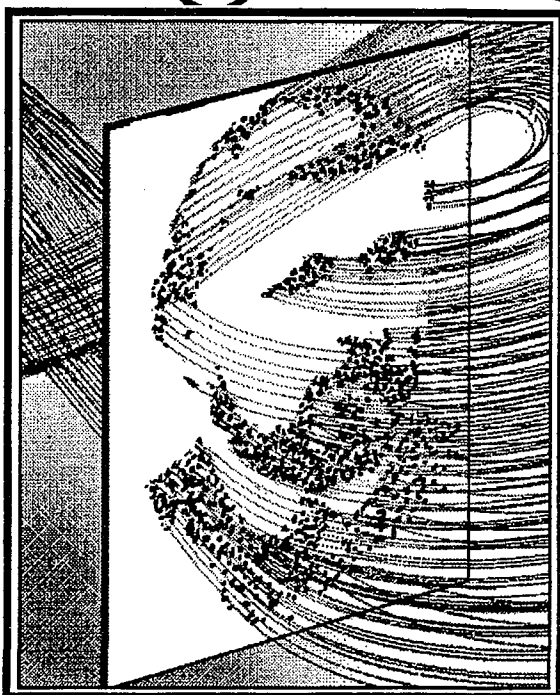


Трикладная Детальная Динамика



6
2002

90 лет со дня смерти Анри Пуанкаре (1912) и
110 лет со времени опубликования его книги
"Новые методы в небесной механике" (1892),
положившей начало развитию нелинейной динамики



ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СО ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, ведущий научный сотрудник, РНЦ «Курчатовский институт», Москва

А.С. Дмитриев, ведущий научный сотрудник, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, СО ИРЭ РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Г.Г. Малинецкий, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики РАН, Москва

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

О.В. Руденко, профессор, Московский государственный университет

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В. К. Юлатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

В.Г. Яхно, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 10, № 6, 2002, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Жалнин А.Ю., Кузнецов С.П.* Универсальность и скейлинг в отображении окружности с периодическим внешним воздействием 3
- Туровский Я.А., Мишин В.В., Битюцкая Л.А., Киселева Е.В., Яковлев В.Н., Проскурин И.Н.* Вейвлетный анализ временных рядов variability сердечного ритма 16
- Быстрой Г.П., Студенок С.И.* Двумерные отображения для нелинейного ротора с кусочно-постоянным коэффициентом затухания, возбуждаемого периодическими ударами 24
- Брюханов Ю.А.* Эффекты квантования в цифровых рекурсивных фильтрах первого порядка с усечением по величине 35

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

- Иванова А.С., Кузнецов С. П.* О динамике на пороге возникновения хаоса в модельных системах, построенных на базе логистических отображений с инерционной и диссипативной глобальной связью 42
- Мчедлова Е.С., Красичков Л.В.* Кусочно-линейная модель генератора Ван дер Поля под внешним периодическим воздействием: Сложная динамика, особенности поведения на плоскости управляющих параметров 54
- Байбури В.Б., Мантуров А.О., Юдин А.В.* Хаотическое поведение зарядов в скрещенных полях 62
- Лячин А.В., Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н.* Идентификация режимов в модели кольцевого интерферометра с поворотом оптического поля на 120° 71

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ

- Дудко Г.М., Филимонов Ю.А.* Самовоздействие 2D-импульсов обратных объемных магнитостатических волн при распространении в ферромагнитных пленках. 81

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

- Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н.* Парадокс Пэнлеве и автоколебания при кулоновском трении 102
- Езерский А.Б., Парантуан П.* Топологические дефекты в дорожке Кармана за нагретым цилиндром. 109
- Трощев Ю.В., Лысак Т.М.* Области существования сверхструктуры $S(2 \times 2)$ в двухкомпонентном слое адсорбата на грани $L(100)$ (квазикимическое приближение) 122

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

- Рабинович М.* О некоторых особенностях творчества: Стихи и формулы 135

PERSONALIA

- Анищенко В.С. Ю.Л. Климонтович* 146
- АНОНС** 70

DEPARTMENT OF EDUCATION OF RUSSIAN FEDERATION

Izvestiya VUZ

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

scientific-technical journal

published since 1993

Published 6 times a year

Vol.10, № 6, 2002, Saratov

CONTENTS

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Universality and scaling in the circle map under external periodic driving.

A.Yu. Jalnina, S.P. Kuznetsov 3

Wavelet analysis of heartbeat rate variability. *Y.A. Turovsky, V.V. Mishin,*

L.A. Bitutskaya, E.V. Kiseleva, V.N. Yakovlev, I.N. Proskurin 16

Two-dimensional mappings for nonlinear rotator with a piecewise-constant decay factor raised by periodic shocks. *G.P. Bystrai, S.I. Studenok* 24

Quantization effects in digital first order recursive filters with values truncation. *Yu.A. Bryuhanov* 35

DETERMINISTIC CHAOS

On dynamics of model networks composed of logistic maps with inertial and dissipative global coupling. *A.S Ivanova, S.P. Kuznetsov* 42

The piecewise-linear model of the van der pol oscillator under external periodic force: Complex dynamics, peculiarities of behaviour at the parameter plane.

E.S. Mchedlova, L.V. Krasichkov 54

Chaotic behaviour of charges in crossed fields. *V.B Bayburin, A.O. Manturov, A.V. Yudin* 62

Identification of processes in the model of ring interferometer when optical field is rotated through 120°. *A.V. Lyatchin, A.L. Magazinnikov, B.N. Poizner* . . . 71

NONLINEAR WAVES. SOLITONS

Selfaction of 2D-pulses of backward volume magnetostatic waves under propagation in ferromagnetic films. *G.M. Dudko, Yu.A. Filimonov.* 81

METODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

Paradox of Painleve and auto-oscillation with Coulomb friction. *Yu.I. Neimark, V.N. Smirnova* 102

Topological defects in Karman street behind heated cylinder. *A.B. Ezersky, P. Paranthoen.* 109

Domains of the superstructure $C(2 \times 2)$ existence in a two-component adsorbate layer on the $L(100)$ facet (quasichemical approach). *Yu.V. Troshchiev, T.M. Lysak* . . . 122

NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES

About any features of the creative work: Verses and formulas. *M. Rabinovich* . . . 135

HISTORY. PERSONALIA

Yu.L. Klimontovich. V.S. Anishchenko 146

ANNOUNCEMENT 70



УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ И СКЕЙЛИНГ В ОТОБРАЖЕНИИ ОКРУЖНОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А.Ю. Жалнин, С.П. Кузнецов

Исследуются свойства скейлинга, имеющие место в окрестности критической точки отображения окружности с числом вращения «золотое среднее» (критическая точка GM) при наличии дополнительного внешнего периодического воздействия на систему. Рассматриваются возмущения неподвижной точки уравнения ренормгруппы Фейгенбаума - Каданова - Шенкера, отвечающие включению периодического воздействия. Показано, что в зависимости от частоты воздействия могут реализоваться два типа скейлинга - периодическое повторение конфигурации областей при преобразовании подобия (скейлинг P-типа) и квазипериодическое поведение (скейлинг Q-типа). Свойства самоподобия окрестности критической точки в пространстве параметров иллюстрируются построенными на компьютере картами ляпуновского показателя на плоскости параметров.

Введение

Известно, что возникновению хаотической динамики в многомерных нелинейных системах часто предшествует несколько бифуркаций рождения колебательных составляющих, отношение частот которых зависит от параметров задачи. Когда соотношение частот иррационально, в системе реализуются квазипериодические режимы. В фазовом пространстве им соответствуют аттракторы в виде торов, размерность которых определяется количеством основных частотных компонент. Лучшее всего исследована задача о переходе к хаосу через разрушение регулярного квазипериодического движения на двумерном торе [1-9], что отвечает наличию в спектре двух основных частот. Простейшей моделью для анализа этой ситуации служит одномерное отображение окружности. Одна из конкретных задач, в которых оно естественным образом возникает, это задача о синхронизации колебаний автогенератора периодической последовательностью коротких импульсов [8, 9]. В биологическом контексте отображение окружности привлекается для теоретического изучения вопросов, связанных с ритмами сердечной деятельности [10].

Мощным методом исследования сложной динамики на пороге перехода к хаосу является, как известно, ренормгрупповой анализ (РГ). Применительно к задаче о разрушении квазипериодического режима в автономном отображении окружности он был развит в работах Фейгенбаума, Каданова и Шенкера [2], а также Остланда, Рэнда и др. [3, 4].

Для детального теоретического исследования традиционно выбирают соотношение частот, заданное иррациональным числом $\omega = (5^{1/2} - 1)/2$ - «золотым средним». Точку в пространстве параметров, в которой соответствующий квазипериодический режим разрушается, будем для краткости именовать критической точкой GM (от слов «golden mean» - золотое среднее) [8, 9]. Как можно показать, в любой сколь угодно малой окрестности этой точки присутствуют периодические, квазипериодические и хаотические режимы. Известно, что критическая точка GM имеет коразмерность 2, то есть исчерпывающий анализ динамики в ее окрестности достигается в рамках двухпараметрического анализа [1-9].

В настоящей работе мы обратимся к достаточно естественной модификации классической модели и рассмотрим отображение окружности под внешним периодическим воздействием. Оно описывает, например, динамику автогенератора при воздействии последовательности импульсов, если она модулирована соответствующим образом. В более широком контексте к этой задаче можно прийти, исследуя определенные ситуации перехода к хаосу через разрушение колебательного режима с тремя основными частотами.

Нашей главной задачей будет исследование свойств скейлинга в окрестности критической точки GM в присутствии периодического внешнего воздействия. Рассматривая возмущения неподвижной точки уравнения ренормгруппы Фейгенбаума - Каданова - Шенкера, отвечающие включению периодического воздействия, мы покажем, что в зависимости от частоты внешнего воздействия могут возникать два типа скейлинга, аналогичные тем, которые были описаны ранее для систем, демонстрирующих удвоения периода [11]. В одном случае это периодическое повторение конфигурации областей при преобразовании подобия (скейлинг P-типа), в другом - квазипериодическое поведение при масштабном преобразовании (скейлинг Q-типа).

Для иллюстрации свойств самоподобия окрестности критической точки в пространстве параметров мы приводим и сопоставляем карты ляпуновских показателей, пересчитанные с учетом констант скейлинга, полученных из анализа ренормгруппы.

Автогенератор под импульсным воздействием и отображение окружности

В качестве исходного примера обратимся к задаче о воздействии последовательности коротких импульсов на автоколебательную систему.

Предположим, что в фазовом пространстве автономной системы имеется предельный цикл, в окрестности которого динамика описывается уравнениями

$$\dot{R} = -\mu R, \tag{1}$$

$$\dot{\theta} = \omega + \eta R, \tag{2}$$

где R - отклонение амплитуды от предельного цикла; μ - коэффициент, характеризующий скорость релаксации к предельному циклу; величина θ характеризует фазу движения изображающей точки на цикле, а ω - частоту автоколебаний. Константа η характеризует степень неизохронности колебаний в системе.

Пусть теперь на систему действует внешняя сила в виде последовательности импульсов. Каждый очередной толчок выводит систему из установившегося режима, после чего амплитуда вновь возвращается к предельному циклу. В результате действия n -го импульса возникает добавка к амплитуде, являющаяся периодической функцией фазы (простейшее предположение состоит в том, что это синус):

$$\Delta R_n = A_n \sin 2\pi\theta_n,$$

где A_n - параметр, характеризующий интенсивность данного импульса, а θ_n - фаза колебаний в момент толчка. Динамика системы в интервале времени между импульсами описывается уравнениями

$$R(t) = (R_n + A_n \sin 2\pi\theta_n) \exp(-\mu t), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_n + \omega t + \eta \int_0^t (R_n + A_n \sin 2\pi\theta_n) \exp(-\mu \tau) d\tau = \\ &= \theta_n + \omega t + \eta \mu^{-1} (1 - \exp(-\mu t)) (R_n + A_n \sin 2\pi\theta_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Если релаксация к предельному циклу происходит так быстро, что возмущение амплитуды успевает затухнуть практически полностью за интервал времени T_n между n -м и $(n+1)$ -м импульсами ($\exp(-\mu T_n) \rightarrow 0$), то для фазы к моменту очередного импульса получаем

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega T_n + \eta \mu^{-1} A_n \sin 2\pi\theta_n.$$

Вводя обозначения $r_n = \omega T_n$ и $K_n / (2\pi) = -\eta \mu^{-1} A_n$, приводим отображение в следующей форме:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + r_n - (K_n / (2\pi)) \sin 2\pi\theta_n \pmod{1}. \quad (5)$$

Значок модуля указывает, что значения фазовой переменной θ , отличающиеся на целое число, считаются эквивалентными.

В частном случае, когда внешнее воздействие представляет собой последовательность импульсов одинаковой амплитуды, разделенных равными интервалами времени (то есть $r_n = r$ и $K_n = K$), соотношение (5) превращается в автономное отображение окружности [8, 9]. Нас, однако, интересует более сложный случай, когда параметры импульсов изменяются от шага к шагу. Можно рассмотреть, например, два частных варианта: (i) - последовательные импульсы имеют периодическим образом модулированную амплитуду, но равноудалены во времени, и (ii) - все импульсы имеют одинаковую амплитуду, но модулируется интервал между импульсами. В первом случае в отображении (5) будет изменяться в зависимости от дискретного времени параметр K , во втором - параметр r . Мы предпочитаем сконцентрировать внимание на второй ситуации, которая приводит к задаче об аддитивном периодическом воздействии на отображение окружности. Если задать модуляцию параметра в виде

$$r_n = r + \varepsilon \cos(2\pi\Omega n + \phi),$$

то отображение (5) принимает вид

$$\theta_{n+1} = \theta_n + r - (K_n / (2\pi)) \sin 2\pi\theta_n + \varepsilon \cos(2\pi\Omega n + \phi). \quad (6)$$

где ε , Ω и ϕ есть, соответственно, амплитуда, частота и фаза модуляции параметра.

РГ-анализ критической точки GM

Как известно, на плоскости параметров автономного отображения окружности, то есть при $\varepsilon=0$ в уравнении (6), критическая точка GM имеет координаты [2-4, 8, 9]

$$(r, K)_{GM} = (0.606661063470112..., 1). \quad (7)$$

РГ-анализ динамики в этой точке развит в работах [2-4]. Поскольку мы собираемся исследовать свойства скейлинга в окрестности точки ГМ в присутствии внешнего периодического воздействия, необходимо предпринять соответствующую модификацию РГ-анализа. Это можно сделать по аналогии с работами [11-13], где такого рода исследование было проведено для задачи о периодическом воздействии на отображение, демонстрирующее переход к хаосу через удвоения периода по Фейгенбауму.

Перепишем отображение окружности с внешним воздействием (6) в следующем виде:

$$x_{n+1} = \tilde{f}_n(x_n) = f(x_n) + \gamma h_0(x_n) + \varepsilon [Z_0(x_n) \exp(2\pi i \Omega n + i\phi) + \text{с.с.}], \quad (8)$$

где $f(x) = x + r_{\text{GM}}^{-1} / (2\pi) \sin(2\pi x)$ - функция, задающая вид автономного отображения в критической точке ГМ; член $\gamma h_0(x)$ отвечает за сдвиг параметров относительно критической точки; функция $Z_0(x)$ определяется видом внешнего воздействия на систему; «с.с.» означает комплексно-сопряженный член. Сравнивая формулы (6) и (8), видим, что для рассматриваемого нами исходного отображения следует положить $Z_0(x) = 1/2$. Поскольку нас интересует динамика только в окрестности точки ГМ, параметры γ и ε будем считать малыми. Частоту внешнего воздействия Ω полагаем заданной некоторым рациональным числом: $\Omega = p/q$, где p и q целые. Соответственно, период воздействия равен q .

Основная идея РГ-анализа в работах Фейгенбаума - Каданова - Шенкера и Рэнда с соавторами состоит в следующем. «Золотое среднее» может быть аппроксимировано последовательностью подходящих дробей, определяемых отношениями чисел Фибоначчи,

$$\omega = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k, \quad \omega_k = F_{k-1} / F_k, \quad \text{где } F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, \dots, F_{k+1} = F_k + F_{k-1}.$$

Введем обозначение $\hat{F}_{k,m}$ для F_k -кратной композиции отображений (8), начиная с шага $n = F_m$

$$\hat{F}_{k,m} x = \tilde{f}_{F_m + F_{k-1}}(\tilde{f}_{F_m + F_{k-2}}(\tilde{f}_{F_m + F_{k-3}}(\dots \tilde{f}_{F_m}(x) \dots))) - F_{k-1}.$$

(Подчеркнем, что задающая исходное отображение функция зависит от дискретного времени, так что нет инвариантности относительно сдвига по индексу m). Далее, оператор эволюции за F_{k+1} итераций представим в виде суперпозиции операторов за F_k и F_{k-1} итераций, то есть

$$\hat{F}_{k+1,0} x = \hat{F}_{k-1,k} \circ \hat{F}_{k,0} x.$$

Стартуя с $F_1 = 1$ и $F_2 = 1$, определим соответствующие операторы как

$$\hat{F}_{2,0} x = f_2(x) + \gamma h_2(x) + [\varepsilon Z_2(x) \exp(i\phi) + \text{с.с.}],$$

$$\hat{F}_{1,2} x = f_1(x) + \gamma h_1(x) + [\varepsilon Z_1(x) \exp(2\pi i \Omega F_2 + i\phi) + \text{с.с.}].$$

Здесь следует положить $f_{1,2}(x) = f(x)$, $h_{1,2}(x) = h_0(x)$, $Z_{1,2}(x) = Z_0(x)$. Оператор $\hat{F}_{3,0}$ может быть представлен в виде композиции: $\hat{F}_{3,0} = \hat{F}_{1,2} \circ \hat{F}_{2,0}$. Тогда можно записать:

$$x_{F_3} = \hat{F}_{3,0} x = f_1(f_2(x)) + \gamma [f'_1(f_2(x)) h_2(x) + h_1(f_2(x))] + \\ + \varepsilon \{ \exp(i\phi) [f'_1(f_2(x)) Z_2(x) + Z_1(f_2(x)) \exp(2\pi i \Omega F_2)] + \text{с.с.} \}.$$

Последний оператор приводится к виду

$$\hat{F}_{3,0}x = f_3(x) + \gamma h_3(x) + \varepsilon[Z_3(x) \exp(i\phi) + \text{с.с.}], \quad (9)$$

где

$$f_3(x) = f_1(f_2(x)), \quad (10)$$

$$h_3(x) = f'_1(f_2(x))h_2(x) + h_1(f_2(x)), \quad (11)$$

$$Z_3(x) = f'_1(f_2(x))Z_2(x) + Z_1(f_2(x)) \exp(2\pi i \Omega F_2). \quad (12)$$

Введем новую переменную $X = A_m x$, отличающуюся от старой масштабом на фактор A_m , который выбирается как $A_m = 1/f'_m(0)$, и определим перенормированные функции

$$f_m(x) = g_m(A_m x)/A_m, \quad h_m(x) = \varphi_m(A_m x)/A_m, \quad Z_m(x) = \psi_m(A_m x)/A_m.$$

Введем также для удобства фазовую переменную $w_k = 2\pi \Omega F_k$, которую в дальнейшем условимся называть *перенормируемой фазой*. Тогда система уравнений (9)-(12) может быть переписана в виде

$$\hat{F}_{3,0}X = g_3(X) + \gamma \varphi_3(X) + \varepsilon[\psi_3(X) \exp(i\phi) + \text{с.с.}], \quad (13)$$

$$g_3(X) = \alpha_3 \alpha_2 g_1(\alpha_2^{-1} g_2(X/\alpha_3)), \quad (14)$$

$$\varphi_3(X) = \alpha_3 g'_1(\alpha_2^{-1} g_2(X/\alpha_3)) \varphi_2(X/\alpha_3) + \alpha_3 \alpha_2 \varphi_1(\alpha_2^{-1} g_2(X/\alpha_3)), \quad (15)$$

$$\psi_3(X) = \alpha_3 g'_1(\alpha_2^{-1} g_2(X/\alpha_3)) \psi_2(X/\alpha_3) + \alpha_3 \alpha_2 \psi_1(\alpha_2^{-1} g_2(X/\alpha_3)) \exp(iw_2), \quad (16)$$

$$w_3 = w_2/(F_2/F_3), \quad (17)$$

где

$$\alpha_{m+1} = A_{m+1}/A_m = 1/[\alpha_m g_{m-1}(\alpha_m^{-1} g_m(0))].$$

Как видим, новый набор $\{g_3, \varphi_3, \psi_3, w_3\}$, определяющий оператор эволюции $\hat{F}_{3,0}$, выражается посредством определенных соотношений через два предыдущих набора $\{g_1, \varphi_1, \psi_1, w_1\}$ и $\{g_2, \varphi_2, \psi_2, w_2\}$. Повторяя аналогичные рассуждения снова и снова, можно построить последовательность операторов эволюции $\hat{F}_{k,0}$, заданных наборами $\{g_k, \varphi_k, \psi_k, w_k\}$.

Согласно результатам работ [2-4] (см. также [8, 9]), последовательность функций g_k сходится к универсальной функции $g(X)$, являющейся решением функционального уравнения

$$g(X) = \alpha^2 g(\alpha^{-1} g(X/\alpha)), \quad (18)$$

где

$$\alpha = -1.28857455395436\dots$$

есть универсальная константа, являющаяся пределом последовательности коэффициентов перенормировки α_k .

Последовательность функций φ_k ведет себя как

$$\varphi_k(X) = \sum_i (\delta_i)^k \chi_i(X), \quad (19)$$

где δ_i и χ_i - собственные числа и функции, полученные из решения уравнения

$$\delta^2 \chi(X) = \delta \alpha \cdot g'(\alpha^{-1} g(X/\alpha)) \chi(X/\alpha) + \alpha^2 \chi(\alpha^{-1} g(X/\alpha)).$$

С точки зрения асимптотического поведения (при больших k), из всего спектра собственных значений существенны только два:

$$\delta_1 = -2.83361065589116... \quad \text{и} \quad \delta_2 = \alpha^2 = 1.66042438109870....$$

Они и отвечают за двухпараметрический скейлинг структуры языков Арнольда на плоскости (r, K) автономного отображения [1-9].

Обратимся теперь к новой части РГ-анализа, к уравнениям (16) и (17). Интересуясь асимптотическим поведением решения, мы можем заменить g_k и α_k , соответственно, на g и α и записать на k -й итерации преобразования РГ

$$\psi_{k+1}(X) = \alpha g'(\alpha^{-1} g(X/\alpha)) \psi_k(X/\alpha) + \alpha^2 \psi_{k-1}(\alpha^{-1} g(X/\alpha)) \exp(i w_k), \quad (20)$$

$$w_{k+1} = w_k / (F_k / F_{k+1}). \quad (21)$$

Существенно, что уравнение (20) содержит переменный коэффициент в последнем члене, который зависит от перенормируемой фазы $w_k = \{2\pi \Omega F_k\}$.

Очевидно, асимптотическое поведение функций ψ_k будет определяться свойствами последовательности w_k . Проведенные нами численные расчеты показали, что для всех протестированных рациональных значений частоты $\Omega = p/q$ последовательность w_k оказывается периодической (с точностью до несущественных разностей, кратных 2π). Соответствующий период будем обозначать $N(\Omega)$. Он кратен тому периоду, с которым в последовательности Фибоначчи встречаются числа, делимые без остатка на q . Данные по периодам $N(\Omega)$ для различных частот воздействия Ω приведены в таблице.

Итак, функциональное уравнение (20) содержит переменный коэффициент с периодом $N(\Omega)$ по «ренормвремени» k . Посредством подстановки

$$\psi_{Nk+i}(X) = v^k \xi_i(X) \quad (22)$$

уравнение (20) сводится к системе линейных уравнений, определяющей задачу на собственные числа и собственные векторы. Решив ее, можно найти спектр величин v , собственных чисел линеаризованного уравнения РГ, и собственные векторы, каждый из которых определяется набором функций-компонент $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$.

Фактически, из всех собственных чисел, имеющих место при заданном параметре частоты Ω , нас будет интересовать только самое большое по абсолютной величине, так как именно оно отвечает за новые свойства скейлинга в пространстве параметров, связанные с периодическим внешним воздействием.

Чтобы определить старшее собственное значение v численно, поступаем следующим образом. Функции аппроксимируются полиномами, а преобразование РГ, которому они подвергаются, реализовано в виде компьютерной программы. Эта программа на выходе выдает новый набор коэффициентов для очередной функции по наборам для двух предыдущих. Задавая «затравочные» функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, получаем последующие функции путем прямых итераций отображений (20) и (21). При $k \rightarrow \infty$ последовательность функций $\{\psi_k(x)\}_{k=0,1,2,\dots,\infty}$ ведет себя как

$$\{\psi_{Nk+1}, \psi_{Nk+2}, \dots, \psi_{Nk+N}\}_{k=0,1,2,\dots,\infty} \rightarrow \{v^k \xi_1, v^k \xi_2, \dots, v^k \xi_N\}_{k=0,1,2,\dots,\infty},$$

где v - наибольшее по модулю собственное число. Таким образом, его можно найти как отношение

$$v = \psi_{(N+1)k}(0) / \psi_{Nk}(0).$$

Итак, периодическое воздействие определенной частоты Ω на отображение окружности приводит к появлению нового собственного числа линеаризованного

Таблица

Ω	Период $N(\Omega)$	$ v $	$\arg v$	Тип скейлинга
0	1	2.83361065	π	P
$1/7$	16	690109.532	0.0	P
$1/6$	24	112818867	0.0	P
$2/11$	10	2202.30663	0.79101604	Q
$1/5$	20	4192174.76	0.0	P
$3/14$	48	$1.35984624 \times 10^{16}$	0.0	P
$2/9$	24	119101569	0.0	P
$3/13$	28	6.21312900×10^9	0.0	P
$1/4$	6	95.5105145	0.59851103	Q
$4/15$	40	$1.52212247 \times 10^{13}$	0.09557059	Q
$3/11$	10	1335.00232	0.65025055	Q
$5/18$	24	25524454.0	0.0	P
$2/7$	16	100480.780	0.0	P
$5/17$	36	$5.13620730 \times 10^{11}$	0.0	P
$3/10$	60	$6.31537750 \times 10^{19}$	0.0	P
$4/13$	28	309689580	0.0	P
$1/3$	8	329.570755	0.0	P
$5/14$	48	$2.03335713 \times 10^{15}$	0.0	P
$4/11$	10	2166.74895	-0.39638565	Q
$7/19$	18	1633210.57	-1.24919695	Q
$3/8$	12	16700.1629	-0.56210947	Q
$8/21$	16	1062840.11	-0.65025184	Q
$5/13$	28	$1.73437205 \times 10^{10}$	0.0	P
$7/18$	24	267302442	0.0	P
$2/5$	20	4192174.76	0.0	P
$7/17$	36	$3.60438506 \times 10^{11}$	0.0	P
$5/12$	24	206389500	1.14787857	Q
$8/19$	18	413134.129	0.52055924	Q
$3/7$	16	78245.8906	0.0	P
$7/16$	24	187703591	-0.78777353	Q
$4/9$	24	16037145.9	0.0	P
$5/11$	10	943.996261	0.12189284	Q
$1/2$	3	7.38728606	π	P

уравнения ренормгруппы, так что свойства скейлинга в окрестности критической точки GM в пространстве параметров будут определяться тройкой констант

$$\{\delta_1^N, \delta_2^N, v\}.$$

Обратим внимание на правило перенормировки временного масштаба, вытекающее из уравнения (21). На каждой итерации преобразования РГ фазовая

переменная w_k умножается на показатель F_k/F_{k-1} , в пределе стремящийся к ω^{-1} . Следовательно, полному периоду РГ-преобразования отвечает пересчет характерного временного масштаба динамических режимов на фактор ω^{-N} .

Типы скейлинга в отображении окружности в присутствии внешнего воздействия

Рассмотрим оператор эволюции на k -й итерации РГ-преобразования

$$\hat{F}_{kN} X = g_k(X) + \gamma \varphi_k(X) + \varepsilon [\psi_k(X) \exp(i\phi) + \text{c.c.}]$$

или, учитывая асимптотические свойства функций (см. (18), (19) и (22)),

$$\hat{F}_{kN} X = g_k(X) + \Delta r \cdot \delta_1^{Nk} \cdot \chi_1(X) + \Delta K \cdot \delta_2^{Nk} + \varepsilon [v^k \xi_1(X) \exp(i\phi) + \text{c.c.}], \quad (23)$$

где $\Delta r = r - r_{GM}$, $\Delta K = K - 1$. Отсюда следует, что в общем случае могут присутствовать три рода существенных возмущений неподвижной точки уравнения РГ.

Во-первых, при вариации параметра r включается возмущение, которому за полный период РГ-преобразования $N(\Omega)$ соответствует константа скейлинга δ_1^N .

Во-вторых, вариации параметра K отвечает тип возмущения, для которого масштабная константа за период РГ-преобразования равна δ_2^N .

Наконец, третий вид возмущения возникает с включением внешнего периодического воздействия, и с ним ассоциируются новые закономерности скейлинга, за которые отвечает константа v .

Результаты расчетов показывают, что в зависимости от частоты воздействия Ω собственное число v может оказаться действительным или комплексным. Это приводит к возникновению двух типов скейлинга, которые, следуя терминологии работы [11], будем называть P- и Q-типом, соответственно.

Чтобы сделать объяснения более простыми и наглядными, ограничимся обсуждением ситуации, когда присутствуют только первый и третий виды возмущения, для чего в уравнении (23) положим $\Delta K = 0$.

Рассмотрим сначала случай действительного собственного числа v . (Это имеет место, в частности, при $\Omega = 1/2$ или $1/3$.) Как видно из (23), перенормировка параметров $\Delta r \rightarrow \Delta r \delta_1^{Nk}$ и $\varepsilon \rightarrow \varepsilon/v^k$ при действительном v приводит к тому, что вид оператора эволюции на характерном временном масштабе, умноженном на ω^{-Nk} , будет совпадать с исходным. Поэтому в системе будет реализоваться динамический режим, подобный первоначальному, но с другим характерным временным масштабом.

На рис. 1, а, б приводится иллюстрация скейлинга для случая $\Omega = 1/2$. На рис. 1, а представлена карта на плоскости параметров $(\Delta r, \varepsilon)$, где в каждой точке значение ляпуновского показателя кодируется оттенком серого цвета. Для построения аналогичной карты на рис. 1, б мы пересчитываем масштаб по осям координат по правилу $(\Delta r, \varepsilon) \rightarrow (\Delta r/\delta_1^3, \varepsilon/v)$ и умножаем в каждой точке карты значение ляпуновского показателя на ω^{-3} . Сравнивая полученные карты, мы видим, что они визуальны практически неотличимы. (На самом деле, степень соответствия становится тем лучше, чем меньшая окрестность критической точки рассматривается.)

Частоте воздействия $\Omega = 1/3$ соответствует тот же тип скейлинга. Проиллюстрируем его, выбрав другую плоскость параметров. Заметим, что внешнее воздействие имеет помимо амплитуды еще один параметр - фазу, и построим ляпуновскую карту в координатах $A = \varepsilon \cos \phi$, $B = \varepsilon \sin \phi$. Если изменить масштаб по обеим осям на фактор v , а временной масштаб - на фактор ω^{-8} (так как $N(1/3) = 8$), то получаем картинку, подобную исходной (см. рис. 1, в, г).

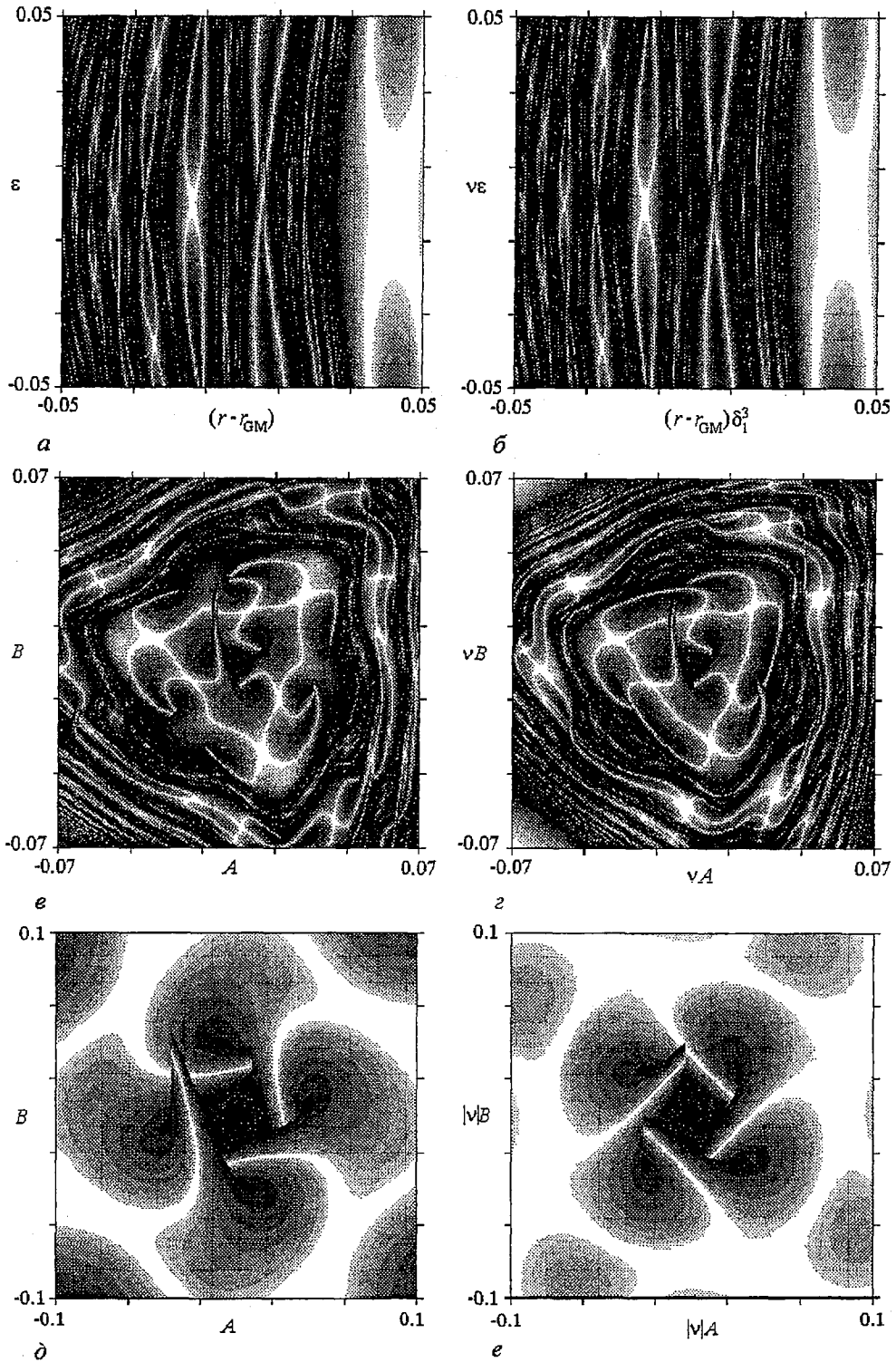


Рис. 1. Карты ляпуновских показателей для периодически возбуждаемого отображения окружности (6) (при $K=1$): на плоскости параметров $(\Delta r, \epsilon)$ для значения параметра (частоты) $\Omega=1/2$ (a, б), и на плоскости $(A = \epsilon \cos \phi, B = \epsilon \sin \phi)$ для $\Omega=1/3$ (в, г) и для $\Omega=1/4$ (д, е). Тона серого цвета от белого до черного соответствуют значениям ляпуновского показателя в интервале от минус бесконечности до нуля. Увеличение малых фрагментов карт (б, г, е) иллюстрирует наличие скейлинга Р-типа (а-г) и Q-типа (д-е). Увеличение фрагментов сопровождается пересчетом значения ляпуновского показателя путем умножения на фактор $\omega^{-N(\Omega)}$

Другой тип устройства окрестности критической точки возникает, если собственное число ν при данной частоте периодического воздействия Ω оказывается комплексным. В этом случае можно переписать уравнение (23) в виде

$$\hat{F}_{Nk+1} X = g(X) + \Delta r \delta_1^{Nk} \chi_1(X) + \varepsilon [|\nu|^k \xi_1(X) \exp(i\phi + ik \arg \nu) + \text{с.с.}]. \quad (24)$$

Обратим внимание, что под знаком экспоненты появилось слагаемое $ik \arg \nu$, которое можно интерпретировать как добавку к фазе внешнего периодического воздействия. Следовательно, на плоскости параметров (A, B) перенормировка осей координат на фактор $|\nu|^k$ не приведет к воспроизведению структуры окрестности критической точки. Из рис. 1, δ , e видно, что характерная структура окрестности повторяется с точностью до поворота на некоторый определенный угол. Для того чтобы получить воспроизведение динамических режимов, следует перейти к координатам (A', B') , определяемых по правилу $A' + iB' = (A + iB)/\nu^k$, то есть осуществить поворот плоскости (A, B) на угол $(-k \arg \nu)$. Физически в каждой конкретной точке пространства параметров это соответствует изменению фазы периодического воздействия на систему на соответствующую величину.

Обобщенные данные по значениям константы ν для различных частот Ω и соответствующим типам скейлинга приведены в таблице. Значения Ω задаются как рациональные числа первых шести уровней построения так называемого дерева Фейри [14]. В таблице представлены данные лишь для частот из интервала $\Omega \in [0, 1/2]$, поскольку другая половина единичного интервала устроена симметричным образом.

Хорошей иллюстрацией скейлинга P- и Q-типа могут служить «коллажи» из ляпуновских карт, выполненных на плоскости $(\Delta r, \varepsilon)$ в двойном логарифмическом масштабе. В этих координатах замена переменных $\Delta r \rightarrow \Delta r / |\delta_1^N|$ и $\varepsilon \rightarrow \varepsilon / |\nu|$ отвечает сдвигу вдоль двух осей координат на величины $N \ln |\delta_1|$ и $\ln |\nu|$, соответственно.

Принимая во внимание скейлинг, мы можем строить ляпуновские карты в двойном логарифмическом масштабе в некоторой области изменения параметров Δr и ε для разных итераций преобразования PГ, а потом упорядочить эти карты так, чтобы покрыть некоторый широкий интервал изменения $\lg |\Delta r|$ и $\lg |\varepsilon|$. При построении карт значение ляпуновского показателя в каждой точке нормируется на фактор $|\nu - r_{GM}|^\beta$, где $\beta = -\log_{|\delta_1|} ((5^{1/2} - 1)/2)$. На рис. 2, a , b такие «коллажи» представлены для $\Omega = 1/3$ и $\Omega = 1/4$. В первом случае на карте можно видеть периодическое повторение формы областей (скейлинг P-типа). Во втором случае (Q-тип скейлинга) повторение фрагментов карты не наблюдается, хотя в среднем граница хаоса располагается вдоль прямой линии вполне определенного наклона.

Заключение

В данной работе были проанализированы свойства скейлинга в пространстве параметров периодически возбуждаемого отображения окружности в окрестности критической точки GM, отвечающей разрушению квазипериодичности с числом вращения «золотое среднее». Были рассмотрены возмущения неподвижной точки уравнения ренормгруппы Фейгенбаума - Каданова - Шенкера, соответствующие включению периодического воздействия. При этом возникает новое собственное число линеаризованного уравнения ренормгруппы, зависящее от параметра частоты воздействия. Это собственное число может быть действительным или комплексным, соответственно, в пространстве параметров реализуются два типа скейлинга:

- периодический (P-тип), когда структуры в пространстве параметров

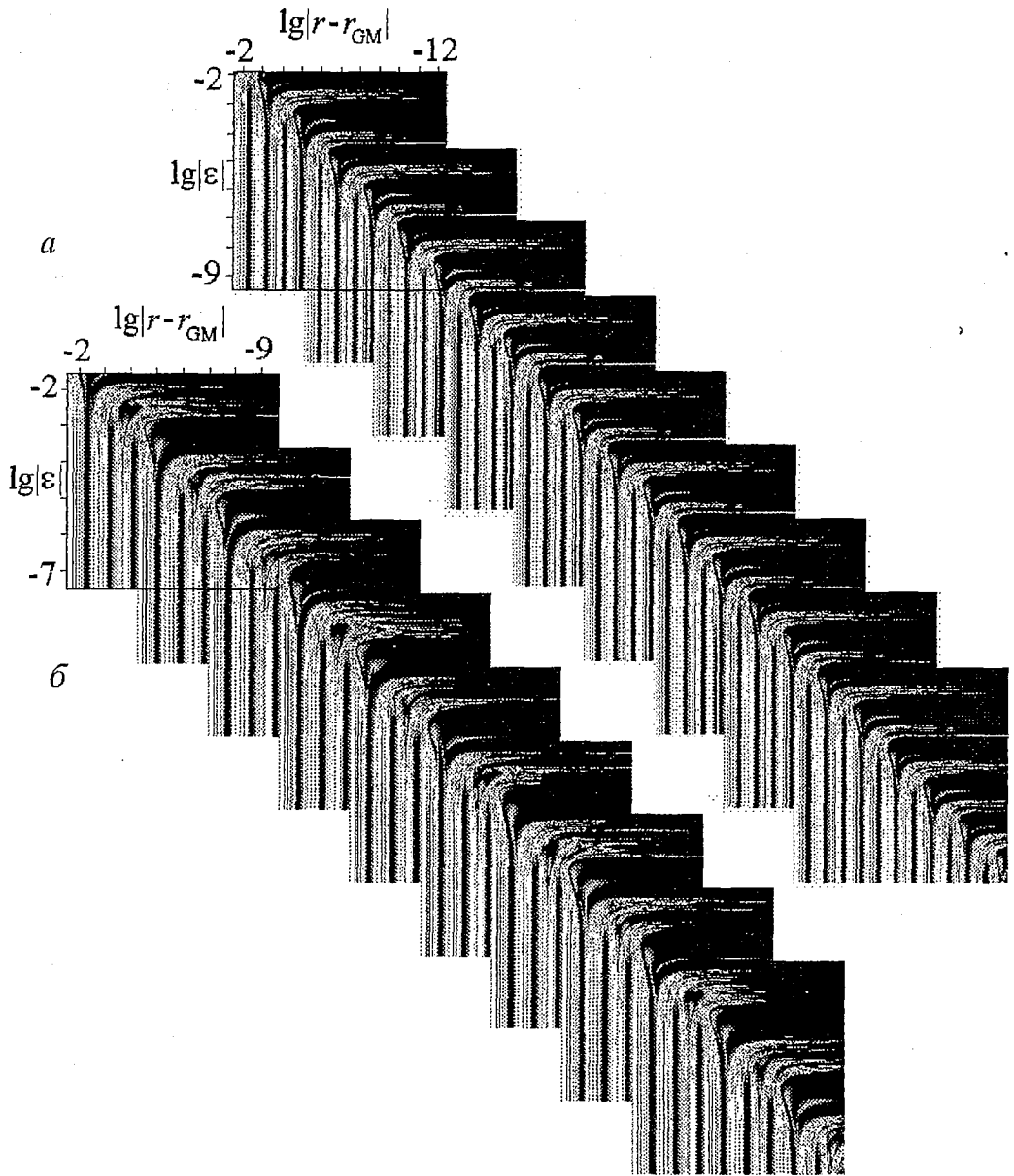


Рис. 2. «Коллажи», составленные из фрагментов ляпуновских карт в двойном логарифмическом масштабе ($\lg|r-r_{GM}|$, $\lg|\epsilon|$). Тона серого цвета от белого до черного соответствуют значениям перенормированного ляпуновского показателя $\Lambda/|r-r_{GM}|^\beta$, где $\beta = -\log_{5/4}((5^{1/2}-1)/2)$, от минус бесконечности до нуля. Можно наблюдать периодическое повторение конфигураций динамических режимов (P-тип скейлинга) для $\Omega=1/3$ (a), и квазипериодическое чередование фрагментов, соответствующее Q-типу скейлинга, при $\Omega=1/4$ (б)

воспроизводятся в малых масштабах при перенормировке координат на факторы скейлинга;

- квазипериодический (Q-тип), при котором двумерная структура динамических режимов на плоскости параметров является квазипериодической, но в трехмерном пространстве параметров воспроизводится при пересчете масштаба с точностью до поворота на некоторый угол.

Известно, что тип поведения, ассоциирующийся с критической точкой GM, с присущими ему универсальными свойствами скейлинга может наблюдаться в различных нелинейных диссипативных системах [15-19], автономное отображение

окружности может рассматриваться как наиболее удобный для исследования представитель соответствующего класса универсальности. Обнаружение новых закономерностей скейлинга в динамике отображения окружности при внешнем периодическом воздействии позволяет предположить, что аналогичные явления будут иметь место и в других системах, относящихся к тому же классу универсальности, при наличии периодического воздействия. По-видимому, того же рода закономерности будут проявляться в определенных областях пространства параметров при рассмотрении задачи перехода к хаосу через разрушение трехчастотной квазипериодичности. В общем случае эта задача чрезвычайно сложна, и поэтому любые частные результаты, проливающие свет на особенности соответствующей динамики, могут оказаться важными для продвижения в ее анализе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №00-02-17509.

Библиографический список

1. *Shenker S.J.* Scaling behavior in a map of a circle onto itself: Empirical results // *Physica D.* 1982. Vol. 5. P. 405.
2. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: a renormalization group analysis // *Physica D.* 1982. Vol. 5. P. 370.
3. *Rand D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E.* Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 49, № 2. P. 132.
4. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E.* Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems // *Physica D.* 1983. Vol. 8. P. 303.
5. *Jensen M.H., Bak P., Bohr T.* Complete devil's staircase, fractal dimension, and universality of mode-locking structure in the circle map // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. P. 1637.
6. *Kim S., Ostlund S.* Universal scaling in circle map // *Physica D.* 1989. Vol. 39, № 2-3. P. 365.
7. *Cvitanovic P., Gunaratne G.H., Vinson M.J.* On the mode-locking universality for critical circle map // *Nonlinearity.* 1990. Vol. 3. P. 873.
8. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М., Физматлит, 2001, 296с.
9. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Иванов Н.Ю., Осин А.А.* Скейлинг при переходе к хаосу через разрушение квазипериодического движения с отношением частот, заданным золотым средним // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2000. Т. 8, № 4. С. 3.
10. *Arnold V.I.* Cardiac arrhythmias and circle mappings // *CHAOS.* 1991. Vol. 1, № 1. P. 20.
11. *Ivan'kov N.Yu., Kuznetsov S.P.* Different types of scaling in the dynamics of period-doubling maps under external periodic driving // *Discrete Dynamics in Nature and Society.* 2000. Vol. 5. P. 223.
12. *Кузнецов С.П.* О воздействии периодического внешнего возмущения на систему, демонстрирующую переход порядок - хаос через бифуркации удвоения периода // *Письма в ЖЭТФ.* 1984. Т. 39, № 3. С. 113.
13. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S.* Renormalization group for the response function and spectrum of the period-doubling system // *Phys. Lett. A.* 1989. Vol. 140, № 4. P. 166.
14. *Graham R.L., Knuth D.E., and Patashnik O.* *Concrete Mathematic.* Addison - Wesley Publ. 1989.
15. *Bohr T., Bak P., Jensen M.H.* Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. 2. Josephson junctions, charge-density waves, and standard maps // *Phys. Rev. A.* 1984. Vol. 30. P. 1970.

16. *Glazier J.A., Gunaratne G., Libchaber A.* $F(\alpha)$ curves - experimental results // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol. 37. P. 523.

17. *Glazier J.A., Libchaber A.* Quasi-periodicity and dynamical systems - An experimentalists view // *IEEE Trans. on Circuits and Systems.* 1988. Vol. 35. P. 790.

18. *Stavans J., Helsot F., Libchaber A.* Fixed winding number and the quasi-periodic route to chaos in a convective fluid // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55. P. 595.

19. *Леву Б.Г.* Новый глобальный фрактальный формализм описывает различные сценарии перехода к хаосу // *Физика за рубежом.* Вып. 87. М.: Мир, 1987, 263с.

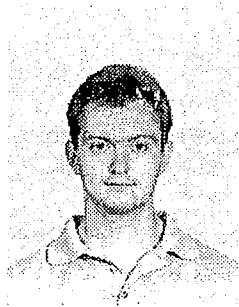
*Саратовский государственный
университет
Саратовское отделение Института
радиотехники и электроники РАН*

*Поступила в редакцию 29.03.02
после доработки 2.09.02*

UNIVERSALITY AND SCALING IN THE CIRCLE MAP UNDER EXTERNAL PERIODIC DRIVING

A.Yu. Jalnine, S.P. Kuznetsov

We investigate scaling properties of a neighborhood of the «golden mean» critical point in the circle map in presence of external periodic forcing upon the system. We consider such perturbations of the fixed point of the Feigenbaum-Kadanoff-Shenker renormalization group equation, which are initiated by periodic forcing. We show that, depending upon the frequency of external forcing, two types of scaling behavior can be observed. The first (P-type) is associated with periodic repetition of the structures of dynamical regimes in parameter space under subsequent scaling transformations. For the second case (Q-type of scaling) quasiperiodic behavior of structures in the parameter space takes place. The both types of scaling are illustrated by parameter-space diagrams for re-scaled Lyapunov exponents.



Жалнин Алексей Юрьевич - родился в Балапове Саратовской области (1977). Окончил физико-технический лицей № 1 Саратова (1995), факультет нелинейных процессов СГУ (2000). Аспирант кафедры динамических систем СГУ. Область научных интересов: квазипериодическая динамика, странные нехаотические аттракторы, хаотическая синхронизация.



Кузнецов Сергей Петрович родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений при переходе к хаосу. Занимается также исследованиями в области квантового хаоса. Опубликовал свыше 100 работ в отечественной и зарубежной научной печати. Соавтор двух монографий и одной популярной книги. Автор нескольких оригинальных учебных курсов, прочитанных им в разные годы на кафедрах электроники, радиофизики и факультета нелинейных процессов СГУ. Соросовский профессор (2000). Член американского физического общества. E-mail: kuz@spkuz.saratov.su.



ВЕЙВЛЕТНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ВАРИАБЕЛЬНОСТИ СЕРДЕЧНОГО РИТМА

*Я.А. Туровский, В.В. Мишин, Л.А. Битюцкая,
Е.В. Киселева, В.Н. Яковлев, И.Н. Проскурин*

На основе вейвлетного анализа предложен метод выделения особенностей вегетативной регуляции вариабельности сердечного ритма человека. Проведена оценка количества контуров регуляции вариабельности сердечного ритма. Показаны типологические реакции вариабельности сердечного ритма на различные типы экзогенных влияний в различных возрастных группах. Выдвинуто предположение о связи характеристик «всплесков вейвлетной плотности мощности» с характером адаптации плода к внутриутробной гипоксии.

Введение

Методы спектрального анализа широко используются в изучении динамических реакций целого ряда систем и органов человека на изменяющиеся факторы окружающей среды. Примерами реакций адаптации могут служить изменение электрической активности мозга, скорость и протекание биохимических процессов, реакции сердечно-сосудистой системы. В частности, вариабельность (изменчивость) сердечного ритма, отражающая степень напряженности адаптивных реакций организма [1,2]. Стандартные методики, используемые в современной медицинской практике [2] для задач анализа вариабельности сердечного ритма (ВСР), не позволяют оценить временную динамику процесса. Они, как правило, основаны на предположении о стационарном характере реакций вегетативного гомеостаза. Для исследования временной структуры сигнала необходимо применение методов, позволяющих отследить эволюцию функционально значимых частотных компонентов исследуемого сигнала. Вейвлетный анализ [3,4], широко используемый в последнее время в различных областях, позволяет провести такую оценку.

Так в работе Stefanovska A. et al. [5] с помощью вейвлетного анализа был определен частотный диапазон показателей микроциркуляции, соответствующий эндотелиальной активности; Joho S. et al. [6] вейвлетный анализ применили для выявления активации симпатического отдела вегетативной нервной системы (ВНС) в ответ на ишемию миокарда; Kadambe S. et al. [7] использовали диадическое вейвлет-преобразование для определения комплекса QRS на ЭКГ.

Целью нашей работы являлась оценка взаимовлияния физиологически значимых частотных диапазонов рядов ВСП с помощью вейвлетного анализа.

1. Объекты и методы

Для выработки общих принципов вейвлетного анализа кардиоинтервалограмм были выбраны группы испытуемых в разные периоды онтогенеза, для каждого из которых характерны свои особенности механизмов регуляции ВСП [8, 9].

Группа 1: 53 плода со сроком гестации 36-40 недель. Исследовались временные ряды, полученные методом антенатальной кардиоотографии (тахограммы) - зависимость частоты сердечных сокращений (ЧСС) плода от времени.

Группа 2: 30 детей без патологии сердечно-сосудистой системы в возрасте 6-13 лет. Исследовались RR-интервалограммы - регистрация времени между двумя соседними зубцами R на ЭКГ.

Группа 3: 60 студентов в возрасте 17-25 лет. Рассматривались RR-интервалограммы.

Перед проведением вейвлетного анализа из сигнала вычитался постоянный тренд. Для исследования временной структуры ВСП использовалось непрерывное вейвлетное преобразование [3]

$$W(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi[(t-b)/a]dt, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a > 0. \quad (1)$$

Здесь a - масштаб вейвлетного преобразования; b - время, отсчеты исследуемого ряда; \mathbb{R} - множество целых чисел. В качестве анализирующей функции использовалась базисная функция вейвлета Morlet [10]

$$\psi_0 = \pi^{-1/4} e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}, \quad (2)$$

На рис. 1 представлена антенатальная тахограмма и её вейвлетная диаграмма. Гестационный срок плода 35 недель, состояние умеренной внутриутробной гипоксии. Наличие древовидной структуры локальных экстремумов свидетельствует о самоподобии исследуемого процесса, что, в конечном итоге, отражает существование иерархии механизмов регуляции.

На основе матрицы вейвлетных коэффициентов строились скейлограммы, заданные как среднее квадратов вейвлетных коэффициентов $W(a,b)$ на заданном масштабе a

$$V(a) = a/N \sum_{b=1}^N (W(a,b))^2. \quad (3)$$

Являясь функцией масштаба, скейлограмма отражает ту же информацию, что и спектральная плотность мощности Фурье, являющаяся функцией от частоты. По аналогии со спектральной плотностью мощности спектра Фурье введем понятие вейвлетной плотности мощности (ВПМ). Как известно, вейвлет-преобразование имеет преимущество перед преобразованием Фурье прежде всего за счет свойства локальности у вейвлетов. Вейвлетное преобразование, представляющее как бы временную развертку спектра, позволяет получить и более локализованную во времени энергетическую информацию. Энергетические диаграммы (скейлограммы) строились на кратковременных (примерно 2-3 секунды) отрезках, что позволило отслеживать динамику процесса. На скейло-граммах выделялись физиологически значимые частотные диапазоны, ответственные за различные типы механизмов регуляции. При анализе кардиоотограмм (*группа 1*)

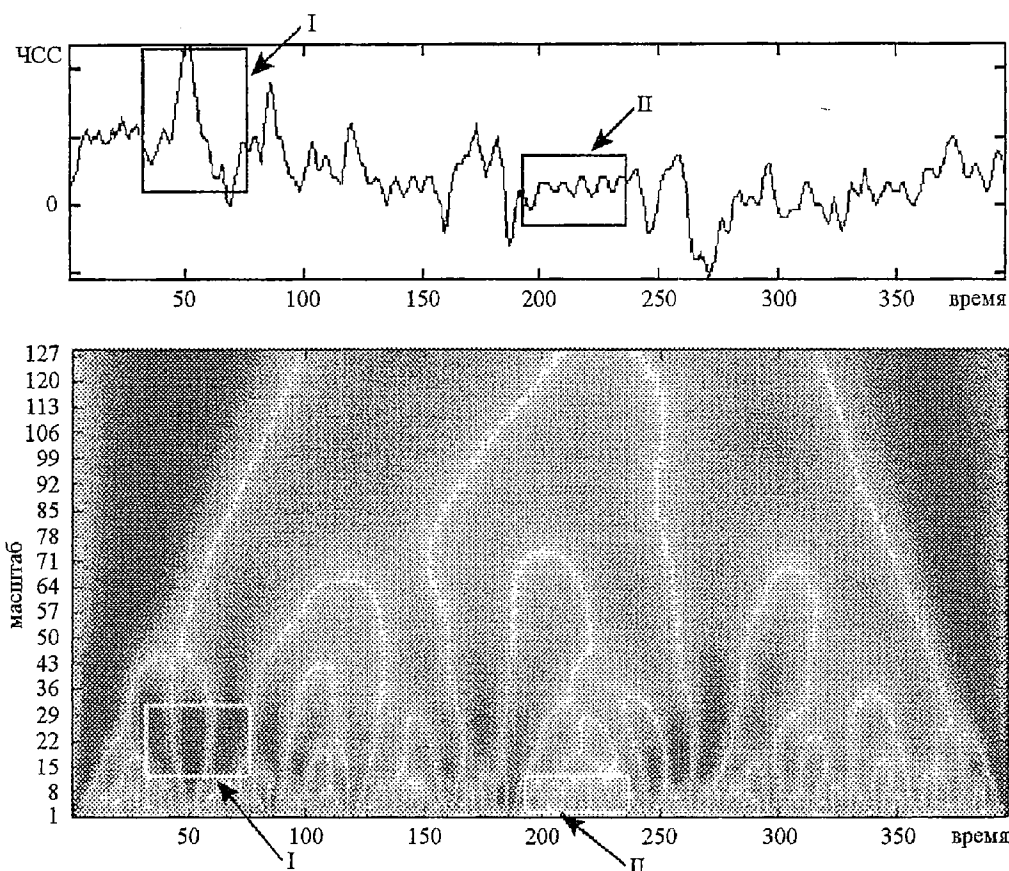


Рис. 1. *a* - Антенатальная тахограмма плода и *б* - ее вейвлетная диаграмма (анализирующая функция - вейвлет Morlet). Фрагмент I соответствует акцелерации; фрагмент II соответствует базальному ритму; темные участки соответствуют максимальным значениям вейвлетных коэффициентов

рассматривались два частотных диапазона: 0.0025-0.005 Гц, что соответствует акцелерациям (медленноволновым, высокоамплитудным колебаниям); 0.005-0.07 Гц (высокочастотная область базального ритма) (рис. 1). На RR-интервалограммах (группы 2 и 3) выделялись следующие частотные диапазоны: выше 0.15 Гц - HF-диапазон влияния парасимпатического отдела ВНС; 0.15-0.05 Гц - LF-диапазон влияния симпатического отдела ВНС.

Алгоритм построения «локального вейвлетного спектра» представлен на рис. 2. В каждом из диапазонов определялось суммарное значение ВПМ

$$U = \sum_{a_1}^{a_2} V(a). \quad (4)$$

Интегральная величина U , рассчитанная для каждого из физиологически значимых диапазонов, характеризует динамику влияния симпатического, или парасимпатического, отдела ВНС на ВСП (рис. 3).

Для определения характера взаимовлияния физиологически значимых частотных диапазонов в низкочастотной составляющей сигнала (для RR-интервалограмм - LF, для тахограмм - диапазон акцелераций) выделялись нестационарные элементы (области существенного кратковременного увеличения значений интегральной величины U). В высокочастотной составляющей исследуемого временного ряда (для RR-интервалограмм - HF, для тахограмм - диапазон базального ритма) анализировались удельные значения U как на временных отрезках, соответствующих нестационарным элементам, так и вне их.

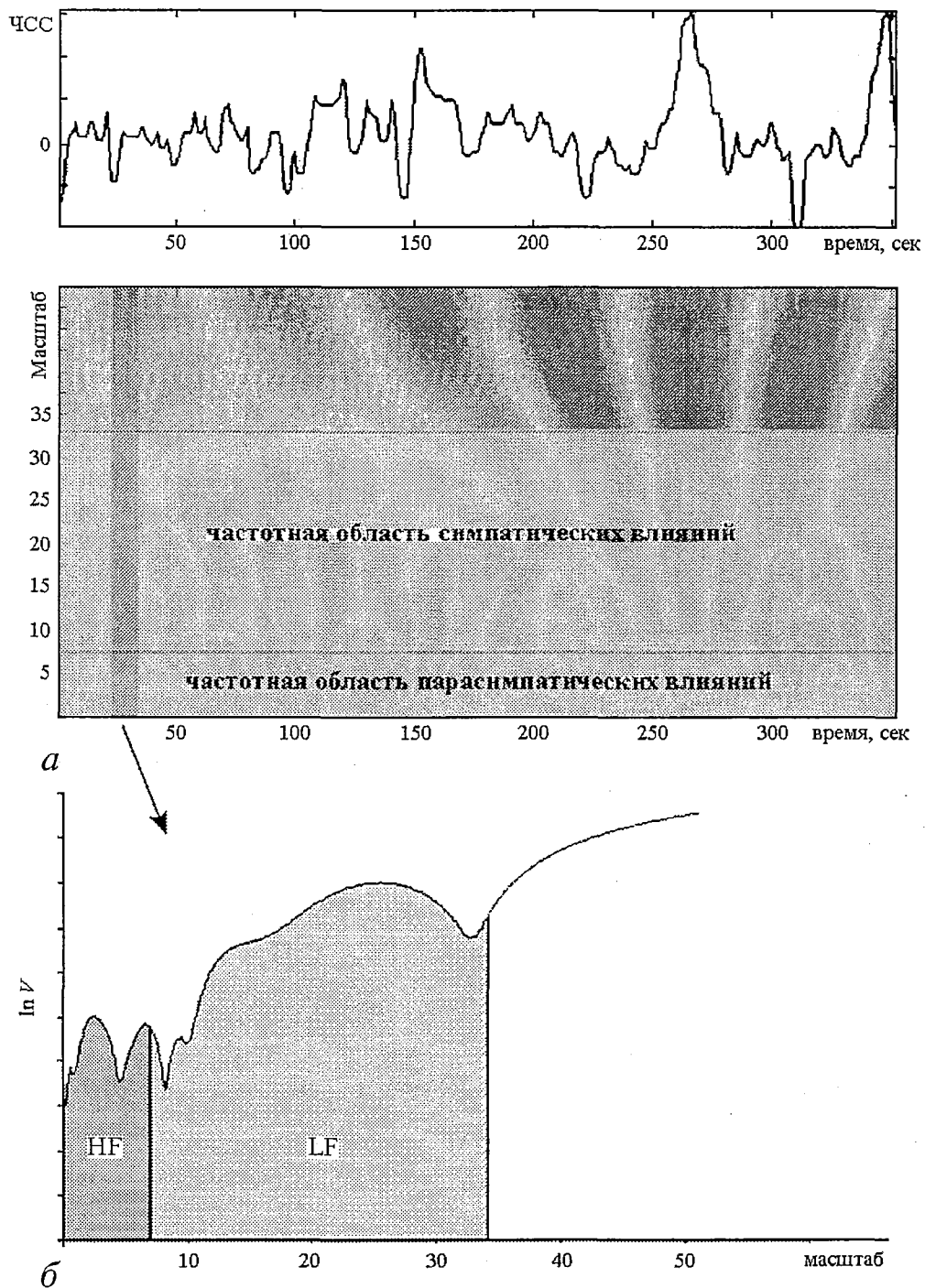


Рис. 2. Частотно-временной анализ variability сердечного ритма взрослого человека: *а* - исходная кардиоинтервалограмма и вейвлетная диаграмма с выделенными физиологически значимыми частотными диапазонами; *б* - локальный вейвлетный спектр

Наличие значимых различий между отнесенными ко времени значениями U на исследуемых временных участках свидетельствует о взаимовлиянии между группами нервных центров симпатического и парасимпатического отдела ВНС (рис. 3).

На каждой из построенных скейлограмм (локальных спектров) определялось наличие и положение экстремумов [11]. Максимумы (аналогично пикам

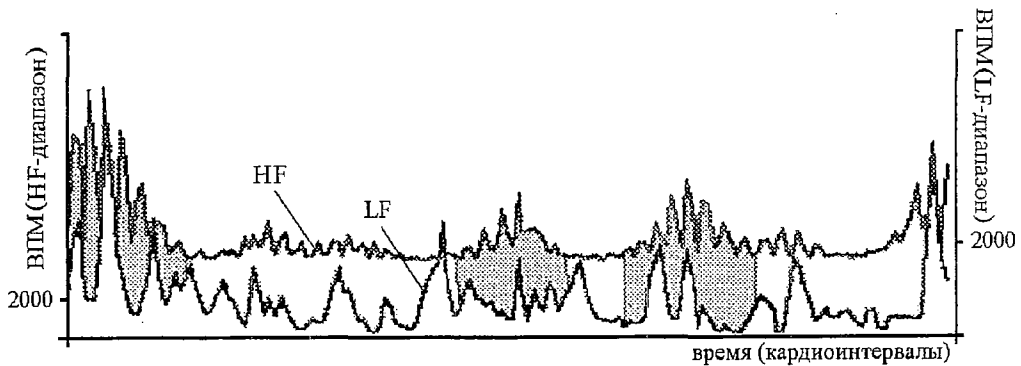


Рис. 3. Типичная зависимость вейвлетной плотности мощности от времени в физиологически значимых диапазонах variability сердечного ритма взрослого человека. В выделенных участках выявлено синхронное изменение удельной вейвлетной плотности мощности, свидетельствующее о взаимовлиянии диапазонов

спектра Фурье) соответствуют наиболее выраженным частотным компонентам. Количество доминирующих частот можно связать с числом контуров регуляции, формирующих картину ВСР. Оценивалось изменение числа максимумов в физиологически значимых частотных диапазонах в различных функциональных состояниях. Это позволило оценить структуру контуров регуляции и сделать на ее основе вывод об изменении функционального состояния.

2. Результаты и обсуждение

Описанная методика анализа локальных вейвлетных спектров позволила при оценке ВСР выявить новую информацию о характере и деталях протекания реакций адаптации организма, что недоступно при использовании принятых в медицине подходов к анализу ВСР.

При исследовании ВСР плода (*группа 1*) в отечественной клинической практике наиболее распространенным критерием оценки является так называемый показатель состояния плода (ПСП), предложенный Демидовым (1983),

$$\text{ПСП} = 0.0155 \Sigma_i \text{CP} + 0.000008 \Sigma_i \text{MA}^2 - 0.064 \Sigma_i \text{MA} + 0.33 \text{CP} / \max \text{MA} + 0.95,$$

где $\Sigma_i \text{CP}$ - общая продолжительность базального ритма в % от времени регистрации; $\Sigma_i \text{MA}$ - общая амплитуда медленных акцелераций (уд./мин); $\text{CP} / \max \text{MA}$ - отношение максимального отрезка стабильного ритма в % от времени регистрации к максимальной амплитуде медленной акцелерации.

Очевидно, что данный показатель носит скорее оценочный характер и не учитывает динамику частотных компонентов сигнала, что сказывается на точности и, в конечном итоге, на прогностической ценности метода. В результате исследования тахограмм плода методом оценки локальных вейвлетных спектров установлена связь изменения ВПМ нестационарных участков в диапазоне базального ритма с увеличением степени гипоксии (кислородной недостаточности) плода. При анализе количества центров регуляции по каждому из диапазонов установлено, что наибольший вклад в суммарное количество центров вносят центры, расположенные в частотной области базального ритма. Установлено соотношение ПСП со значениями ВПМ в области больших масштабов

$$\text{ПСП} \approx e^{-\lg V(a_{\text{end}})}, \quad (5)$$

где $V(a_{\text{end}})$ - значение ВПМ на максимальном масштабе. Кроме того, в области

акцелераций установлено изменение структуры базального ритма, что отражает взаимосвязь исследуемых диапазонов. На основании полученных данных возможно проведение более точной диагностики патологических состояний.

При анализе кардиоинтервалограмм здоровых детей (*группа 2*) установлено, что при проведении дыхательной пробы (пробы Штанге) наблюдается транзиторное уменьшение количества контуров регуляции в частотной области парасимпатических влияний. Количество контуров регуляции в частотной области симпатических влияний также значительно уменьшалось и сохранялось на низком уровне до конца регистрации. Уменьшение количества контуров регуляции происходило на фоне увеличения значений ВПМ во всех исследуемых диапазонах. Существующие традиционные методы оценки ВСП не позволяют получить подобную информацию. Для детального объяснения подобного эффекта нами проводятся дополнительные исследования.

Исследование ВСП студентов (*группа 3*) позволило определить типологические особенности влияния различных отделов вегетативной нервной системы на варибельность сердечного ритма в покое. Установлено, что в HF-диапазоне в состоянии относительного покоя наиболее выражены нестационарные элементы ВПМ у людей с преобладанием тонуса парасимпатического отдела ВНС - ваготоников. Наименее выражены нестационарные элементы ВСП в случае вегетативного равновесия, то есть у нормотоников. Гипотезой, объясняющей это наблюдение, может служить факт взаимного подавления нестационарных компонентов ВСП при нормотонии.

Появилась возможность определить типичные реакции ВНС на переходной процесс и развитие этих изменений во времени. Так, для одной из подгрупп испытуемых характерно значительное увеличение U в LF-диапазоне (соответствует тону симпатического отдела ВНС) в течение всего времени проведения дыхательной пробы. После выдоха значения U за относительно короткий промежуток времени возвращаются на исходный уровень. Значения U в HF-диапазоне (тонус парасимпатического отдела ВНС) увеличиваются к моменту выдоха (рис. 4). Другой тип реагирования характеризуется двумя пиками U на вдохе и выдохе в диапазоне парасимпатических влияний, между которыми наблюдается стабильный участок. Симпатические влияния в ходе дыхательной

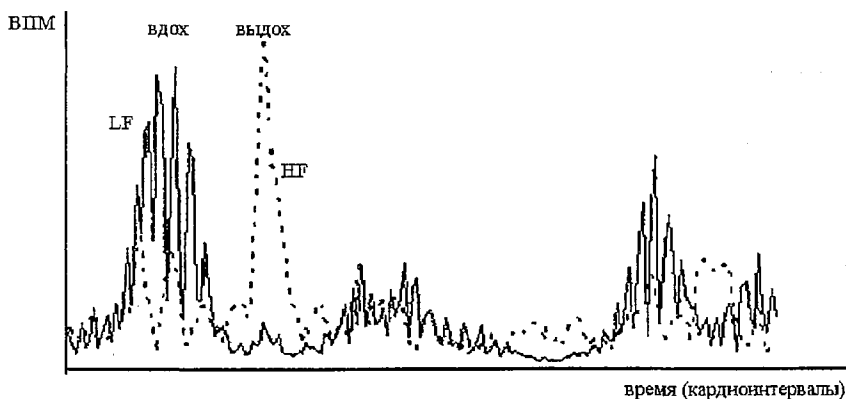


Рис. 4. Динамика вейвлетной плотности мощности варибельности сердечного ритма взрослого человека для HF- и LF-диапазонов при проведении дыхательной пробы (переходный процесс). На высоте вдоха наблюдается значительное увеличение значений ВПМ в LF-диапазоне, свидетельствующее об активности симпатического отдела ВНС; при выдохе наблюдается увеличение значений ВПМ в HF-диапазоне, свидетельствующее об активности парасимпатического отдела ВНС

пробы при этом типе реагирования выражены значительно слабее. Подобные различия типов реагирования объясняются разным исходным тонусом ВНС.

Заключение

Таким образом, использование методики анализа локальных вейвлетных спектров позволяет выявлять особенности variability сердечного ритма, в различных возрастных группах и функциональных состояниях. Выявлено, что на основе оценки динамики вейвлетной плотности мощности можно судить об изменениях функционального состояния вегетативной нервной системы и организма в целом. Показано, что оценка локальных вейвлетных спектров позволяет охарактеризовать типологию переходных процессов variability сердечного ритма и описать их динамику. Установлено существование не описанного ранее в литературе эффекта взаимодействия контуров регуляции симпатического и парасимпатического отделов вегетативной нервной системы. Выявленный эффект позволяет более детально исследовать процесс взаимодействия различных отделов вегетативной нервной системы в ходе адаптации организма к различным экзогенным влияниям. Описана динамика количества контуров регуляции в физиологически значимых диапазонах в антенатальном периоде и при проведении функциональных проб у взрослого человека и ребенка.

Предложенная методика может быть использована для создания новых диагностических критериев, разработка которых невозможна с использованием стандартных статистических методов обработки кардиоинтервалограмм.

Библиографический список

1. Баевский Р.М., Кирилов О.И., Клецкин С.З. Математический анализ изменения сердечного ритма при стрессе. М.: Наука, 1984. 222 с.
2. Рябькина Г.В., Соболев А.В. Анализ variability сердечного ритма // Кардиология. 1996. №10. С. 8797.
3. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: спектральный анализ локальных возмущений (основы теории и примеры применения) // Изв. вузов. ПНД. 1996. Т. 4, №2.
4. Daubechies I. Ten lectures on wavelets // CBMS-NSF. Regional conference series in applied mathematics. SIAM, 1992.
5. Stefanovska A., Bracic M., Kvernmo H. Wavelet analysis of oscillations in the peripheral blood circulation measured by laser Doppler technique // IEEE Trans. Biomed. Eng. 1999. Oct., 46:10. 1230-9.
6. Joho S., Asanoi H., Remah H.A., Igawa A., Kameyama T., Nozawa T., Umeno K., Inoue H. Time-varying spectral analysis of heart rate and left ventricular pressure variability during balloon coronary occlusion in humans: a sympathoexcitatory response to myocardial ischemia // J. Am. Coll. Cardiol. 1999. Dec., 34:7. 1924-31.
7. Kadambe S., Murray R., Boudreaux Bartels G. Wavelet transform-based QRS complex detector // IEEE Trans. Biomed. Eng. 1999. Jul., 46:7. 838-48.
8. Туровский Я.А., Битюцкая Л.А., Яковлев В.Н. и др. Оценка variability сердечного ритма при проведении функциональной пробы // Материалы X международного симпозиума «Эколого-физиологические проблемы адаптации». Москва, 2001. С. 170.
9. Туровский Я.А., Дорохов Е.В., Яковлев В.Н. и др. Локализованный спектральный анализ в оценке variability сердечного ритма студентов при проведении функциональной пробы // Там же. С. 171.

10. *Torrence G., Compo G.P.* // Bull. of Amer. Meteor. Society. 1998. Vol. 79, № 1, January. P. 63.

11. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Об эффективном анализе перехода к хаосу через перемежаемость с помощью вейвлетного преобразования // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27, вып. 1. С. 3.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 28.02.02

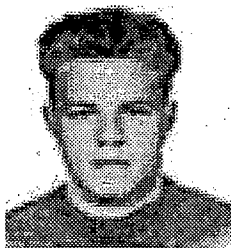
WAVELET ANALYSIS OF HEARTBEAT RATE VARIABILITY

*Y.A. Turovsky, V.V. Mishin, L.A. Bitutskaya, E.V. Kiseleva,
V.N. Yakovlev, I.N. Proskurin*

Based on continuous wavelet transforms the new method of heartbeat rate variability analysis was proposed. Wavelet analysis proved useful for allocating features in heartbeat rate regulation and for estimating the number of regulative contours for heartbeat rate variability series. There were revealed some typical heartbeat rate reactions at different age groups to various types of external influence. It is shown that «wavelet power spectrum» is a powerful tool not only for the fetus state diagnostics but for general description of heartbeat rate dynamics in transient processes.



Туровский Ярослав Александрович - родился в 1978 году, окончил Воронежскую государственную медицинскую академию (2001). В настоящее время аспирант на кафедре нормальной физиологии. Сфера научных интересов: клиническая физиология.



Мишин Владимир Владимирович - родился в 1976 году в Воронеже, окончил Воронежский государственный университет (1999). После окончания ВГУ - аспирант на кафедре физики полупроводников и микроэлектроники.

Битюцкая Лариса Александровна - к.х.н., доцент кафедры физики полупроводников и микроэлектроники Воронежского государственного университета.

Киселева Елена Владимировна - к.м.н., ассистент кафедры акушерства и гинекологии №2 Воронежской государственной медицинской академии. Сфера интересов - новые методы диагностики и лечения акушерской патологии.

Яковлев Виктор Николаевич - д.м.н., профессор, заведующий кафедрой нормальной физиологии Воронежской государственной медицинской академии. Сфера интересов - гипербарическая оксигенация, клиническая физиология.

Проскурин Илья Николаевич - студент второго курса факультета прикладной математики и механики Воронежского государственного университета.



ДВУМЕРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО РОТАТОРА С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ЗАТУХАНИЯ, ВОЗБУЖДАЕМОГО ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УДАРАМИ

Г.П. Быстрой, С.И. Студенок

Обсуждается получение разностных эволюционных уравнений для нелинейного ротатора с запаздыванием, возбуждаемого периодическими ударами. Тип нелинейности задается первыми элементарными катастрофами (складкой и сборкой), а время между ударами сравнимо с временем релаксации ротатора. Для установленных отображений найдены показатели Ляпунова, зависящие от двух и более параметров; построены бифуркационные диаграммы и определены некоторые характерные бифуркационные значения управляющих параметров при переходе к хаосу. Найденные отображения могут служить также модельными уравнениями для анализа фазовых переходов и I и II рода с хаотической динамикой параметра порядка.

Введение

Аналитический анализ нелинейных дифференциальных уравнений, соответствующих даже сравнительно простым динамическим системам, в большинстве случаев бывает очень сложным. Тем не менее, существует возможность сведения некоторых неавтономных систем к отображениям через сечение Пуанкаре. В свою очередь, анализ отображений позволяет получить определенную качественную и количественную информацию о системе, что реализуется, в том числе на широко известных отображениях - логистическом, Хенона, Чирикова и т. д. Последние можно получить при рассмотрении задачи о нелинейном ротаторе с постоянным коэффициентом затухания, возбуждаемом периодическими ударами [1].

Отображения Пуанкаре иногда помогают отличить друг от друга движения качественно различающихся типов, например, периодические, квазипериодические и хаотические. В данной работе в рамках двух первых элементарных катастроф (складки и сборки [2]) обсуждается получение разностных эволюционных уравнений для ОДУ второго порядка с δ -образной правой частью для динамических систем с нелинейным коэффициентом затухания. Вид коэффициента затухания определяется в рамках так называемых задач с последствием в различных отраслях знания [3]. Элементарные катастрофы складки и сборки определяют тип нелинейности ротатора, который, вообще говоря, может быть любым в зависимости от специфики решаемой задачи. Природа толчков, задаваемых δ -функцией, в каждой такой задаче также может быть различной. Например, при фазовых превращениях в системе «пар - жидкость» это могут быть

испаряющиеся молекулы, покидающие поверхность раздела за очень малое время и изменяющие параметр порядка; при турбулентном течении жидкости - образующиеся с определенной периодичностью вихри и т.д.

1. Переход от потоков к отображениям

В монографии [1] рассмотрена динамическая система, описывающая динамику нелинейного ротатора с постоянным коэффициентом затухания Γ и δ -образной правой частью, характеризующей периодические удары в системе:

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} = Kf(x) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT), \quad k - \text{целое число.} \quad (1)$$

Здесь T - период времени между ударами; $Kf(x)$ - амплитуда удара, $K = \text{const}$; δ - дельта-функция Дирака. Определив соответствующим образом функцию $f(x)$ и постоянные Γ и K , путем интегрирования уравнения (1) на конечном временном промежутке можно получить широко известные отображения: логистическое, Хенона, Чирикова и т.д [1].

Рассмотрим ту же динамическую систему, но с коэффициентом затухания, являющимся кусочно-постоянной функцией времени: $\Gamma = \Gamma(t) > 0$. Это значит, что на временных интервалах $(k+1)T - \epsilon > t > kT - \epsilon$, где ϵ - бесконечно малая положительная величина, $\Gamma(t)$ принимает постоянное значение, равное Γ_k . В точках $t = kT$ функция $\Gamma(t)$ терпит разрывы первого рода, являясь непрерывной справа. Ниже будет показано, что в ряде задач с последствием такая постановка не лишена физического смысла; вероятно, первый, кто на это обратил внимание, был Г.З. Гершуни [4].

Введя новую переменную $y = \dot{x}$, уравнение (1) можно представить в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений (НДУ) 1-го порядка

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\Gamma(t)y + Kf(x) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (2)$$

Решение системы уравнений (2) будем искать на некотором конечном интервале времени $(k+1)T - \epsilon > t > kT - \epsilon$. Тогда для переменных $(x_k, y_k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x(kT - \epsilon), y(kT - \epsilon))$ находим

$$y(t) = y_k \exp[-\Gamma_k(t - kT)] + K \sum_{m=0}^{\infty} f(x_m) \int_{kT - \epsilon}^t \exp[-\Gamma_k(t - t')] \delta(t' - mT) dt', \quad (3)$$

$$x(t) = x_k + y_k / \Gamma_k + y(t) / \Gamma_k + K \sum_{m=0}^{\infty} f(x_m) \int_{kT - \epsilon}^t \delta(t' - mT) \exp[-\Gamma_k(kT - t')] / \Gamma_k dt'. \quad (4)$$

Решения (3), (4) являются общими для разных интервалов времени (для разных k). При таком подходе все движение разбивается на конечные этапы (разности), каждый из которых соответствует такой области изменения переменных, где исследуемая система с достаточной точностью описывается НДУ, которое может быть проинтегрировано на этом этапе.

Возьмем функции (3), (4) в точке $t = (k+1)T - \epsilon$ и, устремляя ϵ к нулю, находим

$$x_{k+1} = x_k + [1 - \exp(-\Gamma_k T)] [y_k + Kf(x_k)] / \Gamma_k, \quad y_{k+1} = \exp(-\Gamma_k T) [y_k + Kf(x_k)]. \quad (5)$$

Таким образом, в результате стробирования переменных исходная система ДУ (2) свелась к новому двумерному отображению (5), отличному от приведенного в работе [1]. Ограничимся теперь классом динамических систем, для которых выполняется следующее тождество: $[1 - \exp(-\Gamma_k T)] [y_k + Kf(x_k)] = T \cdot Kf(x_k)$.

Несложно показать, что двумерное отображение (5) в этом случае преобразуется к виду

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot Kf(x_k) / \Gamma_k, \quad y_{k+1} = y_k + (1 - T) \cdot Kf(x_k). \quad (6)$$

Моделирование запаздывания. Период стробирования и время релаксации. Для дальнейшего анализа двумерного отображения (6) осталось определить функции Γ_k и $Kf(x_k)$. Следует отметить, что в классической задаче с ротатором [1] амплитуда удара $Kf(x)$ и переменная x определены для одного и того же момента времени. Изменение состояния после удара для физической системы должно сопровождаться изменением функции распределения, а установление нового равновесного распределения всегда требует конечного времени. Такой процесс в термодинамике называется релаксацией, а время установления равновесия - временем релаксации. Описываемый реальный процесс можно считать почти равновесным, если его характерное время, в данном случае T , велико по сравнению с временем релаксации τ . Когда же T сравнимо с τ , следует учитывать влияние релаксации [5]. Поэтому рассмотрим теперь класс задач, в которых переменная $x(t)$ определена для момента времени t , а амплитуда удара $Kf(t-\tau)$ - для момента времени $t-\tau$. Раскладывая, следуя [4], в ряд Тейлора функцию $Kf(t-\tau)$ по τ и ограничиваясь двумя членами разложения, при таком моделировании запаздывания получаем

$$\ddot{x} + \Gamma(x)\dot{x} = Kf(x) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (7)$$

$$\Gamma(x) = 1 + \tau Kdf(x)/dx. \quad (8)$$

Таким образом, задание различных типов нелинейности $Kf(x)$, имеющих физический смысл, однозначно определяет коэффициент затухания $\Gamma(x(t))$ в неравновесных задачах и приводит к новым каноническим отображениям, каждое из которых может быть получено для катастроф типа

складки: $Kf(x) = -(x + a), \quad \Gamma(\tau, x) = 1 - \tau 2x;$

сборки: $Kf(x) = -(x^3 + ax + b), \quad \Gamma(\tau, x) = 1 - \tau(3x^2 + a);$

ласточкин хвост $Kf(x) = -(x^4 + ax^2 + bx + c), \quad \Gamma(\tau, x) = 1 - \tau(4x^3 + 2ax + b)$ и т.д.

Выбор соответствующего типа катастрофы определяется спецификой решаемой задачи [2, 6]. Сборка характеризует семейство функций четвертой степени $F(x, a, b) = x^4/4 + ax^2/2 + bx$, зависящих от двух параметров, и геометрию соответствующего кубического уравнения $\nabla F(x) = -Kf(x)$. Так, например, для сборки $F(x, a, b)$ имеет два минимума (две устойчивые фазы), что позволяет использовать его при описании фазовых переходов. В качестве примеров рассмотрим первые два типа катастроф, складку и сборку, для которых отображение (6) с учетом вышесказанного имеет, соответственно, вид (9), (10) и (11), (12):

$$x_{k+1} = x_k - T(x_k^2 + a)/(1 - \tau 2x_k), \quad (9)$$

$$y_{k+1} = y_k + (T - 1)(x_k^2 + a), \quad (10)$$

$$x_{k+1} = x_k - T(x_k^3 + ax_k + b)/[1 - \tau(3x_k^2 + a)], \quad (11)$$

$$y_{k+1} = y_k + (T - 1)(x_k^3 + ax_k + b). \quad (12)$$

Отображение (9), далее называемое отображением складки, содержит три управляющих параметра - T, a, τ ; отображение (11), называемое далее отображением сборки, содержит четыре управляющих параметра - T, a, b, τ . Для обоих отображений взяты в качестве сплайнов стробированные значения G_k нелинейных коэффициентов затухания $\Gamma(\tau, x)$. При $T=1$ двумерные отображения становятся одномерными, что существенно облегчает их анализ.

Хаос при фазовых переходах. Двумерные отображения (9),(10) и (11),(12) дают в широком интервале значений параметров хаотические решения, отличающиеся по некоторым своим свойствам от соответствующих решений известных отображений [1]. Согласно элементарной теории катастроф при наличии, например, плоской или трехмерной области управляющих параметров границы между областями с различным поведением, в том числе и границы перехода к хаосу, не сводятся к точкам бифуркации, а представляют собой кривые или поверхности.

В качестве примера на рис. 1 приведена динамика переменной x_k для рассматриваемых типов нелинейности: катастрофы типа складки и сборки. Рис. 1, б свидетельствует о том, что найдена простая модель для катастрофы сборки в виде отображения (11), в которой при $b=0$ реализуются неравновесные фазовые переходы первого рода между фазами Φ_1 и Φ_2 ; наличие ограниченных хаотических решений позволяет говорить о найденной детерминированной модели «гомофазных» флуктуаций (флуктуаций вблизи уровней Φ_1 и Φ_2). Наряду с ними, однако, фиксируются такие флуктуации описываемой переменной, которые выходят за пределы, совместимые с исходной фазой, то есть соответствуют образованию зародышей какой-либо другой фазы. Подобные флуктуации называют «гетерофазными» (переходы между уровнями Φ_1 и Φ_2). Такой анализ становится возможным вплоть до критической точки фазового перехода II рода, которая дает предельное двухфазное состояние как трижды вырожденную критическую точку ($a=b=0$). Таким образом, отображение (11) позволяет описывать неравновесные фазовые переходы первого рода - переходы между двумя устойчивыми состояниями Φ_1 и Φ_2 . В этом смысле переменную x_k можно трактовать для данного отображения как некоторый параметр порядка, физический смысл которого устанавливается при решении конкретных задач [6, 7]. В отличие от катастрофы сборки складка имеет всего одну устойчивую неподвижную точку - одно устойчивое состояние x_0 .

Детерминированный стохастический резонанс. Явление попеременного захвата траектории двумя закритическими состояниями без источников случайного шума, которое наблюдается на рис. 1, б, может быть идентифицировано как детерминированный стохастический резонанс [8]. Для него характерно непериодическое (хаотическое) пребывание в окрестности каждой из фаз, и сам

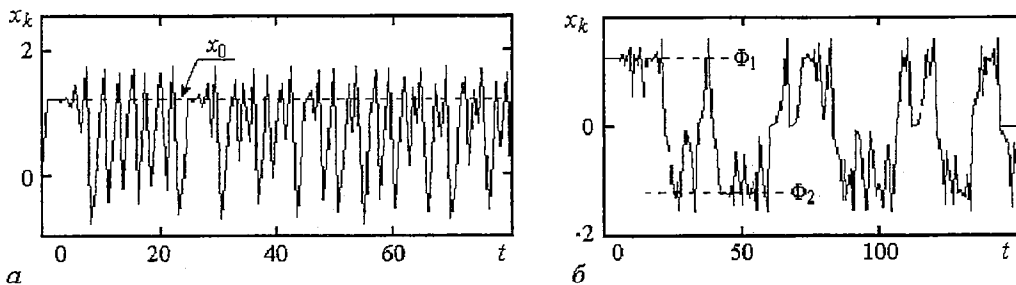


Рис. 1. Хаотическая динамика параметра порядка x_k во времени: а - для отображения складки (расчет по (9) при $T=0.8, a=-1.5, \tau=0.15263$); б - для отображения сборки (расчет по (11) при $a=-1.5, b=0, T=1, \tau=0.033082$)

переход между которыми, в соответствии с теорией Ландау, является фазовым переходом I рода. Стохастический резонанс (СР) является одним из ярких примеров проявления бистабильности нелинейных систем, для которой характерно явление стохастической синхронизации как захвата мгновенной фазы периодической силой [8,9]. Напомним, что термин «стохастический резонанс» - понятие более широкое, чем детерминированный стохастический резонанс - был введен в 1981-1982 гг. на основе исследований модели бистабильного осциллятора, предложенной для описания периодичности в наступлении ледниковых периодов на Земле. Модель описывала движение частицы в симметричном двухъямном потенциале под действием периодической силы в условиях большого трения. Устойчивые положения частицы с маловыраженной хаотической динамикой соответствовали ледниковому периоду и нормальному климату Земли. Периодическая сила соответствовала колебаниям эксцентриситета орбиты Земли.

Термин «резонанс» имеет здесь, однако, нестандартный смысл; согласно [8] он отражает немонотонную («резонансную») зависимость отклика бистабильного элемента на внешнее воздействие.

Эффект СР определяет группу явлений, при которых отклик нелинейной системы на слабый внешний сигнал заметно усиливается с ростом интенсивности шума в системе. В 1983 г. эффект был исследован в триггере Шмитта; впоследствии эффект СР был обнаружен и исследован во многих бистабильных системах: в кольцевом лазере, в магнитных системах, в системах с электронным парамагнитным резонансом, в экспериментах с броуновскими частицами, в ферромагнетиках и сегнетоэлектриках, в сверхпроводящих квантовых интерферометрах, в химических системах и т.д. В работе [8] можно найти достаточно полную библиографию по этому вопросу. Важно, что двумерное отображение (11), (12) дает математическую модель неперіодического (хаотического) пребывания любой из этих систем в окрестности каждой из фаз; сам же переход между ними является фазовым переходом I рода.

2. Бифуркационные диаграммы. Показатели Ляпунова

Для описания перехода от циклического поведения переменной к хаотическому при изменении управляющих параметров отображений (9), (11) были использованы бифуркационные диаграммы, которые для переменных x_k и y_k могут быть построены в зависимости от параметров a , T , τ для катастрофы складки и параметров a , T , τ , b для катастрофы сборки. В качестве примера приведем только две из них. Для рассматриваемых катастроф на рис. 2, 3 представлены бифуркационные диаграммы и соответствующие им показатели Ляпунова λ . Значения λ определялись по формуле

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} 1/N \sum_{k=1}^N \ln |d\varphi(x_k)/dx_k|, \quad x_{k+1} = \varphi(x_k),$$

где N - число итераций по x_k .

Отображение складки (9) имеет две неподвижные точки, одна из которых $x_0 = (-a)^{1/2}$ устойчива, а другая всюду неустойчива. В отличие от (9) отображение сборки (11) имеет при $a < 0$ и $b = 0$ две устойчивые равновесные точки $\Phi_{1,2} = \pm(-a)^{1/2}$ и одну неустойчивую - $\Phi_0 = 0$. Эти точки обуславливают существование трех равновесных решений, одно из которых является неустойчивым. Изначальная принадлежность к той или иной устойчивой фазе в катастрофе сборки определяется, согласно модели, начальными условиями.

Непрерывное изменение управляющих параметров приводит к каскаду бифуркаций, которые проявляются в виде ветвлений на бифуркационной диаграм-

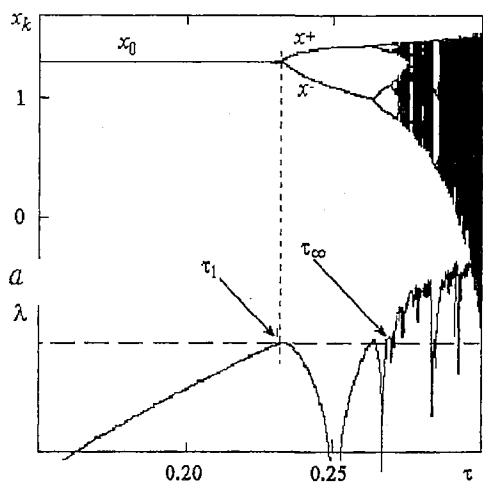


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма (а) для переменной x_k отображения складки и его показатель Ляпунова (б) при $T=0.3, a=-1.3$

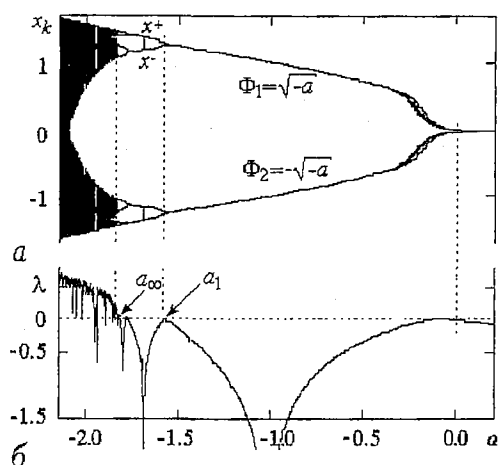


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма (а) для переменной x_k отображения сборки и его показатель Ляпунова (б) при $T=0.35, \tau=0.14$

ме (рис. 2, а, 3, а) и сопровождаются удвоением периода, связанным с субгармонической неустойчивостью. Каждое из ветвлений соответствует потере устойчивости одной из неподвижных точек и образованию двух устойчивых. Первое ветвление, связанное с потерей устойчивости точки равновесия, для складки имеет место при $\tau_1 \approx 0.23$, для сборки - при $a_1 \approx -1.55$. При этом система распадается на две новые фазы, которые соответствуют двум устойчивым точкам: x^+ и x^- . Теперь каждая последующая итерация переводит систему из одной фазы в другую. Таким образом, аттрактор с периодом 1 сменяется аттрактором с периодом 2 [10].

Выше критических значений $\tau_\infty \approx 0.266$ и $a_\infty \approx -1.85$ в системах начинается область так называемого детерминированного хаоса, где параметр порядка ведет себя хаотически. Расчет всех точек бифуркаций ренормгрупповым методом, как это выполнялось для логистического отображения [11], затруднен вследствие сложности полученных отображений. Из рис. 2, а, 3, а видно, что в области хаоса имеются участки с периодической динамикой параметра порядка - окна детерминированности (светлые полосы), соответствующие отрицательным показателям Ляпунова (рис. 2, б, 3, б).

В отличие от логистического отображения, в котором имеется всего один управляющий параметр, исследуемые отображения (9), (11) являются многопараметрическими; для таких систем важно знать характер их поведения в зависимости сразу от нескольких управляющих параметров. Этот вопрос является также интересным с точки зрения управления хаосом - темы популярной в последнее время. При наличии, например, плоской или трехмерной области управляющих параметров границы между областями с различным поведением не сводятся к точкам бифуркации, а представляют собой кривые или поверхности.

Наглядное представление о таком поведении, а также о сложной структуре областей хаоса и регулярного движения можно получить при помощи трехмерных диаграмм, отражающих зависимость показателя Ляпунова от двух параметров (рис. 4, 5). В плоскости управляющих параметров всех трех диаграмм изображены некоторые контурные графики из линий равного уровня для различных значений λ . Аномальные пики в области регулярного движения ($\lambda < 0$) соответствуют различным режимам периодического движения, характеризующимся периодом, амплитудой и т.д. В области хаотического движения ($\lambda > 0$) имеющиеся пики, уходящие в область отрицательного λ , соответствуют окнам детерминированного поведения.

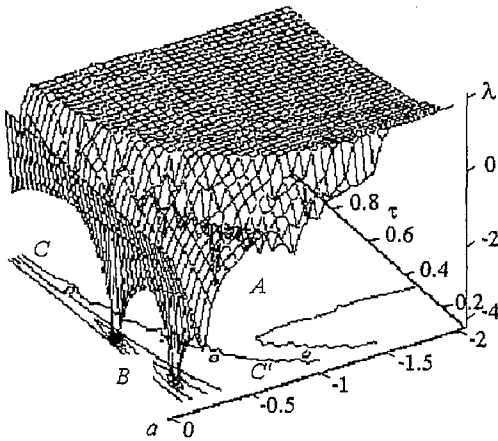


Рис. 4. Двухпараметрическая зависимость показателя Ляпунова $\lambda(\tau, a)$ для отображения складки при $T=1$; в области хаоса $\lambda(\tau, a) > 0$; A - область хаоса; B - область регулярного движения; CC' - граничная кривая перехода к хаосу

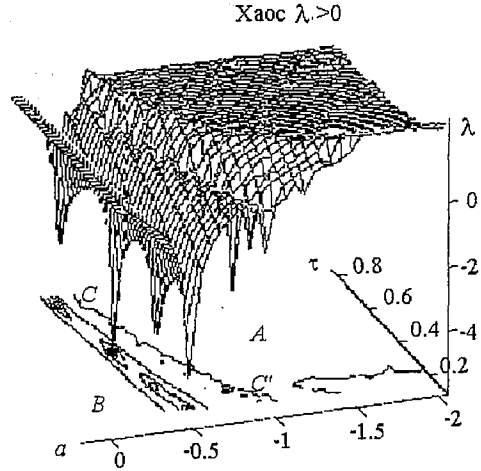


Рис. 5. Двухпараметрическая зависимость показателя Ляпунова $\lambda(\tau, a)$ для отображения сборки при $T=1$; в области хаоса $\lambda(\tau, a) > 0$; A - область хаоса; B - область регулярного движения; CC' - граничная кривая перехода к хаосу

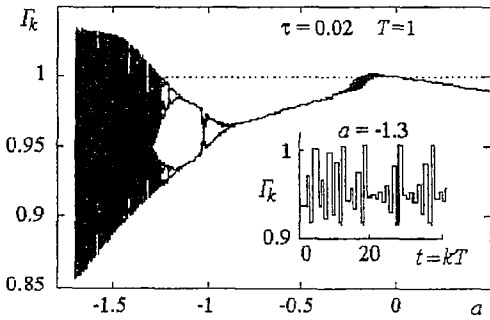
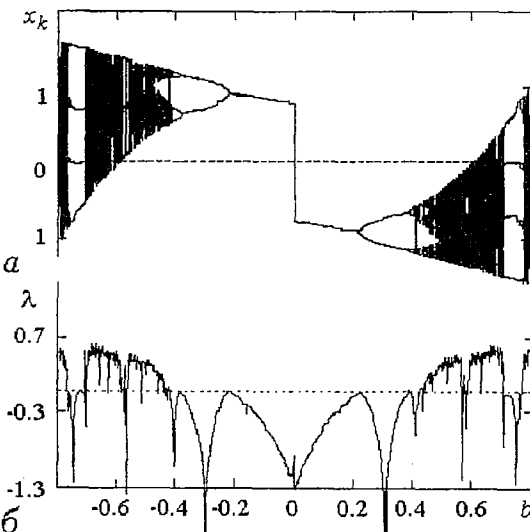


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма для коэффициента затухания Γ_k отображения сборки; для каждого временного интервала коэффициент затухания является кусочно-постоянной функцией



На рис 6. приведена бифуркационная диаграмма для нелинейного коэффициента затухания отображения сборки: $\Gamma_k = 1 - \tau(3x_k^2 + a)$. Приведены также пошаговые его значения, установленные численными методами, что подтверждает выполнимость двух условий, при которых решалась задача: зависимость коэффициента затухания от времени и ее кусочно-постоянный характер, связанный с нелинейной зависимостью от x_k .

Анализ бифуркационных явлений для отображения (11) был бы неполным без анализа влияния параметра b как на сами бифуркации, так и на показатель Ляпунова. На рис. 7 приведена бифуркационная диаграмма для переменной x_k отображения сборки (11) и его показатель Ляпунова λ при постоянстве остальных параметров. Как на бифуркационной диаграмме, так и на нижней кривой зафиксированы широкие окна детерминированного поведения. Эти полосы иллюстрируют фрактальную природу описываемых процессов. В точках бифуркаций показатель Ляпунова принимает нулевые значения. Двухпараметрическая

Рис. 7. a - Бифуркационная диаграмма для переменной x_k (b) отображения сборки; б - его показатель Ляпунова $\lambda(b)$; $T=1, \tau=0.02; a=-0.6$

зависимость показателя Ляпунова $\lambda(a,b)$ для отображения (11) также указывает на сложную структуру периодических движений (рис. 8); в области хаоса $\lambda > 0$. Приведенный на рис. 7 показатель Ляпунова соответствует отдельно взятому сечению при $a = -0.6$ трехмерной поверхности, представленной на рис. 8. С увеличением параметра a хаос исчезает и имеют место регулярные процессы с различными отрицательными значениями показателей Ляпунова. На нижней плоскости области регулярного и хаотического поведения разделяются ломаной кривой.

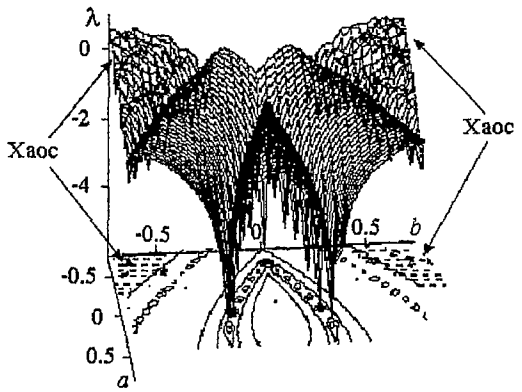


Рис. 8. Двухпараметрическая зависимость показателя Ляпунова $\lambda(a,b)$ для отображения сборки при $T=1$, $\tau=0.02$, $a=-0.6$; в области хаоса $\lambda > 0$

Другие физические задачи. Найденное отображение (11) при $T=1$ представляет интерес не только в задаче с ротатором. Оно может быть применено также к ряду других физических задач, наиболее важными из которых являются:

- описание хаотической нелинейной динамики заземленной с обоих концов вязкоупругой цилиндрической балки с последствием, обтекаемой развитым турбулентным потоком жидкости или газа. При таком обтекании с балки начинают срываться с определенной периодичностью T турбулентные вихри, срыв которых и играет роль «ударов» в системе. Частота отрыва вихрей определяется формулой $\omega = 0.22v/(2\pi D)$, где v - скорость набегающего потока, D - диаметр балки, коэффициент 0.22 представляет собой число Струхалия для данного типа обтекаемой конструкции. «Удары», направленные по движению потока, приводят в такой системе к изменению переменной x - смещению средней части стержня. Параметры a и b однозначно определяются геометрией системы [12];

- описание хаотической динамики плотности тонкого поверхностного слоя жидкости единичного объема на границе раздела жидкость - пар. Роль периодических «ударов» в такой системе играют акты испарения и конденсации молекул. Степень неравновесия задается различными значениями соотношения времени между ударами и временем релаксации. Переменная x характеризует отклонение в приведенном виде плотности рассматриваемого поверхностного слоя от средней плотности парожидкостной системы. Параметр $a(T)$ зависит явно от температуры, на линии равновесия фаз $b=0$ [7, 13]. Для системы с фазовыми переходами I и II рода разработаны алгоритмы построения бифуркационных диаграмм с переходом к хаосу, показателей Ляпунова и энтропии Колмогорова;

- описание при химических реакциях динамики концентраций компонентов, вступающих в реакцию. Процесс вступления веществ в химическую реакцию моделируется в такой задаче как мгновенные «удары», которые приводят к изменению параметра порядка (переменной x), характеризующего отклонение концентрации промежуточного продукта реакции от некоторой средней концентрации. Параметры a и b являются явными функциями приведенных температуры T^* и давления P^* .

Выводы

Для нелинейного ротатора с запаздыванием, возбуждаемого периодическими ударами, получены разностные эволюционные уравнения - отображения. Тип нелинейности задается первыми элементарными катастрофами (складкой и

сборкой), а время между ударами сравнимо с временем релаксации ротатора. Каждое из этих новых отображений является простой системой, допускающей численные решения. Вместе с тем, нелинейная динамика систем, описываемых этими отображениями в пространстве управляющих параметров, достаточно сложна. Это подтверждается не только анализом бифуркационных диаграмм, но и анализом двух- или трехпараметрических показателей Ляпунова для изученных отображений. Развитие такого подхода направлено на изучение качественных изменений и особенностей проявления хаоса в различных нелинейных системах при изменении управляющих параметров. При наличии, например, плоской или трехмерной области управляющих параметров границы между областями с различным поведением не сводятся к точкам бифуркации, а представляют собой кривые или поверхности.

С одной стороны, важный результат заключается в том, что найдена простая модель отображения (отображение сборки), в которой реализуются фазовые переходы первого и второго рода (по Л.Ландау) и описываются релаксационные процессы; данное отображение, например, может служить для системы «пар - жидкость» детерминированной моделью так называемых «гомофазных» флуктуаций, о необходимости описания которых говорилось Я.Френкелем [14]. Наряду с ними, однако, необходимо принимать во внимание такие флуктуации описываемой переменной, которые выходят за пределы, совместимые с исходной фазой. Подобные флуктуации принято называть «гетерофазными» [14]. Такой анализ становится возможным вплоть до критической точки II рода, которая дает предельное двухфазное состояние как трижды вырожденную (с точки зрения теории катастроф) критическую точку. В окрестности этой точки могут также быть изучены свойства хаотической динамики. Моделируемые при этом флуктуации выступают не как результат шумов, а как продолжение нелинейных свойств системы, обуславливающих детерминированный хаос.

С другой стороны, явление попеременного захвата траектории двумя закритическими состояниями без источников случайного шума может быть идентифицировано как детерминированный стохастический резонанс. Для него характерно непериодическое (хаотическое) пребывание в окрестности каждой из фаз при наличии периодических δ -«ударов» по системе. Тем самым, полученное отображение может быть предложено для описания этого интересного физического явления.

Численное моделирование позволяет продемонстрировать изменение динамического поведения системы в зависимости от знака и величины каждого из управляющих параметров, показать механизм перехода от регулярного движения к хаотическому. Для полученных отображений построены бифуркационные диаграммы и найдены показатели Ляпунова. В плоскости управляющих параметров всех трех диаграмм изображены контурные графики из линий равного уровня для различных значений λ . Аномальные пики в области регулярного движения ($\lambda < 0$) соответствуют различным режимам движения, характеризующимся периодом, амплитудой и т.д. В области хаотического движения ($\lambda > 0$) пики, уходящие в область отрицательного λ , соответствуют так называемым окнам детерминированного поведения. Данный подход использован автором при решении конкретных физических задач.

Линию обобщений можно продолжить: можно построить и исследовать отображения для семейства функций пятой степени, зависящих от трех параметров, далее можно перейти к семействам функций более высоких степеней, а затем к семействам функций двух, трех и более переменных, как это делается в элементарной теории катастроф. Цель таких исследований при решении

различных задач, моделирующих реальные процессы, - изучение качественных трансформаций при переходе к хаосу и изменении управляющих параметров.

Библиографический список

1. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. С. 25.
2. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. Т.1-2. М.: Мир, 1984.
3. *Колмановский В.Б.* Уравнения с последействием и математическое моделирование // Соросовский образовательный журнал. 1996. № 4. С. 122.
4. *Гершуни Г.З.* Гидродинамическая неустойчивость. Изотермические течения // Соросовский образовательный журнал. 1997. № 2. С. 99.
5. *Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П.* Основы молекулярной акустики. М.: Наука, 1964.
6. *Быстрой Г.П.* Детерминированный хаос в нелинейных задачах теплофизики // Материалы II Всероссийской научной internet-конференции «Компьютерное и математическое моделирование в естественных и технических науках», апрель-май 2001 / Гл. ред. серии проф. А.А. Арзамасцев. Тамбов: Изд-во ТГУ, 2001, вып. 7. С. 3.
7. *Быстрой Г.П., Моисеева О.Н.* Развитие количественных методов теории фазовых переходов первого рода и критических явлений в системе жидкость - пар // Сб. Метастабильные состояния и фазовые переходы. № 3. Екатеринбург: Изд-во УРО РАН, 1999. С.151.
8. *Анищенко В.С., Нейман А. Б., Мосс Ф. и др.* Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // УФН. 1999. Т. 169, № 1. С. 8.
9. *Климонтович Ю.Л.* Что такое стохастическая фильтрация и стохастический резонанс? // УФН. 1999. Т. 169, № 1. С.39.
10. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 222 с.
11. *Feigenbaum M.J.* Universal Behavior in Nonlinear Systems. Los Alamos Sci. 1980. P.4.
12. *Быстрой Г.П.* О механизме возникновения хаотических режимов в динамике конструкций (на примере выпуклой балки) // Сб. научн. труд. XXX Уральского семинара «Неоднородные конструкции». Миасс: УРО РАН, 2000. С.85.
13. *Быстрой Г.П., Иванова С.И.* Математическое моделирование неравновесных фазовых переходов и хаотическая термодинамика испарения и конденсации в системе «жидкость - пар» // Материалы II Всероссийской научной internet-конференции «Компьютерное и математическое моделирование в естественных и технических науках», апрель-май 2001 / Гл. ред. серии проф. А.А. Арзамасцев. Тамбов: Изд-во ТГУ, 2001, вып. 7. С. 10.
14. *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. М.: Изд-во АН СССР, 1945.

Уральский государственный
университет им. А.М. Горького

Поступила в редакцию 13.12.2001
после доработки 27.03.2002

TWO-DIMENSIONAL MAPPINGS FOR NONLINEAR ROTATOR WITH A PIECEWISE-CONSTANT DECAY FACTOR RAISED BY PERIODIC SHOCKS

G.P. Bystrai, S.I. Studenok

The deriving of difference evolutionary equations for a nonlinear rotator with a piecewise-constant decay factor raised by periodic shocks is considered. The type of nonlinearity is set by the first partial catastrophes («crimp» and «assembly»), and the time between shocks is comparable with relaxation time of a rotator. For set mappings the Lyapunov exponents, depending from two and more parameters are found; the bifurcation diagrams are constructed and some reference bifurcation values of control parameters, are spotted at transition to chaos. Obtained mappings including model equations can serve for the analysis of the first and the second type phase transitions with random dynamics of an order parameter.



Быстрый Геннадий Павлович - родился в 1947 году, окончил физико-технический факультет Уральского политехнического института (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1975). Профессор Уральского государственного университета (УрГУ). Зав. отделом теплофизики НИИ ФПМ при УрГУ. Область научных интересов - нелинейная термодинамика, применение нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор многих статей и нескольких монографий по направлениям, указанным выше. Читаемые курсы: физика открытых систем, нелинейная динамика, термодинамика необратимых процессов, экономическая синергетика.



Студенок Сергей Игоревич - родился в 1978 году, окончил физический факультет и магистратуру Уральского государственного университета (2001). Аспирант. Имеет несколько публикаций по нелинейной динамике.



ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ В ЦИФРОВЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРАХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С УСЕЧЕНИЕМ ПО ВЕЛИЧИНЕ

Ю.А. Брюханов

Рассмотрены свободные колебания и колебания при постоянном внешнем воздействии в фильтрах нижних и верхних частот. Использовано представление чисел с фиксированной запятой в дополнительном коде. Для исследования процессов применен метод одномерных точечных отображений. Динамические режимы характеризуются вероятностными диаграммами. Получены выражения для наиболее вероятных колебаний на выходе фильтров при произвольном количестве уровней квантования. Предложенная методика может использоваться для исследования эффектов квантования в цифровых фильтрах нижних и верхних частот первого порядка (рекурсивных, рекурсивно-нерекурсивных) с представлением чисел в прямом, обратном или дополнительном кодах с округлением или усечением.

Принципиальным отличием цифровых фильтров от аналоговых является конечная точность выполнения арифметических операций и задания параметров фильтра, обусловленная ограниченным числом используемых двоичных разрядов. Вследствие этого цифровая колебательная система в общем случае является существенно нелинейной, в ней возникают нежелательные явления, называемые эффектами квантования [1,2]. При достаточно большом количестве разрядов эти эффекты незначительны и для анализа их влияния используется линейная модель поведения системы. Если количество разрядов невелико (это необходимо для повышения быстродействия), а также при постоянном воздействии или при синусоидальном, дискретизированном с частотой, кратной частоте синусоиды, линейная модель неприменима.

Рассмотрим свободные колебания и колебания при постоянном внешнем воздействии A в цифровых фильтрах нижних и верхних частот, реализуемых на базе рекурсивных цепей первого порядка, при произвольном количестве двоичных разрядов, то есть уровней квантования L , в представлении результатов сложения. Предполагается, что числа представляются с фиксированной запятой, параметр фильтра a задается без ошибки, квантование осуществляется с усечением по величине, переменные представляются в форме чисел, выравненных справа (то есть в виде целых чисел), а сумматор без учета квантования имеет характеристику с насыщением.

Усечение по величине реализуется для двоичных чисел, представляемых в дополнительном коде. При этом количество уровней квантования - четное число, а характеристика квантователя с учетом насыщения выражается функцией

$$f(\phi) = \begin{cases} [\phi] & \text{при } 0 \leq \phi < N_1, \\ N_1 & \text{при } \phi \geq N_1, \\ [\phi+N]-N & \text{при } -N_1 \leq \phi < 0, \\ -N & \text{при } \phi \leq -N_1, \end{cases}$$

где $[\cdot]$ - целая часть числа, $N_1=N-1$, $N=L/2$. В случае $\phi \geq 0$ участки характеристики, соответствующие значениям $[\phi]$, обозначим 0, I, II, ..., N_1 , а для $\phi < 0$ участки, обозначенные -I, -II, ..., - N , соответствуют величинам $[\phi + N] - N$.

Колебания в рассматриваемых фильтрах описываются разностным уравнением

$$x(n+1) = f(ax(n) + A).$$

При использовании целочисленной арифметики шаг квантования равен единице, A - целое число.

Введем $y(n)=x(n+1)$. Процессы исследуем на плоскости состояний (x, y) методом точечных отображений [3]. При этом функция последования имеет вид $y=f(ax+A)$. Исследование колебаний сводится к нахождению последовательности точечных отображений F отрезка $x \in [-N, N_1]$ в себя. Имеем в виду, что вследствие квантования в системе первого порядка возможны L состояний. В общем случае в зависимости от начального состояния $x(0)$ в системе возможны различные установившиеся движения. Поскольку все L возможных начальных состояний независимы, равновероятны, введем понятие вероятности P установившегося движения B в виде соотношения $P(B)=m/L$, где m - количество начальных состояний, соответствующих этому движению. Параметр фильтра a выбирается в области устойчивости без учета эффектов квантования, то есть $0 < |a| < 1$. Считая количество уровней квантования произвольным, рассмотрим свободные колебания и колебания при постоянном внешнем воздействии.

Как и в [4], плоскость состояний разобьем на области соответственно участкам характеристики сумматора (квантователя). Обозначим эти области так же, как и соответствующие участки. Граница областей $[\phi]$, $[\phi]+1$ выражается зависимостью $x=(\phi+1-A)/a$. Сама граница принадлежит области $[\phi]+1$.

Свободные колебания ($A=0$)

В зависимости от знака и величины параметра a графики функции последования и биссектрисы $y=x$ могут пересекаться в одной или нескольких точках.

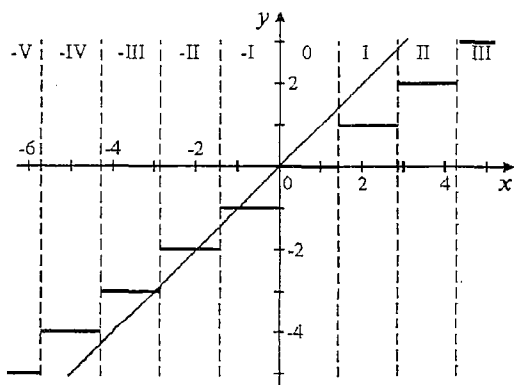


Рис. 1. Диаграмма Ламерея автономного фильтра нижних частот при $L=12$, $a=0.7$

Пусть $a > 0$ (цепь является фильтром нижних частот). При $0 < a < 1$ для границы областей 0, I имеем $x > 1$, поэтому для $x \geq 0$ единственной точкой пересечения графика функции последования и биссектрисы является начало координат, соответствующее состоянию покоя, обозначаемое далее $T=0$. В это состояние система переходит из всех точек $[x] \in [1; N_1]$. При отрицательных значениях x картина сложнее. Здесь всегда существует точка пересечения при $x = -1$. Возможны и другие точки в зависимости от величины a . В качестве иллюстрации на рис. 1. показана диа-

грамма Ламерея с обозначенными на ней областями плоскости состояний для $L=12$, $a=0.7$. Здесь график функции последования пересекается с биссектрисой при $x \in \{-3, -2, -1, 0\}$. При старте из точек $[x] \in [-6, -3]$ в фильтре возникают колебания с периодом $T=1$ и амплитудой $X=-3$. Это состояние далее обозначается $T=1(-3)$. Если стартовыми точками являются $x=-2$ и $x=-1$, то имеем движения $T=1(-2)$ и $T=1(-1)$, соответственно. Колебания при стартовых точках $[x] \geq 0$ описаны выше. Соответственно вероятность колебания $T=1(-3)$ равна $1/3$. Ниже это обозначается $P(-3)=1/3$. Вероятности других возможных движений $P(-2)=P(-1)=1/12$, $P(0)=1/2$. Рассмотрение колебаний при $a \in (0; 1)$ позволяет построить бифуркационную и вероятностную диаграммы. Последняя показана на рис. 2. При $0 < a \leq 1/2$ в фильтре существуют равновероятные установившиеся колебания $T=0$ и $T=1(-1)$. С увеличением параметра a наиболее вероятным становится движение $T=0$ (с вероятностью $P(0)=1/2$), а вместе с ним существуют колебания других амплитуд $X \in [-N, -1]$. Эти закономерности сохраняются для любого значения L .

Пусть $a < 0$ (цепь является фильтром верхних частот). При этом график функции последования пересекается с биссектрисой только в начале координат. Следовательно, при любых L единственным состоянием равновесия системы является состояние покоя $T=0$.

Постоянное воздействие

При постоянном внешнем воздействии A график функции последования пересекает ось ординат в точке $y=A$, при этом $\phi = A$. Рассмотрим случай $A > 0$.

Пусть $a > 0$. При $A=1$ для всех значений $0 < a < 1$ для границы областей I, II имеем $x > 1$, поэтому наименьшее значение абсциссы точки пересечения графика функции последования и биссектрисы всегда равно 1, и наиболее вероятным установившимся движением является $T=1(1)$. Рассмотрим случай $A=2$. Диаграмма Ламерея для $L=12$, $a=7/11$ показана на рис. 3, а. Здесь график функции последования пересекается с биссектрисой при $x \in \{3, 4, 5\}$. Следовательно, при старте из точек $[x] \in [-6; 3]$ в

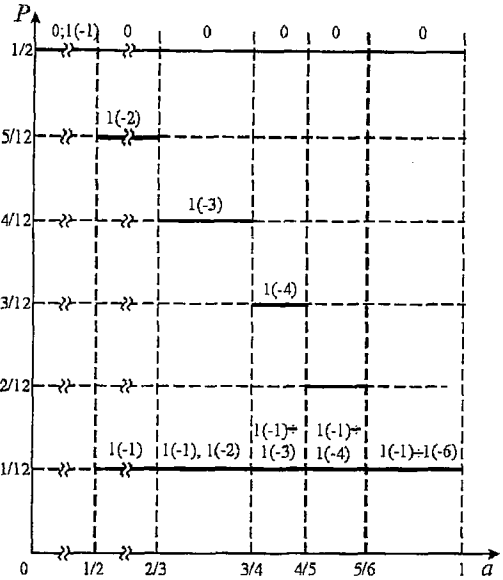


Рис. 2. Вероятностная диаграмма автономного фильтра нижних частот при $L=12$

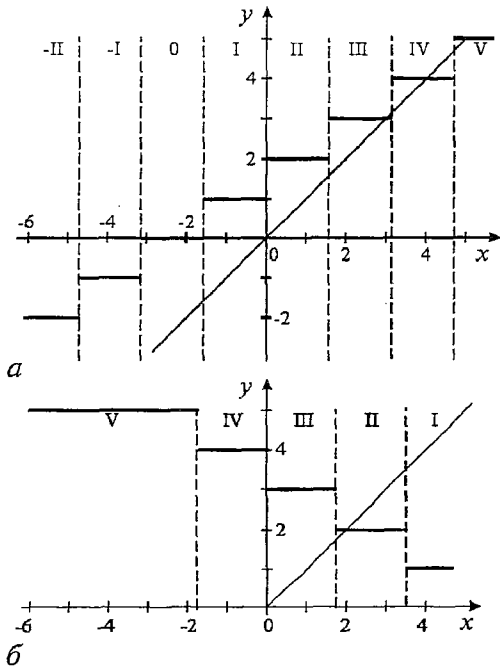


Рис. 3. Диаграммы Ламерея для $L=12$: а - $A=2$, $a=7/11$; б - $A=4$, $a=-4/7$

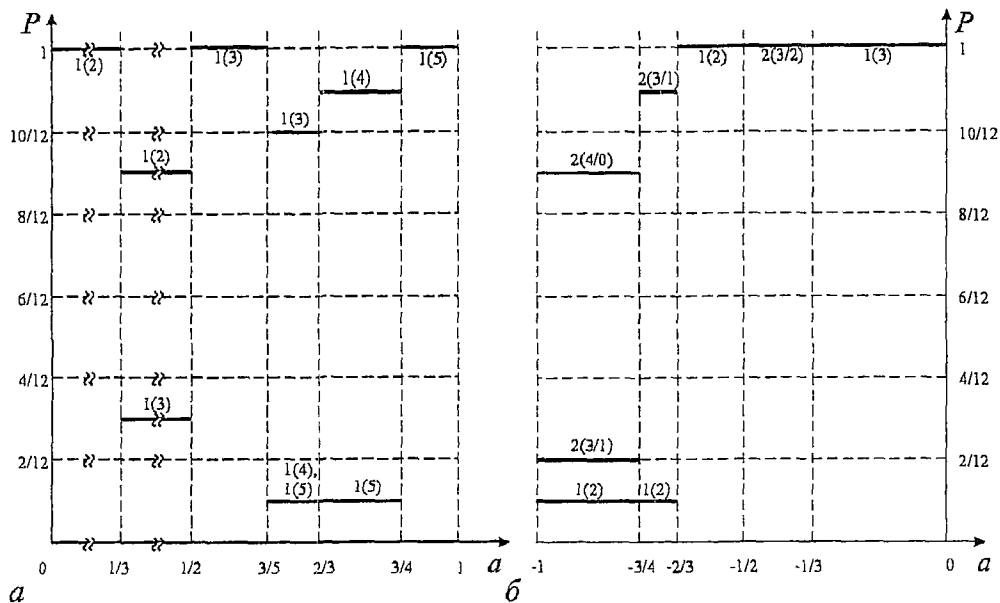


Рис. 4. Вероятностные диаграммы для $L = 12$: а - фильтра нижних частот при $a = 7/11$, $A = 2$; б - фильтра верхних частот при $a = -4/7$, $A = 4$

цепи устанавливается колебание $T=1(3)$. При старте из точек $x \in \{4, 5\}$ имеем, соответственно, движения $T=1(4)$, $T=1(5)$. Вероятности колебаний $P(3) = 10/12$, $P(4) = P(5) = 1/12$. Рассмотрение движений при $a \in (0, 1)$ позволяет построить бифуркационную и вероятностную диаграммы. Последняя показана на рис. 4, а.

Анализ колебаний для ряда значений L и A позволил определить следующие закономерности для наиболее вероятных установившихся значений величины $x = X$. При $A = 1$ на выходе фильтра всегда имеем $T=1(1)$. Если внешнее воздействие удовлетворяет условию $1 < A < N_1$, то в фильтре нижних частот устанавливается наиболее вероятное движение $T=1(X)$, где $A \leq X < N_1$, если на диаграмме Ламерея точки X и $X-1$ принадлежат области X . Это означает выполнение условия

$$X \leq aX + A < X + 1 \cap X \leq a(X - 1) + A < X + 1,$$

откуда следует

$$(X - A)/(X - 1) \leq a < (X + 1 - A)/X.$$

В случае $X = N_1$ необходимо, чтобы точка $x = N_1 - 1$ на диаграмме Ламерея принадлежала области N_1 . Это означает, что

$$a \geq (N_1 - A)/(N_1 - 1);$$

верхним значением этого диапазона является $a < 1$. Заметим, что при этом движение $T=1(N_1)$ является единственным. При $A = N_1$, $a \in (0, 1)$ на выходе фильтра имеем единственное установившееся колебание $T=1(N_1)$.

Полученные закономерности позволяют найти зависимость $X(a)$ для любых L и A . Эту зависимость можно сравнить с идеальной при $L = \infty$, которая установлена в [5].

Пусть $a < 0$. При $A = 1$ для всех значений L и $-1 < a < 0$ график функции последования не пересекается с биссектрисой, точки $x = 0$ и $x = 1$ на диаграмме Ламерея принадлежат соответственно областям I и 0, в фильтре возникают только паразитные колебания с периодом $T = 2$ и мгновенными значениями $x \in \{0, 1\}$. Ниже это обозначается $T = 2(1/0)$. При $A > 1$ картина меняется. Рассмотрим случай $A = 4$. В качестве примера на рис. 3, б приведена диаграмма Ламерея для $L = 12$, $a = -4/7$. Здесь

график функции последования пересекается с биссектрисой в единственной точке при $x=2$. Это означает, что при старте из точек $[x] \in [-6; 5]$ в фильтре устанавливаются колебания $T=1(2)$. При других значениях параметра a может возникать движение $T=1(3)$, а также паразитные колебания с периодом $T=2$ и различными мгновенными значениями. Рассмотрение движений при $a \in (-1; 0)$ позволяет построить бифуркационную и вероятностную диаграммы. Последняя показана на рис. 4, б.

Анализ колебаний для ряда значений $A > 1$ и L позволил установить следующие закономерности для наиболее вероятных установившихся значений величины X . В общем случае произвольного $1 < A \leq N_1$ на выходе фильтра верхних частот имеем $T=1(X)$, где $1 < X < A$, если на диаграмме Ламерея точки X и $X-1$ или точки X и $X+1$ принадлежат области X . Это означает выполнение условия

$$X \leq aX + A < X + 1 \cap X \leq a(X - 1) + A < X + 1$$

или

$$X \leq aX + A < X + 1 \cap X \leq a(X + 1) + A < X + 1.$$

Откуда следует

$$(X - A)/X \leq a < (X + 1 - A)/(X - 1) \quad (1)$$

или

$$(X - A)/(X + 1) \leq a < (X + 1 - A)/X. \quad (2)$$

В этом же диапазоне значений A на выходе фильтра имеем $T=1(1)$, если выполняется (2). Другим по сравнению с определяемыми (1) и (2) областям параметра $a < 0$ соответствуют наиболее вероятные паразитные колебания с периодом $T=2$.

Полученные закономерности позволяют установить зависимость $X(a)$ для произвольных L и A . Эту зависимость можно сравнить с идеальной при $L = \infty$, которая рассчитывается с помощью методики, разработанной в [5].

Рассмотрим случай $A < 0$. Воспользовавшись методикой, описанной выше, получаем следующие закономерности для наиболее вероятных установившихся колебаний при произвольных L и A .

При $a > 0$, $-N+1 < A < 0$ на выходе фильтра имеем колебание $T=1(X)$, где $-N < X < A$, если на диаграмме Ламерея точки X и $X+1$ принадлежат области X . Это означает выполнение условия

$$X \leq aX + A < X + 1 \cap X \leq a(X + 1) + A < X + 1,$$

откуда следует

$$(X + 1 - A)/(X + 1) < a \leq (X - A)/X.$$

В этом же диапазоне значений A в случае $X = -N$ необходимо, чтобы точка $X+1$ принадлежала области $-N$. Это означает, что

$$a > (-N + 1 - A)/(-N + 1);$$

верхней границей этого диапазона является $a < 1$. При $A \in \{-N, -N+1\}$ имеем единственное установившееся движение $T=1(-N)$.

Если $a < 0$, $A = -1$, то на выходе фильтра всегда существует единственное колебание $T=1(-1)$, так как на плоскости состояний для границы областей $-1, 0$ имеем $x < -1$, и единственная точка пересечения графика функции последования и биссектрисы соответствует $x = -1$. Для $-N \leq A < -1$ в фильтре верхних частот имеем наиболее вероятное установившееся колебание $T=1(X)$, где $A \leq X < -1$, если на диаграмме Ламерея точки X и $X-1$ или точки X и $X+1$ принадлежат области X .

Результирующие соотношения получаются из (1), (2) только заменой знаков \geq и $<$ на \leq и $>$, соответственно.

Теоретические результаты подтверждены компьютерным моделированием. Полученные закономерности нетрудно распространить на случай, когда переменные представляются в форме чисел с выравниванием слева (то есть в виде дробных чисел). Для этого достаточно ввести новую переменную $\bar{x} = xq$, где $q=1/N$ - шаг квантования.

Заключение

Рассмотрены цифровые фильтры нижних и верхних частот, реализуемые на базе рекурсивной цепи первого порядка, с произвольным количеством уровней квантования с усечением по величине результатов сложения, когда сумматор без учета эффектов квантования имеет характеристику с насыщением. Для характеристики нелинейных динамических режимов предложены вероятностные диаграммы. Методом точечных отображений исследованы автономный режим и колебания при постоянном внешнем воздействии двух знаков. Получены выражения для расчетов наиболее вероятных установившихся режимов. Результаты могут быть использованы при создании систем передачи информации с цифровой обработкой сигналов. Предложенная методика может использоваться для исследования эффектов квантования в цифровых фильтрах нижних и верхних частот первого порядка (рекурсивных, рекурсивно-нерекурсивных) с представлением чисел в прямом, обратном или дополнительном кодах с округлением или усечением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства образования России.

Библиографический список

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
2. Каппелини В., Константинодис А. Дж., Эмилиан П. Цифровые фильтры и их применение. М.: Энергоатомиздат, 1983.
3. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.
4. Брюханов Ю.А. Переходные процессы в рекурсивной системе второго порядка с нелинейностью насыщения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 2. С. 28.
5. Брюханов Ю.А. Колебания в нелинейных рекурсивных цифровых цепях первого порядка при постоянном внешнем воздействии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 4. С. 29.

Ярославский государственный
университет

Поступила в редакцию 15.02.02
после доработки 20.09.02

QUANTIZATION EFFECTS IN DIGITAL FIRST ORDER RECURSIVE FILTERS WITH VALUES TRUNCATION

Yu.A. Bryuhanov

Free oscillation and oscillation under a constant level input signal in low-frequency and high-frequency filters are considered. We use fixed point numbers in additional code. The method of one-dimensional point mapping is applied. Dynamical regimes are characterized by probabilistic diagrams. Expressions for most probably oscillation in the filter's output with arbitrary numbers of quantization levels are defined. Given methods may be used for quantization effects investigation in the first-order digital filters with representation of the numbers in direct, inverse and additional code with rounding and truncation.



Брюханов Юрий Александрович - родился в Красноярске (1941), окончил Красноярский политехнический институт (1967) и аспирантуру Воронежского государственного университета (1970). С 1971 года работает в Ярославском государственном университете, в настоящее время заведует кафедрой динамики электронных систем. Защитил кандидатскую диссертацию (1971) и докторскую диссертацию (1989) в области применения теории колебаний в задачах радиофизики и электроники. Область научных интересов - нелинейная динамика электронных систем дискретного времени. Автор монографии «Управление динамическим режимом колебательных систем» и более 180 статей. Заслуженный деятель науки РФ.



О ДИНАМИКЕ НА ПОРОГЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ХАОСА В МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ, ПОСТРОЕННЫХ НА БАЗЕ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ИНЕРЦИОННОЙ И ДИССИПАТИВНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ

А.С. Иванова, С.П. Кузнецов

Исследуется система глобально связанных отображений, демонстрирующих переход к хаосу через удвоения периода, в которой каждый элемент взаимодействует со всеми остальными. Основное внимание уделяется области, где реализуется наиболее разнообразное и сложное поведение - на пороге хаоса. Рассмотрены и сопоставлены динамика системы с инерционной и диссипативной глобальной связью, выявлены и проиллюстрированы свойства универсальности и скейлинга.

Введение

В настоящее время большой интерес вызывает изучение динамики хаотических элементов с глобальным взаимодействием. Такие системы возникают, например, при описании многомодовых лазеров, нейросетей, некоторых химических систем. Модельную систему в виде набора логистических отображений, в котором каждый элемент связан с каждым другим, ввел в рассмотрение Канеко [1,2].

На рис. 1, *а* показана схематически система двух связанных элементов, а на рис. 1, *б* - система глобально связанных отображений. Ясно, что систему с глобальной связью можно мыслить как набор элементов, каждый из которых попарно связан с каждым другим.

В свое время, для двух связанных элементов, демонстрирующих удвоения периода, на основе ренормгруппового (РГ) анализа было обнаружено, что слабая связь между отображениями представляется в общем случае как комбинация двух типов связи, инерционной и диссипативной [3-5]. В области перехода к хаосу оба этих типа связи характеризуются принципиально разными свойствами по отношению к РГ-преобразованию. В отличие от диссипа-

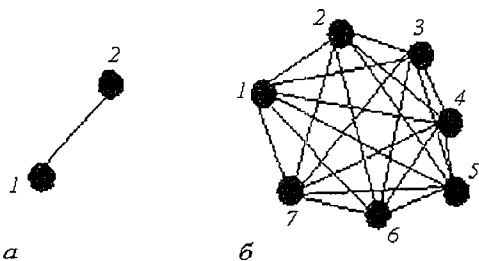


Рис. 1. *а* - Система двух связанных элементов; *б* - система из большого числа глобально связанных элементов, где каждый элемент попарно связан с каждым другим

тивной связи, инерционная может приводить к самопроизвольно возникающей нетривиальной динамике не только в закритической, но и в докритической области [3-6].

Соответственно, в системе с глобальной связью в общем случае мы должны иметь дело с теми же двумя типами взаимодействия элементов.

Уравнение для системы, в котором присутствуют оба типа глобальной связи можно записать в следующем виде:

$$x_{n+1}(i) = (1-\varepsilon_1)f(x_n(i)) - \varepsilon_2 x_n(i) + \varepsilon_1/N \sum_{j=1}^N f(x_n(j)) + \varepsilon_2/N \sum_{j=1}^N x_n(j). \quad (1)$$

Здесь n - дискретное время; i - индекс элемента; $f(x)=1-\lambda x^2$ - нелинейная функция, отвечающая логистическому отображению; N - количество элементов в системе, предполагающееся большим. Член с $f(x)$ соответствует диссипативной связи, а линейный член представляет собой комбинацию инерционной и диссипативной связи (причем вклад диссипативной связи относительно мал). Согласно анализу, сделанному в работе [7], коэффициенты ε_1 и ε_2 связаны с коэффициентами инерционной и диссипативной связи следующим образом:

$$\varepsilon_I = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_D = \varepsilon_1 - 0.088\varepsilon_2.$$

Заметим, что последние два члена в уравнении (1) одинаковы для всех элементов системы и их можно трактовать как два средних поля, отвечающих за два типа связи. Иными словами, систему (1) можно переписать в виде

$$x_{n+1}(i) = (1-\varepsilon_1)f(x_n(i)) - \varepsilon_2 x_n(i) + \varepsilon_1 F_n^1 + \varepsilon_2 F_n^2, \quad (2)$$

где

$$F_n^1 = 1/N \sum_{j=1}^N f(x_n(j)) \quad \text{и} \quad F_n^2 = 1/N \sum_{j=1}^N x_n(j). \quad (3)$$

В работах Канеко и других авторов выявлена богатая феноменология модели с диссипативной глобальной связью, включая феномен кластеризации - образование в процессе динамики групп элементов, состояния которых в точности совпадают [1, 2, 4, 8]. Это возможно благодаря глобальному характеру связи: если не различаются мгновенные состояния элементов, принадлежащих кластеру, то не отличается и действующее на них поле.

Естественно классифицировать возможные состояния системы по числу кластеров k и по *относительным числам заполнения кластеров* (отношению количества элементов в кластере к общему числу элементов) $p_i = N_i/N$.

Феномен кластеризации с очевидностью будет возможен также и в системе с двумя типами связи. В самом деле, элементы, мгновенные состояния которых совпадают, будут находиться в идентичных условиях независимо от количества средних полей.

Наличие кластеризации в случае небольшого числа кластеров позволяет существенно упростить описание динамики системы с глобальной связью. Действительно, для состояния с K кластерами уравнения сводятся к системе K связанных отображений

$$X_{n+1}^k = (1-\varepsilon_1)f(X_n^k) - \varepsilon_2 X_n^k + \varepsilon_1 \sum_{k=1}^K p_k f(X_n^k) + \varepsilon_2 \sum_{k=1}^K p_k X_n^k, \quad (4)$$

$$k=1, 2, \dots, K, \quad \sum_{k=1}^K p_k = 1.$$

Простейшим примером может служить двухкластерное состояние, которое описывается с помощью системы двух связанных отображений. Если относительные числа заполнения кластеров p_1 и $p_2=1-p_1$, то уравнение (4) принимает вид

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= f(X_n) + \varepsilon_1 p_2 [f(Y_n) - f(X_n)] + \varepsilon_2 p_2 (Y_n - X_n), \\ Y_{n+1} &= f(Y_n) + \varepsilon_1 p_1 [f(X_n) - f(Y_n)] + \varepsilon_2 p_1 (X_n - Y_n). \end{aligned} \quad (5)$$

В частном случае $p_1=p_2=1/2$ система (5) совпадает с предложенной в работе [9] системой двух отображений с комбинированной связью. Случай $p_1 \neq p_2$ отвечает асимметрично связанным системам, в которых связь содержит и диссипативную, и инерционную составляющие.

Заметим что, интересные феномены в динамике связанных систем появляются тогда, когда есть тенденция, противодействующая сглаживанию состояний, вносимому за счет диссипативной связи, а именно, неустойчивость траекторий, присущая хаосу. По-видимому, по этой причине, в опубликованных работах основное внимание уделялось *закритической области* по параметру индивидуального логистического отображения, тогда как представляющий принципиальный интерес вопрос об особенностях перехода к хаосу и о критических состояниях систем с глобальной связью на границе между хаосом и порядком практически не затрагивался.

Известно, что в индивидуальном логистическом отображении переход к хаосу через удвоения периода характеризуется закономерностями универсальности и скейлинга, которые были установлены и объяснены Фейгенбаумом [6,10] на основе РГ-анализа. Естественно ожидать, что такого рода свойства будут проявляться и в случае глобальной связи. Этот вопрос, очевидно, заслуживает целенаправленного и подробного изучения.

В своей содержательной части статья посвящена рассмотрению особенностей динамики системы с инерционной связью, однако для сравнения будет обсуждаться также случай диссипативной связи. Заметим, что в работах [11, 12] уже указывалось на необходимость рассмотрения двух типов глобальной связи, но в деталях динамика соответствующих моделей не изучалась, и свойства скейлинга, продемонстрированы не были.

В разделе 1 исследуется динамика системы с глобальной связью, определяются различные режимы, построены фазовые диаграммы, сравнивается поведение системы в различных фазах. В разделе 2 проиллюстрированы свойства универсальности и скейлинга в случае глобальной связи.

1. Фазы Канеко и динамика глобально связанных отображений

Так как кластеризация возможна при наличии двух типов связи, то возникает задача определить расположение соответствующих областей в трехмерном пространстве параметров $(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Ниже будут обсуждаться сечения пространства параметров плоскостями $(\lambda, \varepsilon_1, 0)$ и $(\lambda, 0, \varepsilon_2)$.

С целью анализа и классификации динамики системы с глобальной связью в зависимости от параметров Канеко вводит представление о фазах [1,2]. Для этого рассматривается ансамбль систем с глобальной связью с начальными условиями, заданными случайным образом, и в каждой точке пространства параметров определяется, какой из типов аттракторов (I - IV) [1,2] возникает с большей вероятностью. Используя эту идею, в принципе можно выявить распределение областей различных фаз и в трехмерном пространстве параметров $(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

На рис. 2, а приведена фазовая диаграмма, отвечающая сечению пространства параметров плоскостью $(\lambda, 0, \varepsilon_2)$, что соответствует инерционной связи. Для сравнения на рис. 2, б представлена диаграмма для случая диссипативной связи, которая воспроизводит полученную ранее в работе Канеко [1,2].

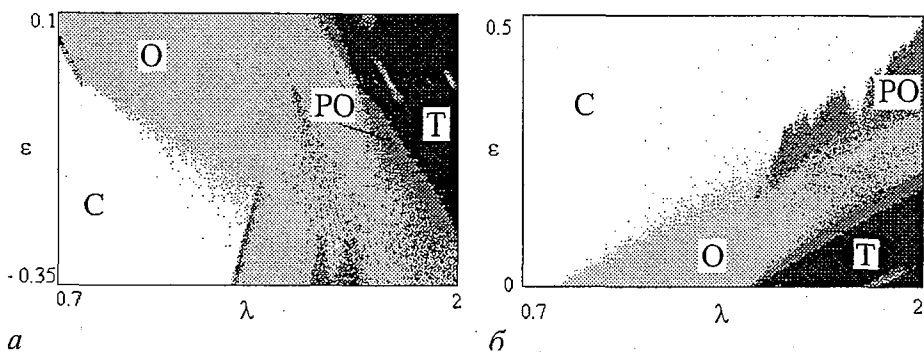


Рис. 2. Фазовые диаграммы на плоскости $(\lambda, 0, \epsilon_2)$ для случая инерционной связи (а) и на плоскости $(\lambda, \epsilon_1, 0)$ для случая диссипативной связи (б) системы (1). Количество элементов системы - 100, число начальных условий - 250. Здесь С - когерентная фаза, О - упорядоченная фаза, РО - частично упорядоченная фаза, Т - турбулентная фаза

Когерентной фазе, согласно предлагаемой Канеко классификации, отвечает область пространства параметров, где с доминирующей вероятностью возникают аттракторы с одним кластером. На рис. 2 она обозначена буквой С (coherent). В этом случае динамика во времени описывается просто одномерным логистическим отображением. Как видно из рис. 2, б, в случае диссипативной связи увеличение параметра ϵ_1 приводит к появлению когерентного аттрактора. В случае инерционной связи увеличение параметра приводит, наоборот, к возникновению в системе большего числа кластеров (см. рис. 2, а). На рис. 3, е приведена иллюстрация временной динамики системы (1) с диссипативной связью при $\lambda=0.85$ и $\epsilon_1=0.2$ в случае когерентного аттрактора. Возникает один кластер, который при данных значениях параметров демонстрирует периодическую динамику. Для случая инерционной связи временная динамика показана на рис. 3, а при $\lambda=0.8$ и $\epsilon_2=-0.2$. В этом случае динамика системы (1) является периодической.

Под *упорядоченной фазой* Канеко понимает ситуацию, когда в системе (1) с доминирующей вероятностью возникают аттракторы с небольшим числом кластеров. Область, соответствующая этой фазе, обозначена на рис. 2 буквой О (ordered). На рис. 2, б видно, что для малой диссипативной связи переход от когерентной к упорядоченной фазе происходит при $\lambda=0.75$, что соответствует первой бифуркации удвоения периода для логистического отображения [6,10]. При большем значении параметра ϵ_1 такой переход имеет место при большем значении λ . В случае инерционной связи (см. рис. 2, а) граница перехода имеет более сложную форму. Динамика описывается системой небольшого числа связанных отображений вида (4). При этом числа заполнения определяются начальными условиями для системы с глобальной связью, а динамика во времени будет такой, как в системе (4). На рис. 3, ж показан пример временной диаграммы при $\lambda=1.5$ и $\epsilon_1=0.2$ для случая диссипативной связи. При таких значениях параметров возникает два кластера, в одном из которых 51, а в другом 49 элементов, причем эти два кластера движутся хаотически в противофазе друг другу. Для системы с инерционной связью пример аттрактора, отвечающего упорядоченной фазе, показан на рис. 3, б при $\lambda=1.23$ и $\epsilon_2=-0.1$. В данном случае в системе (1) возникают два кластера (по 60 и 40 элементов), движущиеся периодически в противофазе друг другу.

Турбулентная фаза, обозначенная на рис. 2 символом Т (turbulent), соответствует области, где с подавляющей вероятностью реализуются аттракторы с большим числом кластеров. Если связь диссипативная, турбулентная фаза возникает при значениях параметра λ , близких к 2. Для системы с инерционной связью случай турбулентной фазы возможен и при меньших значениях λ . В этом

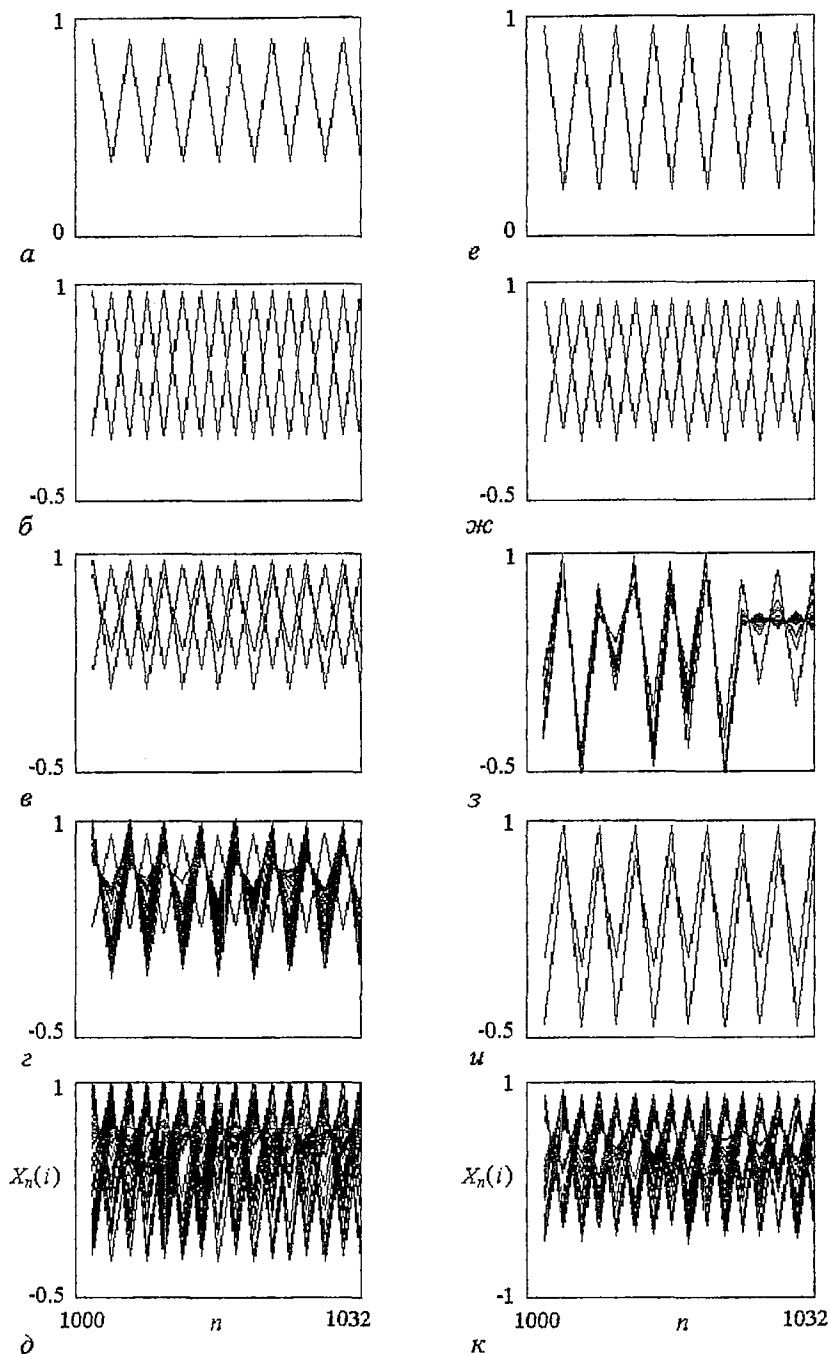


Рис. 3. Временные диаграммы системы (1) для инерционной связи (а-д) и для диссипативной связи (е-к): а - $\lambda=0.8$, $\epsilon_2=-0.2$; б - $\lambda=1.23$, $\epsilon_2=-0.1$; в - $\lambda=1.53$, $\epsilon_2=-0.13$; г - $\lambda=1.52$, $\epsilon_2=-0.13$; д - $\lambda=1.53$, $\epsilon_2=-0.05$; е - $\lambda=0.85$, $\epsilon_1=0.2$; ж - $\lambda=1.5$, $\epsilon_1=0.2$; з - $\lambda=1.61$, $\epsilon_1=0.25$; и - $\lambda=1.6$, $\epsilon_1=0.25$; к - $\lambda=1.9$, $\epsilon_1=0.15$

случае не происходит кластеризации, и нет возможности использовать для описания динамики систему, состоящую из небольшого числа связанных отображений. Динамика элементов во времени преимущественно хаотическая. Иллюстрации временной динамики в турбулентной фазе показаны на рис. 3, к для диссипативной связи ($\lambda=1.9$ и $\epsilon_1=0.15$) и на рис. 3, д для инерционной ($\lambda=1.53$ и $\epsilon_2=-0.05$).

Частично упорядоченная фаза Канеко реализуется в области РО (partially ordered) на рис. 2. В этой области со сравнимой вероятностью возникают

аттракторы как с большими, так и с малыми числами заполнения. Эта фаза переходная между когерентной и упорядоченной фазой или между упорядоченной и турбулентной фазами. Система (1) демонстрирует свойство перемежаемости как в смысле формирования кластеров (возникает либо большое, либо малое число кластеров), так и в смысле временной динамики (хаотическое - периодическое движение). На рис. 3, з показан аттрактор системы (1) с диссипативной связью, содержащий 90 кластеров, которые хаотически движутся синфазно друг другу при $\lambda=1.61$ и $\varepsilon_1=0.25$. В то же время, при немного отличающихся значениях параметров ($\lambda=1.6$ и $\varepsilon_1=0.25$) возникает аттрактор, содержащий два кластера, в одном из которых 60, а в другом - 40 элементов (рис. 3, и). Эти кластеры демонстрируют периодическую динамику и движутся синфазно друг другу. Аттракторы системы (1) с инерционной связью показаны на рис. 3, в, г. При $\lambda=1.53$ и $\varepsilon_2=-0.13$ в системе возникает 3 кластера, два из которых синфазны (содержат по 29 и 43 элемента), а третий, состоящий из 28 элементов, им противофазен (см. рис. 3, в). Если немного изменить параметры ($\lambda=1.52$ и $\varepsilon_1=-0.13$), возникает 86 кластеров, в одном из которых 13 элементов, а в остальных по одному. Все они демонстрируют хаотическую динамику (см. рис. 3, г).

2. Скейлинг в системе глобально связанных отображений

Для системы двух отображений с симметричной связью и с однонаправленной связью вопрос о свойствах скейлинга был исследован в работах [3,4,7]. В контексте систем с глобальной связью для двухкластерных состояний мы имеем отображение (3) с четырьмя параметрами $(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, p)$, где параметр p отвечает за асимметрию редуцированной системы. В четырехмерном пространстве параметров имеется критическая линия $(\lambda_c, 0, 0, p)$, где $\lambda_c=1.401155189\dots$ Зададимся вопросом о свойствах скейлинга вблизи этой линии.

Свойство скейлинга заключается в том, что в окрестности критической точки $\lambda=\lambda_c$ вся картина областей переходит в себя при растяжении (сжатии) по оси λ в $\delta_f=4.669201\dots$ раз, при этом временной масштаб изменяется в два раза, а масштаб динамических переменных вблизи точки экстремума системы (1) пересчитывается в $a_f=-2.502907876\dots$ раз. Для параметров связи в [7] определены следующие константы: для диссипативной связи фактор пересчета $a_f=2$, а для инерционной $a_f=-2.502907876\dots$

На рис. 4 иллюстрируется свойство скейлинга для случая инерционной связи на плоскости параметров (ε, p) . Слева показаны карты динамических режимов, на которых приведены области периодических режимов (рис. 4, а-б), а справа - карты старшего ляпуновского показателя (рис. 4, г-е). Черным цветом на рис. 4, г-е обозначена хаотическая динамика, белым - области расходимости, соответствующие убеганию значений динамических переменных на бесконечность. Периодической динамике отвечают отрицательные значения ляпуновского показателя, которые кодируются оттенками серого цвета, так что большему по модулю значению ляпуновского показателя соответствует более светлый цвет. Каждый последующий рисунок является увеличенным фрагментом предыдущего. Видно, что структуры действительно подобны. Следовательно, система двух несимметрично инерционно связанных отображений демонстрирует свойства универсальности и скейлинга.

Наличие инерционной связи приводит к возникновению сложной хаотической и квазипериодической динамики уже в докритической области, то есть при $\lambda < \lambda_c$.

Для сравнения на рис. 5 приведены карты динамических режимов и

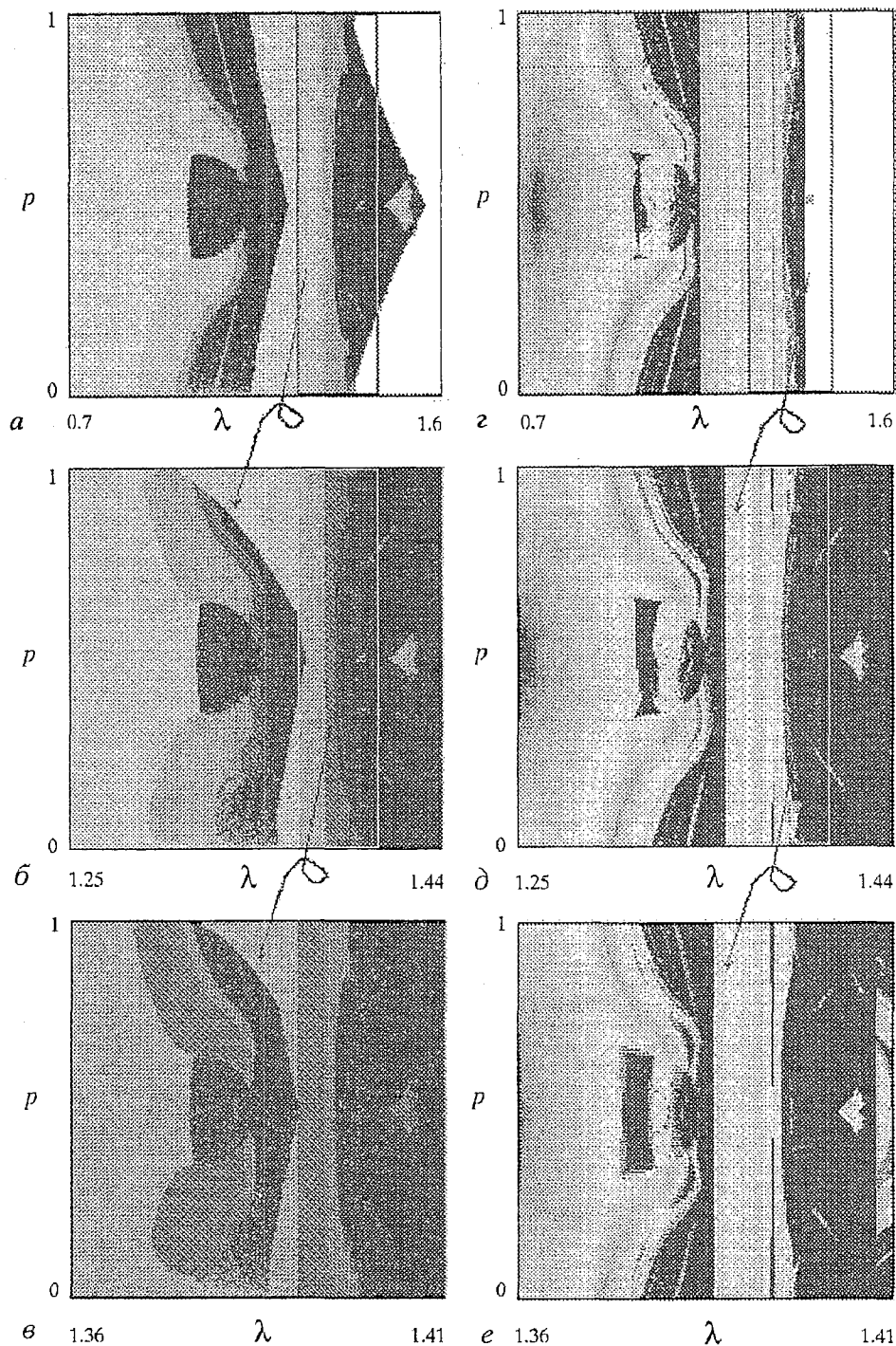


Рис. 4. Иллюстрации свойств скейлинга на картах динамических режимов (слева) и старшего ляпуновского показателя (справа) системы двух отображений с инерционной связью ϵ_2 : а, z - 0.25; б, д - (-0.1); в, е - 0.03

ляпуновского показателя на плоскости параметров (ϵ, p) в случае диссипативной связи. При этом в докритической области возникает периодическая динамика с каскадом бифуркаций удвоений периода, завершающаяся переходом к хаосу при $\lambda = \lambda_c$. На рис. 5 каждый последующий рисунок является увеличенным фрагментом предыдущего. Получающиеся подобные структуры служат иллюстрацией

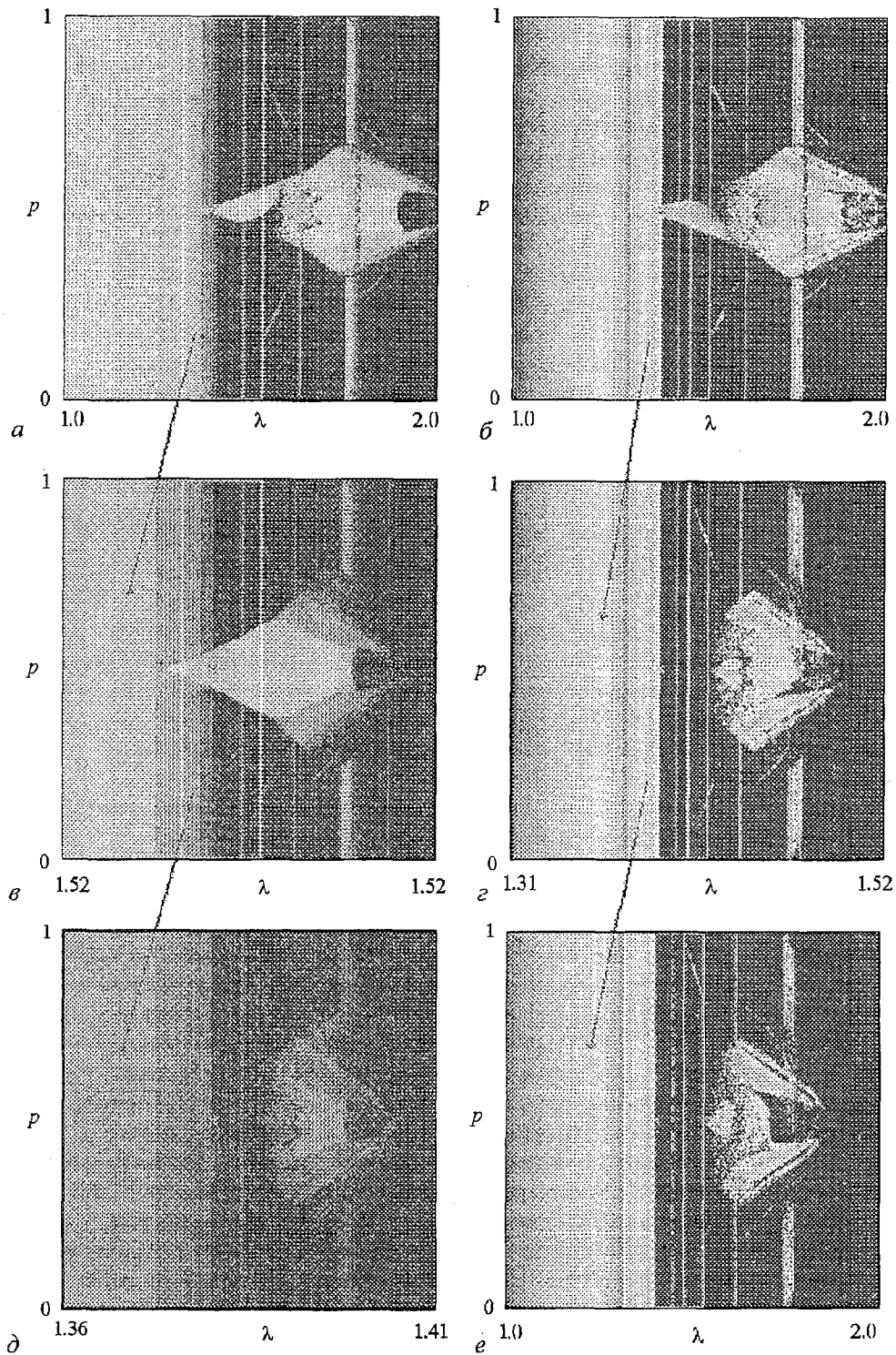


Рис. 5. Иллюстрации свойств скейлинга на картах динамических режимов (*a, в, д*) и старшего ляпуновского показателя (*б, г, e*) системы двух отображений с диссипативной связью ε_1 : *a, г* - 0.25; *б, д* - 0.125; *в, e* - 0.0625

скейлинга для системы двух отображений с несимметричной диссипативной связью.

Таким образом, двухкластерные состояния системы с глобальной связью

характеризуются свойствами универсальности и скейлинга. Естественно ожидать, что и состояния с большим числом кластеров будут обладать аналогичными свойствами.

Чтобы в этом убедиться, помимо фазовых диаграмм будем строить диаграммы формирования кластеров. Для этого зафиксируем параметр λ и, изменяя параметр связи, после 1032 итераций отображаем на плоскости $(x_n(i), \epsilon_j)$ значения элементов $x_n(i)$ системы (1). При этом в случае когерентной фазы одному значению параметра связи соответствует единственное значение динамической переменной (так как в системе только один кластер), поэтому на диаграмме будет только одна точка. В случае упорядоченной фазы при одном значении параметра связи будет несколько значений $x_n(i)$, так как возникает несколько кластеров. В случае частично упорядоченной фазы при одном значении параметра может возникать несколько кластеров, а при другом - число этих кластеров будет велико, поэтому на диаграмме этой фазе соответствуют вертикальные линии. Турбулентная фаза характеризуется большим числом кластеров, поэтому на диаграмме значения динамических переменных разбросаны по всей области.

На рис. 6 приведены иллюстрации скейлинга для случая инерционной (a-в) и диссипативной (г-е) связи. Каждый последующий рисунок является увеличенным

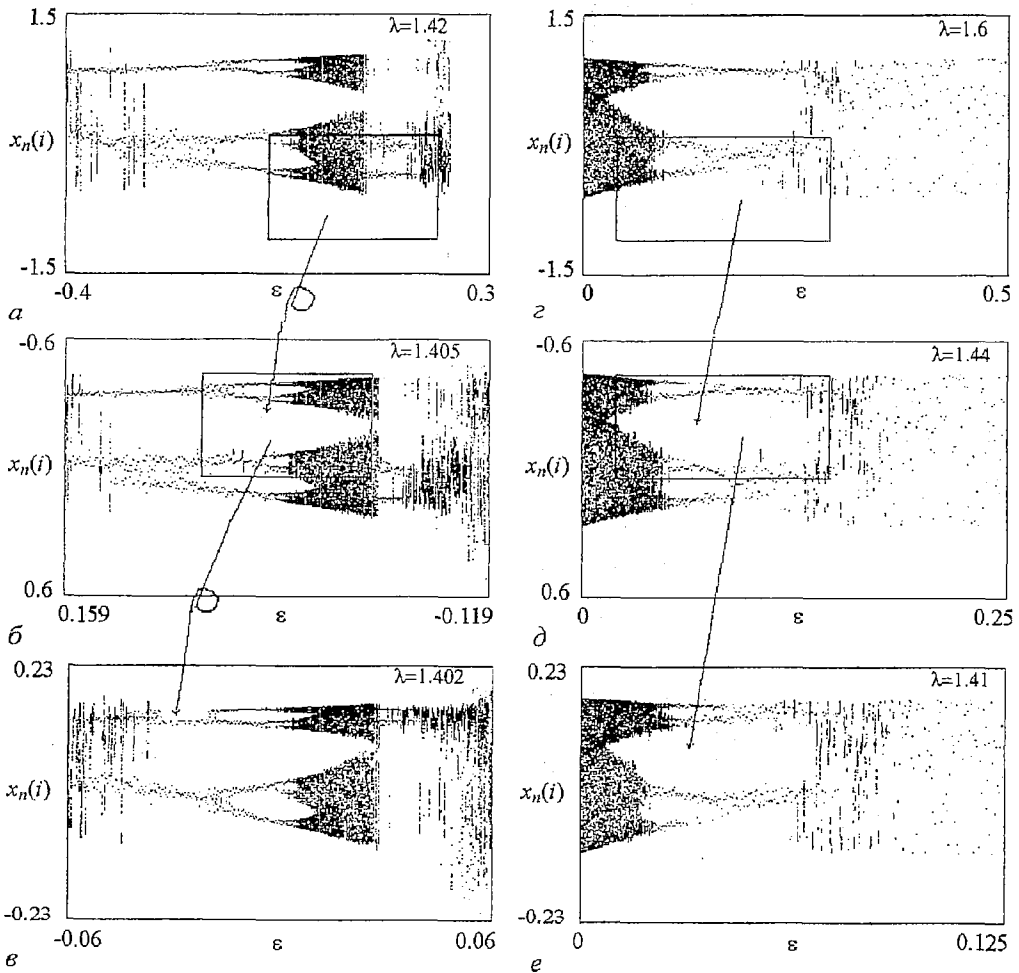


Рис. 6. Иллюстрации скейлинга на диаграмме формирования кластеров для системы (1). Слева - инерционная связь ($\epsilon_1=0$); справа - диссипативная ($\epsilon_2 \neq 0$)

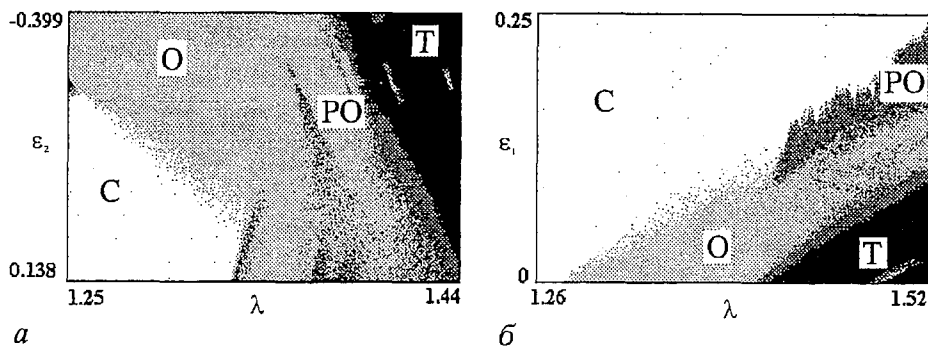


Рис. 7. Фазовые диаграммы на плоскости $(\lambda, 0, \epsilon_2)$ для случая инерционной связи (а) и на плоскости $(\lambda, \epsilon_1, 0)$ для случая диссипативной связи (б) системы (1). Сравнивая с рис. 2, видим, что получаются подобные структуры пространства параметров

фрагментом предыдущего, причем константы пересчета такие же, как и для случая парной связи. Видно, что вблизи критической точки $(\lambda_c, 0)$ при пересчете параметров вся картина фаз переходит сама в себя. В случае инерционной связи при $\epsilon_2 = -0.4$ в системе (1) реализуется частично упорядоченная фаза (а). С увеличением параметра ϵ_2 возникает упорядоченная фаза, причем сначала реализуются аттракторы с двумя кластерами, затем число кластеров удваивается, и при $\epsilon_2 \approx 0.01$ в системе (1) наблюдается турбулентная фаза. Дальнейший рост параметра связи приводит к возникновению частично упорядоченной фазы. В случае диссипативной связи при малой связи реализуется турбулентная фаза (з). При $\epsilon_1 \approx 0.1$ в системе образуется восемь кластеров, затем с увеличением связи четыре, два, и при $\epsilon_1 \approx 0.3$ реализуется аттракторы, содержащие один кластер.

На рис. 7 приведены фазовые диаграммы системы с глобальной инерционной (а) и с глобальной диссипативной (б) связью. В данном случае произведен пересчет значений параметров λ и ϵ_2 , отвечающих рис. 2, на константы скейлинга, характерные для инерционной связи. При задании начальных условий интервал, из которого случайным образом выбираются значения динамической переменной, также уменьшен в $a_f = -2.502907876\dots$ раз по сравнению с начальными условиями, использованными для построения фазовых диаграмм на рис. 2. Если сравнить рис. 2 и 7, то видно, что при пересчете параметров получают подобные структуры областей плоскости параметров.

Таким образом, система глобально связанных логистических отображений обладает свойствами скейлинга, аналогичными тем, которые характерны для двух связанных элементов.

Заключение

В данной работе рассмотрена динамика системы глобально связанных отображений в области перехода к хаосу.

С точки зрения РГ-анализа, существует два типа связи, обладающие принципиально различными свойствами, - инерционная и диссипативная. В данной работе введена в рассмотрение модель системы с двумя типами глобальной связи. Для этой системы предпринято обобщение классификации состояний системы в зависимости от числа кластеров и различных фаз для ансамбля систем. Построены и сопоставлены фазовые диаграммы системы в случае инерционной и диссипативной глобальных связей.

Если в системе возникает малое число кластеров, то ее можно описывать с помощью системы соответствующего числа связанных отображений. В частности,

исследование двухкластерных состояний позволяет обобщить свойства универсальности и скейлинга, характерные для логистических отображений с симметричной связью, на несимметричный случай.

Показано, что система с глобальной инерционной связью демонстрирует более сложную динамику, чем система с диссипативной связью; в частности, в докритической области может самопроизвольно возникать сложная, в том числе хаотическая, динамика.

Как известно, логистическое отображение, использованное в качестве индивидуального элемента при построении исследуемых моделей, является представителем обширного класса универсальности, включающего многие нелинейные диссипативные системы различной природы. Поэтому найденные нами универсальные закономерности в поведении систем с глобальной связью, по-видимому, будут справедливы также для систем с глобальной связью, построенных из других нелинейных диссипативных систем, в частности, реальных систем в области физики, биологии, экономики.

Работа выполнена в рамках госконтракта № 40.020.1.1.1168 Минпромнауки РФ при частичной поддержке РФФИ (грант № 00-02-17509) и ФЦП «Интеграция».

Библиографический список

1. *Kaneko K.* Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in network of chaotic elements // *Physica D.* 1990. Vol. 41, № 2. P. 137.
2. *Kaneko K.* Chaotic but regular Posi-Nega switch among coded attractors by cluster-size variation // *Phys. Rev. Letter.* 1989. Vol. 63, № 3. P. 219.
3. *Кузнецов С.П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1985. Т. 28, № 8. С. 991.
4. *Kook H., Ling F.H., Schmidt G.* Universal behavior of coupled nonlinear systems // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 43, № 6. P. 2700.
5. *Kim S.-Y., Kook H.* Period doubling in coupled maps // *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 48, № 2. P. 785.
6. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.
7. *Kuznetsov S.P.* Universality and scaling in two-dimensional coupled map lattices // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1992. Vol. 2, № 3. P. 281.
8. *Taborov A.V., Maistrenko Yu.L., Mosekilde E.* Partial synchronization in a system of coupled logistic map // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2000. Vol. 10, № 5. P. 1051.
9. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса: Обзор // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34, № 10-11-12. С. 1079.
10. *Feigenbaum M.J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1979. Т. 21, № 6. P. 669.
11. *Kuznetsov S.P.* Renormalization group, universality and scaling in dynamics of coupled map lattices // *Theory and applications of coupled map lattices / Ed. by K. Kaneko.* John Wiley & Sons Ltd, 1993.
12. *Kim S.-Y., Kook H.* Renormalization analysis of two coupled maps // *Phys. Lett. A.* 1993. 178. С. 258.

*Саратовский государственный университет
Саратовское отделение ИРЭ РАН*

*Поступила в редакцию 4.03.02
после доработки 3.09.02*

ON DYNAMICS OF MODEL NETWORKS COMPOSED OF LOGISTIC MAPS WITH INERTIAL AND DISSIPATIVE GLOBAL COUPLING

A.S. Ivanova, S.P. Kuznetsov

We study a system of globally period-doubling coupled maps, each element interacts with each other. The main attention is given to the domain of the most various and complex behavior, near the onset of chaos. We discuss and compare dynamics of the system with pure inertial and pure dissipative coupling, reveal and illustrate the associated scaling properties.



Иванова Анна Сергеевна - родилась в Саратове (1979). В 1996 году закончила Лицей прикладных наук, в 2001 году - факультет нелинейных процессов СГУ, аспирантка СГУ. Область научных интересов - изучение систем глобально связанных отображений, универсальности и скейлинга. Принимала участие в нескольких международных конференциях. Соросовская студентка (2000).



КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ГЕНЕРАТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ ПОД ВНЕШНИМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ: СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА, ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ

Е.С. Мчедлова, Л.В. Красичков

Предложена радиофизическая модель генератора Ван дер Поля с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента. Проведены экспериментальные исследования поведения предложенной модели генератора Ван дер Поля под внешним гармоническим воздействием. Построены карты динамических режимов генератора на плоскости управляющих параметров (амплитуда - частота внешнего воздействия) в натурном эксперименте. Проведены численные исследования особенностей поведения генератора. В ходе натурального и численного экспериментов показано, что переход к хаосу в генераторе происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода. Показано, что структура языков синхронизации имеет вид, характерный для бифуркационной ситуации типа crossroad area.

Введение

Классическим примером автоколебательных систем является генератор Ван дер Поля. Такая система уже более семидесяти лет с момента ее появления является основной модельной автоколебательной системой с одной степенью свободы [1-3]. Классической радиотехнической реализацией данной системы является генератор на триоде с колебательным контуром в цепи сетки [2,3]. Математической моделью такой системы является обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с кубической нелинейностью, называемое уравнением Ван дер Поля.

Большой интерес представляет исследование особенностей поведения генератора Ван дер Поля под внешним гармоническим воздействием и, в частности, синхронизации колебаний и возникновения динамического хаоса (см., например, [4-7]).

Исследования неавтономного генератора Ван дер Поля предпринимались многими авторами. Так, еще в 1927 году Ван дер Поль и Ван дер Марк [1] при исследовании поведения генератора в режиме релаксационных колебаний под внешним воздействием обнаружили, что при изменении собственной частоты воздействия в системе возникают субгармонические колебания, кратные частоте воздействия. Кроме того, данные авторы заметили возникновение «нерегулярного

шума» перед переходом от одного субгармонического режима к другому. Пожалуй, это было одним из первых наблюдений хаотических колебаний в радиотехнической системе. Позднее, в 1945 году, Картрайт и Литлвуд [8], анализируя уравнение Ван дер Поля, показали, что при большом значении параметра нелинейности существуют сингулярные решения. В 1949 году Левинсон [9], аналитически анализируя уравнение Ван дер Поля, заменил кубическую нелинейность кусочно-линейной и доказал, что уравнение имеет сингулярные решения и в этом случае.

Однако до настоящего времени остаются трудности, связанные с созданием модели генератора Ван дер Поля под внешним периодическим воздействием, которая в натурном эксперименте демонстрировала бы переход к хаосу и допускала проведение адекватного численного моделирования. На пути создания таких моделей достаточно эффективным является построение кусочно-линейных моделей [10,11]. Так, в работе [11] на основе численного эксперимента показано, что в кусочно-линейной модели генератора Ван дер Поля под внешним периодическим воздействием возможен переход от периодических колебаний к хаотическим, причем переход к хаосу происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода.

В данной работе приводятся результаты натурального эксперимента по исследованию поведения модели генератора Ван дер Поля с симметричной кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента.

1. Реализация генератора в натурном и численном эксперименте

В классическом случае неавтономный генератор Ван дер Поля описывается уравнением

$$d^2x/dt^2 - \epsilon(1-x^2)dx/dt + x = a\cos\omega t, \quad (1)$$

где x - переменная состояния, ϵ - параметр нелинейности, a - амплитуда внешнего воздействия, ω - частота внешнего воздействия.

Для построения радиофизической реализации генератора Ван дер Поля, которая адекватно описывалась бы уравнением (1), можно использовать последовательный контур. Тогда схема генератора представляет собой последовательное соединение генератора синусоидальных колебаний, катушки индуктивности, конденсатора, резистора и нелинейного элемента с S-образной вольт-амперной характеристикой (ВАХ) (рис. 1). На схеме обозначен нелинейный

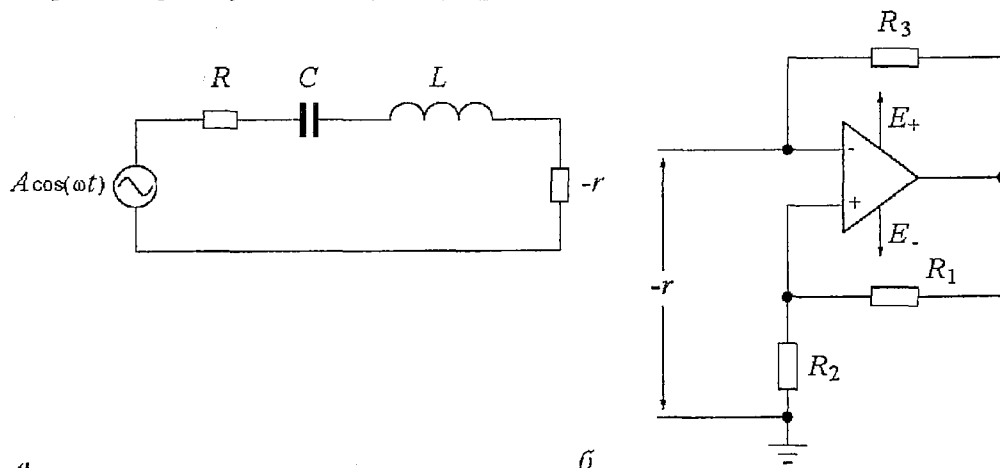


Рис. 1. Принципиальная схема генератора Ван дер Поля под внешним воздействием (а) и принципиальная схема нелинейного элемента с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой (б)

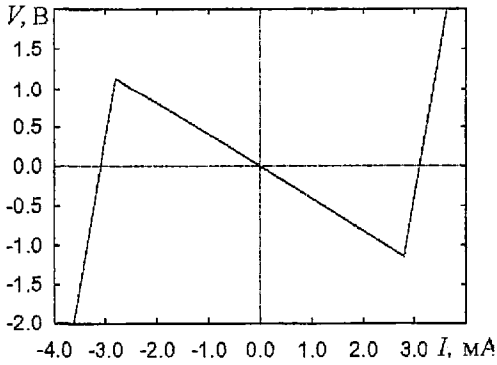


Рис. 2. Кусочно-линейная вольт-амперная характеристика нелинейного элемента

составляло $R_- = -407$ Ом на участке ВАХ с отрицательным наклоном и $R_+ = 3800$ Ом там, где наклон характеристики положителен.

Пользуясь законом Кирхгофа, для приведенной на рис. 1, а модели генератора Ван дер Поля можно записать:

$$\begin{aligned} Ldl/dt + V_C + RI + V(I) &= A \cos \omega t, \\ dV_C/dt &= IC, \end{aligned} \quad (2)$$

где Ldl/dt - напряжение на индуктивности; RI - падение напряжения на резисторе; V_C - напряжение на емкости; $V(I)$ - функция, описывающая кусочно-линейную ВАХ S-типа нелинейного элемента «r»; A - амплитуда внешнего воздействия; ω - частота внешнего воздействия. Вводя безразмерные переменные $\tau = \omega_0 t$, $x = I/I_0$, $y = V/V_0$, $f(x) = V(I)/V_0$, $\Omega = \omega/\omega_0$, $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$, $\epsilon = (V_0/I_0)(C/L)^{1/2}$, $A_0 = (A/I_0)(C/L)^{1/2}$, $G = R(C/L)^{1/2}$, можно окончательно записать

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= -Gx - \epsilon y - \epsilon f(x) + A_0 \cos \Omega \tau, \\ dy/d\tau &= (1/\epsilon)x, \end{aligned} \quad (3)$$

где I_0, V_0 - значения тока и напряжения в экстремуме ВАХ.

Тогда, если нелинейность в уравнении (3) задается функцией $f(x) = 1/3x^3 - x$, то слагаемое $-Gx$ можно исключить с помощью перенормировки и получить уравнение (1). Таким образом, схема рис. 1, а и соответствующее ей уравнение адекватно описывают классический генератор Ван дер Поля под внешним воздействием (1).

2. Натурный эксперимент по исследованию поведения генератора

Для систем, находящихся под внешним воздействием, как правило, исследуют явление синхронизации собственных колебаний генератора внешней вынуждающей силой на плоскости управляющих параметров (амплитуда - частота внешнего воздействия). Наиболее часто используется следующая схема классификации режимов: 1:1, 1:2, 1:3 и т.д. Данное обозначение режимов синхронизации ($m:n$) показывает отношение собственной частоты колебаний генератора (m) к частоте внешнего воздействия (n). Существуют так называемые основные режимы синхронизации, такие как 1:1, 1:2, 1:3, 3:1, 2:1 и т.д. Между ними расположены более сложные многопетлевые режимы высших порядков, такие как 2:5, 3:5, 2:3, 7:2, 5:2 и т.д. Все это режимы с рациональным соотношением частот.

Кроме того, существуют области, для которых это соотношение иррационально - области квазипериодических колебаний.

Экспериментальное исследование поведения неавтономного генератора Ван дер Поля сводится к построению границ различных режимов синхронизации на плоскости управляющих параметров. При проведении экспериментальных исследований в данной работе были выбраны следующие значения номиналов элементов схемы рис. 1, а: $R=92.2$ Ом, $C=45.3$ нФ, $L=2.07$ мГн.

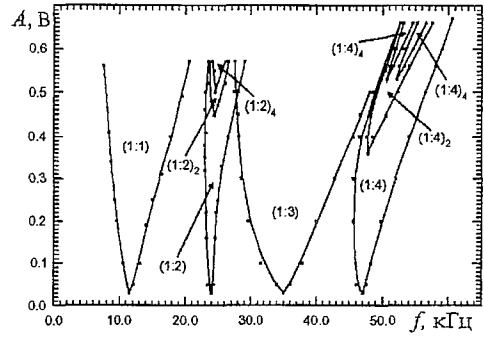


Рис. 3. Плоскость управляющих параметров (амплитуда - частота внешнего воздействия) для генератора Ван дер Поля с кусочно-линейной ВАХ нелинейного элемента - натуральный эксперимент

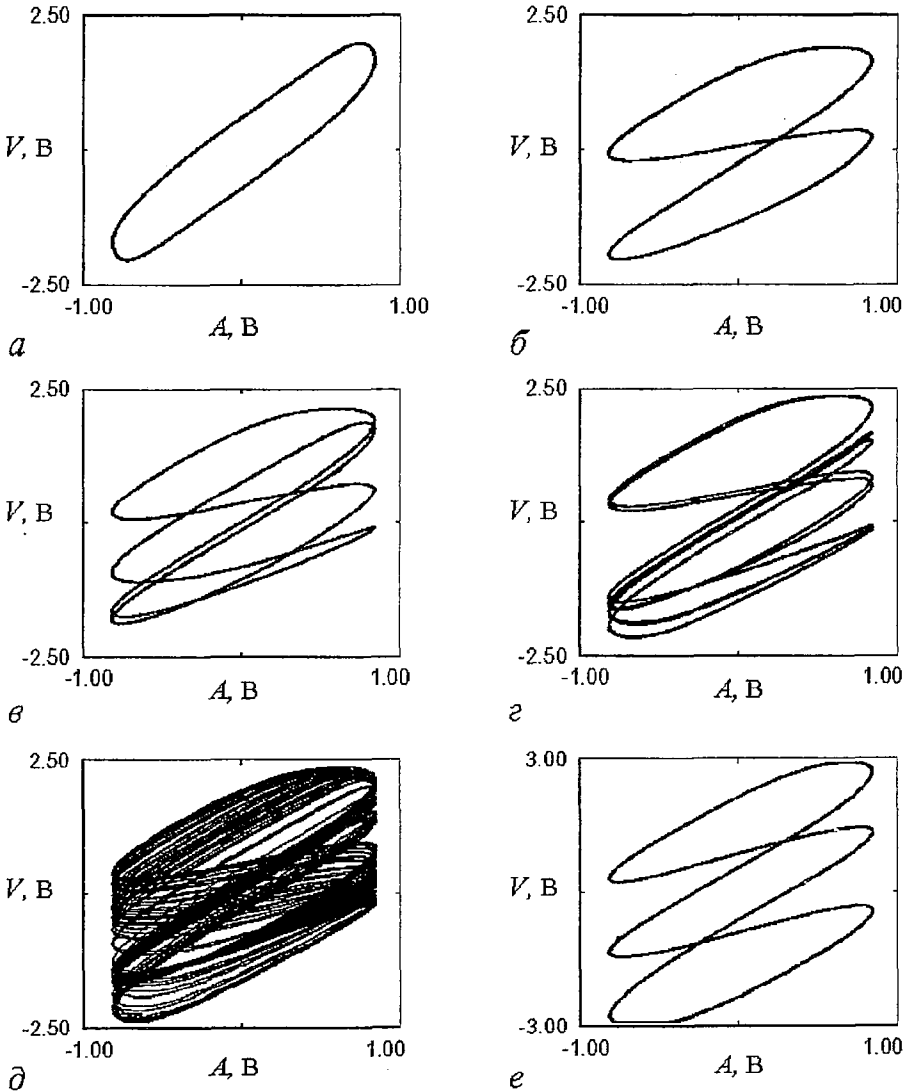


Рис. 4. Проекция фазовых портретов при $A=0.55$ и $f_0=12.0$ кГц (1:1) (а), $f_0=23.2$ кГц (1:2) (б), $f_0=23.7$ кГц (1:2)₂ (в), $f_0=24.1$ кГц (1:2)₄ (г), $f_0=24.3$ кГц (1:2)_С (д), $f_0=32.7$ кГц (1:3) (е) для характерных динамических режимов, изображенных на плоскости параметров рис. 3

Границы режимов определялись по качественному изменению топологии фазового портрета при изменении одного или одновременно двух управляющих параметров. Необходимость изменения двух параметров связана с неоднозначностью или мультистабильностью поведения генератора. Такая неоднозначность поведения проявляется как наличие гистерезисных границ различных колебательных режимов. Кроме того, можно предположить существование таких областей, попасть в которые можно только при изменении двух параметров одновременно.

При построении динамических режимов системы на плоскости управляющих параметров был принят следующий способ изображения. Различные режимы представлялись в виде языков синхронизации, при этом листы синхронизации более высоких порядков располагаются под листами более низких порядков. Например, язык синхронизации 1:2 может частично располагаться под языком синхронизации 1:1. Области удвоения периода обозначались подстрочными индексами (например, $(1:2)_2$, $(1:2)_4$).

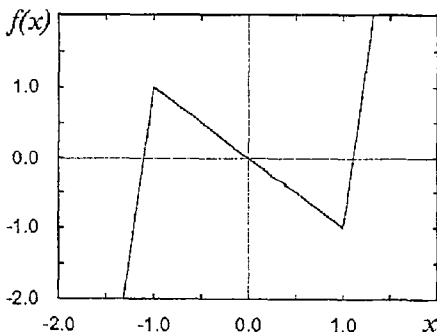
Плоскость управляющих параметров (амплитуда - частота внешнего воздействия) для генератора Ван дер Поля (см. рис. 1) с кусочно-линейной ВАХ нелинейного элемента (см. рис. 2) представлена на рис. 3. Проекция фазовых портретов для характерных динамических режимов, изображенных на плоскости параметров, представлены на рис. 4, где по оси абсцисс отображается амплитуда внешнего воздействия, по оси ординат - амплитуда напряжения в точке соединения емкости C и индуктивности L .

В области $f \sim 30$ кГц, $A \sim 0.6$ (см. рис. 3) наблюдается перекрытие языков синхронизации (1:2) и (1:3). Хаотические режимы со странным аттрактором наблюдаются внутри языков синхронизации (1:2) и (1:4) в областях $(1:2)_2$, $(1:2)_4$. Как видно из рис. 3, внутренняя структура языка синхронизации (1:4) имеет вид, характерный для бифуркационной ситуации типа *crossroad area* [14].

3. Исследование поведения генератора в численном эксперименте

При проведении численного моделирования поведения неавтономного генератора Ван дер Поля с кусочно-линейной ВАХ нелинейного элемента [9] использовались уравнения генератора, записанные в безразмерном виде (3). Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента (см. рис. 2) приводилась к безразмерному виду (рис. 5). В аналитическом виде кусочно-линейную ВАХ можно описать уравнением

$$f(x) = \begin{cases} 9.52x + 10.52, & x < -1.0, \\ -1.0x, & -1.0 \leq x \leq 1.0, \\ 9.52x - 10.52, & x > 1.0. \end{cases} \quad (4)$$



Исходя из значений нормировочных множителей ($I_0=2.8$ мА, $V_0=1.14$ В) и номиналов элементов схемы рассчитывались параметры системы (3) ($G=0.43$, $\epsilon=1.87$).

Плоскость управляющих параметров (амплитуда - частота внешнего

Рис. 5. Нормированная кусочно-линейная вольт-амперная характеристика нелинейного элемента, описываемая уравнением (4)

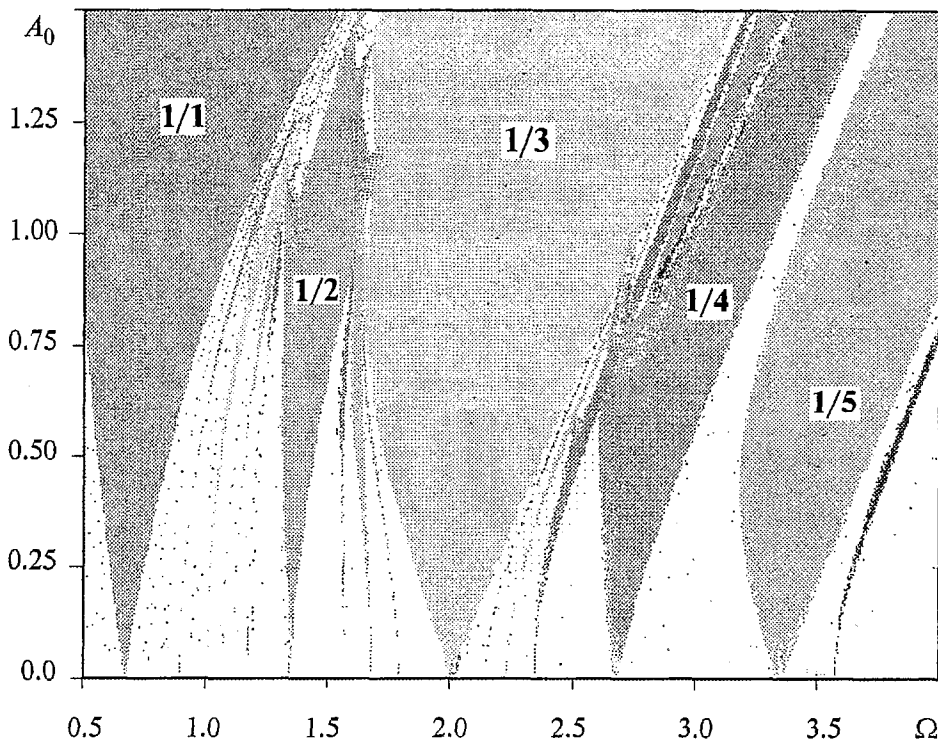


Рис. 6. Плоскость управляющих параметров (амплитуда - частота внешнего воздействия) для генератора Ван дер Поля с кусочно-линейной ВАХ нелинейного элемента - численный эксперимент

воздействия) для системы (3) с кусочно-линейной ВАХ нелинейного элемента (4), полученная в численном эксперименте, представлена на рис. 6. При построении плоскости параметров интегрирование системы (3), (4) осуществлялось методом Рунге - Кутты 4-го порядка. Шаг интегрирования $h=0.05$. Определение режима синхронизации проводилось по сечению Пуанкаре (точки в сечении выбирались через период внешнего воздействия).

На рис. 6 видны характерные для системы языки синхронизации. Внутри языков синхронизации 1:2 и 1:4 наблюдается переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Кроме того, внутреннее устройство языков синхронизации 1:2 и 1:4 позволяет сделать вывод о том, что реализуется ситуация типа *crossroad area*.

Сравнение плоскостей параметров, полученных в натурном и численном экспериментах (рис. 3 и 6), говорит о качественном соответствии результатов экспериментов. Кроме того, если с помощью нормировочных коэффициентов, введенных в разделе 1, пересчитать границы областей синхронизации, полученных экспериментально, то можно отметить и количественное совпадение результатов натурального эксперимента и численного моделирования.

Заключение

В данной работе предложена радиофизическая реализация модели генератора Ван дер Поля с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента, приводятся результаты натурального эксперимента по исследованию поведения модели данного генератора под внешним гармоническим воздействием. Проведены исследования поведения генератора на плоскости

управляющих параметров (частота - амплитуда внешнего воздействия). Особое внимание уделялось выявлению областей на плоскости управляющих параметров, в которых наблюдается хаотическое поведение, а также исследованиям внутренней структуры таких областей. Показано, что внутри языков синхронизации 1:2 и 1:4 (отношение собственной частоты колебаний генератора к частоте внешнего воздействия) переход к хаосу осуществляется через последовательность бифуркаций удвоения периода.

Компьютерное моделирование поведения генератора Ван дер Поля проводилось для системы уравнений, записанной исходя из экспериментальной реализации модели при значениях параметров, используемых в натурном эксперименте. Сравнение карт динамических режимов, полученных в результате численного и радиофизического эксперимента, показало не только качественное, но и количественное соответствие границ областей синхронизации и хаоса. Область на плоскости управляющих параметров, находящаяся внутри языков синхронизации 1:2 и 1:4, где наблюдается переход к хаосу, имеет вид, характерный для бифуркационной ситуации типа *crossroad area*.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 02-02-16351, 00-15-96673, КЦФЕ МО РФ, грант № E00-3.5-196, и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF), грант REC-006.

Библиографический список

1. *Van der Pol B., Van der Mark J.* Frequency demultiplication // *Nature*. 1927. Vol. 120, № 3019. P. 363-364.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний // М.: Физматгиз, 1959.
3. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн // М.: Наука, 1984.
4. *Kennedy M.P., Chua L.O.* Van der Pol and chaos // *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1986. Vol. 33, № 10. P. 974-980.
5. *Ueda Y., Akamatsu N.* Chaotically transitional phenomena in the forced negative-resistance oscillator // *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1981. Vol. 28, № 3. P. 217-223.
6. *Qin G.R., Gong D.C., Wen X.D.* Rich bifurcational behaviour of the driven Van der Pol oscillator // *Phys. Lett. A*. 1989. Vol. 141, № 8,9. P. 412-416.
7. *Parlitz U., Lauterborn W.* Period doubling cascades and devil's staircases of the driven Van der Pol oscillator // *Phys. Rev. A*. 1987. Vol. 36, № 3. P. 1428-1434.
8. *Cartwright M.L., Littlewood J.E.* On non-linear differential equations of the second order: The equation $y+k(1-y^2)y+y=blkc\cos(\lambda t+a)$, k large // *J. London Math. Soc.* 1945. Vol. 20. P. 180-189.
9. *Levinson N.* A second order differential equation with singular solutions // *Ann. Math.* 1949. Vol. 50. P.127-153.
10. *Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M.* The double scroll // *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1985. Vol. 32, № 8. P. 798-818.
11. *Mchedlova E.S.* Chaotic oscillations in the piece-wise linear approximation of the driven Van der Pol equation // In: the Proceedings of the 5th International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES-97) (Moscow, Russia, June 26-27, 1997), Moscow: 1997. P. 449-452.
12. *Тутце У., Шенк К.* Полупроводниковая схемотехника. М.: Мир. 1982.
13. *Chua L.O., Desoer C., Kuh E.* Linear and nonlinear circuits. McGraw-Hill Book Company. 1987.

14. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Критическая динамика одномерных отображений. Часть II. Двухпараметрический переход к хаосу // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 3, 4. С. 17-35.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 31.07.02
после переработки 29.09.02

THE PIECEWISE-LINEAR MODEL OF THE VAN DER POL OSCILLATOR UNDER EXTERNAL PERIODIC FORCE: COMPLEX DYNAMICS, PECULIARITIES OF BEHAVIOUR AT THE PARAMETER PLANE

E.S. Mchedlova and L.V. Krasichkov

The electronic model of Van der Pol oscillator with piecewise-linear current-voltage characteristics of nonlinear element is proposed. Experimental investigations of behaviour of the Van der Pol oscillator under external sinusoidal force were carried out. The parameter plane (external force amplitude - frequency) for the dynamical regimes of the oscillator was experimentally plotted. Numerical simulations of peculiarities of the oscillator model were carried out. In natural and numerical experiments it was shown that transition to chaos in the oscillator takes place through the period doubling cascade. It was revealed that the internal structure of the synchronization tongues looks typically as for the crossroad area.



Мчедлова Елена Сумбатовна - окончила Саратовский государственный университет (1993). Кандидат физико-математических наук (1996). Доцент факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика распределенных систем, компьютерное моделирование в физике и биологии, методы анализа динамических систем. Автор ряда работ по построению и исследованию моделей структурированных потоков со сверхизлучением, изучению взаимодействий в больших ансамблях связанных автоколебательных систем, в том числе книги «Введение в теорию самоорганизации открытых систем» (М.: Физматлит, 2002, совместно с Д.И. Трубецковым и Л.В. Красичковым). E-mail: esm@cas.ssu.runnet.ru



Красичков Леонид Валерьевич - окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиопизика. Работал в Научно-исследовательском институте механики и физики СГУ. Доцент факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика, количественные характеристики сложнопериодического и хаотического поведения динамических систем, преобразование хаотических колебаний цепями и средами. Автор и соавтор более 50 научных публикаций, в том числе книги «Введение в теорию самоорганизации открытых систем» (М.: Физматлит, 2002, совместно с Д.И. Трубецковым и Е.С. Мчедловой).



ХАОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЗАРЯДОВ В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

В.Б. Байбурин, А.О. Мантуров, А.В. Юдин

Проведено численное исследование модели поведения зарядов в скрещенных полях при изменении параметров возмущающего поля, циклотронной частоты, начальных скоростей в условиях пространственно-однородного и радиально-неоднородного магнитного поля. На основе расчета показателей Ляпунова определены области существования регулярного и хаотического поведения системы, получены карты показателей Ляпунова, исследована трансформация фурье-спектров.

Особенности движения зарядов в скрещенных электрическом и магнитном полях являются предметом анализа во многих областях математической физики [1-3 и др.]: физике замагниченной плазмы, астрофизике, теории электронных приборов и др. Характер траекторий заряженных частиц, по существу, определяет параметры (энергетические, шумовые, частотные) многих электронных устройств ускорителей, генераторов и усилителей М-типа, магнитных ловушек и др. (см., например, [4-6]). В связи с этим особое значение приобретают малоисследованные задачи анализа условий возникновения хаотических режимов динамической системы «заряд в скрещенных электромагнитных полях». Решение таких задач, с одной стороны, представляется необходимым для углубленного понимания механизма физических процессов в отмеченных выше устройствах, а с другой, имеет самостоятельный интерес как малоизученный объект теории динамических систем.

1. Случай пространственно-однородного магнитного поля. В известных работах [7, 8] при рассмотрении системы «заряд - скрещенные электромагнитные поля» уравнения движения, как правило, сводятся к одномерному уравнению возмущенного линейного осциллятора. Однако в таком случае остается неясным характер «реальных» траекторий зарядов, являющихся в ортогональных электрическом и магнитном полях принципиально двумерными, а также вид областей хаотичности непосредственно в пространстве физических параметров (частота, амплитуда возмущающего поля, начальные скорости и др.).

Мы считаем целесообразным описать области хаотичности в подобных системах с учетом большего числа фазовых переменных (в том числе, двух пространственных координат) и другого вида возмущения (в частности, зависящего от координаты y), включив в рассмотрение динамических режимов также расчет «реальных» траекторий движения заряда.

В прямоугольной системе координат (x, y) применительно к схеме на рис. 1

уравнения движения заряда в скрещенных полях можно представить в следующем виде (см., например, [4-6]):

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 &= f_x(\omega, x, y, t) + \Omega dy/dt, \\ d^2y/dt^2 &= -\Omega dx/dt, \end{aligned} \quad (1)$$

где $f_x(\omega, x, y, t)$ - функция, соответствующая возмущению за счет переменного электрического поля, имеющего компоненту вдоль оси x ; ω - частота возмущающего электрического поля; Ω - циклотронная частота. Уравнениям (1) можно поставить в соответствие четырехмерное фазовое пространство с фазовыми переменными $x, y, v_x=dx/dt, v_y=dy/dt$, где, в частности, фазовым переменными x, y соответствуют «реальные» координаты заряда в плоскости (x, y) .

Для численного решения уравнений движения и определения величин фазовых переменных использовался неявный метод, изложенный в работе [9]. В расчетах принималось, что возмущающая функция имеет вид $f_x(x, y, t) = F_{0x} \sin \cos \omega t$, что соответствует плоской стоячей волне.

Как следует из уравнений (1), параметрами, влияющими на характер фазовых траекторий рассматриваемой системы, являются частота ω и амплитуда возмущения F_{0x} , циклотронная частота Ω , а также начальные скорости заряда v_{0x}, v_{0y} .

С физической точки зрения представляется удобным разделить эти параметры на группу, назовем ее условно, «энергетических» параметров (F_{0x}, v_{0x}, v_{0y}), и группу частотных параметров (ω, Ω).

На рис. 2 представлены области существования хаотических и регулярных траекторий зарядов в плоскости энергетических параметров. На рис. 3 указанные области представлены в плоскости частотных параметров (ω, Ω). Эти области («ляпуновское пространство» [10]) получены на основе расчета [11] показателей Ляпунова и окрашены в различные оттенки серого цвета. При этом белый цвет соответствует регулярным траекториям (показатель Ляпунова меньше нуля),

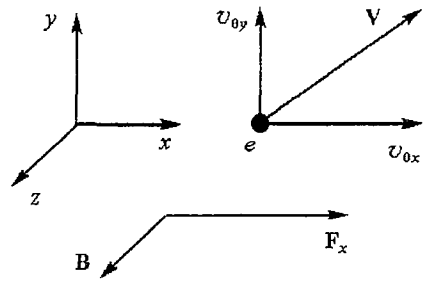


Рис. 1. Постановка моделируемой задачи. Отмечена прямоугольная система координат (x, y, z) , направление вектора индукции магнитного поля \mathbf{B} , вектора электрического возмущающего поля \mathbf{F}_x

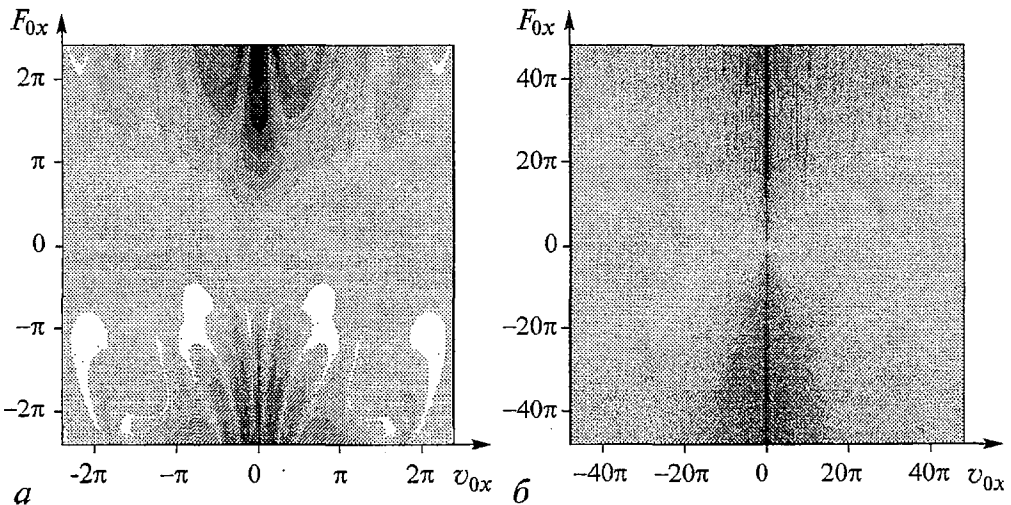


Рис. 2. Карты показателей Ляпунова в плоскости параметров (F_{0x}, v_{0x}) : а - увеличенный масштаб, б - уменьшенный масштаб; $\omega=0.5, \Omega=2, v_{0y}=0, x_0=y_0=\pi$

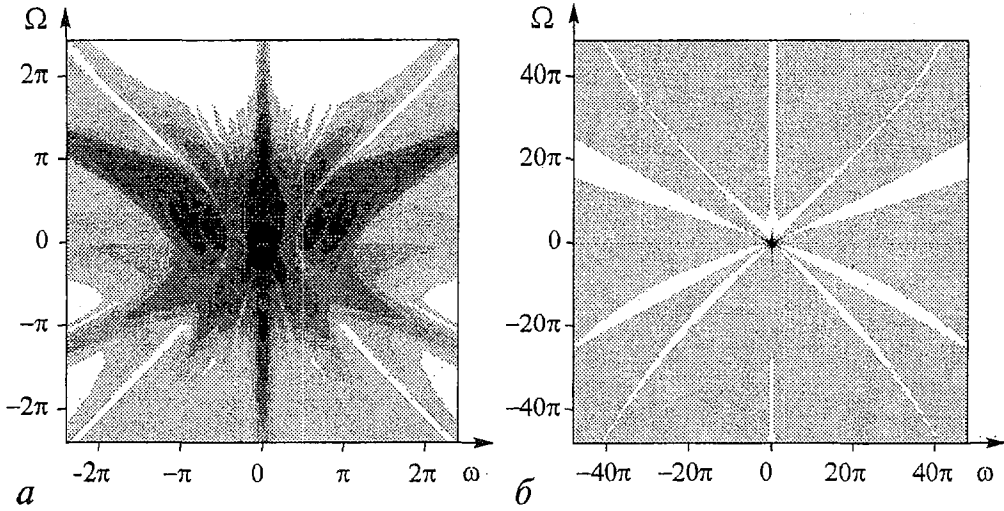


Рис. 3. Карты показателей Ляпунова в плоскости параметров (Ω, ω) : *a* - увеличенный масштаб, *б* - уменьшенный масштаб; $F_{0x}=2\pi, v_{0x}=v_{0y}=0, x_0=y_0=\pi$

градации темного цвета соответствуют различным положительным значениям показателя по мере роста его величины.

На рис. 2 показаны в разных масштабах типичные картины областей хаотичности и регулярного поведения при различных значениях величин F_{0x} и начальной скорости v_{0x} . Видно, что эти области имеют сложную структуру, детали которой лучше видны при увеличенном масштабе (рис. 2, *a*).

На рис. 3 представлены характерные конфигурации областей хаотичности и устойчивости, определяемые заданием множества пар значений теперь уже частотных параметров. Эти области также имеют сложную структуру.

Рис. 4 отражает влияние на области хаотичности начальных скоростей и координат. Видно, что эти области имеют вихреобразную периодическую структуру.

Типичный вид хаотических и регулярных траекторий в плоскости координат представлен на рис. 5. Из рис. 5, *a* видно, что в хаотическом режиме траектории зарядов, стартующих при практически совпадающих начальных условиях, с течением времени быстро расходятся, для них показатель Ляпунова положителен.

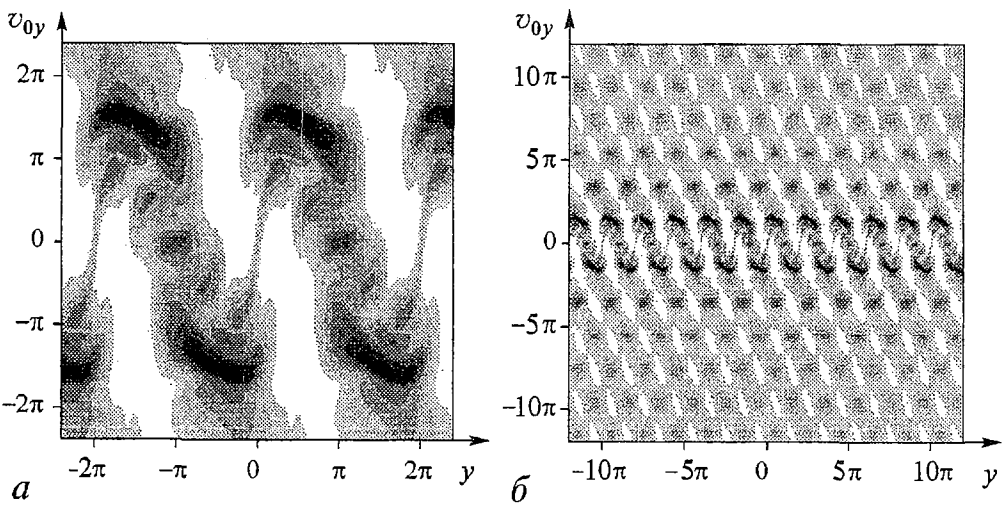


Рис. 4. Карты показателей Ляпунова в плоскости параметров (v_{0y}, y_0) : *a* - увеличенный масштаб, *б* - уменьшенный масштаб; $F_{0x}=2, \omega=1.5, \Omega=2, v_{0x}=0, x_0=\pi$

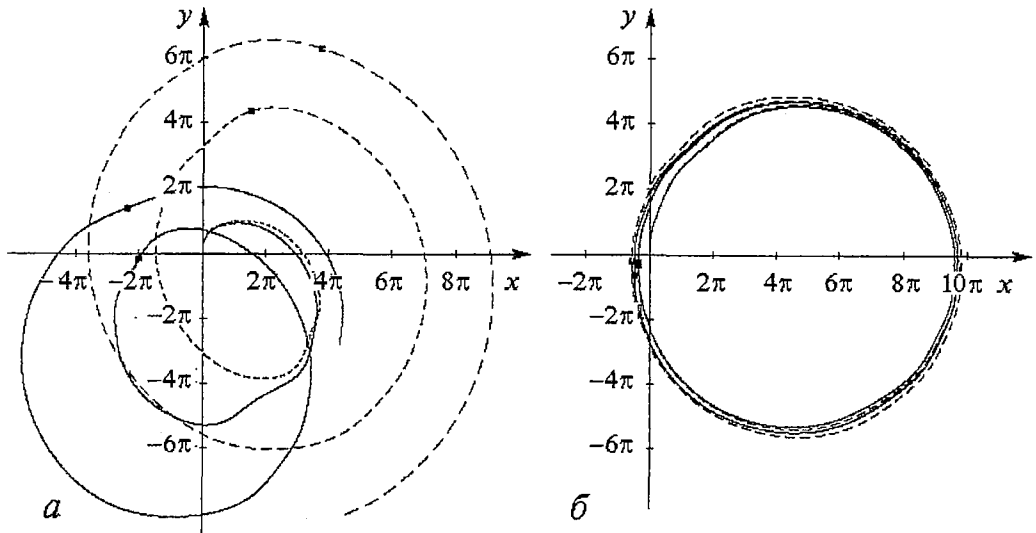


Рис. 5. Типичные траектории зарядов: *а* - для области хаотических режимов, $F_{0x}=1$, $\omega=\Omega=0.3$, $v_{0x}=0$, $v_{0y}=3\pi/4$, $x_0=y_0=0$; *б* - для области устойчивого поведения, $F_{0x}=1$, $\omega=\Omega=0.3$, $v_{0x}=0$, $v_{0y}=1.5\pi$, $x_0=y_0=0$

Пример регулярных траекторий представлен на рис. 5, б, где две траектории, имеющие ту же незначительную разницу в начальных условиях, по существу, совпадают, для них показатель Ляпунова меньше нуля.

На рис. 6 представлены спектры мощности колебаний, возбуждаемых в

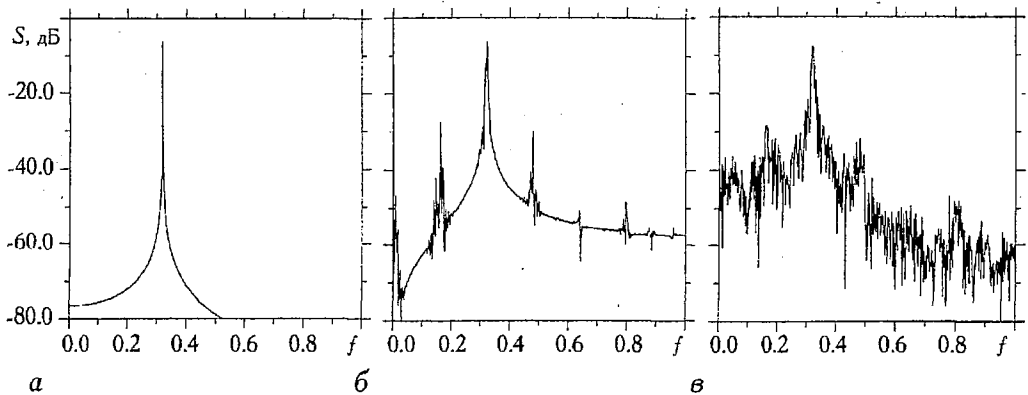


Рис. 6. Спектры мощности: *а* - для области существования периодических колебаний ($F_{0x}=0$); *б* - для области многочастотных колебаний ($F_{0x}=0.2$); *в* - для области хаотических колебаний ($F_{0x}=\pi$); $\omega=1.0$, $\Omega=2.0$, $v_{0x}=0$, $v_{0y}=\pi$, $x_0=0$, $y_0=-\pi$

системе. Для расчета спектров использованы реализации координаты $x(t)$. Рис. 6, *а* соответствует режиму периодического движения заряда в отсутствие возмущающего поля, спектр содержит одну компоненту, соответствующую циклотронной частоте. При увеличении амплитуды возмущающего электрического поля F_{0x} от нуля до достаточно малых ($F_{0x} \ll \pi$) значений, в системе реализуются многочастотные колебания (рис. 6, *б*), что соответствует набору дискретных частотных компонент, две из которых с наименьшими значениями частоты - частота внешнего воздействия (возмущающего поля) и циклотронная частота. При дальнейшем увеличении амплитуды возмущающего поля происходит хаотизация колебаний (рис. 6, *в*).

На рис. 7 приведены спектры мощности колебаний заряда, рассчитанные для случая иррационального отношения ($\pi:1$) циклотронной частоты и частоты возмущающего поля. При этом использовались те же значения амплитуды

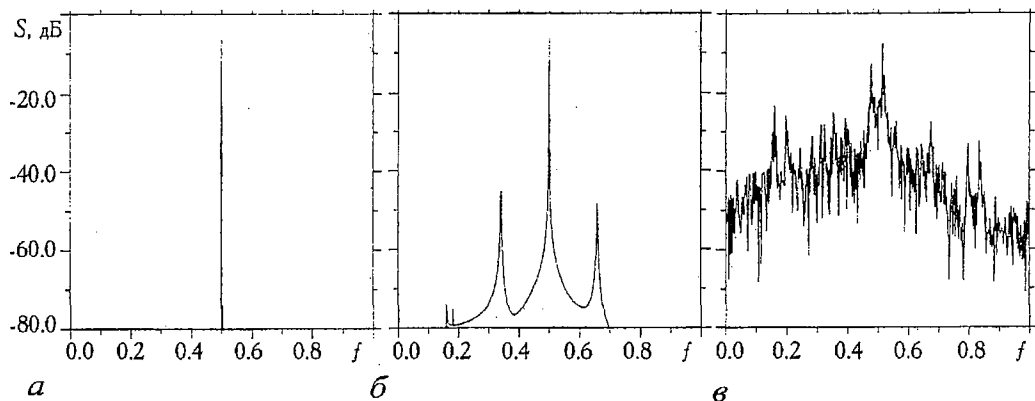


Рис. 7. Спектры мощности для случая иррационального отношения циклотронной частоты и частоты возмущающего поля: *a* - для области существования периодических колебаний ($F_{0x}=0$); *б* - для области многочастотных колебаний ($F_{0x}=0.2$); *в* - для области хаотических колебаний ($F_{0y}=\pi$); $\omega=1.0$, $\Omega=\pi$, $v_{0x}=0$, $v_{0y}=\pi$, $x_0=0$, $y_0=-\pi$

возмущающего электрического поля F_{0x} , что и для случаев, представленных на рис. 6. Хорошо видно, что особенности трансформации спектра мощности, в общем, сохраняются и для данного случая: появляется набор дискретных частотных компонент, при дальнейшем слиянии которых возникает сплошной спектр, характерный для режима с хаотической динамикой. Указанная последовательность трансформации спектра мощности позволяет сделать предположение о реализации в исследуемой системе сценария перехода к хаосу через разрушение квазипериодического движения [12]. Для случаев, когда частота возмущающего поля ниже циклотронной, или когда эти частоты равны, сценарий перехода к хаосу аналогичен описанному ранее, однако необходимо отметить, что такие ситуации представляют меньший практический интерес.

2. Случай радиально изменяющегося магнитного поля. Многие практически важные задачи физики плазмы и теории электронных приборов сводятся к изучению влияния на физические процессы изменяющегося с пространственными координатами магнитного поля (магнитные ловушки - пробкотроны, системы фокусировки электронных пучков и т.п.).

Насколько известно авторам, в подобных задачах до сих пор не рассматривалось влияние пространственного изменения магнитного поля на хаотичность движения зарядов. В данной части работы рассмотрены некоторые особенности поведения зарядов в скрещенных полях с учётом экспоненциально нарастающего при удалении от центра магнитного поля.

Будем считать магнитное поле, соответственно Ω , зависящим от координат x , y

$$\Omega = \Omega_0 e^{\alpha r}, \quad \text{где } \alpha - \text{постоянный коэффициент, } |r| = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Такое представление означает, что магнитное поле возрастает по экспоненте концентрически от начала координат.

На рис. 8, *a* представлена типичная траектория заряда, исходящая из области минимума магнитного поля. Видно, что траектория имеет в начале хаотический характер, но по мере дрейфа в область сильного магнитного поля становится регулярной. На рис. 8, *б* показан «хвост» траектории в увеличенном масштабе (на рис. 8, *a* отмечен прямоугольником). Видно, что траектория носит регулярный циклоидальный характер. Эту закономерность подтверждает и расчёт показателей Ляпунова вдоль траектории (рис. 9), которые вначале положительны, а затем становятся отрицательными.

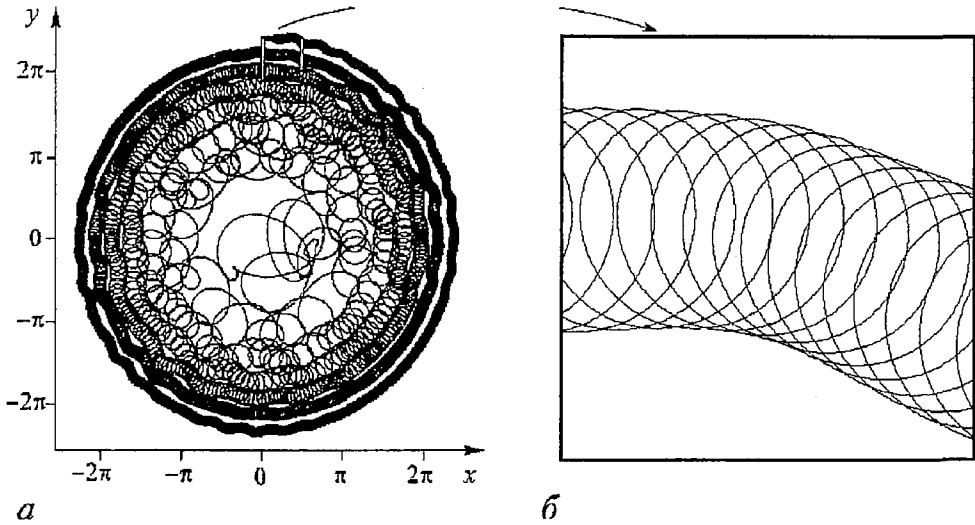


Рис. 8. Типичная траектория заряда: $F_{0x}=1$; $\omega=\pi/4$; $\Omega=0.5$; $v_{0x}=0$; $v_{0y}=0$; $x_0=\pi/2$; $y_0=-\pi/2$; $\alpha=0.5$; $\Delta t=0.004 T_c$ (T_c - период циклотронной частоты, траектория рассчитывалась для времени в 2000 периодов T_c)

Рис. 10 отражает поведение спектра Фурье при движении вдоль траектории. Процедура расчета фурье-спектров имела некоторые особенности. Поскольку по мере увеличения t характерное значение циклотронной частоты изменяется (из-за увеличения расстояния до начала координат), число точек для расчета спектра должно быть ограничено сверху. В то же время, это число точек должно соответствовать как минимум 2÷3 периодам циклотронной частоты. В работе спектр мощности вычислялся по 5÷6 периодам T_c , что является компромиссом между указан-

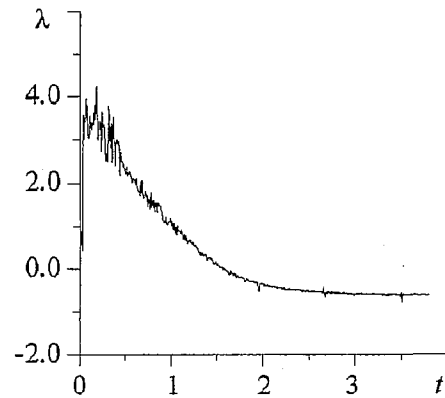
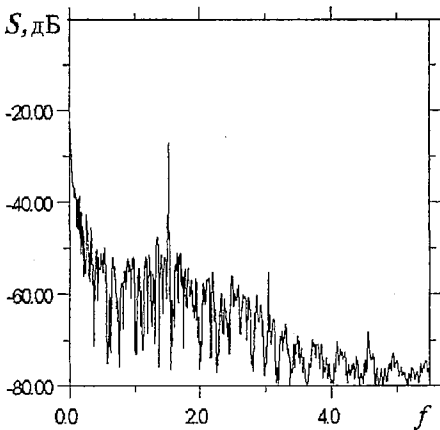
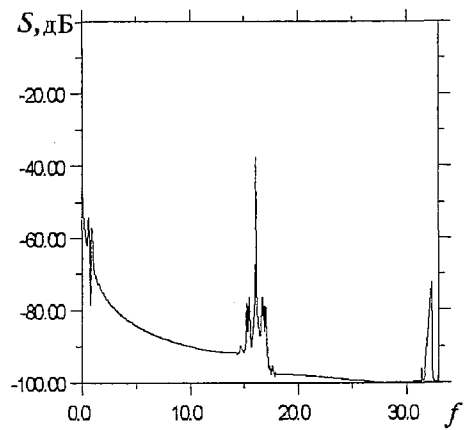


Рис. 9. Изменение показателя Ляпунова вдоль траектории (параметры системы такие же, как и для рис. 8, время t вдоль оси абсцисс указано в периодах циклотронной частоты)



а



б

Рис. 10. Вид спектральных характеристик (параметры системы такие же, как и для рис. 1): а - при начальных условиях; б - после движения вдоль траектории на 1000 периодов циклотронной частоты

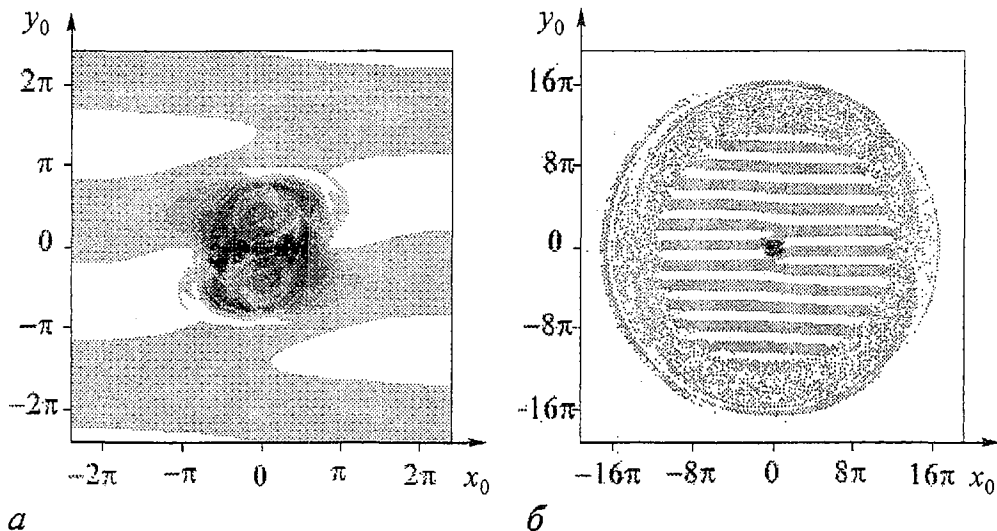


Рис. 11. Карты показателей Ляпунова в плоскости параметров (x_0, y_0) , параметры системы такие же, как и для рис. 8: *a* - увеличенный масштаб; *b* - уменьшенный масштаб

ными требованиями. Из рисунка видно, что с течением времени при достижении зарядом областей сильных магнитных полей спектр регуляризуется. Такое поведение зарядов (смена хаотичного движения на регулярное вдоль одной и той же траектории) объясняется тем, что, удаляясь от центра, заряд попадает в область сильных фокусирующих магнитных полей, которые регуляризуют движение. При увеличении амплитуды возмущающего поля область хаотичности радиально расширяется.

На рис. 11 в координатах реального пространства представлены в различных масштабах карты динамических режимов. Расчёты показывают, что области сильной хаотичности, соответствующие максимальным положительным значениям показателей Ляпунова (чёрный цвет), сосредоточены вблизи начала координат (минимум магнитного поля) и имеют сложный, в определённом смысле симметричный, характер. Конкретный вид областей вблизи центра зависит от начальных условий задачи, но сохраняет свою симметричность. По мере удаления от центра положительные показатели Ляпунова уменьшаются по величине (оттенки серого цвета) и становятся отрицательными (белый цвет). Эти особенности карт динамических режимов сохраняются при изменении исходных данных расчёта.

Таким образом, изменение магнитного поля, как и можно было ожидать, оказывает существенное влияние на поведение электронных траекторий в скрещенных полях, определяя в частности, такую их интересную особенность, как смена хаотичного вида траектории на регулярный.

Проведенные численные расчеты показали существенное влияние энергетических и частотных параметров рассматриваемой системы на характер фазовых траекторий. При этом имеет место определенная устойчивость характера областей существования хаотических и регулярных траекторий в плоскости частотных параметров при изменении энергетических, и наоборот.

Библиографический список

1. Ленерт Б. Динамика заряженных частиц / Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1967. 251 с.
2. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, Ф-МЛ, 1976. 238 с.

3. Байбурин В.Б., Терентьев А.А., Гаврилов М.В., Поваров А.Б. Трехмерные цилиндрические уравнения движения электронов в неоднородных скрещенных полях // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45, № 4.

4. Капица П.Л. Электроника больших мощностей. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1962. 196 с.

5. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Советское радио, 1973.

6. Байбурин В.Б., Соболев Г.Л. К анализу нелинейного режима плоского многорезонаторного магнетрона с учетом пространственного заряда // Радиотехника и электроника. 1967. № 3.

7. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991.

8. Afraimovich V., Zaslavsky G.M. Fractal and multifractal properties of exit times and Poincare recurrences // Physical Review E. 1997. Vol. 55, № 5.

9. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975.

10. Marcus M. Computers in Physics. 1980, Sept.-Oct. P. 481.

11. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D. 1985. Vol. 16. P. 285.

12. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.

Саратовский государственный
технический университет

Поступила в редакцию 8.02.02
после доработки 20.11.02

CHAOTIC BEHAVIOUR OF CHARGES IN CROSSED FIELDS

V.B. Bayburin, A.O. Manturov, A.V. Yudin

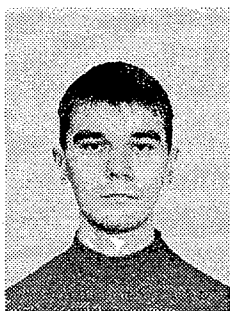
The study of numerical model for behaviour of charges in crossed electric and magnetic fields at the change of control parameters (disturbing field, cyclotron frequency and initial speeds of charge) was carried out. On the basis of Lyapunov exponents calculation the areas of existence of regular and chaotic behaviour of system are determined. Features of the electrons trajectories in the case of radial nonhomogeneous H field are discussed also. It is shown the movement of electrons in the area with strong H field leads to appearance of regular dynamics instead of chaotic one. The calculation of the Lyapunov exponents, power spectra, Lyapunov maps of regimes has been done.



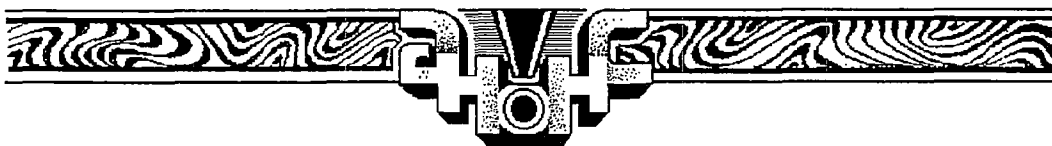
Байбурин Вил Бариевич - родился в Оренбурге (1935). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1957). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1969) и доктора физико-математических наук в ИРЭ РАН в Москве (1984) в области электроники СВЧ. Заведующий кафедрой Саратовского государственного технического университета, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, действительный член РАЕН. Области научных интересов - компьютерное моделирование, электроника СВЧ, сканирующая зондовая микроскопия, применение СВЧ-энергии в технологических процессах. Автор более 300 научных публикаций, в том числе 6 монографий.



Мантуров Алексей Олегович - родился в Саратове (1970). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1993). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГТУ (2001). В настоящее время - доцент кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем СГТУ. Области научных интересов - физика нелинейных явлений в приборах вакуумной и твердотельной электроники, цифровая обработка сигналов, радикоммуникационные технологии. Автор более 20 научных публикаций. E-mail: mao@forpost.ru



Юдин Андрей Витальевич - родился в Саратове (1981). Студент 5-го курса кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем СГТУ. Области научных интересов - компьютерное моделирование физических явлений, интерактивная машинная графика.



Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Мельников Л.А., Шевцов В.Н. Олимпиадные задачи по физике. Ижевск: Изд-во «РХД», 2002, 86 с. ISBN 5-93972-218-0

В сборнике представлены пакеты заданий, предлагавшиеся на саратовских городских олимпиадах по физике в период с 1975 по 1997 годы для учащихся 11-х (выпускных) классов. Он является существенно расширенным вариантом книги А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов «Задачи саратовских городских олимпиад по физике». Ко всем задачам даны ответы, краткие указания, а иногда и достаточно подробные решения.

Сборник будет полезен учащимся, заинтересованным в глубоком изучении физики, и их учителям.





ИДЕНТИФИКАЦИЯ РЕЖИМОВ В МОДЕЛИ КОЛЬЦЕВОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА С ПОВОРОТОМ ОПТИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА 120°

А.В. Лячин, А.Л. Магазинников, Б.Н. Пойзнер

Идентифицированы возможные режимы в модели процессов в нелинейном кольцевом интерферометре с поворотом поля в поперечной плоскости на 120° . Построена карта динамических режимов, позволяющая установить, в каких областях параметров системы реализуется устойчивая стационарная точка, предельный цикл, странный хаотический аттрактор. Выводы иллюстрируются фазовыми портретами, амплитудными спектрами и автокорреляционными функциями процессов, зависимостями ляпуновских характеристических показателей от параметров системы, оценкой корреляционной размерности аттракторов.

Введение

Исследование нелинейных динамических систем имеет давнюю историю. Вначале нелинейная динамика находила предмет своего изучения в задачах астрономии, механике, теории волн etc. Далее нелинейные процессы были обнаружены в объектах, которыми занимается радиотехника, биология, физика плазмы, лазерная оптика, а позднее - и гуманитарные науки [1].

Как известно, распространенными рабочими методами нелинейной динамики служат: построение фазовых портретов, отображения Пуанкаре, бифуркационных диаграмм, карт динамических режимов; определение размерности аттрактора, фрактальности процессов и пространственных структур; вычисление спектров Фурье и спектров ляпуновских характеристических показателей (ЛХП).

Последние оказались удобным инструментом для исследования динамических режимов [2, 3], анализа устойчивости (см., например, [4]), выявления скейлинга (см., например, [5, 6]), анализа передачи информации с использованием хаоса [7, 8]. Об этом говорит и то, что знакомство с содержанием статей в журнале «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» с 1993 по 2001 год позволяет обнаружить около двух десятков публикаций, которые затрагивают те или иные аспекты применения спектров ляпуновских характеристических показателей. О высокой разрешающей способности метода расчета спектров ЛХП свидетельствует, например, применение его для диагностики сердечной патологии [9].

Следует отметить, что оперирование ЛХП продуктивно при теоретическом изучении динамических систем с запаздыванием, описываемых дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом, например, уравнением

Икеды [10]. Напомним, что одной из таких систем является оптический нелинейный кольцевой интерферометр (НКИ). Икеда предложил модель процессов в НКИ и обнаружил в модели режим детерминированного хаоса [11]. Опыт использования расчета спектров ЛХП для изучения зависимости динамического режима в модели нелинейного кольцевого интерферометра от параметров интерферометра отражен в [12]. В цитированной статье исследовался процесс установления величин ЛХП в модели НКИ с поворотом оптического поля в поперечной плоскости пучка на $\Delta=120^\circ$ для отдельных значений коэффициента нелинейности K и видности γ . Однако общая картина динамических режимов как функция K и γ осталась невыясненной даже в приближении модели с «сосредоточенными» параметрами.

Идентификация режимов в подобной модели интерферометра представляет интерес как в общем плане исследования особенностей хаотических явлений в оптике [13], так и в прикладных аспектах. Среди них перспективными являются: перенос опыта создания радиотехнических систем хаотической связи [8] в оптический диапазон с использованием НКИ [14,15], разработка принципов действия криптосистем оптического диапазона на основе НКИ [16,17], воздействие оптическим сигналом извне на интерферометр [18].

Задачи данной работы:

- построение фазовых портретов процессов в модели НКИ для отдельных значений параметра нелинейности K и при различных значениях видности γ ;
- определение зависимости ЛХП от K и γ ;
- выявление типов динамических режимов в модели и построение их карты.

Модель интерферометра с поворотом поля на 120°

Рассмотрим оптическую схему кольцевого интерферометра с керровской средой в контуре обратной связи и с поворотом оптического поля на угол $\Delta=2\pi/n$, где $n=3$, то есть на 120° , в поперечной плоскости лазерного пучка (рис. 1). Этот поворот эквивалентен наличию в интерферометре n одинаковых по параметрам нелинейных элементов, фазовые набег в которых взаимосвязаны. Случай, когда $n=2$, впервые описан в [19, с. 276-280].

Наиболее простая динамика нелинейной фазовой модуляции в подобном интерферометре описывается системой уравнений [18]

$$\tau_n du_j(t)/dt + u_j(t) = K[1 + \gamma \cos(u_i(t) + \varphi_0)], \quad j = 1, 2, 3, \quad i = 2, 3, 1. \quad (1)$$

Здесь u_j - фазовый набег в j -м канале; τ_n - время релаксации нелинейного элемента; φ_0 - невозмущенный фазовый набег. Параметры τ_n , K , γ , φ_0 зависят от условий проведения экспериментов и физических свойств элементов интерферометра. Их физический смысл и явный вид приведены в [18, 19]. В системе (1) все u_j положительны [18]. Ниже постоянный фазовый набег φ_0 полагаем равным нулю, что экспериментально легко реализовать [19, с. 300]. Ясно, что система (1), ввиду наличия второго члена в левой части равенства, описывающего релаксацию, является диссипативной. Численное значение K определяет сте-

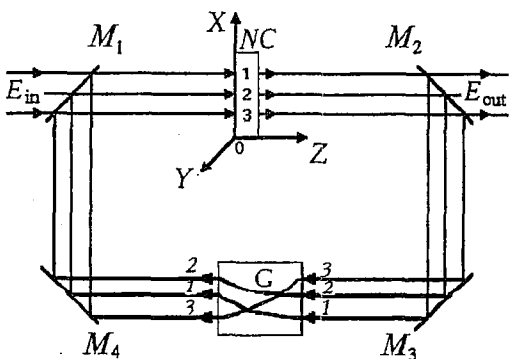


Рис. 1. Схема распространения световых пучков через НКИ с поворотом поля на 120°

пень взаимодействия волн в керровских средах. Для придания результатам моделирования общности текущее время в модели нормировано к времени релаксации нелинейного элемента τ_n .

Анализ результатов моделирования

На рис. 2 показана «матрица», составленная из фазовых портретов, иллюстрирующих динамику процессов в модели (1) при различных значениях параметра

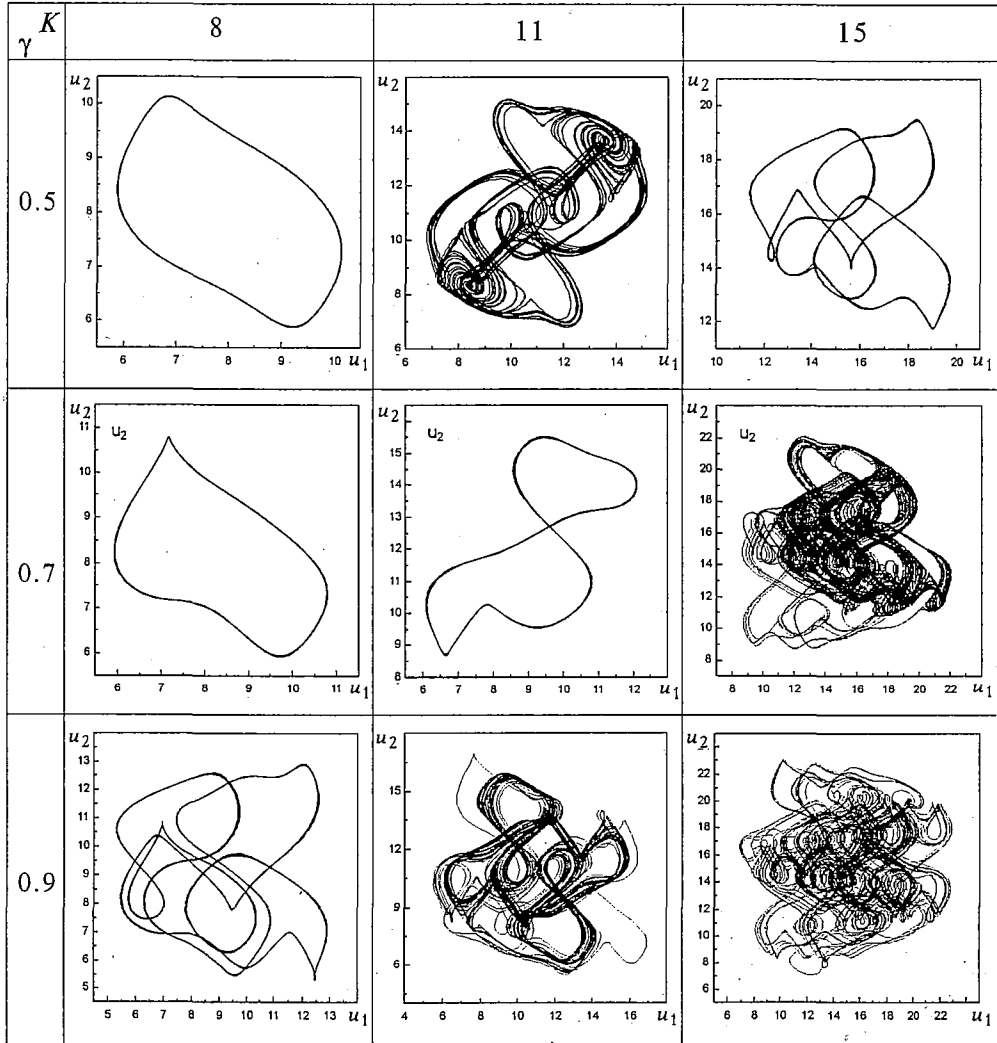


Рис. 2. Примеры фазовых портретов при различных значениях параметров нелинейности K и видности γ

нелинейности K (строки) и видности γ (столбцы). Из структуры дифференциального уравнения в модели (1) вытекает, что «эффективной» мерой нелинейности НКИ служит произведение параметров K и γ , а не одно лишь K . Забегая вперед, скажем, что критерием высокой степени нелинейности оказывается условие $K\gamma > 5.0$ (рис. 3, а).

Можно отметить следующие особенности нелинейной динамики. Увеличение как нелинейности K , так и видности γ ведет к усложнению режима. Из вида

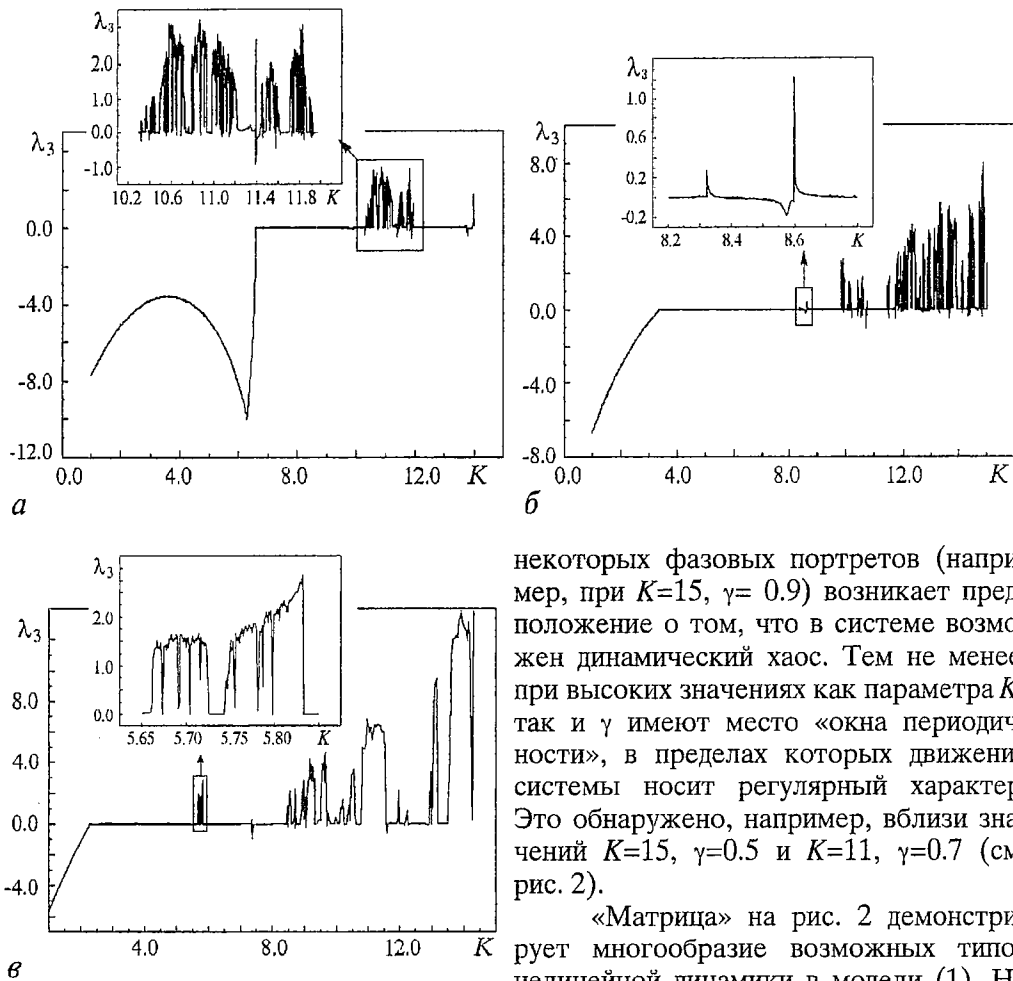


Рис. 3. Зависимость старшего ЛХП от параметра нелинейности K при значениях видности γ : a - 0.5; b - 0.7; c - 0.9. Выделенные фрагменты зависимости $\lambda_3(K)$ соответствуют режиму динамического хаоса

предпринят расчет максимального ЛХП λ_3 как функции K при заданных значениях $\gamma = 0.5, 0.7, 0.9$. Эти зависимости построены соответственно на графиках рис. 3. Из их анализа можно заключить следующее. Во-первых, в зависимости от значения K в модели трехкомпонентного НКИ реализуются такие динамические режимы, как устойчивая точка ($\lambda_3 < 0$), предельный цикл ($\lambda_3 = 0.00$), динамический хаос ($\lambda_3 > 0$). Во-вторых, действительно, в модели реализуется режим динамического хаоса. В-третьих, области значений K , в которых возникает динамический хаос, разделяются «окнами периодичности». В-четвертых, как показали расчеты значений λ_3 (до величины $K=15$), с ростом величин K либо γ границы «окон периодичности» вдоль оси K сокращаются (см. рис. 3, б, в). В-пятых, с ростом видности γ интервал значений K , при которых происходит бифуркация «устойчивая точка \rightarrow предельный цикл», расширяется (то есть величина производной $d\lambda_3/dK$ падает) и смещается в сторону меньших величин K .

В тех случаях, когда для идентификации динамического режима недостаточно знания максимального ЛХП λ_3 , было проведено расчет второго ЛХП λ_2 . При этом, по данным расчетов, первый ЛХП $\lambda_1 < 0$ (и на графиках не приводится). Это согласуется с классификацией динамических режимов по

некоторых фазовых портретов (например, при $K=15, \gamma = 0.9$) возникает предположение о том, что в системе возможен динамический хаос. Тем не менее, при высоких значениях как параметра K , так и γ имеют место «окна периодичности», в пределах которых движение системы носит регулярный характер. Это обнаружено, например, вблизи значений $K=15, \gamma=0.5$ и $K=11, \gamma=0.7$ (см. рис. 2).

«Матрица» на рис. 2 демонстрирует многообразие возможных типов нелинейной динамики в модели (1). Но поскольку «матрица» построена для дискретного набора значений K и γ , нельзя судить о том, каков общий характер эволюции режима в выбранном диапазоне величин K и γ . Поэтому

основанию значений ЛХП, приведенному в [20, 21]. Такая необходимость возникла при исследовании структуры зависимости $\lambda_3(K)$ в области значений K , где возможен хаотический режим (см. увеличенный фрагмент на рис. 3, в).

На рис. 4 представлены зависимости $\lambda_3(K)$ и $\lambda_2(K)$, позволяющие с большей точностью разрешать области значений K , где имеет место тот или иной режим. Например, в интервале величины $5.725 < K < 5.743$ находится «окно периодичности», для которого ЛХП составляют: $\lambda_3=0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_1 < 0$. Соответствующий фазовый портрет для $K=5.73$ представлен в верхней части рис. 4. Анализ значений ЛХП показывает, что возможно сложное поведение различного рода. Так, при $K=5.82$ идентифицирован режим детерминированного хаоса. Ему соответствует характерный спектр ЛХП: $\lambda_3=2.39$, $\lambda_2=0.00$, $\lambda_1=-32.4$, что позволяет говорить о странном хаотическом аттракторе (его фазовый портрет изображен на рис. 4).

Чтобы создать более полную картину совместного влияния нелинейности K и видности γ на характер поведения оптической системы, моделируемого уравнением (1), целесообразно построить карту динамических режимов. Она воспроизведена на рис. 5, где незакрашенный (белый) фон соответствует устойчивой стационарной точке, серые точки - предельному циклу, черные точки - странному хаотическому аттрактору, «крестики» - неидентифицированному режиму.

Обращает на себя внимание то, что, во-первых, границы относительно

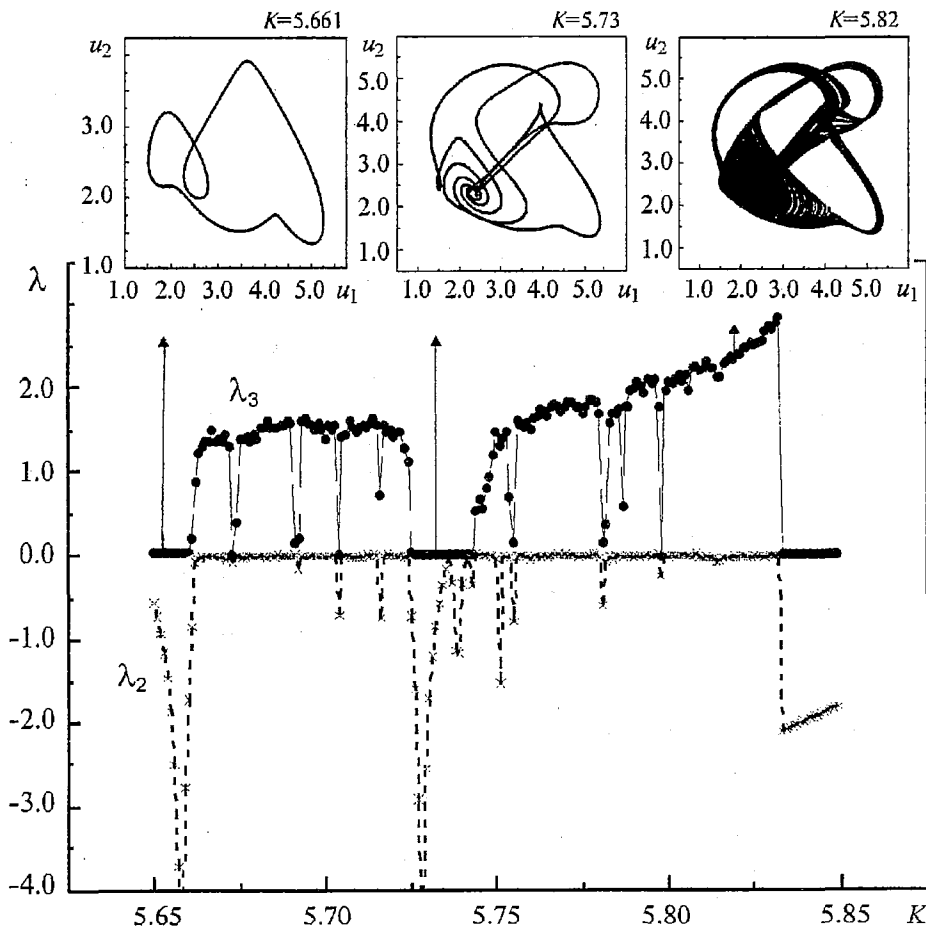


Рис. 4. Зависимость двух старших ЛХП от параметра нелинейности K для $\gamma=0.9$ и вид фазовых портретов для трех типичных режимов

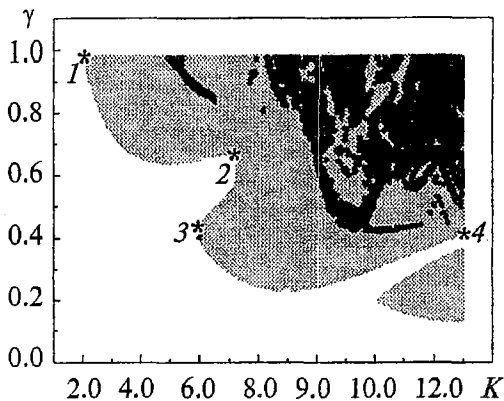


Рис. 5. Карта динамических режимов НКИ с $\Delta=120^\circ$ на плоскости: параметр нелинейности K - видность γ

В-третьих, при значениях произведения $\gamma K \approx 5$ «окна периодичности» либо располагаются вдоль границ в виде гипербол, либо имеют сложную конфигурацию.

В-четвертых, относительно крупные по размеру области, где имеет место устойчивая стационарная точка (белый фон), локализируются преимущественно там, где значения произведения $K\gamma$ малы. Это вполне согласуется с известными представлениями о причинах сложной динамики.

При построении карты режимов - преимущественно на границах между областями регулярной и хаотической динамики - были обнаружены точки (отмечены на карте «крестиками»), идентификация которых вызвала затруднения. Им соответствовала «парадоксальная» сигнатура спектра ЛХП (+,-,-). Вид фазовых портретов для некоторых из этих точек подобен структуре хаотических аттракторов. Судя по характеристике возможностей метода расчета ЛХП, изложенной в книге [22, с. 275-281], здесь требуется привлечь дополнительные методы.

Относительно процедуры верификации данных, полученных в ходе вычислительных экспериментов, можно заметить следующее. Построение фазовых портретов, приведенных на рис. 2, и расчет спектров ЛХП, показанных на рис. 3 и 4, осуществлялись независимо, с помощью различных методов. Однако две эти группы результатов вполне согласуются друг с другом, что позволяет утверждать наличие их достоверности. Для проверки работоспособности программы, вычисляющей ЛХП, был выбран ряд тестовых ситуаций, позволяющих сопоставить результаты расчетов ЛХП для классической модели Лоренца с данными в литературе [21, 23, 24].

Кроме того, с целью проверки выдвинутых предположений о типах динамических режимов в модели (1) для некоторых точек на карте авторами предпринят, во-первых, расчет амплитудных спектров Фурье (рис. 6, а-в); во-вторых, расчет автокорреляционной функции (рис. 6, г-е); в-третьих, расчет корреляционной размерности.

Кроме того, проверка правильности идентификации режимов для «тестовых» точек карты опиралась на использование программы «FRACTAN 3.6. Фрактальный анализ» [25]. Программа позволяет вычислять корреляционную размерность D_2 по временному ряду данных. Таблица содержит значения D_2 для нескольких «тестовых» точек карты режимов.

Для сравнения укажем, что, например, для отображения Хенона корреляционная размерность $D_2=1.21$ [26, с. 122-137].

крупных областей режимов $\gamma(K)$, где существует предельный цикл (серые точки), имеют форму гипербол.

Во-вторых, возможны два варианта перехода от режима устойчивой стационарной точки к периодическому. В первом варианте имеет место «мягкое» возбуждение, отличающееся длительным переходом к предельному циклу. Первый вариант реализуется на границах 1-2 и 3-4 (см. рис. 5). Во втором варианте происходит «жесткое» возбуждение, для которого характерен скачкообразный переход к предельному циклу. Второй вариант реализуется на границе 2-3.

Таблица

Тип аттрактора	K	γ	D_2
Стационарная устойчивая точка	2.0	0.3	0
Предельный цикл	8.0	0.5	1.0
Хаотический	5.75	0.9	1.80
Хаотический	15.0	0.9	1.35

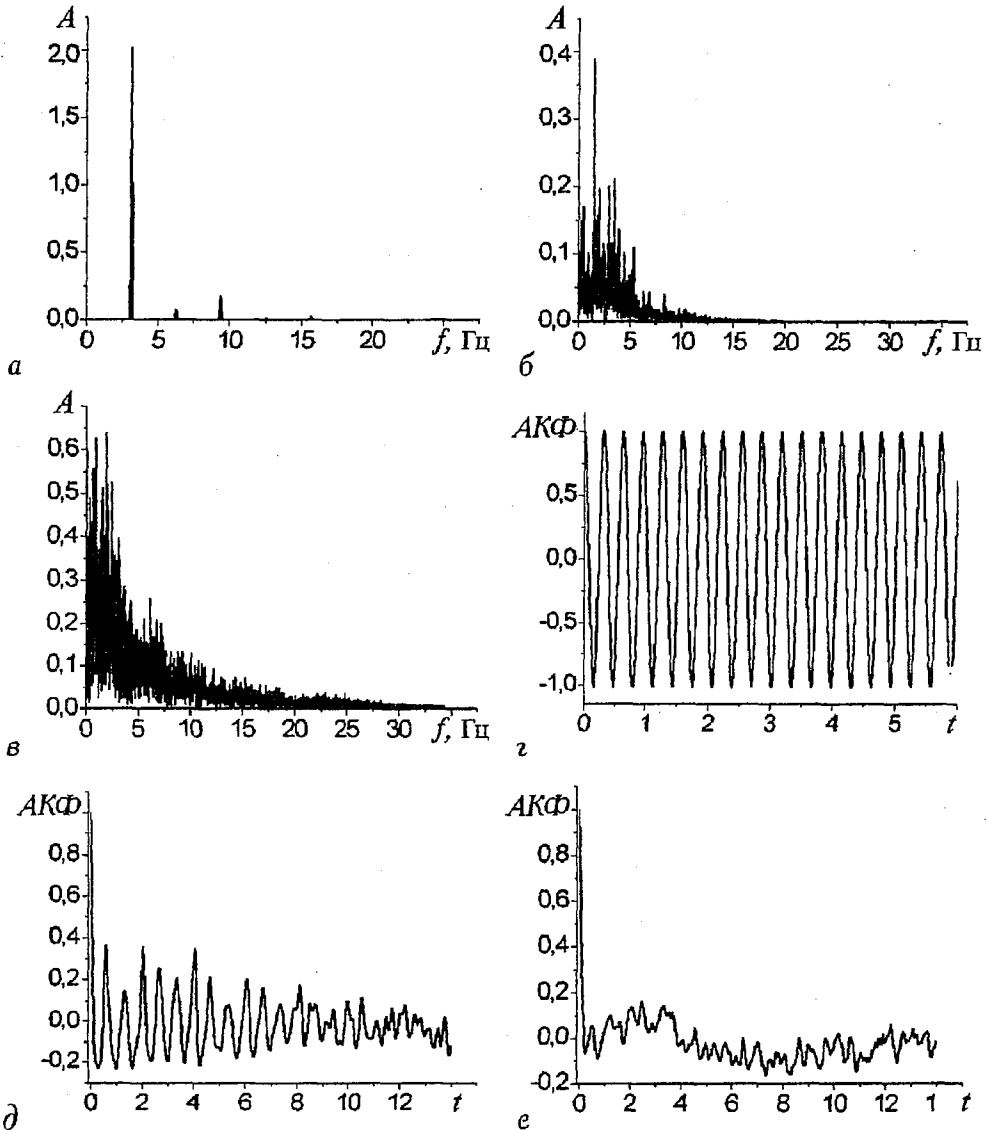


Рис. 6. Верификационная процедура. Амплитудные спектры Фурье (а-в) и автокорреляционная функция (г-е) процессов в модели (1), соответствующих параметрам: $K=8.0, \gamma=0.5$; $K=5.75, \gamma=0.9$; $K=15.0, \gamma=0.9$

Приведенные результаты проверок позволяют убедиться в правильности алгоритмов построения карты таких режимов, как устойчивая точка, предельный цикл, странный хаотический аттрактор, и приемов их идентификации.

Заключение

В работе проведен цикл вычислительных экспериментов на основе модели (1) процессов в НКИ с поворотом поля в поперечной плоскости пучка на угол $\Delta=120^\circ$.

Построены типичные фазовые портреты процессов, иллюстрирующие влияние значений параметра нелинейности K и видности γ на динамику процессов.

Построены зависимости двух старших ЛХП от K (в интервале величин 0.5-15.0) при значениях γ равных 0.5, 0.7, 0.9.

Идентифицированы динамические режимы в модели (1) и выяснено влияние на них параметра нелинейности K и видности γ . На плоскости (параметр нелинейности K - видность γ) построена карта динамических режимов, позволяющая установить, в каких областях параметров системы реализуется устойчивая стационарная точка, предельный цикл, странный хаотический аттрактор.

Карта дает ориентиры для выбора коэффициентов в модели (1) процессов в НКИ с $\Delta=120^\circ$ при выполнении компьютерных экспериментов на базе (1), а также для выбора интервалов рабочих параметров реального НКИ - в зависимости от целей его применения. Мелкомасштабная детализация карты динамических режимов может составлять одно из направлений дальнейших исследований сложного поведения в модели (1).

Приведены результаты верификационной процедуры, основанной на построении амплитудных спектров Фурье, автокорреляционной функции и расчете корреляционной размерности.

Авторы глубоко признательны за предоставление вычислительных ресурсов А.В. Роменскому и А.А. Жукову, а также С.Н. Владимирову и И.В. Измайлову за предоставленные программы и консультации.

Авторы с благодарностью признают, что им помогла своими советами П.С. Ланда.

Авторы благодарны рецензенту за тщательный анализ статьи и критические замечания, позволившие исправить недостатки.

Библиографический список

1. Трубецков Д.И. Колебания и волны для гуманитариев: Учебное пособие для вузов. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997. 392 с.

2. Ram Rajeev J., Sporer Ralph, Blank Hans-Richard, York Robert A. Chaotic dynamics in coupled microwave oscillators // IEEE Trans. Microwave Theory and Techn. 2000. Vol. 48, № 11, Т. 1. P. 1909.

3. Панцырев М.А., Рукавица К.А., Шахтарин Б.И. Исследование хаотических режимов неавтономной системы Костаса 2-го порядка при возбуждении ЧМ-сигналов // Науч. вестн. МГТУ ГА. 2000. № 31. С. 101.

4. Анищенко В.С. Аттракторы динамических систем (лекция) // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 1. С. 109.

5. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика одномерных отображений. Часть I. Сценарий Фейгенбаума // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1. С. 15.

6. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Критическая динамика одномерных отображений. Часть II. Двухпараметрический переход к хаосу // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 3-4. С. 17.

7. Емец С.В., Старков С.О. Применение цифровых сигнальных процессоров

для генерации хаотических сигналов и передачи информации с использованием хаоса. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 2-3. С. 95.

8. *Владимиров С.Н., Негруль В.В.* Сравнительный анализ некоторых систем хаотической синхронной связи // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 6. С. 53.

9. *Павлов А.Я., Янсон Н.Б., Анищенко В.С., Гриднев В.И., Довгалецкий П.Я.* Диагностика сердечно-сосудистой патологии методом вычисления старшего показателя Ляпунова по последовательности RR-интервалов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 2. С. 3.

10. *Mensour Boualem, Longtin Andre.* Power spectra and dynamical invariants for delay-differential and difference equations // Physica D. 1998. Vol. 113, № 1. P. 1.

11. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 227 с.

12. *Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н., Сабденов К.О., Тимохин А.М.* Тройка керровских сред в нелинейном интерферометре: факторы, влияющие на бифуркационное поведение // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 5. С. 56.

13. *Воронцов М.А., Корябин А.В., Шмальгаузен В.И.* Управляемые оптические системы. М.: Наука, 1989. С. 216.

14. *Garcia-Ojalvo J., Roy R.* Spatiotemporal communication with Synchronized Optical Chaos. Доступно в сети Internet: // <http://xxx.lanl.gov/abs/nlin.CD/0011012>.

15. *Chesnokov S.S., Rybak A.A.* Spatiotemporal chaotic behavior of time-delayed nonlinear optical systems // Laser Phys. 2000. Vol. 16, № 3. P. 1.

16. *Izmailov I.V., Shulepov M.A.* Simulation of signal enciphering by means of nonlinear ring interferometer and decoding // Optoelectronic Information Systems and Processing (11-15 September, 2000, Vladivostok, Russia) / Eds. Yu.N. Kulchin, O.B. Vitrik. Proceedings of SPIE. 2001. Vol. 4513. P. 46.

17. *Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* Варианты реализации нелинейно-оптического устройства скрытой передачи информации // Оптика атмосферы и океана. 2001. Т. 14, № 11. С. 1074.

18. *Аришинов А.И., Мударисов Р.Р., Пойзнер Б.Н.* Тройка керровских сред в кольцевом интерферометре: роль неидентичности // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 1. С. 20.

19. Новые физические принципы оптической обработки информации: Сб.ст. / Под ред. С.А. Ахманова, М.А., Воронцова. М.: Наука, 1990. С. 13-33; 263-326.

20. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы / Под ред. В.С. Анищенко. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с.

21. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. М.: Наука, 1990.

22. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

23. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.

24. *Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н.* Регулярные и хаотические процессы в модели кольцевой оптической системы // Преподавание физики в высшей школе, 2000. № 19. С. 103.

25. FRACTAN 3.6. Фрактальный анализ // Доступно в сети Интернет по адресу: <http://fractan.boom.ru/fractan/fractan.zip>

26. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. Пер. с англ. М.: Мир, 1988.

Томский государственный
университет

Поступила в редакцию 15.01.02
после доработки 9.09.02

IDENTIFICATION OF PROCESSES IN THE MODEL OF RING INTERFEROMETER WHEN OPTICAL FIELD IS ROTATED THROUGH 120°

A.V. Lyatchin, A.L. Magazinnikov, B.N. Poizner

The possible regimes in model of processes in nonlinear ring interferometer when optical field is rotated through 120° in transversal plane are identified. The map of dynamic regimes is constructed. The map represents areas of parameters of this system where the steady stationary point, limit cycle, strange chaotic attractor are realized. Conclusion is illustrated by phase portraits, amplitude Fourier spectra, auto-correlation functions of the processes, dependence of Lyapunov's characteristic exponents from parameters of this system. Correlation dimension of attractors is evaluated.



Лячин Александр Владимирович - родился в 1979 году. Аспирант кафедры квантовой электроники и фотоники радиофизического факультета Томского государственного университета. Область научных интересов - моделирование и изучение процессов в нелинейных динамических системах, динамический хаос и его приложение в системах обработки и передачи информации. Автор 9 публикаций.

E-mail: 765-alex.rff@elefot.tsu.ru



Магазинников Антон Леонидович - родился в Томске (1974). Окончил с отличием радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию в 2000 году по динамике процессов формообразования в кольцевом интерферометре. В настоящее время работает на кафедре физики Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. Область научных интересов: оптическая синергетика, моделирование процессов в газовых лазерах. Автор более 30 работ по данной тематике.

E-mail: anton@elefot.tsu.ru



Пойзнер Борис Николаевич - родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), доцент кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, физике, физике лазеров, принципам управления лазерным излучением, основам синергетики. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Имеет много статей по указанной тематике. Инициатор подготовки и редактор семи библиографических указателей (в том числе «Синергетика и сопредельные науки», «Университетское образование и его социальная роль», «Интеллигенция в российском обществе и университете», «Психика и интеллект обучаемого»). Действительный член Всероссийского общества библиофилов.



САМОВОЗДЕЙСТВИЕ 2D-ИМПУЛЬСОВ ОБРАТНЫХ ОБЪЕМНЫХ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПЛЕНКАХ

Г.М. Дудко, Ю.А. Филимонов

В рамках подхода, основанного на численном решении нелинейного уравнения Шредингера, исследовано распространение 2D-импульсов обратных объемных магнитостатических волн при соотношениях коэффициентов дисперсии β_1 и дифракции β_2 , характерных для чисто дипольных $\beta_1/\beta_2 < 1$ и дипольно-обменных $\beta_1/\beta_2 \sim 1$ волн. Показано, что 2D-импульсы дипольных обратных объемных магнитостатических волн с ростом амплитуды волны на входе могут разбиваться на пару изолированных фрагментов, распространяющихся относительно друг друга в противоположных направлениях. При $\beta_1/\beta_2 \sim 1$ увеличение амплитуды 2D-импульса также приводит к его дроблению, но получающиеся в результате этого процесса фрагменты импульса могут взаимодействовать друг с другом и образовывать структуры, топологически отличные от входного импульса. Показано, что подбором ширины антенны, длительности и амплитуды входного импульса можно добиться образования 2D-солитона огибающей обратных объемных магнитостатических волн, а также наблюдать эффект, создающий иллюзию «остановки импульса», когда местоположение максимума амплитуды сигнала в пленке не изменяется в течение промежутка времени, сопоставимого с длительностью импульса.

Введение

Солитоны огибающей магнитостатических волн (МСВ) в пленках железитриевого граната (ЖИГ) активно исследуются в квазиодномерном случае [1-6]. На практике такому приближению отвечает ситуация, когда длина антенны, возбуждающей МСВ, не меньше, чем ширина пленочного волновода, а отражением МСВ от боковых границ пленки можно пренебречь. Между тем, устройства, основанные на принципах геометрической оптики [7] или использующие эффект самоканализации [8,9] волновых пучков МСВ, предполагают наличие пленочных волноводов с шириной большей, чем апертура возбуждающей антенны. При этом в режиме импульсного возбуждения волны имеет место распространение в ферритовой среде двумерных (2D) волновых пакетов МСВ [10]. Характер распространения полностью определяется дисперсионными характеристиками среды, размерами и мощностью возбуждаемых радиоимпульсов.

Наибольший интерес представляет поведение 2D-волновых пакетов обратных объемных магнитостатических волн (ООМСВ). Это обусловлено тем,

что в нелинейном режиме для ООМСВ выполняются условия, необходимые для появления модуляционной неустойчивости относительно продольных

$$\beta_l \gamma < 0 \quad (1)$$

и поперечных возмущений¹

$$\beta_t \gamma < 0. \quad (2)$$

Здесь $\beta_{l,t} = \partial^2 \omega / (\partial^2 k_{l,t})$ - характеризуют дисперсионное и дифракционное распыливание волны; ω - частота; k_p, k_t - продольная и поперечная составляющие волнового вектора ООМСВ, соответственно; $\gamma = \partial \omega / \partial |\phi|^2$ - коэффициент нелинейности; ϕ - безразмерная комплексная амплитуда волны.

Развитие этих неустойчивостей может приводить к образованию, соответственно, «временных» и «пространственных» солитонов огибающей ООМСВ. Возможность образования временных солитонов при распространении радиопульсов ООМСВ в ферромагнитных пленках доказывалась ранее в лабораторных экспериментах и подтверждалась при численных исследованиях в рамках одномерного нелинейного уравнения Шредингера [5]. В работах [8,9,11,12] на примере ООМСВ, возбуждаемых в непрерывном режиме антенной с конечной апертурой, показано формирование «пространственных» солитонов или, другими словами, волноводных каналов. В экспериментальных работах последних лет [10,13] обсуждалась проблема коллапса 2D-импульсов ООМСВ и исследовались возможности стабилизации таких импульсов.

Однако ряд вопросов остается открытым. В частности, в литературе не затрагивался вопрос, касающийся возможности образования 2D-солитонов ООМСВ. Практически не исследовались особенности распространения импульсов ООМСВ с узкими частотными и пространственными спектрами в условиях одновременного протекания однонаправленных по действию² процессов самовоздействия.

Целью данной работы является изучение в рамках вычислительного эксперимента особенностей распространения в пленках ЖИГ 2D-импульсов ООМСВ при уровнях входной мощности, достаточных для развития процессов самовоздействия.

Отметим, что взаимовлияние противоположных по действию процессов самовоздействия ($\beta_l \gamma > 0, \beta_t \gamma < 0$) ограниченного во времени планарного волнового пучка (2D-импульс), а именно: самодекомпрессии³ импульса и самофокусировки пучка, - исследовалось численно в работе [14] применительно к волнам оптического диапазона. Показано, что ширина волнового пучка сначала уменьшается из-за самофокусировки, а длительность импульса возрастает вследствие нелинейной декомпрессии. Затем, после прохождения нелинейного фокуса амплитуда волны падает из-за дисперсионного распыливания импульса, и самовоздействие ослабевает. В результате и ширина пучка, и длительность импульса одновременно увеличиваются. Отмечено, что аналогичная картина имеет место при самокомпрессии импульса на фоне дефокусировки пучка ($\beta_l \gamma < 0, \beta_t \gamma > 0$).

¹ Имеются в виду продольные либо поперечные возмущения относительно направления распространения волны.

² Самосжатие импульса и самофокусировка пучка.

³ Более быстрое, по сравнению с линейным режимом, распыливание импульса в направлении его распространения

Постановка задачи

Геометрия задачи показана на вставке к рис. 1. Считаем, что изотропная по магнитным свойствам ферромагнитная пленка с намагниченностью насыщения $4\pi M_0$, шириной линии ферромагнитного резонанса ΔH , толщиной d , длиной L_x и шириной L_y , расположена в плоскости xOy так, что ось Oz перпендикулярна поверхности пленки. Внешнее магнитное поле H_0 направлено вдоль оси Ox . Входная антенна длиной a располагается параллельно оси Oy и возбуждает волны, бегущие в направлении оси Ox .

В выбранной геометрии в безобменном приближении в пленке могут распространяться дипольные ООМСВ с законом дисперсии [15]

$$k_1^2 + k_t^2 + 2[k_1^2 + k_t^2]^{1/2}[-\mu(k_1^2 + k_t^2\mu)]^{1/2} \operatorname{ctg}\{d[(k_1^2 + k_t^2\mu)/(-\mu)]^{1/2}\} - \mu(k_1^2 + k_t^2\mu) - k_t^2 v^2 = 0, \quad (3)$$

где $\mu = (\omega_0^2 - \omega^2)/(\omega_H^2 - \omega^2)$, $\omega_0 = \omega_H(\omega_H + \omega_m)$, $v = (\omega_m \omega)/(\omega_H^2 - \omega^2)$, ω - частота ООМСВ, $\omega_m = g4\pi M_0$, $\omega_H = gH_0$, g - гиромагнитное отношение.

Эффекты самовоздействия при распространении ООМСВ в такой структуре могут быть описаны нестационарным двумерным уравнением Шредингера (НУШ)

$$i(\partial\varphi/\partial t) + V_g(\partial\varphi/\partial x) + 1/2\beta_1(\partial^2\varphi/\partial x^2) + 1/2\beta_t(\partial^2\varphi/\partial y^2) - \gamma|\varphi|^2\varphi + i\alpha\varphi = 0 \quad (4)$$

с начальными условиями

$$\varphi(x, y, 0) = \begin{cases} \varphi^0\psi(0)\eta(y), & x = 0, & |y| \leq a/2, \\ 0, & x = 0, & a/2 < |y| \leq L_y/2, \\ 0, & 0 < x \leq L_x, & |y| \leq L_y/2 \end{cases} \quad (5)$$

и граничными условиями

$$\varphi(0, y, t) = \begin{cases} \varphi^0\psi(t)\eta(y), & |y| \leq a/2, & 0 < t \leq T_{\text{imp}}, \\ 0, & a/2 < |y| \leq L_y/2, & 0 < t \leq t_{\text{max}}, \\ 0, & |y| \leq L_y/2, & T_{\text{imp}} < t \leq t_{\text{max}}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\varphi(L_x, y, t) = 0, \quad |y| \leq L_y/2, \quad 0 < t \leq t_{\text{max}},$$

$$\varphi(x, -L_y/2, t) = 0, \quad 0 < x \leq L_x, \quad 0 < t \leq t_{\text{max}},$$

$$\varphi(x, L_y/2, t) = 0, \quad 0 < x \leq L_x, \quad 0 < t \leq t_{\text{max}}.$$

Здесь $V_g = \partial\omega/\partial k_1$ - групповая скорость волны; $\alpha = g\Delta H$ - диссипативный

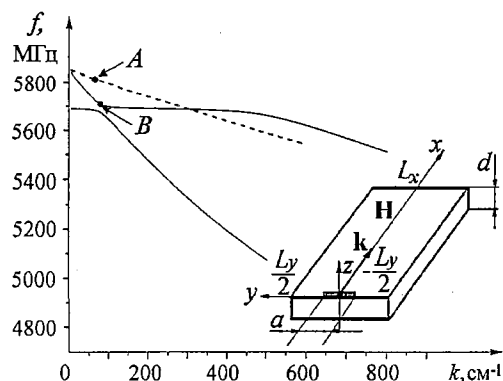


Рис. 1. Положение рабочих точек «А» и «В» на дисперсных кривых основной моды дипольной ООМСВ (штриховая линия) и в окрестности резонанса основной моды ООМСВ и поверхностной спиновой волны в пленке ЖИГ (сплошные линии)

коэффициент; φ_0 - определяет уровень входной амплитуды МСВ; $\eta(y)$ - функция начального распределения амплитуды волны в поперечном сечении пучка; $\psi(t)$ - функция, задающая зависимость амплитуды входного импульса от времени на возбуждающей антенне; T_{imp} - длительность импульса; t_{max} - длительность анализа распространения МСВ. Граничные условия (6) при $T_{\text{imp}} < t_{\text{max}}$ соответствуют импульсному режиму возбуждения МСВ на входной антенне.

Все результаты, представленные в этой статье, получены для функций $\eta(y)$ и $\psi(t)$ вида:

$$\eta(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq a/2, \\ 0, & |y| > a/2, \end{cases} \quad (7)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_{\text{imp}}, \\ 0, & t > T_{\text{imp}}. \end{cases} \quad (7a)$$

Численное решение (4)-(6) проводилось при двух наборах («А» и «В») значений коэффициентов НУШ, в которых значения $V_g = 3.5 \cdot 10^6$ см/с, $\beta_1 = 2.3 \cdot 10^5$ см²/с, $\gamma = -7.3 \cdot 10^9$ с⁻¹ были одинаковыми, а значения коэффициента дисперсионного расплывания различались на два порядка и составляли $\beta_1 = 1.72 \cdot 10^3$ см²/с и $\beta_1 = 1.72 \cdot 10^5$ см²/с, соответственно.

Набор параметров «А» соответствует случаю чисто дипольных ООМСВ с волновым числом $k \approx 70$ см⁻¹ на частоте $f = \omega/2\pi \approx 5.82$ ГГц, распространяющихся в пленке ЖИГ с намагниченностью насыщения $4\pi M_0 = 1750$ Гс, толщиной $d = 7.2$ мкм, намагниченной касательно в поле $H_0 = 1390$ Э. На рис. 1 штриховой линией показан закон дисперсии основной моды ООМСВ в такой пленке и буквой «А» отмечено положение рабочей точки.

Набор параметров «В» может отвечать, в частности, выбору рабочей точки в окрестности «обменной щели» в спектре ООМСВ, образованной в результате резонансного взаимодействия основной моды ООМСВ с поверхностной обменной волной, поддерживаемой поверхностью пленки с закрепленными спинами за счет одноосной поверхностной анизотропии с «легкой осью», нормальной к поверхности [16]. На рис. 1 сплошными линиями показаны дисперсионные кривые, отвечающие результату взаимодействия основной моды ООМСВ и поверхностной обменной волны. Дисперсионные кривые рассчитывались при выбранном значении касательного поля $H_0 = 1390$ Э так, как указано в [16], при этом параметры пленки брались равными $4\pi M_0 = 1750$ Гс, $d = 25$ мкм, обменная жесткость $A = 1.0 \cdot 10^{-6}$ эрг/см³, параметры закрепления спинов на поверхностях пленки $L_1 \approx -1.0 \cdot 10^5$ см⁻¹, $L_2 \approx 1.6 \cdot 10^5$ см⁻¹, где индексы 1 и 2 служат для обозначения поверхностей пленки. При этом закрепление на поверхности 2 отвечает случаю поверхностной анизотропии «легкая ось» и именно эта поверхность поддерживает поверхностную спиновую волну. При значении частоты $f \approx 5.7$ ГГц и волновом числе $k \approx 90$ см⁻¹ (точка «В» на рис. 1) реализуется набор коэффициентов НУШ с $\beta_1 = 1.72 \cdot 10^5$ см²/с, что соответствует случаю сильной дисперсии.

Рассмотрим далее зависимости решений задачи (4)-(6) от амплитуды φ_0 на входе для двух выбранных наборов параметров.

Важно заметить, что поскольку используемое в математической модели НУШ второго порядка применимо лишь для описания волновых пучков и импульсов с достаточно узкими частотными и пространственными спектрами, а именно:

$$\pi/a \ll k, \quad \pi/(V_g T_{\text{imp}}) \ll k, \quad (8)$$

вычислительный эксперимент проводился для 2D-импульсов длительностью T_{imp} не менее 150 нс при ширине антенны a не менее 0.5 см.

Чисто дипольные ООМСВ

Среда без диссипации. Рассмотрим особенности распространения 2D-импульсов ООМСВ в бездиссипативной среде ($\alpha=0$) при значениях коэффициентов НУШ из набора «А», где коэффициент дисперсионного расплывания отвечает дипольным ООМСВ $\beta_1=1.72 \cdot 10^3 \text{ см}^2/\text{с}$.

Заметим сначала, что в случае непрерывно возбуждаемых на входной антенне ООМСВ с выбранными параметрами имеют место эффекты стационарной самофокусировки и самоканализации волновых пучков [11,12]. При этом порог возникновения самофокусировки полностью определяется шириной возбуждающей антенны

$$\varphi_1^{\text{th}} = \pi/(2^{1/2}a)(-\beta_1/\gamma)^{1/2}. \quad (9)$$

Для волновых пучков, независимо от вида апертурной функции, при $\varphi_1^{\text{th}} \leq \varphi_0^{\text{eff}} < 2\varphi_1^{\text{th}}$ наблюдается распространение самоподдерживающегося пучка в «волноводном» режиме, а при $\varphi_0^{\text{eff}} \geq 2\varphi_1^{\text{th}}$ происходит разбиение пучка на систему волноводных каналов. Никаких проявлений развития модуляционной неустойчивости относительно продольных возмущений не наблюдается.

Несколько по иному обстоит дело в случае ограниченных во времени волновых пучков (2D-импульсов). При распространении 2D-импульсов наряду с пространственным масштабом D_y , задаваемым шириной возбуждающей антенны a ($D_y=a$), появляется еще один выделенный пространственный масштаб $D_x = V_g T_{\text{imp}}$, определяемый длительностью импульса T_{imp} . Этим пространственным масштабом, по аналогии со сказанным ранее относительно порога самофокусировки, будет определяться порог появления модуляционной неустойчивости относительно продольных возмущений

$$\varphi_1^{\text{th}} = \pi/(2^{1/2}D_x)(-\beta_1/\gamma)^{1/2}. \quad (10)$$

Понятно, что одновременное развитие модуляционных неустойчивостей ООМСВ относительно продольных (l) и поперечных (t) возмущений возможно при $\varphi_0 \geq \max(\varphi_1^{\text{th}}, \varphi_t^{\text{th}})$. Здесь и ниже, ведя речь о начальном импульсе, для обозначения усредненных амплитуд по продольному и поперечному сечениям мы будем пользоваться вместо $\varphi_0^{\text{eff}}_{x,y}$ просто φ_0 , так как для выбранных функций $\eta(y)$ (7) и $\psi(t)$ (7а) верно равенство $\varphi_0^{\text{eff}}_{x,y} = \varphi_0$.

Для чисто дипольных ООМСВ с указанными выше параметрами и, например, при длительности импульса $T_{\text{imp}}=300$ нс и ширине антенны $a=0.5$ см $\max(\varphi_1^{\text{th}}, \varphi_t^{\text{th}}) = \varphi_1^{\text{th}} \approx 2.4 \cdot 10^{-2}$. Причем, из-за малого значения коэффициента дисперсионного расплывания по сравнению со значением коэффициента дифракции, имеет место соотношение $\varphi_1^{\text{th}} > \varphi_t^{\text{th}}$. Последнее означает, что при $\varphi_0 \approx \varphi_1^{\text{th}}$ уровень входной амплитуды соответствует «далеко-запороговой» области существования модуляционной неустойчивости относительно продольных возмущений. Для этой области характерно наличие широкого спектра «неустойчивых» возмущений (Ω, Q_x) с волновыми числами из интервала

$$Q_{x \text{ min}} \leq Q_x < Q_{x \text{ max}}, \quad (11)$$

⁴ Здесь $\varphi_0^{\text{eff}} = (1/a)\varphi_0 \int_{-a/2}^{a/2} \eta(y) dy$.

где

$$Q_{x\min} = \pi/D_x, \quad Q_{x\max} = 2\varphi_0(-\gamma/\beta_1)^{1/2}.$$

Соотношение диапазонов волновых чисел

$$[Q_{x\min}, Q_{x\max}], \quad [Q_{y\min}, Q_{y\max}] \quad (11a)$$

«неустойчивых» продольных и поперечных⁵ возмущений при фиксированном значении $\varphi_0 \approx \varphi_t^{\text{th}}$ хорошо видно из рис. 2, на котором изображены зависимости характерных длин развития модуляционной неустойчивости ООМСВ в продольном

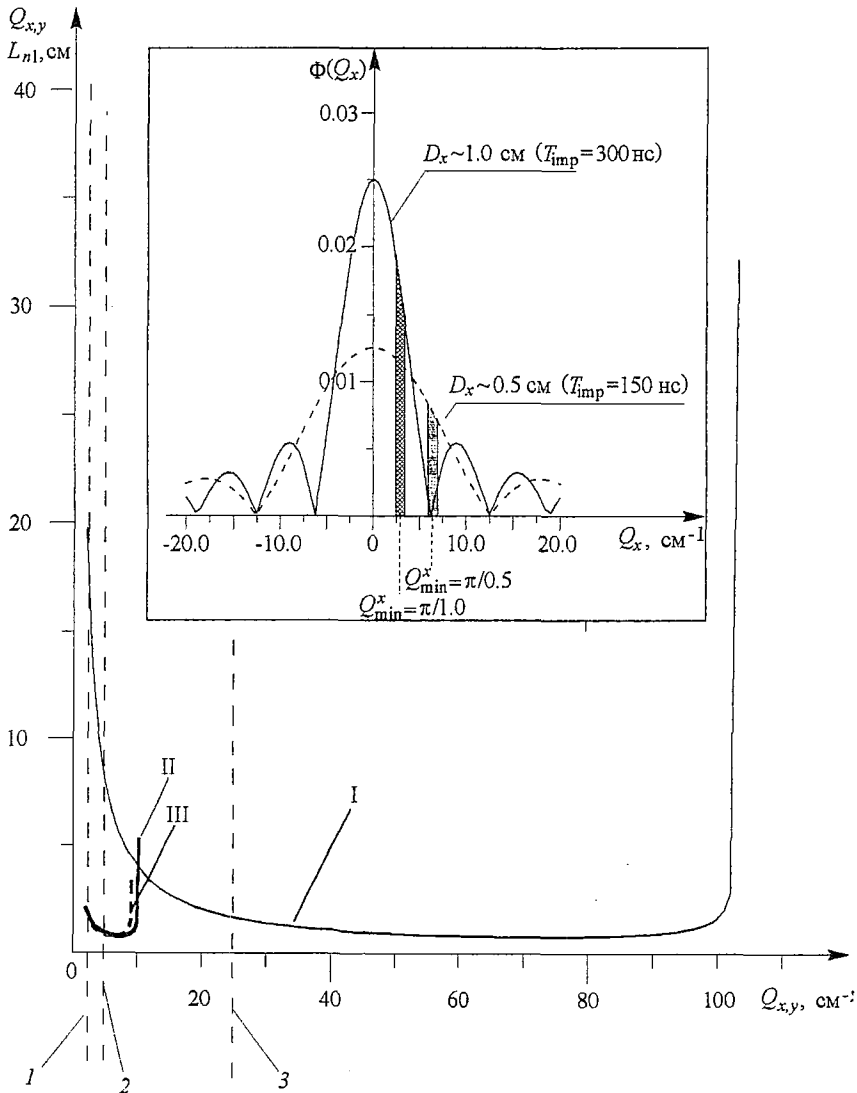


Рис. 2. Зависимость характерных длин L_{n1} развития модуляционной неустойчивости от волновых чисел «неустойчивых» продольных Q_x (кривые I и II) и поперечных Q_y (кривая III) возмущений. Кривые I и III отвечают набору «А» параметров НУШ, а II и III - набору «В». Пунктирами 1 и 2 отмечены границы $Q_{x\min}$ в случае $T_{\text{imp}} = 300$ нс и $T_{\text{imp}} = 150$ нс, соответственно. Пунктир 3 - верхняя граница значений волновых чисел Q_x , участвующих в развитии решения уравнения (4) при выбранной величине шага дискретизации h_x численной схемы. На вставке показаны спектральные плотности амплитуды прямоугольных импульсов длительностями 300 нс (сплошная линия) и 150 нс (штриховая линия) при уровне входной амплитуды $\varphi_0 = 2.5 \cdot 10^{-2}$

⁵Значения $Q_{y\min}$, $Q_{y\max}$ рассчитываются по формулам (11) после соответствующей замены индексов $x \rightarrow y$, $l \rightarrow t$.

(тонкая сплошная линия) и поперечном (жирная пунктирная линия) направлениях при $\varphi_0 = 2.5 \cdot 10^{-2}$. При построении указанных зависимостей использовались дисперсионные уравнения для малых продольных и поперечных волновых возмущений ($\Omega, Q_{x,y}$)

$$\Omega = V_g Q_{x,y} \pm 1/2 [\beta_{lt} Q_{x,y}^2 (4\gamma|\varphi_0|^2 + \beta_{lt} Q_{x,y}^2)]^{1/2}. \quad (12)$$

Рассчитывались значения инкрементов модуляционной неустойчивости $\Gamma_{ni} = \text{Im}(\Omega)$ и соответствующие им характерные длины развития неустойчивости $L_{ni}^{Q_{x,y}} = V_g / \Gamma_{x,y}$ для волновых чисел $Q_{x,y}$ продольных и поперечных возмущений из диапазонов (11а).

Из рис. 2 видно, что значения волновых чисел $Q_x^* = Q_{\max} / 2^{1/2}$ у возмущений с максимальными инкрементами $\Gamma^* = \gamma|\varphi_0|^2$ [12] и, следовательно, с минимальными $L_{ni}^{Q_x}$ оказываются по величине порядка волнового числа k самой ООМСВ. Здесь мы сталкиваемся с ограничением на применимость используемого НУШ 2-го порядка ($Q_{x,y} \ll k$). По сути дела использование (4) для чисто дипольных ООМСВ при указанных уровнях мощности является некорректным. Складывающаяся ситуация связана с тем, что в модель (4)-(6) не заложена информация о величине волнового числа несущей волны и не введен механизм нелинейной дисперсии, ограничивающий рост Q_{\max} «неустойчивых» возмущений с ростом φ_0 . В проведенных нами расчетах возмущения с большими значениями волновых чисел ($Q_x \sim k$) искусственно исключались (см. положение пунктира под номером 3 на рис.2) из рассмотрения посредством задания шагов дискретизации $h_{x,y}$ численной схемы по пространственным координатам порядка длины волны несущей $\lambda = 2\pi/k$ ⁶

$$\lambda/10 < h_{x,y} \leq \lambda. \quad (13)$$

Из оставшихся возмущений с волновыми числами, расположенными слева от пунктира, определяющую роль в развитии модуляционной неустойчивости ООМСВ играют, по всей видимости, продольные возмущения огибающей 2D-импульса с Q_x из узкой полосы вблизи $Q_{x\min}$, которые благодаря максимальной интегральной амплитуды в пределах этой полосы (см. вставку к рис. 2) составляют достойную конкуренцию другим возмущениям с $Q_x > Q_{x\min}$.

Из сравнения кривых $L_{ni}^{Q_x}$ (кривая I) и $L_{ni}^{Q_y}$ (кривая III) на рис.2 видно также, что характерная длина развития $L_{ni}^{Q_{x\min}}$ модуляционной неустойчивости ООМСВ относительно продольных возмущений в точке $Q_{x\min} \approx \pi/D_x$ значительно превышает длину развития $L_{ni}^{Q_{y\min}}$ модуляционной неустойчивости относительно поперечных возмущений в точке $Q_{y\min} \approx \pi/D_y$, поскольку для последних при $\varphi_0 \sim \varphi_1^{\text{th}}$ имеем $\Gamma_y \approx \Gamma_y^* = \gamma|\varphi_0|^2$.

В подтверждение сказанному обратимся к рис. 3, на котором изображено поведение огибающей 2D-импульса дипольной ООМСВ с размерами $D_x \approx 1.0$ см и $D_y = 0.5$ см.

Действительно, как видно из рис. 3, из-за значительной разницы длин $L_{ni}^{Q_{x\min}}$ и $L_{ni}^{Q_{y\min}}$ ($L_{ni}^{Q_{x\min}} \gg L_{ni}^{Q_{y\min}}$) самосжатие импульса в направлении x , являющееся следствием развития модуляционной неустойчивости относительно продольных возмущений, проявляется на значительном удалении от входной антенны ($x > 2$ см), в то время как эффект самофокусировки волнового пучка замечен уже на этапе входа 2D-импульса в пленку ($x < 0.5$ см). Самосжатие импульса в продольном направлении провоцирует (см. рис. 3 при $\varphi_0 = 3.0 \cdot 10^{-2}$ и $\varphi_0 = 4.0 \cdot 10^{-2}$) развитие неустойчивости ООМСВ относительно малых поперечных возмущений с $\lambda_y < 2D_y$, в результате чего вдоль координаты y происходит дробление одиночного импульса

⁶ По сути дела, таким образом вместо реального механизма вводится в действие механизм разностной природы, ограничивающий рост Q_{\max} .

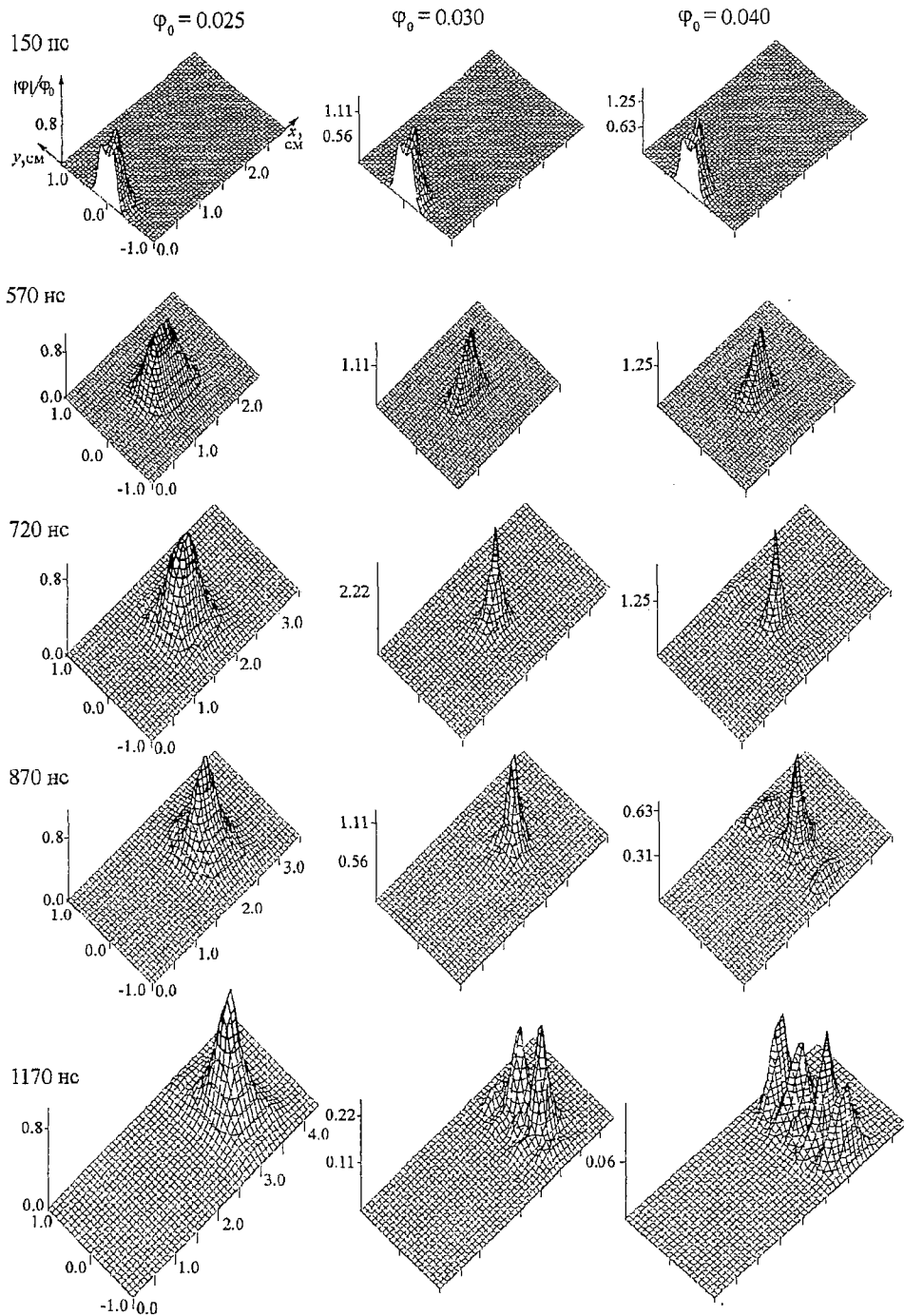


Рис. 3. Эволюция во времени 2D-импульсов ($T_{\text{имп}}=300$ нс, $a=0.5$ см) чисто дипольной ООМСВ при $\varphi_0 \leq 2\varphi_1^{\text{th}}$ в бездиссипативной среде

на несколько фрагментов, расплывающихся в дальнейшем под действием дисперсии и дифракции.

Распад импульса на фрагменты может происходить и без участия эффекта самосжатия импульса в продольном направлении. В этом случае этот процесс полностью аналогичен процессу образования системы самоподдерживающихся волноводных каналов при распространении волновых пучков дипольных ООМСВ [11,12] с $\varphi_0^{\text{eff}} > 2\varphi_1^{\text{th}}$. На рис. 4 показано разбиение импульса на два «дочерних»

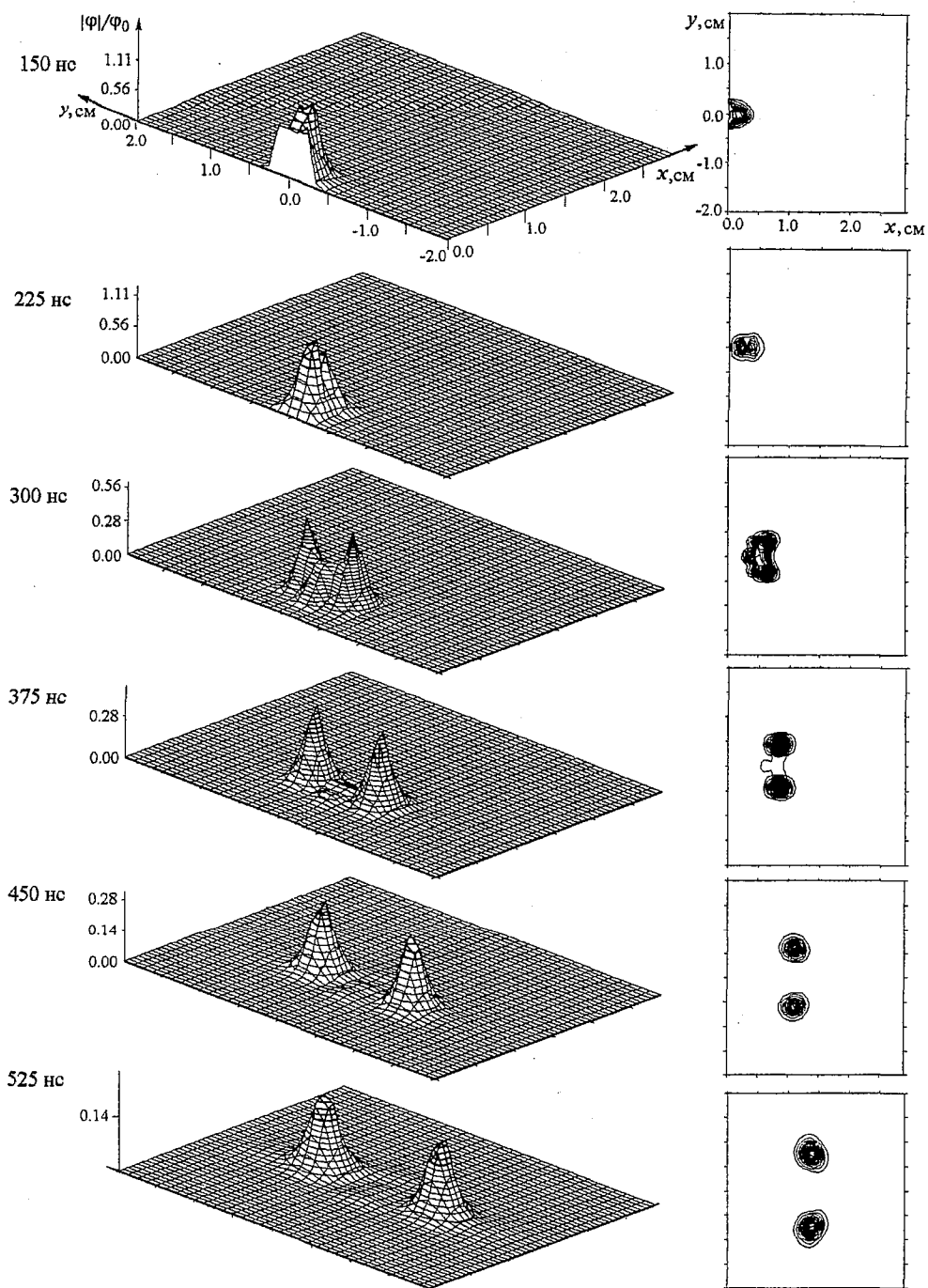


Рис. 4. Распад 2D-импульса ($T_{\text{imp}}=150$ нс, $a=0.5$ см) чисто дипольной ООМСВ на два независимых фрагмента при уровне входной амплитуды $\varphi_0 > 2\varphi_1^{\text{th}}$ в бездиссипативной среде; $\varphi_0=0.06$, $\alpha=0.0$

импульса, удаляющихся друг от друга с течением времени. Дробление первоначального импульса начинает осуществляться вблизи входной антенны, где эффект самосжатия в направлении x еще не успел проявиться.

Диссипативная среда. При наличии диссипации ($\alpha \neq 0$) эффекты, связанные с самосжатием 2D-импульсов ООМСВ при длительностях $T_{\text{imp}} \geq 150$ нс, не

наблюдаются вследствие того, что длина $L_{nl}^{Q_1}$ развития этих эффектов больше диссипативной длины $l_d = V_g/\alpha$.

Тем не менее, разбиение импульса на фрагменты, вызванное развитием неустойчивости только лишь относительно поперечных возмущений, как и в случае непрерывно возбуждаемых ООМСВ, имеет место. Так, из рис. 5 видно, что процесс разбиения импульса ООМСВ, начавшийся на участке пленки вблизи входной антенны ($0 < x < 1$ см), не завершился вследствие уменьшения амплитуды

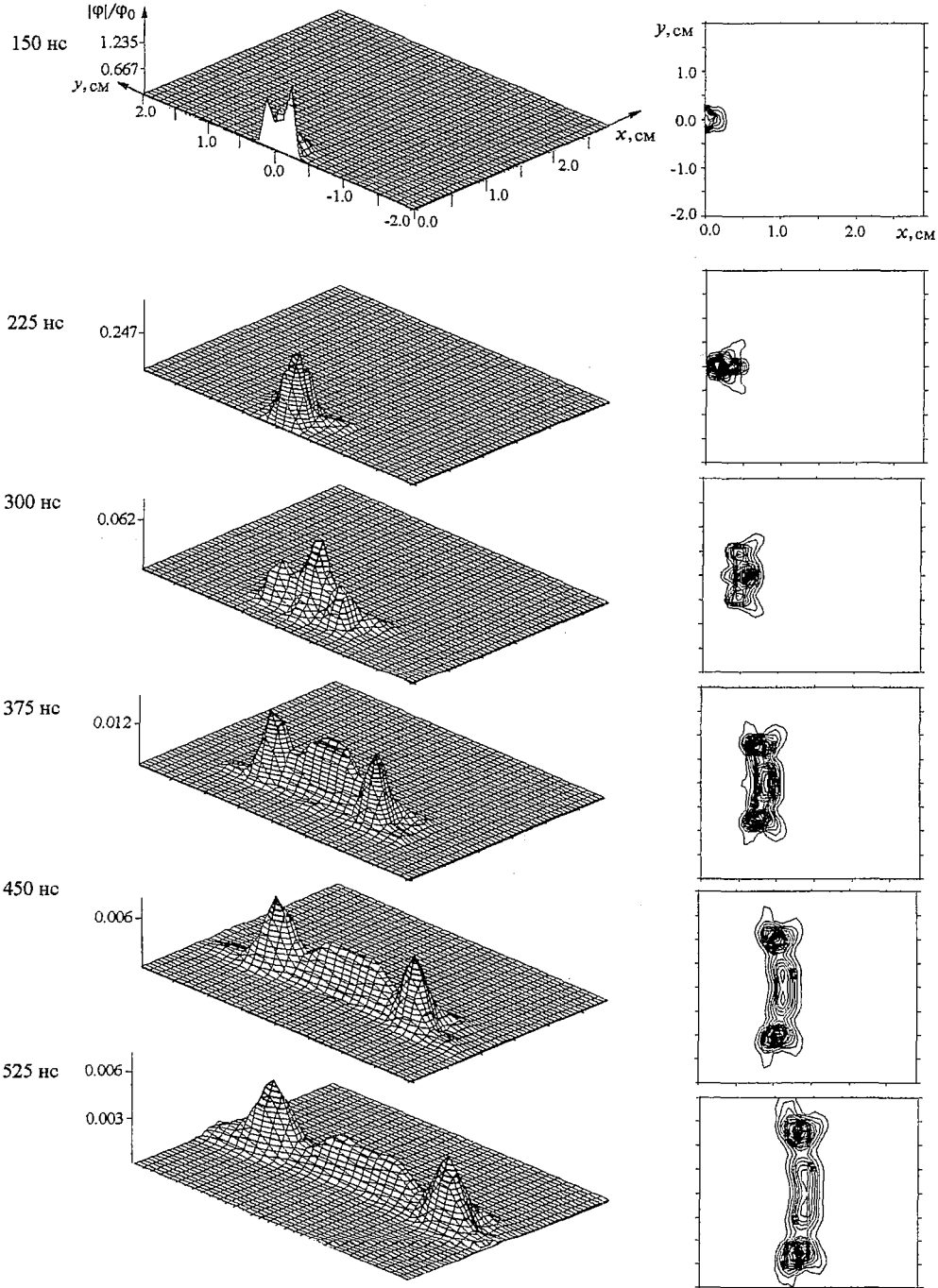


Рис. 5. Эволюция во времени 2D-импульса ($T_{\text{имп}}=150$ нс, $a=0.5$ см) чисто дипольной ООМСВ при уровне входной амплитуды $\varphi_0 > 2\varphi_1^{\text{th}}$ в среде с диссипацией; $\varphi_0=0.09$, $\alpha=3.5 \cdot 10^6$ с $^{-1}$

волны за счет диссипации, в результате чего импульс приобрел специфичную форму вытянутого в поперечном направлении «хребта».

ООМСВ в области сильной дисперсии

Среда без диссипации. Рассмотрим теперь решения задачи (4)-(6) в случае соизмеримости коэффициентов дисперсии ($\beta_1=1.72 \cdot 10^5$ см²/с) и дифракции ($\beta_t=2.13 \cdot 10^5$ см²/с). На рис. 2 жирной сплошной линией изображена зависимость $L_{nl}(Q_x)$ в этой ситуации.

Заметим, что при величине коэффициента дисперсионного расплывания близкой к величине коэффициента дифракции для импульсов с приблизительно одинаковыми размерами вдоль координат x и y ($D_x \approx D_y$), имеем ситуацию, когда, во-первых,

$$\varphi_t^{\text{th}} \approx \varphi_1^{\text{th}} \quad (14)$$

и, во-вторых, развитие модуляционных неустойчивостей относительно продольных и поперечных возмущений с одинаковыми масштабами происходит на одних и тех же длинах (см. рис. 2, кривые II и III)

$$L_{nl} Q_{x\text{min}} \approx L_{nl} Q_{y\text{min}}. \quad (15)$$

Кажется очевидным, что если бы при этом начальные условия задачи соответствовали случаю существования в ферритовой пленке в момент времени $t=0$ центрально-симметричного импульса, то эволюция этого импульса в процессе самовоздействия при $t>0$ приводила бы к появлению (в зависимости от уровня начальной амплитуды φ_0) различных центрально-симметричных структур. Однако в нашем случае, когда начальные и граничные условия моделируют реальную ситуацию постепенного «входа» импульса в пленку, положение осложняется тем, что процессы модуляционной неустойчивости в x и y направлениях «стартуют» не одновременно. Сначала проявляются эффекты самофокусировки и самоканализации. Процессы же, связанные с модуляционной неустойчивостью относительно продольных возмущений, начинают развиваться лишь по прошествии некоторого времени, достаточного для того, чтобы протяженность «вошедшей» в пленку части импульса была не меньше длины волны «неустойчивого» возмущения с $\Lambda_x = 2\pi/Q_{x\text{max}}$.

Для примера рассмотрим поведение импульса с размерами $D_x = V T_{\text{imp}}^g \approx 0.52$ см, $D_y = a = 0.5$ см при различных уровнях входной амплитуды φ_0 (рис. 6). Пороги конкурирующих процессов самовоздействия для такого импульса при выбранных параметрах задачи имеют следующие значения: $\varphi_1^{\text{th}} \approx 2.0 \cdot 10^{-2}$, $\varphi_t^{\text{th}} \approx 2.4 \cdot 10^{-2}$.

В левой колонке изображено поведение огибающей описанного импульса с начальной амплитудой $\varphi_0 > 2\varphi_1^{\text{th}}$. Видно, что уже на расстоянии примерно 0.5 см от входной антенны при $t=225$ нс развивается процесс разбиения импульса. Однако, в отличие от случая с чисто дипольными ООМСВ, процесс этот прерывается по мере вступления в силу самовоздействия волны в продольном направлении. В результате от основного импульса справа и слева «отпочковываются» два сателлита с ненулевой поперечной составляющей групповой скорости V_y . При этом как боковые, так и центральный фрагменты начального импульса не обладают достаточной энергией для поддержания своей формы и расплываются в процессе распространения.

При $\varphi_0 = 4.8 \cdot 10^{-2}$ на начальном этапе трансформации импульса наблюдается аналогичная картина, но поскольку уровень входной амплитуды ниже предыдущего ($\varphi_0 \sim 2\varphi_1^{\text{th}}$), процесс разбиения идет менее интенсивно, и в результате доля энергии,

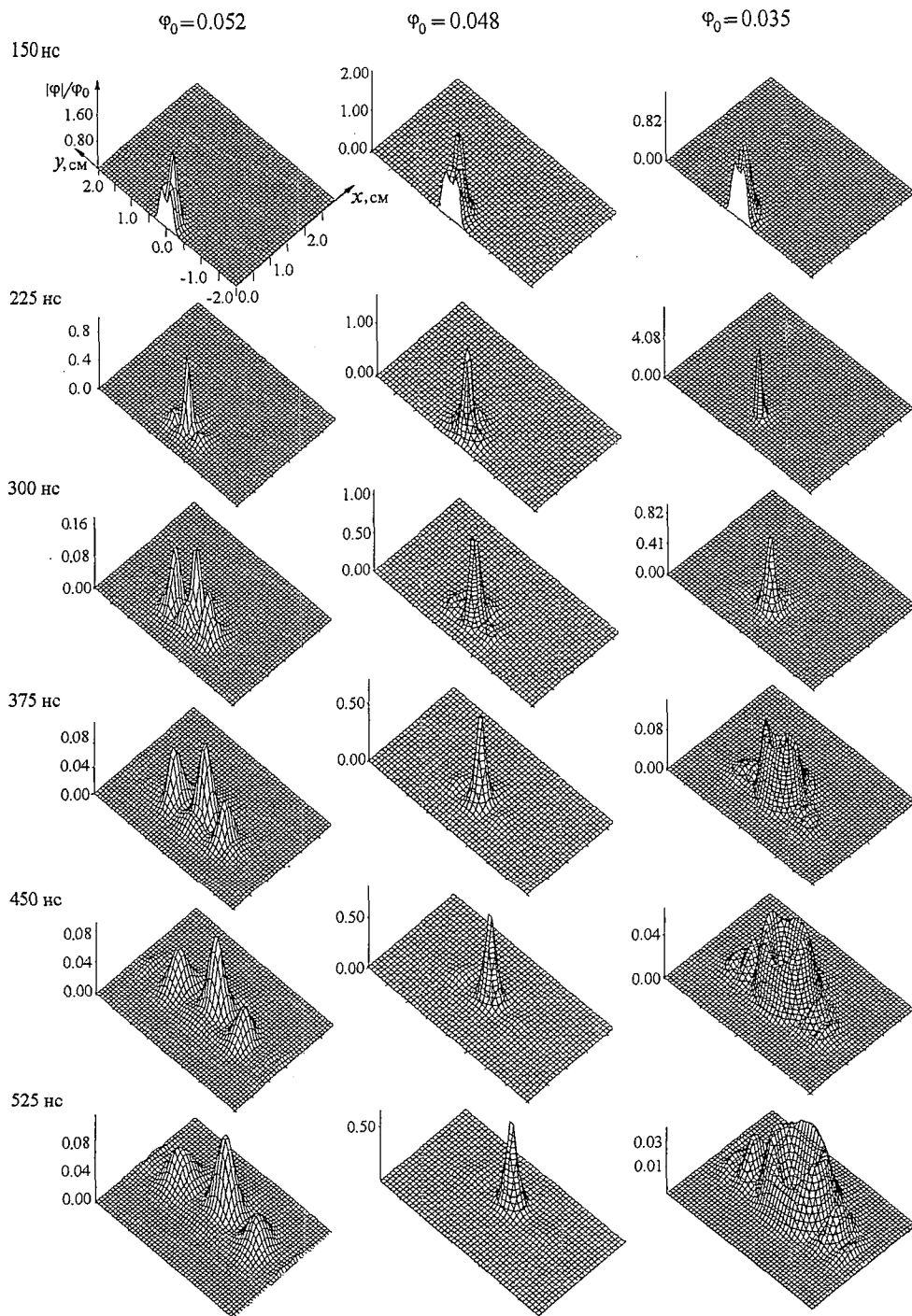


Рис. 6. Трансформация 2D-импульсов ($T_{\text{imp}}=150$ нс, $a=0.5$ см) ООМСВ с соизмеримыми поперечным и продольным размерами в бездиссипативной среде при наличии сильной дисперсии

уносимая спутниками, много меньше по сравнению с долей, заключенной в основном импульсе. Причем, как видно, на расстоянии примерно 0.8 см от входной антенны происходит образование «солитоноподобного» импульса, распространяющегося в дальнейшем без заметного изменения своей формы.

Совершенно другой тип поведения импульса реализуется при $\varphi_0=3.5 \cdot 10^{-2}$. В

этом случае уровень начальной амплитуды лежит ниже порога разбиения импульса в поперечном направлении ($\varphi_t^{\text{th}} < \varphi_0 < 2\varphi_t^{\text{th}}$), поэтому сразу по мере вхождения импульса в пленку происходит его самофокусировка (самосжатие в поперечном направлении) и затем с небольшим отрывом во времени ($\Delta t \sim V_g T_{\text{imp}}$) самосжатие в продольном направлении. В результате такой трансформации образуется узкий «колоколообразный» импульс с размерами $D_x \sim D_y \sim 0.35$ см (рис. 6, правая колонка, при $t=225$ нс). Усредненные амплитуды $|\varphi_{t,t}^{\text{eff}}|$ по продольному и поперечному сечениям, проведенным через вершину этого импульса, достигают значений, превышающих пороги неустойчивости импульса относительно разбиения его в продольном и поперечном направлениях

$$|\varphi_1^{\text{eff}}| > 2\varphi_1^{\text{th}}, \quad |\varphi_t^{\text{eff}}| > 2\varphi_t^{\text{th}}.$$

Поскольку форма получившегося «колоколообразного» импульса близка к осесимметричной, процесс его разбиения идет равномерно по всем направлениям. В итоге образуется импульс, топологически отличный от первоначального, с дислокацией ($\varphi=0$) огибающей в центральной своей части. Ввиду образности полученного решения, называем его в дальнейшем «бублик». Видно, что «бублик» не сохраняет свою форму, испытывая дисперсионное и дифракционное расплывание.

Изменением, помимо уровня начальной амплитуды, ширины входной антенны или длительности импульса можно добиться еще большего разнообразия форм, получающихся при трансформации исходного импульса в результате самовоздействия.

На рис. 7 показана эволюция импульсов с начальной амплитудой $\varphi_0 = 3.5 \cdot 10^{-2}$ при ширине антенны $a=1$ см. Для таких импульсов $\varphi_t^{\text{th}} \approx 1.2 \cdot 10^{-2}$, а $\varphi_1^{\text{th}} \approx 2.0 \cdot 10^{-2}$ при $T_{\text{imp}}=150$ нс и $\varphi_1^{\text{th}} \approx 1.0 \cdot 10^{-2}$ при $T_{\text{imp}}=300$ нс. В данном случае уровень входной амплитуды значительно превышает порог разбиения входных импульсов в поперечном направлении: $\varphi_0 \sim 3\varphi_t^{\text{th}} > 2\varphi_t^{\text{th}}$. В связи с этим короткий импульс ($T_{\text{imp}}=150$ нс) в процессе «входа» в пленку успевает практически полностью расколоться на два обособленных фрагмента, которые, в отличие от случая чисто дипольных ООМСВ (см. рис. 3), взаимодействуют между собой. Фрагменты сливаются при $t=375$ нс, а результирующая структура в свою очередь дробится не только в поперечном, но и в продольном направлениях, образуя 6 расплывающихся импульсов.

Аналогичное слияние «поперечных» фрагментов длинного импульса ($T_{\text{imp}}=300$ нс) заканчивается разбиением результирующей структуры на два «продольных» фрагмента при $t=600$ нс.

Важно отметить, что для широкой антенны $a=1.0$ см при длительности импульса 150 нс также возможен режим образования 2D-солитона (рис. 8). Как видно из рисунка, солитон формируется на значительном удалении от входной антенны ($x \sim 1.5$ см), что связано с низким значением входной амплитуды $\varphi_0 = 2.5 \cdot 10^{-2}$, необходимым для реализации этого режима при широкой антенне.

Интересный эффект, создающий иллюзию «остановки» импульса наблюдается при $T_{\text{imp}} > 500$ нс. В качестве иллюстрации этого эффекта на рис. 9 представлены решения уравнения (4) для импульсов с начальной амплитудой $\varphi_0 = 3.5 \cdot 10^{-2}$ и длительностью $T_{\text{imp}} = 600$ нс.

Как видно из рисунка, начиная с момента времени $t=600$ нс, местоположение областей импульса с максимальной амплитудой⁷ на протяжении трехсот наносекунд почти не изменяется ($x^* \sim 1.2$ см). Если принимать такую область за вершину основного импульса, то создается впечатление, что импульс «остановился».

⁷ На рис. 9 местоположение этих областей обозначено звездочками.

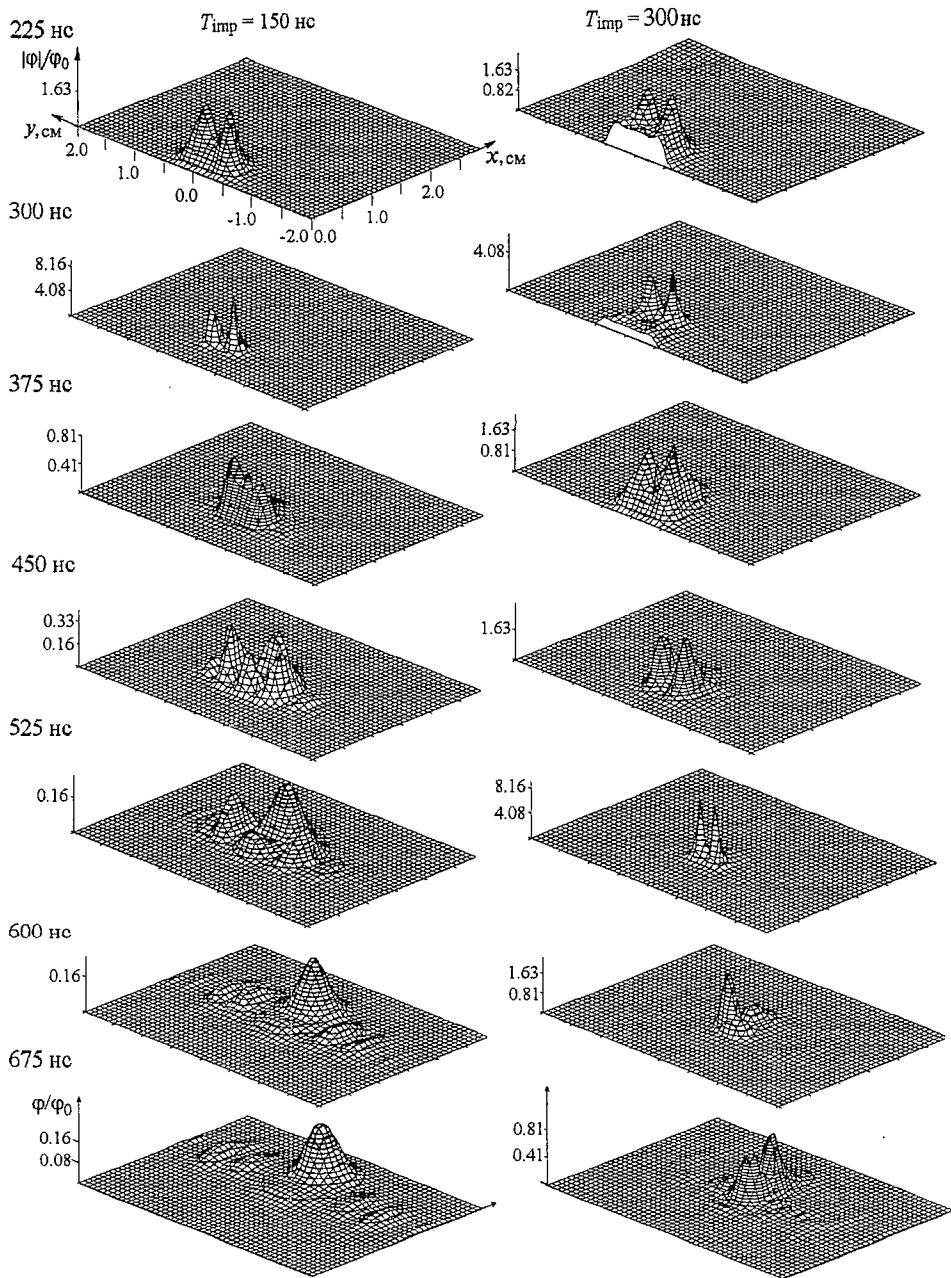


Рис. 7. Взаимодействие фрагментов 2D-импульсов ООМСВ при наличии сильной дисперсии

На самом деле, в результате развития самомодуляции ООМСВ в продольном направлении реализуется многосолитонный режим [17]. Каждый отдельный солитон в процессе своего формирования сжимается в продольном и поперечном направлениях. В точке x^* рост амплитуды в пике за счет такого сжатия превышает порог разбиения солитоноподобного импульса. Импульс дробится. Фрагменты его быстро расплываются в силу своей малой амплитуды. К этому времени к точке x^* подходит следующий «солитон», с которым происходит то же самое. Таким образом продвигаясь мимо точки x^* , весь первоначальный импульс постепенно «тает», создавая иллюзию «нераспространения».

Заметим, что для эффектов, сходных коллапсу и появляющихся в результате

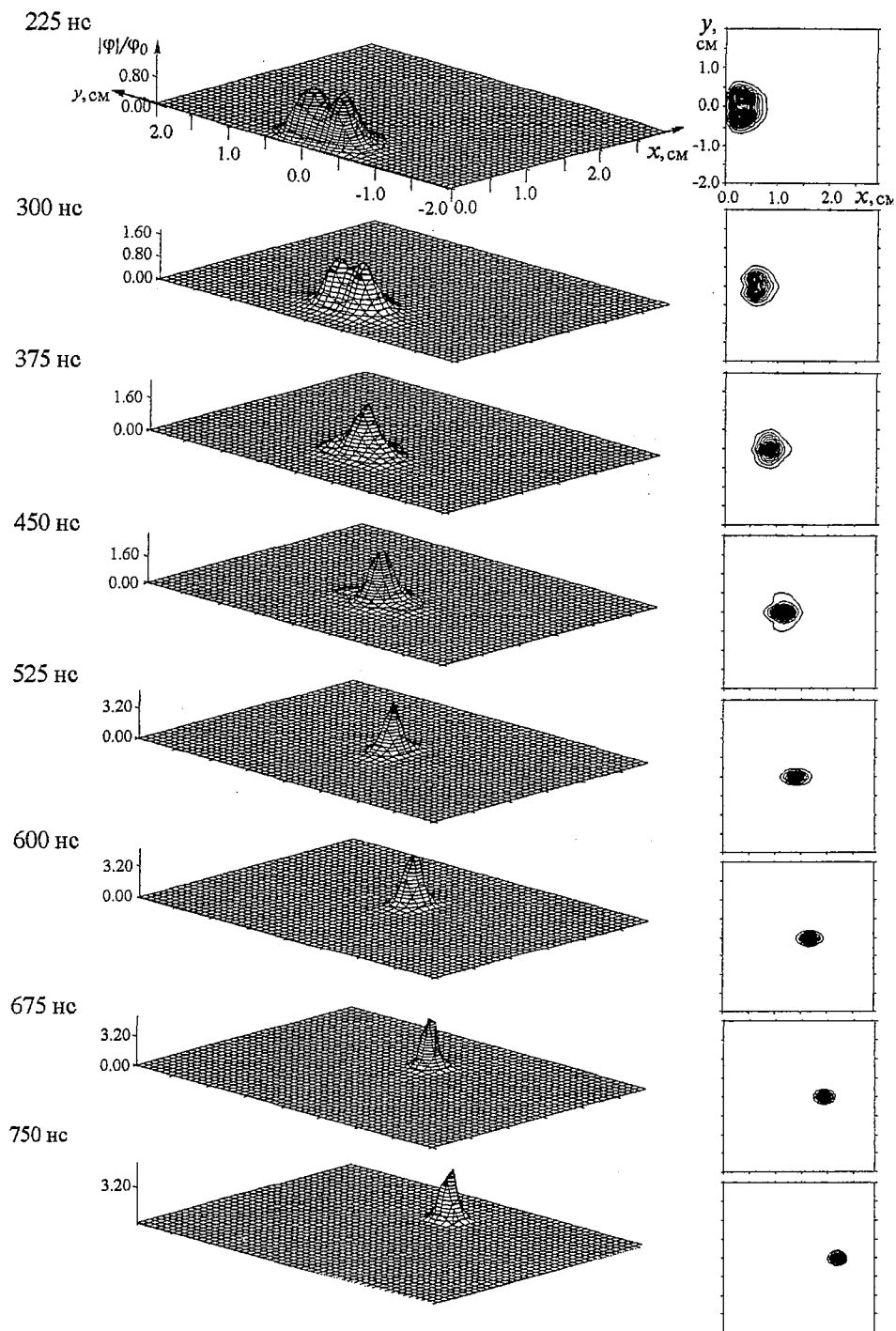


Рис. 8. Образование 2D-солитона огибающей ($T_{\text{имр}}=150$ нс, $a=1.0$ см, $\varphi_0=0.025$) ООМСВ для широкой антенны. Изображены профили импульса в разные моменты времени (левая колонка) и линии равного уровня этих импульсов в плоскости пленки (правая колонка)

одновременного сжатия импульса ООМСВ в поперечном и продольном направлениях, достоверность некоторых численных решений (4)-(6)⁸ может подвергаться сомнению. Действительно, как видно из рис. 6 (правая колонка при

⁸ Использовалась схема с равномерной сеткой по времени и пространству.

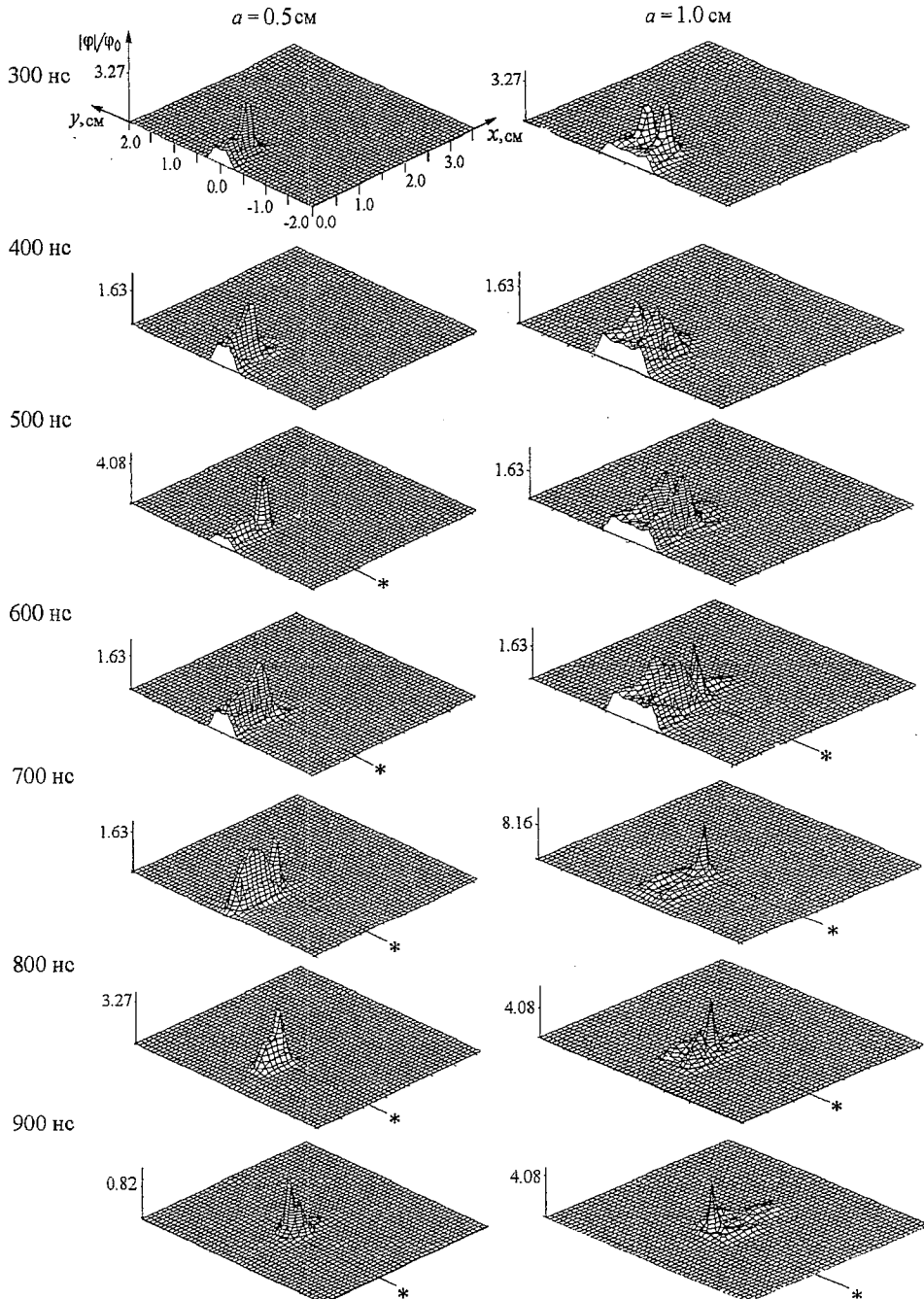


Рис. 9. Разрушение «длинных» 2D-импульсов ($T_{\text{имп}}=600$ нс, $\varphi_0=0.035$) ООМСВ при одновременном развитии процессов самовоздействия волны в продольном и поперечном направлениях

$t=225$ нс) и 7 (правая колонка при $t=300$ нс и левая колонка при $t=525$ нс), на некоторых этапах эволюции размеры D_x, D_y «сжатого» импульса или его фрагментов имеют величины порядка 2 мм при том, что шаги счета по пространственным переменным могли достигать, как это можно видеть из (13), величин порядка 0.1 мм. То есть процесс сжатия импульса в численном эксперименте сопровождается увеличением степени грубости получающихся решений. Кажется очевидным, что не исключены ситуации, когда в результате такого процесса не только будет страдать точность счета, но и окажутся нарушенными условия сходимости разностной схемы.

Аналогичные проблемы могут появиться и относительно временного поведения рассчитываемых решений, если скорость изменения анализируемой величины φ окажется слишком большой для выбранного шага счета программы по времени.

Поэтому для некоторых из приведенных выше решений (в частности для решений типа «бублик» и 2D-солитон) мы проводили контрольные прогоны программы с увеличенной в 2-3 раза частотой разностной сетки по всем трем

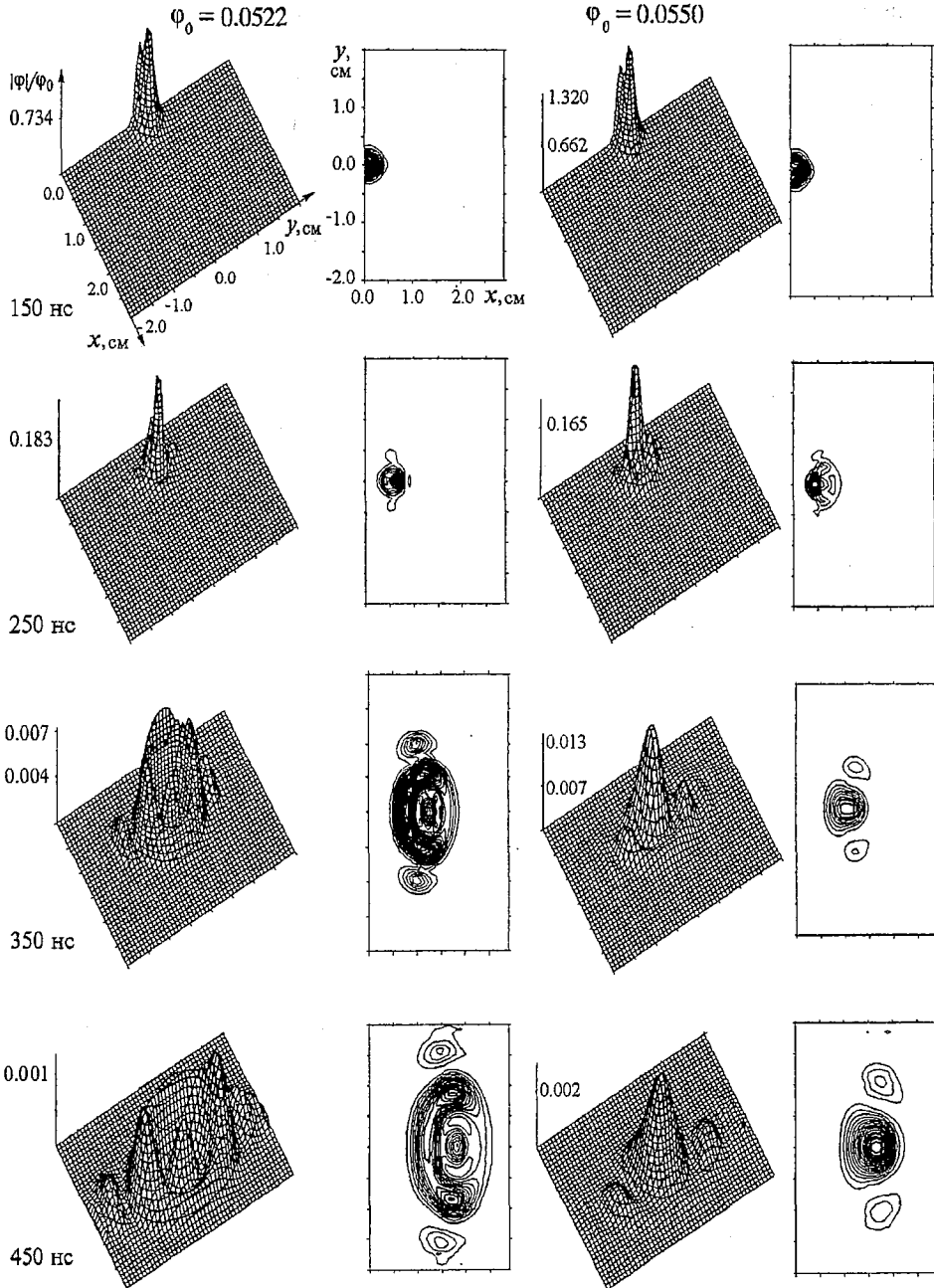


Рис. 10. Режимы трансформации 2D-импульсов ($T_{\text{imp}}=150$ нс, $a=0.5$ см, $\alpha_0=3.5 \cdot 10^6$ с $^{-1}$) ООМСВ с соизмеримыми поперечным и продольным размерами ($D_x \approx 0.52$ см, $D_y=0.5$ см) в среде с диссипацией, имеющие соответствующие аналоги в бездиссипативной среде, при наличии сильной дисперсии

направлениям (x, y, t) одновременно⁹. Последнее не приводило к качественному изменению результатов численного эксперимента, что дает определенную гарантию достоверности полученных численных решений НУШ второго порядка.

Необходимо, тем не менее, сказать, что уменьшение в процессе эволюции радиоимпульса ООМСВ его размеров D_x, D_y примерно до 2 мм уже не позволяет, учитывая реальные значения (ω, k) несущей, считать узким спектр пространственных и временных частот такого импульса. Поэтому, строго говоря, описанные нами режимы распространения 2D-импульсов ООМСВ нуждаются в уточнении путем сравнения полученных результатов с результатами расчетов в моделях, базирующихся на модифицированных НУШ более высоких порядков, содержащих члены с временной и нелинейной дисперсиями.

Диссипативная среда. В области сильной дисперсии при указанных выше параметрах задачи длины развития $L_{n1}^{Q_{xy}}$ процессов самовоздействия в x и y направлениях при $\varphi_0 > 2.5 \cdot 10^{-2}$ всегда меньше диссипативной длины $l_d = V_g / \alpha = 1$ см. Например, для $\varphi_0 = 5.0 \cdot 10^{-2}$ имеем $L_{n1}^{Q_{xy}} \approx 0.2$ см. Поэтому многие из эффектов, описанных выше, при надлежащем подборе уровня входной амплитуды φ_0 имеют свои аналоги в диссипативной среде.

На рис. 10 изображено поведение огибающей импульса длительностью 150 нс. Видно, что первый из представленных случаев эволюции импульсов сходен с режимом образования «бублика». Второй - практически не отличается от случая, описанного для среды без затухания и показанного на рис. 5 (левая колонка).

Режим образования 2D-солитона, естественно, невозможен в диссипативной среде, однако варьированием входной амплитуды можно добиться минимизации скорости дисперсионного и дифракционного распыливания импульса на конечном участке пленки. Реализация такой ситуации будет аналогом распространения 2D-солитона при наличии затухания.

Выводы

Таким образом, в работе проведено численное моделирование распространения 2D-импульсов обратных объемных магнитостатических волн при различных соотношениях коэффициентов дисперсии и дифракции

$$\beta_1 / \beta_t \ll 1 \text{ и } \beta_1 / \beta_t \sim 1$$

в бездиссипативной и диссипативной средах.

Показано, что в случае $\beta_1 / \beta_t \ll 1$ при уровне входной амплитуды, более чем в два раза превышающем порог самофокусировки, может происходить разбиение первоначального импульса на пару изолированных фрагментов, распространяющихся относительно друг друга в противоположных направлениях. Подобный эффект аналогичен разбиению волнового пучка на два самоподдерживающихся волноводных канала. Для амплитуд ниже указанного уровня на расстояниях от входной антенны, достаточных для проявления эффекта продольного самосжатия импульса, наблюдается «размывание» импульса по поперечным возмущениям. Этому эффекту нет аналога при непрерывном возбуждении дипольных магнитостатических волн антенной с конечной апертурой.

При $\beta_1 / \beta_t \sim 1$, как и в первом случае, конкурирующие процессы самовоздействия в большинстве случаев приводят к дроблению начальных импульсов,

⁹ В связи с большими затратами машинного времени такая процедура делалась выборочно.

но получающиеся в результате фрагменты импульсов могут взаимодействовать между собой, сливаясь и образуя новые структуры.

В частных случаях подбором входных параметров можно добиться образования

а) 2D солитонов,

б) импульсов, топологически отличных от начального (типа «бублик»).

«Длинные» импульсы с протяженностью, достаточной для формирования в продольном направлении многосолитонного режима, демонстрируют поведение, при котором местоположение максимума амплитуды сигнала не изменяется в течении промежутка времени, сопоставимого с длительностью импульса, что создает иллюзию остановки движения.

Показано, что в том случае, когда диссипативная длина много больше длины развития модуляционной неустойчивости, наличие затухания не приводит к исчезновению указанных выше результатов самовоздействия 2D-импульсов обратных объемных магнитостатических волн.

Работа поддержана грантами РФФИ № 01-02-17178, РАН № 28, CRDF № REC-006.

Библиографический список

1. Звездин А.К., Попков А.Ф. К нелинейной теории магнитостатических спиновых волн // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, № 2. С. 606.

2. Калиникос Б.А., Ковшиков Н.Г., Славин А.Н. Наблюдение спин-волновых солитонов в ферромагнитных пленках // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38, № 7. С. 343.

3. De Gasperis P., Marcelli R., Miccoli G. Magnetostatic soliton propagation at microwave frequency in magnetic garnet films // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59, № 4. P. 481.

4. Kalinikos B.A., Kovshikov N.G., Kolodin P.A., Slavin A.N. Observation of dipole-exchange spin wave soliton in tangentially magnetised ferromagnetic films // Solid State Commun. 1990. Vol. 74, № 9. P. 989.

5. Chen M., Tsankov M.A., Nash J.M., Patton C.E. «Backward volume wave solitons in a yttrium iron garnet film // Phys.Rev.B. 1994. Vol. 49. P.12773.

6. Tsankov M.A., Chen M., Patton C.E. Forward volume wave microwave envelope solitons in yttrium iron garnet films: Propagation, decay, and collision // J. Appl. Phys. 1994. Vol.76, № 7. P. 4274.

7. Ваишковский А.В., Стальмахов А.В., Шахназарян Д.Г. Формирование, отражение и преломление волновых пучков магнитостатических волн // Изв. вузов. Физика. 1988. № 11. С. 67.

8. Boyle J.W., Nikitov S.A., Boardman A.D., Booth J.G. Self-channeling and nonlinear beam shapping of magnetostatic waves in ferromagnetic films // Phys. Rev. B. 1996. Vol. 53, № 18. P. 12173.

9. Bauer M., Buttner O., Demokritov S.O., Hillebrands B., Grimalsky V., Rapoport Yu., Slavin A.N. Observation of spatiotemporal self-focusing of spin waves in magnetic films // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. P. 3769.

10. Bauer M., Mathieu C., Demokritov S.O., Hillebrands B., Kolodin P.A., Sure S., Dotsch H., Grimalski V., Rapoport Yu., Slavin A.N. Direct observation of two-dimensional self-focusing of spin waves in magnetic films // Phys. Rev. B. 1997. Vol. 56, № 14. P. 8483.

11. Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Самофокусировка ограниченных пучков обратных объемных магнитостатических волн в ферромагнитных пленках:

численный эксперимент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 6. С. 29.

12. Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Численное исследование явлений самовоздействия ограниченных пучков обратных объемных магнитостатических волн в ферромагнитных пленках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т.7, № 2-3. С.17.

13. Buttner O., Bauer M., Demokritov S.O., and Hillebrands B., Kostylev M.P., Kalinikos B.A., Slavin A.N. Collisions of spin wave envelope solitons and self-focused spin wave packets in yttrium iron garnet films // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82, № 21. P. 4320.

14. Сухоруков А.П., Чурилова А.В. Влияние декомпрессии импульса на самофокусировку и распространение пространственного солитона в средах с кубической нелинейностью // Изв. РАН. Сер. Физика. 1997. Т. 61, № 12. С. 2359.

15. Damon R.W., Eshbach J.R. Magnetostatic modes of a ferromagnetic slab // J. Phys. Chem. Sol. 1961. Vol. 19, № 3/4. P. 308.

16. Веселов А.А., Никитов Д.С., Филимонов Ю.А. Поверхностные спиновые волны в ферромагнитных пленках // Радиотехника и электроника. 1977. Т. 42, № 9. С. 1097.

17. Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Волновые пучки обратных объемных магнитостатических волн при одновременном развитии процессов самомодуляции и самофокусировки // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т.9, № 4-5. С. 107.

ИРЭ РАН, Саратовское отделение

Поступила в редакцию 12.02.2002
после доработки 24.06.2002

SELFACTION OF 2D-PULSES OF BACKWARD VOLUME MAGNETOSTATIC WAVES UNDER PROPAGATION IN FERROMAGNETIC FILMS

G.M. Dudko, Yu.A. Filimonov

In the framework of the nonlinear Schrödinger equation the propagation of the 2D pulses of backward volume magnetostatic waves (BVMSW) with the dispersion β_1 and diffraction β_2 coefficients ratios inherent in pure dipole $\beta_1/\beta_2 \ll 1$ and dipole-exchange $\beta_1/\beta_2 \approx 1$ waves was investigated. It is shown that with the wave amplitude growing at the input transducer the 2D pulses of dipole BVMSWs can split into a pair of isolated portions propagating in the opposite directions with respect to each other. As $\beta_1/\beta_2 \approx 1$, the increase of the 2D pulses amplitude also results in its splitting, but the obtained pulse portions can interact and generate structures that are topologically different from an input pulse. It is demonstrated that choosing the width of the input antenna, the duration and amplitude of the input pulse may assist in generating a 2D soliton of the BVMSW envelope and in observing an effect looks like a «pulse stop» when the position of the signal amplitude maximum in the film is invariable during a time period comparable with the pulse duration.



Дудко Галина Михайловна - родилась в 1961 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (1983), кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории магнитоэлектроники СВЧ Саратовского отделения ИРЭ РАН. Область научных интересов - волновые явления в магнитных пленках. E-mail:dugal@sfire.san.ru



Филимонов Юрий Александрович - родился в 1955 году. Окончил Московский физико-технический институт (1979), кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией магнитоэлектроники СВЧ Саратовского отделения ИРЭ РАН. Область научных интересов - волновые явления в магнитных пленках. E-mail:fil@sfire.san.ru

Г. Дудко *Ю. Филимонов*



ПАРАДОКС ПЭНЛЕВЕ И АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРИ КУЛОНОВСКОМ ТРЕНИИ

Ю.И. Неймарк, В.Н. Смирнова

Обнаруживается, что в механических системах с парадоксом Пэнлеве возможны автоколебания, вызываемые кулоновским трением без падающего участка характеристики трения.

Введение

В самом конце XIX века французский механик П.Пэнлеве, читая парижским студентам учебный курс о трении и стремясь к общей теории, обнаружил, что в некоторых простых системах уравнения движения, составляемые по общим правилам механики, неразрешимы. Он опубликовал книгу о трении [1], где привел и эти удивительные примеры, что через десять лет вызвало бурную дискуссию с участием выдающихся ученых того времени: Р.Мизеса, Л.Прандтля, Ф.Клейна, Г.Гамеля, Л.Лекорню и др. и, конечно, самого П.Пэнлеве [1]. Обнаруженный П.Пэнлеве казус получил название парадокса Пэнлеве. Он и сегодня, спустя сто лет, не имеет решения, позволяющего с уверенностью сказать, как поведут себя очень простые механические системы с кулоновским трением. Невозможность точного предсказания вызвана тем, что в системах с парадоксом Пэнлеве обнаруживается существенная зависимость их поведения от весьма непривычных в таких задачах малых и трудно определяемых параметров и закономерностей [2].

Настоящая работа имеет целью ознакомить читателя с существом парадокса Пэнлеве и показать, что он влечет неожиданную и неизвестную ранее возможность возникновения неустойчивости и автоколебаний, несмотря на то, что характеристика трения не имеет падающего участка. Возникающие автоколебания в естественном предельном описании являются разрывными, или, по существующей математической терминологии [3], контрастными структурами со скачками и всплесками, которые с физической точки зрения можно назвать «внутренними» ударами. Разрывные колебания в виде периодических контрастных структур возникают потому, что математическая модель систем с парадоксом Пэнлеве является сингулярно возмущенной и притом кусочно-гладкой системой дифференциальных уравнений, что потребовало специального математического исследования [4].

1. Примеры систем с парадоксом Пэнлеве и уточнение их уравнений движения

На рис. 1 приведены известные примеры механических систем с парадоксом Пэнлеве: *а* - система Пэнлеве - Клейна о движении стержня между параллельными направляющими L_1 и L_2 , из которых одна (L_1) гладкая, а другая (L_2) шероховатая, под действием постоянной силы F_0 ; *б* - тормозная колодка, прижимаемая с силой F_0 к колесу, вращаемому моментом M ; *в* - круг (цилиндр), вращаемый моментом M и вжимаемый в угол силой F_0 , одна из сторон которого шероховатая, а другая гладкая. Уравнения движения во всех трех случаях приводятся к одному и тому же виду [2].

$$\dot{V} = 1 - F, \quad F = |N| \operatorname{sgn} V, \quad \chi N - \lambda + F = 0, \quad (1)$$

где V - линейная либо угловая скорость, F и N - силы трения и нормального давления, χ и λ - параметры ($\chi > 0, -1 \leq \lambda \leq 1$). Конкретный смысл параметров χ и λ в каждой из систем свой и следует из рассмотрения этих систем в [2].

Как динамическая система, уравнения (1) содержат одну фазовую

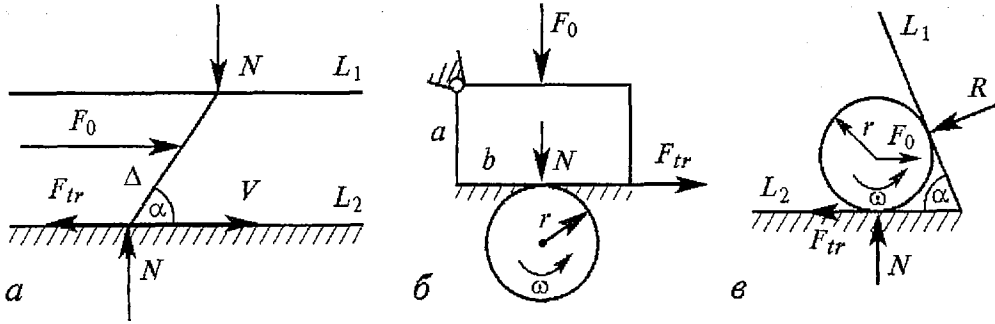


Рис. 1

переменную V . При заданном начальном условии $V=V_0$ для получения их решения $V(t), F(t), N(t)$ необходимо из двух последних уравнений (1) найти F . Но именно это при $\chi < 1$ невозможно: решения может не быть или их оказывается два. Именно, в случае $\chi < 1$ уравнения

$$F = |N| \operatorname{sgn} V, \quad \chi N - \lambda + F = 0 \quad (2)$$

при $\operatorname{sgn} V = \operatorname{sgn} \lambda$ имеют два решения, а в противном случае его нет. Это непосредственно видно, если на плоскости переменных N и F , (рис. 2), нанести графики функций, отвечающие уравнениям (2). Здесь ломаные линии 1 и $1'$ отвечают первому из уравнений (2) соответственно при $V > 0$ и $V < 0$, а прямая 2 соответствует второму уравнению в (2) и предполагает $0 < \chi < 1, \lambda > 0$. Согласно рис. 2 в этом случае при $V > 0$ решений два, а при $V < 0$ их нет. При $0 < \chi < 1$ и $\lambda < 0$ ситуация аналогичная. В этой невозможности найти нужное единственное решение системы (2) и состоит парадокс Пэнлеве. Он указывает на то, что классическое описание (1) при $0 < \chi < 1$ дефектно.

Уже на упомянутой дискуссии было высказано мнение, что необходимо учесть реальную упругость твердых тел. Различные способы такого учета применительно к задачам Пэнлеве -

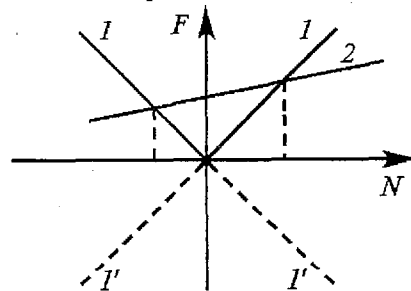
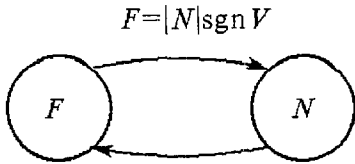


Рис. 2



$$\chi N - \lambda + F = 0$$

Рис. 3

Клейна делались во многих работах, они действительно избавляли от парадокса, но приводили к разным результатам [5-9]. В каком-то смысле они делались вслепую, без понимания истинной причины парадокса Пэнлеве, хотя тот или иной способ учета упругости приводил к устранению парадокса Пэнлеве. А причина была, и ее выяснение требовало

нового понимания силового взаимодействия в случае сухого трения, более полной трактовки закона Ньютона о действии и противодействии, требовало обнаружения направленности действия. Понимания, что в законе Кулона нормальная сила N , вызывающая силу трения F , имеет направленный характер от N к F и реализуется не за счет силы N , а некоторого стороннего источника энергии. Понимание этого давало новую трактовку соотношениям (2) как замкнутого цикла направленных воздействий от N к F (первое соотношение в (2)) и от F к N (второе соотношение в (2)) [2]. Этот направленный цикл взаимодействий изображен на рис. 3. При $\chi < 1$ он влечет парадокс Пэнлеве, потому что в этом цикле взаимодействия мгновенны и его коэффициент усиления, равный $1/\chi$, при $\chi < 1$ больше единицы. В реальной же системе парадоксальности нет при всех $\chi > 0$, потому что связи от N к F и от F к N не мгновенные в силу фактической вязкоупругой податливости твердых тел и связей между ними.

Такое понимание парадокса Пэнлеве позволяет предложить простейший способ учета вязкоупругих инерционных податливостей реальных твердых тел и связей между ними в виде временных релаксационных задержек, записав уравнения (1) в виде

$$V = 1 - F, \quad \tau_1 \dot{F} + F = |N| \operatorname{sgn} V, \quad \tau_2 \dot{N} + N = \chi^{-1} (\lambda - F), \quad (3)$$

где $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$ - малые временные задержки.

Введение этих задержек и запись сингулярных уравнений (1) в виде сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений (3) устраняет парадокс Пэнлеве, но теперь вместо системы (1) первого порядка появляется система третьего порядка, и ее изучение далеко не просто. Можно исследование упростить, предполагая τ_1 и τ_2 стремящимися к нулю, поскольку они на самом деле малы, но при этом, как оказывается, результат зависит от отношения τ_1/τ_2 , и если его не фиксировать, то вообще никакого предельного поведения у системы (3) нет [10].

Конечно, модель (3) не точна, она феноменологическая, и реальный характер задержек может быть сложнее, но все же это, пусть и грубое, но уточнение парадоксальных уравнений (1), и оно по меньшей мере позволяет понять, что же может происходить в системе с парадоксом Пэнлеве. Отметим, что некоторые модельные способы учета вязкоупругих свойств твердых тел приводят к похожим уравнениям и результатам [11, 12]. Но перед этими конкретными способами уточнения уравнений (1) у уравнений (3) есть определенное преимущество: уравнения (3) более общие и содержат два существенных малых параметра τ_1 и τ_2 , а модельные конструкции учитывают только один из них. Это, в частности, объясняет, почему конкретные уточнения приводят к разным результатам.

2. Парадокс Пэнлеве и автоколебания

Перейдем ко второй части работы. За основу возьмем несколько более общую, чем (3), систему уравнений вида

$$\dot{V} = 1 - F, \quad \tau_1 \dot{F} + F = |N| \operatorname{sgn} V + hV, \quad \tau_2 \dot{N} + N = \chi^{-1}(\lambda - F), \quad (4)$$

в которой помимо сухого трения учтено еще и вязкое, что эквивалентно сухому трению с линейно возрастающей характеристикой трения движения.

Хорошо известно, что сухое трение в механических системах может приводить к неустойчивости и автоколебаниям, но для этого нужно, чтобы характеристика трения имела падающий участок. Как оказывается, последнее не обязательно, когда механическая система с сухим трением парадоксальна по Пэнлеве. В парадоксальной системе неустойчивость и автоколебания возможны из-за наличия в ней цикла направленных воздействий с подкачкой энергии, и эту его роль не только не может нарушить добавок вязкого трения, но в некотором смысле ее усиливает.

В изложении этого нового факта состоит цель дальнейшего. При мелких, но конечных задержках τ_1 и τ_2 будут обнаружены неустойчивость и рождение автоколебаний в соответствии с бифуркацией Андронова. При τ_1 и τ_2 , стремящихся к нулю, автоколебания принимают вид контрастных структур, то есть сопровождаются разрывными скачками скорости V («внутренние» удары), при которых силы F и N обращаются в бесконечность.

Равновесия системы (4) определяются уравнениями

$$\lambda - F = 0, \quad \chi N - \lambda + F = 0, \quad F = |N| \operatorname{sgn} V + hV. \quad (5)$$

Из них следует, учитывая $\lambda \leq 1$, что равновесие имеется только при $h > 0$, $\chi > 1 - \lambda$, $V > 0$ и для него

$$F^* = 1, \quad N^* = \chi^{-1}(\lambda - 1), \quad V^* = h^{-1}[1 - \chi^{-1}(1 - \lambda)]. \quad (6)$$

Согласно (4) характеристическое уравнение имеет вид

$$\tau_1 \tau_2 z^3 + (\tau_1 + \tau_2) z^2 + (1 + \sigma \chi^{-1} + h \tau_2) z + h = 0,$$

где $\sigma = \operatorname{sgn} N^* < 0$, и единственное условие устойчивости состоит в выполнении неравенства

$$(\tau_1 + \tau_2)(1 + \sigma \chi^{-1} + h \tau_2) - \tau_1 \tau_2 h > 0,$$

которое при исчезающих малых положительных τ_1 и τ_2 сводится к единственному требованию $\chi > 1$. Таким образом, единственное равновесие (6) существует при $\chi > 1 - \lambda$, оно устойчиво при $\chi > 1$, неустойчиво при $\chi < 1$ и теряет устойчивость через фокус.

Компьютерное исследование показывает, что при потере устойчивости рождается устойчивое периодическое движение, возникают автоколебания. При уменьшении τ_1 и τ_2 этот предельный цикл вытягивается, частично удаляясь в бесконечность, и приобретает вид контрастной структуры со скачками или всплесками, (рис. 4, а, б). Описанное происходит в области параметров $1 > \chi > 1 - \lambda$, $\lambda > 0$, $h > 0$.

В другой области параметров, $\chi < 1 - \lambda$, $\lambda > 0$, $h > 0$, при τ_1 и τ_2 , стремящихся к нулю, также возникают автоколебания в виде периодических контрастных структур (рис. 4, в). Механизм их возникновения отличен от приведенного выше, подробно описан в [10,12] и состоит в наличии в рассматриваемой сингулярно возмущенной системе (4) такой структуры фазового пространства, при которой:

1) существуют по крайней мере два многообразия медленных движений, из которых только одно устойчиво;

2) существует область начальных значений, при которых возможен уход фазовой траектории в бесконечность при $\tau_1 \rightarrow 0$, $\tau_2 \rightarrow 0$;

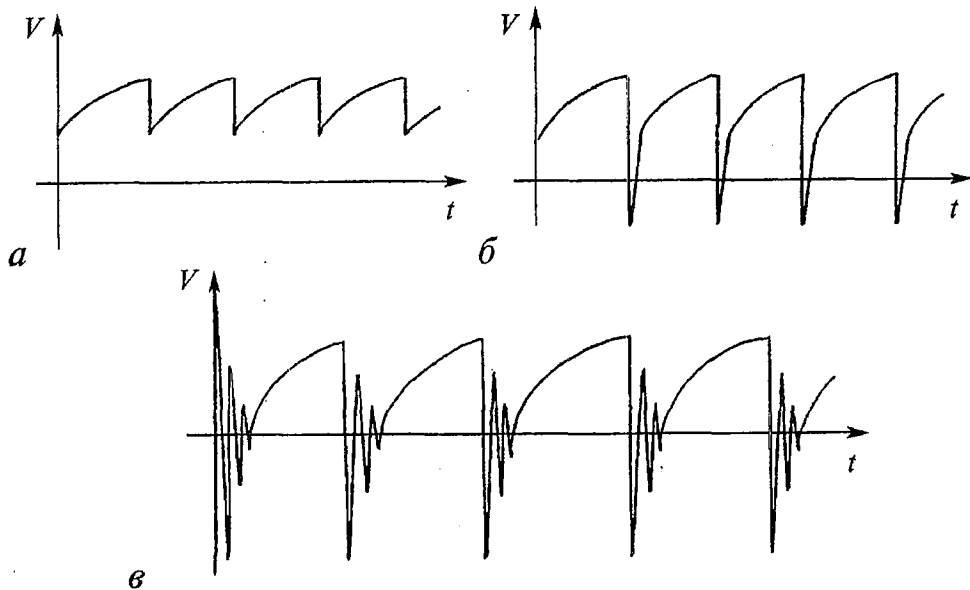


Рис. 4

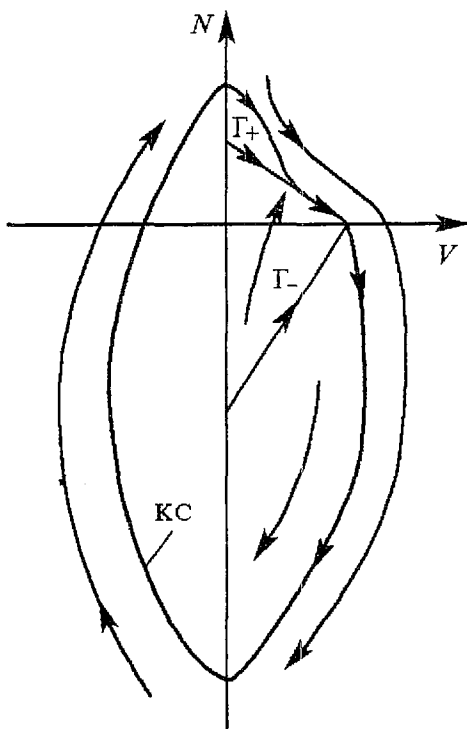


Рис. 5

3) существует особенность структуры, которая обеспечивает возврат фазовых траекторий из бесконечности;

4) существует механизм срыва фазовой точки с устойчивого многообразия.

В более простом случае $\tau_2=0$, когда система (4) становится двумерной, типичный пример возникновения автоколебаний типа контрастных структур в результате выполнения условий «1» - «4» приведен на рис. 5. Здесь Γ_+ и Γ_- - устойчивое и неустойчивое многообразия медленных движений, определяемые вырожденными, $\tau_1=\tau_2=0$, уравнениями (4) при $\lambda>0$, $\chi<1-\lambda$, $h>0$, КС - периодическое движение типа контрастной структуры со всплесками при $\tau_1 \rightarrow 0$.

При $h=0$ периодических контрастных структур при стремлении τ_1 и τ_2 к нулю не возникает, но при конечных τ_1 и τ_2 имеются автоколебания, которые при τ_1 и τ_2 , стремящихся к нулю, неограниченно увеличивают свою частоту.

При этом амплитуда колебаний скорости V стремится к нулю, а амплитуды колебаний сил F и N остаются конечными.

Итак, сухое кулоновское трение само по себе или в сочетании с вязким трением ($h>0$) при наличии парадокса Пэнлве может вызвать автоколебания,

Заключение

Итак, сухое кулоновское трение само по себе или в сочетании с вязким трением ($h>0$) при наличии парадокса Пэнлве может вызвать автоколебания,

которые в случае $h > 0$ при увеличении жесткости входящих в систему твердых тел и связей между ними переходят в разнообразные периодические контрастные структуры - разрывные периодические автоколебания. Их наличие обусловлено замкнутым циклом направленных связей со сторонним источником энергии и подобно тому, что имеет место в релейных системах автоматического регулирования с реле, имеющим такую же характеристику, как кулоновское трение. Подчеркнем, что средняя скорость автоколебаний всегда положительна, и внешняя сила F_0 или момент M совершают на каждом периоде определенную работу. Специфика этих автоколебаний в том, что они могут быть близки к разрывным колебаниям и иметь вид разнообразных контрастных структур со скачками и всплесками. Особенность систем с парадоксом Пэнлеве еще и в том, что их поведение существенно зависит от малых параметров и соотношений между ними. В рассматриваемых моделях (3) и (4) малые параметры - это τ_1 и τ_2 , а соотношение между ними - это отношение τ_1/τ_2 .

Работа поддержана Министерством образования России, грант Е00-1-109

Библиографический список

1. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954.
2. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. Идеализация, математическое моделирование и парадокс Пэнлеве // Вестник Нижегородского государственного университета. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. Вып.2. С.536.
3. Васильева А.Б. О контрастных структурах в системах сингулярно возмущенных уравнений // ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34, № 8-9. С. 1168.
4. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. Сингулярно возмущенные задачи и парадокс Пэнлеве // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1.
5. Бутенин Н.В. Рассмотрение «вырожденных» динамических систем с помощью гипотезы «скачка» // ПММ. 1948. Т. 12, № 1. С. 3.
6. Ле Суан Ань. Парадоксы Пэнлеве и законы движения механических систем с кулоновским трением // ПММ. 1990. № 54, вып.4. С. 520.
7. Фуфаев Н.А. Динамика системы в примере Пэнлеве - Клейна: о парадоксе Пэнлеве // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 48.
8. Неймарк Ю.И. Еще раз о парадоксе Пэнлеве // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 17.
9. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Парадоксы Пэнлеве и динамика тормозной колодки // ПММ. 1995. Т. 59, вып.3. С. 365.
10. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. Контрастные структуры, предельная динамика и парадокс Пэнлеве // Дифференциальные уравнения. 2001. Т.37, № 11. С. 3.
11. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. О влиянии вязкого трения на динамику системы Пэнлеве - Клейна // Тезисы докладов V Международной конференции «Нелинейные колебания механических систем». Н.Новгород, 1999. С.165.
12. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. К столетию проблемы парадокса Пэнлеве // Вестник Нижегородского государственного университета. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. Вып.2. С.3.

*Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
Нижегородского государственного университета*

Поступила в редакцию 14.06.2001

PARADOX OF PAINLEVE AND AUTO-OSCILLATION WITH COULOMB FRICTION

Yu.I. Neimark; V.N. Smirnova

There was discovered the possibility of auto-oscillation in mechanical systems with Painleve paradox in spite of the friction characteristic incident section absense.



Неймарк Юрий Исаакович - доктор технических наук, профессор ННГУ, академик РАЕН, Соросовский профессор, член национального комитета по теоретической и прикладной механике, лауреат премий А.А. Андропова и Н. Винера. Автор 8 монографий и более 400 работ по теории колебаний, теоретической механике, теории управления и др.



Смирнова Вера Николаевна родилась в Горьком (1943), старший научный сотрудник отдела динамики систем и процессов управления НИИ прикладной математики и кибернетики, ННГУ. Окончила факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского госуниверситета (1965). Кандидит физико-математических наук (1975). Область научных интересов: вычислительная математика, математическое моделирование. Автор более 50 научных работ.



ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ДЕФЕКТЫ В ДОРОЖКЕ КАРМАНА ЗА НАГРЕТЫМ ЦИЛИНДРОМ

А.Б. Езерский, П.Парантуан

Экспериментально обнаружено, что нагрев цилиндра, обтекаемого потоком воздуха, вызывает возникновение фазовой и амплитудной модуляции в ламинарной дорожке Кармана за круглым цилиндром. Показано, что увеличение фазовой модуляции вниз по потоку приводит к появлению топологических дефектов в вихревой дорожке. Исследованы статистические свойства таких дефектов.

Введение

Если в бесконечно протяженной роликовой структуре в одной из полуплоскостей на один пространственный период больше, чем в другой, то говорят, что в такой системе существует топологический дефект. Такой дефект - нарушение совершенного порядка - является двумерным аналогом краевой дислокации кристаллических решеток, которая была постулирована Бюргерсом в 20-х годах прошлого века для объяснения пластической деформации твердых тел. В твердых телах, в отличие от структур, роль дополнительного периода играет слой атомов.

Динамика топологических дефектов в пространственно-периодических структурах, возникающих при термоконвекции [1,2], параметрическом возбуждении волн [3], в системах с двойной диффузией [4], в лазерных пучках [5] и т.д., интенсивно исследуется как экспериментально, так и теоретически. Выяснено, что топологические дефекты ответственны за отбор волновых чисел структур, возникающих в неравновесных системах; их можно рассматривать как элементарные частицы, взаимодействие которых приводит к возникновению связанных состояний типа пента-гептадефектов, доменных стенок и т.д., ансамбль взаимодействующих дефектов может быть образом пространственно-временного хаоса (см. [6] и цитируемую там литературу). Исследование топологических дефектов проводилось, в основном, для структур, возникающих в неравновесных системах, которые обладают азимутальной симметрией (слой жидкости, равномерно подогреваемый снизу [1], жидкий кристалл, находящийся в осциллирующем по времени электрическом поле, амплитуда которого однородна в пространстве [7] и т.д.). Между тем, впервые дефекты как нарушения порядка в периодических структурах были описаны для потоковой системы - вихревой

дорожки Кармана за круглым цилиндром - в работе Блур [8]. Переход от регулярной вихревой дорожки к турбулентной при числах Рейнольдса $160 < Re < 260$ ($Re = Ud/\nu$, U - скорость потока, d - диаметр цилиндра, ν - кинематическая вязкость газа) описывался как процесс возникновения дефектов. В дальнейшем структура отдельного дефекта, искусственно создаваемого в дорожке, исследовалась в работах [9] при $Re = 140$. При таких числах Рейнольдса вихревая дорожка устойчива и самопроизвольно дефекты не возникают. Поэтому в [9] дефекты образовались за счет того, что обтекаемый потоком цилиндр имел кольцевое утолщение.

В данной работе мы проводим исследование нарушений порядка в вихревой дорожке при числах Рейнольдса порядка 60. При этом в однородном по температуре потоке срыв вихрей происходит регулярно, а образующаяся вихревая структура обладает большим запасом устойчивости и дефекты не возникают. Если обтекаемый потоком цилиндр нагревать, то характеристики дорожки меняются. Как показано в [10, 11], нагрев может приводить к изменению частоты следования вихрей. Кроме этого может возникать изгибная неустойчивость вихрей, приводящая, как мы покажем в данной работе, к нарушениям порядка в периодической структуре дорожки в виде топологических дефектов. Если изменение частоты срыва вихрей под действием нагрева исследовано достаточно подробно [10-14], то изучение эффектов, которые возникают в результате возбуждения изгибных колебаний вихрей и увеличения амплитуды этих колебаний вниз по потоку, не проводилось. Именно такая задача изучается в данной работе.

1. Экспериментальные установки и аппаратура

Эксперименты были выполнены в воздушном потоке на двух экспериментальных установках. Первая серия экспериментов была проведена в аэродинамической трубе закрытого типа. Нагретый цилиндр помещался в рабочую часть трубы с поперечным сечением 1.00×0.8 м×м. Во второй серии экспериментов цилиндр помещался в потенциальное ядро воздушной струи, имевшей поперечное сечение 0.15×0.015 м×м. Турбулентные пульсации скорости потока в аэродинамической трубе и в потенциальном ядре струи составляли приблизительно 0.5 % от скорости потока U . Средняя скорость потока в трубе была фиксирована $U = 3.90$ м/с, а скорость истечения струи можно было менять в диапазоне $0 \dots 6$ м/с. Цилиндр представлял собой нихромовую проволоку диаметром $d = 0.025$ см. В

обоих случаях проволока была натянута горизонтально. Натяжение проволоки $|F| = 10 \dots 15$ Н. В аэродинамической трубе длина проволоки L составляла $L = 0.97$ м, а для струи $L = 0.14$ м. Для нагрева использовался постоянный электрический ток. Чтобы устранить изменение натяжения проволоки вследствие температурного расширения, использовался блок, как показано на рис. 1.

Специально сконструированный высокочувствительный мост [15] использовался для изучения температурных пульсаций в следе за цилиндром. В отсутствие нагрева измерения пульсаций скорости проводились стандартной термоанемометрической аппаратурой фир-

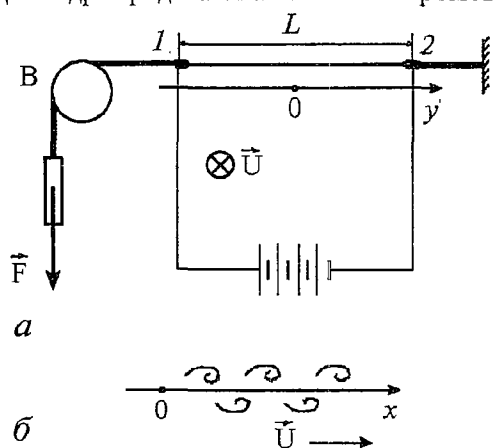


Рис. 1. Схема эксперимента. *а* - вид вдоль потока, *б* - вид поперек потока. Обтекаемый потоком цилиндр располагается в точке $x=0$

мы DISA. Для датчиков скорости и для датчиков температуры использовалась проволока (сплав платины и иридия) диаметром 1.2 мкм. Подчеркнем, что с помощью используемой в эксперименте аппаратуры нельзя было корректно проводить одновременное измерение пульсаций температуры и пульсаций скорости. Датчик термоанемометра фиксировал бы «смесь», вызванную воздействием на нагретую проволочку полей скорости и температуры.

Обработка данных проводилась с помощью двухканального анализатора спектра FFT 1201, который позволял получать корреляционные функции двух сигналов, их спектры и взаимные спектры в реальном времени. Кроме этого, использовался аналого-цифровой преобразователь сигналов, VUKO MC-CP, соединенный с PC Macintosh II, который позволял записывать сигнал в память компьютера для последующей обработки.

2. Результаты экспериментов

Увеличение температуры обтекаемого цилиндра, как это уже было продемонстрировано ранее [10, 11], приводило к уменьшению частоты следования вихрей f и, в конечном итоге, к подавлению образования вихревой дорожки Кармана. То же самое наблюдается, если уменьшать число Рейнольдса: безразмерная частота срыва вихрей - число Струхала $Sh=fd/U$ уменьшается. В эксперименте для этого можно, например, уменьшать скорость набегающего потока. Для того чтобы характеризовать воздействие температуры на срыв вихрей, было введено так называемое эффективное число Рейнольдса [10, 11]. Так как кинематическая вязкость газа возрастает с увеличением температуры, то нагрев среды на ΔT должен приводить к уменьшению числа Рейнольдса $Re=Re(v(\Delta T))$. В эксперименте нагревался только пограничный слой цилиндра, поэтому воздействие нагрева было меньше, чем при нагреве всего газа $Re_{eff}=Re(v(\Delta T_{eff}))$, $\Delta T_{eff} = \eta\Delta T$, $\eta=0.22...0.26$. Введение эффективного числа Рейнольдса фактически предполагает, что никаких качественных изменений вихревая дорожка не претерпевает. Это, однако, наблюдается лишь при малых температурах нагрева цилиндра. Для демонстрации этого утверждения мы представили на рис. 2 спектры пульсаций скорости и температуры для различных чисел Рейнольдса и мощностей нагрева. Для выявления отличий мы нормировали спектры пульсаций так, чтобы пики на частоте Струхала имели одинаковую высоту. Эффективное число Рейнольдса для случая нагретого цилиндра было рассчитано по результатам работ [10, 11]. Сравнивая спектры, приведенные на рис. 2, можно заключить, что ширина спектра пульсаций температуры (нижний ряд) увеличивается с мощностью нагрева - уменьшением эффективного числа Рейнольдса, а спектр пульсаций скорости в отсутствие нагрева (верхний ряд) имеет приблизительно одинаковую ширину при уменьшении числа Рейнольдса вплоть до подавления вихреобразования. В определенном интервале мощностей нагрева спектр пульсаций температуры существенно несимметричен относительно частоты, соответствующей максимальной спектральной мощности. Отметим, что при мощностях нагрева, несколько меньших, чем те, которые соответствуют подавлению вихревой дорожки, спектр пульсаций температуры симметричен. Чтобы понять причины, по которым происходит изменение формы спектральной линии, мы провели детальный анализ временных рядов пульсаций температуры. Для этого мы выделили амплитуду и фазу сигнала при помощи преобразования Гильберта. Сигнал (рис. 3) с датчика температуры может быть представлен как сумма

$$T(t) - T_0 = T_{if}(t) + (A(t)\exp[i(\Omega t + \Phi(t))] + c.c.) + h.o.h.,$$

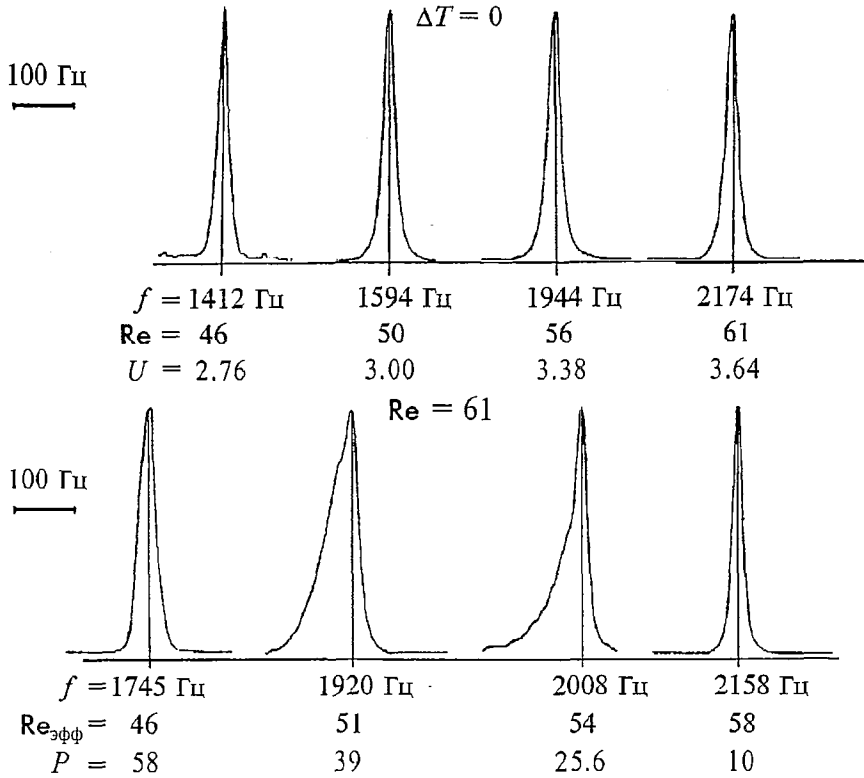


Рис. 2. Изменение спектра пульсаций скорости в отсутствие нагрева - верхний ряд ($P=0, x/d=20$) при уменьшении скорости потока $U, \text{ м/с}$; подавление образования вихревой дорожки происходит при $U=2.73 \text{ м/с}$. Изменение спектра температурных пульсаций - нижний ряд (скорость потока $U=3.64 \text{ м/с}, x/d=20$) при увеличении мощности нагрева $P, \text{ Вт/м}$; подавление образования вихревой дорожки происходит при $P=63 \text{ Вт/м}$

где $T_{\text{lf}}(t)$ - низкочастотные пульсации температуры; T_0 - опорный уровень, который не определялся в эксперименте; $h.o.h.$ - гармоники, кратные частоте срыва вихрей - частоте Струхала. После фильтрации низкочастотных и высокочастотных компонент рассчитывалось преобразование Гильберта $b(t)$ от $a(t)=T(t)-T_0-(T_{\text{lf}}(t)+h.o.h.)$

$$b(t) = 1/\pi \int [a(\tau)/(t-\tau)]d\tau$$

и выделялась амплитуда $A(t)$ и фаза сигнала $\Phi(t)$

$$A(t) = [a^2(t) + b^2(t)]^{1/2}, \quad \Omega t + \Phi(t) = \arg(a(t)/b(t)).$$

Результаты вычисления амплитуды и фазы для различной мощности нагрева представлены на рис. 4. Временной интервал на этом рисунке соответствует времени приблизительно в 10^4 периодов следования вихрей. Плавные изменения фазы сигнала, которые наблюдаются во всех случаях, обусловлены случайным изменением средней скорости потока. Это медленный процесс с характерной частотой 3...5 Гц (рис. 4, а). При увеличении мощности нагрева возникает амплитудная и фазовая модуляция с характерным временем, существенно меньшим, чем время изменения среднего течения (рис. 4, б, в). Подчеркнем, что амплитудная модуляция представляет собой импульсы затемнения, которые характеризуются тем, что на некотором временном интервале амплитуда уменьшается до нуля. Фазовая модуляция - уменьшение фазы сигнала на масштабе импульсов затемнения. Медленное изменение фазы может приводить и к ее

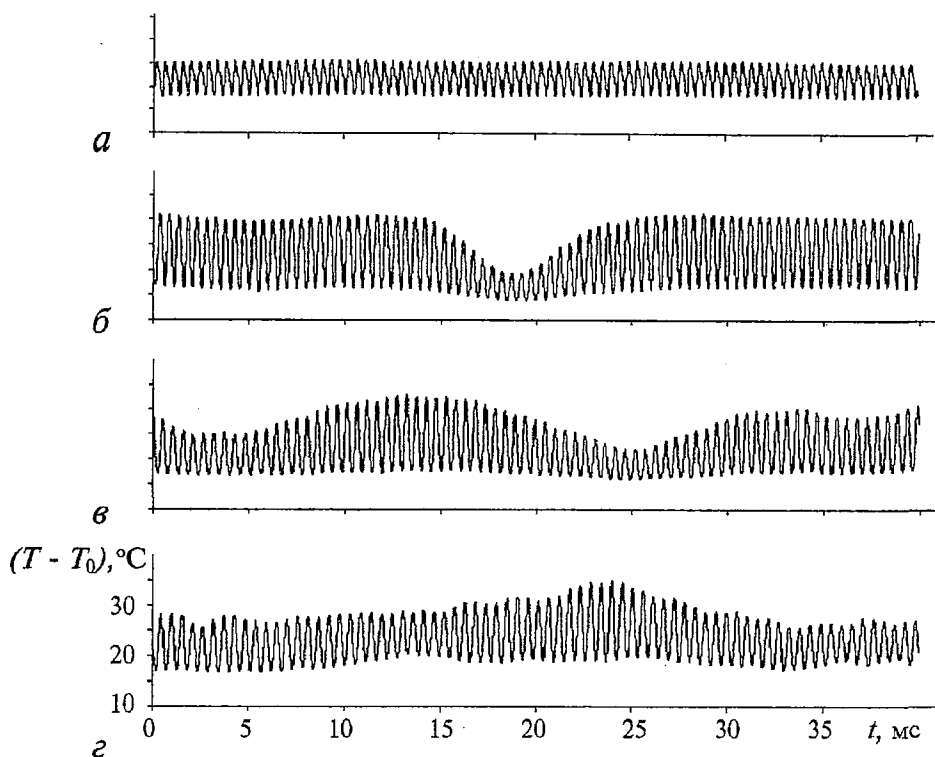


Рис. 3. Временные ряды температурных пульсаций при $U=3.90$ м/с, $x/d=20$ для P , Вт/м: а - 38; б - 57; в - 67; г - 80

увеличению и к уменьшению, тогда как на масштабе импульса затемнения фаза уменьшается. Для больших мощностей нагрева такая фазовая модуляция подавлялась и наблюдалась только амплитудная модуляция пульсаций температуры (рис.4, г). Мы подробно изучили характеристики импульсов затемнения, в которых индекс модуляции составлял порядка 100 % (рис.5, а). Фаза и амплитуда огибающей такого импульса показана на рис. 5, б, в. Импульс затемнения сопровождается низкочастотными полем, показанным на рис. 5, г. Изменение фазы на временном интервале, соответствующем длительности импульса, зависит от индекса модуляции (рис. 6). Для случая большой амплитудной модуляции, когда амплитуда пульсаций температуры внутри импульса близка к нулю, изменение фазы близко к 2π . Дисперсия фазового сдвига обусловлена, по-видимому, воздействием пульсаций скорости потока. Приблизительно один период теряется в каждом импульсе, если модуляция достаточно большая, и чем меньше модуляция, тем меньше изменение фазы.

Представленные здесь форма сигнала пульсаций температуры и зависимость сдвига фазы от индекса модуляции наблюдались в том случае, если амплитуда основной гармоники, соответствующей частоте схода вихрей, была больше, чем амплитуда кратных ей гармоник (второй, третьей и т.д.). Такое соотношение между амплитудами гармоник имело место, когда датчики помещались на удалении от оси вихревой дорожки, например в области, соответствующей ядрам вихрей. В окрестности оси вихревой дорожки, где амплитуда всех нечетных гармоник близка к нулю, сигнал в режиме амплитудной и фазовой модуляции имел более сложный вид и детально не исследовался. Для выяснения пространственной структуры импульсов затемнения были проделаны измерения двумя датчиками температуры. С помощью двух датчиков, разнесенных на $\Delta y=4$ мм вдоль оси цилиндра, мы установили, что в условиях эксперимента оси вихрей в дорожке почти параллельны оси обтекаемого цилиндра. При этих измерениях сигналы с датчиков

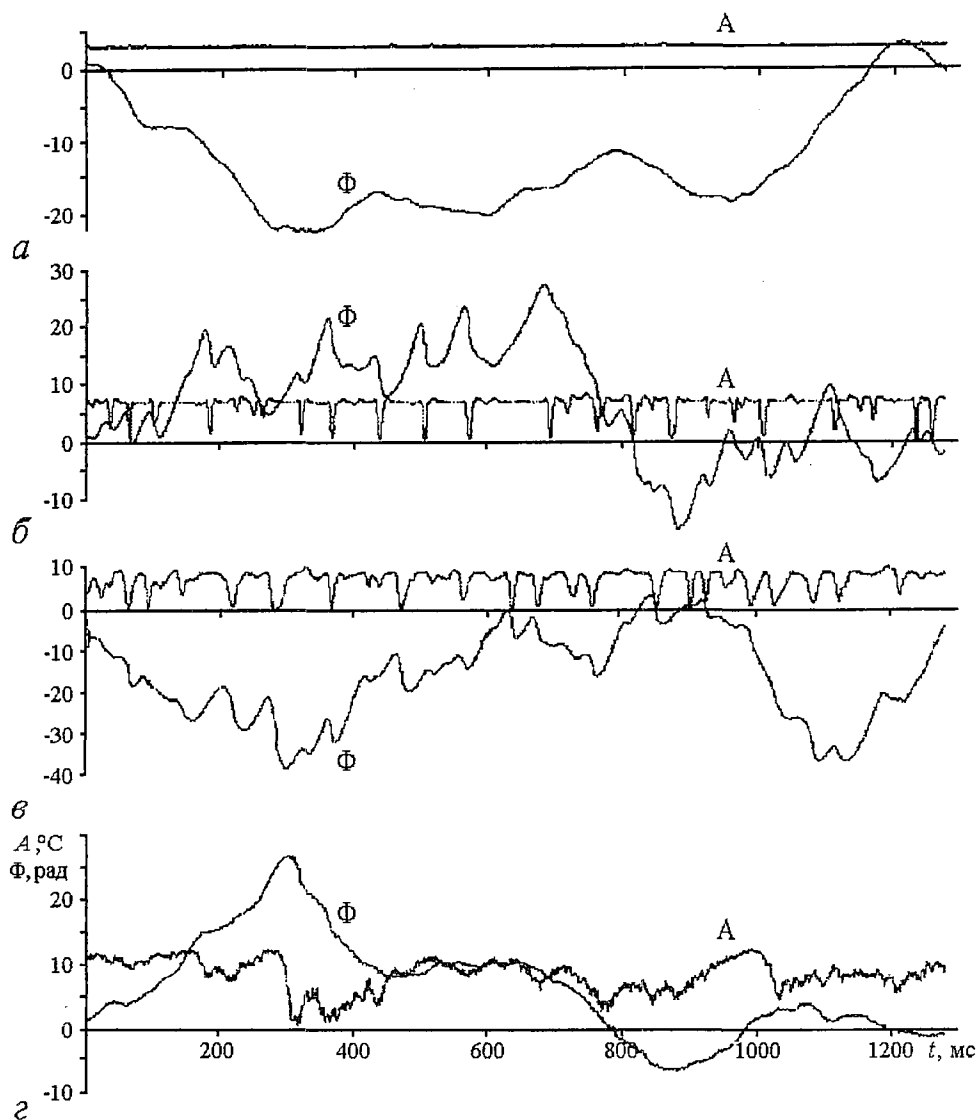


Рис. 4. Фазовые и амплитудные функции температурных пульсаций при $U=3.90$ м/с, $x/d=20$ для P , Вт/м: а - 38; б - 57; в - 67; г - 80

подавались на двухканальный анализатор спектра и определялся взаимный спектр колебаний. По фазе взаимного спектра ϕ_{mut} рассчитывался угол наклона вихрей γ , $\gamma = \arctg(\phi_{mut} \lambda / \Delta y)$. Измерения показали, что максимальный наклон вихрей при мощности нагрева $P=20..40$ Вт/м составляет $\gamma=2..3$ градуса. При меньших мощностях $P=0.5..2.5$ Вт/м наклон осей вихрей может быть больше, γ порядка 5 градусов. Анализ огибающих сигналов с этих датчиков показал, что в вихрях, оси которых параллельны обтекаемому цилиндру, корреляция в появлении импульсов затемнения отсутствует - они возникают случайным образом в различных точках, разнесенных вдоль оси цилиндра.

Если датчики температуры были разнесены на некоторое расстояние в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, то можно было определить как проявляются импульсы затемнения в разных рядах вихрей, формирующих дорожку. Мы анализировали сигналы от двух датчиков, установленных на одинаковом удалении от оси дорожки ($\Delta h=0.5$ мм= $2d$). Было обнаружено, что импульсы затемнения наблюдаются синхронно в обоих рядах вихрей и в обоих случаях низкочастотная составляющая импульса соответствовала уменьшению

температуры. Измерения взаимного спектра показали, что температурные пульсации в разных рядах находятся в противофазе, что совпадает с результатами предыдущих работ (см. [16]).

Была изучена эволюция амплитудной и фазовой модуляции вдоль потока. На малых расстояниях ($x=8d$) наблюдалась только фазовая модуляция (рис. 7). На больших расстояниях от цилиндра ($x=12d$, $x=20d$), появлялась и амплитудная модуляция, а сигнал становился нерегулярным. Следует подчеркнуть, что в отсутствие нагрева ширина спектрального пика пульсаций скорости на расстоянии $x=20d$ была достаточно узкой (см. рис. 2, верхний ряд), и не наблюдалось ни амплитудной, ни фазовой модуляции. На больших расстояниях от цилиндра, где модуляция достаточно развита, можно ввести количественное описание импульсов затемнения. Простейшая характеристика - это количество импульсов, фиксируемое датчиком в единицу времени. Пример такой характеристики представлен на рис. 8. Используя временные ряды, содержащие порядка 10^4 периодов вихревой дорожки, мы подсчитывали усредненное количество импульсов затемнения в 20-секундном интервале. При подсчетах мы принимали во внимание только импульсы с амплитудой, большей $1/2$ максимальной амплитуды, наблюдавшейся в течение интервала, по которому проводилось усреднение. Как видно из рисунка, число импульсов возрастает достаточно быстро при $P > P_1$. При мощности нагрева $P > P_2$ невозможно разделить огибающую сигнала на отдельные импульсы. Импульсы сливаются из-за того, что увеличивается их количество и

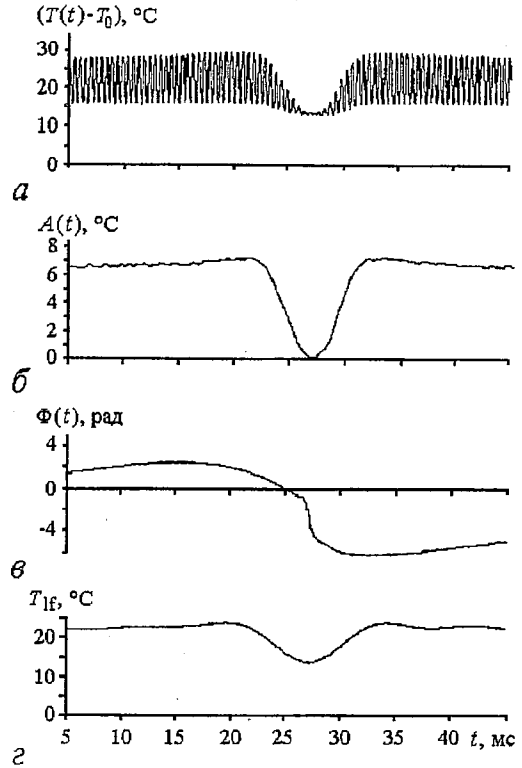


Рис. 5. Уединенный импульс затемнения температурных пульсаций при $U=3.90$ м/с, $x/d=20$ и $P=57$ Вт/м (а); его амплитуда $A(t)$ (б); фаза $\Phi(t)$ (в); и низкочастотная компонента T_{lf} (г)

импульсов затемнения в 20-секундном интервале. При подсчетах мы принимали во внимание только импульсы с амплитудой, большей $1/2$ максимальной амплитуды, наблюдавшейся в течение интервала, по которому проводилось усреднение. Как видно из рисунка, число импульсов возрастает достаточно быстро при $P > P_1$. При мощности нагрева $P > P_2$ невозможно разделить огибающую сигнала на отдельные импульсы. Импульсы сливаются из-за того, что увеличивается их количество и

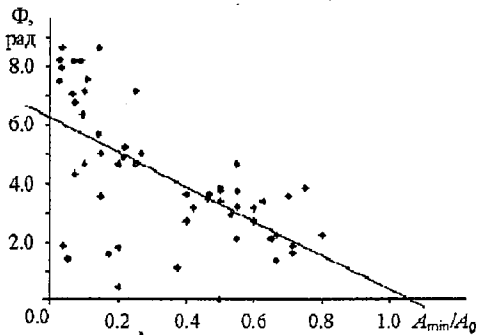


Рис. 6. Зависимость сдвига фазы на импульсе затемнения от его амплитуды и наилучшая линейная аппроксимация этой зависимости при $x=20d$, $U=3.64$ м/с и $P=62$ Вт/м. A_{\min} - минимальная амплитуда температурных пульсаций в импульсе затемнения, A_0 - амплитуда температурных пульсаций

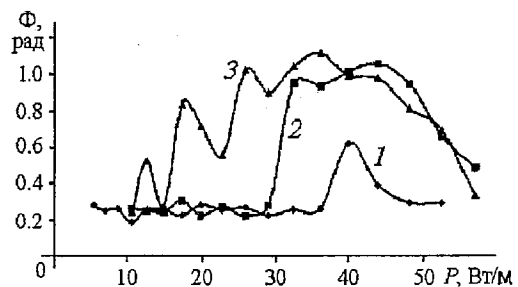


Рис. 7. Зависимость среднеквадратичных пульсаций фазы от мощности нагрева для $x/d = 8, 12$ и 20 при $U=3.64$ м/с

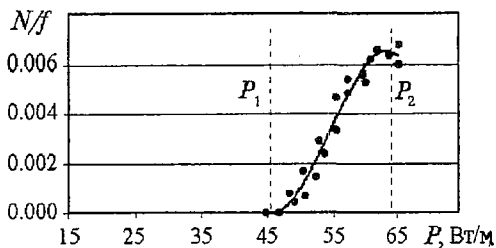


Рис. 8. Зависимость средней частоты появления импульсов затемнения N от мощности нагрева P при $x=25d$, $U=3.90$ м/с. N нормировано на частоту Струхаля f

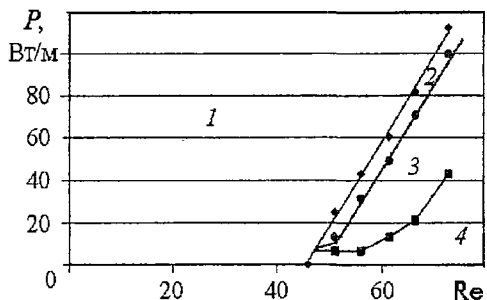


Рис. 9. Разбиение плоскости (Re, P) на области с существенно различным поведением модуляции в дорожке Кармана при $x/d=20$: 1 - стационарный след; 2 - дорожка с амплитудной модуляцией; 3 - дорожка с амплитудной и фазовой модуляцией; 4 - регулярная дорожка без модуляции

увеличивается их длительность. Отметим, что фазовая модуляция наблюдается в том случае, когда превышен некоторый порог по мощности нагрева; она подавляется при большем нагреве. Для $P \sim P_2$ некоторые из импульсов затемнения не имеют фазовой модуляции. По мере приближения мощности нагрева к той, которая соответствует подавлению вихреобразования, фазовая модуляция уменьшается и непосредственно перед переходом к стационарному режиму обтекания существует только амплитудная модуляция.

Разбиение плоскости параметров (Re, P) на области существования модуляции различного типа показано на рис. 9. Так как модуляция развивается вниз по потоку, точное положение границ между областями с амплитудной и фазовой модуляцией зависит от того, на каком расстоянии от цилиндра проводятся измерения. Представленное на рисунке разбиение плоскости параметров (Re, P) получено на расстоянии $x=20d$. Возникновение фазовой модуляции, ее развитие вниз по потоку и формирование импульсов затемнения было обнаружено в экспериментах, проведенных как в струе, так и в аэродинамической трубе, где длина нагретого цилиндра была существенно больше. Обнаруженное нами различие в режимах состояло в том, что в аэродинамической трубе при определенных условиях можно было наблюдать возбуждение изгибных колебаний цилиндра. Характеристики изгибных колебаний существенно зависели от натяжения $|F|$ (см. рис. 1) и скорости потока $|U|$. В спектре пульсаций температуры изгибные колебания регистрировались как острые пики на частотах, кратных основной гармонике изгибных колебаний струны длиной L . Эти колебания можно было подавить, изменяя, например, натяжение $|F|$. Детальный анализ взаимодействия изгибных колебаний с вихревой дорожкой в отсутствие нагрева цилиндра был проведен в [17]. Как показали наши измерения характеристик пульсаций температуры за нагретыми цилиндрами, помещенными в струю и в аэродинамическую трубу, возбуждение изгибных колебаний практически не оказывало влияния на генерацию импульсов затемнения. Между тем, количественные измерения характеристик импульсов затемнения проводились в случае, когда подстройкой натяжения $|F|$ мы добивались подавления изгибных колебаний.

3. Обсуждение результатов

Режимы фазовой и амплитудной модуляции обнаружены в эксперименте при большом нагреве цилиндра и, следовательно, при большой температуре газа, переносимого вихрями. Как можно интерпретировать возникновение модуляции и

импульсов затемнения? В данной работе исследовались лишь временные ряды и не проводилась визуализация структуры течения, поэтому мы имеем лишь косвенные данные о том, что происходит с вихрями. Визуализация вихревой дорожки за нагретым цилиндром при тех же числах Рейнольдса и мощностях нагрева, что и в данной работе, была проведена в [18], где регистрировались также спектры пульсаций в следе, однако детальный анализ временных рядов не проводился. Режиму модуляции вихревой дорожки, как показано в [18], соответствовало возникновение изгибных колебаний вихрей (рис. 10, а). При достаточно большой амплитуде изгибных колебаний возникали области с нарушениями порядка. Схематически такая область вихревой дорожки представлена на рис. 10, б. Очевидно, что поля температуры и концентрации частиц дыма (см. рис. 10, а), которые переносятся вихрями, в определенном смысле подобны, то есть обладают одинаковыми топологическими особенностями. Вообще говоря, расчет движения примеси в вихревой дорожке является достаточно сложной задачей. Использование в расчетах простейшей модели (см., например [16]) показало, что наиболее нагретый газ в следе за цилиндром концентрируется в ядрах вихрей. Принимая во внимание этот факт, мы можем восстановить структуру вихревой дорожки по реализациям температуры. Понятно, что такое восстановление касается лишь топологических свойств дорожки, целиком поле вихревой дорожки восстановить нельзя.

Мы ограничимся обсуждением импульсов затемнения, в которых теряется один период. Для того чтобы получить такое поле, поместим в периодическую двумерную роликовую структуру два топологических дефекта разного знака. Если

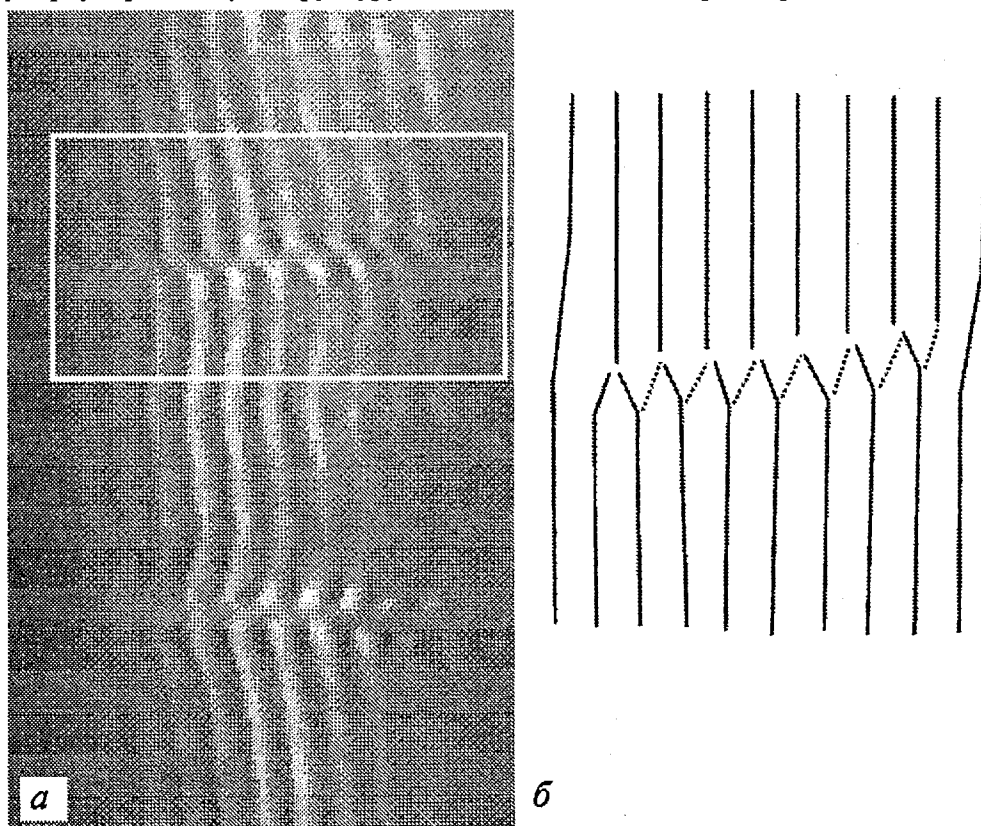


Рис. 10. Дымовая визуализация дорожки Кармана позади нагретого цилиндра при $Re=61.5, P=41$ Вт/м, $x/d=50$ и разности температур между цилиндром и набегающим потоком $\Delta T \sim 150$ °С (взято из [18]); схематическое изображение распределения дыма при визуализации дорожки (область внутри белого прямоугольника на рис. а)

в периодической структуре есть топологический дефект, то поле параметра порядка, в данном случае поле температуры, может быть представлено в виде:

$$T = A(x-x_0, y-y_0) \sin(kx + \Phi(x-x_0, y-y_0)),$$

где k - это волновой вектор пространственно-периодической структуры; A и Φ - амплитудная и фазовая функции; (x_0, y_0) - точки, где располагается дефект. Функции A и Φ могут быть представлены как $A = \tanh[x^2 + (\alpha y)^2]^{1/2}$ и $\Phi = \text{arctg}(x/(\alpha y))$ (α - коэффициент, отражающий тот факт, что направления вдоль и поперек потока не эквивалентны). Эти функции удовлетворяют условиям: $A(0,0)=0$, и $\oint \nabla \Phi dl = 2\pi$, если интегрирование охватывает точку $(0,0)$. В такой структуре количество пространственных периодов в верхней $y > 0$ и нижней $y < 0$ полуплоскостях отличается на 1. Очевидно, что изменение фазы сигнала, регистрируемое неподвижным датчиком, расположенным в точке $y=0$, в случае, если периодическая структура с топологическим дефектом, расположенным в точке $y=0$, сносится потоком, будет π , а не 2π , как в эксперименте. Для того чтобы получить изменение фазы в 2π , поместим в периодическую структуру два топологических дефекта с противоположными зарядами. Чтобы смоделировать такое поле, необходимо перемножить амплитудные поля дефектов и сложить фазовые поля. Тогда поле параметра порядка можно записать в виде:

$$T = A(x-x_1, y-y_1)A(x-x_2, y-y_2) \sin(kx + \Phi(x-x_1, y-y_1) - \Phi(x-x_2, y-y_2)).$$

Здесь $(x_{1,2}, y_{1,2})$ - координаты точек, где располагаются дефекты. Поле параметра T показано на рис. 11. Положение дефектов ясно видно на вставке 3, где представлено отконтрастированное изображение внутри области, ограниченной белым прямоугольником. Представим, что вся структура движется слева направо и мы регистрируем температурные пульсации. Тогда, если датчик находится в точке (2), то он регистрирует гармонику постоянной амплитуды (см. соответствующую вставку (2-2)). Если датчик помещен в точку (1), то регистрируется импульс затемнения, а фаза сигнала уменьшается на 2π , потому что один пространственный период в области, расположенной между топологическими зарядами, утерян (см. рис. 11 и вставки (1-1) и (2-2)). Амплитуда импульса затемнения и изменение фазы зависят от расположения датчика. Наша модель предсказывает, что в случае, когда датчик располагается на линии между топологическими зарядами $y_1 < y < y_2$,

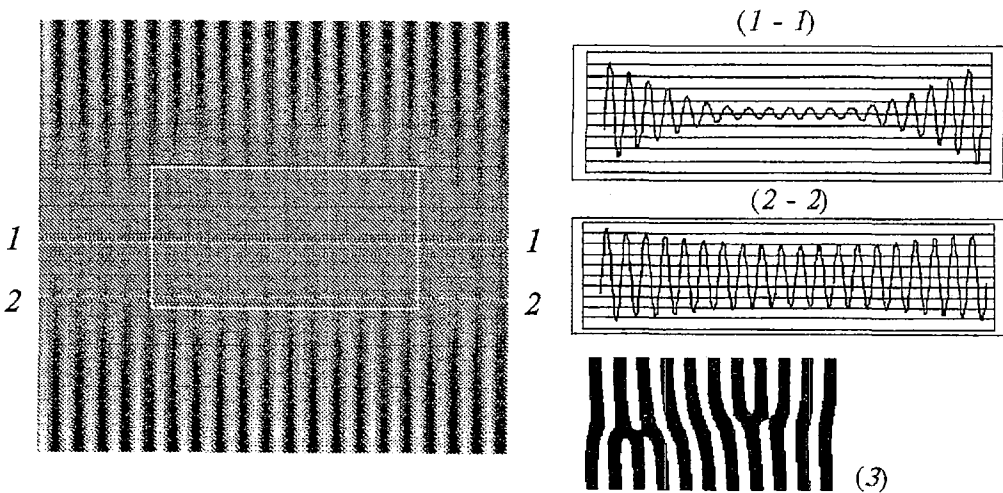


Рис. 11. Поле параметра порядка, соответствующее двум дефектам, помещенным в периодическую структуру

фазовый сдвиг близок к (-2π) . Изменяя расстояние между топологическими зарядами, можно существенно изменить амплитудную и фазовую модуляцию. Если, например, заряды расположены в одной точке, $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, есть только амплитудная модуляция, а фазовая модуляция отсутствует. По-видимому, такое изменение структуры соответствует переходу от режима генерации импульсов затемнения при $P_1 < P < P_2$ к режиму амплитудной модуляции при $P > P_2$, когда количество и длительность импульсов увеличивается (см. рис. 4).

Наши эксперименты показали, что дефекты могут возникать в результате развития неустойчивости вихрей, переносящих тепло. Каков механизм возникновения такой неустойчивости?

Согласно нашим оценкам, максимальная разница температур цилиндра T_c и набегающего потока T_f была $(T_c - T_f)_{\max} = T_m = 250$ °С. Для такой разницы температур отношение вкладов эффектов, связанных с воздействием сил плавучести и инерционных сил (число Ричардсона Ri), составляет

$$Ri = \beta g d T_m / U^2 \sim 10^{-4}.$$

Здесь β - температурный коэффициент расширения воздуха, g - ускорение свободного падения. Малая величина числа Ричардсона означает, что можно пренебречь воздействием сил плавучести, то есть, по-видимому, в возникновении модуляции дорожки важную роль играют инерционные силы, связанные с вращением стратифицированного по температуре и, следовательно, по плотности газа.

Теоретическому исследованию динамики вихрей в следе за нагретым цилиндром в настоящее время уделяется мало внимания. Проведено, тем не менее, теоретическое изучение неустойчивости уединенного вихря с ядром, имеющим меньшую плотность, чем периферия. Расчет показал [19], что такой вихрь в определенном диапазоне разности плотностей неустойчив относительно возбуждения изгибных колебаний. Такие колебания можно сопоставить с модами, наблюдающимися в дорожке при определенной мощности нагрева цилиндра. Увеличение амплитуды моды, нарастающей вниз по течению, проявляется в виде амплитудной и фазовой модуляции и может приводить к формированию дефектов.

Заключение

В данной работе мы показали, что нагрев обтекаемого потоком воздуха цилиндра при $45 < Re < 65$ вызывает амплитудную и фазовую модуляции в вихревой дорожке, которые нарастают вниз по течению и приводят к формированию импульсов затемнения. Мы представили теоретическую модель, которая описывает импульсы затемнения как композицию двух топологических дефектов с противоположными зарядами, помещенными в пространственно-периодическую структуру. Очевидно, что развитие модуляции вихрей, связанной с их температурной стратификацией, разрушает так называемую глобальную модуль [20], возникающую в результате абсолютной неустойчивости и ответственную за формирование пространственно-периодического следа за цилиндром при небольших надкритичностях.

Подчеркнем, что воздействие нагрева проявляется, в первую очередь, в изменении частоты следования вихрей и подавлении вихреобразования. Эти эффекты могут быть описаны с помощью эффективного числа Рейнольдса [10, 11]. Однако при определенной мощности нагрева возникает новый тип мод, связанный с температурной стратификацией вихрей. Динамика этих мод и возникновение дефектов уже не могут быть описаны в рамках эффективного числа Рейнольдса.

Отметим, что зависимость среднего количества дефектов от мощности нагрева имеет много общего с зависимостями числа дефектов от надкритичности, полученными для гексагональных структур, возникающих при термокапиллярной конвекции [21], и для тетрагональных структур при параметрическом возбуждении капиллярных волн на поверхности осциллирующего слоя жидкости [22]. При малых надкритичностях число дефектов нарастает, а затем, при увеличении надкритичности, происходит ограничение скорости роста. По-видимому, на стадии, когда периодическая структура уже сформировалась, процессы в системе определяются динамикой отдельных ячеек или вихрей, а не динамикой линейных мод, неустойчивость которых привела к возникновению структуры. Поэтому число дефектов в совершенно различных по физической природе пространственно-периодических структурах одинаковым образом зависит от надкритичности.

Авторы благодарны Ж.-К. Лекордиеру за обсуждение результатов и помощь в экспериментах и Я. Малькову за помощь при написании программ по обработке результатов с использованием преобразования Гильберта. А.Б.Езерский благодарен CNRS за предоставленную возможность исследовать динамику вихрей в лаборатории CORIA-UMR 6614.

Библиографический список

1. *Whitehead J.A.* Dislocations in convection and onset of chaos // *Phys. Fluids*. 1983. Vol. 26, № 10. P. 2899.
2. *Rabinovich M.I., Tsimring L.S.* Dynamics of dislocations in hexagonal patterns // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49, № 1, R35.
3. *Ezersky A.B., Kiyashko S.V., Nazarovsky A.V.* Bound states of topological defects in parametrically excited capillary ripples // *Physica D*. 2001. Vol. 152-153. P. 310.
4. *La Porta A., Surko C.M.* Phase defects as a measure of disorder in travelling wave convection// *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. P. 2678.
5. *Weiss O., Tamm Chr., Staliunas K.* Dislocations in laser fields // *Springer proceedings in Physics*, Vol. 69. Evolution of dynamical structures in complex systems / Ed R.Friedrich, A.Wanderlin. Springer - Verlag Berlin, Heidelberg, 1992.
6. *Cross M.C., Hohenberg P.C.* Pattern formation outside of equilibrium // *Review of Modern Physics*. 1993. Vol. 65. P. 854 .
7. *Rasent S., Steinberg V., Rehberg I.* Experimental studies of defect dynamics and interaction in electrohydrodynamic convection // *Phys. Rev. A*. 1990. Vol. 42. P. 5998.
8. *Bloor M.S.* The transition to turbulence in the wake of a circular cylinder // *J. Fluid Mech.* 1964. Vol. 19. P. 290.
9. *Williamson C.H.K.* The natural and forced formation of spot-like vortex dislocations in the transition of a wake// *J. Fluid Mech.* 1992. Vol. 242. P. 393.
10. *Lecordier J.C., Hamma L., Paranthoen P.* The control of vortex shedding behind heated cylinder at low Reynolds number // *Exp. Fluids*. 1991. Vol. 10. P. 224.
11. *Езерский А.Б.* Отрывное течение за нагретым цилиндром при малых числах Маха // ПИМТФ. 1990, № 5. С. 56.
12. *Lecordier J.C., Dumouchel F., Paranthoen P.* Heat transfer in a Benard - Karman vortex street in air and in water // *Int. Heat Mass Transfer*. 1999. Vol. 42. P. 3131.
13. *Dumouchel F., Lecordier C.J., Paranthoen P.* The effective Reynolds number of a heated cylinder// *Int. Heat Mass Transfer*. 1998. Vol. 41. P. 1787.
14. *Wang A.B. Travniczek Z., Chia K.C.* On the relationship of the effective Reynolds number and Strouhal number for the laminar vortex shedding of a heated circular cylinder// *Phys. Fluids*. 2000. Vol. 12. P. 1401.
15. *Lecordier J.C., Petit C., Paranthoen P.* Mesure de la fonction de transfert d'un

fil utilise comme capteur de temperature // Influence de la conduction Letters in Heat and Mass Transfer. 1980. Vol. 7. P. 311.

16. *Ezersky A.B., Lecordier J.C., Soustov P.L., Paranthoen P.* The structure of vortices in a Karman street behind a heated cylinder // Phys.Rev.E. 2000. Vol. 60. P. 2107.

17. *Van Atta C., Gharib M.* Ordered and chaotic vortex streets behind circular cylinders at low Reynolds numbers // J.Fluid Mech. 1987. Vol. 174. P. 113.

18. *Езерский А.Б., Гариб М., Хаммаши М.* Пространственно-временная структура следа за нагретым цилиндром // ПИМТФ. 1994. № 5. С. 74.

19. *Ezersky A.B., Ermoshin D.A.* The instability of density stratified vortices // Eur. J. Mech. B/Fluids. 1995. Vol. 14. P. 617.

20. *Monkewitz P.A.* The absolute and convective nature of instability in two-dimensional wake at low Reynolds numbers // Phys. Fluids. 1988. Vol. 31. P. 999.

21. *Perez-Carcia C., Cerisier P., Occelli R.* Pattern selection in the Benard-Marangoni instability. Propagation in systems far from equilibrium / Ed. J.E. Wesfreid, H.R.Brand, P.Manneville, N.Boccacia Springer-Verlag, Berlin 1988, p.232.

22. *Ezersky A.B., Kiyashko S.V., Nazarovsky A.V.* Chaotic dynamics of topological defects in parametrically excited waves. Nonlinearity and disorder: theory and applications /Ed. F. Abdullaev, et al. Kluwer Academic Publishers, 2001.

*Институт прикладной физики РАН
Университет Руана, Франция*

*Поступила в редакцию 14.05.02
после доработки 19.09.02*

TOPOLOGICAL DEFECTS IN KARMAN STREET BEHIND HEATED CYLINDER

A.B. Ezersky, P. Paranthoen

In experiments it was found that heating of a cylinder streamlined by an air flow cause appearance of phase and amplitude modulations in a laminar Karman street. It was shown that an increase of phase modulation downstream results in appearance of topological defects in a spatially periodic structure of a vortex street. Statistical properties of such defects were studied.



Езерский Александр Борисович - доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией Института прикладной физики РАН. Окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1976). Область научных интересов - гидродинамические неустойчивости, взаимодействие вихрей с акустическими волнами, формирование структур. Имеет более 100 публикаций. В соавторстве с М.И. Рабиновичем опубликована книга «Динамическая теория формообразования» (1998), в соавторстве с М.И. Рабиновичем и П. Уэйдманом - английский вариант этой книги - «The dynamics of patterns», World Scientific, 2000.



Доктор Пьер Парантуан - главный научный сотрудник лаборатории Термодинамики 6614, входящей в Национальный центр научных исследований (Академию наук Франции) и университет города Руана. В течение последних 25 лет занимался экспериментальным исследованием тепло- и массопереноса в периодических и турбулентных течениях. Под его руководством защитилось 15 аспирантов. Автор 120 статей, сообщений и докладов.



ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ СВЕРХСТРУКТУРЫ $C(2 \times 2)$ В ДВУХКОМПОНЕНТНОМ СЛОЕ АДсорБАТА НА ГРАНИ $L(100)$ (КВАЗИХИМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Ю.В. Трощев, Т.М. Лысак

Проведено исследование пятипараметрической нелинейной системы уравнений, описывающей стационарные состояния неидеального слоя адсорбата на грани монокристалла $L(100)$ в квазихимическом приближении с учетом формирования сверхструктуры $C(2 \times 2)$. Указаны и классифицированы по признаку ограниченности области существования сверхструктуры. Полученные результаты могут быть использованы при изучении соадсорбции и диффузии двух не реагирующих химических компонентов. Математическая методика исследования представляет самостоятельный интерес, так как может применяться к достаточно произвольным нелинейным математическим моделям.

Введение

Процессы упорядочения в приповерхностном слое катализатора, приводящие к образованию структур с различными химико-физическими свойствами [1-7], представляют большой интерес как для изучения химии поверхности, так и для успешного математического моделирования нелинейных явлений на поверхности катализатора. В частности, для адекватного описания поверхностных процессов очень полезно предварительное исследование математических моделей, включающее в себя такие вопросы, как определение условий возникновения, существования и исчезновения различных структур равновесного слоя адсорбата.

В настоящей работе методами бифуркационного анализа исследуется модель, описывающая стационарные состояния неидеального двухкомпонентного слоя адсорбата на грани монокристалла $L(100)$ в квазихимическом приближении с учетом формирования сверхструктуры $C(2 \times 2)$ [3, 4]. В основе модели лежат уравнения квазихимического приближения модели решеточного газа [5, 6] на двух квадратных подрешетках [6, 8] при учете латеральных взаимодействий на расстоянии первого координационного слоя соседней молекулы. При таких ограничениях квазихимическое приближение совпадает с более строгим приближением Бете - Пайерлса [5]. Наличие двух подрешеток позволяет наряду с неупорядоченным состоянием описать также наблюдаемое в экспериментах упорядоченное состояние - сверхструктуру типа $C(2 \times 2)$. Основной целью работы

явилось исследование условий существования сверхструктуры $C(2 \times 2)$ в пространстве параметров модели.

Поскольку интерес представляют также и использованные математические методы [9-11], в данной работе приводятся не только результаты, но и процедура их получения. Представляется, что примененная техника может быть полезна во многих областях, где возникают нелинейные уравнения с несколькими параметрами.

По характеру исследования данная работа является продолжением работ [11-16], посвященных изучению (расчету структуры) однокомпонентного слоя адсорбата в различных приближениях. Это позволяет избежать подробного описания задачи и уделить основное внимание методике исследования и анализу полученных результатов.

1. Постановка задачи, программные средства и качественные результаты

Постановка задачи. Состояние двухкомпонентного слоя адсорбата с учетом двух подрешеток в квазихимическом приближении описывается следующими переменными:

$$T_{mi}, \quad m = 1, 2, \quad i = 0, 1, 2, \quad (1)$$

- вероятности заполнения подрешетки m компонентом i ($i = 0$ - свободный узел);

$$G_{ij}; \quad i, j = 0, 1, 2, \quad (2)$$

- вероятности заполнения пары соседних узлов по схеме: подрешетка 1 - компонент i , подрешетка 2 - компонент j . Все переменные могут изменяться в пределах $(0,1)$.

В уравнения также входят параметры, являющиеся функциями температуры, парциальных давлений в газовой фазе и энергий взаимодействия адсорбированных частиц с поверхностью и между собой [6,8]

$$P_i \quad (3a)$$

$$E_{ij}, \quad E_{ij} = E_{ji}, \quad E_{i0} = 0, \quad i, j = 0, 1, 2. \quad (3b)$$

Ниже используется следующая информация об этих параметрах: P_i - линейная возрастающая функция логарифма давления компонента i (безразмерное давление); E_{ij} - линейная убывающая функция энергии латерального взаимодействия между компонентами i и j (безразмерная энергия латерального взаимодействия). Положительному значению безразмерной энергии латерального взаимодействия соответствует притяжение между частицами. Все параметры могут изменяться в пределах $(-\infty, +\infty)$.

Исследуемые уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} 3 \ln T_{10} - 3 \ln T_{1i} + 4 \ln G_{i0} - 4 \ln G_{00} - P_i &= 0, \\ 3 \ln T_{20} - 3 \ln T_{2i} + 4 \ln G_{0i} - 4 \ln G_{00} - P_i &= 0, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$i = 1, 2;$$

$$G_{ij} \exp(-E_{ij}) G_{kl} \exp(-E_{kl}) = G_{il} \exp(-E_{il}) G_{kj} \exp(-E_{kj}), \quad (4b)$$

$$i, j, k, l = 0, 1, 2;$$

$$1 - T_{m0} - T_{m1} - T_{m2} = 0, \quad m = 1, 2; \quad (4в)$$

$$T_{1i} - G_{i0} - G_{i1} - G_{i2} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \quad (4г)$$

$$T_{2i} - G_{0i} - G_{1i} - G_{2i} = 0, \quad i = 0, 1, 2.$$

Данная система уравнений всегда имеет тривиальное решение, определяемое условиями

$$T_{1i} = T_{2i}, \quad G_{ij} = G_{ji}, \quad i, j = 0, 1, 2, \quad (5)$$

и соответствующее бесструктурному покрытию поверхности. В работе ставится вопрос о том, при каких значениях параметров уравнения имеют нетривиальное решение, то есть решение, соответствующее сверхструктуре $C(2 \times 2)$.

Значения параметров, при которых существует нетривиальное решение, образуют в пятимерном пространстве параметров задачи область существования сверхструктуры $C(2 \times 2)$. Поскольку в пятимерном пространстве параметров построение областей и их восприятие является затруднительным, то задача разбита на две подзадачи аналогично [11]. При разбиении пространства параметров использован тот факт, что в отсутствие латеральных взаимодействий слой адсорбата не может образовать сверхструктуру ни при каких давлениях.

Описание области существования опирается на два взаимосвязанных вопроса.

1. В какой области должны лежать значения параметров (3б), чтобы существовали такие значения параметров (3а), при которых существует нетривиальное решение? (В дальнейшем будем называть эту область областью существования в пространстве энергий латерального взаимодействия.) Данная область является проекцией области существования на пространство энергий латерального взаимодействия.

2. Если выбрана точка внутри области существования в пространстве энергий латерального взаимодействия, то в какой области должны лежать значения параметров (3а), чтобы нетривиальное решение действительно существовало? (В дальнейшем будем называть эту область областью существования в плоскости давлений.) Данная область является проекцией сечения области существования на плоскость давлений при заданных значениях параметров латерального взаимодействия.

Программные средства. Система уравнений (5) не поддается полному аналитическому решению. Поэтому ниже используются не только аналитические, но и численные методы. Получаемые при этом результаты достоверны, но отсутствует гарантия полноты исследования. Так, вообще говоря, нельзя утверждать, что построены все области существования, так как некоторые из них могли быть численно не обнаружены. В частности, не были обнаружены изолированные ветви сверхструктуры $C(2 \times 2)$. Поэтому далее всюду предполагается, что существование сверхструктуры эквивалентно существованию точек разрушения симметрии на ветвях тривиальных решений.

Для численного исследования была использована программа АРИАДНА [9, 10], которая позволяет решать задачи трех уровней для конечномерных систем нелинейных уравнений с нетривиальными группами симметрии: 1) продолжать по бифуркационному параметру решения нелинейных уравнений, находить точки бифуркации, переключаться с ветви на ветвь в точках разрушения симметрии; 2) продолжать по параметру точки бифуркации и находить точки вырождения этих бифуркаций; 3) продолжать по параметру вырожденные точки бифуркации и

находить точки их двойного вырождения. При переходе к более высокому уровню увеличивается на единицу число параметров, которым разрешается изменяться в процессе продолжения по параметру. В качестве начальных точек для продолжения по параметру используются вырожденные точки предыдущего уровня либо регулярные точки последующего уровня. Такие переходы вверх и вниз от уровня к уровню, как правило, позволяют получить исчерпывающие решения указанных трех задач. В совокупности получаемые при этом результаты дают полный ответ на вопрос существования, единственности и множественности решений рассматриваемой системы при различных значениях параметров, а также позволяют классифицировать все качественно различные зависимости решений от бифуркационного параметра.

Примеры непосредственного применения упомянутой методики содержатся в [12-16]. Однако в данной работе рассматриваются также бифуркации относительно двух параметров, что повышает коразмерность вырождений. Ниже демонстрируется, каким образом такие бифуркации могут быть исследованы методами, реализованными в программе АРИАДНА.

Большинство рисунков, содержащихся в данной работе, получено путем непосредственного сканирования с экрана монитора. Решение первой задачи называется бифуркационной диаграммой и отмечается на рисунках словом Diagram. Решение второй задачи представляет собой сечения поверхности бифуркаций и отмечается на рисунках словом Section. Решение третьей задачи называется бифуркационной картой, так как при этом строятся проекции складок поверхности бифуркаций на плоскость двух параметров, и в результате получается разбиение этой плоскости на области с качественно различным поведением бифуркационной диаграммы. Решение третьей задачи отмечается на рисунках словом Map.

Если исследуется система (4), то на рисунках это отмечается символами $q2c1$ (q - quasicheical, 2 - два компонента, c - $C(2 \times 2)$, 1 - учет первой координатной сферы соседней молекулы). Если же исследуется система $(4) \oplus (18)$ (см. ниже), описывающая бифуркации разрушения симметрии системы (4), то это отмечается символами $q2cr1$ (r - pitchfork). Сечения для системы $q2c1$ могут быть построены как диаграммы для системы $q2cr1$, а карты для системы $q2c1$ могут быть построены как сечения для системы $q2cr1$. В качестве начальных точек для диаграмм системы $q2cr1$ выбирались точки разрушения симметрии диаграмм системы $q2c1$.

Качественные результаты. В результате проведенного исследования пространство энергий латерального взаимодействия разбито на восемь трехгранных углов C_{pqs} , $p, q, s = 0, 1$ плоскостями Q_i , $i = 1, 2, 3$. Индекс $p(q,s)$ равен нулю, если угол C_{pqs} лежит относительно плоскости Q_1 (Q_2, Q_3) в том же полупространстве, что и начало координат.

Внутри угла C_{000} , содержащего начало координат, в окрестности каждого из ребер построены области R_1, R_2, R_3 , ограниченные гранями угла и поверхностями S_i , $i = 1, 2, 3$. Таким образом, все пространство разбито на 11 областей.

В области $C_{000} \setminus \bigcup_{i=1}^3 R_i$ нетривиальных решений нет. Во всех остальных областях есть такие значения давлений, при которых существуют нетривиальные решения.

В областях R_i , $i=1, 2, 3$, области существования в плоскости давлений являются ограниченными, а в областях C_{pqs} ($p+q+s>0$) - неограниченными.

Направления неограниченности могут быть определены по индексам p, q, s . Если $p=1$, то область существования является неограниченной в направлении $P_2 \rightarrow -\infty$.

Если $q=1$, то область существования неограниченна в направлении $P_1 \rightarrow -\infty$. Если $s=1$, то область существования неограниченна в направлении $P_1+P_2 \rightarrow +\infty$. Таким образом, область существования в плоскости давлений может быть неограниченной в одном, двух или трех направлениях.

2. Описание исследования

Исследование неограниченных областей существования в плоскости давлений. Аналогичное исследование квазихимического приближения для однокомпонентных сверхструктур проведено в [12]. Показано, что при

$$E_{ii} < -2 \ln 2, \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

существует интервал значений P_p в котором задача однокомпонентного слоя адсорбата имеет нетривиальное решение. Отсюда ясно, что при любых значениях $E_{i,3-i}$ и $E_{3-i,3-i}$ можно выбрать P_{3-i} настолько малым, что наличие компонента 3- i не окажет существенного влияния, и структура $C(2 \times 2)$ сохранится. Это означает, что при выполнении условия (6) двухкомпонентный слой адсорбата может образовывать сверхструктуру $C(2 \times 2)$, причем область существования в плоскости давлений является неограниченной в направлении $P_{3-i} \rightarrow -\infty$.

Численное исследование позволило предположить, что область существования в плоскости давлений может быть неограниченной и в направлении $P_i+P_{3-i} \rightarrow +\infty$, $i=1,2$; $P_i-P_{3-i}=\text{const}$, что в пределе соответствует сверхструктуре в насыщенном слое, то есть при

$$T_{m0} = G_{i0} = G_{0i} = 0, \quad m = 1, 2; \quad i = 0, 1, 2. \quad (7)$$

Для построения соответствующей границы в пространстве энергий латеральных взаимодействий необходимо сделать предельный переход $P_i+P_j \rightarrow +\infty$ в уравнениях (4). В уравнениях (4б), (4в), (4г) для этого достаточно приравнять нулю переменные T_{m0} , G_{i0} , G_{0i} , $i=0, 1, 2$, $m=1, 2$. Но в уравнениях (4а) такое приравнивание противоречит области определения, поэтому сначала эти уравнения необходимо преобразовать. Складывая и вычитая уравнения (4а), с учетом равенств (4б) получаем

$$\ln[T_{1i}T_{1j}/(T_{10})^2] + 4\ln\{(T_{10})^2G_{i0}G_{j0}/[T_{1i}T_{1j}(G_{00})^2]\} - (P_i + P_j) = 0, \quad (8а)$$

$$\ln[T_{2i}T_{2j}/(T_{20})^2] + 4\ln\{(T_{20})^2G_{0i}G_{0j}/[T_{2i}T_{2j}(G_{00})^2]\} - (P_i + P_j) = 0,$$

$$\ln(T_{1i}/T_{1j}) + 4\ln\{T_{1j}G_{ii}\exp(E_{ji})/[T_{1i}G_{jj}\exp(E_{ii})]\} - (P_i - P_j) = 0, \quad (8б)$$

$$\ln(T_{2i}/T_{2j}) + 4\ln\{T_{2j}G_{ij}\exp(E_{ij})/[T_{2i}G_{ij}\exp(E_{ii})]\} - (P_i - P_j) = 0,$$

$$i, j = 1, 2.$$

Уравнения (8а) при предельном переходе обеспечивают выполнение равенств (7) и в дальнейшем могут быть исключены из рассмотрения. А уравнения (8б) не содержат переменные T_{m0} , G_{i0} , G_{0i} , $i=0, 1, 2$, $m=1, 2$. Таким образом, уравнения (4б), (4в), (4г), (7) и (8б) описывают равновесные состояния насыщенного слоя.

Граница области существования сверхструктуры $C(2 \times 2)$ в насыщенном слое в пространстве энергий латерального взаимодействия есть поверхность, на которой ветви тривиальных решений системы (4б), (4в), (4г), (7) и (8б) имеют

точки разрушения симметрии с вырождениями коразмерности 1 (складка поверхности бифуркаций разрушения симметрии). Численное исследование этих уравнений позволило предположить, что область существования в пространстве энергий латерального взаимодействия определяется неравенством

$$E_{12} > \ln 2 + 0.5(E_{11} + E_{22}), \quad (9)$$

причем точки бифуркации на поверхности

$$E_{12} = \ln 2 + 0.5(E_{11} + E_{22}) \quad (10)$$

удовлетворяют условиям

$$T_{mi} = 0.5, \quad G_{ii} = 1/6, \quad G_{ij} = 1/3; \quad m = 1, 2, \quad ij = 1, 2, \quad j \neq i. \quad (11)$$

Аналитическая проверка показала, что на поверхности (10) рассматриваемая система действительно имеет решения вида (11), являющиеся точками бифуркации. Причем уравнение ветвления [17, 18]

$$f(x, a) = 0 \quad (12)$$

в этих точках удовлетворяет условию зарождения структуры $C(2 \times 2)$

$$\partial/\partial a [f(x, a)/x] = 0. \quad (13)$$

Таким образом, относительно не ограниченных по давлениям областей существования получены следующие результаты.

1) Три плоскости Q_1, Q_2, Q_3

$$Q_i: E_{ii} = -2 \ln 2, \quad i = 1, 2, \quad (14a)$$

$$Q_3: E_{12} = \ln 2 + 0.5(E_{11} + E_{22}) \quad (14b)$$

разбивают пространство энергий латерального взаимодействия на восемь трехгранных углов C_{pqs} , $p, q, s = 0, 1$. Здесь индекс с номером i ($i=1, 2, 3$) полагается равным 0, если угол лежит относительно плоскости Q_i в том же полупространстве, что и начало координат. Плоскости (14) пересекаются по прямым $L_k = Q_i \cap Q_j$, $i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j, j \neq k, k \neq i$

$$L_i: E_{3-i, 3-i} = -2 \ln 2, \quad E_{12} = 0.5E_{ii}, \quad i = 1, 2, \quad (15a)$$

$$L_3: E_{ii} = -2 \ln 2, \quad i = 1, 2. \quad (15b)$$

Внутри угла C_{000} (содержащего начало координат) область существования в плоскости давлений либо ограничена, либо не существует. А вне этого угла область существует и является неограниченной.

2) Область существования в плоскости давлений может быть неограниченной в одном, двух или трех направлениях. Если выполнено условие

$$E_{ii} < -2 \ln 2, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

то область является неограниченной в направлении $P_{3-i} \rightarrow -\infty$. Если выполнено условие

$$E_{12} > \ln 2 + 0.5(E_{11} + E_{22}), \quad (17)$$

то область является неограниченной в направлении $P_i + P_{3-i} \rightarrow +\infty, i=1, 2; P_i - P_{3-i} = \text{const.}$

На рис. 1 приведены численно построенные области существования в плоскости давлений для точек из углов C_{111} (рис. 1, а, б), C_{101} (рис. 1, в), C_{110} (рис. 1, г). Можно видеть, что область может быть как односвязной, так и многосвязной. Рис. 1, а и б построены как сечения бифуркационной поверхности для системы q2c1, а рис. 1, в и г - как диаграммы для системы q2cp1 (см. раздел 1, описание программных средств).

Исследование ограниченных областей существования в плоскости давлений. Как уже было сказано, внутри трехгранного угла C_{000} область существования в плоскости давлений может либо не существовать, либо быть ограниченной. Границей в пространстве энергий латерального взаимодействия, разделяющей области несуществования и ограниченности, является поверхность вырождения точек разрушения симметрии системы уравнений (4) относительно двух бифуркационных параметров [18], соответствующая стягиванию в точку области существования в плоскости давлений. Для описания такой поверхности к исходной системе необходимо добавить три условия вырождения: $f_x=0, f_{P_1}=0, f_{P_2}=0$, где $f(x, P_1, P_2)=0$ - уравнение ветвления. Программа АРИАДНА непосредственно

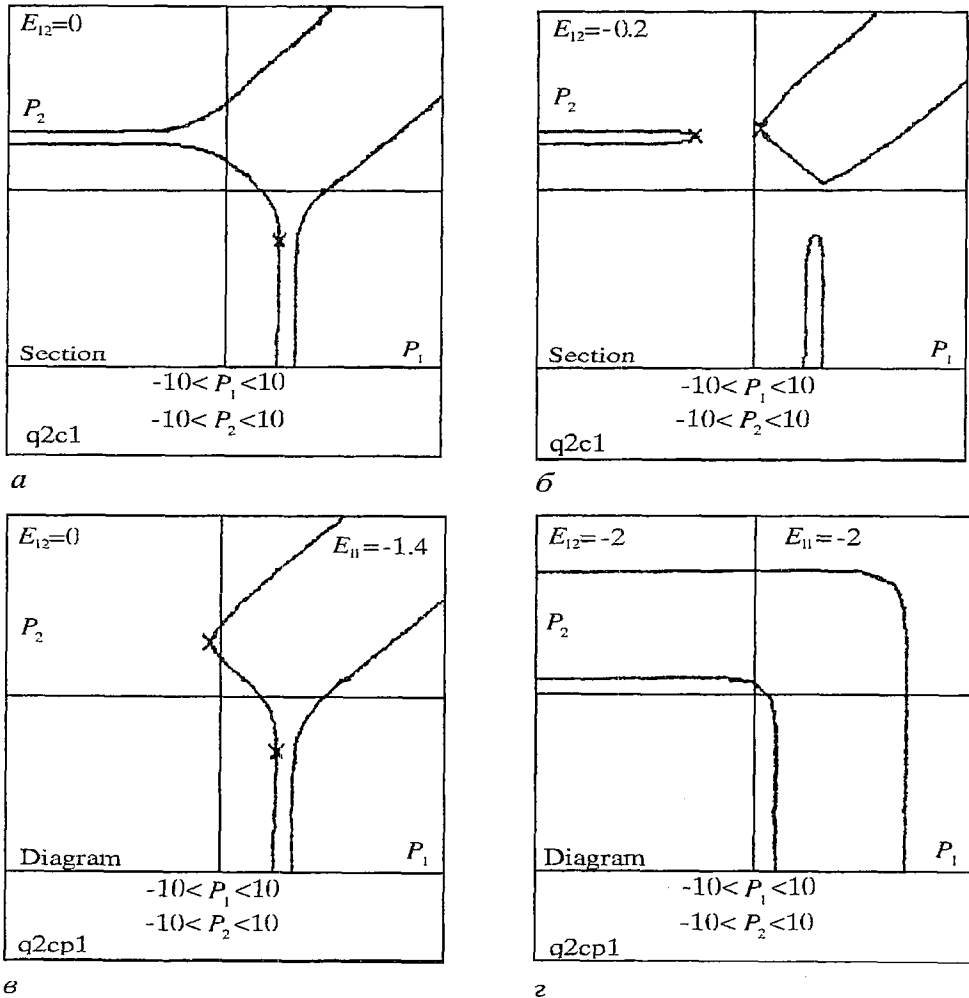


Рис. 1. Неограниченные области существования в плоскости давлений. а - $(E_{11}=E_{22}=-1.4, E_{12}=0) \in C_{111}$; б - $(E_{11}=E_{22}=-1.4, E_{12}=-0.2) \in C_{111}$; в - $(E_{11}=-1.4, E_{22}=-1.3, E_{12}=0) \in C_{101}$; г - $(E_{11}=E_{22}=E_{12}=-2.0) \in C_{110}$

позволяет добавлять к исходной системе только два условия. Тем не менее, рассматриваемая поверхность может быть описана следующим образом. Добавим к системе (4) условие, определяющее бифуркацию разрушения симметрии (частный случай первого из условий вырождения), и для полученной таким образом расширенной системы искомая поверхность будет уже поверхностью бифуркаций однократного вырождения. Причем в программе АРИАДНА указанные три условия входят в виде частного случая в расширенную систему уравнений, описывающую вырождения квадратичных вилок типа Pitf+Pitf [9, 10]. Таким образом, использование расширенной системы позволит строить сечения поверхности раздела областей ограниченности и несуществования как бифуркационные карты.

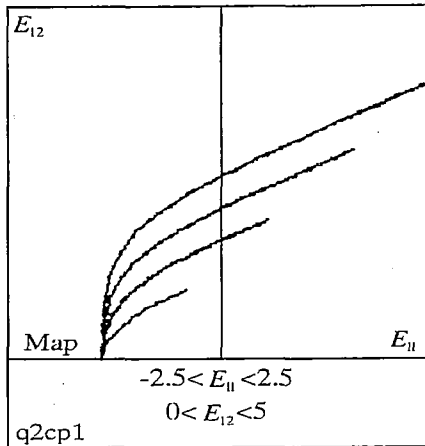
Для вывода условия, определяющего бифуркацию разрушения симметрии, необходимо приравнять нулю определитель системы (4) на тривиальном решении с учетом нетривиальности соответствующего собственного вектора: $dT_{mi}=0$, $dG_{ij}=-dG_{ji}$, $i,j=0,1,2$, $m=1,2$. После ряда преобразований это дает следующее уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1/G_{12} & -1/G_{10} & 1/G_{20} \\ -3T_{10} & 4T_{11}T_{10}/G_{10}-3(1-T_{12}) & -3T_{11} \\ 3T_{10} & -3T_{12} & 4T_{12}T_{10}/G_{20}-3(1-T_{11}) \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

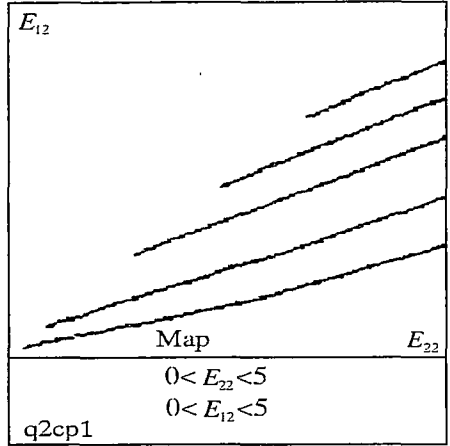
Численное исследование расширенной системы (4)⊕(18) показало, что внутри угла C_{000} существуют три искомые области существования: R_i , $i=1,2,3$, заключенные, соответственно, между поверхностями: S_i , $i=1,2,3$, Q_i и Q_k , $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$. Каждый из листов S_i является криволинейной поверхностью, натянутой между двумя лучами L_{ij} и L_{ik} с общим началом на прямой L_i ($i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq i$) и имеющей выпуклость в сторону этой прямой.

С хорошей точностью выполняются следующие соотношения. Листы S_i , $i=1,2$ имеют вершину на прямой L_i в точке O_i ($E_{ii}=0$, $E_{3-i,3-i}=-2\ln 2$, $E_{12}=0$) и примыкают к плоскости Q_{3-i} по лучу $L_{i,3-i}$ ($E_{12}=0$, $E_{3-i,3-i}=-2\ln 2$), а к плоскости Q_3 по лучу L_{i3} ($E_{ii}=2\ln 2+E_{3-i,3-i}$, $E_{12}=E_{ii}$). Лист S_3 имеет вершину на прямой L_3 в точке O_3 ($E_{11}=E_{22}=E_{12}=-2\ln 2$) и примыкает к плоскости Q_i , $i=1,2$ по лучу L_{3i} ($E_{ii}=E_{12}=-2\ln 2$). Однако аналитическая проверка этих фактов представляется затруднительной из-за большой размерности системы (4)⊕(18).

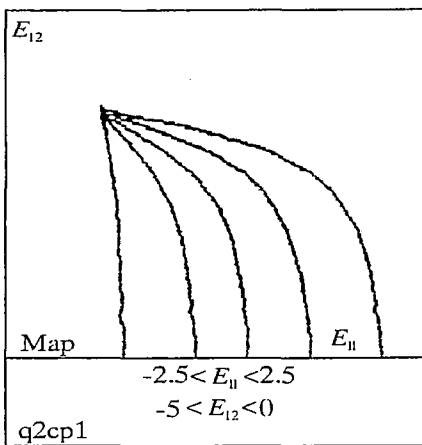
На рис. 2 приведены сечения листов S_2 и S_3 различными плоскостями. На рис. 3 изображены ограниченные области существования в плоскости давлений, соответствующие областям R_3 и R_2 в пространстве энергий латерального взаимодействия. На рис. 4 дано схематическое объемное изображение внутренней части трехгранного угла C_{000} с областями R_1 , R_2 и R_3 внутри него. На рис. 5 приведены различные виды зависимостей решений системы (4) от параметров. Рис. 5, а соответствует сечению рис. 1, а прямой $P_1=0$ и представляет наиболее простой вид бифуркационной диаграммы. Рис. 5, б соответствует сечению рис. 1, б прямой $P_1=3$; имеется многосвязность нетривиальных ветвей. На рис. 5, в имеется множественность как тривиального, так и нетривиального решений. На рис. 5, г изображена зависимость от параметра E_{12} , проходящая через области R_3 , C_{000} и C_{110} . На рис. 6 приведена топологическая структура разбиения пространства латеральных взаимодействий с указанием качественного вида областей существования в плоскости давлений без учета возможной многосвязности. Для наглядности графу придана форма куба, вершины которого соответствуют трехгранным углам C_{pqs} .



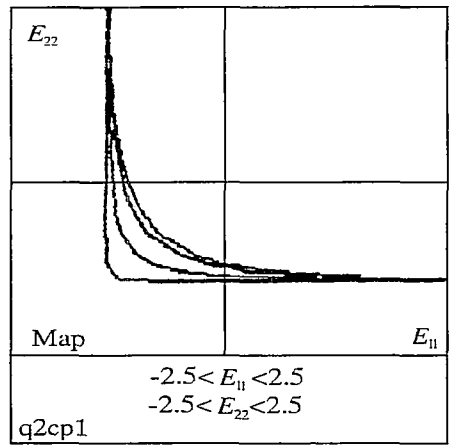
a



б

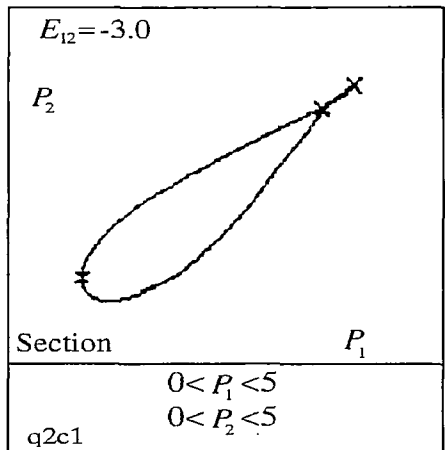


в

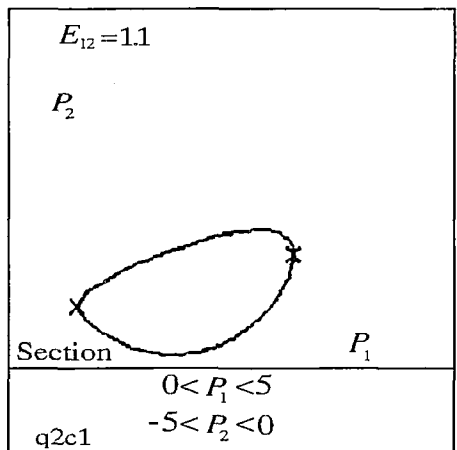


г

Рис. 2. Сечения границ областей существования внутри угла C_{000} . а - сечения листа S_2 плоскостями $E_{22}=1.0, 2.0, 3.0, 4.0$ (снизу вверх); б - сечения листа S_2 плоскостями $E_{11}=-1.3, -1.0, 0, 1.0, 2.0$ (снизу вверх); в - сечения листа S_3 плоскостями $E_{22}=0, -1.0, -1.2, -1.3$ (слева направо); г - сечения листа S_3 плоскостями $E_{12}=-1.5, -2.0, -3.0, -4.0$ (слева направо)



a



б

Рис. 3. Ограниченные области существования в плоскости давлений. а - $(E_{11}=E_{22}=-1.0, E_{12}=-3.0) \in R_3$; б - $(E_{11}=-1.0, E_{22}=2.0, E_{12}=1.1) \in R_2$

Заключение

В данной работе построены области существования сверхструктуры $C(2 \times 2)$, но не исследованы варианты множественности нетривиальных решений и их устойчивости. Не исследованы и возможности односвязности и многосвязности неограниченных областей существования в плоскости давлений. Характер устойчивости часто может быть определен без дополнительного исследования на основании классификации точек бифуркации и известного факта, что единственное решение всегда устойчиво при условии, что рассматриваемая система не допускает бифуркаций Хопфа (в данном случае это условие выполнено). Отметим также, что на основании

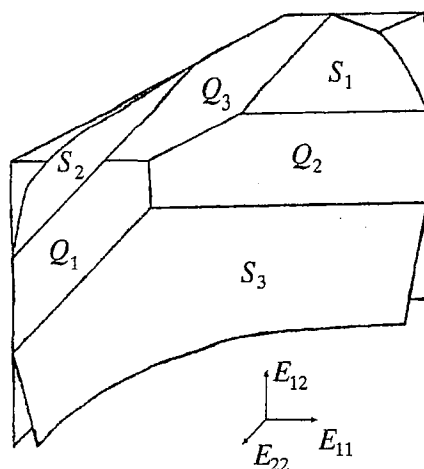
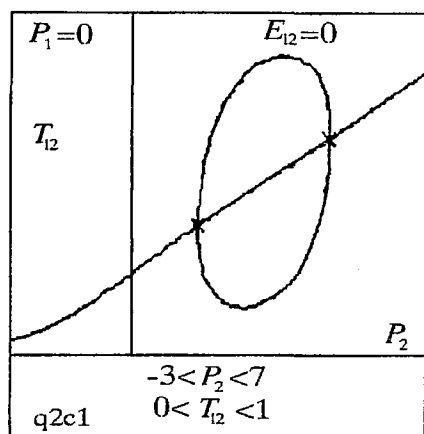
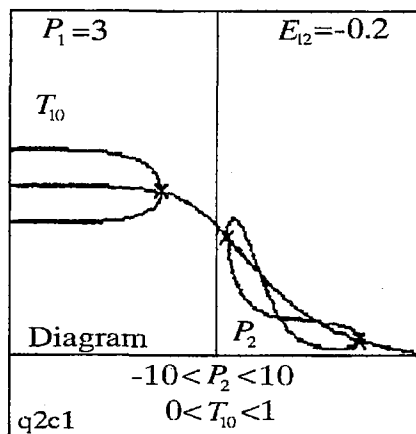


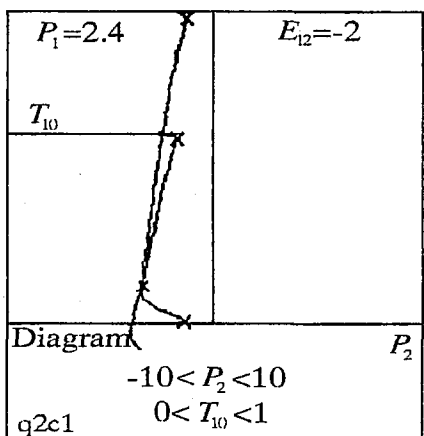
Рис. 4. Схематическое изображение трехгранного угла C_{000} с областями R_1, R_2 и R_3 внутри него



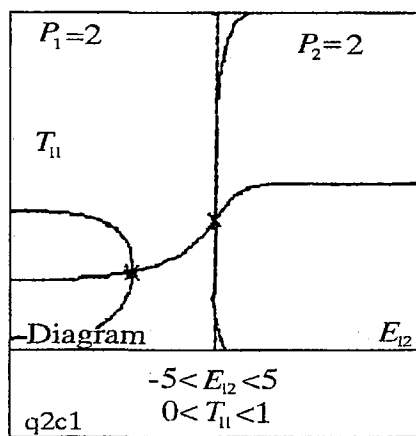
a



б



в



г

Рис. 5. Зависимости решений от параметров. *a* - $E_{11}=E_{22}=-1.4, E_{12}=0, P_1=0$; *б* - $E_{11}=E_{22}=-1.4, E_{12}=-0.2, P_1=3.0$; *в* - $E_{11}=-4.0, E_{22}=2.0, E_{12}=-2.0, P_1=2.4$; *г* - $E_{11}=E_{22}=-1.0, P_1=P_2=2.0$

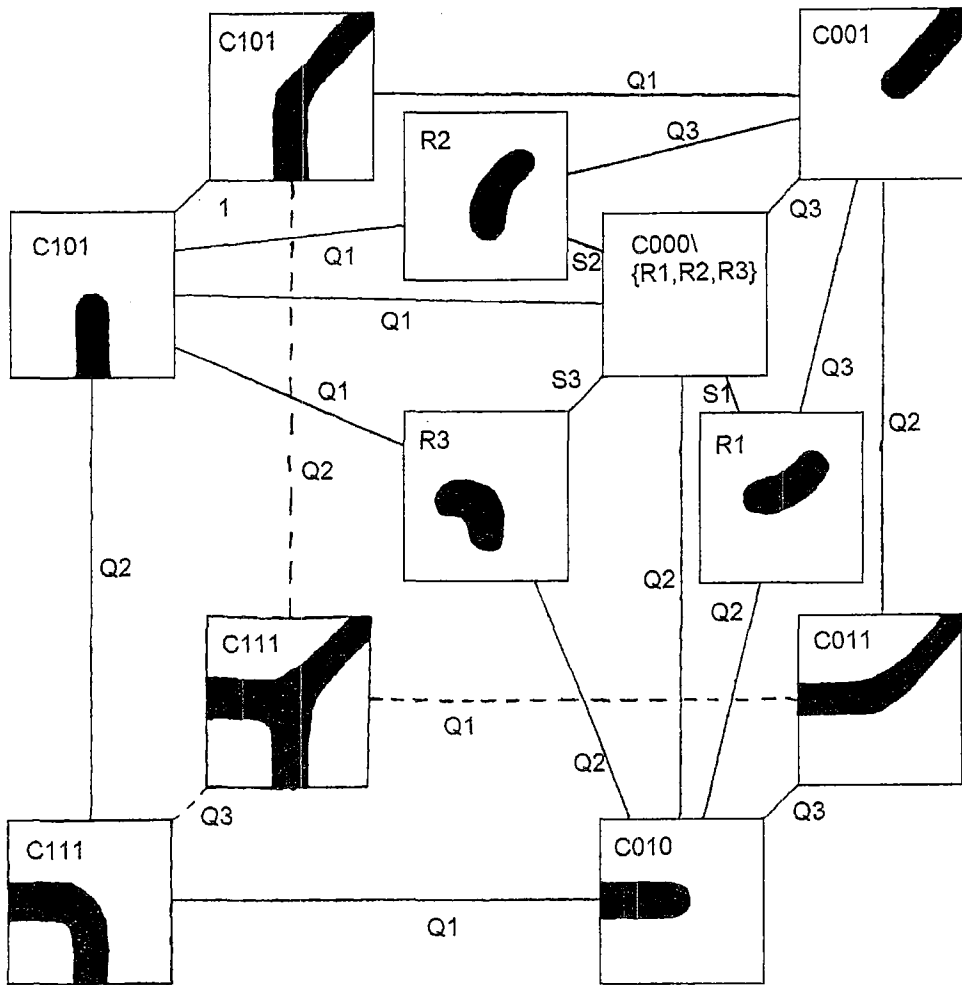


Рис. 6. Топологическая структура разбиения пространства энергий латерального взаимодействия. Вершины графа соответствуют областям в пространстве энергий. Ребра графа - общим поверхностям-границам. Для каждой вершины дан качественный вид области существования в плоскости давлений. Этот качественный вид отражает только ограниченность этих областей и направления неограниченности, но не отражает возможной многосвязности (рис. 1,б) и наличия бифуркаций (рис. 1,е)

проведенного численного исследования можно сделать предположение, что для рассмотренной системы любая нетривиальная ветвь имеет устойчивый участок.

Исследование множественности решений и многосвязности неограниченных областей требует более значительных усилий и будет предпринято, если в этом будет необходимость с прикладной точки зрения.

Отметим также, что полученные результаты, в основном, соответствуют предположению о том, что образованию сверхструктуры $C(2 \times 2)$ способствует увеличение притяжения между частицами разных видов и увеличение отталкивания между частицами одного вида. Однако область R_3 , ограниченная поверхностями Q_1 , Q_2 и S_3 , является исключением, так как здесь сверхструктура возникает при увеличении отталкивания между компонентами. Из рис.5, г ясно, что структура в области R_3 устойчива (согласно классификации структурно устойчивых бифуркаций). Механизм упорядочивания при этом требует дополнительного исследования.

Работа выполнена в 1997 году при частичной финансовой поддержке РФФИ (номер проекта 96-01-00812).

Библиографический список

1. Хилл Т. Статистическая механика. М.: ИЛ, 1960. 486 с.
2. Шулепов С.В., Аксененко Е.В. Решеточный газ. Киев: Наукова думка, 1981, 268 с.
3. Люксютов И.Ф., Наумовец А.Г., Покровский В.М. Двумерные кристаллы. Киев: Наукова думка, 1988. 220 с.
4. Castner D.G., Somorjai G.A. Surface structures of adsorbed gases on solid surfaces // Chem.Rev. 1979. Vol.79, № 3. P. 233.
5. Жданов В.П. Элементарные физико-химические процессы на поверхности. Новосибирск: «Наука». Сиб. отд., 1988. 319 с.
6. Товбин Ю.К. Теория физико-химических процессов на границе газ - твердое тело. М.: Наука, 1988, 285 с.
7. Слинько М.Г., Зеленьяк Т.И., Акрамов Т.А., Лаврентьев-мл. М.М., Шепелев В.С. Нелинейная динамика каталитических реакций и процессов (обзор) // Математическое моделирование. 1997. Т. 9, № 12. С. 87.
8. Еленин Г.Г., Крылов В.В. Уравнения равновесия многокомпонентного неидеального решеточного газа на подрешетках // Математическое моделирование. 1990. Т.2, № 1. С.85.
9. Еленин Г.Г., Троцкий Ю.В. АРИАДНА - система нелинейного анализа для IBM PC // Математическое моделирование. 1991. Т. 3, № 10. С. 126.
10. Еленин Г.Г., Троцкий Ю.В. Программа для бифуркационного анализа нелинейных задач АРИАДНА. Версия ar98. Часть 1// Москва, препринт Диалог-МГУ, 1997, 21 с.
11. Еленин Г.Г., Лысак Т.М. Необходимые условия мягкого возбуждения диссипативных структур для одного семейства моделей гетерогенно-каталитических реакций // Математическое моделирование. 1989. Т. 1, № 9. С. 92.
12. Еленин Г.Г., Троцкий Ю.В. Существование, единственность и множественность решений, соответствующих сверхструктуре $C(2 \times 2)$ в неидеальном слое адсорбата // Математическое моделирование. 1990. Т. 2, № 1. С. 126.
13. Еленин Г.Г., Троцкий Ю.В. Параметрический анализ задачи о равновесных сверхструктурах $C(2 \times 2)$ и $P(2 \times 1)$ на решетке $L(100)$; хаотическое приближение // Москва, препринт Диалог-МГУ, 1997, 21 с.
14. Еленин Г.Г. Результаты качественного анализа инвариантных решений распределенных моделей равновесного состояния неидеального слоя адсорбата// Математическое моделирование. 1992. Т. 4, № 6. С. 80.
15. Еленин Г.Г., Лысак Т.М., Троцкий Ю.В. Каскады фазовых переходов типа порядок-беспорядок и типа расслоения на фазы на решетке $L(100)$. Хаотическое приближение // Москва, препринт Диалог-МГУ № 1278, 1998, 19с.
16. Еленин Г.Г., Лысак Т.М., Троцкий Ю.В. Полный бифуркационный анализ задачи о равновесных сверхструктурах $C(2 \times 2)$ и $P(2 \times 1)$ на решетке $L(100)$. Хаотическое приближение // Москва, препринт Диалог-МГУ № 1279, 1998, 17 с.
17. Golubitski M., Schaeffer D. Singularities and Groups in Bifurcation Theory. New York, Springer. 1985. Vol. 1. P. 463.
18. Vanderbauwhede A. Local bifurcation and symmetry // Pitman Advanced Publishing Program (Boston-London-Melbourne), 1982, 350 p.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию 25.04.02
после доработки 22.07.02

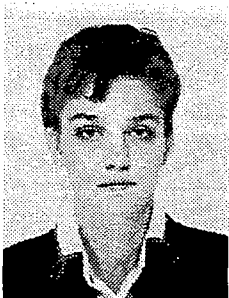
**DOMAINS OF THE SUPERSTRUCTURE $C(2 \times 2)$ EXISTENCE
IN A TWO-COMPONENT ADSORBATE LAYER ON THE $L(100)$ FACET
(QUASICHEMICAL APPROACH)**

Yu.V. Troshchiev, T.M. Lysak

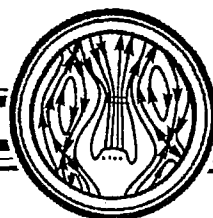
Analysis of a five-parameter nonlinear set of equations for steady states of a non-ideal adsorbate layer at the $L(100)$ facet in the quasicheical approach with regard of the superstructure $C(2 \times 2)$ has been performed. Domains of the superstructure existence have been found and classified with regard of their finite size. The results can be used for investigation of coadsorption and diffusion of two nonreacting chemical components. The used mathematical methods are of self-sufficient interest, because they can be used for rather arbitrary nonlinear mathematical models.



Трошчиев Юрий Витальевич - родился в Арзамасе-75 Горьковской области (1963), окончил Московский государственный университет (1985). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1992). Является автором и соавтором 25 научных статей. Старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования в физике факультета ВМиК МГУ.



Лысак Татьяна Михайловна - родилась в Москве (1962), окончила Московский государственный университет (1985). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1990). Является автором и соавтором более 30 научных работ. Старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования в физике факультета ВМиК МГУ.



Изв. вузов «ПНД», т.10, № 6, 2002

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ТВОРЧЕСТВА: СТИХИ И ФОРМУЛЫ

М. Рабинович

Они друг друга возбуждают,
Заполнив время и пространство,
И, как любовники, страдают
От вечного непостоянства. [1]

И ученые и поэты задумываются о природе творчества. Много написано по этому поводу и теми и другими. В предлагаемых заметках я попытался соединить свой жизненный опыт работы в науке с не слишком длительным поэтическим опытом и выразить то общее, что, как мне кажется, присуще творчеству и в поэзии и в науке. Я иллюстрирую сказанное стихами классиков, но также и своими, поскольку точно знаю, что хотел ими выразить.

Нехватка средств

Поэзия многозначнее науки и часто то, что удастся выразить словами, больше и глубже, чем сами слова, и даже их отрицает! Именно поэтому так важен воздух стиха, создаваемое им настроение, не только слова, но и образуемые ими структуры, включающие интервалы между словами. Формулы же есть формулы. Материал можно изложить ярче или глуше, с педагогическим мастерством или без одного, но если теорема доказана, результат есть! Вот доказать-то ее часто и не хватает средств (то есть теорем, доказанных прежде). Идея есть, а результата нет! То же и у поэта:

Что этим мукам нет имен,
Я должен был бы знать заранее,
Но я искал их, и клеймен
Позором этого старания.

Борис Пастернак, «Голод», 1922

Потому и творчество, что средств не хватает.

И опять я отвечаю моему вечному оппоненту, моему второму «я»: хотя науке, вроде бы, нужна холодная голова, а поэтическое «перо пишет плохо, если в

чернильницу не прибавить хотя бы несколько капель собственной крови» (Одоевский), в поэзии и науке гораздо больше общего, чем кажется на первый взгляд. Эйнштейн в речи, посвященной 60-летию Планка, заметил: «Человек стремится каким-то адекватным способом создать в себе простую и ясную картину мира... Этим занимаются художник, поэт, философ, естествоиспытатель. Каждый по-своему. Душевное состояние, способствующее такому труду, сродни чувству верующего или влюбленного» [2].

Писатель Марк Харитонов выразился вполне физическим языком: «Искусство представляется одной из сил, призванных противиться энтропии, распаду, гибели» [3]. Добавим, что и поэзия и наука в разной, конечно, форме творят информацию. Она и есть, с отрицательным знаком, изменение энтропии, о которой говорит писатель.

Озарение

Есть вещи, которые бессмысленно объяснять - вдохновение, любовь, озарение. Всякое объяснение подобных вещей есть в некотором роде обман или, как говорят в науке, «заметание трудностей под ковер». Потому что эти вещи - колдовство. В одном из фантастических рассказов обнаружилась скрипка Страдивари, на деке которой удалось прочесть секрет ее изготовления. Сам секрет почему-то не приводился. Пришлось додумать:

Озвучим жизнь плодами мастерства.
Рецепт потомкам будет интересен:
Берем совсем немного колдовства,
Стамеску и настрой старинных песен. [1]

Все, кому удавалось открыть, придумать или сочинить нечто нетривиальное, уверен, задавался вопросом: как это я смог догадаться? Ответ универсальный: А не знаю! Вспомним: «Ай да Пушкин, ай да сукин сын!». И, тем не менее, условия, способствующие открытиям или озарениям, хорошо известны, и они общие и для Стихов, и для разрешения кажущихся неразрешимыми научных загадок. Надо, как выразился Анри Пуанкаре, довести себя до состояния чрезвычайного умственного напряжения, граничащего с галлюцинациями, и тайна откроется. Возможно, в ассоциативной форме:

Мир формул, логики и знаков
Не лед, а пламень, он неодинаков.
Он требует от быга отрешенья
И разряжается неведомым решением. [4]

Без эмоционального напряжения, высочайшей степени душевной открытости стихи не затрагивают, даже если выглядят стихами. Скушны! Не то, что у Бориса Слуцкого:

Пограмотней меня и покультурней!
Ваш мозг - моей яснее головы.
Но вы не становились на котурны,
На цыпочки не поднимались вы!

А я - пусть на ходулях - дотянулся,
Взглянуть сумел поверх житья-бытья,
Был в преисподней и назад вернулся,
Вы - слушайте!

Рассказываю - я. [5]

Читаешь эти стихи и аж сердце колотится, такой возникает резонанс. Абсолютно антискушны и стихи Леонида Мартынова, которому я посвятил такие строки:

У многих ладные стихи:
И музыкальны и красивы,
Но нету в них твоей строки,
Что придает им силу взрыва.

Интриги нет и колдовства,
Телескопического слова,
В них не хватает торжества
И «наваждения лихого». [1]

Ощутить колдовство дано многим. Не надо только обманывать себя и выдавать то, что получилось, за то, что хотелось

Чувств порыв возвышает сознание.
Уж сердечный не трогает собой.
Продолжают свое состязанье
Жизнь со смертью,
Желание с судьбой. [4]

Язык, символ, звук

Мы учились не говорить, а лепетать - и,
лишь прислушиваясь к нарастающему
шуму века и выбеленные пеной его гребня,
мы обрели язык.

Осип Мандельштам

Конечно, речь идет о языке, на котором хочет творить Художник, Личность. Степень несвободы в науке и поэзии разная. Много можно говорить на эту тему, но скажу только, что без страстного стремления обрести индивидуальность и ученому и поэту худо. Безликость, уравниловка, страх подавляют даже попытку к творчеству:

От общих фраз устав когда,
Уходим в тишину
И слышим, как молчит вода
И чувствуем волну,
Что излучает лес,
Ее тревожный шопот.
Уходит боль
И в корчах бес -
Теней не страшен топот.
Тогда из судорог молчания
Слова рождаются с трудом.
Они похожи на рычание,
Но скоро станут языком. [4]

Твоим собственным языком. Когда и он «заиграется» и станет банальным, придется творить новый. И это процесс непрерывный. Среди тех, кто занимается наукой, давно известно, что некоторые авторы лучше своих работ, а некоторые хуже. Совпадение очень редко. То же и в поэзии. Как волновали стихи, исполняемые поэтами-шестидесятниками в огромных аудиториях. При проговаривании же их наедине эффект часто оказывался на порядок слабее - не хватало рядом яркого талантливого автора. Зачем, вообще, поэт или ученый стремятся выступить? Ответ многозначен.

Александр Генис, говоря о Бродском [6], заметил, что поэт, произнося строчки вслух, выпускает их на волю; звукам возвращается то, что у них отняли чернила, - жизнь. В научном творчестве очень похоже: написание статьи сглаживает внутренние метания по пути к результату, загоня эмоциональное

напряжение, сопутствующее его поиску, в прокрустово ложе журнального стереотипа. На семинаре же, вольно или невольно, автор под влиянием общения с аудиторией раскрывается и озвучивает неформальную, наиболее интригующую сторону работы. И в поэзии и в науке очень важен для дальнейшего движения отклик или эхо. Звук же благоприятствует эху:

За эхом и мечтами
Готов идти в ночи.
Где ж я тебя оставил?
Ответь мне, не молчи.
С годами связи рвутся,
Седеет голова,
Но эхом отдаются
Отдельные слова. [1]

Есть еще одна причина, по которой хочется выступить. Наверное, подходящий для нее термин - «освобождение». Это потребность высветиться, выплеснуть энергию радости открытия, мысли, рифмы. Поделиться ими с аудиторией, освободиться от напряжения уже достигнутого и двигаться дальше. Не всегда автору (или одному из соавторов; правда, стихов, написанных в соавторстве, я не встречал) удается достичь контакта с аудиторией, но если удастся, ничто не может сравниться с возбуждением и наслаждением, которое доставляет взаимопонимание и автору и слушателям:

Названия уже не важны,
Зал понимает праязык.
Без лишней грамоты бумажной
Твой голос в души нам проник. [4]

Обратная связь с аудиторией, и отрицательная тем более, модулирует собственное мнение о сделанном и помогает, с одной стороны, добиться более яркого и чистого звучания, а с другой - окончательно утвердиться в правильности избранного пути. О гениях не говорю. Их восприятие истины самодостаточно. Они и с богом-то не особенно считаются, а уж с мнением окружающего мира тем более. По выражению Вересаева «Пушкин своего права художественного творчества не отдал бы ни за что - ни за Бога, ни за народ, ни за какие блага мира» [7]. Подобную мысль выразил Бродский. На вечере памяти поэта, состоявшемся на сороковой день после его кончины в соборе Святого Иоанна (Нью-Йорк), прозвучал записанный голос Бродского:

Меня упрекали во всем, кроме погоды,
И сам я грозил себе часто суровой мздой.
Но скоро, как говорят, я сниму погоны
И стану просто одной звездой.

«Не сердце, а голос последним покидал тело поэта» [6].

И у великих, однако, и в науке и в поэзии случаются периоды исключительного разочарования и предельного неверия в себя. Тогда авторы уничтожают рукописи (Гоголь, Булгаков) или даже себя (Больцман, Эренфест). Не с таким экстремальным исходом, но подобные сомнения есть неотъемлемый элемент творчества. Точно заметил Владимир Войнович: «Для писателя самодовольство хуже самоубийства. Собственно, оно само по себе и есть вид творческого самоубийства» [8]. Выходу из кризиса способствует, конечно, благожелательность среды, но более - полная концентрация внутренней энергии:

Язык уперся в альвеолы,
Отрублен крик и пущен прочь.
Со мной упрямые глаголы -
Суметь, осмыслить, превозмочь. [4]

Простота и красота

Мы ценим точных формул простоту.
В них хочется всмотреться снова.
Они напоминают красоту
Удачно сказанного слова. [9]

Настоящая наука, как и поэзия, всегда красива. Эмоциональное восприятие этой красоты даже проникает иногда напрямую в научную терминологию. Например, в современной теории поля есть такое определение: Красота (прелесть) - аддитивное квантовое число, присущее красивым или прелестным адронам, сохраняющееся в процессах сильного и эл-магнитного взаимодействий и нарушающееся в процессах слабого взаимодействия. Носителем «красоты» является *b*-кварк [10]. В других сферах человеческого существования носителями красоты служат другие элементы, а сохранения красоты в нашем классическом неравновесном мире вообще не наблюдается. Она может прирастать, благодаря человеческой деятельности, в определенные времена и в определенных областях пространства, а может и теряться, и не только бесследно, но и необратимо - разрушаться.

Можно ли как-то формализовать красоту в искусстве? По-видимому, нет. Красота, в принципе, интуитивна и неуловима! И тем не менее... Поскольку восприятие красивого часто воспроизводимо во времени и инвариантно по ансамблю, то есть подобно характеризуется разными людьми, какие-то общие признаки красоты существуют. Часто - это простота и симметрия.

Кристаллограф Чарльз Банн писал: «Кристаллические формы, исключительно примитивные с точки зрения художника, несут в себе нечто от эстетической привлекательности простоты...». Вспомним «Черный квадрат» Малевича. Классические стихотворные размеры с их очевидной периодичностью ударений как раз и есть кристаллические формы. Встречаются, однако и более изощренные размеры, заключающие в себе красоту, которая сразу не бросается в глаза и не поддается мгновенной оценке. Это, в частности, пятистопный анапест, для которого отношение количества ударений в соседних строках близко к так называемому «золотому сечению» [11]. «Это число $q=(1+5^{1/2})/2$ играет исключительную роль в попытках сведения красоты пропорций к математической формуле» (Герман Вейль).

Поэты, использующие пятистопный анапест (Фет, Мандельштам, Бродский) вряд ли думали о золотом сечении, но ощущение красоты присуще их естественному восприятию мира:

Все умолкает вокруг.
Только черный буксир закричит
Посредине реки,
Исступленно борясь с темнотою,
И летящая ночь
Эту бедную жизнь обручит
С красотой твоей
И с посмертной моей правотою.

Бродский, «Стансы городу», 1962

Возможно, многие читатели любовались удивительной красоты восточными орнаментами с их как бы ускользающей регулярностью. Это то, что сейчас называют квазикристаллами [11]: они характеризуются дальним порядком, но «сдвиговая инвариантность» в них нарушена. В их пропорциях также встречается золотое сечение или близкие к нему отношения (составленные из чисел Фибоначчи): 3:2, 5:3, 8:5, 13:8, 21:13, ..., что в пределе дает число 1.618... Это число лежит в основе построения многих произведений мировой архитектуры, музыки, живописи* и, как уже говорилось, поэзии.

Золотое сечение известно с древности:

Гармония стиха
И древнего собора,
Как будто услышал
Мелодию. Валторна
Рождает впечатление
Простоты,
Что в золотом сечении
Находит выражение
Красоты.
Подобие лет,
Событий странных
Не понимаем мы, пока
Не открываем постоянных,
Что связывают
Души и века. [1]

Наряду со способностью удивляться, умение чувствовать красоту «...глубокую красоту, которая кроется в гармонии частей и постигается только разумом... и которая дает удовлетворение сама по себе...» (Анри Пуанкаре [12]) и определяет выбор профессии теми, кто решил посвятить себя занятиям наукой. Подобную мысль в своей статье «Замыслы гения» высказал Юрий Лотман: «...искусство служит орудием мысли именно потому, что оно остается искусством и что создание красоты есть высокий акт познания... Такое понимание миссии искусства, вплотную подводя к наиболее современным идеям, снимало вековое противопоставление красоты и познания» [13]. Как считает Лотман, именно этому посвящен Пушкинский отрывок:

О сколько нам открытий чудных
Готовит просвещенья дух,
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений, парадоксов друг,
И случай, Бог-изобретатель...

Для совершенства красоты, помимо симметрии, нужно еще нечто. Природа потому и прекрасна, что Бог создал дефекты. Насколько привлекает изображение спиральных волн или странных аттракторов, суть которых определяется особенностями. Это могут быть особенности векторного поля в фазовом пространстве, где встречные потоки сталкиваются и расходятся, разделяемые сепаратрисами, либо исчезают в черной дыре аттрактора. Это могут быть особые слова или ударения в ткани стиха. Особенности концентрируют внимание и

* Альбрехт Дюрер и Леонардо да Винчи часто использовали пропорции золотого сечения, например, для выделения главного действующего лица среди других, изображенных на полотне. По мнению некоторых экспертов неомимпрессионист Сёра (Seurat, 1859-1891) использовал золотое сечение в каждой своей картине. Особенно наглядны его «Парад» и «Купальщики». В музыке в связи с этим магическим отношением чаще других упоминается Клод Дебюсси.

являются часто конечной целью мысли, подсказки, движения. Бывает, что именно такое слово - аттрактор - и определяет смысл стиха:

Галилей
Ослеп от старости
Или от трубы подзорной?
Галилей
Ослеп от ярости,
Ибо жил как *поднадзорный*

Леонид Мартынов, 1976

На таких аттракторах базируется интрига стиха:

Отбросив ворохи цитат,
Ты получаешь результат.
Он столь безумен на пороге,
Что станет истиной в итоге. [4]

Возможно, «особенности-аттракторы» и есть «кванты стиха», которые сейчас вдохновенно ищут многие ученые литературоведы (см., например, [14]). Иногда такие особенности всюду плотны:

Он знал, как стонет костный мозг,
Как кости бьются в лихорадке;
Лишенным плоти не дано
Соединенья и разрядки.

*Томас Элиот, «Шепотки бессмертия»,
перевод А. Сергеева [15]*

Чтоб кровь остынуть не успела

Ну что ж, мой друг, двух жизней нам не жить,
И есть восхода час и час захода.
Но выбор есть, и дивная свобода
В том выборе, где голову сложить!

*Юрий Левитанский, из кн. «Приближаясь
к спокойному устью»*

Есть в науке такой подход - работать в «эпсилон-окрестности», где эпсилон - малая величина. Попросту, это - метод малых обобщений. Не пытаться уйти в отрыв и искать что-то действительно оригинальное, а делать, что все и как все. Только чуть-чуть вширь или вглубь. И это полезно и в науке и в поэзии, поскольку приводит к накоплению массы. Только гигантам дано, вопреки всему, сознательно вырваться за границы «эпсилон-пространства» и не только увидеть мир с неожиданной стороны, но и сотворить для его описания и предсказания новые подходы и технологии. В точных науках это, к примеру, Пуанкаре (метод фазового пространства), Дирак (матричная форма квантовой механики), Фейнман (диаграммная техника). В поэзии - Мандельштам, Бродский, Элиот,.. Например, у Мандельштама:

Художник нам изобразил
Глубокий обморок сирени.

Или у Бродского:

Сжимая пространство до образа мест,
Где я пресмыкался от боли...

Можно совершить прорыв, оперируя и хорошо известными методами. Примеры в

физике - великий Бор, Яков Френкель. Они новых технологий не изобрели, но обладая чудовищной интуицией, фактически создали новые области. В поэзии следует назвать Есенина и особенно мною любимого Заболоцкого (красотой и ясностью мышления он напоминает Бора):

Как мир меняется! И как я сам меняюсь!
Лишь именем одним я называюсь, -
На самом деле то, что именуют мной, -
Не я один. Нас много. Я - живой.
Чтоб кровь моя остынуть не успела,
Я умирал не раз. О, сколько мертвых тел
Я отделил от собственного тела!

Николай Заболоцкий, «Метаморфозы», 1937

Не зря в науке считается, что область интересов следует менять каждые семьдесят лет. Инерция прошлых открытий ухудшает зрение, снижает порог и, в определенном смысле, развращает. У поэтов то же самое. Как сформулировал критик Владимир Соловьев: «Самое трудное - освободиться от гипноза того, что ты когда-то сам сочинил... Художник должен «отличать поражение от победы» (наперекор Пастернаковскому утверждению) и время от времени глядеть на себя со стороны - неочарованно, трезво, даже сурово» [16]. В этом-то и радость творчества:

Позволь познать свои пороки,
Их приручить иль извести,
Чтобы в отпущенные сроки
Успеть другие обрести. [4]

Зависимость - еще одно испытание на пути творчества. Много говорено и писано о творческой зависимости от научного или поэтического лидера. Передозировка общения (прямого или косвенного) опасна для личности. Многие ленинградские поэты и сейчас пишут «в духе» Бродского. Хорошо известны имена тех, кто отточил свое мастерство благодаря близости к Маяковскому, но они так и не обрели собственного сильного голоса. Для крупных личностей, однако, передозировка не смертельна и, являясь чем-то вроде сильной прививки, способствует творческому иммунитету. Об этом пишет в замечательной книжке «Воскресение Маяковского» Юрий Карабчиевский [17], приводя в качестве примера Пастернака и Заболоцкого: «Мы должны быть по гроб жизни благодарны Брикам и всей лефортовской веселой компании за то, что они оттолкнули, исторгли из себя его (Пастернака, - М.Р.) чуждую душу, вместо того, чтоб навек ее поглотить.

Все изменяется под нашим Зодиаком,
Но Пастернак остался Пастернаком.

Эта эпиграмма Ал. Архангельского звучит сегодня как вздох облегчения».

Выход за рамки «эпсилон-пространства», вначале сильно раздражающий коллег, довольно быстро овладевает умами, если вновь предлагаемые методы адекватны законам природы, гармонии, восприятия творчества. Не всегда эта адекватность улавливается автором. Сбои случаются и у великих:

Зачем Урания, Августа -
Чтоб в трепете зашелся жлоб?
А вот название «Капуста»
Для лирики не подошло б?

Лев Лосев, «Об обуви» [18]

Подобные сбои означают лишь необходимость пытаться снова и снова...

Пространство - время

Легко объяснил он кому-то:
В сложении слаб человек,
Как тянутся долго минуты
И странно, как короток век. [1]

Интуитивное представление о времени связано с понятием вечности - некоей неизмеримой абсолютной длительности, на фоне которой разворачивается жизнь с ее причинно-следственными соотношениями и понятиями раньше, позже, одновременно. Такое время неравномерно - оно зависит от наполненности событиями, их значимости; может сжиматься и растягиваться:

У времени причудливые формы.
А измеряется оно
Гудком состава у платформы,
Неловкими объятьями в кино.
Стиха прерывистым дыханием,
Оставшимся глотком воды.
Твоим, любимая, молчанием
И расстояньем до беды. [1]

Математическое же время никакой обратной связи с восприятием не имеет. Оно протекает равномерно и называется длительностью. Такое абсолютное или истинное время, как и абсолютное - однородное и бесконечное - пространство, поэта не волнует. Оно ему не интересно, поскольку не соответствует многомерному образному восприятию переменчивого мира. В этом смысле поэту гораздо ближе идея Эйнштейна о том, что геометрия единого пространства-времени зависит от потенциалов гравитационного поля. Пространство-время, оказывающееся в общей теории относительности неоднородным и неизотропным, более адекватно поэтическому мышлению. Для поэта подобными гравитационными потенциалами служат люди или события. Конечно, гравитационные заряды влияют друг на друга, рождая новые пространственно-временные связи, и таким образом воздействуют и на само творчество.

Во все эпохи ученые и поэты одинаково чувствовали исключительность своего времени. Правда, для ученого вопрос об однонаправленности времени кажется почти решенным, по-крайней мере, когда можно разделить причину и следствие. Для поэта же время воспринимается почти как пространство - пользуясь воображением и памятью, по нему можно блуждать в разных направлениях и даже жить и творить одновременно в нескольких временах:

Двумерный лист, трехмерная рука,
И можно прочитать стихотворение
Во времени, чья бесконечная река
В четвертое уходит измерение,
Стекая в память неподвластно глазу.
В потемках, двигаясь вдоль временной оси,
Мы ощущаем, пусть не сразу:
В средневековье дождик моросит,
И Леонардо буйный разум
Одновременно
В разных временах творит:
В античном, греков продолжая,
В своем, изобразив Мадонны лик,
И в нашем, турбулентность постигая...
Он многомерность Времени постиг. [1]

Разрыв между временем за окном и поэтическим временем может быть произвольно велик:

Читатель мой, сентябрь уж миновал
И я все больше чувствую провал
Меж временем, что движется бегом,
Меж временем и собственным стихом.

Иосиф Бродский

И, тем не менее, и поэтическое время в итоге оказывается однонаправленным. Просто потому, что проходит:

Приходит время убирать
Сеть паутины в доме отчем,
Приходит время умирать,
Но и оно проходит, впрочем!

Леонид Мартынов, «Приходит время», 1979

Наверное многие замечали, что мгновенные снимки - фотографии, даже правильно расположенные в смысле причинно-следственных связей, не дают нам реального ощущения времени. В них нет временного масштаба. Кажется, что между двумя снимками произошло нечто наиболее важное, навсегда утраченное. Мы ощущаем время, проживая его; и само оно, и даже его направление, зависят от нашего знания, нашего состояния и тревог:

...И все, чего нет на картине,
Ему пережить суждено.

Вадим Шефнер

Завершая эти краткие размышления об общих чертах творческого процесса ученого и поэта, добавлю, что результат этого процесса R более всего зависит от произведения удачи L на успех S : $R \sim L \cdot S$. Здесь S есть результат наших волевых усилий, L же определяется не нами. Дай Вам бог, читатель, и того, и другого.

Библиографический список

1. Рабинович М. Кольца времени. Нижний Новгород: ДЕКОМ, 2002.
2. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966-1967.
3. Харитонов М. Способ существования: Эссе. М.: Изд-во «НЛО», 1998. 416 с.
4. Рабинович М. Из неопубликованного.
5. Слуцкий Б. Странная свобода. М.: Русская книга, 2001.
6. Генис А. Бродский в Америке // В кн. «Иосиф Бродский: творчество, личность, судьба». СПб.: Изд-во журн. Звезда, 1998. С. 8-15.
7. Вересаев В.В. В двух планах. М.: Захаров, 2000.
8. Войнович В. Портрет на фоне мира. М.: Эксма-пресс, 2002.
9. Рабинович М. Вверх по склону. Нижний Новгород: ДЕКОМ, 2001.
10. Дашевский В.Г. Красота. Физическая Энциклопедия. Т. 2. С. 489. М.: Советская Энциклопедия, 1990.
11. Рабинович М.И., Езерский А.Б. Динамическая теория формообразования. М.: «Янус-К», 1998.
12. Пуанкаре А. Наука и метод // Избранные труды. М.: Наука, 1971-1974.
13. Лотман Ю. Замыслы гения // Известия № 362, 28 декабря 1986.
14. Albright D. Quantum Poetics, Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain, 1997.

15. Американская поэзия в русских переводах / Сост. С.Б. Джимбинов. М.: Радуга, 1983.

16. Соловьев В. Три еврея или утешение в слезах. М.: Захаров, 2002.

17. Карабчиевский Ю. Воскресение Маяковского. М.: Страна и Мир, 1996.

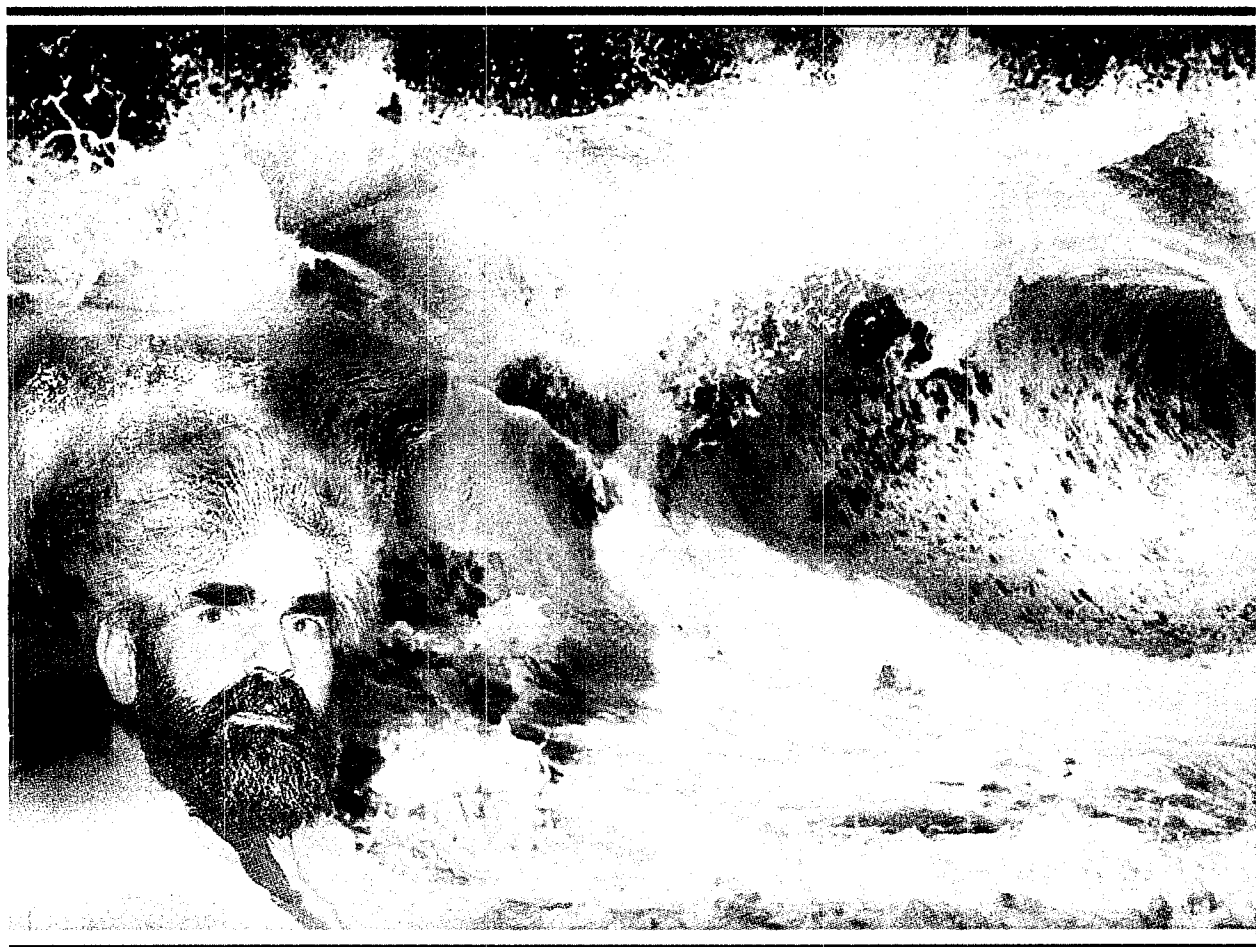
18. Лосев Л. СТИХИ-собрание-ПРОЗА. Екатеринбург: У-Фактория, 2000.

Сан-Диего, Калифорния, США -
Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 22.10.2002



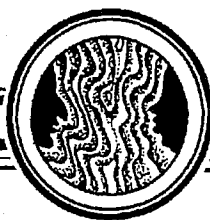
Рабинович Михаил Израилевич - родился в Горьком (1941), окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1962). Работает в Институте прикладной физики РАН и Нижегородском государственном университете. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1967) и доктора физико-математических наук (1973) в области теории колебаний и волн. Автор монографий «Введение в теорию колебаний и волн», «Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems», «Nonlinearities in Action: Oscillations, Chaos, Order, Fractals», «Introduction to Nonlinear Dynamics for Physicists», более двухсот статей и обзоров в областях динамической теории турбулентности в жидкости, хаотической динамики радиофизических систем, пространственно-временного хаоса и порядка, нелинейных волн в неравновесных средах и др. Член редколлегии журналов «International Journal of Bifurcation and Chaos», «International Journal of Nonlinear Science Today», «International Journal of Nonlinear Science», «International Journal of Statistical Physics», «Радиофизика». Член Американского физического общества.



1924 - 2002

Предчувствиям не верю, и примет
Я не боюсь. Ни клеветы, ни яда
Я не бегу. На свете смерти нет:
Бессмертны все. Бессмертно всё. Не надо
Бояться смерти ни в семнадцать лет,
Ни в семьдесят. Есть только явь и свет,
Ни тьмы, ни смерти нет на этом свете.
Мы все уже на берегу морском,
И я из тех, кто выбирает сети,
Когда идет бессмертье косяком.

Арсений Тарковский



Ю.Л. КЛИМОНТОВИЧ

27 ноября 2002 года в возрасте 78 лет скончался профессор Московского государственного университета Юрий Львович Климонтович. Ушел из жизни крупный физик-теоретик, замечательный, честный, добрый и порядочный человек, наш учитель и коллега. Отечественные наука и высшее образование понесли невосполнимую утрату.

Вся жизнь Юрия Львовича была связана с физическим факультетом МГУ, который он окончил в 1948 году. В становлении Юрия Львовича как одного из ведущих специалистов в области статистической физики огромную роль сыграли профессор В.С. Фурсов и академик Н.Н. Боголюбов. Под руководством В.С. Фурсова Юрий Львович выполнил дипломную работу, а Н.Н. Боголюбов был его руководителем во время учебы в аспирантуре, которую Юрий Львович успешно окончил в 1951 году. С 1955 года и до последнего дня жизни Юрий Львович работал на физфаке МГУ доцентом, профессором, главным научным сотрудником кафедр общей физики и волновых процессов, физики низких температур.

За свою жизнь Юрий Львович совершил поистине научный подвиг, создав свою версию, свое видение и понимание такой фундаментальной области теоретического естествознания, которой является статистическая физика. Им написано 11 научных монографий и учебников, 10 из которых были сразу переведены на английский язык и изданы ведущими научными издательствами мира. Круг фундаментальных научных проблем, которые были им существенно развиты или решены заново, касается таких ключевых направлений как метод микроскопической фазовой плотности в теории плазмы, кинетическая теория неидеальных газов и плазмы, кинетическая теория неравновесных флуктуаций и электромагнитных процессов, динамические и флуктуационные процессы в лазерах.

Последние 20 лет жизни Юрий Львович посвятил исследованиям по синергетике. Им введены новые критерии самоорганизации, дано единое описание кинетических, гидродинамических и диффузионных процессов в активных открытых системах. Создана, по сути дела, новая наука - статистическая теория открытых систем.

Выдающиеся научные достижения Ю.Л. Климонтовича по достоинству были оценены как в России, так и за ее пределами. В 1991 году ему присуждается

Государственная премия России, он награждается Почетной медалью Института синергетики Академии творчества России, Юрий Львович становится Соросовским профессором, а затем Заслуженным Соросовским профессором.

В 1995 году Ю.Л. Климонтовичу присуждается научная премия по физике Международного Фонда им. Александра фон Гумбольдта, ранее он награждается почетной медалью и избирается Почетным доктором Ростокского университета (Германия).

Юрий Львович был одним из организаторов и душой междисциплинарного научного семинара «Синергетика», который успешно работает в МГУ уже более 20 лет. Результатом его активного интереса к проблемам теории самоорганизации и синергетики и его личной дружбы с профессором Германом Хакеном и лауреатом Нобелевской премии Ильей Пригожиным стало своевременное издание в России под редакцией Юрия Львовича переводов ряда фундаментальных научных произведений по синергетике. В том, что Российская наука своевременно и правильно восприняла идеи синергетики, безусловная заслуга Юрия Львовича.

Юрий Львович был удивительно обаятельным, добрым человеком и обладал сверхестественной внутренней силой и энергией, которые буквально притягивали к нему молодых людей, занимающихся наукой. Общение с Юрием Львовичем дало путевку в науку очень большому количеству молодых ученых, которым посчастливилось с ним встретиться. Я могу гордиться тем, что принадлежу к их числу. Знакомство с Юрием Львовичем весной 1980 года, последующая стажировка в МГУ, научные дискуссии на семинарах, в личных беседах, на конференциях определили и мою научную судьбу. Доброжелательное отношение к результатам наших исследований, помощь в трудные минуты, вера в успех дела послужили фундаментом для организации лаборатории нелинейной динамики в СГУ. Мы гордимся тем, что у истоков научной деятельности лаборатории стоял Юрий Львович.

Это был действительно уникальный человек. Там, где он появлялся, обязательно рождалось что-либо новое и интересное. Достаточно указать несколько таких «точек притяжения», созданных Юрием Львовичем: Киев, Кишинев, Ереван, Екатеринбург (Свердловск), Саратов. За пределами России это Ростов, Берлин, Варшава, Мадрид и другие научные центры. Необходимо отметить, что за всю свою жизнь Юрий Львович никогда не был официальным руководителем какого-либо учебного или научного подразделения. Он не был даже заведующим кафедрой. Однако это не мешало ему быть признанным научным руководителем созданной им международной научной школы по статистической физике.

Последние 20 лет жизни Юрия Львовича свидетельствуют о его глубоком интересе к жизни и деятельности Саратовского университета. Он был частым гостем СГУ: выступал с научными докладами, читал лекции для молодых ученых, участвовал в работе научных конференций и школ, организованных физиками СГУ. Он высоко оценивал журнал «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» и был его активным соавтором. Его постоянная заинтересованность в обсуждении острых проблем нелинейной динамики, биофизики, теоретической физики как с научной, так и с образовательной точки зрения, сыграла ключевую роль во многих наших достижениях. Можно указать, например, создание, помимо лаборатории нелинейной динамики, лаборатории экспериментальной физиологии и Научно-образовательного центра нелинейной динамики и биофизики. Предложенная и разработанная Юрием Львовичем программа новой специализации для университетов «Физика открытых систем» стимулировала создание в СГУ института «Открытые системы» и факультета нелинейных процессов. Мы по праву можем гордиться тем, что Юрий Львович был рядом с нами.

Доброта и мягкость характера Юрия Львовича удивительно сочетались в нем

с жесткой принципиальностью по всем без исключения вопросам как научного, так и нравственного плана. Он никогда не шел на компромиссы со своей совестью и за всю жизнь ни разу не изменил себе. В частности, в свое время он отказался стать заведующим кафедрой после смерти профессора В.П. Стрелкова, так как счел поставленные перед ним администрацией МГУ условия неприемлемыми для себя. Вызывает восхищение его последовательно жесткое, активное неприятие политики травли академика А.Д. Сахарова. Таких случаев из жизни Юрия Львовича можно привести много. Четкость и ясность его высочайших нравственных критериев, с которыми он подходил к оценке людей и событий, может служить блестящим примером для воспитания молодого поколения студентов и ученых.

Смерть Юрия Львовича - великое горе и несчастье для его родных, близких, друзей и коллег. Утешает лишь то, что он прожил долгую, плодотворную и счастливую жизнь, до последних дней работая с энтузиазмом молодого человека. Мы выражаем глубокое соболезнование семье Юрия Львовича, его близким родственникам и друзьям. Светлая память о Юрии Львовиче навсегда сохранится в наших сердцах.

Зав. кафедрой радиофизики
и нелинейной динамики СГУ,
Заслуженный деятель науки РФ,
д.ф.-м.н., профессор

В.С. Анищенко

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина, А.Ю. Бирюкова*
Обложка и коллаж художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, О.Н. Афанасьевой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Подписка на II полугодие 2003 года
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498,
стоимость подписки на II полугодие 150 руб.


Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136
Банковские реквизиты
р/с № 40603810900000000378 в ЗАО «Экономбанк» г. Саратова,
БИК 046311722, кор.счет банка 30101810100000000722

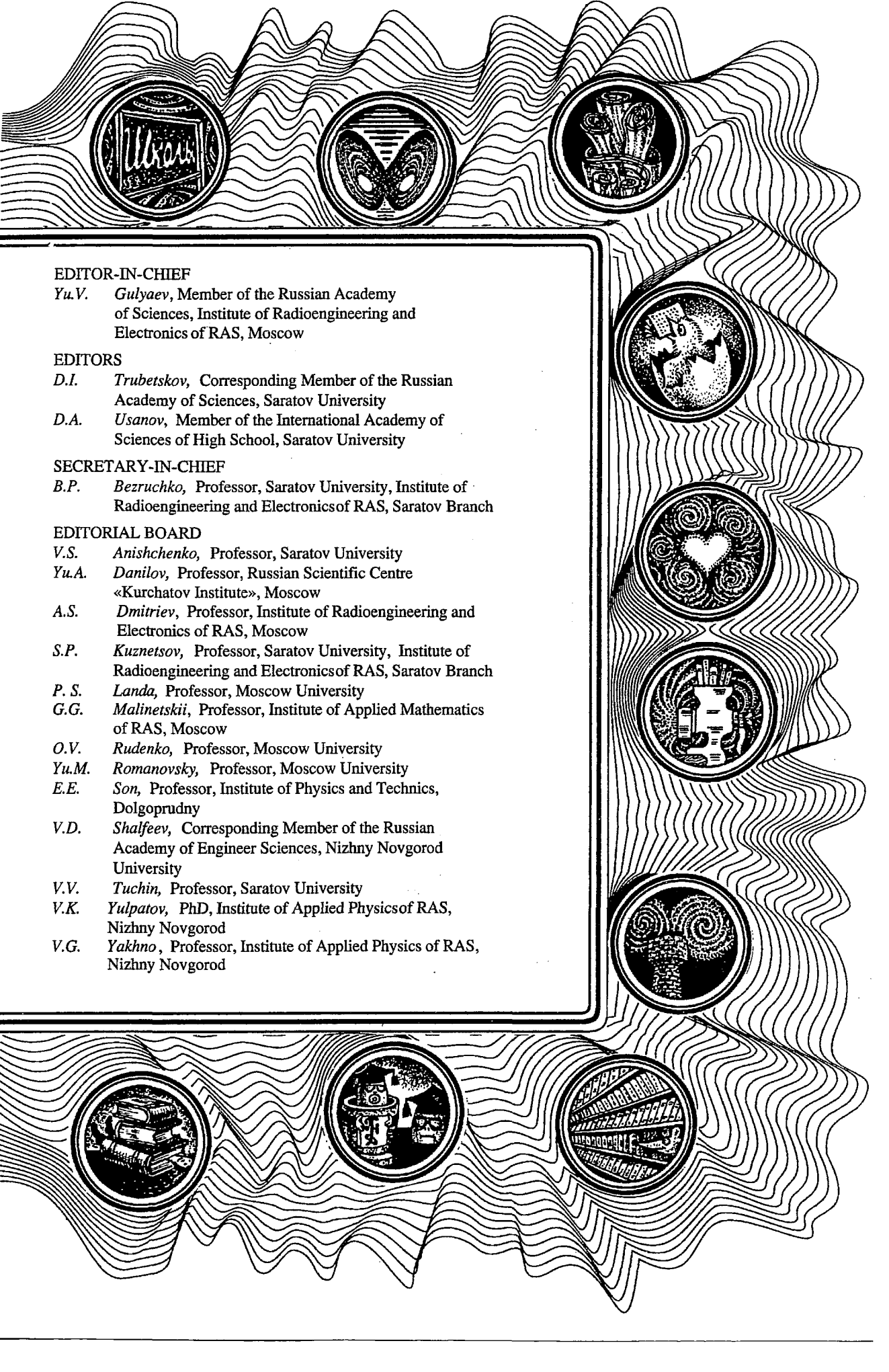
Правила подписки за рубежом на сайте: <http://www.periodicals.ru>

Сдано в набор 9.01.03. Подписано к печати 10.02.03. Формат 70x108/16
Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная. Гарнитура Латинская
Усл. печ. л. 13,0(11,0). Уч.-изд. л. 12,5. Тираж 200. Заказ 287

Издательство ГосУНЦ «Колледж». Лицензия ЛР №020773 от 15.05.98
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел. (845-2)523864, факс (845-2) 523864
E-mail:and@cas.ssu.runnet.ru
<http://cas.ssu.runnet.ru>

Отпечатано на ризографе GR 3750 издательства ГосУНЦ «Колледж»

© Издательство ГосУНЦ «Колледж» 
© Оформление художника Д.В. Соколова, 2003



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Saratov University, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Professor, Russian Scientific Centre «Kurchatov Institute», Moscow

A.S. Dmitriev, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow

S.P. Kuznetsov, Professor, Saratov University, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

P. S. Landa, Professor, Moscow University

G.G. Malinetskii, Professor, Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow

O.V. Rudenko, Professor, Moscow University

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, PhD, Institute of Applied Physics of RAS, Nizhny Novgorod

V.G. Yakhno, Professor, Institute of Applied Physics of RAS, Nizhny Novgorod

*Человек! Возведи взор свой
от земли к небу, -
какой, удивления достойный,
является там порядок!*

Козьма Прутков

