно ли охарактеризовать свойства хаотической динамики на основе анализа точечных процессов в обоих случаях?

Данный вопрос частично изучался в публикациях последних лет [3-6]. Так, в работе [3] обсуждается зависимость корреляционной размерности, оцениваемой по последовательности интервалов времени между моментами генерации импульсов на выходе порогового устройства (*interspike intervals*), от величины порогового уровня. Согласно этой работе, размерность является характеристикой очень чувствительной к величине порога (или, в нашем случае, к заданию секущей плоскости). В соответствии с результатами статьи [4] для последовательности времен возврата справедлива теорема вложения, изначально доказанная для моделей *integrate-and-fire* [6]. В работе [7] показано, что динамические характеристики хаотического режима колебаний (в частности, старший ляпуновский показатель) могут быть вычислены по временам возврата, даже если не всегда происходят пересечения секущей плоскости фазовой траекторией. Однако при этом возникают проблемы корректного оценивания второго показателя Ляпунова [8].

В настоящей работе осуществлен сравнительный анализ различных характеристик, определяемых по последовательности времен возврата, в целях оценки их чувствительности к выбору секущей плоскости. Показано, что возрастание среднего времени возврата может приводить к возникновению сравнительно длительных корреляций в анализируемых данных. Приведены результаты расчета динамических энтропий и обсуждена их зависимость от деталей символического представления интервалов времени между пересечениями секущей Пуанкаре.

1. Отображение времен возврата и спектральный анализ

Выберем в качестве источника хаотических колебаний модель Ресслера

$$\begin{aligned} dx/dt &= -(y+z), & dy/dt &= x + ay, \\ dz/dt &= b + z(x-c), & a &= 0.15, \quad b = 0.2, \quad c = 10.0 \end{aligned} \quad (1)$$

и зададим уравнение секущей плоскости как $x = \Theta$. Фазовые траектории, принадлежащие аттрактору, пересекают выбранную плоскость при выполнении условия $|\Theta| \leq 17.2$.

Структура последовательностей времен возврата в значительной степени зависит от величины Θ : смещение плоскости $x = \Theta$ меняет различные статистические характеристики анализируемых данных. Даже сравнительно небольшое увеличение параметра Θ в пределах диапазона *корректного* задания секущей Пуанкаре ($|\Theta| \leq 5.3$) сопровождается, в частности, существенными изменениями формы отображения времен возврата (рис. 1) и функции плотности вероятностей. Привлечение классических подходов для проведения анализа

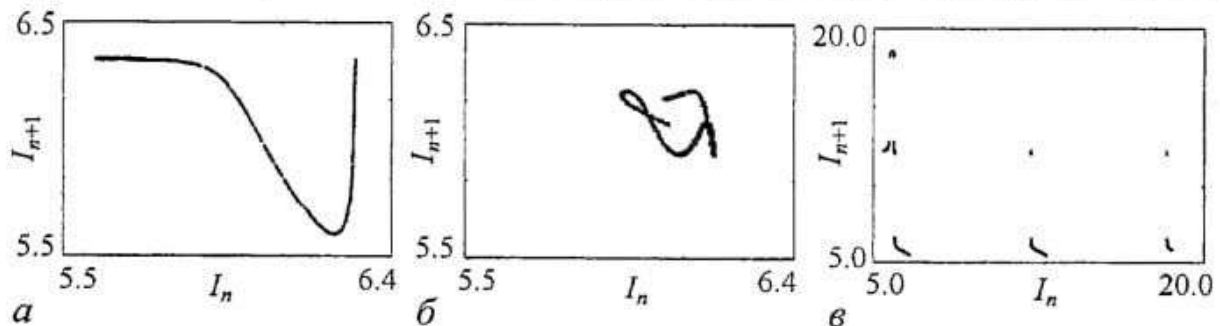


Рис. 1. Отображения времен возврата для различных значений Θ : а - 1, б - 3, в - 11

структуры последовательности временных интервалов позволяет убедиться в том, что рассчитываемые характеристики заметно варьируют при удалении секущей плоскости от состояний равновесия системы (1), относительно которых осуществляется движение в фазовом пространстве. В качестве примера на рис. 2 представлены результаты спектрального анализа. При $\Theta=1$ в широком диапазоне частот наблюдается близкая к линейной зависимость логарифма спектральной плотности от частоты. В случае $\Theta=3$ форма спектра мощности меняется в низкочастотной области.

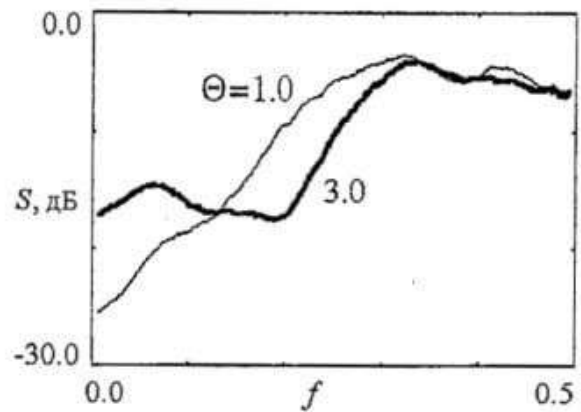


Рис. 2. Спектр мощности, рассчитанный по последовательностям времен возврата

2. Корреляционная размерность аттрактора и показатели Ляпунова

Вопрос о том, возможно ли проводить исследование метрических характеристик хаотического аттрактора, располагая лишь последовательностью времен возврата, был проанализирован в работе [3]. Используя стандартный метод расчета корреляционной размерности D_2 [9], авторы показали, что смещение секущей Пуанкаре приводит к чувствительной зависимости значения D_2 от выбора параметров алгоритма (таких как размерность вложения). Несмотря на то, что теоретически корреляционная размерность может быть вычислена даже при *некорректном* задании уравнения секущей плоскости [3], на практике результаты расчета существенно зависят от выбора Θ . Наряду с выводами работы [3] можно также отметить, что смещение плоскости $x=\Theta$ сопровождается значительными изменениями структуры последовательностей временных интервалов, которые приводят к уменьшению (или даже исчезновению) линейного участка зависимости логарифма корреляционного интеграла от логарифма масштаба наблюдения. В этом случае не приходится говорить о свойстве масштабной инвариантности и становится непонятно, как проводить расчеты размерности в рамках стандартного алгоритма ее вычисления [9]. В частности, на рис. 3, а продемонстрированы значения D_2 , вычисленные по локальным наклонам вышеупомянутой зависимости в 5-мерном фазовом пространстве для трех произвольно заданных секущих: $\Theta=0$, $\Theta=3$ и $\Theta=9$. В данном случае расчеты проводились по последовательностям, состоящим из 25000 времен возврата. Увеличение длительности данных (до 100000) приводило лишь к незначительным изменениям результатов. В случае $\Theta=9$ не удастся оценить даже приближенное значение корреляционной размерности из-за сильной чувствительности результатов к выбору диапазона масштабов при вычислении D_2 . Результаты, представленные на рис. 3, а, получены при использовании традиционного метода задержки для дискретных последовательностей временных интервалов. Подход, предложенный в работе [10], приводит к увеличению значения D_2 на единицу, но не устраняет проблем, существующих при решении задачи корректного оценивания метрических характеристик хаотического режима динамики.

Смещение секущей плоскости в значительно меньшей степени влияет на расчеты динамических характеристик [11], хотя следует отметить, что результаты численного анализа зависят от деталей используемых алгоритмов [7]. В работе

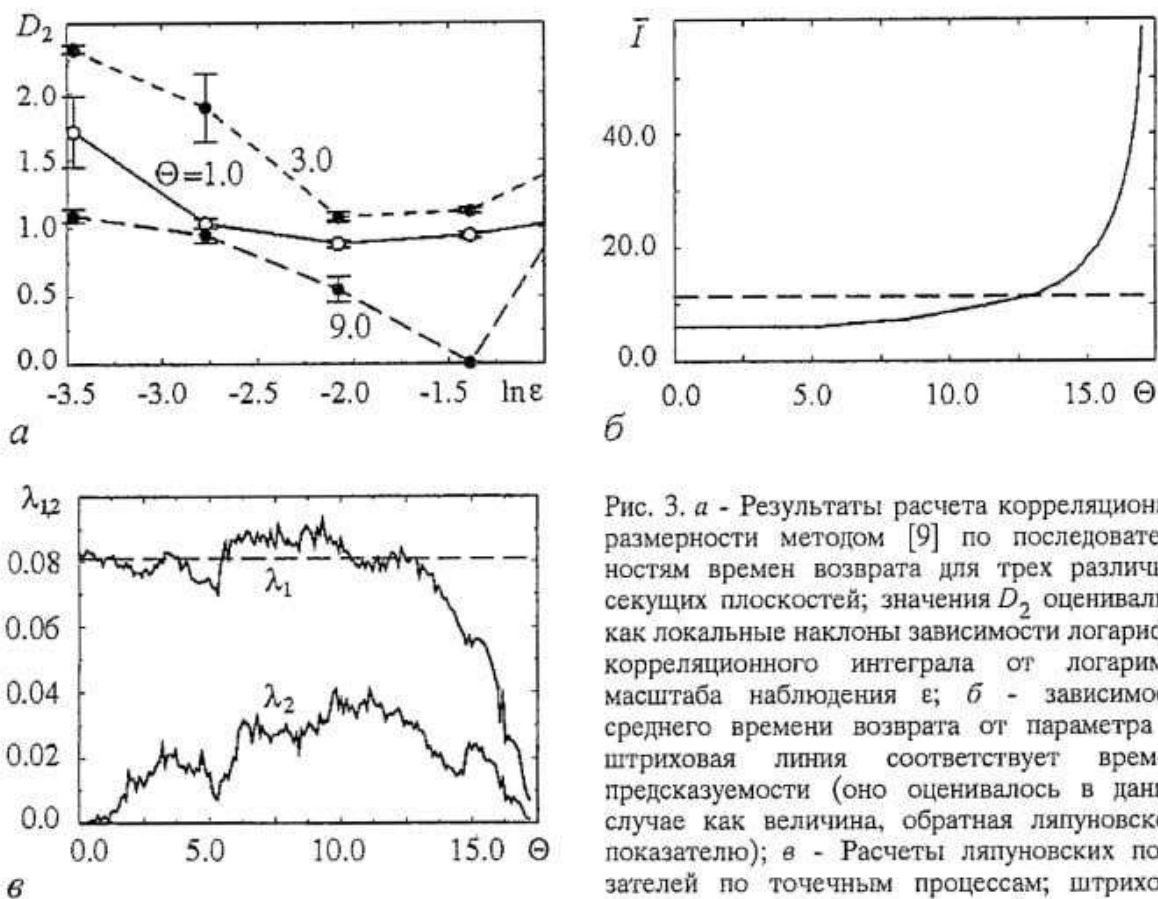


Рис. 3. *а* - Результаты расчета корреляционной размерности методом [9] по последовательностям времен возврата для трех различных секущих плоскостей; значения D_2 оценивались как локальные наклоны зависимости логарифма корреляционного интеграла от логарифма масштаба наблюдения ϵ ; *б* - зависимость среднего времени возврата от параметра Θ ; штриховая линия соответствует времени предсказуемости (оно оценивалось в данном случае как величина, обратная ляпуновскому показателю); *в* - Расчеты ляпуновских показателей по точечным процессам; штриховая линия соответствует значению λ_1 , вычисленному по сигналу $x(t)$ системы (1)

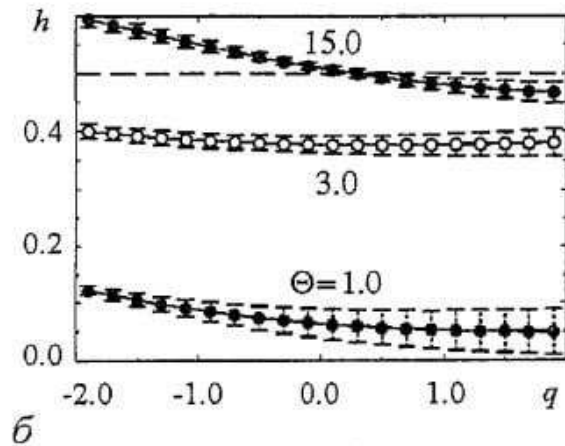
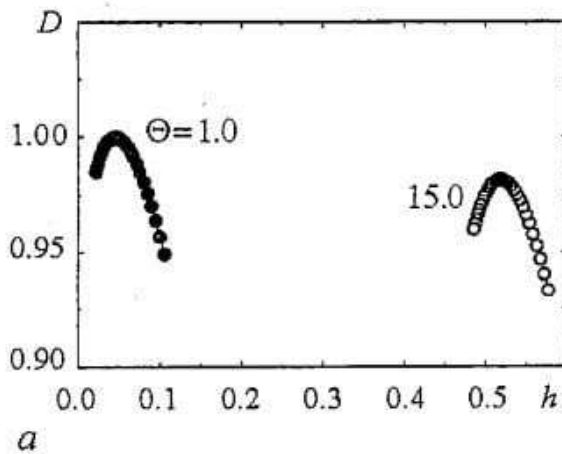
[10] был проанализирован один из способов вычисления старшего показателя Ляпунова λ_1 по временам возврата, который базируется на идее аппроксимации усредненной мгновенной частоты. Как показано в [7], значение λ_1 можно вычислить в случае *некорректного* введения секущей плоскости, если среднее время возврата не превышает некоторый характерный временной масштаб, приблизительно соответствующий времени предсказуемости для хаотических колебаний [12] (рис. 3, б). В рассматриваемом примере различие между величиной λ_1 , вычисленной по последовательности времен возврата, и соответствующими расчетами по сигналу $x(t)$ не превышает 10-15% в области, где λ_1 слабо зависит от выбора секущей плоскости (рис. 3, в). На этом же рисунке приведены результаты расчета второго показателя λ_2 , которые демонстрируют значительно более сильную чувствительность к выбору Θ . Оценка λ_2 может проводиться только в том случае, когда секущая плоскость выбирается вблизи состояний равновесия аттрактора Ресслера (Θ близко к нулю). При расчетах второго показателя даже в случае *корректного* задания уравнения секущей плоскости ($|\Theta| \leq 5.3$) может возникать проблема получения правильного результата численного анализа.

3. Скейлинговые характеристики эволюционной динамики

В данном разделе проанализируем, как выбор секущей Пуанкаре влияет на скейлинговые характеристики. С этой целью рассмотрим два подхода: мультифрактальный формализм (так называемый метод *wavelet transform modulus maxima* или WTMM [13]) и один из вариантов дисперсионного анализа одномерных случайных блужданий (метод *detrended fluctuation analysis* или DFA [14]).

Первый метод предполагает описание статистических свойств процесса в терминах спектра сингулярности $D(h)$, где h - экспонента Хелдера, а D - фрактальная размерность подмножества данных, которое можно охарактеризовать экспонентой h . Расчет спектра сингулярности в рамках WTMM-метода базируется на вычислении коэффициентов вейвлет-преобразования (1-й этап данного алгоритма). Затем строится частичная функция $Z(q,a)$, которая представляет собой сумму локальных максимумов модулей вейвлет-коэффициентов, возведенных в степень q и рассмотренных на масштабе a (2-й этап данного алгоритма). Обычно предполагается, что зависимость $Z(q,a)$ от a носит степенной характер: $Z(q,a) \sim a^{-\tau(q)}$ и описывается величиной $\tau(q)$, называемой скейлинговой экспонентой. Выбор различных степеней q позволяет получить спектр хелдеровских экспонент $h = d\tau(q)/dq$ и вычислить размерность D с помощью преобразования Лежандра $D(h) = qh(q) - \tau(q)$. Значения $h(q)$ описывают скейлинг вейвлет-коэффициентов вдоль линий локальных максимумов и характеризуют различные типы коррелированной динамики ($h \neq 0.5$) либо отсутствие корреляций ($h = 0.5$).

Проводя анализ последовательностей времен возврата с помощью метода WTMM, можно отметить, что смещение секущей Пуанкаре приводит к существенным изменениям хелдеровских экспонент, тогда как форма спектра сингулярности и значения D в меньшей степени определяются выбором секущей (рис. 4, а). При увеличении Θ хелдеровские экспоненты приближаются к уровню $h=0.5$, то есть сильные антикорреляции, наблюдаемые при $\Theta=1$ ($h \approx 0.05$), ослабевают при больших Θ . Согласно рис. 4, б, даже незначительные смещения



секущей Пуанкаре сопровождаются изменениями скейлинговых характеристик точечных процессов. Для сравнения на этом рисунке приведены результаты, полученные при двух значениях $\Theta=1$ и $\Theta=3$, которые соответствуют случаю *корректного* задания уравнения секущей. Рост Θ приводит к тому, что все большая часть фазовых траекторий будет пропущена; следовательно, будет возрастать среднее время возврата (см. рис. 3, б). Однако зависимость хелдеровских экспонент от Θ не демонстрирует монотонного роста, а является весьма сложной. В некоторых диапазонах значений Θ

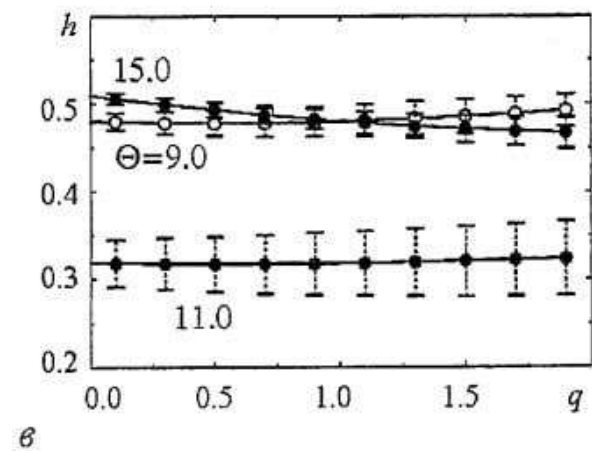


Рис. 4. а - Спектры сингулярности метода WTMM для $\Theta=1$ и $\Theta=15$; б, в - зависимости хелдеровских экспонент от параметра q , соответствующие различным секущим плоскостям

увеличение среднего времени возврата разрушает длительные корреляции в анализируемых данных. В других диапазонах может наблюдаться противоположный эффект (см. рис. 3, в). В частности, значения хелдеровских экспонент при $\Theta=11$ соответствуют коррелированной динамике времен возврата, тогда как значения h при $\Theta=9$ и $\Theta=15$ отражают некоррелированное поведение. Согласно методу WTMM, хелдеровские экспоненты (и, следовательно, эффекты длительных корреляций в точечных процессах) сильно зависят от выбора секущей.

Аналогичные выводы можно сделать на основе метода *detrended fluctuation analysis* [14], в рамках которого вычисляется скейлинговая экспонента степенной зависимости $F(n) \sim n^\alpha$, где F - среднеквадратичное отклонение проинтегрированного временного ряда (одномерных случайных блужданий) от локального линейного тренда, а n - размер временного окна, в пределах которого производится линейная аппроксимация тренда. Обычно скейлинговую экспоненту α вычисляют как наклон прямой в двойном логарифмическом масштабе ($\ln F$ от $\ln n$). Наклоны могут не совпадать при малых и больших n , отражая различные свойства скейлинга для длительных и относительно коротких корреляций в структуре анализируемых данных. В этом случае целесообразно проводить расчеты локальных характеристик. По аналогии с хелдеровскими экспонентами WTMM-метода, значения α отражают наличие различных типов коррелированной динамики ($\alpha \neq 0.5$) и отсутствие корреляций при $\alpha = 0.5$.

Результаты расчета скейлинговых характеристик метода DFA вновь демонстрируют чувствительную зависимость от выбора секущей плоскости (рис. 5, а), причем локальные скейлинговые экспоненты варьируют при изменении размера окна n . При $\Theta=3$ сильные антикорреляции, существующие в широком

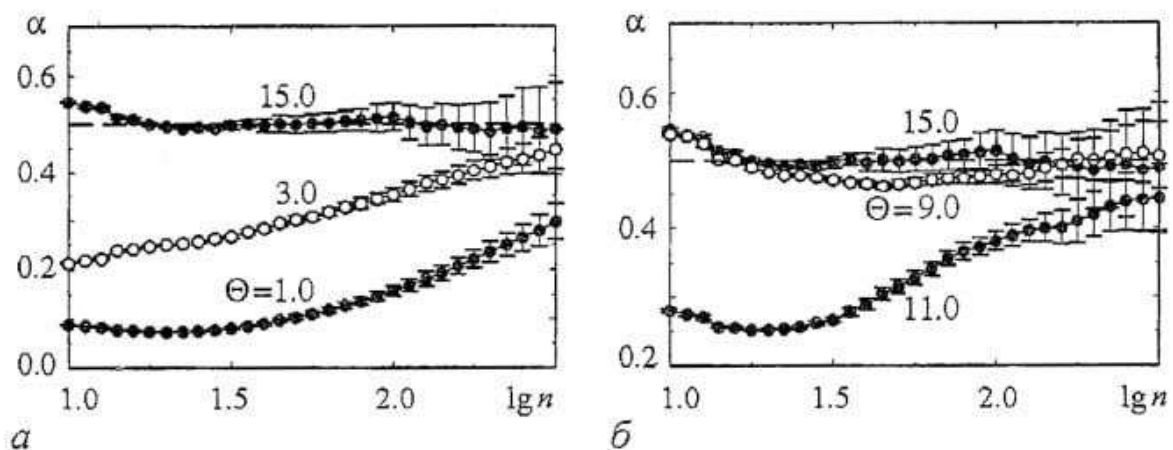


Рис. 5. Локальные скейлинговые экспоненты метода DFA

диапазоне масштабов, сменяются некоррелированной динамикой при больших n . Рис. 5, б подтверждает, что в некоторых диапазонах по параметру Θ рост среднего времени возврата может приводить к появлению корреляций в точечных процессах (случай $\Theta=11$ по сравнению с $\Theta=9$ и $\Theta=15$). Таким образом, с помощью двух рассмотренных в данном разделе методов мы убедились в сильной зависимости скейлинговых характеристик эволюционной динамики от выбора секущей Пуанкаре как в случае ее *корректного* задания ($|\Theta| \leq 5.3$), так и в случае, когда не все фазовые траектории пересекают секущую плоскость.

4. Динамические энтропии

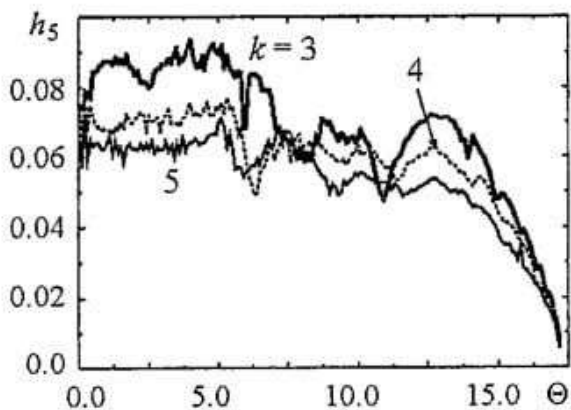
В отличие от предыдущих подходов анализ динамических энтропий предполагает предварительное преобразование временного ряда в символьную

последовательность [15]. После проведения тем или иным способом данного преобразования можно определить m -блочные энтропии (для разных размеров блока из m символов)

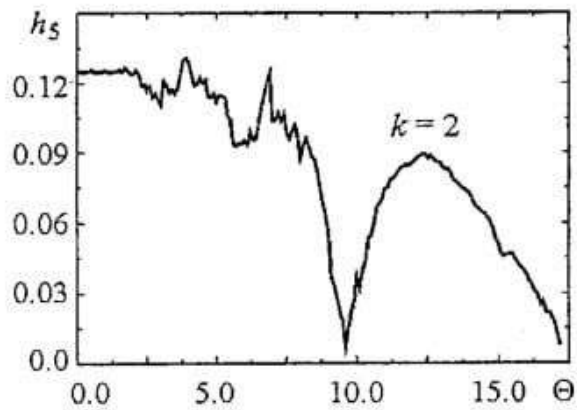
$$H_m = - \sum p^{(m)}(A_1, \dots, A_m) \log_k p^{(m)}(A_1, \dots, A_m)$$

и соответствующие им динамические энтропии $h_m = H_{m+1} - H_m$, где $A_1 \dots A_m$ - символы некоторого блока и $p^{(m)}(A_1, \dots, A_m)$ - вероятность встретить данный блок символов на произвольно выбранной позиции в символьной последовательности [15]. Предел $h = \lim_{m \rightarrow \infty} h_m$ называют *энтропией источника*. Логарифмы будут рассматриваться по основанию k , где k - число символов алфавита. Численные значения h_m зависят от деталей символьного представления анализируемых данных. Мы проводили преобразование последовательности временных интервалов в символьную последовательность таким образом, чтобы вероятности всех k символов приблизительно совпадали. Рис. 6, а демонстрирует результаты расчета h_5 в зависимости от параметра Θ , проведенного по последовательностям из 100000 времен возврата для случаев $k=3$, $k=4$ и $k=5$. Динамические энтропии, нормированные на величину среднего времени возврата, медленно уменьшаются в широком диапазоне по параметру Θ , включающем частично область *некорректного* задания уравнения секущей. По аналогии со старшим ляпуновским показателем динамические энтропии менее чувствительны к смещениям секущей плоскости, чем корреляционная размерность или скейлинговые характеристики эволюционной динамики.

Преобразование времен возврата в бинарную последовательность (случай $k=2$) приводит к более сложной зависимости $h_5(\Theta)$, изображенной на рис. 6, б. Аналогичный эффект наблюдается при использовании других методов обработки двоичных кодов, например, оценки энтропии источника с помощью алгоритма Лемпеля - Зива [16] (рис. 6, в). В обоих случаях (см. рис. 6, б и в) вычисляемые



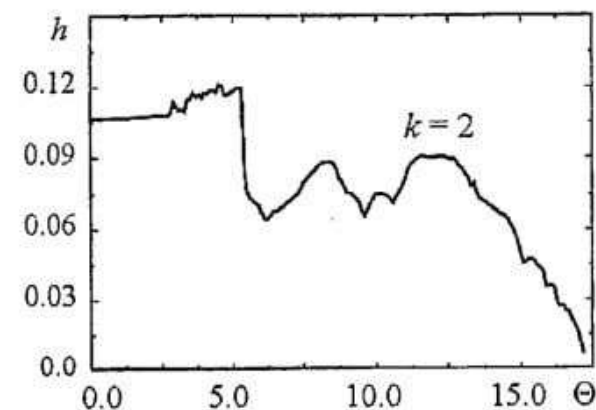
а



б

Рис. 6. а, б - Зависимости динамической энтропии h_5 от Θ для различного числа символов алфавита k . В данном случае значения h_5 нормировались на среднее время возврата I , то есть представлены значения h_5/I ; в - расчеты энтропии источника с помощью алгоритма Лемпеля - Зива для бинарного представления последовательностей времен возврата

характеристики более чувствительны к смещению секущей плоскости, чем для алфавитов, содержащих число символов $k > 2$.



в

Увеличение числа символов алфавита помимо стабилизации мер сложности (то есть уменьшения флуктуаций энтропии h_5 при вариации параметра Θ) приводят также к уменьшению их количественных значений (h_5 уменьшается с ростом k). Это обусловлено эффектами конечной выборки: для достижения одинаковой точности вычислений при увеличении k необходимо существенно увеличивать длину анализируемой последовательности. Из-за эффектов конечной выборки оказывается проблематичным проведение оценки энтропии источника при больших размерах блоков, именно поэтому мы ограничились случаем $m=5$. Отметим, что значения h_5 близки к величине старшего показателя Ляпунова λ_1 .

Флуктуации энтропии относительно некоторого среднего значения (при малых Θ) можно уменьшить, если проводить анализ более длительных последовательностей времен возврата. В нашем случае флуктуации h_5 не превышают 15% (при $k=5$), если по аналогии с ляпуновскими показателями мы ограничимся некоторым диапазоном по параметру Θ , например, $|\Theta| < 10$.

Выводы

В данной работе обсуждалась чувствительность к выбору секущей Пуанкаре зависимости различных характеристик эволюционной динамики, оцениваемых по последовательности времен возврата. Основные результаты проведенного исследования состоят в следующем.

- Смещение секущей плоскости оказывает существенное влияние на скейлинговые характеристики и на эффекты длительных корреляций в точечных процессах. Удаление секущей Пуанкаре от состояний равновесия, относительно которых осуществляется движение в фазовом пространстве, приводит к тому, что все большая часть фазовых траекторий не будет пересекать заданную плоскость. Однако при *некорректном* введении секущей в пределах некоторых диапазонов по параметру Θ будут существовать длительные корреляции в анализируемых данных, исчезающие в других диапазонах.

- Характеристики хаотической динамики демонстрируют меньшую зависимость от выбора секущей плоскости по сравнению с метрическими характеристиками. Более того, динамические характеристики можно определить даже в случае *некорректного* выбора секущей Пуанкаре. Так, если решается задача исследования по выходному сигналу сложной динамики на входе порогового устройства, расчет мер сложности или ляпуновских показателей (при выполнении достаточно общих условий) позволяет охарактеризовать входной процесс независимо от амплитуды колебаний или величины порога.

Авторы признательны профессору W. Ebeling за многочисленные дискуссии и обсуждение результатов. Исследования поддержаны Министерством образования РФ и CRDF (гранты Y1-P-06-06, SR-006-X1), а также частично поддержаны грантом РФФИ 04-02-16769 и грантом Президента (МК-2512.2004.2).

Библиографический список

1. Sauer T. Reconstruction of dynamical system from interspike intervals // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 72. P. 3911.

2. Longtin A., Bulsara A., Moss F. Time interval sequences in the bistable systems and the noise induced transmission of information by sensory neurons // Phys.Rev.Lett. 1991. Vol.65. P. 656; Douglass J.K., Wilkens L., Pantazelou E., Moss F. Noise enhancement of the information in crayfish mechanoreceptors by stochastic resonance //

Nature. 1993. Vol. 365. P. 337; *Moss F., Pei X.* Neurons in parallel // Nature. 1995. Vol. 376. P. 211; *Richardson K.A., Imhoff T.T., Grigg P., Collins J.J.* Encoding chaos in neural spike train // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. P. 2485.

3. *Castro R., Sauer T.* Correlation dimension of attractors through interspike intervals // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55. P. 287.

4. *Hegger R., Kantz H.* Embedding of sequence of time intervals // Europhysics Letters. 1997. Vol.38. P. 267.

5. *Racicot D.M., Longtin A.* Interspike interval attractors from chaotically driven neuron models // Physica D. 1997. Vol. 104. P. 184.

6. *Sauer T.* Reconstruction of integrate-and-fire dynamics, in: Nonlinear Dynamics and Time Series, eds. C.Culter and D.Kaplan, Fields Institute Communications. Vol.11, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. P.63.

7. *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., Anishchenko V.S.* Extracting dynamics from threshold-crossing interspike intervals: possibilities and limitations // Phys. Rev. E. 2000. Vol.61. P. 5033.

8. *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., Anishchenko V.S.* Chaotic dynamics from interspike intervals // Phys. Rev. E. 2001. Vol.63. P. 036205.

9. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D. 1983. Vol.9. P. 189.

10. *Janson N.B., Pavlov A.N., Neiman A.B., Anishchenko V.S.* Reconstruction of dynamical and geometrical properties of chaotic attractors from threshold-crossing interspike intervals // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. R4.

11. *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D. 1985. Vol. 16. P. 285.

12. *Farmer J.D., Sidorowich J.J.* Predicting chaotic time series // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59. P. 845.

13. *Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A.* Wavelets and multifractal formalism for singular signals: application to turbulence data // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol.67. P. 3515; *Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A.* The multifractal formalism revisited with wavelets // Int. J. Bifurc. and Chaos. 1994. Vol. 4. P. 245; *Arneodo A., Decoster N., Roux S.G.* Intermittency, log-normal statistics, and multifractal cascade process in high-resolution satellite images of cloud structure // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol.83. P. 1255.

14. *Peng C.-K., Havlin S., Stanley H.E., Goldberger A.L.* Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series // Chaos. 1995. Vol. 5. P. 82.

15. *Ebeling W., Nicolis G.* Entropy of symbolic sequences: the role of correlations // Europhys. Lett. 1991. Vol. 14. P. 191; *Ebeling W., Nicolis G.* Word frequency and entropy of symbolic sequences: a dynamical perspective // Chaos, Solitons and Fractals. 1992. Vol. 2. P. 635.

16. *Kaspar F., Schuster H.G.* Easily calculable measure for the complexity of spatiotemporal patterns // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 36. P. 842.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 3.02.2003

RETURN TIME DYNAMICS IN DEPENDENCE TO CHOICE OF THE POINCARÉ SECTION

A.N. Pavlov, D.V. Dumsky

In this paper we study how different measures of chaotic dynamics estimated from return time sequences are sensitive to choice of the Poincaré section. We show that

dynamical characteristics of chaotic oscillations are less sensitive to displacements of the secant plane than metrical and scaling characteristics of evolution dynamics.



Павлов Алексей Николаевич родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Защитил кандидатскую диссертацию (1998). В настоящее время работает доцентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: анализ временных рядов. Автор и соавтор более 40 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.

E-mail: pavlov@chaos.ssu.runnet.ru



Думский Дмитрий Викторович родился в Саратове (1979). Окончил Саратовский государственный университет по специальности «биофизика» (2001). В настоящее время является аспирантом кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: динамика биологических систем, анализ временных рядов. Соавтор 3 статей, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.



ДИНАМИКА АВТОГЕНЕРАТОРА С ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ПРИ ИНВЕРСИИ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЧАСТОТНОГО ДИСКРИМИНАТОРА

В.П. Пономаренко, Е.А. Тихонов

Исследуются динамические состояния и бифуркации в нелинейных моделях автогенераторной системы с комбинированным частотно-фазовым управлением, особенность которой состоит в инверсии характеристики частотного дискриминатора. На основании качественно-численного исследования установлены области параметров, соответствующие моногармоническому, периодическим и хаотическим автомодуляционным режимам управляемого генератора. Исследованы сценарии преобразования автомодуляционных режимов при изменении параметров моделей. Результаты представлены в виде двухпараметрических портретов движений, однопараметрических бифуркационных диаграмм, фазовых портретов аттракторов.

1. Системы с фазовым и частотным управлением являются особым классом автоколебательных систем, основанных на принципе автоподстройки частоты колебаний управляемого генератора к частоте опорного колебания. Область научно-технических приложений таких систем достаточно широка и включает в себя, например, создание источников колебаний с высокостабильными параметрами, оптимальный прием сигналов, разработку сетей синхронизации, реализацию коммуникационных технологий и др. Обобщенная структура петли автоподстройки содержит три основных элемента [1,2]: фазовый или частотный дискриминатор, выполняющий функции формирователя управляющего сигнала, зависящего от рассогласования фаз или частот управляемого и опорного колебаний; фильтр низких частот (ФНЧ), играющий роль корректирующего звена, придающего петле управления необходимые динамические свойства; частотный модулятор, через который реализуется изменение частоты колебаний управляемого генератора под воздействием управляющего сигнала. Режимы поведения управляемого генератора в значительной степени определяются нелинейной характеристикой дискриминатора и типом ФНЧ. Во многих приложениях применяют комбинированные системы с частотно-фазовым управлением, объединяющие петли частотной и фазовой автоподстройки [1,3].

Процессы в системах с фазовым и частотным управлением являются интересным и важным объектом исследований в области нелинейной динамики. В таких системах реализуются следующие стационарные режимы [1,2]: режим синхронизации (в системах с фазовым и частотно-фазовым управлением),

которому соответствуют моногармонические колебания управляемого генератора на частоте опорного колебания; режим автоподстройки частоты (в системах с частотным управлением), в котором частота колебаний управляемого генератора отличается от опорной частоты на малую величину; несинхронные режимы с непостоянными величинами фазового и частотного рассогласований, которым соответствуют автомодуляционные колебания управляемого генератора. Изучение динамики различных вариантов систем с фазовым и частотным управлением представляет интерес как с позиций теории колебаний и теории фазовой синхронизации, так и применительно к широко обсуждаемым сейчас проблемам генерирования сложных регулярных и хаотических колебаний. В последнее время проявляется заметный интерес к углубленному исследованию несинхронных режимов систем, к поиску эффективных путей расширения набора и областей генерации сложных автомодуляционных колебаний, демонстрируемых управляемым генератором. В качестве таких путей естественно рассматривать изменение нелинейной характеристики дискриминатора, усложнение ФНЧ, а также переход к многокольцевым системам управления.

В работах [4,5] рассмотрено влияние параметров ФНЧ второго порядка и нелинейности фазового дискриминатора на режимы поведения генератора с петлей фазового управления. В работе [6] предложено инверсное включение дискриминатора в петле частотной автоподстройки с ФНЧ третьего порядка, которое соответствует положительной (в отличие от традиционной отрицательной) обратной связи по цепи управления. Как оказалось [6-10], в такой системе создаются условия для более активного взаимодействия автомодуляционных колебаний, возникающих в результате развития неустойчивости режимов стационарной генерации, что делает систему богаче в отношении сложной динамики. В данной работе мы обратимся к исследованию динамики автогенератора с двойной цепью частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) при инверсном включении частотного дискриминатора.

Функциональная схема системы ЧФАП приведена на рис. 1. Объектом управления является перестраиваемый по частоте генератор (управляемый генератор), а регулируемой величиной - текущая частота его колебаний. Фазовый дискриминатор, фильтр низких частот и управляющий элемент (частотный модулятор) образуют петлю фазового управления, которая формирует сигнал рассогласования, зависящий от разности фаз колебаний управляемого генератора и эталонного генератора. Частотный дискриминатор, фильтр низких частот и управляющий элемент образуют петлю частотного управления, формирующую сигнал рассогласования, зависящий от отклонения частоты колебаний управляемого генератора от центральной частоты частотного дискриминатора, которая выбирается равной частоте опорного колебания эталонного генератора. В результате суммарного корректирующего воздействия на управляемый генератор

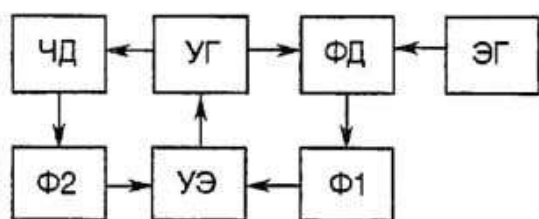


Рис. 1. Функциональная схема системы ЧФАП: УГ - управляемый генератор; ФД - фазовый дискриминатор; Φ_1 , Φ_2 - фильтры низких частот; УЭ - управляющий элемент; ЧД - частотный дискриминатор; ЭГ - эталонный генератор

со стороны фазовой и частотной цепей управления в системе ЧФАП осуществляется подстройка частоты колебаний управляемого генератора к частоте колебаний эталонного генератора. В работах [11-14] показано, что применение частотно-фазового управления приводит к увеличению области захвата в режим синхронизации.

Мы рассмотрим особенности динамики системы ЧФАП, обусловленные инверсией характеристики частот-

ного дискриминатора и инерционностью цепей управления. План статьи следующий. Вначале рассмотрена простейшая двумерная модель системы (в случае ФНЧ первого порядка), на которой выясняются динамические режимы и бифуркации при изменении параметра, характеризующего степень влияния инверсной петли частотного управления. Затем на примере модели с двумя с половиной степенями свободы (в случае ФНЧ второго порядка в фазовой и частотной петлях) анализируется влияние параметров инерционности на динамику системы, выясняется возможность генерации хаотически модулированных колебаний.

2. Исходным уравнением для описания динамических процессов в рассматриваемой системе ЧФАП является следующее уравнение для разности фаз φ управляемого и опорного колебаний, записанное в операторной форме ($p=d/dt$) на основании [11]:

$$p\varphi + \Omega_1 K_1(p)F(\varphi) - \Omega_2 K_2(p)\Phi(p\varphi) = \delta\omega. \quad (1)$$

В уравнении (1) $K_1(p)$ и $K_2(p)$ - коэффициенты передачи фильтров в фазовой и частотной цепях управления; $F(\varphi)$ и $\Phi(p\varphi)$ - характеристики фазового и частотного дискриминаторов, нормированные на единицу; Ω_1 и Ω_2 - коэффициенты усиления по цепям управления; $\delta\omega$ - начальная расстройка частот управляемого и опорного колебаний. Знак «минус» перед Ω_2 соответствует положительной обратной связи по цепи частотного управления. Характеристики дискриминаторов будем аппроксимировать функциями $F(\varphi)=\sin\varphi$ и $\Phi(p\varphi)=2\beta_1 p\varphi/(1+(\beta_1 p\varphi)^2)$, где β_1 - расстройка частот, при которой достигается максимум $\Phi(p\varphi)$. Конкретный вид уравнения (1) определяется коэффициентами передачи $K_1(p)$ и $K_2(p)$.

Положим в уравнении (1) $K_1(p)=1$, $K_2(p)=1/(1+b_1 p)$, что соответствует простейшим петлям фазового и частотного управления первого порядка (b_1 - постоянная времени). Вводя безразмерное время $\tau=(\Omega_1/b_1)^{1/2}t$, параметр инерционности $\lambda=1/(\Omega_1 b_1)^{1/2}$ и начальную расстройку $\gamma=\delta\omega/\Omega_1$, из (1) получим следующую динамическую систему:

$$d\varphi/d\tau = \eta, \quad d\eta/d\tau = \gamma - \sin\varphi + b\Phi(\beta\lambda\eta) - (\lambda+\lambda^{-1}\cos\varphi)\eta, \quad (2)$$

где $b=\Omega_2/\Omega_1$, $\Phi(\beta\lambda\eta)=2\beta\lambda\eta/(1+\beta^2\lambda^2\eta^2)$, $\beta=\beta_1\Omega_1$. Система (2) имеет цилиндрическое фазовое пространство $U=\{\varphi(\text{mod}2\pi), \eta\}$. В дальнейшем поверхность цилиндра U будем рассматривать развернутой на плоскость. В силу инвариантности системы (2) относительно замены $(\varphi, \eta, \gamma) \rightarrow (-\varphi, -\eta, -\gamma)$ достаточно исследовать ее при значениях $\gamma \geq 0$. При значениях $b \leq 0$ система (2) представляет модель традиционной системы ЧФАП, динамика которой исследована в [13]. Рассмотрим в рамках модели (2) особенности поведения системы ЧФАП, которые возникают в результате инверсии характеристики частотного дискриминатора (то есть при $b > 0$).

Вначале обсудим влияние параметра b , характеризующего степень влияния петли частотного управления, на устойчивость режима синхронизации. Система (2) при значениях $0 \leq \gamma < 1$ имеет два состояния равновесия $A_1(\arcsin\gamma, 0)$ и $A_2(\pi - \arcsin\gamma, 0)$. Состояние равновесия A_1 устойчиво при значениях $b < b_s$ и неустойчиво при $b > b_s$, где $b_s = (1 + (1 - \gamma^2)^{1/2} / \lambda^2) / 2\beta$; состояние равновесия A_2 - седло. Отметим, что в случае $b \leq 0$ состояние равновесия A_1 всегда устойчиво [13]. Устойчивому состоянию равновесия A_1 отвечает режим синхронизации управляемого генератора опорным сигналом. Поведение системы (2) вблизи границы устойчивости $b = b_s$ определяется [15] знаком первой ляпуновской величины L , выражение для которой получаем в виде

$$L(b=b_s) = -\pi\{6\beta^2\lambda^2(1-\gamma^2)(\lambda^2+(1-\gamma^2)^{1/2})-1\}/(8\lambda(1-\gamma^2)^{3/4}).$$

Величина $L=0$ при значениях $\gamma=\gamma^0$, $\gamma^0=(1-(1/2+1/6\beta^2-(1/4+1/6\beta^2)^{1/2})/\lambda^4)^{1/2}$; $L<0$ при $\gamma<\gamma^0$; $L>0$ при $\gamma>\gamma^0$. Следовательно, при переходе с возрастанием параметра b через значение b_s происходит рождение на фазовом цилиндре U устойчивого предельного цикла L_0 колебательного типа (без вращения фазы), охватывающего ставшее неустойчивым состояние равновесия A_1 , когда $\gamma<\gamma^0$, или стягивание неустойчивого предельного цикла Γ_0 колебательного типа к состоянию равновесия A_1 с потерей его устойчивости, когда $\gamma>\gamma^0$.

Устойчивый предельный цикл L_0 отвечает колебаниям относительно состояния равновесия A_1 . В теории фазовой синхронизации режим цикла L_0

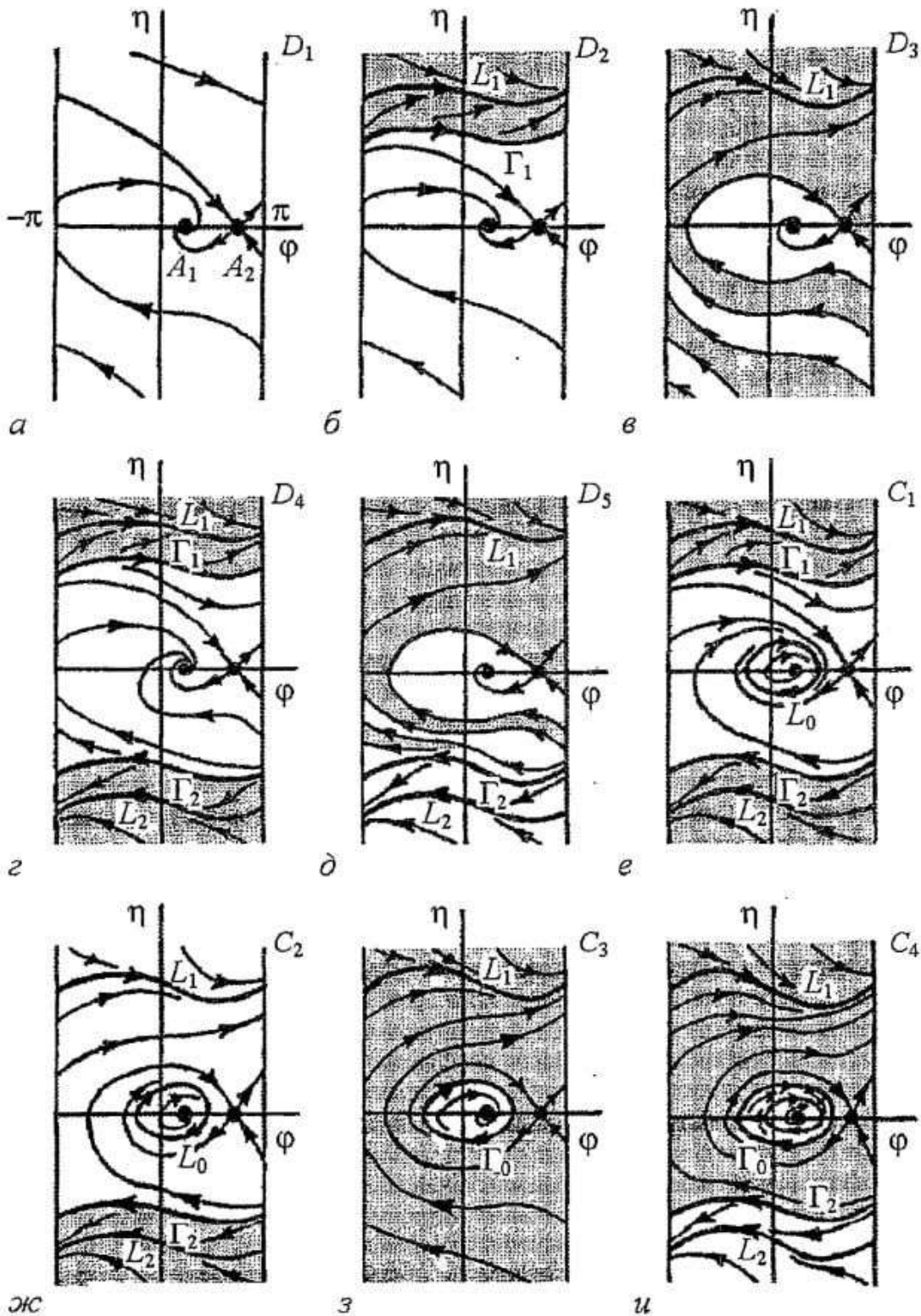


Рис. 2. Фазовые портреты модели (2) в областях D_1-D_5, C_1-C_4

трактуются [16] как режим квазисинхронизации, при котором имеется периодическая автомодуляция частоты колебаний управляемого генератора относительно стабилизированной по опорному сигналу средней частоты.

При исследовании системы (2) при $b \leq 0$ в [13] установлено, что она в этом случае обладает свойством глобальной асимптотической устойчивости с фазовым портретом, приведенным на рис. 2, а. Это означает, что при значениях $b \leq 0$, $0 \leq \gamma < 1$ в традиционной системе ЧФАП при любых начальных условиях реализуется режим синхронизации. Исследование системы (2) при значениях $b > 0$ показывает, что в этом случае на фазовом цилиндре U появляются предельные циклы колебательного и вращательного типов, которым соответствуют несинхронные режимы системы ЧФАП, то есть создаются условия для реализации автомодуляционных режимов управляемого генератора. Результаты этого исследования, выполненного с помощью качественно-численных методов и моделирования, представлены на рис. 3 в виде качественного параметрического портрета на плоскости параметров (γ, b) , соответствующего значениям $\lambda=0.2$, $\beta=4.0$.

На рис. 3 линия 1 соответствует петле сепаратрисы первого рода Π_0 , охватывающей состояние равновесия A_1 . Седловая величина $\sigma = (2\beta b - 1)\lambda + (1 - \gamma^2)^{1/2}/\lambda > 0$ (так как линия 1 расположена в области значений $b > 1/2\beta$), следовательно, петля Π_0 является неустойчивой. При переходе с увеличением b через линию 1 на фазовом цилиндре из петли Π_0 появляется неустойчивый колебательный предельный цикл Γ_0 , охватывающий A_1 . Линия 2 - это граница b_s области устойчивости состояния равновесия A_1 . Точка M на кривой b_s , соответствующая $\gamma = \gamma^0$ и отвечающая обращению в ноль первой ляпуновской величины L , разделяет линию 2 на две

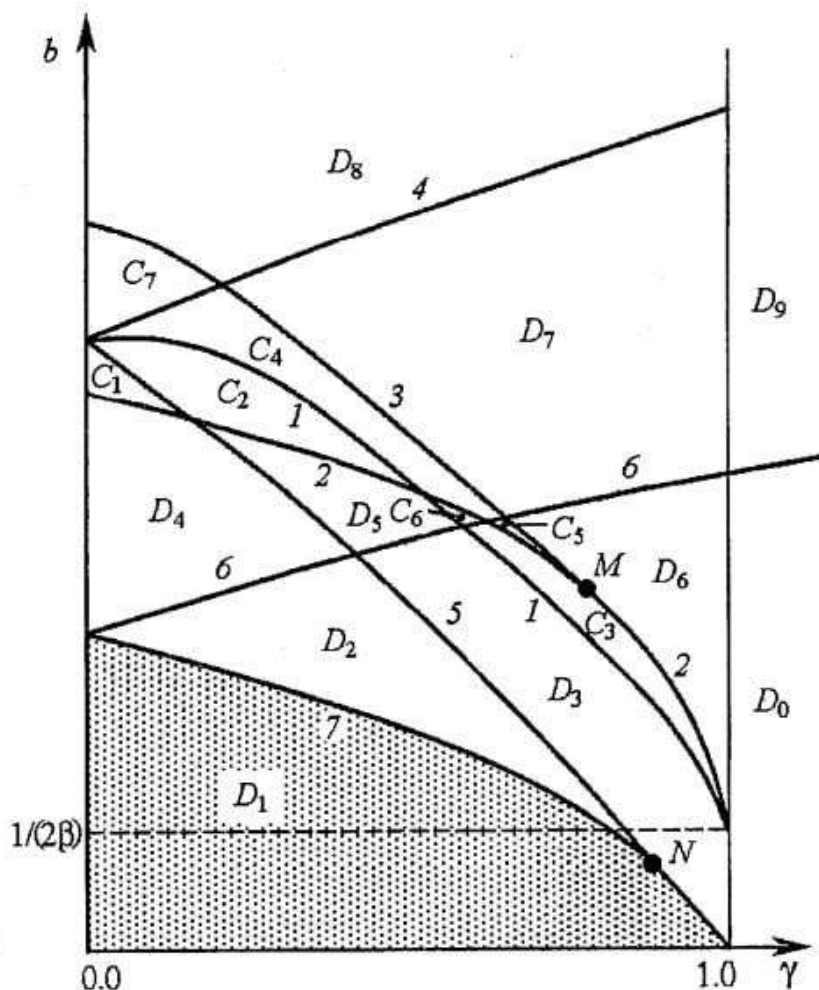


Рис. 3. Параметрический портрет модели (2) при $\lambda=0.2$, $\beta=4.0$

части: безопасную b_{s1} (выше точки M), где $L < 0$, и опасную b_{s2} (ниже точки M), где $L > 0$. Линия 3, исходящая из точки M , отвечает бифуркации двойного предельного цикла колебательного типа, охватывающего A_1 . При переходе с увеличением b через линию 3 происходит слияние и исчезновение предельных циклов L_0 и Γ_0 .

Линии 4 и 5 относятся к петлям сепаратрис второго рода Π^- и Π^+ , охватывающим фазовый цилиндр и расположенным соответственно в областях $\eta < 0$ и $\eta > 0$. Точка N на кривой 5, соответствующая $\gamma = \gamma_s = (1 - \lambda^4(2\beta b - 1)^2)^{1/2}$, отвечает обращению в ноль седловой величины σ . Петля Π^+ неустойчивая на части линии 5 выше точки N (седловая величина $\sigma > 0$) и устойчивая на части линии 5 ниже точки N ($\sigma < 0$). При пересечении с увеличением b части линии 5, соответствующей $\gamma > \gamma_s$, из петли Π^+ на фазовом цилиндре рождается устойчивый предельный цикл L_1 вращательного типа (с вращением фазы) в области $\eta > 0$. При пересечении с уменьшением b части линии 5, соответствующей $\gamma < \gamma_s$, из петли Π^+ рождается неустойчивый вращательный предельный цикл Γ_1 в области $\eta > 0$. Петля Π^- неустойчивая ($\sigma > 0$), при переходе через линию 4 с уменьшением b на фазовом цилиндре в области $\eta < 0$ появляется неустойчивый вращательный предельный цикл Γ_2 .

Линии 6 и 7 соответствуют двойному вращательному предельному циклу, расположенному в областях $\eta < 0$ и $\eta > 0$ на фазовом цилиндре. При переходе с увеличением b через линию 7 (через линию 6) на фазовом цилиндре появляется пара вращательных циклов в области $\eta > 0$ (в области $\eta < 0$): верхний L_1 - устойчивый и нижний Γ_1 - неустойчивый (нижний L_2 - устойчивый и верхний Γ_2 - неустойчивый). Устойчивым предельным циклом L_1 и L_2 с вращением фазы отвечают несинхронные режимы биений, когда разность фаз φ неограниченно нарастает, а разность частот η управляемого и опорного колебаний периодически изменяется относительно некоторого среднего значения.

Перечисленные бифуркационные кривые выделяют на плоскости (γ, b) области параметров с различным поведением системы (2). На рис. 2 и 4 приведены фазовые портреты системы для этих областей. В области D_1 система (2) не имеет предельных циклов, единственным аттрактором на фазовом цилиндре является состояние равновесия A_1 (см. рис. 2, а); для значений $(\gamma, b) \in D_1$ при любых начальных значениях φ и η в системе ЧФАП реализуется режим синхронизации. Для параметров из областей D_2, D_3, D_4, D_5, C_3 и C_6 режим синхронизации продолжает существовать, однако одновременно с ним существуют и асинхронные режимы, определяемые устойчивыми вращательными предельными циклами L_1 и L_2 (рис. 2, б-д, з, рис. 4, б). Для значений параметров из областей $C_1, C_2, C_4, C_5, C_7, D_6, D_7$ и D_8 режим синхронизации становится неустойчивым, в системе реализуются квазисинхронный режим, определяемый колебательным предельным циклом L_0 , и асинхронные режимы предельных циклов L_1 и L_2 (рис. 2, е, ж, и, рис. 4, а, в-е). В областях D_9 и D_0 существуют только асинхронные режимы (рис. 4, ж, з). Области притяжения стационарных режимов отделяются неустойчивыми циклами $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ и сепаратрисами седла A_2 .

Установленный параметрический портрет (γ, b) модели (2) позволяет выяснить возможные варианты поведения системы ЧФАП при увеличении параметра b . Рассмотрим их, выделяя следующие значения начальной расстройки γ : $0 < \gamma < \gamma^*$ (γ^* соответствует пересечению линий 2 и б на рис. 3); $\gamma^* < \gamma < \gamma^{**}$ (γ^{**} определяется пересечением линий 3 и б); $\gamma^{**} < \gamma < \gamma^0$; $\gamma^0 < \gamma < 1$; $\gamma > 1$. В интервале $0 < \gamma < \gamma^*$ при переходе с увеличением b через границы области глобальной асимптотической устойчивости D_1 вначале возникает асинхронный режим (AP) на предельном цикле L_1 , система демонстрирует бистабильное поведение (см. рис. 2, б, в, з), когда этот режим существует одновременно с режимом синхронизации (PC). При дальнейшем увеличении b появляется еще один асинхронный режим на предельном цикле L_2 , и система становится тристабильной (см. рис. 2, з, д, рис. 4, б), затем

режим синхронизации становится неустойчивым, сменяясь квазисинхронным режимом (КР) цикла L_0 (см. рис. 2, е, ж, и, рис. 4, в), после этого происходит исчезновение квазисинхронного режима и в системе реализуется один из асинхронных режимов циклов L_1 и L_2 (см. рис. 4, д, е).

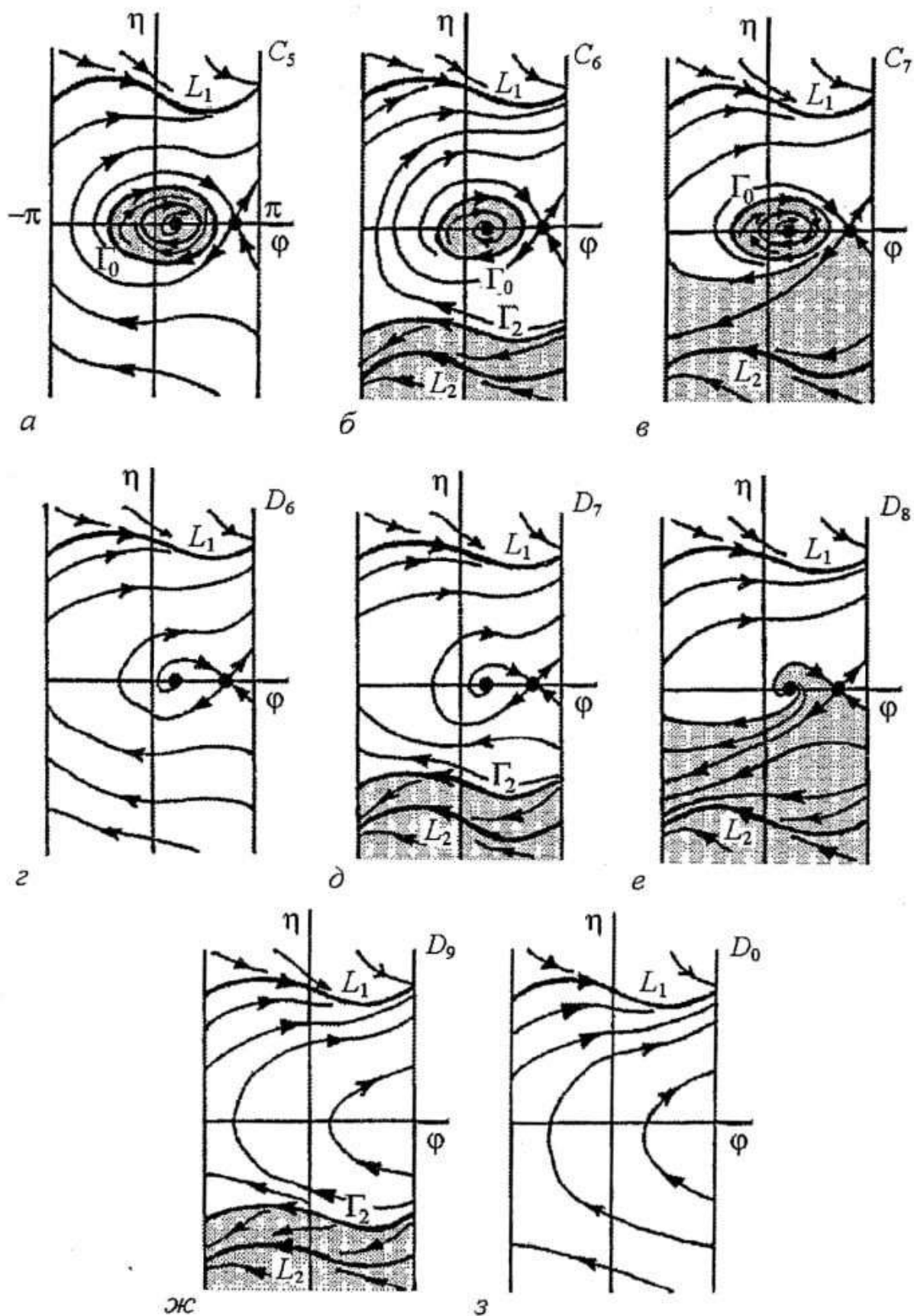


Рис. 4. Фазовые портреты модели (2) в областях C_5-C_7, D_6-D_9, D_0

Динамические режимы, наблюдаемые в остальных выделенных интервалах изменения γ , приведены в таблице.

Таблица

$\gamma^* < \gamma < \gamma^{**}$	$PC \rightarrow PC, AP(L_1) \rightarrow KP(L_0), AP(L_1)$ (рис. 4, а) $\rightarrow KP(L_0), AP(L_1), AP(L_2)$ (рис. 2, и) $\rightarrow AP(L_1), AP(L_2)$ (рис. 4, д, е),
$\gamma^{**} < \gamma < \gamma^0$	$PC \rightarrow PC, AP(L_1) \rightarrow KP(L_0), AP(L_1)$ (рис. 4, а) $\rightarrow AP(L_1)$ (рис. 4, з) $\rightarrow AP(L_1), AP(L_2)$ (рис. 4, д, е),
$\gamma^0 < \gamma < 1$	$PC \rightarrow PC, AP(L_1)$ (рис. 2, в, з) $\rightarrow AP(L_1)$ (рис. 4, з) $\rightarrow AP(L_1), AP(L_2)$ (рис. 4, д, е),
$\gamma > 1$	$AP(L_1)$ (рис. 4, з) $\rightarrow AP(L_1), AP(L_2)$ (рис. 4, ж).

Таким образом, результаты, полученные при исследовании системы (2), показывают, что даже в случае простейших ФНЧ первого порядка инверсия характеристики частотного дискриминатора приводит к значительному усложнению поведения системы ЧФАП при увеличении параметра b : существенно уменьшаются область устойчивости режима синхронизации и область глобальной асимптотической устойчивости; в зависимости от значений параметров вне этих областей в системе могут реализоваться периодические автомодуляционные режимы управляемого генератора, отвечающие колебательному и вращательным предельным циклам на фазовом цилиндре U .

3. Применение фильтров более высокого порядка в цепях фазового и частотного управления ведет к усложнению динамики системы ЧФАП - наряду с регулярными становятся возможными хаотические несинхронные режимы. Рассмотрим систему в достаточно распространенном случае фильтров второго порядка, когда $K_1(p)=1/(1+a_1p+a_2p^2)$, $K_2(p)=1/(1+b_1p+b_2p^2)$, где a_1, a_2, b_1 и b_2 - параметры инерционности. Уравнения динамики процессов в исследуемой системе на основании (1) после перехода к безразмерному времени $\tau=\Omega_1 t$ записываем в виде

$$d\varphi/d\tau=u, \quad du/d\tau=z, \quad dz/d\tau=v, \quad dv/d\tau=w,$$

$$\begin{aligned} \mu_1\mu_2 dw/d\tau = & \gamma - \sin\varphi + b\Phi(y) - (1+\varepsilon_2\cos\varphi)u - (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\mu_2\cos\varphi - b\beta\varepsilon_1\Phi'(y))z - \\ & - (\mu_1+\mu_2+\varepsilon_1\varepsilon_2 - b\beta\mu_1\Phi'(y))v - (\mu_1\varepsilon_2+\mu_2\varepsilon_1)w + b\beta^2\mu_1\Phi''(y)z^2 + \mu_2u^2\sin\varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varepsilon_1=a_1\Omega_1$, $\varepsilon_2=b_1\Omega_1$, $\mu_1=a_2\Omega_1^2$, $\mu_2=b_2\Omega_1^2$, $\Phi(y)=2y/(1+y^2)$, $\Phi'(y)=2(1-y^2)/(1+y^2)^2$, $\Phi''(y)=-4y(3-y^2)/(1+y^2)^3$, $y=\beta u$. Система (2) имеет цилиндрическое фазовое пространство $U_1=\{\varphi(\text{mod } 2\pi), u, z, v, w\}$.

Условия устойчивости состояния равновесия $A_1(\arcsin y, 0, 0, 0, 0)$ системы (3) определяем из анализа коэффициентов характеристического уравнения

$$\lambda^5 + c_1\lambda^4 + c_2\lambda^3 + c_3\lambda^2 + c_4\lambda + c_5 = 0, \quad (4)$$

где

$$c_1 = (\mu_1\varepsilon_2 + \mu_2\varepsilon_1)/(\mu_1\mu_2), \quad c_2 = (\mu_1 + \mu_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 - 2b\beta\mu_1)/(\mu_1\mu_2),$$

$$c_3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu_2(1-\gamma^2)^{1/2} - 2b\beta\varepsilon_1)/(\mu_1\mu_2), \quad c_4 = (1 + \varepsilon_2(1-\gamma^2)^{1/2})/(\mu_1\mu_2), \quad c_5 = (1-\gamma^2)^{1/2}/(\mu_1\mu_2),$$

и записываем в виде

$$c_1c_2 - c_3 > 0, \quad (c_1c_2 - c_3)(c_3c_4 - c_2c_5) - (c_1c_4 - c_5) > 0. \quad (5)$$

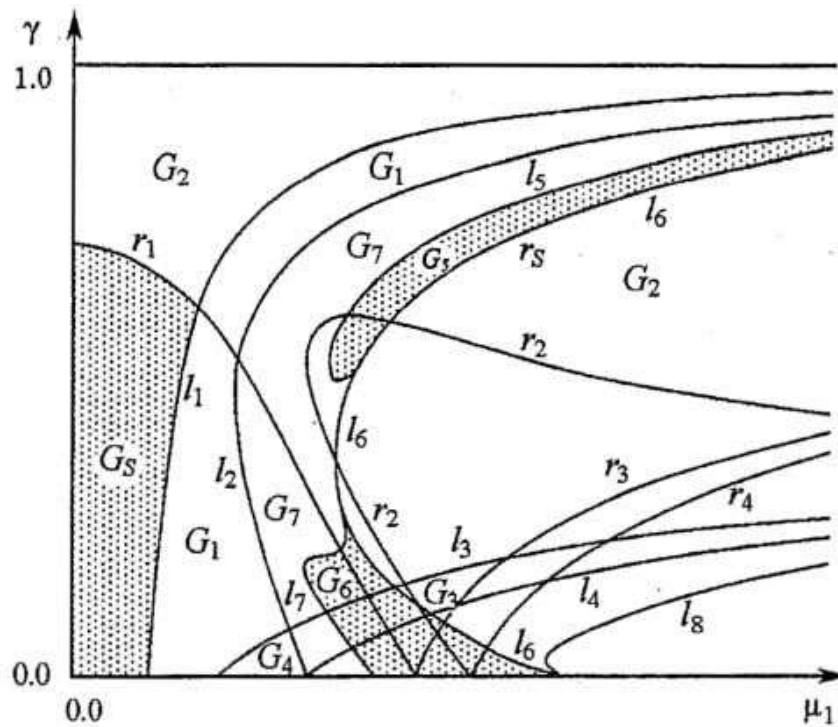


Рис. 5. Области динамических режимов модели (3) при следующих значениях параметров: $\epsilon_1=1.0$, $\epsilon_2=25.0$, $\beta=1.0$, $\mu_2=3.0$, $b=0.5$

Область значений параметров C_s , в которой выполняются условия (5), соответствует области существования синхронного режима.

Движения модели (3), развивающиеся в фазовом пространстве U_1 , зависят от семи параметров. Для того чтобы получить представление о возможных динамических состояниях и бифуркациях модели (3), рассмотрим в качестве управляющих параметров начальную расстройку γ и параметр инерционности μ_1 , который характеризует степень влияния фильтра подсистемы фазового управления на режимы поведения исследуемой системы. Обратимся к бифуркационным кривым (рис. 5), построенным на плоскости параметров (μ_1, γ) по результатам качественно-численного исследования модели (3) при значениях $\epsilon_1=1.0$, $\epsilon_2=25.0$, $\beta=1.0$, $\mu_2=3.0$, $b=0.5$. Отметим, что расположение бифуркационных линий на рис. 5 представлено лишь качественно в силу малого расстояния между некоторыми из них. На рис. 6 даны примеры (φ, u) -проекций фазовых портретов и временных реализаций, соответствующих аттракторам системы (3).

В области G_s , ограниченной частями линий l_1 и r_1 (см. рис. 5), аттрактором системы (3) в фазовом пространстве служит состояние равновесия A_1 . При значениях параметров из области G_s в системе ЧФАП при любых начальных условиях реализуется режим синхронизации. Для значений параметров вне области G_s в системе наблюдаются квазисинхронные и асинхронные режимы различной сложности. Линия l_1 соответствует границе области C_s устойчивости состояния равновесия A_1 , определяемой условиями (5); область C_s ограничена линиями l_1 , $\mu_1=0$ и $\gamma=1$. При переходе с увеличением μ_1 или с уменьшением γ через линию l_1 в системе (3) реализуется суперкритическая бифуркация Андронова - Хопфа, когда в решении характеристического уравнения (4) появляется пара комплексно-сопряженных корней с положительной действительной частью. В результате этой бифуркации в фазовом пространстве U_1 мягко рождается устойчивый предельный цикл S_1 колебательного типа (рис. 6, а), которому соответствует режим квазисинхронизации. Этот режим существует при значениях μ_1 и γ из области G_1 , заключенной между линиями l_1 и l_2 . Линия l_2 отвечает потере устойчивости цикла S_1 в результате бифуркации удвоения периода. Линия r_1 соответствует седло-

узловой бифуркации вращательного предельного цикла системы (3), расположенного в области $u > 0$ в фазовом пространстве. При переходе с увеличением μ_1 через линию r_1 у системы (3) появляется пара вращательных (2π -периодических по φ) предельных циклов в области $u > 0$: устойчивый L_3 (рис. 6, б) и седловой Γ_3 . Цикл L_3 существует в области параметров G_2 (между r_1 и r_2). На линии r_2 происходит бифуркация удвоения периода цикла L_3 .

Для значений параметров из области G_3 (между линиями l_3 и l_4) в фазовом пространстве системы (3) существует еще один устойчивый предельный цикл колебательного типа S_2 . При переходе через линию l_3 с увеличением γ или с

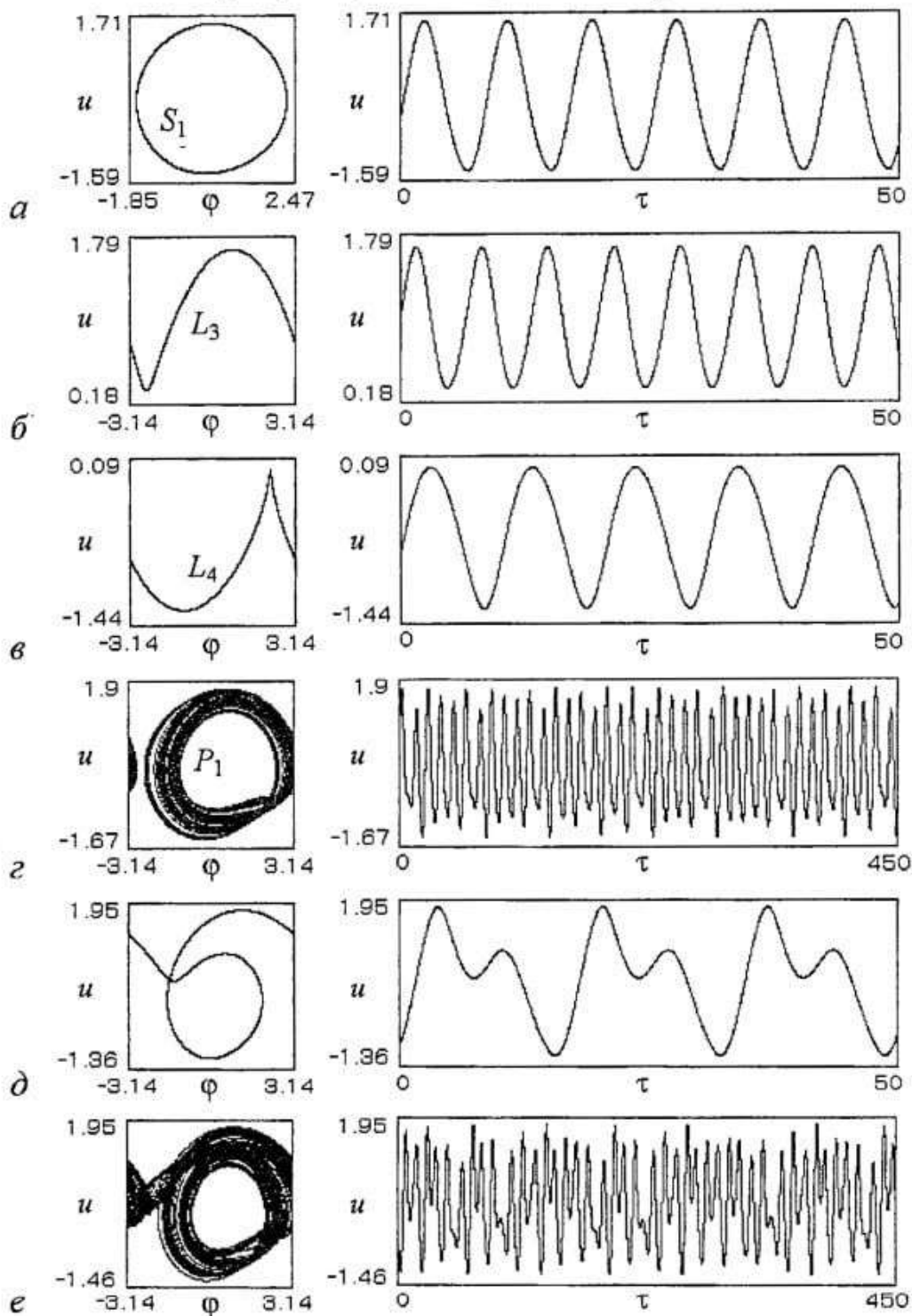


Рис. 6. Фазовые портреты аттракторов модели (3) и соответствующие им временные реализации $u(\tau)$ при значениях $\gamma=0.1$, $\mu_1=1.75$ (а); $\gamma=0.3$, $\mu_1=2.1$ (б); $\gamma=0.1$, $\mu_1=5.5$ (в); $\gamma=0.1$, $\mu_1=2.97$ (г); $\gamma=0.15$, $\mu_1=2.967$ (д); $\gamma=0.22$, $\mu_1=2.671$ (е)

уменьшением μ_1 происходит бифуркация рождения устойчивого двумерного тора из цикла S_2 , когда пара комплексно-сопряженных мультипликаторов цикла S_2 пересекает единичную окружность. Как показало численное исследование системы (3), этот тор быстро разрушается при удалении от линии l_3 , при этом система жестко переходит к режиму хаотического аттрактора колебательно-вращательного типа. Для колебаний на таком аттракторе характерно чередование вращательных движений и движений вокруг состояния равновесия A_1 . Линия l_4 отвечает бифуркации удвоения периода цикла S_2 . В области $G_4 = G_1 \cap G_3$, ограниченной частями линий l_2 , l_3 и $\gamma=0$, в фазовом пространстве одновременно существуют устойчивые предельные циклы S_1 и S_2 . Какой из режимов периодической автомодуляции установится при этом в системе ЧФАП - это зависит от начальных условий.

Линия r_3 соответствует седло-узловой бифуркации вращательного предельного цикла системы (3), расположенного в области $u < 0$ в фазовом пространстве. При переходе с увеличением μ_1 через линию r_3 в области $u < 0$ появляются устойчивый L_4 (рис. 6, в) и седловой Γ_4 вращательные предельные циклы. На линии r_4 происходит бифуркация удвоения периода цикла L_4 .

Для того чтобы получить более полное представление о динамике модели (3), проследим за развитием режимов циклов S_1 , S_2 , L_3 и L_4 при увеличении параметра μ_1 . Как показало численное исследование системы (3), преобразование режима цикла S_1 (см. рис. 6, а) при удалении от линии l_1 происходит по разным сценариям в зависимости от величины расстройки γ . При значениях $\gamma > 0.475$ и $0 \leq \gamma < 0.23$ с возрастанием μ_1 наблюдаются бифуркации удвоения периода цикла S_1 , которые завершаются образованием в фазовом пространстве хаотического аттрактора P_1 колебательного типа (рис. 6, з). Режим аттрактора P_1 существует при значениях параметров из областей G_5 (между линией l_5 и частью линии l_6 , соответствующей $\gamma > 0.475$) и G_6 (между линией l_7 , частью линии l_6 , соответствующей значениям $0 \leq \gamma < 0.23$, и частью линии $\gamma=0$) (см. рис. 5). В этом режиме имеют место хаотические автомодуляционные колебания относительно неустойчивого состояния равновесия A_1 . В интервале $0.23 < \gamma < 0.475$ при увеличении μ_1 реализуются прямые и обратные бифуркации удвоения периода цикла S_1 , хаотические колебания на базе этого цикла не возникают. Таким образом, в области параметров G_7 (между линиями l_2 , l_5 , l_7 , частью линии l_6 , соответствующей значениям $0.23 < \gamma < 0.475$, и частью линии l_3) существуют сложные квазисинхронные режимы на многооборотных колебательных предельных циклах, развивающихся на базе цикла S_1 . При переходе с увеличением μ_1 из областей G_5 , G_6 и G_7 через линию l_6 происходит прекращение квазисинхронных режимов и переход системы к асинхронным режимам предельных циклов (рис. 6, д) или хаотических аттракторов (рис. 6, е) вращательного или колебательно-вращательного типа.

Исследование поведения предельного цикла S_2 показало, что при движении на плоскости (μ_1, γ) с изменением μ_1 от линии l_3 к линии l_8 на базе цикла S_2 в фазовом пространстве формируется хаотический аттрактор P_2 колебательного типа в результате бифуркаций удвоения периода. Затем режим аттрактора P_2 либо мягко преобразуется в режим цикла S_2 через бифуркации, обратные бифуркациям удвоения, либо прерывается асинхронными режимами. Численное исследование системы (3) обнаружило существование в области параметров между линиями l_4 и l_8 других колебательных предельных циклов, соответствующих квазисинхронным режимам системы ЧФАП. Линия l_8 соответствует прекращению квазисинхронных режимов (при пересечении этой линии с увеличением μ_1 или с уменьшением γ) и переходу к периодическим или хаотическим асинхронным режимам.

На рис. 7, а приведена бифуркационная диаграмма $\{\mu_1, u\}$ точечного отображения плоскости $\varphi = \varphi^0$ в плоскость $\varphi = \varphi^0 + 2\pi$, порождаемого траекториями

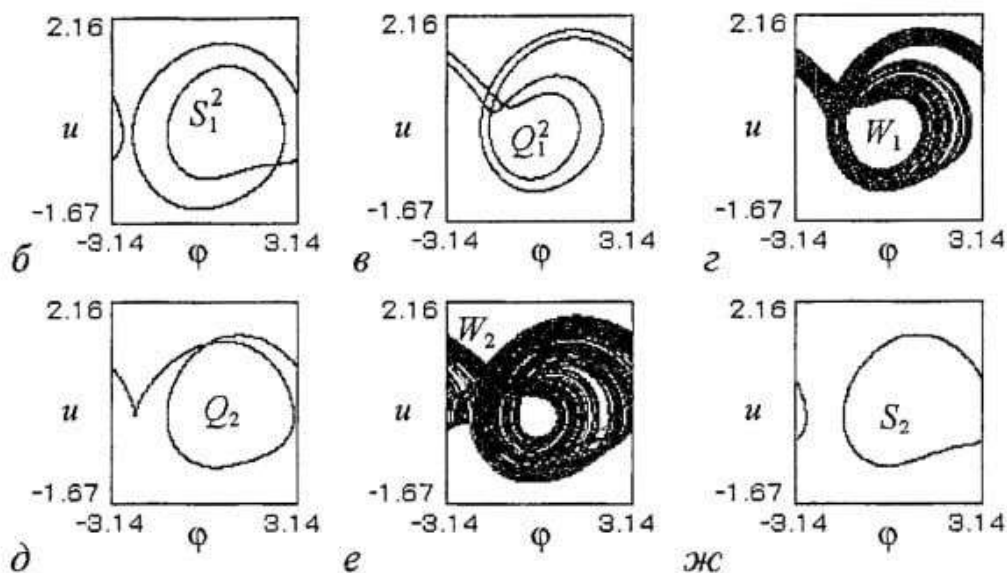
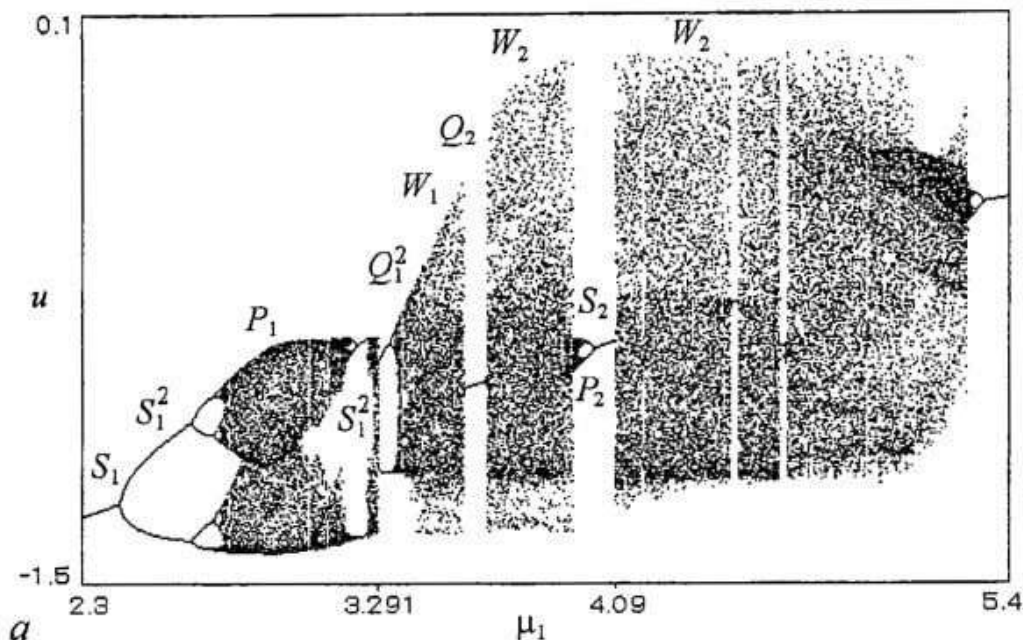


Рис. 7. Эволюция квазисинхронного режима предельного цикла S_1 с увеличением μ_1 при $\gamma=0.1$ (а) и фазовые портреты аттракторов модели (3) при следующих значениях μ_1 : б - 3.25; в - 3.3; г - 3.4; д - 3.6; е - 3.7; ж - 4.05

системы (3), построенная при $\gamma=0.1$. Эта диаграмма показывает характер эволюции режима предельного цикла S_1 при изменении μ_1 от 2.3 до 5.4. На ней можно выделить следующие три области: $M_1=\{2.3<\mu_1<3.291\}$, $M_2=\{3.291<\mu_1<4.09\}$ и $M_3=\{4.09<\mu_1<5.4\}$. В области M_1 динамика системы связана с преобразованием режима цикла S_1 (см. рис. 6, а) в режим хаотического аттрактора P_1 (см. рис. 6, з), мягким переходом от аттрактора P_1 к двухоборотному колебательному предельному циклу S_1^2 (рис. 7, б), жестким переходом от цикла S_1^2 к колебательному хаотическому аттрактору. При переходе в область M_2 хаотические колебания прекращаются, система переходит к асинхронному режиму двухоборотного (4π -периодического по ϕ) вращательного предельного цикла Q_1^2 (рис. 7, в). В области M_2 с увеличением μ_1 вначале режим цикла Q_1^2 преобразуется в асинхронный режим вращательного хаотического аттрактора W_1 (рис. 7, г) через бифуркации удвоения периода, далее наблюдается чередование режимов вращательного предельного цикла Q_2 (рис. 7, д) и колебательно-вращательного хаотического аттрактора W_2 (рис. 7, е), а затем происходит жесткий переход к режиму хаотического аттрактора P_2 колебательного типа, который с увеличением μ_1 мягко преобразуется в режим колебательного предельного цикла S_2 (рис. 7, ж).

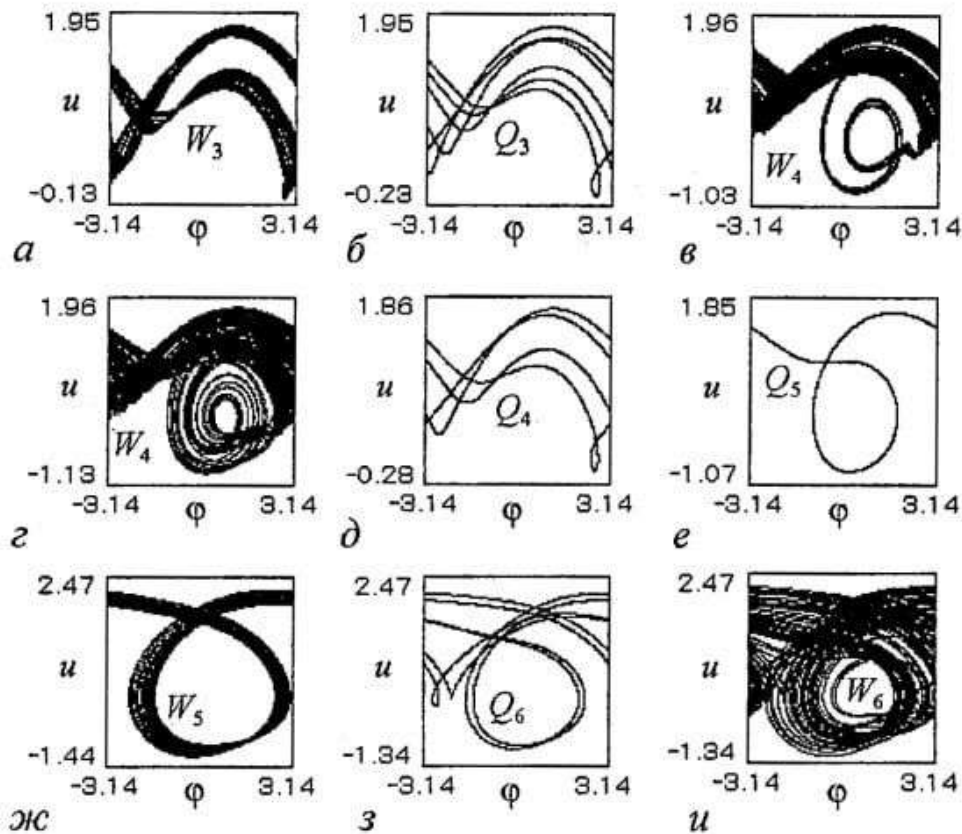


Рис. 8. Фазовые портреты, соответствующие аттракторам модели (3) при $\gamma=0.4$ для различных значений μ_1 : а - 2.82; б - 2.9; в - 3.0; г - 3.15; д - 3.08; е - 3.4; ж - 5.39; з - 5.6; и - 5.85

При переходе в область M_3 квазисинхронный режим цикла S_2 жестко сменяется асинхронным режимом хаотического аттрактора W_2 . Этот режим поддерживается в системе для большей части области M_3 , при $\mu_1 > 5.318$ происходит мягкий переход к периодическому асинхронному режиму (см. рис. 6, д).

Бифуркационная диаграмма, приведенная на рис. 7, а, дает представление о динамических состояниях, через которые проходит система (3) при увеличении μ_1 для значений γ из интервалов $0 \leq \gamma < 0.23$ и $\gamma > 0.475$. Отметим особенности эволюции режима предельного цикла S_1 при увеличении μ_1 для значений γ из интервала $0.23 < \gamma < 0.475$, выясненные в случае $\gamma=0.4$. Вначале цикл S_1 претерпевает две бифуркации удвоения периода, затем - бифуркацию, обратную удвоению с образованием двухоборотного предельного цикла S_1^2 . Далее цикл S_1^2 исчезает в результате седло-узловой бифуркации и система переходит к другому колебательному предельному циклу, при исчезновении которого наблюдается жесткий переход к колебательно-вращательному хаотическому аттрактору с редкими витками вращательных движений. С увеличением μ_1 происходит чередование хаотических и периодических колебательно-вращательных аттракторов такого типа, а затем при $\mu_1 > 2.375$ - жесткий переход к двухоборотному вращательному предельному циклу L_3^2 , который образуется в результате бифуркации удвоения периода предельного цикла L_3 (см. рис. 6, б).

Численное исследование эволюции вращательного предельного цикла L_3 показывает, что при продвижении с изменением μ_1 и γ внутрь области, ограниченной линией r_2 (см. рис. 5), на базе этого цикла через бифуркации удвоения в фазовом пространстве формируется вращательный хаотический аттрактор W_3 (рис. 8, а). На рис. 9 также приведены бифуркационные диаграммы $\{\mu_1, u\}$, которые отражают процессы преобразования асинхронного режима предельного цикла L_3^2 при изменении μ_1 от 2.6 до 6.1. Из этих диаграмм видно, что область существования хаотического аттрактора W_3 прерывается областью шестиоборотного (12 π -периодического по ϕ) предельного цикла Q_3 (рис. 8, б). С

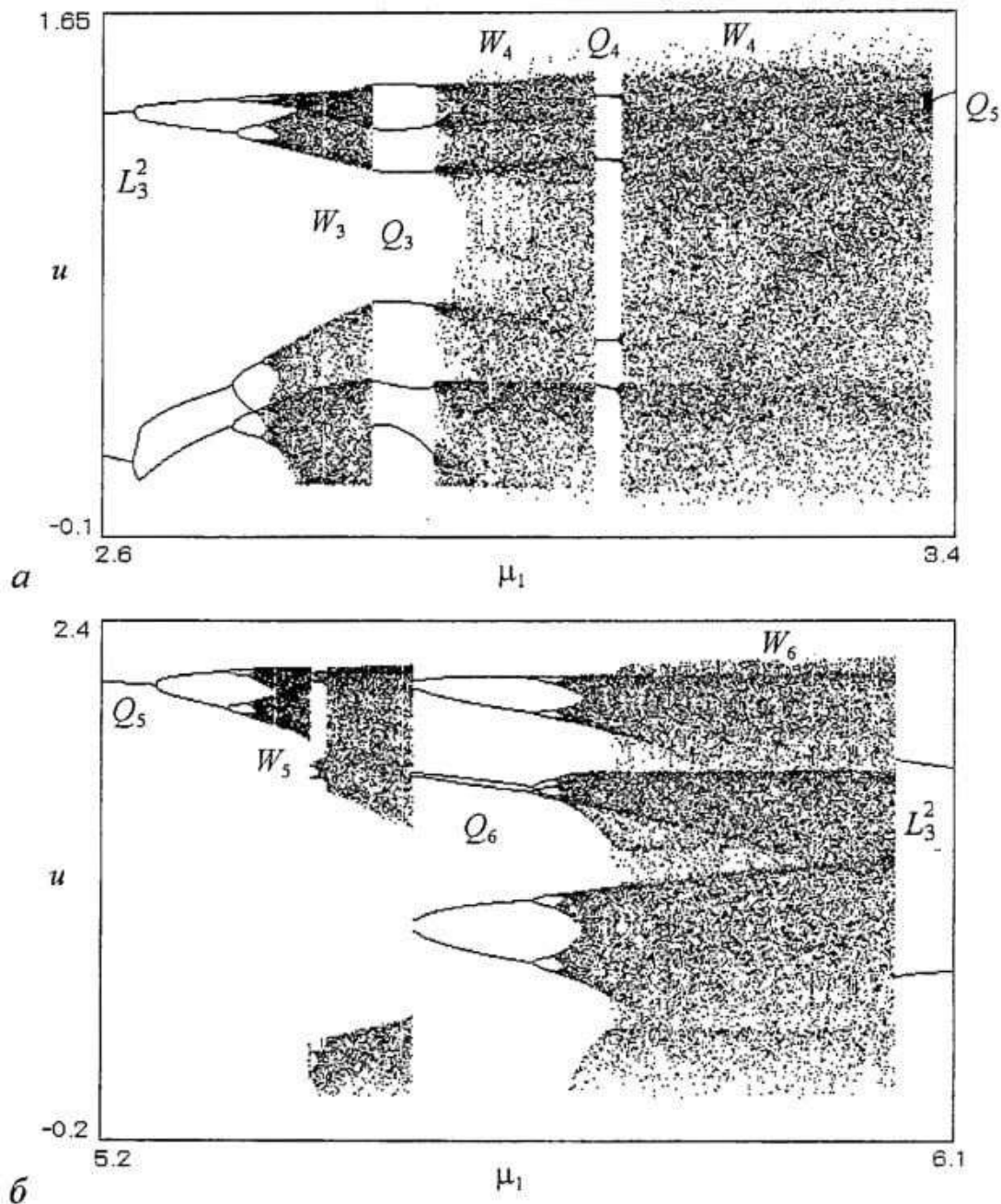


Рис. 9. Эволюция асинхронного режима предельного цикла L_3^2 при $\gamma=0.4$ и увеличении μ_1 . При увеличении μ_1 в структуре аттрактора W_3 появляются редкие витки фазовых траекторий, соответствующих колебательным движениям относительно состояния равновесия A_1 (рис. 8, в), частота появления и число которых затем увеличиваются, что приводит к формированию хаотического аттрактора колебательно-вращательного типа W_4 (рис. 8, г). Режим колебаний на аттракторе W_4 представляет собой чередование движений на аттракторе W_3 и колебательных движений относительно состояния равновесия A_1 .

Область существования аттрактора W_4 прерывается «окном» четырехоборотного (8π -периодического по φ) предельного цикла Q_4 (рис. 8, д). При $\mu_1 > 3.377$ хаотические колебания на аттракторе W_4 прекращаются, жестко сменяясь асинхронным периодическим режимом вращательного предельного цикла Q_5 (рис. 8, е). При увеличении μ_1 на базе цикла Q_5 образуется вращательный хаотический аттрактор W_5 (рис. 8, ж). Режим аттрактора W_5 жестко сменяется режимом шестиоборотного колебательно-вращательного предельного цикла Q_6 (рис. 8, з), который затем преобразуется через бифуркации удвоения периода в режим колебательно-вращательного хаотического аттрактора W_6 (рис. 8, и). При

переходе через значение $\mu_1=6.036$ происходит возвращение системы к асинхронному режиму предельного цикла L_3^2 , который далее при увеличении μ_1 мягко преобразуется в режим цикла L_3 (см. рис. 6, б).

Результаты исследования эволюции режима вращательного предельного цикла L_4 (см. рис. 6, в) при изменении параметров μ_1 и γ показывают, что при удалении с уменьшением γ или с увеличением μ_1 от линии r_4 на базе цикла L_4 в фазовом пространстве в области $\mu < 0$ образуется режим вращательного хаотического аттрактора, существующий в узкой области в окрестности линии r_4 , который затем разрушается и система переходит к асинхронному режиму колебательно-вращательного типа.

Из полученных результатов следует, что для области значений параметров μ_1 и γ , расположенной на плоскости (μ_1, γ) справа от линии l_6 (см. рис. 5), в фазовом пространстве реализуются разнообразные периодические и хаотические аттракторы системы (3) колебательного, вращательного и колебательно-вращательного типов, определяющие характер автомодуляции частоты управляемого генератора в несинхронных режимах системы ЧФАП. Это указывает на неоднородную структуру этой области, содержащей подобласти регулярных и хаотических автомодуляционных режимов.

4. В данной работе в рамках динамических моделей (1) и (3) с одной и двумя с половиной степенями свободы проведено исследование различных режимов колебаний в автогенераторной системе с комбинированным частотно-фазовым управлением при инверсии нелинейной характеристики частотного дискриминатора. Проведенный на основе моделей (1) и (3) цикл вычислительных экспериментов позволил выяснить возможность реализации в такой системе режима синхронизации при том, что в однокольцевой системе с инверсной петлей частотного управления режим автоподстройки невозможен. Область существования режима синхронизации уменьшается при возрастании параметра b , характеризующего степень влияния петли частотного управления.

Динамика системы ЧФАП оказывается достаточно сложной и разнообразной даже в простейшем случае фильтров первого порядка в цепях управления. Установлено, что в зависимости от значений параметров модели (1) могут существовать семнадцать качественно различных типов фазового портрета движений, соответствующих выделенным областям на параметрическом портрете (см. рис. 3) и отличающихся числом и расположением предельных циклов на цилиндрической фазовой поверхности. Следовательно, с применением инверсной петли частотного управления в системе ЧФАП удастся реализовать, наряду с режимом синхронизации, квазисинхронный и асинхронные режимы. На рис. 3 выделены области, позволяющие установить, при каких значениях параметров b и γ в системе реализуется моногармонический режим и периодические автомодуляционные режимы управляемого генератора. Выяснены сценарии динамики системы при изменении параметра b .

Применение фильтров второго порядка ведет к усложнению динамики системы ЧФАП - наряду с режимом синхронизации и периодическими несинхронными режимами становятся возможными сложнопериодические и хаотические квазисинхронные и асинхронные режимы. Для модели (3) такой системы определены области параметров с различными режимами управляемого генератора. Из полученных результатов следует, что если выбрать значения параметров, соответствующие хаотическим аттракторам модели (3), то систему ЧФАП можно рассматривать как генератор хаотических колебаний. При этом может быть обеспечен достаточно богатый набор хаотических режимов,

соответствующих колебательным, вращательным и колебательно-вращательным хаотическим аттракторам в фазовом пространстве.

Работа выполнена при поддержке Научной программы «Университеты России» (проект УР.03.01.027) и РФФИ (проект № 02-02-17573).

Библиографический список

1. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
2. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984.
3. Тузов Г.И. Выделение и обработка информации в доплеровских системах. М.: Сов. радио, 1967.
4. Матросов В.В. Регулярные и хаотические колебания фазовой системы // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 4. С. 4.
5. Шалфеев В.Д., Матросов В.В., Корзинова М.В. Динамический хаос в ансамблях связанных фазовых систем // Зарубежная радиоэлектроника. 1998. № 11. С. 44.
6. Пономаренко В.П., Заулин И.А. Динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с инвертированной характеристикой дискриминатора // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 7. С. 828.
7. Пономаренко В.П. Моделирование эволюции динамических режимов в автогенераторной системе с частотным управлением // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 5. С. 44.
8. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Самоорганизация временных структур в мультиравновесной автогенераторной системе с частотным управлением // ЖТФ. 1997. Т. 67, № 3. С. 1.
9. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Сложная динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с комбинированным дискриминатором // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 9. С. 1125.
10. Пономаренко В.П. Формирование сложных колебаний в автогенераторной системе с нелинейной цепью частотного управления // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 5. С. 565.
11. Капранов М.В. О полосе захвата при частотно-фазовой автоподстройке // Научн. докл. высш. школы. Сер. «Радиотехника и электроника». 1958. Т. 2, № 9. С. 162.
12. Белюстина Л.Н., Шалфеев В.Д. К теории нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Известия вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 3. С. 383.
13. Пономаренко В.П., Шалфеев В.Д. Нелинейная система частотно-фазовой автоподстройки частоты с широкой полосой захвата // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 11. С. 1694.
14. Шалфеев В.Д. Исследование системы частотно-фазовой автоподстройки частоты при одинаковых фильтрах в фазовой и частотной цепях // Известия вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12, № 7. С. 1037.
15. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984.
16. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна и Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982.

*НИИ прикладной математики и
кибернетики РАН, Нижний Новгород*

*Поступила в редакцию 17.07.03
после доработки 13.11.03*

DYNAMICS OF A PHASE-FREQUENCY-FEEDBACK OSCILLATOR WITH AN INVERTED FREQUENCY DISCRIMINATOR CHARACTERISTIC

V.P. Ponomarenko, E.A. Tikhonov

We consider dynamical states and bifurcations of a phase-frequency-feedback oscillator models with an inverted frequency discriminator characteristic. On the basis of qualitative-numerical analysis, we found the parameter regions corresponding to monoharmonic, periodic and chaotic automodulation regimes of controlled oscillator. Scenarios of development of automodulation regimes under variation of the models parameters are established. The results are presented in the form of one- and two-parameter bifurcation diagrams and phase portraits of attractors.



Пономаренко Валерий Павлович родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский государственный университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года - заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов - теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Соавтор коллективных монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше.

E-mail: rovpr@uic.nnov.ru



Тихонов Евгений Александрович - родился в Горьком (1980). Окончил факультет Вычислительной математики и кибернетики ННГУ им. Н.И. Лобачевского (2002). На данный момент является аспирантом факультета Вычислительной математики и кибернетики ННГУ по специальности «математическое моделирование, численные методы и вычислительные системы». Область интересов - нелинейная динамика, математическое моделирование и вычислительные системы. Автор 3 опубликованных работ.



ХАОТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ НА ОСНОВЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ СОСТОЯНИЯ ВЕДУЩЕЙ СИСТЕМЫ

А.А. Дмитриев

Рассмотрена задача точной синхронизации псевдохаотических систем с конечным числом состояний при наличии шума в канале. После установления синхронизации связь между ведущей и ведомой системами может быть разорвана. При этом псевдохаотические системы остаются в синхронизованном состоянии. Разработаны алгоритмы, позволяющие осуществить данную синхронизацию. Проведено численное исследование качества синхронизации как функции уровня шума в канале.

Введение

Явление хаотической синхронизации было открыто в середине 80-х годов прошлого века [1-7]. С тех пор как само явление, так и методы его реализации активно исследуются отечественными [8-13] и зарубежными специалистами [14-20]. В частности, большой резонанс вызвали работы по хаотическому синхронному отклику [7], по обобщенной [15,16,21] и фазовой [11,22,23] синхронизации, а также по синхронизации в ансамблях хаотических систем [24-26]. Вид простейшей схемы синхронизации двух хаотических систем представлен на рис. 1. В ней предполагается непосредственное воздействие физического процесса x_n ведущей системы (источник хаоса) на физический процесс ведомой системы (приемник хаоса), при наличии в общем случае шума w_n в канале. Сигнал на входе ведомой системы имеет вид

$$y_n = x_n + w_n. \quad (1)$$

Физический процесс на выходе ведомой системы \hat{x}_n представляет собой оценку сигнала x_n на выходе ведущей системы.

Одним из факторов, препятствующих практическому применению хаотической синхронизации, является ее высокая чувствительность к шумам и другим возмущающим воздействиям [27-30]. Для выяснения причин высокой чувствительности хаотической синхронизации был проведен ряд исследований и показано, что фундаментальной причиной такой чувствительности является наличие информации в самом хаотическом сигнале [31,32].

На основе этих исследований были предложены методы синхронизации, в которых от ведущей системы к ведомой передается не сам хаотический сигнал, а

информация о нем, достаточная для его восстановления в ведомой системе. Так в работах [33-36] была предложена схема хаотической синхронизации, где в качестве передаваемой информации о хаотическом сигнале использовалась символическая последовательность. Эта последовательность соответствует «символической» динамической системе, которая эквивалентна исходной хаотической системе, в том смысле, что по ее траектории возможно однозначное восстановление исходных хаотических последовательностей.

Переданная через канал связи символическая последовательность используется на приемной стороне для восстановления исходной хаотической последовательности, которая, в свою очередь, подается на вход ведомой системы и синхронизует ее с ведущей системой. Такая схема синхронизации значительно менее чувствительна к шумам, чем приведенная на рис. 1.

Еще одним свойством описанной схемы является возможность уменьшения объема передаваемых данных (за счет уменьшения уровней квантования при оцифровке хаотической последовательности), необходимых для синхронизации, по сравнению с синхронизацией на основе передачи самого хаотического сигнала. «Экономия» в пропускной способности канала связи весьма значительна: примерно в 10 раз для синхронизации с относительной точностью примерно 10^{-3} . Платой за такую экономию является необходимость проведения вспомогательных вычислений в ведомой системе.

Имеются ли пути дальнейшего уменьшения объема передаваемой для синхронизации информации за счет дополнительных вычислений на приемной стороне?

Настоящая работа посвящена анализу этого вопроса и его исследованию в рамках класса систем с конечным числом состояний, важное подмножество которых составляют типичные компьютеры. Начнем обсуждение с введения и рассмотрения понятий информационно-открытых и информационно-замкнутых систем.

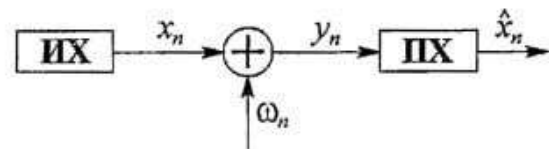


Рис. 1. Схема синхронизации: ИХ - источник хаоса, ПХ - приемник хаоса, x_n - хаотический сигнал, w_n - шум, $y_n = x_n + w_n$ - сигнал на входе приемника, \hat{x}_n - сигнал на выходе приемника

1. Информационно-открытые системы

Пусть имеется динамическая система Σ , описываемая некоторыми эволюционными уравнениями для переменной $x \in \mathbb{R}^N$, где N - размерность фазового пространства системы. Поведение системы Σ можно изучать, квантуя ее по времени и переменной состояния [37-39]. Основная идея заключается в делении множества возможных состояний на конечное число ячеек и нахождении маршрута, определяющего, к какой ячейке относится состояние системы при каждом такте часов. Каждая ячейка описывает информационное состояние системы и ассоциируется с некоторым «символом», и, таким образом, смена информационных состояний системы (информационная эволюция системы) представляется бесконечной последовательностью символов.

Будем называть систему Σ *информационно-открытой*, если она связана с внешней по отношению к ней средой таким образом, что эта связь приводит к изменению информационных состояний системы в процессе ее эволюции относительно такой же системы, не связанной с внешней средой. В противном случае будем называть систему Σ *информационно-замкнутой*.

Понятия информационной открытости и замкнутости системы

подразумевают наличие порога, при превышении которого внешнее воздействие начинает влиять на эволюцию информационных состояний системы.

Каждая динамическая система, на которую воздействует внешний шум, может рассматриваться по отношению к среде, порождающей этот шум, как кандидат на информационно-открытую для этой среды систему. Она будет информационно открытой в том случае, если уровень внешнего шума таков, что шум способен изменить информационную эволюцию системы.

Рассмотрим примеры, которые поясняют понятие информационной открытости.

Пример 1. Пусть имеется диссипативный осциллятор с двухъямным потенциалом и внешним шумом $\xi(t)$ с равномерным распределением на отрезке $[-\delta, \delta]$. Динамика осциллятора описывается уравнением

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + V'_x(x) = \xi(t). \quad (2)$$

Связь с внешней средой осуществляется через шум $\xi(t)$. Система имеет два информационных состояния: около левого и около правого положения равновесия. Обозначим их соответственно через состояние 0 и состояние 1. В случае передемпфированного осциллятора $\alpha \gg 1$ динамика системы (2) описывается уравнением

$$\dot{x} = -V'_x + \xi(\tau), \quad (3)$$

где $\tau = \alpha t$ и для определенности потенциал $V(x)$ имеет вид

$$V(x) = -1/2 x^2 + 1/4 x^4. \quad (4)$$

При малых значениях δ система является информационно-замкнутой, поскольку связь с внешней средой, осуществляемая за счет воздействия шума, не меняет информационного состояния системы. Однако при превышении δ некоторого порогового значения δ_0 вероятность перехода в другое состояние становится отличной от нуля. При $\delta > \delta_0$ траектория системы время от времени перескакивает через барьер, система «воспринимает» внешнюю информацию, ее информационное состояние меняется при каждом перескоке, и она становится информационно-открытой.

В рассмотренном примере существенно наличие порогового значения внешнего шума, ниже которого система является информационно-замкнутой, а выше - информационно-открытой.

Пример 2. Хаотические системы по своей природе обладают высокой чувствительностью к возмущениям. В них сколь угодно малое возмущение траектории порождает траекторию, экспоненциально быстро расходящуюся с невозмущенной и, следовательно, с другим информационным содержанием. Эволюция информационных состояний самой возмущенной системы также отличается от информационной эволюции невозмущенной системы. Поэтому хаотические системы являются информационно-открытыми при сколь угодно малых внешних возмущениях, то есть для них характерно отсутствие порога внешнего шума, при превышении которого информационно-замкнутая система становится информационно-открытой.

В отсутствие внешнего воздействия информационно-замкнутыми системами являются системы с конечным числом состояний. Так как типичные компьютеры представляют системы с конечным числом состояний, они в отсутствие внешнего воздействия являются информационно-замкнутыми системами.

Хаотические системы - это системы с бесконечным числом состояний.

Однако при их реализации на обычных процессорах мы имеем дело уже не с хаотическими, а с псевдохаотическими информационно-замкнутыми системами, которые могут рассматриваться как хаотические только на ограниченных временных интервалах, определяемых точностью вычисления процессора (в дальнейшем, с целью упрощения изложения, для псевдохаотических систем будем придерживаться терминологии хаотических систем).

Псевдохаотические системы, в силу информационной замкнутости, обладают тем свойством, что при многократном запуске системы с одних и тех же начальных условий ее траектория остается неизменной. Это, в частности, отличает компьютерное моделирование хаотических систем от физических экспериментов.

Используем свойство замкнутости псевдохаотических систем для синхронизации. Пусть на передающей и приемной сторонах имеются две одинаковые хаотические системы, реализованные на одинаковых процессорах. Каждая система при функционировании производит в процессе своей работы информацию. Для обеспечения синхронизации мы можем передавать информацию от ведущей к ведомой системе. Чтобы осуществить это, необходим достаточно высокоскоростной канал. Однако можно поступить и по-другому. По наблюдаемому сигналу от ведущей системы, в силу ограниченности числа состояний процессора, мы можем точно идентифицировать ее информационное состояние и запустить со значением этого состояния ведомую систему. При этом получатель будет принимать с выхода приемной системы тот же сигнал, который он получал бы при непосредственной передаче сигнала с выхода ведущей системы. Но теперь вся эта информация, необходимая для воспроизведения сигнала, производится в самой ведомой системе. Таким образом, поток информации через коммуникационный канал уменьшается до нуля. При случайной потере синхронизации ее можно восстанавливать путем дополнительных краткосрочных наблюдений за приходящим сигналом.

Ниже рассматриваются и исследуются несколько алгоритмов синхронизации хаотических систем на основе идентификации состояния ведущей системы.

2. Идентификация состояния и синхронизация для симметричного тент-отображения

Пусть хаотическая динамическая система представляет собой тент-отображение (рис. 2), описываемое уравнением

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n/\mu, & 0 \leq x_n < \mu \\ (1-x_n)/(1-\mu), & \mu < x_n \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

При $\mu=1/2$ отображение является симметричным относительно точки $x=1/2$ и описывается уравнением

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ 2(1-x_n), & 1/2 < x_n \leq 1. \end{cases} \quad (6)$$

Пусть точность вычислений составляет M бит. Запишем начальное условие x_0 в двоичном представлении

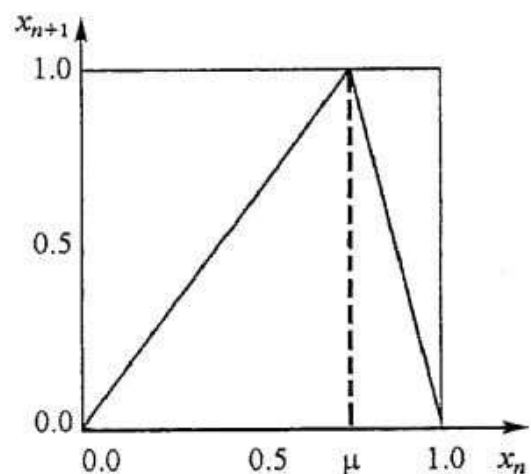


Рис. 2. Тент-отображение

$$x_0 = \sum_{v=1}^M a_v 2^{-v}, \quad a_v \in \{0,1\}, \quad (7)$$

то есть $x_0 = 0.a_1 a_2 \dots a_M$. Применяя отображение (6) к x_0 , получаем значение переменной

$$x_1 = \begin{cases} 0.a_2 a_3 \dots a_M S_1, & 0 \leq x_0 \leq 1/2 \\ 0.b_2 b_3 \dots b_M S_2, & 1/2 < x_0 \leq 1, \end{cases} \quad (8)$$

где S_1 и S_2 - появившиеся после итерации открытые позиции, которые в зависимости от устройства компьютера заполняются 0 либо 1, и связь между a_i и b_i имеет вид

$$0.b_1 b_2 \dots b_M = 1.00 \dots 0 - 0.a_1 a_2 \dots a_M. \quad (9)$$

Проиллюстрируем действие отображения (6) на конкретном примере. В качестве начального условия выберем значение $x_0 = \pi/10$. Ограничим точность вычислений 12 битами. Тогда в двоичном представлении x_0 примет вид

$$x_0 = 0.010100000110(00000000), \quad (10)$$

где биты мантииссы в скобках обозначают биты младших разрядов, которые при вычислениях не учитываются и которые для x_0 определим равными нулю; биты мантииссы слева от скобок назовем битами старших разрядов. Проитерировуем несколько раз с начальным условием (10) отображение (6):

$$x_0 = 0.010100000110(00000000),$$

$$x_1 = 0.101000001100(00000000),$$

$$x_2 = 0.101111101000(00000000),$$

$$x_3 = 0.100000110000(00000000).$$

Из полученных значений переменной x видно, что биты младших разрядов остались неизменными, в то время как в старших разрядах произошло заполнение последних позиций нулями. Это означает, что в процессе итерирования информация об отсчетах отображается только в старшие разряды и, следовательно, несмотря на конечную точность вычислений, потери этой информации не происходит. Поэтому последовательность, поступающая на вход ведомой системы, содержит в себе полную информацию о любом состоянии ведущей системы.

Введем отображение, обратное симметричному тент-отображению (рис. 3)

$$x(y) = \begin{cases} y/2, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1-y/2, & 0 < y \leq 1. \end{cases} \quad (11)$$

Оно является двузначным и сжимающим (с коэффициентом сжатия 2). Для восстановления n -го состояния системы используем следующий алгоритм. Рассмотрим последовательность зашумленных отсчетов, поступающих на вход ведомой системы $\{y_n, \dots, y_{n+M}\}$. Применим отображение (11) к отсчету y_{n+M} . Чтобы избежать двузначности, воспользуемся информацией, заложенной в отсчете y_{n+M-1} , и в качестве истинного значения выберем то, которое принадлежит той же ветви отображения, что и отсчет y_{n+M-1} . Проитерировав отображение (11) таким образом M раз, получим отсчет \hat{x}_n . Если шум в канале достаточно мал для того, чтобы исказить передаваемые отсчеты настолько, что их значения станут принадлежать

другой ветви отображения, то восстановленное значение \hat{x}_n будет в точности соответствовать отсчету x_n на выходе ведущей системы.

Ситуация меняется, когда шум в канале начинает искажать отсчеты отображения так, что они могут изменить принадлежность ветви отображения. Если такое искажение произойдет хотя бы с одним из принятых отсчетов $\{y_n, \dots, y_{n+M-1}\}$, то состояние \hat{x}_n будет восстановлено неточно.

Поскольку для точной синхронизации достаточно иметь только одно точно восстановленное состояние ведущей системы,

то задача синхронизации при относительно сильных шумах сводится к нахождению неискаженной, с точки зрения принадлежности ветвям отображения (6), серии отсчетов $\{y_k, \dots, y_{k+M-1}\}$. Эта задача решается путем перебора серий отсчетов $\{y_n, \dots, y_{n+M-1}\}$, $\{y_{n+1}, \dots, y_{n+M}\}$, ... и восстановления состояний ведущей системы $\hat{x}_n, \hat{x}_{n+1}, \dots$ до тех пор, пока восстановленное значение \hat{x}_k не совпадет со значением состояния ведущей системы x_k .

Для того чтобы определить, соответствует ли восстановленное значение \hat{x}_k состоянию ведущей системы x_k , запускаем систему (6) с начальным значением, равным значению \hat{x}_k . Так как отображение (6) является растягивающим, то при ошибочном восстановлении \hat{x}_k через M итераций расстояние между текущим состоянием системы \hat{x}_{k+M} и наблюдаемым значением приходящего отсчета y_{k+M} превысит уровень шума в канале σ

$$(y_{k+M} - \hat{x}_{k+M})^2 > \sigma^2. \quad (12)$$

Таким образом, сравнивая значения y_{k+M} и \hat{x}_{k+M} , мы можем определить, является ли значение \hat{x}_k точным состоянием x_k ведущей системы. На рис. 4 приведен график зависимости вероятности ошибочного восстановления состояния ведущей системы $P_{\text{ош}}$ от отношения сигнал шум (С/Ш) в канале. Данная зависимость позволяет определить среднее количество попыток, необходимых для точной синхронизации, в зависимости от отношения С/Ш. Например, при отношении С/Ш = 20 дБ $P_{\text{ош}} = 0.313$. Это означает, что для обеспечения синхронизации с вероятностью 99% необходимо выполнить в среднем четыре попытки синхронизации.

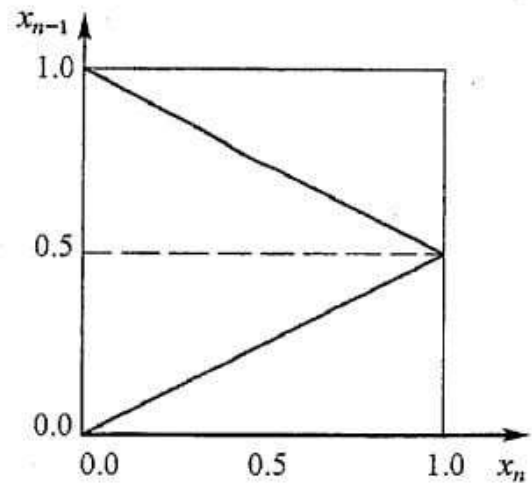


Рис. 3. Отображение, обратное тент-отображению

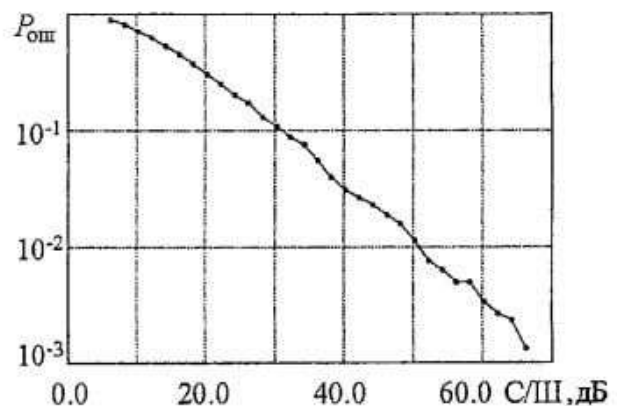


Рис. 4. Вероятность ошибочного восстановления состояния ведущей системы для симметричного тент-отображения

3. Идентификация состояния и синхронизация для несимметричного тент-отображения

До сих пор мы рассматривали ситуацию, в которой в качестве хаотической системы рассматривалось симметричное тент-отображение. Что изменится, если в качестве хаотической системы выбрать несимметричное тент-отображение, когда $\mu \neq 1/2$? Как и в симметричном случае, рассмотрим двоичное представление переменной $x_0 = 0.a_1a_2\dots a_M$. Снова в качестве примера выберем $x_0 = \pi/10$ и перепишем его в виде (10), то есть $x_0 = 0.010100000110(00000000)$. Проследим за преобразованием x_0 при применении к нему отображения (5) в случае $\mu = 0.7$. Серия отсчетов x_0, x_1, x_2, x_3 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.010100000110(00000000), \\ x_1 &= 0.011100101101(00100100), \\ x_2 &= 0.101001000000(01111100), \\ x_3 &= 0.111010100101(01000011). \end{aligned}$$

Таким образом, действие отображения (5) на начальное условие x_0 в случае $\mu \neq 1/2$ приводит к отображению информации об x_0 , а также обо всех последующих значениях отсчетов не только в старшие разряды мантииссы, но и в младшие. Однако при расчетах с конечной точностью возмущения в младших разрядах не учитываются, что приводит в процессе итерирования к потере части информации о состоянии системы. Это означает, что в несимметричном случае вероятность ошибочной идентификации состояния ведущей системы даже в отсутствие шумов не равна нулю.

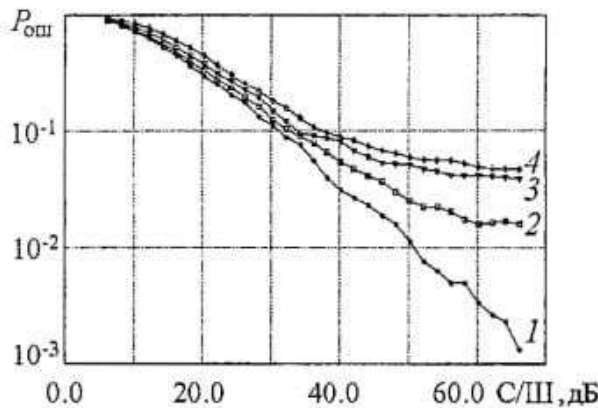


Рис. 5. Вероятность ошибочного восстановления состояния ведущей системы для различных значений параметра: 1 - 0.5; 2 - 0.6; 3 - 0.7; 4 - 0.8

Вероятность ошибочного восстановления состояния ведущей системы $P_{\text{ош}}$ зависит от значения параметра μ (рис. 5). Из графика на рис. 5 видно, что чем больше параметр μ отличается от значения $1/2$, тем выше вероятность ошибочной идентификации состояния ведущей системы.

Итак, метод синхронизации на основе информации о состояниях ведущей системы в общем случае состоит в следующем. На вход ведомой системы с выхода ведущей системы поступает последовательность зашумленных в канале отсчетов $y_0, \dots, y_n, \dots, y_{n+M}, \dots$. В приемнике с помощью обратного итерирования по последовательности $\{y_n, \dots, y_{n+M}\}$, где M - точность вычисления компьютера, происходит восстановление значения \hat{x}_n . Для того чтобы проверить, является ли восстановленное значение \hat{x}_n точным состоянием ведущей системы x_n и, следовательно, произошла ли точная синхронизация, запускается процесс итерирования, идентичный процессу итерирования, происходящему в ведущей системе, с начальным значением \hat{x}_n . Если через M итераций значения отсчетов последовательностей y_M и x_M разойдутся на величину, большую уровня шума в канале σ , то восстановленное значение \hat{x}_n не будет являться точным значением состояния ведущей системы x_n и процесс

вхождения в синхронизацию должен быть повторен для следующего значения состояния ведущей системы x_{n+1} . В противном случае пара ведущая - ведомая системы является синхронизованной.

4. Модифицированный алгоритм

В работе [40] предложен подход к очистке хаотического сигнала, согласно которому выбор ветви при обратной итерации текущего состояния y_n проводится на основе именно значения предыдущего отсчета y_{n-1} , а не на основе информации о ветви отображения, к которой принадлежит отсчет y_{n-1} . Используем данный подход для построения алгоритма восстановления точного состояния ведущей системы.

Пусть в качестве хаотического источника используется тент-отображение (5) и пусть точность вычислений ограничена M битами. На вход приемника поступает последовательность зашумленных отсчетов (1). Для восстановления n -го состояния ведущей системы воспользуемся обратным тент-отображением (11). Как и в предыдущем алгоритме восстановление начнем с отсчета y_{n+M} . На первом шаге из двух прообразов точки y_{n+M} выбираем тот, который ближе к отсчету y_{n+M-1} , обозначим его z_{n+M-1} . На втором шаге из двух прообразов отсчета z_{n+M-1} выбираем тот, который ближе к y_{n+M-2} , и обозначаем его z_{n+M-2} . Процесс продолжается до получения отсчета z_n , который и рассматривается в качестве восстановленного значения состояния ведущей системы \hat{x}_n . Остается определить, произошла ли синхронизация. Подействуем отображением (5) на восстановленное значение \hat{x}_n и через M итераций сравним значения отсчетов y_M и x_M . Если имеет место выражение (12), то при синхронизации произошла ошибка и процесс восстановления необходимо повторить для другого состояния системы. В противном случае пара ведущая - ведомая системы является синхронизованной.

Таким образом, суть описанного алгоритма сводится к предположению о том, что возмущенный шумом отсчет принадлежит той ветви отображения, расстояние до которой от него ближе. В случае симметричного тент-отображения результаты восстановления состояния ведущей системы описываемого алгоритма в точности соответствуют результатам восстановления состояния ведущей системы предыдущего алгоритма и, следовательно, вероятность ошибки при синхронизации и в первом, и во втором алгоритмах одинакова. В случае же несимметричного отображения становится возможной ситуация, при которой возмущенный шумом отсчет находится в зоне действия одной ветви отображения, но при этом расстояние между ним и этой ветвью больше, чем расстояние между ним и другой ветвью. Пример такой ситуации приведен на рис. 6. На рис. 7 приведена зависимость вероятности ошибочной идентификации состояния $P_{\text{ош}}$ от отношения С/Ш в канале для описываемого подхода в сравнении с предыдущим алгоритмом при $\mu=0.7$. Из графика видно, что и первый и второй алгоритмы дают приблизительно одинаковые результаты по вероятности точной синхронизации.

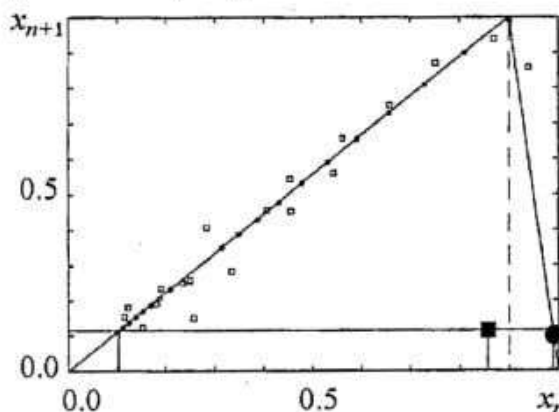


Рис. 6. Изменение информационного состояния отсчета тент-отображения (переход из одной ветви отображения в другую) под действием шума. Кружки и квадраты обозначают соответственно значения невозмущенных и возмущенных шумом отсчетов. Черный кружок и черный квадрат - значения отсчета до и после изменения информационного состояния, соответственно

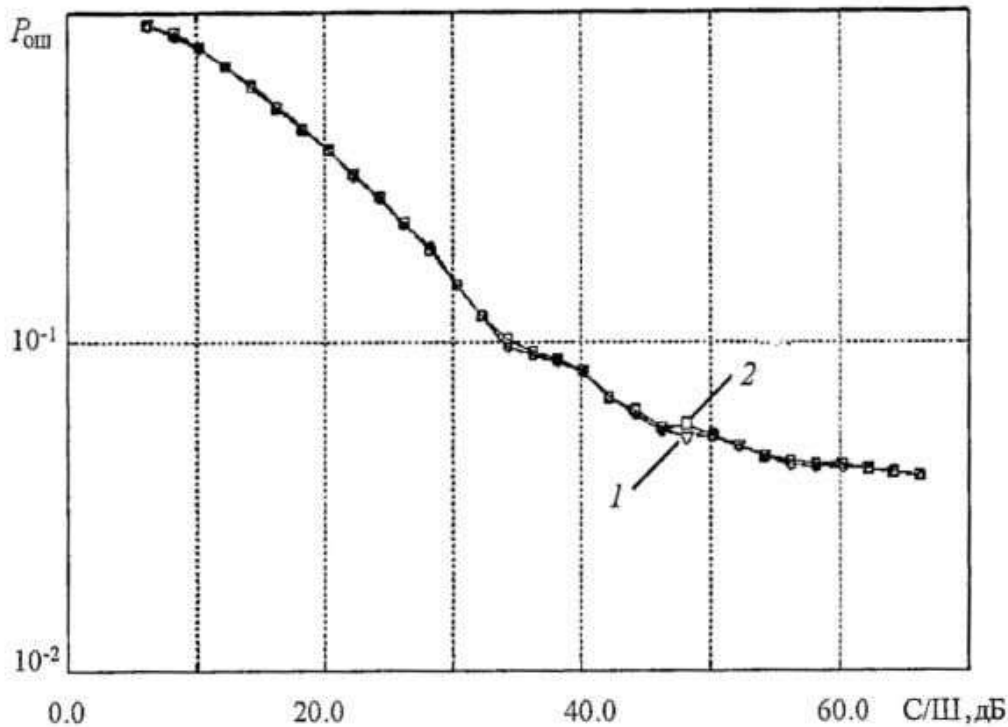


Рис. 7. Вероятность ошибочного восстановления состояния ведущей системы для разных алгоритмов при $\mu=0.7$: 1 - алгоритм восстановления на основе информации о принадлежности отсчетов ветвям тент-отображения; 2 - алгоритм восстановления на основе информации о самих значениях отсчетов

5. Вероятность установления синхронизации

Выше было показано, что в процессе итерирования в случае несимметричного тент-отображения происходит потеря части информации о состояниях ведущей системы. Формально это означает, что даже при отсутствии шума в канале восстановление состояния ведущей системы может быть не точным. Расчеты показывают, что вероятность точной синхронизации при $\mu=0.6$ составляет 0.985, при $\mu=0.7$ - 0.962, при $\mu=0.8$ - 0.957. Полученные значения являются предельными значениями вероятности точной идентификации состояния ведущей системы $P_{\text{макс}}$ при наличии шума в канале для конкретного параметра μ , которые достигаются при $C/Ш \rightarrow \infty$.

Найдем, при каких значениях отношения $C/Ш$ в канале может быть достигнуто $P_{\text{макс}}$. Рассмотрим рис. 5. При $\mu=0.6$ и отношении $C/Ш \sim 65$ дБ вероятность ошибочной идентификации состояния $P_{\text{ош}}$ составляет 0.016. Это означает, что вероятность правильного восстановления состояния равна $P_{\text{точн}}=0.984$. Сравнивая полученное значение $P_{\text{точн}}$ с предельным значением $P_{\text{макс}}$ при $\mu=0.6$, приходим к выводу, что они приблизительно равны. Таким образом, для $\mu=0.6$ максимальное значение вероятности правильного определения состояния системы достигается при отношении $C/Ш \sim 65$ дБ. Рассуждая аналогичным образом получим, что предельные значения вероятности $P_{\text{макс}}$ для $\mu=0.7$ ($P_{\text{точн}}=0.961$) и $\mu=0.8$ ($P_{\text{точн}}=0.953$) также достигаются при отношении $C/Ш \sim 65 \div 70$ дБ.

Заключение

Для псевдохаотических систем с конечным числом состояний предложен подход к задаче синхронизации при наличии шума в канале пары ведущая - ведомая системы, основанный на точной идентификации состояния ведущей системы по

наблюдаемой в ведомой системе зашумленной последовательности. После установления синхронизации связь между ведущей и ведомой системами может быть разорвана. При этом псевдохаотические системы остаются в синхронизованном состоянии.

Разработаны два алгоритма, позволяющие осуществить такой подход к синхронизации, и проведено численное исследование качества синхронизации на примере тент-отображения. Получена зависимость вероятности точной синхронизации от уровня шума в канале для различных значений параметра μ тент-отображения.

Автор благодарит Ю.В. Андреева, А.С. Дмитриева, Е.В. Ефремову, Г.А. Касьяна и А.И. Панаса за замечания и обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 02-02-16802, 03-02-16747).

Библиографический список

1. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // *Prog. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69, № 1. P. 32.
2. *Pikovsky A.S.* On the iteration of strange attractors // *Z. Physik.* 1984. Vol. 55, № 1. P. 149.
3. *Кузнецов Ю.И., Мигулин В.В., Минакова И.И., Сильнов Б.А.* Синхронизация хаотических колебаний // *ДАН СССР.* 1984. Т. 275, № 6. С. 1388.
4. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // *Изв. Вузов. Радиофизика.* 1986. Т. 28, № 9. С. 1050.
5. *Анищенко В.С., Постнов Д.Э.* Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // *Письма в ЖТФ.* 1988. Т. 14, № 6. С. 569.
6. *Волковский А.Р., Рульков Н.Ф.* Экспериментальное исследование бифуркаций на пороге стохастической синхронизации // *Письма в ЖТФ.* 1989. Т. 15, № 7. С. 5.
7. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64, № 8. P. 821.
8. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* Synchronization of chaos // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
9. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А.* Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // *РЭ.* 1991. Т. 36, № 2. С. 338.
10. *Belykh V.N., Verichev N.N., Kocarev L.J., Chua L.O.* On chaotic synchronization in a linear array of Chua's circuits // *J. of Circuits, Systems and Computers.* 1993. Vol. 3, № 2. P. 579.
11. *Rosenblum M., Pikovsky A., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 1804.
12. *Шалфеев В.Д., Осипов Г.В., Козлов А.К., Волковский А.Р.* Хаотические колебания - генерация, синхронизация, управление // *Зарубеж. радиоэлектроника. Усп. современной радиоэлектроники.* 1997, № 10. С. 27.
13. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* Синхронизация автоколебаний и колебаний, индуцированных шумом // *РЭ.* 2002. Т. 47, № 2. С.133.
14. *Chua L., Itoh M., Kocarev L., Eckert K.* Chaos synchronization in Chua's circuit // *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos / Ed. R.N. Madan.* Singapore: World Scientific, 1993. P. 309.

15. *Kocarev L., Parlitz U.* Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 11. P. 1816.
16. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos. The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53. P. 4528.
17. *Astakhov V., Hasler M., Kapitaniak T., Shabunin A., Anishchenko V.* The effect of parameter mismatch on the mechanism of chaos synchronization loss in coupled systems // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58, № 5. P. 5620.
18. *Maistrenko Y., Kapitaniak T.* Different types of chaos synchronization in two coupled piecewise linear maps // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54. P. 3285.
19. *Rosa E., Ott E., Hess M.H.* Transition to phase synchronization of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80, № 8. P. 1642.
20. *Pecora L.M.* Synchronization conditions and desynchronizing patterns in coupled limit-cycle and chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58, № 1. P. 347.
21. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos in unidirectionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51. P. 980.
22. *Rosenblum M., Pikovsky A., Kurths J.* Effect of phase synchronization in driven chaotic oscillators // *IEEE Trans. CAS-I.* 1997.
23. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // *Physica D.* 1997. Vol. 79, № 3. P. 219.
24. *Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е.* Синхронизация ансамблей связанных отображений // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1996. Т. 4, № 4-5. С. 40.
25. *Dmitriev A.S., Shirokov M.E., Starkov S.O.* Chaotic Synchronization in Ensembles of Coupled Maps // *IEEE Trans. CAS.* 1997. Vol. 44, № 10. P. 918.
26. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // *Изв. вузов. Сер. радиофизика.* 1991. Т. 34, № 10-12. С. 1079.
27. *Бельский Ю.Л., Дмитриев А.С.* Влияние возмущающих факторов на работоспособность системы передачи информации с хаотической несущей // *РЭ.* 1995. Т. 40, № 2. С. 265.
28. *Hasler M., Maistrenko Yu.L.* An introduction to the synchronization of chaotic systems: coupled skew tent maps // *IEEE Trans. CAS-I.* 1997. Vol. 44, № 10. P. 856.
29. *Lorenzo M.N., Kennedy M.P., Kolumban G., Kis G.* A comparison of the noise performance of Pecora-Carroll and H synchronization // *Proc. NDES'98.* Budapest. 1998. P. 249.
30. *Johnson G.A., Ma D.J., Carroll T.L., Pecora L.M.* Synchronization and imposed bifurcations in the presence of large parameter mismatch // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80, № 18. P. 3956.
31. *Stoyanovski T., Kocarev L., and Harris R.* Application of symbolic dynamics in chaos synchronization // *IEEE Trans. CAS-1.* 1997. Vol. 44, № 10. P. 1014.
32. *Lai Y.C., Bollt E., Grebogi C.* Communication with chaos using two-dimensional symbolic dynamics // *Phys. Lett. A.* 1999. Vol. 255. P. 75.
33. *Дмитриев А.С.* Хаотическая синхронизация как информационный процесс // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1998. Т. 41, № 12. С. 1497.
34. *Dmitriev A.S., Kossian G.A., Khilinsky A.D.* Chaotic synchronization. Information viewpoint // *Int. J. Bif. Chaos.* 2000. Vol. 10, № 2. P. 749.
35. *Дмитриев А.С., Касьян Г., Хаслер М., Хилинский А.* Хаотическая

синхронизация двумерных динамических систем на основе передачи информации об их состояниях // РЭ. 2001. Т. 46, № 4. С. 566.

36. *Дмитриев А.С., Касьян Г., Хилинский А., Широков М.Е.* Предельная эффективность очистки хаотического сигнала от шума // РЭ. 1999. Т. 44, № 9. С. 1120.

37. *Дмитриев А.С.* Динамический хаос и информация // Нелинейные волны - 2002. Нижний Новгород. ИПФ РАН. 2003. С. 53.

38. *Дмитриев А.С.* Динамический хаос как носитель информации // Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. М.: Наука (Информатика: неограниченные возможности и возможные ограничения), 2002. С. 82.

39. *Дмитриев А.С.* Прикладной динамический хаос: Курс лекций. Ч. II. Ярославль: ЯрГУ, 2000.

40. *Rosa E., Hayes S., Grebogi C.* Noise Filtering in Communication with Chaos // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, № 7. P. 1247.

*Институт радиотехники
и электроники РАН*

*Поступила в редакцию 17.01.03
после доработки 21.07.03*

CHAOTIC SYNCHRONIZATION VIA IDENTIFICATION OF DRIVE SYSTEM STATE

A.A. Dmitriev

The problem of accurate synchronization of pseudochaotic systems with finite number states is considered in the presence of noise in the channel. After the synchronization is established the connection between drive and response systems could be disrupted. At that the pseudochaotic systems remains synchronized. An algorithm realizing such synchronization is proposed. An investigation of the synchronization robustness as a function of noise level in the channel is carried out.



Дмитриев Андрей Александрович - родился в 1977 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт в 2000 году. Аспирант ИКИ РАН, работает в ИРЭ РАН. Область научных интересов - применение динамического хаоса в телекоммуникационных системах и компьютерных сетях. Автор нескольких работ по данной тематике.

E-mail: chaos@mail.cplire.ru.



СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ВОЗБУДИМОЙ СИСТЕМЫ В ОБЛАСТИ ПОДПороГОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

Д.Э. Постнов, А.В. Шишкин, Д.В. Сецинский

Методами как численного, так и радиофизического эксперимента мы исследуем поведение релаксационного осциллятора под воздействием аддитивного шума в области параметров, соответствующей переходу от возбудимого режима к непрерывной генерации. Наличие в указанной области подпороговых колебаний порождает специфический отклик системы на шумовое воздействие. В частности, нами выявлены эффекты стабилизации частоты и частичного подавления индуцированных шумом надпороговых колебаний.

Введение

В последние годы индуцированные шумом эффекты в нелинейных системах являются одним из важных направлений исследований. В частности, детально изучена упорядочивающая роль шума при таких эффектах, как стохастический резонанс [1], или когерентный резонанс [2]. Попутно стал очевиден факт, что действие шума на нелинейную систему может породить новый временной масштаб - индуцированные шумом колебания, частота которых, как правило, связана со средним временем преодоления некоторого порога. В частности, на балансе случайного (управляемого шумом) времени активации и детерминированного времени возврата в устойчивое состояние основан один из механизмов когерентного резонанса в возбудимой системе [3]. Наличие управляемого шумом временного масштаба играет принципиальную роль в явлении стохастической синхронизации [4]. В частности, при определенных условиях, синхронизация индуцированных шумом колебаний подчиняется соотношениям, давно известным для детерминированных автоколебаний [5], а вариация интенсивности шума качественно эквивалентна изменению параметра расстройки по частоте.

Однако круг ситуаций, где управляемые шумом временные масштабы играют принципиальную роль, исследован далеко не полностью. Предметом нашего исследования в данной работе являются особенности воздействия шума на специфический колебательный режим, характерный, в частности, для математических моделей нейронов и известный как *saragd*-колебания [6,7]. Слово «*saragd*» по-французски означает «утка» и отражает характерную форму предельного цикла при переходе от подпороговых к надпороговым колебаниям.

Термином *canard explosion* обозначают участок аномально быстрого (взрывообразного) роста амплитуды колебаний при вариации управляющего параметра в малой критической окрестности бифуркации Андронова - Хопфа. Для целей нашего исследования мы реализуем режим *canard*-колебаний в модели нейрона FitzHugh - Nagumo, которая является одним из широко известных и популярных вариантов упрощения уравнений Ходжкина - Хаксли для участка аксона нейрона [8,9]. Ее простота, а также возможность моделировать как возбудимый, так и автоколебательный режимы, обусловили ее использование как модельной системы для многих задач. В частности, в [3] для этой модели в возбудимом режиме был продемонстрирован эффект когерентного резонанса. Недавно было также установлено, что этот эффект сохраняется и в режиме *canard*-колебаний [10]. Отмечалось, что в режиме максимальной когерентности индуцированных шумом колебаний временные интервалы при генерации спайков характеризуются многомодовым распределением, максимумы которого «привязаны» к периоду подпороговых колебаний. Однако, частотные соотношения, равно как и детали механизма действия флуктуаций на такой режим автоколебательной системы не были исследованы. Кроме того, в работе [10] исходная модель FitzHugh - Nagumo была существенно модифицирована.

В настоящей работе исследуются особенности действия шума на динамику модели FitzHugh - Nagumo как в ее классической форме, так и в варианте с кусочно-линейной характеристикой, который более удобен для реализации в эксперименте. Особое внимание уделено частотным соотношениям. Иными словами, рассматривается поведение этой модели с точки зрения стохастической синхронизации между подпороговыми колебаниями и индуцированными шумом *spikes*-импульсами большой амплитуды, соответствующими надпороговым колебаниям.

2. Численное моделирование стохастической динамики модели FitzHugh - Nagumo в режиме *canard*-колебаний

2.1. Уравнения модели и особенности ее динамики в отсутствие шума.

В нашей работе для численного моделирования мы используем модель FitzHugh - Nagumo в форме

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= x - x^3/3 - y, \\ \dot{y} &= x + a + D\xi(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где x и y - переменные, качественно соответствующие трансмембранному напряжению и переменной активации ионного тока, соответственно; ε - параметр соотношения временных масштабов, характеризующий относительную скорость изменения ионного тока; a - управляющий параметр, ответственный за порог возбуждения; D - интенсивность белого гауссова шума $\xi(t)$ с нулевым средним значением, $\langle \xi(t) \rangle = 0$.

В детерминированном режиме (при $D=0$) значениям $a > 1.0$ соответствует возбудимый режим, а значениям $a < 1.0$ - автоколебательная динамика (предельный цикл), возникающая (при уменьшении a) через суперкритическую бифуркацию Андронова - Хопфа. Однако развитие предельного цикла в системе (1) имеет особенность, известную как *canard explosion* [7]. А именно, при достижении бифуркационного значения $a^* = 1.0$ рождается предельный цикл малого радиуса и в малой окрестности a^* его размеры растут пропорционально $|a - a^*|^{1/2}$. При дальнейшем уменьшении a , амплитуда предельного цикла скачкообразно растет до значений, определяемых геометрией

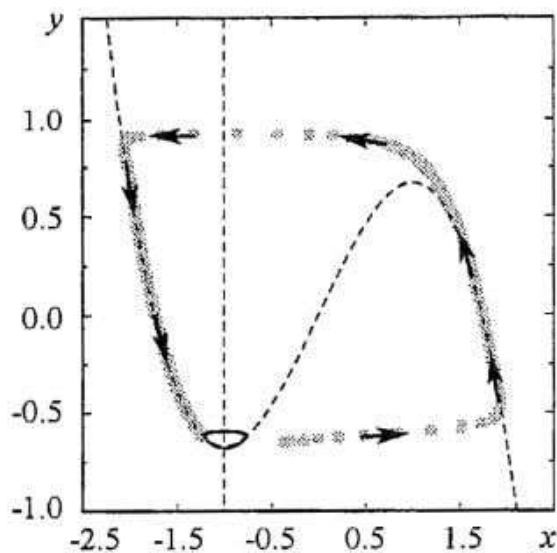


Рис. 1. Фазовый портрет модели (1) при $a=0.996$ и $\epsilon=0.024$. Штриховой линией показаны x -нуль-клини (И-образная кривая $y=x-x^3/3$) и y -нуль-клини (вертикальная линия $x=-a$)

x -нульклины $y=x-x^3/3$ и значением параметра ϵ . Такой взрывообразный рост амплитуды предельного цикла при плавном уменьшении a и получил название *canard explosion*. Для рассматриваемой модели (1) он наблюдается в области значений параметров $\epsilon \in [0.02, 0.03]$ и $a \in [0.996, 1.00]$. На рис. 1 приведен типичный фазовый портрет для (1), включающий предельный цикл подпороговых колебаний малого размера и траекторию возврата к нему (серые точки со стрелками) после «выброса» системы в возбужденное состояние. Пунктиром на рисунке даны x - и y -нульклины, взаиморасположение которых и обуславливает динамику системы.

2.2. Общий анализ поведения системы под воздействием флуктуаций.

При наличии в правой части второго уравнения шумовой добавки $D\xi(t)$ система уравнений (1) решалась численно методом Рунге - Кутты 4 порядка, адаптированным для стохастических дифференциальных уравнений [11]. Выбор достаточно малой величины шага интегрирования $h=0.0005$ обеспечивал практическую независимость результатов вычислений от h . Сам случайный процесс $\xi(t)$ был получен с помощью специальных алгоритмов преобразования равномерно распределенной случайной величины в распределенную по нормальному закону [12]. Равномерная случайная величина генерировалась датчиком случайных чисел компьютера. Полученная в результате интегрирования достаточно длинная временная реализация использовалась для расчета частоты следования импульсов, распределения временных интервалов между ними, а также распределения относительного времени пребывания системы на фазовой плоскости, которое с использованием свойства эргодичности считалось эквивалентным распределению плотности вероятности.

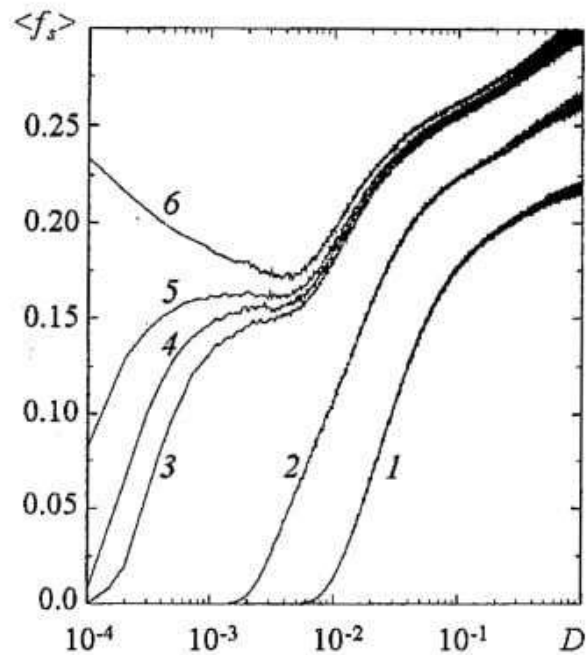
Варьируя интенсивность шума D , мы рассчитывали среднюю частоту следования спайков (импульсов большой амплитуды), момент генерации каждого из которых определялся по достижению возбужденного состояния $x=+1.0$. Средняя частота $\langle f_s \rangle$ определялась как

$$\langle f_s \rangle = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} N/T_0, \quad (2)$$

где T_0 - время наблюдения, N - число спайков в течение T_0 . В численном эксперименте T_0 выбиралось достаточным для достижения заранее заданного N , например, $N=10^4$. Параметр $a=0.997$ был выбран близким к бифуркации Андронова - Хопфа в области автоколебаний. Параметр ϵ варьировался от 0.024 до 0.1, чему соответствовал переход от режима непрерывной генерации спайков к режиму устойчивых подпороговых колебаний малой амплитуды. Результаты вычисления $\langle f_s \rangle$ приведены на рис. 2. Для ϵ , равного 0.1 и 0.05 (кривые 1 и 2), начальная часть графика для $\langle f_s \rangle$ носит экспоненциальный характер, качественно соответствуя закону Арениуса [13]. Однако для больших D кривые сходятся к некоторому предельному значению, определяемому длительностью одиночного цикла «возбуждение - релаксация» детерминированной модели (1).

При меньших значениях ϵ (кривые 3, 4, 5) характер зависимости су-

Рис. 2. Зависимость средней частоты генерации индуцированных шумом спайков $\langle f_s \rangle$ от интенсивности шума D для $a=0.997$ и при различных значениях: 1 - 0.1, 2 - 0.05, 3 - 0.028, 4 - 0.027, 5 - 0.0264, 6 - 0.024



щественно меняется. Быстрый рост $\langle f_s \rangle$ при малых $D < 0.001$ сменяется почти постоянным значением $\langle f_s \rangle$ в интервале $D \in [0.001, 0.05]$. При D больших $\langle f_s \rangle$ вновь растет, демонстрируя поведение, сходное с кривыми 1 и 2.

Еще более неожиданно система (1) ведет себя при наименьшем ϵ (кривая б). В детерминированном варианте этому значению ϵ соответствует режим непрерывной генерации спайков. Однако добавление шума (рост D) приводит к быстрому уменьшению средней частоты генерации $\langle f_s \rangle$ до значений, близких к положению «полочки» на кривых 3, 4 и 5. При дальнейшем увеличении интенсивности шума $\langle f_s \rangle$ вновь растет, сближаясь с кривой 5.

2.3. Механизм аномального изменения частоты индуцированных шумом колебаний. Обнаруженные эффекты стабилизации частоты индуцированных шумом колебаний (кривые 3, 4, 5) и стохастического подавления генерации спайков (кривая б) требуют объяснения с точки зрения активации шумом нелинейных свойств модели (1). Ниже мы попытаемся дать такое объяснение. Рассмотрим сначала режим подпороговых колебаний при $\epsilon = 0.026$. Само наличие таких колебаний, при условии наличия «траектории возбуждения» на фазовой плоскости (см. рис. 1), означает автомодуляцию высоты порога, который должен быть преодолен для генерации спайка. Поэтому, возбуждение системы с подавляющей вероятностью происходит в моменты, когда фаза подпороговых колебаний такова, что порог возбуждения для спайка наименьший. Отсюда следует характерная структура распределения временных интервалов между соседними спайками, хорошо видная на рис. 3. Отметим, что интервал времени между соседними спайками не может быть меньше, чем время движения по траектории возбуждения. По этой причине, в частности, на рис. 3 отсутствует максимум, соответствующий одному периоду подпороговых колебаний.

При малых значениях интенсивности шума D значения шумового сигнала $D\xi(t)$ достаточно редко достигают порога. Траектория успевает несколько раз совершить оборот по малому предельному циклу canard-режима. Поэтому на рис. 3 хорошо различимы максимумы, соответствующие 5-7 периодам обращения на предельном цикле. При увеличении D относительно более вероятным становится возбуждение на 2, 3 и 4 обороте. Помимо этого, все распределение смещается в область меньших значений. Как показывают расчеты, при $D = 0.0015$ около 45% всех интервалов сосредоточено в первом максимуме распределения, что соответствует достижению «полочки» на кривой 5 рис. 2. То есть, около половины всех спайков генерируются на временах порядка $T_{\text{spike}} + T_{\text{canard}}$, а еще 20-25% на временах $T_{\text{spike}} + 2T_{\text{canard}}$ и $T_{\text{spike}} + 3T_{\text{canard}}$. Средняя частота, определяемая этими событиями, $\langle f_s \rangle \approx 1/5 T_{\text{canard}}$, что и соответствует полочке на кривых 3, 4, 5 рис. 2.

При дальнейшем росте интенсивности шума D возбуждение становится возможным в любой момент времени, так как модуляция порога за счет canard-колебаний становится мала по сравнению со средним значением действующего

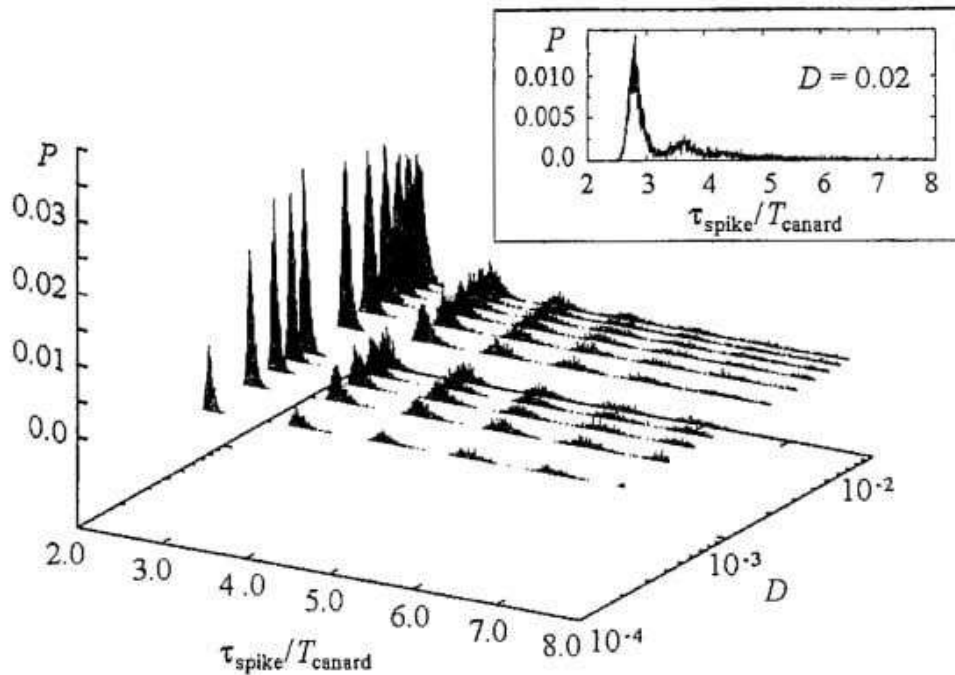


Рис. 3. Распределение межспайковых интервалов времени τ_{spike} нормированное на период подпороговых колебаний для различных значений интенсивности шума D

шума (см. вставку для $D=0.02$ на рис. 3). Как результат, частота спайков (f_s) вновь начинает расти, сходясь к значению порядка $1/T_{\text{spike}}$.

В случае $\varepsilon=0.024$ режим детерминированной модели (1) (при $D=0$) принципиально иной. Система непрерывно генерирует надпороговые колебания с периодом $T_{\text{spike}} \approx 0.23$. Добавление шума резко меняет поведение системы. При малых значениях D (рис. 4, а, $D=0.0004$) шум лишь изредка вызывает сбои в непрерывной генерации спайков. Однако при больших значениях интенсивности шума D (рис. 4, б, $D=0.004$), траектория относительно часто попадает в область уже не существующего canard-режима, где проводит время, соответствующее нескольким (на рис. 4, б - до восьми) подпороговым колебаниям. Как результат, средняя частота генерации спайков (f_s) существенно уменьшается, что и отражает провал на кривой б рис. 2.

При еще больших D попавшая в область canard-режима система так же быстро выталкивается из нее действующим шумом. Время пребывания в canard-области уменьшается, и средняя частота спайков снова растет (рис. 4, в).

Таким образом, механизм стохастического подавления генерации спайков заключается в активации шумом области canard-режима, которая не посещается траекторией в детерминированном случае ($D=0$).

Расчет двумерной плотности вероятности $P(x,y)$ для различных значений интенсивности шума D (рис. 5) позволяет сопоставить оба описанных выше эффекта: стабилизацию частоты индуцированных шумом спайков и стохастическое подавление надпороговых колебаний. На рисунке случаи (а) и (г) соответствуют малым D . Как видно, $P(x,y)$ имеет принципиально различную структуру для canard-режима (а) и для режима непрерывной генерации (г), являясь, по сути, размытым образом предельного цикла. Однако тот факт, что структура векторного поля системы (1) мало меняется при вариации параметра ε в интервале $[0.024, 0.026]$, приводит к тому, что уже для среднего шума $D=0.004$ распределения $P(x,y)$ имеют сходную структуру (б, д), а для $D=0.15$ распределения $P(x,y)$ практически совпадают (в, е). Таким образом, механизм обоих эффектов сходен и состоит в активации шумом областей фазового пространства системы, не посещаемых в детерминированном случае. Поскольку canard explosion не

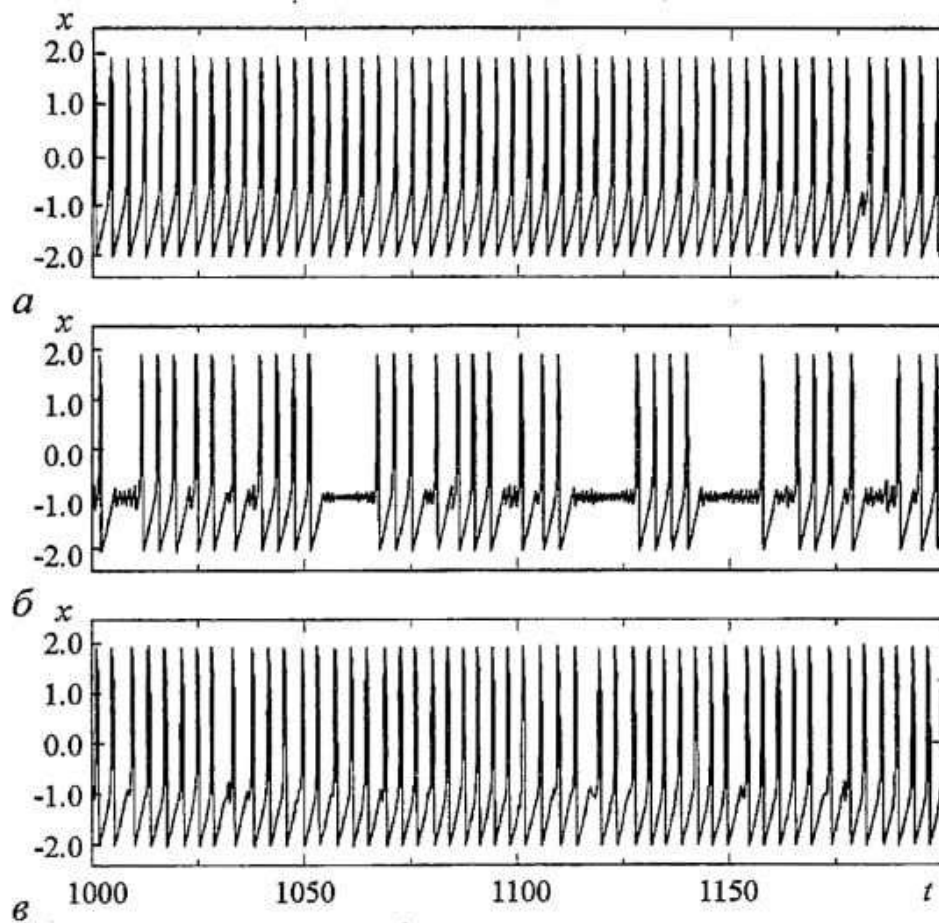


Рис. 4. Характерный вид временных реализаций для переменной x при $a=0.997$ и $\epsilon=0.024$. Интенсивность шума D составляла: a - 0.0004, b - 0.004, c - 0.04

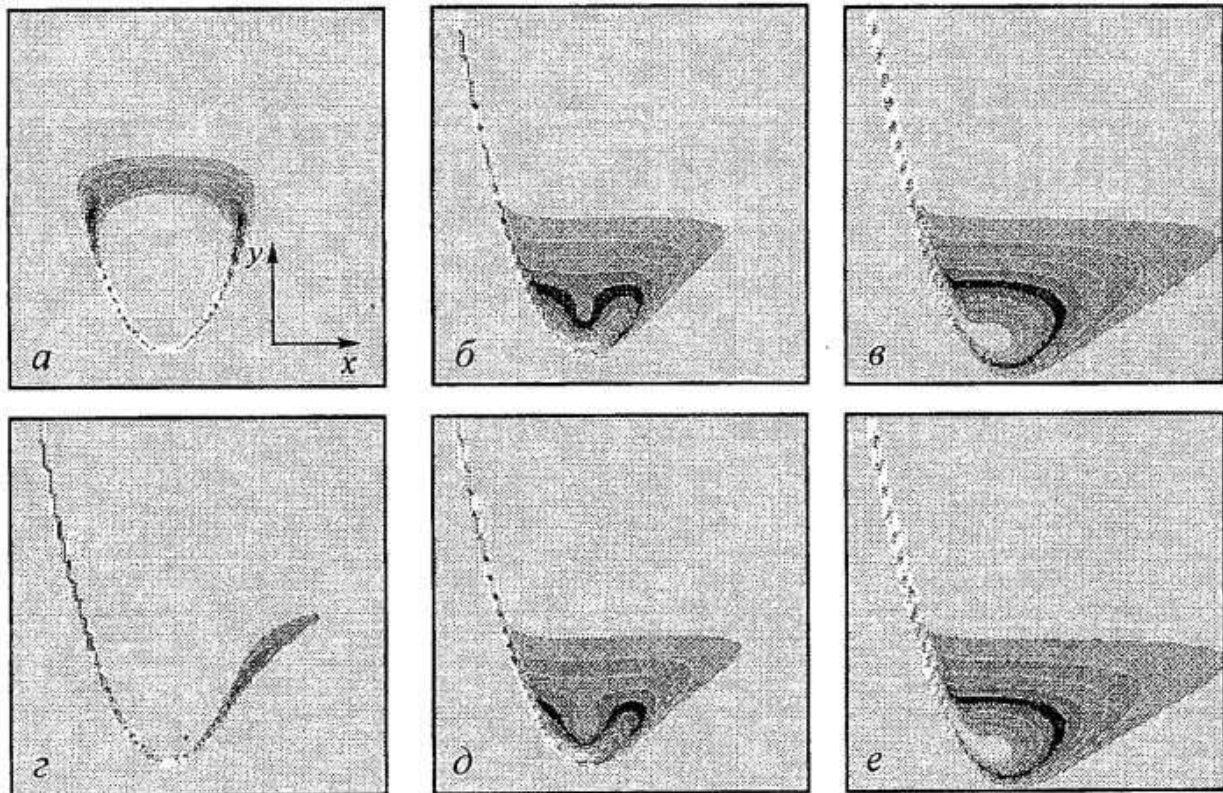


Рис. 5. Изолинии двумерного распределения плотности вероятности $P(x,y)$ в окрестности состояния равновесия при $a=0.997$: $a, б, в$ - режим canard-колебаний при $\epsilon=0.026$; $г, д, е$ - режим непрерывной генерации спайков при $\epsilon=0.024$. Интенсивность шума D изменяется слева направо как 0.0004 для $a, г$, 0.004 для $б, д$, и 0.15 для $в, е$

является бифуркацией, структура векторного поля исследуемой системы в обоих случаях практически совпадает.

3. Результаты радиофизического эксперимента

3.1. Исследуемое устройство и уравнения модели. Полученные при численном моделировании результаты были подтверждены результатами радиофизического эксперимента, проведенного с использованием схемы релаксационного генератора, воспроизводящего на качественном уровне модель FitzHugh - Nagumo с учетом кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного элемента [14]. Принципиальная схема исследуемого устройства показана на рис. 6. Схема имеет выход, с которого снимается сигнал системы $x(t)$, и два входа, на которые подается постоянное напряжение порога V_g , соответствующее параметру a численной модели, а также шум с генератора $D\xi(t)$. Конвертер на операционном усилителе DA2 представляет собой двухполосник с участком отрицательного сопротивления и выполняет роль кубической нелинейности в правой части первого уравнения модели (1). Совместно с каскадом на DA1 конвертер образует релаксационный генератор - аналог системы FitzHugh - Nagumo. Схеме соответствует следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 dx/dt &= f(x)/R_3 - (x-V_g)/R_5 - y(1-R_4/R_5), \\ C_2 R_4 R_5 dy/dt &= x - V_g - yR_4, \end{aligned} \quad (3)$$

где $f(x)$ - кусочно-линейная функция, задаваемая с помощью операционного усилителя DA2. С учетом обозначения $\alpha=R_2/(R_1+R_2)$ она имеет вид

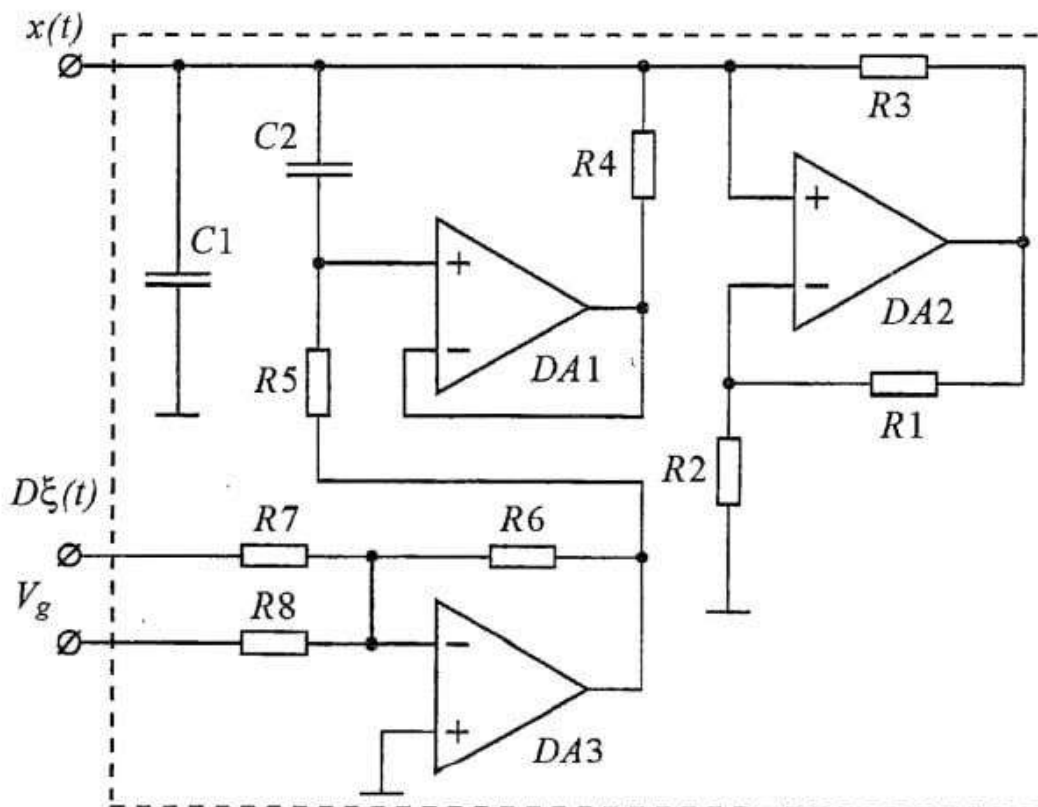


Рис. 6. Схема исследуемой электронной модели. Номиналы используемых элементов: $R_1=R_2=100\text{ кОм}$, $R_3=2.2\text{ кОм}$, $R_4=1.1\text{ кОм}$, $R_5=10\text{ кОм}$, $R_6=R_7=R_8=47\text{ кОм}$, $C_1=0.017\text{ мкФ}$, $C_2=0.01\text{ мкФ}$, DA1-DA3 - типа $\mu 741$. Напряжение питания для ОУ DA1, DA3 - $U_{a1,3}=\pm 15\text{ В}$, для ОУ DA2 - $U_{a2}=\pm 12\text{ В}$

$$f(x) = \begin{cases} -x + U_{a2}, & x > \alpha U_{a2}, \\ xR_1/R_2, & -\alpha U_{a2} \leq x \leq \alpha U_{a2}, \\ -x - U_{a2}, & x < -\alpha U_{a2}. \end{cases} \quad (4)$$

Переменная x в уравнениях (3) соответствует напряжению $x(t)$ на выходе системы, а переменная y - току i , текущему через резистор R_4 . Изменению параметра ϵ , ответственного за релаксационные свойства системы, в данном случае отвечает вариация емкости конденсатора C_1 . Постоянное напряжение V_g выполняет роль управляющего параметра, аналогичного параметру a в уравнениях (1). На базе ОУ ДАЗ выполнен суммирующий элемент, с помощью которого постоянное напряжение смещения V_g суммируется с шумовым напряжением $D\xi(t)$, подаваемым с внешнего источника, в качестве которого использовался стандартный генератор шума Г2-59. Таким образом, способ введения шума в электронную модель аналогичен способу введения шума в уравнения системы (1) при численном эксперименте. Используемый генератор шума обеспечивает близкое к гауссовому распределение напряжения сигнала и равномерный спектр мощности в интервале частот от 0 до 100 кГц. Интенсивность шума в радиофизическом эксперименте оценивалась как средний квадрат напряжения $D = \langle \xi^2(t) \rangle$ на выходе генератора шума. Выходной сигнал экспериментальной установки оцифровывался и поступал в компьютер для обработки.

Путем подбора емкости конденсатора C_1 можно реализовать такое состояние системы, при котором по мере уменьшения порогового напряжения V_g рождению предельного цикла большого радиуса будет предшествовать рождение малого предельного цикла подпороговых колебаний, что соответствует появлению области сапград-колебаний в системе FitzHugh - Nagumo. Следует отметить, что проведение радиофизического эксперимента в этой области параметров осложняется противоречивыми требованиями к экспериментальной установке. А именно, степень проявления изучаемых эффектов тем выше, чем более выражен релаксационный характер колебаний (чем меньше значение ϵ в модели (1)). Однако в этом случае существенно сужается область значений параметра a (V_g - в радиофизическом эксперименте), соответствующая сапград-колебаниям, что осложняет проведение радиофизического эксперимента. Нам удалось найти приемлемый компромисс между степенью релаксационности системы и желаемой выраженностью изучаемого эффекта.

Следствием такого компромиссного выбора параметров является некоторое различие в динамике исследуемой схемы и модели (1) под воздействием шума. Если в случае численного эксперимента при выбросе шумом траектории с цикла малого радиуса происходит немедленный выход на траекторию, геометрия которой определяется уравнением x -нульклины, то в случае электронной модели вследствие меньшей релаксационности системы траектория способна вернуться назад, так и не достигнув максимального значения. По этой причине во временной реализации электронной модели под воздействием шума можно найти спайки с произвольной амплитудой.

3.2. Результаты измерений. В нашем эксперименте мы фиксировали значение емкости конденсатора $C_1 = 0.017$ мкФ таким образом, чтобы режим сапград-колебаний был хорошо выражен. При этом критическое значение управляющего параметра V_g , для которого наблюдается рождение предельного цикла малого радиуса, составляет $V_g = -3.0$ В. В зависимости от конкретного значения напряжения V_g воздействие шума на динамику системы может быть различным.

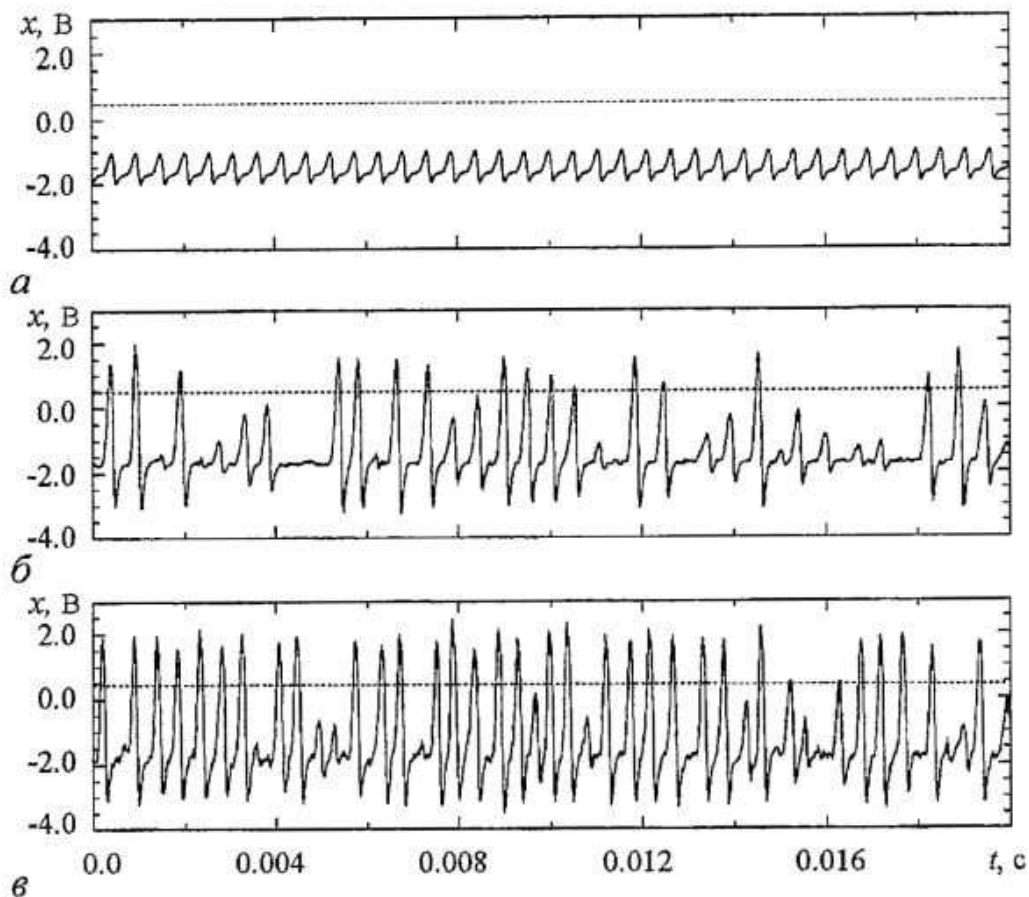


Рис. 7. Временные реализации выходного напряжения схемы, изображенной на рис. 6, для различных значений интенсивности воздействующего шума D при $V_g = -2.9$ В (режим сапaрд-колебаний): *а* - 0.0 В^2 , *б* - 1.0 В^2 , *в* - 3.0 В^2 . Пунктирной линией показан условный уровень напряжения на выходе, по пересечению которого определялась частота следования спайков

$V_g = -2.9$ В. В этом случае, в отсутствие внешнего шума, система генерирует подпороговые сапaрд-колебания, соответствующие предельному циклу малого радиуса, однако генерация спайков отсутствует (рис. 7, *а*). Исследуемая система сохраняет возбудимые свойства и воздействие шума может приводить к спонтанному преодолению порога возбуждения и выбросу на траекторию, соответствующую генерации спайка. Частота возникновения таких спайков-выбросов будет увеличиваться по мере увеличения интенсивности воздействующего шума (рис. 7 *б*, *в*). Зависимость средней частоты генерируемых спайков $\langle f_s \rangle$ от интенсивности шума D приведена на рис. 8, *а*. Как видно, при $D=0.0$ спайки полностью отсутствуют, а с увеличением D частота их возникновения растет подобно частоте спайков в численном эксперименте (ср. с рис. 2, кривые 1 и 2).

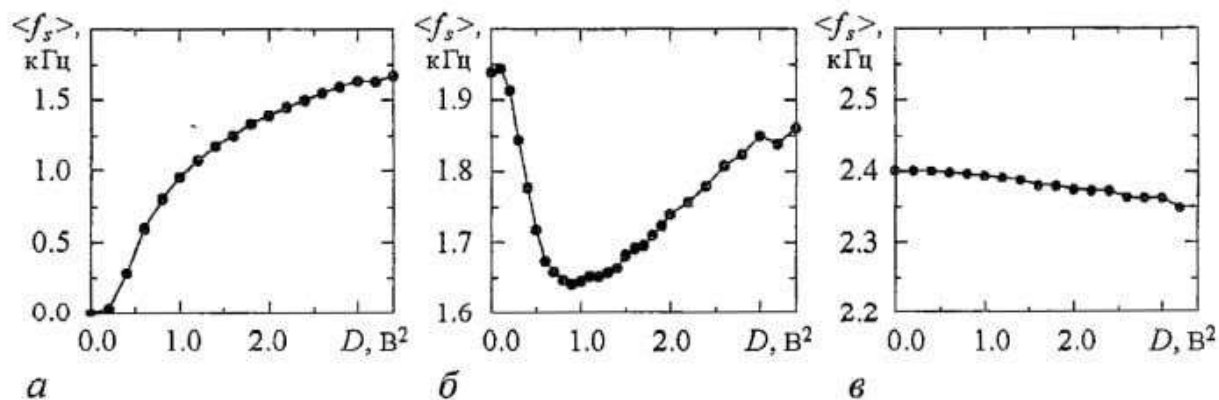


Рис. 8. Зависимость средней частоты спайков $\langle f_s \rangle$ от интенсивности воздействующего шума D для различных значений порогового напряжения V_g : -2.9 В (*а*), -2.6 В (*б*), -2.2 В (*в*)

$V_g = -2.6$ В. В этом случае траектория системы находится на предельном цикле большого радиуса, в отсутствие шума наблюдается непрерывная генерация спайков. Введение шума может вызвать задержку траектории в еще существующей области *canard*-колебаний и, как следствие, снижение частоты следования спайков. Однако дальнейшее увеличение интенсивности шума вновь с подавляющей вероятностью начинает выбрасывать траекторию на большой предельный цикл и частота спайков вновь увеличивается (рис. 8, б). Такое поведение $\langle f_s \rangle$ соответствует кривой б на рис. 2, полученной в численном эксперименте. Временные реализации сигнала системы для трех различных значений интенсивности шума показаны на рис. 9.

$V_g = -2.2$ В. Так же, как и в предыдущем случае, имеет место непрерывная генерация спайков, но область, где реализовывались подпороговые колебания, уже не существует. Как следствие, введение шума мало влияет на частоту генерации спайков. Увеличение его интенсивности способствует лишь незначительному снижению средней частоты их появления благодаря флуктуациям их амплитуды (рис. 8, в).

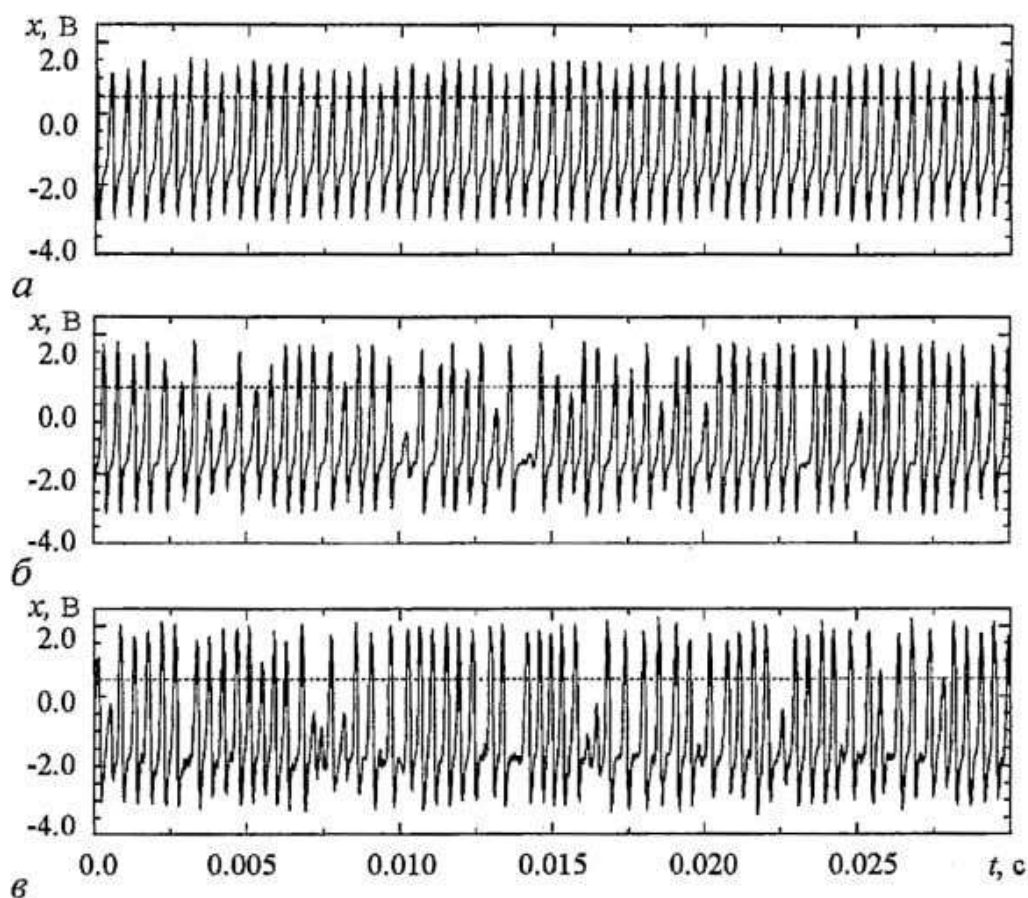


Рис. 9. Временные реализации выходного напряжения схемы, изображенной на рис. 6 для различных значений интенсивности воздействующего шума D при $V_g = -2.6$ В (режим надпороговых колебаний): а - 0.1 В^2 , б - 1.0 В^2 , в - 3.4 В^2 . Пунктирной линией показан условный

Выводы

Подводя итоги, можно сказать, что исследование стохастической динамики модели FitzHugh - Nagumo в ее классической форме (1) в области параметров, где наблюдаются *canard*-колебания, позволило выявить интересные нелинейные эффекты, наблюдаемые при численном моделировании и воспроизводимые

средствами радиофизического эксперимента. Первый из них, стабилизация частоты индуцированных шумом колебаний, может быть отнесен к кругу эффектов стохастической синхронизации в том смысле, что временной масштаб, вызванный действием приложенного к системе шума, обнаруживает некую тенденцию к подстройке с временным масштабом колебаний, уже существующим в детерминированной системе. Второй эффект заключается в частичном подавлении шумом процесса непрерывной генерации спайков. Как результат, наблюдается уменьшение их частоты при увеличении интенсивности шума.

Оба наблюдаемых эффекта являются следствием наличия canard-колебаний в детерминированной системе, но имеют место при заметном уровне шума в системе. Таким образом, наши результаты заставляют пересмотреть сложившуюся точку зрения (см., например, [15]), согласно которой режим canard-колебаний является математической экзотикой и не может наблюдаться в реальных нейронных системах из-за неустраняемого шума.

Как ожидается, описанные выше эффекты должны самым принципиальным образом влиять на функционирование ансамбля систем, близких по параметрам к canard-режиму. Мы планируем исследовать эту проблему.

Работа была частично поддержана грантами РФФИ 04-02-16769 и INTAS 01-2061, а также грантом Министерства образования РФ А03-2.9-362.

Библиографический список

1. *Anishchenko V.S., Neiman A.B., Moss F., and Schimansky-Geier L.* Stochastic resonance: noise-enhanced order // УФН. 1999. Т. 169, № 1. P. 7.
2. *Gang H., Ditzinger T., Ning C.Z., and Haken H.* Stochastic resonance without external periodic force // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 807; *Rappel W.-J. and Strogatz S.H.* Stochastic resonance in an autonomous system with a nonuniform limit cycle // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 50. P. 3249.
3. *Pikovsky A. and Kurth J.* Coherence resonance in a noise-driven excitable systems // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 775.
4. *Shulgin B.V., Neiman A.B. and Anishchenko V.S.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by a periodic force // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 4157.
5. *Han S.K., Yim T.G., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V.* Interacting coherence resonance oscillators // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 1771.
6. *Wang X.-J.* Genesis of bursting oscillations in the Hindmarsh-Rose model and homoclinicity to a chaotic saddle // Physica D. 1993. Vol. 62. P. 263.
7. *Mochlis J.* Canards in a surface oxidation reaction // Nonlinear Science 2002. Vol. 12. P. 319.
8. *Scott A.C.* // Rev. Mod. Phys. 1975. Vol. 47. P. 487.
9. *James Keener, James Sneyd.* Mathematical Physiology // Springer, 1998. P. 594.
10. *Makarov V.A., Nekorkin V.I. and Velarde M.G.* Spiking behavior in a noise-driven system combining oscillatory and excitatory properties // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 3431.
11. *Никитин Н.Н., Разевич В.Д.* Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // ЖВМ. Т. 18, № 1. С.106.
12. *Press William H., Teukolsky Saul A., Vetterling William T., Flannery Brian P.* Numerical recipes in C: the art of scientific computing // Copyright 1988-1992 by Cambridge University Press. Programs Copyright 1988-1992 by Numerical Recipes Software.

13. *Kramers H.A.* Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reaction // *Physica*. 1940. Vol. 7. P. 284.

14. *Yo Horikawa*. Coherence resonance with multiple peaks in a coupled FitzHugh-Nagumo model // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 64. P. 031905.

15. *Izhikevich E.M.* Neural excitability, spiking and bursting // *International Journal of Bifurcations and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 6. P. 1171.

*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 27.02.03
после доработки 16.06.03*

STOCHASTIC DYNAMICS OF EXCITABLE SYSTEM NEAR THE CANARD EXPLOSION

D.E. Postnov, A.V. Shishkin, D.V. Setsinsky

The subject of our study is FitzHugh-Nagumo model driven by additive noise in the region of transition from excitable regime to continuous spiking. We show how canard explosion influences characteristics of stochastic oscillations. In particular, there are two effects with varying noise intensity: frequency stabilization of noise-induced spikes and partial suppression of spike generation.



Постнов Дмитрий Энгелевич профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Доктор физико-математических наук (2001). Область научных интересов - сложная динамика математических моделей биологических систем, индуцированные шумом эффекты в нелинейных динамических системах. Автор 56 научных статей и книги «Chaotic Synchronization. Application to Living Systems» (World Scientific, 2002).

E-mail: postnov@chaos.ssu.runnet.ru



Шишкин Александр окончил физический факультет СГУ в 2002 году. Инженер кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 2003 года - аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов - нелинейная динамика в приложении к биофизике, стохастические процессы в нелинейных системах с шумом. Автор одной статьи.



Сецинский Дмитрий Вячеславович родился в 1978 году. Окончил физический факультет СГУ (2000). С 2001 года аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика стохастических систем. Имеет 6 публикаций



РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СТРУКТУРЕ

Г.М. Дудко, М.А. Малюгина, Ю.П. Шараевский

В рамках полученной системы нелинейных уравнений Шредингера, описывающей процесс распространения прямых объемных магнитостатических волн в двух связанных ферромагнитных пленках выявлены основные нелинейные особенности распространения импульсов на расстояниях много меньших длины линейной перекачки энергии. Проведена оценка влияния связи между пленками на групповые скорости, коэффициенты дисперсии и нелинейности. Обсужден вопрос о модуляционной неустойчивости волн в связанной структуре в зависимости от величины связи. Показано, что сигнал большой амплитуды делится между связанными пленками, сигнал малой амплитуды не перераспределяется между пленками структуры.

Введение

К настоящему времени достаточно подробно как теоретически, так и экспериментально изучены нелинейные эффекты самовоздействия (автомодаляция, самофокусировка, образование солитонов огибающей и др.) в однопленочных ферромагнитных структурах для различных типов магнитостатических волн (см., например, работы [1-7] и библиографию в них). Широкие возможности для исследования указанных нелинейных эффектов представляют многослойные ферромагнитные структуры, которые могут включать как слои различной физической природы [8], так и несколько ферромагнитных пленок [9,10]. Влияние связи на нелинейные волновые процессы в многослойных ферромагнитных структурах может приводить к изменению не только дисперсии магнитостатических волн (МСВ), но и нелинейности системы.

Последнее, в частности, продемонстрировано в работе [9], где на основе численного решения системы связанных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ) рассмотрены некоторые особенности, связанные с формированием солитонов огибающей МСВ в нормально намагниченной структуре, состоящей из двух ферромагнитных пленок. Уравнения модели в [9] записаны в приближении слабой связи между пленками (параметры одной пленки не зависят от присутствия другой), а связь волн обусловлена только проникновением ВЧ полей из одной пленки в другую через диэлектрический слой. Однако в работе [9] рассматривалась идеализированная модель в движущейся системе координат, не привязанная к возможностям исследования нелинейных эффектов на МСВ в реальных многослойных пленочных структурах.

Отметим что, линейные волновые процессы в связанных системах различного рода [11], в том числе и в многослойных ферромагнитных структурах [12-15] изучены достаточно подробно. Большое внимание уделялось вопросам о перекачке энергии в связанных ферромагнитных структурах [13], изменением дисперсионных характеристик МСВ в двухслойных пленках [14]. Экспериментально и теоретически исследовалось поведение МСВ при различных способах возбуждения структуры, приводящих к распространению в структуре одной или нескольких нормальных мод [15].

Настоящая работа посвящена численному моделированию процессов самовоздействия, связанных с развитием модуляционной неустойчивости, применительно к структуре из двух ферромагнитных пленок и дальнейшему изучению особенностей этих нелинейных процессов по сравнению с аналогичными в одиночных пленках. Особое внимание уделено вопросу, связанному с прохождением импульсов в подобной структуре и возможности образования «солитонов» огибающей при различных способах возбуждения системы на расстояниях много меньших длины линейной перекачки энергии между пленками.

1. Анализируемая модель и исходная система уравнений

Анализ проводился применительно к нормально намагниченной ферромагнитной структуре, показанной на рис. 1 и состоящей из двух одинаковых ферромагнитных слоев толщиной D с намагниченностью насыщения M_0 , разделенных слоем диэлектрика толщиной d . Рассматриваемая структура бесконечна в направлении осей x и y , постоянное магнитное поле H_0 приложено вдоль оси z по нормали к поверхности слоев, что соответствует распространению в ферромагнитных пленках прямых объемных МСВ (ПОМСВ).

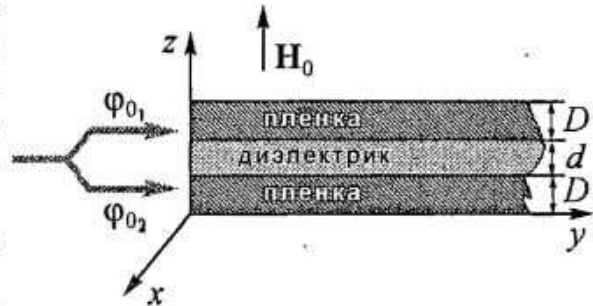


Рис. 1. Схематическое изображение связанной ферромагнитной структуры

Для нормально намагниченной ферромагнитной структуры, состоящей из двух слоев, дисперсионное уравнение, описывающее связанные прямые объемные магнитостатические волны, имеет вид [11]

$$\begin{aligned} & [2\xi_1 + (1 + \mu_1) \operatorname{tg}(\xi_1 k D)] / [(1 - \mu_1) \operatorname{tg}(\xi_1 k D)] \times \\ & \times [2\xi_2 + (1 + \mu_2) \operatorname{tg}(\xi_2 k D)] / [(1 - \mu_2) \operatorname{tg}(\xi_2 k D)] = \exp(-2kd), \end{aligned} \quad (1)$$

где k - искомая постоянная распространения МСВ; $\mu_{1,2} = [\omega_{H_{1,2}} (\omega_{H_{1,2}} + \omega_{M_{1,2}}) - \omega^2] / (\omega^2 - \omega_{H_{1,2}}^2)$; $\xi_{1,2} = (-\mu_{1,2})^{1/2}$; индексы 1 и 2 относятся к слоям 1 и 2, соответственно; $\omega_{M_{1,2}} = 4\pi\gamma M_{z_{1,2}}$; $\omega_{H_{1,2}} = \gamma(H_0 - 4\pi M_{z_{1,2}})$; $M_{z_{1,2}}$ - продольная составляющая намагниченности в пленках.

В линейном приближении $M_{z_{1,2}} \approx M_0$ и, следовательно, $\omega_{M_1} = \omega_{M_2} = \omega_M$, $\omega_{H_1} = \omega_{H_2} = \omega_H$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\xi_1 = \xi_2 = \xi = -\mu^{1/2}$. Тогда соотношение (1) для рассматриваемой структуры, состоящей из одинаковых пленок, имеет вид

$$[2\xi + (1 + \mu) \operatorname{tg}(\xi k D)] / [(1 - \mu) \operatorname{tg}(\xi k D)] = \pm K, \quad (2)$$

где $K = \exp(-kd)$ - коэффициент связи. Отметим, что соотношение (2) при $kd \rightarrow \infty$ описывает дисперсионные характеристики ПОМСВ в изолированных пленках, а при $kd = 0$ - дисперсионную характеристику ПОМСВ в пленке удвоенной толщины.

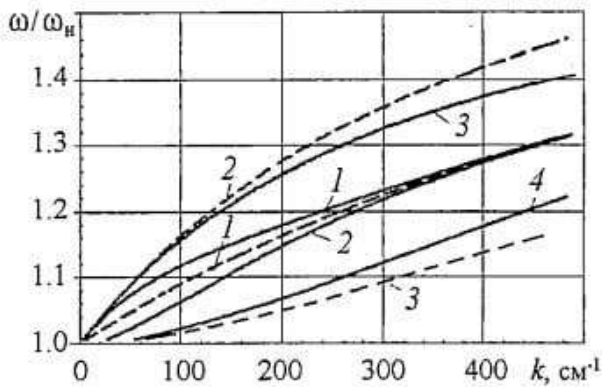


Рис.2. Дисперсионные зависимости быстрых (сплошные кривые 1, 3) и медленных мод (сплошные кривые 2, 4) для связанной ферромагнитной структуры при $H_0=2630$ Э, $4\pi M_0=1750$ Гс, $D=20$ мкм и различных значениях толщины пленки d : 1, 2 - $5D$; 3, 4 - $0.5D$. Штриховые кривые 1-3 соответствуют дисперсионным зависимостям для одиночной пленки

характера ПОМСВ в ферромагнитных пленках, ограничимся рассмотрением только первой моды. Как следует из рис. 2, при толщине диэлектрического слоя $d \geq 5D$ (сплошные линии 1, 2) влияние связи мало и дисперсионные кривые для быстрой и медленной мод приближаются к дисперсионной зависимости для МСВ в одиночной пленке. С увеличением связи (сплошные линии 3, 4) дисперсионная кривая, отвечающая быстрой нормальной моде (сплошная линия 3), приближается к дисперсионной кривой МСВ в пленке удвоенной толщины, а дисперсионная кривая для медленной моды (сплошная линия 4) - к дисперсионной кривой второй моды в пленке толщиной $2D$.

Представим волновые функции для нормальных волн в связанной структуре в следующем виде:

$$\phi_{б,м}(y,t) = \varphi_{б,м}(y,t) \exp(j\psi_{б,м}), \quad (3)$$

где $\varphi_{б,м}(y,t)$ - медленно меняющиеся комплексные амплитуды огибающей; $\psi_{б,м} = \omega t - k_{б,м} y$ - фазы нормальных волн; индексы «б» и «м» относятся к быстрой и медленной модам, соответственно. Считая, что для волн конечной амплитуды переменная намагниченность в каждой пленке будет зависеть от $|\varphi_{б}|^2$ и $|\varphi_{м}|^2$, нелинейные дисперсионные соотношения для нормальных волн в связанной системе можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{б}(\omega, k_{б}, |\varphi_{б}|^2, |\varphi_{м}|^2) &= 0, \\ G_{м}(\omega, k_{м}, |\varphi_{б}|^2, |\varphi_{м}|^2) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения (4) представляют из себя систему связанных дисперсионных соотношений, в которой связь осуществляется через нелинейные члены пропорциональные $|\varphi_{б}|^2$ и $|\varphi_{м}|^2$.

Конкретный вид соотношений (4) в длинноволновом приближении ($k_{б,м} D \ll 1$) и с точностью до членов порядка $k_{б,м} D$ можно получить из (1), если продольные составляющие вектора намагниченности M_z в каждом из ферромагнитных слоев представить в виде [1,12] $M_z \approx M_0(1 - (\dot{M}_{x_{1,2}}^2 + M_{y_{1,2}}^2)/(2M_0^2))$, где $M_{x_{1,2}}$, $M_{y_{1,2}}$ - поперечные компоненты намагниченности для соответствующих ферромагнитных пленок, зависящие от амплитуд быстрой и медленной волны. Тогда дисперсионное соотношение (4) перепишем в виде:

$$\omega^2 = \omega_H^2 + \omega_M \omega_H k_{\sigma, m} D/2(1 \pm K_{\sigma, m}) +$$

$$+ 1/2 \omega_M \omega_H |\varphi_{\sigma, m}|^2 + 1/2 \omega_M \omega_H^2 / 4 k_{\sigma, m} D (\omega_M / \omega_H - 1) (1 \pm K_{\sigma, m}) (|\varphi_{\sigma}|^2 + |\varphi_M|^2), \quad (5)$$

где знак «+» относится к быстрой, «-» - к медленной волнам.

При заданном значении толщины диэлектрического промежутка d на частоте входного сигнала ω значение коэффициентов связи $K_{\sigma, m}$ быстрой и медленной моды в общем случае различны, так как коэффициент связи зависит от значения волнового числа $K_{\sigma, m} = \exp(-k_{\sigma, m} d)$, где $k_{\sigma, m}$ определяются из дисперсионного соотношения (1).

В предположении слабой нелинейности ($|\varphi_{\sigma, m}|^2 \ll 1$) эволюция комплексных амплитуд нормальных волн в изучаемой структуре может быть описана системой связанных нелинейных уравнений Шредингера, которая с учетом диссипации в линии может быть представлена как:

$$\begin{cases} j(\partial \varphi_{\sigma} / \partial t + V_{\sigma} \partial \varphi_{\sigma} / \partial y) + A_{\sigma} \partial^2 \varphi_{\sigma} / \partial y^2 - B_{\sigma} / 4 (|\varphi_{\sigma}|^2 + |\varphi_M|^2) \varphi_{\sigma} + j \alpha \varphi_{\sigma} = 0, \\ j(\partial \varphi_M / \partial t + V_M \partial \varphi_M / \partial y) + A_M \partial^2 \varphi_M / \partial y^2 - B_M / 4 (|\varphi_{\sigma}|^2 + |\varphi_M|^2) \varphi_M + j \alpha \varphi_M = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $V_{\sigma, m} = \partial \omega / \partial k_{\sigma, m} = V [1 \pm K_{\sigma, m} (1 - k_{\sigma, m} d)]$ - групповая скорость нормальных волн структур; $V = \omega_M \omega_H D / (4\omega)$; $A_{\sigma, m} = 1/2 \partial^2 \omega / \partial k_{\sigma, m}^2 = 1/2 [A' (1 \pm K_{\sigma, m} (1 - k_{\sigma, m} d))^2 + A'' (1 \pm 3K_{\sigma, m}) \mp K_{\sigma, m} d V (1 - k_{\sigma, m} d)]$ - коэффициенты, характеризующие дисперсионное расщепление волн; $A' = -\omega_M^2 D^2 / (16\omega_H)$; $A'' = \omega_M D^2 / 6$; $B_{\sigma, m} = \partial \omega / \partial |\varphi_{\sigma, m}|^2 = B \pm K_{\sigma, m} B'$ - коэффициенты нелинейности; $B = \omega_M \omega_H / \omega (1 + kD/4(\omega_M/\omega_H - 1))$; $B' = \omega_M \omega_H / \omega k D / 4(\omega_M/\omega_H - 1)$; $\alpha = 2\pi \gamma \Delta H$ - коэффициент диссипации; ΔH - ширина линии ферромагнитного резонанса. Выражения для расчета коэффициентов $V_{\sigma, m}$, $A_{\sigma, m}$, $B_{\sigma, m}$ получены с использованием дисперсионного соотношения (5).

Заметим, что величины V , $A = A' + A''$, B , используемые при записи выражений для $V_{\sigma, m}$, $A_{\sigma, m}$, $B_{\sigma, m}$, характеризуют групповую скорость, коэффициенты дисперсии и нелинейности в одиночной линии в отсутствие связи и совпадают с приведенными в [1].

Расчеты проводились при значениях параметров системы, которые можно реализовать в реальных схемах (в частности, $D_{1,2} = 10-50$ мкм, $f = 2.6-4$ ГГц, $d \approx 0 \div \infty$, $H_0 = 2630$ Э, $4\pi M_0 = 1750$ Гс, $\Delta H = 0.1-0.3$ Э). Значения безразмерных амплитуд нормальных волн на входной антенне $\varphi_{0\sigma, m}$ выбиралось в интервале $[1 \cdot 10^{-2}, 8 \cdot 10^{-2}]$. Значения величин A , B , B' , α , V , рассчитанные для фиксированных параметров структуры ($D_{1,2} = 20$ мкм, $f = 2.6$ ГГц, $\Delta H = 0.3$ Э), приведены в табл. 1.

Рассматривалось возбуждение системы импульсами малой длительности ($T_{имп} \sim 50-100$ нс). Для решения системы уравнений (6) задавались начальные

$$\begin{cases} \varphi_{\sigma}(y, 0) = \begin{cases} \varphi_{0\sigma}, & y = 0 \\ 0, & 0 < y < L, \end{cases} \\ \varphi_M(y, 0) = \begin{cases} \varphi_{0M}, & y = 0 \\ 0, & 0 < y < L \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$

Таблица 1

Параметры	A , см ² /с	B , с ⁻¹	B' , с ⁻¹	α , с ⁻¹	V , см/с
Значения	$3.6 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^{10}$	$1 \cdot 10^9$	$3 \cdot 10^6$	$1.5 \cdot 10^7$

и граничные условия

$$\begin{cases} \varphi_6(0,t) = \varphi_{06}\zeta(t), & 0 < t \leq T_{\text{имп}} \\ \varphi_м(0,t) = \varphi_{0м}\zeta(t), & 0 < t \leq T_{\text{имп}}, \\ \varphi_6(L,t) = 0, & 0 < t \leq t_{\text{max}} \\ \varphi_м(L,t) = 0, & 0 < t \leq t_{\text{max}}, \end{cases} \quad (8)$$

где $\zeta(t) = \sin(\pi t/T_{\text{имп}})$ - функция, определяющая форму импульса на входной антенне; t_{max} - время наблюдения; L - длина структуры.

Система (6) записана для нормальных волн в структуре, однако более наглядно наблюдать за эволюцией во времени сигналов, распространяющихся непосредственно либо в пленке 1, либо в пленке 2. Комплексные амплитуды огибающих в каждой из линий в этом случае можно представить через $\varphi_{6,м}$ следующим образом:

$$\varphi_{1,2}(y,t) = [\varphi_6(y,t) \pm \varphi_м(y,t)]/2. \quad (9)$$

Ниже, в численном эксперименте рассматривалось поведение как $\varphi_{6,м}$, так и $\varphi_{1,2}$.

Известно [11,12], что если в связанной системе одновременно возбуждаются две волны (быстрая и медленная), распространяющиеся с разными фазовыми скоростями, то это приводит к периодической перекачке мощности сигнала из одной линии в другую, то есть к периодическому изменению амплитуд $\varphi_{1,2}$ в каждой из линий вдоль направления распространения. Длина, на которой будет наблюдаться полная линейная перекачка мощности, определяется соотношением $L_{\text{лин}} = \pi/\Delta k$, где $\Delta k = |k_6 - k_м|$. Выражение (9), записанное для медленно меняющихся амплитуд, не учитывает, однако, эффект пространственных биений между нормальными модами структуры, связанный с разницей Δk волновых чисел этих мод. Поэтому поведение амплитуд $\varphi_{1,2}$ в физическом эксперименте и поведение, рассчитываемое с помощью (6) и (9), не будут, по-видимому, иметь качественных отличий друг от друга лишь при больших $L_{\text{лин}}$ (на расстояниях $l < L_{\text{лин}}$) для случая $V_6 \sim V_м$, или на расстояниях l , удовлетворяющих неравенству $||V_м - l/V_6| > T_{\text{имп}}$, для случая $V_6 \neq V_м$. В противном случае поведение амплитуд $\varphi_{1,2}$ в связанных пленках будет определяться сложной суперпозицией нелинейных эффектов, описываемых системой (6), и линейного эффекта пространственных биений.

2. Зависимость дисперсионных характеристик быстрой и медленной волн от расстояния между ферритовыми пленками структуры

Проследим за изменением значений коэффициентов нелинейности, дисперсии и групповой скорости нормальных волн в зависимости от толщины диэлектрического промежутка d , влияющего на коэффициенты связи $K_{6,м}$.

На рис. 3 приведены зависимости волновых чисел k_6 , $k_м$ и групповых скоростей V_6 , $V_м$ быстрой и медленной волн от d для двух разных значений нормированной частоты входного сигнала ω/ω_H . Из рис. 3, а видно, что величина $\Delta k = |k_6 - k_м|$ при уменьшении d , начиная с некоторого значения d^* , увеличивается. Это значение d^* уменьшается с ростом частоты сигнала: при $\omega/\omega_H = 1.06$ имеем $d^* \sim 300D$, а при $\omega/\omega_H = 1.22$ имеем $d^* \sim 100D$. Как следует из рис. 3, б групповые скорости нормальных волн при достаточно больших d равны значениям V в одиночной линии. С уменьшением d значения $V_{6,м}$ сильно изменяются, и при $d \rightarrow 0$ групповая скорость быстрой волны (сплошные линии) стремится к значению V

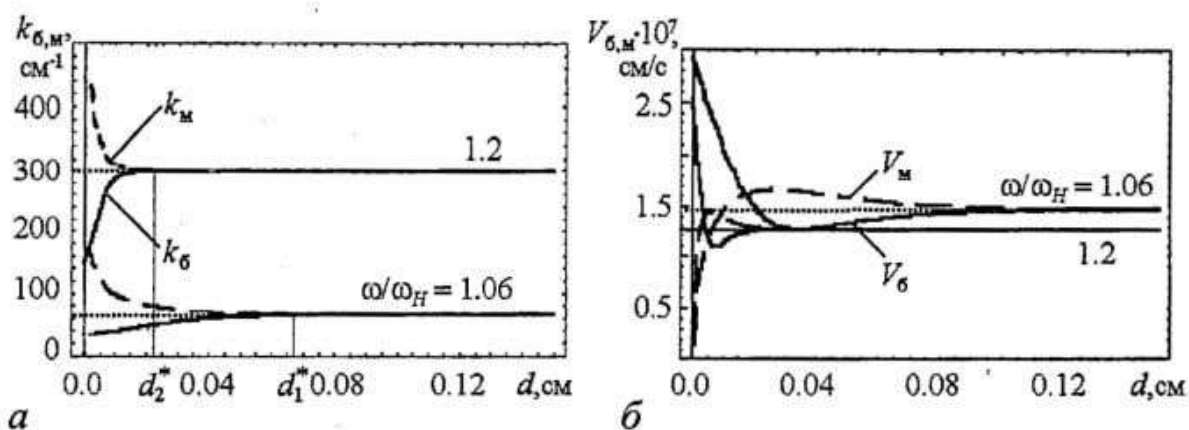


Рис. 3. Зависимость волнового числа (а) и групповой скорости (б) нормальных волн от расстояния между пленками d при различных ω/ω_H

для основной моды ($n=1$) в пленке удвоенной толщины, а групповая скорость медленной волны (штриховые линии) - к значению $V_m = 0$.

На рис. 4 показаны значения коэффициентов дисперсии $A_{б,м}$ в зависимости от d . Видно, что можно выделить четыре основные области значений d с характерными видимыми отличиями в поведении коэффициентов $A_{б,м}$. Границы между этими областями соответствуют значениям $d=d_1, d_2, d_3$. Некоторые важные особенности поведения коэффициентов $A_{б,м}, V_{б,м}, B_{б,м}$ для выделенных областей приведены в табл. 2. Границы интервалов d_1, d_2, d_3 зависят от частоты несущей ω и уменьшаются по мере приближения ω к верхней границе полосы пропускания ПОМСВ.

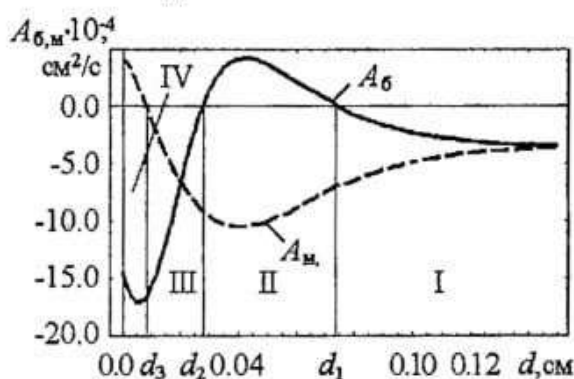


Рис. 4. Зависимость коэффициентов дисперсии нормальных волн от расстояния между пленками d при $\omega/\omega_H = 1.06$

В дальнейшем будем рассматривать особенности поведения решения уравнений (6) в областях I-IV.

Таблица 2

I: $d \in [d_1, \infty]$	II: $d \in [d_2, d_1]$	III: $d \in [d_3, d_2]$	IV: $d \in [0, d_3]$
$A_б, A_m < 0$	$A_б > 0, A_m < 0$	$A_б, A_m < 0$	$A_б < 0, A_m > 0$
$ A_б < A < A_m $	$ A < A_m $ $ A_б < A_m $	$A_б \geq A_m $	$ A < A_б $
$V_m > V_б$		$V_б \leq V_m$ $V_б > V_m$	$V_m < V_б$
$B_б > B_m > 0$			

Отметим, что влияние связи незначительно сказывается на величине коэффициентов нелинейности $B_{б,м}$ ($B_б$ растет, а B_m уменьшается с увеличением связи, не более чем на 10%), поэтому в дальнейшем мы не будем акцентировать внимание на значениях $B_{б,м}$.

3. Режимы возбуждения одной нормальной волны структуры

Рассмотрим случай, когда в структуре, показанной на рис. 1, возбуждается одна из нормальных волн: быстрая или медленная. Подобная ситуация может быть реализована в физической системе, если в обе пленки подать сигналы $\varphi_{01,2}$ одинаковой амплитуды либо в фазе, либо в противофазе, а именно: $\varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi_0$ (для возбуждения быстрой волны), либо $\varphi_{01} = -\varphi_{02}$ (для возбуждения медленной волны). В дальнейшем, имея в виду возбуждение в структуре только быстрой волны или только медленной волны, мы будем для краткости применять понятия «синфазное» или «противофазное» возбуждение, соответственно.

В случае возбуждения одной из нормальных мод поведение огибающей волнового импульса в изучаемой структуре будет описываться одним уравнением Шредингера с соответствующим индексом «б» или «м»

$$j \left(\frac{\partial \varphi_{б,м}}{\partial t} + V_{б,м} \frac{\partial \varphi_{б,м}}{\partial y} \right) + A_{б,м} \frac{\partial^2 \varphi_{б,м}}{\partial y^2} - \frac{B_{б,м}}{4} |\varphi_{б,м}|^2 \varphi_{б,м} + j\alpha \varphi_{б,м} = 0. \quad (10)$$

При этом в условиях (7), (8) необходимо положить: $\varphi_{0б} = 2\varphi_0$, $\varphi_{0м} = 0$, либо $\varphi_{0б} = 0$, $\varphi_{0м} = 2\varphi_0$.

Из рис. 4 и табл. 2 видно, что влияние связи приводит к изменению не только модуля, но и знака коэффициента дисперсии нормальных волн. Для сравнения следует сказать, что в одиночной пленке величина коэффициента дисперсии ПОМСВ всегда отрицательна. В результате критерий модуляционной неустойчивости (критерий Лайтхилла), который, как известно, записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial | \varphi |^2} < 0, \quad (11)$$

не выполняется в области II значений d для быстрой волны и в области IV - для медленной волны.

Оценим пороговые значения амплитуды входного сигнала $\varphi_{0б,м}^{th}$ в связанной ферромагнитной структуре, при которых возможно развитие модуляционной неустойчивости. Выражение для $\varphi_{0б,м}^{th}$ в соответствии с [3] можно записать в виде:

$$(\varphi_{0б,м}^{th})^2 = \pi^2 A_{б,м} / (2V_{б,м}^2 T_{имп}^2 B_{б,м}). \quad (12)$$

Зависимости пороговых значений $\varphi_{0б,м}^{th}$ для амплитуд нормальных волн от толщины диэлектрического промежутка d между пленками представлены на рис. 5. Оценочные величины $\varphi_{0б,м}^{th}$ достаточно хорошо подтверждаются результатами численного моделирования системы уравнений (6), приведенными ниже.

На рис. 6 показана эволюция огибающей импульса МСВ в одиночной линии (а) с амплитудой начального возмущения $\varphi_0 = 0.05$ и в связанной структуре (б-д) при

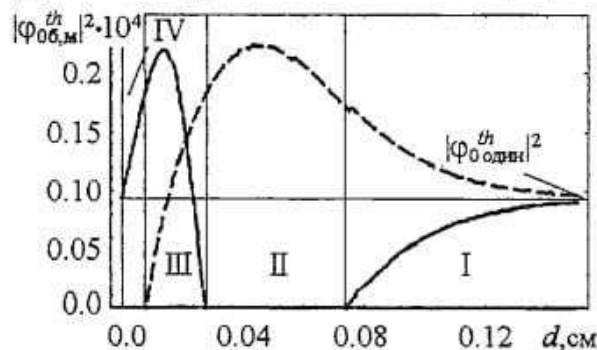


Рис. 5. Зависимость пороговых значений для амплитуд нормальных волн от расстояния между пленками

возбуждении быстрой ($\varphi_{0б} = 2\varphi_0$, $\varphi_{0м} = 0$, то есть $\varphi_{01,2} = \varphi_0$) и медленной ($\varphi_{0б} = 0$, $\varphi_{0м} = 2\varphi_0$, то есть $\varphi_{01} = -\varphi_{02} = \varphi_0$) волн в каждой из областей I-IV. Поведение величины $|\varphi_{1,2}|^2$ от времени на рис. 6 относится к случаю, когда сигнал снимается с выходных антенн, расположенных на расстоянии $y = 1.0, 1.5$ и 2 см от входа.

В областях II и IV (см. табл. 2) одна из нормальных волн (быстрая либо медленная) является устойчивой, а

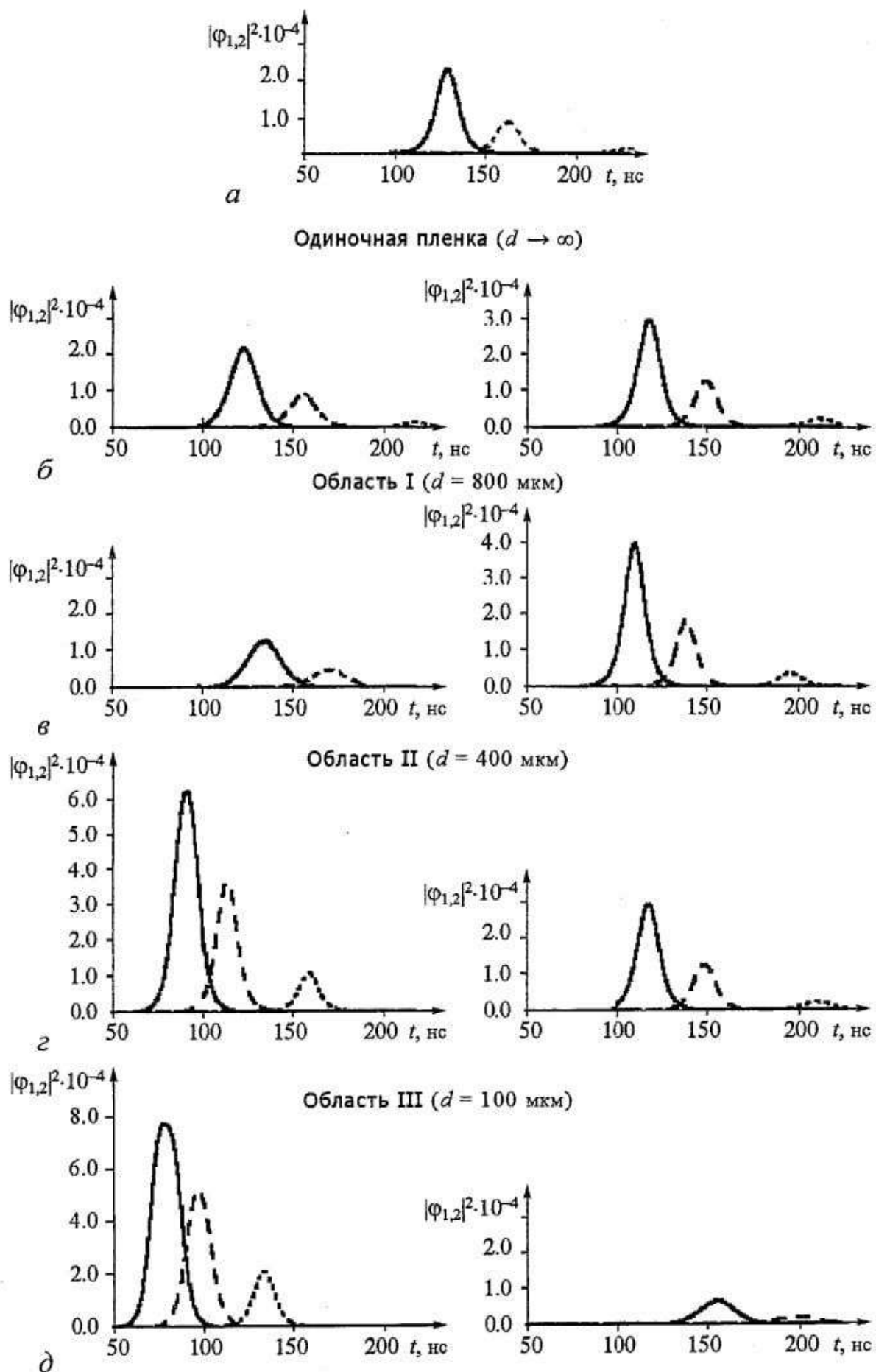


Рис. 6. Форма огибающей импульса ПОМСВ на антеннах, расположенных на расстоянии $\mu = 1$ см (сплошная кривая), 1.5 см (штриховая кривая) и 2 см (пунктирная кривая), в одиночной линии при $\varphi_0 = 0.05$ (*a*), в связанной системе $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0.05$ (*б-г*). Слева показан случай синфазного возбуждения системы, справа - противофазного

другая - неустойчивой по отношению к малым продольным возмущениям огибающей. Из рис. 6, в видно, что в области II при синфазном возбуждении системы (быстрая волна) импульс расплывается, при $y=1.5$ см полуширина импульса уже больше полуширины входного сигнала (см. рис. 6, а). При противофазном возбуждении (медленная волна) импульс при распространении сжимается, и образуется солитоноподобное формирование.

В области IV (см. рис. 6, д) имеет место обратная ситуация. Быстрая волна в этой области неустойчива, и при возбуждении ее наблюдается образование солитона огибающей. Амплитуда импульса в связанной структуре выше по сравнению со случаем одиночной линии, так как скорость его больше, чем в одиночной линии (см. рис. 3, б), а увеличение скорости приводит к уменьшению потерь энергии импульса в результате линейного затухания.

В областях II и IV при возбуждении волн, для которых выполняется критерий Лайтхилла, значение коэффициента дисперсионного расплывания по модулю больше, чем соответствующее значение в одиночной линии. В связи с этим полуширина импульса больше, чем в одиночной линии. Однако скорость распространения импульсов указанных волн в связанной системе также больше, чем в одиночной линии, что уменьшает влияние потерь на распространение сигнала. В результате на выходной антенне в связанной системе наблюдается импульс большей амплитуды, и эффект, связанный с разницей дисперсии волн, практически не заметен.

Рассмотрим теперь поведение амплитуды огибающей нормальных волн в областях значений d , где модуляционная неустойчивость МСВ наблюдается как при синфазном, так и противофазном возбуждении системы (области I, III). В области I по мере уменьшения d скорость быстрой волны увеличивается, а медленной уменьшается (см. рис. 3, б), соответственно амплитуда солитона при синфазном возмущении меньше (см. рис. 6, б), чем при противофазном. В области III наблюдается обратная ситуация (см. рис. 6, з).

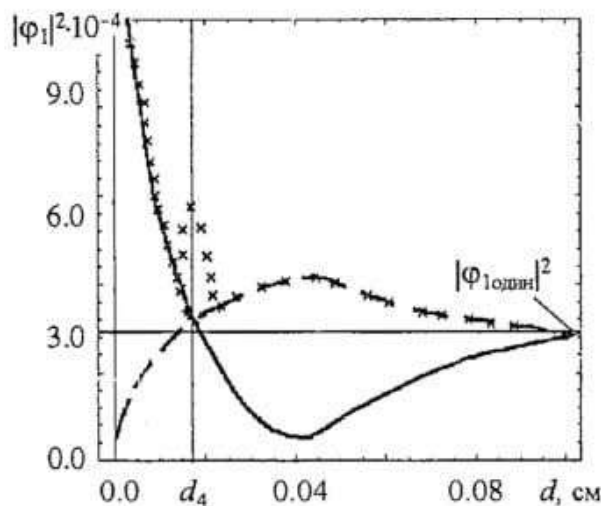


Рис. 7. Амплитуда импульса на выходной антенне в первой пленке ($y=1.5$ см) при различных способах возбуждения связанной структуры: сплошная кривая - синфазное возбуждение, штриховая кривая - противофазное, xxx - возбуждение двух нормальных волн; $\varphi_0=0.1$

Из-за того, что в диссипативной среде на процессы формирования солитонов большое влияние оказывает диссипация, различия в эволюции импульсов быстрой и медленной волн, связанные с разницей коэффициентов дисперсии волн, незначительны по сравнению с различиями, обусловленными разницей групповых скоростей.

На рис. 7 показана амплитуда импульса на приемной антенне в зависимости от величины связи d при синфазном и противофазном способах возбуждения системы. Из результатов видно, что при заданной амплитуде входного сигнала использование связи дает возможность регулировать амплитуду солитона, а также, как указывалось выше, и скорость солитона в структуре.

4. Возбуждение двух нормальных волн

Рассмотрим ситуацию, связанную с возбуждением в связанной системе одновременно двух нормальных волн.

Данный способ возбуждения структуры в экспериментальных условиях можно реализовать, например, подавая сигнал в одну из пленок, а вторую пленку при этом сдвинуть относительно первой на некоторое расстояние $l \sim \lambda$ (λ - длина волны МСВ в одиночной пленке). При таком способе возбуждения вся мощность сигнала первоначально будет сосредоточена в линии 1, а в линии 2 сигнал на входе будет отсутствовать, $\varphi_{02}=0$. Если сигнал подается только в одну из линий, то, как следует из (9), амплитуды обеих нормальных волн на входе будут равны, $\varphi_{01}=\varphi_{02}$.

На рис. 8 приведены результаты численного решения системы связанных нелинейных уравнений (6), при разных значениях параметра d . На этом рисунке показано поведение интенсивности сигнала только в первой пленке $|\varphi_1|^2$ (б-з) и для сравнения приведены результаты расчета, относящиеся к эволюции сигнала в одиночной пленке (а).

Из кривых на рис. 8, б, в видно, что выходной импульс имеет вид «двугорбого» образования, что может быть ошибочно интерпретировано как реализация двухсолитонного режима распространения импульса. На самом деле указанный эффект вызван просто различием в скоростях нормальных волн (см. рис. 3), в результате которого импульсы быстрой и медленной волн оказываются частично разделены во времени на выходной антенне. Причем, как видно из результатов на рис. 8, г, при малых значениях d имеет место полное разделение импульсов. Следует отметить, что первым выходную антенну всегда достигает возмущение, переносимое нормальной волной, для которой выполняется критерий Лайтхилла (см. рис. 3, 4), поэтому независимо от рассматриваемой области

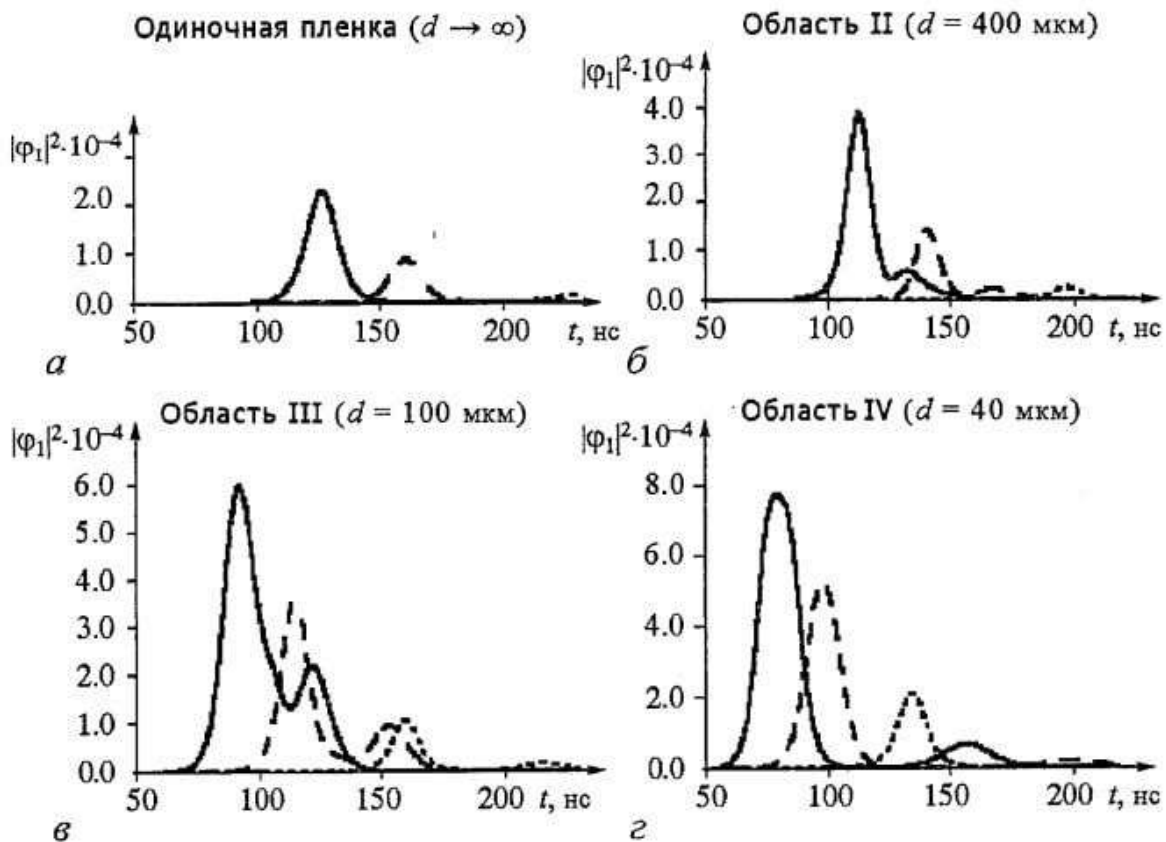


Рис. 8. Форма огибающей импульса ПОМСВ на антеннах, расположенных на расстояниях $y=1.0, 1.5$ и 2.0 см (кривые —, - - -, ·····, соответственно): а - одиночная линия при $\varphi_0=0.05$; б, в, г - связанная система при $\varphi_{01}=2\varphi_0, \varphi_{02}=0$

изменения параметра d (области I-III или IV) выходной сигнал имеет «солитоноподобную» форму.

Рассмотрим теперь эволюцию импульса вдоль направления распространения волны в каждой из двух пленок, соответственно. Результаты моделирования, относящиеся к этому случаю, при разных положениях приемной антенны, фиксированной величине параметра d ($d=400$ мкм) и разных уровнях входного сигнала представлены на рис. 9. Как видно из представленных результатов, наличие связи приводит к нелинейной перекачке мощности сигнала между линиями вдоль направления распространения волны. При подаче сигнала только в

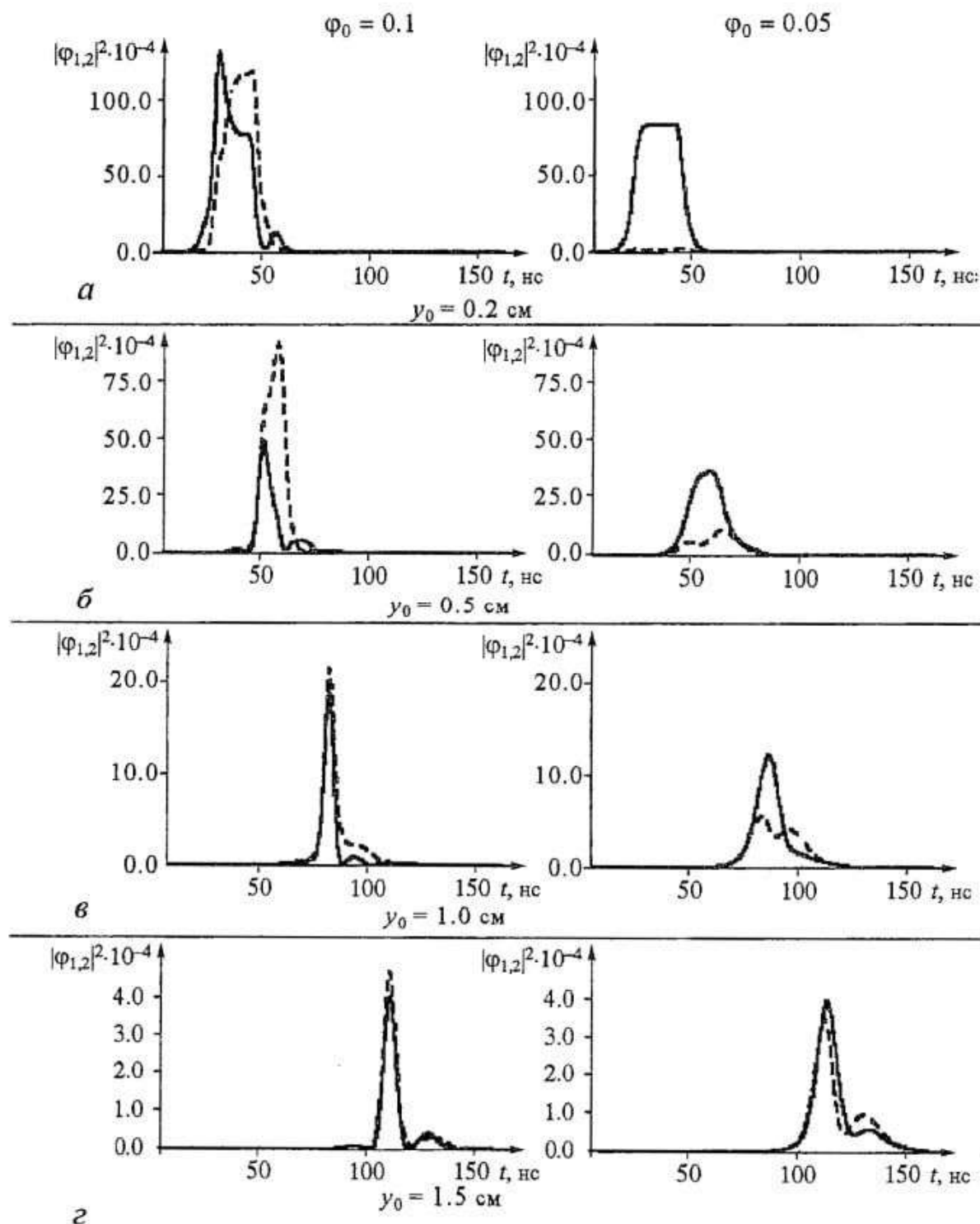


Рис. 9. Форма огибающей импульса в пленке 1 (сплошная кривая) и в пленке 2 (штриховая кривая) связанной системы при разных положениях приемной антенны ($y=0.2, 0.5, 1.0$ и 1.5 см) при различных амплитудах входного сигнала: $\varphi_{01}=2\varphi_0, \varphi_{02}=0, d=400$ мкм

пленку 1 мощность сигнала сначала приблизительно поровну распределяется между пленками (см. рис. 9, а при $\varphi_0=0.1$), а затем уровень мощности сигнала в каждой из пленок начинает балансировать около некоторого среднего значения, не убывая до нуля. Из-за влияния диссипации в процессе распространения волн их амплитуды уменьшаются, и перекачка прекращается, а значения $\varphi_{1,2}$ стабилизируются (см. рис. 9, б-г при $\varphi_0=0.1$).

Из рис. 9 видно, что при $\varphi_{01}=0.1$ перераспределение (выравнивание) мощности сигнала между ферромагнитными слоями имеет место на расстоянии $L_{\text{нелин}} \approx 0.2$ см, а при $\varphi_{01}=0.05$ - на расстоянии $L_{\text{нелин}} \approx 1.5$ см. При меньших значениях амплитуды входного сигнала $L_{\text{нелин}}$ сравнивается с диссипативной длиной L_d . В результате подаваемая в пленку 1 мощность практически не перекачивается в пленку 2. Как показывают расчеты, нелинейная связь между модами системы и связанная с ней нелинейная перекачка мощности сигнала между пленками структуры проявляются при амплитудах входного сигнала, превышающих порог солитонобразования φ_0^{th} .

Заключение

Выявлены основные нелинейные особенности распространения импульса огибающей прямой объемной МСВ в связанной структуре, состоящей из двух ферромагнитных пленок, на расстояниях много меньших длины линейной перекачки энергии. Проведена оценка влияния связи между пленками на групповые скорости, коэффициенты дисперсии и нелинейности для каждой из нормальных волн, возбуждаемых в такой структуре. Обсужден вопрос о модуляционной неустойчивости нормальных волн в зависимости от величины связи (расстояния между ферромагнитными пленками структуры). Результаты, представленные в работе позволяют сделать следующие выводы.

- При подаче сигналов одинаковой амплитуды в связанные линии (в фазе или противофазе) волна в системе может быть как устойчива, так и неустойчива относительно малых продольных возмущений огибающей; в одиночной линии ПОМСВ всегда неустойчива.

- При подаче сигнала в одну из связанных линий скорость и амплитуда солитоноподобного формирования на выходе связанной структуры больше, чем в одиночной линии, и их значения растут при увеличении связи.

- Нелинейный характер связи между пленками структуры проявляется в том, что сигнал большой амплитуды при возбуждении одной из пленок делится между связанными линиями, сигнал малой амплитуды не перераспределяется между линиями. Длина структуры, на которой имеет место деление сигнала, обратно пропорциональна мощности входного сигнала.

- Используя электродинамическую связь между магнитоэлектрическими волнами, можно эффективно управлять процессами формирования солитоноподобных импульсов в многослойной ферромагнитной структуре.

Авторы выражают благодарность Ю.А. Филимонову за постоянное внимание к работе и ценные замечания при обсуждении результатов работы.

Работа выполнена в рамках программ Минобразования РФ «Университеты России» (грант № УР.01.01.052), Минобразования РФ и CRDF (BRHE, REC-006), а также при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 04-02-16296).

Библиографический список

1. Звездин А.К., Попков А.Ф. К нелинейной теории магнитостатических волн // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, вып. 2. С. 606.
2. Калиникос Б.А., Ковшиков Н.Г. Наблюдение спин-волновых солитонов в ферромагнитных пленках // ПЖЭТФ. 1989. Т. 38, вып.7. С. 343.
3. Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Развитие модуляционной неустойчивости МСВ в пленках ЖИГ // ПЖТФ. 1989. Т. 15, вып. 2. С. 55.
4. Boardmann A.D., Wang Q., Nikitov S.A. Nonlinear magnetostatic surface waves in ferromagnetic films // IEEE Trans. In Mag. 1994. Vol. 30, № 1. P. 14.
5. Bauer M., Buttner O., Demokritov S.O. Observation of spatiotemporal self-focusing of spin waves in magnetic films // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 18, № 17. P. 3769.
6. Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Численное исследование явлений само-воздействия ограниченных пучков обратных объемных магнитостатических волн в ферромагнитных пленках // Изв.вуз. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 2, 3. С. 17.
7. Boardmann A.D., Xie K. Polarization interaction of spatial solitons in optical planar waveguides // Phys. Rev. A. 1995. Vol. 51, № 1. P. 692.
8. Никитов С.А., Бордман А.Д. Теория поверхностных магнитостатических волн // ФТТ. 1989. Т. 31, № 6. С. 281.
9. Шараевский Ю.П., Малюгина М.А. Моделирование нелинейных процессов на магнитостатических волнах в связанных ферромагнитных структурах // Изв.вуз. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 3, № 3. С. 59.
10. Xuan-Zhang Wang, Shu-Rong Xu. Nonlinear magnetostatic surface waves of magnetic multilayers: Effective medium theory // Phys. Rev. B. 2001. Vol. 63. P. 54415.
11. Люиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: ИЛ, 1963. 351 с.
12. Ваишковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П. Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1993. 316 с.
13. Гречушкин К.В., Стальмахов В.С. Поведение потока энергии поверхностных МСВ в связанных ферромагнитных структурах // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31, вып. 8. С. 1487.
14. Луцев Л.В., Березин И.Л., Яковлев Ю.М. Исследование дисперсионных характеристик МСВ в 2-слойных ферромагнитных пленках // ЖТФ. 1990. Т. 60, вып. 7. С. 180.
15. Зависляк И.В., Кондратюк В.А., Романюк В.О. Магнитостатические волны в двухслойных структурах с внутренним возбуждением // Укр. физ. ж. 1993. Т. 38, № 12. С. 1845.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 5.05.03
после доработки 25.02.04

MAGNETOSTATIC WAVES IMPULSES DISTRIBUTION IN TWO-LAYER FERROMAGNETIC STRUCTURE

G.M. Dudko, M.A. Malugina, Yu.P. Sharaevsky

The main nonlinear features of pulse distribution on distances a lot of smaller length of the linear energy swapping are studied in the framework of an obtained system of nonlinear Schrödinger equations what described distribution of direct volume

magnetostatic waves in two connected ferromagnetic films. The estimation of connection between films influence on group velocities, dispersion and nonlinearity coefficients is carry out. The problem of modulation instability in connected structure depending on distance between films is discussed. Shown, that the signal of the large amplitude is divided between connected films, the signal of small amplitude is not redistributed.



Дудко Галина Михайловна родилась в 1961 году в Свердловске. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика». С 1983 по 2003 год работала в Саратовском отделении Института радиотехники и электроники РАН. В 2002 году защитила диссертацию по теме «Эффекты самовоздействия магнитостатических волн в ферромагнитных пленках» на соискание ученого звания кандидата физико-математических наук. С 2003 года старший научный сотрудник НПК «Прецизионное оборудование». Область научных интересов - нелинейные явления в магнитоупорядоченных средах, компьютерное моделирование. Автор и соавтор 13 научных статей



Малюгина Мария Александровна - родилась в Саратове (1977), окончила Высший колледж прикладных наук Саратовского государственного университета (1999). Аспирант кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов - волновые явления в магнитных пленках. Имеет две публикации по данной тематике.



Шараевский Юрий Павлович родился в Николаевске-на-Амуре (1942) Хабаровского края. Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой нелинейной физики СГУ. Работал в области электроники сверхвысоких частот, в настоящее время занимается исследованиями в области физики нелинейных волновых процессов в тонких магнитных пленках. Читает лекции по общему курсу физики, по курсу «Концепции современного естествознания» для студентов гуманитарных специальностей, спецкурс «Колебания и волны в нелинейных активных средах». Опубликовал более 120 научных и научно-методических работ, несколько учебных пособий и монографию в соавторстве со В.С.Стальмаховым и А.В.Вашковским «Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот» (Изд-во Сарат. ун-та, 1980).

E-mail:sharaevskyy@info.sgu.ru



ПРОХОЖДЕНИЕ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА ЧЕРЕЗ ЛАМПУ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

А.М. Долов

Исследуется прохождение импульсных сигналов через лампу бегущей волны в предположении, что главным фактором, отвечающим за инерционные свойства усилителя, служит групповой рассинхронизм. Представлено сравнение результатов анализа прохождения импульсов в рамках линейной и нелинейной теории. Выявлены основные закономерности эволюции импульсов при распространении по длине системы - ограничение амплитуды и искажение формы сигнала.

Введение

Импульсные сигналы широко используются в различных областях, таких как радиолокация, телевидение, радиовещание и многих других. В связи с этим остается актуальным теоретическое исследование импульсных режимов работы ламп бегущей волны (ЛБВ), применяемых для усиления сигналов СВЧ-диапазона.

Теоретическое описание взаимодействия электронного потока и электромагнитной волны при прохождении импульсного сигнала требует применения нестационарной нелинейной теории [1-5]. Построение такой теории для ЛБВ в общем виде является трудновыполнимой задачей, что связано с существованием нескольких, обычно сопоставимых по своей роли эффектов, отвечающих за инерционные свойства преобразования сигналов. Например, для ЛБВ со спиральной замедляющей системой, в силу широкой полосы частот, естественно рассматривать задачу о прохождении коротких импульсов, ширина спектра которых порядка ширины полосы усиления. В этой ситуации за инерционные свойства преобразования сигналов будут отвечать такие факторы, как зависимость сопротивления связи от частоты, дисперсионные свойства системы, перенос возмущений электронами, движущимися с разными скоростями [3,4]. В ряде случаев, однако, можно выделить в качестве основного один фактор, отвечающий за инерционные свойства. В данной работе рассмотрена ситуация, когда этим фактором является групповой рассинхронизм (см. также [1,2]).

Предположим, что дисперсионная характеристика волны в замедляющей системе и линия пучка на $(\omega-\beta)$ диаграмме пересекаются под конечным углом в некоторой точке ω_0, β_0 (рис. 1, а). Из-за того, что синхронизм электронов и волны будет иметь место только в окрестности точки пересечения, существует ограничение ширины полосы взаимодействия, которая будет мала по сравнению с

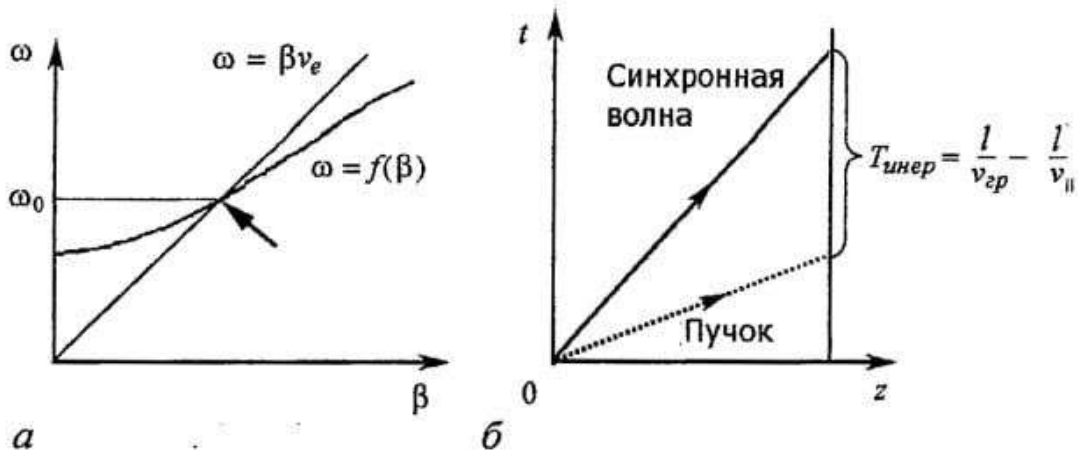


Рис. 1. *a* - Дисперсионные характеристики электронного пучка и электромагнитной волны. *б* - Пространственно-временная диаграмма; наклон линии синхронной волны отвечает групповой скорости

ω_0 . Таким образом, задача состоит в анализе прохождения радиоимпульсов, у которых частота заполнения близка к ω_0 , а длительность много больше периода СВЧ-колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Отметим, что аналогичная задача в применении к устройству с релятивистским электронным потоком была рассмотрена недавно в работе [6], где основное внимание уделено эффекту формирования всплеска амплитуды вблизи одного из фронтов импульса вследствие накапливающейся подпитки его энергией излучения электронов. В настоящей работе будут рассмотрены другие явления, сопутствующие прохождению импульсных сигналов через ЛБВ, работающую в условиях группового рассинхронизма. Тем не менее, учитывая специфику уравнений, можно сказать, что полученные результаты применимы как для релятивистских, так и для нерелятивистских ЛБВ, причем они могут быть отнесены к широкому кругу электронных устройств с длительным взаимодействием на прямой волне с инерционным механизмом группировки в определенных областях рабочих параметров.

1. Основные уравнения

Примем, что в исследуемой системе скорость электронного пучка больше групповой скорости волны. На рис. 1, *б* изображена пространственно-временная диаграмма, линии на которой соответствуют распространению электронного пучка $z = v_{||}t + \text{const}$ (пунктирная линия) и электромагнитной волны $z = v_{гр}t + \text{const}$ (сплошная линия). В рассматриваемой модели имеется характерный временной масштаб - время инерционности усилителя - определяемый относительным движением пучка и волны. Как видно из рисунка, характерное время инерционности усилителя будет даваться соотношением $T_{инер} \approx l/v_{гр} - l/v_{||}$, причем $T_{инер} \ll T_0$.

С точки зрения применения к реальным устройствам, соответствующие предположения справедливы, например, для ЛБВ на цепочке связанных резонаторов при работе вдали от границы полосы пропускания [7].

В силу имеющегося расположения дисперсионных характеристик и узости полосы частот, в которой происходит взаимодействие, естественно представить поле электромагнитной волны в виде $E = \text{Re}\{\varepsilon(z,t)\exp[i\omega_0 t - i\beta_0 z]\}$. Здесь $\varepsilon(z,t)$ - медленно меняющаяся амплитуда, ω_0 - частота, отвечающая точному синхронизму, β_0 - соответствующее ей волновое число. Тогда распространение импульса по системе будет описываться следующими уравнениями [1]:

$$\partial^2 \theta / \partial \zeta^2 = \text{Re} F \exp(i\theta), \quad (1)$$

$$\partial F/\partial \tau + \partial F/\partial \zeta = J, \quad J = 1/\pi \int_0^{2\pi} \exp(-i\theta) d\theta_0 \quad (2)$$

с начальными и граничными условиями

$$\theta|_{\zeta=0} = \theta_0, \quad \partial \theta/\partial \zeta|_{\zeta=0} = 0, \quad F(\zeta)|_{\tau=0} = 0, \quad (3)$$

$$F(\tau)|_{\zeta=0} = f(\tau), \quad (4)$$

где $\zeta = \beta Cz$ - безразмерная координата; $\tau = \beta C(1/v_{||} - 1/v_{гр})^{-1}(t - z/v_{||})$ - запаздывающее время; $F(\zeta, \tau) = \varepsilon/(2\beta UC^2)$ - нормированная комплексная амплитуда волны; J - комплексная амплитуда первой гармоники сгруппированного тока; l - длина пространства взаимодействия; $C = [I_0 K_0 / (4U)]^{1/3}$ - параметр Пирса; $\beta = (\omega/v_{||})\theta$ - фаза электрона относительно волны; $f(\tau)$ - представленная в безразмерном виде огибающая сигнала, подающегося на вход системы, причем $f(\tau) = f_0(\tau) \exp(i\Delta\tau)$, где $\Delta = (\omega_0 - \omega)(1/v_{||} - 1/v_{гр})/(\beta C)$ - безразмерная отстройка несущей частоты от частоты синхронизма. Свойства усилителя определяются единственным свободным параметром $L = \beta l C = 2\pi CN$.

Рассмотрим задачу в линейном приближении. Представим θ в виде $\theta = \theta_0 + \tilde{\theta}$, где $\tilde{\theta} \ll 1$. Тогда выражение для тока в (2) можно записать как $J = -i/\pi \int_0^{2\pi} \tilde{\theta} \exp[-i\theta_0] d\theta_0$. Уравнение (1) умножим на $\exp[-i\theta_0]$ и усредним. Получим следующую систему уравнений:

$$\partial^2 J/\partial \zeta^2 = -iF, \quad (5)$$

$$\partial F/\partial \tau + \partial F/\partial \zeta = J \quad (6)$$

с граничными условиями

$$J|_{\zeta=0} = 0, \quad \partial J/\partial \zeta|_{\zeta=0} = 0, \quad F(\zeta)|_{\tau=0} = 0, \quad (7)$$

$$F(\tau)|_{\zeta=0} = f(\tau). \quad (8)$$

2. Численные результаты

Решение системы (1)-(4) и (5)-(8) проводилось методом конечных разностей второго порядка точности, подобным описанному в [1]. Электроны, распределенные по фазе влета от 0 до 2π представлялись конечным числом «крупных частиц» K , обычно $K=32$.

При проведении расчетов форма входного импульса задавалась функцией $f_0(\tau) = A \sin^2(\alpha\tau)$ при $0 \leq \alpha\tau \leq \pi$ и $f_0(\tau) = 0$ при $\alpha\tau > \pi$, где A - амплитуда, параметр α обратно пропорционален ширине импульса.

На рис. 2 представлены временные зависимости амплитуд входного F_{in} и выходного F_{out} сигналов, рассчитанные по линейной теории в двух ситуациях, когда длительность входного импульса велика и когда она мала по сравнению с характерным временем $T_{инер}$. Изменение длительности входного импульса при достаточно малых значениях параметра α сопровождается пропорциональным изменением ширины выходного (рис. 2, а и б). При малой длительности входного импульса конкретный выбор α практически не влияет на длительность выходного импульса, определяющуюся величиной $T_{инер}$. Таким образом, при достаточно коротком входном импульсе длительность выходного импульса определяется собственным характерным временем инерционности усилителя $T_{инер}$, и в этом случае наблюдается эффект увеличения длительности импульса в результате его

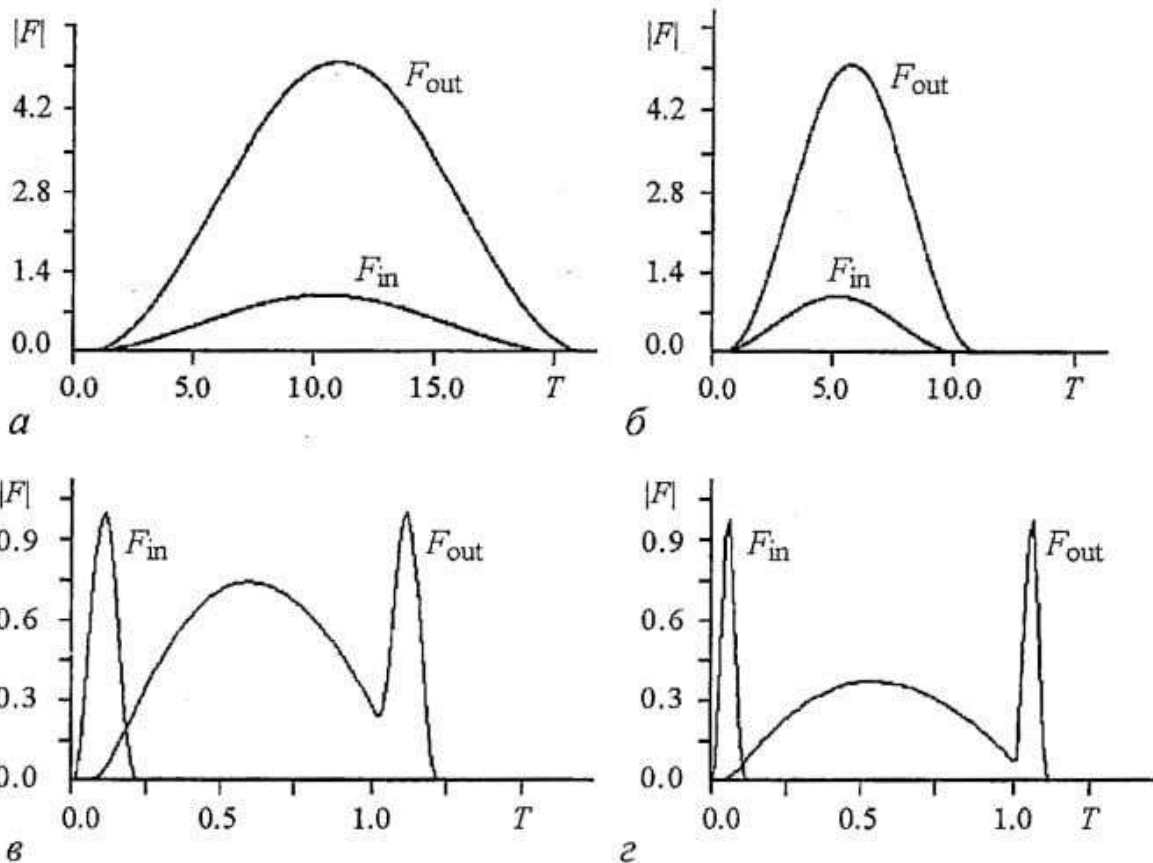


Рис. 2. Зависимости амплитуд входных F_{in} и выходных F_{out} сигналов от времени; $L=3.0$, $A=1.0$. a ($\alpha=0.05$) и $б$ ($\alpha=0.1$) - широкие входные импульсы, определяют ширину выходных; $в$ ($\alpha=5.0$) и $г$ ($\alpha=10.0$) - короткие входные импульсы, ширина выходных определяется временем инерционности усилителя

прохождения через систему. Как можно заметить, на рис. 2, a и 2, $б$ ширина выходного импульса несколько больше исходной на величину порядка $T_{инер}$.

Следует отметить, что ширина спектра импульса обратно пропорциональна его длительности: чем короче импульс, тем шире его спектр. Как можно заключить из рис. 1, a , синхронизм имеет место в узком интервале частот в окрестности ω_0 , а значит, и усиление реализуется в этом интервале. Это объясняет сильное искажение выходного сигнала на рис. 2, $в$ и 2, $г$. Результатом усиления в узкой полосе спектра начального импульса служит широкий «горб» на графике выходного сигнала. А остальная часть спектра проходит через систему практически без изменений, по этой причине узкий во временной области пик на выходе приблизительно повторяет форму на входе.

Обратимся теперь к сравнению результатов линейной и нелинейной теории. В качестве примера рассмотрим прохождение через систему импульса, амплитуда A которого составляет 0.5, а ширина $\alpha=0.1$ при различных значениях параметра нормированной длины L . Временные зависимости амплитуд входного и выходного сигналов представлены на рис. 3.

При $L=2$ (рис. 3, a и 3, $б$) результаты расчетов по линейной и нелинейной теории практически идентичны. При $L=3.5$ (рис. 3, $в$ и 3, $г$) уже заметным образом проявляются нелинейные эффекты. Согласно линейной теории, при увеличении нормированной длины L (что на практике достигается увеличением тока пучка) будет наблюдаться неограниченный рост амплитуды выходного импульса (рис. 3, $в$). Учет нелинейных эффектов приводит к ограничению амплитуды выходного сигнала и искажению его формы по сравнению с входным (рис. 3, $г$).

Рассмотрим теперь изменение формы выходного импульса при увеличении L . Примем параметры сигнала равными $A=0.5$ и $\alpha=0.05$. На рис. 4 показано, как

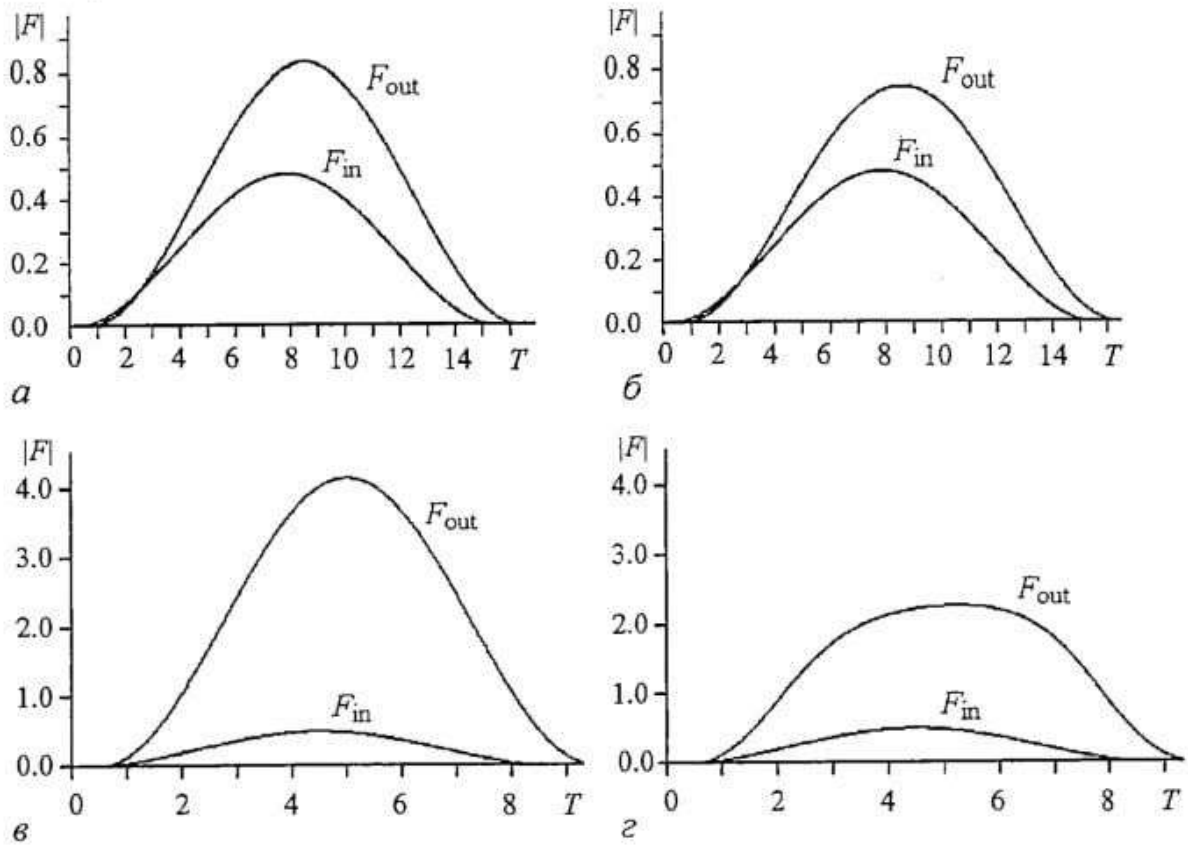


Рис. 3. Зависимости амплитуд входных F_{in} и выходных F_{out} сигналов от времени; $A=1.0$, $\alpha=0.1$.
 а ($L=2$) и в ($L=3.5$) - линейная теория; б ($L=2$) и г ($L=3.5$) - нелинейная теория

изменяется во времени пространственное распределение амплитуды поля по длине системы. В линейной теории (рис. 4, а) поле экспоненциально нарастает по длине системы, что приводит к увеличению амплитуды выходного сигнала. При учете нелинейных эффектов имеет место ограничение амплитуды поля и, как следствие, искажение выходного импульса по сравнению с входным (рис. 4, б).

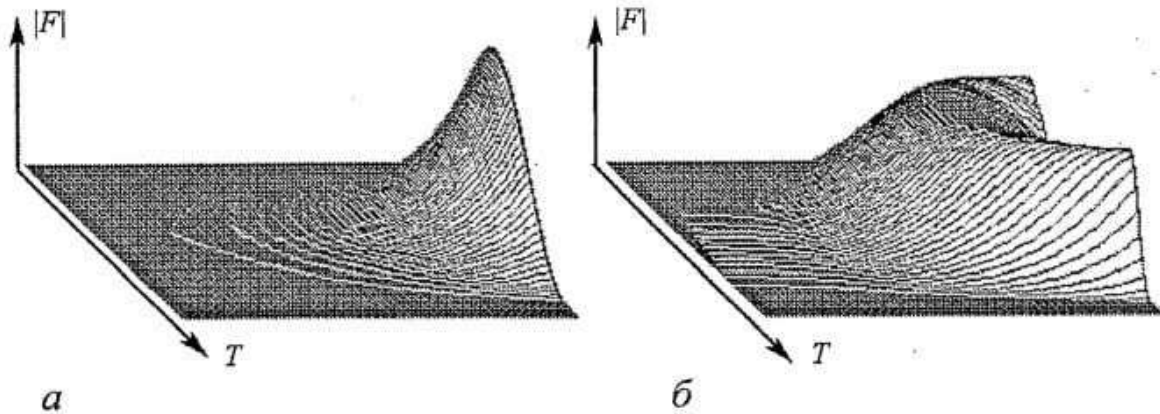


Рис. 4. Изменение во времени распределения амплитуды поля по длине системы; $A=0.5$, $\alpha=0.05$, $L=6.0$. а - Линейная теория, максимальное значение $|F| \approx 51.0$; б - нелинейная теория, $|F| \approx 3.0$

При небольших значениях, $L < 3$, нелинейные эффекты практически не проявляются и система функционирует как усилитель, не искажающий форму сигнала (рис. 5).

При дальнейшем увеличении тока пучка начинают проявляться нелинейные эффекты, наличие которых приводит к изменению формы сигнала в процессе распространения по длине системы (рис. 6).

Рассмотрим динамику импульса во времени. На начальном этапе рост

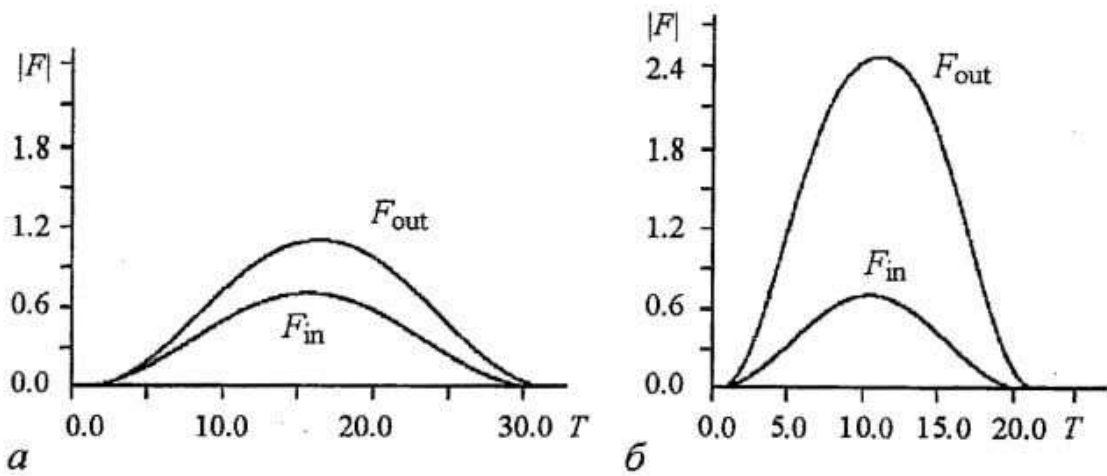


Рис. 5. Зависимости амплитуды входных F_{in} и выходных F_{out} сигналов от времени при небольших значениях параметра L : $a - L=2$, малое усиление сигнала (без искажений); $b - L=3$, большее усиление (с нелинейными искажениями). $A=0.5, \alpha=62.83$

входного сигнала приводит к росту первой гармоники пучка и, соответственно, к росту амплитуды поля. Достаточно большое поле приводит к перегруппировке электронов и уменьшению тока первой гармоники. При этом уменьшается и амплитуда выходного сигнала. При дальнейшем увеличении L форма выходного сигнала изменяется достаточно сильно. Увеличение амплитуды поля вызывает перегруппировку электронов. Это приводит к тому, что импульс сильно деформируется, появляется «провал».

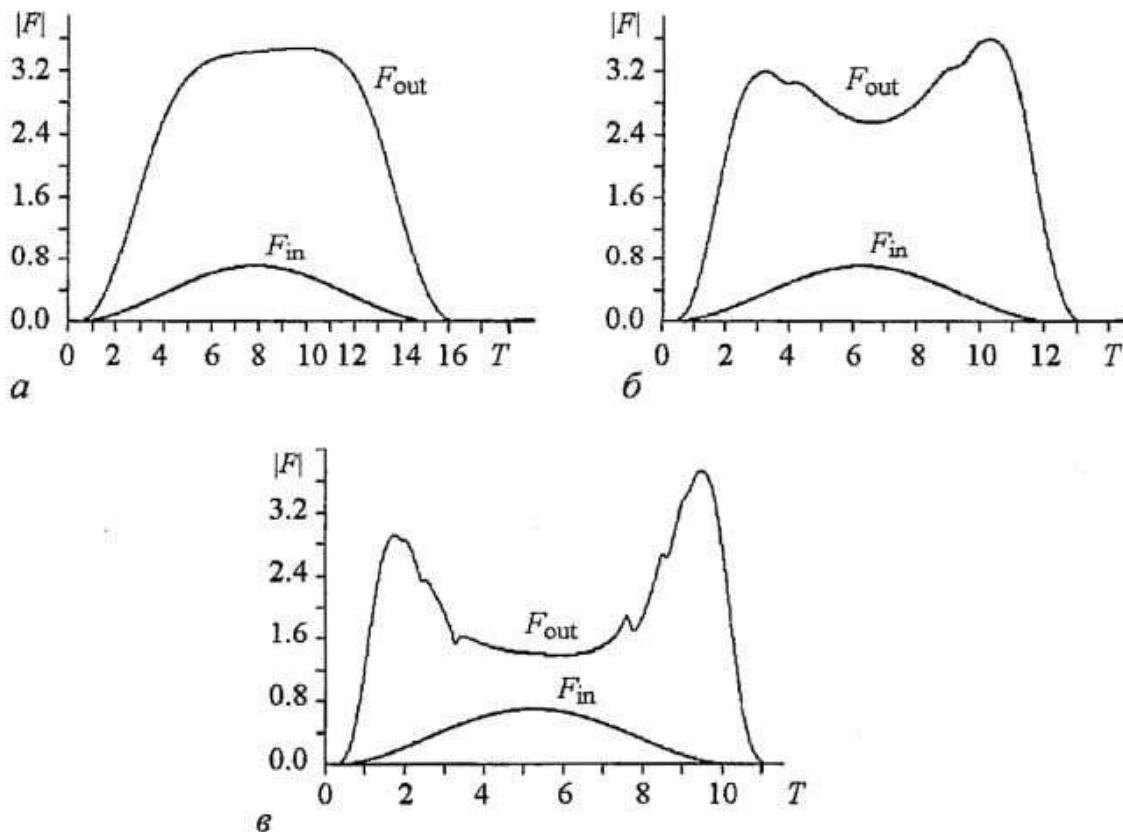


Рис. 6. Зависимость амплитуды входных и выходных сигналов от времени при $A=0.5, \alpha=0.05$ и разных значениях L : $a - 4.0$; $b - 5.0$; $v - 6.0$

Заключение

Рассмотренная версия нестационарной нелинейной теории ЛБВ-усилителя позволяет исследовать нелинейные и инерционные эффекты, сопровождающие распространение импульсов по длине системы в ситуации, когда инерционные свойства определяются одним фактором - групповым рассинхронизмом. Наличие характерного временного масштаба, определяющего инерционные свойства усилителя, приводит к конечной ширине выходного импульса, даже если длительность входного импульса мала.

Анализ данной задачи показал, что в линейной теории увеличение нормированной длины системы сопровождается неограниченным увеличением амплитуды выходного сигнала, тогда как нелинейная теория указывает на ограничение роста амплитуды и искажение формы импульса.

Проведенное теоретическое исследование выявило также, что при больших значениях нормированной длины одnogорбая первоначально форма импульса существенно изменяется с образованием «провала» в центральной части выходного импульса.

Автор выражает благодарность С.П. Кузнецову за руководство работой, постоянное обсуждение и помощь. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-02-16192).

Библиографический список

1. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П. Периодические и стохастические автомодуляционные режимы в электронных генераторах с распределенным взаимодействием // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, ИПФ АН СССР, 1980. С. 101.
2. Гинзбург Н.С., Пиковский А.С., Сергеев А.С. Стохастизация электромагнитного излучения в системах с конвективной неустойчивостью электронного потока // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34, № 4. С. 821.
3. Манькин И.А., Школьников В.Г. К нестационарной нелинейной теории ЛБВ // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 9. С. 1918.
4. Манькин И.А., Школьников В.Г. Теоретический анализ взаимодействия протяженного электронного потока с полем широкополосного стохастического сигнала // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 9. С. 1932.
5. Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Экспериментальное и теоретическое исследование стохастических автоколебаний в лампе обратной волны // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Изд. СГУ, 1981, кн.5. С. 25.
6. Гинзбург Н.С., Зотова И.В., Сергеев А.С. Об особенностях усиления коротких электромагнитных импульсов при распространении вдоль стационарных электромагнитных потоков // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25, № 23. С. 8.
7. Булгакова Л.В., Трубецков Д.И., Фишер В.Л., Шевчик В.Н. Лекции по электронике СВЧ приборов типа «О». Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1974.

*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 5.05.03
после доработки 16.10.03*

PASSAGE OF IMPULSE SIGNAL THROUGH TRAVELING-WAVE TUBE

Alexey M. Dolov

The passage of impulse signal through traveling-wave tube with group unsynchronism as main inertial properties of the amplifier are discussed. The comparison of passing signals in terms of linear and nonlinear theory are introduced. The basic mechanism of the evolution of impulse through the system are presented.



Долов Алексей родился в Саратове (1979). Окончил лицей Колледжа прикладных наук (1997). В том же году поступил в Саратовский государственный университет в Высший колледж прикладных наук, который позднее был преобразован в факультет нелинейных процессов. На втором и третьем курсе изучал вейвлет-анализ и его применение для анализа бифуркаций в динамических системах. С четвертого курса начал заниматься научными исследованиями на кафедре динамических систем под руководством проф. Кузнецова С.П. Тема дипломной работы была связана с нестационарными явлениями при взаимодействии электронного потока с электромагнитными волнами. В настоящее время является аспирантом кафедры динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН.

В июле 2002 года участвовал в международной конференции IVESC 2002 (THE 4th INTERNATIONAL IEEE VACUUM ELECTRON SOURCES CONFERENCE).



НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В НАУКАХ О ЗЕМЛЕ: ИНФОРМАЦИЯ К РАЗМЫШЛЕНИЮ

М.И. Рыскин, А.В. Иванов

В настоящее время в науках о Земле реально действуют преимущественно принципы Ньютоновой картины мира и развиваются ростки квантовых представлений. Вместе с этим наблюдается активное проникновение идей нелинейной динамики в самые разные области наук о Земле: геофизику, нефтяную геологию, геохимию и другие. Наиболее органично нелинейные идеи воспринимает геофизическое направление. Обсуждаются принципы нелинейной сейсморазведки как наиболее показательный пример проникновения идей нелинейной динамики в геофизическую практику.

В последнее время в науках о Земле назревает своеобразный кризис, который проявляется на наших глазах прежде всего стремительным нарастанием информационного хаоса. «Натурных данных в геологии к настоящему времени накоплено столько, что специалисты буквально тонут в них. Этот вал продолжает катастрофически расти и мы не в состоянии не только его осмыслить, но даже квалифицированно обработать. И трагедия усугубляется еще тем, что весь этот разнообразный материал уже не помогает делу, он не решает принципиальных задач, а лишь их множит» [1].

Подобная ситуация характерна не только для наук о Земле. Это лишь одно из проявлений «новой растущей диспропорции в развитии человечества в целом - диспропорции между человечеством как совокупным производителем информации и отдельным человеком как ее потребителем и пользователем» [2]. Сама же эта ситуация классифицируется М.Н. Эпштейном как информационный взрыв.

Возвращаясь к наукам о Земле, необходимо добавить, что помимо сказанного современный этап их развития характеризуется наиболее сильным (наверное, за всю историю) разрывом реально действующей сегодня в геонауках аксиоматики и методологии, с одной стороны, и современной физико-философской, бурно развивающейся и стремительно изменяющейся картины мира, с другой. На смену парадигме квантовой физики и теории относительности уверенно приходит парадигма нелинейной динамики, хаоса и структурной организации систем [3-8]. В то же время, в науках о Земле к началу 1990-х годов преимущественно действовали принципы еще Ньютоновой картины мира и фактически только появились ростки квантовых представлений [1], уязвимые для критики (см., например, [9]), хотя и наблюдались уже единичные случаи проникновения синергетических идей, спровоцированные бурной эволюцией этой новой парадигмы.

Во второй половине 1990-х годов, преимущественно благодаря работам Ю.М. Пуцаровского, появились попытки обобщения фактов и прошли дискуссии о линейности и нелинейности в геологии [10]. По этой тематике проведено несколько научных конференций и семинаров различных уровней, постоянно появляются публикации, новое направление очерчивается и развивается. Наиболее «продвинутыми» областями приложения нелинейных идей на сегодняшний день можно назвать геодинамику и геофизику.

Нелинейность в геодинамике. Геодинамика как эволюционная дисциплина приняла нелинейные представления наиболее естественным и органичным образом. Все элементы этих представлений - неустойчивость, фазовые переходы, бифуркационные состояния, триггерный эффект, наконец, самоорганизация и пр., свойственные эволюции сложных, термодинамически неравновесных, то есть открытых, диссипативных систем, здесь присутствовали всегда, но не всегда выдвигались на передний план как системообразующие. Так, А.В. Лукьянов [11] отмечает, что в Геологическом институте РАН еще с конца 1950-х годов целенаправленно, в течение длительного времени изучались причины упорядоченности строения геологических объектов, в результате чего были сделаны выводы о широкой распространенности явления самоорганизации в геологических процессах и об их существенной нелинейности.

По поводу происхождения феномена упорядоченности высказывались разные мнения, укладывающиеся в две группы объяснений: 1) порядок «навязывается» геологическим системам извне и 2) упорядоченность возникает спонтанно, внутри геологических систем, являясь их неотъемлемым свойством. Во втором смысле употреблялся термин «самоорганизация». Вполне понятно, что обе эти группы по отношению к конкретным примерам имели веские основания и не исключали, а дополняли друг друга. Особенности же нелинейной характеристики геологических процессов состояли, как пишет А.В. Лукьянов, в том, что «они не описываются математическими формулами, и конкретный вид линейного или нелинейного оператора нам не известен. Поэтому приходится обращаться к основному свойству линейного оператора - принципу суперпозиции (результат суммы воздействий равен сумме их результатов). Если этот принцип соблюдается, мы говорим о линейной зависимости, если нет, то о нелинейной, даже не зная конкретную математическую формулировку этой зависимости». Это замечание характеризует вполне типичную для большинства сфер приложения нелинейной динамики ситуацию, которую можно классифицировать как стадию начального нелинейного осмысления. Ибо суть нелинейной динамики как универсального полидисциплинарного научного направления состоит в построении и исследовании математических моделей (то есть уравнений) неравновесных систем.

Нелинейность геологических процессов определяется двумя фундаментальными свойствами геологической среды (горных пород).

- Наличием определенных предельных состояний, в которых отклик среды на действующий фактор перестает определяться линейной зависимостью и становится существенно нелинейным, а сама среда переходит в новое качественное состояние (температуры фазовых переходов, пределы упругости, прочности, пластичности и пр.).

- Способностью геологической среды сохранять старое качество за пределом, соответствующим равновесию между старым и новым состоянием («запредельное терпение»), то есть способностью находиться в метастабильном состоянии.

В 1992 году была опубликована монография Ф.А. Летникова «Синергетика геологических систем» [12], где уже на строгом математическом уровне

рассмотрена не только равновесная термодинамика, но и самоорганизация неравновесных физико-химических систем с геологическими следствиями. В частности, отмечено, что для понимания эволюции геологических систем важно определить в каждом конкретном случае степень их устойчивости, ибо в состоянии, близком к неустойчивому, любая система чутко реагирует даже на слабые и случайные внешние воздействия:

«В эту сферу входят все метастабильные системы, но даже среди них существует своя иерархия по степени реагирования на внешние шумовые воздействия, что определяется энергией связи между компонентами в этих системах. Так, воздействие ультразвука на флюидную систему приведет к ее существенным изменениям, в то время как это же воздействие на метаморфическую или магматическую породы не окажет никакого влияния.

Отличительная черта неустойчивой системы - ее многовариантность или мультиплетность, столь хорошо проявленные при эволюции рудообразующих флюидных систем, когда количественные соотношения и состав фаз, отличаемых флюидами, колеблются в широких пределах, а факторы самоорганизации таких систем играют огромную роль в их последующей консервации в скопление минеральных агрегатов».

И далее как одна из наиболее сложных проблем для синергетики геологических систем выдвигается проблема обнаружения элементов самоорганизации на различных иерархических ступенях эволюции, когда последующая стадия может стирать информацию о предыдущей.

Другая проблема - необходимость аналитического выражения обнаруженных синергетических признаков в терминах термодинамики, математической физики или путем создания адекватных математических или тепловых моделей изучаемого процесса. В монографии Ф.А. Летникова предприняты успешные попытки решения этих проблем применительно к процессам самоорганизации при зарождении, росте и преобразовании минералов, а также к процессам тектонической и магматической (флюидной) активизации на разных этапах развития литосферы и астеносферы Земли.

Уяснение, благодаря сейсмотомографическим данным, тектонической расслоенности литосферы и многоярусной природы мантийной конвекции наряду с обнаружившимся поразительным разнообразием и несомненностью нелинейных эффектов в глубинной эндогенной геодинамике, привело в 1994 году к появлению в работах японских геологов новой глобально-динамической нелинейной модели. В ней учтена вся тектоническая триада: тектоника роста (тектоника ядра Земли), плюмтектоника, распространяющаяся на всю мантию от ядра до границы 670 км, и тектоника плит, присущая земной коре и верхней мантии до упомянутой границы [13]. Примерно в эти же годы появились работы Б.А. Соколова [14], где процессы нефтегазообразования рассматриваются как нелинейные и предлагается автоколебательная модель нефтегазового месторождения.

В конце концов, открывая третий семинар по нелинейной геодинамике в 2001 году, Ю.М. Пуцаровский заметил, что интерес ученых к нелинейному развитию процессов любого уровня принимает «взрывной» характер. И тем не менее, в подавляющем большинстве докладов того же семинара анализ линейности или нелинейности процессов в строгих рамках термодинамики отсутствовал.

Нелинейность в геофизике. Нелинейная геофизика также началась с новых представлений о среде. В трудах академика М.А. Садовского и его школы в 1980-е годы было сформулировано понятие геофизической среды, лежащее в основе нелинейной геофизики и, в частности, нелинейной сейсмологии. До этого теоретической основой сейсмологии и сейсморазведки было учение о механике

сплошной среды - упругой, пассивной, реагирующей на внешние воздействия при условии их малости и кратковременности в соответствии с законом Гука. Главная особенность такой среды - уменьшение амплитуды колебания с удалением от источника вследствие геометрического расхождения волнового фронта.

Идея сейсморазведки применительно к такой модели выглядит следующим образом (рис. 1). Возбуждаемые искусственным землетрясением (взрывом, вибровоздействием, пневматическим излучателем) упругие волны достигают границ раздела толщ с различными акустическими жесткостями (рис. 1, а, б). На этих границах происходит отражение и преломление, и таким образом энергия падающей продольной волны P_1 перераспределяется между четырьмя вторичными

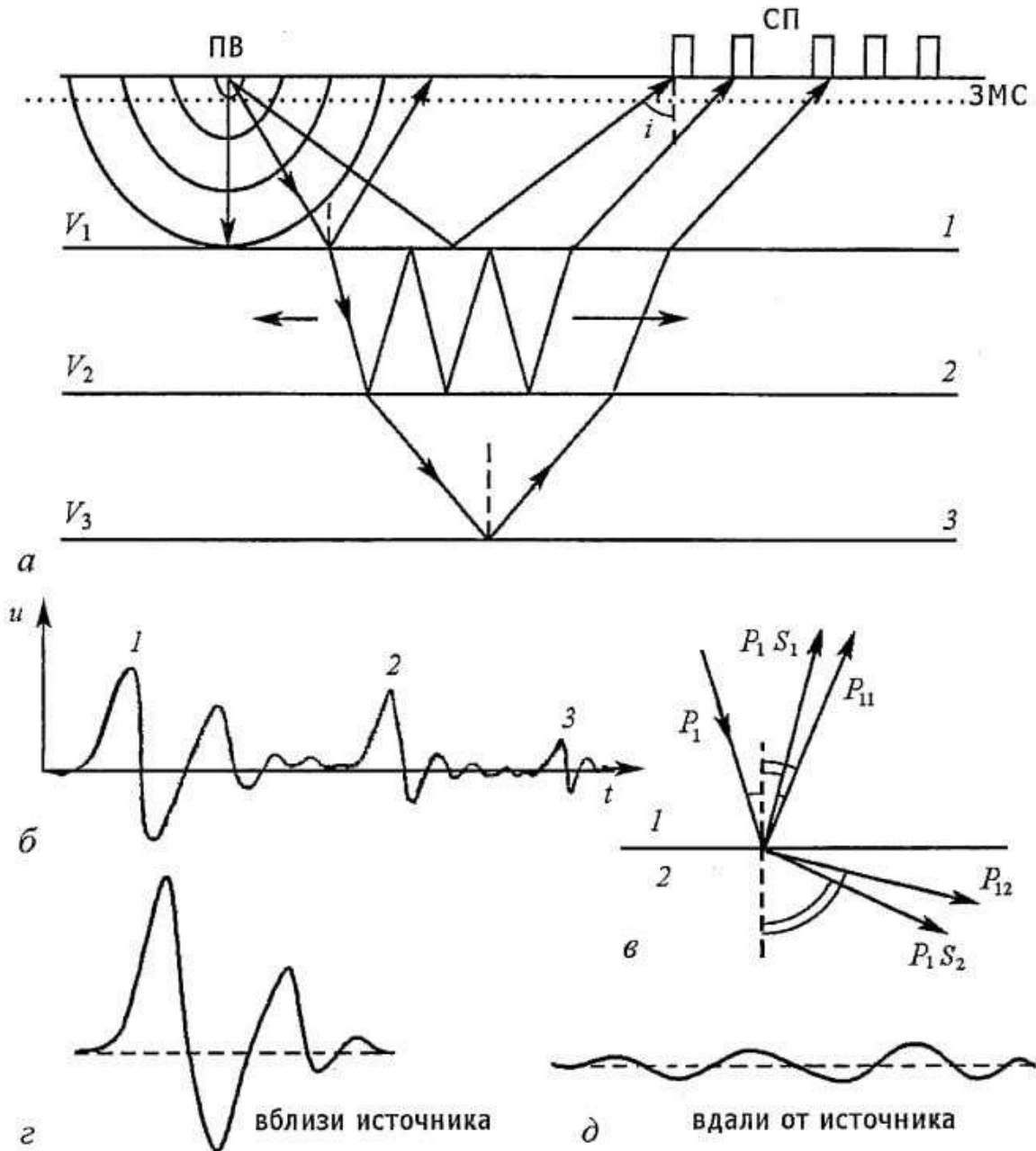


Рис. 1. К идее сейсмической разведки, основанной на модели сплошной среды. а - Схема возбуждения и регистрации сейсмических волн; ПВ - пункт возбуждения, СП - сейсмоприемник, ЗМС - приповерхностная зона малых скоростей, V_i - пластовые скорости упругих волн, цифрами пронумерованы пласты и поверхности раздела; в слое 2 показана только одна многократно отраженная волна. б - Запись отраженных волн сейсмоприемником, индексы 1, 2, 3 соответствуют номерам границ, от которых отразилась земная волна. в - Образование вторичных монотипных и обменных волн; P - продольная волна, S - поперечная. г, д - Деформация сейсмического импульса в модели сплошной упругой среды

волнами: двумя отраженными P_{11} и P_1S_1 и двумя преломленными волнами P_{12} и P_1S_2 . Волны P_{11} и P_{12} являются монотипными, то есть остаются продольными, а P_1S_1 и P_1S_2 - обменными, то есть после встречи с границами распространяются далее, меняя свой тип - становятся поперечными. Интенсивность вторичных волн определяется соотношением скоростей их распространения и углами падения, отражения и преломления (рис. 1, в) в соответствии с законом Снеллиуса

$$\frac{\sin i_{P_1}}{V_{P_1}} = \frac{\sin i_{P_{11}}}{V_{P_1}} = \frac{\sin i_{P_1S_1}}{V_{S_1}} = \frac{\sin i_{P_{12}}}{V_{P_2}} = \frac{\sin i_{P_1S_2}}{V_{S_2}} = \frac{1}{V^*},$$

где V^* - кажущаяся скорость, определяемая соотношением $V^* = V/\sin i$, i - угол подхода вторичной волны к поверхности наблюдения (см. рис. 1, а). Это обстоятельство также проявляется в уменьшении интенсивности вторичных волн, и запись колебаний, осуществляемая сейсмоприемником, может выглядеть так, как это показано на рис. 1, в. Одновременно амплитуда колебаний уменьшается за счет неупругого поглощения энергии волн, причем это поглощение идет избирательно - геологическая среда «работает» как фильтр нижних частот, гася высокочастотные компоненты спектра. Так, на некотором удалении l от источника колебаний амплитуда U_l в сравнении с начальной U_0 составляет $U_l = U_0 e^{-\alpha l}$, где коэффициент поглощения α в большинстве случаев прямо пропорционален частоте $\alpha = \delta f$, δ - коэффициент пропорциональности. В результате форма сейсмического импульса радикально меняется - амплитуды уменьшаются, энергия волны «перекачивается» в хвостовые фазы (рис. 1, з, д), сигнал растягивается и видоизменяется. Сама среда, как видно из приведенных рассуждений и рисунков, принимает только пассивное участие в формировании волнового поля, не привнося в него каких-либо новых колебаний за счет собственного энергетического ресурса. Регистрация отраженных и преломленных волн осуществляется в присутствии различного рода помех, например, кратных отражений (см. рис. 1, а), лишь отчасти устранимых в процессе компьютерной обработки записей. Это приводит к большим трудностям интерпретации полезных волн, особенно в части прогнозирования вещественного состава пород (литологии) и их нефтенасыщенности, так как литологическая и флюидальная (содержание нефти, газа, воды в составе флюида) характеристики разреза определяются, в первую очередь, динамическими - амплитудными и частотными особенностями записей, сильно искаженными действием указанных причин. Отмеченные трудности усугубляются в рамках *старой модели* тем, что породы не обладают собственной энергией и не могут накапливать ее при геодинамических процессах, постоянно идущих в недрах Земли.

Новую модель среды легче всего представить, если вообразить, что хотя бы одно землетрясение уже когда-то произошло и речь идет о повторном возбуждении колебаний. Сплошность среды уже нарушена, есть трещины и микротрещины, есть куски, отдельные, флюиды, заполняющие эти трещины и все пустотное пространство породы - поры, содержащие газовую и жидкую фазу. Таким образом, новая модель представляет собой сложную систему, состоящую из блоков различных размеров, подчиняющуюся определенной последовательности (по М.А. Садовскому [15]). Система открыта, как и составляющие ее отдельные, для энергообмена с окружающей средой. Блоки в системе отделены друг от друга прослойками, сложенными из блоков разных размеров меньшего масштаба. Эта открытая система квазистационарна - в ней идут процессы перераспределения и трансформации энергии (и массы), поступающей извне. Она гетерогенна, энергонасыщенна и фрактальна (с элементами самоподобия упомянутых блоков). Она способна накапливать эту энергию и сохранять в себе некоторое ее количество (в том числе энергию упругих деформаций) в скрытом состоянии и

после устранения непосредственных источников, бывших причиной ее появления. Энергонасыщенность проявляется в виде постоянно действующей сейсмической и акустической эмиссии, причем каждая среда «звучит» по-своему. Распространение волн в такой среде характеризуется рядом особенностей: во-первых, низкочастотные сигналы могут вызывать высокочастотный отклик - расширение спектра идет в обе стороны, и форма записи может оказаться вовсе не такой, как показано на рис. 1, 2, д; во-вторых, слабый сигнал может вызвать сильный отклик; в-третьих, при взаимодействии гармонических волн появляются волны новых частот, кратных основным гармоникам - суммарным и разностным; в-четвертых, скорость волн зависит от амплитуды воздействия [16].

В спокойном состоянии, без «накачки», энергия внутренних напряжений находится в равновесном состоянии до достижения определенного уровня. При дополнительном возбуждении (воздействии внешним физическим полем) может произойти высвобождение накопленной энергии, которая, в том числе и в виде упругого поля, приводит к появлению колебаний, характеристики которых определяются физико-химическими свойствами среды (тела). Если выделить эти колебания из общего волнового поля, то можно повысить достоверность прогноза залежей углеводородов. Особенно усиливается энергия излучения сейсмических колебаний после достаточно длительного (20...30 мин) вибровоздействия на среду - она становится «преобразователем спектра». Доминантные частоты для гравия 8...11 Гц, песка - до 25 Гц, глин - до 4 Гц, нефтегазонасыщенных пород - 2...4 Гц.

Залежи углеводородов находятся чаще всего в зонах разуплотнения, а физические поля (вибровоздействия) порождают дополнительные разуплотнения, локально понижающие давления. При этом трещины раскрываются, а растворенный в жидкости газ выделяется в виде пузырьков, создавая сложную многофазную систему, отличающуюся запаздыванием во времени на передачу механических напряжений, колебаний и пр. Следовательно, собственные колебания такой системы - низкочастотные и низкоскоростные, поэтому в ней возникают, помимо обычных P и S волн «первого рода» (среднечастотных и высокоскоростных), близкие по своему характеру к стоячим P -волны «второго рода».

Структурные напряжения (в условиях отклонения объемов среды от равновесного состояния) приводят к деструкции горных пород, а деструкция, в свою очередь, - к изменению геофизических характеристик среды: уменьшению скорости и увеличению поглощающей способности. Тяготение залежей углеводородов к разломно-трещинным субвертикальным системам (трещинным коллекторам) является причиной возникновения локальных столбообразных зон, наблюдаемых в разных физических полях (магнитном, электрическом, гравитационном, особенно четко в сейсмическом). В итоге, новый образ среды характеризуется активностью, различимостью голоса и тембра звучания разных геологических тел. На этой основе разрабатывается новая технология инфразвуковой сейсморазведки.

Инфразвуковая сейсморазведка. В кратком изложении сущность инфразвуковой сейсморазведки заключается в следующем [17]. Первоначально осуществляется регистрация естественного сейсмического фона (до вибровоздействия). При вибровоздействии попутно с отраженными от упоминавшихся границ сигналами, генерированными полем источника, дополнительно возбуждаются сигналы низкочастотного диапазона. Низкочастотные колебания присутствуют и в поле естественного микросейсмического фона, но после вибровоздействия это поле существенно усиливается. Это происходит потому, что вибровоздействие «провоцирует разрядку» напряженных состояний среды, усиливает энергоотдачу в сторону генерации сейсмических шумов, в том числе и P -волн «второго рода».

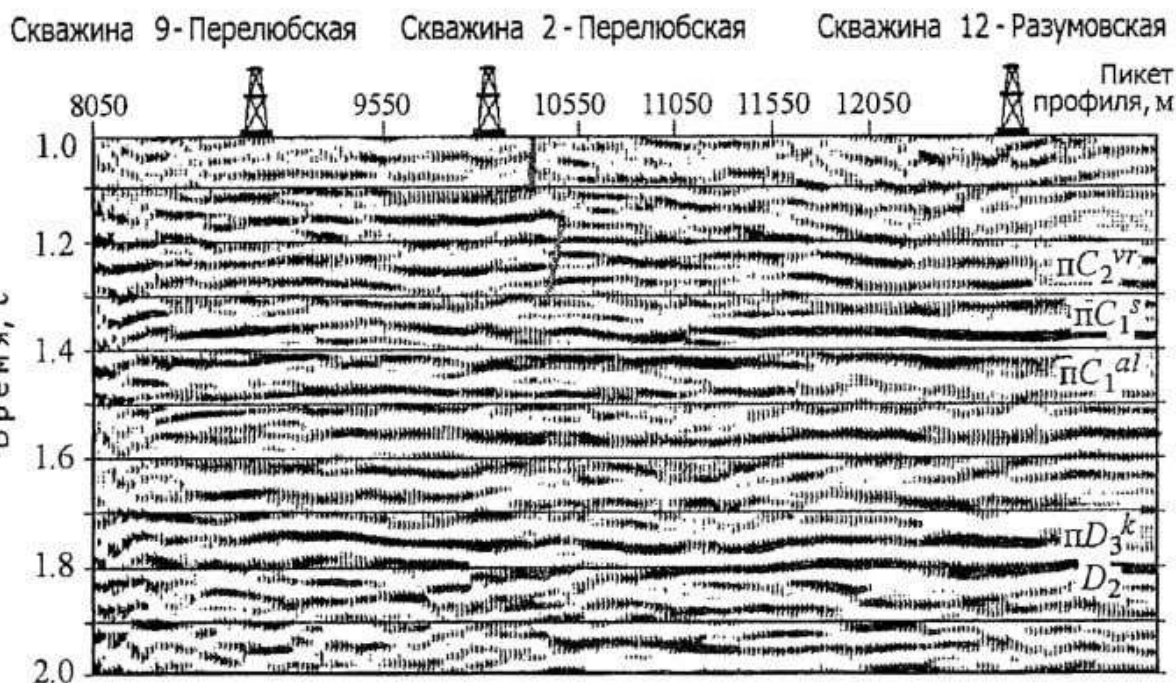


Рис. 2. Фрагмент временного разреза по профилю 199089 Перелюбской разведочной площади. $ПС_2^{vr}$, $ПС_1^s$ и т.д. - стратиграфические индексы отражающего горизонта

На Перелюбской разведочной площади Дальнего Саратовского Заволжья по данным обычной среднечастотной сейморазведки получен типичный сейсмический временной разрез (рис. 2). По этим же данным выделены и исследованы в [17] сигналы инфразвукового диапазона. Рассчитана энергия естественного сейсмического фона в частотном диапазоне 2...4 Гц (рис. 3), для чего использовались полевые сейсмограммы. Спектры рассчитывались в интервале времени 0...0.4 с на тех участках сейсмограмм, где не может быть никаких сейсмических волн, кроме микросейсм. На графике (см. рис. 3) в интервале ПК 10000...11700 значения энергии инфразвуковых частот повышены, а на временном разрезе в этом интервале (район скважины 2-Перелюбская) наблюдается хорошо выраженная зона разрывных нарушений, показанных на рис. 2 жирными вертикальными линиями. Слева и справа выделяются два других участка с повышенными, но менее интенсивными значениями энергии. Один из них (слева

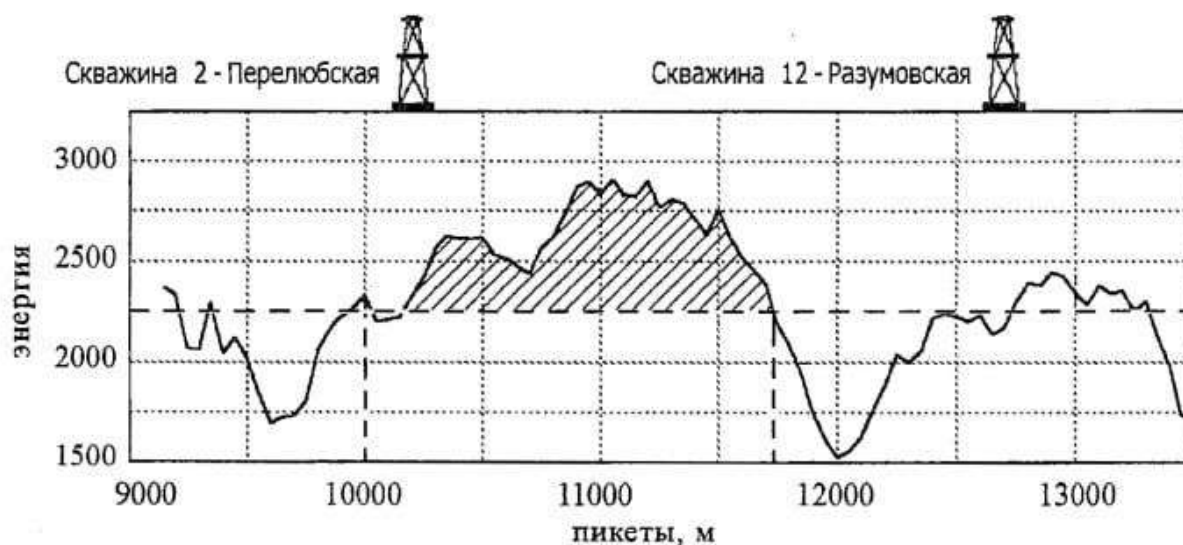


Рис. 3. Изменение интенсивности естественного сейсмического поля в частотном диапазоне 2...4 Гц. Профиль 199089

от ПК 9700) соответствует заложенной под бурение скважине 9-Перелюбской, другой (справа от ПК 12000) - Юргинской структуре.

На разрезе инфразвуковых аномалий, полученном по спецтехнологии обработки, наибольшее число аномалий фиксируется в интервале ПК 10000...12000, что хорошо согласуется с результатами анализа естественного поля. Такое же соответствие есть и с другими участками повышенных значений естественного фона.

В настоящее время скважина 9-Перелюбская пробурена, опробована, и в ее разрезе выделены продуктивные интервалы отложений, намеченные инфразвуковой сейсморазведкой на временах 1.8...1.9 с. Разработчики надеются, что новая технология сейсморазведки, базирующаяся на нелинейных представлениях, станет эффективным аппаратом прямого прогноза нефтегазонасыщенности разреза.

В работе [18], опубликованной журналом «Геофизика» в спецвыпуске, посвященном ОАО «Хантымансийскгеофизика», говорится о природе упомянутых выше субвертикальных зон деструкции, которая определена авторами как «геосолитонная». Отмечено, что при движении ударной волны ее интенсивность изменяется существенно неодинаково в разных направлениях. Быстрее всего ударная волна ослабляется в сторону увеличения плотности, а в сторону резкого уменьшения плотности, напротив, она ускоряется и усиливается. Ускорение ударной волны пропорционально корню квадратному из отношения плотности среды в том месте, где она образуется, к плотности среды в том месте, где она выходит на свободную поверхность. Это приводит к преобладающему субвертикальному направлению зон деструкции горных пород, которое соответствует направлению градиента плотности в осадочных субгоризонтальных отложениях. К таким субвертикальным зонам авторы относят столбообразные аномалии сейсмической записи, характеризующиеся резким падением амплитуд отражений и контролируемые многопластовые залежи углеводородов. Примеры подобных феноменов приведены в названной работе. Они обнаруживают очевидное сходство со структурой некоторых нефтяных месторождений Степновского сложного вала.

Заключение

Приведенные здесь с любезного разрешения авторов [17] экспериментальные данные по опробованию новой технологии сейсморазведки - лучшее подтверждение факта начала проникновения идей нелинейной динамики в геофизическую практику. Вкупе с другими затронутыми результатами исследований в области геодинамики, сейсмологии и сейсморазведки они свидетельствуют об актуальности и перспективности продвижения нелинейных идей в науки о Земле. Активизировать это продвижение можно путем введения синергетических курсов и практикумов в учебные планы по геологическим специальностям и поиском действенных контактов с профессионалами в этой области. Это позволит вывести интуитивные и эмпирические геонаучные построения на уровень создания и исследования математических моделей изучаемых нелинейных процессов и явлений, то есть добиться существенного прогресса в решении сложных прогностических задач геологической науки и практики. Важнейшим аспектом в указанном круге задач является геоэкологический, разработанный наиболее слабо и поэтому особенно нуждающийся в развитии.

Авторами эта проблема разрабатывалась применительно к Научно-образовательному комплексу наук о Земле Саратовского университета, в составе

которого развиваются ряд взаимосвязанных подразделений (НИИ геологии, геологический факультет, Геологический колледж, Лаборатория урбоэкологии) [19,20], в процессе подготовки и апробации «Концепции развития наук о Земле и глобальной экологии в Саратовском университете» [21].

Следует отметить, что именно в СГУ ситуации весьма благоприятствует бурное развитие соответствующих сильных научных школ (в научно-образовательном институте «Открытые системы», на физическом факультете и в НИИ механики и физики). Согласно принятой «Концепции» с целью активизации проникновения «нелинейного» мышления в научно-образовательный процесс предложен и реализуется ряд первоочередных действий. 1. Организован и действует «Общедоступный нелинейный семинар» с привлечением ведущих специалистов университета в области синергетики. 2. Во всех основных научных направлениях научно-образовательного комплекса наук о Земле СГУ инициируется постановка нелинейной тематики, чему способствует изучение явлений бинальности, гомологии и особенностей граничных зон [22]. 3. В программы учебных спецкурсов включаются синергетические элементы с особым вниманием в этой связи к общим геонаучным дисциплинам. Проникновению синергетических идей в науки о Земле весьма способствуют также научные мероприятия междисциплинарной тематики [23-27], на которых представляются и обсуждаются полученные результаты и новые идеи.

Библиографический список

1. Общая и полевая геология / Павлов А.Н., Одесский И.А., Иванов А.И. и др. Л.: Недра, 1991. 463 с.
2. Эпитейн М.Н. Информационный взрыв и травма постмодерна // Звезда. 1999. № 11. С. 216-227.
3. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. М.: Прогресс, 1986. 356 с.
4. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985. 419 с.
5. Данилов Ю.А. Нелинейность // Знание-Сила. 1982, № 11. С. 34.
6. Трубецков Д.И. Колебания и волны для гуманитариев. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997. 342 с.
7. Короновский А.А., Трубецков Д.И. Нелинейная динамика в действии. Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002. 324 с.
8. Синергетическая парадигма. Нелинейное мышление в науке и искусстве. М.: Прогресс-Традиция, 2002. 495 с.
9. Скляр Ю.А. О галактическом варианте геохронологической шкалы // Стратиграфия. Геологическая корреляция. 2004, № 4.
10. Пуцаровский Ю.М. Линейность и нелинейность в геологии // Геотектоника. 1999, № 3. С. 42.
11. Лукьянов А.В. Основные причины самоорганизации геологических процессов // Вопросы нелинейной геологии и геодинамики: Материалы III семинара по нелинейной геологии и геодинамике. М.: Геос, 1998. С. 15.
12. Летников Ф.А. Синергетика геологических систем. Новосибирск: Наука, Сиб. изд-во, 1992. 230 с.
13. Хаин В.Е. От тектоники плит к глобальной геодинамике // Природа. 1995, № 1. С. 42.
14. Соколов Б.А. Автоколебательная модель нефтеобразования. М.: Вестник МГУ. - Сер. 4. Геология. 1990, № 5. С. 5.

15. Садовский М.А. О значении и смысле дискретности в геофизике // Дискретные свойства геофизической среды. М.: Наука, 1989. С. 5.
16. Николаев А.В. Развитие физических основ новых методов сейсмической разведки // Нелинейная геодинамика. М.: Наука, 1994. 215 с.
17. Бутенко Г.А., Глечиков В.А. Прогнозирование нефтегазоносности геологического разреза способом инфразвуковой сейсморазведки // Недра Поволжья и Прикаспия. 2001, вып. 25. С. 71.
18. Бембель Р.М., Бембель С.Р., Мегеря В.М. Геосолитонная природа субвертикальных зон деструкции // Геофизика. 2001, спецвыпуск. С. 36.
19. Иванов А.В. Исторические предпосылки и перспективы развития научно-образовательного комплекса наук о Земле // Известия Саратовского университета. Новая серия. 2001. Т. 1, вып. 1. С. 36.
20. Иванов А.В., Рыскин М.И. Проблемы интеграции науки и образования в формате научно-образовательного комплекса наук о Земле // Недра Поволжья и Прикаспия. 2001, вып. 28. С. 67.
21. Иванов А.В., Рыскин М.И. Реферат концепции развития наук о Земле и глобальной экологии в Саратовском университете. Саратов: СГУ, 2001. 19 с.
22. Папин Ю.С. Биниология, симметрология и синергетика в естественных науках // Биниология, симметрология и синергетика в естественных науках. Тюмень: ТюмГНГУ, 2001. С. 3.
23. Биниальность и гомология - новое направление в геологии: Межвузовский сборник научных трудов / Под ред. Ю.С. Папина. Тюмень: ТюмГНГУ, 1997. 112 с.
24. Вопросы нелинейной геологии и геодинамики. М.: Геос, 1998. 109 с.
25. Дихотомия и гомология в естественных науках: Тезисы докладов международной конференции / Под ред. Ю.С. Папина. Тюмень: ТюмГНГУ, 1998. 108 с.
26. Биниология - новая естественная наука: Межвузовский сборник научных трудов / Под ред. Ю.С. Папина. Тюмень: ТюмГНГУ, 1999. 133 с.
27. Биниология, симметрология и синергетика в естественных науках: Матер. междунар. конф. / Под ред. Ю.С. Папина. Тюмень: ТюмГНГУ, 2001. 130 с.

*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 1.09.03
после доработки 6.10.03*

NONLINEAR DYNAMICS IN EARTH SCIENCES: INFORMATION TO REFLECT ON

M.I. Ryskin, A.V. Ivanov

Recently, Newton principles and partly quant theory dominate in Earth sciences to understand outward things. However, an idea of nonlinear dynamics actively penetrates in various branches of Earth sciences: geophysics, oil geology, geochemistry etc. Geophysics perceives these ideas the most organic. Principles of nonlinear seismic is discussed here as the most indicative example of penetrating ideas of nonlinear dynamics in practice.



Рыскин Михаил Ильич - окончил геологический факультет Саратовского государственного университета (1960). Кандидат геолого-минералогических наук, профессор кафедры геофизики СГУ. Преподает в Лицее прикладных наук и гимназии № 1. Автор более 100 публикаций по вопросам комментирования геофизических методов и физико-геологического моделирования, интеграции образования и науки, проблемам культуры, гуманитарного и экологического образования.



Иванов Алексей Викторович - родился в Саратове (1974), окончил Саратовский госуниверситет (1996) по специальности «геолог-нефтяник», кандидат геолого-минералогических наук по специальности «палеонтология и стратиграфия» (1996), доцент. Директор НИИ геологии Саратовского университета (с 1997), председатель Совета научно-образовательного комплекса наук о Земле СГУ (с 2001), первый заведующий новой кафедрой геоэкологии СГУ (с 2002), профессор кафедры геоэкологии (с 2003). Заместитель главного редактора журнала «Недра Поволжья и Прикаспия», член редколлегии журнала «Известия Саратовского университета. Новая серия», главный редактор издания «Труды НИИ геологии Саратовского университета. Новая серия». Область научных интересов: палеонтология, историческая геоэкология, экологическая геология. Автор и соавтор более 250 работ, в том числе 15 монографий, 8 учебных пособий и научно популярной книги. Трижды «Соросовский доцент».



ВРЕМЯ ВНУТРИ НАС

М. Рабинович

Прелюд

Как долго существует солнечная система? Что будет со вселенной через много миллионов лет?... Почти все из нас могут перефразировать традиционные ответы на эти или подобные вопросы, и я уверен, что в ответах не будет ничего личного. Мало задумывается непрофессионал об этих высоких материях, не волнуют они его по причине полного отсутствия влияния на конкретную отдельно взятую судьбу, а не на цивилизацию вообще. И еще, очень уж далеко ушла наука в развитии абстрактных представлений о пространстве-времени и существующие модели развития вселенной столь изощрены и далеки от интуитивного понимания, что и профессионалы не всегда находят общий язык друг с другом. Пожалуй, единственное, что мы взяли для себя из представлений о времени «вне нас» - это его направленность от прошлого к будущему, где наша жизнь «только миг» между ними.

Другое дело время «внутри нас». Здесь почти каждый думающий человек имеет свою точку зрения, связанную с его конкретным опытом и зачастую далеко уходящую от представлений современной науки. Понимание «времени внутри нас» есть результат взаимодействия самых разных сторон человеческой жизни и опирается и на нейрофизиологию, и на религию, и на поэзию. Автор предлагаемого эссе физик, занимающийся последние десять лет нейродинамикой и моделированием нервных функций. Поэтому, в первую очередь, речь пойдет о вещах, имеющих материальную основу. Однако поэтическое понимание времени внутри нас продвинуто значительно дальше и глубже, чем естественнонаучное и не воспользоваться плодами этого прогресса, мягко говоря, было бы неразумно.

Теперь о жанре. Почему эссе, в чем его прелесть? В вольности стиля и тематической свободе. Никакой тебе обязательности, это не учебник, где определенные вещи нужно изложить с необходимостью. Вольное общение с читателем с порою странным, почти ирреальным, восприятием обратной связи. Эта обратная связь, по-видимому, есть концентрация опыта и интуиции автора, который предвычисляет реакцию той или иной читательской аудитории на сказанное и провоцирует её на вопросы, ответы на каковые автору самому хотелось бы знать. Так вот, по-существу, без всякой генеральной линии, плывут автор и читатель вместе по озеру ассоциаций, вглядываясь в глубину и уважительно переговариваясь друг с другом. Плывут каждый по-своему, стилем, которому названия другого, чем вольный, и придумать-то трудно.

Время и память

Зависимость хода времени внутри нас от температуры души, конечно, вещь тривиальная. Но что нетривиально - это закономерности такой зависимости. Как это ни удивительно, они существуют! Они общие для большинства из нас, несмотря на специфику личного опыта, разный объем и разную насыщенность памяти.

Мне памяти шагренева кожа
Сдаёт из детства образы вразброд.
Дом двухэтажный с лестницей, похожей
На трап, что провожает самолет.
Гремящих самокатов гонки,
Анфиска с квасом под зонтом,
На крыше голые девчонки.
Что раньше было? что потом?

Память о давнем прошлом, действительно, сжимается со временем, однако хранящиеся в ней события не исчезают, но уплотняются. И чем отдаленнее события, тем плотнее их упаковка. Недавние эксперименты позволили описать этот феномен количественно. Как оказалось, плотность событий, то есть того, что происходило с нами и вокруг нас, возрастает экспоненциально при движении в прошлое. Именно поэтому так трудно расположить их правильно на шкале времени. Ближе слишком друг к другу давние события лежат в нашей памяти.

В нейрофизиологии первые принципы вещь чрезвычайно редкая. Вторгшийся в чужой, поначалу, огород физик пытается их искать на основе своего предыдущего опыта и ему иной раз нужна помощь хозяина огорода. А хозяин на вопрос почему же нервная система устроена так, а не иначе, отвечает, как мой добрый знакомый биолог: «Ну, Миша, так природа захотела, гены у нас такие». Вот уж воистину «Так создан мир, мой Гамлет! Так создан мир...». И тем не менее, природа использует многократно уже найденные ею однажды удачные решения. И имеется множество тому подтверждений. Например, система восприятия, распознавания и запоминания запахов у большинства обитающих на Земле существ, в частности, у кузнечика и человека, устроена очень похоже. Таким образом, искать эти принципы задача небезнадежная. По-видимому, и способы хранения времени в нервных системах разных живых организмов также имеют много общего.

Вопросы о том, каким образом память фиксирует временные отметки и как запоминаются интервалы между событиями, очень трудны. Ответы на них связаны с механизмами восприятия времени нейронными ансамблями и трансформацией последовательности событий в то, что на современном языке называется hardware, то есть в устойчивые изменения свойств нейронов и связей между ними. Не так много известно сегодня об этих механизмах, но нет сомнений, что они существуют. Забежим несколько вперед и допустим, что мы знаем, как распределенная во времени информация упаковывается в нашу память. Что изменится в наших взаимоотношениях со временем вне нас? Да ничего. Не хватает чего-то неуловимого для понимания этих взаимоотношений, не говоря уже об управлении ими. И тем не менее.

Есть у Веры Павловой такие строчки:

Возраст замечаешь,
если перестаешь
ему соответствовать:
или обгоняешь,
или отстаешь.

А если соответствовать,
возраста нет.
Только год
и день рождения.
Сколько мне лет?

«Четвертый сон», 2000

Нервная и исполнительная системы изменяются со временем с разной скоростью и в какой-то момент обнаруживаются ножницы между тем, насколько себя ощущаешь и реальностью, то есть насколько можешь. Бывает, конечно, повсякому, но чаще воспринимаешь себя намного моложе, чем должно. И эта разница ускоряет время вне нас невероятно. Не успеваем мы на проносющийся мимо поезд душевных порывов и хотений разных и кажется нам, что время вне нас летит, а планы наши остаются планами. Нет, пожалуй, этот феномен неуловимым не назовешь. Достаточно вспомнить знаменитое «желание-то у меня есть...».

Зайдем с другой стороны:

Чужие берега не кажутся чужими.
Когда ж меня судьба сводила с ними?
С волнением вглядываюсь в лица
И вспоминаю все, что здесь случится.

Память о будущем? Полноте, пахнет серой. Не будем спешить, однако. Память наша хранит не только то, что с нами действительно было, но и то, что могло бы быть - игры воображения, сны... И бывает, что мы попадаем в ловушку собственной памяти. Наступает мгновение, когда совершенно новая ситуация кажется нам до боли знакомой. Мы даже знаем, что будет дальше и наше предвидение сбывается, оставляя мистический осадок. Добавлю, что когда мы сами задействованы в происходящем, память о якобы виденном, как обратная связь, провоцирует наше поведение в нужную сторону, способствуя реализации ожидаемого ответа. Мистика превращается в устойчиво наблюдаемое явление.

Мы перебили себя в момент, когда обсуждали проблему упаковки информации в нашу память. Хорошо. Информация записана. А кто ж ее читает? Кто смотрит на огромное число экранов нашей памяти и выбирает нужное, чтобы использовать в размышлениях и поведении. Я не оговорился, «экранов», действительно, много.

Дело в том, что человек обладает несколькими видами памяти и внутри каждого вида имеются свои специализированные участки, отвечающие за разные стороны нашей активности. Есть, например, генетическая моторная память, определяющая ходьбу или бег, дыхание, сердцебиение. В момент формирования организма информация, взятая из генетической памяти, определяет устройство так называемых генераторов ритма, которые управляют мышцами и, таким образом, ритмическим поведением. Генераторы эти в обыденной ситуации автономны от мозга. Поэтому, если ничего экстраординарного не происходит, мы ходим, бегаем, дышим совершенно автоматически и голова наша свободна для более интересных занятий. И только, когда случается Нечто, ритм сердца сбивается, дыхание учащается.... Здесь уже высшие эшелоны нервной системы вынуждены подключиться и взять под контроль ситуацию, изменив поведение в целом. Ради выживаемости следует пожертвовать автономией управления. Большинству ритмических движений учиться не надо и память об их организации у нас наследственная.

Еще одна способность памяти. Запоминание последовательностей - пути к источнику, стихов и музыкальных мелодий, очередности танцевальных движений и, вообще, любых мастеровых движений - одна из основных функций памяти. В процессе обучения под действием получаемой от наших органов чувств

информации в определенной части мозга устанавливаются специфические связи между нейронами и меняются их свойства. Когда появляется потребность - жажда, приглашение к танцу и т.п. - под влиянием уже внутренних сигналов, возникающих в результате концентрации внимания, обученные нейронные ансамбли, которые в данном случае и есть физическое выражение памяти, генерируют сигналы, обеспечивающие нужную последовательность наших действий. Память о последовательностях превращается в поведение, то есть разворачивается во времени.

Обратимся теперь к более трудным проблемам, о которых поэты думали, наверное, больше, чем нейрофизиологи. Одна из таких проблем - коррелированность времени внутри нас с внешними событиями и внутренним временем наших современников или даже живших до нас.

Согласование времен

Представление о синхронности времени всегда и везде, то есть в любых точках, кажется настолько очевидным, что и доказательств-то не требует. А зря. Абсолютной синхронности не существует, хотя «абсолютное время» имеет смысл в повседневной жизни, где речь идет о небольших расстояниях и медленных движениях. Небольших - по сравнению с космическими, медленных - по сравнению со скоростью света. Именно устранение привычного представления об абсолютности времени позволило Эйнштейну сформулировать идеи специальной теории относительности, которая сейчас проверена самыми разнообразными экспериментами.

Может быть со временем внутри нас все по-другому, в смысле синхронности? Ведь ритмы мозга у людей примерно одинаковы. Да одинаковы, но они здесь не при чем - секунды и доли секунды нас сейчас не волнуют. Речь идет совсем о других масштабах - сутках, годах, а зачастую и обо всей жизни. Время внутри нас зависит от эмоционального восприятия мира, которое возможно и связано с ритмами мозга, но очень уж опосредованно. Поэтому ни о какой синхронности времени, даже между близкими людьми, вроде бы говорить не приходится. Исключением, возможно, являются близнецы. Говорят, что они чувствуют и сопереживают одинаково быстро или одинаково медленно. Здесь нужно остановиться и разделить две вещи - есть *синхронность* и есть *синхронизация*.

Синхронность это совпадение хода разных часов, моментов вдохновения любящих и т.д. Синхронизация же - организация такой синхронности за счет взаимодействия одной системы с другой или воздействия на систему внешнего мира. Многие замечали, что если актеры играют на одном дыхании, то зал заражается жизнью на сцене и люди в зале и на сцене одинаково ощущают ход времени. Сцена и зал синхронизуют друг друга. Это феномен взаимной синхронизации. Подобное же может произойти и в случае, когда воздействие направлено лишь в одну сторону, например, от автора к читателю. При этом читатель и синхронизирующий его автор могут далеко отстоять во времени. Тем не менее, ход внутренних часов автора может синхронизовать ход внутренних часов читателя. При этом связь автора с читателем через текст однонаправленная, и синхронизацию, если она случается, разумно назвать не взаимной, а вынужденной. Используют еще термин захватывание. Живое общение автора, а также музыканта, поэта, священника, гуру с аудиторией может, благодаря синхронизации внутренних часов, перерасти в синхронные движения слушателей.

Конечно, синхронизация возможна не всегда. Полоса синхронизации зависит от того, насколько сильна связь между рассказчиком и слушателем при заданном разбегании внутренних часов. Если разница во внутренних временах слишком

велика, никакие таланты не позволяют автору захватить слушателя и они теряют друг друга. Мне не раз приходилось слышать, что многие тексты, например, Александра Гениса, слишком плотны и потому их трудно читать. Если глагол «читать» заменить глаголом «осмысливать», это безусловная правда. Настроившись на легкое чтение, не успеваешь за эрудицией и ассоциациями автора и никакой синхронизации не происходит. Особенно важна синхронизация с текстом при исполнении стихов. Бывает, что стихи в исполнении профессиональных артистов совершенно не трогают слушателей, автор же с тихим голосом и не очень четкой артикуляцией заставляет зал плакать. Зря профессионал навязывал стиху свое внутреннее время, стиху не свойственное.

Не часто, но случаются в зале люди с независимым мышлением, не согласные с автором по-существу. Убедить их «на ходу» невозможно в силу продуманности и устойчивости их мнений. Тогда о синхронизации говорить не приходится. Мало только таких людей, потому-то массовый гипноз и возможен.

Внутренние часы отсчитывают не дни или минуты, а события. И, что более нетривиально, отношение к ним:

У времени причудливые формы.
А измеряется оно
Гудком состава у платформы,
Неловкими объятьями в кино.

Стиха прерывистым дыханием,
Оставшимся глотком воды.
Твоим, любимая, молчанием
И расстоянием до беды.

Это, когда события происходят и на них реагируешь. А если ничего не происходит:

Там каждый час стирается в уме,
и лет былых бесплотные фигуры
теряются - особенно к зиме,
когда в сенах толпятся козы, овцы, куры.

Бродский, 1963

Может возникнуть ощущение, что синхронность или несинхронность времени внутри нас, таких разных, определяется тем, что происходит вокруг. Если мы живем в одном месте и в одних и тех же условиях, то и часы наши внутренние вроде бы должны синхронизоваться общими для нас событиями. Как говорят в Америке, Yes and No. Каждый наверное замечал, что, когда кинофильм интересен, то пара часов пролетает, как одно мгновение, а если нет - то те же два часа кажутся бесконечными. Но ведь фильм одних захватывает, других - нет. Вот и ответ.

Добавлю, что мы говорим о «согласовании» времен, то есть речь идет о сравнительно слабых воздействиях или взаимодействиях. Они не разрушают систему, а лишь подстраивают ее. Когда же «век волкодав» кидается на Поэта, это уже не согласование, а убийство в духовном или даже в буквальном смысле.

Ощущение и осознание времени

Многие из нас задумываются о времени во всех его смыслах. Проследить же за разнообразием наших отношений со временем, равно осознанных и неосознанных, удобнее всего, опираясь на ансамбль людей пишущих. И в первую очередь, вчитываясь в стихи. Журналистика здесь не к месту - слишком она зависит от дуновения сиюминутных ветров.

Несмотря на единство поэтического пространства, даже у одного автора каждое стихотворение это отдельный мир часто со своим временем. Именно поэтому оно требует для себя простора - один стих на странице. И именно поэтому

требуется временная передышка - интервалы тишины между стихами. Слишком много в каждой строчке и даже каждом слоге, чтобы дать возможность стихам громоздиться друг на друга во времени и пространстве.

Ход времени в стихотворении определяется не столько содержанием и ритмом, сколько авторским ощущением времени, как единого целого. Мандельштаму, например, и принцип причинности не указ. В его восприятии время двунаправленно:

И Шуберт на воде, и Моцарт в птичьей гаме,
И Гете, свищущий на вьющейся тропе,
И Гамлет, мысливший пугливыми шагами,
Считали пульс толпы и верили толпе.
Быть может, прежде губ уже родился шепот
И в бездревесности кружились листья,
И те, кому мы посвящаем опыт, до опыта приобрели черты.

«Восьмистишия», 1934

По-видимому, это от ощущения предопределенности. Такое ощущение порождает связь будущего с прошлым и даже может замкнуть время.

Вчитываясь в стихи, далеко не всегда можно ответить на заданный Пастернаком вопрос «Какое, милые, у нас тысячелетье на дворе?». Вечные темы потому и вечные, что на них атрибуты времени отражаются слабо или не отражаются вовсе:

Зачем я собирал и раздавал
Любовь и нежность. И красавиц ласки.
Я присмотрелся: все мы маски,
Пришедшие на этот карнавал.

Что это, когда это могло быть написано? Да когда угодно. Высказанные здесь мысли инвариантны. Они не зависят от времени. А строфа эта из Экклезиаста в стихотворном переложении Давида Гарбара.

Во многих стихах, где внешнее время отсутствует, пульс внутреннего времени прослушивается очень внятно:

Под раkitой, обвитой плющом,
От ненастья мы ищем защиты.
Наши плечи покрыты плащом,
Вкруг тебя мои руки обвиты.
Я ошибся - кусты этих чащ
Не плющом перевиты, а хмелем.
Ну так лучше давай этот плащ
В ширину под собою расстелим.

Пастернак, «Хмель», 1947

Пастернак выстраивает последовательность событий и действий. Всегда понятно, где причина, где следствие. Этому помогают обильно присутствующие глаголы, что типично для большинства его стихов. Вспомним знаменитые «Гамлет» и «Зимняя ночь». А вот Мандельштам:

Звезда с звездой - могучий стык,
Кремнистый путь из старой песни,
Кремня и воздуха язык.
Кремень с водой, с подковой перстень.
На мягком солнце облаков
Молочный грифельный рисунок -
Не ученичество миров,
А бред овечьих полусонок.

«Грифельная ода», 1923, 1937

Ни одного глагола! У Мандельштама, особенно раннего, мир представлен мгновенными снимками, через которые проглядывает вечность. Возникает ощущение, что свидетель описанного живет бесконечно долго и ход времени для него особого значения не имеет. Нечто похожее характерно и для поэзии Бродского. Как я прочитал у Михаила Лотмана (Мандельштам и Пастернак, Tallinn, Aleksandra, 1995), - «Отказ от времени, как основного конструктивного принципа, в пользу пространства был для Мандельштама важен чрезвычайно. При этом он опирался на идеи А.Бергсона». Другими словами, Мандельштам не представляет в стихах хода времени сознательно. О какой связи с внутренними часами тут может идти речь? Так он воспринимает время внутри вечности. Как говорится, богам позволено.

Игра

Игра, как вариант жизни, подбрасывает полешек в костер размышлений о времени «внутри нас». Не только в смысле возвращения в детство и возобновления возможности подгонять граничные условия под наши желания, но и буквально позволяя неспешно думать и чувствовать без всяческих действий. В реальности для корректировки нашего поведения необходима обратная связь через среду: поведение - окружающая среда - органы чувств - мозг - поведение. Во внутренней игре подобная обратная связь может не выходить за пределы нервной системы, то есть поведение может быть мнимым, а ощущения - спровоцированными воображением. Это дает нам благодарную возможность многократно проигрывать варианты жизни и ... даже приблизиться к пониманию сознания.

Временные масштабы такой внутренней игры зависят только от нашей эмоциональной заряженности и уровня воображения. Именно в игре мы забредаем иной раз за недозволенную границу между бытием и небытием, задумываясь над ее непостижимостью. Здесь вопрос о временных масштабах даже и не возникает.

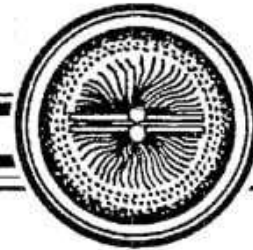
Расставаясь, мне хочется пожелать, дорогой читатель, чтобы у нас с Вами были возможности и время еще поразмышлять на эту удивительную тему о времени внутри нас.

*Сан-Диего, Калифорния, США-
Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 02.10.2003



Рабинович Михаил Израилевич - родился в Горьком (1941), окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1962). Работает в Институте прикладной физики РАН, Нижегородском государственном университете, а также в Институте нелинейных наук, Сан-Диего, США. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1967) и доктора физико-математических наук (1973) в области теории колебаний и волн. Автор монографий «Введение в теорию колебаний и волн», которая выдержала три издания, «Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems», «Nonlinearities in Action: Oscillations, Chaos, Order, Fractals», «Introduction to Nonlinear Dynamics for Physicists», более двухсот статей и обзоров в областях динамической теории турбулентности в жидкости, хаотической динамики радиофизических систем, пространственно-временного хаоса и порядка, нелинейных волн в неравновесных средах и др. Член редколлегии журналов «International Journal of Bifurcation and Chaos», «International Journal of Nonlinear Science Today», «International Journal of Nonlinear Science», «International Journal of Statistical Physics», Изв. вузов. «Радиофизика». Член Американского физического общества. Автор двух поэтических сборников. E-mail: mrabinovich@ucsd.edu



Изв. вузов «ПНД», т.11, № 6, 2003

Синергетика: от прошлого к будущему

СИНЕРГЕТИКА И ИНФОРМАЦИЯ

Динамическая теория информации

Д.С. Чернавский

© Д.С. Чернавский, 2001, 2004
© Послесловие: Г.Г. Малинецкий, 2004
© Едиториал УРСС, 2004
М.: Едиториал УРСС, 2004. 288 с.
ISBN 5-354-00241-9

В книге обсуждаются особенности синергетики как науки и ее математические и методологические аспекты. Отображены процессы возникновения информации и эволюции ее ценности. В качестве примеров рассмотрены: вопрос о происхождении жизни и генетического кода, проблема развития организма, а также процессы мышления и творчества. Широко используется метод математического моделирования. Для облегчения восприятия приведено краткое изложение основ теории динамических систем в форме, доступной для людей, не имеющих специального математического образования. Второе издание дополнено: обсуждается приложение синергетики к описанию исторических событий и включена глава «Информационная сущность денег».

Для широкого круга читателей, интересующихся новыми тенденциями в современной науке и проблемами интеграции точных, естественных и гуманитарных наук.

Введение

Двадцатый век войдет в историю как время увлечений и разочарований. Это относится и к революциям, и к социальным идеям, и к науке и технике. Начался век с взрыва индустрии, в конце его мы оказались у края экологической катастрофы, порожденной той же индустрией.

В первой половине века были построены две фундаментальные теории: квантовая механика и теория относительности. Эти открытия повлияли не только на физику, но и на науку в целом. Однако они не привели к интеграции наук: физика осталась физикой, а биология - биологией. Более того, с появлением квантовой механики возникло и укрепилось мнение о том, что *единого подхода в науке вообще быть не может.*

Это мнение отражено в высказывании одного из создателей квантовой механики Нильса Бора о том, что описать процессы, протекающие в окружающем нас мире, с помощью одного языка невозможно. Необходимы разные описания, в каждом из которых яснее проявляются те или иные особенности изучаемого явления. Сейчас можно с уверенностью сказать, что великий Нильс Бор на этот раз ошибся. Жизнь показала, что *возможен и даже необходим единый подход*, в рамках которого ясно проявляются различные особенности явления. Именно на это претендует сейчас синергетика, использующая язык теории нелинейных динамических систем.

В середине века в биологии был открыт генетический код, а в физике открыт динамический хаос и осознана роль, которую играют неустойчивости в природе. В результате в конце века последовало взрывное развитие биологических и информационных технологий. Эти события тесно связаны друг с другом, чему, собственно, и посвящена книга.

Появилась потребность в описании всех явлений природы с единой точки зрения, или, иными словами, в интеграции наук. Возникло новое научное направление - синергетика, в которой точные, естественные и общественные науки рассматриваются на равных правах.

При этом выяснилась необходимость ревизии некоторых ключевых понятий, употребляемых в точных науках, таких как: причина и следствие, замкнутая система, бесконечно большое и т. п. (таково, по крайней мере, мнение автора). Цель ревизии состоит отнюдь не в отрицании основных положений точных наук. Цель в другом - сформулировать их так, чтобы они не вступали в противоречие с явлениями природы (включая живую).

У части ученых ревизия понятий вызывает чувство протеста, разочарования и дискомфорта. У других, напротив, возникает творческий подъем, поскольку появляется возможность взглянуть на мир в целом (включая информатику и биологию) по-новому и с единой точки зрения. Наука снова становится интересной.

В книге отражены и разочарования, и увлечения. В какой мере это удалось сделать - судить читателю.

Несколько слов о структуре книги.

Начинается она с определения основных для информатики понятий - информация и ценность информации, данных в первой главе. Оказывается, что и этот первый шаг отнюдь не тривиален, в том числе и в методологическом отношении.

Вторая глава посвящена явлению неустойчивости, которое играет фундаментальную роль в природе. Оно лежит в основе динамического хаоса, необратимости процессов во времени (т.е. «стрелы времени»), обеспечивает возможность свободного выбора (генерации информации) и самоорганизации развивающихся систем. Оказывается, что оно же, явление неустойчивости, заставляет задуматься над ревизией привычных понятий.

В третьей главе обсуждаются процессы генерации информации и эволюции ее ценности. Центральным здесь является вопрос о возникновении цели в динамических системах. Вопрос не простой, поскольку именно способность к целеполаганию отличает живые системы от неживых.

В последующих главах рассмотрены приложения динамической теории информации к развивающимся системам, преимущественно биологическим. Это не случайно, поскольку именно в живой природе процессы генерации информации проявляются наиболее ярко. Рассмотрены проблемы возникновения жизни, биологической эволюции, развития сложного организма и, наконец, процессы генерации и обработки информации в нервных сетях. Последние связаны с проблемами мышления и творчества.

В последней главе обсуждаются некоторые методологические аспекты синергетики, связанные с пересмотром фундаментальных понятий.

Казалось бы, все это можно изложить, не утруждая себя и читателей математическими выкладками. Тем не менее в книге много места уделено математическим методам. Более того, во второй главе специально изложены основы теории динамических систем. Автор старался сделать это на уровне, доступном широкому читателю, включая школьника. (Исключение представляет раздел 2.4, который предназначен для людей, владеющих квантовой механикой. Этот раздел включен, поскольку в нем идет речь об актуальной и пока еще дискуссионной проблеме, касающейся «стрелы времени» в квантовой механике.)

Считаю, что такой экскурс в математику не только полезен, но и необходим для понимания последующего, а также для того, чтобы слова «интеграция наук» не превратились в пустой звук.

Понимаю, что представители гуманитарных наук при первом чтении этот раздел пропустят - и правильно сделают.

Надеюсь на то, что некоторые из них заинтересуются, что же это за математика, которая подводит к ревизии понятий, претендует на описание процесса творчества, мышления и т. д. Тогда при втором чтении они заглянут в этот раздел - и тоже правильно сделают.

Очень надеюсь, что отдельные представители творческой интеллигенции увлекутся настолько, что будут использовать математику в своих творческих озарениях. На наш взгляд, такие поступят мудро.

Понимаю, что представители точных наук при первом чтении этот раздел пропустят - сочтут, что они это знают и для них это слишком просто. И это тоже правильно.

Надеюсь на то, что при втором чтении (если такое желание возникнет) они туда заглянут - и тоже не ошибутся. Истина всегда проста и конкретна, неожиданные и важные выводы, порою, следуют из решения простых задач простыми методами.

Наконец, считаю, что студенты и школьники должны прочитать этот раздел при первом чтении, поскольку в других руководствах по теории динамических систем этот материал изложен более строго, но менее наглядно и лаконично.

Интеграция наук - путь не легкий, нужны совместные усилия, совместные действия. Напомним, по-гречески совместные значат «син», а действия - «эргос», поэтому и наука называется - синергетикой.

В книге много места уделено оригинальным работам автора. Это естественно и об этом можно было бы и не упоминать, поскольку почти все авторы поступают так же, и это тоже, видимо, правильно.

Оглавление

От редакции

Введение

Глава 1. Основные понятия динамической теории информации. 1.1. Определения понятия «информация». 1.1.1. Количество информации. 1.1.2. Ценность информации. 1.2. Рецепция и генерация информации. 1.2.1. Иерархия информационных уровней. 1.2.2. Условная и безусловная информация. 1.3. Макро и микроинформация, ошибочность термодинамической трактовки информации

Глава 2. Устойчивость динамических систем и проблема необратимости. 2.1. Динамические уравнения и фазовые портреты нелинейных систем. 2.2. Хаотические состояния, необратимость и рост энтропии. 2.3. Проблема необратимости в квантовой механике. 2.3.1. Динамическая и параметрическая устойчивость квантово-механических систем. 2.3.2. Наблюдаемые величины в структурно неустойчивых квантово-механических системах. 2.4. Распределенные динамические

системы. 2.4.1. Образование фронта. 2.4.2. Диссипативные структуры. 2.5. Что такое самоорганизация, синергетика и кибернетика

Глава 3. Модели генерации ценной информации. 3.1. Перемешивающий слой и его свойства. 3.2. Информационные системы. 3.3. Модели генерации ценной информации, проблема целеполагания. 3.4. Эволюция ценности информации, прогностическая и конъюнктурная ценности. 3.4.1. Асимптотическая ценность. 3.4.2. Конъюнктурная и прогностическая ценности

Глава 4. Информационные процессы в биологии. 4.1. Проблема возникновения жизни. 4.2. Ранние стадии биологической эволюции. 4.2.1. Молекулярные аспекты механизма авторепродукции. 4.2.2. Гиперцикл и генетический код. 4.3. Возникновение биологической асимметрии. 4.4. Возникновение биологического разнообразия и проблема темпов биологической эволюции

Глава 5. Информационные аспекты процесса развития организма. 5.1. Принципы онтогенеза. 5.2. Математические модели онтогенеза (синергетический подход). 5.3. Математическая модель коллективного поведения социальных амеб *Dictiostellium discoideum* (Dd)

Глава 6. Обработка информации в нейросетях и проблемы мышления. 6.1. Основные свойства процесса мышления. 6.2. Экскурс в теорию распознавания. 6.3. Экскурс в теорию нейросетей. 6.4. Мышление и распознавание образа

Глава 7. Методологические аспекты синергетики. 7.1. Методология интеграции наук, «всеединство», «универсальный эволюционизм» и «физический редукционизм». 7.2. Синергетика и логика. 7.3. Порядок и хаос, логика и диалектика. 7.4. Порядок и хаос в обществе (проблемы этики)

Глава 8. Информационная сущность денег. 8.1. Особенности денег как информации. 8.2. Взаимодействие валют. 8.3. Базовая модель динамики денежных масс. 8.3.1. Модели динамики «финансовых пузырей». 8.3.2. Модель взаимодействия валют

Заключение

Синергетика, информация, судьба (Послесловие редактора) *Г. Г. Малинецкий*

Литература

Последний процент

Из послесловия редактора

Один из выдающихся исследователей XX века, занимавшихся химической кинетикой и квантовой механикой, теорией взрыва и астрофизикой, элементарными частицами и космологией, примерно так говорил об освоении новых областей и работе в них: «Труднее всего даются первые 10% в любой дисциплине. Следующие 80% - одно удовольствие. Следующие 9% - тяжелы. А когда дошел до последнего процента, то лучше переходить в другую область».

На самом деле и уровень научной дисциплины, и ее зрелость определяются тем, сколько исследователей и насколько успешно трудятся над этим самым оставшимся процентом. И в этом смысле тридцать лет активного развития синергетики привели к значимым результатам.

Если в семидесятые годы в первых «синергетических книжках» Герман Хакен писал о том, что развитый подход позволяет взглянуть на многое с единой точки зрения, осмыслить и упорядочить, то сейчас ситуация иная. Сейчас, опираясь на идеи и представления синергетики, исследователи все чаще берутся за тяжелые открытые проблемы науки, относящиеся к этому самому 1%.

Примером может служить концепция И. Пригожина, связанная с новым подходом к объяснению «стрелы времени». Это выяснение, на каком уровне и почему возникает необратимость. По мнению недавно ушедшего от нас Ильи Романовича, одного из отцов-основателей синергетики, необратимость лежит уже на микроуровне, на уровне фундаментальных процессов¹.

Другая принципиальная проблема, в решении которой, возможно, синергетике суждено сыграть принципиальную роль, - теория возникновения

¹ Пригожин И., Стенгерс И. *Время. Хаос. Квант.* К решению парадокса времени. М.: УРСС, 2003.

сознания. По мнению выдающегося математика Р. Пенроуза, существующих физических представлений для объяснения этого феномена недостаточно. Р. Пенроуз взглянул на сознание с позиций теории вычислений и пришел к выводу, что «разум, наделенный сознанием, просто не может работать подобно компьютеру, несмотря на алгоритмическую природу многих составляющих нашей умственной деятельности». Он выдвинул гипотезу о новом квантовом эффекте - объективной редукции, играющем, по его мысли, ключевую роль в работе мозга и приводящем к кардинальным различиям между мозгом и компьютером².

Эта книга Дмитрия Сергеевича, как и две упомянутые работы, относится к тому самому 1%. В начале девяностых годов Никита Николаевич Моисеев пригласил меня на свою школу, которую он проводил под Ижевском. Там было много интересного, но один разговор меня удивил и запомнился. Я спросил Никиту Николаевича, какие проблемы он считает наиболее интересными и важными в нашей науке. Он отвечал примерно так: «Если бы я был молодым и чувствовал большие силы, сосредоточил бы усилия на двух задачах. Первая - проблема турбулентности. Между колмогоровской статистикой и простейшей динамикой с одномерными отображениями и системой Лоренца должно быть что-то еще. Более конструктивное, но тоже достаточно простое. Вторая проблема - это возникновение информации. В начале все можно описывать в терминах концентраций и скоростей. А на более высоком уровне видно, что без информации уже не обойтись. Но ведь где-то появляются системы достаточно простые, но уже «информационные». Думаю, что эта проблема как-то связана с несимметрией правовращающих и левовращающих молекул в живом».

На мой взгляд, эта книга в определенной степени отвечает на второй вопрос, поставленный Н. Н. Моисеевым.

Эта книга является очень многим. Поэтому, наверное, проще вначале сказать, чем она *не является*.

Во-первых, она не является учебником. Несмотря на простоту и ясность многих глав, это научная работа, а не изложение бесспорных истин, устоявшихся взглядов, классических результатов, каковые обычно излагают студентам. Тем она и интересна. И поэтому ждет ее, вероятно, тоже судьба научной работы. Что-то будет со временем отброшено, как неверное или не оправдавшее надежд. Что-то даст ростки и всходы в будущем. А что-то действительно войдет в учебники, а может быть (чем черт не шутит) и в то, что «стыдно не знать». На днях мне довелось слышать разговор студентов факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ и биофака. «Вычислители» толковали, что только олухи могут не знать тезиса Тьюринга и его машины, а биологи настаивали, что только невежды не знают модели Тьюринга. Примирило их замечание одного из присутствовавших, что «в каждой науке есть свой Тьюринг» (не иначе это был студент философского факультета).

Во-вторых, это не работа, создающая «информационную синергетику». Само создание «информационной синергетики», «медицинской синергетики», «социосинергетики», «синергетики материаловедения» и прочих, и прочих было бы очень грустно. Вспомним, что с похожих вещей начинался кризис кибернетики. Единство, широкий взгляд, общий подход дались очень нелегко. Поэтому не стоит целое разбивать на осколки, даже если на первый взгляд игра стоит свеч. Синергетика ведь и занимается тем «целым», которое имеет свойства, отсутствующие у частей. Естественно предположить, что это относится и к ней самой.

В-третьих, эта книга не итог, не монумент, не тому подобные вещи. Прежде

² Пенроуз Р. Новый ум короля. М.: УРСС, 2003.

всего, это постановка вопросов. Много в ней острого. Оригинального и поэтому небесспорного. Читателей же я могу ободрить и успокоить. Зная энергию, молодость и оптимизм Дмитрия Сергеевича, а также уровень оплаты профессоров и научных сотрудников, могу сказать, что впереди у него (а соответственно, и у нас с вами) еще очень много идей, работ, конференций. Как-то на одной из них коллега объяснял нам, что великого Баха мы знаем в основном из-за мизерности оплаты композиторского труда в те времена и жестких условий его контракта (он должен был каждую неделю сочинять новое произведение), его ответственного отношения к родным и близким и отсутствия пенсий. И ведь как-то не задумываешься, что многие шедевры написаны классиками «по хоздоговору» в период безденежья.

Г.Г. Малинецкий

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Обложка художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, О.Н. Строгановой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Подписка на II полугодие 2004 года
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498,
стоимость подписки на II полугодие 150 руб.

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам
осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж»
при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136
Банковские реквизиты
р/с № 40603810900000000378 в ЗАО «Экономбанк» г. Саратова,
БИК 046311722, кор.счет банка 30101810100000000722

Правила подписки за рубежом на сайте: <http://www.periodicals.ru>

Сдано в набор 20.04.04. Подписано к печати 20.05.04. Формат 70x108/16
Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная. Гарнитура Латинская
Усл. печ. л. 14,25(10,15). Уч.-изд. л. 13,0. Тираж 200. Заказ 338

Издательство ГосУНЦ «Колледж». Лицензия ЛР №020773 от 15.05.98
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел. (845-2)523864, факс (845-2) 523864
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru
<http://cas.ssu.runnet.ru>

Отпечатано на ризографе GR 3750 издательства ГосУНЦ «Колледж»

© Издательство ГосУНЦ «Колледж» 
© Оформление художника Д.В. Соколова, 2004



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Saratov University, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

A.S. Dmitriev, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow

S.P. Kuznetsov, Professor, Saratov University, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

P. S. Landa, Professor, Moscow University

G.G. Malinetskii, Professor, Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow

O.V. Rudenko, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Moscow University

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, PhD, Institute of Applied Physics of RAS, Nizhny Novgorod

V.G. Yakhno, Professor, Institute of Applied Physics of RAS, Nizhny Novgorod



Жизнь нашу можно удобно сравнивать со своенравною рекою, на поверхности которой плавают челны, иногда укачиваемый тихоструйною волною, нередко же задержанный в своем движении мелью и разбиваемый о подводный камень. — Нужно ли упоминать, что сей утлый челн на рынке скоропреходящего времени есть не кто иной, как сам человек?

Козьма Прутков