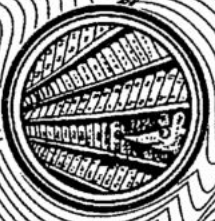


Трикладная Деллинейная Динамика





ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СО ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, ведущий научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

А.С. Дмитриев, ведущий научный сотрудник, Институт радиоэлектроники РАН, Москва

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, СО ИРЭ РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Г.Г. Малинецкий, профессор, заместитель директора, Институт прикладной математики РАН, Москва

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

О.В. Руденко, профессор, Московский государственный университет

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В.К. Юлпатов, старший научный сотрудник, Института прикладной физики РАН, Нижний Новгород

В.Г. Яхно, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 11, № 4-5, 2003, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Балякин А.А.* Исследование хаотической динамики кольцевого нелинейного резонатора при двухчастотном внешнем воздействии 3
- Кузнецов А.П., Милованов С.В.* Синхронизация в системе с бифуркацией слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов 16
- Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Анализ процессов возбуждения хаотических колебаний во взаимосвязанных генераторах с фазовым управлением . . 31
- Музычук О.В.* Броуновская диффузия в симметричном бимодальном потенциале: кумулянтный подход 44
- Фролова Н.Б., Четвериков А.П.* Влияние внешних факторов в модели нервной регуляции сердечного ритма 51

АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

- Акопов А.А., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В., Матюшкин Д.Д.* Кластерная синхронизация в неоднородной автоколебательной среде 64
- Акчурун Г.Г., Селиверстов Г.А., Акчурун Г.Г. мл.* Нелинейно-динамический отклик ансамбля аксонов, возбуждаемых регулярной последовательностью электрических импульсов *ex vivo* 74
- Иванова А.С., Кузнецов С.П.* Волна кластеризации в цепочке систем, каждая из которых содержит набор элементов с внутренней глобальной связью . . 80

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ДЕЙСТВИИ

- Ласт Е.В., Сычева Э.В., Фрисман Е.Я.* Воздействие нелинейного промысла на динамику природных популяций 89

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

- Гамаюнов Ю.Г.* Резонансные эффекты и динамика интенсивного электронного пучка при учете поперечных тепловых скоростей электронов . . . 106
- Корниенко В.Н., Привезенцев А.П.* Фрактальное броуновское движение в дискретных моделях виртуального катода 114

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

- Астафьев Г.Б., Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова А.Е.* О переходных процессах в отображении Эно. Часть I. Периодическая динамика . . . 124

КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ

- Stochastic dynamics of reacting biomolecules. *W. Ebeling, L. Schimansky-Geier, Yu. Romanovsky, eds* 148
- Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Колебания и волны 151

PERSONALIA

- Памяти друга. *Трубецков Д.И.* 160

DEPARTMENT OF EDUCATION OF RUSSIAN FEDERATION

Izvestiya VUZ

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

scientific-technical journal

published since 1993

Published 6 times a year

Vol.11, № 4-5, 2003, Saratov

CONTENTS

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Investigation of chaotic dynamics of a nonlinear ring cavity under two-frequency external driving. *A.A. Balyakin* 3
- Synchronization in the system with both stable and unstable limit cycles collision bifurcation. *A.P. Kuznetsov, S.V. Milovanov* 16
- Analysis of excitation processes of chaotic oscillations in coupled PLLs. *V.V. Matrosov, D.V. Kasatkin* 31
- Brownian diffusion in the symmetrical bimodal potential: cumulant approach. *O.V. Muzychuk* 44
- Influence of external factors in a model of neural control of the heart rate. *N.B. Frolova, A.P. Chetverikov* 51

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

- Cluster synchronization in inhomogeneous autooscillation medium. *A.A. Akopov, T.E. Vadivasova, V.V. Astakhov, D.D. Matyushkin* 64
- Nonlinear dynamic response of axons ensemble excited by regular sequence of electrical impulses ex vivo. *Garif G. Akchurin, George A. Seliverstov, George G. Akchurin* 74
- Wave of clusterization in a chain of coupled cells each of which is composed of a set of globally coupled elements. *A.S. Ivanova, S.P. Kuznetsov* 80

NONLINEAR DYNAMICS IN ACTION

- Influence of a nonlinear trade on natural populations' dynamics. *E.V. Last, E.V. Sycheva, E.Ya. Frisman* 89

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Resonance-effects and dynamics of intensive electron beam in the presence of transversal thermal electron velocities. *Y.G. Gamayunov* 106
- Fractional Brownian motion in virtual cathode discrete models. *V.N. Kornienko, A.P. Privezentsev* 114

METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

- Transient processes in Hénon map. Part I. Periodical dynamics. *G.B. Astafyev, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov, A.E. Khramova* 124

BOOK REVIEW

- Stochastic dynamics of reacting biomolecules. *W. Ebeling, L. Schimansky-Geier, Yu. Romanovsky, eds* 148
- D.I. Trubetskov*. Introduction to sinergetics. Oscillations and waves. 151

PERSONALIA

- In memory of the Friend. *D.I. Trubetskov* 160



ИССЛЕДОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ КОЛЬЦЕВОГО НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАТОРА ПРИ ДВУХЧАСТОТНОМ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

А.А. Балякин

Рассматривается сложная динамика кольцевого нелинейного резонатора, содержащего среду с кубичной фазовой нелинейностью, при двухчастотном внешнем воздействии. Получена система связанных отображений Икеды, описывающая динамику амплитуд спектральных компонент. Проанализированы стационарные режимы колебаний и условия их устойчивости. Представлены результаты численного исследования сценариев перехода к хаосу.

Введение

Кольцевой нелинейный резонатор под внешним воздействием относится к числу наиболее популярных моделей нелинейной динамики [1-4]. Особое внимание этой проблеме уделяется в нелинейной оптике, где данная модель впервые была рассмотрена в работах Икеды и соавторов [5-8]. Разнообразные нелинейные явления, такие как мультистабильность и различные сценарии перехода к хаосу были изучены как теоретически, так и экспериментально [5-15]. Эти исследования представляют несомненный практический интерес в связи с перспективами использования кольцевых нелинейных резонаторов в качестве логических элементов в вычислительной технике [13] и устройств для защищенной передачи информации [14,15]. Отметим, что аналогичные системы могут быть реализованы не только в оптическом, но и в микроволновом диапазоне [16].

На рис. 1 представлено схематическое изображение оптического кольцевого нелинейного резонатора. Система возбуждается внешним сигналом $E_0(t)$. В случае гармонического входного сигнала при некоторых упрощающих предположениях (рассматривается динамика медленно меняющейся амплитуды сигнала, не учитываются эффекты дисперсии и поглощения в нелинейной среде, пренебрегают дифракцией светового поля в резонаторе и инерционностью нелинейной среды по сравнению с временем запаздывания поля при обходе резонатора) для описания системы можно получить точечное отображение

$$A_{n+1} = A_0 + \rho A_n \exp(i(|A_n|^2 + \varphi)). \quad (1)$$

Здесь A_n - амплитуда сигнала после n -го прохода по резонатору; A_0 - постоянная



Рис. 1. Схематическое изображение кольцевого нелинейного резонатора под внешним воздействием

амплитуда внешнего сигнала, возбуждающего резонатор; ρ - модуль коэффициента отражения ($0 < \rho < 1$); ϕ - линейный набег фазы волны за время прохода по резонатору. Для определенности на рис. 1 изображена оптическая система, однако отображение (1) может быть получено для кольцевого резонатора любого типа, содержащего среду с кубичной фазовой нелинейностью.

Динамика отображения (1) исследована с исчерпывающей подробностью (см., например, [3,13]). Показано, что при достаточно большой мощности падающего излучения периодические колебания на частоте внешнего воздействия становятся неустойчивыми, и в системе возникают пульсации с периодом, равным удвоенному времени запаздывания. Это явление получило название неустойчивости Икеды. Дальнейшее увеличение амплитуды внешнего воздействия приводит сначала к переходу к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, а затем к трансформации фейгенбаумовского критического аттрактора в хаотический аттрактор Икеды, имеющий характерную спиральную конфигурацию [3,7].

В настоящей работе рассматривается случай, когда внешний сигнал $E_0(t)$ является полигармоническим, то есть его спектр содержит несколько дискретных составляющих $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$

$$E_0 = \sum_{j=1}^n A_{0j} \exp(i\omega_j t),$$

где $A_{0j} = \text{const}$. В разделе 1 показано, что в данном случае динамика медленно меняющихся амплитуд спектральных компонент описывается системой связанных отображений Икеды. В разделе 2 обсуждаются стационарные режимы колебаний и условия их устойчивости в случае двухчастотного воздействия. В разделе 3 приведены результаты численного моделирования процессов перехода к хаосу. Показано, что добавление второго сигнала качественно меняет поведение системы по сравнению со случаем одночастотного воздействия. Таким образом, варьируя амплитуду и фазу одной из спектральных компонент, можно эффективно воздействовать на характер колебаний другой компоненты, причем управляющий сигнал может быть достаточно слабым. Некоторые предварительные результаты были представлены в работах [17,18].

Отметим, что аналогичная задача уже рассматривалась ранее в работах [11] и [19]. Однако в этих работах не было проведено подробное изучение режимов сложной динамики и хаоса в широком диапазоне параметров.

1. Связанные отображения Икеды

Покажем, что при многочастотном внешнем сигнале динамику системы можно описать при помощи связанных отображений Икеды. Используем гамильтоновский формализм, который является одним из наиболее универсальных в теории нелинейных волн (см., например, [20,21]). Гамильтониан системы с кубичной фазовой нелинейностью можно записать в виде

$$H = H_0 + H_{\text{int}} + \dots,$$

$$H_0 = \int \omega(k) a_k a_k^* dk,$$

$$H_{\text{int}} = 1/2 \int T_{k_1 k_2 k_3 k_4} a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3} a_{k_4} \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) dk_1 dk_2 dk_3 dk_4,$$

где a_k - фурье-амплитуда волны с волновым числом k , δ - дельта-функция Дирака. Рассмотрим поле волны в виде многочастотного пакета

$$E = \sum_{j=1}^n A_j(x, t) \exp(i(\omega_j t - k_j x)), \quad (2)$$

причем амплитуды A_j считаются медленно меняющимися, а частоты ω_j связаны с волновыми числами k_j дисперсионными соотношениями $\omega_j = \omega(k_j)$. Для простоты будем полагать, что эти частоты не находятся в резонансных соотношениях. Также не будем учитывать дифракцию поля и инерционность нелинейности. В этом случае, как показано в работе [22], динамика амплитуд A_j подчиняется системе связанных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ)

$$i(\partial A_j / \partial t + V_j \partial A_j / \partial x) + (\omega''_j / 2) \partial^2 A_j / \partial x^2 + (\beta_{jj} |A_j|^2 + \sum_{j \neq i} \beta_{ji} |A_i|^2) A_j = 0. \quad (3)$$

В уравнениях (3) $V_j = d\omega/dk$ - групповые скорости, $\omega''_j = d^2\omega/dk^2$ - параметры дисперсии групповых скоростей, а коэффициенты β_{jj} , β_{ji} определяются следующим образом

$$\beta_{jj} = -2T_{k_j k_j k_j k_j}, \quad \beta_{ji} = -(T_{k_j k_i k_i k_j} + T_{k_j k_i k_j k_i} + T_{k_i k_j k_j k_i} + T_{k_i k_j k_i k_j}). \quad (4)$$

Система связанных НУШ (3) содержит два сорта нелинейных слагаемых. Первые, пропорциональные $|A_j|^2 A_j$ отвечают эффектам фазовой самомодуляции, вторые, пропорциональные $|A_i|^2 A_j$ при $i \neq j$ - эффектам фазовой кросс-модуляции, то есть перекрестного нелинейного взаимодействия различных спектральных компонент [23]. Отметим, что вклад кросс-модуляции в нелинейный набег фазы будет более сильным: так, если все коэффициенты $T_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ в (4) примерно равны, то β_{ji} примерно в два раза больше β_{jj} . Таким образом, когда частоты двух волн различны, число слагаемых удваивается по сравнению с вырожденным случаем (см. [23]).

Пренебрежем дисперсией групповых скоростей, тогда система (3) примет вид

$$i(\partial A_j / \partial t + V \partial A_j / \partial x) + (\beta_{jj} |A_j|^2 + \sum_{j \neq i} \beta_{ji} |A_i|^2) A_j = 0, \quad (5)$$

причем все групповые скорости предполагаются равными. Нетрудно найти решение уравнений (5)

$$A_j(x, t) = A_j(0, t-x/V) \exp\{i(x/V)[\beta_{jj} |A_j(0, t-x/V)|^2 + \sum_{j \neq i} \beta_{ji} |A_i(0, t-x/V)|^2]\}. \quad (6)$$

Поскольку поле на левой границе нелинейной среды (в сечении $x=0$) складывается из суммы внешнего сигнала и сигнала, прошедшего по цепи обратной связи (см. рис. 1), граничное условие имеет вид

$$E(0, t) = E_0 + RE(l, t-t_{\text{oc}}), \quad (7)$$

где t_{oc} - время прохождения сигнала по цепи обратной связи; l - протяженность нелинейной среды; R - комплексный параметр обратной связи, который мы будем считать одинаковым для всех частот. Подставляя в граничное условие (7) соотношения (2), (6) и рассматривая динамику амплитуд в дискретные моменты времени, получим систему связанных отображений Икеды

$$A_j^{n+1} = A_{0j} + \rho A_j^n \exp[i(\beta_{jj} l/V |A_j^n|^2 + \sum_{j \neq i} \beta_{ji} l/V |A_i^n|^2 + \varphi_j)]. \quad (8)$$

Здесь $A_j^n = A_j(x=0, t=n\tau)$, $\tau = t_{\text{oc}} + l/V$ - время запаздывания, $\rho = |R|$, $\varphi_j = \text{Arg}(R) - \omega_j \tau$.

Далее для простоты положим все коэффициенты нелинейного

взаимодействия в гамильтониане равными: $T_{k_1 k_2 k_3 k_4} = T$. Тогда, как видно из формул (4), $\beta_{ij} = \beta = -2T$, $\beta_{ji} = -4T = 2\beta$. Ограничимся рассмотрением двухчастотного возбуждающего сигнала. Тогда, вводя новые переменные $A_j \rightarrow A_j / (\beta I / V)^{1/2}$, $A_{0j} \rightarrow A_{0j} / (\beta I / V)^{1/2}$, можно привести систему (8) к виду

$$A_1^{n+1} = A_{01} + \rho A_1^n \exp[i(|A_1^n|^2 + 2|A_2^n|^2 + \varphi_1)], \quad (9)$$

$$A_2^{n+1} = A_{02} + \rho A_2^n \exp[i(|A_2^n|^2 + 2|A_1^n|^2 + \varphi_2)].$$

При $A_{02} = 0$ отсюда получаем одиночное отображение Икеды (1).

2. Стационарные режимы колебаний и их устойчивость

Стационарными будем называть режимы колебаний, когда амплитуды компонент сигнала не зависят от времени. Им отвечают неподвижные точки связанных отображений (9) $A_j^n = A_j^0 = \text{const}$. Для стационарных значений интенсивностей $I_j = |A_j^0|^2$, очевидно, будем иметь уравнения

$$I_1 = I_{01} / (1 + \rho^2 - 2\rho \cos \Phi_1), \quad (10)$$

$$I_2 = I_{02} / (1 + \rho^2 - 2\rho \cos \Phi_2), \quad (11)$$

где $I_{0j} = |A_{0j}|^2$ - интенсивности входных сигналов; $\Phi_i = I_i + 2I_j + \varphi_i$, $i, j = 1, 2$. Уравнения (10), (11) представляют собой систему трансцендентных уравнений, которые могут быть решены только численно. На рис. 2 приведены примеры зависимостей $I_1(I_{01})$ - передаточных характеристик, рассчитанных при различных значениях I_{02} . Пунктирными линиями на рис. 2 нанесены прямые $I_{01} / (1 \pm \rho)^2$. Как видно из уравнений (10), (11), значения $I_{1,2}$ лежат в следующих пределах:

$$I_{0j} / (1 + \rho)^2 < I_j < I_{0j} / (1 - \rho)^2. \quad (12)$$

График на рис. 2, а соответствует случаю, когда второй сигнал отсутствует, $I_{02} = 0$, и полностью аналогичен известной зависимости для передаточной функции нелинейного кольцевого резонатора, которая приведена во многих работах (см., например, [9, 13]). Он наглядно иллюстрирует явления мультистабильности и гистерезиса, присущие данной системе. Ветви, имеющие отрицательный наклон, отвечают неустойчивым состояниям, для которых один из мультипликаторов больше единицы [13]. Восходящие ветви (на рис. 2 они выделены жирным) могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Соответствующий анализ проводится ниже.

С увеличением интенсивности второго сигнала зависимости $I_1(I_{01})$ усложняются, число ветвей увеличивается (рис. 2, б, в). Важно, что при этом могут возникать такие участки восходящих ветвей, на которые невозможно попасть при плавном увеличении или уменьшении I_{01} (на рисунке они отмечены точками). Для того, чтобы получить колебания с соответствующим значением интенсивности, необходимо или обеспечить близкие начальные условия, или двигаться весьма специфическим образом в пространстве параметров. Все это позволяет предположить, что и нестационарная динамика системы также будет усложняться. Отметим, что во всех случаях, представленных на этих рисунках, интенсивность второй компоненты остается достаточно малой, так что ее действительно можно трактовать как слабое управляющее воздействие ($I_{02} < 0.36$, ср. с I_{01} на рис. 2).

Теперь выполним анализ стационарных решений на устойчивость.

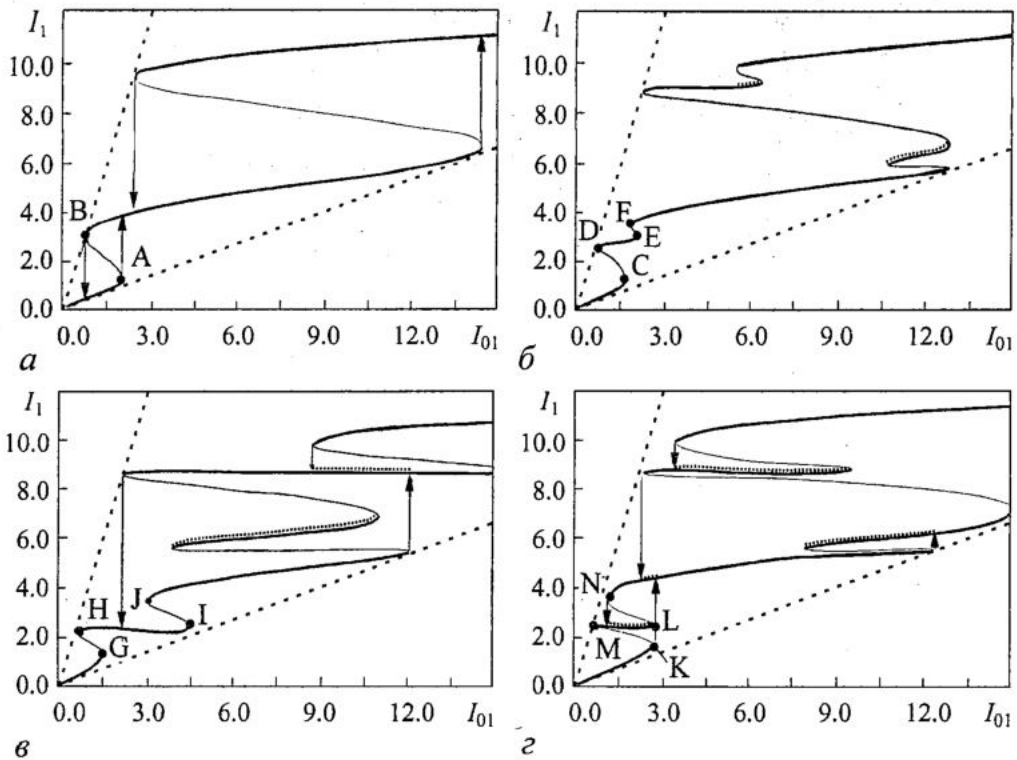


Рис. 2. Зависимости стационарных значений интенсивностей первого сигнала I_1 от мощности входного сигнала I_{01} , построенные вдоль линии постоянной фазы $\varphi_1 = \pi$ при A_{02} : а - 0, б - 0.4, в - 0.6 и при значении $\varphi_1 = 3\pi/4$: г - 0.6. Пунктирными линиями обозначены предельные значения интенсивности, определяемые по формуле (12). Устойчивые ветви передаточной характеристики выделены жирным. Стрелками показаны перескоки между различными устойчивыми ветвями

Линеаризуя отображения вблизи неподвижной точки, после ряда преобразований можно получить характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}
 & [\mu^2 - 2\mu\rho(\cos\Phi_1 - I_1 \sin\Phi_1) + \rho^2][\mu^2 - 2\mu\rho(\cos\Phi_2 - I_2 \sin\Phi_2) + \rho^2] = \\
 & = 16\mu^2\rho^2 I_1 I_2 \sin\Phi_1 \sin\Phi_2.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Здесь μ - мультипликатор. Отметим, что члены в квадратных скобках в левой части (13) совпадают с характеристическими уравнениями для одиночного отображения Икеды (1). Следовательно, правую часть (13) можно интерпретировать как коэффициент связи.

Как известно, потеря устойчивости неподвижной точкой может происходить различными способами (см., например, [3]): в результате бифуркации удвоения периода ($\mu = -1$), касательной бифуркации ($\mu = 1$), а также бифуркации Неймарка (пара комплексно сопряженных мультипликаторов $\mu_{\pm} = \exp(\pm i\theta)$). Построим линии различных бифуркаций на плоскости параметров (A_{01}, φ_1) , анализируя характеристическое уравнение (13) численно. Заметим, что неподвижные точки, соответствующие ветвям передаточной характеристики с отрицательным наклоном, неустойчивы вследствие касательной бифуркации. Таким образом, линии $\mu = 1$ на плоскости параметров будут ограничивать области мультистабильности и гистерезиса.

Результаты расчетов представлены на рис. 3. Сплошными кривыми обозначены линии бифуркаций удвоения, штриховыми - линии касательных бифуркаций, пунктирными - линии бифуркации Неймарка. Вертикальные прямые

соответствуют линиям, вдоль которых строились передаточные характеристики, представленные на рис. 2. Буквами А, В, ... N обозначены точки жестких переходов с одной ветви передаточной характеристики на другую (см. рис. 2). Как видно из рис. 3, они совпадают с границами области гистерезиса, то есть касательной бифуркации. Изменение фазы второго сигнала φ_2 качественно не влияет на динамику системы, поэтому мы всюду ограничились случаем $\varphi_2=0$. Представленные на рис. 3 результаты периодичны по параметру φ_1 с периодом 2π .

Рис. 3, а соответствует одиночному отображению Икеды. На нем видны границы области гистерезиса и линия бифуркации удвоения. При малых значениях амплитуды второго сигнала (рис 3, б) изменения по сравнению с одиночным отображением сводятся к незначительным искажениям бифуркационных линий. Увеличение параметра A_{02} до 0.4 приводит к существенному усложнению границ бифуркаций различных типов. Появляются области квазипериодического движения внутри границ бифуркации Неймарка (рис. 3, в). С ростом I_{02} они увеличиваются в размерах, и в системе появляется две такие области, расположенные на различных листах плоскости параметров (рис. 3, г).

Пересечение и взаимное наложение линий различных бифуркаций отражает факт мультистабильности, который наглядно иллюстрируется представленными на рис. 2 передаточными характеристиками. Таким образом, следует ожидать, что в

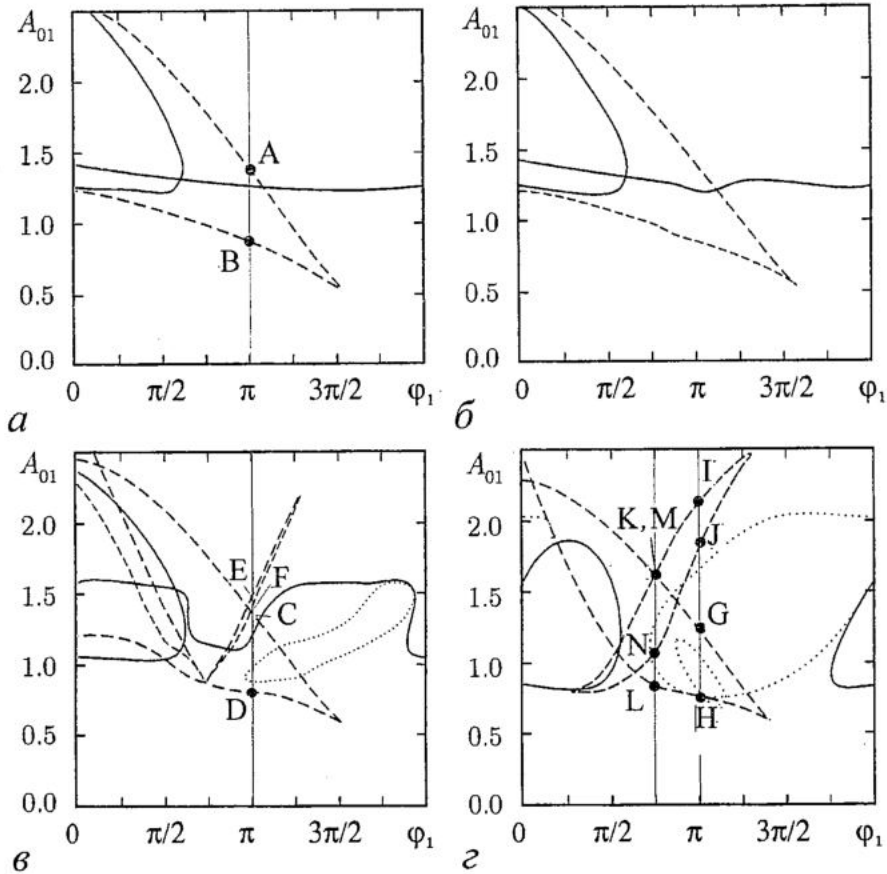


Рис. 3. Карты динамических режимов на плоскости параметров (A_{01}, φ_1) , построенные при $\rho=0.5$, $\varphi_2=0$ и A_{02} : а - 0.0, б - 0.2, в - 0.4, г - 0.6. Сплошная линия - линия бифуркации удвоения, штриховая линия - граница области гистерезиса, пунктирная линия - линия бифуркации Неймарка. Тонкие линии отвечают случаю, изображенному на рис. 2, буквами обозначены соответствующие точки в пространстве параметров и на линии стационарной интенсивности первого сигнала

зависимости от направления движения по плоскости параметров можно будет наблюдать различные сценарии перехода к хаосу. В целом добавление второго сигнала приводит к уменьшению значений A_{01} , при которых стационарные режимы остаются устойчивыми.

3. Результаты численного моделирования и их обсуждение

Типичные результаты численного исследования нелинейной динамики системы связанных отображений (9) представлены на рис. 4 в виде серии карт динамических режимов на плоскости (A_{01}, φ_1) при различных значениях A_{02} (то есть, фактически, на плоскости параметров амплитуда - частота внешнего воздействия). Исследование системы связанных отображений (9) проводилось в широком диапазоне параметров. Для определенности все представленные ниже результаты получены при $\rho=0.5$, $\varphi_2=0$. В целом, с изменением параметров ρ и φ_2 структура карт динамических режимов качественно не меняется. С увеличением ρ все пороги бифуркаций в целом снижаются, что обусловлено увеличением добротности колебательной системы, а изменение φ_2 в основном приводит к сдвигу карт вдоль горизонтальной оси.

Для идентификации динамических режимов строились фазовые портреты, бифуркационные диаграммы, определялся спектр ляпуновских показателей по методике Бенеттина [2,3]. В областях периодического движения все ляпуновские показатели отрицательны, для квазипериодического движения имеются три отрицательных показателя и один нулевой, в областях хаоса один из ляпуновских показателей становится больше нуля. Режимы гиперхаоса, когда имеются два и более положительных показателя, в данном случае отсутствуют. Сканирование плоскости параметров проводилось в направлении снизу вверх и слева направо. Отметим, что в силу того, что карты режимов являются многолистными, представленные рисунки не отражают, вообще говоря, всех особенностей динамики системы. Их вид будет меняться в зависимости от направления сканирования.

Рис. 4, а соответствует случаю $A_{02}=0$, то есть одиночному отображению Икеды (1). Цифрами обозначены области циклов различных периодов, штриховой линией - переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума, Ch - области хаоса. Внутри хаоса существуют многочисленные области периодического движения, имеющие характерную конфигурацию *cross-road area*. На карте приведены только области на базе циклов периодов 3 и 4, которые имеют наибольшие размеры. Внутри каждой *cross-road area* реализуется фейгенбаумовский каскад удвоений. Отметим, что построенная карта динамических режимов согласуется с известными результатами (см., например, [24])¹.

При малых значениях амплитуды второго сигнала изменения по сравнению с отображением весьма (1) незначительны и сводятся к некоторой деформации границ областей с различными типами колебаний (рис. 4, б). Переход к хаосу, по-прежнему, происходит по тем же сценариям, что и в случае одночастотного сигнала.

Увеличение A_{02} до 0.4 (рис. 4, в) приводит к возникновению области квазипериодического движения, обозначенной на рис. 4, в буквой Q . Переход к квазипериодическому движению происходит в результате бифуркации Неймарка,

¹В работе [24] карта динамических режимов (рис. 3) построена на плоскости параметров, отвечающих A_0 и $1/\varphi$ в (1). Если перестроить ее в координатах A_0, φ , то она будет периодической по φ с периодом 2π и совпадет с рис. 4, а данной работы.

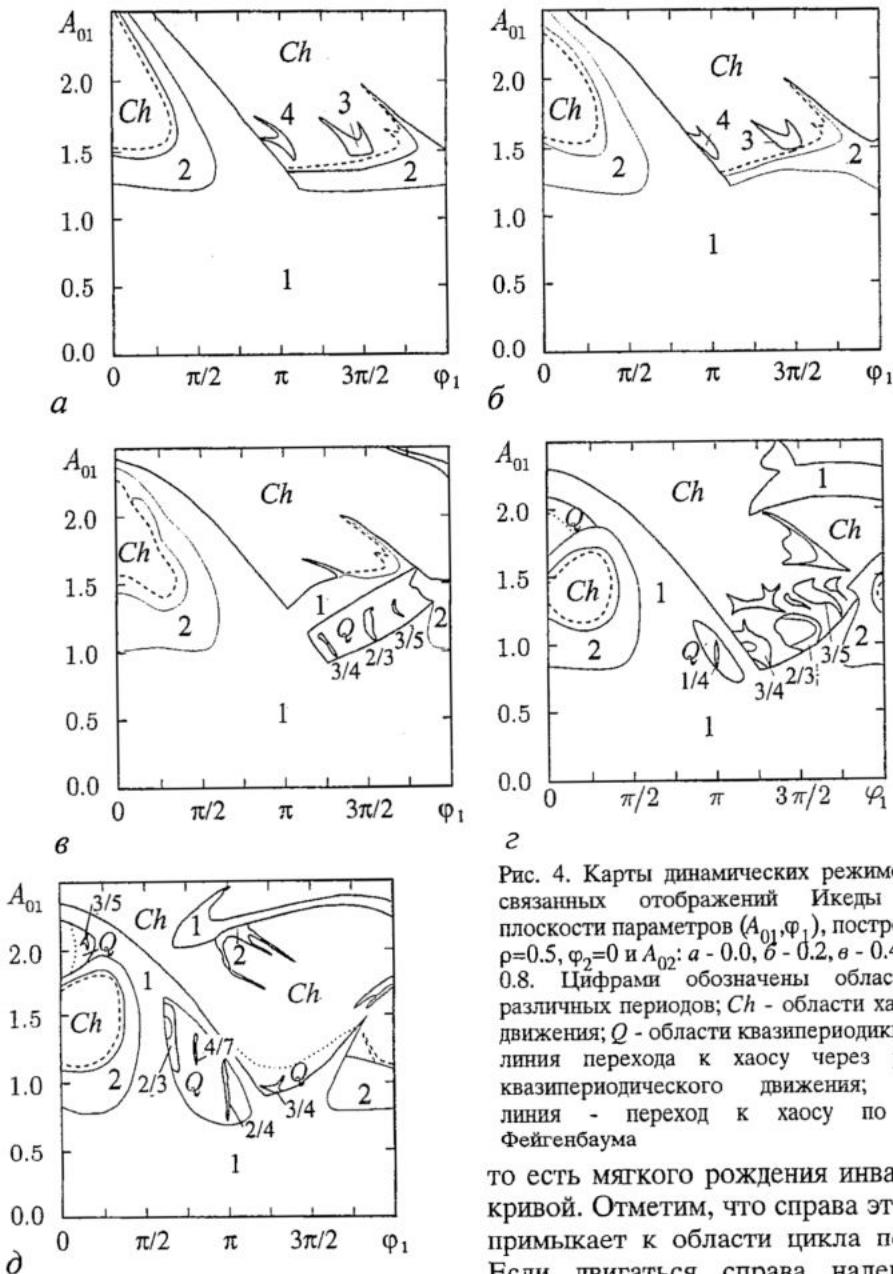


Рис. 4. Карты динамических режимов системы связанных отображений Икеды (10) на плоскости параметров (A_{01}, φ_1) , построенные при $\rho=0.5, \varphi_2=0$ и A_{02} : а - 0.0, б - 0.2, в - 0.4, г - 0.6, д - 0.8. Цифрами обозначены области циклов различных периодов; *Ch* - области хаотического движения; *Q* - области квазипериодики; пунктир - линия перехода к хаосу через разрушение квазипериодического движения; штриховая линия - переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума

то есть мягкого рождения инвариантной кривой. Отметим, что справа эта область примыкает к области цикла периода 2. Если двигаться справа налево вдоль нижней границы области *Q*, то число вращения w будет плавно меняться от $1/2$ до 1. Внутри *Q* наблюдаются языки синхронизации с любыми рациональными значениями w из этого интервала. Наиболее крупные из них изображены на рис. 4, в-д, около них указаны соответствующие значения числа вращения. Следует напомнить, что карты режимов на рис. 4 построены только при одном определенном направлении сканирования, поэтому на рис. 4, в-д изображена, вообще говоря, только часть области *Q* (ср. рис. 3, в).

С ростом параметра A_{02} появляется уже несколько областей квазипериодического движения (ср. рис. 3, г). Становится возможным переход к хаосу через разрушение квазипериодического движения (линия перехода к хаосу показана пунктирной линией). Одновременно увеличиваются размеры языков синхронизации. Внутри некоторых из них реализуется переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума, то есть удвоения периода резонансного цикла на торе. В

целом наблюдается существенное усложнение границ областей с различными типами колебаний. Границы области устойчивости цикла периода 1 сдвигаются вниз, что обусловлено увеличением нелинейности с ростом амплитуды второго сигнала.

Следует напомнить, что переменные $A_{1,2}$ представляют собой огибающие спектральных компонент на частотах $\omega_{1,2}$. Поэтому устойчивой неподвижной точке для отображений (9) в реальной системе соответствует, вообще говоря, квазипериодическое движение с двумя несоизмеримыми частотами. Для отображения Икеды неподвижная точка соответствует стационарным периодическим колебаниям на частоте внешнего сигнала. Колебания амплитуд $A_{1,2}$ приводят к модуляции сигнала. Мы считаем, что частоты ω_1 и ω_2 расположены достаточно далеко друг от друга ($|\omega_1 - \omega_2| \gg 2\pi/\tau$), так что их модуляционные спектры не пересекаются. Это позволяет, поставив на выходе полосовой фильтр, настроенный на одну из несущих частот, наблюдать динамику каждого из сигналов в отдельности. Первая бифуркация удвоения, то есть появление цикла периода 2 из неподвижной точки, таким образом, означает возникновение автомодуляции с периодом 2τ . При этом в спектре появляются спутники, то есть компоненты с частотами $\omega_{1,2} \pm \omega_A$, где $\omega_A = \pi/\tau$ - частота автомодуляции. В нелинейной оптике данный тип неустойчивости, вызванный запаздывающим характером обратной связи, носит название «неустойчивости Икеды» [13]. В процессе перехода к хаосу по сценарию Фейгенбаума в спектре появляются все новые компоненты вида $\omega_{1,2} \pm \omega_A/2^n$. Если же динамика амплитуд в отображении (9) становится квазипериодической, это означает появление спутников вида $\omega_{1,2} \pm \omega_Q$, причем $\omega_Q \neq \pi/n\tau$.

Поскольку для данной системы характерны различные сценарии перехода к хаосу, существуют различные типы хаотических аттракторов. Первый тип, который мы обозначим C_F , соответствует аттрактору, возникшему на базе фейгенбаумовского каскада удвоений. Второй тип C_Q отвечает аттрактору, сформировавшемуся после перехода к хаосу через разрушение квазипериодики. Последний тип C_I соответствует аттрактору Икеды, который реализуется при сильной надкритичности [3,6]. Для одиночного отображения Икеды характерны только два из вышеперечисленных типов хаотических аттракторов: C_F и C_I . При увеличении амплитуды сигнала происходит постепенный переход от первого типа ко второму. Фазовые портреты на плоскости $\text{Re}(A_n)$ - $\text{Im}(A_n)$ в различных режимах приведены на рис. 5. Показаны хаотический аттрактор типа C_F , возникший в результате каскада удвоений (рис. 5, а), хаотический аттрактор типа C_Q (рис. 5, б), и хаотический аттрактор типа Икеды (рис. 5, в).

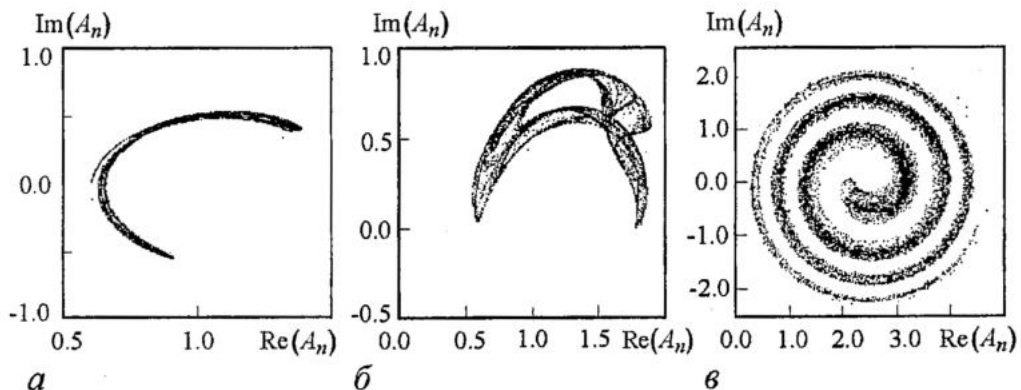


Рис. 5. Различные типы хаотических аттракторов, наблюдающиеся в системе: а - типа C_F ($\varphi_1 = \pi/6$, $A_{01} = 1.3$); б - аттрактор C_Q , образовавшийся после перехода к хаосу по сценарию Рюэлля - Такенса ($\varphi_1 = 3\pi/2$, $A_{01} = 1.5$); в - аттрактор Икеды C_I ($\varphi_1 = \pi$, $A_{01} = 2.5$). Остальные значения параметров такие же, как и на рис. 4,2

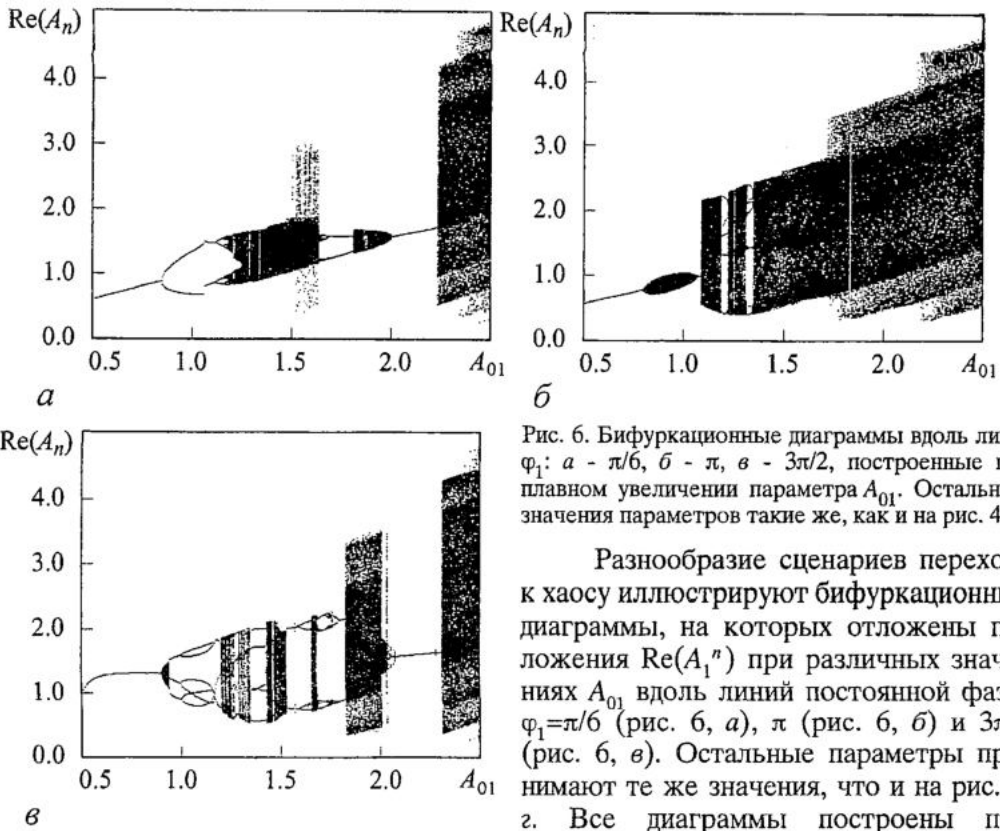


Рис. 6. Бифуркационные диаграммы вдоль линии φ_1 : а - $\pi/6$, б - π , в - $3\pi/2$, построенные при плавном увеличении параметра A_{01} . Остальные значения параметров такие же, как и на рис. 4,2

Разнообразие сценариев перехода к хаосу иллюстрируют бифуркационные диаграммы, на которых отложены положения $\text{Re}(A_1^n)$ при различных значениях A_{01} вдоль линий постоянной фазы $\varphi_1 = \pi/6$ (рис. 6, а), π (рис. 6, б) и $3\pi/2$ (рис. 6, в). Остальные параметры принимают те же значения, что и на рис. 4, 2. Все диаграммы построены при плавном увеличении параметра A_{01} .

При движении вдоль линии $\varphi_1 = \pi/6$ вначале происходит переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума, в хаосе видно несколько окон периодического движения. При $A_{01} \approx 1.5$ фейгенбаумовский хаотический аттрактор S_F начинает трансформироваться в аттрактор типа Икеды S_I . Однако при значении $A_{01} \approx 1.61$ происходит переход к периодическому движению через последовательность обратных бифуркаций удвоения. Затем при $A_{01} \approx 1.8$ происходит жесткий переход к квазипериодическому движению. При дальнейшем увеличении параметра A_{01} инвариантная кривая мягко переходит в неподвижную точку. Наконец, при $A_{01} \approx 2.25$ происходит жесткий переход к хаотическому аттрактору типа Икеды.

При движении вдоль линии $\varphi = \pi$ (см. рис. 6, б) с ростом параметра A_{01} из неподвижной точки мягко рождается инвариантная кривая ($A_{01} \approx 0.8$), размеры которой вначале увеличиваются, затем вновь уменьшаются. При $A_{01} \approx 1.1$ инвариантная кривая снова мягко переходит в неподвижную точку. При дальнейшем увеличении параметра входного сигнала A_{01} до 1.25 система демонстрирует жесткий переход к хаотическому аттрактору типа Икеды S_I . Жесткий характер перехода к хаосу свидетельствует о наличии мультистабильности.

Наиболее сложно выглядит бифуркационная диаграмма, построенная вдоль линии $\varphi = 3\pi/2$ (см. рис. 6, в). Здесь можно выделить области существования всех трех описанных выше типов хаотических аттракторов. Имеются многочисленные фейгенбаумовские каскады удвоений, области квазипериодики и различных резонансов. При увеличении параметра A_{01} из неподвижной точки мягко рождается инвариантная кривая ($A_{01} \approx 0.9$). Затем линия $\varphi = 3\pi/2$ проходит через области квазипериодики и язык синхронизации периода 3. На базе этого цикла последовательно происходят прямая и обратная бифуркации удвоения. Для

наблюдения полного каскада удвоений внутри языка синхронизации необходимо двигаться по плоскости параметров в другом направлении (см. рис. 4, 2). При дальнейшем увеличении параметра A_{01} наблюдается сложная последовательность чередования регулярных и хаотических режимов, причем возможны аттракторы всех типов: типа Икеды, типа C_F и типа C_Q . Отметим, что при указанном направлении сканирования не удается наблюдать переход к хаосу через разрушение квазипериодического движения, и хаотический аттрактор типа C_Q возникает в системе жестко.

Заключение

В настоящей работе исследована сложная динамика кольцевого нелинейного резонатора, заполненного средой с кубичной фазовой нелинейностью, при многочастотном воздействии. Получена система связанных отображений Икеды, описывающая поведение амплитуд спектральных составляющих. Установлено, что при многочастотном внешнем воздействии наблюдается качественное изменение динамики излучения, прошедшего через резонатор. Появляется возможность управления динамикой выходного сигнала. При этом необходимо отметить, что интенсивность второй компоненты может быть достаточно малой. Варьируя амплитуду и частоту второй компоненты входного сигнала, можно добиться либо появления хаотических колебаний в тех условиях, когда одночастотный сигнал демонстрирует регулярное поведение, либо наоборот, осуществить подавление хаоса. Наблюдается новый по сравнению с одиночным отображением Икеды (1) тип неустойчивости, который вызван эффектами фазовой кросс-модуляции, то есть нелинейного взаимодействия различных спектральных компонент. Соответственно, переход к хаосу может происходить не только по сценарию Фейгенбаума, но и через разрушение квазипериодического движения. Полученные результаты представляют интерес не только с теоретической точки зрения, но и в связи с перспективами использования кольцевых нелинейных резонаторов в качестве элементов логических устройств вычислительной техники [13] и устройств защищенной передачи информации [14,15].

Отметим, что отображение Икеды можно получить не только для кольцевого нелинейного резонатора, но и для других систем, например, для нелинейного осциллятора под периодическим импульсным воздействием [24,25]. Очевидно, что система связанных отображений, изученная в данной работе, будет описывать нелинейный осциллятор при квазипериодическом двухчастотном воздействии.

Автор благодарен Рыскину Н.М. за полезные советы и обсуждение результатов работы. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов CRDF (Award № REC-006), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-02-06257).

Библиографический список

1. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1998.
2. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
3. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
4. Ахманов С.А., Воронцов М.А. Неустойчивости и структуры в когерентных нелинейно-оптических системах, охваченных двумерной обратной связью // Нелинейные волны: динамика и эволюция. Сб. статей. М.: Наука, 1989. P. 228-237.

5. Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system // Opt. Comm. 1979. Vol. 30, № 2. P. 257.
6. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45, № 9. P. 709.
7. Ikeda K., Akimoto O. Instability leading to periodic and chaotic self-pulsations in a bistable optical cavity // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48, № 9. P. 617.
8. Nakatsuka H., Asaka S., Itoh H., Ikeda K., Matsuoka M. Observation of bifurcation to chaos in all-optical bistable system // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50, № 2. P. 109.
9. Moloney J.V., Newell A.C. Nonlinear optics // Physica D. 1990 Vol. 44, № 1. P. 1.
10. Измайлов И.В., Калайда В.Т., Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н. Бифуркации в точечной модели кольцевого интерферометра с запаздыванием и поворотом поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 5. С. 47.
11. Измайлов И.В., Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н. Моделирование процессов в кольцевом интерферометре с нелинейностью, запаздыванием и диффузией при монохроматическом излучении // Изв. вузов. Физика. 2000. № 2. С. 29.
12. Chesnokov S.S., Rybak A.A. Spatiotemporal chaotic behavior of time-delayed nonlinear optical systems // Laser Physics. 2000. Vol. 10, № 3. P. 1.
13. Розанов Н.Н. Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М.: Наука, 1997.
14. Новые физические принципы оптической обработки информации / Сб. ст. под ред. С.А. Ахманова, М.А. Воронцова. М.: Наука, 1990.
15. Измайлов И.В. Варианты реализации нелинейно-оптического устройства защиты информации // Оптический журнал. 2002. Т. 69, № 7. С. 62.
16. Богатов Н.А., Гутлин М.С. Нелинейная микроволновая квазиоптика // Изв. РАН. Сер. физическая. 1999. Т. 63, № 12. С. 2340.
17. Балякин А.А., Рыскин Н.М. Переход к хаосу в кольцевом нелинейном резонаторе при возбуждении внешним многочастотным сигналом // Изв. РАН. Сер. Физическая. 2001. Т. 65, № 12. С. 1741.
18. Balyakin A.A., Ryskin N.M. Chaotic oscillations in nonlinear spatially-extended resonators // Nonlinear phenomena in complex systems. 2001. Vol. 4, № 4. P. 358.
19. Pliszka P., Banerjee P.P. Analysis of multifrequency dispersive optical bistability and switching in nonlinear ring cavities with large medium-response times // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46, № 1. P. 507.
20. Захаров В.Е. Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17, № 4. С. 431.
21. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // УФН. 1997. Т. 167, № 11. С. 1137.
22. Рыскин Н.М. Связанные нелинейные уравнения Шредингера для описания распространения многочастотных волновых пакетов в нелинейной среде с дисперсией // ЖЭТФ. 1994. Т. 106, № 5. С. 1542.
23. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика. М.: Мир, 1996.
24. Kuznetsov A.P., Turukina L.V., Mosekilde E. Dynamical systems of different classes as models of the kicked nonlinear oscillator // Internat. Journ. Bifurcation and Chaos. 2001. Vol. 11, № 4. P. 1065.
25. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 11.02.03
после доработки 31.08.03

INVESTIGATION OF CHAOTIC DYNAMICS OF A NONLINEAR RING CAVITY UNDER TWO-FREQUENCY EXTERNAL DRIVING

A.A Balyakin

Complex dynamics of a nonlinear ring cavity filled by medium with cubic phase nonlinearity under multi-frequency driving is considered. System of coupled Ikeda maps to describe the dynamics of spectral components was derived. Regimes of steady-state oscillations and their stability conditions are analyzed. The results of numerical simulation of transition to chaos in the case of two-frequency driving are presented.



Балыкин Артем Александрович - закончил Лицей колледжа прикладных наук в 1996 году с золотой медалью, факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета в 2001 году с отличием. В настоящее время - аспирант кафедры нелинейной физики факультета нелинейных процессов Саратовского госуниверситета. Стипендиат стипендии президента РФ для аспирантов (2002). Область научных интересов - нелинейная динамика распределенных систем под внешним воздействием. Автор 7 научных статей.



СИНХРОНИЗАЦИЯ В СИСТЕМЕ С БИФУРКАЦИЕЙ СЛИЯНИЯ УСТОЙЧИВОГО И НЕУСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

А.П. Кузнецов, С.В. Милованов

Рассматривается синхронизация в системе, в которой может происходить бифуркация слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов. Проведено приближенное и точное рассмотрение задачи, представлены плоскости параметров и фазовые портреты системы. Обнаружена возможность синхронизации за порогом бифуркации слияния циклов.

Явление синхронизации известно очень давно и тем не менее продолжает привлекать внимание исследователей. Классическая ситуация синхронизации состоит в том, что реализуется внешнее периодическое (обычно гармоническое) воздействие на автоколебательную систему с устойчивым предельным циклом [1,2]. В этом случае возможны режимы захвата частоты и квазипериодические режимы, соответственно, внутри и вне языка Арнольда на плоскости частота - амплитуда воздействия. В фазовом пространстве реализуется устойчивый тор, которому в сечении Пуанкаре отвечает замкнутая кривая, то есть предельный цикл, возникающий на этом торе [3]. Мы рассмотрим ситуацию, когда в автономной системе возможно сосуществование двух (устойчивого и неустойчивого) циклов и происходят бифуркации их слияния и исчезновения.

Пусть первоначально циклы сильно разнесены в фазовом пространстве. При наличии внешнего воздействия они, в соответствии со сказанным выше, превращаются в устойчивый и неустойчивый торы. При вариации частоты внешнего сигнала возможна синхронизация на каждом из этих торов. Соответственно на плоскости частота - амплитуда воздействия возникают языки синхронизации устойчивого и неустойчивого движений. Если в системе есть фазовая нелинейность, движения на циклах в автономных системах будут происходить с разными частотами. Действительно, циклы имеют разные размеры, а при наличии фазовой нелинейности частота обращения по циклу зависит от амплитуды (свойство неизохронности). По этой причине устойчивый и неустойчивый языки синхронизации окажутся сильно разнесенными по оси частот и, фактически, будут независимыми.

При варьировании параметра, ответственного за бифуркацию в автономной системе, циклы будут сближаться в фазовом пространстве. Их амплитуды станут

сопоставимыми, и частоты обращения вокруг этих циклов также станут близкими. Соответственно начнут сближаться устойчивый и неустойчивый языки синхронизации на плоскости частота - амплитуда воздействия. В конечном итоге должно произойти объединение этих языков. Основной целью данной работы и является выяснение картины их объединения. Один из существенных вопросов, который будет также обсуждаться, может быть сформулирован следующим образом: когда исчезнут вообще квазипериодические режимы в системе? Очевидный, на первый взгляд, ответ - в момент исчезновения циклов - оказывается неверным. Мы проводим подробное рассмотрение феномена исчезновения квазипериодических режимов. Наше исследование базируется на использовании метода медленных амплитуд и укороченных уравнений. Проведено также сопоставление полученных результатов с результатами численного моделирования исходных дифференциальных уравнений.

1. Исходные уравнения

Рассмотрим следующее уравнение

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2 + kx^4)\dot{x} + x + \beta x^3 = b \sin \omega t. \quad (1)$$

Здесь x - динамическая переменная; λ - управляющий параметр (при $\lambda=0$ в автономной системе имеет место бифуркация Андронова - Хопфа); k - второй управляющий параметр; β - параметр фазовой нелинейности, отвечающий за неизохронность системы; b и ω - амплитуда и частота внешнего сигнала. Уравнение (1) - естественная модификация уравнения Ван дер Поля - Дуффинга [4-9], в которой возможно сосуществование и бифуркация слияния устойчивого и неустойчивого циклов. Часто такую систему называют автогенератором с жестким возбуждением, имея в виду, что требуется некоторый начальный толчок, чтобы система попала на устойчивый предельный цикл.

Если система находится недалеко от порога возникновения автоколебаний (λ невелико), а амплитуда колебаний и амплитуда воздействия малы, то для приближенного решения уравнения (1) можно воспользоваться методом медленно меняющихся амплитуд. Положим

$$x = 1/2 (ae^{i\omega t} + \text{к.с.})$$

при дополнительном условии $\dot{a}e^{i\omega t} + \text{к.с.} = 0$. Здесь a - медленная комплексная амплитуда.

После соответствующей подстановки в исходное уравнение (1) и усреднения приходим к укороченному уравнению

$$\dot{a} + ia(\omega^2 - 1)/(2\omega) = -\lambda a/2 + |a|^2 a/8 - k|a|^4 a/16 + 3\beta |a|^2 a/(8\omega) - b/(2\omega). \quad (2)$$

Выполнив замену переменных

$$\tau = \lambda t/2, \quad z = a/(2\lambda^{1/2}), \quad \Delta = (\omega^2 - 1)/(\lambda\omega), \quad (3)$$

$$\epsilon = -b/(2\omega\lambda^{3/2}), \quad k = 2k\lambda, \quad \chi = 3\beta/\omega,$$

получим укороченное уравнение в комплексной форме

$$\dot{z} + i\Delta z = -z + |z|^2 z - k|z|^4 z + \chi iz|^2 z + \epsilon. \quad (4)$$

Параметры ϵ и Δ представляют собой безразмерные амплитуду внешнего воздействия и отстройку внешней частоты от собственной; k и χ - безразмерные управляющие параметры.

Используя подстановку $z=Re^{i\varphi}$ и разделяя при этом в (4) действительную и мнимую части, получим уравнение для действительной амплитуды R и фазы φ

$$\begin{cases} \dot{R} = -R + R^3 - kR^5 + \varepsilon \cos\varphi, \\ \dot{\varphi} = -\Delta + \chi R^2 - \varepsilon \sin\varphi/R. \end{cases} \quad (5)$$

2. Приближенное описание синхронизации в системе

В автономной системе (то есть при $\varepsilon=0$) первое из уравнений (5) приводит к следующим значениям для амплитуд установившегося движения:

$$R_{1,2}^2 = [1 \pm (1 - 4k)^{1/2}]/(2k), \quad R_3 = 0. \quad (6)$$

Таким образом, при $k=0$ в системе имеется устойчивая неподвижная точка в начале координат и неустойчивый предельный цикл радиусом $R=1$. При k отличном от нуля к нему из бесконечности приходит устойчивый цикл и при $k_\delta=0.25$ они сливаются и исчезают. Амплитуду в момент слияния можно найти из (6): $R_\delta=2^{1/2}$ (рис. 1).

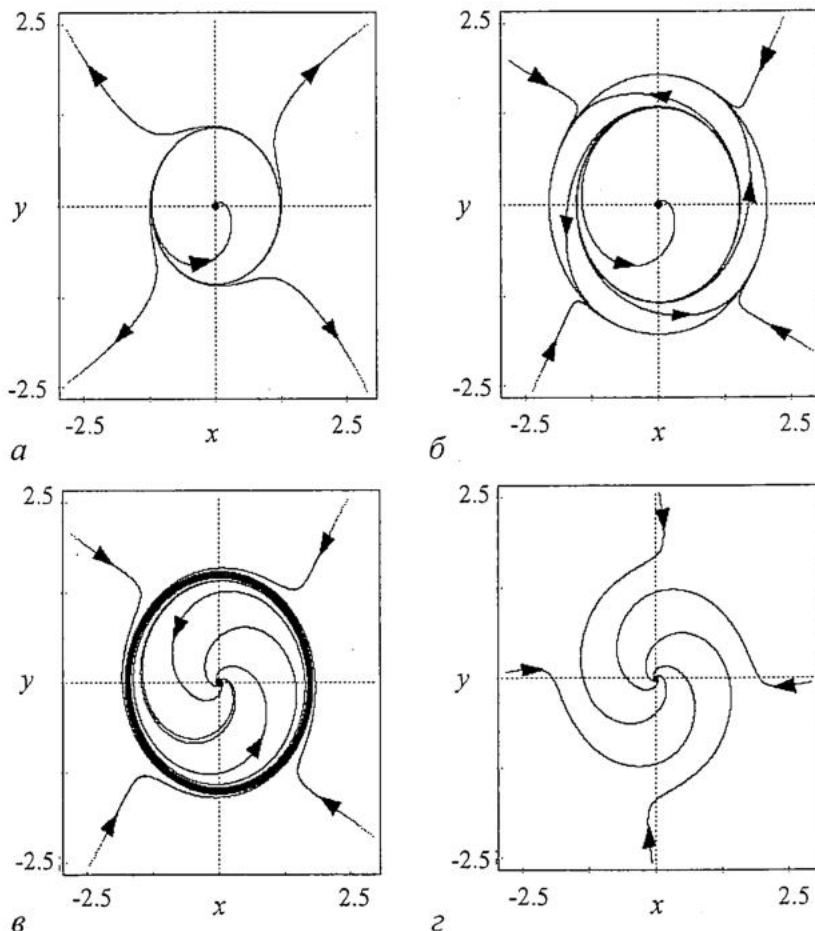


Рис. 1. Фазовые портреты укороченного уравнения в автономной системе ($\varepsilon=0$) вблизи бифуркации слияния и исчезновения устойчивого и неустойчивого циклов при $\Delta=1.0$, $\chi=0.3$ и различных k : а - 0.001; б - 0.23; в - 0.25; г - 0.27

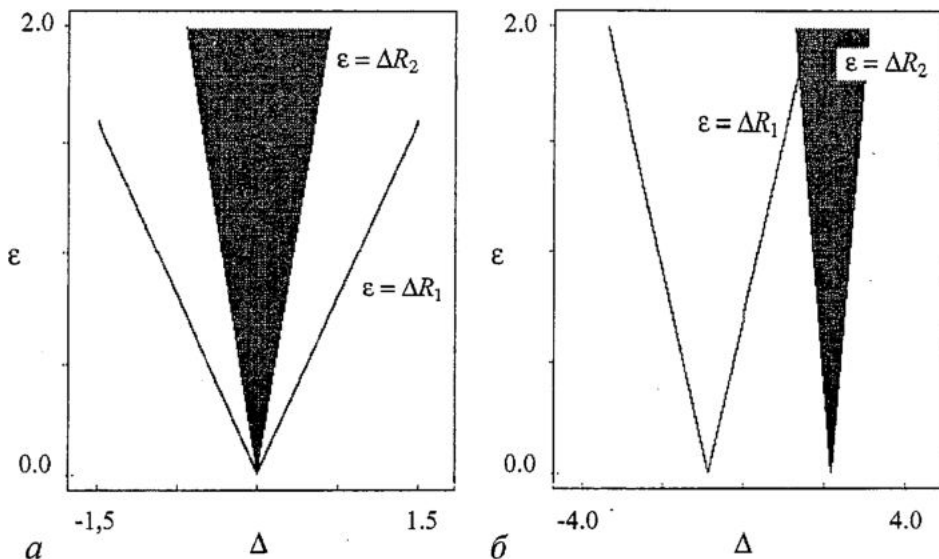


Рис. 2. Языки синхронизации в приближении малой амплитуды воздействия в изохронном (а) и неизохронном (б) случае. Язык, отвечающий устойчивому режиму, заштрихован

В неавтономной системе (5) картины синхронизации будут существенно разными в изохронном случае ($\chi=0$) и при наличии фазовой нелинейности ($\chi \neq 0$). Если амплитуда воздействия невелика (параметр ε мал), можно воспользоваться уравнением Адлера [10]. Тогда края языков синхронизации задаются следующими соотношениями:

$$\Delta = \pm \varepsilon / R_1, \quad \Delta = \pm \varepsilon / R_2, \quad (7)$$

где $R_{1,2}$ те же, что и в уравнении (6). В изохронном случае имеется два языка синхронизации - устойчивый и неустойчивый - с общей вершиной в точке $\Delta=0$ (рис. 2, а).

Если же система неизохронна ($\chi \neq 0$), то языки имеют разные вершины. Действительно, если амплитуда воздействия ε мала, то амплитуду циклов можно взять непосредственно из (5) и тогда края языков даются уравнениями

$$\Delta_1 = \chi R_1^2 \pm \varepsilon / R_1, \quad \Delta_2 = \chi R_2^2 \pm \varepsilon / R_2. \quad (8)$$

Причина этого понятна - циклы имеют разные амплитуды, а в неизохронной системе им отвечают разные частоты (рис. 2, б).

Расстояние между вершинами языков

$$\delta = \chi(R_2^2 - R_1^2) = (1 - 4k)^{1/2} / k. \quad (9)$$

Оно стремится к бесконечности при $k=0$ и обращается в ноль в точке бифуркации слияния циклов $k_\delta=0.25$.

Центр системы языков $\Delta_{cp} = \chi(R_1^2 + R_2^2) = \chi/k$.

3. Основные бифуркации в случае произвольных амплитуд воздействия

Откажемся теперь от условия малости ε и перейдем к более точной теории. Рассмотрим непосредственную окрестность точки бифуркации $k_\delta=0.25$.

Для этого положим $k=0.25+\tilde{k}$ и $R=2^{1/2}+\tilde{R}$. После подстановки в соотношения (5) получаем

$$\begin{cases} \dot{\tilde{R}} = 2^{1/2}4\tilde{k} + 2^{1/2}2\tilde{R}^2 + \epsilon \cos\varphi, \\ \dot{\tilde{\varphi}} = -\delta + 2^{1/2}2\chi\tilde{R} - \epsilon \sin\varphi/2^{1/2}, \end{cases} \quad (10)$$

где $\delta=\Delta-2\chi$. Эти уравнения и описывают динамику амплитуды и фазы вблизи бифуркации. Они допускают аналитическое решение.

Для стационарных режимов из (10) следует, что

$$\tilde{R}^4 + 2(2\tilde{k} + \chi^2)\tilde{R}^2 - 2^{1/2}\chi\tilde{R} + \delta^2/4 + 4\tilde{k}^2 - \epsilon^2/8 = 0. \quad (11)$$

Мы получили каноническое уравнение для многообразия катастрофы «ласточкин хвост» [11]

$$\tilde{R}^4 + a\tilde{R}^2 + b\tilde{R} + c = 0, \quad (12)$$

$$\text{где } a = 2(2\tilde{k} + \chi^2), \quad b = 2^{1/2}\chi, \quad c = \delta^2/4 + 4\tilde{k}^2 - \epsilon^2/8. \quad (13)$$

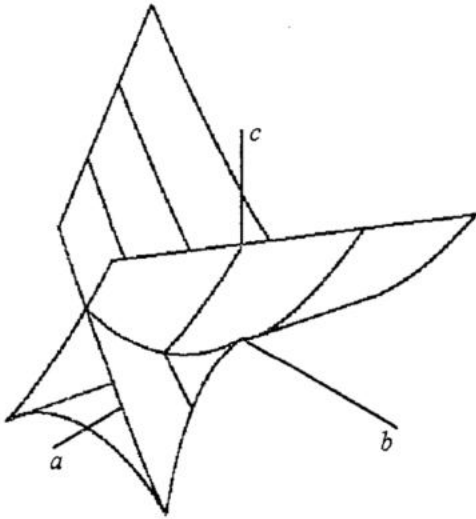


Рис. 3. Многообразие катастрофы «ласточкин хвост» в канонических переменных

Бифуркационное множество этой катастрофы в канонических переменных a, b, c показано на рис. 3. Как мы увидим далее, его структура проявляется в устройстве языков синхронизации.

Аналогичные результаты получаются и непосредственно из уравнения (5):

$$\begin{cases} R - R^3 + kR^5 = \epsilon \cos\varphi, \\ -\Delta R + \chi R^3 = -\epsilon \sin\varphi, \end{cases} \quad (14)$$

откуда

$$\xi(1-\xi+k\xi^2)^2 + \xi(-\Delta+\chi\xi)^2 = \epsilon^2, \quad (15)$$

где $\xi=R^2$.

Вообще говоря, это уравнение более высокого порядка, но оно демонстрирует также катастрофу «ласточкин хвост».

Бифуркация «седло-узел». Края языков синхронизации находим, дифференцируя последнее соотношение по ξ ,

$$\Delta^2\xi + 2\chi\Delta\xi^2 + \chi^2\xi^3 + \xi(1-\xi+k\xi^2)^2 = \epsilon^2. \quad (16)$$

Совместно с (15) можно получить

$$\epsilon^2 = \xi(1-\xi+k\xi^2)^2 + \xi(-\Delta+\chi\xi)^2, \quad (17)$$

$$\Delta = 2\chi\xi \pm [\chi^2\xi^2 - (1-\xi+k\xi^2)(1-3\xi+5\xi^2)]^{1/2}.$$

Конфигурация языков, задаваемая соотношениями (17), представлена на рис. 4. Можно видеть, что в окрестности точки бифуркации при малых амплитудах мы имеем уже описанную картину. Новое здесь - появление точек сборки в вершинах языков и то, что вдали от бифуркации они распадаются на два независимых языка.

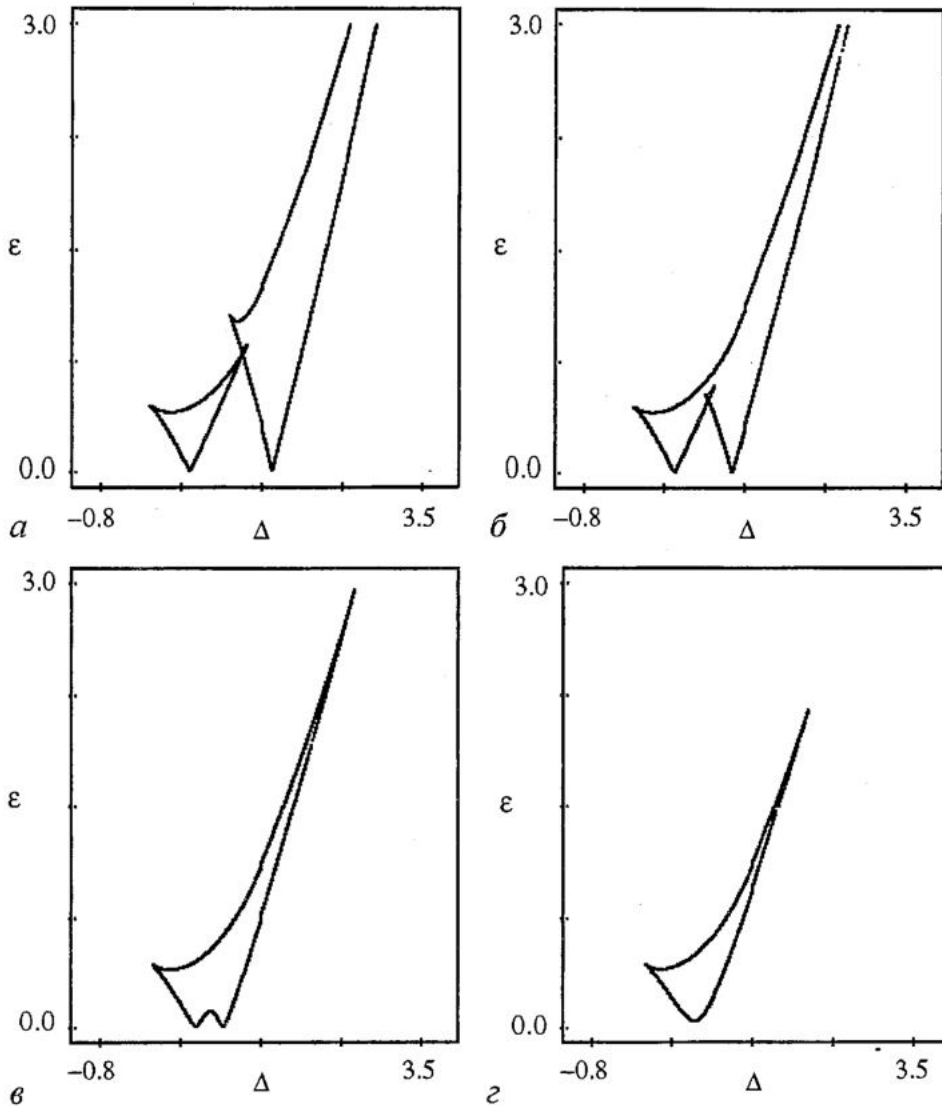


Рис. 4. Вид языков синхронизации укороченного уравнения Ван дер Поля - Дуффинга с жестким возбуждением на плоскости (ϵ, Δ) и их трансформация по мере увеличения k : 0.16 (а); 0.19 (б); 0.23 (в); 0.26 (г). Здесь и на следующих рисунках параметр χ фиксирован и равен 0.3

Интересно также, что при достаточно больших значениях k языки отрываются от оси Δ , образуя характерную для теории катастроф особенность «губы» [11].

Бифуркация Андронова - Хопфа. Для того чтобы найти линии бифуркации Андронова - Хопфа, разделим действительную и мнимую части z в уравнении (4). Для $x = \text{Re}z$ и $y = \text{Im}z$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + \Delta y - x(x^2 + y^2) - kx(x^2 + y^2)^2 - \chi(x^2 + y^2)y + \epsilon, \\ \dot{y} &= -y - \Delta x - y(x^2 + y^2) - ky(x^2 + y^2)^2 + \chi(x^2 + y^2)x. \end{aligned} \quad (18)$$

Условием бифуркации Андронова - Хопфа является равенство нулю следа матрицы линеаризации системы (18). После несложных преобразований получаем

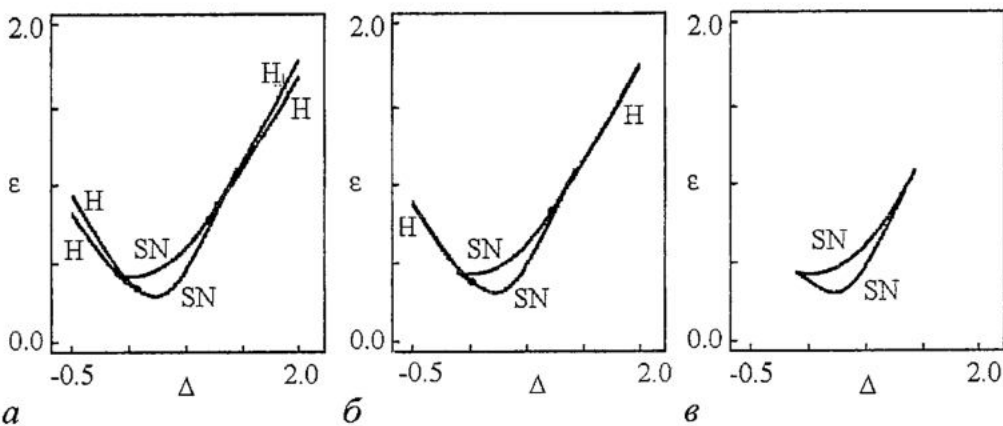


Рис. 5. Слияние и исчезновение двух ветвей линии бифуркации Андронова - Хопфа укороченного уравнения Ван дер Поля - Дуффинга с жестким возбуждением. $k=0.33$ (а); 0.3333 (б); 0.3334 (в)

$$\begin{cases} \varepsilon^2 = \xi(1-\xi+k\xi^2)^2 + \xi(-\Delta+\chi\xi)^2, \\ \xi_{1,2} = [1 \pm (1-3k)^{1/2}]/(3k). \end{cases} \quad (19)$$

Эта система задает две ветви линии бифуркации Андронова - Хопфа, примыкающие к устойчивому и неустойчивому языкам синхронизации. Общие точки линий бифуркаций седло-узел и Андронова - Хопфа (точки Богданова - Такенса [5]) определяются совмещением систем (17) и (19). Как мы увидим далее, линии бифуркаций Андронова - Хопфа обрываются в этих точках.

Существенно, что бифуркация Андронова - Хопфа возможна лишь при $k < 1/3$. Значение $k = 1/3$ соответствует бифуркации коразмерности три, когда эти линии исчезают. Рис. 5 поясняет процесс их исчезновения. Буквами SN на рисунках обозначены линии седлоузловых бифуркаций, H - линии бифуркаций Андронова - Хопфа.

4. Анализ плоскости параметров укороченного уравнения

Перейдем к более подробному обсуждению картины синхронизации в рассматриваемой системе. Для этого изучим плоскость ε, Δ укороченного уравнения Ван дер Поля - Дуффинга с жестким возбуждением при фиксированном значении $\chi=0.3$ и различных значениях k . Для наглядной иллюстрации возможных бифуркаций будем строить фазовые портреты.

На рис. 6 представлена плоскость параметров системы при $k=0.12$. В этом случае два языка синхронизации не перекрываются, к каждому из них примыкает линия бифуркации Андронова - Хопфа. При переходах через линии H за пределами языков синхронизации меняется характер устойчивости неподвижной точки и вблизи нее рождаются или исчезают устойчивые или неустойчивые предельные циклы (вставки 1-5). При пересечении границы языка синхронизации (линии SN) происходит седлоузловая бифуркация, и на месте одного из предельных циклов рождаются узел и седло с общей сепаратрисой. Второй предельный цикл может остаться (вставки 6, 8) или исчезнуть при переходе через линию H (вставка 7). В данном случае мы не останавливаемся на линиях нелокальных бифуркаций, однако они имеют место вблизи точек Богданова - Такенса и аналогичны нелокальным бифуркациям на плоскости параметров укороченного уравнения Ван дер Поля - Дуффинга [8,9].

На рис. 7 изображена плоскость параметров укороченного уравнения при значении $k=0.19$. Этот случай соответствует перекрытию языков синхронизации с образованием структуры, характерной для катастрофы «ласточкин хвост». Внутри языков появляются новые особенности. Во-первых, на вставке 8 показан фазовый

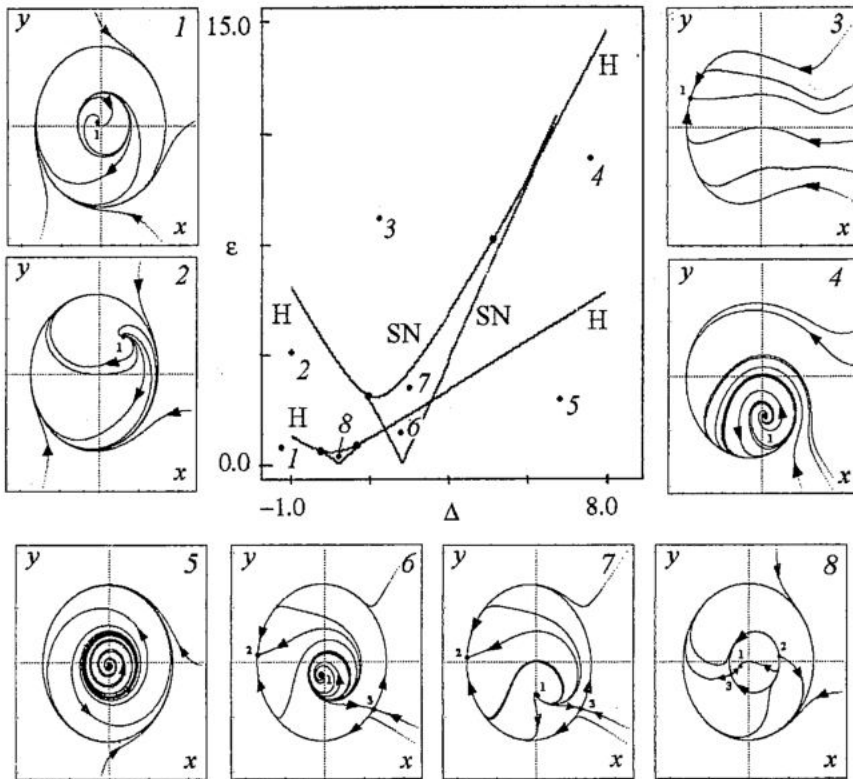


Рис. 6. Плоскость параметров (ϵ, Δ) укороченного уравнения Ван дер Поля - Дуффинга с жестким возбуждением; $k=0.12$. Здесь и далее на вставках - фазовые портреты для выделенных точек плоскости параметров

портрет с пятью неподвижными точками: седлоузловая бифуркация происходит как на устойчивом, так и на неустойчивом циклах. Кроме этого, появляется новая линия нелокальной бифуркации: при переходе от вставки 6 к вставке 7 видно, как неустойчивый цикл касается неустойчивого многообразия седла и исчезает. Похожая ситуация имеет место при переходе от вставки 7 к вставке 4. При движении по направлению к точке 4 устойчивый узел (2) становится фокусом и на линии H происходит бифуркация Андронова - Хопфа с рождением устойчивого цикла. Однако уже вблизи линии бифуркации предельный цикл касается сепаратрисы седла (3) и исчезает.

Рис. 8 соответствует значению $k=0.23$. Катастрофа «ласточкин хвост» произошла ранее, так что область плоскости параметров, в которой система имела пять неподвижных точек, здесь отсутствует. После катастрофы «ласточкин хвост» появляются новые линии нелокальных бифуркаций. Так, появляется линия столкновения и исчезновения предельных циклов: при переходе от вставки 1 к вставке 2 устойчивый и неустойчивый циклы касаются друг друга и исчезают. В расширенном трехмерном фазовом пространстве этой ситуации будет соответствовать столкновение торов. Не менее интересную особенность демонстрирует переход между вставками 3 и 4. Сама по себе линия нелокальной бифуркации, берущая начало в точке Богданова - Такенса, наблюдалась и в более простых модификациях системы Ван дер Поля (см., например, [8]), однако эта линия оканчивалась на линии седлоузловой бифуркации. В нашем случае она продолжается и за границы языка синхронизации, а переход через нее сопровождается слиянием и исчезновением устойчивого и неустойчивого предельных циклов! Пересечение этой линии внутри языка сопровождается столкновением неустойчивого цикла и сепаратрисы седла.

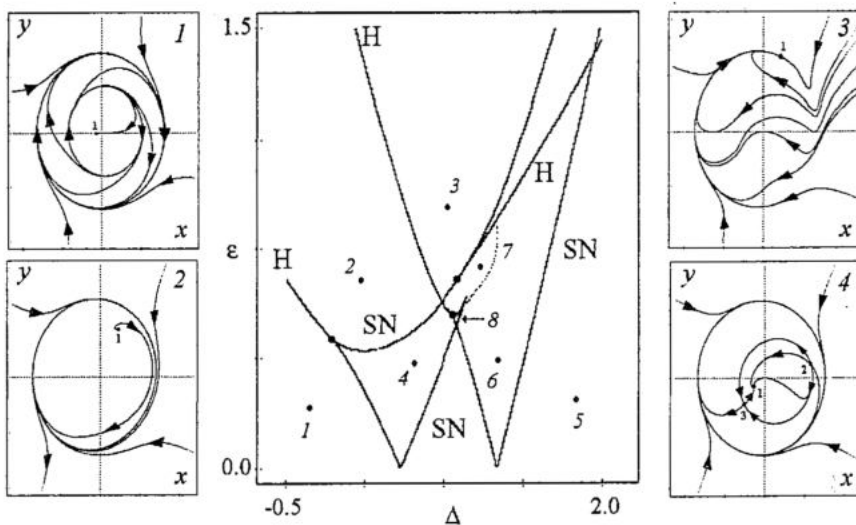


Рис. 7. Плоскость параметров (ϵ, Δ) укороченного уравнения Ван дер Поля - Дuffинга с жестким возбуждением; $k=0.19$

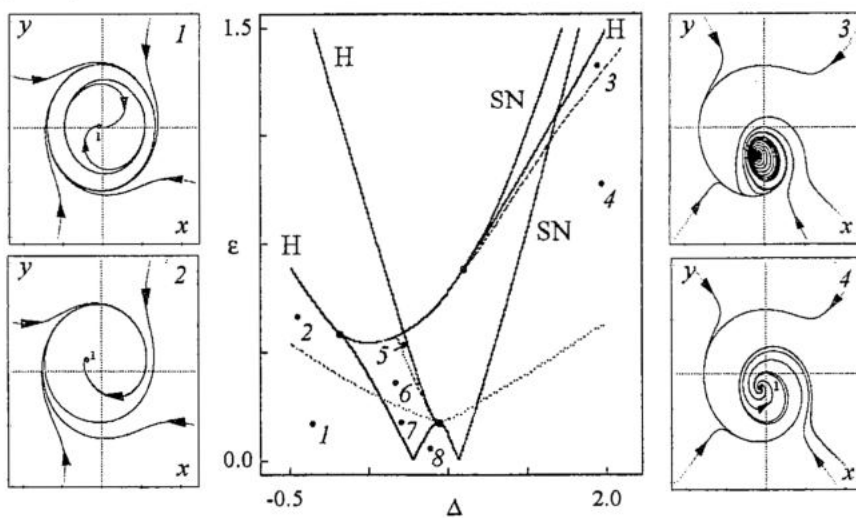


Рис. 8. Плоскость параметров (ϵ, Δ) укороченного уравнения Ван дер Поля - Дuffинга с жестким возбуждением; $k=0.23$

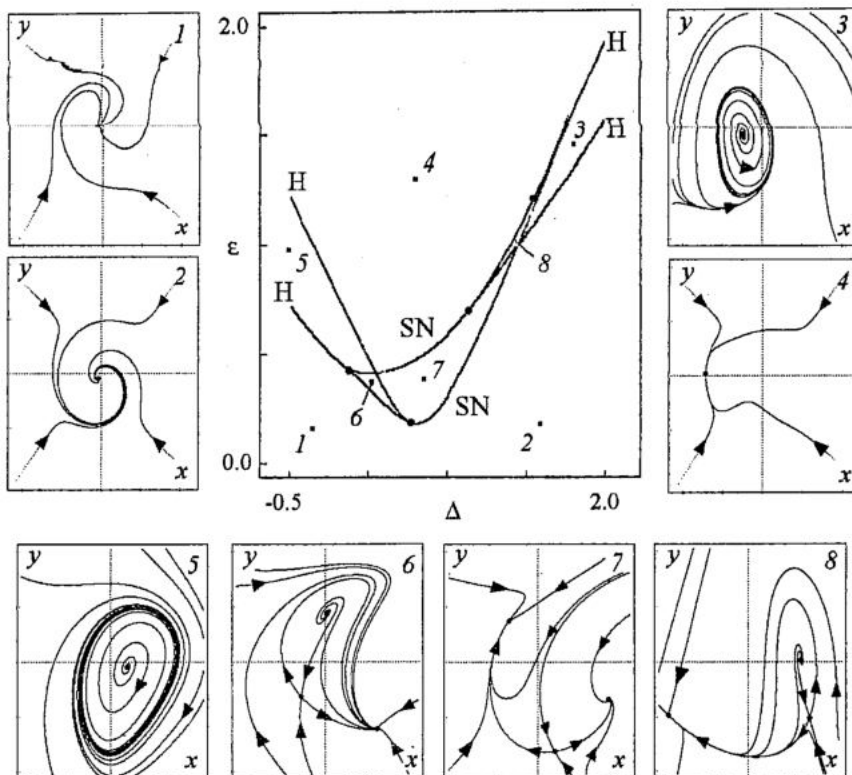


Рис. 9. Плоскость параметров (ϵ, Δ) укороченного уравнения Ван дер Поля - Дuffинга с жестким возбуждением; $k=0.29$

Рис. 9 - еще одна иллюстрация плоскости параметров укороченного уравнения Ван дер Поля - Дuffинга с жестким возбуждением. Параметр $k=0.29$. По мере роста k линия столкновения предельных циклов опускается ниже и исчезает в момент отрыва языка от оси Δ . Поэтому на вставках 1 и 2 уже не наблюдаются устойчивые и неустойчивые циклы. Однако квазипериодические режимы, вопреки ожиданиям, все еще возможны при достаточно больших амплитудах воздействия - между двумя ветвями линий бифуркации Андронова - Хопфа (вставки 3, 5). Интересной особенностью системы является также то, что устойчивые и неустойчивые предельные циклы еще могут сосуществовать в узких областях плоскости параметров между нижней ветвью бифуркации Андронова - Хопфа и линией нелокальной бифуркации (на рисунке не показаны). Предельные циклы окончательно исчезают в момент слияния линий бифуркации Андронова - Хопфа (при $k = 1/3$). Из этого следует, что в дифференциальной системе по мере роста k области существования неустойчивых торов должны исчезнуть, а области существования устойчивых торов должны становиться все более узкими и вскоре также исчезнуть. Доминирующим режимом при этом будет синхронизация устойчивого предельного цикла.

5. Результаты численного исследования исходного дифференциального уравнения

Построение карт динамических режимов полного неавтономного уравнения Ван дер Поля - Дuffинга с жестким возбуждением связано с рядом трудностей, а именно с наличием пяти управляющих параметров и мультистабильности. Поэтому

при выборе значений параметров и начальных условий нужно проявлять определенную осторожность.

Рассмотрим плоскость параметров укороченного уравнения при $\chi=0.3$ и $k=0.1$ (рис. 10). Такой выбор параметров соответствует двум неперекрывающимся языкам синхронизации. Для исходного дифференциального уравнения пересчитаем параметры из условия перенормировки (3): положим $\lambda=1$, тогда $\kappa=0.05$, $\beta=0.5$.

На рис. 10, *а* выделены области плоскости параметров укороченного уравнения, в которых реализуется по меньшей мере одна устойчивая неподвижная точка, а рис. 10, *б* - области, где реализуются неустойчивые неподвижные точки. Напомним, что в расширенном трехмерном фазовом пространстве неподвижные точки укороченного уравнения будут соответствовать синхронизации предельных циклов исходной системы.

На рис. 10, *в*, *г* показаны плоскости параметров амплитуда - частота воздействия дифференциальной системы (1) при указанных значениях параметров. На рис. 10, *в* выделена область, где реализуется устойчивый предельный цикл периода 1, область на рис. 10, *г* соответствует синхронизации неустойчивого предельного цикла периода 1.

Начальные условия подобраны таким образом, чтобы на всей плоскости

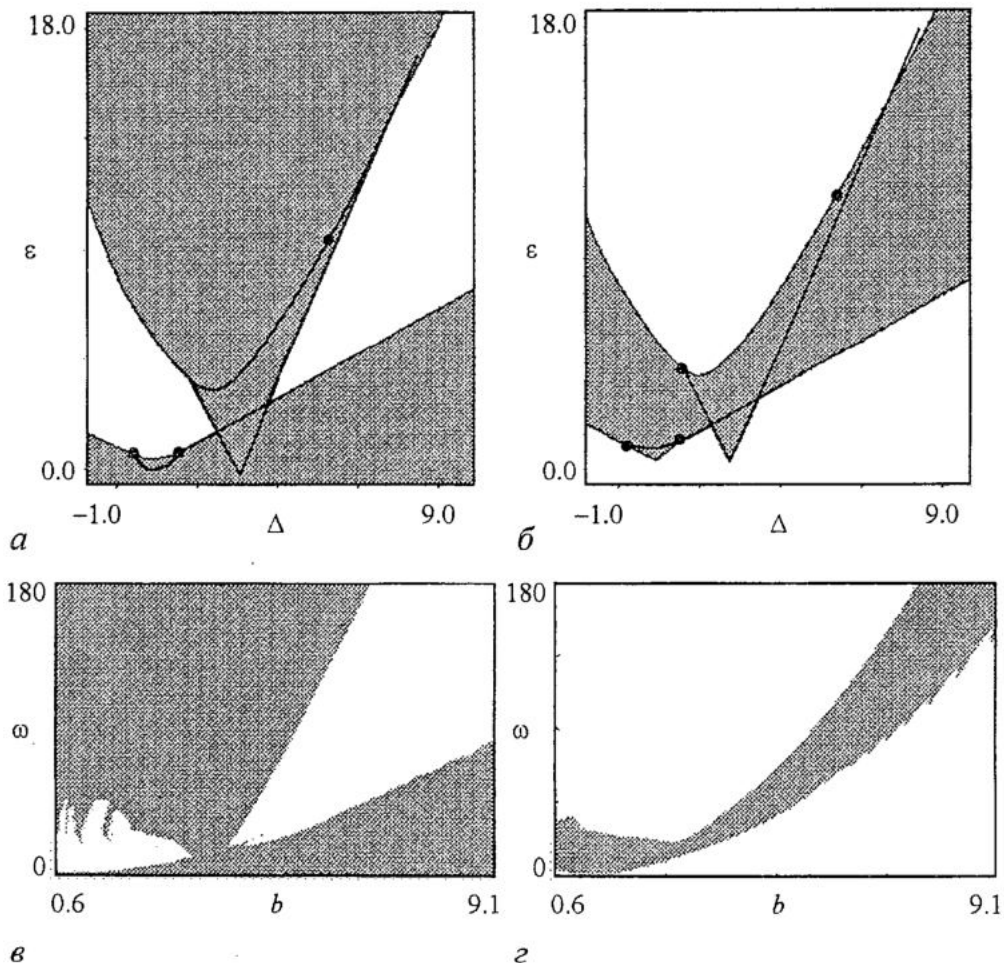


Рис. 10. Вверху - плоскость параметров укороченного уравнения Ван дер Поля - Дуффинга с жестким возбуждением; $k=0.1$. Выделены области синхронизации устойчивых (*а*) и неустойчивых (*б*) циклов. Внизу - соответствующие плоскости параметров исходной неавтономной системы. $\kappa=0.05$, $\beta=0.5$

параметров мы, по возможности, попадали в бассейны притяжения предельных циклов, а не торов. Сравнение верхних и нижних рисунков свидетельствует о хорошем качественном соответствии устройства плоскости параметров укороченного уравнения и исходной дифференциальной системы.

На рис. 11, *а, б* показаны плоскости параметров укороченного уравнения, на которых выделены области существования устойчивого и неустойчивого предельных циклов, на рис. 11, *з, д* - плоскости параметров исходного неавтономного уравнения, на которых выделены области существования устойчивого и неустойчивого торов. На самом деле эти области содержат в себе также языки синхронизации более высокого порядка. Как и для рис. 10, в этом случае можно говорить о достаточно хорошем качественном соответствии плоскостей параметров.

Таким образом, укороченное уравнение позволяет получить представление о том, в каких областях плоскости параметров исходной системы можно ожидать возникновения квазипериодических режимов.

Более полная карта динамических режимов представлена на рис. 12. Карта построена в прямом времени без наследования. Начальные условия: $x_0 = -10, y_0 = -10$. При таком выборе начальных условий мы попадаем на устойчивый тор в той

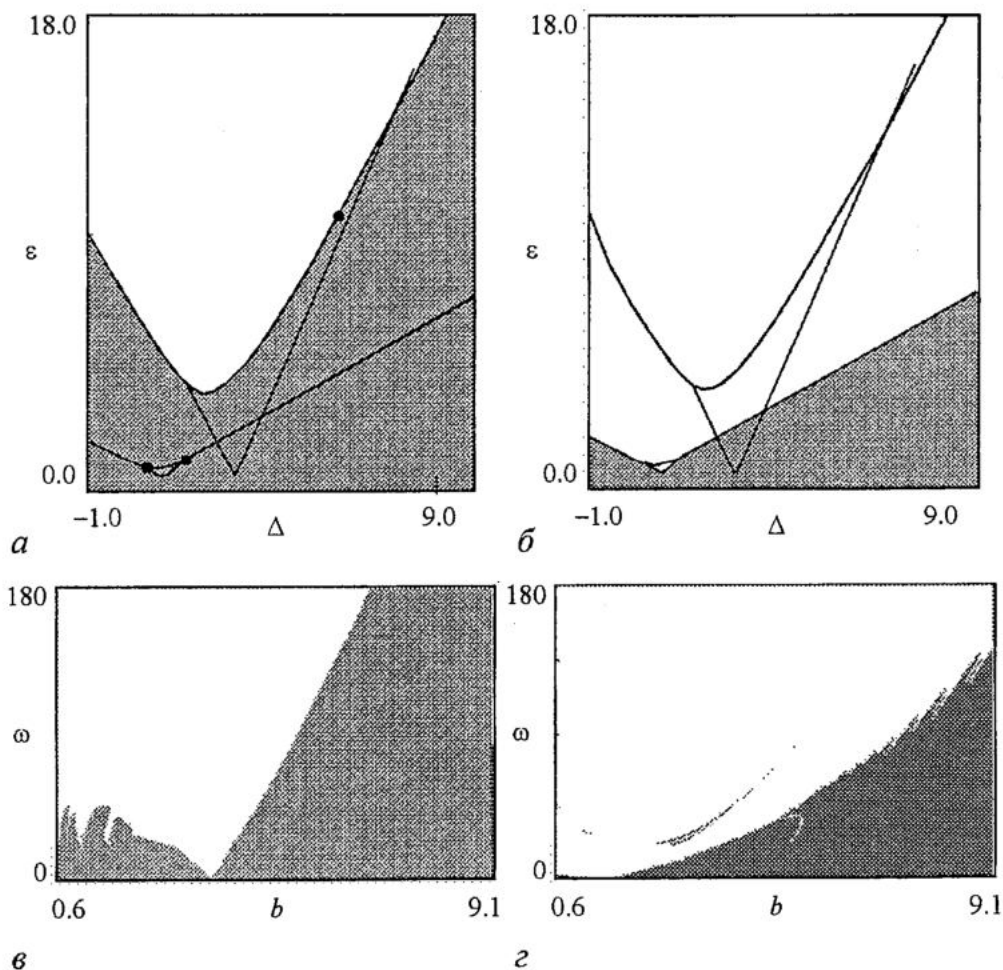


Рис. 11. Вверху - плоскость параметров укороченного уравнения Ван дер Поля - Дuffинга с жестким возбуждением. $k=0.1$. Выделены области существования устойчивых (*а*) и неустойчивых (*б*) торов. Внизу - соответствующие плоскости параметров исходной неавтономной системы. $\kappa=0.05, \beta=0.5$. На самом деле заштрихованные области на нижних рисунках содержат языки синхронизации более высоких порядков

области параметров, где он существует. На рисунке также показаны фазовые портреты «на торе» и сечения Пуанкаре для выделенных точек плоскости параметров. Темным цветом показаны устойчивые торы, предельные циклы и неподвижные точки в сечении Пуанкаре, а светлым - неустойчивые. Мы старались, по возможности, выявить все аттракторы, которые могут реализоваться в системе при выбранных значениях параметров. Вставка *a* иллюстрирует устойчивый предельный цикл периода 1, который реализуется в основном языке синхронизации. На вставках *b*, *v* и *e* показаны устойчивые предельные циклы периода 2, 3 и 7, соответственно, которые сосуществуют с неустойчивыми предельными циклами периода 1. Вставка *г* иллюстрирует квазипериодический режим - движение на инвариантном торе, внутри которого - неустойчивый предельный цикл. На вставке *д* показан режим сосуществования устойчивого и неустойчивого торов, а также устойчивого предельного цикла.

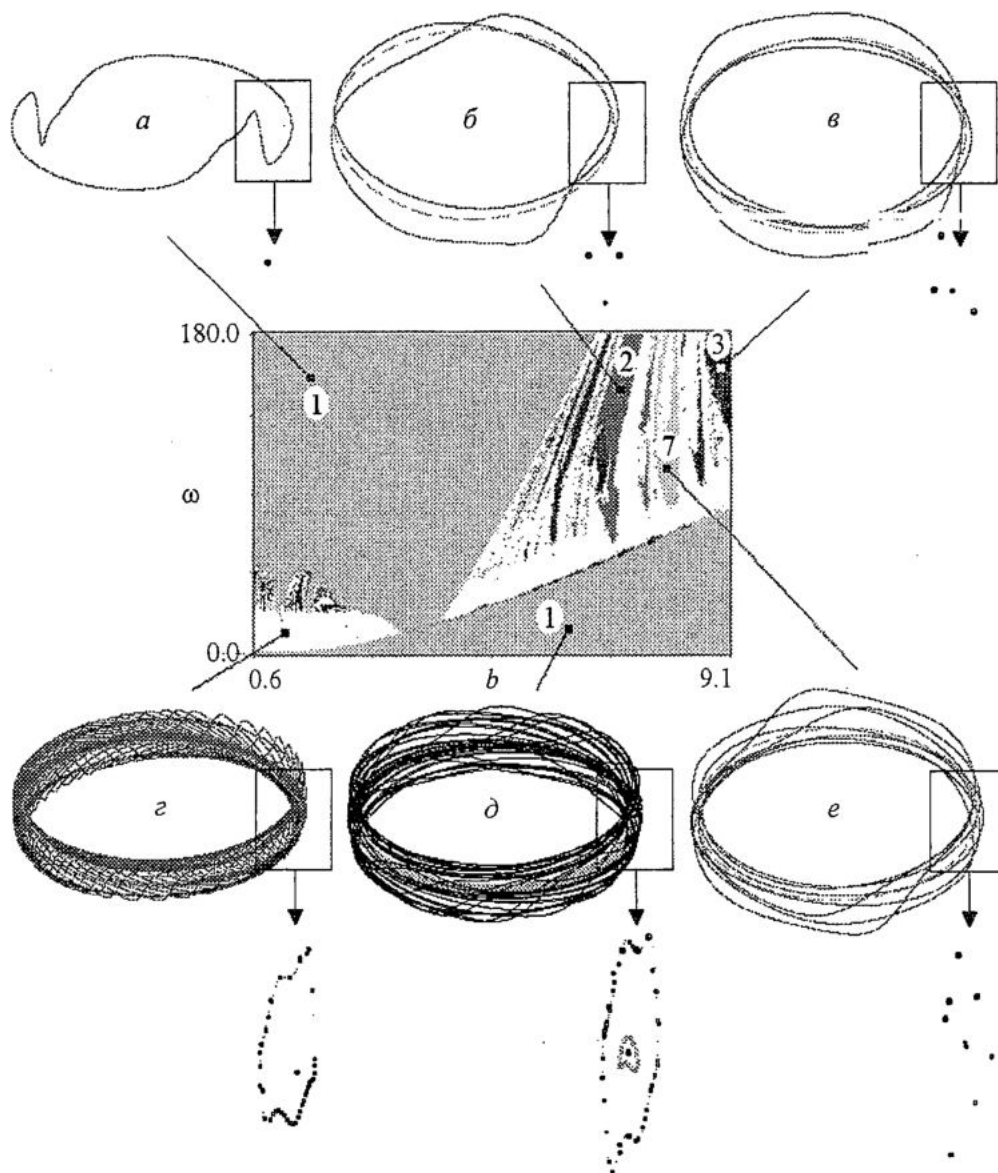


Рис. 12. Карта динамических режимов неавтономного уравнения Ван дер Поля - Дуффинга с жестким возбуждением. $\lambda=1$, $\beta=0.5$, $\kappa=0.05$

Проведенное нами численное исследование исходной дифференциальной системы показало, что при увеличении параметра k на плоскости параметров появляется линия бифуркации столкновения торов, как это было при анализе укороченного уравнения. Также нам удалось показать, что при достаточно больших значениях k эта линия опускается вниз и исчезает, однако при этом квазипериодические режимы все еще могут возникать между линиями бифуркации Андронова - Хопфа.

Заключение

Синхронизация в уравнении Ван дер Поля - Дуффинга с жестким возбуждением ранее практически не изучалась. Однако эта система представляется весьма интересной, так как она является простейшей моделью, демонстрирующей в автономном режиме бифуркацию слияния и исчезновения устойчивого и неустойчивого предельных циклов.

Анализ укороченного уравнения Ван дер Поля - Дуффинга показал, что синхронизация в системе может происходить как на устойчивых, так и на неустойчивых циклах. Соответственно, на плоскости параметров нормированная амплитуда - частота воздействия имеют два языка синхронизации, а также области, в которых сосуществуют устойчивый и неустойчивый циклы. Укороченное уравнение может иметь до пяти неподвижных точек, что предопределяет возможность новых нелокальных бифуркаций вблизи точек сборок. В системе пять управляющих параметров, и она может демонстрировать катастрофы высокой коразмерности, в том числе катастрофу «ласточкин хвост». При анализе плоскости параметров укороченного уравнения особое внимание было уделено окрестности точки катастрофы.

Одной из наиболее интересных и нетривиальных особенностей укороченного уравнения можно считать возможность исследования квазипериодических режимов выше порога бифуркации слияния устойчивого и неустойчивого циклов (после отрыва языка от оси Δ). Более того, нами было показано, что и после исчезновения линии столкновения предельных циклов в узких областях плоскости параметров устойчивые и неустойчивые циклы могут сосуществовать!

Сравнение численного исследования исходной дифференциальной системы с результатами анализа укороченного уравнения показало, что в исходной системе синхронизация происходит аналогичным образом: могут существовать устойчивые и неустойчивые периодические орбиты, которые сосуществуют с устойчивыми и неустойчивыми торами. Причем языки синхронизации имеют структуру, схожую с устройством плоскости параметров укороченного уравнения. Фазовые портреты и сечения Пуанкаре, построенные для выделенных точек карты режимов, позволяют более наглядно представить реализующиеся в системе аттракторы, а также произвести правильный выбор начальных условий при построении карты с учетом мультистабильности.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 03-02-16074.

Библиографический список

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М., 1984.
2. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов, 1999, 368 с.

3. *Uezu T.* Topology in dynamical systems // *Physics Letters A.* 1938. Vol. 93, № 4.
4. *Van der Pol B.* Theory of the amplitude of free and forced triode vibration // *Radio Rev.* 1920. Vol. 1. P. 701 - 710.
5. *Guckenheimer J., Holmes P.J.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. NY, 1993.
6. *Mettin R., Parlitz U., Lauterborn W.* Bifurcation structure of the driven Van der Pol oscillator // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 1993. Vol.3, № 6.
7. *Parlitz U.* Common dynamical features of periodically driven strictly dissipative oscillators // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 1993. Vol. 3, № 3.
8. *Dumortier F., Rousseau C.* Cubic Lienard equation with linear damping // *Nonlinearity* 3, 1990. P. 1015-1039.
9. *Glenndinning P., Proctor M.* Travelling waves with spatially resonant forcing: bifurcations of a modified Landau equation // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 1993. Vol. 3, № 6.
10. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит. 2002. 292 с.
11. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 127 с.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 27.02.03
после доработки 29.04.03

SYNCHRONIZATION IN THE SYSTEM WITH BOTH STABLE AND UNSTABLE LIMIT CYCLES COLLISION BIFURCATION

A.P. Kuznetsov, S.V. Milovanov

The paper deals with the system where stable and unstable limit cycles collision bifurcation occurs. The approximate and precise study are carried out, the parameter planes and phase portraits are also presented. The possibility of synchronization above the threshold of cycles-collision bifurcation is discovered.



Кузнецов Александр Петрович - родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лица прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики».

E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.tserv.ru



Сергей Викторович Милованов - родился в 1980 году. Сейчас он аспирант факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Область научных интересов - методы топологии в нелинейной динамике, сложная динамика неавтономных систем и двумерные отображения. Принимал участие в 12 научных конференциях, в том числе в 3 международных. Имеет две публикации. Соросовский студент 2000 и 2001 годов. В 2003 году был с рабочим визитом в Потсдамском Университете (Германия).



АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ ВОЗБУЖДЕНИЯ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ВО ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРАХ С ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.В. Матросов, Д.В. Касаткин

В работе обсуждаются вопросы генерации хаотически модулированных колебаний ансамблем, состоящим из трех взаимосвязанных систем фазовой синхронизации. Выявлены и проиллюстрированы многочисленные сценарии перехода от регулярных колебаний к хаотическим. Проведен анализ влияния связей на хаотические режимы связанных генераторов.

Одной из актуальных проблем современной радиофизики и нелинейной динамики является проблема анализа динамики систем, состоящих из взаимодействующих нелинейных элементов. Связано это во многом с тем, что нелинейные элементы, даже обладая простой индивидуальной динамикой, при объединении в ансамбль способны демонстрировать большое разнообразие автоколебательных режимов и бифуркационных переходов, не свойственных парциальным элементам. При этом существует возможность управления свойствами возникающих колебаний с помощью параметров связей. Эффективное управление колебаниями требует детального исследования автоколебательных процессов, в частности, механизмов их возникновения и хаотизации.

Объектом исследования в данной работе является ансамбль взаимосвязанных генераторов с локальными цепями управления по фазе (систем фазовой автоподстройки - ФАП). Такие системы широко используются при решении большого круга прикладных задач современной радиотехники и радиофизики [1,2]. К объединению систем ФАП прибегают для улучшения динамических характеристик устройств синхронизации, для решения специфических задач, например, связанных с обработкой сложных сигналов [3,4] или с синтезом частот [5]. Наконец, объединение нескольких ФАП в ансамбль является одним из направлений на пути создания высокоэффективных генераторов хаотически модулированных колебаний (ХМК). Интерес к таким генераторам в последнее время возрос в связи с перспективой их практического использования, в частности, для передачи информации на хаотической несущей [6-10]. Разработка устройств, обеспечивающих надежную генерацию ХМК, неразрывно связана с анализом процессов возбуждения хаотических колебаний и изучением свойств генерируемых колебаний. Настоящая работа посвящена изучению механизмов возникновения хаотических колебаний в каскадно связанных системах ФАП.

1. Математические модели генераторов

Рассматривается ансамбль, состоящий из трех каскадно связанных систем ФАП (далее - КФАП) с фильтрами первого порядка в цепях управления. Этот тип объединения систем в ансамбль характеризуется тем, что сигнал с выхода первого генератора является входным для второго генератора, а сигнал с выхода второго генератора - входным для третьего. На вход первого генератора поступает опорный сигнал.

Наряду с основными связями в ансамбле присутствуют дополнительные связи через локальные цепи управления: сигнал управления вторым генератором подается в цепь управления первого генератора, а сигнал управления третьим генератором поступает в цепь управления второго генератора. В результате введения дополнительных связей ансамбль однонаправленно связанных генераторов преобразуется в ансамбль взаимосвязанных генераторов [4,11].

Динамические процессы такого ансамбля описываются следующими уравнениями

$$\begin{aligned}d\varphi_1/dt &= y_1, \quad \varepsilon_1 dy_1/dt = \gamma_1 - y_1 - \sin\varphi_1 - \kappa_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\d\varphi_2/dt &= y_2, \quad \varepsilon_2 dy_2/dt = \gamma_2 - y_2 - \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \kappa_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2), \\d\varphi_3/dt &= y_3, \quad \varepsilon_3 dy_3/dt = \gamma_3 - y_3 - \sin(\varphi_3 - \varphi_2),\end{aligned}\tag{1}$$

определенными в шестимерном цилиндрическом фазовом пространстве $U = \{\varphi_1(\text{mod}2\pi), y_1, \varphi_2(\text{mod}2\pi), y_2, \varphi_3(\text{mod}2\pi), y_3\}$. Здесь φ_i и y_i - текущие фазовые и частотные ошибки; γ_i - начальные частотные расстройки генераторов относительно опорного сигнала; $\kappa_{1,2}$ - параметры дополнительных связей; ε_i - постоянные времени фильтров в цепях управления ($i=1,2,3$). Индивидуальная динамика системы ФАП описывается двумя первыми уравнениями модели (1), если положить в них $\kappa_1=0$, то есть динамической системой на фазовом цилиндре $U_1 = \{\varphi_1(\text{mod}2\pi), y_1\}$. Следовательно, рассматриваемая система (1) представляет собой три динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством, объединенные нелинейным способом. В силу существенной нелинейности модели (1) ее исследование проведено путем численного моделирования, базирующегося на методах качественной теории и теории бифуркаций многомерных динамических систем, с использованием программного комплекса ДНС [12].

2. Динамические режимы генераторов

Коллективное поведение генераторов ансамбля определяется типом аттрактора в глобальном фазовом пространстве U , поведение же отдельного i -го генератора характеризуется поведением фазовой траектории в локальном фазовом подпространстве $U_i = \{\varphi_i(\text{mod}2\pi), y_i\}$, то есть проекцией аттрактора системы (1) на плоскость (φ_i, y_i) .

Известно [13,14], что система ФАП с фильтром первого порядка в цепи управления имеет два стационарных режима:

- режим синхронизации генератора опорным сигналом, при котором частоты управляемого генератора и опорного сигнала равны, а разность фаз принимает некоторое постоянное значение. На фазовом цилиндре U_1 этому режиму отвечает устойчивое состояние O ($\varphi_1^* = \arcsin \gamma_1, y_1^* = 0$);

- режим биений, при котором разность фаз постоянно растет, а средняя разность частот имеет некоторое постоянное значение. Этому режиму соответствует устойчивый предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр U_1 .

Таким образом, индивидуальная динамика элемента ансамбля достаточно проста: в зависимости от параметров и начальных условий генератор либо находится в синхронном режиме, либо функционирует в регулярном режиме биений.

При объединении трех генераторов в ансамбль их динамика претерпевает существенные изменения. Теперь, наряду с синхронными и регулярными режимами биений, генераторы способны демонстрировать сложные автоколебательные режимы, вплоть до хаотических. Результатом объединения генераторов является возникновение нового (не свойственного парциальной системе ФАП) квазисинхронного режима, при котором на выходе генератора имеют место колебания с угловой модуляцией со средней частотой, стабилизированной по опорной частоте. При этом модуляция колебаний может быть как регулярной, так и хаотической. Далее квазисинхронный режим с хаотической угловой модуляцией будем называть режимом ХМК [10]. Коллективная динамика ансамбля характеризуется режимами глобальной и частичной синхронизации, регулярной и хаотической квазисинхронизации, а также регулярными и хаотическими режимами биений [4,11].

Установим соответствие между аттракторами модели (1) и колебательными режимами КФАП [11]. Для этого введем в рассмотрение индекс вращения (индекс квазисинхронизма) $[J_1, J_2, J_3]$, где $J_i=1$, если по координате φ_i происходит вращение, и $J_i=0$ в противном случае. Отсутствие вращения по координате φ_i означает, что i -й генератор работает в квазисинхронном (синхронном) режиме, когда остальные генераторы находятся в режиме биений. При этом, если аттрактор хаотический, то на выходе генераторов имеют место либо ХМК, либо хаотические биения. Выход фазовых траекторий на хаотический колебательный аттрактор с индексом вращения $[0,0,0]$ соответствует генерации хаотически модулированных колебаний на выходе всех генераторов ансамбля. Это *глобальный ХМК-режим* КФАП. Генерации хаотически модулированных колебаний на выходе отдельных генераторов соответствуют колебательно-вращательные хаотические аттракторы, у которых индексы вращения содержат как нули, так и единицы. Эти аттракторы определяют режим частичной генерации хаотически модулированных колебаний ансамблем ФАП или *частичный ХМК-режим* КФАП. Наконец, наличие в фазовом пространстве вращательного хаотического аттрактора с индексом вращения $[1,1,1]$ отвечает *глобальному хаотическому режиму биений*.

3. Бифуркационные переходы к хаотическим колебаниям

Исследование движений модели (1) показало, что возбуждение хаотических колебаний в генераторах ансамбля может протекать по различным сценариям. Ниже рассмотрены некоторые сценарии возникновения и эволюции хаотических колебаний в модели КФАП, обнаруженные в процессе численных экспериментов.

3.1. Одним из основных переходов к хаотическим колебаниям в моделях КФАП является переход по сценарию Фейгенбаума. Этот сценарий справедлив для любых типов движений, то есть не зависит от индекса вращения. Рис. 1 иллюстрирует эволюцию колебательного предельного цикла при увеличении параметра κ_2 от 0.63 до 2.35. На рис. 1, а представлена однопараметрическая бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре, характеризующая переход от глобального регулярного квазисинхронного режима к регулярному режиму частичной квазисинхронизации через глобальный и частичный ХМК-режимы. Бифуркационная диаграмма на рис. 1, б иллюстрирует возвращение КФАП на глобальный квазисинхронный режим при дальнейшем увеличении силы связи κ_2 .

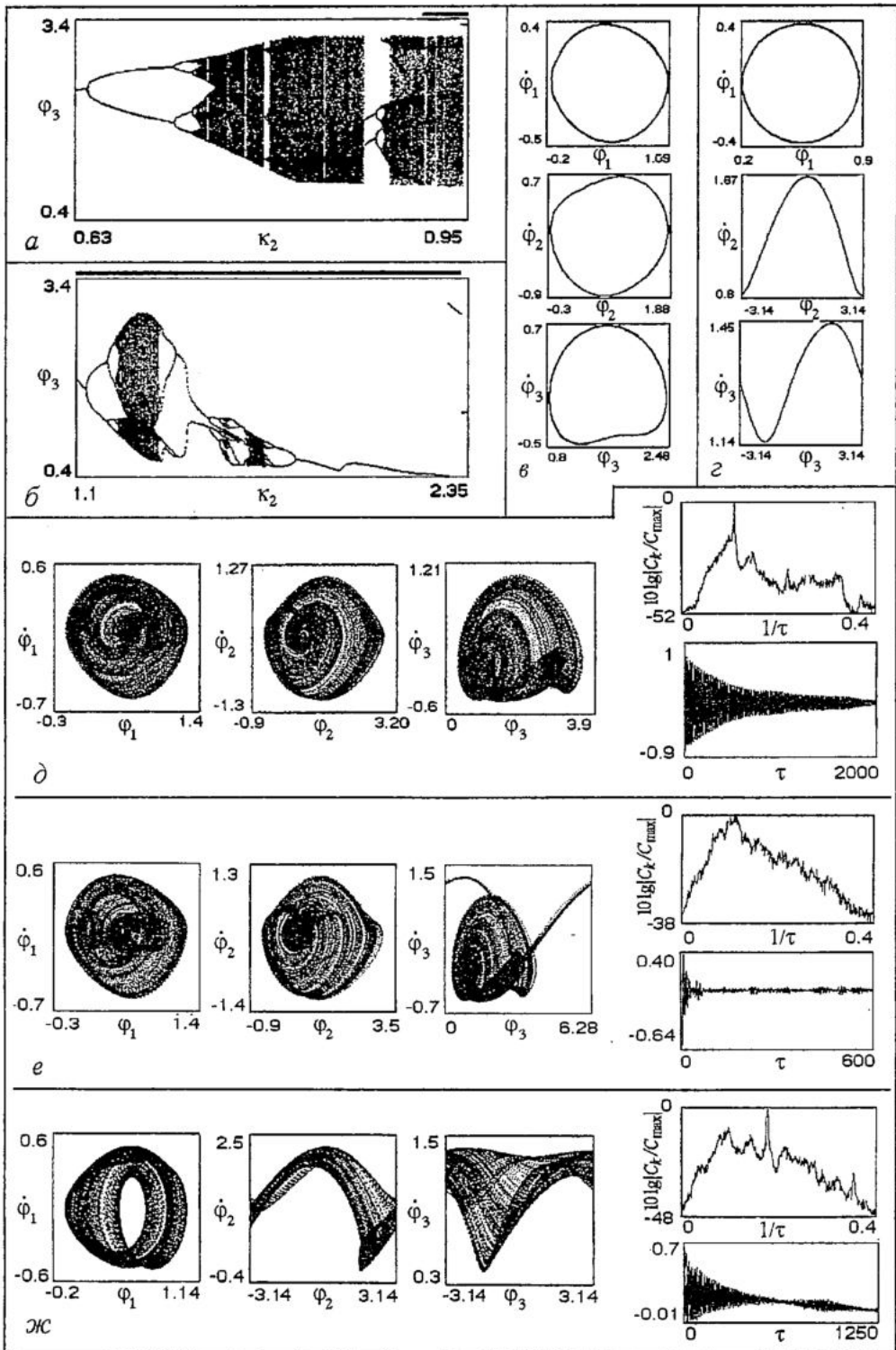


Рис. 1. Фрагменты однопараметрической бифуркационной диаграммы отображения Пуанкаре модели (1) при $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0.5$, $\kappa_1=0.5$, $\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon_3=1.0$ (а), (б); проекции предельных циклов типа $[0,0,0]$ и $[0,1,1]$ при $\kappa_2=0.63$ и $\kappa_2=0.95$ - (в) и (г), соответственно; проекции, спектры и автокорреляционные функции хаотических аттракторов: колебательного при $\kappa_2=0.8$ (д), колебательно-вращательных типа $[0,0,1]$ при $\kappa_2=0.93$ (е) и типа $[0,1,1]$ при $\kappa_2=1.3$ (ж)

Стартовым состоянием бифуркационной диаграммы служит предельный цикл, изображенный на рис. 1, в. При увеличении параметра κ_2 этот предельный цикл проходит через серию бифуркаций удвоения периода: при $\kappa_2^{(1)}=0.638407$, $\kappa_2^{(2)}=0.709835$, $\kappa_2^{(3)}=0.724888$, $\kappa_2^{(4)}=0.728068$ и т.д. В результате этих бифуркаций в фазовом пространстве модели (1) рождается хаотический аттрактор с индексом вращения $[0,0,0]$. Он определяет глобальный ХМК-режим КФАП. Пример хаотического аттрактора, отвечающего за генерацию хаотически модулированных колебаний всеми генераторами ансамбля, с его спектром и автокорреляционной функцией представлен на рис. 1, д. Хаотичность этого аттрактора подтверждается значением максимального ляпуновского показателя $\lambda_{\max}=0.125$.

Дальнейшее усиление связи κ_2 приводит к срыву квазисинхронного режима третьего генератора на хаотический режим биений, при этом первый и второй генераторы продолжают работать в режиме генерации ХМК. Таким образом, в ансамбле устанавливается частичный ХМК-режим. На бифуркационной диаграмме интервал значений параметра κ_2 , при которых аттрактор, порождающий отображение Пуанкаре, имеет вращение по координате φ_3 , отмечен темной линией над диаграммой. Колебательно-вращательный хаотический аттрактор с индексом вращения $[0,0,1]$, отвечающий за генерацию хаотически модулированных колебаний на выходе первого и второго генераторов, со спектром и автокорреляционной функцией представлен на рис. 1, е. Максимальный ляпуновский показатель этого аттрактора $\lambda_{\max}=0.138$.

Сравнительный анализ характеристик (ляпуновских показателей, спектров и автокорреляционных функций) колебательного и колебательно-вращательного аттракторов свидетельствует, что свойства хаотически модулированных колебаний на выходе первого и второго генераторов могут быть существенно модифицированы путем изменения динамического режима третьего генератора за счет силы второй дополнительной связи. Однако введение сильной связи в рассматриваемом случае приводит к переходу первого генератора на режим одночастотных квазисинхронных колебаний, а второго и третьего генераторов - на одночастотный режим биений. Фазовые проекции предельного цикла, отвечающего режиму регулярной частичной квазисинхронизации КФАП типа $[0,1,1]$, приведены на рис. 1, г. Этот режим остается неизменным до значений $\kappa_2=1.13114$, когда предельный цикл $[0,1,1]$ проходит через бифуркацию удвоения периода. При дальнейшем увеличении параметра κ_2 бифуркации удвоения периода цикла повторяются и приводят к рождению хаотического аттрактора с индексом вращения $[0,1,1]$. На рис. 1, ж приведены фазовые проекции, спектр и автокорреляционная функция аттрактора с максимальным ляпуновским показателем $\lambda_{\max}=0.127$, отвечающего за генерацию хаотически модулированных колебаний на выходе только первого генератора ансамбля.

Продолжение увеличения параметра κ_2 приводит к регуляризации колебаний управляемых генераторов в интервалах $(1.37, 1.57)$, $(1.585, 1.64)$ и $(1.7, 2.33167)$. При значениях параметра κ_2 из этих интервалов в фазовом пространстве U существует предельный цикл типа $[0,1,1]$, а в КФАП реализуется режим частичной регулярной квазисинхронизации первого генератора. Выход из последнего интервала через границу $\kappa_2=2.33167$ сопровождается исчезновением предельного цикла $[0,1,1]$ в петлю сепаратрис седла и выходом системы (1) на колебательный предельный цикл. В КФАП устанавливается глобальный одночастотный квазисинхронный режим, который при дальнейшем увеличении κ_2 переходит в глобальный режим синхронизации.

3.2. В процессе исследований установлено, что связи в КФАП могут быть организованы таким образом, что система КФАП, состоящая из трех генераторов,

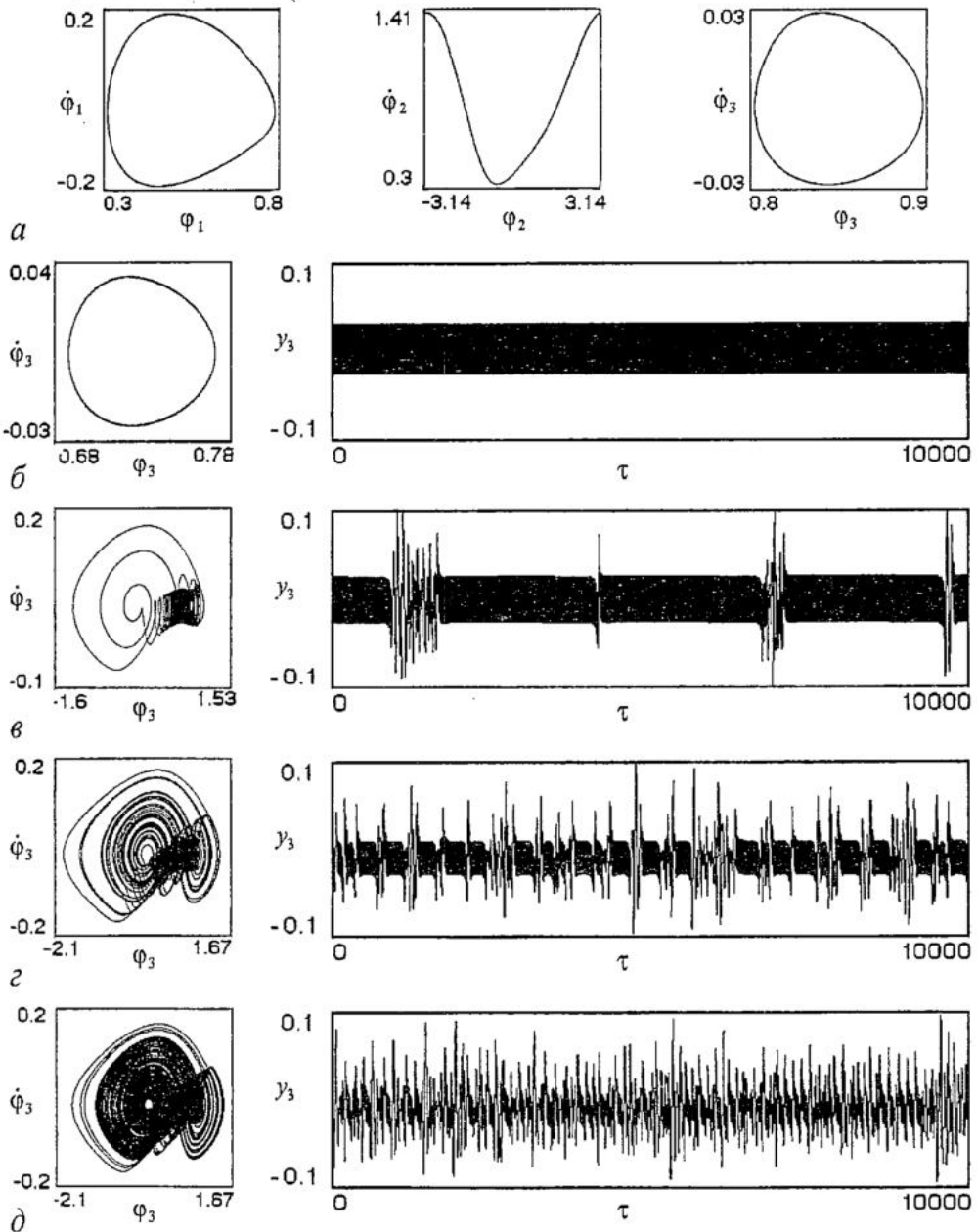


Рис. 2. Переход к хаотическим колебаниям через перемежаемость первого рода: колебательно-вращательный цикл типа $[0,1,0]$ системы (1) при $\gamma_1=0.5$, $\epsilon_1=1.0$, $\kappa_1=0.2$, $\gamma_2=0.7$, $\epsilon_2=0.0$, $\gamma_3=0.3$, $\epsilon_3=50.0$, $\kappa_2=1.39$ (а); (φ_3, y_3) -проекция аттрактора и реализация во времени переменной y_3 при следующих значениях κ_2 : б - 1.39; в - 1.39037; г - 1.3915; д - 1.416

сохраняет бифуркационные свойства двух последовательно связанных генераторов. Например из [15] известно, что в модели ансамбля из двух ФАП при изменении силы дополнительной связи κ от 1.38 до 1.4 реализуется механизм перехода к хаотическим колебаниям через перемежаемость первого рода [16,17]. Используя этот каскад из двух элементов в качестве второго и третьего генераторов КФАП со связью $\kappa_2=1.38$, задав параметры первого генератора в области синхронизации и силу связи $\kappa_1=0.2$, получаем систему трех связанных

ФАП, функционирующую в частичном квазисинхронном режиме. В фазовом пространстве системы (1) этому режиму соответствует устойчивый предельный цикл с индексом вращения $[0,1,0]$ (рис. 2, а). Увеличение κ_2 в рассматриваемой системе КФАП приводит к исчезновению предельного цикла в результате касательной бифуркации и рождению хаотического аттрактора типа $[0,1,0]$. Развитие во времени фазовых переменных хаотического аттрактора вблизи бифуркационного значения параметра содержит длинные ламинарные области, прерываемые короткими хаотическими всплесками, что характерно для аттракторов, возникающих через перемежаемость. Дальнейшее увеличение значений параметра κ_2 приводит к укорачиванию ламинарных участков и увеличению хаотических, при $\kappa_2=1.416$ поведение фазовых переменных становится полностью хаотическим (рис. 2, б).

3.3. Если использовать рассмотренный выше двумерный каскад в качестве первых двух генераторов ансамбля, а в качестве третьего генератора применить генератор, функционирующий в режиме биений, то подбором значений параметров γ_3 и ε_3 можно добиться генерации регулярных двухчастотных колебаний на выходе третьего генератора. Теперь увеличение связи κ_1 (связи, которая в двухкаскадной системе приводила к касательной бифуркации) будет определять слияние и исчезновение устойчивого и неустойчивого инвариантных торов, то есть переход к хаотическим колебаниям типа «тор-хаос». Здесь при исчезновении инвариантных торов в фазовом пространстве образуется хаотический аттрактор с индексом вращения $[1,0,1]$. Введение слабой связи κ_2 качественно не меняет наблюдаемое бифуркационное явление. Рис. 3 иллюстрирует описанную выше бифуркацию разрушения инвариантного тора с образованием хаотического аттрактора.

3.4. Переход к хаотическим колебаниям через перемежаемость второго рода система (1) демонстрирует при $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0.5$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1.0$, $\kappa_2=1.8$ и $\kappa_1 \in (-0.9185, -0.9186)$. При значениях $\kappa_1=-0.9185$ в фазовом пространстве U существует устойчивый двукратный предельный цикл с мультипликаторами $\mu_{1,2}=0.0000005 \pm i0.000004$, $\mu_3=0.000004$, $\mu_{4,5}=0.1075 \pm i0.9904$ (рис. 4, а). Это предельный цикл типа устойчивый фокус и фазовые траектории асимптотически приближаются к нему, порождая в сечении Пуанкаре скручивающиеся спирали. Уменьшение значений параметра κ_1 до -0.9186 приводит к тому, что предельный цикл теряет устойчивость в результате бифуркации Андронова - Хопфа (мультипликаторы $\mu_{4,5}=0.1147 \pm i0.9947$ оказываются за пределами единичного круга). Теперь фазовые траектории уходят от цикла, порождая в сечении Пуанкаре раскручивающиеся спирали. В результате бифуркации цикла траектории из его окрестности уходят, однако через сравнительно небольшое время они вновь возвращаются в покинутую окрестность неустойчивого предельного цикла, и далее процесс повторяется. В фазовом пространстве рождается хаотический аттрактор с характерной перемежаемостью - длительное пребывание фазовой траектории в окрестности неустойчивого предельного цикла сопровождается короткими хаотическими всплесками. На рис. 4, б, в представлены проекции фазового портрета и отображения Пуанкаре, спектр и автокорреляционная функция родившегося хаотического аттрактора. Свойства перемежаемости этого аттрактора можно наглядно проиллюстрировать, если воспользоваться точечным отображением Пуанкаре.

Построим картину, где по горизонтали будем откладывать номер j точки пересечения фазовой траектории хаотического аттрактора с секущей Пуанкаре, а по вертикали координату этой точки $y_2=d\varphi_2/dt$. В результате получаем картину, представленную на рис. 4, г, на которой наглядно видно длительное пребывание

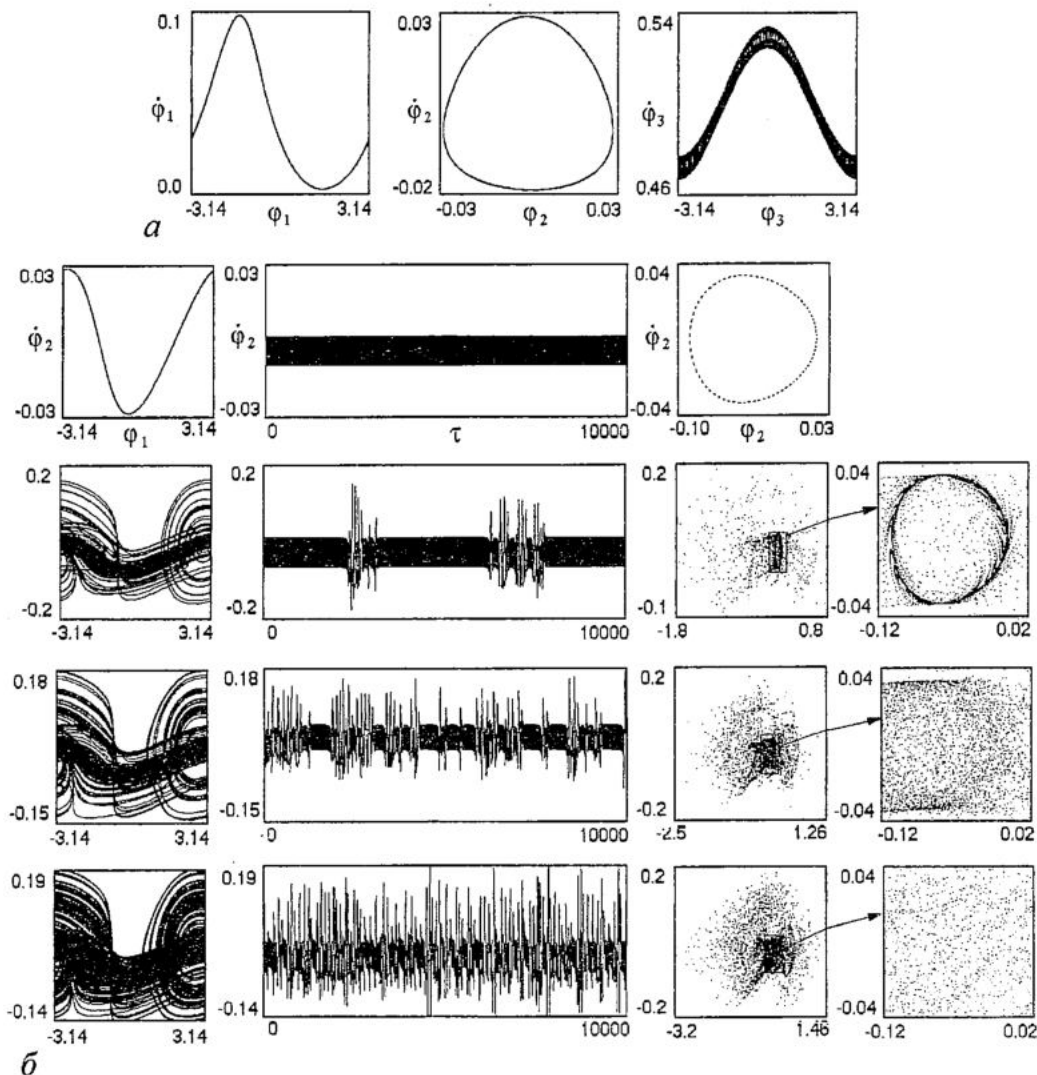


Рис. 3. Устойчивый инвариантный тор системы (1) с индексом вращения $[1,0,1]$ (а); переход к хаотическим колебаниям через перемежаемость типа «тор - хаос» (б)

фазовой траектории в окрестности предельного цикла и короткие (до 20 точек отображения) случайные всплески. Наличие на рис. 4, г двух уровней сосредоточения точек отображения Пуанкаре объясняется тем, что неустойчивый цикл имеет кратность два, а неравномерность распределения по этим уровням объясняется хаотичностью аттрактора.

3.5. Рис. 5 иллюстрирует переход к хаотическим колебаниям через удвоение торов. На бифуркационной диаграмме (рис. 5, а) по вертикали отложены значения локальных и глобальных минимумов сечения Пуанкаре по координате $y_2 = \dot{\phi}_2$. Начальным состоянием для построения бифуркационной диаграммы служил инвариантный тор системы (1) при $\gamma_1=1.7$, $\gamma_2=0.3$, $\gamma_3=0.5$, $\kappa_1=1.4$, $\kappa_2=0.35$, $\epsilon_1=0$, $\epsilon_2=50.0$, $\epsilon_3=65.0$. Этот аттрактор имеет индекс вращения $[1,0,0]$, проекция его сечения Пуанкаре представлена на рис. 5, в (фрагмент 1). Увеличение параметра ϵ_3 приводит к бифуркациям рождения торов периодов два (фрагмент 2 при $\epsilon_3=69.0$), четыре (фрагмент 3 при $\epsilon_3=70.0$), восемь (фрагмент 4 при $\epsilon_3=70.2$) и

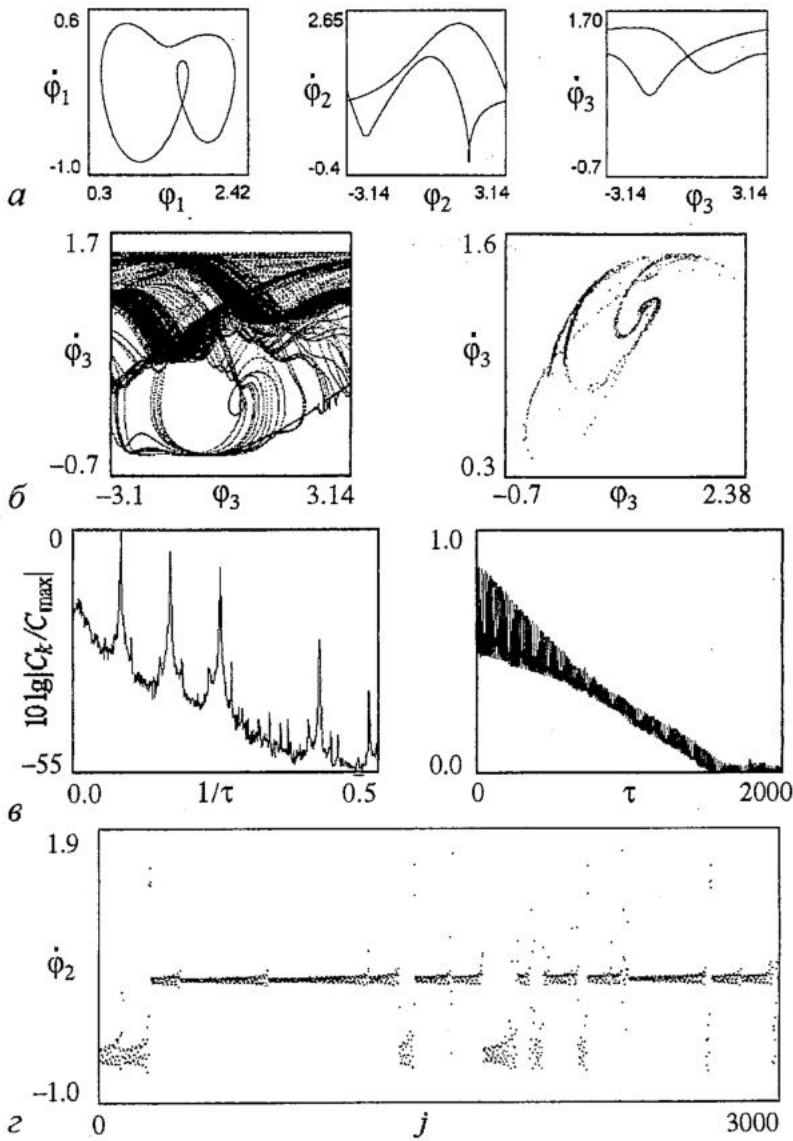


Рис. 4. Переход к хаотическим колебаниям через перемежаемость второго рода: проекции аттрактора до бифуркации (а); (φ_3, y_3) -проекция фазового портрета и отображения Пуанкаре аттрактора (б) после бифуркации Андронова - Хопфа; его спектр и автокорреляционная функция (в); реализация в дискретном времени переменной y_2 (г)

далее к возникновению хаотических аттракторов (фрагменты 5 и 6 при $\epsilon_3=70.4$ и $\epsilon_3=70.7$). На рис. 5, б приведены зависимости двух максимальных по модулю ляпуновских показателей от параметра ϵ_3 , при этом еще два показателя практически (с точностью до параметров расчета) равны нулю, а еще один является отрицательным. Прохождение инвариантного тора через бифуркацию удвоения сопровождается практическим обнулением максимального ляпуновского показателя, а переход к хаотическому аттрактору - выходом максимального показателя в область положительных значений.

При $\epsilon_3 \approx 71.84$ хаотический аттрактор разрушается и фазовые траектории из его окрестности переходят на инвариантный тор типа [1,1,1]. Проекция фазового портрета этого вращательного тора и проекция сечения Пуанкаре плоскостью

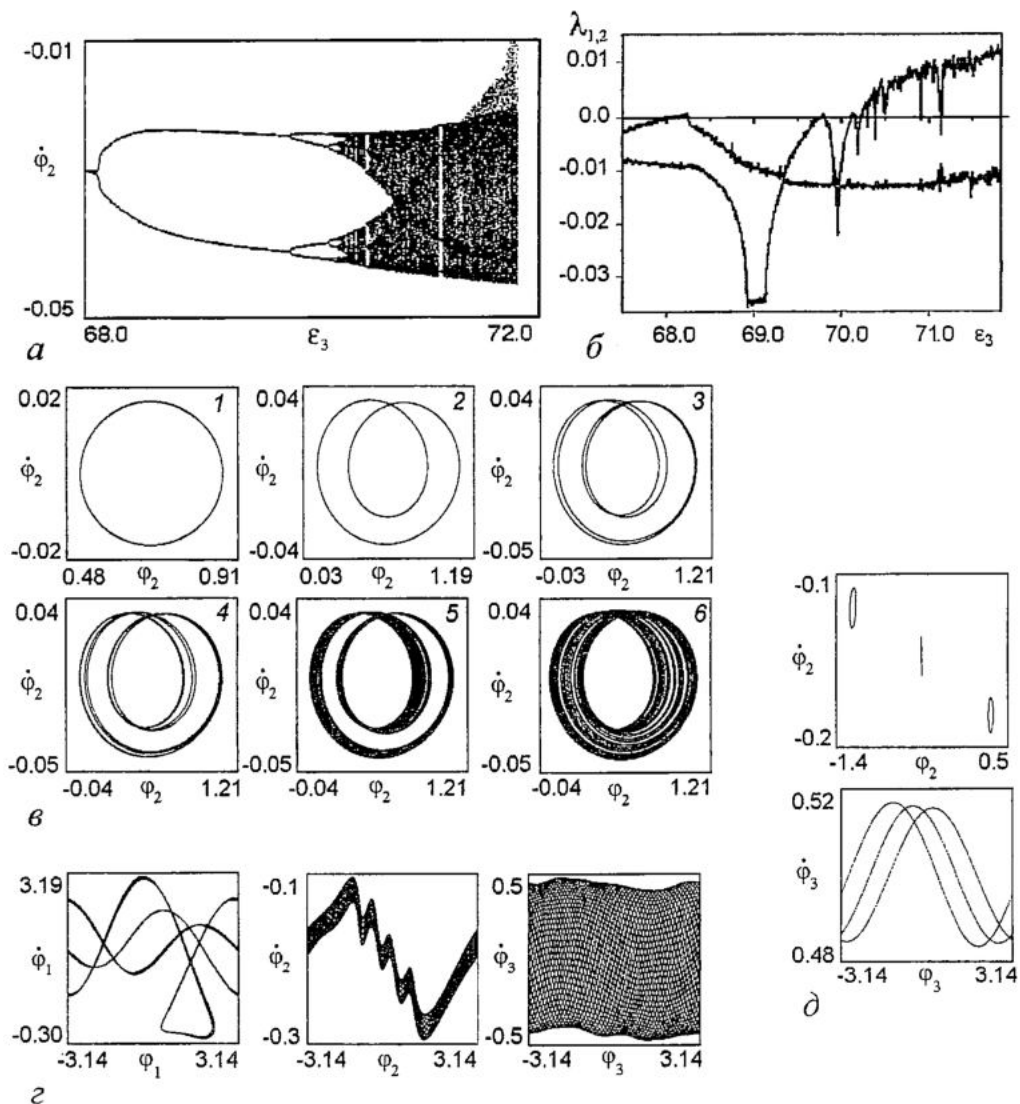


Рис. 5. Переход к хаотическим колебаниям через бифуркации удвоения двумерного тора: однопараметрическая бифуркационная диаграмма (а); зависимость двух максимальных по модулю ляпуновских показателей от параметра ϵ_3 (б); двумерные $(\phi_2, \dot{\phi}_2)$ -проекции отображения Пуанкаре (в). Проекции фазовых траекторий (г) и сечения Пуанкаре (д) двумерного тора с индексом вращения $[1,1,1]$ при $\epsilon_3=71.85$

$\phi_1=0$ изображены на рис. 5, г и д, соответственно. Примечательно, что, хотя сечение Пуанкаре в проекции на плоскость $(\phi_2, \dot{\phi}_2)$ имеет вид замкнутых кривых, а на плоскость $(\phi_3, \dot{\phi}_3)$ - периодических кривых, вращение фазовых траекторий происходит по обеим координатам ϕ_2 и ϕ_3 . В КФАП устанавливается глобальный двухчастотный режим биений.

3.6. Установлено, что возбуждение хаотических колебаний на выходе генераторов КФАП не всегда сопровождается бифуркациями аттракторов в глобальном фазовом пространстве U . Такие явления наблюдаются при возникновении колебаний в отдельных генераторах ансамбля и связаны они с качественными изменениями поведения фазовой траектории в локальных фазовых подпространствах. Например рассмотрим КФАП, где первый генератор находится в синхронном режиме, а два других функционируют в хаотическом режиме ($\kappa_1=0$).

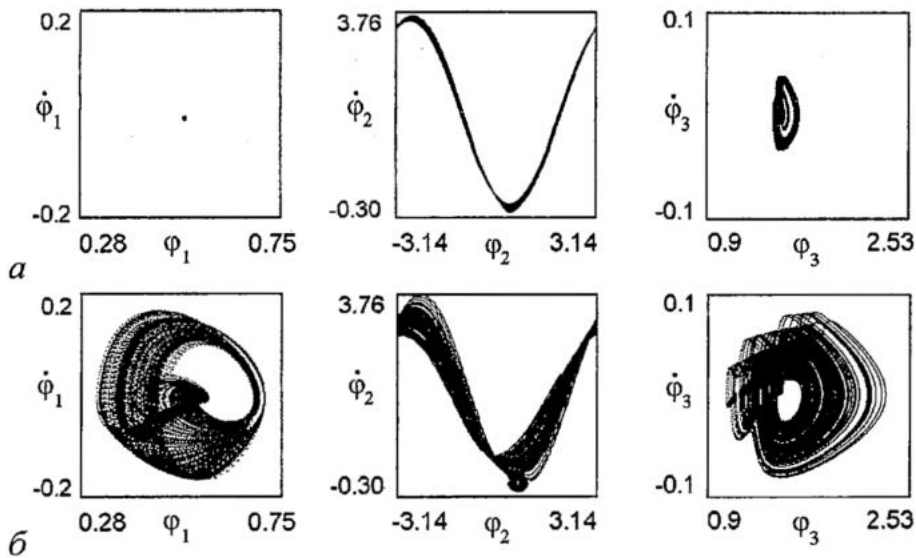


Рис. 6. Проекция хаотического аттрактора модели (1) типа $[0,1,0]$ при $\gamma_1=0.5$, $\varepsilon_1=1.0$, $\gamma_2=1.7$, $\varepsilon_2=0.0$, $\gamma_3=0.68$, $\varepsilon_3=50$, $\kappa_2=1.9$ для различных κ_1 : а - 0.0; б - 0.2

Такому режиму в фазовом пространстве модели (1) отвечает хаотический аттрактор типа $[0,1,0]$ (рис. 6, а), который в проекции на плоскость $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ дает точку. Организуем слабую дополнительную связь между цепями управления первого и второго генераторов ($\kappa_1 \ll 1$). В результате введения дополнительной связи κ_1 синхронный режим первого генератора преобразуется в ХМК-режим. Теперь все три генератора ансамбля функционируют в хаотических режимах. Этому состоянию КФАП в фазовом пространстве модели (1) также отвечает хаотический аттрактор типа $[0,1,0]$, но теперь в локальном фазовом подпространстве U_1 имеем картину, типичную для хаотического аттрактора (рис. 6, б).

Заканчивая рассмотрение бифуркационных переходов к хаосу в модели КФАП отметим, что в процессе численных экспериментов с моделью (1) были выявлены и другие сценарии перехода к хаосу: через перемежаемость третьего рода, а также через многочисленные бифуркации периодических движений на двумерных торах.

Заключение

Анализ бифуркаций аттракторов системы (1) позволяет констатировать, что в ансамбле трех связанных генераторов реализуются практически все известные в настоящее время сценарии перехода от регулярных колебаний к хаотическим. Установлено, что переход к хаотически модулированным колебаниям у генераторов, объединенных в ансамбль, может быть осуществлен путем организации дополнительной связи. При этом процесс возбуждения хаотически модулированных колебаний не сопровождается бифуркационными явлениями в глобальном фазовом пространстве математической модели. Показано, что при добавлении к малым ансамблям ФАП новых генераторов можно организовать связи таким образом, что ансамбль с большим числом элементов сохранит свойства малого ансамбля. Это позволяет целенаправленно синтезировать новые режимы КФАП и управлять ими с помощью параметров связей.

Ансамбль трех связанных ФАП обладает существенно большим разнообразием динамических режимов по сравнению с ансамблем из двух ФАП [15,18]. В частности, в КФАП путем подбора параметров достаточно просто возбудить

двухчастотные колебания (в фазовом пространстве математической модели этим колебаниям отвечают двумерные инвариантные торы), которые существуют в достаточно широких диапазонах изменения параметров. При разрушении инвариантные торы способны демонстрировать разнообразные сценарии перехода к хаосу, связанные как с бифуркациями тора как целого, так и с бифуркациями периодических движений на торе [19].

Представленные результаты расширяют знания о бифуркационных переходах связанных систем типа «взаимосвязанные ротаторы». Они могут представлять интерес и для других приложений, не связанных с системами ФАП [2,4,20,21].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-02-17573, 03-02-06369), программы «Университеты России» (проект УР.03.01.027).

Библиографический список

1. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
2. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении / Пер. с англ. под ред. Ю.Н. Бакаева и М.В. Капранова. М.: Сов.радио, 1978.
3. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н.Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. С.55.
4. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: ИПФ АН СССР, 1989.
5. Федосова Т.С. Анализ систем фазовой синхронизации с двумя периодическими нелинейностями // Радиотехника. 1986. № 6. С. 46.
6. Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О. Динамический хаос как парадигма современных систем связи // Зарубеж. радиоэлектрон. Успехи современной радиоэлектроники. 1997. № 10. С. 4.
7. Шалфеев В.Д., Матросов В.В., Корзинова М.В. Динамический хаос в ансамблях связанных фазовых систем // Зарубеж. радиоэлектрон. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 11. С.44.
8. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Ларионова М.В., Морозов А.Г., Удалов Н.Н. Свойства передачи информации с манипуляцией параметрами и начальными условиями генераторов хаотических колебаний // Зарубеж. радиоэлектрон. Успехи современной радиоэлектроники. 2000. № 11. С. 48.
9. Shalfeev V.D., Matrosov V.V., and Korzinova M.V. Chaos in Phase Systems: Generation and Synchronization // Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems / Ed. by G. Chen. CRC Press. Boca - Raton - London - New York - Washington, D.C. 2000. P. 529.
10. Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Хаотически модулированные колебания в связанных фазовых системах // Нелинейные волны 2002 / Отв.ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2003. С. 77.
11. Матросов В.В., Касаткин Д.В. Динамические режимы связанных генераторов с фазовым управлением // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48. № 5.
12. Матросов В.В. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Н. Новгород: ННГУ, 2002.
13. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
14. Белюстина Л.Н., Белых В.Н. Качественное исследование динамической системы на цилиндре // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9. № 3. С. 403.
15. Matrosov V.V., Shalfeev V.D., and Forti G.L. Regular and chaotic oscillations

in pendulum like systems. Preprint Dipartimento di matematica «F.Enriques», Università degli studi di Milano. № 8. 2000. 17 p.

16. Берже П., Помо И., Видаль К. О детерминированном подходе к турбулентности / Пер. с фран. М.: Наука, 1991. 386 с.

17. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение / Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 240 с.

18. Матросов В.В., Корзинова М.В. Синхронные и автоколебательные режимы каскадного соединения фазовых систем // Вестник ННГУ. Нелинейная динамика - синхронизация и хаос. 1996. Изд. ННГУ. С. 77.

19. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 423 с.

20. Белых В.Н., Веричев Н.Н. О динамике взаимосвязанных ротаторов // Известия вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 6. С. 688.

21. Казанович Я.Б., Борисюк Р.М. Изучение режимов синхронизации в нейронных сетях фазовых осцилляторов с центральным элементом // Исследования по математической биологии. Сб. научных трудов, посвященный памяти А.Д.Базыкина / Под ред. Э.Э. Шноля. Пущино, 1996. С. 124.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию 15.02.03
после доработки 17.03.03

ANALYSIS OF EXCITATION PROCESSES OF CHAOTIC OSCILLATIONS IN COUPLED PLLs

V.V. Matrosov, D.V. Kasatkin

The problem of generation of chaotic modulated oscillations in three elements ensemble of coupled PLLs is discussed. Many types of transition from regular to chaotic oscillations have been found and illustrated. The influence of the coupling on the chaotic regimes in coupled generators has been analyzed.



Матросов Валерий Владимирович - родился в 1960 году. Окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского государственного университета по специальности «прикладная математика» (1982). С 1984 по 1999 научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ, с 1999 года доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ. Кандидат физико-математических наук (1994), доцент (2001). Область научных интересов - динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 50 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.

E-mail: matrosov@neuron.appl.sci-nnov.ru



Касаткин Дмитрий Владимирович родился в Нижнем Новгороде (1978). Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (2001). В настоящее время является аспирантом кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ. Область научных интересов - теория колебаний и волн, нелинейная динамика активных сред, хаотическая динамика. Является соавтором нескольких научных статей по указанным направлениям.



БРОУНОВСКАЯ ДИФфуЗИЯ В СИММЕТРИЧНОМ БИМОДАЛЬНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ: КУМУЛЯНТНЫЙ ПОДХОД

О.В. Музыкачук

Рассмотрена релаксация вероятностных характеристик координат одномерного броуновского движения в симметричном потенциальном профиле с двумя устойчивыми равновесными состояниями. Для анализа использован кумулянтный подход, основанный на замыкании цепочки уравнений релаксации моментов (или кумулянтов) координат частиц в пренебрежении кумулянтами высших порядков.

Численным образом исследована релаксация первых трех кумулянтов вероятностного распределения. Выяснена зависимость времен релаксации среднего значения и дисперсии распределения от интенсивности шума, глубины потенциальных ям, начальных условий.

Изучение вероятностных характеристик неравновесного броуновского движения актуально для ряда проблем статистической радиофизики, радиоэлектроники, физической химии (см., например, [1]). Соответствующим математическим аппаратом является теория марковских процессов и процессов диффузионного типа [2,3]. В нелинейных задачах найти решения нестационарных уравнений Фоккера - Планка для вероятностных распределений не удастся, поэтому аналитических результатов здесь очень мало. Следует отметить существенную работу [4] (см. также библиографию в ней), где предложен довольно общий подход для оценки времени релаксации частиц в ряде потенциальных профилей. Некоторые аспекты эволюции средних значений броуновских частиц рассмотрены в [5].

Большой интерес для приложений представляют проблемы, связанные с диффузией через потенциальный барьер. Одна из таких задач решается в настоящей работе аналитико-численным образом.

1. Рассмотрим релаксацию вероятностных характеристик координат одномерного броуновского движения в симметричном потенциальном профиле¹

$$U(x) = -x^2/2 + \gamma x^4/4 \quad (1)$$

¹Использованный ниже кумулянтный подход позволяет, в принципе, рассмотреть и иной профиль, описываемый полиномом небольшой степени.

с двумя устойчивыми равновесными состояниями $x=\pm 1/\gamma^{1/2}$. Соответствующее уравнение Ланжевена:

$$T\dot{x} - x + \gamma x^3 = \xi(t), \quad (2)$$

где T - постоянная времени, $\xi(t)$ - дельта-коррелированный гауссов шум с нулевым средним и спектральной мощностью $D_\xi/2\pi$. Уравнение Фоккера - Планка для вероятностного распределения $W(x;t)$ имеет вид

$$\partial W/\partial \theta = \partial/\partial x[U'(x)W] + D\partial^2 W/\partial x^2 \quad (3)$$

и аналитически не решается. Здесь и ниже используем безразмерное время $\theta=t/T$; $D=D_\xi/2T$ - эффективная мощность шума $\xi(t)$. Стационарная плотность вероятности представляет собой распределение Больцмана

$$w(x) = C \exp[-U(x)/D]. \quad (4)$$

Стандартным образом запишем уравнения релаксации моментов координат²

$$\langle x^n \rangle' / n = \langle x^n \rangle - \gamma \langle x^{n+2} \rangle + (n-1)D \langle x^{n-2} \rangle, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Соответствующие уравнения для кумулянтов распределения имеют вид

$$\langle x \rangle' = \langle x \rangle - \gamma(\alpha_3 + 3\langle x \rangle \alpha_2 + \langle x \rangle^3), \quad (6)$$

$$\alpha_n' / n = \alpha_n - \gamma \langle x^{n-1}, x^3 \rangle, \quad n = 2, 3, \dots$$

(Здесь и ниже используем принятые в монографии [7] обозначения кумулянтных скобок.) Естественно, последнее среднее в (6) должно быть выражено через кумулянты α_n , но сделать это для произвольного n затруднительно. В силу нелинейности исходного уравнения (2) цепочки (5), (6) не замкнуты.

2. Поскольку в уравнении (2) линейные потери отрицательны, применять для анализа методы, основанные на малости нелинейности (в частности, замыкать цепочки уравнений релаксации в соответствии с целными дробями для стационарных значений моментов [8]), здесь нельзя. Для замыкания систем (5) или (6) используем развитый в монографии [7] кумулянтный подход. А именно, в разложении старших моментов в (5) или смешанной моментно-кумулянтной скобки в (6) по кумулянтам опустим старшие кумулянты, описывающие статистические связи высших порядков (в уравнении для n -го кумулянта - кумулянты $(n+1)$ -го и $(n+2)$ -го порядков). Отметим, что, если ограничиться приближением невысокого порядка, например, эксцессным (полагая $\alpha_n=0$ для $n=5, 6, \dots$), удобнее работать с кумулянтами, исходя из системы (6), а для построения высших приближений - с системой для моментов (5), используя «бескумулянтное» разложение старших моментов, приведенное в Приложении.

Система уравнений эксцессного приближения для рассматриваемой задачи, записанная для кумулянтов, имеет вид

² На основании (1) и (3) можно выразить стационарные моменты координат через функции параболического цилиндра $D_\alpha(z)$ [6]

$$\langle x^{2n} \rangle_{st} = \Gamma(n+1/2) \pi^{-1/2} (2D/\gamma)^{n/2} D_{-(n+1/2)}(-1/(2\gamma D)^{1/2}) D_{-1/2}^{-1}(-1/(2\gamma D)^{1/2})$$

(здесь Γ - гамма-функция), практически же удобнее искать их численным интегрированием.

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1' &= \bar{x}_1 - \gamma(\bar{x}_3 + 3\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1^3), \\
^{1/2}\bar{x}_2' &= \bar{x}_2 - \gamma(\bar{x}_4 + 3\bar{x}_1\bar{x}_3 + 3\bar{x}_2^2 + 3\bar{x}_1^2\bar{x}_2) + D, \\
^{1/3}\bar{x}_3' &= \bar{x}_3 - \gamma(3\bar{x}_1\bar{x}_4 + 9\bar{x}_2\bar{x}_3 + 3\bar{x}_1^2\bar{x}_3 + 6\bar{x}_1\bar{x}_2^2), \\
^{1/4}\bar{x}_4' &= \bar{x}_4 - \gamma(12\bar{x}_2\bar{x}_4 + 3\bar{x}_1^2\bar{x}_4 + 9\bar{x}_2^3 + 18\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + 6\bar{x}_2^3).
\end{aligned}
\tag{7}$$

Напомним, что $\bar{x}_1 = \langle x(t) \rangle$, $\bar{x}_2 = D_x(t)$ - соответственно, среднее значение и дисперсия координат; третий кумулянт характеризует асимметрию вероятностного распределения. Начальные условия задаем детерминированными ($\langle x(0) \rangle = x_0$, $\bar{x}_n(0) = 0$, $n=2,3,\dots$) либо гауссовыми, когда отлична от нуля и начальная дисперсия D_0 , а высшие кумулянты равны нулю.

Корректность используемой численной процедуры контролируем путем сравнения стационарного значения дисперсии, найденного из уравнений релаксации³, с соответствующим результатом, полученным интегрированием больцмановского распределения (4). Как показывает численный анализ, основанный на «бескумулянтном» разложении высших моментов (П.4), (П.5), система эксцессного приближения (7) адекватно описывает релаксацию нескольких первых кумулянтов при выполнении условия

$$\gamma \geq 1/4, \quad \gamma D \geq 1, \tag{8}$$

то есть если потенциальный барьер не слишком высокий, а шум достаточно интенсивный.

3. Проанализируем теперь результаты, полученные указанным образом. Рис. 1, а иллюстрирует зависимость релаксации первых трех кумулянтов от нелинейности γ , которая в данном случае характеризует координату и глубину потенциальных ям. Здесь и ниже вместо дисперсии приведены графики для $\sigma = D^{1/2}$. Поскольку $\bar{x}_3 < 0$, для компактности рисунков используем модуль $|\bar{x}_3|$. На рис. 1, б показан соответствующий потенциальный профиль. На всех рисунках буквенные индексы обозначают: $\langle x \rangle$ - среднее значение координат, σ - среднеквадратичное отклонение, \bar{x} - третий кумулянт. Начальное распределение частиц полагаем

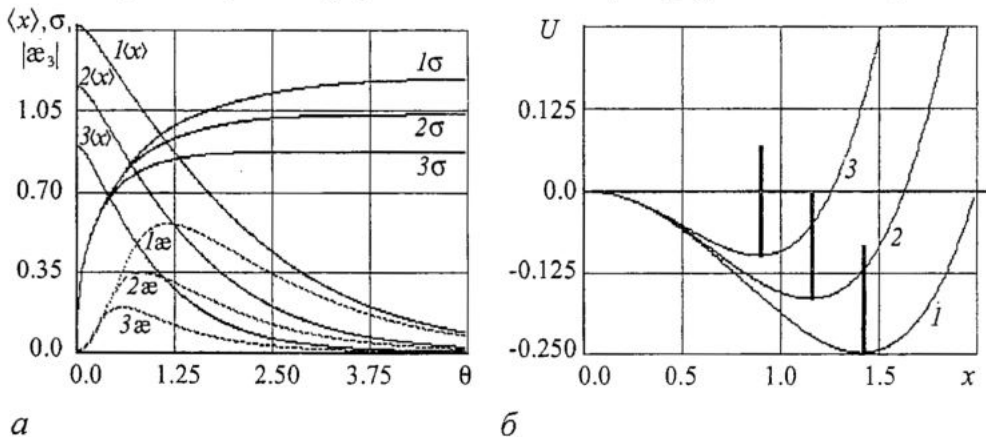
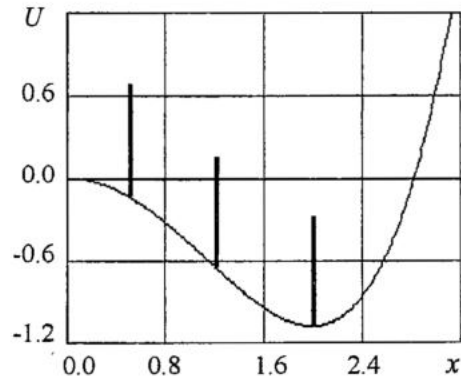
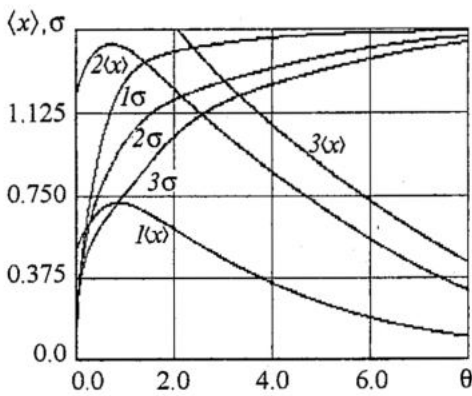


Рис. 1, а - Влияние нелинейности на процесс релаксации при $D=1$ для следующих значений γ : 1 - 0.5; 2 - 0.75; 3 - 1.25. б - Потенциальный рельеф для приведенных кривых; вертикальные прямые - начальное распределение частиц

³В эксцессном приближении стационарное значение дисперсии есть действительный корень кубического уравнения $D_x^3 - D_x^2/(2\gamma) + D_x(1-12\gamma D)/30 + D/30 = 0$.



а

б

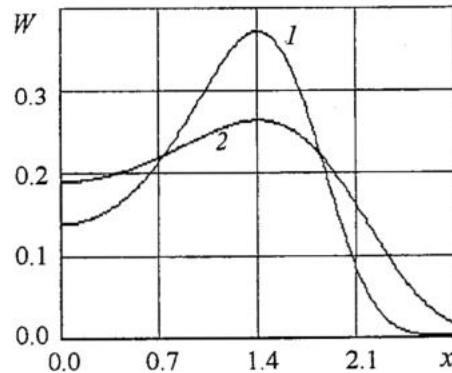
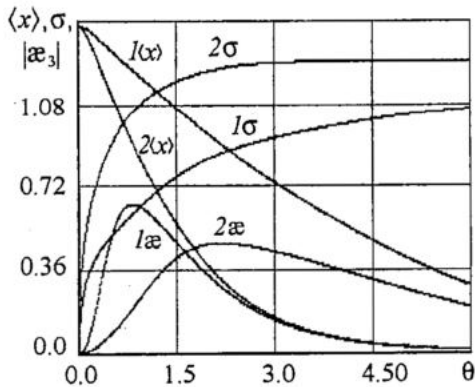
Рис. 2, а - Зависимость релаксации от начальной координаты частиц x_0 : 1 - 0.5; 2 - 1.25; 3 - 2.0. $D=0.75, \gamma=0.25$. б - Потенциальный рельеф и начальное распределение для приведенных кривых

дельта-функцией в правом минимуме потенциала. В силу симметрии кривые для потенциала и стационарного вероятностного распределения на рис. 1, б, рис. 2, б, рис. 3, б построены только для положительных значений x .

С ростом γ (то есть с уменьшением потенциального барьера) релаксация идет быстрее, что вполне естественно. Отметим, что дисперсия устанавливается быстрее, чем среднее значение и третий кумулянт, причем асимптотика последних одинакова. Таким образом, временем релаксации вероятностного распределения или временем преодоления потенциального барьера здесь следует считать время установления симметрии распределения, то есть время релаксации среднего значения и третьего кумулянта, которые отличаются весьма мало.

Рис. 2, а показывает зависимость релаксации среднего значения и средне-квадратичного отклонения от выбора начальной координаты частиц x_0 . Отметим, что при задании x_0 на склоне барьера среднее значение релаксирует немонотонно (кривые 1, 2), то есть сначала частицы, в основном, скатываются в ближний потенциальный минимум. На кривой 3, соответствующей начальному распределению в минимуме потенциала, как и при выборе x_0 правее, максимума нет.

На рис. 3 показана зависимость релаксации кумулянтов от интенсивности шума D и приведены соответствующие стационарные вероятностные распределения (начальное дельта-распределение по-прежнему задаем в минимуме



а

б

Рис. 3, а - Зависимость релаксации от интенсивности шума при $\gamma=0.5$ для следующих значений D : 1 - 0.5; 2 - 1.5. б - Стационарное вероятностное распределение для приведенных кривых

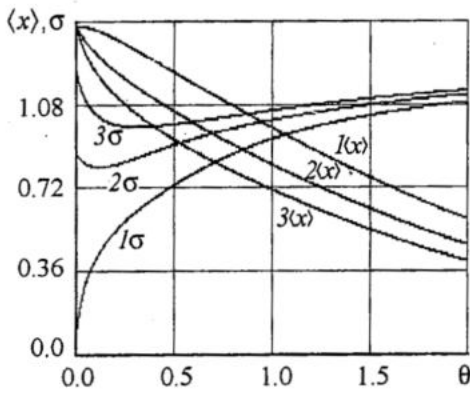


Рис. 4. Влияние начального распределения частиц на процесс релаксации при $D=1.0$, $\gamma=0.5$ для следующих значений D_0 : 1 - 0.0; 2 - 0.75; 3 - 1.5

потенциала). Видно, что с ростом шума установление кумулянтов (особенно дисперсии) происходит быстрее.

Зададим теперь гауссовы начальные условия с отличной от нуля дисперсией D_0 и средним значением в минимуме потенциала. На рис. 4 показано влияние ширины начального распределения частиц на процесс релаксации. Отметим наличие минимума в процессе установления дисперсии, означающего «группировку» частиц на начальной стадии. Заметим также, что релаксация в случае гауссова начального распределения идет несколько быстрее, чем в случае дельта-распределения.

4. Попытаемся установить количественную зависимость времени релаксации вероятностного распределения координат от интенсивности шума D и параметра γ . Заметим, что если ввести переменную $y = \gamma^{1/2}x$, то уравнения релаксации моментов (5) примут вид

$$\langle y^n \rangle' / n = \langle y^n \rangle - \langle y^{n+2} \rangle + (n-1)\gamma D \langle y^{n-2} \rangle, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Отсюда ясно, что времена релаксации всех моментов, а значит и время установления вероятностного распределения, определяются произведением $\beta = \gamma D$.

Определим безразмерное время релаксации τ_z некоторой вероятностной характеристики $z(\theta)$ как промежуток времени, после которого величина этой характеристики, нормированная на максимум, отлична от соответствующего стационарного значения менее чем на заданную величину ϵ .

Зависимости времен релаксации среднего значения $\tau_{\langle x \rangle}$ и дисперсии τ_{D_x} от параметра β показаны в таблице. Первая цифра в каждой клетке соответствует начальному дельта-распределению частиц в минимуме потенциала (и может рассматриваться как время преодоления потенциального барьера), а вторая - распределению в точке $x=0$. Как и на рис. 1 и 3, видно уменьшение времени релаксации с ростом β , то есть с увеличением интенсивности шума и уменьшением потенциального барьера.

Видно также, что изменение координаты начальной локализации частиц практически не влияет на время установления среднего значения, хотя существенно влияет (особенно при $\beta < 1$) на время релаксации дисперсии распределения.

Таблица

Зависимость времени релаксации среднего значения $\tau_{\langle x \rangle}$ и дисперсии τ_{D_x} от параметра β ($\epsilon=0.1$)

β	0.25	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
$\tau_{\langle x \rangle}$	7.4, 7.0	4.2, 4.2	2.5, 2.5	1.9, 1.9	1.6, 1.6	1.2, 1.2	1.0, 1.0
τ_{D_x}	5.1, 1.0	2.5, 0.8	1.4, 0.5	1.0, 0.4	0.8, 0.4	0.6, 0.3	0.5, 0.3

Численный анализ показывает, что в области значений параметров (8) время релаксации среднего значения хорошо аппроксимируется выражением

$$\tau_{(x)} = C / (\gamma D)^{2/3}, \quad (10)$$

где величина константы C зависит от ϵ (например, для $\epsilon=0.1$ значение $C=2.5$). Это иллюстрирует рис. 5, где прямые линии соответствуют формуле (10), а кружки - расчетным значениям $\tau_{(x)}$. Естественно, эмпирическая формула (10) не универсальна, а характеризует процесс броуновской диффузии под действием достаточно интенсивного шума в потенциальном профиле с «неглубокими ямами».

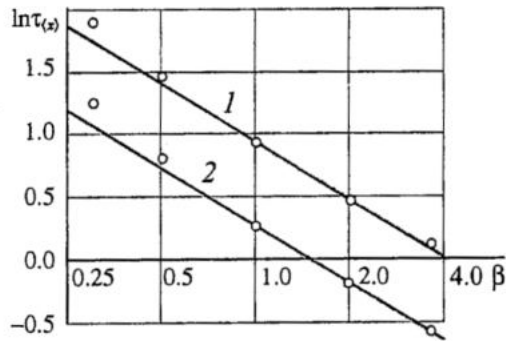


Рис. 5. Время релаксации среднего значения для $\epsilon=0.1$ (кривая 1) и $\epsilon=1/e$ (кривая 2)

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 02-02-17517, и Ведущих научных школ РФ, грант НШ-1729.2003.2.

Приложение

«Бескумулянтное» разложение моментов

При решении стохастических дифференциальных уравнений со степенной или полиномиальной нелинейностью возникают иерархические цепочки уравнений для моментов выходных переменных, например (5) (или, в общем случае, для совместных моментов совокупности случайная сила - выходные переменные). Для замыкания таких цепочек в n -м приближении, не прибегая к существенно более сложной цепочке для кумулянтов, например (7), нужно разложить $(n+1)$ -й момент по моментам порядков $1, 2, \dots, n$. Эти разложения нетрудно найти, исходя из известной формулы, связывающей моменты $m_n = \langle x^n \rangle$ и кумулянты α_n произвольного вероятностного распределения [7]

$$m_n = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} m_{n-k} \alpha_k. \quad (\text{П.1})$$

Запишем ее в следующих эквивалентных формах

$$m_{n+1} = \alpha_{n+1} + \sum_{s=0}^{n-1} C_n^s m_{n-s} \alpha_{s+1}, \quad (\text{П.2})$$

$$\alpha_{k+1} = m_{k+1} - \sum_{s=0}^{k-1} C_k^s m_{k-s} \alpha_{s+1}. \quad (\text{П.3})$$

Затем последовательно заменяем старшие кумулянты в сумме (П.2) моментами с помощью (П.3). Таким образом приходим к разложению вида

$$m_{n+1} = \alpha_{n+1} + \sum_{k=1}^n A_{n,k} (m_1, \dots, m_k) m_{n-k+1}, \quad (\text{П.4})$$

где «коэффициенты» A определяются рекуррентной формулой

$$A_{n,k} = C_n^k m_k - \sum_{i=1}^{k-1} m_{k-i} C_{n-i}^{k-i} A_{n,i}. \quad (\text{П.5})$$

Опустив старший кумулянт в (П.4), приходим к «бескумулянтным» разложениям моментов, замыкающим указанные выше цепочки в n -м кумулянтном приближении. В частности,

$$\begin{aligned} \langle x^3 \rangle &\approx 3\langle x \rangle \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^3, \quad \langle x^4 \rangle \approx 4\langle x \rangle \langle x^3 \rangle + 3\langle x^2 \rangle^2 - 12\langle x \rangle^2 \langle x^2 \rangle + 6\langle x \rangle^4, \\ \langle x^5 \rangle &\approx 5\langle x \rangle \langle x^4 \rangle + 10\langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle - 20\langle x \rangle^2 \langle x^3 \rangle - 30\langle x \rangle \langle x^2 \rangle^2 + 60\langle x \rangle^3 \langle x^2 \rangle - 24\langle x \rangle^5. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Для высших моментов указанная процедура легко реализуется на компьютере. Нетрудно также обобщить приведенные здесь соотношения на совместные моменты совокупности статистически связанных случайных величин.

Библиографический список

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: теория и применение в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987.
2. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.
3. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
4. Malakhov A.N. Time scales overdamped nonlinear Brownian motion in arbitrary potential profiles // Chaos. 1997. Vol. 7, № 3. P. 488.
5. Pankratov A.L. Time evolution of averages in dynamical systems driven by noise // Physics Letters A. 1999. Vol. 255. P. 17.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
7. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.
8. Муzychuk O.V. Прямой метод численного анализа релаксации вероятностных характеристик броуновского движения // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 9. С. 922.

Нижегородский
архитектурно-строительный
университет

Поступила в редакцию 31.07.02
после доработки 30.05.03

BROWNIAN DIFFUSION IN THE SYMMETRICAL BIMODAL POTENTIAL: CUMULANT APPROACH

O.V. Muzychuk

The relaxation of one-dimensional Brownian motion's probability characteristics of coordinates at the symmetrical potential profile having two stable states is considered. We used for the analysis cumulant approach based on breaking the chain of relaxation equations for moments (or cumulants) of partial's coordinates by the higher cumulants negligence.

The relaxation of three first cumulants is investigated by numerical way. The dependence of relaxation times of mean value and variance on the noise intensity, potential pit depth, initial conditions are obtained.



Муzychuk Олег Владимирович - родился в 1947 году. Окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1970). Работал на кафедре бионики и статистической радиофизики ГГУ. Защитил кандидатскую диссертацию в области исследования линейных стохастических систем (1978). С 2001 года - доктор физико-математических наук. С 1978 года работает на кафедре физики Нижегородского архитектурно-строительного университета. Круг интересов - статистическая радиофизика, нелинейная динамика, вероятностное описание динамических систем, находящихся под воздействием интенсивных случайных сил. Автор более 40 статей в центральных научных журналах.

E-mail: physics @ bi-zed.da.ru



ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ФАКТОРОВ В МОДЕЛИ НЕРВНОЙ РЕГУЛЯЦИИ СЕРДЕЧНОГО РИТМА

Н.Б. Фролова, А.П. Четвериков

Методами компьютерного эксперимента исследуется нелинейная динамика простой математической модели нервной регуляции сердечного ритма с учетом внешних воздействий, имитирующих стрессовые нагрузки. Для анализа поведения системы и сопоставления результатов моделирования с реальными данными рассчитаны спектральные плотности мощности процессов, автокорреляционные функции, оценено время спадаания АКФ и время релаксации системы.

Введение

Интерес к моделированию функционирования сердечно-сосудистой системы человека и животных не иссякает у исследователей уже в течение десятилетий. Поскольку механизм функционирования деятельности сердца зависит от множества как внешних (например, физических нагрузок, внешнего атмосферного давления и т.д.), так и внутренних (дыхания, содержания различных химических элементов в крови и клетках миокарда, внутреннего кровяного давления, эмоционального состояния человека и др.) факторов, к настоящему времени разработано довольно много моделей, описывающих деятельность сердечно-сосудистой системы с различных точек зрения [1-6]. Это позволяет имитировать поведение человеческого сердца для диагностики различного рода заболеваний сердечно-сосудистой системы. Поэтому исследование различных характеристик сердечно-сосудистой деятельности и расширение методов их анализа приобретает все большую актуальность для клинических применений полученных результатов [7-9].

Модели, учитывающие в деталях влияния множества разнородных факторов, очень сложны для анализа. Вместе с тем, кардиологические данные дают основание полагать, что основных факторов, существенно влияющих на динамику сердечно-сосудистой системы, не много. Это позволило построить семейство достаточно простых моделей системы, не принимающих во внимание второстепенные факторы, такие как структура нервных волокон или состав химических элементов крови и клеток миокарда, учет которых сильно усложняет моделирование и исследование сердечно-сосудистой системы. Одной из таких моделей является модель нервной регуляции сердечного ритма Курца - Розенблюма [10]. В нашей работе [11] были определены условия, при которых на основе этой модели возможно имитировать поведение системы, соответствующее

нормальным биениям здорового человеческого сердца. В частности, была очерчена область значений параметров системы, при которых результаты моделирования заведомо не противоречат физиологическим ограничениям для человеческого организма. Было установлено, что не расходящиеся с данными кардиологических исследований результаты численных экспериментов достигаются только в том случае, если в модели учитывается влияние внешнего шумового воздействия, имитирующего в некоторой степени обобщенное воздействие семейства отброшенных при построении модели второстепенных факторов.

В настоящей работе в рамках модели [10,11] исследуется:

1) динамика системы с учетом шумового воздействия, отображающего множество внутренних и внешних факторов, отвечающих за вариабельность сердечного ритма;

2) реакция системы на внешнее импульсное воздействие, подаваемое в систему, находящуюся в стационарном состоянии. Такое воздействие можно трактовать как влияние внешней стрессовой ситуации, резкое раздражающее влияние дополнительных факторов окружающей среды и других внешних возмущений. В данном случае изучаются закономерности поведения системы и процесса возвращения ее в исходное стационарное состояние.

1. Элементы модели нервной регуляции сердечного ритма

Напомним основные принципы построения модели нервной регуляции сердечного ритма Курца - Розенблюма [10].

Известно, что основным водителем сердечного ритма, обеспечивающим сокращение сердечной мышцы, является синусовый узел [1,2]. Клетки водителя ритма генерируют периодические нервные импульсы без участия внешних раздражителей. От синусового узла возбуждение через предсердия передается атриовентрикулярному узлу и через сеть нервных волокон достигает желудочков, вызывая их сокращение. При этом кровь выбрасывается в аорту. В аорте и легочной артерии, из которой кровь поступает в сердце, расположены барорецепторы (рецепторы кровяного давления), посылающие информацию о давлении крови в мозг. На основе полученных данных мозг вырабатывает сигнал, передаваемый по нервным волокнам и регулирующий сердечный ритм таким образом, чтобы поддерживался определенный (нормальный) уровень кровяного давления. Временная задержка в описанном процессе составляет от 0.5 до 3 секунд.

Таким образом, в простейшем случае важно учитывать только управление входными данными, относящимися к водителю ритма и узлу управления силой сокращения мышцы, при этом состояние рецепторов однозначно зависит от сердечного ритма и его временной производной [10]. Поэтому можно ввести управляющую функцию G , зависящую только от длительности кардиоинтервала RR и ее приращения в предыдущий момент времени. Величина кардиоинтервала (и частота сердечных сокращений) определяется нервной регуляцией, главным элементом которой является информация от барорецепторов. Известно, что зависимость показаний барорецепторов от частоты испущенных водителем ритма импульсов, имеет вид S -образной кривой [10], что задает вид управляющей функции, которая в простейшем случае представляется нелинейной функцией

$$G(R_{i-l}R_{i-l} - R_{i-l-1}) = k_1(d - R_{i-l})^{1/3} - k_2(R_{i-l} - R_{i-l-1})^{1/3}, \quad (1)$$

где R_i - длительность i -го RR -интервала; d - величина «идеального» RR -интервала, соответствующего поддержанию кровяного давления на постоянном уровне; l задает длительность временной задержки в петле обратной связи; k_1 и k_2 -

коэффициенты обратной связи, являющиеся основными параметрами исследуемой системы. Если k_1 и k_2 положительны, система управления подавляет возникающие возмущения. В работе [11] был уточнен физиологический смысл этих параметров, исходя из результатов численных исследований. Не претендуя на строгость, можно сказать, что коэффициент k_1 характеризует уровень активации парасимпатической нервной системы, а коэффициент k_2 определяет степень возбуждения симпатической нервной системы и ее способность поддерживать постоянный тонус парасимпатической.

Частота сердечных сокращений (ЧСС) регулируется изменением значения интервала ΔT_i между двумя последовательными импульсами, формируемыми водителем ритма, и описывается следующей формулой, учитывающей влияние кровяного давления на ЧСС и случайного воздействия g_i :

$$\Delta T_{i+1} = \Delta T_i + k_1 (d - R_{i-1})^{1/3} - k_2 (R_{i-1} - R_{i-2})^{1/3} + g_i \quad (2)$$

Функция g_i моделирует влияние внутренних органов (легких, мозга, мышц), содержание различных химических элементов в крови и клетках миокарда, эмоциональное и физическое состояние человека, то есть то множество процессов, которое трудно учесть по отдельности. Отметим, что из-за временной задержки описанная модель является инерционной.

Сердце в модели представлено в виде системы «воздействие - отклик», где воздействие - это импульс, испущенный водителем ритма, отклик - сокращение желудочков сердца (рис. 1).

Вначале испускается импульс возбуждения, скорость распространения которого зависит от времени восстановления (это временной интервал между концом предыдущего и началом последующего потенциала действия). Тогда время отклика можно определить как

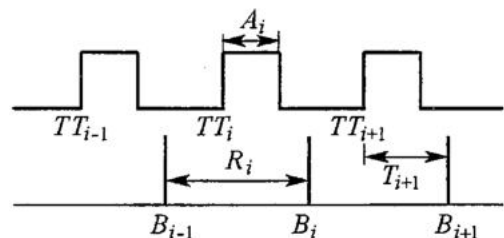


Рис. 1. Схема, поясняющая функционирование модели сердца «воздействие - отклик» [7]. Здесь TT_i - время возбуждения 1-го импульса водителем ритма; B_i - время отклика; A_i - продолжительность потенциала действия; T_{i+1} - интервал между стимулом и откликом

$$B_{i+1} = TT_{i+1} + T_{i+1}.$$

Длительность интервалов между откликами, то есть RR -интервалов, составит

$$R_{i+1} = B_{i+1} - B_i = \Delta T_{i+1} + T_{i+1} - T_i \quad (3)$$

где $\Delta T_{i+1} = TT_{i+1} - TT_i$. Длительность интервала T_{i+1} включает время, затрачиваемое на прохождение импульса возбуждения через атриовентрикулярный узел и проводящую систему Гиса - Пуркинью [1,2], и является убывающей функцией предыдущего времени восстановления. Поэтому, согласно [12], можно записать соотношения

$$T_{i+1} = T_M + V \exp\{-(\Delta T_{i+1} - A_i)/T_0\} \quad \text{и} \quad (4)$$

$$A_{i+1} = A_M + b \exp\{-(\Delta T_{i+1} - A_i)/A_0\} \quad (5)$$

для

$$\Delta T_{i+1} - A_i \geq t_r \quad (6)$$

где t_r - рефрактерное время; V, T_M, T_0, b, A_M, A_0 - положительные параметры. Если же $(\Delta T_{i+1} - A_i) < t_r$, то ткань находится в рефрактерном состоянии и проведение возбуждения блокируется. Уравнение (6) называется условием рефрактерности ткани миокарда.

Система уравнений (3)-(6) и управляющая функция в виде уравнения (2) образуют замкнутую систему четырех разностных уравнений с временной задержкой и случайной функцией g_i . Напомним, что описанная модель является упрощенной. В ее рамках рассматриваются только «нормальные» биения сердца, то есть удары сердца, вызванные возбуждением синусного узла. Если значение рассчитываемых характеристик системы выходят за границы области, определенной вышеупомянутыми ограничениями (например, при попытке возбудить ткань миокарда вторым или третьим водителем ритма [1] или в течение рефрактерного периода (6)), то такие режимы будем считать не реализуемыми в данной модели сердечно-сосудистой системы.

В [10] длительность потенциала действия предполагается слабо изменяющейся и аппроксимирована константой. В настоящей работе значение потенциала действия A_i вычисляется с помощью зависимости (5), что с одной стороны усложняет систему, но с другой стороны, делает ее более точной. Таким образом, для анализа используется модель нервной регуляции сердечной деятельности с двумя основными параметрами обратной связи - коэффициентами k_1 и k_2 .

2. Ограничения на параметры модели. Характеристики поведения системы

Параметры изучаемой модели не могут принимать значения, выходящие за рамки ограничений, наложенных условиями функционирования живого организма. Поэтому в [11] были определены допустимые значения параметров k_1 и k_2 , для которых решение системы соответствует реальным физиологическим данным: во-первых, должно выполняться условие рефрактерности [1,2]; во-вторых, RR -интервалы могут изменяться в пределах от 0.5 до 1.65 с, что соответствует частоте сердечных сокращений от 36.4 до 120 ударов в минуту. Кроме основных параметров k_1 и k_2 , в системе уравнений используется ряд коэффициентов, значения которых были определены в ходе численных экспериментов в [11]. В настоящей работе моделирование проводилось со следующими значениями параметров: $A_0=0.22$; $A_M=0.2$; $b=0.8$; $T_M=0.22$; $T_0=0.2$; $V=1.082$. Время задержки в петле обратной связи l выбралось равным 3, это означает, что отклик на какое-либо изменение в системе приходит только через три удара сердца; величина периода рефрактерности t_r равна 0.03 с. Кроме того, известно, что при нормальной работе сердечно-сосудистой системы вариационный размах (ВР) RR -интервалов должен изменяться в пределах 0.15-0.25 [17], а спектр должен иметь вид, аналогичный спектру типа $1/f^\alpha$ [5,10]. Исходя из этого, налагались следующие ограничения на значения основных параметров: k_1 изменялся от 0 до 0.051; k_2 от 0 до 0.101; внешняя шумовая функция g_i использовалась в виде, соответствующем белому, нормально распределенному шуму с интенсивностью 0.01 [11]. Исследование модели проводилось с помощью специально разработанного комплекса компьютерных программ.

По результатам моделирования рассчитывался набор характеристик, типичный вид которых представлен на рис. 2.

На этом и последующих рисунках графики расположены следующим образом: верхний левый график - ритмограмма, представляющая последовательность RR -интервалов; верхний правый - проекция фазового портрета, отображающая зависимость R_{i+1} от R_i ; нижний левый - спектральная плотность мощности; нижний правый - автокорреляционная функция [13-15]. На графике спектра мощности по оси ординат откладывается спектральная плотность мощности, выраженная в дБ, по оси абсцисс - «частота» f , соответствующая

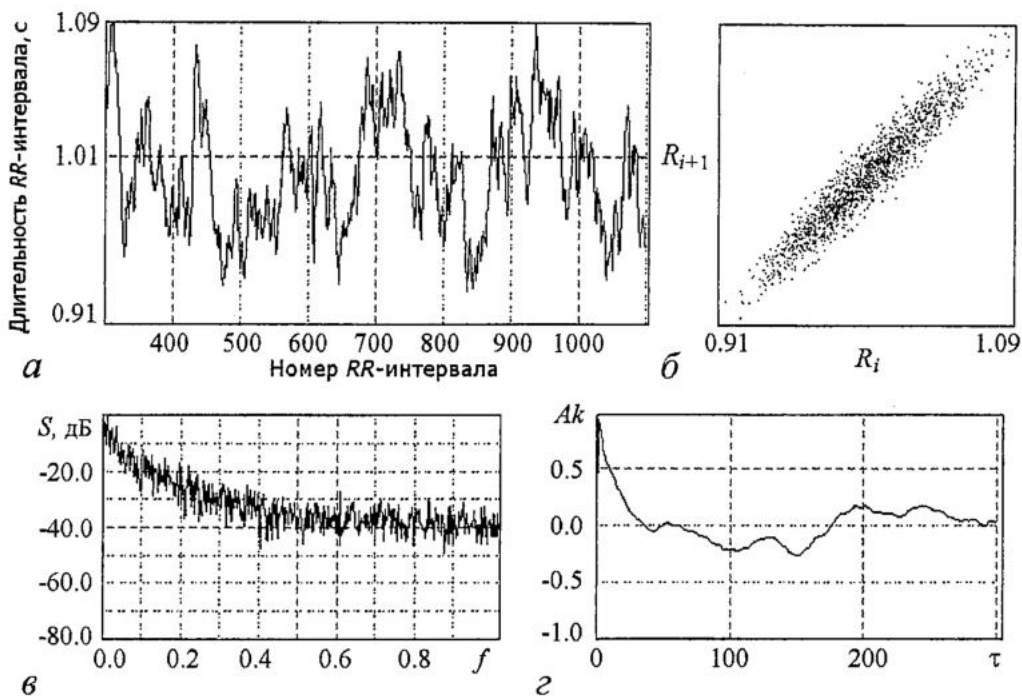


Рис. 2. Характеристики колебаний в системе с внешним шумовым воздействием. Наблюдается спектр мощности типа « $1/f^\alpha$ », соответствующий кардиологическим данным здорового сердца. $BP=0.1754, Hk_1=Hk_2=0.001, k_1=0.006, k_2=0.005$

отношению номера i текущей точки к половине максимального количества точек реализации, по которой рассчитывается спектральная плотность мощности [14,16]. Автокорреляционная функция вычисляется для сигнала, приведенного к нулевому среднему [16,17],

$$Af(\tau) = 1/(N-am) \sum_{i=1}^{N-am} x(i)x(i+\tau).$$

Нормированная корреляционная функция определяется как $Ak(\tau)=Af(\tau)/\sigma^2$, где $\sigma^2=1/N \sum_{i=1}^N x(i)^2$. Таким образом, на графике строится зависимость коэффициента корреляции от номера текущей точки.

В подписях к рисункам использованы следующие обозначения: BP - вариационный размах; Hk_1, Hk_2 - шаг изменения значений параметров k_1 и k_2 , соответственно.

3. Регуляция сердечного ритма при шумовом внешнем воздействии

Рассмотрим сначала эволюцию поведения системы в случае воздействия внешней шумовой функции g_i с интенсивностью 0.01 при изменении значений основных параметров k_1 и k_2 , решая численно систему уравнений (2)-(6).

Анализ решения показывает, что в целом поведение системы остается хаотичным, но изменяется вид спектральной плотности мощности и автокорреляционной функции. При малых значениях параметров k_1 и k_2 поведение системы соответствует поведению здорового человеческого сердца, то есть вариационный размах лежит в пределах 0.15-0.25, вид спектра похож на зависимость типа « $1/f^\alpha$ » (рис. 3). Однако с увеличением значений параметров поведение системы меняется. В частности, при небольших значениях параметра k_1 (порядка 0.00-0.01) увеличение значений параметра k_2 приводит к постепенному изменению графика

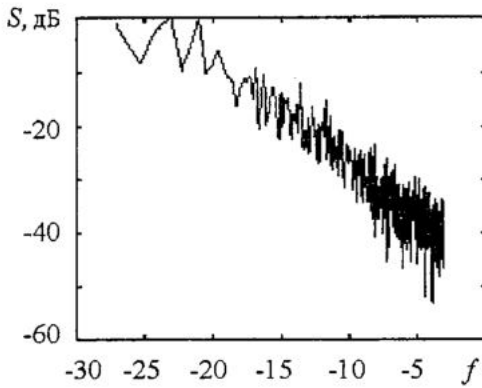


Рис. 3. Зависимость спектральной плотности мощности от частоты, построенная в логарифмическом масштабе при значениях параметров $k_1=0.005$, $k_2=0.005$

спектра. На фоне первоначальной монотонной в среднем зависимости типа « $1/f^\alpha$ » появляются участки подъема (рис. 4, а), перерастающие в четко выделяющиеся пики (рис. 4, б), которые появляются вблизи значений основной частоты колебания системы $f_0 \approx 0.25$ и ее гармоник в отсутствие внешнего шумового воздействия [11]. В реальной сердечно-сосудистой системе такое значение частоты колебаний соответствует дыхательной синусовой аритмии, которая наблюдается в отсутствие центральных влияний на сердце, например, во время глубокого сна или наркоза.

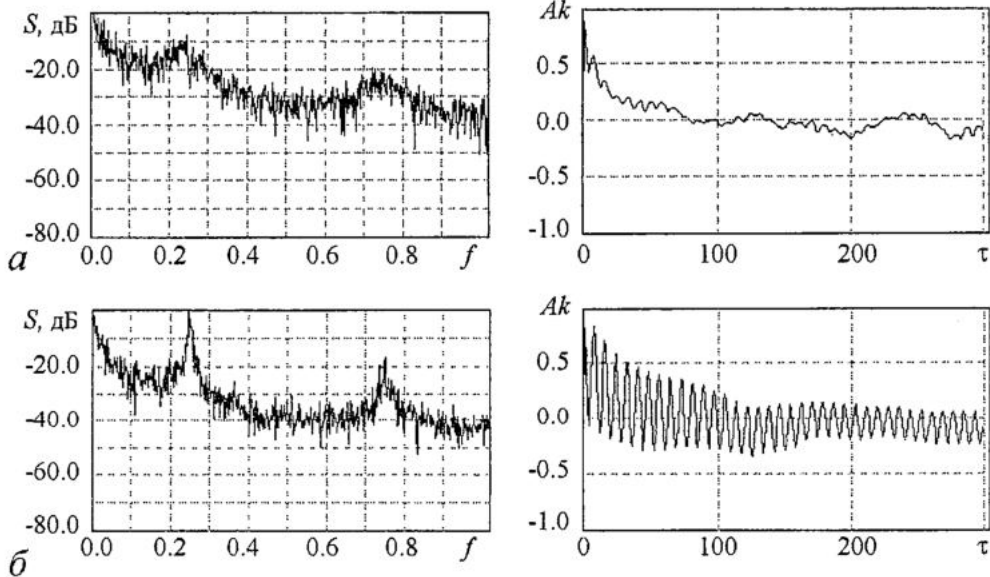


Рис. 4. Спектральная плотность мощности и автокорреляционная функция нерегулярных колебаний в системе с внешним шумовым воздействием в области малых значений параметра k_1 : а - $k_1=0.006$, $k_2=0.040$, $BP=0.1760$, $Nk_1=Nk_2=0.001$; б - $k_1=0.006$, $k_2=0.089$, $BP=0.2473$, $Nk_1=Nk_2=0.001$

Вид автокорреляционной функции также изменяется - она спадает медленнее при увеличении параметров k_1 и k_2 , что свидетельствует об упорядочивании поведения системы. В тоже время автокорреляционная функция становится все более сложной, в частности, появляются колебания огибающей, что характерно для случая «окрашенного шума». Поскольку огибающая автокорреляционной функции характеризует хаотический компонент в поведении системы, а ее заполнение определяется регулярными колебаниями. Если бы регулярные колебания были монохроматическими, то огибающая имела бы вид спадающей экспоненциальной зависимости. Но в данном случае регулярные колебания являются сложными, содержащими гармоники, поскольку огибающая модулирована. Таким образом, автокорреляционная функция свидетельствует о совокупности в динамике системы регулярных колебаний с частотой f_0 , ее

основных гармоник, и нерегулярных колебаний, обусловленных влиянием внешней шумовой компоненты (рис. 4, б).

При увеличении значений параметра k_1 в диапазоне от 0.010 до 0.028 вид спектральной плотности мощности перестает походить на зависимость типа « $1/f^\alpha$ ». Сначала появляется небольшой пьедестал (рис. 5, а), а увеличение значений параметра k_2 приводит к такому же поведению системы, как и в случае небольших значений параметра k_1 - на фоне первоначального монотонного спада появляются участки подъема, перерастающие затем в четко выраженные пики, соответствующие основным частотам.

Изменение значений параметра k_1 от 0.028 до 0.050 приводит к еще большему упорядочиванию поведения системы. При минимальных значениях параметра k_2 на графике спектра уже наблюдается размытый пик, но не на основной частоте, а на меньшей частоте 0.12 (рис. 5, б). Это соответствует поведению аналогичной системы в отсутствие внешнего шумового воздействия. Действительно, в работе [11] было показано, что в исследуемой системе наблюдаются колебания на различных частотах, в зависимости от значений параметров k_1 и k_2 . Увеличение параметра k_2 приводит к постепенному сдвигу первоначально небольшого значения частоты до величины 0.25 (рис. 6) и формированию четко выраженного пика на графике спектральной плотности мощности (см. рис. 4, б). Вид автокорреляционной функции при этом изменяется примерно так же, как и в предыдущих случаях, и в целом характеристики поведения системы становятся соответствующими отображенным на рис. 4, б.

Количественный анализ эволюции автокорреляционной функции можно провести с помощью расчета такого показателя, как логарифмический декремент α , являющийся коэффициентом затухания АКФ, в тех случаях, когда ее огибающую можно представить, хотя бы приближенно, убывающей экспоненциальной функцией. На рис. 7 представлена зависимость декрементов α от параметра k_2 при $k_1 = \text{const}$, а на рис. 8 - линии $\alpha = \text{const}$ на плоскости параметров (k_1 и k_2). Следует отметить, однако, что расчет декремента в некоторых областях

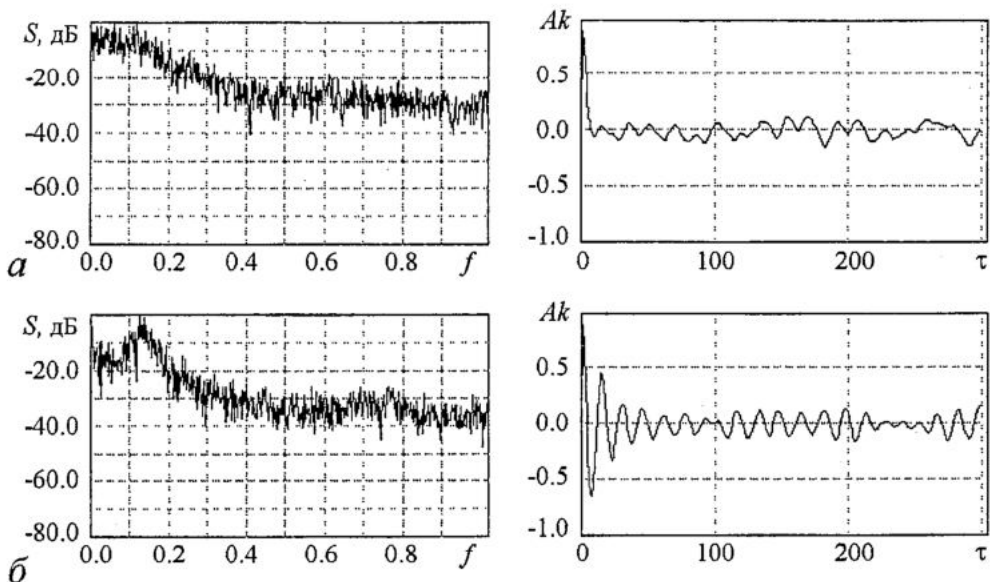


Рис. 5. Спектральная плотность мощности и автокорреляционная функция нерегулярных колебаний в системе с внешним шумовым воздействием в области средних и больших значений параметра k_1 со следующими значениями параметров: а - $k_1=0.018$, $k_2=0.005$, $BP=0.1523$, $Nk_1=Nk_2=0.001$; б - $k_1=0.040$, $k_2=0.005$, $BP=0.1677$, $Nk_1=Nk_2=0.001$ (наблюдается спектральная линия с частотой 0.125)

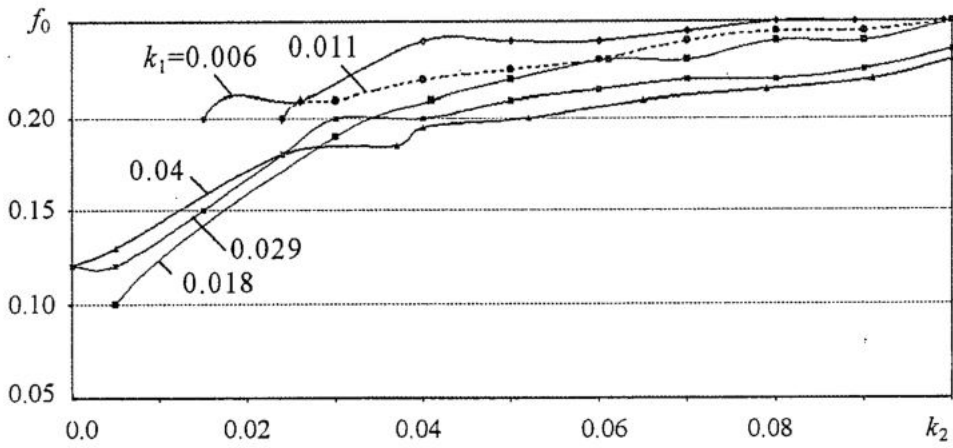


Рис. 6. Зависимость основной частоты f_0 от значения параметра k_2 . Значения параметра k_1 указаны около соответствующих линий

параметрической плоскости не очень точен, так как вид автокорреляционной функции достаточно сложен и экспоненциальная аппроксимация иногда слишком груба. Тем не менее, из рис. 7 видно, что при увеличении параметра k_2 значение декремента убывает, свидетельствуя об упорядочивании поведения системы. Исходя из формы кривых на рис. 8, можно также условно выделить три области с различной характерной сменой режимов поведения системы, идентифицируемых на основании взаимного расположения кривых с разными значениями $\alpha = \text{const}$. В первой из областей значения декремента варьируют в диапазоне 0.1-0.4, во второй - 0.5-0.6 и в третьей - 0.7-0.9, то есть при переходе из первой области в третью через вторую можно наблюдать увеличение степени беспорядка в поведении системы. И хотя для различных значений параметра k_1 при небольших значениях параметра k_2 зависимости $\alpha(k_2)$ весьма причудливы, тенденция поведения системы неизменна - декремент с возрастанием k_2 уменьшается.

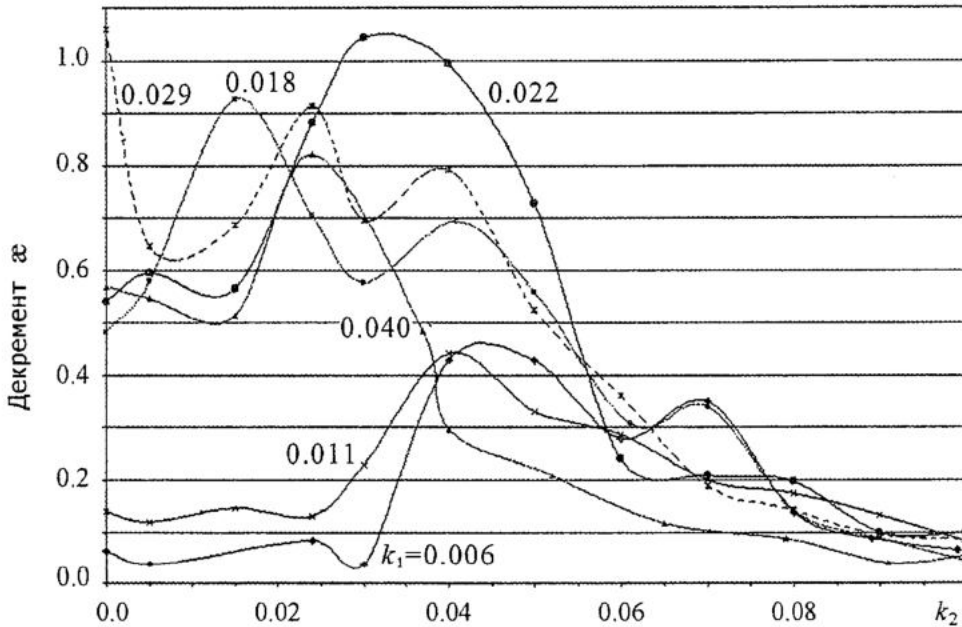


Рис. 7. Зависимость декремента АКФ от параметра k_2 при фиксированных значениях параметра k_1

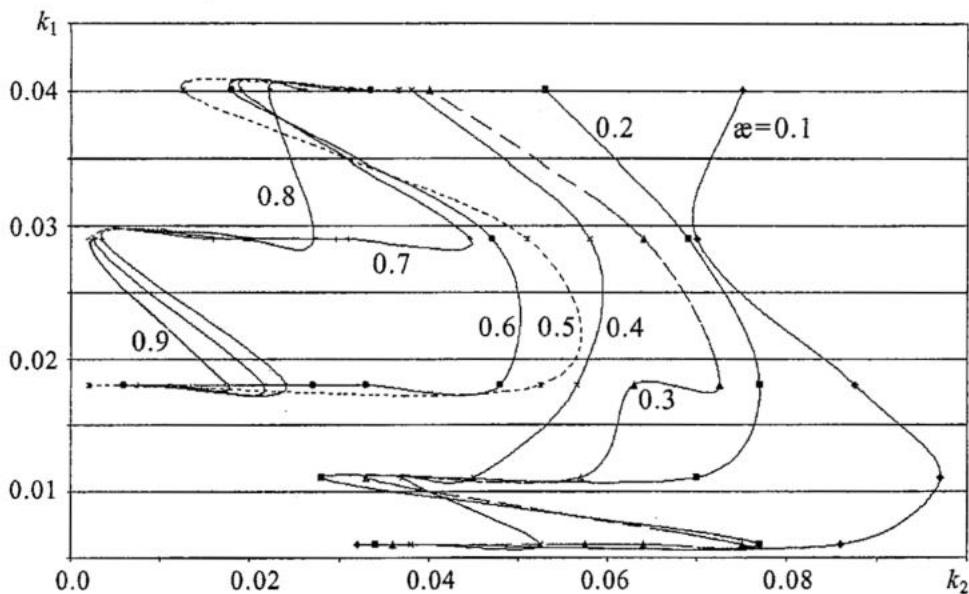


Рис. 8. Линии постоянных значений декремента α на плоскости параметров (k_1, k_2) . Значения декрементов указаны рядом с линиями, им соответствующими

4. Реакция системы на импульсное внешнее воздействие

Проанализируем теперь влияние дополнительного воздействия на моделируемую систему. Для исследования подобного эффекта добавим в уравнение (2) еще одну составляющую, характеризующую воздействие в форме импульса постоянной амплитуды t длительностью ν

$$\Delta T_{i+1} = \Delta T_i + G(R_{i-p}R_{i-l} - R_{i-l-1}) + g_i + t(\nu),$$

С точки зрения медицины такое воздействие может быть обусловлено влиянием дополнительных внешних факторов окружающей действительности, например, влиянием стрессовой ситуации, резким шумом или, наоборот, успокаивающим влиянием каких-либо факторов. Поэтому рассмотрим случай добавления внешнего импульсного возмущения в определенный момент стационарного функционирования системы и действующего в течение определенного промежутка времени. В частности, в компьютерных экспериментах система подвергалась возмущению в течение 2, 5, 10, 20, 50 или 100 RR -интервалов с амплитудами импульса, равными 0.01, 0.1 и 0.5. Анализ вариантов моделирования показывает, что при малой амплитуде импульса, равной 0.01, действующего в течение малого времени, поведение системы отличается небольшим увеличением длительности RR -интервалов в допустимых пределах, а также при некоторых значениях параметров k_1, k_2 автокорреляционная функция приобретает форму, свидетельствующую об упорядочивании поведения системы. При длительном воздействии значения RR -интервалов в момент добавления внешнего воздействия увеличиваются скачкообразно, но система всегда возвращается в первоначальное состояние, зачастую на более высоком уровне значений ритмограммы, причем время восстановления системы зависит как от длительности внешнего воздействия, так и от значений параметра k_1 (рис. 9). Но всегда с ростом параметра k_1 время возврата системы к первоначальному поведению уменьшается, а увеличение длительности воздействия приводит к увеличению времени восстановления системы.

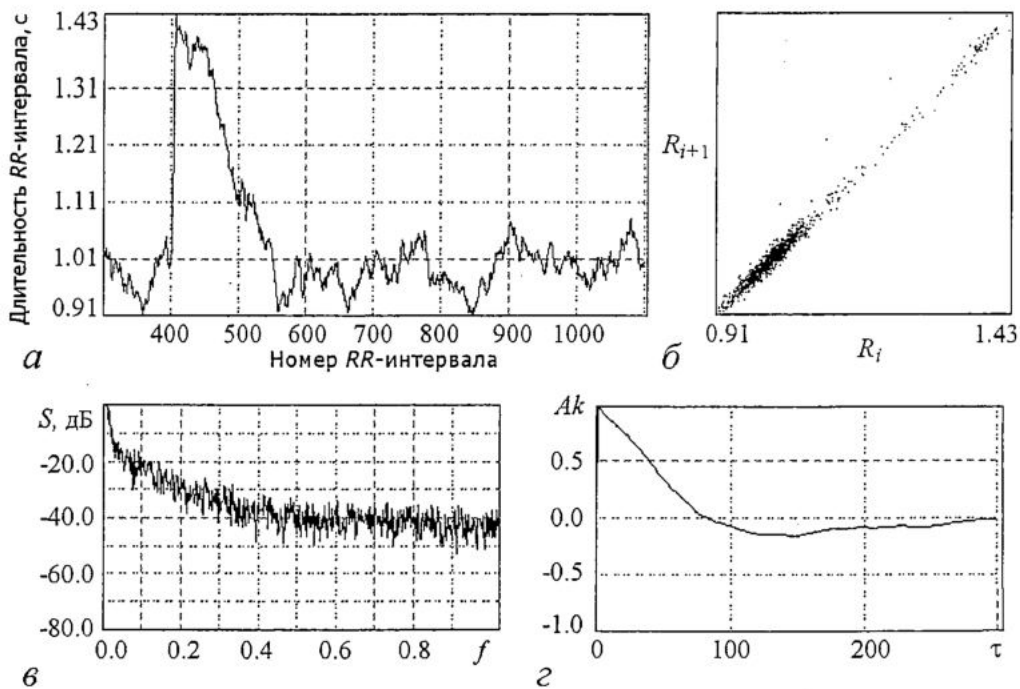


Рис. 9. Характеристики поведения системы при импульсном внешнем воздействии с амплитудой импульса 0.1 и длительностью в 5RR-интервалах. $k_1=0.006, k_2=0.005, BP=0.5286, Hk_1=Hk_2=0.001$

Повышение амплитуды внешнего возмущения также не изменяют описанные закономерности поведения исследуемой системы: в любом случае система «выбивается» из состояния равновесия, но возвращается к состоянию нормального функционирования через определенный промежуток времени,

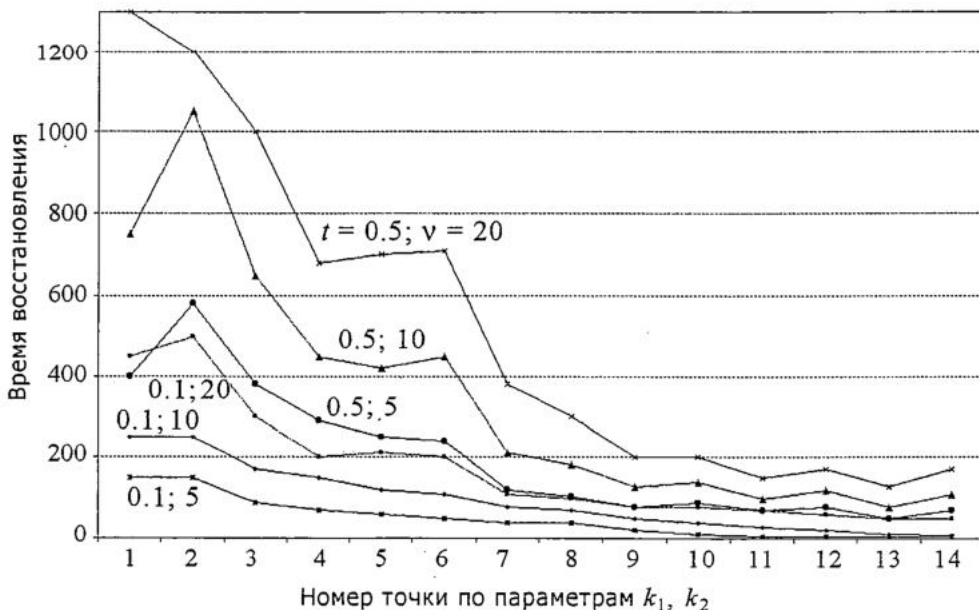


Рис. 10. Зависимость времени восстановления от значений параметров k_1, k_2 для различной амплитуды t внешнего воздействия (0.1 и 0.5) и различной длительности v (5, 10 и 20 RR-интервалов). По оси x отложены параметры k_1, k_2 , соответствующие следующим значениям: 1 - 0.005, 0.005; 2 - 0.005, 0.041; 3 - 0.007, 0.100; 4 - 0.011, 0.096; 5 - 0.012, 0.076; 6 - 0.013, 0.066; 7 - 0.018, 0.004; 8 - 0.029, 0.038; 9 - 0.033, 0.007; 10 - 0.040, 0.059; 11 - 0.043, 0.006; 12 - 0.047, 0.086; 13 - 0.050, 0.003; 14 - 0.050, 0.078

зависящий как от длительности самого воздействия, так и от значений параметров k_1 и k_2 (рис. 10). Это свидетельствует об устойчивости стационарного состояния системы.

5. Заключение

Численно исследована динамика модели нервной регуляции сердечного ритма с учетом внешнего воздействия двух типов:

- 1) шумового, учитывающего влияние комплекса второстепенных факторов и
- 2) импульсного, имитирующего влияние кратковременных стрессовых нагрузок.

В первом случае изучено поведение системы в пределах допустимых значений параметров модели, соответствующих характеристикам реального поведения сердца здорового человека. Для анализа поведения построены графики спектральной плотности мощности и автокорреляционной функции, рассчитаны декременты α автокорреляционной функции и построены зависимости декремента от значений основных параметров системы k_1 и k_2 . Определена зависимость основной частоты колебаний от значений параметров k_1 и k_2 . Показано, что при увеличении значений основных параметров системы в спектре колебаний на фоне функции вида « $1/f^\alpha$ » возникает ярко выраженная спектральная линия с частотой, стремящейся к значению 0.25, соответствующему основной частоте колебания системы без воздействия внешнего шума. Автокорреляционная функция с ростом параметров k_1 и k_2 спадает все медленнее, что свидетельствует об упорядочивании системы. Зависимости декрементов АКФ как функции параметров k_1 и k_2 ведут себя сложным образом. Однако при любых значениях параметра k_1 декремент уменьшается при возрастании значений параметра k_2 в области его больших значений. При малых значениях параметра k_2 декремент ведет себя сложным образом, но в целом увеличение параметра k_1 приводит к увеличению α .

Во втором случае внешнее воздействие на систему в форме импульса постоянной амплитуды сказывалось после завершения переходного процесса в течение короткого промежутка времени. Показано, что результат воздействия существенно зависит от амплитуды возмущения. Если амплитуда импульса сравнима с амплитудой внешней шумовой функции, значения основных характеристик системы, таких как длительность RR -интервалов и величина вариационного размаха, увеличиваются по мере увеличения длительности воздействия, не выходя, однако, за пределы допустимых значений. При больших амплитудах импульса система «выбивается» из состояния, соответствующего нормальному поведению, но неизменно возвращается в него. Время восстановления зависит как от амплитуды налагаемого воздействия, так и от его длительности. Таким образом, можно полагать, что исследуемая система достаточно устойчива к внешним возмущениям, что отражает реальную картину поведения сердечно-сосудистой системы живого организма. Также можно сделать вывод, что рассмотренная модель и полученные в ее рамках результаты не противоречат параметрам физиологических характеристик здорового организма.

Библиографический список

1. Бабский Е.Б., Зубков А.А., Косицкий Г.И., Ходоров Б.И. Физиология человека. М.: Медицина, 1996.
2. Общий курс физиологии человека и животных / Под ред. А.Д. Ноздрачева. Кн.2. Физиология висцеральных систем. М.: Высшая школа, 1991.

3. *Glass L., Hunter P.* There is a theory of heart // *Physica D.* 1990. Vol. 43. P. 1.
4. *Goldberger A.L., Rigney D.R.* Dynamics of sudden death // *An. Rev. Mater. Si.* 1989. Vol. 19 - Palo Alto. P. 522.
5. *Клайнс М.* Дыхательная регуляция частоты сердечных сокращений. Закономерности, установленные при помощи моделирующего устройства // *Электроника и кибернетика в биологии и медицине.* М.: ИЛ, 1963.
6. *Seidal H., Herzel H.* Modelling heart rate variability due to respiration and baroreflex. 1995. P. 205.
7. *Вариабельность сердечного ритма в современной клинике / Под ред. Н.И. Яблучанского, Б.Я. Кантора, А.В. Мартыненко.* Факультет фундаментальной медицины Харьковского национального университета им.В.Н. Каразина, 2001.
8. *Рагозин А.Н.* Исследование регуляции сердечного ритма в динамике стимулирующих воздействий с использованием спектрального анализа на плоскости комплексных частот // *Электронный журнал www.ecg.ru,* 2002.
9. *Механизмы регуляции ритма сердца.* [http://www.mks.ru/products/kardi/guide_hrv,](http://www.mks.ru/products/kardi/guide_hrv) 2003.
10. *Rosenblum M., Kurths J.* A Model of neural control of the heart rate // *Phys. A.* 1995. Vol. 215. P. 439.
11. *Четвериков А.П., Фролова Н.Б., Мантуров А.О.* Динамика модели нервной регуляции сердечного ритма // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1998. Том 6, № 6.
12. *Гласс Л., Мэки М.* От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991.
13. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
14. *Task force of the European society of cardiology and the North American society of pacing and electrophysiology* heart rate variability. Standarts of measurement, physiological interpretation, and clinical use // *Circulation.* 1996. Vol. 93, № 5. P.1043.
15. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
16. *Хованова Н.А., Хованов И.А.* Методы анализа временных рядов: Учебное пособие. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2001.
17. *Игошева Н.Б., Павлов А.Н., Анищенко Т.Г.* Методы анализа сердечного ритма: Учебное пособие. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2001.

*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 29.04.03
после доработки 07.07.03*

INFLUENCE OF EXTERNAL FACTORS IN A MODEL OF NEURAL CONTROL OF THE HEART RATE

N.B. Frolova, A.P. Chetverikov

Nonlinear dynamics of a simple mathematical model of neural control of the heart rate variability taking into account the external influences simulating stressful loadings is investigated by methods of computer experiment. Spectral power density of processes and autocorrelation function are calculated and the time of decreasing of autocorrelation function and time of relaxation of the system are estimated to analyze the behavior of the system and to compare the results of simulation with the real data.



Фролова Наталья Борисовна - родилась в 1975 году в Саратове, окончила Саратовский государственный университет (1997). С 1997 года аспирант кафедры электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Научные интересы связаны с исследованием нелинейных динамических систем, находящихся под воздействием флуктуаций. Автор 8 публикаций по теме диссертации.



Четвериков Александр Петрович родился в 1953 году в Новоузенске, окончил Саратовский государственный университет (1975). Работал в НИИ механики и физики СГУ, затем на физическом факультете СГУ. В настоящее время профессор кафедры электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1981) и доктора физико-математических наук (1996), обе в СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика распределенных систем, вакуумная сверхвысоко-частотная электроника, компьютерный эксперимент. Опубликовал более 70 работ в отечественных и зарубежных изданиях.



КЛАСТЕРНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

А.А. Акопов, Т.Е. Вадивасова, В.В. Астахов, Д.Д. Матюшкин

В работе исследуется образование кластеров частотной синхронизации в непрерывной среде с линейной расстройкой собственной частоты вдоль пространственной координаты. Проводится сравнение поведения непрерывной среды, описываемой уравнением в частных производных, и её дискретного аналога в виде цепочки автогенераторов.

Введение

Одним из направлений в нелинейной динамике, активно разрабатываемых в течение последнего времени, является изучение эффектов самоорганизации в пространственно-распределенных системах и средах. Большое количество работ посвящено исследованию моделей с дискретными пространственными координатами. Такие модели представляют собой ансамбли осцилляторов различного типа с локальным взаимодействием и широко используются в физике, химии и биологии [1-5]. В основе эффектов самоорганизации и возникновения упорядоченных пространственных структур в осцилляторных ансамблях и распределенных средах лежит явление синхронизации взаимодействующих элементов. Имеется большое число работ, посвященных явлению синхронизации, образованию кластеров и других упорядоченных структур в цепочках и решетках автогенераторов периодических колебаний [6-15], хаотических систем [16-25] и стохастических осцилляторов [26-30].

Большой интерес вызывает поведение распределенных автоколебательных сред, описываемых уравнениями в частных производных. Однако явление синхронизации в непрерывных средах исследовано гораздо в меньшей степени. Обычно рассматриваются условия полной синхронизации в однородной среде [1,31]. Другие эффекты синхронизации в распределенных средах, такие как вынужденная синхронизация внешним воздействием и взаимная синхронизация двух взаимодействующих сред, нашли отражение лишь в небольшом количестве работ [32-36]. Практически не исследованы эффекты частичной (кластерной) синхронизации в неоднородной непрерывной среде. Однако в ряде случаев пространственно-непрерывные распределенные модели дают более адекватное описание наблюдаемых явлений (например, в гидродинамике). Актуальным

является вопрос, насколько существенным может оказаться переход к непрерывному пределу с точки зрения наблюдаемых в распределенных системах эффектов самоорганизации и какие новые явления могут при этом возникнуть.

В реальных физических, химических и биологических распределенных системах и средах всегда имеется некоторая зависимость параметров от пространственных координат. В условиях частичной синхронизации пространственная неоднородность служит одной из причин образования различных кластерных структур. Кластерные структуры были обнаружены и исследованы в различных дискретных моделях распределенных систем [9,15,19,37-41]. Так, в цепочках и решетках автогенераторов зависимость собственной частоты от пространственной координаты при наличии достаточно сильной связи приводит к образованию так называемых кластеров частотной синхронизации, которые существуют в широкой области вариации параметров и являются устойчивыми к действию шума [15,22,38,39].

Целью настоящей работы является исследование кластеров частотной синхронизации в модели автоколебательной среды с непрерывной пространственной координатой. Сделана попытка ответить на следующие вопросы. Во-первых, являются ли результаты, полученные ранее для модели с дискретной пространственной координатой [15,38], справедливыми в непрерывном пределе, то есть сохранится ли сам эффект образования частотных кластеров, какова будет их структура и как она будет зависеть от параметров среды? Во-вторых, если в непрерывной неоднородной среде возникают частотные кластеры, то будут ли они характеризоваться какими-либо особенностями по сравнению с кластерами, наблюдаемыми в дискретной модели?

1. Исследуемая модель

Исследуемая в работе модель распределенной неоднородной автоколебательной среды описывается одномерным нелинейным уравнением в частных производных вида

$$a_t = i\omega(x)a + r(1-|a|^2)a + ga_{xx}, \quad (1)$$

где $i=(-1)^{1/2}$; $a(x,t)$ - комплексная амплитуда колебаний, зависящая от времени t и от пространственной координаты x ; a_t - первая производная по времени; a_{xx} - вторая производная по пространственной координате. Параметр нелинейности r и коэффициент диффузии g полагаются постоянными. Функция $\omega(x)$ характеризует расстройку собственной частоты вдоль пространственной координаты. В работе рассматривается линейная частотная расстройка по пространственной координате: $\omega(x)=x\Delta_{\max}/l$, где l - длина системы.

Уравнение (1) представляет собой частный случай уравнения Гинзбурга - Ландау, являющегося одним из основных уравнений теории нелинейных неравновесных сред и описывающего большое разнообразие нелинейных явлений [42-47]. Параметры r и g в (1) полагаем действительными, то есть пренебрегаем нелинейным смещением частоты и пространственным взаимодействием реактивного типа. Следует отметить, что данная модель среды получается из неоднородной цепочки квазигармонических автогенераторов [15,38,39] при предельном переходе к непрерывной пространственной координате.

В проведенных исследованиях рассматривалась распределенная система конечной длины l с граничными условиями второго рода

$$a_x(x,t)|_{x=0,l} = 0. \quad (2)$$

Начальное состояние среды выбиралось случайным образом вблизи некоторого однородного состояния. Уравнение (1) численно интегрировалось по неявной схеме с использованием метода прямой и обратной прогонки [48]. Неявная схема является абсолютно устойчивой, что дает возможность выбирать шаги дискретизации Δt и Δx исходя из желаемой точности расчета, а не из соображений устойчивости численного алгоритма. По результатам численного интегрирования системы (1) рассчитывалась зависимость средней частоты колебаний от пространственной координаты x

$$\Omega(x) = \langle \phi_t(x,t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \{[\phi(x,t_0+T) - \phi(x,t_0)]/T\}. \quad (3)$$

Угловые скобки означают усреднение по времени. Функция $\phi(x,t)$ представляет собой фазу колебаний. Она определяется как

$$\phi(x,t) = \text{arg}a(x,t) = \text{arctg}(\text{Im}a(x,t)/\text{Re}a(x,t)) \pm \pi k, \quad k=0,1,2,\dots \quad (4)$$

Добавление величины $\pm \pi k$ производится исходя из непрерывности изменения фазы во времени. Анализировались также пространственно-временные диаграммы состояний среды. В качестве управляющих параметров в работе были выбраны длина системы l и коэффициент диффузии g . Параметр надкритичности фиксировался: $r=0.5$. Расстройка собственной частоты на границах среды была выбрана постоянной: $\Delta_{\max}=0.2$.

2. Режимы частотных кластеров

Проведенные численные эксперименты показали, что распределенная неоднородная система (1) в широкой области изменения параметров демонстрирует тот же самый эффект формирования кластеров частотной синхронизации, который известен для цепочки автогенераторов [15,38]. Так же как и в дискретной модели в непрерывной среде наблюдались идеальные и промежуточные кластерные структуры [15,38]. В режиме идеальных кластеров в непрерывной среде можно выделить интервалы значений x , для которых средняя частота $\Omega(x)$ с высокой степенью точности является постоянной (рис. 1, а). Для промежуточных структур характерна плавная зависимость частоты Ω от координаты x с некоторыми участками более медленного изменения (рис. 1, б). В этом случае синхронизация в пределах кластера является нестройгой (эффективной), так же как при воздействии шума [39].

На рис. 2, а, б представлены пространственно-временные диаграммы

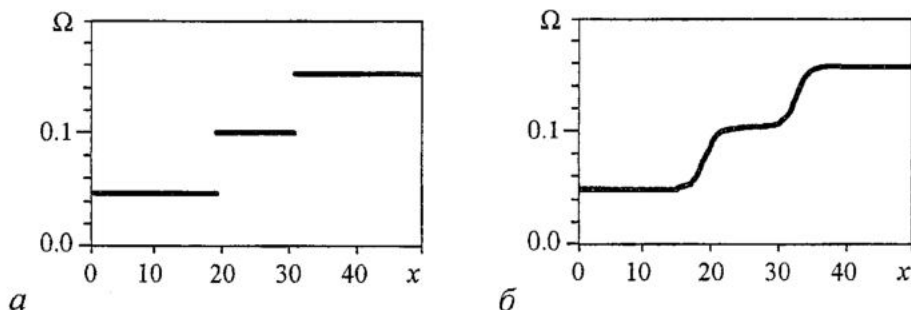


Рис. 1. Изменение средней частоты колебаний Ω вдоль среды в случае идеальной кластерной структуры при $g=1.0$ (а) и промежуточной структуры при $g=0.85$ (б). Другие параметры: $\Delta_{\max}=0.2$, $l=50$. Вычисление проводилось на времени $T=30000$ при времени установления $t_0=120000$ и шагах дискретизации $\Delta t=0.01$ и $\Delta x=0.05$

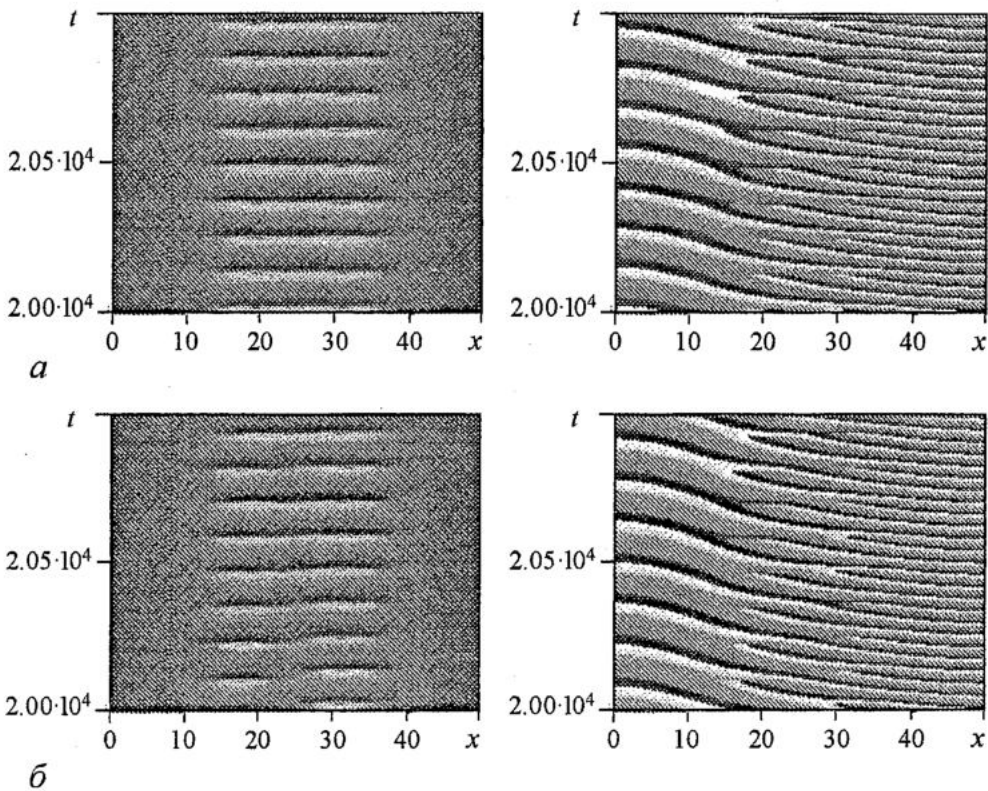


Рис. 2. Пространственно-временные диаграммы состояний среды в режиме идеальных кластеров при $g=1.0$ (а) и промежуточных кластеров при $g=0.85$ (б). Диаграммы, приведенные слева, соответствуют изменениям мгновенной амплитуды $|a(x,t)|$ от 0 (белый цвет) до 1 (черный цвет); диаграммы справа изображают мгновенные состояния приведенной фазы $\tilde{\varphi}(x,t)$ от $-\pi$ (белый цвет) до π (черный цвет). Другие параметры системы: $\Delta_{\max}=0.2, l=50$

состояний среды, соответствующие двум приведенным кластерным структурам. Слева показаны мгновенные значения амплитуды колебаний $|a(x,t)|$, а справа - мгновенные значения приведенной фазы $\tilde{\varphi}(x,t) \in [-\pi, \pi]$.

Амплитудная диаграмма на рис. 2, а, соответствующая идеальной кластерной структуре, характеризуется высокой степенью регулярности. Более светлые пятна, отвечающие значительному уменьшению амплитуды колебаний на границе кластеров, повторяются во времени практически периодически. Для неидеальной (промежуточной) кластерной структуры, приведенной на рис. 1, б, периодичность на амплитудной диаграмме заметно нарушена. Соответствующие идеальным кластерам периодические структуры отмечались в цепочке автогенераторов [15,38,39]. Различие идеальной и неидеальной кластерных структур на фазовых диаграммах, приведенных справа, не так хорошо видно. Некоторое нарушение строгой периодичности состояний в режиме идеальных кластеров, заметное на фазовой диаграмме, связано с конечной точностью численного интегрирования, недостаточной для того, чтобы правильно реконструировать характер границы между кластерами в непрерывной среде.

3. Особенности границы между кластерами в непрерывной среде

В цепочке автогенераторов, служащей дискретным аналогом среды (1), идеальная кластерная структура соответствует строгому разбиению всех

осцилляторов на несколько групп с равными средними частотами Ω , причем разности частот кластеров совпадают и равны наименьшей кластерной частоте [15,38]. На границе между кластерами средняя частота колебаний Ω претерпевает скачок. Возникает вопрос, какова будет граница между идеальными кластерами в случае непрерывной среды? В отличие от модели с дискретной пространственной координатой (цепочки из фиксированного числа автогенераторов) при численном исследовании непрерывной среды мы можем бесконечно дробить шаг дискретизации пространственной координаты Δx и исследовать все более мелкоаспигабные детали среды. В этом мы ограничены только возможностями компьютера. График зависимости $\Omega(x)$, представленный на рис. 1, а, получен для сравнительно большого шага Δx . Не приведет ли уменьшение шага Δx к появлению значений частоты Ω , промежуточных по отношению к частотам кластеров?

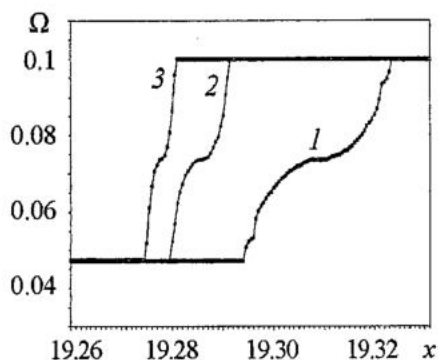


Рис. 3. Фрагменты зависимости $\Omega(x)$ в режиме идеальных кластеров при $g=1.0$, $\Delta_{\max}=0.2$, $l=50$. Вычисление проводилось на времени $T=30000$ при времени установления $t_0=120000$ и шаге дискретизации $\Delta x=0.0005$ и различных значениях шага Δt : 0.05 (кривая 1); 0.02 (кривая 2) и 0.01 (кривая 3)

Δt . Можно видеть, что на графике появляются точки, располагающиеся между горизонтальными плато (то есть между кластерами). Возникает некая переходная область между кластерами, соответствующая непрерывному изменению частоты $\Omega(x)$. С уменьшением шага интегрирования по времени размер межкластерной области уменьшается. Можно ли для любого выбора достаточно малого Δx подобрать такой малый шаг Δt , что межкластерная область исчезнет совсем? С физической точки зрения этого быть не должно в силу непрерывности среды. Зависимость $\omega(x)$ в непрерывной среде не должна претерпевать скачки на границе идеальных кластеров. Однако межкластерные области могут быть чрезвычайно узкими, а значения производной $d\omega(x)/dt$ в некоторых точках - очень большими. Уменьшение шагов дискретизации приводит к резкому росту времени вычисления. В этой связи невозможно с полной уверенностью сказать, дает ли численное моделирование физически корректный результат или используемая математическая модель не вполне адекватно описывает процессы в непрерывной среде, происходящие на границах кластеров.

4. Эволюция кластерных структур при вариации параметров среды

Структура кластеров частотной синхронизации в непрерывной среде (1) зависит от коэффициента диффузии g , длины системы l и расстройки Δ_{\max} ,

приходящейся на длину l , или градиента расстройки $\delta = \Delta_{\max}/l$. В проведенных численных экспериментах исследовалась эволюция кластерных структур при вариации параметров g и l при фиксированной расстройке $\Delta_{\max} = 0.2$. Полученная диаграмма режимов представлена на рис. 4. На диаграмме нанесены границы между кластерными структурами с различным количеством кластеров M . Римскими цифрами указано количество частотных кластеров, наблюдаемых в соответствующей области. Области с восемью и более кластерами являются достаточно узкими и границы между ними на диаграмме не изображены. Кластеры в рассматриваемых областях могут быть как идеальными, так и неидеальными (промежуточными). Некоторые наиболее широкие области существования идеальных кластеров выделены серым тоном.

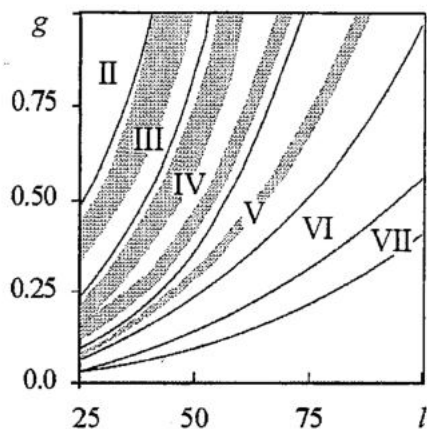


Рис. 4. Диаграмма кластерных режимов непрерывной среды (1) при вариации параметров g и l и фиксированной расстройке $\Delta_{\max} = 0.2$. Сплошными линиями нанесены границы областей с различным количеством частотных кластеров. Количество кластеров обозначено цифрами II, III, IV, ... Серым тоном отмечены наиболее широкие области идеальных кластерных структур

Из диаграммы видно, что при заданной расстройке Δ_{\max} и коэффициенте диффузии g структуру из заданного небольшого числа кластеров M можно наблюдать только в системах ограниченной длины. Следует отметить, что, увеличивая длину l , мы уменьшаем градиент частотной расстройки δ , что, казалось бы, должно способствовать синхронизации. Однако это не наблюдается. Количество частотных кластеров растет с увеличением длины системы. Из рис. 4 хорошо видно, что границы между структурами M и $M+1$ соответствуют параболом.

Для представленной на рис. 4 области изменения длины системы l режим глобальной синхронизации реализуется при очень больших значениях коэффициента диффузии. Так как большие значения g не соответствуют квазигармонической модели (1), то область глобальной синхронизации не нанесена на диаграмму. Оценка границы области глобальной синхронизации непрерывной неоднородной среды может быть получена аналитически из рассмотрения поведения фазы $\phi(x, t)$, если пренебречь изменениями амплитуды и считать $|a(x, t)| = 1$. В этом приближении уравнение динамики фазы, соответствующее модели (1), принимает вид

$$\phi_t = \omega(x) + g\phi_{xx} \quad (5)$$

с граничными условиями $\phi_x(0, t) = \phi_x(l, t) = 0$. Продифференцировав (5) по координате и введя обозначение $\theta = \phi_x$, можно записать

$$\theta_t = \delta + g\theta_{xx}, \quad (6)$$

где $\delta = d\omega/dx = \text{const}$ - градиент линейного роста собственной частоты вдоль пространственной координаты.

Полагая, что в режиме глобальной синхронизации градиент фазы не изменяется во времени, $\partial\phi_x/\partial t = 0$, и максимальная разность фаз в точках среды не превосходит 2π , легко получить условие глобальной синхронизации

$$g \geq \Delta_{\max}^2 / (12\pi). \quad (7)$$

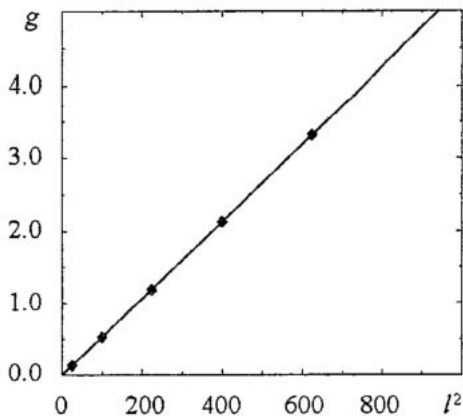


Рис. 5. Граница области глобальной синхронизации непрерывной неоднородной среды на плоскости параметров g, l^2 при фиксированной расстройке $\Delta_{\max}=0.2$. Сплошная линия соответствует оценке (7). Точками отмечены данные численного эксперимента

Граница области глобальной синхронизации непрерывной неоднородной среды представлена на рис. 5. Следует отметить, что в дискретной модели [15,38] при фиксированной расстройке Δ_{\max} граница глобальной синхронизации отвечает закономерности $g \sim N$, где N - длина цепочки автогенераторов. Таким образом, граница глобальной синхро-

низации по-разному зависит от длины системы в случае непрерывной среды и ее дискретного аналога.

Выводы

Проведенные численные эксперименты позволяют утверждать, что в непрерывной неоднородной автоколебательной среде с расстройкой собственной частоты вдоль пространственной координаты наблюдается образование кластеров частотной синхронизации. Кластерные структуры в непрерывной среде во многом подобны тем, что образуются в дискретной модели среды. В численных экспериментах при фиксированных шагах дискретизации зависимость средней частоты колебаний от координаты $\Omega(x)$ в режиме идеальных кластеров может вести себя как разрывная функция. Она, как и в случае дискретной модели (цепочки автогенераторов), претерпевает скачки на границах кластеров. Наблюдается определенное отличие в поведении неоднородной непрерывной среды и ее дискретного аналога при вариации параметров, отвечающих за диффузионное взаимодействие и частотную расстройку. В частности, по-разному определяется граница области глобальной синхронизации.

Данная работа частично поддержана Фондом гражданских исследований и развития (CRDF) и Министерством образования РФ (грант REC-006). Авторы благодарны Хованову И.А. и Шабунину А.В. за полезные советы и помощь в работе над статьей.

Библиографический список

1. Kuramoto Y. Chemical Oscillations Waves and Turbulence. Berlin: Springer, 1984.
2. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. М.: Наука, 1984.
3. Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. Dynamic chaos in ensembles of structures and spatial development of turbulence in unbounded systems / Ed. W. Ebeling. N.Y.: Springer, 1986.
4. Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Сильверстон А., Баженов М.В.,

- Хуэрта Р., Суццик М.М., Рубчинский Л.Л. Синхронизация в нейронных ансамблях // УФН. 1996. Т. 166, № 4. С. 365-390.
5. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., and Shalfeev V.D.* Stability, Structure and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. World Scientific, Singapore, 1994.
 6. *Костин И.К., Романовский Ю.М.* Флуктуации в системах многих связанных генераторов // Вестник МГУ. Сер. физ. и астр. 1972. Т. 13. С.698-705.
 7. *Aizawa Y.* Synergetic approach to the phenomena of mode-locking in nonlinear systems // Progr. Theor. Phys. 1976. Vol. 56, №3. P.703-716.
 8. *Kuramoto Y.* Cooperative dynamics of oscillator community // Progr. Theor. Phys. 1984. Vol. 79. P.212-240.
 9. *Ermentrout G.B., Kopell N.* Frequency plateaus in a chain of weakly coupled oscillators // SIAM J. Math. Ann. 1984. Vol. 15. P. 215-237.
 10. *Yamaguchi Y., Shimizu H.* Theory of self-synchronization in the presence of native frequency distribution and external noises // Physica D. 1984. Vol. 11. P. 212-226.
 11. *Sakaguchi H., Shinomoto S., Kuramoto Y.* Local and global self-entrainments in oscillator lattices // Progr. Theor. Phys. 1987. Vol. 77. P.1005-1010.
 12. *Strogatz S.H., Mirollo R.E.* Phase-locking and critical phenomena in lattices of coupled nonlinear oscillators with random intrinsic frequencies // Physica D. 1988. Vol. 31. P. 143-168.
 13. *Strogatz S.H., Mirollo R.E.* Collective synchronization in lattices of nonlinear oscillators with randomness // J. Phys. A. 1988. Vol. 21. P. L699-L705.
 14. *Афраймович В.С., Некоркин В.И.* Устойчивые состояния в цепочечных моделях неограниченных неравновесных сред // Матем. моделирование. 1992. Т. 4, № 1. С.83-95.
 15. *Osipov G.V., Sushchik M.M.* Synchronized clusters and multistability in arrays of oscillators with different natural frequencies // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, № 6. P. 7198-7207.
 16. *Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И.* Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. 1986. Т. 286, №5. С.1120-1124.
 17. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И.* Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т.34, № 1. С.35-39.
 18. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 10-12. С.1079-1115.
 19. *Kaneko K.* Clustering, coding, switching, hierarchical ordering and control in a network of chaotic elements // Physica D. 1990. Vol. 41. P. 137-172.
 20. *Braiman Y., Ditto W.L., Wiesenfeld K., Spano M.L.* Disorder-enhanced synchronization // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 206. P. 54-60.
 21. *Kocarev L., Paralitz U.* Synchronizing spatiotemporal chaos in coupled nonlinear oscillators // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77, № 11. P. 2206-2209.
 22. *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55. P. 2353-2361.
 23. *Astakhov V.V., Anishchenko V.V., Kapitaniak T., Shabunin A.V.* Synchronization of chaotic oscillators by periodic parametric perturbations // Physica D. 1997. Vol. 109, № 1,2. P. 11-16.
 24. *Pecora L.M.* Synchronization conditions and desynchronizing patterns in coupled limit-cycle and chaotic systems // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, № 1. P. 347-360.
 25. *Фомин А.И., Вадивасова Т.Е., Сосновцева О.В., Анищенко В.С.* Вынужденная фазовая синхронизация цепочки хаотических осцилляторов // Изв. вузов. ПНД. 2000. Т. 8, № 4. С. 103-112.

26. Lindner J.F., Chandramouli S., Bulsara A.R., Löcher M., Ditto W.L. Noise enhanced propagation // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81, № 23. P. 5048-5051.

27. Neiman A., Schimansky-Geier L., Cornell-Bell A., Moss F. Noise-enhanced synchronization in excitable media // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83, № 23. P. 4896-4899.

28. Löcher M., Cigna D., Hunt E.R. Noise sustained propagation of a signal in coupled bistable electronic elements // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80, № 23. P.5212-5215.

29. Hu B., Zhou Ch. Phase synchronization in coupled non-identical excitable systems and array-enhanced coherence resonance // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61, № 2. P. R1001-R1004.

30. Копейкин А.С., Матюшкин Д.Д., Вадивасова Т.Е., Сосновцева О.В., Анищенко В.С. Эффекты синхронизации в цепочке стохастических бистабильных осцилляторов // Изв. вузов. ПНД. 2001. Т. 9, № 3. С. 61-72.

31. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990.

32. Elphick Ch., Hagberg A., Meron E. Phase front instability in periodically forced oscillatory systems // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80, № 22. P. 5007-5010.

33. Boccaletti S., Bragard J., Arcelli F.T. Controlling and synchronizing space time chaos // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59, № 6. P. 6574-6578.

34. Chaté H, Pikovsky A. and Rudzick O. Forcing oscillatory media: phase kinks vs synchronization // Physica D. 1999. Vol. 131. P. 17-30.

35. Junge L., Parlitz U. Synchronization and control of coupled Ginzburg-Landau equations using local coupling // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61, № 4. P. 3736-3642.

36. Park H-K. Frequency locking in spatially extended systems // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86, № 6. P. 1130-1133.

37. Ermentrout G.B., Troy W.C. Phase locking in a reaction-diffusion system with a linear frequency gradient // SIAM J. Appl. Math. 1986. Vol. 39. P. 623-660.

38. Осипов Г.В., Суцук М.М. Синхронизация и управление в цепочках связанных автогенераторов // Вестник ННГУ. Нелинейная динамика - синхронизация и хаос - II. 1997. С.5-23.

39. Vadivasova T.E., Strelkova G.I., Anishchenko V.S. Phase-frequency synchronization in a chain of periodic oscillators in the presence of noise and harmonic forcings // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. P. 036225.

40. Nekorkin V.I., Makarov V.A., Velarde M.G. Clustering in a chain of bistable nonisochronous oscillators // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, № 5. P. 5742-5747.

41. Sosnovtseva O.V., Fomin A.A., Postnov D.E., Anishchenko V.S. Clustering of noise-induced oscillations // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 026204.

42. Couillet P., Gil L. and Lega J. Defect-mediated turbulence // Phys.Rev.Lett. 1989. Vol. 62. P. 1619-1622.

43. Gil L. Space and time intermittency behaviour of a one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation // Nonlinearity. 1991, № 4. P. 1213-1222.

44. Shraiman B. I., Pumir A., Van Saarloos W., Hohenberg P.C., Chaté H. and Holen M. Spatiotemporal chaos in the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation // Physica D. 1992. Vol. 57. P. 241-248.

45. Bazhenov M.V., Rabinovich M.I., and Fabrikant A.L. The amplitude-phase turbulence transition in a Ginzburg-Landau model as a critical phenomenon // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 163. P. 87-94.

46. Cross M.G., Hohenberg P.C. Pattern formation outside of equilibrium // Rev. Mod. Phys. 1993. Vol. 65, № 3. P. 851-1112.

47. Chaté H. Spatiotemporal intermittency regimes of the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation // Nonlinearity. 1994. Vol. 7. P. 185-204.

48. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М: Наука, 1989.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 17.12.02
после доработки 28.03.03

CLUSTER SYNCHRONIZATION IN INHOMOGENEOUS AUTOOSCILLATION MEDIUM

A.A. Akopov, T.E. Vadivasova, V.V. Astakhov, D.D. Matyushkin

Formation of clusters of frequency synchronization is studied for a continuous extended medium with linear mismatch of the natural frequency along a spatial coordinate. We compare the behavior of the continuous medium described by the equation in partial derivatives and of its discrete analogue in the form of a chain of oscillators.



Акопов Артем Александрович - родился в Сочи (1973), окончил физический факультет Саратовского университета (2000). В настоящее время учится в аспирантуре на кафедре радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Имеет 6 публикаций.



Астахов Владимир Владимирович окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил кандидатскую (1983) и докторскую диссертацию (1999). Профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов - теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.

E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru



Вадивасова Татьяна Евгеньевна - родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время - профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

E-mail: tanya@chaos.ssu.runnet.ru



Матюшкин Дмитрий Дмитриевич - родился в Саратове (1981). Среднее образование получил в экспериментальной школе-системе № 4 (специальность - биохимия). В настоящий момент - студент 5 курса физического факультета СГУ. Имеет 2 публикации.



Изв. вузов «ПНД», т.11, № 4-5, 2003

УДК 612.822:577.37

НЕЛИНЕЙНО-ДИНАМИЧЕСКИЙ ОТКЛИК АНСАМБЛЯ АКСОНОВ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ РЕГУЛЯРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ EX VIVO

Г.Г. Акчурун, Г.А. Селиверстов, Г.Г. Акчурун м.л.

В ансамбле аксонов нервных клеток (соматический нерв лягушки) впервые обнаружен субгармонический каскад удвоения периода составного потенциала действия, возникающий при внеклеточной электрической стимуляции нерва регулярной последовательностью электрических импульсов с периодом, соизмеримым с временем относительной рефрактерности.

В последнее время в ведущих мировых центрах нейродинамики проводятся интенсивные исследования по обнаружению сложных нелинейно-динамических режимов, таких как стохастический или когерентный резонанс, которые, по-видимому, используются живыми системами для оптимального функционирования [1-4]. В данном сообщении речь идет об обнаружении бифуркаций субгармонического каскада удвоения периода нервных импульсов (потенциалов действия, далее - ПД) при возбуждении классического объекта нейрофизиологии - соматического нерва лягушки - регулярной последовательностью электрических импульсов.

Мембрана мотонейрона находится в устойчивом состоянии, характеризующемся потенциалом покоя, который формируется за счет отличия ионной концентрации аксоплазмы от внеклеточной концентрации. Процессы диффузии ионов через мембрану ответственны за возникновение потенциала Нернста, а численное значение разности потенциалов между внутренней и внешней поверхностями клеточной мембраны с учетом диффузии разных ионов может быть определено из уравнения Гольдмана [5,6]. Детальный механизм генерации нервных импульсов (ПД) в нейроне (аксон кальмара) при возбуждении внешними электрическими импульсами впервые был исследован как в биофизическом, так и в численном эксперименте в работах Ходжкина и Хаксли [7]. К настоящему времени основные процессы, ответственные за динамический отклик возбуждения нейронов, считаются уже классическими [8], хотя остается открытым вопрос о механизме функционирования ионных каналов в клеточной мембране на молекулярном уровне [9].

Мы исследовали нелинейный динамический отклик ансамбля аксонов нервных клеток (соматический нерв лягушки), представляющих нелинейную

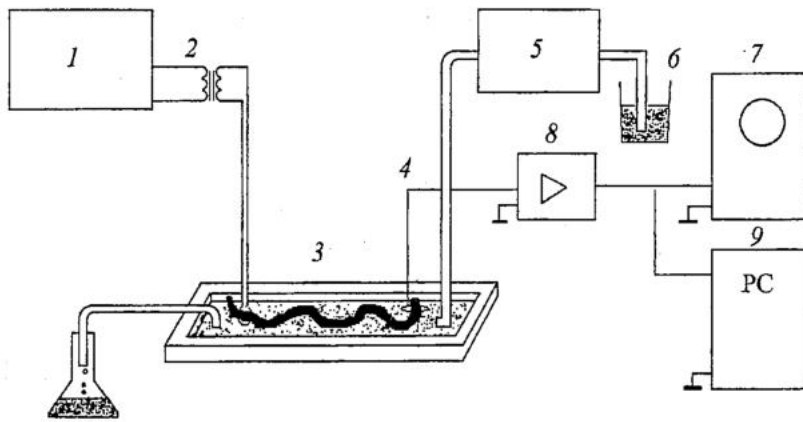


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки для исследования динамического отклика ансамбля аксонов при внеклеточном возбуждении последовательностью электрических импульсов миллисекундной длительности. 1 - электростимулятор типа ЭСЛ-2, 2 - изолирующий трансформатор с внешним зондом, стимулирующим нерв во влажной камере, 3 - соматический нерв лягушки, находящийся в ванночке с прокачиваемым раствором Рингера, 4 - внешний зонд во влажной камере, детектирующий составной потенциал действия ансамбля аксонов, 5 - перистальтический насос, 6 - сосуд с раствором Рингера (рН=7.4), 7 - осциллограф, 8 - малошумящий низкочастотный усилитель (коэффициент усиления - нескольких тысяч), 9 - персональный компьютер со встроенной платой АЦП

пороговую систему, которая неавтономно возбуждается регулярной последовательностью электрических импульсов миллисекундной длительности. Блок-схема экспериментальной установки представлена на рис. 1.

Соматический нерв лягушки находился в прокачиваемом растворе Рингера (рН=7.4), что позволяло проводить эксперименты в течение многих часов без изменения амплитуды и формы ПД. Составной потенциал действия соматического нерва (длиной 40...70 мм) после усиления наблюдался на экране осциллографа, а на компьютере параллельно регистрировался его спектр мощности в реальном масштабе времени.

Проведенное нами детальное исследование процесса внеклеточного возбуждения ансамбля аксонов соматического нерва лягушки последовательностью одинаковых по амплитуде и длительности электрических импульсов позволило обнаружить режим возникновения каскада удвоения периода составного ПД при скважности стимулирующих импульсов, соизмеримой с временем относительной рефрактерности (невозбудимости). На рис. 2. представлена последовательность бифуркаций удвоения периода составного ПД при внеклеточном синхронном возбуждении пучка аксонов регулярной последовательностью электрических импульсов длительностью 100 микросекунд при изменении управляющего параметра, в качестве которого выступала частота следования стимулирующих импульсов при фиксированной амплитуде.

Из представленных результатов нетрудно видеть, что, например, при двойном пороге возбуждения на частотах, меньших обратного времени относительной рефрактерности (менее 100 Гц, см. рис.2), наблюдается регулярная последовательность ПД нерва. С ростом частоты стимуляции нерва реализуется сценарий возникновения динамического хаоса через последовательность удвоения периода возбуждения. При уменьшении силы раздражения нерва ниже двойного порога, режим возникновения бифуркаций удвоения периода наблюдается на меньших частотах стимуляции. Такой нелинейно-динамический отклик соматического нерва лягушки, по-видимому, связан с тем, что нерв представляет собой пучок аксонов мотонейронов, различающихся по диаметру, порогу электровозбудимости и скорости распространения ПД [8]. Диаметр нерва в месте

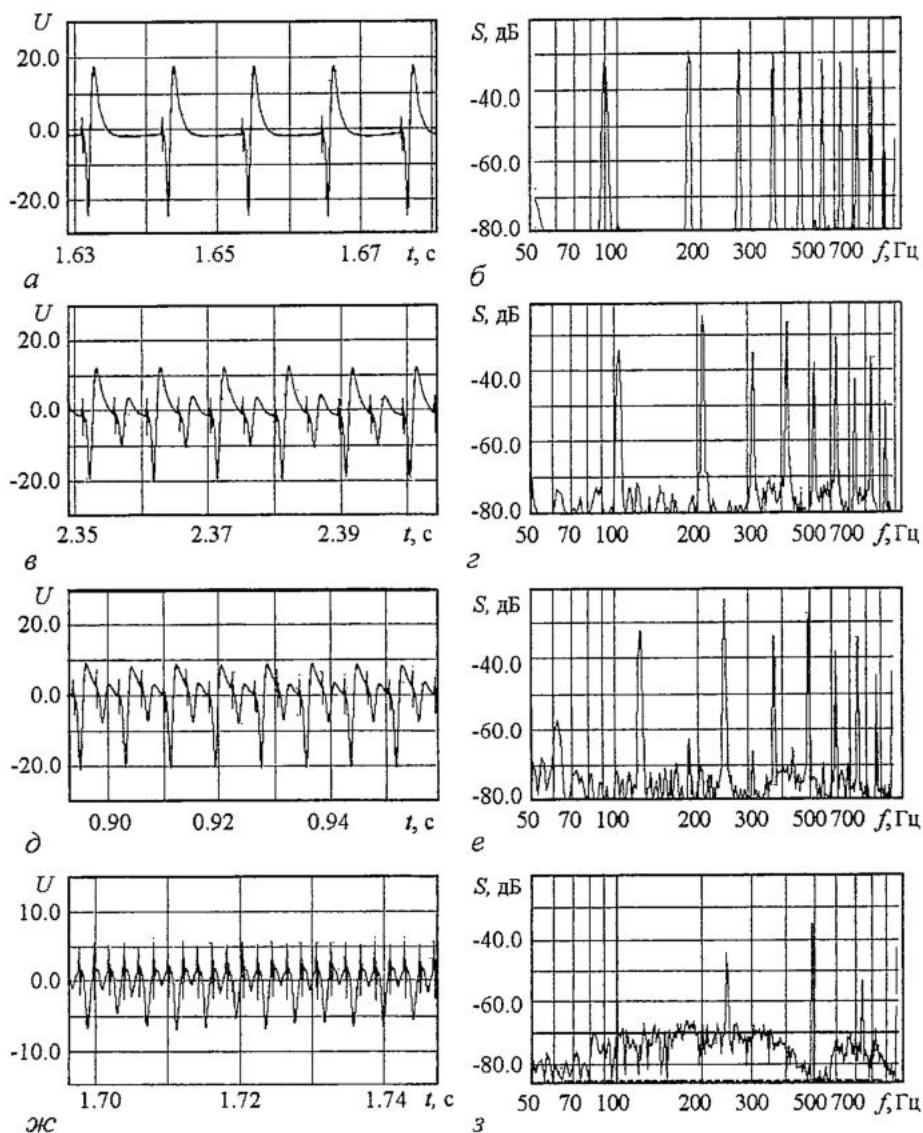


Рис. 2. Зависимость составного потенциала действия соматического нерва лягушки (а, в, д, ж) и соответствующий спектр мощности динамического отклика ПД (б, г, е, з) при возбуждении последовательностью электрических импульсов при их фиксированной амплитуде (двойной порог) и длительности (0.1 мс) с различной частотой следования f : а, б - 89 Гц (регулярная последовательность); в, г - 207 Гц (бифуркация субгармоники $f/2$); д, е - 247 Гц (бифуркация субгармоники $f/4$), ж, з - 487 Гц (режим динамического хаоса)

регистрации ПД составлял в среднем 0.5 миллиметра, а типичное значение диаметра в миелинизированных группах аксонов моторных нейронов $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$ в пучке составляет от 18 до 11 микрометров. При двойном пороге практически все несколько сотен аксонов возбуждаются синхронно во времени, что нетрудно экспериментально наблюдать по возникновению режима насыщения амплитуды составного ПД с ростом силы стимула. В нейрофизиологии известно явление выпадения нервных импульсов при электрической стимуляции нейронов последовательностью электрических импульсов [6]. Традиционно динамический отклик нейронов исследовался с помощью метода парных импульсов, что позволило установить наличие относительного и абсолютного периодов рефрактерности.

Численные эксперименты, проведенные нами на основе модели аксона Ходжкина и Хаксли в режиме электровозбуждения парными импульсами, действительно показали наличие эффекта выпадения потенциалов действия при скважности импульсов, соизмеримой с временем рефрактерности. Следует отметить, что режим выпадения импульсов существенно зависит от уровня превышения возбуждения над порогом. При приближении к порогу возбуждения режим выпадения потенциалов действия реализуется при скважности электрических импульсов значительно большей, чем для режима двойного порога. При численном моделировании возбуждения одного аксона регулярной последовательностью электрических импульсов процесс выпадения потенциалов действия становится сильно зависящим от величины, на которую превышен порог электрического возбуждения. Вблизи порога возбуждения учет его даже незначительного (единицы процента) случайного разброса для различных нейронов в ансамбле приводит к возникновению амплитудных флуктуаций составного (суммарного) потенциала действия. При этом уровень флуктуаций существенно падает с ростом числа возбуждившихся аксонов. Особенности таких динамических и флуктуационных явлений в ансамбле аксонов, недавно наблюдаемых экспериментально, обсуждались в работе [10,11], а типичный вид составного потенциала действия для двух характерных режимов возбуждения показан на рис. 3.

Мы рассматриваем нелинейно-динамический отклик ансамбля нейронов, возбуждаемых последовательностью регулярных электрических импульсов в режимах, существенно превышающих порог. Как показали проведенные эксперименты, режим возникновения бифуркаций удвоения периода составного ПД зависит от уровня превышения амплитудой стимулирующих импульсов порога стимуляции нерва и действительно смещается к большим частотам с ростом этого превышения. Нам представляется, что возникновение сценария удвоения не связано однозначно с разбросом пороговых значений возбуждения в ансамбле аксонов. Необходимо обратить внимание, что бифуркации в динамическом отклике происходят при синхронной пространственно-временной активации ансамбля аксонов, а последнее может вызывать взаимодействие волокон в нервном стволе через изменение ионного состава в межклеточном пространстве.

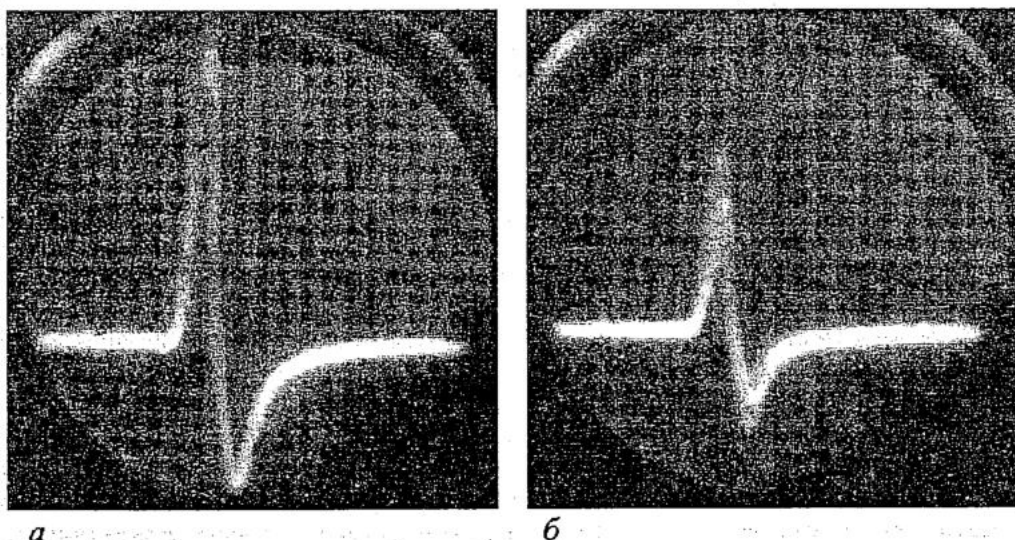


Рис. 3. Динамический отклик ансамбля аксонов соматического нерва лягушки при возбуждении последовательностью электрических импульсов: *а* - двойной порог; *б* - вблизи порога. Амплитуда ПД увеличена в 40 раз; скважность возбуждающих электрических импульсов 10 мс; длительность всей временной развертки на экране осциллографа 5 мс

Наблюдаемые в эксперименте бифуркационные режимы реализуются на предельных физиологических возможностях нейронов, когда возбуждается синхронно максимальное число нервных импульсов в каждом из аксонов. В реально функционирующих живых системах, таких как животные или человек, нелинейно-динамические кооперативные эффекты в ансамблях аксонов могут возникать, по-видимому, при тонических судорогах, вызванных судорожными ядами (например, стрихнином), при сверхдопустимых уровнях воздействия на центральную нервную систему (болевого шок, звуковой шок). Возможно проявление хаотических режимов в ансамбле аксонов мотонейронов при развитии тонической фазы большого эпилептического припадка [12].

Следует отметить, что режим воздействия регулярной последовательностью стимулирующих электрических импульсов с периодом следования, соизмеримым с временем рефрактерности, используется в кардиологии для подавления определенных видов аритмий [13]. При таких электротехнологиях эффективность купирования аритмий сильно отличается для стимуляторов, выпускаемых различными фирмами и использующих различные функциональные режимы с диапазоном рабочих частот, изменяющимся в пределах 150...600 импульсов в минуту при характерном времени рефрактерности 270...300 миллисекунд. Нам представляется, что при более глубоком понимании нелинейных процессов взаимодействия стимулирующих импульсов с собственными автоколебательными процессами в таких динамических системах возможна целенаправленная разработка технологий электролечения нарушений ритма, учитывающая обнаруженные выше нелинейные эффекты преобразования.

Авторы выражают благодарность за обсуждение работы и помощь в проведении эксперимента Д.Э. Постнову и Д.А. Зимнякову.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-02-16709) и CRDF (REC-006).

Библиографический список

1. *Pikovsky A., Kurths J.* Coherent resonance in a noise-driven excitable system // *Phys.Rev.Lett.* 1997. Vol. 78. P.775-778.
2. *Lee S., Neiman A., Kim S.* Coherence resonance in Hodgkin-Huxley neuron// *Phys.Rev.E.* 1998. Vol. 57. P. 3292-3297.
3. *Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л.* Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // *УФН.* 1999.Т. 169, №1. С.7-39.
4. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D.* Chaotic synchronization. Application to living systems. World Scientific. 2002.
5. *Goldman D.E.* Potential, impedance and rectification in membranes // *J. Gen. Physiol.* 1943. Vol. 27. P.27
6. *Плонси Р., Барр Р.* Биоэлектричество. Количественный подход. М.: Мир, 1992.
7. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane currents and its application to conduction and excitation in nerve // *J.Physiol.* 1952. Vol. 117. P. 500.
8. *Начала физиологии / Ред. А. Д. Ноздрачев.* СПб.: Лань, 2001.
9. *Хухо Ф.* Нейрохимия. Основы и принципы. М.: Мир, 1990.
10. *Akchurin G.G., Seliverstov G.A., Akchurin G.G.Jr.* Dynamic and fluctuation processes in ensemble of neurons at pulsed electrical excitation EX VIVO // *International Conference SYNCHRO 2002. Book of Abstracts.* P. 14.
11. *Akchurin G.G., Seliverstov G.A., Kamenskih T.G., Akchurin G.G. Jr.* Dynamic and fluctuation processes in ensemble of neurons at pulsed electrical and optical excitation in vivo // *Proc.SPIE.* 2001. Vol. 4707. P. 309-314.

12. *McNamara J.O.* Drugs effective in the therapy of the epilepsies // Goodman & Gilman's «The Pharmacological Basis of Therapeutics», 9th / Eds Joel G. Hardman, Alfred Goodman Gilman, Lee E. Limbird. McGraw-Hill Companies Inc. 1997. P. 461-487.

13. Аритмии сердца. Механизмы, диагностика, лечение / Ред. В.Дж. Мандел. М.: Медицина, 1996.

Саратовский государственный
университет

Саратовский государственный
медицинский университет

Поступила в редакцию 28.02.03

NONLINEAR DYNAMIC RESPONSE OF AXONS ENSEMBLE EXCITED BY REGULAR SEQUENCE OF ELECTRICAL IMPULSES EX VIVO

Garif G. Akchurin, George A. Seliverstov, George G. Akchurin

In axons ensemble of somatic nerve of the frog a scenario of period-doubling bifurcations was discovered from the frog nerve response. Complex dynamics of compound action potential is observed when on-line time of stimulatory electrical impulses is comparable with refractory period of the nerve.



Акчурин Гариф Газизович - родился в Бресте (1949). Окончил Саратовский государственный университет (1971). Работал в НИИ механики и физики СГУ. Защитил кандидатскую диссертацию по исследованию динамических и флуктуационных процессов в многоволновых газоразрядных лазерах (1979). В настоящее время - доцент кафедры оптики СГУ, докторант. Область научных интересов: динамические и нелинейные процессы в полупроводниковых, твердотельных и газоразрядных лазерах; пикосекундная оптоэлектроника и когерентные оптические методы диагностики в микроэлектронике и медицине. Автор (соавтор) более 50 публикаций и 10 авторских свидетельств и патентов. Член международного оптического общества SPIE и BIOS.

E-mail: akchurin@optics.sgu.ru



Селиверстов Георгий Александрович - родился в 1941 году. Окончил Астраханский государственный медицинский институт (1964). С 1975 года работает на кафедре фармакологии Саратовского государственного медицинского университета. Защитил кандидатскую диссертацию (1984), доцент (1988). Впервые в Саратове освоил методику внутриклеточной регистрации синаптических потенциалов. Научные интересы: влияние фармакологических препаратов на механизмы генерации биопотенциалов в возбудимых клетках. Автор 29 печатных работ.



Акчурин Георгий Гарифович - родился в Саратове (1984). Студент 3 курса физического факультета СГУ, группа биохимической физики. Научные интересы: фотодинамические и флуктуационные процессы в нейронах. Соавтор двух статей в трудах международных конференций и 5 тезисов докладов.



ВОЛНА КЛАСТЕРИЗАЦИИ В ЦЕПОЧКЕ СИСТЕМ, КАЖДАЯ ИЗ КОТОРЫХ СОДЕРЖИТ НАБОР ЭЛЕМЕНТОВ С ВНУТРЕННЕЙ ГЛОБАЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ

А.С. Иванова, С.П. Кузнецов

Исследуются цепочки систем (ячеек), каждая из которых содержит набор элементов с внутренней глобальной связью. Показано, что при определенных условиях в этих моделях реализуется феномен распространения волны кластеризации, состоящий в том, что образ, записанный первоначально в одной ячейке, в ходе временной эволюции системы формируется и в связанных с ней ячейках.

Введение

Исследование и использование принципов обработки информации, реализующихся в естественных нейросистемах (мозг человека и животных) представляет фундаментальный интерес и является одним из магистральных направлений развития современной науки [1].

Известны два основных подхода к построению моделей нейроподобных систем. Первый подразумевает по возможности точное воспроизведение деталей, выявленных при изучении биологических систем [2]. Второй заимствует из биологии только самые общие моменты - существование большого числа элементов (каждый из которых отвечает индивидуальному нейрону) и развитой системы связей между этими элементами [3]. С точки зрения формулирования общих принципов обработки информации, которые воспроизводили бы свойства биологических нейронных сетей, и для построения технических систем, реализующих эти принципы, именно второй подход представляет большой интерес.

В его рамках, в свою очередь, можно выделить два направления. Классической реализацией одного считается модель Хопфилда [4], когда в качестве индивидуального элемента берется система с предельно простой динамикой, а все нетривиальные динамические и информационные свойства и процессы (например, способность к распознаванию образов, ассоциативная память) обусловлены сложной (и варьируемой в процессе «обучения») структурой связей между элементами. Другой подход, изначально предложенный японским исследователем Канеко [5], в каком-то смысле противоположен: индивидуальный элемент предполагается способным демонстрировать сложную динамику и хаос, а структура связей считается достаточно простой. Эта модель обладает сложной нетривиальной динамикой и представляет собой набор эволюционирующих в дискретном времени элементов (квадратичных отображений), каждый из которых

связан с каждым другим одинаковым образом (глобальная связь). Исследования Канеко и других авторов продемонстрировали богатую феноменологию этой модели [5-8]. В частности, было обнаружено явление, названное кластеризацией, которое состоит в том, что в процессе динамики спонтанно формируются группы элементов - кластеры, такие, что мгновенные состояния точно совпадают для элементов, относящихся к одному кластеру. Возможность сосуществования аттракторов с различным числом кластеров при одних и тех же значениях параметров системы, очевидно, дает возможность для хранения информации, а управление этими состояниями можно использовать для обработки информации.

Как известно, одной из первых продуктивных концепций, предложенных в контексте проблемы создания искусственного интеллекта, был перцептрон [9]. Это нейросеть, в которой элементы («нейроны») расположены в виде нескольких слоев, а передача возбуждения осуществляется от слоя к слою (рис. 1, а). Интересное развитие идеи Канеко состоит в том, чтобы соединить ее с идеей перцептрона и рассмотреть сеть из последовательности слоев, такую, что

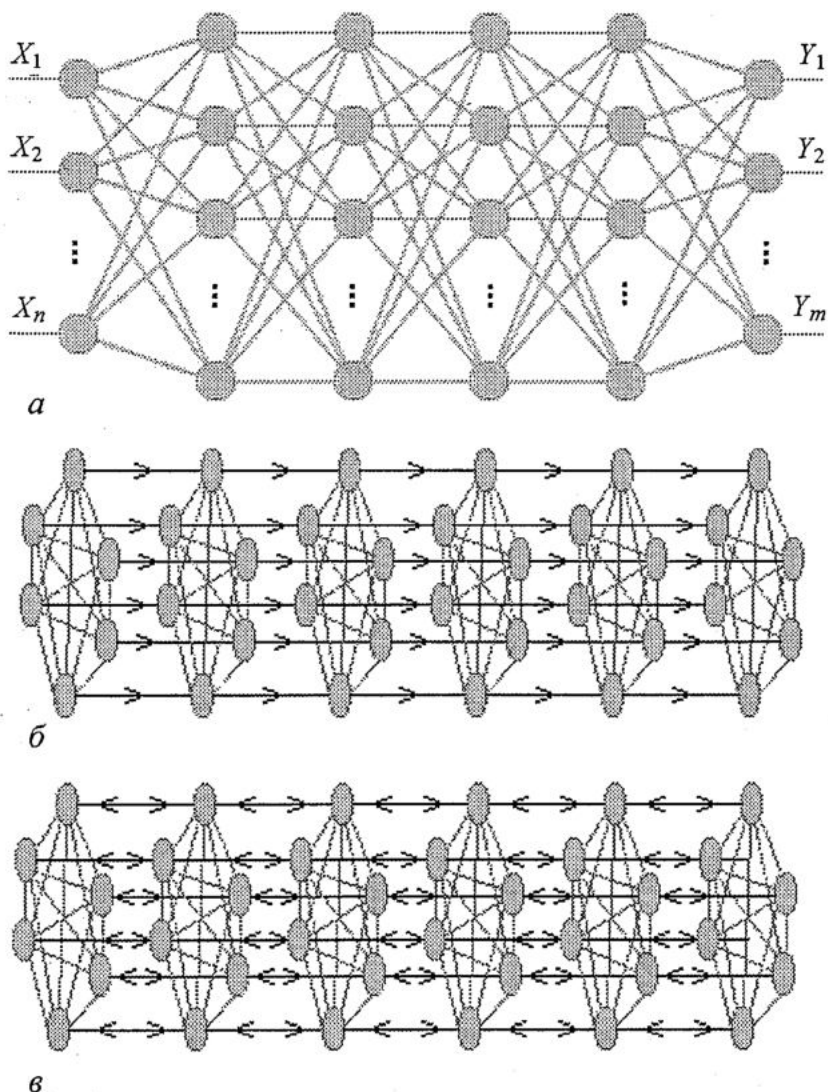


Рис. 1. Схематическое изображение многослойного перцептрона [9] (а), цепочки ячеек с глобальной внутренней связью и однонаправленной связью элементов с партнерами в соседней ячейке (б) и цепочки ячеек со взаимной связью (в)

индивидуальные элементы представлены квадратичными отображениями, связь между элементами в пределах каждого одного слоя является глобальной, и добавлена попарная связь между элементами, относящимися к соседним слоям. Таким образом, мы приходим к одномерной дискретной среде, построенной из связанных между собой ячеек, каждая из которых состоит из набора элементов с глобальной связью (рис. 1, б, в). Цель данной работы заключается в исследовании динамики такой модели, что представляет очевидный интерес с точки зрения выяснения возможностей подхода Канеко и его обобщений для описания и объяснения информационных процессов в нейросетях.

В разделе 1 вводится система, представляющая собой строительный блок для конструирования рассматриваемых далее цепочек. Это обобщение модели Канеко - совокупность элементов, динамика которых описывается одномерными квадратичными отображениями, с двумя типами глобальной связи. В разделе 2 строятся модели цепочек с однонаправленной и взаимной связью, а в разделе 3 изложены результаты численного моделирования динамики этих моделей. Основным результатом состоит в том, что продемонстрирован существенно новый феномен - волна кластеризации: в ходе временной эволюции системы кластерная структура, заданная первоначально в одной ячейке (которую можно трактовать как «образ»), передается соседним ячейкам, а затем постепенно распространяется на остальные элементы цепочки. В системе с однонаправленной связью реализуется совершенная волна кластеризации, в системе с взаимной связью ее распространение характеризуется своего рода диссипацией, проявляющейся в постепенном размывании образа.

1. Модель с двумя типами глобальной связи

Примем, что динамика изолированного индивидуального элемента описывается квадратичным отображением

$$X_{n+1} = f(X_n) = 1 - \lambda X_n^2, \quad (1)$$

и построим сначала систему с глобальной связью, которая далее будет использоваться как ячейка при конструировании цепочки.

В свое время для двух связанных элементов типа (1) на основе ренормгруппового (РГ) анализа было обнаружено, что слабая связь между отображениями представляется в общем случае как комбинация двух типов связи, инерционной и диссипативной [10-13]. В области перехода к хаосу оба этих типа связи характеризуются принципиально разными свойствами по отношению к РГ преобразованию, причем в отличие от диссипативной связи, инерционная может приводить к самопроизвольно возникающей нетривиальной динамике не только в области хаоса, но и в области регулярного поведения индивидуальных элементов.

Достаточно общая форма записи уравнений двух связанных систем имеет вид

$$\begin{aligned} X_{n+1}(1) &= f(X_n(1)) + \epsilon_1(f(X_n(2)) - f(X_n(1))) + \epsilon_2(X_n(2) - X_n(1)), \\ X_{n+1}(2) &= f(X_n(2)) + \epsilon_1(f(X_n(1)) - f(X_n(2))) + \epsilon_2(X_n(1) - X_n(2)), \end{aligned} \quad (2)$$

где $X_n(i)$, $i=1,2$ обозначает состояние i -го элемента в n -й момент дискретного времени, ϵ_1 и ϵ_2 - два параметра связи. В уравнении (2) член с $f(X)$ соответствует диссипативной связи, тогда как линейный член представляет собой комбинацию инерционной и диссипативной связи, хотя вклад диссипативной связи относительно мал. Как следует из анализа в работе [14], коэффициенты ϵ_1 и ϵ_2 выражаются через коэффициенты диссипативной ϵ_D и инерционной ϵ_I связи следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_D + 0.088\varepsilon_p, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_l \quad (3)$$

Систему с глобальной связью можно мыслить как набор элементов, каждый из которых попарно связан с каждым другим. Тогда рассмотренные выше два типа взаимодействия также могут быть отнесены к системам с глобальной связью. Уравнение для системы, в которой присутствуют оба типа глобальной связи, можно записать в следующем виде:

$$X_{n+1}(i) = (1-\varepsilon_1)f(X_n(i)) - \varepsilon_2 X_n(i) + (\varepsilon_1/N)\sum_{j=1}^N f(X_n(j)) + (\varepsilon_2/N)\sum_{j=1}^N X_n(j), \quad (4)$$

где N - полное количество элементов в системе, предполагающееся достаточно большим.

2. Модель в виде цепочки связанных ячеек с внутренней глобальной связью

Перейдем теперь к моделям в виде совокупности слоев или ячеек, каждая из которых описывается с помощью уравнения (4). Положим, что для любых двух соседних слоев установлено попарное соответствие между элементами одного и другого слоя, и связь вводится между соотнесенными друг с другом элементами. Эта связь может быть задана по-разному.

Одна возможность состоит в том, что информация может передаваться от слоя к слою только в одном направлении, и динамика последующих слоев не влияет на динамику предыдущих. Это однонаправленная связь. Другой вариант таков, что связь между слоями является взаимно симметричной, то есть каждый слой оказывает влияние на соседние с ним слои.

В общем случае связь между элементами, относящимися к разным слоям, должна представляться как комбинация инерционной и диссипативной связи. В данной работе, однако, для определенности будем считать, что эта связь чисто диссипативная.

С учетом сделанных предположений, систему уравнений для цепочки с однонаправленной связью формулируем следующим образом:

$$X_{n+1}^j(i) = f(X_n^j(i)) + (\varepsilon_1/N)\sum_{k=1}^N [f(X_n^j(k)) - f(X_n^j(i))] + (\varepsilon_2/N)\sum_{k=1}^N [X_n^j(k) - X_n^j(i)] + q[f(X_n^{j+1}(i)) - f(X_n^j(i))], \quad (5)$$

а для цепочки с взаимной связью - в виде

$$X_j^{n+1}(i) = f(X_n^j(i)) + (\varepsilon_1/N)\sum_{k=1}^N [f(X_n^j(k)) - f(X_n^j(i))] + (\varepsilon_2/N)\sum_{k=1}^N [X_n^j(k) - X_n^j(i)] + q[2f(X_n^j(i)) - f(X_n^{j-1}(i)) - f(X_n^{j+1}(i))], \quad (6)$$

где, напомним, $f(X) = 1 - \lambda X^2$ есть нелинейная функция, отвечающая логистическому отображению; n - дискретное время; i - индекс элемента; j - индекс ячейки; N - число элементов в каждой ячейке; ε_1 и ε_2 - параметры глобальной связи; q - параметр связи между элементами, относящимися к разным ячейкам.

3. Численные эксперименты и волна кластеризации

Говоря об информационных аспектах динамических процессов в моделях рассматриваемого класса, будем иметь ввиду плоские изображения (образы). Будем полагать, что элементы, относящиеся к каждой ячейке (слою), в количестве

$N=r^2$, где r - целое число, расположены в виде двумерной квадратной решетки пикселей размера $r \times r$ ($r=10$, следовательно, в каждой ячейке 100 элементов).

Значения динамической переменной, отвечающей каждому элементу, будем ассоциировать с цветом, приданным соответствующему пикселю. Пиксель обозначается белым, если значение динамической переменной соответствующего элемента $X_n^j(i) < X^*$, и черным, если $X_n^j(i) > X^*$. Здесь $X^* = [(1+4\lambda)^{1/2} - 1] / (2\lambda)$ отвечает неподвижной точке индивидуального одномерного отображения (1). В одной из ячеек начальные условия таковы, что записан образ - круг, а во всех остальных заданы случайными.

На рис. 2 показана серия диаграмм, относящаяся к случаю цепочки с однонаправленной связью и иллюстрирующая состояние цепочки на нескольких временных шагах. Глобальная связь элементов внутри ячеек считается линейной, то есть преимущественно инерционной: $\epsilon_1=0$, $\epsilon_2=0.2$. Остальные параметры $\lambda=0.8$, $q=0.2$.

Если бы связи между ячейками не было, то изображение в каждой ячейке (слое) оставалось бы таким же, как в первой строке, с изменением цвета каждого пикселя со светлого на темный на каждом шаге, поскольку заданное значение параметра соответствует циклу периода 2.

В присутствии связи, однако, можно видеть, как после примерно 10 итераций тот же образ, какой был записан в первой ячейке, появляется во второй и третьей ячейках, то есть в них реализуется двукластерное состояние, повторяющее по структуре состояние первой ячейки. В двух последующих ячейках он также

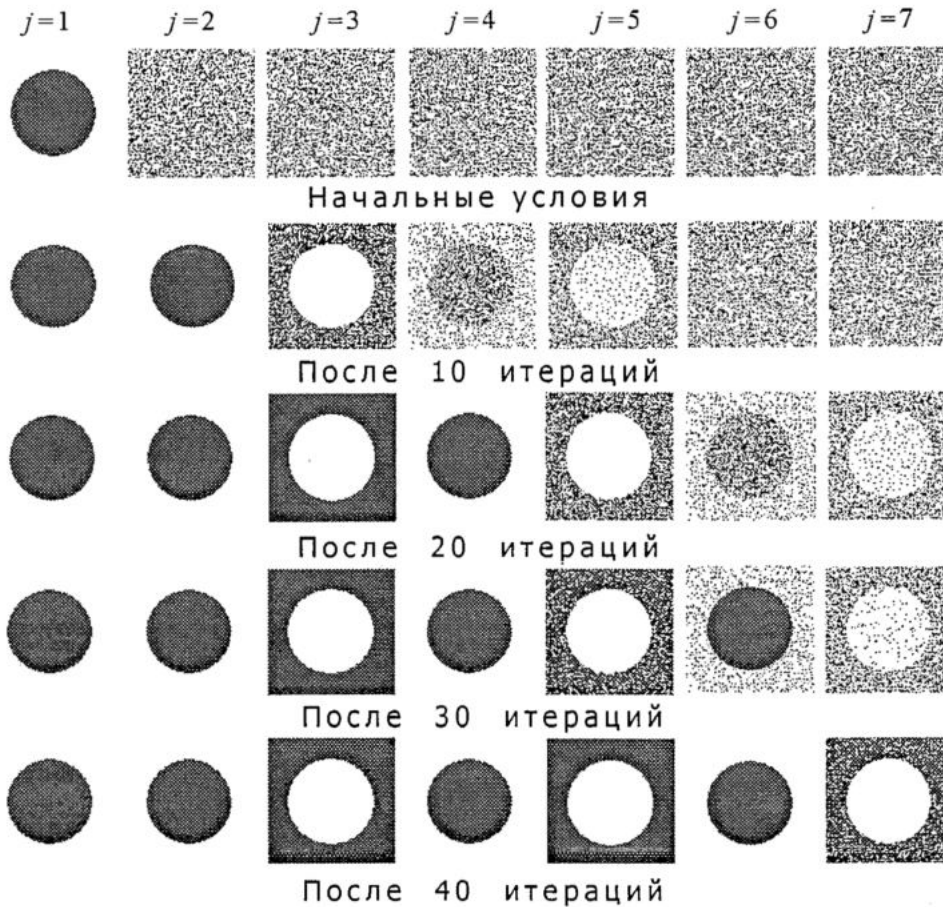


Рис. 2. Распространение волны кластеризации в ячейках глобально линейно связанных отображений с однонаправленной связью при $\lambda=0.8$, $\epsilon=0.2$, $q=0.2$

различается, но не так четко. В дальнейшем образ постепенно формируется во всех последующих ячейках.

В силу однонаправленного характера связи, обратного воздействия ячеек со случайным состоянием на предыдущие нет, и образ в итоге приобретает совершенную структуру - происходят только колебания элементов внутри каждой ячейки между двумя значениями, отвечающими циклу периода 2.

В случае, когда значения параметров соответствуют турбулентной фазе Канеко [5] и каждая подсистема демонстрирует хаотическую динамику, происходит разрушение четкой структуры образа в первой ячейке и сложной структуры остальных. Но при этом перед разрушением образ, задававшийся в первой ячейке, формируется во всех последующих, хотя и в размытом виде (рис. 3).

Таким образом, при указанном выборе связи между ячейками и внутри них осуществляется передача информации вдоль по цепочке. В случае периодической динамики каждой ячейки эта передача происходит без искажения. С динамической точки зрения, процесс можно интерпретировать как распространение волны

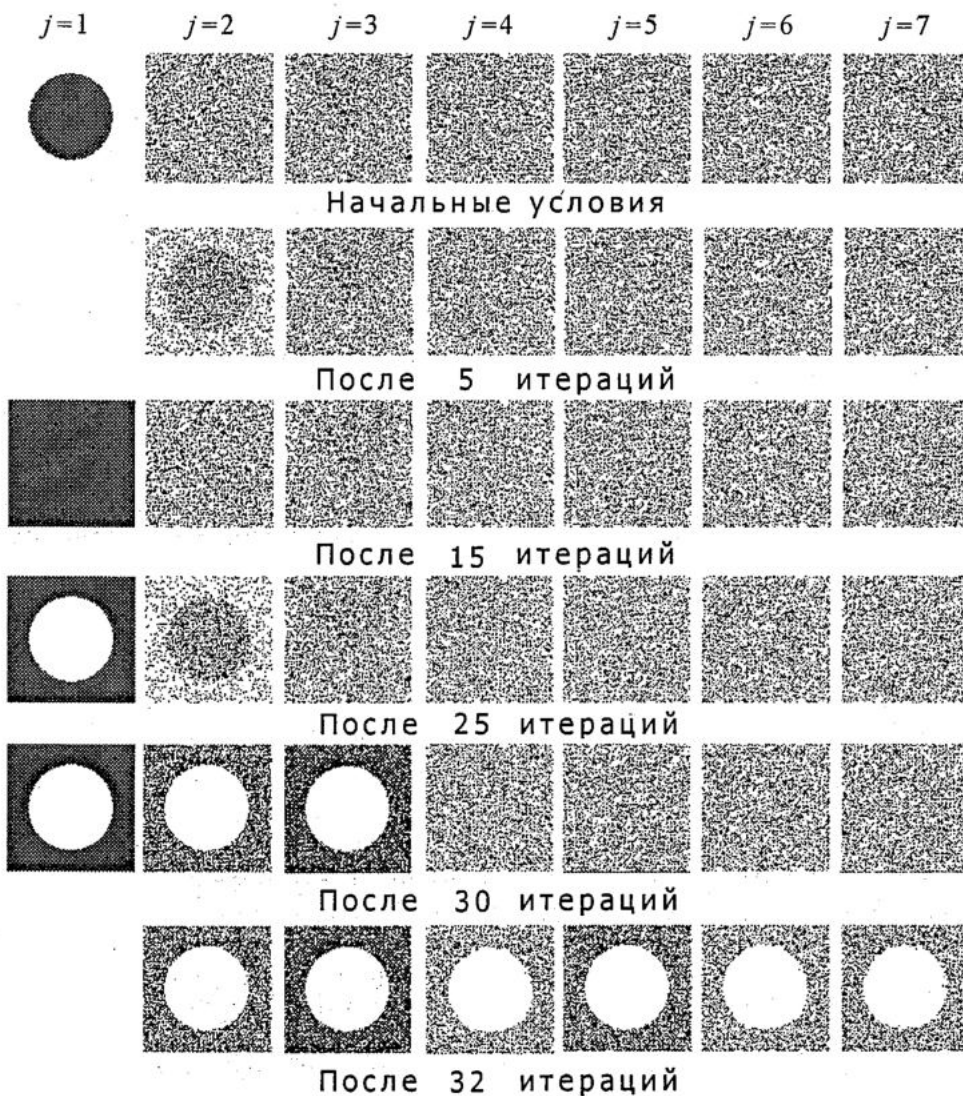


Рис. 3. Распространение волны кластеризации в ячейках глобально линейно связанных отображений с однонаправленной связью при $\lambda=1.7$, $\epsilon=0.2$, $q=0.2$

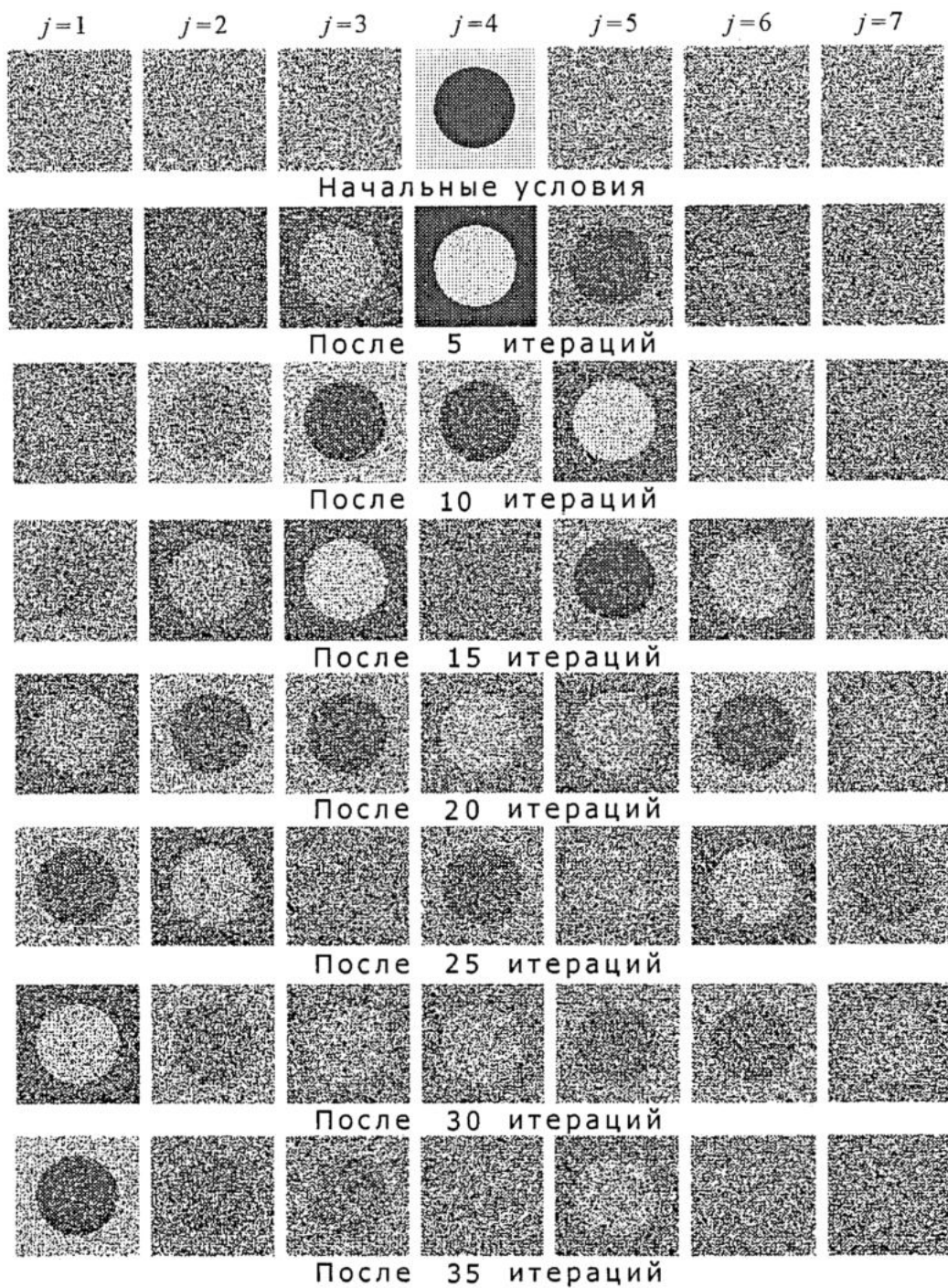


Рис. 4. Распространение волны кластеризации в ячейках глобально линейно связанных отображений со взаимной связью ближайших соседей при $\lambda=1.2$, $\epsilon=0.2$, $q=0.1$ кластеризации. В случае хаотической динамики информация искажается, однако ее распространение все же прослеживается во всех ячейках.

Рассмотрим теперь цепочку из ячеек с взаимной связью между элементами-партнерами, относящимися к ячейкам - ближайшим соседям (6). Граничные условия считаются периодическими, то есть наша цепочка представляет собой, по существу, замкнутое кольцо из ячеек с внутренней глобальной связью. Для определенности рассмотрим случай $\epsilon_1=0$, когда внутренняя связь между элементами в

каждой ячейке линейная (то есть преимущественно инерционная), а связь между ячейками диссипативная.

Численное моделирование проводилось аналогичным образом, как для цепочки с однонаправленной связью. Для одной ячейки (на рисунке - центральной) начальные условия таковы, что в ней задан образ в виде круга. Во всех остальных ячейках начальные условия выбраны случайным образом. Интересно посмотреть, сохранится ли в случае взаимной связи описанный в предыдущем разделе феномен распространения волны кластеризации.

На рис. 4 показана серия диаграмм, иллюстрирующая состояние цепочки на нескольких временных шагах при $\lambda=1.2$, $\epsilon_2=0.2$, $q=0.1$. Так как соседние ячейки взаимно действуют друг на друга, то происходит размывание четкого образа в центральной ячейке, однако можно наблюдать постепенное распространение образа, хотя и не воспроизводящегося идеально точно, по другим ячейкам. Сначала образ круга проявляется в ближайших соседних ячейках (через 5-10 итераций). Затем копии круга начинают в некоторых ячейках проявляться, а в некоторых исчезать. Например, после 20 итераций можно видеть образ круга во всех ячейках (в нашем случае их выбрано семь), а после 35 итераций круг виден только в первой, пятой и седьмой ячейках. Структура цепочки такова, что полного размывания образа круга не происходит.

Таким образом, процесс распространения кластеризации в данном случае также наблюдается, но он сопровождается постепенным «размыванием» исходного образа, а также его вновь возникших копий в других ячейках. Волна кластеризации подвержена действию флуктуаций, обусловленных присутствием случайных начальных условий, иными словами, информационное содержание образа испытывает диссипацию в процессе распространения.

Заключение

В данной работе рассмотрены модели в виде цепочек, состоящих из подсистем, каждая из которых представляет собой систему глобально связанных отображений и демонстрирует сложную динамику. Показано, что в таких цепочках возможен феномен распространения волны кластеризации, состоящий в том, что образ, записанный первоначально в одной ячейке, в ходе временной эволюции системы формируется и в связанных с ней ячейках. Условием реализации этого феномена является такая структура связи между ячейками, когда связь осуществляется между индивидуальными элементами-партнерами в разных ячейках. Можно ожидать, что обнаруженный феномен окажется полезным для систем, предназначенных для обработки информации, и описания феноменологии сложных моделей нейросетей, исследуемых в контексте проблемы искусственного интеллекта.

Работа выполнена при поддержке Минпромнауки в рамках договора с ИПФ РАН и гранта РФФИ № 03-02-16074.

Библиографический список

1. Итоги науки и техники. Сер. «Физические и математические модели нейронных сетей» / Под ред. А.А. Веденова М.: Изд-во ВИНТИ, 1990-92. Т. 1-5.
2. Коган А.Б. От нейрофизиологии к нейрокибернетике. М.: Наука, 1975. 150 с.
3. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника. М.: Мир, 1992.
4. Hopfield J.J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities // Proc. National Academy of Sciences, USA 79, 1982. P. 2554.

5. Kaneko K. Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in network of chaotic elements // Physica D. 1990. Vol. 41, № 2. P. 137.

6. Glendenning P. The stability boundary of synchronized states in globally coupled dynamical systems // Phys. Lett. A. 1999. Vol. 259, № 2. P. 129.

7. Popovich O., Pikovskiy A., Maistrenko Yu. Cluster-splitting bifurcation in a system of coupled maps // Physica D. 2002. Vol. 168. P. 106.

8. Balmforth N.J., Provenzale A., Sassi R. A hierarchy of coupled maps // Chaos. 2002. Vol. 12, № 3. P. 719.

9. Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. Перцептрон и теория механизмов мозга. М.: Мир, 1965. 480 с.

10. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 8. С. 991.

11. Kook H., Ling F.H., Schmidt G. Universal behavior of coupled nonlinear systems // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43, № 6. P. 2700.

12. Kim S.-Y., Kook H. Renormalization analysis of two coupled maps // Phys. Lett. A. 1993. Vol. 178. P. 258.

13. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.

14. Kuznetsov S.P. Universality and scaling in two-dimensional coupled map lattices // Chaos, Solitons and Fractals. 1992. Vol. 2, № 3. P. 281.

Саратовский государственный
университет

Саратовское отделение Института
радиотехники и электроники РАН

Поступила в редакцию 31.02.03
после доработки 02.06.03

WAVE OF CLUSTERIZATION IN A CHAIN OF COUPLED CELLS EACH OF WHICH IS COMPOSED OF A SET OF GLOBALLY COUPLED ELEMENTS

A.S. Ivanova, S.P. Kuznetsov

We study chains of cells each of which is a set of globally coupled elements. Under definite conditions, we observe numerically propagation of a wave of clusterization: an image presented originally in one cell is formed gradually, in a course of evolution in time, also in other cells of the chain.



Иванова Анна Сергеевна родилась в 1979 году в Саратове. В 1996 году закончила Лицей Колледжа прикладных наук, в 2001 - факультет нелинейных процессов СГУ. Сейчас является аспиранткой СГУ. Научной работой занимается с первого курса университета. Имеет около 10 публикаций. Область научных интересов - динамика глобально связанных отображений.



Кузнецов Сергей Петрович родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений при переходе к хаосу. Опубликовал свыше 150 работ в отечественной и зарубежной научной печати. Автор нескольких оригинальных учебных курсов, прочитанных им в разные годы на кафедрах электроники, радиофизики и факультета нелинейных процессов СГУ. Соросовский профессор (2000, 2001). Член-корреспондент РАЕН. E-mail: kuz@spkuz.saratov.su.



ВОЗДЕЙСТВИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОМЫСЛА НА ДИНАМИКУ ПРИРОДНЫХ ПОПУЛЯЦИЙ

Е.В. Ласт, Э.В. Сычева, Е.Я. Фрисман

Работа посвящена построению и исследованию математической модели динамики численности биологических популяций, подверженных сезонному промыслу. Особое внимание уделяется формализации зависимости величины изъятия от текущей численности популяции и технических характеристик промысла, а также анализу противоречий между стремлением к максимальному равносному улову и устойчивостью популяционной динамики. Результаты моделирования сопоставляются с данными промысловой статистики для ряда конкретных видов рыб и беспозвоночных.

Введение

Природные популяции подвержены воздействию множества факторов как биотической, так и абиотической природы. В результате динамика численности биологических видов оказывается весьма нелинейной. В рассмотрении механизмов сложных флуктуаций численности одно из центральных положений занимает метод математического моделирования популяционной динамики. Математические модели сегодня используются для объяснения механизмов популяционной динамики, для анализа роли факторов различной природы в изменениях, происходящих в экосистемах. В условиях, когда вмешательство человека становится все более определяющим в развитии биоценозов, при моделировании крайне необходимо специально учитывать роль антропогенных воздействий. Целенаправленная регуляция численности промысловых животных - необходимое условие продуманного, рачительного использования их природных запасов. Такая регуляция должна быть направлена на поддержание оптимальных размеров популяции, создание и сохранение оптимальной возрастной и половой структуры, то есть на обеспечение условий стабильного получения возможно большего количества биологической продукции при эксплуатации популяций [1].

Для эксплуатируемых популяций периодический процесс антропогенного изъятия является неотъемлемой частью жизненного цикла. При этом промысловое изъятие осуществляется по другим закономерностям, нежели снижение численности популяции в ходе естественной смертности. Вместе с тем, интенсивность промысла сама по себе может весьма сложно зависеть от плотности популяции добываемых животных. Так, для мелких пушных зверей, особенно белки, оказывается, характерна сложная зависимость интенсивности

охоты (количества промышленяющих охотников) от численности животных в данный охотничий сезон. Охотники ведут интенсивный промысел при большой плотности зверей и практически отказываются от промысла в периоды депрессии численности [1-3]. Нелинейная зависимость величины промыслового изъятия от численности популяции оказывается одним из основных факторов, определяющих характер динамики заготовок маньчжурской белки [4]. Еще более сильно и сложно зависит от численности (плотности) популяций (стад и скоплений) интенсивность рыбного промысла [5-7]. Именно это является одной из центральных причин хорошо известных трудностей и неудач при получении прогнозов улова. Таким образом, при анализе механизмов динамики численности промысловых видов рыб необходимо явно учитывать особенности и результаты их промысла.

В связи с этим возникает ряд интересных как в теоретическом, так и в практическом плане задач. Так, задача оптимального управления заключается в получении максимальной прибыли и сохранении эксплуатируемой части популяции на оптимальном уровне. В свою очередь, это требует разработки наилучших стратегий эксплуатации для различных популяций. Список работ в этой области обширен (см., например, [8-10]). Вместе с тем, многие прикладные аспекты остаются неизученными. Так, на наш взгляд, до сих пор недостаточно внимания уделялось противоречию между получением максимальной прибыли и устойчивостью популяционной динамики. Для структурированных популяций открытым остается вопрос о влиянии промысла на популяционную динамику. Отметим, что эта задача может быть решена исключительно с помощью моделирования, так как для многих ценных промысловых видов все популяции данного вида подвергаются регулярному изъятию и характер их «естественной» динамики не может быть изучен посредством наблюдений.

Данная работа продолжает направление исследований, сформулированное А.П. Шапиро [9,11,12] и Р.М. Мзем [13,14]. Предлагается простая математическая модель динамики численности промысловых популяций с сезонным размножением, ориентированная на описание и исследование результатов промыслового воздействия. Приводятся результаты аналитического исследования некоторых вариантов этой модели и оценки их параметров на основании данных промысловой статистики. Особое внимание уделяется анализу характера и устойчивости динамики эксплуатируемой популяции.

Математическая модель динамики численности локальной однородной популяции, подверженной промыслу

Полагаем, что изменение численности локальной популяции за время жизненного цикла определяется следующими процессами: размножением, естественной смертностью и промыслом. Опишем изменение численности за время годового цикла в соответствии с общими принципами построения моделей популяционной динамики в дискретном времени [9-13].

Обозначим через X_n численность популяции в n -м году, оставшуюся после естественной убыли и промысла. С этой численностью популяция вступает в размножение. Пусть в результате размножения появилось $B(X_n)$ новых особей (B - функция, описывающая зависимость численности потомков от числа родителей), которые после выживания пополняют численность популяции в $(n+1)$ -м году на величину $S_1(B(X_n))$ (S_1 - функция, описывающая зависимость численности выживших особей от числа родившихся). Кроме того, из X_n особей, вступивших в размножение в n -м году, до $(n+1)$ -го года доживет какая-то часть, которую мы

обозначим через $S_2(X_n)$. Ясно, что разности $B(X_n) - S_1(B(X_n))$ и $X_n - S_2(X_n)$ - это число особей, потерянных в результате естественной смертности. Следовательно, численность популяции в отсутствие промысла $(n+1)$ -го года составила бы величину

$$Z_{n+1} = F(X_n) = S_1(B(X_n)) + S_2(X_n). \quad (1)$$

При этом предполагается, что особи, пополнившие популяцию за счет размножения, уже не отличаются по популяционным параметрам от взрослых особей, участвующих в размножении, то есть популяция считается однородной и не обладающей возрастной структурой. Функцию $F(X)$ и ее график принято называть соответственно функцией и кривой воспроизводства [5-7]. Первое слагаемое в выражении для $F(X)$ принято называть пополнением, а величину X - родительским запасом. График функции $R(X) = S_1(B(X))$ в этом случае называется кривой пополнения [6,7]. Для промысловых популяций рыб, например, наиболее часто используются кривые Бивертон - Холта $R = X/(a+bX)$ и Рикера $R = a_1 X e^{-bX}$. Последняя зависимость выведена У.Е. Рикером [6] при изучении связи запаса и пополнения у лососевых, имеющих, как известно, весьма сложную возрастную структуру. Вместе с тем, данная модель позволяет получить хорошие результаты и при описании динамики популяций с одновозрастным стадом [9], поэтому в дальнейшем все общие результаты мы будем иллюстрировать на примере модели Рикера.

Второе слагаемое в $F(X)$ описывает процесс выживания родительской части популяции. Естественно выбрать его в виде $S_2(X) = s(X)X$, где $s(X) < 1$ - коэффициент выживаемости. Обычно этот коэффициент считается либо постоянным, либо убывающим с ростом численности. (Важным частным случаем однородной популяции является популяция вида с неперекрывающимися поколениями, для которой $S_2(X) = 0$. В этом случае кривые пополнения и воспроизводства совпадают.)

Для однородных популяций с пополнением, описываемым кривой Рикера, коэффициент выживаемости удобно принять равным $s(X) = a_2 e^{-bX}$ и соответственно $S_2(X) = a_2 X e^{-bX}$. В этом случае функция воспроизводства также оказывается «рикеровской»: $F(X) = aX e^{-bX}$ (где $a = a_1 + a_2$), а соответствующие модели имеют простой вид и неплохо отражают особенности динамики реальных рыбных популяций [6,7].

В общем случае функцию воспроизводства можно представить в виде

$$F(X) = aX\varphi(X), \quad (2)$$

где $\varphi(X)$ - функция, характеризующая изменение приспособленности с увеличением численности. Обычно предполагается, что функция $\varphi(X)$ является монотонно убывающей, то есть $\varphi'(X) < 0$ и $\varphi(0) = 1$, что связано с лимитирующим воздействием среды обитания [8]. Отметим, что при наличии так называемой общественной агрегации в популяциях высших животных функция $\varphi(X)$ может и не быть монотонной [15,16], однако этот случай требует специального рассмотрения и лежит несколько в стороне от целей данной работы. Параметр a играет роль репродуктивного потенциала популяции - он равен максимально возможной скорости роста численности, которая (при отсутствии общественной агрегации) достигается при начальной численности, близкой к нулю.

Формализация зависимости промыслового изъятия от величины промысловых усилий и численности популяции

Учтем теперь влияние промысла. Считаем, что в результате промысла

изымается некоторое количество особей Y , причем величина изъятия зависит от текущего значения численности. Поскольку к моменту промысла $(n+1)$ -го года численность популяции равна $Z_{n+1}=F(X_n)$, то

$$Y_{n+1} = G(Z_{n+1}) = G(F(X_n)). \quad (3)$$

Зависимость $G(Z)$ будем называть функцией промысла. Наиболее часто рассматривается случай, когда величина изъятия либо фиксирована, либо пропорциональна текущему значению численности $Y=G(Z)=uZ$, причем доля изъятия u постоянна (см., например, [8-10]). Однако в реальной ситуации очень трудно добиться независимости величины или доли изъятия от численности популяции (точнее, от величины облавливаемого стада). Функция промысла может быть достаточно сложной, в частности, она может зависеть от различных параметров, определяемых условиями и интенсивностью промысла, которая, в свою очередь, измеряется величиной промысловых усилий. Под промысловыми усилиями здесь понимается количество использованных стандартизированных орудий промысла (количество вынутых сетей, время траления, тоннаж рыболовецких судов и т.п.). Обозначим эту величину буквой f . Формализуем зависимость объема изъятия от величины промысловых усилий. Для этого воспользуемся хорошо разработанной методологией описания процессов взаимодействия в системе «хищник - жертва» или «ресурс - потребитель» [16,17].

В соответствии с концепцией парных взаимодействий естественно считать объем изъятия пропорциональным произведению величины промысловых усилий и текущего значения численности. Однако такая зависимость (фактически постулируемая в работах М.Б. Шефера [18] и его последователей [19]) хороша только при сопоставимых (малых) значениях запасов и усилий. Если же величина промысловых усилий велика, а численность популяции мала, объем промысла будет зависеть только от численности популяции (пропорционален ей с коэффициентом, определяемым биологическими особенностями вида и методами промысла). В свою очередь, при большой численности популяции (и малом количестве усилий) объем промысла будет зависеть только от величины промысловых усилий (пропорционален этой величине). Этим требованиям удовлетворяет функция $G(F)$, выбранная в виде «трофической» функции [16] с насыщением как по численности популяции F , так и по числу усилий f ,

$$G(F) = \rho f F / [(m+f)(1+\mu F)]. \quad (4)$$

Используемые здесь параметры носят ясный содержательный смысл: ρ - максимально возможная доля изъятия (при $f \rightarrow \infty$, $F \rightarrow 0$ ясно, что $\rho \leq 1$); m - величина промысловых усилий, обеспечивающая долю изъятия, равную половине от максимально возможной при заданном уровне численности; $1/\mu$ - величина численности популяции, при которой изымаемая доля равна половине от максимально возможной при заданных промысловых усилиях.

Исследованию эффектов насыщения в биологических моделях много внимания уделял А.Д. Базыкин [15,16]. Именно его схему рассуждений мы использовали при выводе формулы (4). Однако нам не известны работы, в которых в явном виде применялись бы подобные формулы, учитывающие эффекты насыщения при формализации зависимости величины улова от количества применяемых усилий. Заметим, наконец, что вид функции (4) хорошо отражает известный в промысловой статистике факт, заключающийся в том, что величина изъятия, приходящегося на одно промысловое усилие (G/f), падает с ростом числа усилий.

В дальнейшем мы сосредоточимся на рассмотрении частного случая

зависимости (4): $\rho=1, \mu=0$ (можно выловить все, и нет насыщения по численности популяции), то есть

$$G(F) = fF/(m+f) \quad (5)$$

и доля изъятия однозначно определяется величиной промысловых усилий.

Учитывая, что численность популяции, с которой она вступает в размножение в $(n+1)$ -м году, равна разности между численностью популяции до промысла и величиной промыслового изъятия, получим

$$X_{n+1} = Z_{n+1} - Y_{n+1}. \quad (6)$$

С учетом соотношений (1) и (3)

$$X_{n+1} = F(X_n) - G(F(X_n)) = \Phi(X_n). \quad (7)$$

Подставляя (5) в (7), получаем следующий вид модели динамики численности однородной промысловой популяции, ориентированной на описание и исследование результатов промыслового воздействия:

$$X_{n+1} = F(X_n) - f_n F(X_n)/(m+f_n) = mF(X_n)/(m+f_n). \quad (8)$$

Если функцию воспроизводства выбрать в соответствии с моделью Рикера $F(X) = aXe^{-bX}$, то уравнение (8) будет иметь вид

$$X_{n+1} = maX_n e^{-bX_n}/(m+f_n). \quad (9)$$

Переходя к относительным единицам численности $x = bX$, получаем простейшую модель динамики промысловой популяции

$$x_{n+1} = amx_n e^{-x_n}/(m+f_n). \quad (10)$$

Определение максимального равновесного уровня изъятия

Заметим, что значения величин промысловых усилий во многих случаях известны для достаточно длительного временного промежутка, причем зачастую они сильно меняются от года к году.

Если бы величину промысловых усилий можно было определять директивно, то задача оптимизации изъятия свелась бы к определению оптимальной величины усилий. Для модели (10) величина промысловых усилий однозначно определяет долю изъятия из популяции $u = f/(m+f)$. В работе [20] было показано, что для модели Рикера оптимальная доля изъятия, обеспечивающая максимальный равновесный уровень изъятия, равна соответствующему значению *устойчивой* равновесной относительной численности ($u_M = x_M^* = bX_M^*$) и однозначно определяется параметром a из уравнения $a = e^{u_M}/(1-u_M)$. Зная эту долю изъятия, мы могли бы определить оптимальную (обеспечивающую максимальный равновесный уровень изъятия) величину промысловых усилий: $f_M = mu_M/(1+u_M)$, директивно зафиксировать усилия на этой величине и перевести популяцию в оптимальное устойчивое положение равновесия. Основная трудность здесь связана с тем, что промысловые усилия не удается фиксировать. Их динамика во времени определяется рядом факторов, связанных как с технической обеспеченностью промысла, так и с состоянием промысловой популяции. По-видимому, большую роль играет зависимость величины промысловых усилий от численности облавливаемой популяции.

Будем считать величину усилий функцией численности $f_n = f(x_n)$ (помня, что, возможно, это сложная функция $f_n = f(F(x_n))$), поскольку усилия, скорее всего,

зависят от текущего значения численности), параметры которой определяются техническими условиями промысла. В этом случае ненулевые равновесные решения уравнения (10) неявно определяются соотношением

$$m + f(x^*) = am e^{-x^*}, \quad (11)$$

а условия их устойчивости $|d/dx[amxe^{-x}/(m+f(x))]_{x=x^*}| < 1$, учитывая (11), можно записать в виде

$$|1 - x^* - x^* f'(x^*) / (m + f(x^*))| < 1$$

или

$$-1 < f'(x^*) / (m + f(x^*)) < (2 - x^*) / x^*. \quad (12)$$

Исследование модели при степенной зависимости усилий от численности популяции

Численные исследования динамики некоторых промысловых видов рыб [21] показывают, что зависимость величины усилий от численности популяции может быть формализована степенной функцией $f = \gamma[F(x)]^\alpha$. В этом случае уравнение (10) преобразуется к виду

$$x_{n+1} = am_0 x_n e^{-x_n} / \{m_0 + [ax_n e^{-x_n}]^\alpha\} = \Phi(x), \quad (13)$$

где $m_0 = m/\gamma$.

При $\alpha > 0$ график функции $\Phi(x)$ пересекает биссектрису первого координатного угла в двух точках: нулевой и ненулевой (рис. 1), причем нулевое равновесие неустойчиво, если $a > 1$ ($\Phi'(0) = a$), а ненулевое может быть как устойчивым, так и неустойчивым. При $\alpha < 0$ естественно положить $\Phi(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = 0$. В этом случае график функции пересекает биссектрису либо в одной нулевой точке и целиком лежит под биссектрисой, либо в трех точках: нулевой и двух ненулевых (рис. 2), причем нулевое равновесие всегда устойчиво: $\Phi'(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Из двух ненулевых равновесий одно, меньшее, всегда неустойчиво (в нем $\Phi' > 1$), а второе - устойчиво. Таким образом, в рамках данной

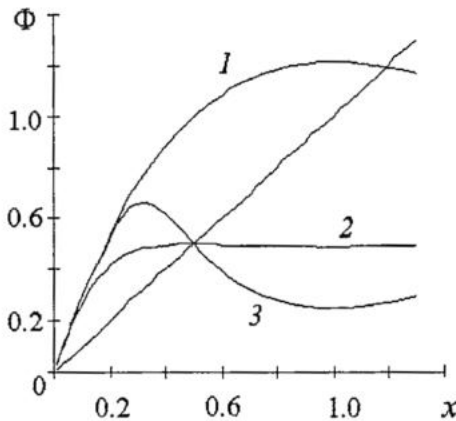


Рис. 1. График функции $\Phi(x)$ при $\alpha > 0$. Кривые соответствуют следующим значениям параметров: 1 - отсутствие промысла; 2 - $m=1$, $\alpha=2$; 3 - $m=1$, $\alpha=7$

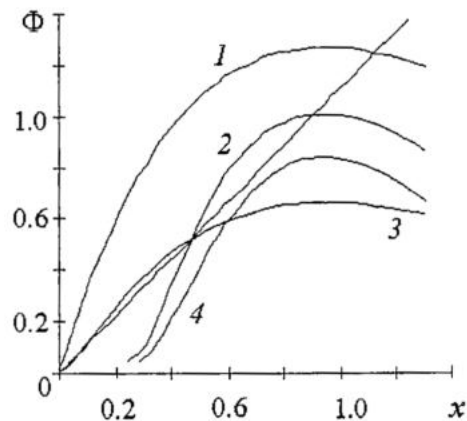


Рис. 2. График функции $\Phi(x)$ при $\alpha < 0$. Кривые соответствуют следующим значениям параметров: 1 - отсутствие промысла; 2 - $m=1$, $\alpha=-0.5$; 3 - $m=1$, $\alpha=-0.7$; 4 - $m=0.5$, $\alpha=-7$

модели при $\alpha > 0$ монотонное вымирание популяции оказывается невозможным, однако при $\alpha < 0$ оно произойдет, если численность окажется ниже некоторого критического уровня (равного значению меньшего ненулевого положения равновесия).

Существование и устойчивость стационарного значения численности

Рассмотрим вопрос о существовании стационарного значения численности популяции для модели (13), обеспечивающего максимальный уровень изъятия в равновесном режиме. Все нетривиальные стационарные точки (13) удовлетворяют уравнению

$$m_0 + (ax^*e^{-x^*})^\alpha = am_0e^{-x^*}. \quad (14)$$

Равновесный объем популяции, обеспечивающий максимальный уровень изъятия, определяется равенством $a = e^{x_M^*}/(1-x_M^*)$, как показано выше. Подставляя это значение в (14), получим $m_0 + (x_M^*/(1-x_M^*))^\alpha = m_0/(1-x_M^*)$, откуда

$$m_0 = (x_M^*/(1-x_M^*))^{\alpha-1}. \quad (15)$$

Это соотношение определяет связь между параметрами m_0 , α и x_M^* (причем x_M^* взаимно-однозначно связано с параметром a) для модели (13). Зафиксировав любые два параметра, можно определить значение третьего, которое гарантирует существование оптимального состояния равновесия, обеспечивающего максимум стационарного вылова.

Предположим, что равенство (15) выполняется, и исследуем положение равновесия на устойчивость. Несложные выкладки показывают, что величина $f'(x_M^*)/(m+f(x_M^*))$ для модели (13) оказывается равной $\alpha(1-x_M^*)$. Подставляя это в (12), получаем искомые условия устойчивости для модели (13) в виде ограничений на параметр α

$$-1/(1-x_M^*) = \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 = (2-x_M^*)/[x_M^*(1-x_M^*)]. \quad (16)$$

При выполнении условий (15) и (16) для модели (13) (рис. 3) промысел приводит численность популяции к устойчивому оптимальному равновесию. Однако, если α превосходит α_2 , то $\Phi'(x_M^*)$ оказывается меньше (-1), оптимальное равновесие x_M^* неустойчиво и возникают колебания численности, вызванные «оптимальным» промыслом с переменной долей изъятия.

При $\alpha < \alpha_1$ $\Phi'(x_M^*)$ оказывается больше 1 и оптимальное равновесие x_M^* вновь неустойчиво. Если численность популяции оказывается больше x_M^* , то промысел выведет популяцию на ненулевое стационарное состояние $x^* > x_M^*$. Если же численность популяции оказывается меньше x_M^* , то популяция под действием промысла вырождается. Разность между устойчивым равновесным состоянием x^* и неустойчивым x_M^* может служить в этом случае мерой устойчивости популяции по отношению к промыслу. Она показывает, какое снижение

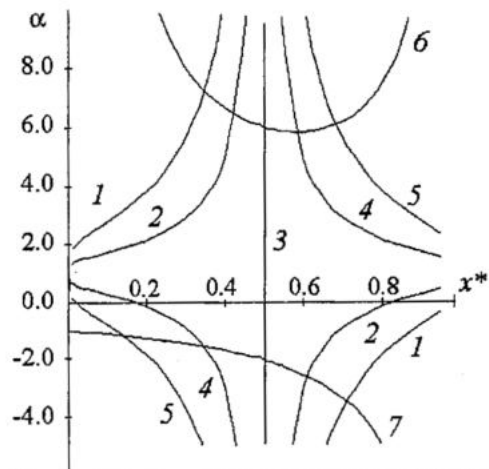


Рис. 3. Области существования и устойчивости оптимальных равновесий. Кривые 1-5 соответствуют равенству (15) при разных m : 1 - 0.02; 2 - 0.2; 3 - 1.0; 4 - 5.0; 5 - 50.0; кривая 6 соответствует верхней (α_2), а 7 - нижней (α_1) границам устойчивости

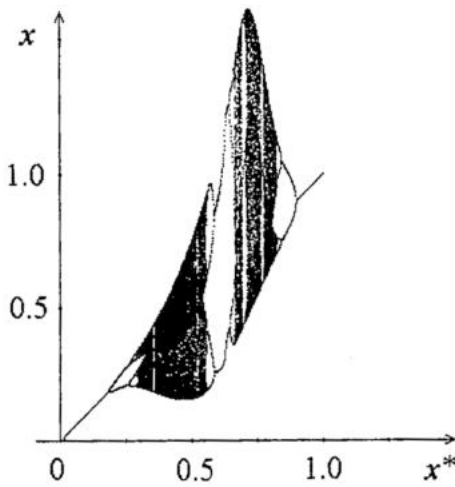


Рис. 4. Бифуркации численности при оптимальном промысле в модели (13)

2, 4) и хаосу. Дальнейший рост x_M^* приводит к обратной редукации хаоса до циклов конечной длины (8, 4, 2). Цикл длины 2 наблюдается в достаточно большом интервале значений x_M^* , включающем $x_M^*=0.6$, а затем примерно при $x_M^*=0.65$ бифурцирует в цикл длины 4, который (по-видимому, после серии бифуркаций, не наблюдаемых в данном масштабе графиков) сменяется хаотической динамикой. Этот хаос в свою очередь (при $x_M^*\approx 0.8$), редуцируется до циклов длины 8, 4, 2, причем последний сменяется устойчивой стационарной точкой. Следует подчеркнуть, что стационарная точка x_M^* существует всегда (на бифуркационной диаграмме она лежит на биссектрисе первого координатного угла), но в областях циклов и хаоса она является неустойчивой и на диаграмме не выявляется.

Это означает, что устойчивость оптимальной промысловой стратегии при фиксированных высоких значениях параметра α (интенсивности изменения промысловых усилий с ростом численности) весьма немонотонно зависит от оптимального равновесного уровня численности x_M^* и, соответственно, от репродуктивного потенциала популяции a . Эта стратегия оказывается устойчивой только при низких или весьма высоких значениях репродуктивного потенциала, но не устойчива при средних его значениях.

Оценки параметров модели по данным промысловой статистики

Были проведены оценки параметров модели (10) для ряда конкретных популяций промысловых видов рыб и беспозвоночных: калифорнийского желтоперого тунца *Thunnus albacares* салаки *Clupea harengus membras* Рижского залива, западно-камчатского минтая *Theragra chalcogramma* и камчатского краба *Paralithodes camtschatica*. Исходными данными служили сведения о величинах годовых уловов и затраченных усилиях [19], обозначим их Y_n^* и f_n^* , соответственно. Заметим, что под величиной усилий в данном случае понимается суммарное за год (точнее, за путину) количество стандартизированных усилий, специализированных для каждого объекта промысла: для тунца и салаки - количество неводов, для минтая - время траления, для краба - число поднятых сетей-ловушек. В соответствии с (5) и (10) модельные величины уловов

$$Y_n = f_n F(X_{n-1}) / (m + f_n) = f_n a X_{n-1} e^{-bX_{n-1}} / (m + f_n) = \kappa f_n a x_{n-1} e^{-x_{n-1}} / (m + f_n),$$

где $\kappa=1/b$.

Задача оценки параметров модели заключается в подборе таких значений a , m , κ и x_0 , при которых последовательность $\{Y_n\}$ наилучшим образом аппроксимирует известную последовательность $\{Y_n^*\}$. При этом относительные численности x_n определяются из уравнения (10), а величины промысловых усилий считаются заданными $f_n=f_n^*$. Основная трудность в решении этой задачи состоит в том, что модель нелинейна как по переменным, так и по параметрам. В связи с этим может возникнуть проблема неоднозначности при определении оценок, интерпретации модели и т.д. [22]. Поскольку оценка коэффициентов в данном случае имеет в большей степени иллюстративное, нежели практическое значение, то можно ограничиться поиском локального минимума целевой функции с учетом априорных представлений о величинах подбираемых параметров. Так, например, число усилий m не может быть отрицательным, репродуктивный потенциал не должен быть слишком большим и т.д. Задача решалась численно методом Левенберга - Марквардта [22], реализованным в пакете MathCAD 2001 Pro. Целью расчета были наборы параметров, обеспечивающие минимум целевой функции $LU=\Sigma(\ln Y_n^* - \ln Y_n)^2$.

Для проверки качества реконструкции на основе предлагаемой модели был применен метод «ретропрогнозирования» [23]. Для этого при подборе параметров из рассмотрения были исключены последние пять значений последовательностей $\{Y_n^*\}$ и $\{f_n^*\}$, а затем делался прогноз на тот же период времени. Для оценки качества прогноза, в свою очередь, вычислялась средняя относительная ошибка δ .

В табл. 1 приведены вычисленные значения параметров, а также значения коэффициента детерминации R^2 для реального и модельного рядов данных и величина δ . В скобках указаны значения, полученные при ретропрогнозировании.

Графики реальной (сплошная линия) и модельной (штриховая линия) динамики уловов для каждого из рассмотренных случаев приведены на рис. 5. Пунктирной линией представлены результаты реконструирования укороченного ряда и прогноз, сделанный на основе этой оценки. Как видно из графиков, модельная и фактическая динамика уловов достаточно близки, что свидетельствует в пользу применимости модели. Кроме того, при исключении из рассмотрения нескольких точек вычисления приводят практически к тем же оценкам параметров, что свидетельствует в пользу определенной устойчивости модели по отношению к ошибкам и случайным отклонениям в данных. Вместе с

Таблица 1

Значения параметров модели (10), полученные по данным реального промысла

Вид	Тунец	Салака	Минтай	Краб
a	4.08 (4.08)	2.38 (2.39)	2.21 (2.17)	2.58 (2.58)
m	0.03 (0.03)	793.54 (790.70)	73.86 (75.06)	2.80 (2.85)
κ	274.90 (274.82)	657.96 (661.36)	4591 (4495)	95.59 (95.59)
x_0	0.8 (0.8)	1.5 (1.5)	0.2 (0.2)	0.95 (0.95)
R^2	0.81 (0.82)	0.63 (0.63)	0.87 (0.87)	0.81 (0.82)
δ	16.5%	9.8%	22%	9.2%

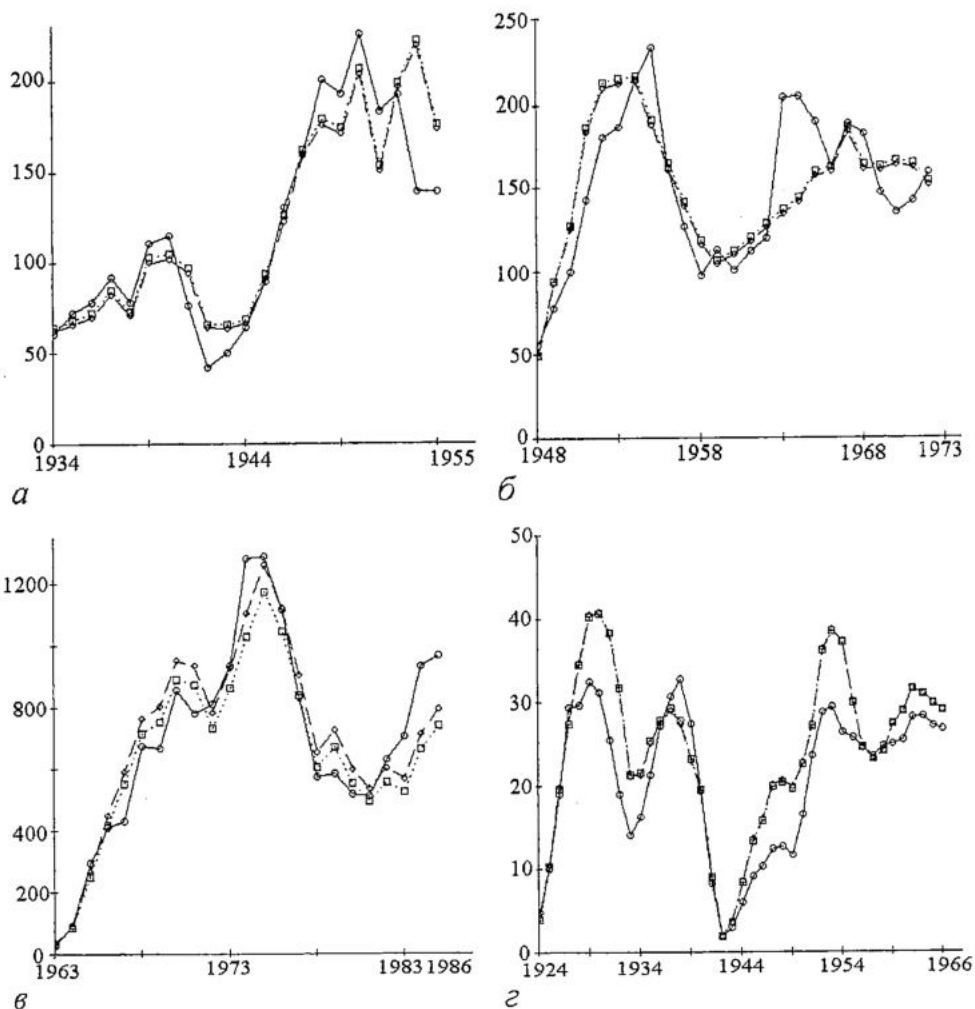


Рис. 5. Реальная, модельная динамика и ретропрогноз уловов: а - тунца, млн. фунтов; б - салаки, тыс. ц; в - минтая, тыс. т; г - краба, млн. шт. По оси абсцисс - годы

тем, средняя относительная ошибка прогноза достаточно велика, следовательно, модель может быть улучшена, например, включением дополнительных характеристик (климатических факторов, данных о кормовой базе и т.д.).

Наличие возрастной структуры

До сих пор рассматривалась ситуация, при которой все выжившие на первом году жизни особи «пополняли» родительскую популяцию (или стадо производителей) и уже не отличались от них по популяционным параметрам. Однако в большинстве случаев формирование нерестового стада осуществляется за счет разновозрастных классов особей, каждая из которых прошла свой путь развития от рождения до вступления в размножение. В предположении, что основное действие плотностно зависимых факторов сосредоточено на первом году жизни и после нереста все особи родительского стада погибают (как это происходит, например, у лососевых), уравнение динамики численности родительского стада в отсутствие промысла можно записать в виде

$$X_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_{k-i} X_{n+i} \varphi(X_{n+i}).$$

Здесь k - максимальный возраст особей в родительском стаде; a_i - коэффициент, характеризующий вклад в репродуктивный потенциал соответствующего возрастного класса. Это уравнение удобно представить в виде

$$X_{n+k} = a \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{k-i} X_{n+i} \varphi(X_{n+i}) = F(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k-1}), \quad (17)$$

где $a = \sum_i a_i$, $\gamma_i = a_i/a$, $\sum_i \gamma_i = 1$. Величина a соответствует репродуктивному потенциалу популяции; коэффициенты γ_i характеризуют равновесную возрастную структуру родительского стада (это доли соответствующих возрастов, умноженные на относительную продуктивность данного возраста). Если продуктивность (прежде всего количество и качество икры и мальков) не зависит от возраста родителей, то γ_i точно равны долям соответствующих возрастов в родительском стаде и могут быть оценены на основе репрезентативных промысловых выборок.

Как и в предыдущем случае, будем считать $\varphi(X)$ экспонентой, а зависимость усилий от численности описывать степенной функцией $f = \gamma [F(x)]^\alpha$, тогда для промысловой популяции с функцией воспроизводства (17) получим следующее уравнение динамики:

$$x_{n+k} = am_0 \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{k-i} x_{n+i} e^{-x_{n+i}} / \{m_0 + [a \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{k-i} x_{n+i} e^{-x_{n+i}}]^\alpha\}. \quad (18)$$

Заметим, что в случае, когда родительское стадо гибнет после нереста, как уже указывалось, кривая воспроизводства и кривая пополнения совпадают. Поскольку дальнейшие результаты будут иллюстрироваться данными по динамике промысла лососевых видов рыб, выбор функции воспроизводства в виде (17) определяется еще и тем обстоятельством, что именно для этих видов У.Е. Рикер ввел и обосновал зависимость между величинами запаса и пополнения [6].

Уравнение (18) аналогично (13) и его стационарные решения удовлетворяют соотношению $x^* = am_0 x^* e^{-x^*} / \{m_0 + [a x^* e^{-x^*}]^\alpha\}$, что в точности совпадает со стационарным решением модели (13). Подробное исследование модели (18),

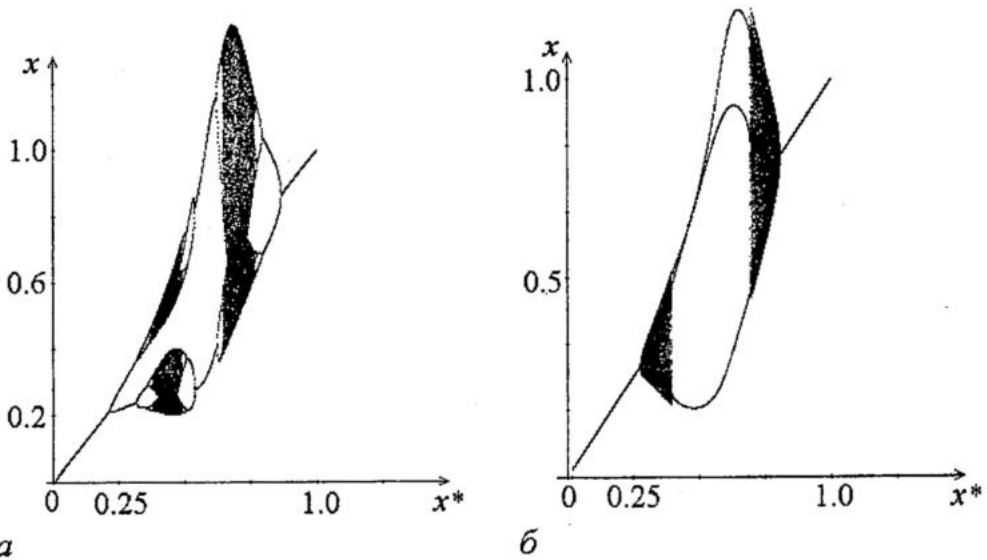


Рис. 6. Бифуркации численности популяции с двухвозрастным нерестовым стадом при оптимальном промысле для разных значений γ_2 : а - 0.1; б - 0.6

проведенное в работе [14], показывает, что одинаковыми оказываются и области значений параметров, в которых эти решения являются устойчивыми.

Таким образом, большинство результатов анализа воздействия промысла на популяционную динамику, полученных для (13), автоматически переносятся на модель (18). Вместе с тем, следует отметить, что на характер бифуркационных переходов существенное влияние будет оказывать возрастная структура популяции [24,25]. На рис. 6 приведены бифуркационные диаграммы системы (18) в зависимости от x_M^* при оптимальном m и $k=2$ для различных значений возрастных коэффициентов. Как видно из рисунков, тип возникающих при потере устойчивости колебаний зависит от структуры репродуктивной части популяции. Так, появление первой серии бифуркаций здесь происходит лишь в том случае, если численность старшей возрастной группы не превышает 30% от общей численности нерестового стада, в противном случае при потере устойчивости начинается нерегулярная динамика, в зоне которой есть также «окна» с циклами конечной длины.

Оценка коэффициентов модели по данным реального промысла

Основное внимание мы сосредоточим теперь на попытке сопоставления результатов моделирования с данными о промысле лососевых видов рыб. Для численного подбора коэффициентов модели (18) были взяты данные об общих американских уловах тихоокеанских лососей (нерки, кеты, кижуча и чавычи) в Беринговом море у Западной Аляски [26].

Обозначим величины реальных уловов в i -м году как Y_i^* , а модельных - Y_i . Модельные величины абсолютных уловов для популяции, обладающей возрастной структурой, динамика которой описывается уравнением (18), удовлетворяют соотношению

$$Y_{n+k-1} = p y_{n+k-1} = p (a \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{k-i} x_{n+i} e^{-x_{n+i}})^{\alpha+1} / [m_0 + [a \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{k-i} x_{n+i} e^{-x_{n+i}}]^{\alpha}], \quad (19)$$

Здесь $p=1/b$ - коэффициент пересчета относительных численностей в абсолютные.

Задача оценки параметров модели состоит в определении таких значений коэффициентов a , p , m_0 , α и γ_i , а также начальных значений численности, при которых последовательность $\{Y_i\}$ наилучшим образом аппроксимировала бы известную последовательность $\{Y_i^*\}$. Оценка столь большого числа параметров по достаточно ограниченной выборке представлялась нецелесообразной. Было решено определить значения возрастных коэффициентов γ_i из косвенных соображений. Поскольку есть данные о возрастной структуре ряда локальных популяций (нерки, кеты, кижуча и чавычи), то мы выбрали значения возрастных коэффициентов в соответствии с этими данными. Ясно, что произвол здесь достаточно велик, но все же это сильно сократило число параметров, которые мы оценивали по динамике промысла.

Таблица 2

Возрастная структура камчатских популяций лососевых

Вид	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7
Кета	0	0	0.649	0.333	0.018	-	-
Нерка	0	0	0.044	0.487	0.469	-	-
Кижуч	0	0	0.413	0.01	0.553	0.013	0.011
Чавыча	0	0	0	0.126	0.368	0.465	0.041

Параметры модели (18), полученные на основе данных
реального промысла

Вид	Нерка	Кета	Кижуч	Чавыча
a	11.26 (11.26)	2.27 (2.62)	5.19 (5.13)	13.30 (13.30)
p	24.60 (22.77)	53.73 (52.3)	4.84 (4.96)	26.12 (17.98)
m	91.06 (139.06)	6.27 (5.37)	0.5 (0.5)	6.79 (3.27)
α	3.76 (4.34)	-2.67 (-2.77)	-5.14 (-5.3)	-1.52 (-1.77)
R^2	0.81 (0.81)	0.61 (0.76)	0.80 (0.84)	0.73 (0.69)
δ	26.1%	17.8%	31.3%	13.3%

Исходя из эмпирических данных о жизненных циклах лососей, параметр k модели (5) был принят для нерки и кеты равным 5, для кижуча и чавычи равным 7. Значения возрастных коэффициентов чавычи, кеты и кижуча были зафиксированы на уровне, характерном для популяций р. Большая, нерки - на уровне популяции оз. Азабачьего на Камчатке [27,28], эти коэффициенты приведены в табл. 2.

Подбор остальных коэффициентов модели (a , p , m_0 и α), как и в случае с однородной популяцией, велся по методу наименьших квадратов, реализованному в пакете MathCAD 2001 Pro на основе метода Левенберга - Марквардта. Минимизировалась функция $LU = \sum_n (\ln Y_n^* - \ln Y_n)^2$. Для модели возрастной популяции также был применен метод ретропрогнозирования. Из рассмотрения исключались последние пять значений последовательности $\{Y_n^*\}$, а затем делался прогноз на тот же период времени. Для оценки качества прогноза, в свою очередь, вычислялась средняя относительная ошибка δ .

Полученные значения параметров модели, дающие наилучшую аппроксимацию, приведены в табл. 3, в скобках приведены значения, полученные при ретропрогнозировании. Как видно из таблицы, коэффициент детерминации R^2 для реального и модельного рядов данных оказывается достаточно высоким, что показывает наличие сильной взаимосвязи между статистическими данными и модельным приближением к ним. Оценки, полученные по полному и укороченному ряду, отличаются незначительно, что позволяет говорить об определенной устойчивости модели по отношению к ошибкам в данных.

Графики реальной (сплошная линия) и модельной (штриховая линия) динамики уловов для каждого из рассмотренных случаев приведены на рис. 7. Пунктирной линией представлены результаты реконструирования укороченного ряда и прогноз, сделанный на основе этой оценки. Как видно из графиков, модельная и фактическая динамика уловов достаточно близки, что также свидетельствует в пользу применимости модели. Вместе с тем, средняя относительная ошибка прогноза достаточно велика, следовательно, эта модель также может быть улучшена включением дополнительных характеристик.

Ранее данная модель без учета эксплуатации была подробно исследована аналитическими методами на предмет существования и устойчивости стационарных точек [25]. Обращаясь к результатам этой работы, находим, что полученные значения возрастных коэффициентов и репродуктивного потенциала кеты и кижуча соответствуют устойчивому стационарному состоянию в популяции, не подверженной промыслу. Таким образом, может быть сделано предположение, что реальная нерегулярная динамика этих видов в значительной

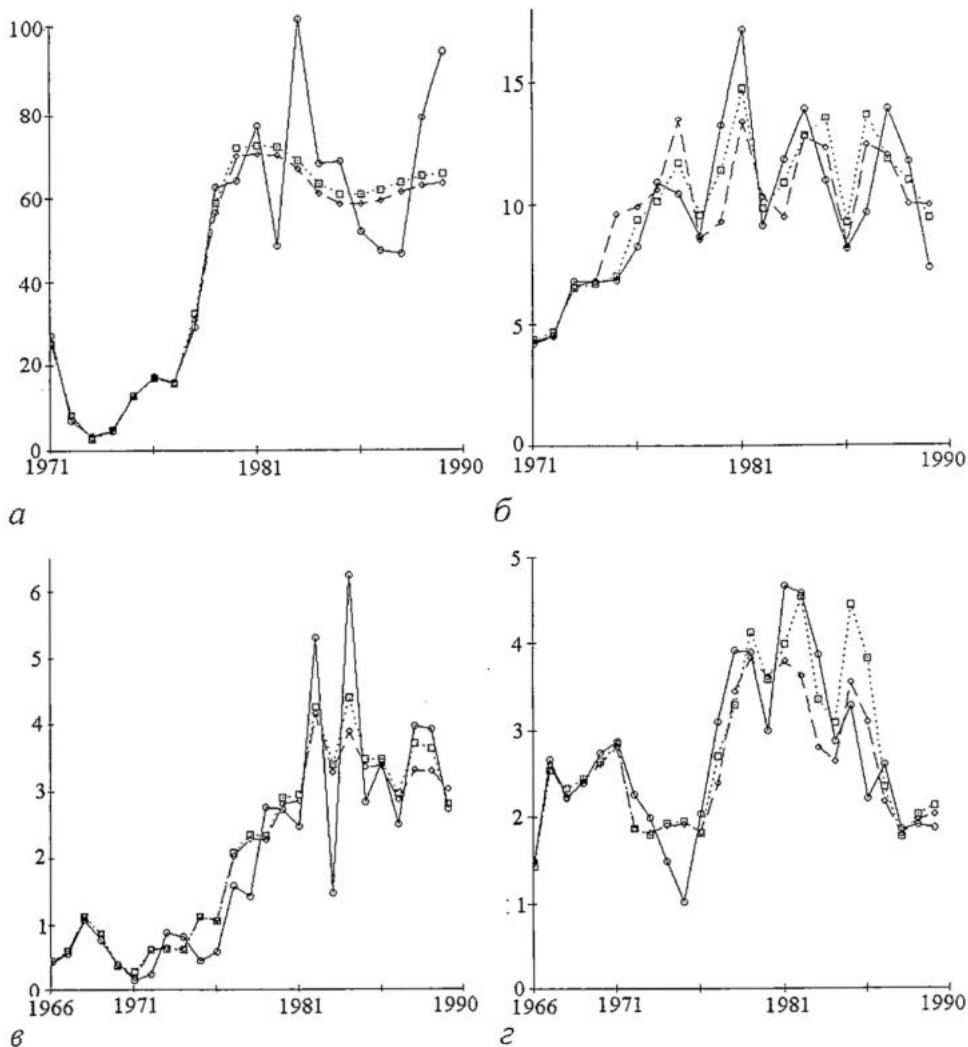


Рис. 7. Реальная, модельная динамика и ретропрогноз уловов: а - нерки; б - кеты; в - кижуча; г - чавычи, тыс. т. По оси абсцисс - годы

мере оказывается связанной именно с многолетним промыслом. Однако проверка этой гипотезы требует дальнейших исследований. Значения коэффициентов, полученные для нерки и чавычи, соответствуют нерегулярной динамике и в неэксплуатируемых популяциях, следовательно, существующие колебания могут быть обусловлены как естественными факторами, так и ведением промысла, либо совокупностью различных факторов.

Заключение

Построена и исследована обобщенная дискретная математическая модель динамики численности локальных популяций, ориентированная на описание динамических перестроек, происходящих под воздействием нелинейного промысла. Предложенная модель позволяет исследовать динамику как однородных, так и возрастных популяций.

Формализована зависимость промыслового изъятия от величины промысловых усилий и текущей численности популяции. Показано, что, если величина усилий нелинейно зависит от численности, то интенсификация промысла

неизбежно приводит либо к вырождению популяции, либо к возникновению сложных динамических режимов, в том числе хаотических.

Получены условия существования и устойчивости стационарных значений численности, обеспечивающих максимальный равновесный улов. Определены типы динамических режимов, возникающих при выходе параметров за границы областей устойчивости.

Оценены параметры модели для нескольких конкретных видов рыб и беспозвоночных по данным промысловой статистики.

Следует подчеркнуть, что отказ от любого из основных предположений, таких как выбранный качественный вид функции воспроизводства или нелинейность зависимости величины улова от усилий, приводит к существенному рассогласованию модельных результатов и данных наблюдений. При этом конкретные функциональные зависимости, по-видимому, здесь не очень принципиальны и отражают скорее пристрастие авторов, чем существо дела. Так, мы пытались вместо модели Рикера при описании воспроизводства использовать модель Хассела [13,14]; при описании функции промысла - учитывать насыщение по численности [29], а также использовать другие виды трофической функции [16,17]. Число параметров при этом, как правило, возрастало, причем не пропорционально увеличению адекватности и точности модели, однако основным выводом о том, что промысел существенным образом влияет на популяционную динамику и часто препятствует ее регуляризации, оставался неизменен. В тех моделях, где удавалось добиться согласования результатов моделирования с данными промысловой статистики, вылов нелинейно зависел от величины промысловых усилий, а усилия - от численности популяции. Именно это мы и пытались продемонстрировать в данной работе на самых простых популяционных моделях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 99-01-00633, 03-01-00044.

Библиографический список

1. *Русанов Я.С.* Охота и охрана фауны: Влияние охоты на структуру популяций охотничьих угодий. М.: Лесн. пром-сть, 1973.
2. *Формозов А.Н.* Колебания численности промысловых животных. М.; Л.: Коиз, 1935.
3. *Кирус И.Д.* Белка. Киров: Волго-Вят. кн. изд-во. Кировское отделение, 1973.
4. *Ashikmina E.V., Frisman E.Ya., Skaletskaya E.I., Kulikov A.N.* Mathematical model for dynamics of the number of pelf products from the local population of Manchurian squirrels // *Ecological Modelling*. 1985. Vol. 30. P. 145.
5. *Бивертон Р., Холт С.* Динамика численности промысловых рыб. М.: Пищ. пром-сть, 1969.
6. *Richer W.E.* Stock and recruitment // *Th. J. Fisheries Res. Bard. Can.* 1954. Vol. 11, № 5. P. 559.
7. *Рикер У.Е.* Методы оценки и интерпретации биологических показателей популяций рыб. М.: Пищ. пром-сть, 1979.
8. *Гимельфарб А.А., Гинзбург Л.Р., Полуэктов Р.А. и др.* Динамическая теория биологических популяций. М.: Наука, 1974.
9. *Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П.* Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла. М.: Наука, 1979.

10. *Абакумов А.И.* Управление и оптимизация в моделях эксплуатируемых популяций. Владивосток: Дальнаука, 1993.

11. *Шапиро А.П.* Математические модели конкуренции // В сб.: Управление и информация. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1974. Вып. 10. С.5.

12. *Шапиро А.П., Луппов С.П.* Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. М.: Наука, 1983.

13. *May R.M.* Simple mathematical models with very complicated dynamics // Nature. 1976. Vol. 261. № 5560. P. 459.

14. *May R.M.* When two and two make four: nonlinear phenomena in ecology // Proc. R. Soc. London, 1986. В 228, № 1252. P. 241.

15. *Базыкин А.Д.* Модель динамики численности и проблема сосуществования близких видов // Журнал общей биологии. 1969. Т. 30, № 3. С.259.

16. *Базыкин А.Д.* Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985.

17. *Holling C.S.* The functional response of predator to prey density and its role in mimicry and population regulation. // Mem. Entomol. Soc. Canada. 1965. Vol. 45. P. 1.

18. *Schaefer M.B.* Some aspects of the dynamics of population important to the management of the commercial marine fisheries // Bull. Inter-Am. Trop. Tuna Comm. 1(2). 1954. P. 27.

19. *Локишина И.Е.* Динамика промысла и оценка вылова. М.: Пищ. пром-сть, 1978.

20. *Фрисман Е.Я., Сычева Э.В., Израильский Ю.Г.* Математическое моделирование динамики численности однородных популяций промысловых видов рыб // Дальневосточный математический сборник. Владивосток: Дальнаука, 2002. Т. 3, № 1. С. 108.

21. *Фрисман Е.Я., Сычева Э.В., Израильский Ю.Г.* Динамическая неустойчивость популяции промыслового вида, связанная с воздействием промысла // Докл. РАН. 2001. Т. 380, № 3. С. 425.

22. *Бард Й.* Нелинейное оценивание параметров / Пер. с англ. М.: Статистика, 1979.

23. *Грешилов А.А., Стакун В.А., Стакун А.А.* Математические методы построения прогнозов. М.: Радио и связь, 1997.

24. *Ласт Е.В., Фрисман Е.Я.* Влияние промысла на популяционную динамику проходных видов рыб // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 1-2. С. 157.

25. *Ласт Е.В., Луппов С.П., Фрисман Е.Я.* Динамическая неустойчивость в математической модели динамики численности популяций лососевых видов рыб // Дальневосточный математический журнал. Владивосток: Дальнаука, 2001. Т. 2, №1. С. 114.

26. *Чигиринский А.И.* Промысел тихоокеанских лососей в Беринговом море // Экология и трофические связи промысловых рыб дальневосточных морей: Известия ТИНРО. 1994. Т. 116. С. 142.

27. *Чигиринский А.И.* Глобальные природные факторы, промысел и численность лососевых // Рыбное хозяйство. 1993. № 2. С.19.

28. *Кравченко П.З.* Дискретная модель динамики численности возрастных групп самок нерки // В сб. научных трудов: Математическое управление в популяционной биологии. ДВНЦ АН СССР. Владивосток, 1985. С. 21.

29. *Сычева Э.В.* Характеристики промысла, определяющие устойчивость равновесной численности эксплуатируемой популяции // Юбилейный сборник научных трудов: к 30-летию ИАПУ ДВО РАН. Владивосток, 2001. С. 367.

Институт автоматизации и процессов
управления ДВО РАН

Поступила в редакцию 07.03.03
после доработки 23.06.03

INFLUENCE OF A NONLINEAR TRADE ON NATURAL POPULATIONS' DYNAMICS

E.V. Last, E.V. Sycheva, E.Ya. Frisman

This work is devoted to construction and research of mathematical model of number dynamics of biological populations subjected to seasonal trade. The special attention is given to formalization of dependence the catch size from present number of a population and trading characteristics, and also to analysis of contradictions between aspiration for maximum profit and stability of population dynamics. Simulation data are compared with fishery statistics for some concrete species of fishes and invertebrates.



Ласт Елена Валерьевна - родилась в пос. Кировском Приморского края (1976), окончила факультет прикладной математики Дальневосточного государственного технического университета (1999). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2002) в Институте автоматки и процессов управления ДВО РАН (Владивосток) по специальности «биофизика». Работает научным сотрудником в лаборатории математического моделирования экологических систем ИАПУ ДВО РАН. Основные научные интересы сосредоточены в области математического моделирования популяционных процессов, теории колебаний и хаоса в экологических системах. Опубликовала 16 работ по этим направлениям.

E-mail: last@iacp.dvo.ru



Сычева Элина Владимировна - родилась в Воронеже (1971), окончила технологический факультет Дальневосточного государственного института рыбной промышленности и хозяйства (Дальрыбвтуз) (1994). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук (1999) в Институте автоматки и процессов управления ДВО РАН (Владивосток) по специальности «биофизика». Работает научным сотрудником в лаборатории математического моделирования экологических систем ИАПУ ДВО РАН. Основные научные интересы связаны с исследованием детерминированных колебаний и хаоса в экологических системах, математическим моделированием динамики промысловых популяций. Опубликовала 42 работы по этой тематике.

E-mail: sycheva@iacp.dvo.ru



Фрисман Ефим Яковлевич - родился в 1948 году в Сталинабаде (ныне Душанбе), окончил Новосибирский государственный университет (1971). После окончания НГУ работает в Институте автоматки и процессов управления ДВО РАН. С 1988 года является заведующим лабораторией математического моделирования экологических систем ИАПУ ДВО РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук (1982, Институт цитологии и генетики СО РАН, Новосибирск) и доктора биологических наук (1989, Институт биофизики ДВО РАН, Красноярск) в области математической теории эволюции. Автор 4 монографий (Изд-во «Наука» и Изд-во ДВО АН СССР). Опубликовал более 120 научных работ по общим вопросам математического моделирования и по конкретным моделям экологических и популяционных систем. Соросовский профессор.

E-mail: frisman@mail.ru



РЕЗОНАНСНЫЕ ЭФФЕКТЫ И ДИНАМИКА ИНТЕНСИВНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ТЕПЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ

Ю.Г. Гамаюнов

Рассмотрены резонансные эффекты и динамика электронного пучка в области транспортировки, обусловленные влиянием начальных поперечных тепловых скоростей электронов.

Введение

Специфика тонких интенсивных электронных пучков в протяженных цилиндрических каналах в значительной мере обусловлена поперечными тепловыми скоростями электронов, эмитируемых термокатодом. Хотя средняя тепловая энергия электронов на катоде составляет доли электрон-вольта, а реальные ускоряющие напряжения достигают единиц киловольт и более, тепловое движение электронов, тем не менее, оказывает существенное влияние как на структуру пучка, так и на его динамику. В работе [1] была предложена модель и изложен подход для анализа электронных пучков с максвелловским распределением начальных поперечных скоростей электронов на катоде в рамках параксиального приближения. Этот подход был затем развит в работе [2], в которой получены уравнения, позволяющие исследовать характеристики теплового пучка в более широкой области его параметров. Сопоставление результатов, получаемых в рамках этого подхода, и результатов численного моделирования многоскоростного ансамбля частиц [3] показало их соответствие, но в то же время выявило и ту область параметров, где имеются различия. Последнее объясняется учетом в [2] сил пространственного заряда через осевую объемную плотность заряда, что завьшало действие этих сил. Поэтому в [4] модель теплового пучка была скорректирована путем использования в уравнениях усредненной объемной плотности пространственного заряда по сечению пучка, что позволило устранить указанные выше различия. В рамках моделей теплового пучка как с осевой, так и с усредненной объемной плотностью заряда было обнаружено, что при величинах фокусирующих магнитных полей, близких к бриллюэновскому, в области некоторых значений компрессии холодного пучка и параметра тепловых скоростей максимальная амплитуда огибающей теплового пучка по отношению к радиусу холодного пучка заметно увеличивается, хотя, казалось бы, она должна изменяться монотонно при изменении этих параметров.

Такое поведение огибающей указывает на изменение динамики теплового пучка, вызванное, например, резонансными эффектами в пучке, природа которых, однако, не выяснена. В настоящей работе сделана попытка исследования механизма, приводящего к аномальной зависимости огибающей в области некоторых значений параметров пучка при использовании фокусирующих магнитных полей, близких к бриллюэновскому, на основе модели теплового пучка с усредненной объемной плотностью заряда по сечению.

Основные уравнения, результаты

В модели теплового электронного пучка [1] поперечное движение любого электрона, стартующего из произвольной точки катода с произвольной поперечной скоростью, описывается совокупностью движений в этом пучке двух характерных электронов, один из которых покидает кромку катода с нулевой поперечной скоростью (нетепловой электрон), а второй вылетает из центра катода с отличной от нуля поперечной скоростью (тепловой электрон). Через траектории этих электронов выражаются основные интегральные характеристики пучка, такие как распределение плотности тока по сечению, огибающая пучка с заданным токосодержанием, доля тока в пределах определенного радиуса пучка. Уравнения, описывающие траектории характерных электронов в тепловом пучке, представляют собою систему из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [2,4]. Для электронно-оптических систем (ЭОС) с магнитным полем на катоде эту систему уравнений можно свести к одному интегродифференциальному уравнению относительно траектории нетеплового электрона, через которое удастся также выразить и траекторию теплового электрона. Тем самым задача анализа процессов в тепловом пучке в этом случае оказывается связанной с определением только одного движения - движения нетеплового электрона в тепловом пучке, что в некоторых случаях упрощает задачу при приближенном рассмотрении влияния тепловых скоростей электронов на характеристики пучка. Будем следовать этому подходу и рассматривать только такие ЭОС.

Пусть тепловой пучок, сформированный электронной пушкой, входит в область однородного магнитного поля. Начало этой области совместим с нормированной продольной координатой $x=0$. Тогда интегродифференциальное уравнение траектории нетеплового электрона в тепловом пучке при использовании модели пучка с усредненной плотностью объемного заряда по сечению будет иметь вид

$$\varphi''_H + i_0 \varphi_0^2 / (4\varphi_H^3) [n_0^2 (\varphi_H / \varphi_0)^4 - (n_0^2 - 1)] = i_0 / (4\varphi_H) [1 - \Phi(x)], \quad (1)$$

где $\Phi(x) = 1 - J/Q^2$;

$$Q = [-\ln(1-J)/P(x)]^{1/2} \exp\{0.06[2P(x)]^{1/2}(1-[2P(x)]^{1/2}/6)\} + \\ + J^{1/2}\{1 - \exp(-0.23[2P(x)]^{1/2})\};$$

$$P(x) = P_{\min} / \sin^2\{[(n_0^2 - 1)i_0/4s]^{1/2} \int_0^x [d\xi/\varphi_H^2(\xi)] + \psi\}; \quad P_{\min} = 440\lambda i_0(n_0^2 - 1)/s;$$

$\varphi_H(x)$ - функция, описывающая траекторию нетеплового электрона; n_0 - превышение фокусирующего магнитного поля над бриллюэновским для ламинарного пучка радиусом r_0 ; $\lambda = p_\mu U_0/T$ - параметр тепловых скоростей, p_μ - микропервеанс, U_0 - ускоряющее напряжение, T - температура катода; $i_0 = 0.0605 p_\mu^2 / \mu^2$, $\mu = \Phi_0/l$, Φ_0 , l - нормировочные величины поперечных и продольных размеров;

$\varphi_0 = r_0/\Phi_0$, $x = z/l$ - нормированные радиус и продольная координата, соответственно; J - доля тока в пределах огибающей пучка; ψ - начальная фаза, учитывающая движение нетеплового электрона в области пушки, то есть до плоскости $x=0$; $s=1/\varphi_0^2$ - компрессия холодного пучка.

Уравнение (1) записано для случая, когда осевой потенциал постоянен и имеет нормированное (на ускоряющее напряжение) значение $U(x) \equiv 1$. По виду уравнение (1) аналогично дифференциальному уравнению парааксиальной траектории граничного электрона ламинарного пучка и отличается от него наличием в правой части функции $\Phi(x)$. Эту функцию, учитывающую тепловое движение электронов, можно рассматривать как возмущение объемного заряда ламинарного пучка, поскольку правая часть уравнения (1) связана с плотностью пространственного заряда электронов. Выясним, как изменяется функция $\Phi(x)$ при изменении продольной координаты. Из выражения для $\Phi(x)$ видно, что это изменение проявляется опосредованно через функцию $P(x)$. Поэтому дальнейшее рассмотрение проведем в следующем приближении: представим $\varphi_H(x) = \varphi_S [1 + \alpha(x)]$, где φ_S - некоторое равновесное значение $\varphi_H(x)$, $\alpha(x) \ll 1$, но при вычислении $P(x)$ в подынтегральном выражении вместо $\varphi_H(x)$ будем использовать φ_S . Это не должно привести к заметным качественным и количественным отличиям значений $P(x)$ от истинных, поскольку величина интеграла при вариации подынтегральной функции изменяется в меньшей мере, чем сама функция и, кроме того, при этом сохраняется основное свойство $P(x)$ - ее периодический характер, определяемый синусом. В этом приближении период функции $P(x)$ оказывается равным $L = 2\pi\varphi_S^2 / \{i_0[n_0^2 - 1]\}^{1/2}$. Периодической с тем же периодом будет и функция $\Phi(x)$. Разлагая эту функцию в ряд Фурье и линеаризуя уравнение (1), получим алгебраическое уравнение для φ_S и линейное дифференциальное уравнение для $\alpha(x)$

$$\begin{aligned} \varphi_S^2/\varphi_0^2 &= (1-0.5a_0)/(2n_0^2) + [(1-0.5a_0)^2/(4n_0^4) + (n_0^2-1)/n_0^2]^{1/2}, \\ \alpha'' + \alpha[\Omega^2 - \omega_0^2/(2(2n_0^2-1))(\varphi_0^2/\varphi_S^2) \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} \cos(\kappa\omega x + \beta_{\kappa})] &= \\ &= -i_0/(4\varphi_0^2)(\varphi_0/\varphi_S)^2 \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} \cos(\kappa\omega x + \beta_{\kappa}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $a_0 \dots a_{\kappa}$ - коэффициенты Фурье, зависящие от параметров пучка (λ, n_0, p_{μ} и пр.); β_{κ} - фазы гармоник, также зависящие от параметров пучка и фазы ψ ;

$$\Omega = \omega_0 \{1 + \varphi_0^2/(\varphi_S^2(2n_0^2-1))[\varphi_S^2/\varphi_0^2 - (1-0.5a_0)]\}^{1/2}; \quad \omega_0 = [i_0(n_0^2-0.5)]^{1/2}/\varphi_0;$$

$\omega = 2\pi/L$ или $\omega = (\varphi_0/\varphi_S^2)[i_0(n_0^2-1)]^{1/2}$ - частота возмущения.

Обсудим уравнение (2). Если не учитывать поперечные скорости электронов, то $a_0 = a_{\kappa} = 0$, $\varphi_S = \varphi_0$, $\Omega = \omega_0$ и уравнение (2) принимает вид

$$\alpha'' + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) описывает известные поперечные колебания с частотой ω_0 граничного электрона ламинарного пучка относительно равновесного радиуса φ_0 , электрон подобен в этом случае гармоническому осциллятору. Если же учесть тепловые скорости электронов, то движение осциллятора существенно изменяется, так как изменяется его собственная частота, она становится равной Ω , а наличие в (2) сумм с периодическими членами формально можно связать с воздействием на осциллятор возмущения, обуславливающего как параметрическое возбуждение (сумма в квадратных скобках), так и обычные вынужденные колебания (сумма в правой части уравнения). Наиболее интересен случай, когда частота возмущения ω близка к горячей собственной частоте Ω осциллятора. В уравнении (2) тогда можно оставить только члены с частотами ω .

$$\alpha'' + \alpha[\Omega^2 - \omega_0^2 / (2(2n_0^2 - 1)) (\varphi_0^2 / \varphi_s^2) a_\kappa \cos(\kappa\omega x + \beta_\kappa)] = -i_0 / (4\varphi_0^2) (\varphi_0 / \varphi_s)^2 a_\kappa \cos(\kappa\omega x + \beta_\kappa). \quad (4)$$

Уравнение (4) является неоднородным уравнением типа Матье, которое при условии $\Omega \approx \kappa\omega$ имеет нарастающее решение, то есть увеличение вдоль продольной координаты амплитуды колебаний $\varphi_H(x)$, определяющей одно из движений электронов в тепловом пучке. Из условия $\Omega = \kappa\omega$ найдем номер резонансной гармоники возмущения

$$\kappa = [1 + 1/2 (\varphi_s / \varphi_0)^2 (1 - 0.5a_0) / (n_0^2 - 1)]^{1/2}. \quad (5)$$

Результаты расчета правой части соотношения (5) в области параметров, где наблюдается аномалия огибающей теплового пучка (рис. 1), представлены на рис. 2, из которого видно, что ближайшее целое число к значению правой части (5)

есть $\bar{\kappa} = \kappa = 2.0$. Поэтому можно полагать, что резонанс в рассматриваемой системе возникает на второй гармонике возмущения. Физически возникновение резонанса можно объяснить следующим образом. Как уже указывалось, в рамках используемой модели теплового пучка поперечное движение любого электрона пучка, имеющего на катоде произвольную поперечную скорость, описывается совокупностью двух движений, одно из которых выражается через поперечное движение нетеплового электрона, а другое - через поперечное движение теплового электрона. Иначе говоря, любой электрон теплового пучка одновременно участвует в двух движениях, периодичность которых вдоль продольной координаты различна. Влияние же сил пространственного заряда на эти движения определяется периодичностью огибающей пучка, которая в общем случае не совпадает с периодичностью указанных движений. Однако не исключено, что при некоторых параметрах пучка действие сил пространственного заряда может приводить к раскочке того или иного движения, если пространственные колебания объемного заряда будут находиться с ним в определенных частотных соотношениях - в условиях резонанса или близко к нему. В рассматриваемом случае это выполняется по отношению к движению электронов теплового пучка, описываемому через движение нетеплового

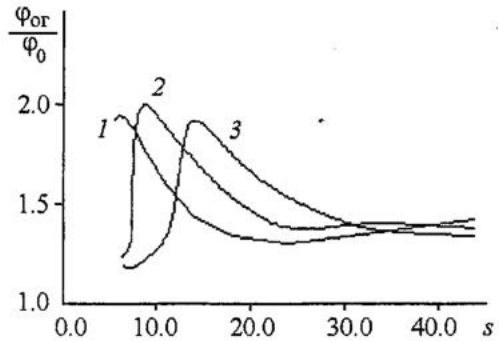


Рис. 1. Зависимость амплитуды огибающей в пучностях теплового пучка от компрессии холодного пучка: $n_0 = 1.005$, $J = 0.99$; $\lambda = 2$; 3; 4 для кривых 1, 2, 3, соответственно

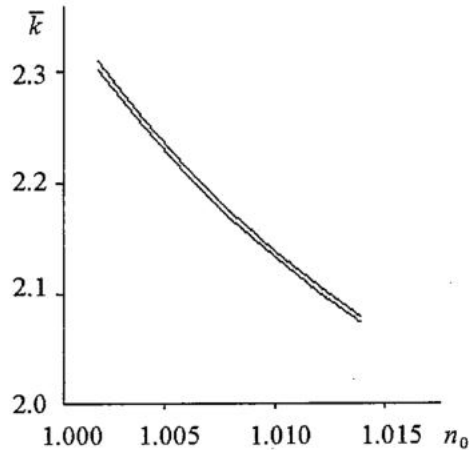


Рис. 2. Зависимость величины правой части уравнения (5) от превышения фокусирующего магнитного поля над бриллюэновским полем при различных λ и s . $\lambda = 2$, $s = 7$; $\lambda = 3$, $s = 10$; $\lambda = 4$, $s = 14$; $J = 0.99$. Все значения правой части попадают в область, ограниченную кривыми

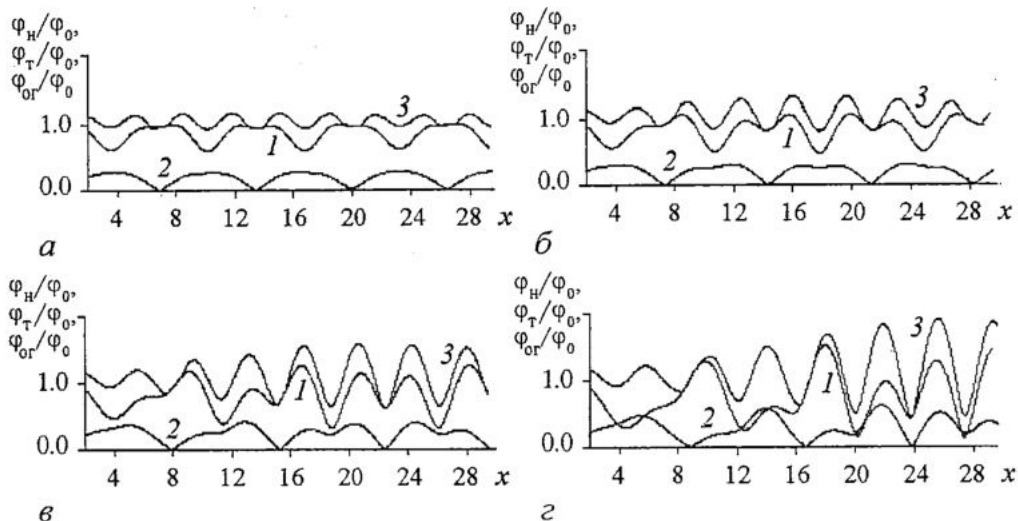


Рис. 3. Траектория нетеплового электрона 1, теплового электрона 2 и огибающая пучка 3. Траектория теплового электрона под осью представлена симметрично в верхней полуплоскости. $\lambda=3, s=10, J=0.99$. Здесь и далее графики построены для следующих значений n_0 : а - 1.05; б - 1.035; в - 1.02; г - 1.005

электрона. Соответственно этому будет изменяться и огибающая пучка. Полученное приближенное условие возникновения резонанса в пучке было сопоставлено с численными расчетами при непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений траекторий двух характерных электронов [4]. Расчеты проводились с учетом условий формирования электронного пучка в области пушки, подобно тому, как это было сделано в работе [2]: уравнения интегрировались по продольной координате от катода электронной пушки, распределение потенциала и магнитного поля в которой соответствовало согласованному вводу холодного пучка с компрессией s в область однородного магнитного поля. При интегрировании находились траектория $\varphi_H(x)$ нетеплового электрона и траектория $\varphi_T(x)$ теплового электрона, по которым рассчитывались огибающая пучка, пространственные спектры колебаний нетеплового электрона и возмущения $\Phi(x)$, проекция сечения Пуанкаре на плоскость $\varphi_H(x), \varphi'_H(x)$ (выборка значений $\varphi_H(x), \varphi'_H(x)$ проводилась в моменты, когда $\varphi_T(x)=0$ при $\varphi'_T(x)<0$, то есть в моменты пересечения оси траекторией теплового электрона). На рис. 3 показаны рассчитанные траектория нетеплового электрона (это движение определяет резонанс в пучке), траектория теплового электрона и огибающая теплового пучка для некоторых малых значений превышения n_0 рабочего магнитного поля над бриллюэновским. Видно, что при некоторых n_0 за несколько периодов пульсаций заметно возрастает по сравнению со значением в начальной плоскости лишь амплитуда траектории нетеплового электрона и огибающей пучка, что согласуется с результатами приближенного анализа условий возникновения резонанса. Дальнейшего нарастания амплитуды, которое следует из уравнения (4), не происходит, что связано с нелинейностью исходных уравнений теплового пучка. Спектры пространственных колебаний нетеплового электрона и функции $\Phi(x)$, определяющей возмущение объемного заряда пучка, представлены на рис. 4. Вертикальными черточками на оси абсцисс отмечены значения частоты возмущения ω и собственных частот ω_0, Ω осциллятора (в нормированных величинах), рассчитанные по приведенным выше формулам. Видно, что они близки к соответствующим частотам пиков спектра. В спектре нас интересует прежде всего вторая гармоника возмущения и частота колебаний нетеплового электрона, близкая к найденной частоте Ω . Из рис. 4, а-в видно, что при изменении

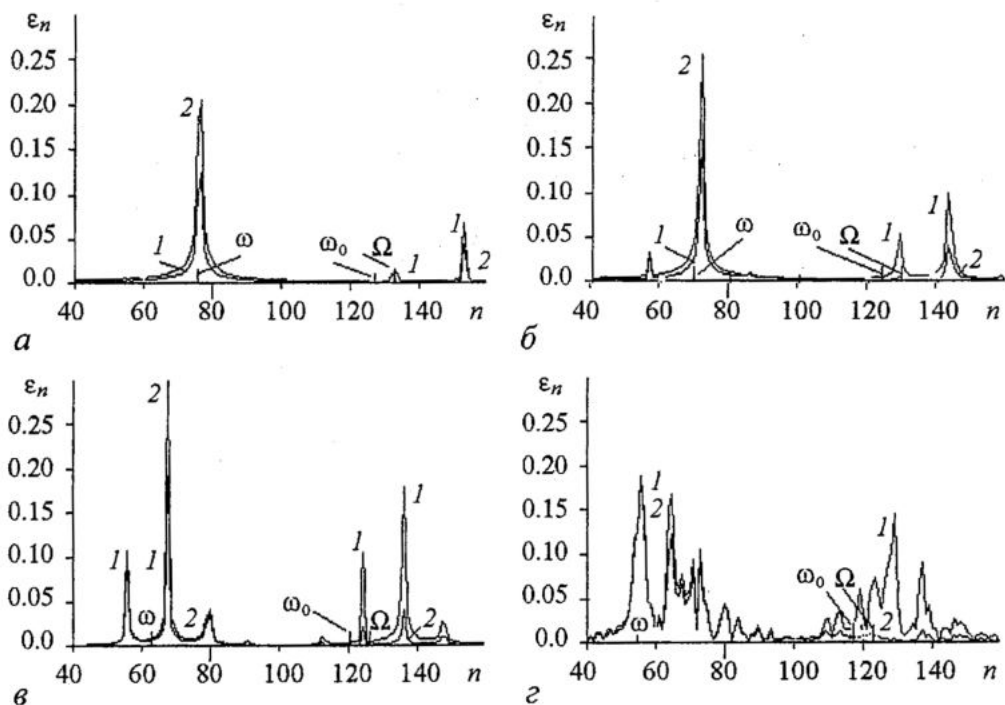


Рис. 4 Спектр колебаний нетеплового электрона 1 и возмущения 2. Амплитуды ϵ_n спектра и частоты даны в нормированных величинах. $\lambda=3, s=10, J=0.99$

n_0 от больших значений к меньшим, частотный интервал между второй гармоникой возмущения и частотой колебаний нетеплового электрона уменьшается, а амплитуда колебаний на этих частотах увеличивается, что свидетельствует о приближении системы к резонансу. Но приближение к резонансу при дальнейшем уменьшении n_0 здесь является причиной развития более сложных процессов в пучке и резкого изменения его динамики: она начинает демонстрировать признаки пространственных хаотических колебаний. Об этом свидетельствует изменение как вида спектра, так и вида проекции на плоскость $\varphi_n(x), \varphi'_n(x)$ сечения Пуанкаре. Если ранее в спектре хорошо были видны отдельные пики (рис. 4, а-в), а сечения Пуанкаре соответствовали квазипериодическим движениям (рис. 5, а-в), то теперь спектр имеет вид сплошного (рис. 4, г), а сечение Пуанкаре представлено разбросанными точками (рис. 5, г). Как известно, подобное характерно для хаотических колебаний. Стохастизация пучка здесь, по-видимому, происходит следующим образом [5]. С приближением к резонансу амплитуда колебаний нетеплового электрона-осциллятора, отображающего одно из движений электронов теплового пучка, возрастает. В фазовом пространстве осциллятора этому будет соответствовать приближение изображающей точки к сепаратрисе, ограничивающей резонанс, но так как осциллятор находится также под воздействием возмущения на других частотах (см. рис. 4), то в окрестности сепаратрисы образуется стохастический слой, что и объясняет возникновение пространственных хаотических колебаний, а вместе с ними и разрушение резонанса.

Обратим внимание также на следующее. Как видно из рис. 1, каждому значению параметра тепловых скоростей λ соответствует интервал значений компрессии s холодного пучка, при которых наблюдается аномалия огибающей, причем в точках максимума кривых рис. 1 отношение λs остается примерно одним и тем же: $\lambda s \approx 0.3$. То, что это отношение должно оставаться постоянным, следует и

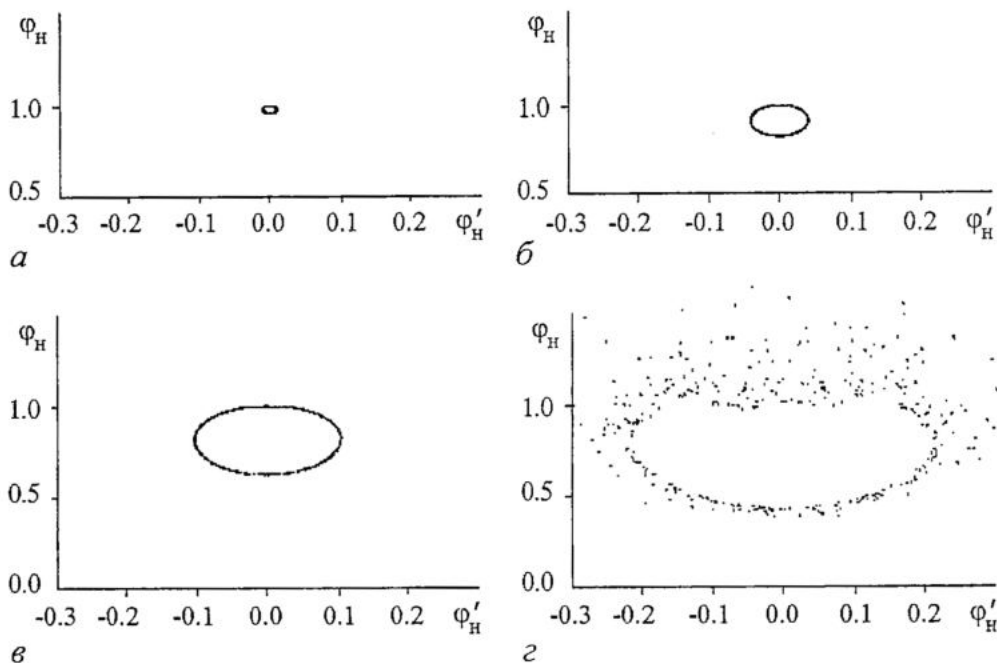


Рис. 5. Сечение Пуанкаре; $\lambda=3, s=10, J=0.99$

из формулы (5). Действительно, правая часть этой формулы зависит от отношения λ/s , поскольку $a_0=f_1(n_0, \lambda/s)$ и $\varphi_s/\varphi_0=f_2(n_0, \lambda/s)$. Поэтому, если при фиксированном значении превышения n_0 магнитного поля над бриллюэновским резонанс появляется при некоторых λ и s , то, естественно, любые изменения этих величин (при условии постоянства отношения λ/s) не приведут к изменению правой части уравнения (5). Иначе говоря, при новых значениях λ и s в системе также будет наблюдаться резонанс. Расчеты по исходным нелинейным дифференциальным уравнениям [4] для ряда значений λ, s , отличных от приведенных на рис. 1, подтвердили этот вывод и показали, что резонанс и стохастизация пучка наблюдаются при $n_0 \approx 1$ и таких сочетаниях λ и s , при которых их отношение остается примерно постоянным.

Таким образом, проведенное рассмотрение указывает на сложную динамику теплового пучка, обусловленную влиянием пространственного заряда на движение электронов. При этом выявленный эффект резонанса в тепловом пучке и стохастизация пучка может явиться (наряду с другими известными факторами, например, неоднородностью магнитных полей, неточностью ввода пучка, несоосностями в ЭОС) причиной ухудшения токопрохождения пучка в пролетных каналах электродинамических структур усилителей и генераторов О-типа при использовании фокусирующих магнитных полей, близких к бриллюэновскому полю.

Автор выражает признательность В.С. Андрушкевичу и А.И. Торееву за обсуждение результатов работы и сделанные критические замечания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 01-02-16681.

Библиографический список

1. Кириштейн П., Кайно У., Уотерс У. Формирование электронных пучков. М.: Мир, 1970.

2. Гамаюнов Ю.Г., Тореев А.И., Патрушева Е.В. Влияние прикатодных условий на возмущение и предельное сжатие интенсивных электронных пучков при наличии начальных тепловых скоростей электронов // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46. Вып. 5. С. 593.

3. Григорьев Ю.А., Журавлева В.Д., Морев С.П. и др. Программа анализа ЭОС с многоскоростным электронным пучком // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1988. Вып.3 (407). С.71.

4. Gamayunov Y.G., Toreev A.I., Patrusheva E.V. Intensive electron beam dynamics in the presence of initial thermal electron velocities // Proceedings of Eighth International Workshop «Beam Dynamics and Optimization. June 25-29, 2001, Saratov, Russia. Saratov University Press, 2002. P. 78.

5. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.

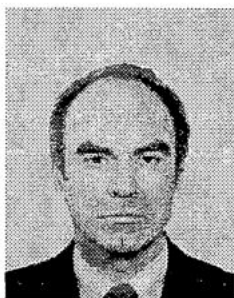
*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 14.01.03
после доработки 17.03.03*

RESONANCE-EFFECTS AND DYNAMICS OF INTENSIVE ELECTRON BEAM IN THE PRESENCE OF TRANSVERSAL THERMAL ELECTRON VELOCITIES

Y.G. Gamayunov

The electron beam resonance effects in the transportation region, which are conditioned by the initial transversal thermal electron velocities, have been considered.



Гамаюнов Юрий Григорьевич - родился в Саратове (1938), окончил Саратовский госуниверситет (1960). В СГУ работает с 1962г. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1971) в области вакуумной и плазменной электроники. Опубликовал более 60 работ по указанной тематике.



ФРАКТАЛЬНОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ В ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЯХ ВИРТУАЛЬНОГО КАТОДА

В.Н. Корниенко, А.П. Привезенцев

В работе проведено сравнение результатов моделирования динамики виртуального катода для детерминированной модели плоских листов и простой вероятностной модели. Показано, что стохастическая составляющая движения центра масс для вероятностной и детерминированной моделей имеют вид фрактального броуновского движения.

1. Моделирование колебаний электронного потока в диодном промежутке в режиме сверхкритического тока с использованием детерминированных алгоритмов [1-3] показало, что в динамике этой системы сосуществуют и взаимно трансформируются хаотическая и регулярная компоненты. Спектры мощности временных реализаций усредненных характеристик виртуального катода (например, наведенного тока), даже при условии инжекции в промежуток идеального моноэнергетического потока зарядов, представляют суперпозицию серии эквидистантных пиков и достаточно интенсивного широкополосного шума. Такой вид спектра свидетельствует о сложном характере динамики потока, типичном для открытых нелинейных систем вдали от равновесия [4]. Появление хаотических пульсаций малой амплитуды на временных масштабах, существенно меньших периода крупномасштабных, регулярных колебаний в динамике виртуального катода связано, по-видимому, с разделением инжектируемых в промежуток зарядов, на пролетные и отраженные.

В ряде работ при анализе механизма генерации излучения в виркаторе использовались методы теории возмущений, основанные на представлении сверхпределного потока пространственного заряда ансамблем нелинейных детерминированных осцилляторов. При этом для описания динамики виртуального катода используются такие понятия как «частота колебаний электронов в яме пространственного заряда», «частота колебаний виртуального катода как целого» и синхронизации этих частот. Хаотическая составляющая динамики потока при этом практически игнорируется.

Ограниченность такого подхода становится очевидной при анализе работы одной из эффективных моделей виркатора - редитрона. Отраженные виртуальным катодом электроны в редитроне перехватываются электродом и осциллирующих зарядов не образуются.

Целью настоящей работы является исследование простого модельного

случайного процесса, который может служить основанием для вероятностной модели динамики виртуального катода. В рассматриваемой модели разделение частиц на пролетные и отраженные представляется случайным процессом, временные реализации которого естественным образом сочетают периодическую (в среднем) и шумовую компоненты.

2. Для пояснения физических соображений, составивших основу исследуемой модели, рассмотрим задачу об инжекции потока электронов, ускоренных потенциалом V , в эквипотенциальный промежуток шириной d . Безразмерным параметром, определяющим характер динамики системы, может служить отношение плотности тока инжекции $j_{\text{инж}}$ к критической плотности тока [5]

$$\alpha = j_{\text{инж}}/j_{\text{кр}},$$

где $j_{\text{кр}} = 32\varepsilon_0/(9d^2)(2e/m)^{1/2}V^{3/2}$, e/m - отношение заряда электрона к его массе. Параметр α связан с невозмущенным углом пролета зарядов θ по плазменной частоте ω_p

$$\alpha = 9\theta/16,$$

где $\theta = \omega_p d/v$, $v = (2eV/m)^{1/2}$ [6].

Как известно, стационарное решение самосогласованных уравнений динамики пространственного заряда в диодном промежутке зависит от параметра α гистерезисным образом [5]. При $0 \leq \alpha \leq 1$ может существовать стационарный поток с полным пролетом. Для токов, удовлетворяющих условию $1/2 \leq \alpha \leq \infty$, существует стационарное решение с виртуальным катодом. При этом инжектируемый поток в точке формирования виртуального катода разделяется на пролетный и отраженный. Стационарное разделение инжектируемого потока обеспечивает неустойчивый баланс кулоновских сил отталкивания, изменения импульсов частиц в пролетном пространстве и их энергии. Относительное число частиц с различными типами траекторий и их кинематические характеристики со временем не изменяются. В силу неустойчивости стационарного потока, на практике, формируется режим нестационарных колебаний, в котором кинематические параметры траекторий пролетных и отраженных частиц (время пролета, точки поворота, скорость вылета) меняются в достаточно широких пределах. В потоке устанавливаются «в среднем» близкие к периодическим релаксационные колебания, в которых чередуются процессы накопления (преобладают отраженные частицы) и сброса заряда (преобладают пролетные частицы). При этом для достаточно малых интервалов времени влета разделение зарядов по принципиально различным видам траекторий (пролетные и отраженные) происходит непредсказуемым образом. Изменение числа пролетных и отраженных частиц во времени, можно считать реализацией случайного процесса. Об этом свидетельствует δ -образный характер изменения корреляций локальных параметров потока с виртуальным катодом и фрактальная структура реализаций усредненных по потоку характеристик [1,3].

Неопределенность в типе траекторий сохраняется при произвольно малой сетке в области времен инжекции. Возникает ситуация характерная для неустойчивых нелинейных систем с высокой чувствительностью к начальным условиям. В силу того, что реально возможны операции с числами, имеющими конечное число десятичных знаков, детерминированное моделирование подобных систем с большим числом частиц приводит к необратимому стохастическому характеру результатов [7,8].

Рассмотренные особенности динамики виртуального катода дают основание полагать, что его поведение может быть описано достаточно простой дискретной

вероятностной моделью. В силу универсальности процессов, происходящих в различных системах с критической динамикой, исследование их простых моделей не только помогает правильно понять происходящие в них процессы на качественном уровне, но и получить количественные характеристики этих процессов [6,9,10].

Основным требованием к рассматриваемой модели при ее построении была близость спектральных и фрактальных характеристик реализаций центра тяжести потока частиц в вероятностной модели [11] и динамической модели плоских листов для виртуального катода [1,3]. Теоретической основой стохастической модели с интенсивной регулярной компонентой является хорошо исследованная схема случайных блужданий. Как известно [12], процесс одномерных случайных блужданий на ограниченном интервале имеет детерминированный временной масштаб, который задается средним временем достижения границы. Для обеспечения колебательного характера процесса в модели введена гистерезисная зависимость вероятностей перехода от положения центра тяжести потока. Такая зависимость позволяет моделировать процесс чередования накопления и сброса заряда в потоке с виртуальным катодом. Следует отметить, что рассматриваемая модель относится к области сверхкритического тока $\alpha > 1/2$ и не может претендовать на полное описание потока пространственного заряда.

Допустим, что частицы равномерно поступают в промежуток $0 \leq x \leq 1$ через точку $x=0$ с временным интервалом Δt и единичной скоростью. Динамика частиц определяется итерационным процессом

$$x_{k,i+1} = x_{k,i} + v_{k,i} \Delta t_{k,i}, \quad (1)$$

где $0 \leq x_{k,i} \leq 1$; $|v_{k,i}|=1$; k - номер частицы; i - номер шага по времени; $k=1,2,\dots,N$; N - полное число частиц в текущий момент времени. Величина очередного шага частицы по времени определяется равенством $\Delta t_{k,i} = \Delta t |g_i|$, где g_i - случайная величина с нормальной функцией распределения. Скорость k -й частицы может случайным образом изменить знак при переходе через точку $x_{c,i}$, определяющую положение центра масс системы в i -й момент времени

$$x_{c,i} = \sum_1^N x_{r,i} / N.$$

Таким образом моделируется разделение частиц на пролетные и отраженные. Введем вероятность изменения знака скорости $P\{v_{k,i+1} = -v_{k,i}\} = q$ и вероятность ее сохранения $P\{v_{k,i+1} = v_{k,i}\} = p$, $p+q=1$, которые в дальнейшем будем называть вероятностями перехода. Как отмечалось выше, для моделирования процесса накопления и сброса заряда вводится зависимость вероятностей перехода от положения центра масс. Эта зависимость имеет гистерезисный вид

$$P(x_c) = \begin{cases} p_f & \text{для } 0 \leq x_c \leq x_r, \\ p_b & \text{для } x_l \leq x_c \leq 1, \end{cases} \quad (2)$$

где $x_r > x_l$, $p_f > 1/2$, $p_b < 1/2$.

Гистерезис $P(x_c)$ обуславливает периодичность процесса «в среднем», поскольку каждый раз при достижении центром масс границы гистерезиса, направление его дрейфа, определяемое разностью $p-q$, изменяется. Вероятностный характер рассматриваемого процесса аналогичен классической задаче о первом достижении границы процессом диффузии (задача о разорении). Период колебаний определяется средним временем движения между границами гистерезиса (2). Относительная интенсивность «периодической» и шумовой компонент процесса определяется дисперсией времени первого достижения

границы гистерезиса. Оценки, проведенные по результатам аналитического решения простейшей задачи случайного блуждания [12], показывают, что при $P_f \sim 0.8$, $P_b \sim 0.2$ и $x_r - x_l \sim 1/4$ дисперсия и среднее значение времени первого достижения границы сравниваются и периодическая компонента поглощается флуктуациями.

Среднее время достижения границы гистерезиса, определяющее периодическую составляющую процесса, даже для простейшего случая марковского процесса случайных блужданий одной частицы является достаточно сложной функцией вероятностей перехода и ширины области гистерезиса $L_H = x_r - x_l$. В рассматриваемой модели последовательность значений центра тяжести $x_{c,i}$ является скользящим средним случайных координат $x_{k,i}$ и поэтому определяет немарковский случайный процесс. Далее будет показано, что это процесс с памятью (персистентное* броуновское движение). Полное исследование зависимости среднего периода от параметров модели достаточно сложно. Однако, как показали численные расчеты, для значений p_f близких к единице и достаточно малых значений p_b существует область значений ширины гистерезиса, для которой средняя частота периодической составляющей процесса ω возрастает с уменьшением ширины по закону близкому к линейному $\omega \sim \omega_0(1 - L_H)$.

Известно, что с увеличением параметра α положение виртуального катода приближается к электроду, через который производится инжекция. Область локализации виртуального катода уменьшается, а частота колебаний увеличивается. Росту степени надкритичности в рассматриваемой модели соответствует приближение правой границы гистерезиса к плоскости инжекции. В силу условия $0 < x_l < x_r$ происходит естественное уменьшение L_H и увеличение частоты колебаний центра масс потока.

Возможность реализации описанного выше режима случайных блужданий с периодической составляющей зависит от положения границ гистерезиса относительно двух точек равновесия потока. Эти точки определяют положение центра масс потока x_{eq} при условии, что инжектируемые и отраженные частицы с одной стороны уравновешены пролетными частицами с другой стороны. Уравнение для координаты точки равновесия имеет вид

$$(1+q)x_{eq}^2 = p(1-x_{eq})^2.$$

Двум возможным значениям вероятности перехода соответствуют два положения равновесия

$$x_{eq}(p) = [(1+2q/p)^{1/2} - 1]/(2q), \quad p + q = 1. \quad (3)$$

Направление регулярного дрейфа меняется при достижении центром тяжести границы гистерезиса, если выполнены условия $x_{eq}(p_b) \leq x_r$, $x_r \leq x_{eq}(p_f)$. При проникновении одной из точек равновесия внутрь области гистерезиса в системе происходит конкуренция режима периодического дрейфа между границами гистерезиса и флуктуациями около точки равновесия. В этом случае для реализаций $x_{c,i}$ наблюдается типичная картина перемежаемости. Колебания, близкие к периодическим, с амплитудой порядка L_H беспорядочно сменяются режимом хаотических флуктуаций вблизи точки равновесия с существенно меньшей амплитудой. При более глубоком проникновении точки равновесия в область гистерезиса система переходит в режим антиперсистентной формы фрактального броуновского движения.

* Персистентность - свойство сохранения тенденций.

3. Для иллюстрации адекватности описанной вероятностной модели сравним результаты численного расчета центра тяжести потока по итерационной схеме (1), (2) с результатами, полученными для колебаний виртуального катода в рамках гамильтоновской формы модели плоских листов, достаточно подробно описанной в работе [1]. В работах [1,13] было показано, что в области гистерезиса стационарных состояний по безразмерному току $1/2 \leq \alpha \leq 1$ можно получить два вида колебательных режимов виртуального катода. Первый режим (низкочастотная мода) формируется, если начальное распределение частиц соответствует неустойчивому стационарному потоку с полным пролетом. Второй режим (высокочастотная мода) формируется из начального состояния, соответствующего стационарному потоку с виртуальным катодом.

Изменяя параметры вероятностной модели (размер области гистерезиса L_H , значения p_f , p_b и шаг по времени), можно добиться достаточно хорошего соответствия спектров мощности реализаций детерминированной и вероятностной моделей. Для анализа и сравнения фрактальных свойств динамики плоских листов и вероятностной модели рассмотрим зависимость стандартного отклонения приращений реализации как функцию сдвига по времени T

$$Std(T) = \{E[(x(t+T) - x(t))^2] - (E[x(t+T) - x(t)])^2\}^{1/2},$$

где $E[.]$ - означает математическое ожидание величины в квадратных скобках. Для фрактального броуновского движения, введенного Мандельбротом и Ван Нессом [14], справедливо равенство

$$\log(Std) = H \log(T) + \text{const.} \quad (4)$$

Свойства процесса определяются параметром H . Для $H = 1/2$ это обычное броуновское движение, которое является марковским процессом. Для $H \neq 1/2$ процесс марковским не является и последовательные шаги статистически зависимы. В случае $H > 1/2$ фрактальное движение обладает свойствами персистентности, $H < 1/2$ определяет антиперсистентное броуновское движение. Для антиперсистентного движения характерна тенденция к изменению знака смещения [15,16], за приращением с положительным (отрицательным) знаком с большей вероятностью следует приращение с противоположным знаком. На рис. 1 показаны спектральные плотности (а) и фазовые портреты (б) низкочастотной моды модели плоских листов для значения тока инжекции, немного превышающего критический ($\alpha=1.02$), и вероятностной модели. Параметры вероятностной модели подбирались так, чтобы получить близкие значения номера максимальной гармоники спектра и параметра H в соотношении скейлинга (4) для сравниваемых моделей. Для рис. 1 эти параметры имели следующие значения: $\Delta t=0.0095$, $x_r=0.489$, $x_f=0.184$, $p_f=0.847$, $p_b=0.153$. На рис. 2 показаны спектры и фазовые портреты высокочастотной моды. Результаты модели плоских листов (а), (б) получены для значения тока равного принятому в расчетах низкочастотной моды ($\alpha=1.02$). Результаты вероятностной модели получены для следующих значений параметров: $\Delta t=0.016$, $x_r=0.49$, $x_f=0.26$, $p_f=0.7$, $p_b=0.3$. Фазовые портреты и спектры модели плоских листов получены по реализациям наведенного тока. Временной сдвиг T для наведенного тока или координаты центра масс при построения фазовых портретов на рис. 1, 2 выбирался равным четверти периода гармоники Фурье с максимальной амплитудой. На рис. 3 приведены графики зависимости $\log(Std)$ от $\log(T)$ для четырех процессов, спектральные плотности которых представлены на рис. 1 и 2. Сплошная линия на рис. 3 соответствует низкочастотной моде, штриховая - высокочастотной моде модели плоских листов. Линия, отмеченная ромбами, представляет вероятностную модель низкочастотной моды. Линия, отмеченная треугольниками, представляет вероятностную модель

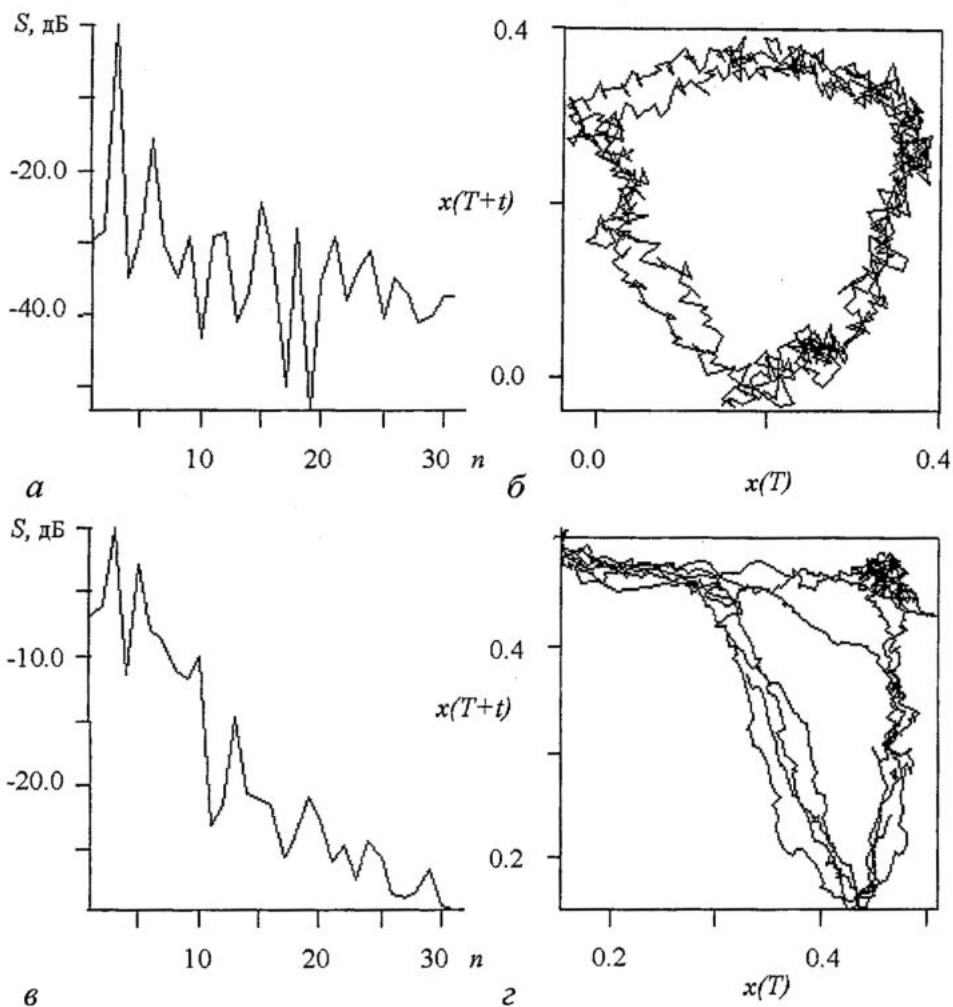


Рис. 1. Спектральные плотности и фазовые портреты низкочастотной моды, б - модель плоских листов; в, г - вероятностная модель

высокочастотной моды. Как видно из рисунка, соотношение (4) выполнено в достаточно широком интервале временных сдвигов. Показатель скейлинга для низкочастотной моды $H \approx 0.8$. Для высокочастотной моды он несколько меньше $H \approx 0.7$, что отражает больший уровень интенсивности флуктуаций в этом режиме.

4. Диагностика режима перемежаемости для реализаций стохастической модели проводилась по значению разности между максимальным и минимальным значением координаты центра тяжести потока. Назовем эту величину диаметром реализации,

$$D = \max x_{c,i} - \min x_{c,i}$$

где $i=1,2,\dots,M$, M - объем реализации. На рис. 4 представлена зависимость диаметра реализации от координаты правой границы гистерезиса при постоянной ширине области гистерезиса L_H . Из графика видно, что для значений $0.4 \leq x_r \leq 0.5$ диаметр реализации сравним по величине с размером области гистерезиса $D \approx L_H$ и испытывает флуктуации, обусловленные случайным характером процесса. Эта область соответствует ситуации, когда точки равновесия не входят в интервал (x_r, x_r) , или находятся достаточно близко к его границам так, что флуктуации не

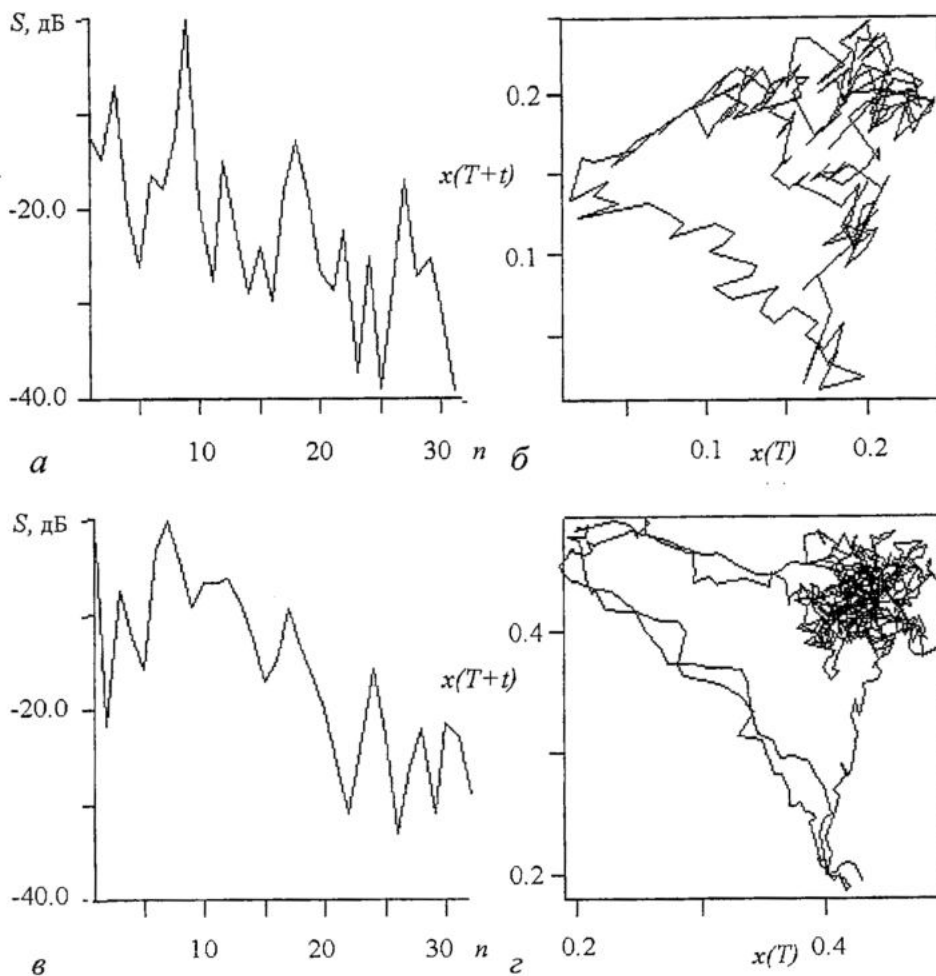


Рис. 2. Спектральные плотности и фазовые портреты высокочастотной моды: а, б - модель плоских листьев; в, г - вероятностная модель

позволяют реализоваться уравновешенному состоянию. При этом центр масс совершает близкое к периодическому движение с чередующимся изменением направления регулярного дрейфа. При увеличении x_r наблюдается область резких скачков диаметра, которая соответствует режиму перемежаемости. В этой области существует конкуренция периодического режима и уравновешенного состояния в точке $x_{eq}(p_f)$. Аналогичная картина наблюдается при уменьшении x_r . В этом случае режим биений обусловлен проникновением в область гистерезиса уравновешенного состояния с координатой центра тяжести $x_{eq}(p_b)$. В области $x_r > 0.54$ система переходит в режим хаотических флуктуаций вблизи уравновешенного состояния $x_{eq}(p_f)$. В этом режиме динамика системы представляет антиперсистентное фрактальное броуновское движение с показателем $H < 1/2$ в соотношении скейлинга (4). Образно говоря, система балансирует вблизи $x_{eq}(p_f)$, изменяя смещение центра тяжести относительно этой точки. Функция плотности распределения вероятности для приращений координат $\Delta x = x(t+T) - x(t)$ фрактального броуновского движения с показателем H имеет вид [14]

$$w(\Delta x) = \exp[-1/2(\Delta x / (\sigma T^H))^2] / ((2\pi)^{1/2} \sigma T^H), \quad (5)$$

где σ - положительная константа; T - приращение времени, соответствующее

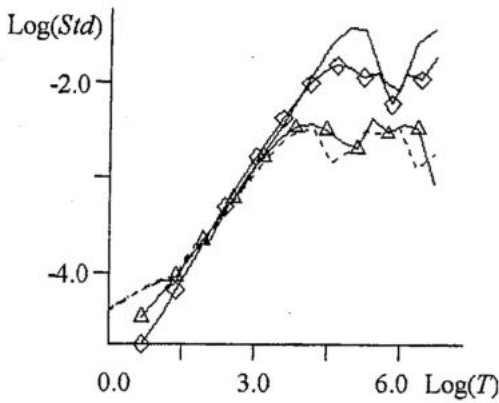


Рис. 3. Стандартные отклонения приращений координаты центра масс и наведенного тока

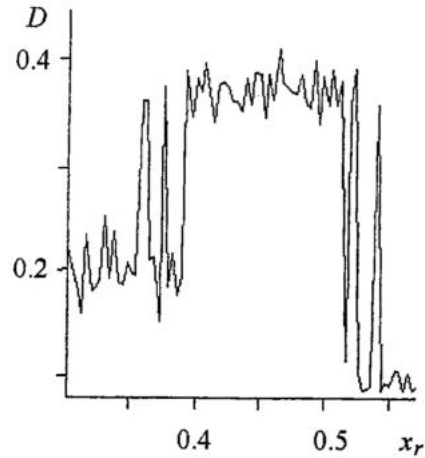


Рис. 4. Диаметр траектории

приращению координаты. Функция распределения (5) инвариантна относительно аффинного преобразования $T \rightarrow rT$, $x \rightarrow r^H x$, r - коэффициент подобия. Следствием статистического самоподобия распределения является соотношение скейлинга для спектральной плотности мощности $S(f)$, характерное для фликкерного шума

$$\log S(f) = -(2H+1)\log(f) + \text{const.} \quad (6)$$

На рис. 5 представлены зависимости $\log(\text{Std})$ от $\log(T)$ и $\log S(n)$ от $\log(n)$, где n - номер фурье-гармоники для значения $x_r = 0.546$. Угловым коэффициентом линейной части графика для логарифма стандартного отклонения равен $H=0.386$. В соответствии с уравнением (6), модуль углового коэффициента спектра мощности в логарифмическом масштабе должен быть равным $k=2H+1=1.772$. Вычисление этой величины методом наименьших квадратов по результатам численного расчета, представленным на рис. 5, б, дает достаточно близкую величину $k=1.589$. Результаты расчетов свидетельствует о том, что в рассматриваемом случае флуктуации в системе действительно имеют характер фликкер-шума. Явление фликкер-шума широко распространено в системах самой различной физической природы [10,17,18]. Механизм формирования этого спектра универсального вида для флуктуаций центра тяжести аналогичен рассмотренному в работе [19].

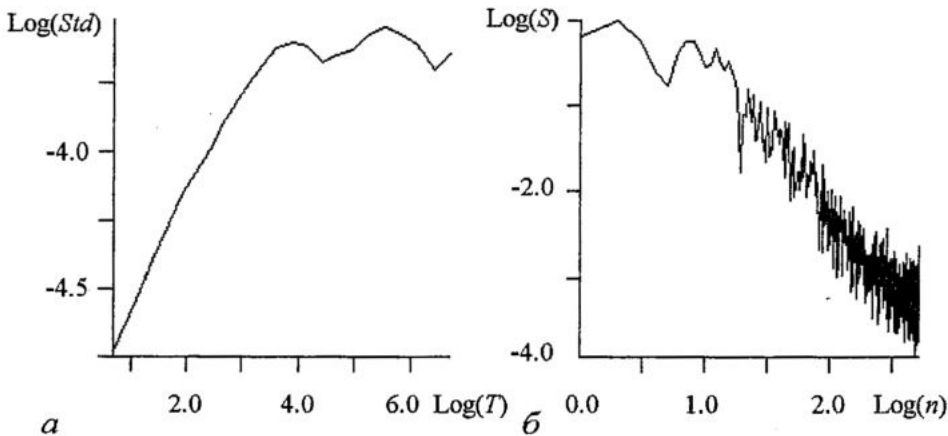


Рис. 5. Стандартные отклонения (а) и спектр мощности (б) фликкерного шума

Фликкер-шум наблюдается в поведении параметра, который является суперпозицией элементов, совершающих случайные шаги.

5. Результаты проведенных численных экспериментов установили достаточно хорошее количественное соответствие в расчетах интегральных характеристик регулярной и стохастической компонент потока с виртуальным катодом для рассмотренной вероятностной модели и детерминированной модели плоских листов. Это указывает на возможность вероятностной тораковки механизма формирования сложного поведения (сочетания порядка и хаоса) в потоке пространственного заряда в режиме сверхкритического тока. В предлагаемой модели регулярные колебания формируются как результат конструктивного взаимодействия причины и случая в потоке частиц, отдельные траектории которых наделены вероятностными свойствами

Библиографический список

1. Привезенцев А.П., Фоменко Г.П. Сложная динамика потока заряженных частиц с виртуальным катодом // Изв. вузов, ПНД. 1994. Т. 2, № 5. С. 56.
2. Анфиногентов В.Г. Хаотические колебания в электронном потоке с виртуальным катодом // Изв. вузов, ПНД. 1994. Т. 2, № 5. С. 69.
3. Привезенцев А.П., Черепенин В.А. Фрактальные свойства колебаний виртуального катода // РЭ. 1998. Т. 43, № 6. С. 738.
4. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. М.: «Мир», 1990.
5. Гвоздовер С.Д. Теория электронных приборов сверхвысоких частот. Москва: ГосТехТеориздат, 1956.
6. Короновский А.А., Храмов А.Б., Анфиногентов В.Г. Феноменологическая модель электронного потока с виртуальным катодом // Изв. РАН. Серия физическая. 1999. Т. 63, № 12. С. 2355.
7. Норман Г.Э., Полак Л.С. Необратимость в классической статистической механике // ДАН СССР. 1982. Т. 263. С. 337.
8. Пригожин И. От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985.
9. Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е. Некоторые модели класса решетчатых газов, связанные с описанием численности популяций // Изв. вузов. ПНД. 2000. Т. 8, № 4. С. 74.
10. Per Bak, Chao Tang, Kurt Wiesenfeld. Self-organized criticality // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 38, № 1. P. 344.
11. Корниенко В.Н., Привезенцев А.П. <http://jre.cplire.ru/jre/maro2/1/text.html>.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.
13. Привезенцев А.П., Саблин Н.И., Фоменко Г.П. Гистерезис колебательных режимов виртуального катода в пространстве дрейфа // РЭ. 1989. Т. 33, № 3. С. 659.
14. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Пост-маркет, 2000.
15. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
16. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос, 2002.
17. Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.Е. Новое в исследовании 1/f-шума // УФН. 1983. Т. 141, вып. 1. С. 151
18. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.

Челябинский государственный
университет

Поступила в редакцию 06.05.2002
после доработки 24.03.2003

FRACTIONAL BROWNIAN MOTION IN VIRTUAL CATHODE DISCRETE MODELS

V.N. Kornienko, A.P. Privezentsev

Results of modeling virtual cathode dynamics for the determined flat sheet model and simple probabilistic model have been compared. It has been shown that stochastic component of mass center motion is formed as fractional Brownian motion for both the stochastic and determined models.



Корниенко Владимир Николаевич, 1966 года рождения, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института радиотехники и электроники РАН (Москва). В 1989 г. окончил физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. Область научных интересов - вычислительный эксперимент в релятивистской сильноточной электронике.



Привезенцев Алексей Павлович, 1943 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиофизики и электроники Челябинского государственного университета. Окончил в 1965 году физический факультет Томского государственного университета. Область научных интересов - исследование хаотической динамики нелинейных детерминированных систем.



О ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ В ОТОБРАЖЕНИИ ЭНО

Часть I. Периодическая динамика

Г.Б. Астафьев, А.А. Короновский, А.Е. Храмов, А.Е. Храмова

В работе рассматриваются переходные процессы в двумерной динамической системе с дискретным временем (отображении Эно), демонстрирующей периодические режимы колебаний. Обсуждается методика определения длительности переходного процесса, зависимость длительности переходного процесса от точности определения и начальных условий, выявляются механизмы, ответственные за усложнение этой зависимости. Во второй части работы планируется обсудить зависимость средней длительности переходных процессов при изменении значений управляющих параметров.

Анализ поведения нелинейных динамических систем в последнее время привлекает к себе большое внимание со стороны исследователей в различных областях естествознания. При этом независимо от того, изучаются ли динамические системы с дискретным или непрерывным временем, со сосредоточенными или распределенными параметрами, основной интерес вызывают установившиеся режимы колебаний и то, каким образом происходит смена этих режимов при изменении управляющих параметров системы [1-6]. При этом переходные процессы в большинстве случаев рассматриваются как нечто второстепенное, не вызывающее особого интереса. В то же время, следует отметить, что переходный процесс несет информацию о системе, и в ряде случаев оказывается более целесообразным рассматривать поведение системы, находящейся именно в стадии переходного процесса [7-10], а не в установившемся режиме.

Следует также отметить, что круг задач, связанных с исследованием переходных процессов, достаточно широк: это исследование строения бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов и их границ в случае мультистабильности [11-12]; изучение переходного хаоса [13-16], который возникает при кризисе хаотического аттрактора [17-21] и который по своей сути также является переходным процессом; определение времени ожидания изображающей точки в малой окрестности фазового пространства системы при управлении хаосом [22-24]. Таким образом, детальное исследование переходных процессов весьма важно

для понимания поведения динамических систем. В качестве объектов исследования переходных процессов удобно выбрать динамические системы с дискретным временем (отображения) в силу того, что, с одной стороны, они относительно просты, а с другой стороны, в них имеют место основные нелинейные явления, свойственные для потоковых и распределенных динамических систем.

Ранее, в работах [10,25,26], были изучены переходные процессы и свойственные им закономерности для одномерных динамических систем с дискретным временем на примере логистического отображения. В то же время понятно, что в системах с большей размерностью (в самом простейшем случае в двумерных отображениях) переходные процессы могут подчиняться несколько иным закономерностям, нежели в одномерных отображениях. При этом результаты, полученные для двумерных динамических систем с дискретным временем, могут быть применимы к трехмерным системам с непрерывным временем, поскольку возможен переход от трехмерных потоковых систем к двумерным отображениям с помощью процедуры сечения Пуанкаре [27,28]. Поэтому целью настоящей работы является подробное изучение переходных процессов в двумерной динамической системе с дискретным временем (отображении Эно [29-30])

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda x_n(1-x_n) + by_n, \\y_{n+1} &= x_n\end{aligned}\tag{1}$$

и выявление основных закономерностей, свойственных переходным процессам. В рамках настоящей работы основное внимание акцентируется на периодических режимах. Некоторые аспекты, связанные с переходными процессами для отображения Эно, находящегося в хаотическом режиме, можно найти в работах [31,32]. Выбор в качестве объекта исследования отображения Эно обусловлен еще и тем, что при выборе значения управляющего параметра $b=0$ отображение (1) переходит в логистическое, а следовательно, результаты, полученные для него, можно легко сопоставить с результатами, полученными ранее для логистического отображения.

Методика определения длительности переходного процесса. Влияние точности на длительность переходного процесса

Под длительностью переходного процесса понимается интервал времени, который необходим динамической системе, эволюционирующей с произвольных начальных условий, для того, чтобы изображающая точка в фазовом пространстве достигла аттрактора с некоторой наперед заданной точностью ϵ . Понятно, что, с формальной точки зрения, переходный процесс в системе, как правило, длится бесконечно долго, изображающая точка лишь асимптотически стремится к аттрактору при $t \rightarrow \infty$ и за конечный интервал времени никогда его не достигает [33]. В то же самое время, в натуральных экспериментах и при численном моделировании поведения динамических систем во временной реализации обычно легко удается выделить участки, отвечающие соответственно установившемуся режиму и переходному процессу. Длительность переходного процесса зависит от начальных условий и точности, с которой определяется выход фазовой траектории на аттрактор.

В том случае, если состояние, к которому асимптотически стремится система при $t \rightarrow \infty$, является периодическим, существует достаточно простой и эффективный метод определения длительности переходного процесса [25,31], суть

которого заключается в следующем. Пусть рассматривается динамическая система с дискретным временем

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n), \quad (2)$$

где $\mathbf{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{kn})$ - вектор, характеризующий состояние системы в n -й момент времени; \mathbf{F} - вектор-функция, задающая эволюцию вектора состояния с течением времени. В этом случае длительность переходного процесса определяется следующим образом.

1. Система (2) итерируется достаточно большое число раз N (N должно быть заведомо больше максимальной длительности переходного процесса) со случайным начальным условием \mathbf{x}_0 , после чего предполагается, что система достигла асимптотического состояния, а изображающая точка вышла на аттрактор. Иными словами, полагается, что точка \mathbf{x}_N находится в непосредственной близости к какой-либо точке \mathbf{x}_i^0 аттрактора G_0 , и, следовательно, при численном моделировании точка \mathbf{x}_N может рассматриваться как элемент аттрактора. После этого последовательность $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^N$ анализируется, начиная с предпоследнего элемента x_{N-1} . Элементы $x_{N-1}, x_{N-2}, \dots, x_k$ последовательно сравниваются с x_N до тех пор, пока в первый раз не будет выполнено условие $|x_k - x_N| < \epsilon$ ($\epsilon_{\text{attr}} < \epsilon$), где ϵ_{attr} - точность, с которой определяется период асимптотического режима, а ϵ - точность определения длительности переходного процесса. В этом случае период τ асимптотического режима системы (2) может быть определен как $\tau = N - k$. Соответственно, аттрактор G_0 будет состоять из τ точек $\{\mathbf{x}_i^0\}_{i=1}^{\tau}$, где $\mathbf{x}_1^0 = \mathbf{x}_{k+1}$, $\mathbf{x}_2^0 = \mathbf{x}_{k+2}, \dots, \mathbf{x}_{\tau}^0 = \mathbf{x}_N$.

2. После определения точек $\{\mathbf{x}_i^0\}_{i=1}^{\tau}$ аттрактора G_0 , длительность переходного процесса может быть определена для любого начального условия \mathbf{x}_0 с некоторой наперед заданной точностью ϵ . Для того, чтобы определить длительность переходного процесса $T_{\epsilon}(\mathbf{x}_0)$, необходимо анализировать последовательность $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^N$, начиная с начальной точки \mathbf{x}_0 , до тех пор, пока некоторая точка \mathbf{x}_k временной реализации $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^N$ не попадет в ϵ -окрестность одного из элементов $\{\mathbf{x}_i^0\}_{i=1}^{\tau}$ аттрактора G_0 , то есть до тех пор, пока не будет выполняться условие $|x_k - x_i^0| < \epsilon$ ($1 \leq i \leq \tau$). Если переходный процесс в системе (2) завершился в момент дискретного времени $t = k$, то все точки \mathbf{x}_i ($k < i \leq N$) последовательности $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ должны также находиться в ϵ -окрестностях элементов $\{\mathbf{x}_i^0\}_{i=1}^{\tau}$ аттрактора G_0 . В том случае, если это условие выполняется, длительность переходного процесса может быть определена как $T_{\epsilon}(\mathbf{x}_0) = k$.

3. Для того, чтобы определить длительность переходного процесса $T_{\epsilon}(\mathbf{x}_0)$ для любого другого начального условия \mathbf{x}_0 или другого значения точности ϵ , необходимо повторить п. 2 с новыми величинами \mathbf{x}_0 и ϵ .

Следует отметить некоторые ограничения вышеописанного метода: во-первых, в случае мультистабильности, если в фазовом пространстве системы (2) сосуществуют несколько периодических аттракторов, необходимо повторять п. 1 метода для каждого начального условия \mathbf{x}_0 . Во-вторых, данный метод не работает при значениях параметров системы (2), равных бифуркационным, а в точках, близких к точкам бифуркации, длительность переходного процесса оказывается большой, что влечет за собой необходимость увеличения числа итераций на каждом этапе.

Из интуитивных соображений ясно, что чем больше точность, с которой определяется длительность переходного процесса $T_{\epsilon}(\mathbf{x}_0)$ (то есть, чем меньше величина ϵ), тем больше у временной реализации $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^N$ участок, отвечающий переходному процессу. Оказывается, что важную роль в формировании участка временной реализации, соответствующего переходному процессу, играют мультипликаторы μ , устойчивого τ -цикла.

Предположим для простоты, что в фазовом пространстве динамической системы с дискретным временем (2) существует единственный аттрактор¹ G_0 , представляющий собой цикл периода τ . В этом случае τ раз проитерированное отображение (2)

$$x_{n+\tau} = F(F(\dots(F(x_n))\dots)) = F^{(\tau)}(x_n) \quad (3)$$

$\tau_{\text{раз}}$

будет иметь τ неподвижных устойчивых точек, при этом каждому элементу x_i^0 ($i=1,2,\dots,\tau$) устойчивого цикла периода τ отображения (2) будет соответствовать неподвижная устойчивая точка x_i^τ отображения (3).

Для того, чтобы рассматривать поведение системы (3) в малой окрестности одной из неподвижных точек x_i^τ , имеет смысл ввести в рассмотрение величину δx , характеризующую отклонение переменной x от неподвижной устойчивой точки x_i^τ ,

$$\delta x = x - x_i^\tau. \quad (4)$$

В этом случае в линейном приближении поведение системы (3) в окрестности неподвижной устойчивой точки x_i^τ будет определяться как

$$\delta x_{n+1} = M \delta x_n, \quad (5)$$

где M - матрица монодромии

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1s} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{s1} & m_{s2} & \dots & m_{ss} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $m_{kl} = \partial F_k^{(\tau)} / \partial x_l(x_i^\tau)$. Собственные числа μ_j ($j=1,2,\dots,s$) матрицы монодромии M характеризуют каждую из неподвижных устойчивых точек x_i^τ системы (3) и устойчивый цикл периода τ отображения (2) и называются мультипликаторами неподвижной устойчивой точки x_i^τ и устойчивого цикла $\{x_i^0\}_{i=1}^\tau$, соответственно. Из предположения об устойчивости τ -цикла следует, что все мультипликаторы μ_j должны быть по абсолютной величине меньше единицы.

Для двумерной динамической системы, каковой является отображение Эно, матрица монодромии M будет представлять из себя квадратную матрицу 2×2 . Соответственно, мультипликаторы $\mu_{1,2}$ могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными. Линейной заменой переменных [34,35]

$$\delta v = B \delta x, \quad (7)$$

где B - матрица преобразования, соотношение (5) может быть приведено к виду

$$\delta v_{n+1} = L \delta v_n, \quad (8)$$

где $L = BMB^{-1}$, B^{-1} - обратная матрица для матрицы B .

В том случае, если мультипликаторы $\mu_{1,2}$ являются действительными, выбором матрицы B можно добиться того, что матрица L будет являться диагональной, причем по главной диагонали будут находиться собственные числа μ_j

$$L = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

¹ Иными словами, мы будем считать, что при выбранных значениях управляющих параметров в системе (2) отсутствует мультистабильность.

В этом случае изменение каждой компоненты $v_{1,2}$ вектора $\delta v = (v_1, v_2)^T$ будет определяться только одним («своим») мультипликатором μ_j ($j=1,2$)

$$(v_j)_{n+1} = \mu_j \times (v_j)_n. \quad (10)$$

Чем ближе величина мультипликатора μ_j к нулю, тем быстрее уменьшается v_j компонента вектора δv . Следовательно, длительность переходного процесса в случае действительных мультипликаторов будет определяться динамикой компоненты v_m вектора δv , которой соответствует наибольший по абсолютной величине мультипликатор μ_m , для которого, однако, в силу устойчивости τ -цикла, выполняется соотношение $|\mu_m| < 1$.

В том случае, если мультипликаторы $\mu_{1,2}$ матрицы монодромии M оказываются комплексно сопряженными $\mu_1 = \mu_2^* = \text{Re}(\mu_1) + i\text{Im}(\mu_1)$, может быть найдена такая матрица² B , что в результате линейного преобразования (7) матрица монодромии M будет преобразована к матрице L , имеющей вид

$$L = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mu_1) & \text{Im}(\mu_1) \\ \text{Im}(\mu_2) & \text{Re}(\mu_2) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

а для вектора δv будет справедливо соотношение

$$|\delta v_{n+1}| = |\mu_{1,2}| \times |\delta v_n|, \quad (12)$$

причем из условия устойчивости τ -цикла отображения (2) будет следовать, что $|\mu_{1,2}| < 1$.

Исходя из всего вышеизложенного получаем, что длительности переходных процессов $T_{\epsilon}^{\tau}(x_0)$ и $T_{\epsilon_1}^{\tau}(x_0)$ отображения (3), определенные для одного и того же начального условия x_0 и одних и тех же значений управляющих параметров, но с разными значениями точности ϵ и ϵ_1 (для определенности будем полагать, что $\epsilon_1 > \epsilon$), будут связаны между собой как

$$T_{\epsilon}^{\tau}(x_0) = T_{\epsilon_1}^{\tau}(x_0) + K. \quad (13)$$

Здесь K - число итераций системы (3), которые необходимо совершить, чтобы был завершен переходный процесс, определяемый с точностью ϵ , после того, как завершается переходный процесс, определяемый с точностью ϵ_1 . Из соотношений (10) и (12) следует, что $|\epsilon| \approx |\mu|^K |\epsilon_1|$, где μ - наибольший по абсолютной величине мультипликатор в том случае, если мультипликаторы $\mu_{1,2}$ являются действительными, и любой мультипликатор, если $\mu_{1,2}$ - комплексно-сопряженные. Нетрудно видеть, что $K = \log_{|\mu|}(\epsilon/\epsilon_1)$ и

$$T_{\epsilon}^{\tau}(x_0) = T_{\epsilon_1}^{\tau}(x_0) + \log_{|\mu|}(\epsilon/\epsilon_1). \quad (14)$$

Поскольку одна итерация отображения (3) соответствует τ итерациям отображения (2), длительности переходных процессов $T_{\epsilon}(x_0)$ и $T_{\epsilon_1}(x_0)$ отображения (2), определенные для одного и того же начального условия x_0 и одних и тех же значений управляющих параметров, но с разными значениями точности ϵ и ϵ_1 , будут связаны между собой как

$$T_{\epsilon}(x_0) = T_{\epsilon_1}(x_0) + \tau \log_{|\mu|}(\epsilon/\epsilon_1). \quad (15)$$

Соотношение (15) получено в линейном приближении динамики системы и неприменимо для больших значений ϵ и значений мультипликатора μ , близких по

²Точнее говоря, существует бесконечное число таких матриц B и, соответственно, бесконечное число преобразований.

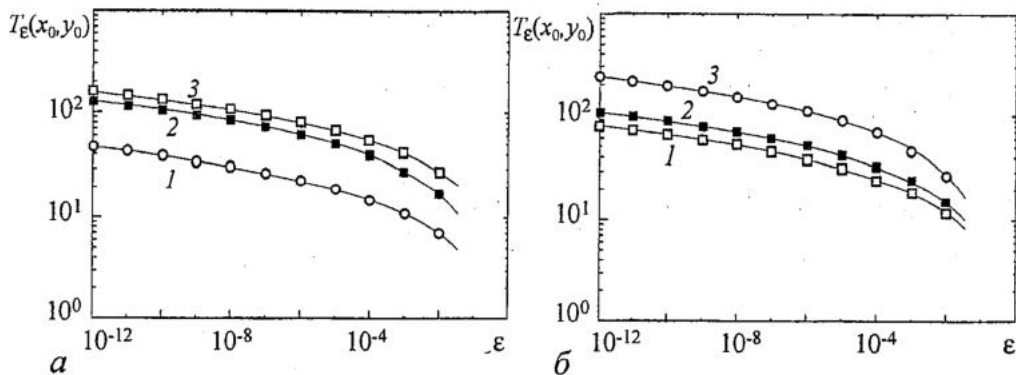


Рис. 1. Зависимость длительности переходного процесса от точности ϵ для различных начальных условий и значений управляющих параметров для цикла периода один отображения Эно. *а* - Значения управляющих параметров подобраны таким образом, что мультипликаторы неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) действительные: 1 - $\lambda=1.8$, $b=0.2$, $x_0=1.1$, $y_0=2.94$, $\mu_1=-0.558$, $\mu_2=0.358$ (○); 2 - $\lambda=1.2$, $b=0.5$, $x_0=1.4$, $y_0=1.388$, $\mu_1=-0.814$, $\mu_2=0.614$ (■); 3 - $\lambda=0.6$, $b=0.7$, $x_0=1.352$, $y_0=2.72$, $\mu_1=-0.836$, $\mu_2=0.836$ (□). *б* - Мультипликаторы комплексно-сопряженные: 1 - $\lambda=2.4$, $b=-0.5$, $x_0=0.7448$, $y_0=-0.0408$, $\mu_{1,2}=0.3\pm i0.64$ (□); 2 - $\lambda=3.0$, $b=-0.6$, $x_0=0.722$, $y_0=0.48$, $\mu_{1,2}=0.1\pm i0.768$ (●); 3 - $\lambda=4.1$, $b=-0.8$, $x_0=0.332$, $y_0=0.66$, $\mu_{1,2}=-0.25\pm i0.858$ (○)

модулю к единице или к нулю. Для отображения Эно (1), являющегося отображением с постоянным Якобианом, справедливо соотношение $\mu_1\mu_2=b$, а следовательно, в данном случае мультипликатор μ не может быть равен нулю (если, конечно, параметр b не равен нулю). Необходимо также отметить, что с уменьшением значения ϵ соотношение (15) будет выполняться с более высокой степенью точности.

На рис. 1 и 2 приведены в двойном логарифмическом масштабе зависимости длительности переходного процесса от точности ϵ для различных начальных условий (x_0, y_0) , разных значений управляющих параметров и соответствующих различным периодическим режимам отображения Эно. В качестве величины ϵ , фигурирующей в соотношении (15), для длительности переходного процесса было выбрано значение точности $\epsilon_1=10^{-2}$, а длительность переходного процесса, определенная с точностью ϵ_1 , обозначена как $T_{\epsilon_1}(x_0)$. Все значения длительности

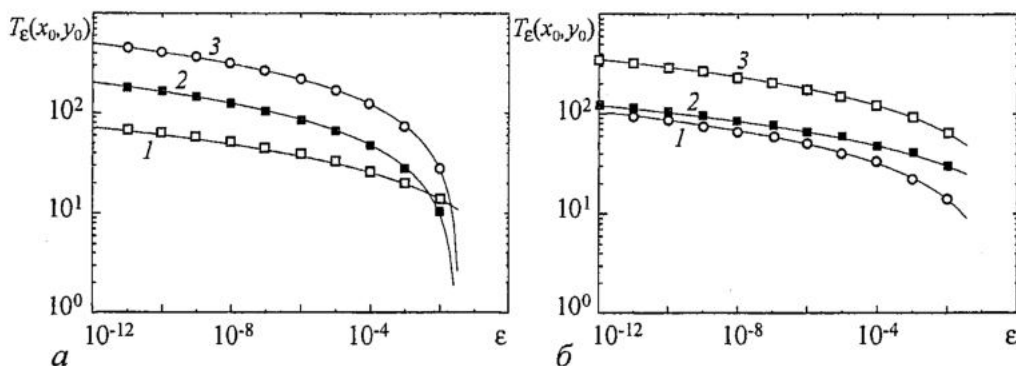


Рис. 2. Аналогичная приведенной на рис. 1 зависимость длительности переходного процесса от точности ϵ для цикла периода два отображения Эно. *а* - Значения управляющих параметров подобраны таким образом, что мультипликаторы устойчивого цикла являются действительными: 1 - $\lambda=2.4$, $b=0.25$, $x_0=0.968$, $y_0=2.4$, $\mu_1=0.138$, $\mu_2=0.451$ (□); 2 - $\lambda=3.2$, $b=-0.05$, $x_0=0.674$, $y_0=2.56$, $\mu_1=0.786$, $\mu_2=0.003$ (■); 3 - $\lambda=3.3$, $b=0.05$, $x_0=0.782$, $y_0=2.0$, $\mu_1=-0.907$, $\mu_2=-0.002$ (○). *б* - Мультипликаторы комплексно-сопряженные: 1 - $\lambda=5.0$, $b=-0.6$, $x_0=0.644$, $y_0=1.24$, $\mu_{1,2}=0.02\pm i0.6$ (○); 2 - $\lambda=2.0$, $b=0.6$, $x_0=1.16$, $y_0=1.288$, $\mu_{1,2}=-0.28\pm i0.53$ (■); 3 - $\lambda=1.1$, $b=0.85$, $x_0=0.218$, $y_0=0.16$, $\mu_{1,2}=0.455\pm i0.717$ (□)

переходных процессов, определенные численно итерированием отображения Эно, представлены в виде точек, а зависимости, соответствующие (15), показаны линиями. Видно, что кривые аналитической зависимости (15) хорошо соответствуют результатам, полученным численно.

Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий и механизмы ее усложнения

Цикл периода один. Перейдем теперь к обсуждению вопроса о том, как выглядит зависимость длительности переходного процесса $T_{\epsilon_1}(x_0, y_0)$ от начальных условий (x_0, y_0) . Начнем рассмотрение с наиболее простого динамического режима, реализующегося в отображении Эно, - устойчивого цикла периода один. Неподвижная точка (x^0, y^0) отображения Эно имеет координаты

$$x^0 = y^0 = (\lambda + b - 1) / \lambda \quad (16)$$

и является устойчивой при $1 - b < \lambda < 3(1 - b)$ (рис. 3, области A, B). Параметр b изменяется в диапазоне $-1 < b < 1$, отображение Эно при этом является диссипативным.

Как уже говорилось ранее, длительность переходного процесса зависит от

значения мультипликатора периодического аттрактора (см. (15)). При этом характер зависимости длительности переходных процессов от начальных условий также во многом определяется мультипликаторами.

В том случае, когда мультипликаторы периодического аттрактора являются действительными (область A на рис. 3), важную роль в формировании вида зависимости длительности переходных процессов от начальных условий играют многообразия неподвижной устойчивой точки. Устойчивая неподвижная точка (x^0, y^0) характеризуется мультипликаторами

$$\mu_1 = \{2 - 2b - \lambda - [4b + (-2 + 2b + \lambda)^2]^{1/2}\} / 2, \quad (17)$$

$$\mu_2 = \{2 - 2b - \lambda + [4b + (-2 + 2b + \lambda)^2]^{1/2}\} / 2,$$

а также собственными векторами

$$e_1 = (\{2 - 2b - \lambda - [4b + (-2 + 2b + \lambda)^2]^{1/2}\} / 2, 1), \quad (18)$$

$$e_2 = (\{2 - 2b - \lambda + [4b + (-2 + 2b + \lambda)^2]^{1/2}\} / 2, 1).$$

Вдоль направлений, определяемых собственными векторами $e_{1,2}$, в линейной окрестности элемента τ -цикла отображения (1) проходят многообразия, которые, в зависимости от значений управляющих параметров,

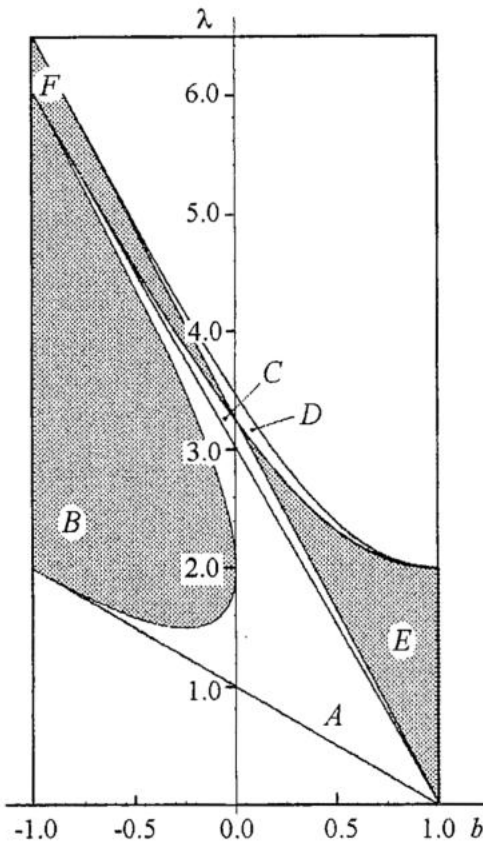


Рис. 3. Карта периодических динамических режимов (циклы периода один и два) для отображения Эно (1) на плоскости управляющих параметров (b, λ) . Серым цветом обозначены области, соответствующие комплексно-сопряженным значениям мультипликаторов $\mu_{1,2}$ периодического аттрактора

могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Следует отметить, что многообразия циклов играют важную роль в нелинейной динамике (например, при формировании границ бассейнов притяжения аттракторов [36,37]), а способы их построения описаны в [38-40].

Сопоставление проекции поверхности $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ на плоскость начальных условий (x_0, y_0) с расположением устойчивых многообразий устойчивой неподвижной точки (x^0, y^0) показывает, что точки начальных условий, в которых длительность переходных процессов принимает минимальные значения, совпадают с точками одного из этих многообразий. Наименьшие значения зависимости $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ располагаются вдоль устойчивого многообразия устойчивой точки (x^0, y^0) , которое соответствует наименьшему по модулю значению мультипликатора. Именно вдоль этого многообразия, в силу соотношения (10), осуществляется наиболее быстрое приближение изображающей точки к аттрактору. С некоторой степенью условности можно сказать, что больший по абсолютной величине положительный мультипликатор μ_2 характеризует «медленные» движения в системе, в то время как отрицательный мультипликатор μ_1 , характеризующийся меньшим по модулю значением, - «быстрые» движения. Именно вдоль «быстрого» многообразия осуществляется скорейшее приближение изображающей точки к аттрактору³.

На графических иллюстрациях результатов, приведенных ниже, используются следующие обозначения. Длительность переходного процесса $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ (точность определения $\varepsilon=10^{-6}$) показана градациями серого цвета, белый цвет соответствует наименьшей длительности переходного процесса. Устойчивая точка (x^0, y^0) показана черным кружком, неустойчивая точка $(0,0)$ - светлым кружком. Штриховой линией 1 показано устойчивое многообразие неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) , соответствующее мультипликатору μ_1 ; штрихпунктирной линией 2 - второе устойчивое многообразие точки (x^0, y^0) , характеризующееся мультипликатором μ_2 ; жирная сплошная линия 3 соответствует устойчивому многообразию неустойчивой неподвижной точки $(0,0)$, которое формирует границу бассейна притяжения аттрактора (x^0, y^0) ; тонкая сплошная линия 4 соответствует неустойчивому многообразию точки $(0,0)$, лежащему вне бассейна притяжения аттрактора (x^0, y^0) .

На рис. 4, а изображена проекция на плоскость (x, y) зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$. На рис. 4, б для тех же значений управляющих параметров показано расположение многообразий для устойчивой точки (x^0, y^0) и неустойчивой точки $(0,0)$. Видно, что расположение точек начальных условий, в которых длительность переходного процесса минимальна, соответствует расположению устойчивого многообразия неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) , характеризующейся наименьшим по абсолютной величине мультипликатором. В то же самое время, второе «медленное» многообразие не играет видимой роли в формировании структуры поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий, хотя, как будет показано далее, значение второго мультипликатора

³Появление минимумов длительности переходных процессов можно с некоторой степенью условности достаточно наглядно объяснить следующим образом. Изображающая точка, эволюционируя из любых начальных условий, двигается сразу вдоль двух направлений - «быстрого» и «медленного». Двигаясь вдоль направления «быстрого» многообразия, изображающая точка достаточно быстро «садится» на второе («медленное») многообразие и в дальнейшем двигается вдоль него. Таким образом, момент завершения переходного процесса определяется движением вдоль «медленного» многообразия. В том случае, если точка начальных условий оказывается на «быстром» многообразии, вторая фаза движения вдоль «медленного» многообразия отсутствует, что приводит к тому, что длительность переходного процесса оказывается минимальной.

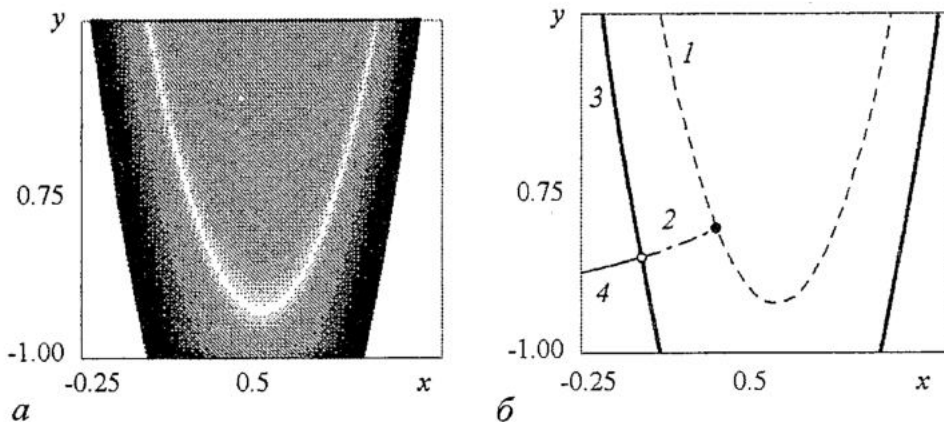


Рис. 4. а - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda=1.3$, $b=0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 40 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. б - Расположение многообразий для устойчивой и неустойчивой точек отображения Эно при тех же самых значениях управляющих параметров. Здесь $\mu_1 = -0.1531$ - меньший по величине мультипликатор, $\mu_2 = 0.6531$. Второе неустойчивое многообразие совпадает с устойчивым многообразием точки (x^0, y^0) , показанным штрихпунктиром

весьма важно - оно обуславливает расположение многообразий на плоскости (x, y) и, в конечном счете, влияет и на вид поверхности $T_\epsilon(x_0, y_0)$.

С увеличением значения управляющего параметра λ (при фиксированном значении второго управляющего параметра $b=0.1$) в пределах одного динамического режима - устойчивой неподвижной точки (x^0, y^0) - зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ начинает изменяться. Это связано, прежде всего, с изменением значений мультипликаторов $\mu_{1,2}$ точки (x^0, y^0) и взаимного расположения устойчивых и неустойчивых многообразий на плоскости (x, y) .

На рис. 5 приведена зависимость мультипликаторов $\mu_{1,2}$ неподвижной устойчивой точки от управляющего параметра λ при фиксированных значениях параметра $b=0.1$. Из рисунка видно, что в диапазоне значений параметра $0.9 < \lambda < 2.7$ значения мультипликаторов оказываются по модулю меньше единицы.

При значениях параметра $\lambda < 1.8$ важную роль в расположении устойчивых многообразий точки (x^0, y^0) и формировании вида поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ играет положительный мультипликатор μ_2 , характеризующийся большим значением абсолютной величины.

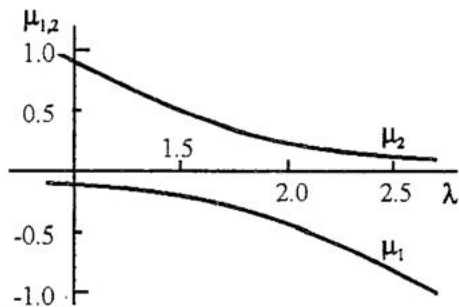


Рис. 5. Зависимость мультипликаторов неподвижной точки (x^0, y^0) от управляющего параметра λ при фиксированном значении параметра $b=0.1$

Следует отметить еще один важный момент: неустойчивое многообразие неустойчивой точки $(0, 0)$, принадлежащее бассейну притяжения аттрактора (x^0, y^0) , совпадает с «медленным» устойчивым многообразием, характеризующимся положительным мультипликатором μ_2 (см. рис. 4, б). Понимание механизма подобного поведения многообразий будет полезно в дальнейшем: любая точка начальных условий, принадлежащая неустойчивому многообразию точки $(0, 0)$ и

лежащая в бассейне притяжения устойчивой точки (x^0, y^0) , должна при последующем итерировании:

- по-прежнему принадлежать неустойчивому многообразию неустойчивой точки $(0,0)$;
- асимптотически стремиться к неподвижной точке (x^0, y^0) .

Из вышеперечисленных требований следует, что неустойчивое многообразие неустойчивой точки $(0,0)$ должно стремиться к устойчивой неподвижной точке (x^0, y^0) вдоль направления, определяемого собственным вектором $e_{1,2}$, соответствующим мультипликатору $\mu_{1,2}$, который имеет большее по модулю значение. Именно на это направление (следовательно, на «медленное» многообразие) «салятся» изображающие точки в малой окрестности точки (x^0, y^0) вследствие того, что второе направление характеризуется меньшим по абсолютной величине мультипликатором и, следовательно, в силу выражения (10), вдоль него все движения происходят быстрее.

В том случае, если два многообразия устойчивой и неустойчивой точек имеют одну общую точку, эти многообразия должны либо бесконечное число раз пересекаться друг с другом (касаться друг друга) [41], либо совпадать. Действительно, если два многообразия пересекаются в некоторой точке x , то точка $F(x)$, получающаяся на следующей итерации (точно так же, как и точка $F^{-1}(x)$, получающаяся при одной итерации в обратном времени), снова должна одновременно принадлежать этим двум многообразиям. Возможно также асимптотическое касание многообразий в особой точке. При значениях параметра $\lambda < 1.8$ оказывается, что эти многообразия совпадают.

При значении управляющего параметра $\lambda = \lambda_c = 1.8$ (управляющий параметр b по-прежнему равен 0.1) значения мультипликаторов сравниваются по модулю и выполняется соотношение $|\mu_1| = |\mu_2|$. В этом случае оба устойчивых многообразия устойчивой точки (x^0, y^0) оказываются равноправными: по обоим собственным направлениям, задаваемым собственными векторами $e_{1,2}$, скорости приближения изображающей точки к аттрактору становятся одинаковыми. Вследствие этого вид поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ изменяется (рис. 6, а): исчезают светлые линии, ассоциированные с «быстрым» устойчивым многообразием и зависимость длительности переходного

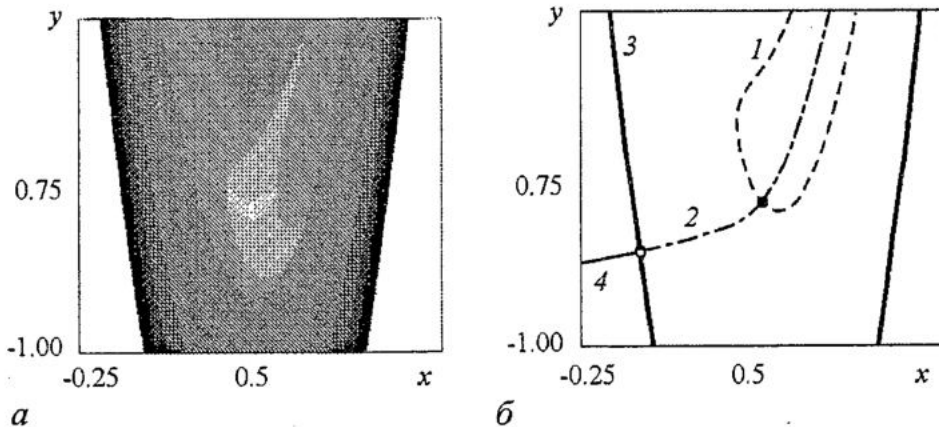


Рис. 6. а - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda = 1.8$, $b = 0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 20 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. б - Расположение многообразий неподвижных точек отображения Эно при тех же самых значениях управляющих параметров. Здесь $\mu_1 = -0.1^{1/2}$, $\mu_2 = +0.1^{1/2}$. Второе неустойчивое многообразие точки $(0,0)$ совпадает с устойчивым многообразием точки (x^0, y^0) , показанным штрихпунктиром

процесса от начальных условий становится более или менее однородной; лишь начальные условия, совпадающие с точностью ε с точкой аттрактора, характеризуются минимальной длительностью переходного процесса и показаны на рисунке светлой точкой (рис. 6, б).

При дальнейшем увеличении управляющего параметра λ отрицательный мультипликатор μ_1 становится по модулю больше положительного мультипликатора μ_2 , и многообразия «меняются ролями»: «быстрым» многообразием становится многообразие, характеризующееся мультипликатором μ_2 . Соответственно, светлые линии минимальных значений длительности переходных процессов располагаются уже вдоль многообразия, характеризующегося положительным мультипликатором μ_2 (рис. 7, а, б).

Одновременно, при превышении управляющим параметром λ значения λ_c происходит перестройка структуры многообразий неподвижных точек [42] на плоскости (x, y) , что, в свою очередь, влечет изменение характера поверхности зависимости длительности переходного процесса от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$. Как уже говорилось выше, неустойчивое многообразие неустойчивой точки $(0, 0)$ должно стремиться к устойчивой неподвижной точке (x^0, y^0) вдоль направления,

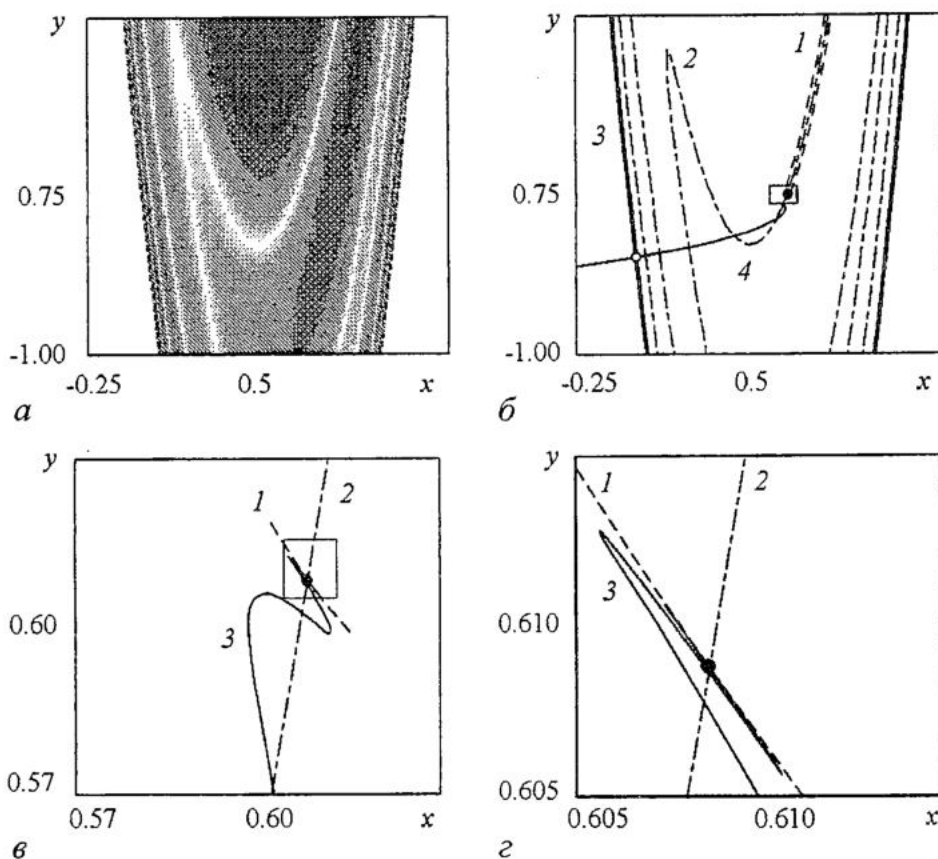


Рис. 7. а - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda=2.3$, $b=0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 50 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. б - Расположение многообразий неподвижных точек отображения Эно при тех же самых значениях управляющих параметров. Здесь $\mu_1=-0.6531$, $\mu_2=0.1531$. в - Увеличенный фрагмент рис. б: поведение неустойчивого многообразия точки $(0, 0)$ в окрестности неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) . г - Увеличенный фрагмент рис. в: поведение неустойчивого многообразия точки $(0, 0)$ в окрестности неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0)

определяемого собственным вектором e , соответствующим мультипликатору μ , который имеет большее по модулю значение (см. рис. 5 и комментарии к нему в тексте), в данном случае, вдоль устойчивого многообразия, характеризующегося мультипликатором μ_1 . В силу того, что мультипликатор μ_1 отрицателен, изображающая точка будет приближаться вдоль устойчивого многообразия к неподвижной точке (x^0, y^0) то с одной, то с другой стороны. Вследствие этого неустойчивое многообразие неподвижной точки $(0,0)$ будет бесконечное число раз пересекать устойчивое многообразие устойчивой точки (x^0, y^0) , соответствующее собственному вектору e_2 так, как это показано на рис. 7, в. Соответственно, и в окрестности неустойчивой точки $(0,0)$ эти многообразия должны бесконечное число раз пересекаться, при этом точки пересечения устойчивого многообразия точки (x^0, y^0) и неустойчивого многообразия точки $(0,0)$ должны накапливаться. Характер расположения точек пересечения в окрестности неподвижных точек $(0,0)$ и (x^0, y^0) определяется мультипликаторами этих точек, характеризующими рассматриваемые многообразия.

Таким образом, при значении управляющего параметра $\lambda_c < \lambda < 2.7$ и фиксированном значении $b=0.1$ устойчивое многообразие устойчивой неподвижной точки (x^0, y^0) , характеризующееся мультипликатором μ_2 , будет иметь сложный вид (см. рис. 7, б). Поскольку с многообразием, соответствующим большему по модулю мультипликатору, связаны точки начальных условий, в которых длительность переходного процесса минимальна, то и расположение светлых линий на проекции зависимости длительности переходного процесса от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ на плоскость (x, y) также будет иметь достаточно сложный вид (см. рис. 7, а), повторяющий расположение устойчивого многообразия точки (x^0, y^0) , характеризующегося положительным мультипликатором μ_2 (ср. рис. 7, а и б).

Итак, при изменении значений управляющих параметров в рамках одного динамического режима ($b=0.1, 0.9 < \lambda < 2.7$) при выполнении условия $|\mu_1| = |\mu_2|$ ($\mu_{1,2}$ - действительные) происходит бифуркация расщепления многообразий, связанная с тем, что многообразия устойчивой точки (x^0, y^0) фактически обмениваются ролями - «медленное» многообразие становится «быстрым» и наоборот. При этом на характер расположения многообразий оказывает влияние знак большего по модулю мультипликатора. Эта бифуркация приводит к качественной трансформации вида зависимости длительности переходных процессов от начальных условий.

Аналогичный механизм изменения расположения устойчивых и неустойчивых многообразий неподвижных точек на плоскости (x, y) , приводящий к изменению вида поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$, реализуется и в том случае, когда управляющие параметры системы меняются таким образом, что мультипликаторы притягивающей неподвижной точки (x^0, y^0) выходят на комплексную плоскость (область B на плоскости управляющих параметров, см. рис. 3).

Типичная зависимость значений мультипликаторов неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) от управляющего параметра λ при фиксированном значении второго параметра $b=-0.1$ приведена на рис. 8. При данном выборе значения управляющего параметра b , неподвижная точка (x^0, y^0) является устойчивой в диапазоне изменения управляющего параметра $1.1 < \lambda < 3.3$. При этом, как легко видеть из формулы (17), в диапазоне параметров $(2-2(-b)^{1/2}-2b) < \lambda < (2+2(-b)^{1/2}-2b)$ мультипликаторы $\mu_{1,2}$ являются комплексно-сопряженными.

Рассмотрим характер изменения зависимости вида поверхности $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ в случае, когда при варьировании управляющих параметров мультипликаторы $\mu_{1,2}$ выходят на комплексную плоскость. Зафиксируем значение управляющего

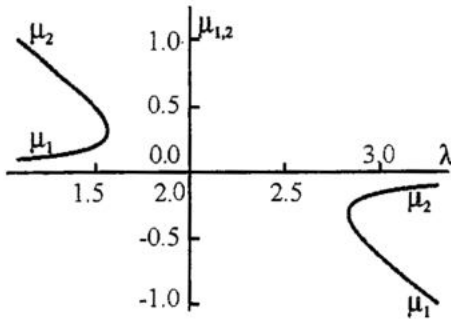


Рис. 8. Зависимость мультипликаторов неподвижной точки (x^0, y^0) от управляющего параметра λ при фиксированном значении параметра $b=-0.1$. Область разрыва соответствует значениям управляющих параметров, при которых мультипликаторы неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) являются комплексно-сопряженными (см. соотношение (17))

длительность переходного процесса минимальна, соответствует расположению устойчивого многообразия неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) , характеризующегося наименьшим по абсолютной величине мультипликатором, который в данном случае является положительным ($\mu_1=0.13$). В отличие от случая, приведенного на рис. 4, б ($\lambda=1.3, b=0.1$), неустойчивое многообразие неустойчивой точки $(0,0)$ и устойчивое многообразие устойчивой точки (x^0, y^0) , характеризующееся положительным мультипликатором μ_2 , не совпадают. Фактически, ситуации, приведенные на рис. 4 и 9 отличаются несколькими аспектами: во-первых, бассейн притяжения точки (x^0, y^0) оказывается «перевернутым» на рис. 9 по сравнению с рис. 4; во-вторых, для случая, приведенного на рис. 9, оба мультипликатора $\mu_{1,2}$ неподвижной устойчивой точки

параметра $b=-0.1$ и будем увеличивать параметр λ от величины 1.1, соответствующей касательной бифуркации ($\mu_2=+1$), до значения $\lambda=3.3$, когда неподвижная точка (x^0, y^0) теряет устойчивость и происходит бифуркация удвоения периода: мультипликатор μ_1 принимает значение -1 , в системе возникает устойчивый цикл периода два.

На рис. 9 приведен вид проекции на плоскость (x, y) зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ и расположение многообразий неподвижных точек на плоскости (x, y) при тех же самых значениях параметров. Видно, что ситуация во многом аналогична приведенной на рис. 4: расположение точек начальных условий, в которых

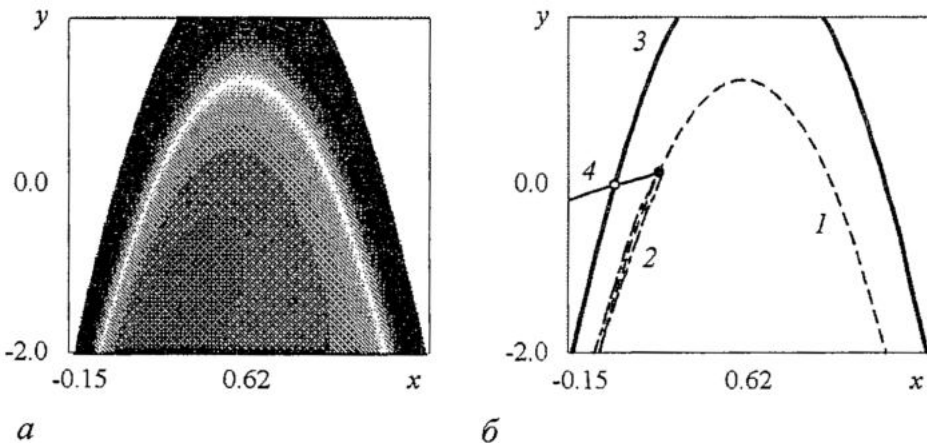


Рис. 9. а - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda=1.3, b=-0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 50 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. б - Расположение многообразий неподвижных точек отображения Эно при тех же самых значениях управляющих параметров. 1 - «быстрое» устойчивое многообразие неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) , соответствующее положительному мультипликатору $\mu_1=0.13$; 2 - второе устойчивое многообразие точки (x^0, y^0) , характеризующееся положительным мультипликатором $\mu_2=0.77$, «вытянуто» вдоль «быстрого» многообразия

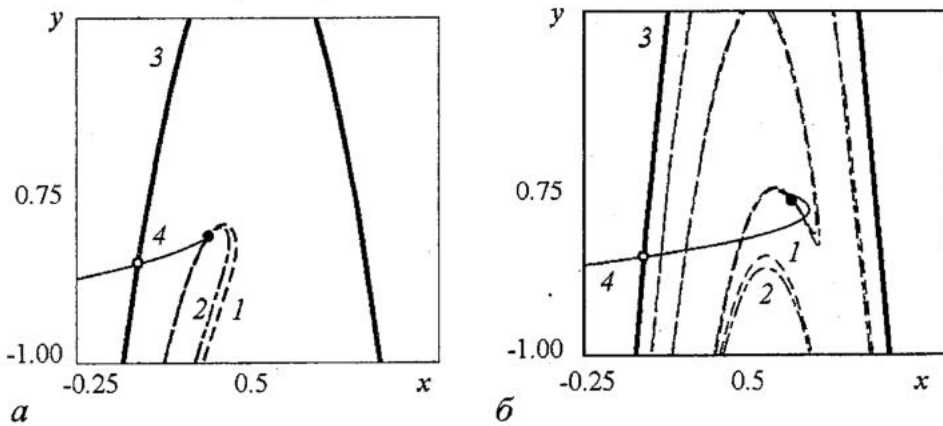


Рис. 10. Расположение многообразий неподвижных точек отображения Эно вблизи линий, на которых мультипликаторы устойчивой неподвижной точки (x^0, y^0) становятся комплексно-сопряженными. Значения управляющих параметров $b=0.1, \lambda=1.567$ (а), $\lambda=2.833$ (б)

(x^0, y^0) оказываются положительными, в отличие от случая, показанного на рис. 4, когда мультипликатор μ_1 являлся отрицательным; в-третьих, не совпадают неустойчивое многообразие неустойчивой точки $(0,0)$ и устойчивое многообразие устойчивой точки (x^0, y^0) .

С дальнейшим увеличением значения управляющего параметра λ ситуация (по сравнению со случаем $b=0.1$) изменяется: при достижении параметром λ значения $(2-2(-b)^{1/2}-2b)$ мультипликаторы $\mu_{1,2}$ неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) сравниваются друг с другом и выходят на комплексную плоскость, становясь комплексно-сопряженными. При этом, как видно из рис. 10, а, в момент выхода мультипликаторов на комплексную плоскость устойчивые многообразия точки (x^0, y^0) сливаются друг с другом и исчезают, что влечет за собой изменение вида поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$. В то же самое время, многообразия неустойчивой точки $(0,0)$ не претерпевают существенных изменений. При дальнейшем увеличении управляющего параметра λ мультипликаторы $\mu_{1,2}$ обходят начало координат по окружности радиуса $b^{1/2}$. В этом случае для комплексно-сопряженных мультипликаторов точки (x^0, y^0) поверхность $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ будет иметь глобальный минимум, совпадающий с неподвижной устойчивой точкой (x_0, y_0) , и никаких других точек минимума не будет (рис.11, а).

После достижения параметром λ значения $(2+2(-b)^{1/2}-2b)$ мультипликаторы $\mu_{1,2}$ снова становятся действительными (рис. 10, б), но теперь они оба отрицательные (см. рис. 8). На плоскости (x, y) вновь возникают устойчивые многообразия неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) , при этом, как и раньше, точки начальных условий, принадлежащие «быстрому» многообразию (которое характеризуется наименьшим по абсолютной величине мультипликатором μ_2), соответствуют минимальным по длительности переходным процессам (рис. 12, а). Точно так же, как и для случая $b=0.1$ (в силу причин, описанных ранее), «быстрое» многообразие, характеризующееся мультипликатором μ_2 и собственным вектором e_2 , будет бесконечное число раз пересекаться с неустойчивым многообразием неустойчивой точки $(0,0)$ (рис. 12, б). Вследствие этого, зависимость длительности переходного процесса от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ при $(2+2(-b)^{1/2}-2b) < \lambda < 3(1-b)$ будет иметь более сложный вид, нежели при $(1-b) < \lambda < (2-2(-b)^{1/2}-2b)$. Отличием в усложнении вида зависимости $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ является то, что при положительных значениях параметра b изменение характера расположения многообразий на плоскости (x, y) происходит при $\lambda=2(1-b)$, в то время как при отрицательных b происходящее усложнение носит «распределенный» по плоскости параметров (b, λ)

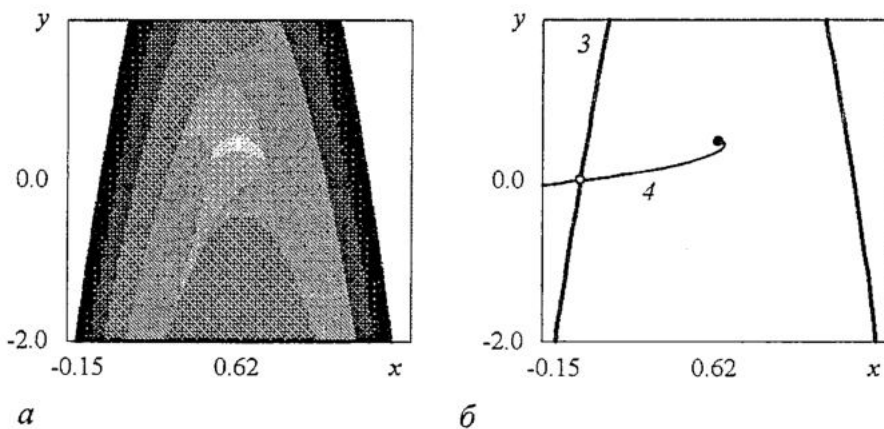


Рис. 11. *а* - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_{\varepsilon}(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda=2.2, b=-0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 20 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. Значения управляющих параметров таковы, что мультипликаторы неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) оказываются комплексно-сопряженными $\mu_{1,2} = \pm i 0.316$. В данном случае на плоскости (x, y) не существует многообразий неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) . *б* - Расположение параметров в тех же самых значениях управляющих параметров

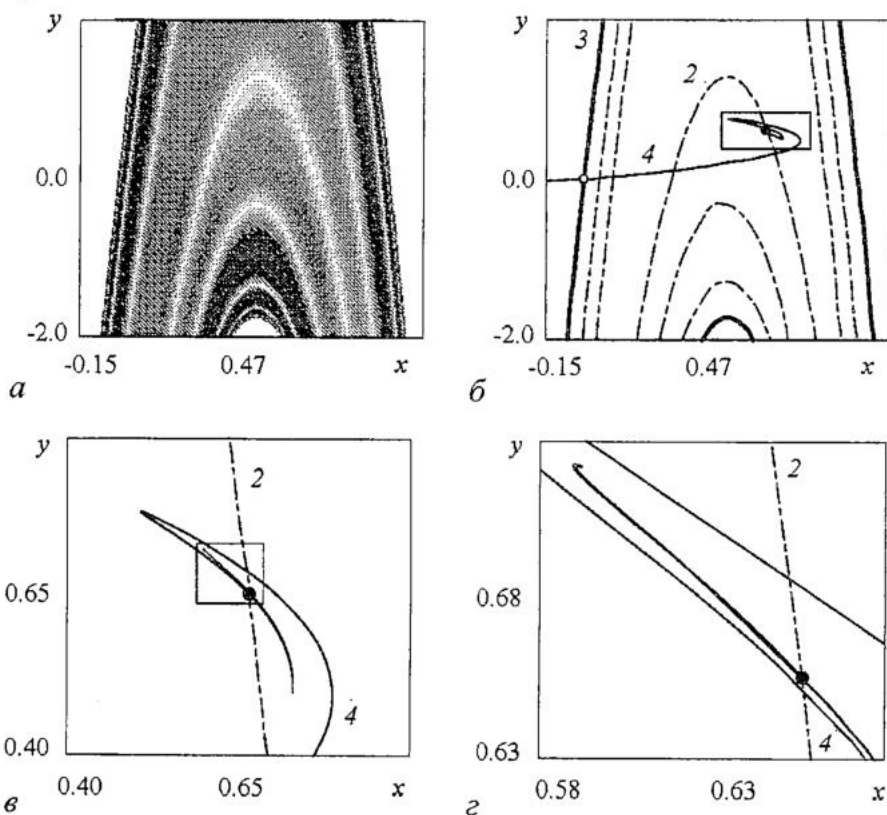


Рис. 12. *а* - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_{\varepsilon}(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda=3.2, b=-0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 100 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. *б* - Расположение многообразий неподвижных точек отображения Эно при тех же самых значениях управляющих параметров. 2 - «быстрое» устойчивое многообразие точки (x^0, y^0) , характеризующееся отрицательным мультипликатором $\mu_2 = -0.113$. *в* - Увеличенный фрагмент рис. *б*, иллюстрирующий поведение многообразий в окрестности неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) . *г* - Увеличенный фрагмент рис. *а*, иллюстрирующий поведение многообразий в окрестности неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0)

характер, связанный с тем, что мультипликаторы $\mu_{1,2}$ неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) становятся при определенных значениях управляющих параметров комплексно-сопряженными. Можно сказать, что при $b < 0$ усложнение характера зависимости длительности переходных процессов от начальных условий происходит на границе $\lambda = (2 \mp 2(-b)^{1/2} - 2b)$ выхода мультипликаторов на комплексную плоскость.

Таким образом, из всего вышеизложенного можно сделать вывод, что усложнение зависимости длительности переходного процесса от начальных условий имеет место при изменении управляющих параметров в рамках одного динамического режима, что связано с качественным изменением расположения многообразий устойчивой и неустойчивой точек отображения. Понятно, что при бифуркациях, приводящих к тому, что в системе реализуются другие динамические режимы, также меняется и характер зависимости длительности переходных процессов. Вопрос о том, как будет отражаться произошедшая бифуркация на характере зависимости длительности переходных процессов от начальных условий, обсуждается ниже.

Циклы периода два и выше. При $\lambda = 3(1-b)$ в отображении Эно (1) происходит бифуркация удвоения периода: мультипликатор μ_1 неподвижной точки (x^0, y^0) становится равным минус единице, точка (x^0, y^0) теряет устойчивость, и одновременно в системе возникает цикл периода два, являющийся устойчивым при $3(1-b) < \lambda < 1-b + (6-8b+6b^2)^{1/2}$, элементами которого являются точки (x_1^{2c}, y_1^{2c}) и (x_2^{2c}, y_2^{2c}) :

$$\begin{aligned} x_1^{2c} &= \{1 + \lambda - b + [\lambda^2 + 2\lambda(b-1) - 3(b-1)^2]^{1/2}\} / (2\lambda), \\ y_1^{2c} &= -\{-1 - \lambda + b + [\lambda^2 + 2\lambda(b-1) - 3(b-1)^2]^{1/2}\} / (2\lambda), \\ x_2^{2c} &= -\{-1 - \lambda + b + [\lambda^2 + 2\lambda(b-1) - 3(b-1)^2]^{1/2}\} / (2\lambda), \\ y_2^{2c} &= \{1 + \lambda - b + [\lambda^2 + 2\lambda(b-1) - 3(b-1)^2]^{1/2}\} / (2\lambda). \end{aligned} \quad (19)$$

Цикл периода два характеризуется мультипликаторами

$$\begin{aligned} \mu_1^{2c} &= [4 - \lambda^2 + 2\lambda(1-b) - 6b + 4b^2] / 2 - [-4b^2 + (-4 + \lambda^2 + 2\lambda(b-1) + 6b - 4b^2)^2]^{1/2} / 2, \\ \mu_2^{2c} &= [4 - \lambda^2 + 2\lambda(1-b) - 6b + 4b^2] / 2 + [-4b^2 + (-4 + \lambda^2 + 2\lambda(b-1) + 6b - 4b^2)^2]^{1/2} / 2. \end{aligned} \quad (20)$$

С возникновением в системе устойчивого цикла периода два вид зависимости длительности переходных процессов от начальных условий принципиально изменяется (рис. 13, а): на плоскости (x, y) появляются ярко выраженные линии, отвечающие максимумам длительности переходных процессов. В силу произошедшей бифуркации удвоения периода наибольший по абсолютной величине отрицательный мультипликатор μ_1 неподвижной точки (x^0, y^0) становится по модулю больше единицы, а следовательно, ассоциированное с ним (до момента бифуркации «медленное») многообразие перестает быть устойчивым и превращается в неустойчивое многообразие. Второе многообразие, бывшее ранее «быстрым» и характеризующееся мультипликатором μ_2 , по-прежнему остается устойчивым многообразием, но уже неустойчивой точки (x^0, y^0) . Именно это многообразие соответствует максимальным по длительности переходным процессам. Это связано с тем, что изображающая точка, лежащая вблизи устойчивого многообразия неустойчивой точки, долгое время движется вдоль него к точке (x^0, y^0) до тех пор, пока не покинет окрестность этого многообразия в силу движения вдоль второго (неустойчивого) направления, характеризующегося

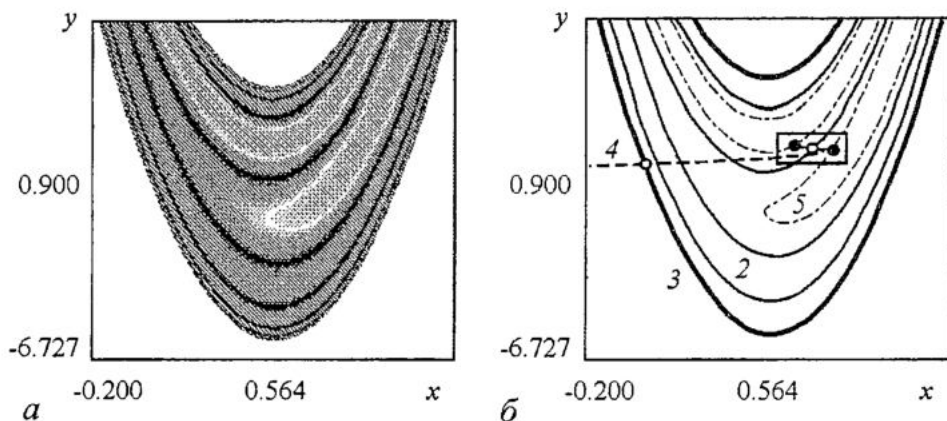


Рис. 13. *а* - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda=2.75, b=0.1$, при которых в системе реализуется устойчивый цикл периода два. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 200 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. Светло-серый цвет точек вне бассейна притяжения цикла периода два соответствует начальным условиям, имеющим аттрактор на бесконечности. *б* - Расположение многообразий неподвижных точек и цикла периода два отображения Эно при тех же самых значениях управляющих параметров. Мультипликаторы цикла периода два: $\mu_1^{2c}=0.0123$ и $\mu_2^{2c}=0.815$. Жирной сплошной линией 3, как и ранее, схематически показано устойчивое многообразие неподвижной неустойчивой точки $(0,0)$. Штриховой линией 4 - неустойчивое многообразие этой же точки. Тонкой сплошной линией 2 показано устойчивое многообразие неподвижной неустойчивой точки (x^0, y^0) . Вторая тонкая сплошная линия, проходящая через неподвижную неустойчивую точку (x^0, y^0) и элементы цикла периода два (черные кружки), является неустойчивым многообразием точки (x^0, y^0) . Штрихпунктирными линиями 5 показано устойчивое многообразие цикла периода два, характеризующееся наименьшим по модулю мультипликатором μ_1^{2c}

мультипликатором μ_1 . Рис. 14 иллюстрирует расположение устойчивых и неустойчивых многообразий в окрестности устойчивого цикла периода два.

Возникший в результате бифуркации удвоения периода на линии $\lambda=3(1-b)$ устойчивый цикл периода два имеет действительные мультипликаторы $\mu_2^{2c}=1$ и $\mu_1^{2c}=b^2$ и ассоциированные с этими мультипликаторами многообразия (рис. 13, б). При этом многообразии, соответствующее мультипликатору μ_2^{2c} , является «медленным», а второе многообразии, соответствующее μ_1^{2c} , - «быстрым». Минимальные по длительности переходные процессы реализуются в точках начальных условий, принадлежащих «быстрому» устойчивому многообразию

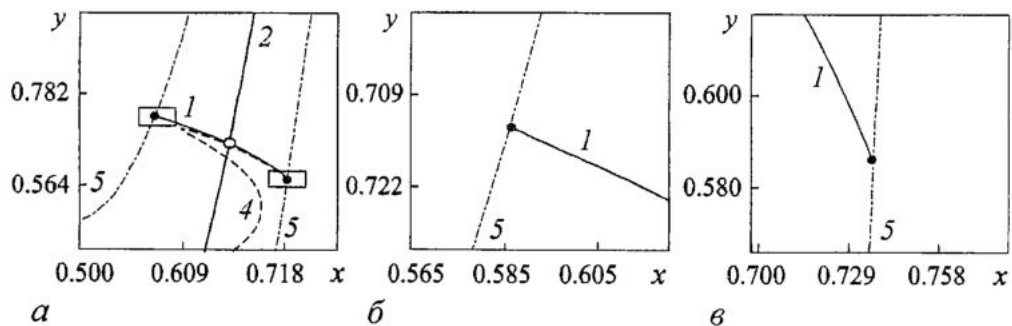


Рис. 14. *а* - Увеличенный фрагмент рис. 13, б показывающий расположение многообразий неустойчивой неподвижной точки (x^0, y^0) и устойчивого цикла периода два. Тонкой сплошной линией 1 показано неустойчивое многообразие точки $(0,0)$, характеризующееся отрицательным мультипликатором μ_1 . *б, в* - Увеличенные фрагменты рис. *а*, иллюстрирующие расположение многообразий в окрестности элементов цикла периода два

цикла периода два. На проекции поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий на плоскость (x, y) эти минимумы выглядят как светлые линии (см. рис. 13).

С увеличением параметра λ мультипликаторы устойчивого цикла периода два становятся комплексно-сопряженными на линиях $\lambda=(1+5^{1/2})(b-1)$ и $\lambda=1-b+(5b^2-6b+5)^{1/2}$ (области E и F на рис. 3). Зависимость значений мультипликаторов устойчивого цикла периода два μ_1^{2c} и μ_2^{2c} от управляющего параметра λ при фиксированном значении параметра $b=0.1$ приведена на рис. 15.

Комплексные значения мультипликаторов (при $2.91246 < \lambda < 3.0095$) образуют на рис. 15 область разрыва. При значениях параметра $\lambda = 2.91246$ и $\lambda=3.0095$, соответствующих границам области разрыва, значения мультипликаторов μ_1^{2c} и μ_2^{2c} совпадают. Из рис. 15 видно, что при $\lambda < 2.91246$ мультипликатор μ_1^{2c} , принимающий положительные значения, близкие к нулю, с увеличением значения параметра λ возрастает и стремится к 0.1. В то же самое время мультипликатор μ_2^{2c} принимает положительные значения, начиная с 1.0, и с ростом λ уменьшается, стремясь к тому же значению 0.1. Таким образом, в рассматриваемой области значений $2.7 < \lambda < 2.91246$, мультипликатор μ_1^{2c} меньше по модулю мультипликатора μ_2^{2c} . После области разрыва в точке $\lambda=3.0095$ значения мультипликаторов μ_1^{2c} и μ_2^{2c} равны -0.1. При $\lambda > 3.0095$ наименьшим по абсолютному значению становится мультипликатор μ_2^{2c} . Мультипликатор μ_1^{2c} при увеличении параметра λ от 3.0095 до 3.1935 стремится к -1.0. Для области $2.91246 < \lambda < 3.0095$ мультипликаторы μ_1^{2c} и

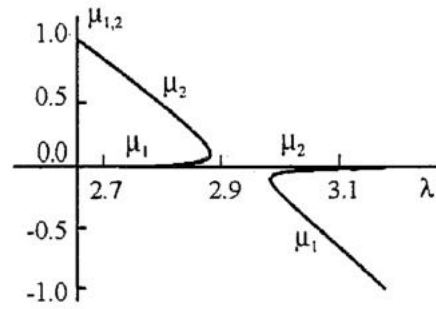


Рис. 15. Зависимость мультипликаторов цикла периода два отображения Эно от управляющего параметра λ при фиксированном значении параметра $b=0.1$

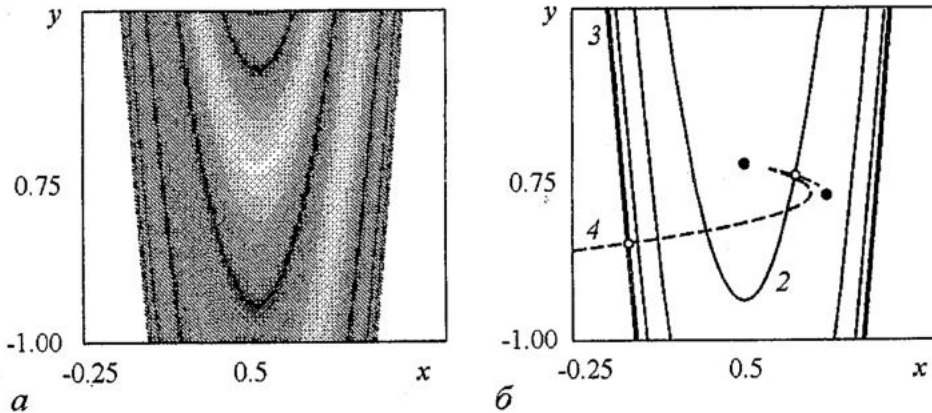


Рис. 16. а - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_e(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda=2.95$, $b=0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 40 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. Мультипликаторы устойчивого цикла периода два комплексно-сопряженные $\mu_{1,2}^{2c}=0.0237 \pm i0.1$. На плоскости (x, y) не существует многообразий устойчивого цикла периода два. б - Расположение многообразий неподвижных неустойчивых точек (черные точки - элементы устойчивого цикла периода два, светлые - неустойчивые точки) при тех же самых значениях управляющих параметров. Жирная сплошная линия 3, формирующая границу бассейна притяжения аттрактора (x^0, y^0) , соответствует устойчивому многообразию неустойчивой неподвижной точки $(0,0)$. Штриховая линия 4 соответствует неустойчивому многообразию неустойчивой неподвижной точки $(0,0)$. Тонкая сплошная линия 2 отвечает устойчивому многообразию неустойчивой точки (x^0, y^0)

μ_2^{2c} являются комплексно-сопряженными и удовлетворяют соотношению $|\mu_1^{2c}| = |\mu_2^{2c}|$.

Механизм усложнения зависимости длительности переходного процесса от начальных условий для цикла периода два остается таким же, как и описанный выше для неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) в случае прохождения мультипликаторов через комплексную область (ср. рис. 11, а и 16, а). При значениях управляющих параметров, соответствующих комплексно-сопряженным мультипликаторам $\mu_{1,2}^{2c}$ цикла периода два, его устойчивые многообразия исчезают, а неустойчивое многообразие точки (x^0, y^0) «наматывается» на элементы цикла периода два (рис. 16, б) также, как раньше (см. рис. 11, б) неустойчивое многообразие точки $(0,0)$ «наматывалось» на устойчивую точку (x^0, y^0) . В силу этого, зависимость длительности переходных процессов от начальных условий имеет два ярко выраженных минимума, совпадающих с элементами устойчивого цикла периода два. Максимальная длительность переходных процессов по-прежнему соответствует начальным условиям, принадлежащим устойчивому многообразию неустойчивой точки (x^0, y^0) .

При $\lambda > 3.0095$ (рис. 17) вид зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ усложняется подобно тому, как это происходило для неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) (см. рис. 7 и 12), что выражается в появлении бесконечного числа минимумов поверхности $T_\varepsilon(x_0, y_0)$, накапливающихся к устойчивому многообразию неустойчивого цикла периода один.

Данный эффект связан с усложнением структуры расположения многообразий. Устойчивое многообразие неустойчивой точки $(0,0)$, как и раньше, образует границу бассейна притяжения аттрактора. Неустойчивое многообразие неустойчивой точки $(0,0)$ асимптотически стремится к неустойчивой неподвижной

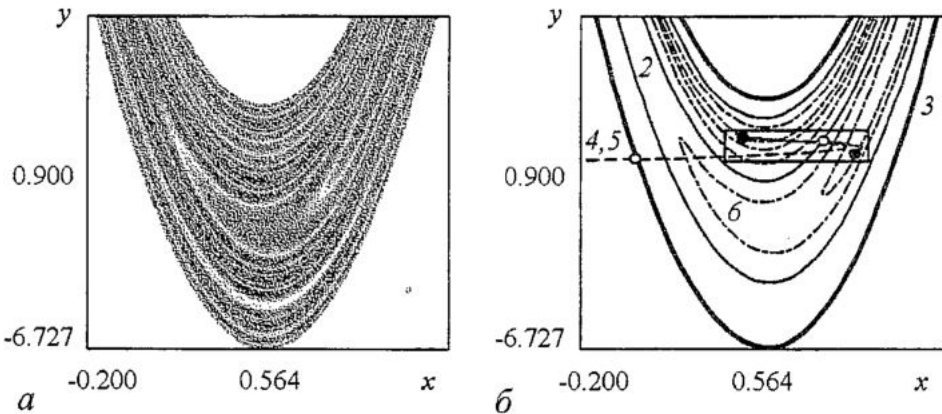


Рис. 17. а - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ для значений управляющих параметров $\lambda=3.16, b=0.1$, при которых в системе реализуется устойчивый цикл периода два. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 200 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. Светло-серый цвет точек вне бассейна притяжения цикла периода два соответствует начальным условиям, имеющим аттрактор на бесконечности. б - Расположение многообразий неподвижных точек и цикла периода два отображения Эно при тех же самых значениях управляющих параметров. Здесь $\mu_1^{2c} = -0.846$ и $\mu_2^{2c} = -0.012$. Линии 2-4 означают то же, что и на рис. 16, б. Вторая тонкая сплошная линия, проходящая через неподвижную неустойчивую точку (x^0, y^0) - светлый кружок и элементы цикла периода два - черные кружки, является неустойчивым многообразием точки (x^0, y^0) . Штрихпунктирными линиями б показано устойчивое многообразие цикла периода два, характеризующееся наименьшим по модулю мультипликатором μ_2^{2c} . Устойчивое многообразие цикла периода два, характеризующееся мультипликатором μ_1^{2c} , совпадает с неустойчивым многообразием неустойчивой неподвижной точки $(0,0)$ и обозначено штриховой линией 5

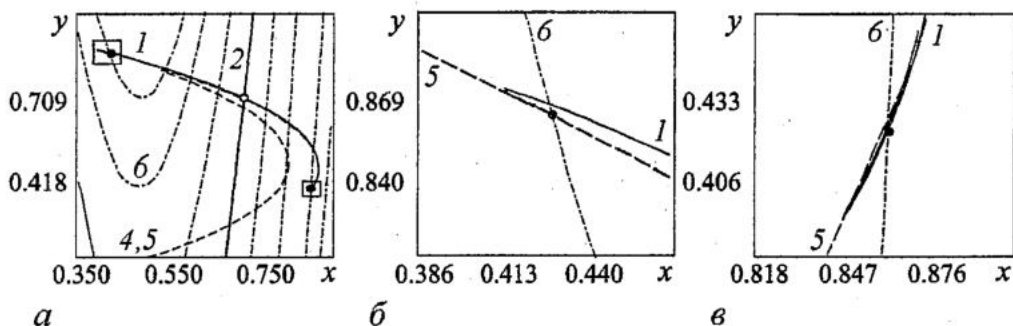


Рис. 18. *а* - Увеличенный фрагмент рис. 17, *б* показывающий расположение многообразий неустойчивой неподвижной точки (x^0, y^0) и устойчивого цикла периода два. Тонкой сплошной линией *1* показано неустойчивое многообразие неустойчивой точки (x^0, y^0) , характеризующееся отрицательным мультипликатором μ_1 . *б, в* - Увеличенные фрагменты рис. *а*, иллюстрирующие расположение устойчивых многообразий в окрестности элементов цикла периода два. Штриховой линией *5* показано устойчивое многообразие цикла периода два, характеризующееся мультипликатором μ_1^{2c}

точке (x^0, y^0) вдоль неустойчивого многообразия неустойчивой неподвижной точки (x^0, y^0) и не оказывает значительного влияния на характер зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_e(x_0, y_0)$. В силу того, что неустойчивое многообразие точки $(0,0)$ бесконечное число раз пересекает устойчивое многообразие точки (x^0, y^0) в ее окрестности, устойчивое многообразие неустойчивой точки (x^0, y^0) также бесконечное число раз пересекает неустойчивое многообразие точки $(0,0)$ в окрестности этой точки. Как уже говорилось выше, устойчивому многообразию точки (x^0, y^0) на проекции поверхности $T_e(x_0, y_0)$ на плоскость начальных условий (x_0, y_0) соответствуют максимумы длительности переходных процессов (темная линия на рис. 17, *а*).

Неустойчивое многообразие неустойчивой точки (x^0, y^0) стремится к каждому из элементов устойчивого цикла периода два (см. формулу (19)) по направлению устойчивого многообразия цикла периода два, которое характеризуется большим по модулю мультипликатором, то есть тому, по которому осуществляется более медленная сходимость к аттрактору (см. рис. 14 и 18). При значениях управляющего параметра $2.7 < \lambda < 2.91246$ поведение неустойчивого многообразия неустойчивой точки (x^0, y^0) вблизи каждого из элементов устойчивого цикла периода два обуславливается мультипликатором μ_2^{2c} , а при $3.0095 < \lambda < 3.1935$ - мультипликатором μ_1^{2c} .

Как видно из рис. 15, при $2.7 < \lambda < 2.91246$ ($b=0.1$) мультипликаторы μ_1^{2c} и μ_2^{2c} являются положительными, а при $3.0095 < \lambda < 3.1935$ мультипликаторы принимают отрицательные значения. Таким образом, при $3.0095 < \lambda < 3.1935$ неустойчивое многообразие точки (x^0, y^0) бесконечное число раз пересекает устойчивые многообразия устойчивого цикла периода два, характеризующиеся отрицательными мультипликаторами, «наматываясь» на неподвижную точку. Как следствие, в окрестности неустойчивой точки (x^0, y^0) «быстрое» устойчивое многообразие цикла периода два, характеризующееся наименьшим по модулю мультипликатором μ_1^{2c} , также бесконечное число раз пересекает неустойчивое многообразие неустойчивой точки (x^0, y^0) , что приводит к появлению бесконечного числа минимумов на проекции поверхности $T_e(x_0, y_0)$ (см. рис. 17, *б*).

Аналогичный механизм приводит к усложнению характера зависимости длительности переходных процессов от начальных условий в рамках одного динамического режима для циклов периода четыре, восемь и т.д. На рис. 19 показано усложнение зависимости длительности переходного процесса от начальных условий $T_e(x_0, y_0)$ в рамках одного режима - устойчивого цикла периода

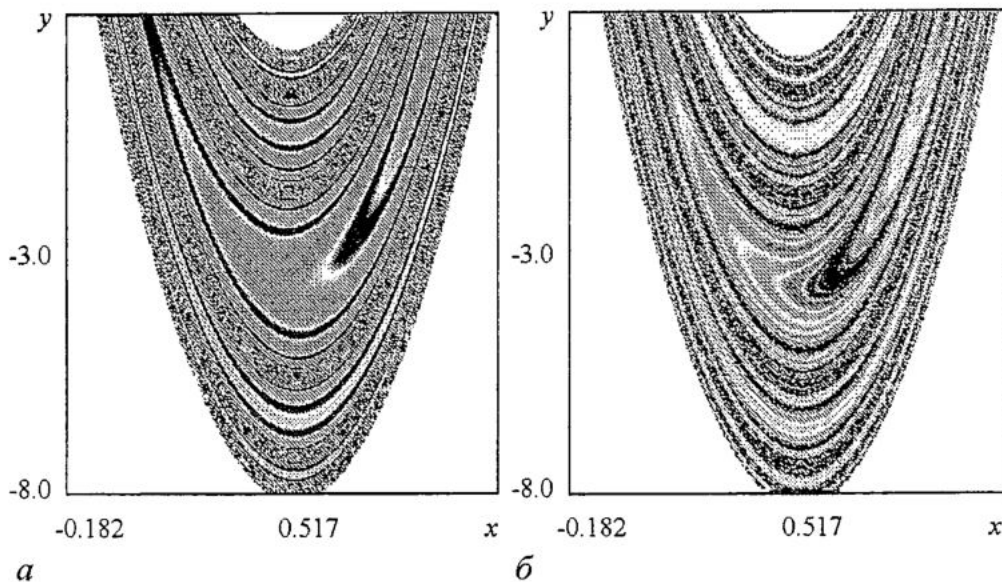


Рис. 19. Усложнение зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_e(x_0, y_0)$ для значений управляющих параметров, при которых в системе реализуется устойчивый цикл периода четыре: а - $\lambda=3.198$, $b=0.1$; б - $\lambda=3.27$, $b=0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 200 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. Светло-серый цвет точек вне бассейна притяжения периодического аттрактора соответствует начальным условиям, имеющим аттрактор на бесконечности

четыре. Видно, что, как и ранее для устойчивых циклов периода один и два, с увеличением управляющего параметра λ происходит увеличение числа минимумов длительности, связанное с усложнением структуры многообразий периодических циклов.

Выводы

Итак, переходные процессы минимальной длительности в динамических системах с дискретным временем соответствуют начальным условиям (x_0, y_0) , принадлежащим устойчивому многообразию устойчивого цикла, которое характеризуется наименьшим по модулю мультипликатором («быстрому» многообразию). При этом значения мультипликаторов должны быть действительными. Второе многообразие, характеризующееся большим по модулю мультипликатором («медленное» многообразие), не играет видимой роли в формировании структуры зависимости длительности переходных процессов от времени. Однако вдоль этого многообразия в окрестности элементов устойчивого цикла проходит неустойчивое многообразие неустойчивого цикла. В тот момент, когда при изменении управляющих параметров (в рамках одного динамического режима) наибольший по модулю мультипликатор устойчивого цикла становится отрицательным, происходит перестройка и усложнение структуры поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий. При этом подобное усложнение, связанное с «обменом ролями» мультипликаторов, может быть обусловлено как выходом значений мультипликаторов в комплексную плоскость, (например, для циклов периода два, четыре и т.д. отображения Эно), так и одновременным ростом/уменьшением значений мультипликаторов, остающихся действительными (например, для неподвижной устойчивой точки [41]).

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты 01-02-17392 и 02-02-16351).

Библиографический список

1. *Venkatesan A. and Lakshmanan M.* Different routes to chaos via strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced system // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58, № 3. P. 3008.
2. *Depassier M.C., Mura J.* Variational approach to a class of nonlinear oscillators with several limit cycles // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. 056217.
3. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть 1: Сценарий Фейгенбаума // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1993. Том 1, № 1,2. С. 15.
4. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть 2. Двухпараметрический переход к хаосу // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1993. Том 1, № 3,4. С. 17.
5. *Кузнецов А.П., Савин А.В.* О проблеме границы хаоса и типичных структурах на плоскости параметров неавтономных дискретных отображений с удвоениями периода // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2000. Том 8, № 4. С. 25.
6. *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Влияние внешнего сигнала на автоколебания распределенной системы винтовой электронный пучок - встречная электромагнитная волна // *Известия вузов. Радиофизика.* 2002. Том XLV, № 9. С. 773.
7. *Кальянов Э.В.* Переходные процессы в автостохастическом генераторе с запаздыванием // *Письма в ЖТФ.* 2000. Том 26, № 15. С. 26.
8. *Bezruchko B.P., Dikanev T.V., Smirnov D.A.* Role of transient processes for reconstruction of model equations from time series // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. 036210.
9. *Безручко Б.П., Диканев Т.В., Смирнов Д.А.* Глобальная реконструкция уравнений динамической системы по временной реализации переходного процесса // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2001. Том 9, № 3. С. 3.
10. *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е.* Универсальные скейлинговые закономерности переходных процессов // *Докл. РАН.* 2002. Том 383, № 3. С. 322.
11. *Pisarchik A.N.* Controlling the multistability of nonlinear systems with coexisting attractors // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. 046203.
12. *Morua A.P.S., Grebogi C.* Output functions and fractal dimensions in dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86, № 13. P. 2778.
13. *Janosi I.M. and Tél T.* Time-series analysis of transient chaos // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, № 4. P. 2756.
14. *Dhamala M., Lai Y.-C., and Kostelich E.J.* Detecting unstable periodic orbits from transient chaotic time series // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 61, № 6. P. 6485.
15. *Dhalama M., Lai Y.-C., Kostelich E.J.* Analyses of transient chaotic time series // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. 056207.
16. *Zhu L., Raghu A., Lai Y.-C.* Experimental observation of superpersistent chaotic transients // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86, № 18. P. 4017.
17. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Chaotic attractors in crisis // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 48, № 22. P. 1507.
18. *Grebogi C., Ott E., Romeiras F., Yorke J.A.* Critical exponents for crisis-induced intermittency // *Phys. Rev. A.* 1987. Vol. 36, № 11. P. 5365.
19. *Szabó K.G., Lai Y.-C., Tél T., Grebogi C.* Topological scaling and gap filling at crisis // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 61, № 5. P. 5019.
20. *Stewart H.B., Ueda Y.* Double crisis in two-parameter dynamical system // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, № 13. P. 2478.

21. *Gallas J.A.C., Grebogi C., Yorke J.A.* Vertices in parameter space: double crisis which destroy chaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71, № 9. P. 1359.
22. *Meucci R., Gadamski W., Ciofini M., Arecchi F.T.* Transient statistics in stabilizing periodic orbit // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, № 5.
23. *Aston P.J., Marriot P.K.* Waiting time paradox applied to transient times // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 57, № 1. P. 1181.
24. *Paar V., Buljan H.* Bursts in the chaotic trajectory lifetimes preceding controlled periodic motion // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 4. P. 4869.
25. *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е.* Универсальные закономерности переходных процессов // *Известия вузов. Радиофизика.* 2002. Том XLV, № 10. С. 880.
26. *Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова И.А.* Средняя длительность переходных процессов в динамических системах с дискретным временем // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2003. Том 11, № 1.
27. *Hénon M.* On the numerical computation of Poincaré maps // *Physica D.* 1982 Vol. 5. P. 412.
28. *Kaufmann Z., Lustfeld H.* Comparison of averages of flows and maps // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. 055206(R).
29. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Commun. Math. Phys.* 1976. Vol. 50. P. 69.
30. *Хенон М.* Двумерное отображение со странным аттрактором // *Странные аттракторы / под ред. Л.П. Шильникова и Я.Г. Синая.* М.: Мир, 1981. С. 152.
31. *Короновский А.А., Стародубов А.В., Храмов А.Е.* Методика определения длительности переходного процесса для динамической системы с дискретным временем, находящейся в режиме хаотических колебаний // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2002. Том 10, № 5. С. 25.
32. *Короновский А.А., Стародубов А.В., Храмов А.Е.* Методика определения длительности переходного процесса для динамических систем, находящихся в режиме хаотических колебаний // *Письма в ЖТФ.* 2003. Том 29, № 8. С. 32.
33. *Анищенко В.С.* Аттракторы динамических систем // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Том 5, № 1. С. 109.
34. *Ефимов Н.В.* Квадратичные формы и матрицы. М.: Физматгиз, 1963.
35. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1967.
36. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Fractal basin boundaries, long lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50, № 13. P. 935.
37. *Grebogi C., Ott E., and Yorke J.A.* Metamorphoses of basin boundaries in nonlinear dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56, № 10. P. 1011.
38. *Parker T.S., Chua L.O.* Practical numerical algorithms for chaotic systems. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
39. *You Z.P., Kostelich E.J., Yorke J.A.* Calculating stable and unstable manifolds // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1991. Vol. 1, № 1. P. 605.
40. *Kostelich E.J., Yorke J.A., You Z.* Plotting stable manifolds: error estimates and noninvertible maps // *Physica D.* 1996. Vol. 93. P. 210.
41. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
42. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Изменение зависимости длительности переходных процессов от начальных условий в системах с дискретным временем // *Письма в ЖТФ.* 2002. Vol. 28, № 15. P. 61.

TRANSIENT PROCESSES IN HÉNON MAP

Part I. Periodical dynamics

G.B. Astafyev, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov, A.E. Khramova

In this paper we analyze the transient processes in two-dimensional dynamical system with discrete time (Hénon map) demonstrating periodical oscillations. The method of calculation of the transient process duration and its dependence on the accuracy of determination of the process and on the initial conditions is considered. Mechanisms leading to complication of this dependence are revealed. In the second part of the work we plan to consider the dependence of the mean duration of the transient process when controlling parameters change.



Астафьев Геннадий Борисович - родился в Саратове (1980). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2002). Ассистент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика. Автор ряда статей в центральной печати.



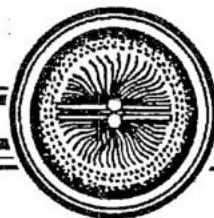
Короновский Алексей Александрович - родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), кандидат физико-математических наук (1997). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Соавтор монографий «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж». Автор ряда статей в центральной печати.



Храмов Александр Евгеньевич - окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика (1999). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов - радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал в соавторстве с чл.-корр. РАН, профессором Д.И. Трубецковым книгу «Лекции по сверхвысоко-частотной электронике для физиков» Том 1 (Москва: Наука, Физматлит, 2003) и в соавторстве с доцентом А.А. Короновским монографии «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003) и «Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ, 2002).



Храмова Анастасия Евгеньевна - родилась в Саратове (1983). Студентка четвертого курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Область научных интересов - нелинейная динамика.



Изв. вузов «ПНД», т.11, № 4-5, 2003

STOCHASTIC DYNAMICS OF REACTING BIOMOLECULES

by *W. Ebeling, L. Schimansky-Geier & Yu. Romanovsky, eds*

Professor Werner Ebeling
Collaborative Research Center
«Nonlinear Complex Processes», Berlin, Germany

Professor Lutz Schimansky-Geier
Humboldt University, Berlin, Germany

Full Professor Yu.M. Romanovsky
Lomonosov University, Russia

© World Scientific Publishing Co., 2003

Preface

This book is about the physical processes in reacting complex molecules, in particular in biomolecules. In the last decade scientists from different fields as medicine, biology, chemistry, and physics collected a huge amount of data about the structure, the dynamics and the functioning of biomolecules. Great progress has been achieved in exploring the structure of complex molecules. The knowledge of the structure of complex molecules is of course a 'conditio sine qua non' for the understanding of their functioning, however the understanding of the dynamics is as important. Without a deep analysis of the physical mechanisms of the dynamics it seems to be impossible to understand the all details of the functioning of biological macromolecules. In particular this refers to the functioning of enzymes, which are the basic molecular machines working in living systems. Since this molecules operate on many thousands of degrees of freedom we have to start to analyse the physical mechanisms e.g. the dynamics of clusters consisting of a many atomic units. Further we have to study the dynamics of conformations, the dynamics of transitions between conformations etc. In order to give an example, we want to understand the dynamics and the physical mechanism of enzyme-catalyzed bond breaking in substrate molecules. In particular we want to find out what determines the high rate of bond breaking in complex molecules. However to explore the dynamics of this or other complex processes we have to pay a price, only very simple structures allow a investigation of the dynamical phenomena. This is why we have to restrict our studies to rather simple models. In this context we will analyse simple

mechanisms as the transitions between two potential wells, the nonlinear coupling between oscillatory modes, the Fermi resonance, the excitation of solitons in chains of nonlinear springs etc.

The analysis of the complex processes developed in this book is based on methods of nonlinear dynamics, stochastics and molecular dynamics. We start from the classical stochastic reaction theory. We intended to show how the famous Kramers expression for the chemical reaction rate is to be modified in the case of the more complicated processes occurring during the enzymatic catalysis. Kramers classical reaction theory describes reactions as transitions over a potential barrier (activation processes) by studying Langevin equations and solving the corresponding Fokker-Planck equations. The basic assumption of Kramers model is that transitions over a potential barrier are due to stochastic forces. Kramers model is based on the assumption of uncorrelated stochastic forces.

Our motivation is to overcome the limitations of Kramers theory and to generalize it. Therefore we will develop in this work simple but more realistic microscopic models for transitions in different molecular environments. The physical effects leading to transitions are studied by means of theoretical models and molecular dynamics simulations. Great impact we shall give to the role of nonlinear oscillations in complex molecules. For example we will study the role of mode-coupling and nonlinear excitations. Our special interest is devoted to local energy spots which may lead to an enhancement of reactive transitions. An idea expressed by several authors is that complex reactions is supported by nonlinear excitations capable to localize energy at special reaction sites.

The authors of this book try to demonstrate the role of the physical processes at certain stages of the chemical reactions, in particular, at the stage of bond breaking in substrate molecules that is catalyzed by enzymes. In other words, we try to find out what determines the rate of bond breaking with the use of the methods of molecular dynamics. We intend to show how the famous Kramers expression for the rate of the chemical reaction is to be modified in the case of the complex processes of the enzymatic catalysis.

Enzyme molecules consisting of hundreds and even thousands of atoms interact with substrates in water environment. Any comprehensive mathematical description of this process implies the solution of systems of nonlinear differential equations in the 3-d physical space. However, not all the atoms and groups of atoms are involved in certain stages of the catalytic act. It is always possible to select some basic variables whereas the influence of all the others can be taken into account with substantial simplifications. This is not due to reduction of the complete systems of equations but due to the fact that the complex enzyme molecules always consist of subsystems each of which consists in turn of hundreds of atoms. Such subsystems or clusters can be described using only several variables. We discuss here several models which describe the transitions connected with the chemical reactions.

In this book we do not intend to present a complete pattern of specific enzymatic reactions or to figure out the ways of their effective control. Instead we will concentrate on one of the most important aspects, the role of stochastic effects.

Рецензия на книгу

«Стохастическая динамика взаимодействующих биомолекул»

Вышедшая в 2003 году в издательстве Scientific World монография «Stochastic Dynamics of Reacting Biomolecules» (W. Ebeling, L. Schimansky-Geier & Yu. Romanovsky, eds) посвящена физическим процессам, протекающим в сложных молекулах, в частности, биомолекулах. В десяти главах монографии обобщены

результаты теоретических исследований, проведенных в последнее десятилетие несколькими группами ученых в Германии и России. Их основной целью было изучение нелинейной динамики структур, образуемых атомными единицами сложных молекул, и их влияния на функционирование биомолекул как химических и биологических объектов.

Характерной особенностью макромолекулы является огромное (порядка тысяч и более) число степеней свободы, обусловленное большим количеством составляющих ее элементов, объединенных, как правило, в кластеры. Поэтому основные физические эффекты в таких молекулах связаны с динамикой кластеров и конформацией молекул. В описываемых в монографии исследованиях они изучаются в рамках простых моделей с гораздо меньшим числом элементов (степеней свободы), нежели в реальных молекулах. Это позволяет обеспечить глубокое проникновение в динамику сложных молекулярных структур благодаря эффективному применению методов нелинейной динамики, стохастической и молекулярной динамики в сочетании с широким применением компьютерного эксперимента.

В первых главах книги исследуются факторы, влияющие на скорость химических реакций. Авторы показывают, что благодаря нелинейным свойствам колебаний частиц в молекулярных цепочках и изменяющимся вследствие этого закономерностям разрыва химических связей («выпрыгивания» частицы из потенциальной ямы) происходит повышение скорости химической реакции по сравнению со значением, предсказанным классической теорией Аррениуса - Крамерса. Эффективным в этих исследованиях оказывается применение концепции «окрашенного» шума.

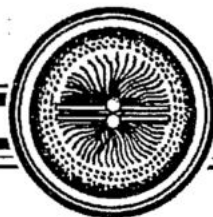
Далее описываются несколько новых эффектов, природа которых также обусловлена нелинейностью потенциала взаимодействия атомов в сложной молекуле, в том числе: связанные колебания, происходящие в разных направлениях в двумерных молекулах; резонанс Ферми; локальные энергетические пятна и др.

Авторы подчеркивают особую роль стохастических эффектов в рассматриваемых процессах, возникающих из-за тепловых флуктуации окружающей среды и диффузионных процессов. Их изучение приводит к возникновению новых задач стохастической нелинейной динамики кластеров.

Большая часть новых результатов получена с помощью одномерной кольцевой модели цепочки нелинейных осцилляторов, связанных силами с потенциалом Тоды, Леннарда - Джонса, Морзе. Изучены нелинейные явления в таких цепочках, обусловленные возбуждением кноидальных волн и солитоноподобных локальных структур. Исследована также очень важная для биомолекул проблема затухания колебаний различных кластеров макромолекул, взаимодействующих с окружающей средой.

Книга полезна студентам, аспирантам и исследователям, интересующимся проблемами молекулярной нелинейной динамики, теории кластеров, теории стохастических процессов в нелинейных цепочках и решетках.

Чл.-корр. РАН, профессор *Д.И. Грубецков*



Изв. вузов «ПНД», т.11, № 4-5, 2003

Синергетика: от прошлого к будущему

ВВЕДЕНИЕ В СИНЕРГЕТИКУ. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Д.И. Трубецков

© Д.И. Трубецков, 1997, 2003
© Предисловие: Ю.А. Данилов, 2003
© Предисловие, послесловие: Г.Г. Малинецкий, 2003
© Едиториал УРСС, 2003
М.: Едиториал УРСС, 2003. ISBN 5-354-00531-0

Современная наука о колебаниях и волнах представлена в книге своими эффектами и явлениями, встречающимися в медицине, химии, экологии, гидродинамике, электронике, экономике, социальных и других науках. Цель книги - показать, что такие понятия, как колебания и волны, неустойчивость и нелинейность, хаос и структуры позволяют понять единство современной картины мира. В книге также показано, как колебательно-волновые идеи проникают в разные науки.

Книга может быть полезна учащимся физико-математических классов, студентам первых курсов естественнонаучных специальностей университетов. В основу книги легли лекции автора, которые были прочитаны в Саратовском государственном университете гуманитариям. Поэтому книга может быть интересна и полезна широкому кругу читателей, интересующихся синергетикой.

Предисловие друга автора

Теория колебаний и волн отличается от других крупных физических теорий меньшей «привязанностью» к природе изучаемых систем - исследуемые ею закономерности применимы к физическим, химическим, биологическим, экономическим, политическим, социальным и другим системам. Именно эту ее особенность имел в виду академик Л. И. Мандельштам, когда заметил, что теория колебаний (и волн) говорит на «интернациональном» языке науки. Возможно, что универсальность («общеприменимость») теории колебаний и волн, а также эстетическая привлекательность используемых ею идей, образов и математического аппарата в какой-то мере объясняют, почему среди учебников и монографий по теории колебаний и волн так много шедевров физико-математической литературы. Назовем (в хронологическом порядке их издания на русском языке) лишь некоторые из них: двухтомная «Теория звука» Дж. Рэлея (М.-Л.: Гостехиздат, 1955), «Лекции по теории колебаний» Л.И. Мандельштама (М.: Наука, 1972), «Теория колебаний» А.А. Андропова, А.А. Витта и С.Э.Хайкина (М.: Наука, 1981), «Колебания и волны» Г.С. Горелика (М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1995), «Введение в теорию колебаний и волн» М.И. Рабиновича и Д.И. Трубецкова (М.: Наука, 1992).

Появление еще одной книги по теории колебаний и волн, и тем более отнесение ее к категории шедевров, требует некоторых пояснений.

Начать хотя бы с того, что она написана в труднейшем из жанров - жанре «учебного пособия». Книга Д.И. Трубецкого - учебное пособие, предназначенное для необычного читателя - для гуманитариев, нередко гордящихся или, по крайней мере, хвастающихся незнанием математики. Автор блестяще справился с трудностями изложения для неподготовленной аудитории, не опускаясь до профанации точного естествознания и не запутывая читателя деталями сложных математических выкладок, он наглядно и выпукло демонстрирует красоту физико-математического мышления, делится с читателем радостью по поводу успешного решения, казалось бы, неразрешимых проблем и озадачивающих своей неожиданностью парадоксов.

Многочисленные вставные новеллы из истории науки, придирчиво отобранные автором, оживляют текст и, неся в себе важную научную информацию, создают у читателя-неофита незабываемый эффект присутствия при рождении научной истины.

Стиль изложения, живой и непринужденный, создает у читателя иллюзию общения с автором, талантливым и опытным лектором. Создание «учебного пособия» или учебника даже средней руки, не говоря уже о выдающемся произведении учебной литературы, невозможно в тиши кабинета без живого контакта с реальной аудиторией. В основу этой книги положен курс лекций, прочитанных в Саратовском университете его ректором профессором Д.И. Трубецковым одним из первых в России, еще до того, как теория колебаний и волн, а в дальнейшем и синергетика, нашли приложения не только в естественных, но и в гуманитарных науках.

Книга Д.И. Трубецкого не принадлежит к жанру научно-художественной литературы, в котором блистательно работал Д.С. Данин, поэтому Д.И. Трубецков нигде не подменяет доказательность на основе экспериментальных фактов и математического расчета убедительностью художественного образа. Оставаясь на привычной «территории» теоретической физики и опираясь на свою широкую гуманитарную культуру, автор умело ведет читателя-гуманитария через тернии к звездам, не впадая в назидательность и унылую дидактичность и неизменно оставаясь интересным и дружественным собеседником.

Тщетно передать впечатления от литературного шедевра тому, кто его не читал, от музыкального произведения - тому, кто его не слышал, от полотна кисти талантливого художника - тому, кто его не видел. Поэтому, если позволительно, хочу дать добрый совет читателю: «Отложите прочтение предисловий до тех пор, пока Вы не прочтаете рецензируемую книгу и не составите о ней своего собственного представления, а затем лишь сравните Ваше впечатление с написанным выше. Надеюсь, Вы легко убедитесь в справедливости всего сказанного».

Счастливого чтения! Вас ждет немало радостных и приятных открытий.

Ю.А. Данилов

Предисловие скептика

Начну с мажора и романтических воспоминаний. Этот учебник - одна из лучших работ по синергетике на русском языке. Поэтому он и является одной из первых книг в нашей серии «Синергетика: от прошлого к будущему». Это курс лекций и, наверно, читая его отдельные главы, вы невольно будете слышать голос Дмитрия Ивановича Трубецкого. Книга очень точно соответствует его манере - с одной стороны, энергия и увлеченность. С другой - ясность и взвешенность. С одной стороны, широкий горизонт, с другой - конкретность, точность и внимание к деталям.

В Саратове, в научной школе Дмитрия Ивановича, уже много лет регулярно проводятся конференции по нелинейной динамике, семинары по теоретической истории и другим междисциплинарным проблемам, «Нелинейные дни для молодых». С большим удовольствием выступал и слушал доклады на этих форумах. Почему-то я всегда попадал на те заседания, которые проводились в спортивном зале одного из саратовских пансионатов. И меня всегда поражал контраст между оптимизмом и устремленностью в будущее, спартанской обстановкой и теми организационными и житейскими проблемами, которые приходится решать этим увлеченным наукой людям. Много любопытных коллизий происходит сейчас с учеными, с преподавателями, с профессорами, с учителями. Зазеркалье. Думаю, что и Антон Павлович Чехов и Ярослав Гашек - автор «Бравого солдата Швейка» - мечтать не могли о таких блестящих сюжетах, которые стали нормой в нашей реальности.

На конференциях весело. Много доброго юмора, шуток, розыгрышей. Такая атмосфера интеллектуального здоровья царит и в самой научной школе, и в журнале «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» (ПНД). Этот стиль отражают и «Астральные Плоды раздумий действительного статского советника Козьмы Петровича Пруткова», завершающие каждую главу представленной книги. Рад, что у саратовских коллег настолько хорошо налажена связь с Астралом. Полагаю, что тут все дело в нелинейной динамике и использовании сигналов с хаотической несущей. Александр Сергеевич Дмитриев из Института радиоэлектроники регулярно рассказывает об огромных перспективах этого подхода. Но одно дело идеи, а другое - конкретный результат, который говорит сам за себя.

Иногда на конференциях в Саратове бывает нелегко отличить шутку, правду жизни и волю Провидения. Часто вспоминаю, с каким легкомыслием я отнесся к совету коллег непременно взять на конференцию в Саратов спальную шапочку. Климат у нас в России не холодный - в Антарктиде значительно прохладнее, но спальную шапочку мне очень не хватало.

Или, помнится, когда лифт вез американских участников конференции на круглый стол, посвященный, кажется, судьбам России (американцы в этой области - ведущие специалисты), наши гости толковали про то, что в России все более-менее нормально, никакого экстрима, просто надо кое-что поменять, чтобы было как в цивилизованном мире. Почему-то при этих словах лифт встал и свет погас. И простоял-то всего час с небольшим, но наши американские коллеги за это время сменили свое мнение на противоположное. Выходит, иногда и тьма способствует озарению и прозрению. Впрочем, есть и множество других преданий, легенд и историй, связанных с саратовскими «нелинейными» конференциями.

Пожалуй, мажора хватит. Теперь к минору и «критическому реализму».

Есть два различных подхода к организации науки и образования. Условно их можно назвать немецким и американским. Со своими сильными и слабыми сторонами. В основе классического немецкого подхода лежит научная школа. Союз единомышленников из разных поколений, объединенный вокруг яркого научного лидера и обычно сосредоточенный на решении глубокой фундаментальной проблемы. В образовании это целостность, системность, в большой степени стремление к универсальности. Вспомните написанный в начале XX века курс теоретической физики Арнольда Зоммерфельда.

Достоинства здесь очевидны. Штурм научных вершин - дело тяжелое, как правило, многолетнее, требующее усилий нескольких поколений исследователей. Вспомним, что квантовая механика, в сущности, была создана представителями нескольких европейских научных школ. Естественно, есть и минусы. Научная жизнь во многих школах с первых шагов до заката часто проходит в одних стенах.

Человеческие качества лидера оказываются здесь не менее важны, чем его научный потенциал. И, как в семье, общие успехи и неудачи.

По этому пути шла и российская, и советская наука. Вспомним научные школы Иоффе, Лузина, Ландау, Келдыша, других «звезд первой величины». Именно на такое положение дел была ориентирована Академия наук СССР.

Несмотря на все нехватки и недостатки и вопреки многим принимавшимся в административных высотах решениям, именно научные школы позволили выжить отечественной науке в последнее десятилетие.

Существенно иначе организована наука у американцев, а сейчас и во многих европейских странах. Грубо говоря, это «система с перемешиванием» и с сильно развитой конкуренцией. «Перемешивание» обеспечивается традициями, уставами, «правильными» жизненными стратегиями. Нормальным считается учиться в одном университете, кончать аспирантуру в другом, работать сначала в третьем, потом в четвертом и т.д. Наука, воспринимаемая как средство для заработка, предполагает регулярную рассылку своих резюме по всем городам и весям с целью получить место, где платят чуть-чуть больше или есть перспектива.

Поэтому, когда я столкнулся в качестве зрителя с процедурой отбора одного кандидата на штатную должность преподавателя из 150 претендентов из США, Германии, Англии в одном американском университете, у меня не было сомнений - выберут лучшего из лучших. Но... к моему удивлению, место получил один из самых слабых кандидатов. Другой мир. Свои обычаи, свои ритуалы, свои неформальные связи. Отбор действительно жесткий. Но, как правило, не по тем признакам, которые непосредственно связаны с наукой или образованием.

И, конечно, гранты, гранты, гранты... Это средство активизации научной жизни сплошь и рядом превращается в цель. И, конечно, это совсем не то, что у нас. Наши гранты - это способ свести концы с концами для тех немногих, кто может заниматься тремя, пятью и десятью проблемами одновременно. И главный вопрос и участников, и руководителей - сколько можно перекачать в зарплату.

По многим грантам, даваемым в США, деньги в зарплату вообще не предусматриваются. Зарплата и так вполне прилична. Поэтому вызывает изумление маниакальное стремление перенести элементы американской системы в науку нашего отечества. Экономiku, малый бизнес, образование, армию, медицину уже пробовали «отреформировать по-американски». Вроде бы не сильно получилось. Может быть хоть науку пожалеем?

В образовании американский стиль - это узкая специализация. Большие сроки обучения. Во многом стандартизированный, обезличенный подход. В среднем. Но есть и вершины. По-настоящему, очень серьезно учат ряду дисциплин американских аспирантов.

А отечественные научные школы... «Иных уж нет, а те далече...» Поэтому те, кто выстояли и шагнули вперед - саратовская школа именно такова - заслуживают глубокого уважения. И поддержки.

И дело не только в деньгах. Два простых примера. Саратовские коллеги, проявляя сверхчеловеческую энергию, уже много лет издают журнал «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика». Отличный журнал. Множество блестящих статей, и обзорных, и оригинальных. Очень полезен и исследователям, и студентам, и аспирантам, и преподавателям. Одним плох журнал - тиражом. Тираж этого отличного журнала - 200 экземпляров. При наличии 3000 вузов, тысяч исследовательских институтов и очень скромной цене. Видимо, если бы поддержка была бы серьезной, тираж был бы иным.

Второй пример - Соросовский образовательный журнал. Исключительно важная и полезная вещь. Ведущие профессора России рассказывали о современной науке школьным учителям. И журнал бесплатно рассылался по школам. Это

нужно было не Соросу, а прежде всего нашему отечеству. Но... Все уже в прошедшем времени. Министр обещал... Деньги не по той статье... Секвестр... «При первой возможности»... Не надо думать, что работа на развал это скучное, тягостное занятие. Нет! Здесь есть свои находки, удачи, маленькие шедевры. Вот один из них. В Академии и в высшей школе есть много блестящих ученых, читающих прекрасные лекции по математике и естественным наукам. Огромной армии российских студентов книги с этими лекциями нужны как воздух. В бюджете находятся деньги на то, чтобы лекции издать - Федеральная целевая программа «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1999-2000 годы». Казалось бы, неизбежное произойдет - студенты получат много отличных книг.

Но! И тут можно найти выход из положения. Помните задачу про волка, козу и капусту, где нужно, чтобы все остались голодными?

Лекции в красивых обложках действительно можно издать, но мизерным тиражом (500-1 000 экземпляров), случайным образом разослать в библиотеки, ни в коем случае не пуская в продажу.

И главная находка - следите за руками - потребовать, чтобы авторы в течение 5 лет не переиздавали свои произведения.

Блестяще! Авторы считают, что они свое дело сделали, подготовив рукописи. Издательства тоже хорошо поработали. Деньги потрачены, отчеты написаны. Только у студентов книг нет.

А через пять лет много воды утечет... Как у Ходжи Насреддина, который уверенно брался, по велению падишаха, обучить ишака говорить за 20 лет. «Или падишах умрет, или ишак, или я грешный». Но поколение студентов уж точно окажется без необходимых учебников.

Книга Дмитрия Ивановича, которую Вы держите в руках, была издана в 1997 году издательством Государственного учебно-научного центра «Колледж» под названием «Колебания и волны для гуманитариев» с чудесными цветными картинками. Тиражом 400 экземпляров. Очень много для издательства «Колледж», но совсем мало для высшей школы России. (Для справки - моя первая брошюра по синергетике в 1982 году разошлась тиражом 30 000 экземпляров.) Времена, конечно, не те. Но все же, все же, все же... Издавая, а затем, вероятно, и переиздавая эту книгу в нашей серии, мы надеемся исправить эту несообразность. Конечно, в меру наших скромных возможностей.

Теперь несколько слов о «гуманитариях». Школьников, поступивших к нам на Физтех или на физфак МГУ, обычно поражает, что к ним относятся как к равным, как к людям, которые имеют свое суждение, которых, вероятно, ждет большое будущее, и с которых спрашивать надо всерьез.

В обоих вузах в начале курса математического анализа на первых трех лекциях обычно рассказывают все главное в курсе. То, чем надо пользоваться, и что будет позже доказываться, уточняться, углубляться. При этом люди вначале пугаются кратных интегралов, дифференциальных уравнений, распределений вероятностей, а потом начинают пользоваться ими и привыкают к этим замечательным инструментам. В обоих вузах кафедра математики пользуется большой и заслуженной любовью.

Так вот, книга Дмитрия Ивановича из того же жанра. Но предваряет она не курс, а в идеале научную судьбу.

Что нужно для того, чтобы ее прочесть и освоить, чтобы сделать ее «своей»? Прежде всего желание и настойчивость. Почти все понятно старшекласснику. А уж если он из физ-мат школы... Хотя для нескольких глав очень полезно было бы свободное владение комплексными числами. В других надо

уметь интегрировать простейшие дифференциальные уравнения. А для чтения двух глав очень не помешал бы вводный курс математической физики...

Но! Школьники в Саратове, которые осваивают синергетику, не только все это знают, но и активно пользуются показанными в книге методами, ведут самостоятельные исследования и докладывают их результаты на «Нелинейных днях...»

Ну а гуманитарии... Наверное, Дмитрий Иванович знает такого гуманитария, которому по силам этот курс. Который имеет время, желание и потребность самостоятельно осваивать «язык» естественнонаучной культуры, как называл его Чарльз Сноу. Мне с гуманитариями повезло меньше.

Мне почему-то все больше попадались представители этой уважаемой профессии, к которым относится высказывание Нобелевского лауреата и блестящего популяризатора науки профессора Вайнберга: «Каждая формула уменьшает число читателей книги вдвое...»

Конечно, наш читатель не таков, но первоначальное название мы решили изменить.

Итак, в первом приближении, профессионалы-гуманитарии - филологи, психологи, менеджеры, и прочие, прочие - многое, на мой взгляд, из этой книги извлечь не смогут. Впрочем, это не относится к лекциям, которые читаются, а не пишутся. Как показывает мой скромный опыт выступлений перед экономистами и управленцами, выступления математиков, «синергетиков», физиков, наши коллеги-гуманитарии подчас воспринимают как своеобразные произведения искусства или уроки исполнительского мастерства. Еще в большей степени это относится к блестящим лекциям автора книги.

Но есть и второе приближение. Может быть, не стоит замыкаться на гуманитариях, а иметь в виду именно физиков, математиков, инженеров, которые со временем присоединятся к гуманитарному цеху либо продолжат славную традицию естественников размышлять и над философскими проблемами? Лейбниц, Декарт, Пуанкаре, Мах, Рассел, Гейзенберг - есть на кого равняться. Это тем более оправдано, когда речь идет о междисциплинарном подходе. Для будущих лириков «физического происхождения» эта книга крайне полезна. Она помогает выработать собственную точку зрения, приобщает к «естественнонаучной мудрости», которая может очень пригодиться на «гуманитарной планете».

Ну а в третьем приближении... В книге даются не только концепции, факты, методы, результаты, как в обычных учебниках. Во многих главах речь идет о поиске истины, о том, как талантливые люди достигали вершин, которые и сейчас поражают воображение. Наука изнутри - это прежде всего процесс, поиски, ошибки, заблуждения, находки. «Поэзия - та же добыча радия...» И этой эмоционально переживаемой истории становления нелинейной науки в книге уделено большое внимание. Немногие могут рассказать об этом с тем восхищением, пониманием, оптимизмом, с которыми это сделал Дмитрий Иванович.

Можно пойти и дальше. Открытие нового, осознание пределов и возможностей - таинство. «Среди нехоженых путей один путь - мой, среди невзятых рубежей - один за мной»... Это удивительное явление, в которое пытливно всматриваются психологи и математики, физики и «синергетики». И в книге вновь и вновь в различном контексте делается попытка реконструировать ход мыслей творцов, увидеть стимулы их интуиции, кухню их открытий, осмыслить «божественную гносеологию», как однажды выразился мой знакомый философ.

Но и этим приближением не хотелось бы кончать. Отношения между естественнонаучной и гуманитарной культурой стремительно меняются. Традиционный взгляд естественников - это сократовская мысль о том, что мы ничего не придумываем и не привносим в мир, а лишь открываем или вспоминаем то, что когда-то знали. Математика как раздел физики.

И, напротив, - лирика предельно субъективна, индивидуальна, мимолетна... Но многое, очень многое уже изменилось на наших глазах. Например, математику можно трактовать как «неестественную науку», как игру ума и проходить, как это делают во многих американских университетах, на факультетах изящных искусств. И эта трактовка имеет право на существование.

Но вот технология, инженерия, ремесло. Это и «физика» (мы творим, опираясь на законы Природы) и «лирика» (мы творим то, что считаем нужным, и так, как хотим, «Природа не храм, а мастерская»). Пограничная область. Волнующая и опасная. В ней мы создаем новые миры или их фрагменты и тем самым берем новый груз ответственности за нашу единственную и неповторимую реальность. Создание новых видов материи - далеких трансурановых элементов, реконструкции эволюции и истории, компьютерные игры с психикой и телом, создание трансгенных организмов и нанотехнологии. Человек больше молекулы во столько же раз, во сколько он меньше звезды. И на этом уровне сегодня, как человечество, мы решили поиграть с микромашинами, материалами, возможно, с новыми типами живого... Наша «междисциплинарность» и «синергетичность», мораль и мудрость очень далеко отстали от того, что уже можно сделать. И эта книга - попытка помочь тем, кто будет делать, творить, рисковать, менять ускользящую от осмысления и контроля реальность.

Однако, с другой стороны, гуманитарии упомянуты не напрасно. Синергетика - это обобщение, синтез, вершина. К вершине ведут разные пути. У Ильи Пригожина этот путь лежит от термодинамики, у Германа Хакена - от физики лазеров и адиабатического приближения. В школе Д.И. Трубецкого этот путь проходит через радиоэлектронику, СВЧ-системы. И это тоже захватывающе интересно. И гуманитарные аналогии, метафоры, образы, конечно, очень помогают осваивающим синергетику независимо от того, какую область деятельности они изберут в дальнейшем.

Обращу внимание еще на одно отличие книги, которую Вы держите в руках, от большинства западных, да и отечественных учебников. Выше уже упоминалось о феномене научных школ. Так вот это - учебник, отражающий мировидение такой успешной и активно развивающейся школы. Прочитайте и почти на каждой странице увидите цитаты, ссылки, упоминания предшественников. Наивно было бы полагать, что кто-то, увидев такую ссылку, пойдет в библиотеку и будет искать, уточнять, наводить справки среди пыльных стеллажей.

Тем не менее, этот стиль, ощущение своего места между тем, кто ушел, и теми, кто придет, очень важен. Более того, он позволяет брать лучшее в естествознании - идеи, примеры, образы, подходы - и бережно переносить их на почву синергетики. Возникает ощущение сада, где рядом, дополняя друг друга, соседствуют удивительные творения

И еще одно. (Может быть, это главная причина, по которой я не убеждал автора отказаться от обширных историко-философских отступлений и описания контекста синергетики.) Огромная доброжелательность, искреннее восхищение успехами коллег, радостное удивление от величия достижений человеческого разума и прихотливой воли судьбы, иногда играющей на стороне творцов науки. Такое отношение крайне важно для научной школы. Оно оправдывает все то, что более строгий редактор готов был бы сократить.

По сравнению с первым изданием, правки немного. Выброшен ряд цветных и черно-белых картинок (зато кое-что и добавлено). Кое-где уточнены формулы и даны пояснения, облегчающие восприятие текста начинающими (чуть было не написал «гуманитариями»). Мне, как редактору этой книги, ее чтение доставило искреннюю радость.

Если кто-то из читателей, закрыв последнюю страницу этой книги, сумеет

сказать как в известной песне: «Вот ты на вершине, ты счастлив и нем, и только немного завидуешь тем, другим, у которых вершина еще впереди», наша редколлегия будет считать свою задачу выполненной.

Председатель Редколлегии серии
«Синергетика: от прошлого к будущему»

Г.Г. Малинецкий

Оглавление

От редакции

Предисловие друга автора

Предисловие скептика

Предисловие автора

Введение

Глава 1. Анализ размерности, оценки, два маятника

§1. Основные положения теории размерности и подобия. §2. Знаменитые задачи П.Л. Капицы и его задача № 24 об определении периода колебаний математического маятника. §3. Задача о колебаниях маятника для астрофизики - проблема пульсации звезд. §4. Еще одна оценка периода колебаний математического маятника и другие задачи. Правило Уиллера.

Глава 2. Линейные колебания

§1. Галилео Галилей и понятие изохронности колебаний. Решение Гюйгенса задачи о колебаниях маятника. §2. Джон Уильям Рэлей (Стретт) и его «Теория звука». §3. Еще примеры маятников (осцилляторов): груз на пружине, акустический резонатор Гельмгольца, колебательный контур с затуханием, объемный резонатор для электронных приборов и микроволновой печи и... четыре задачи. §4. Периодическая химическая реакция - «химический маятник». §5. Линейные колебания в популяционной модели «хищник - жертва» - «экологический маятник». §6. «Экономический маятник» - линейные колебания в простой модели экономики. §7. Линейный осциллятор - основная модель линейной теории колебаний. Свойства линейных систем. Квантовый осциллятор. §8. Что такое динамическая система? Понятие фазового пространства. Фазовый портрет линейного осциллятора.

Глава 3. Резонанс

§1. Резонанс в гармоническом осцилляторе. Аналитическое решение, демонстрирующее неограниченный рост амплитуды в гармоническом осцилляторе при резонансном внешнем воздействии, - «месть идеализации». §2. Что дает введение затухания? Шагают солдаты по мостам и книжным страницам. §3. Линейный осциллятор под действием периодической силы. §4. Резонатор Гельмгольца и... домовый, колдун, глиняные или бронзовые сосуды в античном театре. Тяжелый колокол. «Поющий камень». Осциллятор атмосфера Земли и другие глобальные резонансы. §5. 100-долларовая идея братьев Вариан и Хансена - пример использования резонанса в микроволновой электронике... и просто интересная история.

Глава 4. Связанные колебания

§1. Свободные колебания двух связанных осцилляторов: две одинаковые массы, подвешенные на двух идентичных пружинах и соединенные третьей

пружиной. Нормальные координаты и нормальные частоты. Биения. Парциальные частоты. Связанность. §2. Возбуждение двух связанных осцилляторов внешней силой. Теорема взаимности и успокоители колебаний.

Глава 5. Голубое небо и Нобелевская премия по физике за 1930 год

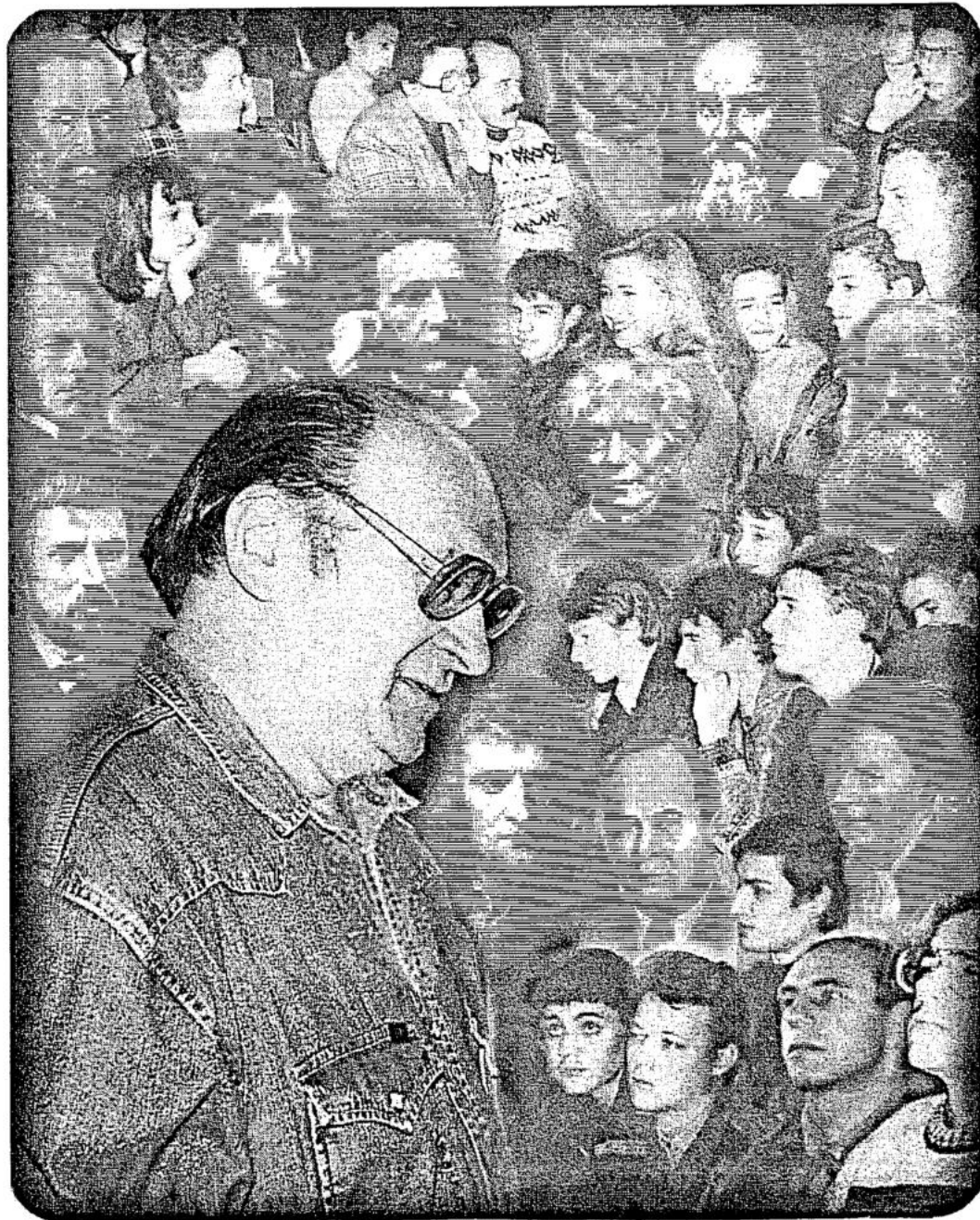
§1. Леонард Эйлер: «Я покажу Вашему высочеству, что причину синевы неба должно искать». §2. Формула Рэлея - опять анализ размерностей. §3. И вновь линейный осциллятор. §4. Л. И. Мандельштам, М. Смолуховский, А. Эйнштейн: «Объяснение Рэлея неправильно, но формула верна». §5. Л. И. Мандельштам: «Оказалось, что существует тесная связь между теорией теплоемкости и теорией рассеяния света». §6. Раман в гостях у Мандельштама: «Я счастлив, что нахожусь в лаборатории, где открыт раман-эффект».

Глава 6. Линейные волны

§1. Струна, нагруженная одинаковыми телами, расположенными на одинаковом расстоянии друг от друга. Волновое уравнение. §2. Что же такое волна? Несколько определений. Об истории коронации одной русской царицы. Еще определения. Что можно сказать о свойствах волны? Волны на воде - опять анализ размерностей. §3. Фазовая скорость. М.А. Миллер: «Все движения суть волны, но некоторые движения «волновее» других». Природа дисперсии. Групповая скорость. §4. Пространственный резонанс. Два примера - два открытия архитектора в микроволновой электронике. Рудольф Компфнер: «...так и быть, - пусть поле движется вместе с электронами» (пример первый). §5. Карсинотрон - «чужие следы на песке» (пример второй).

Продолжение следует. Послесловие редактора

Литература



Юлий Александрович Данилов родился в Москве в 1936 году. Окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1963 году. После окончания университета был принят на работу в Институт атомной энергии им. И.В. Курчатова (в настоящее время Российский научный центр «Курчатовский институт»), где проработал до последнего дня. Ю.А. Данилов создал и прочитал ряд оригинальных курсов по современным методам математической физики, статистической обработке экспериментальных данных и истории естествознания. Сфера его научных интересов простиралась от симметрии в физике и нелинейной динамики до философии и истории науки. Для Ю.А. Данилова практически не существовало лингвистических барьеров – он владел почти всеми европейскими языками, а также латинским и древнегреческим. Им опубликовано и переведено более 200 научных и научно-популярных статей, в его переводе вышло более 100 книг. Много лет участвовал в переводе и издании трудов А.Эйнштейна, Г.Кирхгофа, А.Пуанкаре, В.Паули, В.Гейзенберга, У.Р.Гамильтона, Д.Гильберта, вышедших в свет в серии «Классики науки». Он был постоянным автором журналов «Знание-сила», «Природа», «Химия и жизнь», «Квант», «Семья и школа», членом редколлегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», неизменным лектором на ежегодных школах «Нелинейные дни в Саратове для молодых», создал серию научно-популярной литературы в издательстве «Мир». Скончался Юлий Александрович 24 октября 2003 года.



Изв. вузов «ПНД», т.11, № 4-5, 2003

ПАМЯТИ ДРУГА

Нет больше с нами Юлия Александровича Данилова. Ушел из жизни мудрый, разносторонне талантливый человек, проживший далеко не простую жизнь в разных временах, оставаясь самим собой. Он представлял собой отдельную Вселенную, в которую входили совершенно разные люди от брюссельского булочника, о котором у него был замечательный рассказ, до Ильи Романовича Пригожина, относившегося к нему с искренним уважением, от школьника из Саратова и студента химфака МГУ до Даниила Семеновича Данина, которому он помогал найти кентавров для его кентавристики, до Михаила Александровича Леонтовича, в устах которого прозвучала хвalebная фраза: «Сами говорите, что математик, но разговариваете не на их собачьем языке, а так, будто всю жизнь были физиком», и еще много разных людей, которых объединили его Обаяние, Тактичность, Доброта, Интеллект. В этой Вселенной было знание практически всех европейских языков, три полки написанных и переведенных им книг (когда закончилась третья полка, он шуточно назвал это событие юбилеем), это его блистательные статьи-эссе, его удивительные и по форме и содержанию лекции, его устные рассказы, которые можно было слушать часами. Книги были его жизнью, он относился к ним как к живым существам, он любил их и умел привить эту любовь другим. Приезжая на конференции, привозил много книг и дарил своим друзьям, удивительно точно угадывая их вкусы.

У поэта Владимира Корнилова есть строчки, написанные как будто об Юлии Александровиче:

Достается, наверно, непросто
С болью горькой, острей, чем зубной,
Это высшее в жизни геройство
Быть собой и остаться собой.

Устоять средь потока и ветра,
Не рыдать, что скисают друзья,
И не славить, где ругань запретна,
Не ругать там, где славить нельзя.

Это было главным в нем. Он тяжело переживал любую несправедливость и вступал в борьбу со злом без раздумий. Конечно, в нем были черты Дон-Кихота, но его шпагой были энциклопедичность знаний, тонкий юмор и ирония, чувство ситуации и доброта, доброта, доброта.

Мы познакомились с Юлием Александровичем на одной из горьковских

школ «Нелинейные волны», по-моему на той, где он прочитал великолепную лекцию «Льюис Кэррол как нелинейное явление», и быстро подружились. Он умел дружить: звонил именно тогда, когда этот звонок был нужен, делал надпись на подаренной книге такую, что сразу становилось легче, мягко отвлекал от грустных мыслей своими рассказами. Вот передо мной его последний подарок - книга чилийцев Р. Матурана и Франсиско Х. Варела «Древо познания», переведенная им. Он знал, что я переживаю непростые дни, устав от предательства людей, которым верил, устав от давления власти. Поэтому на книге надпись: «Дорогой Дима: в Библии сказано: «И это проходит.» 9.10.2003.» Да, все проходит. Не пройдет только боль от того, что не услышишь в телефонной трубке его голос, что не увидишь его доброй улыбки, не услышишь его лекций. Увы, ворон каркнул: «Nevermore».

Нас особенно сблизил «Нелинейные дни в Саратове для молодых», где он читал лекции и беседовал за вечерним чаем со школьниками, со студентами, молодыми исследователями и друзьями-коллегами. Беседы о науке, о жизни затягивались часто до глубокой ночи. Именно на этих школах прозвучали его лекции о Мандельштаме, Фарадее, Минковском, Перельмане, на них он рассказывал о фракталах, об автономности, о разных маятниках. Приезжал он и на школы по хаосу и даже на наши «электронные» школы. Юлий Александрович говорил, что он приезжает только в два города - Брюссель и Саратов. После первого серьезного заболевания он оставил себе только «Нелинейные дни», отказавшись в прошлом году от совпавшей по времени с нашей школой поездки во Флоренцию. Мы любили его рассказы о поездках к Пригожину. Создавалось впечатление, что мы вместе ходим по Брюсселю и вместе беседуем с разными людьми - с мальчишкой-торговцем фруктами, с хозяином магазина всяких необычных вещей, с директором школы, поднимающимся по пожарной лестнице, с хранителем библиотеки, который в знак уважения к тому, что профессор читает письма Эйнштейна к королеве, подкладывал ему на стол лупу, с двумя продавцами в книжном магазине - пожилой дамой и молоденькой девушкой, - которые встречали и провожали его как родного... Помню его рассказ о том, как к Пригожину приехал очередной иностранный гость и секретарь мэтра Надин посоветовала ему обратиться к Юлию Александровичу за ответом на вопрос: «Что посмотреть в Брюсселе?» Она лукаво заметила: «Мы спим по ночам. Спросите у него». Да, он не спал по ночам: днем он работал, а ночью изучал Брюссель.

Юлий Александрович необычайно много делал для того, чтобы издавалась серия «Классики науки». Гамильтон, Гейзенберг, Эйлер... Он много сделал и для издательств «Мир» и «Наука». Передо мной его книга «Лекции по нелинейной динамике» - курс лекций, который он читал в МИФИ, МГУ и университетах Западной Европы. Это - книга математика с четким и точным изложением основных понятий, немного сухая. Но он подготовил и другой, расширенный вариант. Он не успел его издать. Думаю, что сделать это надо нам - его друзьям и коллегам.

Юлий Александрович много сделал для популяризации науки, работая в журнале «Знание - сила». Его эссе «Нелинейность» невозможно пересказывать, столь вдохновенно оно написано.

В октябре этого года в Саратове на его любимых «Нелинейных днях» мы виделись мало, поскольку я метался между «Волжскими далями» и Москвой. Поговорили долго только 12 октября. Я обратил внимание, что он дважды рассказал о похоронах отца, о том, как он в нужном порядке раскладывал его ордена, как небрежно обит был гроб... Как всегда, он говорил о своей семье, которую нежно любил. Вспомнил историю, как с еще маленькой Аней он ехал в поезде с каким-то высоким морским чином. Тот стал задавать Ане всякие вопросы

по морскому делу и был потрясен ее знаниями. Потрясение достигло наивысшего предела, когда на вопрос: «Кто твой папа?» девочка ответила: «Адмирал». Мы обнялись на прощанье и договорились, что встретимся здесь же через год.

И вот 28 октября. Церемониальный зал госпиталя. Впервые я увидел его в костюме, он любил мягкие куртки, джинсы и ковбойки. Много людей, много добрых слов, которые лучше было бы сказать при жизни.

Ушел из жизни человек, который светил людям, но не только светил - его свет был теплым, он грел.

Перечитываю предисловие Юлия Александровича к моей книге, «Предисловие друга автора». Я и все мы потеряли близкого человека. Должно пройти время, чтобы мы все поняли, кого потеряли.

2.11.2003

Д.И. Трубецков

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Обложка художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, О.Н. Строгановой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Подписка на I полугодие 2004 года
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498,
стоимость подписки на I полугодие 150 руб.


Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам
осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж»
при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136
Банковские реквизиты
р/с № 40603810900000000378 в ЗАО «Экономбанк» г. Саратова,
БИК 046311722, кор.счет банка 30101810100000000722

Правила подписки за рубежом на сайте: <http://www.periodicals.ru>

Сдано в набор 20.02.04. Подписано к печати 20.03.04. Формат 70x108/16
Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная. Гарнитура Латинская
Усл. печ. л. 14,35(10,25). Уч.-изд. л. 13,5. Тираж 200. Заказ 329

Издательство ГосУНЦ «Колледж». Лицензия ЛР №020773 от 15.05.98
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел. (845-2)523864, факс (845-2) 523864
E-mail:and@cas.ssu.runnet.ru
<http://cas.ssu.runnet.ru>

Отпечатано на ризографе GR 3750 издательства ГосУНЦ «Колледж»

© Издательство ГосУНЦ «Колледж» 
© Оформление художника Д.В. Соколова, 2004



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Saratov University, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Professor, Russian Scientific Centre «Kurchatov Institute», Moscow

A.S. Dmitriev, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow

S.P. Kuznetsov, Professor, Saratov University, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

P. S. Landa, Professor, Moscow University

G.G. Malinetskii, Professor, Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow

O.V. Rudenko, Professor, Moscow University

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

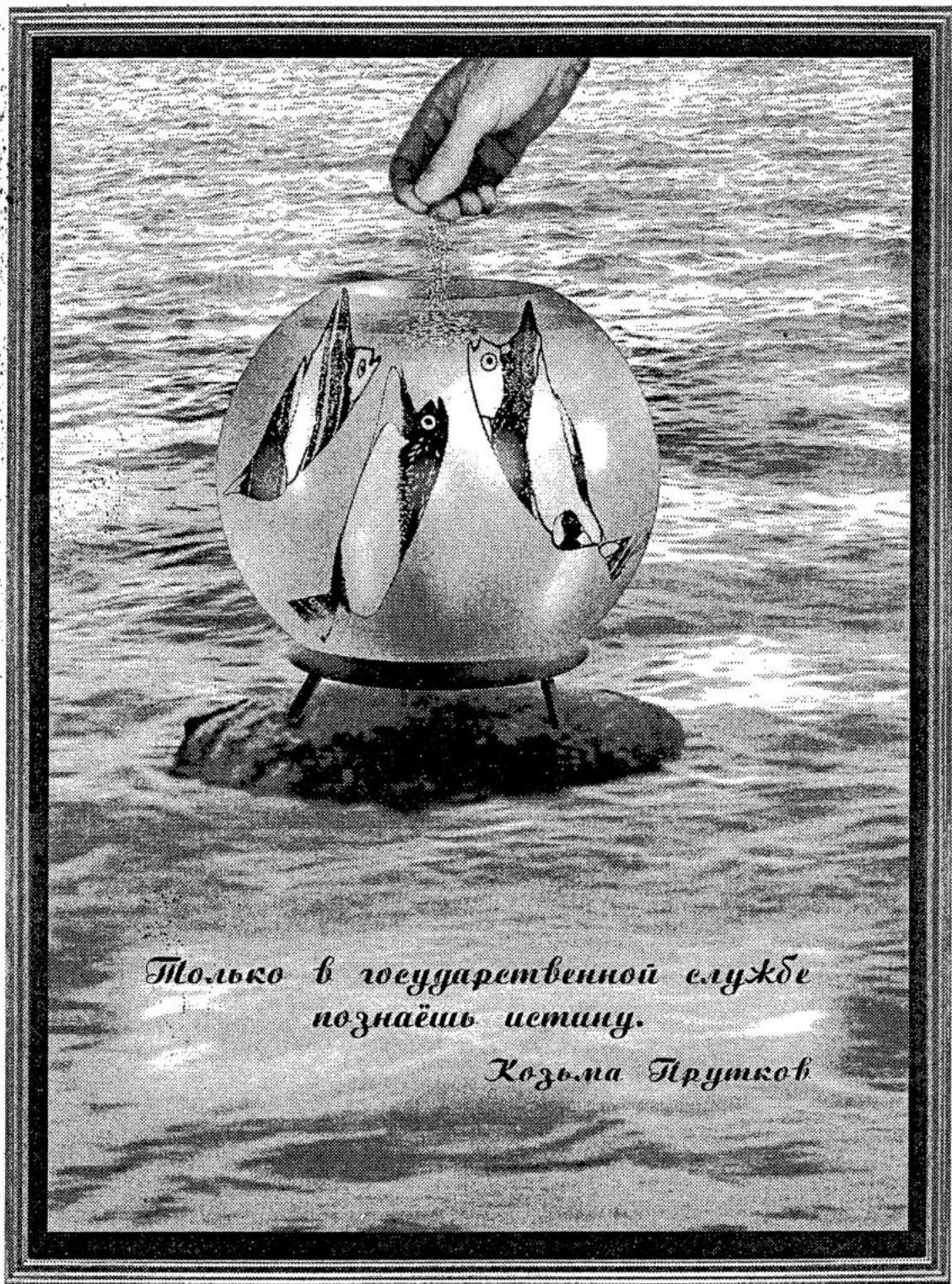
E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, PhD, Institute of Applied Physics of RAS, Nizhny Novgorod

V.G. Yakhno, Professor, Institute of Applied Physics of RAS, Nizhny Novgorod



*Только в государственной службе
познаешь истину.*

Козьма Прутков