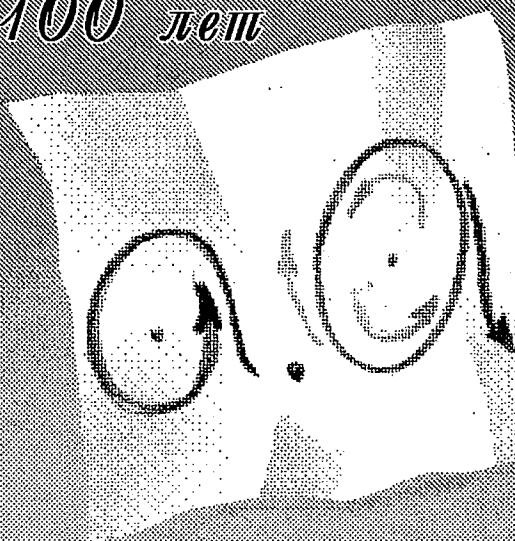


Трикладная Деловая Динамика

100 лет

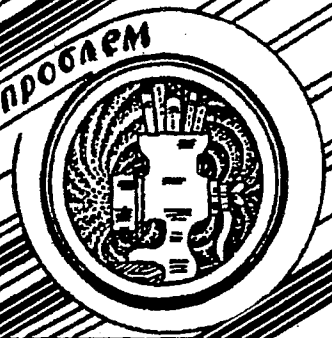


*со дня рождения
А. А. Андропова*





Бифуркации
в динамических
системах различной природы



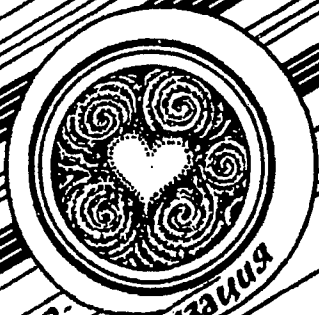
Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики



Конференции, семинары, симпозиумы



Детерминированный
хаос



Автоволны, самоорганизация

Прикладные задачи
нелинейной
теории
колебаний
и волн



Нелинейная
динамика
в лицах



История персонажа

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Калинин, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Крицкий, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В.К. Юлматов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 9, № 1, 2001, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

- Климонтович Ю.Л.* Сверхпроводимость – незатухающий электрический ток
в диссипативной среде. 3
Климонтович Ю.Л. Сверхтекучесть – безвязкое течение в вязкой среде 20

АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

- Казанцев В.Б., Некоркин В.И.* Принципы контроля и координации движений
на основе динамики нейронов головного мозга 38

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

- Подлазов А.В.* Самоорганизованная критичность и анализ риска 49

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

- Караваев А.Д., Рыжков А.Б., Казаков В.П.* Рождение и смерть фрактального
тора в модели реакции Белоусова – Жаботинского 89

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

- Бобров К.Е., Искольдский А.М.* Алгоритмическая классификация типа
временных последовательностей 101

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA

- Ливанова Анна.* Из рассказов об Андронове 108

КОНФЕРЕНЦИИ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ

- Современные проблемы электроники и радиофизики СВЧ. Международная
межвузовская конференция. Саратов, Россия, 20–24 марта 2001 116
Chaotic oscillations and pattern formation. CHAOS '01. VI International School.
Saratov, Russia, October 2–7, 2001 122

- АНОНС 107

DEPARTMENT OF EDUCATION OF RUSSIAN FEDERATION

Izvestiya VUZ

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

scientific-technical journal

published since 1993

Published 6 times a year

Vol.9, №1,2001, Saratov

CONTENTS

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

Superconductivity – not fading electrical current in dissipative medium.
Yu.L. Klimontovich 3

Superfluidity – viscousless flow in viscous medium. *Yu.L. Klimontovich* 20

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

Principles of control and coordination of movement basing on neuro-dynamics.
V.B. Kazantsev, V.I. Nekorkin 38

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Self-organized criticality and risk analysis. *A.V. Podlasov* 49

BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

Birth and death of fractal tore in the Belousov – Zhabotinsky reaction model.
A.D. Karavaev, A.B. Ryzhkov, V.P. Kazakov 89

METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

Algorithmic classification of time series. *K. E. Bobrov, A. M. Iskoldsky* 101

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

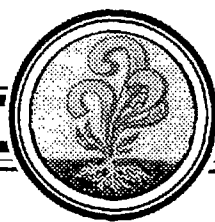
From tales of Andronov. *Anna Livanova* 108

CONFERENCES. MEETING. SYMPOSIUMS. SCIENTIFIC SCHOOLS

Contemporary problems of microwave electronics and radiophysics. International
inter-highschool conference. Saratov, Russia, March 20–24, 2001 116

Chaotic oscillations and pattern formation. CHAOS '01.VI International School.
Saratov, Russia, October 2–7, 2001 122

ANNOUNCEMENT 107



Памяти А.А. Андропова
посвящается

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ – НЕЗАТУХАЮЩИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

Ю.Л. Климонтович

Прослеживаются основные этапы развития теории сверхпроводимости. Из изложенного следует, что, несмотря на успехи, все же отсутствует физическое объяснение возможности существования незатухающего электрического тока в диссипативной среде. В настоящей работе более детально, чем ранее, рассматривается одно из возможных объяснений этого явления. Существование сверхпроводящего тока становится возможным благодаря возникновению фликкер-шума и соответствующих остаточных временных корреляций.

Введение

В 1911 году голландский физик Х. Камерлинг-Оннес обнаружил при температуре 4.12 К сверхпроводимость ртути – электрическое сопротивление ртути внезапно исчезало и оставалось равным нулю при дальнейшем понижении температуры. Через некоторое время сверхпроводимость была обнаружена и у других металлов. Сверхпроводящими оказались и некоторые сплавы. Долгие годы считалось, что сверхпроводимость – это явление физики низких температур. Высокотемпературная сверхпроводимость была обнаружена впервые лишь в 1986 году в Цюрихе К. Мюллером и Г. Беднорцем [1].

В 1933 году В.Мейснером и Р.Оксенфельдом было открыт эффект, заключающийся в следующем. В сверхпроводящем состоянии постоянное магнитное поле, величина которого меньше некоторого критического значения H_C , полностью выталкивается из массивного сверхпроводника. При критической температуре T_C $H_C=0$. Магнитное поле при $H < H_C$ сосредоточено в узком поверхностном слое толщиной порядка 10^{-5} см. Незатухающий ток течет также в поверхностном слое толщиной порядка 10^{-5} см. Величина сверхпроводящего тока в образце, который является частью последовательной цепи, определяется источником тока. Сверхпроводимость исчезает, когда величина тока достигает критического значения. Это явление получило название *эффекта Мейснера–Оксенфельда*.

Обратимся к феноменологическому описанию сверхпроводимости.

Первая феноменологическая теория сверхпроводимости была развита в работе братьев Ф. Лондона и Г. Лондона в 1935 [2]. Они допустили существование сверхпроводимости и показали, что эффект Мейснера – Оксенфельда является неизбежным спутником явления сверхпроводимости. Вопрос о справедливости обратного утверждения оставался открытым. На основе предложенных в работах братьев Лондон феноменологических уравнений в 1950 году ими было предсказано

явление квантования магнитного потока, обнаруженное почти одновременно двумя группами экспериментаторов в 1961 году. Эксперименты подтвердили существование квантования магнитного потока. Оказалось, однако, что электрический заряд в формуле для кванта магнитного потока равен двум зарядам электрона. Это явилось подтверждением *эффекта Купера*, который служил основой «микроскопической теории сверхпроводимости» Бардина – Купера – Шриффера (БКШ) [3].

В 1950 году была опубликована работа В.Л. Гинзбурга и Л.Д. Ландау [4], в которой было обобщение феноменологической теории братьев Лондон. Были предложены уравнения для эффективной волновой функции пар электронов. Параметры их теории определяются измеряемыми значениями критического магнитного поля и глубины проникновения.

В 1950 году был открыт *изотопический эффект* – зависимость критической температуры от массы ионов решетки, что дало основание Н. Фрелиху и Дж. Бардину высказать предположение о существенной роли взаимодействия электронов через колебания решетки. Эта идея и была реализована Л. Купером.

Существенный вклад в теорию сверхпроводимости был сделан в 1957 году Н.Н. Боголюбовым [5]. Вехой в развитии теории сверхпроводимости была опубликованная в 1957 году работа Л.П. Горькова [6], в которой он установил связь теории БКШ с теорией Гинзбурга – Ландау.

А. Абрикосовым и Н. Заварицким в 1952 году на основе анализа экспериментальных данных было предсказано существование нового класса сверхпроводников – сверхпроводников второго рода [7]. Впоследствии оказалось, что именно к этому классу относятся материалы, в которых наблюдается высокотемпературная сверхпроводимость.

После открытия высокотемпературной сверхпроводимости начали широко обсуждаться различные новые механизмы этого явления. Достаточно убедительной *микроскопической теории высокотемпературной сверхпроводимости* в настоящее время еще не существует (см., например, [8]). В такой ситуации возрастает роль феноменологических теорий, которые включают лишь измеримые параметры. К их числу и принадлежат теории братьев Лондон и Гинзбурга – Ландау.

Уравнения братьев Лондон и Гинзбурга – Ландау описывают стационарные состояния сверхпроводников в приближении сплошной среды. Описание временной эволюции в сверхпроводниках составляет одну из основных задач теории сверхпроводимости [9,10].

Эволюционные (кинетические и гидродинамические) уравнения для сверхпроводников, как и любые уравнения в приближении сплошной среды, являясь диссипативными. Вследствие этого возникает не имеющий до настоящего времени ясного ответа принципиальный вопрос: *каким образом в диссипативной системе устанавливается стационарный (незатухающий) электрический ток?* Это влечет, в свою очередь, необходимость определения таких фундаментальных понятий как ансамбль Гиббса в условиях сверхпроводимости, *постоянный ток* и других. Возможные ответы на эти вопросы обсуждались ранее [11–14]. Цель предлагаемой статьи – показать, в какой мере эти ответы позволяют оправдать феноменологические уравнения братьев Лондон и Гинзбурга – Ландау.

1. Уравнения братьев Лондон и Гинзбурга – Ландау

Обозначим число куперовских пар через $n^*(\mathbf{R}, T)$ и введем по Гинзбургу – Ландау *эффективную волновую функцию пар сверхпроводящих электронов* $\psi(\mathbf{R}, T)$.

Радиус Дебая (порядка 10^{-7} – 10^{-8} см) меньше характерного масштаба куперовской пары, а также и размера точки сплошной среды. По этой причине кулоновское отталкивание не играет существенной роли в процессах сверхпроводимости. Это дает основание считать распределение электронов в

сверхпроводниках пространственно однородным. Квадрат модуля функции ψ определяет среднюю плотность числа куперовских пар

$$|\psi|^2 \equiv n^* = \frac{n_s}{2}, \quad (1)$$

где n_s – число сверхпроводящих электронов. Следуя духу теории фазовых переходов второго рода, развитой Ландау, комплексную функцию ψ можно принять за параметр порядка. При пространственно однородном распределении параметр $|\psi|^2$ отличен от нуля лишь при температурах ниже критической. В критической точке он равен нулю.

В работе Гинзбурга – Ландау рассматривается только стационарное уравнение для эффективной волновой функции. Одна из возможностей временного описания – использование для эффективной волновой функции соответствующего нелинейного уравнения Шредингера (уравнения Хартри) для частиц с удвоенным зарядом электрона $e^*=2e$. Именно так поступает, например, Р.Фейнман [15, гл. 19].

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} - \frac{e^*}{c} \mathbf{A}) \right|^2 \psi + e^* \varphi \psi, \quad \text{div} \mathbf{A} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{R}, t)$ – векторный потенциал. Потенциал $\varphi(\mathbf{R}, t)$ связан с эффективной волновой функцией $\psi(\mathbf{R}, t)$. Соответствующее уравнение непрерывности

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial \mathbf{R}} = 0. \quad (3)$$

Ток, создаваемый парами электронов, определяется выражением

$$\mathbf{j}_s = - \frac{ie^*\hbar}{2m^*} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{e^{*2}}{2m^*c} |\psi|^2 \mathbf{A}. \quad (4)$$

Представим комплексную функцию ψ в виде

$$\psi = |\psi| \exp(i\theta) \equiv a \exp(i\theta). \quad (5)$$

Здесь $\theta(\mathbf{R}, t)$ – фаза, $a(\mathbf{R}, t)$ – амплитуда. Выражение для тока сверхпроводящих электронов можно тогда записать в виде

$$\mathbf{j}_s \equiv e^* |\psi|^2 \mathbf{u}_s = \frac{e^*\hbar}{m^*} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{R}} - \frac{e^* \mathbf{A}}{\hbar c} \right\} |\psi|^2. \quad (6)$$

Отсюда следует выражение для гидродинамической скорости $\mathbf{u}_s(\mathbf{R}, t)$ сверхпроводящих электронов

$$\mathbf{u}_s = \frac{\hbar}{m^*} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{R}} - \frac{e^* \mathbf{A}}{m^* c}, \quad \text{div} \mathbf{A} = 0. \quad (7)$$

Оно состоит из суммы потенциальной и вихревой составляющих. Ток \mathbf{j}_s в нормальном состоянии равен нулю, так как равна нулю функция $|\psi|^2$, определяющая число сверхпроводящих электронов.

В металлах плотность электронов компенсируется положительно заряженным однородным фоном. В стационарном состоянии (5) $|\psi|^2 = \text{const}$ и уравнения Максвелла имеют вид

$$\text{rot} \mathbf{B} = (4\pi/c) \mathbf{j}_s, \quad \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad \text{div} \mathbf{j}_s = 0. \quad (8)$$

При условии постоянства фазы $\theta = \text{const}$, что имеет место для сплошного (без дырок) сверхпроводника, потенциальная составляющая скорости \mathbf{u}_S равна нулю и ток связан с векторным потенциалом уравнением братьев Лондон

$$\mathbf{j}_S = -|\psi|^2 \frac{e^*}{m^*c} \mathbf{A} \equiv -|\psi|^2 \frac{2e^2}{mc} \mathbf{A}. \quad (9)$$

Из него в сочетании с уравнениями Максвелла следует замкнутое уравнение для магнитного поля

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}^2}{\partial \mathbf{R}^2} + \frac{\mathbf{B}}{\delta_L^2} = 0. \quad (10)$$

Для обозначения *глубины проникновения* здесь использована длина братьев Лондон δ_L

$$\delta_L^2 = \frac{m^*c^2}{4\pi e^{*2}|\psi|^2} \equiv \frac{mc^2}{4\pi e^2 n_S}. \quad (11)$$

Теория братьев Лондон, в которой принят факт существования незатухающего электрического тока, дает объяснение эффекта Мейснера – Оксенфельда. Полученное таким путем выражение для глубины проникновения δ_L соответствует экспериментальным данным. Типичная величина δ_L – порядка 10^{-5} см.

Итак, теория братьев Лондон основана на предположении, что при низких температурах возможно существование незатухающего электрического тока, переносимого парами электронов. В стационарном состоянии плотность сверхпроводящих пар $|\psi|^2 = \text{const}$ и входит лишь как постоянный параметр. Уравнения, описывающие экранировку магнитного поля и тока, являются классическими – не содержат постоянную Планка.

При установлении уравнения братьев Лондон использовалось лишь уравнение непрерывности. Покажем, что уравнение братьев Лондон удовлетворяет полной системе обратимых гидродинамических уравнений, которая получается на основе уравнения Шредингера.

Формула для тока (4) следует из уравнения непрерывности для плотности сверхпроводящих электронов (2). Однако уравнение непрерывности есть лишь одно из системы двух замкнутых гидродинамических уравнений.

Основываясь на уравнении Шредингера для эффективной волновой функции, можно получить и уравнение для средней скорости сверхпроводящих электронов

$$\frac{\partial \mathbf{u}_S}{\partial t} + (\mathbf{u}_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}) \mathbf{u}_S = \frac{e^*}{m^*} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_S, \mathbf{B}]) + \frac{1}{m_S} \frac{\partial U_{\text{quant}}}{\partial \mathbf{R}}. \quad (12)$$

Здесь введено обозначение

$$U_{\text{quant}} = \frac{\hbar^2}{2\rho_S^{1/2}} \frac{\partial^2 \rho_S^{1/2}}{\partial \mathbf{R}^2} \quad (13)$$

для *квантовой потенциальной энергии*, через которую в классические по форме гидродинамические уравнения для функций ρ_S, \mathbf{u}_S входит квантовый источник.

В теории братьев Лондон магнитное поле и, как следствие, гидродинамическая скорость являются малыми. В линейном приближении уравнение движения принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}_S}{\partial t} = - \frac{e^*}{m^* n^*} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (14)$$

Это уравнение – следствие уравнения Шредингера, поэтому и не содержит

диссипации. С учетом постоянства плотности пар уравнение (9) можно переписать в виде

$$\mathbf{u}_S = -\frac{e^*}{m^*c} \mathbf{A}. \quad (15)$$

Обратимое уравнение (14) выполняется именно в силу уравнения братьев Лондон.

Таким образом, теория братьев Лондон в большой степени опирается на сам факт существования явления сверхпроводящего тока, но не объясняет его. Используется также условие $|\psi|^2 = \text{const}$. При этом остается без ответа вопрос о зависимости числа сверхпроводящих электронов от температуры.

3. Сопоставление с теорией Гинзбурга – Ландау

Следующий существенный шаг в развитии феноменологической теории сверхпроводимости был сделан в работе В.Л. Гинзбурга и Л.Д. Ландау [4], то есть задолго до появления микроскопической теории БКШ. При этом, однако, природа фазового перехода в сверхпроводниках не конкретизировалась. Она выяснилась лишь при создании теории БКШ.

Теория Гинзбурга – Ландау, хотя и является значительно более общей и эффективной, чем теория братьев Лондон, но все же не дает ответа на принципиальный вопрос: почему в сверхпроводнике, который, как всякая сплошная среда является диссипативной системой, возможен незатухающий ток?

Стационарное уравнение Гинзбурга – Ландау имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{R}^2} + \left\{ \alpha \frac{T - T_C}{T_C} + b|\psi|^2 \right\} \psi = 0. \quad (16)$$

Оно строится на основе «синтеза» квантовой механики и теории фазовых переходов второго рода, развитой Ландау. Теория БКШ позволяет связать коэффициенты α, b теории Гинзбурга – Ландау с параметрами нормального состояния сверхпроводника. Основой служит стационарное уравнение для комплексной эффективной волновой функции ψ .

Имеются две возможности временного обобщения этого уравнения. Выше было использовано квантовомеханическое обобщение. Это привело к нелинейному уравнению Шредингера (2). Оно соответствует уравнению Хартри с потенциалом Гинзбурга – Ландау Φ_{G-L}

$$e^* \Phi \equiv \Phi_{G-L} = \alpha \frac{T - T_C}{T_C} + b|\psi|^2. \quad (17)$$

Выше, при описании временной эволюции было отдано предпочтение квантовому формализму. В результате пришли к нелинейному уравнению Шредингера (уравнению Хартри)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \right|^2 \psi + \Phi_{G-L} \psi. \quad (18)$$

Члены, ответственные за фазовый переход, выражены через соответствующий потенциал Φ_{G-L} . Наличие дополнительного потенциала Φ_{G-L} не меняет вида уравнения непрерывности. Второе гидродинамическое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}_S}{\partial t} + (\mathbf{u}_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}) \mathbf{u}_S = \frac{e^*}{m^*} \{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_S, \mathbf{B}] \} - \frac{1}{m^*} \frac{\partial (U_{\text{quant}} + \Phi_{G-L})}{\partial \mathbf{R}}. \quad (19)$$

Через дополнительную силу входит зависимость числа куперовских пар от

температуры. Эта зависимость в теории братьев Лондон не учитывается. При прежних условиях (постоянство фазы и плотности сверхпроводящих электронов) уравнение братьев Лондон выполняется в линейном приближении.

Уравнение Хартри с потенциалом Гинзбурга – Ландау является обратимым и дает, таким образом, лишь динамическое описание сверхпроводника. Поскольку, однако, число куперовских пар зависит от температуры, то более адекватным является не «динамический», а «химический» способ временного обобщения стационарного уравнения Гинзбурга – Ландау. Этот вопрос неоднократно обсуждался в литературе (см., например, [16,17]). Рассмотрим соответствующее обобщение уравнения Гинзбурга – Ландау для описания временных процессов в сверхпроводниках.

4. Релаксационное уравнение Гинзбурга – Ландау и кинетическое уравнение

Отдадим теперь предпочтение диссипативным процессам, которые имеют место при фазовых переходах. При этом вместо уравнения Хартри приходим к релаксационному уравнению Гинзбурга – Ландау.

Для системы куперовских пар характерная длина («длина когерентности» при нулевой температуре) и коэффициент пространственной диффузии определяются выражениями

$$\xi_0^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*\alpha} \approx \frac{p_F^2}{p_{Tc}} \lambda_B^2, \quad D = \frac{\hbar}{2m^*}. \quad (20)$$

Отсюда следуют соотношения для времени диффузии τ_D и соответствующего коэффициента трения γ

$$\tau_D = 1/\gamma = \xi_0^2/D = \hbar/\alpha, \quad \gamma = \alpha/\hbar. \quad (21)$$

Релаксационное уравнение Гинзбурга – Ландау при нулевом поле ($\mathbf{A}=0$) имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\gamma}{2} \left\{ \frac{T - T_C}{T_C} + \frac{|\psi|^2}{n} \right\} \psi + D \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{R}^2}, \quad (22)$$

где $n(\mathbf{R}, t)$ – среднее число электронов в единице объема. Оно служит примером реакционно-диссипационного уравнения. В нем взаимодействия с нормальными электронами и фононами, диссоциация и образование куперовских пар учитываются лишь через коэффициенты.

Запишем теперь соответствующее уравнение Фоккера – Планка для локальной функции распределения f значений случайной величины $|\psi|^2 = n^*$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial n'} (D_{n^*} n' \frac{\partial f}{\partial n'}) + \frac{\partial}{\partial n'} \left\{ \gamma \left(\frac{T - T_C}{T_C} + n' \right) n' f \right\} + D \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{R}^2}, \quad n' = \frac{n^*}{n}. \quad (23)$$

Коэффициент диффузии D_{n^*} определяется одним из двух выражений

$$D_{n^*} = \frac{1}{N} \frac{k_B T}{\hbar}, \quad D_{n^*} = \frac{1}{N_{ph}} \frac{k_B T}{\hbar}. \quad (24)$$

Первое из них в равновесном состоянии приводит к распределению Ландау. Второе же приводит к сглаженному распределению Больцмана.

В самосогласованном приближении по первому моменту имеем уравнение

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = \left\{ D_{n^*} - \gamma \left(\frac{T - T_C}{T_C} + n' \right) n' \right\} + D \frac{\partial^2 n'}{\partial \mathbf{R}^2}. \quad (25)$$

В нем еще не учтены два важных фактора: эволюция фазы и действие электрического и магнитного полей. Без этого невозможно объяснение ни сверх-

проводимости, ни эффекта Мейснера – Оксенфельда. Необходимое усовершенствование кинетического уравнения для описания сверхпроводимости будет проведено в заключительной части этой работы.

В стационарном и пространственно однородном состоянии отсюда получаем алгебраическое уравнение для функции n'

$$n'^2 + \frac{T - T_C}{T_C} n' = \frac{D_{n^*}}{\gamma} = \frac{1}{N_{ph}} \frac{k_B T}{\hbar \gamma} = \frac{1}{N_{ph}} \frac{k_B T}{\alpha}. \quad (26)$$

В термодинамическом пределе, когда $N_{ph} \rightarrow N \rightarrow \infty$, это уравнение переходит в уравнение для параметра порядка теории Ландау

$$\left\{ n' + \frac{T - T_C}{T_C} \right\} n' = 0. \quad (27)$$

Однако само уравнение (26) определяет конечные значения при всех значениях температуры. Так, при температурах, значительно больших критической, решение имеет вид

$$n^* = \frac{1}{N_{ph}} \frac{k_B T}{\alpha} \frac{T_C}{T - T_C} n, \quad (28)$$

в критической точке

$$n^* = \left\{ \frac{1}{N_{ph}} \frac{k_B T}{\alpha} \right\}^{1/2} n \quad (29)$$

и, наконец, при температурах, значительно ниже критической, плотность числа сверхпроводящих электронов определяется выражением

$$n^* = \frac{T_C - T}{T_C} n, \quad (30)$$

которое совпадает с результатом теории Ландау.

5. Существует ли в настоящее время теория сверхпроводимости?

Были рассмотрены два варианта временного обобщения стационарного уравнения Гинзбурга – Ландау. В первом случае временная эволюция описывается на основе обратимого уравнения Хартри с потенциалом, который определяется распределением плотности сверхпроводящих электронов. Как и в теории братьев Лондон, остается открытым вопрос о природе сверхпроводящего тока в диссипативной среде. Во втором случае использовались соответствующие релаксационные уравнения.

В обоих случаях остается открытым вопрос о физической природе незатухающего тока. Таким образом, несмотря на несомненные успехи достаточно полной теории сверхпроводимости в настоящее время еще не существует.

В такой ситуации естественно стремление построить эволюционные уравнения для описания сверхпроводимости с одновременным учетом как динамических, так и диссипативных вкладов. Примеры таких уравнений известны [9, (8.27); 10]. Однако приведенные в литературе уравнения все же еще слишком сложны для анализа и не вполне четко отражают физическое содержание проблемы. Остается без ответа вопрос: *почему в диссипативной системе возможен сверхпроводящий ток?* Ниже делается попытка дать на него ответ.

Будет показано, что существование сверхпроводящего тока становится возможным благодаря возникновению фликкер-шума и соответствующих остаточных временных корреляций.

6. Реакционно-диффузионно-динамические уравнения в теории сверхпроводимости

При использовании нелинейного уравнения Шредингера, отвечающего стационарному уравнению Шредингера, было показано, что гидродинамическое уравнение при достаточно малых скоростях не содержит постоянную Планка.

Напомним также, что классическое выражение для длины δ_L инвариантно относительно замены

$$e, m, n, \leftrightarrow e^*, m^*, n^* \quad (31)$$

и в теории братьев Лондон нет зависимости от вида статистики: Бозе или Ферми. Роль куперовских пар сводится к следующему.

Во-первых, благодаря им в системе газа Ферми происходит фазовый переход – возникает устойчивое равновесное состояние с более низкой энергией, чем соответствующее состояние свободных электронов.

Во-вторых, сверхпроводящее состояние представляет сплошную среду, в которой размер точки определяется квантовым параметром – длиной волны де Бройля $\lambda_B = \hbar/p_{Tc}$. Эта длина значительно превышает радиус Дебая. Благодаря этому сверхпроводник представляет собой необычную сплошную среду. В ней «физическое число Кнудсена» – основной малый параметр сплошной среды – определяется выражением

$$(K_n)_{ph} = \frac{\lambda_B}{L} = \frac{\hbar}{p_{Tc}L} \quad (32)$$

и, следовательно, является квантовой характеристикой. Для сверхпроводника роль параметра L играют длина когерентности (размер пары) $\xi_0 = \hbar/(2m^*\alpha)^{1/2}$ и длина λ_B . Для сверхпроводников лондоновского типа наибольшим является безразмерный малый параметр

$$(K_n)_{ph} = \frac{\lambda_B}{\xi_0} \approx \frac{p_{Tc}}{p_F} \ll 1. \quad (33)$$

Таким образом, фазовый переход в сверхпроводящее состояние, обусловленный существованием куперовских пар, можно трактовать как переход к квантовой «сплошной среде», основным безразмерным малым параметром которой является «квантовое физическое число Кнудсена».

В теории сверхпроводимости, как и в квантовой и классической механике при описании движения заряженных частиц в поле, используются два импульса. Соответственно этому можно ввести два квантовых распределения Вигнера

$$f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) \text{ и } f(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t), \quad \mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{e^*}{c} \mathbf{A}, \quad (34)$$

где \mathbf{P} – канонический импульс. Уравнение для функции $f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)$ является обратимым динамическим уравнением [18]. В классическом пределе оно совпадает с соответствующим уравнением Лиувилля.

С учетом диссипации используем более общее кинетическое уравнение для локальной функции распределения $f(n^*, \mathbf{R}, \mathbf{v}, t)$ значений плотности пар сверхпроводящих электронов

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}} + \frac{e^*}{m^*} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_S, \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = I_{(v)} + I_{(R)} + I_{(n^*)}, \quad \text{div} \mathbf{E} = 0. \quad (35)$$

Нормировка функции распределения $f(n^*, \mathbf{R}, \mathbf{v}, t)$ проводится на среднее число частиц n^* , которое зависит от температуры.

Подобные по структуре уравнения использовались (см., например, [16,17]).

Существенное отличие возникает при конкретизации «интегралов столкновений». Сумму второго и третьего «интегралов столкновений» представим в виде суммы двух вкладов: первый описывает пространственную диффузию функции распределения; второй – диффузию в пространстве значений числа пар электронов.

$$I_{(R)} + I_{(n^*)} = D \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{R}^2} + \frac{\partial}{\partial n^*} \left(D_{n^*} n n^* \frac{\partial f}{\partial n^*} \right) + \frac{\partial}{\partial n^*} \left\{ \gamma \left(\frac{T - T_C}{T_C} + \frac{n^*}{n} \right) n^* f \right\}. \quad (36)$$

Коэффициенты диффузии D_{n^*} , D и трения γ определяются формулами

$$D_{n^*} = \frac{1}{N_{ph}} \frac{k_B T}{\hbar}, \quad D = \frac{\hbar}{2m^*}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\hbar}. \quad (37)$$

«Интеграл столкновений» $I_{(v)}$ определяет перераспределение пар электронов по скоростям. Он обладает теми же свойствами, что и интеграл столкновений Больцмана в кинетической теории газов.

Перейдем от кинетического уравнения к уравнениям для локальных функций $\langle n^* \rangle_{R,t}$, $\mathbf{u}_S(\mathbf{R}, t)$. В самосогласованном приближении по первым моментам функция распределения $f(n^*, \mathbf{R}, \mathbf{v}, t)$ представляется в виде

$$f(n^*, \mathbf{R}, \mathbf{v}, t) = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{u}_S) \delta(n^* - \langle n^* \rangle_{R,t}). \quad (38)$$

В результате получаем уравнение для средней локальной плотности числа частиц

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\langle n^* \rangle_{R,t}}{n} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \frac{\langle n^* \rangle_{R,t} \mathbf{u}_S}{n} = D_{n^*} - \gamma \left\{ \frac{T - T_C}{T_C} + \frac{\langle n^* \rangle_{R,t}}{n} \right\} \frac{\langle n^* \rangle_{R,t}}{n} + D \frac{\partial^2 \langle n^* \rangle_{R,t}}{\partial \mathbf{R}^2}. \quad (39)$$

Оно содержит члены, учитывающие рождение и исчезновение пар электронов («химическую реакцию») и вклад самодиффузии. По этой причине поток пар электронов определяется не только конвективным переносом $\langle n^* \rangle_{R,t} \mathbf{u}_S$, но и пространственной диффузией. Подобные результаты имеют место при описании неравновесных процессов в газах и плазме [19, т. 1, 2].

При построении теории братьев Лондон предполагалось, что плотность куперовских пар $\langle n^* \rangle_{R,t} = \text{const}$. Теперь в стационарном состоянии имеем уравнения

$$D_{n^*} - \gamma \left[\frac{T - T_C}{T_C} + \frac{\langle n^* \rangle}{n} \right] \frac{\langle n^* \rangle}{n} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u}_S = 0. \quad (40)$$

Первое уравнение определяет $\langle n^* \rangle$ при всех значениях температуры. Из второго уравнения следует, что сверхпроводящий ток является вихревым.

7. Уравнения братьев Лондон с учетом диссипации

С помощью кинетического уравнения получим уравнение для скорости

$$\frac{\partial \mathbf{u}_S}{\partial t} + (\mathbf{u}_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}) \mathbf{u}_S = \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}_S}{\partial \mathbf{R}^2} + \frac{e^*}{m^*} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_S, \mathbf{B}] \right\}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (41)$$

Здесь предполагается, что коэффициенты диффузии, кинематической вязкости и температуропроводности одинаковы. Это и дало основание для замены $D \rightarrow \nu$. При слабых токах и слабом магнитном поле можно пренебречь нелинейными членами и записать уравнение для гидродинамической скорости пар

$$\frac{\partial \mathbf{u}_S}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}_S}{\partial \mathbf{R}^2} + \frac{e^*}{m^*} \mathbf{E}. \quad (42)$$

В сочетании с уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \quad (43)$$

имеем замкнутую систему уравнений для плотности и гидродинамической скорости пар электронов, а также для напряженности электрического и магнитного полей. Сопоставим результат с теорией братьев Лондон. Основные различия состоят в следующем.

Во-первых, в теории братьев Лондон средняя плотность числа сверхпроводящих электронов есть неопределенная постоянная величина – число пар электронов при нулевой температуре. *Теперь величина $\langle n^* \rangle$ определяется при всех значениях температуры.*

Во-вторых, теперь имеем «диссипативное уравнение братьев Лондон» (42). Это, казалось бы, закрывает саму возможность существования незатухающего тока. Как объяснить наличие сверхпроводящего тока в диссипативной системе?

В следующем разделе обсуждается вопрос о связи возможности существования сверхпроводящего тока и наличия фликкер-шума – «шума $1/f$ ». Предположение, что фликкер-шум определяет возможность существования когерентного состояния – сверхпроводимости, представляется, на первый взгляд, парадоксальным. Дело, однако, в том, что фликкер-шум сам представляет собой когерентное состояние, аналогичное, в определенной мере, конденсации бозе-газа. Теперь, однако, «конденсация» в пространстве волновых чисел (моментов) происходит в диссипативной среде.

8. Диссипативные уравнения братьев Лондон. Фликкер-шум и сверхпроводимость

8.1. Фликкер-шум. Физическое явление, получившее название *фликкер-шум* (от английского слова flicker – мерцание), заключается в аномальном поведении спектра флуктуаций самых различных физических характеристик в области низких частот ω . Именно, по мере уменьшения частоты в области фликкер-шума спектральная плотность временных флуктуаций начинает возрастать по универсальному закону $\langle 1/\omega \rangle$. Фликкер-шум характеризуется также и аномально большими временами корреляции флуктуаций τ_{cor} [11–13, 20].

Несмотря на усилия многих ученых до настоящего времени нет единого взгляда на природу этого явления. Это можно проиллюстрировать реакцией Х.Хакена на мою первую работу по этому вопросу. После обсуждения он сказал: «Каждый физик-теоретик может иметь свою теорию фликкер-шума». Я воспользовался этим «разрешением» [12–14, доп. Д.1; 19, т. 1, гл. 20].

Фликкер-шум наблюдается в области частот, ограниченной со стороны высоких частот временем диффузии $\tau_D = L^2/D$ (здесь D – коэффициент пространственной диффузии, а L – минимальный характерный масштаб образца).

Для минимальной частоты спектра фликкер-шума ω_{min} возможны два определения: «субъективное», зависящее от условий измерения, и «объективное», определяемое параметрами всей системы. В первом случае ω_{min} определяется временем наблюдения τ_{obs} . Опыт показывает, что зависимость $1/\omega$ сохраняется по мере увеличения времени наблюдения. Это дает основание предполагать, что нижняя граница спектра фликкер-шума определяется временем жизни самой установки, в которой исследуется явление сверхпроводимости, то есть временем τ_{life} . Таким образом, область существования фликкер-шума определяется неравенствами

$$\frac{1}{\tau_{\text{life}}} \leq \frac{1}{\tau_{\text{obs}}} \ll \omega \ll \frac{1}{\tau_D} = \frac{D}{L^2}. \quad (44)$$

В области фликкер–шума возникает новый масштаб и соответствующий объем

$$L_\omega = (D/\omega)^{1/2} \gg L, \quad V_\omega = L_\omega^3 \gg V. \quad (45)$$

При этих условиях размерность образца не играет роли и в пределе очень больших времен наблюдения ее можно считать равной нулю, что отвечает нулевому объему V .

Имеем, таким образом, цепочку неравенств для объемов

$$V = V_D \ll V_\omega \ll V_{\text{obs}} \leq V_{\text{life}}. \quad (46)$$

Согласно излагаемым представлениям равновесный фликкер–шум возникает при диффузии в ограниченном объеме. В неограниченном образце соответствующая спектральная плотность при диффузии определяется известным выражением

$$\langle \delta n \delta n \rangle_{\omega, k} = \frac{(yy)_{\omega, k}}{\omega^2 + (Dk^2)^2}, \quad (yy)_{\omega, k} = 2Dk^2 \langle \delta n \delta n \rangle_k. \quad (47)$$

Здесь введено обозначение для спектральной плотности соответствующего источника Ланжевена. Для идеального газа $\langle \delta n \delta n \rangle_k = n$. В общем же случае она определяется через изотермическую сжимаемость корреляций положений частиц образца.

Область применимости формулы (47) ограничена как со стороны малых, так и со стороны больших масштабов. Для области фликкер–шума частоты столь малы, что выполняются неравенства $(D/\omega)^{1/2} \gg L$, $V_\omega \gg V$. Первое из них можно записать в виде $1/\omega \gg \tau_D = L^2/D$. Таким образом, период $1/\omega$ много больше времени диффузии. Для столь низких частот спектральная плотность источника Ланжевена определяется выражением [12; 19, т. 1, гл.20]

$$(yy)_{\omega, k} = 2Dk^2 A_0 V_\omega \langle \delta n_V \delta n_V \rangle \exp\left(-\frac{Dk^2}{2\omega}\right), \quad n_{\text{eff}} = A_0 V_\omega \langle \delta n_V \delta n_V \rangle. \quad (48)$$

Здесь A_0 – постоянный множитель; $\langle \delta n_V \delta n_V \rangle$ – коррелятор флуктуаций, усредненных по объему образца. Для идеального газа он определяется равенством

$$\langle \delta n_V \delta n_V \rangle = \frac{n}{V}. \quad (49)$$

Соответствующее выражение для интенсивности источника Ланжевена имеет вид

$$(yy)_{\omega, k} = 2Dk^2 A_0 n \frac{V_\omega}{V} \exp\left(-\frac{Dk^2}{2\omega}\right). \quad (50)$$

Таким образом, для области фликкер–шума имеет место замена

$$n \rightarrow n_{\text{eff}} = A_0 n \frac{V_\omega}{V}. \quad (51)$$

Этим учитывается многократная диффузия – каждая частица покрывает «диффузионный объем» V_ω , много больший объема образца V . При этом каждая частица «срабатывает» много раз. Это и приводит к тому, что эффективная плотность частиц в V_ω/V раз больше реальной, что и учитывается заменой (51). Постоянный множитель A_0 будет определен из условия нормировки.

В интенсивности источника Ланжевена имеется сильная зависимость от частоты и более сильная зависимость от волнового числа. При этом дисперсия по волновым числам пропорциональна частоте ω

$$\langle(\delta k)^2\rangle \sim 1/L_\omega^2 = \omega/D, \quad (52)$$

поэтому в области фликкер-шума имеет место очень резкое распределение по волновым числам – своеобразная «бозе-конденсация». Это говорит о том, что в области фликкер-шума возникает пространственная когерентность.

Подстановка формул (50) и (51) в первую формулу (47) приводит к выражению для пространственно-временной спектральной плотности в области фликкер-шума

$$\langle\delta n\delta n\rangle_{\omega,k} = \frac{2Dk^2}{\omega^2 + (Dk^2)^2} AV_\omega \langle\delta n_V\delta n_V\rangle \exp\left(-\frac{Dk^2}{2\omega}\right). \quad (53)$$

Здесь можно выполнить интегрирование по k и получить выражение для соответствующей временной спектральной плотности

$$\langle\delta n\delta n\rangle_\omega = \frac{\pi\langle\delta n_V\delta n_V\rangle}{\ln(\tau_{\text{life}}/\tau_D)\omega}, \quad \frac{1}{\tau_{\text{life}}} \leq \frac{1}{\tau_{\text{obs}}} \ll \omega \ll \frac{1}{\tau_D}. \quad (54)$$

Постоянный множитель A_0 определен из условия нормировки

$$\int_{1/\tau_{\text{life}}}^{1/\tau_D} \langle\delta n\delta n\rangle_\omega \frac{d\omega}{\pi} = \langle\delta n_V\delta n_V\rangle. \quad (55)$$

Тем самым предполагается, что основной вклад в коррелятор $\langle\delta n_V\delta n_V\rangle$ приходится на область фликкер-шума.

8.2. Временная корреляция. Временная корреляция связана с временной спектральной плотностью соотношением

$$\langle\delta n\delta n\rangle_\tau = \int_{1/\tau_{\text{life}}}^{1/\tau_D} \langle\delta n\delta n\rangle_\omega \frac{d\omega}{\pi}. \quad (56)$$

Отсюда следует, что

$$\langle\delta n\delta n\rangle_\tau = \left\{ C - \frac{\ln(\tau/\tau_D)}{\ln(\tau_{\text{life}}/\tau_D)} \right\} \langle\delta n_V\delta n_V\rangle \quad \text{при } \tau_D \ll \tau \ll \tau_{\text{life}}, \quad (57)$$

$$C = 1 - \frac{\gamma}{\ln(\tau_{\text{life}}/\tau_D)}, \quad \gamma = 0.577.$$

Здесь использованы постоянные Эйлера.

Таким образом, в области фликкер-шума зависимость от τ очень слабая – логарифмическая при большом значении аргумента. Это дает основание говорить о наличии *остаточных временных корреляций*.

Определим соответствующее характерное время корреляции.

Специфика для фликкер-шума состоит в следующем. Интегрирование по τ надо проводить в пределах $\tau_D \leq \tau \leq \tau_{\text{life}}$. Поскольку значение τ отсчитывается от $\tau = \tau_D$, то при определении характерного времени корреляции надо делить не на дисперсию, а на временной коррелятор при наименьшем значении τ , то есть при $\tau = \tau_D$. Это дает основание определить характерное время корреляции, не связанное с временем наблюдения, следующим выражением:

$$\tau_{\text{cor}} = \int_{\tau_D}^{\tau_{\text{life}}} \langle \delta n \delta n \rangle_{\tau} d\tau / \langle \delta n \delta n \rangle_{\tau=\tau_D}. \quad (58)$$

Для оценки времени корреляции проводим интегрирование при выполнении неравенств $\tau_D \ll \tau \ll \tau_{\text{life}}$. В результате находим, что

$$\tau_{\text{cor}} \sim \tau_{\text{life}} / \ln(\tau_{\text{life}} / \tau_D). \quad (59)$$

Таким образом, время корреляции при неограниченном времени жизни τ_{life} стремится к бесконечности.

Изложенное дает основание для вывода, что в области фликкер-шума имеет место как пространственная, так и временная когерентность. Это и открывает возможность для установления связи двух когерентных явлений: фликкер-шума и сверхпроводимости.

8.3. Фликкер-шум и сверхпроводимость. Фликкер-шум представляет собой пространственно-временную когерентную структуру. Это делает существование связи между фликкер-шумом и сверхпроводимостью менее удивительной.

В приближении первых моментов из уравнения (35) была получена соответствующая система гидродинамических уравнений. Она состоит из уравнения непрерывности с «химическим источником» (39), которое при условии $\langle n_S \rangle_{R,t} = \text{const}$ эквивалентно уравнениям (40). Первое из них позволяет найти зависимость этой величины, $\langle n_S \rangle_{R,t}$, от температуры. Второе показывает, что поле скорости является вихревым.

Уравнение же для средней скорости перепишем в виде уравнения для вихря электрического тока и введем в него соответствующий источник Ланжевена

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Omega + \frac{e^* n_S}{m^* c} \mathbf{B} \right\} = \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} + \mathbf{y}_\Omega, \quad \Omega = \text{rot} \mathbf{j}, \quad D = \nu. \quad (60)$$

Это уравнение должно быть дополнено уравнением Максвелла

$$\text{rot} \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} / c. \quad (61)$$

Итак, для вихря мы имеем уравнение диффузионного типа с источником Ланжевена. Можно предположить, что поле не влияет на характер естественного фликкер-шума. Тогда для спектральной плотности источника Ланжевена можно использовать выражение, аналогичное формуле (48),

$$(\mathbf{y}_\Omega \mathbf{y}_\Omega)_{\omega, \mathbf{k}} = 2\nu k^2 A_1 V_\omega \exp\left(-\frac{\nu k^2}{2\omega}\right) \langle \delta \Omega_\nu \delta \Omega_\nu \rangle. \quad (62)$$

Величину A_1 снова находим из условия нормировки спектральной плотности, но теперь уже флуктуаций вихря электрического тока

$$\int_{1/\tau_{\text{life}}}^{1/\tau_D} \frac{d\omega}{\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (\delta \Omega \delta \Omega)_{\omega, \mathbf{k}} = \langle \delta \Omega_\nu \delta \Omega_\nu \rangle. \quad (63)$$

Напомним, что формулы для спектральной плотности источника Ланжевена при описании фликкер-шума были «построены» исходя из физических условий. Теперь нам понадобится уравнение для описания временной эволюции вихря среднего тока.

Вернемся к формуле (62) и перепишем ее в виде флуктуационно-диссипационного соотношения

$$(\mathbf{y}_\Omega \mathbf{y}_\Omega)_{\omega, \mathbf{k}} = 2\gamma(\omega, \mathbf{k}) A_1 \langle \delta \Omega_\nu \delta \Omega_\nu \rangle. \quad (64)$$

Здесь введено обозначение для соответствующего диссипативного коэффициента при наличии как временной, так и пространственной дисперсии

$$\gamma(\omega, k) = \nu k^2 V_\omega \exp\left(-\frac{\nu k^2}{2\omega}\right). \quad (65)$$

Путем обратного преобразования Фурье можно получить выражение для соответствующего диссипативного оператора. Этот оператор имеет весьма сложную структуру. Используем его простейшее представление в виде « $1/\tau_{rel}$ »-приближения. В этом приближении время релаксации τ_{rel} порядка времени корреляции, то есть

$$\tau_{rel} \sim \tau_{cor} \sim \tau_{life}/\ln(\tau_{life}/\tau_D) \gg \tau_{obs} \gg \tau_D. \quad (66)$$

В результате для вихря электрического тока вместо (60) получаем следующее «модельное» уравнение для среднего значения вихря

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Omega + \frac{e^* n_S}{m^* c} \mathbf{B} \right\} = -\frac{1}{\tau_{rel}} \Omega, \quad \Omega = \text{rot} \mathbf{j}. \quad (67)$$

Его следует решать совместно с уравнением Максвелла (61).

Поскольку время релаксации порядка времени жизни установки, то в нулевом приближении по безразмерному параметру

$$\frac{\tau_{obs}}{\tau_{life}} \quad \text{при} \quad \tau_{life} \gg \tau_{obs} \gg \tau_D \quad (68)$$

в уравнении (67) можно пренебречь диссипацией. Приходим, таким образом, к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Omega + \frac{e^* n_S}{m^* c} \mathbf{B} \right\} = 0. \quad (69)$$

При интегрировании по времени постоянную интегрирования можно принять за нуль, что согласуется с эффектом Мейснера – Оксенфельда. В результате приходим к уравнению братьев Лондон

$$\text{rot} \mathbf{j} = \frac{e^2 n_S}{m c} \mathbf{B}. \quad (70)$$

Рассмотрим его совместно с уравнением Максвелла (61). Это даст возможность получить замкнутое уравнение для магнитного поля

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \mathbf{R}^2} - \frac{1}{\delta_L^2} \mathbf{B} = 0, \quad (71)$$

которое, как мы уже знаем, и описывает эффект Мейснера – Оксенфельда.

Итак, наличие многократной диффузии и, как следствие, фликкер-шума позволяет понять возможность одновременного существования сверхпроводящего тока и экранирования магнитного поля. Здесь трудно сказать, какое из этих двух явлений является более фундаментальным, настолько они переплетены между собой. Они оба оказываются возможными благодаря пространственно-временной когерентности флуктуаций вихря тока или магнитного поля.

Вернемся к неравенствам (68) и оценим значение времен наблюдения, при которых становится возможным наблюдение «незатухающего» сверхпроводящего тока. После этого вернемся к определению термина «незатухающий» (или «постоянный») ток.

Время диффузии τ_D определяет верхнюю по частотам границу области фликкер-шума $\omega_{max} \sim 1/\tau_D$. При этом существенно то значение времени диффузии,

которое определяется минимальным масштабом (см. подробней [15, гл. 11, § 18]). Здесь минимальным масштабом является длина δ_L (порядка 10^{-5} см). Коэффициент диффузии D можно оценить по одной из двух формул: $\hbar/2m^*$ или v_{Fl} (l – эффективная длина свободного пробега куперовских пар). Из этих формул следует, что $D \sim 1 \div 10$. Отсюда оцениваем нижнюю границу значений времени наблюдения фликкер–шума и сверхпроводимости

$$(\tau_{\text{obs}})_{\text{min}} \geq D = \delta_L^2/D \sim 10^{-10} \div 10^{-11} \text{ с.} \quad (72)$$

Обратимся теперь к определению понятий «незатухающий» или «сверхпроводящий» ток. Одно из определений этих понятий «измерительное». Оно связано с временем наблюдения. За пределами времени наблюдения нельзя гарантировать постоянство тока. Однако, поскольку по мере увеличения времени наблюдения не удается обнаружить затухание тока, то естественно предположить, что постоянство тока имеет место в пределах наибольшего временного интервала τ_{life} , то есть «времени жизни» установки.

Заключение

Итак, сделана попытка связать два, казалось бы, несовместимых явления: существование фликкер–шума и сверхпроводимости в диссипативной среде. Это оказалось возможным вследствие того, что сам фликкер–шум возникает благодаря образованию пространственной когерентной структуры при диффузионном процессе на временах, значительно превышающих характерное время однократной диффузии в образце конечного размера. Благодаря этому диссипация, обусловленная вязким трением, заменяется на диссипацию с характерным временем порядка времени жизни установки, в которой наблюдается сверхпроводимость. Это и открывает возможность для существования незатухающего (в пределах жизни установки) тока, а также экранирования магнитного поля.

Чем различаются сверхпроводящие и «несверхпроводящие» («нормальные») материалы? Для ответа надо обратиться к теориям, основанным на том или ином микроскопическом механизме сверхпроводимости.

Наличие связи фликкер–шума и сверхпроводимости позволяет «пролить дополнительный свет» на вопрос о возможности существования сверхпроводящего тока в диссипативной среде. Согласно изложенному, возникновению фликкер–шума, а следовательно, и сверхпроводимости способствует наличие малости хотя бы одного характерного параметра длины. В рассмотренной выше теории таким параметром служила длина братьев Лондон. В связи с этим можно ожидать, что предпочтительными для возникновения сверхпроводимости являются вещества, имеющие слоистую структуру.

Наконец, фазовый переход при существовании куперовских пар приводит к возникновению квантовой «сплошной среды», основным безразмерным малым параметром которой является квантовое «физическое число Кнудсена».

Библиографический список

1. *Bednorz J., Mueller K.* Perovskite-type oxides – the new approach to high- T_c superconductivity. The nobel foundation, 1988.
2. *London F.* Superfluids. Superconductivity. N.Y.:Wiley, 1954. Vol. 1.
3. *Bardeen J., Cooper L., Schriffer J.* Theory of superconductivity //Phys.Rev. 1957. Vol. 106. P. 162.
4. *Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д.* К теории сверхпроводимости // ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 1064.
5. *Боголюбов Н.Н.* О новом методе в теории сверхпроводимости // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 58.

6. Горьков Л.П. Микроскопический вывод уравнения Гинзбурга – Ландау в теории сверхпроводимости // ЖЭТФ. 1959. Т. 34. С. 1818.
7. Абрикосов А.А. Основы теории металлов. М.: Наука, 1987.
8. Плакида Н.М. Высокотемпературные сверхпроводники. «Международная программа образования». Москва, 1996.
9. Тинкхам М. Введение в сверхпроводимость. М.: Атомиздат, 1980.
10. Гулян А.М., Жарков Г.Ф. Сверхпроводники во внешних полях. М.: Наука, 1990.
11. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982; N.Y.: Harwood, 1986.
12. Климонтович Ю.Л. Естественный фликкер–шум // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9. С. 406; Sov. Techn. Phys. Lett. 1983. Vol. 9. P. 174.
13. Климонтович Ю.Л. Естественный фликкер–шум (шум $1/f$) и сверхпроводимость // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. С. 43.
14. Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990; Dordrecht: Kluwer, 1991.
15. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1967. Т. 9.
16. Елесин В.Ф., Копаев Ю.В. Сверхпроводники с избыточными квази-частицами // УФН. 1981. Т. 133. С. 259.
17. Ораевский А.Н. Нестационарная динамическая система уравнений для сверхпроводника. ЖЭТФ. 1993. Т. 103. С. 262.
18. Климонтович Ю.Л., Силин В.П. О спектрах взаимодействующих частиц // ЖЭТФ. 1952. Т. 23. С. 151.
19. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. Т. 1. М.: Янус, 1995; (Dordrecht: Kluwer, 1995); Т.2. М.: Янус–К, 1999.
20. Коган Ш.М. Низкочастотный шум со спектром $1/f$ в твердых телах // УФН. 1985. Т. 145. С. 286.

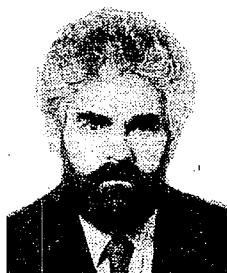
Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 27.10.2000

SUPERCONDUCTIVITY – NOT FADING ELECTRICAL CURRENT IN DISSIPATIVE MEDIUM

Yu.L. Klimontovich

The basic stages of development of the theory of superconductivity are traced. From the given review follows, that, despite of remarkable successes, there isn't physical explanation of an opportunity of existence of not fading electrical current in dissipative medium. In present paper, one of possible explanations of this phenomenon is considered more detailed, than earlier. The existence of superconducting electrical current becomes possible due to occurrence of flicker noise and appropriate residual temporary correlations.



Климонтович Юрий Львович – поступил на физический факультет МГУ осенью 1945 на третий курс. Окончил в 1948 году. Дипломную работу «Влияние взаимодействия молекул на коэффициент радиационного трения» выполнил под руководством профессора В.С. Фурсова. Работа опубликована в ЖЭТФ'е в 1949. Закончил аспирантуру под руководством Н.Н. Боголюбова. В 1951 году защитил кандидатскую диссертацию, а в 1962 году – докторскую. С 1955 года и по настоящее время доцент, профессор, главный научный сотрудник физического факультета МГУ. С 1994 года заведующий лабораторией «Синергетика».

Основные направления научной деятельности: метод микроскопической фазовой плотности в теории плазмы; кинетическая теория неидеальных газов и плазмы; кинетическая теория неравновесных флуктуаций;

кинетическая теория электромагнитных процессов, динамические и флуктуационные процессы в лазерах; критерии самоорганизации для целей технической и медико-биологической диагностики; единое описание кинетических, гидродинамических и диффузионных процессов в активных открытых системах. Опубликовал более 150 научных работ. В их числе 10 монографий, учебных пособий, изданных на русском и иностранных языках.

В настоящее время на физическом факультете читает курс лекций «Статистическая теория открытых систем». Разрабатывает программы междисциплинарной специализации «Физика открытых систем». Руководит в составе Оргбюро семинаром «Синергетика».

Почетный доктор Ростокского университета, Германия; Макс-Планк-Профессор, Германия (1990); имеет Почетную медаль Ростокского университета, Германия; Государственную премию России за 1991 год; Почетную медаль института Синергетики Академии творчества России; Член Академии творчества России; Соросовский профессор 1994; Лауреат премии имени Александра Гумбольдта за 1995 год (Германия); Почетный академик РАЕН, 1999; награжден медалью «50 лет Победы в Великой Отечественной войне», 1995; медалью П.Л. Капицы «Автору научного открытия», РАЕН, 1997. E-mail: yiklim@hklim.phys.msu.su



Памяти А.А. Андропова
посвящается

СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ – БЕЗВЯЗКОЕ ТЕЧЕНИЕ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

Ю.Л. Климонтович

Несмотря на замечательные успехи теории сверхтекучести, все же до настоящего времени отсутствует физическое объяснение возможности существования безвязкого течения жидкого гелия в вязкой среде. Существование сверхтекучести становится возможным благодаря возникновению фликкер-шума и соответствующих остаточных временных корреляций флуктуаций скорости сверхтекучего гелия.

Введение

В 1932 году В. Кеезом и К. Клаузиус обнаружили в районе температуры $T_c=2.19$ К аномальную температурную зависимость теплоемкости [1]. По форме она напоминала греческую букву λ . Это дало основание назвать критическую точку « λ -точка». Чтобы подчеркнуть различие состояний гелия выше и ниже точки фазового перехода, были введены названия: «гелий I» для температур $T>T_c$ и «гелий II» для температур $T<T_c$.

В 1938 году П. Капица обнаружил, что гелий II обладает сверхтекучестью – способностью безвязкого течения через тонкие щели и капилляры. Он обнаружил также наличие в капиллярах противотока вязкой – «нормальной» и безвязкой – «сверхтекучей» компонент жидкого гелия. Вязкий поток выходит из бульбочки, наполненной жидким гелием. Поток вызывается подогревом гелия в бульбочке и обнаруживается либо по отклонению мишени, либо по вращению «сегнерова колеса». Существенно, что при этом уровень жидкого гелия остается неизменным. Это и указывает на наличие безвязкого встречного потока – потока сверхтекучего гелия.

В период с 1938 по 1944 годы П. Капица опубликовал четыре работы, посвященных сверхтекучести [2–5]. В последних из них он принимает «двухжидкостную модель» гелия II, предложенную в работе Л. Тиссы [6] и существенно усовершенствованную Л. Ландау [7]. Л. Ландау, однако, предостерегает против «механического» представления двухжидкостной модели [8]: *Еще раз подчеркнем, что понятия «сверхтекучей» и «нормальной» жидкости является лишь удобным способом наглядного описания явления. В действительности надо было бы говорить об одновременно происходящих в одной и той же жидкости двух движений, из которых одно переносит тепло, а другое нет.*

Хотя П. Капица и принял двухжидкостную модель, однако, в итоговой работе [5] он пишет: *Все эти явления, для объяснения которых требуется представить себе сложные взаимодействия между двумя различными*

состояниями одной и той же жидкости и том же объеме, с трудом укладываются в наши привычные рамки даже физического мышления. (...) Если бы это теоретическое положение не было так полно подкреплено экспериментальными доказательствами, оно звучало бы как идея, которую очень трудно признать разумной. В этом же ключе звучат и следующие слова П. Капицы: Таким образом, двухжидкостная модель даже для физиков столь высокого уровня не представляется достаточно ясной.

Использование двухжидкостной модели оправдано тем, что на ее основе удается описать наблюдаемые закономерности. В частности, она дает объяснение, почему при протекании гелия II через узкие щели или капилляры возникает разность температур, предсказывает существование второго звука, объясняет результаты опытов Э. Андроникапвили с вращающимся гелием [9].

Несмотря на эти несомненные успехи, физическая картина явления сверхтекучести остается все же не вполне ясной. Остаются без ответа два принципиальных вопроса.

- *Физическая природа фазового перехода гелий I – гелий II.*
- *Физическое объяснение возможности существования безвязкого течения в вязкой среде.*

Основная цель настоящей работы – обсуждение возможных ответов на эти вопросы. Ответы основаны на следующих положениях.

- Сверхтекучесть – макроскопическое явление в сплошной среде, которая по самому определению является диссипативной. При этом существенна конкретизация физически бесконечно малых масштабов, в частности, размера точки сплошной среды. Описание сверхтекучести проводится на основе соответствующих уравнений механики сплошной среды.

- Гелий II – пример квантовой жидкости, поскольку длина волны де Бройля порядка среднего расстояния между атомами. Однако в приближении сплошной среды длина волны де Бройля много меньше размера «точки», в которой по определению содержится много частиц. Благодаря этому условию возможно описание сверхтекучести на основе кинетического уравнения для классической функции распределения.

- Возможность сверхтекучести обусловлена двумя явлениями. Во–первых, фазовым переходом второго рода, в результате которого, наряду с быстрыми релаксационными процессами, возникают медленные (крупномасштабные) процессы. Они обеспечивают пространственную когерентность на масштабах щели или капилляра. Во–вторых, происходит перестройка структуры вязкого трения. Она обусловлена возникновением фликкер–шума флуктуаций гидродинамической скорости. Соответствующее распределение по волновым числам представляет аналог «бозе–конденсации», так как соответствующая дисперсия значений волновых чисел становится пропорциональной частоте.

1. Фазовый переход гелий I – гелий II

Наряду с феноменологической теорией, развивалась и микроскопическая теория сверхтекучести. основополагающей в этом направлении была работа Н. Боголюбова «К теории сверхтекучести» [10]. Объектом исследования при этом служит слабо неидеальный бозе–газ. Существенную роль в построении микроскопической теории сверхтекучести сыграло открытое А. Эйнштейном явление конденсации идеального бозе газа.

1.1. Конденсация идеального бозе–газа. В работах А. Эйнштейна 1924–1925 годов показано, что непрерывное распределение Бозе – Эйнштейна для среднего числа атомов идеального бозе–газа справедливо лишь при температурах $T \geq 3.14$ К. В соответствующей критической точке распределение частиц по импульсам

распадается на два слагаемых: непрерывное распределение с нулевым значением химического потенциала и распределение $\delta(p)$. По мере понижения температуры число частиц с нулевым импульсом (число частиц в «конденсате») растет и при нулевой температуре совпадает с полным числом частиц. При критической температуре число частиц в «конденсате» равно нулю.

Предпринимались попытки [6, 11] объяснить сверхтекучесть гелия на основе явления бозе–конденсации.

1.2. Слабо неидеальный бозе–газ. Теория Боголюбова. В идеальном газе конденсат не образует связанного коллектива и поэтому не обладает свойством сверхтекучести. Если он движется как целое, то возможно замедление отдельных частиц, например, в результате столкновений со стенкой, и они выпадают из конденсата.

В слабо неидеальном газе Бозе – Эйнштейна из–за взаимодействия частиц гелия, как показал Н. Боголюбов [10], конденсат образует коллектив и при его движении, как целого, замедление возможно лишь при рождении коллективного элементарного возбуждения. При малых импульсах энергия возбуждений ϵ определяется классическим выражением

$$\epsilon(p) = \left[\frac{nv(\mathbf{p}=0)}{m} \right]^{1/2} p = v_s p. \quad (1)$$

которое отвечает фононной части спектра Ландау. Здесь $v(k)$ – фурье–компонента потенциала взаимодействия атомов жидкого гелия; n – плотность числа атомов гелия; m – масса атома гелия; \mathbf{p} – импульс; p – величина импульса. Скорость звука v_s можно выразить через амплитуду вероятности борновского рассеяния при $\mathbf{p}=0$. Спектр Боголюбова справедлив при условии превалирования сил отталкивания над силами притяжения. Поскольку для жидкости среднее расстояние r_{av} порядка размера атома, то можно ввести своеобразный малый «параметр плотности» в теории сверхтекучести. При нулевой температуре число частиц неидеального газа в конденсате, в отличие от идеального бозе–газа, меньше полного числа частиц. Эта разница мала и определяется тем же малым параметром. Таким образом, для слабо неидеального газа основная часть атомов конденсата имеет нулевой импульс.

Обобщение теории Боголюбова на случай жидкого гелия невозможно, поэтому необходимо использовать феноменологические уравнения сплошной среды.

1.3. Связь энергии элементарных возбуждений и пространственной корреляционной функции. Р. Фейнман [12, 13] установил при $T=0$ более общую связь спектра элементарных возбуждений в жидком гелии со статическим форм–фактором $S(p)$ жидкости

$$\epsilon(p) = \frac{p^2}{2mS(p)}, \quad \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}. \quad (2)$$

Статический форм–фактор определяется через пространственную компоненту Фурье двухточечной корреляционной функции или, что эквивалентно, через пространственную спектральную функцию флуктуаций плотности числа частиц. Статический форм–фактор может быть установлен на основе экспериментов по рассеянию рентгеновских лучей или нейтронов.

В работе Н. Боголюбова и Д. Зубарева [14] соотношение Фейнмана было установлено на примере слабо неидеального бозе–газа в рамках теории коллективных переменных. При этом удается получить одновременно выражения как для спектра элементарных возбуждений, так и для форм–фактора.

1.4. Кинетический вывод соотношения Фейнмана для слабо неидеального бозе–газа. Вклад от области прозрачности. Основываясь на кинетическом

уравнении для функции Вигнера [15], но с источником Ланжевена, можно произвести расчет флуктуаций плотности числа частиц $\delta n(\mathbf{R}, t) = \int \delta f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}$, где δf – функция распределения.

При нулевой температуре ($T=0$) получаем следующее выражение для искомой спектральной плотности

$$(\delta n \delta n)_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{\hbar}{v(\mathbf{k})} \frac{\text{Im} \chi(\omega, \mathbf{k})}{|\chi(\omega, \mathbf{k})|^2}, \quad (3)$$

где $\chi(\omega, \mathbf{k})$ – восприимчивость. Интегрированием по частоте находим пространственную спектральную плотность, которая связана со статическим форм-фактором. Выделим в интеграле по частоте область прозрачности. В результате получаем соотношение Фейнмана для слабо неидеального бозе-газа

$$\frac{(\delta n \delta n)_k}{n} \equiv S(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m \hbar \omega(k)}, \quad k = |\mathbf{k}|. \quad (4)$$

Общее же соотношение Фейнмана (2), установленное на основе микроскопической теории, справедливо и для жидкого гелия.

Соотношение Фейнмана было установлено при условии $T=0$. Этот результат, однако, недостаточен для описания фазового перехода в сверхтекучее состояние, который происходит при отличной от нуля температуре. По этой причине соотношение Фейнмана и, соответственно, спектр Ландау не могут быть использованы, например, для объяснения аномального поведения теплоемкости в критической области температур.

1.5. Соотношение Фейнмана в классическом пределе. Обратимся к соотношению Фейнмана. Перепишем его в виде:

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \frac{n}{(\delta n \delta n)_k}. \quad (5)$$

В левой части выделим фононный вклад. Классический предельный переход в правой части оказывается невозможным. Это связано с тем, что формуле (3) был учтен лишь вклад нулевых колебаний. Теперь вместо (3) используем следующее выражение:

$$(\delta n \delta n)_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{2}{\omega v(k)} \frac{\text{Im} \chi(\omega, \mathbf{k})}{|\chi(\omega, \mathbf{k})|^2} k_B T, \quad (6)$$

где k_B – постоянная Больцмана. Интегрированием по ω получим выражение для пространственной спектральной плотности флуктуаций. При этом нет необходимости выделять вклад от области прозрачности, так как можно провести интегрирование без дополнительных упрощений (см. например, [16, гл.15, (7.8)]). В результате получаем соотношение между пространственной спектральной плотностью флуктуаций и статической восприимчивостью $\chi(0, k)$

$$\frac{(\delta n \delta n)_k}{n} = \frac{k_B T}{n v(k)} \left(1 - \frac{1}{\chi(0, k)}\right). \quad (7)$$

Выражение для статической восприимчивости имеет следующий вид:

$$\chi(0, k) = 1 + \frac{n v(k)}{k_B T}. \quad (8)$$

Из последних двух формул следует соотношение между пространственным коррелятором $(\delta n \delta n)_k$ и компонентой Фурье потенциала взаимодействия атомов

$$\frac{(\delta n \delta n)_k}{n} = \frac{1}{1 + \frac{nv(k)}{k_B T}}. \quad (9)$$

Это выражение является классическим аналогом формулы Фейнмана, полученное в приближении слабой неидеальности бозе-системы. На феноменологическом уровне описания используем его и для жидкого состояния при высоких температурах вне критической области. Полагая в последнем соотношении $k=0$, будем использовать его для определения эффективного потенциала взаимодействия атомов жидкого гелия

$$1 + \frac{nv_{\text{eff}}(0)}{k_B T} = \frac{1}{nk_B T \beta_T} = \frac{n}{(\delta n \delta n)_{k=0}}, \quad (10)$$

где β_T – коэффициент изотермической сжимаемости. Ниже установим связь эффективного потенциала с коэффициентами стационарного уравнения Гинзбурга–Ландау.

При приближении к критической точке фазового перехода со стороны высоких температур коэффициент изотермической сжимаемости β_T возрастает по закону Кюри и, следовательно, эффективный потенциал $v_{\text{eff}}(0)$ пропорционален разности температур. Такая температурная зависимость указывает на приближение к критической точке. При этом прослеживается аналогия с теорией Орнштейна – Цернике.

1.6. Физическое определение констант в уравнении Гинзбурга – Ландау. В конденсате бозе-системы в одном состоянии находится много частиц. По этой причине соответствующая комплексная локальная эффективная волновая функция является классической и наблюдаемой [17, 20]. Представим ее в виде

$$\psi_0(\mathbf{R}, t) = |\psi_0| \exp(i\theta). \quad (11)$$

$|\psi_0|^2 = N_0/V = n_0$ – плотность числа частиц в конденсате. Эффективная волновая функция удовлетворяет стационарному уравнению Гинзбурга – Ландау [17]. Одна из возможностей описания временной эволюции в теории Гинзбурга – Ландау заключается в переходе к соответствующему уравнению Хартри – обратимому уравнению квантовой механики. Чтобы выявить физический смысл коэффициентов уравнения Гинзбурга – Ландау сопоставим два способа расчета восприимчивости: по уравнению Гинзбурга – Ландау и по квантовому кинетическому уравнению в самосогласованном приближении для неидеального бозе-газа. В результате получаем соотношения для коэффициентов уравнения Гинзбурга – Ландау

$$\frac{\alpha_L}{b} = n, \quad \alpha_L = n|v_{\text{eff}}(0)|, \quad \text{где } n = \frac{N}{V}. \quad (12)$$

При переходе в сверхтекучее состояние меняется не только термодинамика, но и гидродинамика – возникают «двухжидкостные течения» нормальной и сверхтекучей компонент гелия. Это ставит вопрос о физической природе возникновения «двухжидкостного» состояния. Для ответа на него необходимо использование эволюционных уравнений с учетом диссипации.

2. Кинетическое описание фазового перехода

2.1. Релаксационное уравнение Гинзбурга – Ландау. Уравнению Хартри отвечает релаксационное уравнение Гинзбурга – Ландау

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\gamma \left[\frac{T - T_C}{T_C} + \frac{|\Psi|^2}{n} \right] \Psi + D \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2}. \quad (13)$$

Если переход к релаксационному уравнению производится по формальной схеме путем замены t на мнимое время it , то коэффициенты D и γ следует определить формулами

$$D = \frac{\hbar}{2m}, \quad \gamma = \frac{\alpha_L}{\hbar}, \quad \alpha_L = n|v_{\text{eff}}(0)|. \quad (14)$$

Однако вместо (13) следует использовать кинетическое уравнение для локальной функции распределения плотности числа атомов сверхтекучей компоненты $f(n_S, \mathbf{R}, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial n_S} \left[\gamma D_{n_S} n_S \frac{\partial f}{\partial n_S} \right] + \frac{\partial}{\partial n_S} \left\{ 2\gamma \left[\frac{T - T_C}{T_C} + \frac{n_S}{n} \right] n_S f \right\} + D \frac{\partial^2 f}{\partial R^2}, \quad (15)$$

где n_S – плотность числа сверхтекучих атомов. Коэффициент диффузии $D_{n_S} = n/N_{\text{ph}}$ определяется числом частиц в точке сплошной среды. В равновесном состоянии

$$f_0(n_S) = C \exp\left(-\frac{h_{\text{eff}}}{D_{n_S}}\right), \quad h_{\text{eff}} = \gamma \left[\frac{T - T_C}{T_C} n_S + \frac{n_S^2}{2n} \right]. \quad (16)$$

Здесь введено обозначение для эффективной функции Гамильтона h_{eff} в расчете на одну частицу. В приближении первого момента функция распределения приобретает вид

$$f(n_S, t) = \delta(n_S - \langle n_S \rangle_{\mathbf{R}, t}), \quad (17)$$

и имеет место замкнутое уравнение для первого момента

$$\frac{\partial \langle n_S \rangle_{\mathbf{R}, t}}{\partial t} = 2\gamma \left\{ D_{n_S} - \left[\frac{T - T_C}{T_C} + \frac{\langle n_S \rangle_{\mathbf{R}, t}}{n} \right] \langle n_S \rangle_{\mathbf{R}, t} \right\} + D \frac{\partial^2 \langle n_S \rangle_{\mathbf{R}, t}}{\partial R^2}. \quad (18)$$

Это пример реакционно-диффузионного уравнения. Для стационарного и однородного состояния оно сводится к алгебраическому уравнению

$$D_{n_S} - \left[\frac{T - T_C}{T_C} + \frac{\langle n_S \rangle_{\text{st}}}{n} \right] \langle n_S \rangle_{\text{st}} = 0, \quad D_{n_S} = \frac{n}{N_{\text{ph}}}, \quad \gamma = \frac{n|v_{\text{eff}}(0)|}{\hbar}. \quad (19)$$

Его решение позволяет найти среднее значение числа сверхтекучих атомов при всех значениях температуры. В частности, в критической точке

$$\langle n_S \rangle_{\text{st}}^{(2)} = (nD_{n_S})^{1/2} = \frac{n}{N_{\text{ph}}^{1/2}} \ll n. \quad (20)$$

В термодинамическом пределе среднее число сверхтекучих атомов равно нулю. Ниже критической точки

$$\langle n_S \rangle_{\text{st}}^{(3)} = n. \quad (21)$$

В кинетическом уравнении для функции $f(n_S, t)$ отсутствует информация о распределении значений фазы θ эффективной волновой функции.

2.2. Кинетическое уравнение для функции распределения значений амплитуды и фазы. Вместо комплексной эффективной волновой функции $\psi(\mathbf{R}, t)$ введем две действительные полевые функции $X(\mathbf{R}, t), Y(\mathbf{R}, t)$

$$\psi(\mathbf{R},t) = X(\mathbf{R},t) + iY(\mathbf{R},t), \quad n_s(\mathbf{R},t) = X^2(\mathbf{R},t) + Y^2(\mathbf{R},t). \quad (22)$$

Соответствующее кинетическое уравнение для функции распределения $f(X,Y,\mathbf{R},t)$ с учетом пространственной диффузии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{1}{2} \gamma D_{n_s} \frac{\partial f}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{1}{2} \gamma D_{n_s} \frac{\partial f}{\partial Y} \right] \right\} + \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left[\gamma \left(\frac{T-T_c}{T_c} + \frac{X^2+Y^2}{n} \right) Xf \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\gamma \left(\frac{T-T_c}{T_c} + \frac{X^2+Y^2}{n} \right) Yf \right] \right\} + D \frac{\partial^2 f}{\partial R^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнение для функции распределения значений n_s

$$f(n_s, \mathbf{R}, t) = \int \delta(n_s - (X^2 + Y^2)) f(X, Y, \mathbf{R}, t) dXdY \quad (24)$$

в самосогласованном приближении по n_s следует из общего уравнения (23) и совпадает, естественно, с уравнением (15).

Релаксационные процессы при фазовом переходе ниже критической точки можно разделить на быстрые (для плотности числа частиц или амплитуды) и медленные (для фазы или соответствующей комбинации переменных X, Y).

Для описания медленной релаксации в уравнении (23) возможна замена

$$\frac{T-T_c}{T_c} + \frac{X^2+Y^2}{n} \rightarrow \frac{T-T_c}{T_c} + \frac{n_s}{n}. \quad (25)$$

В результате получаем кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{1}{2} \gamma D_{n_s} \frac{\partial f}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{1}{2} \gamma D_{n_s} \frac{\partial f}{\partial Y} \right] + \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left[\gamma \frac{D_{n_s}}{\langle n_s \rangle_{st}} Xf \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\gamma \frac{D_{n_s}}{\langle n_s \rangle_{st}} Yf \right] \right\} + D \frac{\partial^2 f}{\partial R^2}, \quad (26)$$

$$D_{n_s} = n/N_{ph}.$$

Равновесным решением этого уравнения является распределение Гаусса по двум переменным

$$f_0(X,Y) = C \exp \left[-\frac{X^2+Y^2}{\langle n_s \rangle_{st}} \right], \quad \int f_0(X,Y) dXdY = 1. \quad (27)$$

Средние значения X, Y равны нулю. Вся информация о фазовом переходе содержится в выражении для средней плотности числа сверхтекучих атомов. При всех значениях температуры она определяется решением уравнения (19).

2.3. Релаксации быстрых процессов. Вернемся к эволюционному уравнению (18). Рассмотрим малое отклонение от стационарного и пространственно-однородного решения $\langle n_s \rangle_{st}$. Соответствующее время релаксации τ_{n_s} и полуширина Δn_s спектральной линии определяются выражениями

$$\frac{1}{\tau_{n_s}(k)} = \Delta n_s(k) = 2\gamma \left[\frac{T-T_c}{T_c} + 2 \frac{\langle n_s \rangle}{n} \right] + Dk^2, \quad \gamma = \frac{k_B T_c}{\hbar}. \quad (28)$$

Для нулевого значения волнового числа время релаксации возрастает по закону Кюри с приближением к критической точке. В критической точке оно имеет максимальное конечное значение $2\gamma(1/N_{ph})^{1/2}$.

Из уравнения (18) находим выражение для комплексного отклика $\langle n_s \rangle^{(1)}$ на внешнее воздействие

$$\chi_{n_s}(\omega, k) = \frac{1}{-i\omega + D_{n_s}(k)}, \quad \Delta_{n_s}(k) = 2 \frac{k_B T_C}{\hbar} \left[\frac{T - T_C}{T_C} + 2 \frac{\langle n_s \rangle_{st}}{n} \right] + Dk^2. \quad (29)$$

Используем связь функции $\chi_{n_s}(0,0)$ и изотермической сжимаемости β_T [16]

$$\chi_{n_s}(0,0) = \frac{1}{\Delta_{n_s}(0)} = 2 \frac{k_B T_C}{\hbar} nk_B T_C \beta_T, \quad \text{где } nk_B T_C \beta_T = \frac{1}{\frac{T - T_C}{T_C} + 2 \frac{\langle n_s \rangle_{st}}{n}}. \quad (30)$$

Для области Ландау при приближении к критической точке параметры β_T и τ_{n_s} растут по закону Кюри. В критической точке сжимаемость и время релаксации (при $k=0$) конечны, например,

$$nk_B T_C \beta_T = (N_{ph})^{1/2}. \quad (31)$$

2.4. Релаксация медленных процессов. Из кинетического уравнения (26) находим уравнения для средних значений $\langle X \rangle_{R,t}$, $\langle Y \rangle_{R,t}$ и с их помощью выражения для времен релаксации и ширин спектральных линий для медленных процессов

$$\frac{1}{\tau_{X|Y}(k)} = \Delta_{X|Y}(k) = \gamma \frac{D_{n_s}}{\langle n_s \rangle_{st}} + Dk^2, \quad D_{n_s} = \frac{n}{N_{ph}}. \quad (32)$$

Величина $\langle n_s \rangle_{st}$ – решение уравнения (19) при всех температурах. Выражение для комплексной восприимчивости имеет вид

$$\chi_{X|Y}(\omega, k) = \frac{1}{-i\omega + \gamma \frac{D_{n_s}}{\langle n_s \rangle_{st}} (1 + r_{cor}^2 k^2)}, \quad r_{cor}^2 = D \frac{\langle n_s \rangle_{st}}{\gamma D_{n_s}}, \quad (33)$$

Здесь введено обозначение для квадрата радиуса корреляции r_{cor} . Изотермическая сжимаемость определяется теперь выражением

$$nk_B T_C \beta_T = \frac{\langle n_s \rangle_{st}}{D_{n_s}}. \quad (34)$$

Для области применимости теории Ландау при приближении к критической точке со стороны высоких температур изотермическая сжимаемость растет по закону Кюри. В самой критической точке она также конечна и определяется выражением

$$nk_B T_C \beta_T = (N_{ph})^{1/2}, \quad T = T_C. \quad (35)$$

Однако, для области температур, ниже критической

$$nk_B T_C \beta_T = N_{ph} \frac{T_C - T}{T_C}, \quad T < T_C \quad (36)$$

изотермическая сжимаемость продолжает расти по мере понижения температуры.

2.5. Быстрые и медленные флуктуации. Задача расчета флуктуаций при фазовом переходе в сверхтекучее состояние аналогична задаче, решенной в [18, гл. 24, разд. 24.3].

2.5.1. Быстрые флуктуации параметра порядка. Расчет быстрых флуктуаций параметра порядка аналогичен проведенному в [18, гл. 19, разд. 19.6].

Вводим в уравнение (18) для функции $\langle n_s \rangle_{R,t}$ ланжевеновский источник, который отражает атомарную структуру жидкого гелия. Время релаксации флуктуаций параметра порядка совпадает с выражением (28).

Комплексный отклик на случайный источник определяется приведенными выше выражениями (29)–(30) при всех значениях температуры. Величина $\langle n_s \rangle_{st}$ определяется решением уравнения (19). При достаточной удаленности от критической точки отклик $\chi_{n_s}(0, 0) = 0$ меняется по закону Кюри. В критической точке изотермическая сжимаемость имеет конечное значение (31). Квадрат радиуса корреляции r_{cor} при приближении к критической точке в области теории Ландау меняется по закону Кюри, но конечен в самой критической точке.

2.5.2. Медленные флуктуации параметра порядка. Покажем, что существование сверхтекучести возможно благодаря медленным флуктуациям.

Обратимся к кинетическому уравнению (26). Введем в него источник Ланжевена $u_{X|Y}(\mathbf{R}, t)$, интенсивность которого определяется двумя диссипативными характеристиками («интегралами столкновений»). В самосогласованном приближении уравнения для первых моментов – функций $X(\mathbf{R}, t)$, $Y(\mathbf{R}, t)$ – имеют следующий вид:

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \gamma \frac{D_{n_s}}{\langle n_s \rangle_{st}} X = D \frac{\partial^2 X}{\partial R^2} + u_X, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} + \gamma \frac{D_{n_s}}{\langle n_s \rangle_{st}} Y = D \frac{\partial^2 Y}{\partial R^2} + u_Y. \quad (37)$$

Ширины спектральных линий $\Delta_X(k)$, $\Delta_Y(k)$ и динамическая восприимчивость определяются прежними выражениями (32)–(33).

Для области теории Ландау при приближении к критической точке со стороны высоких температур квадрат корреляционного радиуса растет по закону Кюри

$$r_{cor}^2 = \frac{D}{\gamma} \frac{T_C}{T - T_C}, \quad T > T_C. \quad (38)$$

В критической точке квадрат радиуса корреляции конечен

$$r_{cor}^2 = (N_{ph})^{1/2} \frac{D}{\gamma}, \quad T = T_C. \quad (39)$$

При понижении температуры от критической

$$r_{cor}^2 = N_{ph} \frac{D}{\gamma} \frac{T_C - T}{T_C} \sim N_{ph} \lambda_S^2 \frac{T_C - T}{T_C}, \quad \lambda_S = \frac{\hbar}{m v_S}, \quad T < T_C. \quad (40)$$

Здесь использована следующая оценка параметра D/γ :

$$\frac{D}{\gamma} \sim \frac{\hbar^2}{mn |v_{eff}(0)|} \sim \frac{\hbar^2}{m v_S^2} \sim \lambda_S^2, \quad (41)$$

где v_S – скорость звука, λ_S – соответствующая длина волны де Бройля.

Таким образом, значения изотермической сжимаемости и квадрата радиуса корреляции для медленных флуктуаций при температурах ниже критической ($T \leq T_C$) определяются числом атомов в точке сплошной среды N_{ph} . Проведем оценку этой величины для гидродинамического описания.

2.5.3. Физически бесконечно малые масштабы. Поскольку описание сверхтекучести проводится на гидродинамическом уровне, то следует использовать и соответствующее определение физически бесконечно малых масштабов. При

этом искомые масштабы зависят от внешнего параметра длины L – одного из характерных размеров сосуда с жидким гелием. На основании предложенного в работах [16, 19, 18] формулу для r_{cor}^2 при низких температурах можно переписать в виде

$$r_{\text{cor}}^2 = (nL^3)^{2/5} \lambda_S^2 \frac{T_C - T}{T_C} \sim (nL^3)^{2/5} \lambda_S^2, \quad T < T_C. \quad (42)$$

Чтобы обеспечить пространственную когерентность сверхтекучего потока по капилляру диаметра d , надо ограничить эту величину условием

$$d < r_{\text{cor}} = (nL^3)^{1/5} \lambda_S. \quad (43)$$

2.5.4. Спектральная плотность медленных флуктуаций. Расчет аналогичен изложенному в монографии [18, гл. 19]. Указанная глава посвящена кинетической теории флуктуаций при фазовых переходах в сегнетоэлектриках и в системе Ван дер Ваальса.

Используем выражение для источников Ланжевена в уравнениях для первых моментов в виде

$$\langle Y_{XIV} Y_{XIV} \rangle_{\omega, k} = 2\Delta_{XIV}(k) \frac{1}{2} \frac{\langle n_S \rangle_{\text{st}}}{n}. \quad (44)$$

Соответствующие выражения для спектральных плотностей медленных флуктуаций имеют вид

$$\langle \delta X \delta X \rangle_{\omega, k} = \frac{2\Delta_X(k)}{\omega^2 + \Delta_X^2(k)} \frac{\langle (\delta X)^2 \rangle}{n}, \quad \langle (\delta X)^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle n_S \rangle_{\text{st}}, \quad (45)$$

$$\langle \delta Y \delta Y \rangle_{\omega, k} = \frac{2\Delta_Y(k)}{\omega^2 + \Delta_Y^2(k)} \frac{\langle (\delta Y)^2 \rangle}{n}, \quad \langle (\delta Y)^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle n_S \rangle_{\text{st}}.$$

Пространственная спектральная плотность не зависит от волнового числа («пространственный белый шум»); пространственные корреляторы δ – коррелированы

$$\langle \delta X \delta X \rangle_{\mathbf{R}-\mathbf{R}'} = \langle \delta Y \delta Y \rangle_{\mathbf{R}-\mathbf{R}'} = \frac{1}{2} \frac{\langle n_S \rangle_{\text{st}}}{n} \delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}'). \quad (46)$$

Таким образом, пространственные корреляции отличны от нуля лишь в пределах точки сплошной среды (в физически бесконечно малом объеме V_{ph}), так как функция $\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}')|_{\mathbf{R}=\mathbf{R}'} = V_{\text{ph}}^{-1}$. В результате для одноточечного коррелятора медленных (крупномасштабных) флуктуаций $\langle \delta X \delta X \rangle_{\mathbf{R}=\mathbf{R}'}$ имеем следующее выражение:

$$\langle \delta X \delta X \rangle_{\mathbf{R}=\mathbf{R}'} = \langle \delta Y \delta Y \rangle_{\mathbf{R}=\mathbf{R}'} = \frac{1}{2} \frac{\langle n_S \rangle_{\text{st}}}{N_{\text{ph}}}, \quad N_{\text{ph}} = nV_{\text{ph}}. \quad (47)$$

Дисперсия флуктуаций, сглаженных по объему точки сплошной среды, в N_{ph} раз меньше флуктуаций одноточечного распределения – распределения Больцмана.

2.5.5. Промежуточные итоги. Проведенный анализ выявил наличие аномалии температурной зависимости ряда термодинамических характеристик и подтвердил наличие фазового перехода второго рода в жидком гелии.

Этот переход в значительной мере аналогичен фазовому переходу сегнетоэлектрического типа, переходу через критическую точку в системе Ван дер Ваальса, а также фазовому переходу расслоения в бинарных жидких растворах.

Распространенная гипотеза о связи фазового перехода в сверхтекучее

состояние с явлением конденсации Бозе – Эйнштейна в идеальном газе атомов гелия не имеет достаточных физических оснований.

Теория сверхтекучести Боголюбова проясняет в значительной мере вопросы о спектре элементарных коллективных возбуждений теории Ландау и о структуре «конденсата», но все же оставляет открытым вопрос о физической природе сверхтекучести.

Основой гидродинамики сверхтекучего гелия остается двухжидкостная модель Тиссы и Ландау. В настоящее время лишь на ее основе можно пояснить ряд наблюдаемых в опытах Капицы и Андроникашвили особенностей сверхтекучего гелия.

Явление безвязкого течения гелия через тонкие каналы–щели и капилляры до сих пор вызывает удивление, как и у очевидцев первых опытов Капицы. *Сам не пойму: из маленькой бульбочки бьет струя непрерывно, а бульбочка не пустеет (...)* *И опять, сколько ни свети, паучок вращается, из его изогнутых ножек бьет невидимая струя, но наперсток не пустеет. Чудо и чудо! (...)* *Во всех этих опытах оставалось непонятным только одно: почему бульбочки и паучок, из которых все время вытекает струя жидкого гелия-II, никогда не пустели? Каким образом туда проникал жидкий гелий?* (Из книги Э.Л.Андроникашвили «История жидкого гелия».)

Удивление вызывало и обнаруженное в экспериментах Капицы наличие «критической» скорости безвязкого течения гелия. Оно оказалось примерно 100 см/с, что на два–три порядка меньше скорости звука в гелии. Сам Капица делал разные попытки физического объяснения наблюдаемых им явлений и все же в своей итоговой работе [5] он принял двухжидкостную модель Ландау. Об этом уже говорилось выше. Напомним его слова: *Таким образом, несмотря на несомненную плодотворность двухжидкостной модели сверхтекучего гелия, физическое содержание этой модели едва ли можно считать достаточно ясным.*

Изложенное позволяет сделать еще один шаг в физическом представлении фазового перехода в сверхтекучее состояние и в интерпретации двухжидкостного состояния сверхтекучего гелия.

Было показано, что при температурах ниже критической в жидком гелии имеются два флуктуационных процесса «быстрый» и «медленный». Поведение быстрых флуктуаций близко к тому, которое предписывается теорией фазовых переходов, развитой Ландау. Термодинамические и флуктуационные характеристики быстрых процессов демонстрируют аномальные зависимости от температуры – закон Кюри для изотермической сжимаемости, статической восприимчивости и квадрата радиуса корреляции.

Основное отличие в поведении быстрых флуктуаций от предсказания теорией Ландау и более общей так называемой «флуктуационной теорией фазовых переходов» состоит в отсутствии «проблемы бесконечностей». Именно в отличие от традиционной теории здесь изотермическая сжимаемость, статическая восприимчивость и квадрат радиуса корреляции имеют конечные значения в самой критической точке!

Поскольку в теории Ландау при удалении от критической точки как в сторону высоких температур, так и в сторону низких температур значения этих характеристик убывают по закону Кюри до их «нормальных» значений, то в «нормальном» состоянии радиус корреляции порядка среднего расстояния между атомами. По этой причине корреляции быстрых флуктуаций не могут обеспечить пространственную и временную когерентность более упорядоченного несимметричного состояния, которое существует при температурах $T < T_c$.

Напротив, поведение медленных флуктуаций при температурах $T < T_c$ существенно иное. По мере удаления вниз от критической температуры значение радиуса корреляции продолжает нарастать и стремится к макроскопическому значению. В термодинамическом пределе это значение, формально, равно бесконечности. Однако, такой предельный переход противоречит модели

сплошной среды. В проведении такого перехода и нет необходимости. Достаточно, чтобы радиус корреляции был макроскопическим, в частности, превышал бы диаметр капилляра в установках Капицы.

Основные особенности явления сверхтекучести проявляются все же не в термодинамике, а в гидродинамике. Это подчеркивается и самим термином, который ввел Капица – «сверхтекучесть». Основная задача теории сводится здесь к двум вопросам.

- Почему возможно безвязкостное течение в диссипативной среде?
- Каково физическое различие сверхтекучей и нормальной компонент в гидродинамике гелия?

Попытаемся дать ответ на эти принципиальные вопросы.

3. Безвязкое течение в вязкой среде

3.1. Введение. В предыдущих разделах рассмотрены две возможности временного обобщения стационарного уравнения Гинзбурга – Ландау для эффективной волновой функции. Первое приводит к уравнению типа Хартри. На его основе возможен вывод соответствующих гидродинамических уравнений, но без учета диссипации. Это не дает возможности объяснить существование безвязкого течения в вязкой среде.

Была рассмотрена и другая возможность временного обобщения стационарного уравнения Гинзбурга – Ландау – релаксационное уравнение для «комплексной эффективной волновой функции». Последние слова поставлены в кавычки, поскольку здесь уже нет связи с квантовой механикой.

На основе соответствующих кинетических уравнений при пространственно–однородном распределении ($k=0$), когда «диффузионный» вклад в диссипацию равен нулю, было проведено описание как релаксационных, так и флуктуационных процессов при всех возможных значениях температуры в критической области. При температурах ниже критической (при $k=0$) существуют два типа релаксационных и флуктуационных процессов: быстрые – мелкомасштабные, и медленные – крупномасштабные.

Аномалии при быстрых процессах, как и в теории фазовых переходов, развитой Ландау, сосредоточены лишь в критической области и поэтому не могут определять существование когерентной несимметричной фазы. Существенное отличие от теории Ландау, а также и более общей «флуктуационной теории фазовых переходов», состоит в отсутствии здесь «проблемы бесконечности». Это означает, что при описании релаксационных и флуктуационных процессов на основе уравнений сплошной среды все характеристики фазового перехода конечны и в самой критической точке.

Для медленных процессов корреляционный радиус при температурах ниже критической становится макроскопической характеристикой – не возвращается при удалении от критической точки к своему микроскопическому значению! Это и определяет возможность существования пространственной когерентности в жидком гелии при температурах, меньших критической.

Есть, таким образом, основания связать с двухжидкостным состоянием сверхтекучего гелия наличие при температурах $T \leq T_c$ двух типов (быстрых и медленных) релаксационных и диффузионных процессов. Сверхтекучей компоненте отвечают медленные процессы, нормальной – быстрые процессы. При температурах $T \leq T_c$ одновременно могут существовать медленные и быстрые процессы – «двухжидкостное» состояние. Напротив, при температурах $T \leq T_c$ все процессы релаксации являются быстрыми – «нормальное» состояние.

Выше предполагалось, что распределение гелия является пространственно однородным. При этом, однако, остается без ответа основной вопрос. Ведь среда же является вязкой, поэтому при пространственно неоднородном распределении вступает в игру «диффузионное» трение, в частности, в гидродинамическом

уравнении для скорости – вязкое трение. *Надо показать, что проведенное (при $k=0$) разделение на «нормальную» и «сверхтекучую» компоненты сохраняет силу и при учете «диффузионного», в частности, вязкого трения.* В этом и состоит основная задача настоящего раздела.

Поскольку необходимо учесть как динамические, так и диссипативные составляющие, то необходимо, как это и было сделано в теории сверхпроводимости, использовать соответствующее обобщенное кинетическое уравнение с учетом как динамики, так и реакционно–диффузионной диссипации.

3.2. Реакционно–диффузионно–динамические уравнения в теории сверхтекучести. В жидком гелии длина волны де Бройля $\lambda_B^{(T)}$ порядка среднего расстояния между атомами r_{av} . Однако, в сплошной среде обе эти величины много меньше физически бесконечно малого масштаба l_{ph} , поскольку в точке сплошной среды находится много атомов. По этой причине как в кинетическом уравнении, так и в соответствующих уравнениях гидродинамики вклады, определяемые постоянной Планка, не являются существенными.

Соответствующее диссипативное кинетическое уравнение для локальной функции распределения $f(X, Y, \mathbf{R}, \mathbf{V}, t)$ значений реальной и мнимой частей «эффективной волновой функции» и положений атомов в шестимерном пространстве \mathbf{R}, \mathbf{V} , как и в теории сверхпроводимости, имеет структуру

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}} = I_v + \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{1}{2} \gamma D_{ns} \frac{\partial f}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{1}{2} D_{ns} \gamma \frac{\partial f}{\partial Y} \right] \right\} + \\ + \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left[\gamma \frac{D_{ns}}{\langle n_s \rangle_{st}} X f \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\gamma \frac{D_{ns}}{\langle n_s \rangle_{st}} Y f \right] \right\} + D \frac{\partial^2 f}{\partial R^2}, \end{aligned} \quad (48)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{R}, t)$ – внешняя сила. Коэффициенты диффузии и трения определяются прежними выражениями:

$$D = \frac{\hbar}{2m}, \quad D_{ns} = \frac{n}{N_{ph}}, \quad \gamma = \frac{n|v_{eff}(0)|}{\hbar}. \quad (49)$$

3.3. Переход к гидродинамическим уравнениям.

3.3.1. Уравнение непрерывности. Используем определение гидродинамических функций

$$\langle n_s \rangle_{\mathbf{R}, t} = \int (X^2 + Y^2) f(X, Y, \mathbf{R}, \mathbf{V}, t) \frac{\mathbf{V} m d\mathbf{V}}{(2\pi\hbar)^3} dX dY, \quad (50)$$

$$\langle \mathbf{j}_s \rangle_{\mathbf{R}, t} = \int \mathbf{V} f(X, Y, \mathbf{R}, \mathbf{V}, t) \frac{\mathbf{V} m d\mathbf{V}}{(2\pi\hbar)^3} dX dY. \quad (51)$$

В самосогласованном приближении по первым моментам получим для $\langle n_s \rangle_{\mathbf{R}, t}$ уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle n_s \rangle_{\mathbf{R}, t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{j}_s(\mathbf{R}, t) = 2 \left\{ D_{ns} - \gamma \left[\frac{T - T_C}{T_C} + \frac{\langle n_s \rangle_{\mathbf{R}, t}}{n} \right] \langle n_s \rangle_{\mathbf{R}, t} \right\}. \quad (52)$$

Здесь использовано обозначение для потока вещества с учетом как конвективного переноса, так и пространственной диффузии

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{R}, t) = \langle n_s \rangle_{R,t} \mathbf{u}_s(\mathbf{R}, t) - D \frac{\partial \langle n_s \rangle_{R,t}}{\partial \mathbf{R}}. \quad (53)$$

Правая часть уравнения непрерывности описывает «химическую реакцию» – рождение и уничтожение средней плотности сверхтекучей фазы. В стационарном состоянии уравнение непрерывности можно свести к двум уравнениям. Первое позволяет выразить величину конвективного потока в капилляре длины l через перепад плотностей гелия на концах капилляра. При пространственно-однородном течении

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s(\mathbf{R}, t)}{\partial \mathbf{R}} = 0. \quad (54)$$

3.3.2. Уравнение Навье – Стокса для сверхтекучего гелия. Используем определение (51) средней скорости. Примем во внимание, что релаксация плотности числа сверхтекучей компоненты является быстрой. Это дает основание находить уравнение для сверхтекучей компоненты при условии постоянства величины $\langle n_s \rangle_{R,t}$. Она определяется решением уравнения (19) при всех значениях температуры.

В результате получаем уравнение Навье – Стокса для скорости сверхтекучей компоненты

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}) \mathbf{u}_s = \frac{\mathbf{F}}{m} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial \mathbf{R}^2}, \quad \mathbf{j}_s(\mathbf{R}, t) = \langle n_s \rangle_{R,t} \mathbf{u}_s(\mathbf{R}, t). \quad (55)$$

Уравнение движения в явном виде не зависит от температуры. Поток же сверхтекучего гелия через плотность $\langle n_s \rangle_{R,t}$ явно зависит от температуры по уравнению (см. (18)). Здесь предполагается, что кинетические коэффициенты диффузии, кинематической вязкости и теплопроводности одинаковы, то есть $D = \nu = \chi$. Это и дало основание в этом уравнении для замены $D \rightarrow \nu$.

При скоростях \mathbf{u}_s , много меньших критической скорости \mathbf{u}_c , можно пренебречь нелинейным членом. В результате при $\mathbf{F} = 0$ приходим к уравнению диффузии для скорости \mathbf{u}_s

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial \mathbf{R}^2}, \quad \mathbf{j}_s(\mathbf{R}, t) = \langle n_s \rangle_{R,t} \mathbf{u}_s(\mathbf{R}, t). \quad (56)$$

Наличие вязкости должно, казалось бы, препятствовать сверхтекучести. Ситуация аналогичная той, которая имеет место в теории сверхпроводимости. Аналогичным будет и соответствующее объяснение.

4. Безвязкое движение в вязкой среде и фликкер-шум

4.1. Фликкер-шум. Приведем лишь минимум необходимых сведений из теории фликкер-шума [19, гл. 20].

Фликкер-шум со стороны высоких частот ограничен временем диффузии $\tau_v = L^2/\nu$, L – минимальный характерный масштаб образца (здесь это будет диаметр капилляра d).

Область существования фликкер-шума по частотам определяется неравенствами

$$\frac{1}{\tau_{\text{life}}} \leq \frac{1}{\tau_{\text{obs}}} \ll \omega \ll \frac{1}{\tau_v} = \frac{\nu}{d^2}, \quad (57)$$

где τ_{obs} – время наблюдения, τ_{life} – время жизни установки. В области фликкер-шума имеет место новый масштаб и соответствующий объем

$$L_\omega = (v/\omega)^{1/2} \gg L, \quad V_\omega = L_\omega^3 \gg V. \quad (58)$$

Приведем соответствующую цепочку неравенств для объемов

$$V \ll V_\omega \ll V_{\text{obs}} \leq V_{\text{life}}. \quad (59)$$

Равновесный (естественный) фликкер–шум возникает при диффузии в ограниченном объеме. Здесь это диффузия скорости \mathbf{u}_S .

Для расчета пространственно–временного спектра флуктуаций скорости \mathbf{u}_S используем ее связь со спектральной плотностью соответствующего источника Ланжевена

$$(\delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S)_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{(\mathbf{y} \mathbf{y})_{\omega, \mathbf{k}}}{\omega^2 + (vk^2)^2}, \quad (\mathbf{y} \mathbf{y})_{\omega, \mathbf{k}} = 2vk^2 A V_\omega \langle \delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S \rangle_V \exp\left(-\frac{vk^2}{2\omega}\right). \quad (60)$$

Здесь $\langle \delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S \rangle_V$ – коррелятор флуктуаций, усредненных по объему образца. Постоянный множитель A будет определен ниже из условия нормировки. Из последней формулы следует, что имеет место сильная зависимость от частоты и от волнового числа. При этом дисперсия по волновым числам пропорциональна частоте ω

$$\langle (\delta \mathbf{k})^2 \rangle \sim \frac{1}{L_\omega^2} = \frac{\omega}{v}, \quad (61)$$

поэтому в области фликкер–шума имеет место своеобразная «бозе–конденсация». Это наличие в области фликкер–шума пространственной когерентности.

В выражении для пространственно–временной спектральной плотности

$$(\delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S)_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{2vk^2}{\omega^2 + (vk^2)^2} A V_\omega \langle \delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S \rangle_V \exp\left(-\frac{vk^2}{2\omega}\right) \quad (62)$$

можно выполнить интегрирование по \mathbf{k} . В результате получаем выражение для соответствующей временной спектральной плотности

$$(\delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S)_\omega = \frac{\pi \langle \delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S \rangle_V}{\ln(\tau_{\text{life}}/\tau_v)} \frac{1}{\omega}, \quad \frac{1}{\tau_{\text{life}}} \leq \frac{1}{\tau_{\text{obs}}} \ll \omega \ll \frac{1}{\tau_v}. \quad (63)$$

Постоянный множитель A определен из условия нормировки

$$\int_{1/\tau_{\text{life}}}^{1/\tau_v} (\delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S)_\omega \frac{d\omega}{\pi} = \langle \delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S \rangle_V. \quad (64)$$

Предполагается, тем самым, что основной вклад в коррелятор $\langle \delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S \rangle_V$ приходится на область фликкер–шума.

4.2. Временная корреляция. Временная корреляция связана с временной спектральной плотностью соотношением

$$\langle \delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S \rangle_\tau = \int_{1/\tau_{\text{life}}}^{1/\tau_v} (\delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S)_\omega \frac{d\omega}{\pi}. \quad (65)$$

Отсюда следует, что

$$\langle \delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S \rangle_\tau = \left(C - \frac{\ln(\tau/\tau_v)}{\ln(\tau_{\text{life}}/\tau_v)} \right) \langle \delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S \rangle_V \quad \text{при } \tau_v \ll \tau \ll \tau_{\text{life}}, \quad (66)$$

$$C = 1 - \frac{\gamma}{\ln(\tau_{\text{life}}/\tau_v)}, \quad \gamma = 0.577.$$

Здесь использованы постоянные Эйлера.

В области фликкер-шума зависимость логарифмическая от τ при больших значениях аргумента. Это дает основание говорить о наличии остаточных корреляций.

Характерное время корреляции, не связанное со временем наблюдения, определяется выражением

$$\tau_{\text{cor}} = \int_{\tau_D}^{\tau_{\text{life}}} \frac{\langle \delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S \rangle_{\tau} d\tau}{(\delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S)_{\tau}}. \quad (67)$$

В результате находим, что

$$\tau_{\text{cor}} \sim \tau_{\text{life}} / \ln \frac{\tau_{\text{life}}}{\tau_v}. \quad (68)$$

Время корреляции при неограниченном времени жизни τ_{life} стремится к бесконечности.

Изложенное в настоящем разделе показывает, что в области фликкер-шума имеет место как пространственная, так и временная когерентность. Это и дает основание для определения связи двух когерентных явлений: фликкер-шума и сверхтекучести.

4.2.1. Фликкер-шум и сверхтекучесть. Вернемся к уравнению (56) для скорости сверхтекучего гелия. Расчет флуктуаций скорости в области низких частот приводит для пространственно-временной спектральной плотности флуктуаций скорости к выражению (62), а после интегрирования по значениям волнового числа – к формуле (63) для временного спектра флуктуаций сверхтекучей компоненты скорости жидкого гелия.

Для выявления сути явления используем простейшее приближение вида « $1/\tau_{\text{rel}}$ ». В результате для скорости сверхтекучей компоненты получаем релаксационное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{u}_S}{\partial t} = - \frac{1}{\tau_{\text{rel}}} \mathbf{u}_S. \quad (69)$$

Поскольку время релаксации порядка времени жизни установки, то в нулевом приближении по безразмерному параметру

$$\frac{\tau_{\text{obs}}}{\tau_{\text{life}}} \text{ при } \tau_{\text{life}} \gg \tau_{\text{obs}} \gg \tau_D \quad (70)$$

в уравнении (69) можно пренебречь диссипацией. Приходим, таким образом, к уравнению

$$\partial \mathbf{u}_S / \partial t = 0, \quad \mathbf{u}_S = \text{const}. \quad (71)$$

Величина постоянной скорости определяется граничными условиями на концах капилляра, например, перепадом плотности.

Оценим время диффузии τ_v . Оно определяет верхнюю по частотам границу области фликкер-шума: $\omega_{\text{max}} \sim 1/\tau_v$. Диаметр капилляра в опытах Капицы порядка 10^{-4} – 10^{-5} см. Коэффициент диффузии D можно оценить по одной из двух формул: $\hbar/2m^*$ или $v_T l$ (l – эффективная длина свободного пробега атомов гелия). Из них следует, что коэффициент вязкости $\nu \sim 10^{-3}$ – 10^{-4} см²/с. Таким образом, нижняя граница значений времени наблюдения фликкер-шума и сверхтекучести

$$(\tau_{\text{obs}})_{\text{min}} \geq \tau_v = d^2/\nu \sim 10^{-5} - 10^{-6} \text{ с}. \quad (72)$$

Обратимся к определению понятия «сверхтекучесть – безвязкое течение в вязкой среде».

Одно из определений этого понятия – «измерительное». Оно связано с временем наблюдения. За пределами времени наблюдения нельзя гарантировать постоянство скорости сверхтекучей компоненты.

Однако, поскольку по мере увеличения времени наблюдения не удастся обнаружить уменьшения скорости, то естественно предположить, что постоянство скорости имеет место в пределах наибольшего временного интервала τ_{life} , то есть «времени жизни» установки.

Заключение

Термодинамика гелия II. Основным вопросом является выяснение физической природы фазового перехода через критическую точку, « λ -точку».

В статье получены аргументы в пользу представления перехода в сверхтекучее состояние по аналогии с фазовым переходом второго рода в сегнетоэлектриках, с переходом через критическую точку в системе Ван дер Ваальса, с фазовым переходом расслоения в бинарном жидком растворе.

Основой термодинамического описания служит феноменологическая стационарная модель теории сверхпроводимости Гинзбурга – Ландау. Для описания гелия II она использована в работах В. Гинзбурга и А. Собянина [20].

На основе приведенных выше кинетических уравнений показано, что для пространственно однородных состояний ($k=0$), когда диффузионные процессы «выпадают», при температурах $T < T_c$ существуют два вида релаксационных и флуктуационных процессов: быстрые и медленные.

Для быстрых процессов радиус корреляции и изотермическая сжимаемость при приближении к критической точке «сверху» растут по закону Кюри, но в самой критической точке имеют конечные значения! При удалении от критической точки «вниз» радиус корреляции снова становится порядка среднего расстояния между атомами. По этой причине быстрые флуктуации не могут обеспечить когерентность несимметричной фазы на макроскопических масштабах.

Напротив, медленные флуктуации при $T < T_c$ становятся макроскопическими. Соответствующие радиусы корреляции больше диаметра капилляров. Обеспечивается, тем самым, пространственная когерентность сверхтекучей компоненты в опытах Капицы.

Гидродинамика гелия II. При гидродинамических течениях гелий становится пространственно неоднородным и необходимо объяснить, почему пространственная диффузия – вязкое трение – не нарушает когерентность медленных флуктуаций, определяемых лишь реакционными вкладами.

Показано, что безвязкое – сверхтекучее – движение в вязкой среде возможно благодаря возникновению на низких частотах когерентного распределения по волновым числам. При этом дисперсия распределения по волновым числам пропорциональна частоте. Это приводит к перестройке гидродинамической диссипации – в уравнениях для компонент Фурье происходит замена гидродинамического трения $\nu k^2 \rightarrow \omega$. Соответственно этому возникают «остаточные» (долгоживущие) временные корреляции, ограниченные по длительности лишь временем жизни установки.

Благодаря этому открывается новая возможность физической трактовки двухжидкостной модели, введенной в работах Л. Тиссы и Л. Ландау. Выделение двух движений возможно лишь в линейном приближении. При этом нормальное движение описывается уравнением Навье – Стокса. Характерные частоты спектра флуктуаций и процесса релаксации определяются вязкостью $\omega \sim \nu k^2$. Характерные частоты сверхтекучего движения лежат в области фликкер-шума. Нижняя граница области частот определяется обратным временем жизни установки. Это дает основание говорить о безвязком течении. Разделение на два независимых течения возможно лишь в линейном приближении. Сверхтекучее течение

нарушается, когда оно начинает порождать вихревое движение нормальной компоненты. Соответствующая наибольшая скорость безвязкого течения, критическая скорость, $u_c \sim \hbar/md$. Это согласуется с известной оценкой критической скорости [13].

Можно надеяться, что представленная в этой статье физическая трактовка сверхтекучести, в частности двухжидкостной модели, позволяет лучше понять сущность явления сверхтекучести, открытого П. Капицей и детально исследованного им в ряде замечательных работ.

Библиографический список

1. Кеезом В. Гелий. М.: ИЛ, 1949.
2. Капица П.Л. Вязкость жидкого гелия при температурах ниже точки λ // ДАН СССР. 1938. Т. 18. С. 21; Nature. 1938. Vol. 141. P. 74.
3. Капица П.Л. Исследование теплопереноса в гелии II // ЖЭТФ. 1941. Т. 11. С. 1.
4. Капица П.Л. Теплоперенос и сверхтекучесть гелия II // ЖЭТФ. 1941. Т. 11. С. 581.
5. Капица П.Л. О сверхтекучести жидкого гелия II // УФН. 1944. Т. 20. С. 2.
6. Tisza L. // Nature. 1938. Vol. 171. P. 913; Journ. Phys. Rad. 1940. Vol. 1(8) P. 913.
7. Ландау Л.Д. Теория сверхтекучести гелия II // ЖЭТФ. 1941. Т. 11. С. 592.
8. Ландау Л.Д. К гидродинамике гелия II // ЖЭТФ. 1944. Т. 14. С. 112.
9. Андроникашвили Э.Л. // ЖЭТФ. 1940. Т. 18. С. 424.
10. Боголюбов Н.Н. К теории сверхтекучести // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1947. Т. 11. С. 77.
11. London F. Superfluids. Vol. I. Superconductivity. NY: Wiley, 1954.
12. Feynman R.P. Application of quantum mechanics to liquid helium. In Progress in low temperature physics. Vol. 1 // Ed. C.J. Gorter. NY: 1955.
13. Фейнман Р. Статистическая механика. М.: «Мир», 1974.
14. Боголюбов Н.Н., Зубарев Д.Н. // ЖЭТФ. 1955. Т. 28. С. 131.
15. Климонтович Ю.Л., Силин В.П. О спектрах систем взаимодействующих частиц // ЖЭТФ. 1952. Т. 23. С. 151; Климонтович Ю.Л., Силин В.П. О спектрах систем взаимодействующих частиц и коллективных потерях при прохождении заряженных частиц через вещество // УФН. 1960. Т. 70. С. 247.
16. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982; NY: Harwood Academic Publisher, 1986.
17. Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д. К теории сверхпроводимости // ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 106.
18. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. М.: Янус-К, 1999. Т. 2.
19. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. М.: «Янус», 1995. Т. 1.
20. Гинзбург В.Л., Собянин А.А. Сверхтекучесть гелия II // УФН. 1976. Т. 120. С. 153.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию 01. 11. 2000

SUPERFLUIDITY – VISCIOUSLESS FLOW IN VISCIOUS MEDIUM

Yu. L. Klimontovich

Despite of remarkable successes the theory of superfluidity, until now we have no a physical explanation of an opportunity of existence of viscousless flow of liquid helium in viscous medium. The existence of superfluid flow becomes possible due to occurrence of flicker noise and appropriate residual temporary correlations of the superfluid velocity fluctuations.



ПРИНЦИПЫ КОНТРОЛЯ И КООРДИНАЦИИ ДВИЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ДИНАМИКИ НЕЙРОНОВ ГОЛОВНОГО МОЗГА

В.Б. Казанцев, В.И. Некоркин

В работе рассматривается вопрос о принципах контроля и координации движений на основе динамики нейронов центральной нервной системы. Предложена схема координации и точной настройки движений в соответствии с современными представлениями нейрофизиологов о структуре и функциях центральной нервной системы и с методами прикладной нелинейной динамики. Схема включает блок дискретного контроля движений, отражающего функции оливо-цереbellарной системы животных и человека. Приведен пример контроля и координации простейших локомоторных движений робота – платформы с шестью конечностями.

Введение

Современные представления о структуре и функциях различных частей головного мозга животных и человека значительно расширились благодаря возможностям современных технологий и опираются на большое число нейрофизиологических экспериментов и теоретических исследований [1–7]. В таком чрезвычайно сложном объекте как головной мозг удается выделить определенные структурные звенья – группы нейронов, «ответственные» за ту или иную функцию. Например, таламо-кортикальная петля (thalamocortical circuit), состоящая из взаимодействующих групп нейронов таламуса и коры головного мозга, отвечает за образование спонтанной (40 Гц) колебательной активности, которая, по мнению физиологов, связана со способностью ассоциативного восприятия [5]. Другой пример – оливо-цереbellарная функциональная петля (olivocerebellar circuit), включающая нейроны нижних олив (inferior olives) и мозжечка (cerebellum) и отвечающая за формирование другого универсального ритма (10 Гц) в центральной нервной системе (ЦНС) [6,7]. Этот ритм, по мнению физиологов, как напрямую, так и косвенно связан с различными функциями координации движений – точной настройки, коррекции ошибок, контроля запрещенных движений и т.д. Как оказывается, любое движение происходит не непрерывно, а в некотором смысле (кинематическом) последовательно, то есть имеет характерный временной масштаб, определяемый частотой ~ 10 Гц. Этот временной масштаб означает, что нервная система осуществляет контроль за сокращением мышц не чаще чем через временной интервал ~ 100 мс, что позволяет, во-первых, сократить «вычислительные ресурсы», необходимые для контроля за движением; во-вторых, придать движению определенную «эластичность» – возможность адаптации к внешним условиям, точной настройки и т.д.

Важнейшим прикладным аспектом исследования проблем координации движений является создание на основе нейрофизиологических принципов автономных машин – роботов, способных осуществлять различные двигательные функции. Простейшими из этих функций являются устойчивые *локомоторные движения* – движения, связанные с перемещением в пространстве. Такие движения в живых организмах ассоциируются с функциями центрального генератора ритма (ЦГР) в нервной системе. ЦГР задает «шаблон» – ритм, по которому происходит возбуждение моторных нейронов, ответственных за движение. Существует большое количество моделей ЦГР, основанных как на реальных нейрофизиологических исследованиях, так и на функциональном моделировании [8–11]. К простейшим функциональным моделям можно отнести малые ансамбли взаимодействующих осцилляторов, которые за счет различных режимов синхронизации способны выделять тот или иной «шаблон» движения [12–14]. Например, на рис. 1 представлена фотография шестиногого робота – платформы, «ноги» (конечности) которого управляются фазами шести осцилляторов. В процессе разработки таких машин кроме проблем создания моделей ЦГР возникает множество других задач, включающих вопросы динамики сочленений ноги, устойчивости движения, поддержания постоянной скорости, горизонтального положения платформы и т.д. [12,15]. Отметим, что основной ролью ЦГР является создание грубого «шаблона», определяющего лишь общий ритм перемещения. По существу не решенным остается вопрос об адаптации движения к различным условиям внешней среды, точной настройки (например, выбора оптимальной точки следующего шага), эффективной смене ритма движения и т.д. Решение этой проблемы требует принципиально новых подходов, основанных на современных представлениях о принципах функционирования ЦНС.

В этой работе мы предлагаем новую схему контроля и координации движений, включающую принцип дискретного контроля за движением, подобно упомянутой выше роли – 10 Гц колебаний оливо–цереbellарной петли в ЦНС. В качестве примера рассматриваем локомоторные движения платформы с шестью точками опоры по неровной поверхности.

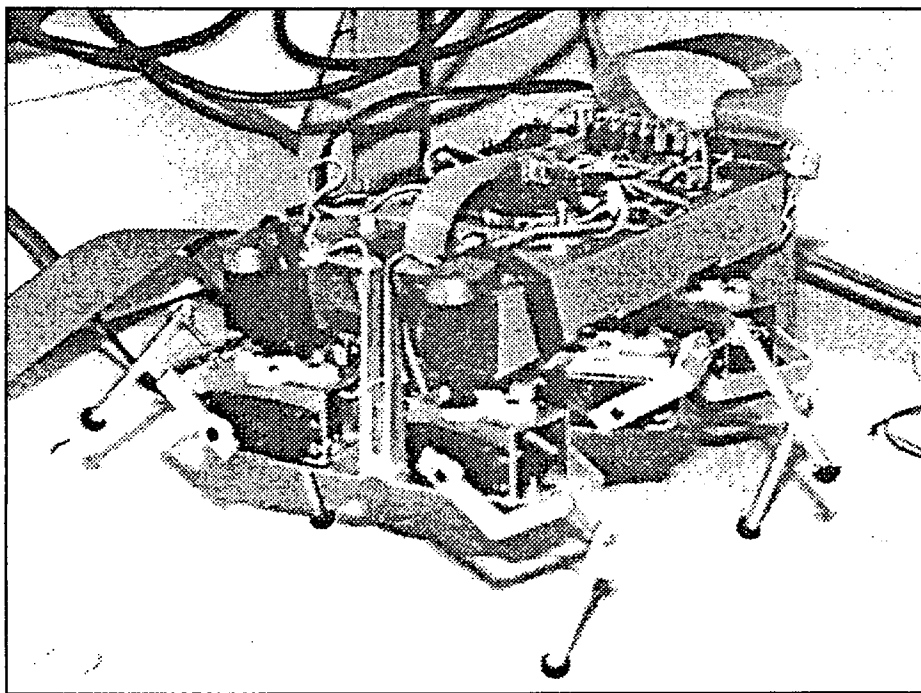


Рис. 1. Фотография робота с шестью конечностями, управляемого шестью независимыми осцилляторами [11]

2. Структурная схема

Любая система управления движением как в живых организмах, так и в искусственных моделях должна удовлетворять нескольким общим требованиям. Прежде всего, она должна обеспечивать устойчивость движения по отношению к малым возмущениям (как внутренним, так и внешним). Это стандартная задача линейной устойчивости. Кроме того, система должна включать в себя определенный механизм (алгоритм) принятия решений. В частности, она должна быть способна изменять шаблон колебаний ЦГР в зависимости от внешних и внутренних факторов, например, при изменении условий поверхности или внутренней «поломке» (отказ одной из конечностей). Для получения информации о внешней среде необходимо наличие различных сенсорных входов. Следовательно, система управления движением естественным образом содержит петли обратной связи. Наличие подобной структурной схемы в живой природе было подтверждено физиологами при исследовании различных животных. Например, на основе экспериментов была смоделирована система координации движений морского угря, способная к адаптации в различных условиях [9,10].

Схема координации движений, которую мы предлагаем, представлена на рис. 2. Она состоит из нескольких функциональных блоков. Блок I является объектом управления, и в данном случае его функциями будем считать простейшие локомоторные движения шести конечностей. Для простоты предполагаем, что каждая конечность управляется одним осциллятором, фаза которого определяет ее положение относительно поверхности. Блок II – блок команд, вырабатывающий

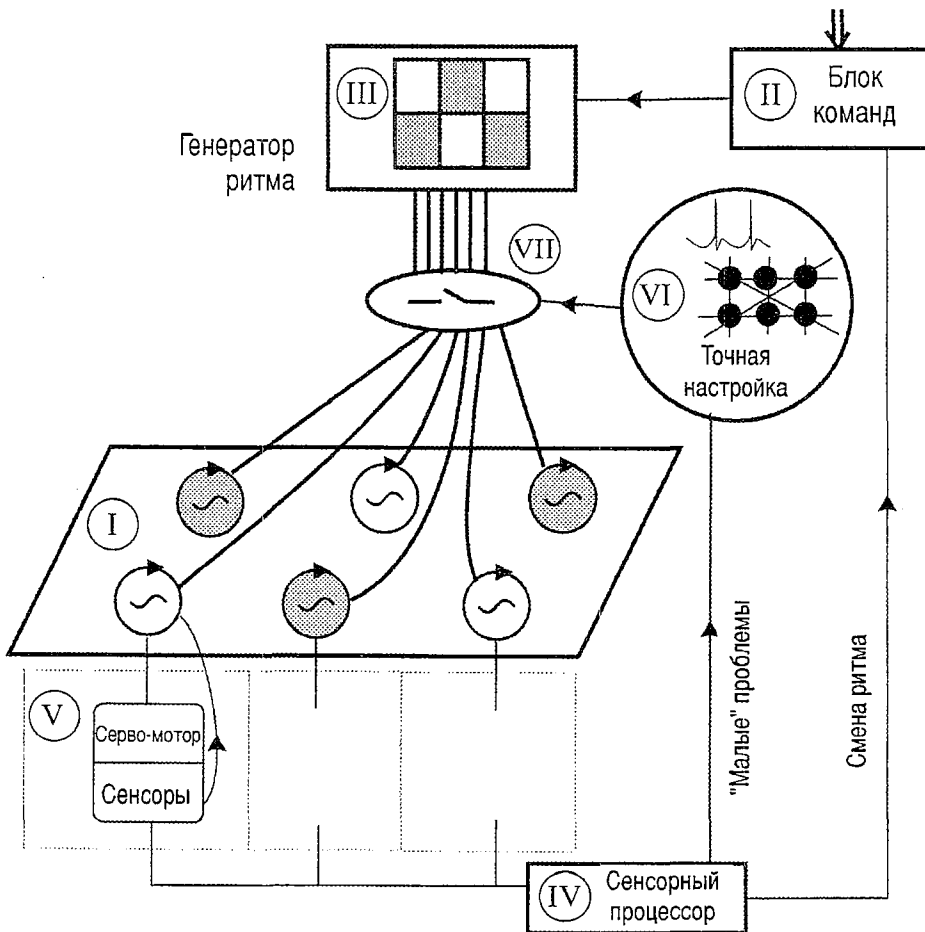


Рис. 2. Схема дискретного контроля и координации движений применительно к локомоторным движениям робота с шестью конечностями

команды для генератора ритма (ЦГР, блок III) о смене «шаблона» (ритма) движения. Он может получать сигналы как о принудительной смене ритма (стрелка сверху), так и от блока обработки сенсорной информации IV, когда смена ритма движения диктуется изменениями условий внешней среды (например, появление непреодолимой преграды). Блок V (конечность) осуществляет непосредственный контакт объекта с внешней средой (поверхностью) и имеет собственный механизм адаптации для решения «локальных» проблем. Например, если по ходу движения конечность попадает на небольшую неровность, то необходимо лишь слегка затянуть или ускорить фазу управляющего осциллятора, не производя при этом глобальной перестройки ритма всех остальных конечностей. Блок VI выполняет функцию точной настройки и контроля за движением. Он получает сенсорную информацию с блока IV и вырабатывает управляющий сигнал для всех шести конечностей в соответствии с текущим состоянием объекта и условиями внешней среды. Блок VII – переключатель, отключающий объект от «высших» управляющих центров. Отметим, что совместно блоки VI и VII в схеме выполняют роль оливо–церебелларной петли, упомянутой выше. Переключатель вырабатывает тактирующий сигнал (в оливах 10 Гц), и лишь в определенные моменты времени управляющая информация о текущем ритме (ЦГР, блок III) поступает к объекту. В перерывах между контрольными импульсами объект предоставлен «сам себе» – движется свободно по предложенному на предыдущем такте шаблону, решает «локальные проблемы» и т.д. Отметим здесь принципиальную роль эффектов кластеризации и быстрого разрушения кластеров, наблюдаемых физиологами в нижних оливах. Упрощенно распределение кластеров в нейронах олив представляет собой шаблон (тензор) мышечных сокращений, разрушение которого объясняется необходимостью новых уточненных настроек в процессе движения [3,4].

2. Модели элементов схемы

Рассмотрим возможные варианты реализации различных блоков общей структурной схемы (см. рис. 2). Среди них можно выделить два основных подхода. Первый заключается в построении систем, «анатомически» соответствующих реальному природному аналогу. Их элементами являются модели нейронов с реальными параметрами (учитывающие динамику ионных токов, синаптические входы и выходы и т.д.). Примером такого типа моделей является уже упомянутая выше модель движений угря. Недостатком таких систем является их чрезвычайная сложность, поскольку необходимо учитывать огромное число параметров и динамических переменных. Это вызывает очевидные трудности их исследования и прикладного использования. Другой подход, интенсивно развивающийся в последние годы, заключается в моделировании не внутренней динамики, а лишь поведения и функций нейрона или группы нейронов, вовлекаемых в общую схему [12–14]. Этот подход, на наш взгляд, наиболее интересный и перспективный, мы и будем применять к схеме рис. 2.

В качестве модели элементов конечностей (блоки I, V) для простоты выберем простейшие генераторы (Ван дер Поля) синусоидальных колебаний [16], уравнения которых в амплитудах и фазах имеют вид

$$\begin{cases} \dot{r}_j = r_j (A^2 - r_j^2), \\ \dot{\phi}_j = \omega + f(t), \\ j = 1, 2, \dots, 6, \end{cases} \quad (1)$$

и для колебаний каждого генератора можно записать $x_j = A \cos(\omega t + \phi_j(t) + \psi_j)$, $\phi_j(t) = \int f(t) dt$, $\psi_j(t)$ – некоторая функция времени, динамика которой будет описана ниже.

Предполагаем, что фаза колебаний каждого осциллятора однозначно определяет положение конечности. Пусть для определенности отрицательный полупериод означает, что конечность находится на поверхности, положительный – совершает перемещение.

Блок III – генератор ритма, фактически, задает определенные фазовые соотношения ψ_j между осцилляторами, то есть формирует некоторую стационарную структуру (паттерн). Такой паттерн можно получить, например, с помощью решетки бистабильных элементов вида [17]

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_j &= g(\psi_j) + d(\Delta\psi)_j, \\ j &= 1, 2, \dots, 6, \end{aligned} \quad (2)$$

где g – нелинейная функция кубической формы, Δ определяет функцию связи данного элемента с соседними (например, линейная, «диффузионная», $(\Delta\psi)_j = \psi_{j-1} - 2\psi_j + \psi_{j+1}$). Как показано в [17], система (2) может формировать до 2^6 различных пространственных структур, каждая из которых определяет различные фазовые соотношения между осцилляторами (1). Выбор той или иной структуры (ритма) определяется блоком команд II. Переменные фазы осцилляторов $\varphi_j(t)$ управляются петлями локальной обратной связи (блок V) и блоком точной настройки VI. При учете всех факторов их динамика будет чрезвычайно сложной. Мы учтем лишь основные из них, наиболее существенные для общих принципов управления. Введем *правила* или алгоритм действия систем обратной связи применительно к движению конечности по неровной поверхности. Для локальной обратной связи их можно сформулировать, например, таким образом:

- если конечность не находит опору (поверхность) в ожидаемый момент времени, то необходимо ускорить фазу соответствующего осциллятора (рис. 3, а);
- если конечность находит опору раньше, чем ожидалось, то фазу соответствующего осциллятора необходимо задержать (рис. 3, б).

Тогда, для координации движений всех конечностей (блок VI) *правила* управления будут иметь следующий вид:

- если конечность не находит опору (поверхность) в ожидаемый момент времени, то фазы остальных конечностей необходимо задержать;
- если конечность находит опору раньше, чем ожидалось, то фазы остальных конечностей необходимо ускорить.

Отметим, что эти правила относятся лишь к «малым» возмущениям (неровностям) движения и стремятся отразить лишь основной (статический) критерий устойчивости – *платформа устойчива, если в каждый момент времени имеет по крайней мере три точки опоры*. Для реализации указанных правил введем следующую динамическую систему:

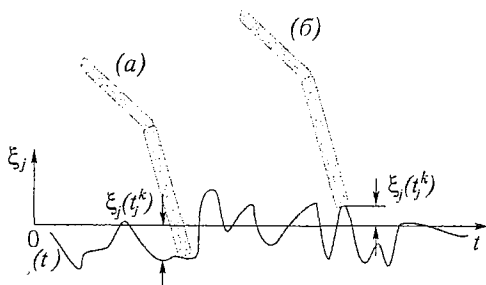


Рис. 3. Движение конечности по неровной поверхности. Функция $\xi_j(t)$ описывает рельеф поверхности в системе отсчета, движущейся вместе с j -й конечностью

$$\alpha \dot{\varphi}_j = (-a_0 s_j(t^k) - \varphi_j) +$$

$$+ \sum_{i=1, i \neq j}^6 (a_i s_i(t^k) - \varphi_i) + F(\varphi_j, \psi_j, u), \quad (3)$$

где коэффициент $a_0 > 0$ характеризует петлю локальной обратной связи, набор $a_i > 0$ – совместную подстройку всех шести конечностей; α характеризует «скорость» подстройки; функция $s_j(t^k)$ моделирует сигналы сенсоров конечности, определяющих рельеф поверх-

ности на k -м шаге. Например, если сенсор отслеживает (линейно) изменения расстояния до поверхности, эту функцию можно записать в виде $s_j(t) = \xi_j(t_j^k)$, где $t = t_j^k$ – время касания конечностью идеально плоской поверхности, $\xi_j(t_j^k)$ – расстояние до реальной точки поверхности (см. рис. 3). Функция F выполняет роль «переключателя» (блок VII), с помощью которого в определенные моменты времени корректируются взаимные фазовые соотношения всех шести осцилляторов. Отметим, что введенные правила и система (3) не описывают количественные характеристики движения, то есть не определяют, насколько нужно изменить фазу колебаний в том или ином случае. Для этого в соответствии с конкретной реализацией конечности и условиями движения необходимо вводить дополнительные критерии оптимизации параметров α, a_j . Мы не рассматриваем эту задачу здесь.

Поясним действие системы подстройки (3) на примере локального механизма ($a_j = 0, F \equiv 0$). В этом случае динамика фаз φ_j описывается простым уравнением первого порядка. Координаты состояний равновесия этого уравнения (на промежутке шага) $\varphi_j^0 = -a_0 s_j(t_j^k)$ изменяются в зависимости от сенсорного сигнала s_j , ускоряя ($s_j < 0$) или замедляя ($s_j > 0$) фазу соответствующего осциллятора.

Пусть функция F имеет вид

$$F(\varphi_j, \psi_j, u) = \begin{cases} 0, & j = 1, \\ 0, & u < u_0, \\ -\beta((\varphi_j - \varphi_{j-1}) - (\psi_j - \psi_{j-1})), & u > u_0. \end{cases} \quad (4)$$

Первое соотношение означает, что фаза первой конечности, $j=1$, выбирается в качестве опорной и не корректируется. Если $u < u_0$ (u_0 – некоторое «пороговое» значение), фазы осцилляторов не зависят от генератора ритма и управляются в соответствии с внешними условиями (сигналы $s_j(t)$). В промежутке времени, когда $u > u_0$, сдвиги фаз осцилляторов подправляются относительно одной опорной фазы, $j=1$, обеспечивая заданный «шаблон» движения. Коэффициент β в (4) определяет характерное время действия системы корректировки.

Как уже отмечалось выше, действие такой корректировки подобно функциям оливо-церебеллярной петли в живых организмах. Поэтому для получения управляющего сигнала $u(t)$ введем в рассмотрение функциональную модель нейрона оливы, предложенную ранее в работах авторов [18,19],

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega(u, I), \\ \dot{\rho} = \rho(\gamma(u, I) - \rho^2), \\ \epsilon \dot{u} = f(u) - v + \rho \cos \theta, \\ \dot{v} = p(u - I). \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) состоит из двух подсистем, первая из которых (переменные (ρ, θ)) отвечает за квазисинусоидальные подпороговые колебания нейрона (10 Гц), а вторая (переменные (u, v)) – за образование управляющего импульса на максимуме подпороговых колебаний. Функция $f(u) = u(1-u)(u-a)$, $0 < a < 1$ имеет вид кубической параболы. Амплитуда и частота подпороговых колебаний (функции $\gamma(u, I)$ и $\omega(u, I)$) могут изменяться в зависимости от состояния нейрона (переменная u) и от уровня внешней стимуляции (параметр I). Для наших целей использования нейрона как управляющего генератора положим $\omega(u, v) = \omega_0$, $\gamma(u, I) = \gamma_0$. Так, при $I < I_0$ система (5) не достигает порога возбуждения $u < u_0$, а при $I > I^*$ управляющие импульсы возникают на каждом периоде подпороговых колебаний.

3. Управление движением

Рассмотрим теперь несколько примеров управления движением с помощью предложенной схемы (см. рис. 2) и динамической системы (1)–(5). Зафиксируем для удобства параметры: $\varepsilon=0.01$, $a=0.01$, $b=2$, $\omega_0=0.15$, $\gamma_0=1$, $\omega=0.1$, $\alpha=5$, $\beta=1$, $p=0.1$. Выберем так называемый «быстрый ритм» ходьбы, когда две группы синфазных осцилляторов установлены в противофазе друг с другом (см., например, [11]). Соответствующий «шаблон» генератора ритма – пространственная структура решетки (2) – показан на рис. 2 (блок II). Пусть сначала лишь одна из конечностей движется по неровной поверхности ($s_1(t)=\xi(t)$, $s_j, j \neq 1(t)=0$), и управляющие импульсы отсутствуют, $I < I_0$. Динамику двух соседних конечностей в этом случае ($j=1, 2$) иллюстрирует рис. 4. На рис. 4, а действует только локальная (блок V на рис. 2)

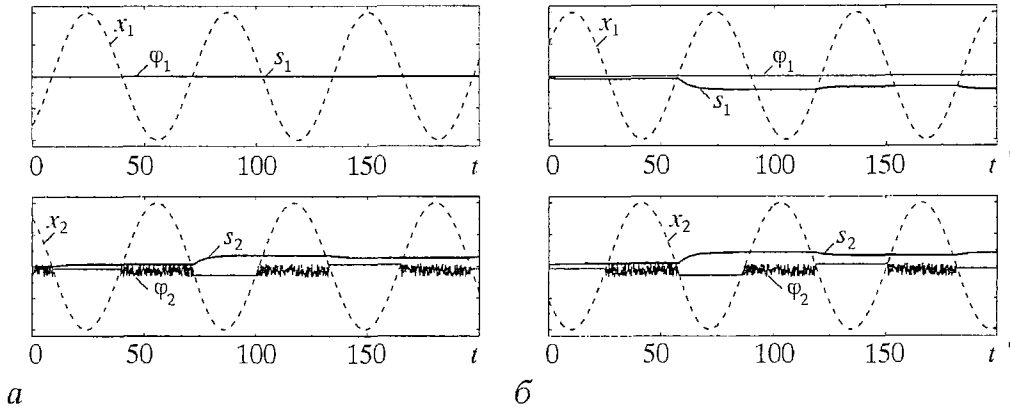


Рис. 4. Динамика систем (1)–(5) при отсутствии контролирующего сигнала, $I=0.5$ ($u < u_0$). Только одна конечность ($j=2$) движется по неровной поверхности, рельеф которой задается в виде случайной функции ξ_j , равномерно распределенной, $I < I_0$; а – включена локальная подстройка (блок V), $a_0=2$, $a_j=0$, $j=1, 2, \dots, 6$; б – включена локальная и глобальная коррекция «малых» ошибок, $a_0=2$, $a_j=1$, $j=1, 2, \dots, 6$

подстройка фаз второго осциллятора ($j=2$). Действительно, при касании поверхности фаза этого осциллятора изменяется согласно введенным выше правилам. Действие глобальной системы координации «малых проблем» (блоки IV, VI) показано на рис. 4, б. Здесь фаза соседнего осциллятора также изменяется,

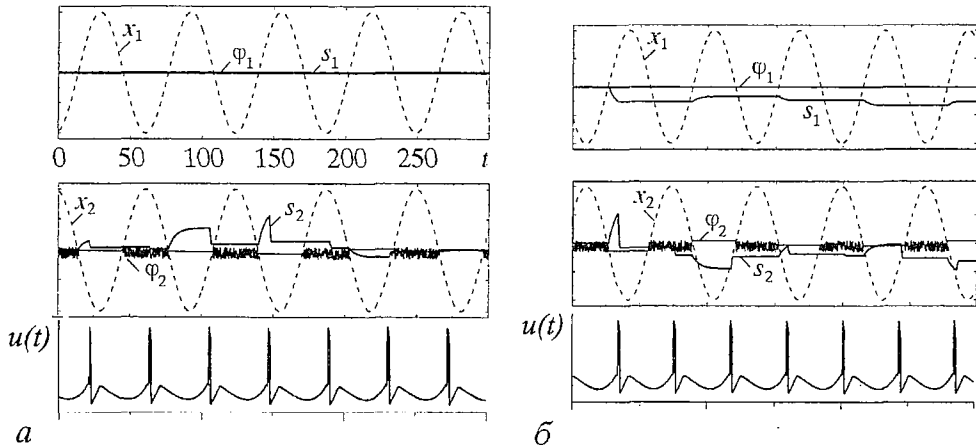


Рис. 5. Динамика систем (1)–(5) для случая рис. 4, но при включении контролирующего сигнала, $I=0.25$ (блок VII); а – включена локальная подстройка (блок V), $a_0=2$, $a_j=0$, $j=1, 2, \dots, 6$; б – включена локальная и глобальная коррекция «малых» проблем, $a_0=2$, $a_j=1$, $j=1, 2, \dots, 6$

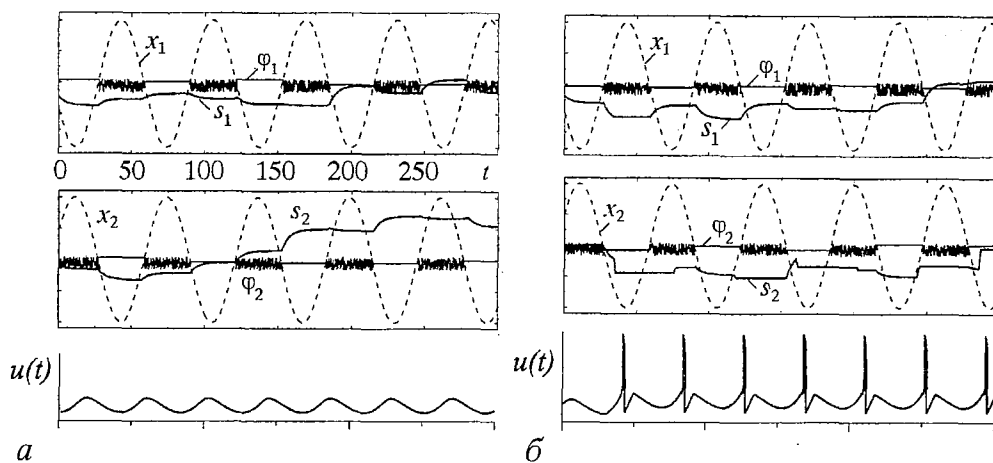


Рис. 6. Динамика систем (1)–(5) при условии, что все конечности движутся по неровной поверхности. Параметры: $a_0=2$, $a_j=1$, $j=1,2,\dots,6$; а – контролирующий сигнал отсутствует, $I=0.5$; б – включена система дискретного контроля, $I=0.25$

ускоряясь или замедляясь в зависимости от рельефа поверхности. Отметим, что при отсутствии управляющего сигнала переключатель (блок VII) всегда разомкнут и платформа не связана с генератором ритма (блок III). Поэтому в процессе автоподстройки фазовые соотношения между осцилляторами слегка нарушаются. Появление управляющих импульсов ($I > I^*$) связывает в определенные моменты времени платформу с генератором ритма, корректируя нарушенные сдвиги фаз (рис. 5, а, б). На рис. 6 все шесть конечностей движутся по неровной поверхности и оба механизма подстройки (локальный и глобальный) включены. В этом случае динамика фаз осцилляторов становится более сложной; однако при включении управляющего сигнала $I > I^*$ (рис. 6, б) система снова стремится установить правильные фазовые соотношения. На рис. 7 представлены фазы всех шести осцилляторов. Очевидно, что изменение фаз осцилляторов происходит при касании одной из конечностей поверхности (механизмы подстройки) и при получении управляющего сигнала (механизм корректировки).

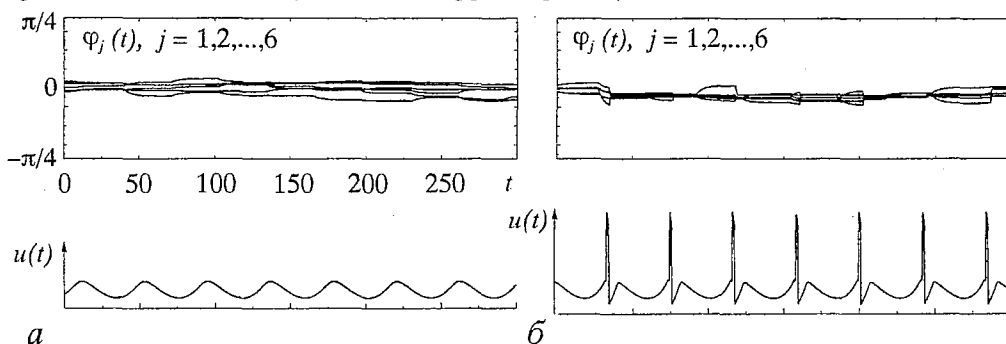


Рис. 7. Эволюция фаз осцилляторов, соответствующих шести конечностям, при отсутствии (а) и включении (б) системы координации (локальная и глобальная) и система дискретного контроля движений (см. рис. 6). На графике нулевое значение фаз отвечает идеальной настройке (согласно генератору ритма)

4. Обсуждение

В заключение отметим, что проблема создания реального устройства контроля и координации движений включает в себя кроме затронутых здесь аспектов множество других и является чрезвычайно сложной. Даже в

рассмотренном нами простейшем примере управления локомоторными движениями необходимо учитывать большое число различных факторов и условий. В частности, в реальных прототипах конечность должна состоять из нескольких сочленений, связанных кинематическими соотношениями, каждое из которых имеет собственную систему подстройки; конечности не являются идентичными и управляются в общем случае различными сигналами; механизм автоподстройки необходимо оптимизировать с учетом как внутренних ограничений, так и внешних условий; обработка сенсорной информации имеет свои особенности и т.д.

Основные преимущества подхода, изложенного в этой работе, относятся к *принципам* контроля и координации движений, возможно, более сложных, чем простое перемещение в пространстве, и основываются на современных представлениях нейрофизиологов о функционировании животных и человека. В частности, во-первых, введение многоуровневых систем обработки сенсорной информации позволяет разделить задачу об адаптации движения к условиям внешней среды на несколько уровней. Тогда часть проблем может решаться на «низшем» («мышечном») уровне, не затрагивая основных ресурсов ЦНС. Во-вторых, принцип дискретного контроля придает системе «эластичность» и возможность более точной настройки. Кроме того, и это очень важно, сокращаются «вычислительные затраты», что в случае более сложных движений оказывается весьма существенным. Например, по утверждению физиологов, простейшее движение руки человека вовлекает не менее 50–ти различных мышц [3]. Существует 10^{15} возможных комбинаций их одновременных сокращений. Если каждую миллисекунду выбирать наилучшую из этих комбинаций, то в течение секунды мозг должен принимать 10^{18} решений. Это эквивалент процессора с тактовой частотой 10^{16} ГГц – лишь для того, чтобы в реальном времени выбрать нужную комбинацию! Более того, явления кластерообразования и изменения кластеров в соответствии с «шаблоном» (тензором) мышечных сокращений в оливо–церебеллярной системе, составляющей прототип системы дискретного контроля, открывает возможность регулирования на принципах самоорганизации динамических систем. Например, при отказе одной или нескольких мышц система должна сформировать альтернативное распределение кластеров, позволяющее выполнить поставленную задачу.

Предложенный в работе вариант схемы контроля и координации движений основывается на функциональном моделировании нейрофизиологических принципов управления, эффективность которых видна даже на простых примерах. При моделировании используются не логические, а динамические элементы (генератор Ван дер Поля, система Фитц Хью–Нагумо, бистабильная решетка). Это позволяет говорить, во-первых, об управлении движением не на программной основе, а на основе принципов самоорганизации [20]. Во-вторых, с прикладной точки зрения, такие системы могут быть сравнительно легко реализованы в виде электронных схем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 00–02–16400).

Библиографический список

1. Principles of Neural Science/ Eds E.R. Kandel, J.H. Schwartz, T.M. Jessell. Third Edition. Prentice–Hall Intern. Inc. 1991. 1135 p.
2. Llinas R. The intrinsic electrophysiological properties of mammalian neurons: insight into central nervous system function // Science. 1988. Vol. 242. P. 1654.
3. Welsh J.P., Llinas, R. Some organizing principles for the control of movement based on olivocerebellar physiology/ Eds C.I. de Zeeuw, P. Strata and Voodg // Progress in Brain Research. 1997. Vol. 114.
4. Pellionisz A., Llinas R. Tensor theory of brain function. The cerebellum as a space–time metric tensor // Lecture Notes in Biomathematics. Springer–Verlag, Berlin. 1982. Vol. 45. P. 394.

5. *Llinas R.* Oscillations in CNS neurons: A possible role for cortical interneurons in the generation of 40-Hz oscillations // Repr. from the book *Induced Rhythms in the Brain*/ Eds E. Basar, T. Bullock. 1991.

6. *Llinas R., Yarom Y.* Oscillatory properties of guinea-pig inferior olivary neurons and their pharmacological modulation: An *in vitro* study // *J. Physiol., Lond.* 1986. Vol. 376. P. 163.

7. *Schweighofer N., Doya K., Kawato M.* Electrophysiological properties of inferior olive neurons: a compartmental model // *Journal of Neurophysiology.* 1999. Vol. 82. P. 804.

8. *Grillner S.* Neural networks for vertebrate locomotion // *Scientific American.* 1996. P. 64.

9. *Ekeberg Ö.* A combined neuronal and mechanical model of fish swimming // *Biol. Cybern.* 1993. Vol. 69. P. 363.

10. *Ekeberg Ö., Lansner A., Grillner S.* The neural control of fish swimming studied through numerical simulations // *Adaptive Behavior.* Massach. Inst. Technol., USA. 1995. Vol. 3, № 4. P. 363.

11. *Arena P., Fortuna L., Branciforte L.* Reaction-diffusion CNN algorithms to generate and control artificial locomotion // *IEEE Trans. Circuits and Systems.* 1999. Vol. 46, № 2. P. 253.

12. *Symbalyuk G.S., Borisyuk R.M., Müller-Wilm U., Cruse H.* Oscillatory network controlling six-legged locomotion. Optimization of model parameters // *Neural Networks.* 1998. Vol. 11. P. 1449.

13. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Сельверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Сущик М.М., Рубчинский Л.Л.* Синхронизация в нейронных ансамблях // *УФН.* 1996. Т. 166, № 4.

14. *Борисюк Г.М., Борисюк Р.М., Казанович Я.Б., Лузянина Т.Б., Турова Т.С., Цымбалюк Г.С.* Осцилляторные нейронные сети. Математические результаты и приложения // *Математическое моделирование.* 1992. Т. 4, № 12, С. 3.

15. *Cruse H.* What mechanisms coordinate leg movement in walking arthropods? // *Trends in Neurosciences.* 1990. Vol. 13, № 1. P. 15.

16. *Андронов А.А., Витт, А.А., Хайкин, С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 916 с.

17. *Nekorkin V.I., Makarov V.A., Kazantsev V.B., Velarde M.G.* Spatial disorder and pattern formation in lattices of coupled bistable systems // *Physica D.* 1997. Vol. 100. P. 330.

18. *Казанцев В.Б., Некоркин В.И., Веларде М.Г.* Модель нейрона с осцилляторной активностью ниже порога возбуждения // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1998. Т. XLI, № 12. С. 1623.

19. *Nekorkin V.I., Kazantsev V.B., Velarde M.G.* Spike-burst and other oscillations in a system composed of two coupled, drastically different elements // *Eur. Phys. J. B.* 2000. Vol. 16 P. 147.

20. *Хакен Г.* Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. М.: Мир, 1991.

*Нижегородский государственный
университет*

Поступила в редакцию 21.04.01

PRINCIPLES OF CONTROL AND COORDINATION OF MOVEMENT BASING ON NEURO-DYNAMICS

V.B. Kazantsev, V.I. Nekorkin

Some principles of control and coordination of movement basing on central nervous system dynamics are considered. Using neurobiological view of the problem and nonlinear dynamics theory a new architecture of movement control and «fine tuning» is

presented. It includes discrete control block mimicing functions of the olivo-cerebellar circuit in central nervous system of humans and animals. For illustration, we apply the principles to the control of simplest locomotion of a hexapod robot prototype.



Виктор Борисович Казанцев – родился в Дзержинске, Нижегородской области (1973). Окончил радиофизический факультет ННГУ (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1999). В настоящее время является старшим преподавателем кафедры теории колебаний радиофизического факультета ННГУ. Область его научных интересов – теория колебаний и волн, нелинейная динамика дискретных сред, нейродинамика. Имеет более 40 научных публикаций.



Владимир Исаакович Некоркин – родился на Украине (1948), окончил радиофизический факультет ННГУ (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1981, ННГУ) и доктора физико-математических наук (1992, СГУ). С 1971 года работал в Нижегородском институте прикладной математики, с 1983 по 1986 – в Нижегородском политехническом институте, с 1986 года по настоящее время работает на радиофизическом факультете ННГУ, профессор. Область научных интересов – теория колебаний и волн, структурообразование и нелинейные волны в непрерывных и дискретных средах, синхронизация и пространственно-временной хаос. Имеет более 100 научных публикаций в указанных направлениях, соавтор двух монографий. В качестве приглашенного профессора читал лекции в Мадридском и Стэнфордском университетах. Работал в Калифорнийском университете.



САМООРГАНИЗОВАННАЯ КРИТИЧНОСТЬ И АНАЛИЗ РИСКА

А.В. Подлазов

Обзор посвящен анализу катастрофического поведения, присущего многим сложным системам, с точки зрения теории самоорганизованной критичности. Эта теория сегодня является одной из наиболее быстро развивающихся областей нелинейной динамики.

Основное внимание уделено изложению и обобщению представлений теории самоорганизованной критичности, связанных с управлением риском. К их числу относятся явления фликкер-шума и прерванного равновесия, степенные законы распределения вероятностей и свойство целостности.

Введение

История человечества превращается в гонку между образованием и катастрофой.

Герберт Джордж Уэллс

Современное развитие нелинейной динамики связано с формированием новой парадигмы, которую можно определить как *парадигму сложности*. В сферу ее интересов попадают необратимо развивающиеся сложные системы (экономика, экология, общество, системы вооружений), объекты, способные к рефлексивному поведению (психика человека, рынки, наука, мораль) процессы в целостных многокомпонентных системах (земная кора, техносфера, биосфера).

Становление любой научной парадигмы связано с новыми областями приложения и новыми концептуальными представлениями. Как ни парадоксально это прозвучит, но, с точки зрения самой науки, первое сейчас значительно важнее второго. Дело даже не столько в том, что неприменение научных результатов является достаточным условием для уничтожения науки, сколько в стремительном нарастании разрыва между достигнутым пониманием в важнейших областях и неизменными способами принятия решений, связанных с рассматриваемыми в этих областях проблемами. Сейчас наступает этап, когда фундаментальная наука становится достаточно зрелой, чтобы рассуждать на темы, традиционно относимые к наукам гуманитарным или вообще не рассматриваемые как научные. Поэтому особенно важным становится социальный заказ. Для того, чтобы этот заказ был в должной мере осознан и в конечном счете удовлетворен, научное сообщество должно пройти свою часть пути, то есть выявить те задачи, решая которые, оно может послужить обществу, а не только себе.

Среди новых областей приложения нелинейной науки особое место занимает описание и прогноз катастроф и стихийных бедствий, объяснение их природы.

Будущее человечества непосредственно зависит от нашей способности соизмерять выгоды и опасность, понимать принципиальные ограничения наших возможностей и своевременно осознавать новые угрозы. Работы в этом направлении тесно связаны с концепцией *управления риском*, имеющей особенно большое значение для России. Обсуждение ряда ключевых идей в этой области уже было начато в литературе [1–4], в том числе на страницах ПНД [5].

Настоящая работа продолжает обсуждение проблем управления риском в формате своеобразной «заявки на социальный заказ». Это предопределило несколько необычную ее структуру. Поскольку статья носит обзорно-методический характер, многие излагаемые в ней факты могут оказаться известными читателю. Однако мы приводим их, поскольку только комплексное и всестороннее изучение вопроса позволяет довести его понимание до уровня элемента общего образования, то есть уровня, начиная с которого, возможно содержательное и продуктивное обсуждение конкретных проблем, равно как и осознание того, что эти проблемы действительно являются проблемами.

Статья также не содержит компактно сформулированных выводов. Они, напротив, распределены по тексту, чтобы позволить читателю взглянуть на конкретные подходы и модели с нескольких точек зрения, не потеряв за деревьями леса. Как нам представляется, это лучше способствует формированию единого контекста, пониманию того, что все описываемые явления и подходы взаимосвязаны.

Начнем издавека...

Представим, что перед неким исследователем, располагающим обширными, но несистематизированными данными различных научных дисциплин, поставлена задача выделить из них существенное для создания теории безопасности и риска и построить такую теорию. Какими соображениями он бы руководствовался?

Событие воспринимается нами как катастрофическое или опасное, только если оно оказывается либо *неожиданным* (то есть его не удастся предсказать), либо *экстраординарным* (то есть выделяется из ряда родственных ему событий), либо и то и другое сразу. В обоих случаях можно заключить, что система, порождающая это событие, является *сложной*¹, поскольку от простых систем естественно было бы ожидать прозрачности и предсказуемости, с одной стороны, и единообразного поведения – с другой.

Хотя строгого определения понятия сложности не существует, опыт развития синергетики и изучения конкретных систем, интуитивно определяемых нами как сложные, позволяет высказать некоторые общие соображения о свойствах любой сложной системы на разных уровнях описания.

- На *математическом* уровне сложность неразрывно связана с *нелинейностью* описания, поскольку к линейным системам применим принцип суперпозиции, позволяющий независимо рассматривать различные действующие факторы, части системы и т.п., что гарантирует ее простоту.

- На *физическом* уровне описание, как правило, возможно лишь в *статистических* терминах, как то: плотность вероятности, корреляция, ляпуновские показатели, математическое ожидание, дисперсия и т.п. Это происходит либо в силу характерного для многих нелинейных систем хаотического поведения, ограничивающего возможности детерминированного описания, либо в силу очень большого числа составляющих систему элементов, делающего такое описание бесполезным практически.

- На *философском* уровне наиболее существенным является осознание того

¹ Термин «сложность» имеет двоякий смысл. С одной стороны, его можно понимать как сложность устройства (complication), то есть наличие в некоторой системе большого числа элементов и/или нетривиальных связей между ними. А с другой стороны, речь может идти о сложности внешних проявлений системы (complexity) безотносительно ее внутреннего устройства, то есть о нетривиальном поведении. Хотя эти две «сложности» во многом взаимосвязаны, они не эквивалентны, и мы будем употреблять понятие «сложность» только во втором из упомянутых значений, если не оговорено обратное.

обстоятельства, что чем более изощрен и специфичен механизм некоторого явления, тем реже оно должно реализоваться. А поскольку практически все сколь-нибудь важное или интересное в природе так или иначе связано со сложностью, то лежащие в ее основе механизмы должны быть *просты* и *универсальны*.

Из сказанного следует, что поиск должен быть сосредоточен на *универсальных нелинейных механизмах, приводящих к сложному поведению, требующему статистического описания*. Разумно предположить, что универсальность внутреннего устройства влечет и сходство внешних проявлений. Поэтому здесь можно «зайти с черного хода» – обобщить данные об изученных сложных системах и попытаться на этом материале дать описание лежащих в их основе механизмов. Именно по этой схеме будет построено дальнейшее изложение. В разделе 1 рассматриваются универсальные внешние проявления сложности, раздел 2 посвящен теории самоорганизованной критичности как механизму возникновения сложности и, наконец, раздел 3 содержит обзор некоторых самоорганизованно критических моделей.

1. Универсальные проявления сложности

Наблюдение за деталями может быть интересным и увлекательным, но мы учимся на утверждениях общего характера.

Пер Бак

В нелинейной динамике до настоящего времени было разработано две парадигмы. В рамках первой было показано, что во многих открытых нелинейных системах вдали от равновесия происходит самоорганизация. При этом обычно возникают пространственно неоднородные стационарные (то есть не зависящие от времени) распределения переменных, которые И.Р. Пригожин предложил называть *диссипативными структурами* [6]. Либо возникают периодические или непериодические колебания, которые с легкой руки Р.В. Хохлова стали называть *автоволновыми процессами* [7].

При построении второй парадигмы основное внимание было уделено динамическому хаосу – сложному непериодическому поведению в простейших детерминированных системах (то есть в таких, где будущее однозначно определяется прошлым и настоящим и нет случайных факторов). Основным результатом этого периода стало установление факта пределов предсказуемости, то есть существование *горизонта прогноза* – конечного времени, через которое динамический прогноз поведения системы становится невозможен. Были также описаны универсальные сценарии перехода от простого движения к хаотическому при изменении внешнего параметра.

В основе обеих развитых парадигм лежат представления о самоорганизации, то есть о выделении из большого, а иногда бесконечного числа переменных, описывающих систему, небольшого числа величин, называемых параметрами порядка, к которым на больших временах подстраиваются остальные степени свободы системы. Это не совсем то, что нам нужно, поскольку для «склонных к катастрофам» систем весьма вероятно получение в «штатных» и «кризисных» ситуациях разных наборов параметров порядка, что не позволит описывать их с единых позиций. Как мы увидим далее, сложность предполагает наличие у системы свойств, отсутствующих у составляющих ее частей, то есть не только выделение параметров порядка из числа старых переменных, но и формирование в процессе самоорганизации новых.

Кроме того, обе парадигмы не вполне соответствуют интуитивным представлениям о катастрофичности – системы, где образуются стационарные или подвижные структуры, слишком регулярны, чтобы в них происходило что-то неожиданное, а хаотические системы слишком богаты событиями, чтобы на этом

фоне могло случаться что-то экстраординарное. То есть искать надо где-то на стыке существующих парадигм.

Ныне нелинейная динамика стоит на пороге выработки такой парадигмы, третьей по счету, которую обычно обозначают словосочетанием «жизнь на кромке хаоса» (хотя, на наш взгляд, более точной является высказанная С.П. Обуховым мысль о скольжении вдоль этой кромки [8]). Входящая в ее ядро *теория самоорганизованной критичности* (СК) ложится в рамки нашего плана, равно как и универсальные закономерности, которые эта теория призвана объяснить. Основными из них, непосредственно связанными с риском, являются *прерванное равновесие*, *фликкер-шум* и *степенные законы распределения*. Подробному описанию двух последних явлений и их взаимосвязи посвящены разделы настоящего параграфа. Сейчас же вкратце остановимся на прерванном равновесии.

Это явление, называемое также *переменяемостью*, заключается во вспышках высокой активности, прерывающих состояние относительного покоя, когда ее уровень низок или даже равен нулю. Причем в длительности интервалов между вспышками, а зачастую и в их амплитуде не прослеживается никаких явных правил. Прерванное равновесие характерно для многих областей, таких как биологическая эволюция [9], гидродинамика, сейсмология, экономика и др.

Несмотря на универсальность этого явления, до недавнего времени для него не существовало общей теории, хотя в рамках отдельных дисциплин оно либо получало частные объяснения (гидродинамика), либо воспринималось как данность (теория биологической эволюции). В то время как некая общность его конкретных проявлений – скажем, землетрясений и экономических кризисов – интуитивно ясна. И те, и другие происходят раз за разом, их пытаются с большим или меньшим успехом предсказывать, но каждый раз они валятся, как снег на голову, «будучи предсказуемыми в своей непредсказуемости».

1.1. Фликкер-шум. Одной из простейших характеристик динамических систем является *спектр мощности* – функция, показывающая, каким образом распределена по частотам их энергия. Динамика простых систем обыкновенно может быть описана *характерной частотой*, через которую легко выражаются характерные времена, длины и т.д. Для сложных систем типична обратная ситуация – отсутствие характерных частот (рис. 1). При этом спектр мощности имеет на низких частотах степенной вид

$$S(f) \sim f^{-\beta}, \quad (1)$$

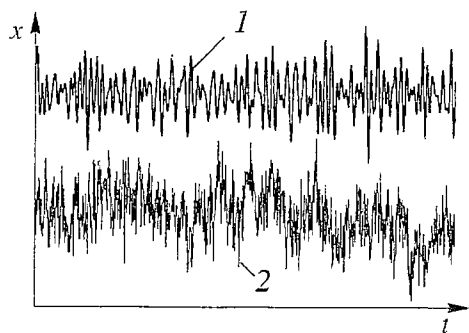


Рис. 1. Типичный вид сигнала с периодической составляющей и фликкер-шума. На верхнем графике, несмотря на высокий уровень помех и большое число кратных гармоник, легко прослеживается определенная регулярность сигнала и характерные частоты, в то время как на нижнем, соответствующем фликкер-шуму с $\beta=1$, их выделить не удастся

где $\beta \sim 1$. Зависимость вида (1) называется *фликкер-шумом*, или *1/f-шумом*, а также *розовым шумом* (последнее название обусловлено тем, что такой спектр мощности занимает промежуточное положение между *белым шумом* некоррелированного случайного процесса с $\beta=0$ и являющимся интегралом от него *коричневым шумом* броуновского движения с $\beta=2$). Явление фликкер-шума исключительно широко представлено в природе. Оно характерно практически для всех сложных систем как естественного, так и искусственного происхождения, и его примеры можно найти в самых разных областях – от биологии до астрофизики.

Спектр мощности вида (1) означает, что значительная часть энергии

связана с очень медленными процессами. Пользуясь метеорологической аналогией, можно сказать, что в таких системах нельзя предсказывать погоду, отвлекаясь от изменения климата. А долгосрочный прогноз невозможен в принципе. Сколько бы мы ни накапливали информацию о поведении системы, всегда найдутся важные процессы, которые начинают сказываться на временах, соизмеримых со временем изучения системы. То есть те процессы, которые еще просто не успели проявиться, но которые еще непременно преподнесут нам неприятные сюрпризы.

К системам с фликкер-шумом в принципе не применимы представления о периодической повторяемости событий. Это обстоятельство обусловлено тем, что в них нет одного характерного временного масштаба, который отвечал бы за «самые важные процессы». А поскольку именно наличие таких масштабов является обычным условием для успешного математического моделирования, то можно ожидать, что традиционные методы будут давать на таких системах сбой.

Наличие в системе фликкер-шума означает возможность гигантских флуктуаций, то есть внутренне присущую системе склонность к катастрофам. Это позволяет предположить, что она находится в окрестности *критической точки*, или *точки бифуркации*, где обычно и происходят такие явления.

Действительно, в точке бифуркации незначительный импульс может оказать радикальное воздействие на поведение системы, однако она, пройдя точку бифуркации, по логике вещей, должна в дальнейшем демонстрировать более регулярное поведение, описываемое вполне определенными характерными пространственными и временными масштабами. Поскольку на практике этого не происходит, должен существовать некий механизм, обеспечивающий постоянное пребывание системы в точке бифуркации. Природа этого механизма (как и следовало ожидать, простого и универсального) объясняется теорией самоорганизованной критичности.

Обратим внимание на те представления – условно назовем их классическими, – альтернативой которых является представление о фликкер-шуме. В линейных системах временная динамика может успешно описываться при помощи компонент фурье-спектра – *гармонических составляющих*, или *гармоник*. Принципиально то, что в таких системах каждой гармонической составляющей сигнала обычно удается приписать простой и ясный *физический смысл*, называя их фотонами, фононами, волнами, нотами и т.п. При этом независимость гармонических составляющих позволяет легко записывать уравнения для их амплитуд.

Частично такая ситуация сохраняется и при наличии слабых нелинейностей, которые управляют перетеканием энергии между разными гармониками и тоже допускают наглядную физическую трактовку (это и может, собственно, служить критерием, определяющим слабость нелинейности).

В существенно нелинейных системах, где и возникает фликкер-шум, ситуация в корне иная. Здесь для индивидуальных гармонических составляющих нельзя придумать какой-либо простой физической интерпретации. Имеет смысл рассматривать только весь фурье-спектр целиком, что обычно не позволяет почерпнуть сколь-нибудь существенную информацию о системе.

Наличие в системе фликкер-шума, эквивалентное отсутствию у нее характерных частот, с формально-математической точки зрения представляет собой следствие отсутствия характерных временных масштабов [10, 11]. То есть в его основе лежит не наличие неких новых эффектов, а скорее, отсутствие «старых». Это приводит к утрате некоторыми классическими понятиями физического содержания.

1.2. Степенные законы распределения вероятностей. Еще одной отличительной чертой многих сложных систем являются *степенные законы распределения вероятностей* (СЗРВ). То есть статистические характеристики происходящих в них событий обыкновенно имеют плотность вероятности вида

$$p(x) \sim x^{-(1+\alpha)}, \quad (2)$$

где показатель α обычно лежит в диапазоне от нуля до единицы. При статистическом описании катастроф и стихийных бедствий распределение (2) является правилом, практически не знающим исключений. В качестве классического примера можно привести закон Рихтера – Гутенберга: зависимость количества землетрясений от их энергии определяется формулой (2) с $\alpha \approx 2/3$ для землетрясений с магнитудой менее 7.5 и с $\alpha \approx 1$ для более сильных [13]. Точно так же распределены: относительная смертность² в результате землетрясений $\alpha \approx 0.25 \div 0.45$, ураганов $\alpha \approx 0.4 \div 0.6$, а также наводнений и торнадо $\alpha \approx 1.4$ [14]; число заболевших $\alpha \approx 0.29$ при эпидемиях в изолированных популяциях [15]; площадь лесных пожаров $\alpha \approx 0.59$ [16]; колебания биржевых индексов $\alpha \approx 1.40$ [17]; масса снежных лавин [18]. Степенное распределение имеют характеристики и многих других явлений, как связанных с катастрофами и риском, так и не имеющих к ним прямого отношения, например, динамики солнечных вспышек [18–21] или научной продуктивности исследователей (число публикаций) [22].

Степенные законы распределения представляют собой одну из отличительных черт сложности. Для простых систем наиболее типичны экспоненциальное

$$P(x) \sim \exp(-\lambda x) \quad (3)$$

и нормальное (гауссово)

$$P(x) \sim \exp[-(x-m)^2/(2\sigma^2)] \quad (4)$$

распределения (рис. 2). Первое описывает поведение «элементарных» объектов: в соответствии с формулой (3) распределены, например, телефонные разговоры по продолжительности или молекулы газа по энергии. Распределению (4) подчиняются величины, получающиеся при сложении большого числа независимых случайных слагаемых, поэтому для сложных систем (если понимать их как состоящие из большого числа элементов) можно было бы ожидать именно гауссовой статистики. Однако, как показывают приведенные выше примеры, это зачастую не так.

Разница между нормальным и степенным распределениями носит не формальный, а принципиальный характер. Если статистика системы описывается

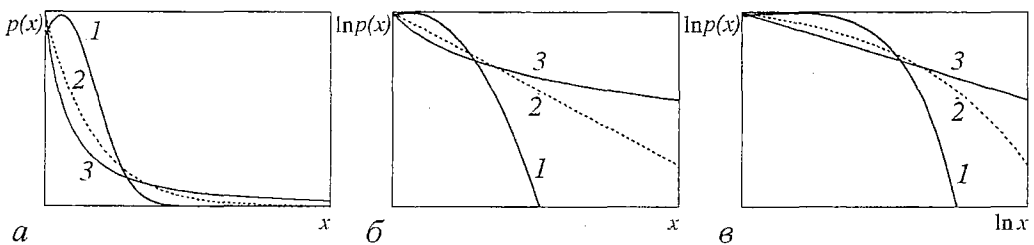


Рис. 2. Типичный вид плотности вероятности величин, распределенных в соответствии с нормальным (1), экспоненциальным (2) и степенным (3) законами, с различным представлением данных по осям. Кривые рис. а – позволяют сравнить скорость спада плотности вероятности для хвостов распределений; на рис. б – нормальное (1) и экспоненциальное (2) распределение представляются, соответственно, в виде параболы и прямой; на рис. в – вид прямой имеет степенной (3) закон распределения, что говорит о скейлинговом поведении, то есть об отсутствии выделенных масштабов при СЗРВ

² Под относительной смертностью понимается количество погибших в результате стихийного бедствия, деленное на численность населения страны на его момент.

формулой (4), то свыше 99.7% событий отклоняется от среднего значения m не более чем на 3σ (так называемое правило трех сигм), а, скажем, за 5σ выбивается и вовсе менее одного события на миллион. При этом появляется возможность «законно» пренебречь очень крупными событиями, считая их практически невероятными, то есть можно отрезать хвост распределения.

Статистика величин, описываемых распределением (2), отличается тем, что крупные события, приходящиеся на хвост распределения, происходят *недостаточно редко*, чтобы ими можно было пренебречь. По этой причине СЗРВ называют также *распределениями с тяжелыми хвостами*. Распределения вида (3) или (4), имеющие хвост, спадающий быстрее любой степени x , в этой связи уместно именовать *компактными*, подразумевая небольшую протяженность диапазона значений, принимаемых случайной величиной со сколь-нибудь значимой вероятностью.

В терминах оценки безопасности и риска хвост распределения соответствует так называемым *гипотетическим* авариям, возможность которых, как явствует уже из самого названия, на практике не учитывается. Наличие СЗРВ в корне подрывает вошедшие в плоть и кровь представления о надежности и риске. Эти представления базируются на явном, а чаще всего неявном, предположении, что серьезные неприятности происходят исключительно в результате неблагоприятного стечения ряда обстоятельств, то есть что любое крупное событие возникает как сумма большого числа мелких *независимых* событий, которая в силу центральной предельной теоремы нормально распределена [23]. На самом деле элементарные события в сложных системах не являются независимыми.

Природа степенных законов распределения (а в конечном итоге, и катастроф) связана с сильной взаимозависимостью происходящих событий. Но это даже не «эффект домино», когда упавшая костяшка с некоторой близкой к единице вероятностью сшибает следующую, та – еще одну и т.д. В этом случае распределение числа упавших костяшек имело бы вид (3) и все равно быстро бы убывало с ростом x . К возникновению СЗРВ приводит «цепная реакция», то есть лавинообразное нарастание возмущения с вовлечением в событие все большего количества ресурса.

Проиллюстрируем это на примере простейшего ветвящегося процесса. Предположим, что произошла вспышка инфекционного заболевания, при котором каждый заразившийся человек («частица» в терминах теории ветвящихся процессов) в течение дня может с вероятностью p умереть (распад частицы), с вероятностью p_0 выздороветь (исчезновение частицы) или с вероятностью p_i заразить еще $i-1$ человека, $i=1,2,\dots$ (сохранение частицы или ее деление на $2,3,\dots$ частицы). Очевидно, что здесь имеется положительная обратная связь, то есть чем больше людей инфицировано, тем больше их заразится в дальнейшем. Динамика болезни будет определяться коэффициентом размножения ветвящегося процесса $m=\sum_i i p_i$. Если $m \leq 1$, то вспышка рано или поздно угаснет [24], и можно показать, что вероятность v_j того, что к этому моменту умрет ровно j человек, при больших v_j дается формулой [24, 25]

$$v_j \sim j^{-3/2} \exp(-bj), \quad (5)$$

где зависимость коэффициента b от m определяется соотношением

$$b \sim (1 - m)^2. \quad (6)$$

При этом единичное значение коэффициента размножения соответствует *критическому ветвящемуся процессу*, описываемому формулой (2) с $\alpha=1/2$.

Описанный ветвящийся процесс можно проиллюстрировать еще одной задачей. Речь идет о нахождении времени *разорения азартного игрока*, играющего против казино в небезобидную игру, для которой вероятность проигрыша составляет p , а вероятность i -кратного выигрыша – p_i . Легко понять, что каждый проигрыш здесь соответствует смерти одного больного в рассмотренном примере,

а выигрыш – акту заражения новых людей. Распределение вероятностей времени (числа игр), в течение которого игрок, исходно имевший денег на одну ставку, наконец разорится (а при $m \leq 1$ это случится непременно), дается формулой (5). Таким образом, ввязавшись в игру с гарантированным проигрышем, можно весьма долго ощущать себя «на коне», что не меняет, однако, финала.

При m близком к единице ветвящиеся процессы могут порождать степенное распределение. Однако они не могут претендовать на удовлетворительное описание природы СЗРВ без объяснения, почему коэффициент размножения для самых разнообразных явлений оказывается именно таким. Поэтому подробное обсуждение вопроса о механизмах их возникновения мы отложим до раздела 2, посвященного теории самоорганизованной критичности, а сейчас подробнее остановимся на их свойствах. Здесь есть некоторые тонкости, связанные с различиями между чистой теорией и реальной физикой, поэтому математика и физика будут рассмотрены отдельно.

1.2.1. Математический аспект. Устойчивые распределения. В истории науки уже неоднократно случалось так, что теоретический аппарат, понадобившийся физикам, в том или ином виде уже давно был разработан математиками. Так произошло и со степенными законами распределения – в теории вероятности изучается класс так называемых *устойчивых распределений*, представляющих собой предельные законы для сумм независимых одинаково распределенных слагаемых. Он включает в себя как компактные распределения, так и распределения с тяжелыми хвостами.

Устойчивыми эти законы называют потому, что сумма любого числа случайных величин с некоторым устойчивым распределением после соответствующей перенормировки имеет то же самое распределение, что и каждое отдельное слагаемое:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - a_n)/b_n \stackrel{d}{=} x_1 \quad (7)$$

(символ d над знаком равенства означает эквивалентность распределения вероятностей правой и левой частей). Обсуждая вопросы теории устойчивых распределений, мы будем следовать книгам [23, 26, 27].

Устойчивые распределения образуют четырехпараметрическое семейство функций $p(x) = g(x; \alpha, \beta, \gamma, \lambda)$, которые за исключением нескольких частных случаев (формулы (8), (10) и (11) – см. ниже) не выражаются через элементарные функции. Масштабный параметр $\lambda > 0$ и параметр неслучайного сдвига γ соответствуют линейному преобразованию координат

$$g(x; \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \lambda^{-1/\alpha} g(\lambda^{-1/\alpha}(x - \gamma); \alpha, \beta, 0, 1),$$

где γ' зависит от β , γ и α (причем $\gamma' = \gamma$ при $\alpha \neq 1$). Параметр формы β , ограниченный по модулю единицей, задает асимметрию функции распределения (при отрицательных значениях параметра она скошена влево, при положительных – вправо). Параметр α управляет асимптотикой распределения и может принимать значения в интервале $0 < \alpha \leq 2$. При $\alpha = 2$ (и любых β) получается нормальное распределение (4)

$$g(x; 2, \beta, \gamma, \lambda) = \exp[-(x - \gamma)^2 / (4\lambda)] / (4\pi\lambda)^{1/2}, \quad (8)$$

а при $\alpha < 2$ (если $\beta \neq -1$) распределение имеет степенную асимптотику при $x \rightarrow \infty$

$$g(x; \alpha, \beta, \gamma, \lambda) \sim x^{-(1+\alpha)},$$

то есть его хвост описывается формулой (2).

Таким образом, распределения с тяжелыми хвостами являются не альтернативой нормального распределения, а его естественным дополнением. Если

сумма независимых случайных величин после линейной перенормировки $(x_1+x_2+\dots+x_n-a_n)/b_n$ сходится к какому-либо закону, то он принадлежит к семейству устойчивых законов, причем константы a_n и b_n определяются однозначно и выполнено соотношение

$$b_n = n^{1/\alpha}. \quad (9)$$

При этом нормальному распределению, для которого существуют все статистические моменты, соответствует лишь одно значение $\alpha=2$, а все остальные дают распределения, имеющие бесконечный второй момент, а следовательно, и дисперсию.

Помимо бесконечной дисперсии степенное распределение имеет при $\alpha \leq 1$ бесконечное математическое ожидание $E x$. Случай $\alpha < 1$ интересен также и тем, что в силу (9) нормировочная постоянная b_n растет быстрее, чем n . То есть закон больших чисел становится неприменим. Особенно любопытно эта ситуация выглядит при пограничном значении $\alpha=1$, дающем в случае $\beta=0$ распределение Коши

$$g(x;1,0,\gamma,\lambda) = \lambda \{ \pi [\lambda^2 + (x - \gamma)^2] \}^{-1}, \quad (10)$$

для которого $b_n=n$, и если выбрать $\gamma=0$, то будет $a_n=0$ и получится, что

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n \stackrel{d}{=} x_1.$$

То есть вопреки привычным ожиданиям сходимости выборочного среднего к среднему по ансамблю, это выборочное среднее оказывается распределено в точности так же, как одно слагаемое. Иначе говоря, мы усредняем наблюдаемые величины, чтобы получить какое-то среднее значение, но остаемся с тем же разбросом, что и до усреднения!

Очевидно, что нормировка будет еще больше для меньших значений α . Например, для распределения Леви

$$g(x;1/2,1,\gamma,\lambda) = \theta(x-\gamma)\lambda x^{-3/2} \exp[-\lambda^2/(4(x-\gamma))]/(2\pi^{1/2}) \quad (11)$$

$b_n=n^2$, то есть получается, что сумма одинаково распределенных слагаемых растет как квадрат их числа.

Применительно к описанию катастроф и бедствий это означает, что из-за степенного вида законов распределения должен наблюдаться нелинейный, все более *ускоряющийся* рост суммарного ущерба со временем. Этот результат производит шокирующее впечатление, и его иногда ошибочно воспринимают как свидетельство нестационарности процесса. Это, конечно же, не так. Просто по мере увеличения числа зарегистрированных событий n их выборочное среднее $(x_1+x_2+\dots+x_n)/n$ стремится к математическому ожиданию, а оно при $\alpha < 1$ бесконечно. Нелинейное и ускоряющееся со временем нарастание суммарного ущерба также перестает казаться парадоксальным, если учесть, что из-за катастрофического поведения определяющее влияние на его значение оказывает величина ущерба от крупнейшего события. Можно показать, что при $\alpha < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = 1/(1-\alpha),$$

то есть в сумму случайных величин, распределение которых имеет хвост вида (2) с $\alpha < 1$, с точностью до коэффициента вклад вносит лишь максимальное слагаемое (в то время как для величин с конечным средним вклад любого отдельного слагаемого в сумму стремится к нулю).

Диапазон значений показателя от нуля до единицы выделен еще благодаря одному обстоятельству. Такие величины, как ущерб от катастрофы, энергия землетрясения и другие характеристики, описывающие сложные системы, как

правило, неотрицательны. Поэтому носитель распределения должен быть ограничен слева. Для устойчивых законов это имеет место лишь при $\alpha < 1$ и $\beta = 1$.

1.2.2. Физический аспект. Масштаб и математическое ожидание.

Изложенные выше результаты теории устойчивых распределений не проливают свет на механизм возникновения СЗРВ. В самом деле, если слагаемые имеют конечную дисперсию, то в силу центральной предельной теоремы предельное распределение будет нормальным, что соответствует устойчивому закону с $\alpha = 2$. А чтобы получить меньшие значения α , необходимо складывать величины с бесконечной дисперсией, то есть уже имеющие степенной хвост.

Кроме того, как мы увидим ниже, сами по себе устойчивые распределения не очень хороши для практического описания сложных систем, так как представляют собой математическую идеализацию. Тем не менее, приведенные результаты дают общее представление о довольно непривычных свойствах степенных законов распределения и даже позволяют в некоторых случаях определять их показатели на основе общих соображений.

Продемонстрируем это на конкретном примере. Энергия землетрясения E пропорциональна произведению площади разлома S и смещения пластов ΔL . Для не очень сильных землетрясений, не достигающих дна земной коры, $S \sim L^2$, где L – линейная протяженность разлома. Кроме того, в силу закона Гука³ $\Delta L \sim L$. Отсюда находим, что [12, 13]

$$E(S) \sim S^{3/2}. \quad (12)$$

Разобьем площадь разлома S на n участков равной площади и предположим, что каждый из них вносит независимый вклад в энергию землетрясения, то есть что

$$E_1(S/n) + E_2(S/n) + \dots + E_n(S/n) \stackrel{d}{=} E_1(S). \quad (13)$$

Применение соотношения (12) к левой и правой частям формулы (13) дает

$$(S/n)^{3/2}(E_1(1) + E_2(1) + \dots + E_n(1)) \stackrel{d}{=} S^{3/2} E_1(1),$$

откуда в силу формул (7) и (9) немедленно получаем для энергии устойчивое распределение с $\alpha = 2/3$.

Для сильных землетрясений соответствующие формулы имеют вид $S \sim LH$ и $\Delta L \sim H$, где $H \ll L$ – толщина коры, и соотношение (12) запишется как $E \sim S$, откуда получается единичное значение α .

К сожалению, несмотря на всю привлекательность и простоту приведенных выкладок, здесь есть скрытый порочный круг. Записывая соотношение (13), мы неявно предполагаем масштабную инвариантность сейсмичности, то есть то, что землетрясения «устроены одинаково» вне зависимости от энергии и площади разлома. Иначе говоря, мы изначально предполагаем отсутствие характерных масштабов, что означает степенной закон распределения. Хотя это предположение само по себе является нетривиальным и нуждается в объяснении и доказательстве, на уровне феноменологической теории можно считать его экспериментальным фактом, а приведенный вывод – исчерпывающим.

Есть еще одно весьма существенное обстоятельство, отличающее чистую теорию от практики. Очевидно, что в природе никакое явление не может характеризоваться бесконечными значениями среднего или дисперсии. Поэтому ясно, что степенные зависимости вида (2) приближительны и должны нарушаться при очень больших значениях аргумента. То есть степенное спадание плотности

³ Значение $\Delta L = F/k$, где коэффициент жесткости $k \sim 1/L$, а F – сила, при которой начинается проскальзывание пластов. Поскольку их «держит» самый слабый участок, F можно считать не зависящим от L .

вероятности соответствует средней асимптотике, и вместо тяжелых хвостов на практике должны иметь место «полутяжелые»

$$p(x) \sim x^{-(1+\alpha)} f(x/x_c), \quad (14)$$

где скейлинговая функция $f(y)$ приблизительно постоянна при $y \sim 1$ и быстро убывает при $y \rightarrow \infty$. При этом «тяжесть хвоста» переносится в область промежуточных значений x . Строго говоря, чисто степенная зависимость нарушается и при $x \rightarrow 0$, так как иначе распределение (14) не будет нормируемым, однако то, как конкретно это происходит, не существенно при анализе крупных событий.

Замена формулы (2) на (14) при переходе от идеальных СЗРВ к реальным имеет одно весьма неожиданное качественное следствие. Естественно предположить, что введенное обрезание степенного хвоста делает бесконечное математическое ожидание конечным, но очень большим. Однако вопреки интуитивным представлениям для распределения (14) математическое ожидание *чрезвычайно мало* по сравнению с крупными событиями, которые могут происходить в системе. Оно не несет никакой информации о катастрофах, которые потому и катастрофы, что оказались намного крупнее типичных событий, характеризующих значением математического ожидания.

При описании катастроф математическое ожидание вообще является практически бесполезным. Дело здесь в коэффициенте пропорциональности в формуле (14), который определяется из условия нормировки

$$\int p(x) dx = 1 \quad (15)$$

и является очень маленьким, так как интеграл (15) «набирает» основное значение в области значений $x \ll x_c$. Хотя интегралы для первого (математическое ожидание) и последующих моментов

$$\mu_i = \int p(x) x^i dx$$

при $\alpha < 1$ набираются в районе больших $x \sim x_c$, за счет малости нормировочного коэффициента среднее также «съезжает» в область малых значений и поэтому непригодно для анализа крупных событий.

Не менее существенно и другое обстоятельство: на практике из-за ограниченной чувствительности приборов и методик невозможно получить достоверные оценки среднего. Не зарегистрировав или не сумев разрешить часть малых событий, мы неизбежно ошибемся при определении коэффициента нормировки, а следовательно, и среднего. Причем чем больший кусок распределения мы «потеряем», тем больше будет ошибка.

Перечисленных недостатков лишена статистическая характеристика, называемая *масштабом* [25]

$$Scx = \mu_2/\mu_1, \quad (16)$$

которая представляет собой среднее, взятое с весом x , то есть определяет *характерный размер крупного события*, при этом полностью игнорируя мелкие. Иначе говоря, величина Scx определяет, событий какого масштаба (отсюда и название) следует ожидать от системы. Поскольку интегралы, определяющие и числитель, и знаменатель в формуле (16), пропорциональны коэффициенту нормировки и набираются в области больших значений, их отношение не будет чувствительным к потере части данных о малых событиях. Оценка масштаба также малочувствительна и к невозможности отличить несколько отдельных событий от одного события суммарного размера [25].

Для компактных распределений масштаб будет, естественно, совпадать по порядку величины с математическим ожиданием $Scx \sim Ex$, поскольку интегралы для

всех моментов, начиная с нулевого, набираются в одной и той же области, в то время как для распределений с тяжелыми хвостами будет $S_{cx} \gg E_x$. В этой связи можно говорить о системах, склонных к катастрофам, как о имеющих два характерных масштаба (для типичных и для крупных событий), сильно различающихся по порядку величины [25]. Эта разница лежит в основе упоминавшегося выше явления перемежаемости. Когда на фоне большого числа типичных событий происходит одно или несколько крупных, это воспринимается как вспышка активности. Если же наблюдатель (или сама система) имеет порог чувствительности, по величине лежащий между средним и масштабом, то типичные события воспринимаются как покой, а о вспышках активности говорят как о прерванном равновесии.

Легко видеть, что для распределения (14) $S_{cx} \sim x_c$, однако по небольшой статистической выборке оценить x_c практически невозможно, а оценить масштаб масштаба также не удастся найти, поскольку его оценка растет с ростом объема выборки до тех пор, пока не наберется достаточное число крупных событий.

Завершая обсуждение СЗРВ, еще раз взглянем на формулу (14). Диапазон значений α от нуля до единицы, в который попадают показатели для распределений характеристик катастроф и бедствий, и который является выделенным с точки зрения теории устойчивых распределений, снова оказывается в особом положении. Если $\alpha > 1$, то, как отмечалось, среднее конечно даже для чисто степенного хвоста вида (2), то есть интеграл для μ_1 набирается там же, где и нормировочный – в области малых значений. Следовательно, среднее отслеживает небольшие события, которые и вносят основной вклад в суммарный ущерб, несмотря на возможность крупных. Если $\alpha < 0$, то нормировочный интеграл (15) набирает свое значение вне области малых значений, и, следовательно, математическое ожидание отслеживает крупные события, то есть для системы как раз они и характерны.

Первую ситуацию можно воспринимать как докатастрофическую, соответствующую, например, автомобильным авариям, в которых погибает множество людей, однако несчастья с большим числом жертв нетипичны.

Вторая ситуация является уже сверхкатастрофической, однако, поскольку авторам не известны ни возможные механизмы возникновения распределений с отрицательными α , ни конкретные примеры таких распределений, мы не можем предложить для нее никаких интерпретаций.

Таким образом, все интересное и опасное в мире сложности и риска описывается степенными законами с $0 < \alpha \leq 1$.

1.3. Связь фликкер-шума и степенных распределений. Как уже отмечалось выше, явление фликкер-шума обусловлено отсутствием характерных времен, то есть степенным распределением временных характеристик процессов. Поясним это рассуждение двумя простыми примерами. Рассмотрим изображенный на рис. 3, а процесс, представляющий собой последовательность событий единичной амплитуды, длительность которых описывается СЗРВ с показателем α

$$p(T) \sim T^{-(1+\alpha)}. \quad (17)$$

Будем считать, что время, проходящее между последовательными событиями, велико.

Спектр мощности $S(f)$ любого процесса представляет собой просто преобразование Фурье от его автокорреляции

$$S(f) = \int A(\tau) e^{2\pi i f \tau} d\tau,$$

которая дается формулой

$$A(\tau) = \int x(t)x(t+\tau) dt \quad (18)$$

и определяет, в какой мере процесс «помнит» самого себя.

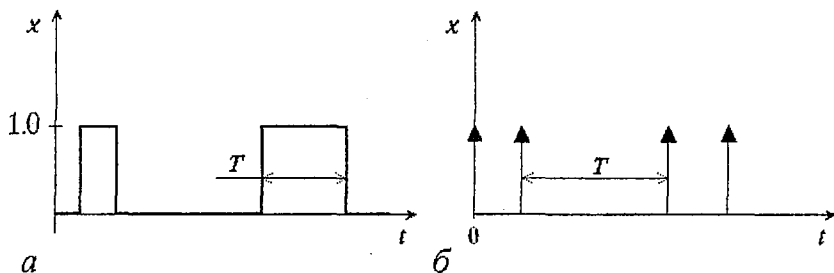


Рис. 3. Простейшие примеры сигналов, не имеющих характерных временных масштабов: а – события единичной амплитуды и случайной длительности, разделенные большими промежутками времени; б – кратковременные события равной амплитуды, разделенные случайными промежутками времени. Распределение длительностей событий и промежутков в вариантах а и б, соответственно, предполагается степенным

Если воспользоваться временной разнесенностью событий рассматриваемого процесса и пренебречь взаимодействием между ними, то для автокорреляции (18) получим

$$A(\tau) \sim \int_{\tau}^{\infty} p(T)(T-\tau)dT \sim \tau^{1-\alpha},$$

откуда немедленно имеем

$$S(f) \sim f^{\alpha-2},$$

то есть данный процесс порождает фликкер-шум с $\beta=2-\alpha$ [28,10]. Этот результат не изменится, если большие промежутки времени между событиями заменить на имеющие то же распределение (17), что и сами события [10].

Другим примером может служить процесс, состоящий из кратковременных событий равной амплитуды, разделенных случайными промежутками времени, которые имеют степенное распределение вероятностей (17) с показателем $\alpha < 1$ (рис. 3, б).

Примем за нулевой момент времени момент одного из событий, тогда на промежуток времени от 0 до t приходится

$$n(t) = t \int_0^t p(T)TdT \sim t^{\alpha}$$

событий. Соответственно, вероятность того, что в момент τ происходит событие, равна

$$dn(\tau)/d\tau \sim \tau^{\alpha-1},$$

что с точностью до коэффициента есть автокорреляция $A(\tau)$ рассматриваемого процесса, откуда $S(f) \sim f^{-\alpha}$, то есть $\beta = \alpha$ [11]⁴.

⁴ Следует заметить, что при $\alpha > 1$ для данного процесса $\beta = 2 - \alpha$ [10]. На практике такая неаналитическая зависимость β от α может приводить к получению заниженных значений β при обработке реальных данных, которые будут отклоняться от точного значения тем больше, чем короче изучаемый отрезок временного ряда.

2. Теория самоорганизованной критичности

Возможно, конечное понимание нами научных вопросов измеряется нашей способностью создавать метафорическое описание происходящего.

Пер Бак

Точно так же как любое обучение ребенка начинается с игры, развитие теории должно начинаться с игрушечных моделей. Причем важно не то, насколько они точно и полно описывают реальность (как правило, совсем не точно), а то, в какой мере они отражают ее фундаментальные свойства. Подобными «игрушками» были, например, модель атома Бора (который, как гласит известная шутка, есть атом водорода, а вовсе не атом бора) или система уравнений Лоренца (свойства которой совершенно не адекватны той задаче, из которой она была получена). Есть такая простая модель и в науке о сложности, созданная в пионерской работе [28] П. Баком, Ч. Тангом и К. Визенфельдом.

2.1. «Песочная» парадигма. Представим себе коническую кучу песка, на центр которой по одной кладут песчинки. Будем считать, что устойчивость ее поверхности определяется локальным наклоном. Когда он превышает некоторое пороговое значение, песчинки соскальзывают вниз, что может привести к потере устойчивости соседними участками кучи, то есть возможно развитие лавины осыпаний. Если средний наклон кучи невелик, то добавление очередной песчинки не вызывает заметных последствий, поскольку лавина быстро затухнет. Если наклон очень большой, то любое воздействие может привести к макроскопическому оползну, в который будет вовлечена большая масса песка.

Эту систему удобно описывать на языке клеточных автоматов. Для кучи песка было предложено несколько различных вариантов правил, из которых, по-видимому, наиболее простым и наглядным (хотя он и не соответствует в точности реальной куче песка) является исторически самый первый [28], называемый в литературе ВТW-моделью⁵. Автомат представляет собой квадратную решетку, в ячейках которой находятся целые числа, характеризующие локальный наклон кучи. Ячейки, где оказываются числа, большие порогового значения, которое обыкновенно полагается равным 3, объявляются неустойчивыми и осыпаются по схеме, изображенной на рис. 4, а.

Эти правила представляют собой трактовку осыпания, как соскальзывания двух песчинок вниз по склону, которое приводит к росту наклона в двух нижележащих ячейках. При этом увеличение наклона в двух ячейках, лежащих выше, обусловлено уменьшением числа песчинок в осыпавшейся ячейке. Поскольку схема полностью симметрична, конкретное направление склона значения не имеет (отметим лишь, что он направлен вдоль диагонали решетки).

Шаг моделирования состоит из возмущения и релаксации. Возмущение, или *привод* (driving), соответствующее добавлению на вершину кучи (в центр решетки) одной песчинки, выражается в увеличении на единицу значения в центральной ячейке системы. Если это

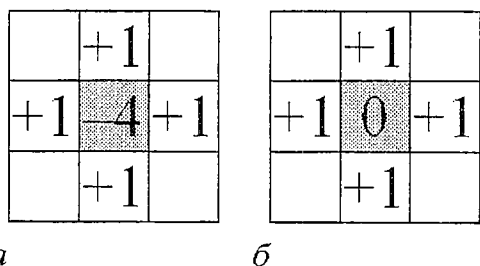


Рис. 4. Правила осыпания неустойчивой ячейки (закрашена серым). При превышении значением в ячейке тройки оно уменьшается с одновременным увеличением значений в соседних ячейках; а – ВТW-модель, б – дискретная FF-модель

⁵ Здесь и далее, если не указано другое, самоорганизованно критические модели будут обозначаться по первым буквам фамилий их создателей, хотя не все из подобных обозначений являются общепринятыми.

нарушает ее устойчивость, то она осыпается (рис. 4, а), что в свою очередь может нарушить устойчивость соседей, которые в этом случае также осыпаются, и т.д. Релаксационный процесс завершается, когда все ячейки вновь обретут устойчивость, после чего делается следующий шаг.

Граничные условия ВТW-модели полагаются открытыми. Это значит, что если устойчивость теряет ячейка, лежащая на границе решетки, то при ее осыпании происходит потеря единицы наклона (и, соответственно, двух единиц для угловых ячеек). Возможность «оттока наклона» необходима для существования стационарного состояния, поскольку возмущение увеличивает средний наклон кучи, а правила осыпания консервативны.

Как показывает компьютерное моделирование, вне зависимости от начальных условий система эволюционирует в стационарное состояние, в котором распределения длительностей лавин, затронутой ими площади и числа осыпаний имеют вид (14), где величина x_c определяется лишь размером системы и при его увеличении может быть сделана сколь угодно большой. Поскольку нарушение степенной зависимости связано лишь с конечными размерами системы, происходящие в ней процессы не имеют собственных характерных размеров.

Понять природу этого явления легче, введя понятие *минимально устойчивого элемента* (МУЭ), под которым понимается участок кучи, теряющий устойчивость под воздействием малого возмущения (в большинстве случаев МУЭ являются ячейки с пороговым значением наклона, однако возможны ситуации, когда их роль играют ячейки и с меньшим наклоном). Минимально устойчивые элементы являются проводниками активности, то есть если они образуют связный кластер, то любое воздействие на него затрагивает весь кластер.

Если средний наклон кучи не очень велик, то МУЭ редки, и возмущение не может далеко распространиться, то есть активность быстро затухает, имея вполне определенные характерные значения для описывающих ее величин. Однако, поскольку при этом лавина, как правило, не достигает краев кучи, средний наклон должен возрастать с каждой добавленной песчинкой. Если, напротив, средний наклон велик, то активность распространится практически по всей куче, достигая краев, где избыточный наклон будет покидать систему, что приводит к его уменьшению.

Таким образом, в системе имеется отрицательная обратная связь, удерживающая средний наклон вблизи некоторого значения, при котором концентрация минимально устойчивых элементов равна порогу перколяции, то есть точке возникновения из них бесконечного связного кластера. При этом любое возмущение (информация) может распространяться по системе на бесконечное расстояние, и система ведет себя как *единое целое*. По этой причине, в частности, то, как проводится возмущение, то есть куда добавляются песчинки, не оказывает влияния на статистические свойства ВТW-модели – можно, например, добавлять песчинки не в центр решетки, а в случайно выбранные ячейки [29].

2.2. Критичность и целостность. Факт целостности системы имеет простое математическое выражение в терминах пространственных и временных корреляций. Они определяют вероятность некоторого события – скажем, осыпания ячейки – в некоторой точке r в момент времени t при условии, что такое же событие произошло в известном месте в известное время (для определенности – в начале координат в нулевой момент)

$$G(r,t) = \text{Prob}\{(r,t)|(0,0)\}.$$

В простых системах корреляции убывают экспоненциально, то есть $G(r,t) \sim e^{-r/\rho} e^{-t/\tau}$. При этом элементы системы «чувствуют друг друга» и «помнят свое прошлое» лишь на конечных характерных расстояниях $r \sim \rho$ и временах $t \sim \tau$. Модели кучи песка, напротив, присуще степенное убывание функции G [30], о котором говорят как о *дальних пространственных и временных корреляциях*, подразумевая отсутствие характерных длин и времен, на которых бы утрачивалась информация о происходящих рядом или предшествующих событиях.

Появление дальних корреляций является принципиальным обстоятельством, означающим, что система с локальными правилами (элементы которой способны лишь к взаимодействию со своими ближайшими соседями) демонстрирует глобальное поведение. То есть у системы появляются свойства, которых не было у ее составных частей. *Сложное может возникать из простых элементов в результате самоорганизации.* Ключевое слово здесь именно «самоорганизация», поскольку, вообще говоря, дальние корреляции и другие описанные выше свойства сложных систем типичны для так называемых *критических явлений*, представителями которых служат фазовые переходы II рода и изменения числа или типа аттракторов динамических систем, происходящие в точке бифуркации.

Рассмотрим, например, фазовый переход парамагнетик–ферромагнетик. Электронам незаполненных атомных оболочек переходных металлов энергетически выгодно, чтобы их спины были параллельны. В этом случае принцип Паули «удерживает» электроны вдали друг от друга, уменьшая тем самым энергию кулоновского отталкивания. Поэтому электроны стремятся выстроить свои спины в одном направлении, чему, однако, противодействуют тепловые флуктуации. При высокой температуре флуктуации доминируют и спины ориентированы хаотически, так что на макроскопическом масштабе их вклады в намагниченность образца взаимно усредняются, и он ведет себя как парамагнетик. По мере снижения температуры начинают образовываться области одинаково ориентированных спинов (магнитные домены), характерный размер которых при некоторой *критической температуре* становится бесконечным (точка Кюри). В этот момент у образца появляется спонтанная намагниченность (система спинов начинает вести себя как единое целое), которая будет тем больше, чем ниже температура (и, соответственно, чем большая доля спинов ориентирована в одном направлении) [31].

Ничто не мешает нам построить критическую систему и на «песочной» основе. Возьмем цилиндрический барабан с горизонтально ориентированной осью, насыплем в него некоторое количество песка и приложим к этой конструкции вращающий момент. Чтобы его скомпенсировать, барабан повернется так, что поверхность песка отклонится от горизонтали. Если угол наклона будет невелик, то система окажется в состоянии равновесия, однако если он будет превышать некоторое критическое значение, то возникнет непрерывный ток песка, который будет тем больше, чем больше отклонение от критического угла [32].

Таким образом, *параметр порядка* (намагниченность или ток песка) начинает принимать ненулевое значение при переходе *управляющего параметра* (температура или угол наклона поверхности) через *критическое значение*, что означает появление у системы целостных свойств. Критическая точка разделяет хаотическое (докритическое) и упорядоченное (сверхкритическое) состояния, поэтому в ней любое *малое воздействие* может оказать существенное влияние на систему. В ней и только в ней, поскольку в хаотической фазе (высокая температура или малый наклон) оно *еще* быстро затухает в пространстве и времени, а в упорядоченной (низкая температура или большой наклон) – *уже* не может ощутимо повлиять на сложившуюся структуру системы.

Однако в самой критической точке *малые причины могут приводить к большим следствиям*. Направление спонтанной намагниченности ферромагнетика определяется случайными факторами, действовавшими на него в точке фазового перехода и сориентировавшими в определенном направлении небольшую, но достаточную для появления выделенного направления, долю спинов. Аналогично, хотя на поверхности песка при критическом угле наклона еще нет спонтанного тока, одна добавленная песчинка может вызвать лавину любого размера.

При описании поверхности песка в терминах минимально устойчивых элементов управляющим параметром служит их концентрация, а параметром порядка – вероятность того, что некоторая ячейка принадлежит к бесконечно большому кластеру из них, то есть что воздействие на нее распространится на бесконечное расстояние. В докритическом состоянии (концентрация МУЭ меньше порога перколяции) изменение состояния одного элемента сказывается лишь на

конечном масштабе порядка среднего размера кластера. В сверхкритическом состоянии бесконечный кластер МУЭ содержит конечный процент ячеек системы и, обладая дублированной связностью, «не ощущает» замену обычного элемента на МУЭ, и наоборот. Но в критической точке, где бесконечный кластер только появляется, он «едва связан», и малые изменения могут нарушить его связность или, наоборот, создать ее.

Словечко «едва», как нам кажется, исключительно точно описывает критическое поведение: перколяционный кластер в критической точке едва связан, песок в стационарном режиме ВТW–модели едва движется по куче (в среднем одна песчинка за ход), ветвящийся процесс, описанный в разделе 1, является критическим при единичном коэффициенте размножения, то есть когда процесс едва выживает, и т.д.

Критические явления представляют собой «момент отрыва» параметра порядка от нулевого значения, который происходит при точной установке управляющего параметра в критическое значение. В естественных условиях – за пределами лаборатории – некому заниматься подстройкой управляющих параметров, поэтому сами по себе критические явления не позволяют объяснить возникновение сложности в природе [18] и не могут служить для описания катастроф.

Однако вместо того чтобы подстраивать управляющий параметр *a priori* неизвестной величине, можно установить параметр порядка в значение $+0$, что заставляет управляющий параметр уже самостоятельно принять критическое значение. Иначе говоря, вместо того, чтобы крутить ручку прибора, можно начать сдвигать с нулевой отметки стрелку на его шкале, вынуждая ручку повернуться до нужного положения [32]. Такое управление параметром порядка обыкновенно достигается при помощи *разделения временных масштабов* [33], при котором время релаксации системы много меньше времени между последовательными возмущениями, то есть когда события едва-едва происходят.

Именно это и имеет место в модели кучи песка. Положение ручки (средний наклон) устанавливается в критическое значение за счет самоорганизации, а не путем искусственной подстройки. По этой причине ВТW–модель и другие системы такой природы получили название *самоорганизованно критических* (СК).

Весьма остроумной является так называемая «офисная» интерпретация данной модели [18], которая трактует ячейки клеточного автомата как столы клерков, а величины в них – как число ждущих рассмотрения бумаг. До тех пор пока у чиновника не скопится определенное число бумаг, он бездействует, а потом берет четыре штуки, визирует и передает соседям. При этом одна входящая бумага может вызвать катастрофический взрыв «деловой» активности.

3. Экскурсия по зоопарку самоорганизованно критических моделей

Понимание редко возникает из сложного беспорядочного моделирования, а много чаще – из грубого упрощенчества. Как только определен существенный механизм, просто проверить его на прочность путем добавления все новых и новых деталей.

Пер Бак

Построение СК–моделей оказалось чрезвычайно плодотворным для объяснения и качественного описания явлений во многих областях знания. Мы далеки от мысли дать здесь полный обзор всего многообразия предложенных исследователями моделей. Остановимся лишь на примерах, существенных для понимания принципиальных вопросов или представляющих интерес с точки зрения управления риском.

3.1. DR-модель. Точное вычисление показателей. Аналитическое нахождение точных значений показателей для критических систем является весьма сложной задачей, которую обыкновенно удается решить лишь частично. То есть значения нескольких основных показателей получаются из эксперимента (компьютерного или натурального) либо находятся при помощи приближенных методов, а остальные выражаются через них при помощи скейлинговых соотношений.

Одним из немногочисленных исключений из этого правила служит предложенная в 1989 г. Дхаром и Рамасвами DR-модель, все показатели которой могут быть вычислены точно [34].

DR-модель представляет собой клеточный автомат, правила которого формулируются на двумерной гексагональной решетке (рис. 5, а) с открытыми граничными условиями на нижней стороне и периодическими условиями на боковых (левая и правая границы поля отождествлены и оно «свернуто» в вертикальный цилиндр).

Привод модели осуществляется путем увеличения на единицу значения в случайно выбранной ячейке верхнего слоя решетки. Когда значение в какой-либо ячейке решетки превышает единицу, эта ячейка теряет устойчивость и осыпается в соответствии с рис. 5, а. При этом по одной единице из осыпавшейся ячейки передается двум нижележащим, что в свою очередь может нарушить их устойчивость и т.д. При осыпании ячейки, принадлежащей к нижнему слою решетки, увеличения значения в других ячейках не происходит.

Правила DR-модели являются существенно *анизотропными* – лавина, распространяясь строго сверху вниз, никогда не затрагивает дважды один и тот же участок. Это обстоятельство, с одной стороны, существенно упрощает аналитическое исследование модели, а с другой, позволяет давать ей простые и наглядные интерпретации, самой распространенной из которых является экономическая [18, 35].

Каждая ячейка рассматривается как экономический агент – производитель определенного вида продукции, для создания двух единиц которой он использует по единице продукции каждого из двух нижележащих агентов. Число в ячейке соответствует количеству единиц продукции, запрошенной смежниками сверху. Как только накапливается более одного запроса, агент, в свою очередь, посылает

по запросу смежникам снизу, чтобы произвести свою продукцию и удовлетворить запросы вышележащих⁶.

Слои модели при этом можно трактовать как различные уровни экономики: (внизу – сырьевые и добывающие отрасли, в середине – перерабатывающие, наверху – производители готовой продукции), а добавление единичек в верхний слой – как запрос на единицу товара от конечного потребителя.

Можно показать, что число экономических агентов и слоев экономики, затронутых лавиной запросов, которую вызывает единичный запрос от конечного потребителя, характеризуются СЗРВ с показателями, соответственно, $1/3$ и $1/2$ [34].

В самом деле, как нетрудно понять,

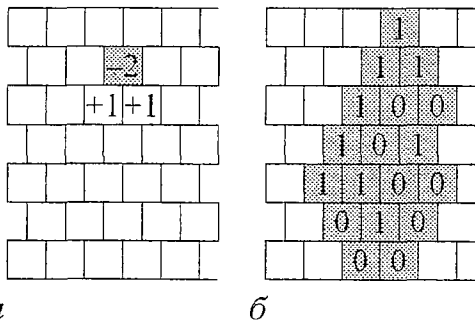


Рис. 5. DR-модель. а – фрагмент гексагональной решетки и правила осыпания неустойчивой ячейки (закрашена серым); б – пример области лавины. Числа обозначают содержимое ячеек до ее прохода. Видно, что увеличение или уменьшение ширины лавины определяется значениями на краях ее области

⁶ При таких правилах между получением запроса и его удовлетворением может проходить, вообще говоря, произвольное время. Чтобы избежать этого, агентам достаточно иметь склады для готовой продукции единичной емкости. Тогда все запросы будут удовлетворяться немедленно, что, однако, никак не скажется на динамике их распространения.

область лавины не может иметь полостей, поэтому полностью определяется на каждом слое своими двумя крайними точками. Если ячейка на краю лавины имела до ее прохождения нулевое значение, то на следующем слое край сдвинется на полклетки внутрь области лавины, а если единичное – наружу (рис. 5, б). Поэтому от слоя к слою ширина области лавины будет случайным образом уменьшаться или увеличиваться на одну клетку либо оставаться неизменной с вероятностями, зависящими лишь от концентрации нулей и единиц в системе. Легко видеть, что продвижение лавины по слоям представляет собой не что иное, как описанную в разделе 1 задачу о разорении азартного игрока, характеризуемую значением $\alpha=1/2$ – см. формулу (5). Поскольку в критическом состоянии события не имеют собственных характерных размеров, коэффициент b в этой формуле будет нулевым и нарушаться степенная зависимость будет лишь из-за конечности размеров системы.

Таким образом, лавина завершается на l -м слое с вероятностью $P(l) \sim l^{-(1+\alpha)}$ и, соответственно, минует его с вероятностью, пропорциональной $l^{-\alpha}$. При этом ее ширина в этом слое будет $w(l) \sim l^\alpha$, поскольку средний поток заказов через слой не должен зависеть от его номера. Следовательно, число агентов, затронутых лавиной, завершившейся на l -м слое, (ее площадь) будет

$$s(l) \sim l^{\alpha+1}. \quad (19)$$

Скейлинговое соотношение (19) легко позволяет выразить показатель распределения $P_s(s)$ лавин по площадям α_s через α . В силу сохранения вероятностей $P(l)dl \sim P_s(s)ds$, что с учетом (19) дает $\alpha/\alpha_s = \alpha+1$, откуда $\alpha_s = 1/3$.

Поскольку отклик модели экономики на элементарное воздействие не имеет характерного размера, то в ней возможны гигантские события без отчетливых причин, которые можно интерпретировать как кризисы или бумы.

Хотя ничто не мешает экономистам *a posteriori* указать на ту конкретную песчинку, которая сорвала лавину (что обычно и делается при анализе кризисных явлений), причина лавины вовсе не в песчинке, а в целостном критическом поведении экономики, склонной к кризисам и бумам, то есть к катастрофическому поведению.

3.2. Критичность в неконсервативных системах. Правила рассмотренных выше ВТW- и DR-моделей, как и многих других СК-систем, являются консервативными, то есть при осыпании ячеек изъяты из них величины перераспределяются без потерь и покидают систему, только достигнув ее краев. Поэтому в течение нескольких лет после появления первых СК-моделей бытовало (подкрепленное расчетами) мнение, что явление самоорганизованной критичности присуще исключительно консервативным системам. Если бы это было действительно так, то его применимость к описанию природных процессов была бы весьма ограниченной [18]. Но в 1991 году отцом и сыном Федерами была предложена неконсервативная самоорганизованно критическая FF-модель [36]. Мы здесь рассмотрим лишь ее дискретный вариант, правила которого идентичны правилам ВТW-модели за одним исключением: при осыпании ячейки число в ней уменьшается не на фиксированную величину – 4 единицы, а до нуля (см. рис. 4, б).

При первом осыпании в лавине данное различие правил роли не играет. Однако, поскольку в ходе развития лавины у одной ячейки могут осыпаться несколько соседей одновременно, значение в ней может оказаться и больше 4, так что образовавшийся избыток диссипирует при осыпании. Тем не менее, модель демонстрирует критическое поведение. Показатель распределения числа осыпаний получается больше, чем в ВТW-модели (0.5 [36] против 0.2 [37]).

В FF-модели механизм диссипации носит характер «обрезания излишков», то есть является пороговым. Поэтому встает вопрос, возможно ли самоорганизованно критическое поведение при наличии «обычной», то есть линейной диссипации. Ответом – положительным – служит OFC-модель [38, 39],

во многом близкая по правилам к FF-модели. Обе модели формулируются на двумерной ортогональной решетке с открытыми граничными условиями, в обеих при осыпании неустойчивой ячейки ее значение – будем называть его *напряжением* – уменьшается до нуля.

Однако в OFC-модели напряжения соседей осыпавшейся ячейки увеличиваются на величину qF , где F – напряжение осыпавшейся ячейки, а $q < 0.25$ – параметр, определяющий степень сохранения. При этом остаток напряжения, равный $(1-4q)F$, диссипирует.

Разумеется, описанные правила предполагают, что напряжения являются непрерывными числами. Привод модели осуществляется путем одновременного равномерного увеличения напряжений всех ячеек⁷ до тех пор, пока одно из них не достигнет порогового значения.

К сожалению, из-за технических трудностей модель до сих пор не исследована на решетках, достаточно больших для достоверного [39–42] определения показателей распределений. Общепринятым является лишь то, что по мере уменьшения степени сохранения q показатель распределения числа опрокидываний растет, проходя через единицу при $q=q_c \approx 0.18$ [40,41].

Однако значительно больший интерес, нежели значения показателей, представляют в высшей степени нетривиальные процессы, происходящие в критическом состоянии OFC-модели.

Поскольку в ней присутствует диссипация, наличие открытых граничных условий не является необходимым для достижения стационарного состояния. Кроме того, пропорциональность диссипирующей доли напряжения его величине приводит к тому, что оно не может перемещаться по системе на большие расстояния и основная часть напряжения диссипирует в глубине решетки, не достигая ее краев [41]. Поэтому, казалось бы, края не должны оказывать существенного влияния на поведение системы. Однако, если заменить открытые граничные условия, при которых модель демонстрирует самоорганизованно критическое поведение, периодическими, то есть свернуть решетку в тор, то система самоорганизуется в совершенно иное состояние.

При q не очень близких к 0.25 в OFC-модели на торе осыпание ячейки практически никогда не сопровождается нарушением устойчивости соседних ячеек, то есть *лавины не развиваются*. Система оказывается замороженной в *неупорядоченном* квазипериодическом состоянии, когда одна и та же последовательность осыпаний повторяется практически без изменений раз за разом [40]. Разрушить такое состояние могли бы крупные лавины, оставляющие после себя довольно *упорядоченные* области, в которых большое число ячеек достигнет порога устойчивости почти одновременно и сможет снова принять участие в лавине. Однако взяться лавинам при периодических граничных условиях неоткуда [41].

Если же границы системы открыты, то находящиеся на них ячейки получают при опрокидывании своих соседей меньшую прибавку напряжения, чем ячейки в глубине (просто потому, что имеют меньше соседей). Соответственно, они отстают от них в скорости роста напряжения, и когда оно все-таки достигает порога, их соседи имеют в среднем большее напряжение, чем соседи ячеек в глубине. Это обстоятельство делает возможным развитие лавин, которые упорядочивают ячейки в глубине решетки [40,41].

Таким образом, край системы, к которому примыкает пренебрежимо малая доля ячеек и который не нужен для достижения стационарного состояния, в OFC-модели оказывает решающее влияние на ее самоорганизацию и управляет в ней всеми крупными событиями, которые запускаются только с него [41].

3.3. Прерывистое движение. Модель блоков и пружин. Рассмотренная выше OFC-модель [38] возникла как одно из приближений другой модели –

⁷ Такой привод эквивалентен увеличению напряжения случайно выбранной ячейки на бесконечно малую величину.

модели прерывистого движения (stick-slip), возникающей в сейсмологии и призванной описывать движение тектонических плит в зоне разлома. Одна из плит представляется в модели неподвижной шершавой подложкой (рис. 6, б), вдоль которой скользит с трением другая плита.

Движущаяся плита, внутри которой действуют упругие силы, представляется системой блоков и пружин, изображенной на рис. 6, а. Кроме того предполагается, что она приводится в движение равномерно движущейся платформой при помощи упругих связей, как показано на рис. 6, б. Если бы подложка была гладкой и между ней и блоками не было трения, то движение происходило бы непрерывно, однако, поскольку трение присутствует, то движение происходит скачками. Когда сила, приложенная к какому-то из блоков, превышает силу трения покоя между ним и подложкой, блок начинает двигаться. При этом вектор силы, с которой он действует на соседние блоки, получает приращение в направлении движения, и, соответственно, возрастает их отклонение от положений равновесия. В результате они тоже могут прийти в движение.

Динамика этой системы описывается правилами OFC-модели при следующих предположениях:

- $k_x = k_y = k$, то есть система изотропна;
- движущиеся блоки останавливаются, лишь достигнув положения равновесия;
- положение равновесия достигается мгновенно, то есть нет инерции;
- блоки не имеют смещений вдоль оси y , перпендикулярной направлению движения.

Действительно, если обозначить через δx_{ij} смещение блока, имеющего номер i по оси x и j по оси y , относительно положения равновесия, то действующая на него сила есть $F_{ij} = (4k + k')\delta x_{ij}$. Если она превышает силу трения покоя, то блок движется до тех пор, пока δx_{ij} не станет равным нулю. При этом сила, действующая на соседние блоки, увеличится на

$$F_{i\pm 1, j\pm 1} = k\delta x_{ij} = kF_{ij}/(4k + k'). \quad (20)$$

Формула (20) представляет собой правила осыпания OFC-модели с $q = 4/(4k + k')$, которая, таким образом, может интерпретироваться как модель сейсмического разлома.

Вообще говоря, модель блоков и пружин существенно шире, чем OFC-модель, при выводе правил которой были сделаны упрощающие предположения. Однако она и существенно сложнее для исследования, поскольку описывается не клеточным автоматом, а системой многих дифференциальных уравнений, описывающих движение каждого блока с учетом его инерции, зависимости силы

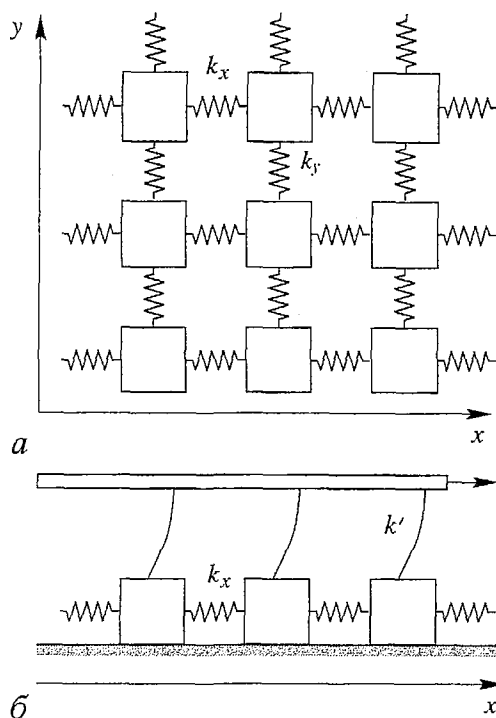


Рис. 6. Представление тектонических плит системой блоков и пружин: а – вид в плоскости плит – блоки соединены пружинами жесткости k_x и k_y с ближайшими соседями; б – вид сбоку – блоки, соответствующие одной из соприкасающихся плит, расположены на шероховатой подложке, соответствующей другой плите; привод осуществляется от медленно движущейся пластины, связанной с блоками посредством часовых пружин жесткости k'

трения от скорости и других особенностей. При этом возникают обычные неудобства, присущие непрерывному описанию: требовательность к памяти и быстрдействию, чувствительность к деталям правил, сложность интерпретации результатов, многочисленность параметров и т.д.

В силу этого продуктивные попытки исследования модели блоков и пружин имели место, насколько нам известно, лишь для одномерного варианта [43–46], соответствующего случаю $k_y=0$, и на не очень больших системах. Не обсуждая их подробно, отметим лишь, что, как и следовало ожидать, в определенном диапазоне параметров модель прерывистого движения демонстрирует самоорганизованно критическое поведение. Показатель распределения событий, вообще говоря, зависит от значений параметров и деталей модели [43–46]. Кроме того, его точное определение затруднено тем, что в области больших значений распределение имеет «горб», соответствующий событиям, в которые вовлекается вся система целиком [43, 44].

Последнее обстоятельство характерно для систем, в которых велика роль *инерции*, и лавина, достигшая определенного уровня, становится самоподдерживающейся и достигает краев системы. Собственно говоря, именно так происходит развитие лавин в *реальных* кучах песка, которые, начиная с определенных размеров, перестают демонстрировать критическое поведение, на смену которому приходят периодически повторяющиеся глобальные события [47, 48]. Однако, если подавить инерцию, как это имеет место, например, для кучи риса [49] или снежных лавин [18], то критическое поведение наблюдается на практике при любых размерах системы.

3.4. Модель разрыва пучка волокон. В отличие от описанных выше моделей, являющихся примерами катастрофического поведения и позволяющих проанализировать и понять его природу, модель пучка волокон служит, скорее, образом отдельно взятой катастрофы.

Рассмотрим пучок из N параллельных волокон, к которому приложено равномерно распределяемое между ними усилие F . Каждое волокно характеризуется значением порога прочности s , при превышении которого оно разрывается. При этом усилие мгновенно перераспределяется между оставшимися волокнами, что приводит к росту нагрузки на них. Последняя вновь может превысить прочность некоторых волокон, спровоцировав новые разрывы и т.д. После завершения лавины разрывов усилие, приложенное к пучку, повышается до тех пор, пока вновь не будет превышен порог прочности одного из волокон [50, 51].

Напрашивается интерпретация модели как описания аварии электроснабжения с последовательным выходом из строя подстанций при чрезмерной нагрузке. Менее очевидна аналогия с развитием экономического кризиса. Когда производитель какого-либо товара сталкивается с падением объемов продаж, чтобы выправить положение, он либо сокращает издержки, уменьшая зарплату или увольняя часть персонала, либо начинает поставлять товары в кредит, «занимая деньги у будущего». Любое из этих действий приводит к сокращению базы платежеспособного спроса, то есть к уменьшению объемов продаж у всех производителей, которые в результате «рвутся» подобно волокнам в пучке⁸.

То, как происходит разрыв волокон по мере роста приложенного усилия, существенно зависит от степени неоднородности пучка. Пусть прочность волокон описывается функцией распределения $P(\xi)=\text{Prob}\{s<\xi\}$, тогда пучок содержит в среднем $n=N[1-P(s)]$ волокон прочности не менее s , способных выдержать суммарное усилие $F=sn$. Таким образом, разрыв волокон прочности s будет наступать при достижении усилием значения

⁸ То, что разумные с точки зрения каждого экономического агента действия могут оказаться губительными для экономики в целом, – еще одно свидетельство ее целостности, то есть критического поведения.

$$F(s) = Ns[1 - P(s)]. \quad (21)$$

Если функция распределения P такова, что выражение (21) имеет максимум в некоторой точке $s_c > 0$, то вблизи нее значение разрывающего усилия можно аппроксимировать формулой

$$F(s) = F_c - c(s - s_c)^2. \quad (22)$$

При этом необходимая для выживания прочность волокна расходуется при $F \rightarrow F_c$ как

$$ds/dF \sim (F_c - F)^{-1/2}, \quad (23)$$

то есть F_c является критической точкой. В ее окрестности на повышение приложенного усилия пучок будет отвечать разрывом числа волокон, распределенного степенным образом. И лишь после того как F несколько превысит F_c , произойдет разрыв всех оставшихся волокон – полное разрушение.

Динамика разрыва будет, однако, совершенно иной, если функция (21) не имеет максимума. При этом полное разрушение произойдет практически сразу по достижении приложенным усилием некоторого критического уровня. Оно будет внезапным – ему будет предшествовать, возможно, только несколько единичных разрывов [50].

Поясним приведенные рассуждения на примере. Пусть волокна равномерно распределены по прочности между a и 1, то есть $P(\xi) = \xi/(1-a)$. Легко убедиться, что для данного распределения выражение (21) имеет максимум на интервале $(a; 1)$ только если $a < a_0 = 0.5$ [50]. На рис. 7 показаны графики распределения разрывов, возникающих в результате увеличения усилия, по числу волокон при различных a . Видно, что когда $a \ll a_0$, распределение характеризуется значением $\alpha = 3/2$, однако по мере приближения a к a_0 происходит переход к распределению с $\alpha = 1/2$. Необходимо также отметить, что при увеличении a уменьшается как доля волокон, которые разрываются до наступления полного разрушения, так и число событий разрыва.

Это означает, что при высокой степени неоднородности пучка ($a \ll a_0$) система в течение долгого времени проходит через длительный ряд аварий ($\alpha < 1$), служащих предвестниками грядущего полного разрушения, которое в конце концов и происходит, если меры по остановке роста приложенного усилия так и не были предприняты. В случае достаточно однородных волокон (a близко к a_0) полному разрушению предшествует лишь некоторое количество катастрофических событий ($\alpha > 1$), которые полностью исчезают при $a > a_0$. Таким образом, варьируя степень однородности в системе, которая должна противостоять потенциальным нагрузкам, возможно направить ее поведение по одному из этих двух сценариев.

Завершая обсуждение этой модели, поясним происхождение получающихся распределений [51].

Формула (23), определяющая величину усилия, разрывающего волокна прочности s , является, разумеется, усреднением. Для конкретного набора волокон величина $F(s)$ будет флуктуировать вокруг даваемых ей значений. При этом может оказаться, что хотя функция (23) при $s < s_c$ является строго возрастающей, $F(s)$ в какой-то

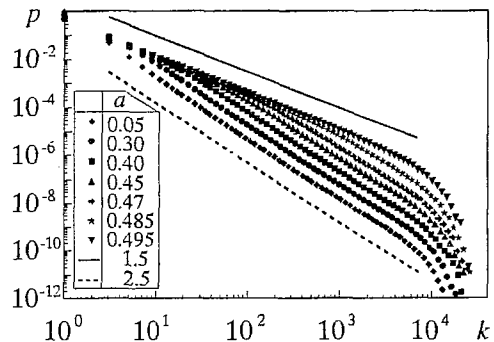


Рис. 7. Распределение числа порвавших волокон при различных a . Видно, что по мере приближения a к $a_0 = 0.5$ появляется все более длинный участок графика с наклоном -1.5 , в то время как при малых a наклон составляет -2.5 . Для сравнения изображены прямые с указанными наклонами. Данные усреднены по 100 000 реализаций для модели с $N = 2^{20}$

точке s_1 начинает убывать так, что на некотором промежутке ($s'; s''$) будет выполнено неравенство $F(s) > F(s')$. Это обстоятельство, собственно говоря, и вызывает лавину разрывов, поскольку как только прочность, необходимая для того, чтобы волокно уцелело, станет больше s_1 , все волокна с $s \leq s''$ разорвутся уже без увеличения приложенного усилия.

Увеличение или уменьшение $F(s_k)$ от волокна k к волокну $k+1$ можно аппроксимировать шагом ветвящегося процесса (задача о разорении азартного игрока), для коэффициента размножения которого m выполнено соотношение

$$1 - m \sim dF(s_k)/dk,$$

откуда с учетом формулы (23) и того обстоятельства, что при равномерном распределении волокон по прочности $dk \sim ds$, получаем

$$1 - m \sim (F_c - F)^{1/2}.$$

Если F меняется слабо, то вероятность разрыва k волокон согласно (5) есть $p(k) \sim k^{-3/2} e^{-b(F)k}$, где $b(F) \sim (1-m)^2 \sim F_c - F$ в соответствии с формулой (6). Таким образом, при F близком F_c (что означает высокую однородность пучка) получаем $p(k) \sim k^{-3/2}$. Если же F далеко от F_c , (неоднородный пучок), то для получения вида $p(k)$ необходимо провести усреднение по F , которое дает

$$p(k) \sim \int_0^{F_c} k^{-3/2} e^{-b(F)k} dF \sim k^{-5/2}.$$

3.5. Модель лесного пожара. Процесс роста деревьев и возникновения пожаров в лесном массиве может быть качественно промоделирован при помощи клеточного автомата с тремя состояниями: *растущее дерево*, *горящее дерево* и *пепел*, которые циклически переходят друг в друга по следующим правилам (за один шаг времени) [33,52–54]:

- из пепла с вероятностью p вырастает новое дерево;
- растущее дерево самопроизвольно загорается с вероятностью f , если у него нет ни одного горящего соседа;
- дерево, имеющее хотя бы одного горящего соседа, загорается с вероятностью $1-g$;
- горящее дерево превращается в пепел.

В зависимости от значений параметров p , f и g модель может демонстрировать различные типы поведения [33,53,55], но нас будет интересовать лишь тот диапазон параметров, при котором она самоорганизуется в критическое состояние. Кроме того, для простоты мы ограничимся пока случаем $g=0$, то есть деревья не имеют устойчивости к возгоранию от горящих соседей.

Отношение $\theta = p/f$ служит мерой числа деревьев, вырастающих за время между двумя возгораниями [33]. Поэтому достаточно большие кластеры растущих деревьев могут сформироваться только при $\theta \gg 1$. Вместе с тем, чтобы пожары не могли продолжаться неограниченно долго, необходимо, чтобы время роста новых деревьев $1/p$ было много больше времени выгорания самых больших кластеров T_{\max} , которое при $\theta \rightarrow \infty$ расходится как $T_{\max} \sim \theta^\nu$, где ν – некоторый положительный показатель [33,54]. Таким образом, получаем условие *двойного разделения временных масштабов*

$$p^{-1/\nu} \gg \theta \gg 1,$$

при выполнении которого модель лесного пожара демонстрирует критическое поведение [33,53,54]. Отметим, что модели типа кучи песка для самоорганизации в критическое состояние предполагают простое разделение временных масштабов (время между добавлением песчинок много больше времени релаксации). Однако, поскольку на практике удобно полагать, что кластер деревьев, внутри которого произошло возгорание, сгорает мгновенно, условие ограниченности пожаров во времени выполняется автоматически [33, 53, 54].

Обозначим плотности растущих и горящих деревьев и пепла как ρ_r , ρ_f и ρ_a , соответственно. За один шаг на поле площади S вырастает $S\rho_r$ деревьев и происходит $Sf\rho_f$ самопроизвольных возгораний, каждое из которых выжигает кластер средним размером $\langle s \rangle$. В стационарном состоянии средние числа вырастающих и сгорающих деревьев должны быть равны, откуда

$$\langle s \rangle = p\rho_a / (f\rho_f) \approx \theta(1 - \rho_r) / \rho_r \sim \theta. \quad (24)$$

Здесь мы воспользовались очевидным соотношением $\rho_r + \rho_f + \rho_a = 1$ и пренебрегли плотностью горящих деревьев по сравнению с плотностью растущих [33, 53, 54].

Из формулы (24) следует, что предельная плотность деревьев

$$g_c = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \rho_r$$

должна быть строго меньше единицы. В противном случае ρ_r будет очень близка к единице уже при конечных θ , при этом крупнейший кластер деревьев будет содержать конечную долю всех растущих на поле деревьев. А значит, $\langle s \rangle$ будет неограниченно возрастать при $S \rightarrow \infty$ при фиксированном θ , что противоречит (24). Таким образом, пепелища всегда будут занимать *конечную долю площади леса* [33].

Согласно результатам компьютерного моделирования распределение кластеров по размеру имеет вид $n(s) \sim s^{-2.15}$. Поскольку вероятность возгорания внутри кластера пропорциональна его размеру, вероятность пожара площади s есть $n(s)s \sim s^{-(1+0.15)}$ [33, 53, 54].

При наличии у деревьев ненулевой устойчивости к возгоранию их кластеры выгорают уже не полностью. По мере роста g возрастает и плотность живых деревьев ρ_r , достигая единичного значения при некотором g_c . При малых g распространение огня ограничивается лишь размерами кластеров живых деревьев, а при значениях g , близких к g_c , распространение огня носит перколяционный характер, больше напоминающий не пожар, а тление [33, 53, 54].

Вообще говоря, данная модель не очень хорошо описывает статистику реальных лесных пожаров, для которых $\alpha \approx 0.59$ [16], что заметно больше величины, получающейся в модели. Наблюдающееся на практике более высокое значение α , означающее меньший размер пожаров, обусловлено, на наш взгляд, как факторами, мешающими распространению огня (реки, шоссе, поля и т.п.), так и усилиями по тушению пожаров.

Модели лесного пожара легко можно придать множество интерпретаций, поскольку описанная схема является частным случаем процесса, происходящего в *возбудимой среде*, элементы которой могут находиться в одном из трех состояний: *покой* (растущее дерево), *возбуждение* (горящее дерево) и *невосприимчивость* (пепел) или *рефрактерность*. Возбуждение распространяется от соседа к соседу при условии, что он находится в состоянии покоя. После возбуждения элементам среды требуется некоторое время на «восстановление сил», которое они проводят в состоянии невосприимчивости [33, 53].

Под эту схему попадают, например, социальные события, особенно восстания и революции. Наиболее активные их участники в конце концов оказываются либо убиты (те, кому не суждено погибнуть в столкновениях с властями, попадают под нож гильотины, когда «революция пожирает своих детей»), либо «выходят в тираж», сделав карьеру в новых условиях («задумывают революцию романтики, довершают прагматики...») или просто разочаровавшись в ней («...а ее плодами пользуются циники»). При этом до новых волнений и бунтов должно вырасти новое поколение людей, готовых в них участвовать.

Модель лесного пожара дает также хорошую аналогию с такими историческими событиями, как войны и эпидемии. Пожар, захвативший некоторую

территорию, приводит к тому, что ее ячейки оказываются в одинаковых условиях, то есть синхронизованными. При этом они в дальнейшем развиваются сходным образом и имеют тенденцию снова вспыхивать одновременно [56]. Эпидемии и войны, разрушая привычный уклад жизни и опустошая значительные территории, также приводят к синхронизации, примерами которой могут служить послевоенное развитие Германии и Японии или объединение Руси под властью Москвы после эпидемии чумы XIV века и Куликовской битвы.

3.6. Модели биологической эволюции. Биологическая эволюция может показаться темой, далекой от управления риском. Однако это не так, поскольку законы, по которым она происходит, в значительной степени универсальны и имеют отношение к эволюции технических систем, систем управления, общественных институтов, коммерческих предприятий, властных элит и вообще любых «агентов», которые существуют и действуют в обстановке конкуренции. Вместе с тем, между этими процессами и процессом биологической эволюции есть существенные различия. С одной стороны, биологическая эволюция продолжается существенно дольше и в ней было задействовано намного большее число агентов, а с другой, она протекала без участия человека. Эти обстоятельства позволяют сделать ее изучение своеобразным полигоном для моделей эволюционного поведения.

Поскольку процессы, происходящие в живой природе, весьма многочисленны и разнообразны, для их успешного изучения необходим некоторый предварительный анализ. Если обобщить количественные данные, которые предоставляет нам палеонтология, получится примерно следующее:

1) большинство когда-либо живших видов ныне не существуют [57–59], причем вероятность исчезновения вида не зависит от того, как долго он уже просуществовал (закон Ван Валена) [57, 60], а процесс вымирания имеет отчетливо выраженный прерывистый характер с длительными периодами относительного спокойствия, перемежаемыми короткими всплсками [9, 60];

2) распределение *таксонов* (систематических категорий различных уровней) по времени жизни характеризуется СЗРВ с показателем, составляющим для родов и семейств порядка 1.0 [60–62], а для видов, по разным оценкам, от 0.12 [63] до 0.6 [64] и более [57];

3) спектр мощности числа вымерших родов и семейств, а также их разнообразия (количества входящих в их состав таксонов следующего уровня), представляет собой фликкер–шум с $\beta \approx 0.8 \div 1.0$ [62, 65];

4) таксономическое разнообразие (распределение родов по числу входящих в их состав видов и отрядов по числу семейств) характеризуется различными значениями показателя в диапазоне от нескольких десятых до единицы и более [66, 67];

5) распределение видов по числу особей дается степенным законом с $0 < \alpha < 0.25$ [63];

6) статистика вымирания таксонов удовлетворительно описывается СЗРВ [63] с α , близким к единице [58, 62, 68, 69].

Таким образом, прерванное равновесие, фликкер–шум и степенная статистика позволяют высказать гипотезу о критичности эволюционного процесса.

Теперь зайдем с другой стороны – попробуем сделать общие предположения о том, как может протекать эволюция и какие эффекты при этом будут существенны.

Единицей эволюционного процесса является *вид*, который можно характеризовать его *приспособленностью* к окружающим условиям (*fitness*). Виды стремятся увеличить свою приспособленность, видоизменяясь в результате мутаций. При этом эволюционирующие виды можно сравнить с путешественниками, движущимися по сильно изрезанному *ландшафту*, отражающему зависимость приспособленности видов от их генотипа, с целью

забраться как можно выше. Однако, поскольку мутации, уменьшающие приспособленность вида, отсекаются естественным отбором, путешественник может двигаться лишь вверх, перепрыгивая при необходимости через узкие расщелины.

Виды в экосистеме не являются изолированными (между их представителями всегда имеют место конкуренция, симбиоз, отношения хищник–жертва и иные формы взаимодействия), поэтому изменения приспособленности одного вида могут сказываться на приспособленности других видов (то есть приводить к изменению ландшафта), вынуждая их тем самым к дальнейшей эволюции.

При этом динамика эволюции существенно зависит от степени взаимодействия видов. Если она невелика, то каждый вид достаточно быстро достигает локального максимума приспособленности, где и «застраивает», не имея возможности достигнуть более благоприятных состояний, будучи отделенным от них «пропастями» ландшафта, преодолеть которые при помощи единичных мутаций невозможно. Как говорил (если верить Ницше) Заратустра «в горах кратчайший путь – с вершины на вершину: но для этого нужны длинные ноги». Таким образом, при слабом взаимодействии видов экосистема попадает в *замороженное* состояние, где эволюция практически прекращается.

Если, напротив, степень взаимодействия велика, то раньше чем вид достигает локального максимума приспособленности, этот максимум успевает исчезнуть – ландшафт слишком быстро «плывет» под ногами, и виды оказываются в положении Алисы в Зазеркалье, когда «приходится бежать со всех ног, чтобы только остаться на том же месте» (так называемый «эффект Черной Королевы»). Иными словами, экосистема оказывается в *хаотическом* состоянии, где все прошлые успехи немедленно забываются и эволюция отдельного вида, направленная на приспособление к постоянно меняющемуся окружению, оказывается тщетной [70, 18].

Пер Бак, обсуждая тему биологической эволюции в своей книге «Как работает природа. Теория самоорганизованной критичности» [18], пишет: «Обе эти крайности плохи для коллективного благополучия системы. В первом случае виды будут заморожены на низких максимумах ландшафта приспособленности, откуда им некуда идти... Во втором случае эволюция оказывается бесполезной из-за постоянно меняющейся окружающей обстановки. Только успеешь приспособиться к имеющемуся ландшафту, как он уже изменился. Настоящей эволюции нет в обоих этих случаях. И остается только одна альтернатива: экосистема должна быть помещена точно в критическую точку, которая разделяет эти две крайности, то есть в точку фазового перехода между ними. Здесь виды могут извлекать пользу из изменения окружающей обстановки, которое позволяет им эволюционировать ко все большей и большей приспособленности, используя медленно изменяющееся окружение как камни для перехода реки. При этом достигнутый прогресс не будет уничтожаться слишком быстро меняющейся обстановкой».

Первая самоорганизованно критическая модель биологической эволюции была предложена в 1993 году Баком и Снепеном (BS–модель) [71]. В ней каждый вид характеризуется лишь одним числом – мерой приспособленности f .

Чем менее приспособлен вид, тем быстрее с ним должно что–то произойти. С одной стороны, низкое значение f делает весьма вероятным поражение вида в конкурентной борьбе. При этом вид вымирает, а его экологическая ниша занимает какой–то новый вид. С другой стороны, чем менее приспособлен вид, тем проще ему улучшить себя путем мутаций. При этом место вида занимает его собственный более приспособленный потомок, то есть происходит *псевдовымирание*. Так или иначе, вид с наименьшим f исчезает, а на его месте оказывается другой вид с другим f , значение которого в BS–модели полагается не зависящим от предыдущего. Для определенности будем считать новые значения f равномерно распределенными на интервале (0;1).

Связи между видами в BS–модели задаются соседством на решетке с периодическими граничными условиями (кольцо в одномерном варианте, тор – в

двумерном), ячейки которой представляют экологические ниши, занимаемые видами. Исчезновение вида вызывает исчезновение и его ближайших соседей, что можно воспринимать как следствие изменения ландшафта для последних.

Таким образом, шаг модели состоит в следующем: из расположенных по кольцу чисел выбирается наименьшее, после чего оно и два его ближайших соседа заменяются случайными числами, равномерно распределенными между нулем и единицей. И это все. По замечанию П. Бака «эта модель, вероятно, проще любой модели, которую кто-либо когда-либо создавал для чего-либо» [18]. Тем не менее, исследованию этой модели и ее модификаций посвящено не меньшее количество работ, чем моделям типа кучи песка.

Поскольку в BS-модели правила «выбывают» наименее приспособленные виды, их равновесное распределение по приспособленности в пределе бесконечно больших размеров системы дается ступенчатой функцией $\theta(f-f_c)/(1-f_c)$ [71,72] (значения f_c и других характеристик модели приведены в таблице). При этом лишь бесконечно малая доля видов имеет $f < f_c$ – их можно сравнить с неустойчивыми ячейками в моделях типа кучи песка, поскольку они должны в скором времени исчезнуть. Соответственно, под лавиной в BS-модели уместно понимать промежутки времени между моментами «устойчивости», когда $\min f = f_c$.

Таблица

Характеристики BS-модели и модели Снеппена

Величина	BS-модель		Одномерная модель Снеппена [72,74]
	Размерность пространства		
	$d = 1$ [72,73]	$d = 2$ [72]	
f_c	0.66702±0.00003	0.328855±0.000004	0.4614±0.0004
α	0.073±0.003	0.245±0.010	0.26±0.01
D	2.43±0.01	2.92±0.02	1.63±0.02
β	0.58±0.03	0.31±0.03	0.39±0.01
π	3.23±0.02	3.20±0.04	2.21±0.01

Как показывает моделирование, длительность лавин, измеряемая числом исчезновений, описывается СЗРВ с показателем α (см. таблицу). Здесь следует обратить внимание на разницу между модельной и реальной временными шкалами. Если единицей первой служит шаг модели (то есть время, необходимое на исчезновение одного вида), то единицей второй – лавина (то есть время, необходимое на появление неустойчивого вида). Поскольку реальное время жизни вида очень быстро (экспоненциально) возрастает по мере роста f [71], исчезновение неустойчивых видов во время лавины происходит довольно-таки быстро, а очередной лавины приходится ждать. Соответственно, в реальном времени эволюционный процесс выглядит как прерванное равновесие: последовательные события с распределенными степенным образом размерами.

Еще одной чертой BS-модели, на которую хотелось бы обратить внимание, является фрактальность. Спектр мощности эволюционной активности видов имеет степенной вид (1) (значения β и других показателей см. в таблице). Линейный размер l области, затронутой лавиной длительностью s , определяется формулой $l \sim s^{1/D}$, где D – размерность лавин. Наконец, вероятность того, что в дальнейшем последовательно исчезающие виды будут разделены расстоянием r , дается степенной зависимостью

$$P(r) \sim r^{-\pi}, \quad (25)$$

то есть активность совершает *полеты Леви* [75]. Все это легко объяснимо, если учесть, что активность в BS-модели имеет тенденцию возвращаться туда, где

недавно была, поскольку вновь появившиеся виды с большой вероятностью плохо приспособлены.

Несмотря на огромный успех, которым является понимание основ эволюционного процесса и качественное воспроизведение его свойств, показатели BS-модели довольно далеки от наблюдаемых на деле. Кроме того, ради простоты модели пришлось пренебречь учетом некоторых существенных черт реальной эволюции. Одна из них – это процесс видообразования и возникновения иерархической структуры филогенетического древа (виды объединяются в рода, те – в семейства и т.д.).

Учсть эту черту позволяет SM-модель, предложенная Соле и Манрубия [60, 76], в которой взаимодействие видов задается *матрицей весов*, а состояние видов – *вектором флагов* (1 – вид жив, 0 – вымер). Шаг моделирования состоит из мутации, заключающейся в случайном изменении одного из элементов матрицы взаимодействия, и вычисления «перспектив» видов, определяемых произведением этой матрицы и вектора флагов. Если соответствующий виду компонент произведения оказывается отрицательным, то вид объявляется вымершим и его флаг сбрасывается в ноль. Эта процедура повторяется до тех пор, пока виды не перестанут вымирать. После чего происходит видообразование – значения ячеек матрицы взаимодействия, описывавших вымершие виды, заменяются значениями, взятыми от случайно выбранного вида (флаги при этом устанавливаются в единицу).

Размеры вымираний оказываются распределенными степенным образом с $\alpha \approx 1.3$ [76], что довольно близко к реальности. Разнообразие таксонов имеет такой же показатель распределения, поскольку число видов, образованных из некоторого, в SM-модели совпадает с числом вымерших (если пренебречь возможностью многократного получения потомков от одного вида) [60].

При обсуждении эволюции нельзя не уделить толику внимания вечному спору биологов об «истинной» причине вымирания видов. Вид исчезает потому, что ему «повезло» жить в плохом месте в плохое время (*bad luck*), или потому, что он оказался недостаточно приспособленным к изменившемуся окружению (*bad genes*)? То есть вымирание – это результат случайностей или существенная часть эволюционного процесса [59]? Спор этот в известной степени лишен смысла, поскольку разница подчас весьма иллюзорна. Тем не менее, для некоторых массовых вымираний известны конкретные причины (типа падения метеорита), и хотя большинство из них видится беспричинными [58], нельзя наверняка утверждать, что причины не было. Кроме того, если мы хотим иметь теорию эволюции, которую можно переносить в том числе и на небиологический материал, необходимо рассмотреть все потенциальные возможности.

Пренебрежем взаимодействием между видами и будем считать, что причиной их вымирания служат исключительно внешние воздействия, которые сказываются сразу *на всех* видах и моделируются *шоками* с функцией распределения $F(x)$. Каждый вид, соответственно, характеризуется порогом устойчивости к ним. На очередном шаге моделирования происходит вымирание всех видов с устойчивостью, меньшей ударившего шока, а также небольшой доли a случайно выбранных видов (что играет роль привода модели). На месте вымерших видов появляются новые, устойчивость которых выбирается в соответствии с некоторым распределением $p_{\text{нов}}(x)$.

Описанная модель, предложенная Ньюманом, называется *моделью с когерентным шумом* [69, 77, 78]. Для довольно широкого класса функций F она характеризуется степенным распределением вымираний $p(s)$ [58, 79], природу которого можно понять, проанализировав модель *в приближении среднего поля*.

Будем считать, что система описывается стационарным распределением видов по устойчивости к шокам $\rho(x)$. В этом случае вероятность вымирания вида с устойчивостью x равна $\rho(x)F(x)$ и можно записать уравнение баланса $\rho(x)(a + F(x)) = p_{\text{нов}}(x)$. Если ограничиться случаем равномерного $p_{\text{нов}}(x)$ и пренебречь a по сравнению с $F(x)$, то получается $\rho(x) \sim F(x)^{-1}$.

Шок силы x вызывает гибель

$$s(x) = \int_{-\infty}^x \rho(\xi) d\xi \sim \int_{-\infty}^x d\xi / F(\xi) \quad (26)$$

видов. Если продифференцировать выражение (26) и подставить результат в уравнение сохранения вероятностей $p(s)ds \sim dF(x)$, то получается

$$p(s) \sim F(x)F'(x). \quad (27)$$

В общем случае систему (26)–(27) явно решить нельзя, однако в случае экспоненциального распределения шоков $F(x) \sim e^{-\lambda x}$ легко показать, что $p(s) \sim s^{-2}$, то есть имеет место СЗРВ с $\alpha=1.0$ [58,59,78,79]. Как показывает компьютерное моделирование, точное значение α несколько меньше и составляет около 0.85, а единичное значение получается при гауссовом спадаании $F(x)$ и, вообще, чем быстрее убывает хвост распределения шоков, тем больше получается показатель α [58, 79].

Таким образом, когерентное воздействие с компактным распределением может вызывать степенной отклик в системе независимых элементов. Критическое состояние здесь возникает в результате противоборства упорядочивающего вклада больших событий и разупорядочивающего вклада средних [78].

Вопрос о том, насколько модель Ньюмана применима именно к биологической эволюции, остается открытым, поскольку глобальные шоки, воздействующие на всю экосистему, крайне редки и, главное, не могут остаться незамеченными исследователями. Кроме того, если вид не вымирает в результате некоторого неблагоприятного воздействия, то приобретает к нему дополнительную устойчивость, что никак не отражено в модели. Тем не менее, модель может оказаться применимой к областям, связанным с человеческой деятельностью в современных условиях, когда мир стал глобальным, а история по-прежнему «учит только тому, что ничему не учит».

3.7. Экстремальные модели. Освобождение поверхности. Особенностью правил практически всех СК–моделей является выбор для изменения на очередном шаге элементов, имеющих *экстремальное* (минимальное или максимальное) значение. Для BS–модели, а также модели разрыва пучка волокон и модели блоков и пружин экстремальность прописана в правилах явно (исчезает наименее приспособленный вид, рвется наименее прочное волокно, первым начинает двигаться наиболее удаленный от положения равновесия блок). Однако правила и других рассмотренных нами моделей тоже в той или иной степени являются экстремальными – в модели лесного пожара вероятность возгорания кластера пропорциональна его размеру, в моделях типа кучи песка и FF–модели устойчивость теряют ячейки, значения которых превысили порог, то есть стали заведомо больше значений остальных ячеек и т.д.

Такой «экстремизм» исследователей, создававших самоорганизованно критические модели – это не прихоть или дань традиции, а отражение общих принципов устройства сложного. Чтобы система могла самоорганизоваться в критическое состояние, оно должно быть в каком-то смысле притягивающим. Однако оно не может быть положением статического равновесия, поскольку малые внешние воздействия в его окрестности не могут вызывать больших откликов. То есть система должна пребывать в динамическом равновесии, которое возникает как результат противоборства двух противоположенных тенденций⁹. Обыкновенно, одна из них – это некий естественный путь развития системы, а вторая – отбраковка (с возвращением к началу пути) элементов, продвинувшихся

⁹ Теоретически их, конечно, может быть и больше двух. Однако шансы, что три фактора или более будут играть сопоставимые роли, невелики, и в ситуации общего положения всеми, кроме двух, бывает можно пренебречь.

по нему слишком далеко, то есть экстремальное правило. При этом существенно, что такая отбраковка продвигает в развитии другие элементы системы благодаря наличию между ними (локального) взаимодействия.

Наклон кучи увеличивается за счет добавления песчинок, что вызывает лавины, уменьшающие его. Деревья растут, увеличивая способность леса проводить огонь – вспыхивают пожары, уничтожающие деревья. Блоки, на которые действует нарастающая сила, соскальзывают, возвращаясь к положению равновесия, увеличивая нагрузку на соседние блоки. Эволюция, идущая путем проб и ошибок, порождает плохо приспособленные виды, которые исчезают, вынуждая к дальнейшей эволюции связанные с ними виды...

Таким образом, происходит динамическая стабилизация системы. Однако для стабилизации именно в окрестности критической точки, где локальное взаимодействие может привести к целостному поведению, необходимо, чтобы скорость отбраковки (релаксации) была много больше развития (возмущения), то есть необходимо разделение временных масштабов. Как правило, оно также достигается благодаря экстремальным правилам, что, собственно говоря, и позволяет на их основе строить простые СК-модели.

Поясним сказанное на примере процесса *освобождения поверхности* (inter-face derpinning), происходящего при вытеснения воздуха жидкостью в пористой смачиваемой среде [80]. Здесь имеет место противоборство между зацеплением границы раздела фаз за дефекты среды и давлением, проталкивающим жидкость через поры, вынуждая ее освобождаться в тех точках, где *цепляющая сила* (pinning force) невелика. Роль локального взаимодействия играет поверхностное натяжение, стремящееся уменьшить площадь границы раздела.

Зависимость скорости продвижения жидкости от давления дается формулой $V \sim (p - p_c)^{\nu}$, характерной для фазовых переходов II рода. Чтобы произошла самоорганизация в критическое состояние, необходимо установить параметр порядка – скорость – в значение +0, что соответствует критическому давлению p_c , при котором движение поверхности имеет характер отдельных «рывков», вызываемых флуктуациями [81]. При этом, естественно, наибольшие шансы на освобождение имеет тот участок, на который действует наименьшая цепляющая сила.

Таким образом, не составляет труда описать правила клеточного автомата для процесса освобождения поверхности, называемого моделью Снеппена [82]. В одномерном случае система характеризуется положением участков поверхности h_i и значениями действующей на нее в точках (i, h_i) цепляющей силы $f(i, h_i)$, которые можно в простейшем случае считать некоррелированными случайными числами.

Шаг моделирования состоит в нахождении участка i с минимальной цепляющей силой $f(i, h_i)$ и продвижении на этом участке поверхности на одну единицу: $h_i \rightarrow h_i + 1$. При этом поверхностное натяжение учитывается следующим образом (условие Кима – Кострелица [83]): если для какого-то участка поверхности оказалось $h_j < h_{j+1} - 1$, то участок j продвигается до тех пор, пока это неравенство не нарушится (то есть пока не будет выполнено $|Vh| \leq 1$ для всех участков поверхности). Все участки поверхности, подвергнувшиеся продвижению, получают новые случайные значения цепляющей силы, выбираемые из некоторого распределения.

Правила BS-модели и модели Снеппена практически идентичны – единственное различие состоит в механизме локального взаимодействия. Если в первой ближайšie соседи наименее приспособленного вида в любом случае исчезают вместе с ним, то во второй продвигаются лишь «отстающие» участки поверхности (зато не только непосредственно примыкающие к экстремальному участку, но, возможно, и следующие за ними). Эту особенность правил модели Снеппена с эволюционной точки зрения можно трактовать как принудительную «модернизацию» тех элементов, соседи которых ушли вперед более, чем на одно поколение.

Как показывают данные моделирования (см. таблицу), это приводит к

несколько большему по сравнению с BS-моделью значению показателя α , характеризующего распределение лавин по размерам, что означает некоторое их уменьшение. Кроме того, заметно меньше становится показатель распределения полетов Леви μ , то есть активность значительно сильнее «скачет» по системе, нежели в случае эволюции. Это обусловлено тем, что правила не позволяют участкам поверхности слишком долго оставаться неподвижными и активность вынужденно посещает все новые и новые участки.

Как и в случае модели эволюции лавина определяется как последовательность шагов между моментами, когда все участки поверхности имеют цепляющую силу $f > f_c$. Такие участки, для освобождения которых недостаточно давления на жидкость и необходимы флуктуации или воздействие со стороны соседних участков, уместно назвать блокирующими. Поскольку система находится в критическом состоянии, их концентрация равна порогу направленной перколяции (здесь наблюдается прямая аналогия с концентрацией МЭУ для кучи песка). В самом деле, если мы уменьшим концентрацию блокирующих участков (увеличим давление), то они перестанут образовывать связный кластер, способный остановить поверхность, и последняя будет двигаться с ненулевой скоростью. Если мы увеличим их концентрацию (уменьшим давление), то флуктуаций будет уже не достаточно для освобождения участков даже с минимальной цепляющей силой, и поверхность не будет двигаться вовсе.

Таким образом, модель Снепена можно рассматривать как модель самоорганизованной направленной перколяции. Характеристики направленной перколяции, однако, хорошо известны. Так, например, показатель шероховатости χ , определяющий зависимость ширины поверхности $w(l) = (\langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2)^{1/2} \sim l^\chi$ от размера участка l , равен 0.633 ± 0.001 .

Поскольку размер лавины s есть не что иное, как объем, «заметаемый» поверхностью, его можно представить как $s \sim l \cdot w(l) \sim l^{1+\chi}$, где l – число затронутых лавиной участков. То есть размерность лавин $D = 1 + \chi = 1.633$ в полном согласии с данными, приведенными в таблице [72, 82].

3.8. Управление критичностью. Модель гекатонхейров¹⁰. Весьма важным, хотя и малоизученным, является вопрос о возможности управления свойствами критических систем. Оговоримся, что здесь не имеется в виду управление тем, находится ли система в критическом состоянии или нет. Теоретически разрушить критичность несложно, но тем самым мы из сложной системы сделаем простую. На практике это означает либо, что подобная операция просто невыполнима, либо то, что, проделав ее, мы выплеснем вместе с водой и младенца, лишив систему возможности функционировать. Поэтому интерес для исследования представляет вопрос, можем ли мы управлять поведением системы в критическом состоянии?

Под «управлением» здесь понимается воздействие на значения показателей распределений, которые определяют то, в какой степени сложная система является катастрофичной. Управление критическими системами представляет собой нетривиальную задачу. Дело в том, что критические системы обыкновенно являются *грубыми*, то есть набор характеризующих их показателей не меняется при незначительном изменении правил. Более того, зачастую совершенно разные по своей природе и правилам модели имеют один и тот же набор показателей. В таком случае говорят, что эти модели попадают в один *класс универсальности*.

Кроме грубости критических систем наши возможности по управлению ими существенно ограничиваются их сложностью. Мы можем воздействовать либо на всю систему в целом (меняя, скажем, ее статистические характеристики типа температуры), либо на некоторое число отдельных ее элементов. Примером

¹⁰ Гекатонхейры – в греческой мифологии сторукие великаны, дети Урана и Геи, стражи врат Тартара.

первого подхода может служить OFC-модель, для которой, научившись (на практике, конечно, а не в компьютерной программе) менять степень сохранения q , мы смогли бы варьировать показатель распределения α .

Второй подход удалось реализовать в так называемой модели с защитой минимумов, или модели гекатонхейров [84], являющейся обобщением модели Снеппена освобождения поверхности.

Пронумеруем в модели Снеппена все значения цепляющей силы на поверхности в порядке их возрастания, начиная с нуля: $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots$. В то время как в модели Снеппена для продвижения всегда выбирался участок с минимальной цепляющей силой, то есть номером 0, мы будем продвигать n -ый участок, считая минимумы с нулевого по $(n-1)$ -й защищенными от продвижения.

Это можно воспринимать как наличие некоего n -рукого агента (гекатонхейра), который отслеживает положение n участков с наименьшей цепляющей силой и придерживает их, что называется, руками, препятствуя продвижению.

Такая модификация правил, очевидно, не окажет влияния ни на показатель распределения лавин α [85], ни на их размерность D [82]. Однако этого нельзя сказать в отношении показателя полетов Леви π . На рис. 8 приведены графики распределения полетов точки активации при различных n . Легко видеть, что наклон графика уменьшается с ростом n .

Это легко объяснимо. До тех пор пока при продвижении соседей защищенные участки не затрагиваются, практически не имеет значения, какой по счету минимум выбирается для активации, поскольку защищенные участки исключены из динамики и можно считать, что их как бы и нет. Однако, как только какой-то из них из-за условия ограниченности градиента подвергнется продвижению, тождественность модели Снеппена и модели гекатонхейров нарушается. Это происходит потому, что продвинутый элемент получает новое значение цепляющей силы, а при этом могут измениться порядковые номера минимумов, и активизации на следующем шаге подвергается совсем не тот элемент, который активизировался бы при аналогичных обстоятельствах в модели Снеппена. Таким образом, к обычным полетам Леви добавляются скачки положения активности, когда гекатонхейр «перехватывает руки» из-за того, что в них оказалось не то, что ему следует держать. И чем большую долю участков ему приходится удерживать, тем чаще это будет происходить.

В силу сказанного понятно, что показатель распределения полетов Леви π должен зависеть не непосредственно от n , а от величины $u=n/L$ (где L – размер системы), определяющей «плотность рук». Варьируя величину u , мы можем непрерывно менять значение одного из критических показателей модели, не изменяя при этом остальных, которые определяют ее принадлежность к тому же классу универсальности, что и направленная перколяция и модель Снеппена. Это явление получило название *мягкой универсальности* [84], в котором подчеркивается отличие от обычной – грубой – универсальности, присущей большинству критических систем.

В заключение отметим еще одно существенное и любопытное обстоятельство. При $u^* \approx 2.5 \cdot 10^{-5}$ значение π проходит через двойку. Это значит, что при меньшей «плотности рук» средняя длина полета точки активации

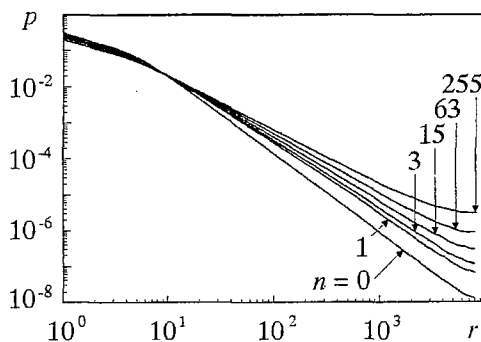


Рис. 8. Распределение длин полетов Леви точки активации. Графики (снизу вверх) соответствуют $n=0, 1, 3, 15, 63, 255$ для системы с $L=16384$ с усреднением по 500 млн. шагов. Некоторое закругление вверх графиков при больших r обусловлено тем, что данные «складываются» из-за невозможности отличить полет длиной r от полета длиной $L-r$

$$\langle r \rangle = \int P(r) r dr \quad (28)$$

не зависит от размеров системы, в то время как при большей она становится порядка L (так как интеграл (28) сходится лишь благодаря нарушению зависимости (25) при $r \sim L$). А это уже не количественное, а качественное изменение поведения.

Модель гекатонхейров легко допускает разнообразные интерпретации. Например, она отражает работу системы безопасности или охраны порядка в условиях нерешительности и нехватки ресурсов. Попытка удерживать руками наиболее опасные участки приводит к прорывам на тех участках, на которые рук не хватило. Если прорывы индуцируются внешними условиями, то такая защита будет иметь своим следствием лишь изменение географии событий. Показатель распределения полетов активности будет тем меньше, чем больше будет плотность держащих рук. А доведя уровень последней до значения u^* , мы увидим, что события, которые до того были худо-бедно локализованы (рассчитывать на «хорошую» локализацию для точки, совершающей полеты Леви с $\lambda < 3$, очевидно, не приходится¹¹), стали происходить повсюду. Качественная аналогия очевидна, а вот вывод нетривиален: если все плохо, не трогай – лучше не станет, только расплзется.

3.9. Мультипликативный процесс. В завершение темы опишем еще один формальный механизм появления СЗРВ, который, как и критический ветвящийся процесс, не будучи самоорганизованным, позволяет, однако, получить более полное представление о природе масштабной инвариантности.

Широкий класс процессов, связанных с воспроизводством, может быть описан отображением вида [86]

$$x_{t+1} = k_t x_t, \quad (29)$$

коэффициент которого k_t детерминированным или случайным образом зависит от номера шага времени t (мы ограничимся рассмотрением чисто случайного k). Отображение (29) называется *мультипликативным процессом* [86–88] и возникает в тех случаях, когда состояние системы (численность популяции, стоимость портфеля акций, число заболевших при эпидемии и т.п. [86]) на шаге $t+1$ зависит от состояния на шаге t и общей обстановки на этом шаге, описываемой коэффициентом k .

Данное отображение удобно рассматривать в логарифмическом представлении

$$\xi_{t+1} = \xi_t + \kappa_t, \quad (30)$$

введя обозначения $\xi_t = \ln x_t$ и $\kappa_t = \ln k_t$. Поскольку ξ_t представляет собой сумму независимых случайных величин, при достаточно больших t она будет нормально распределена (а x_t будет, соответственно, иметь логнормальное распределение) с параметрами, зависящим от t [87]. Распределение оказывается нестационарным, поскольку, как легко видеть, $x \rightarrow 0$ при $\nu = \langle \kappa \rangle < 0$ и $x \rightarrow \infty$ при $\nu > 0$. Чтобы добиться стационарности, необходимо дополнить отображение (29) правилом, «не подпускающим» x к его предельному значению. Если ограничиться случаем $\nu < 0$ (случай $\nu > 0$ сводится к нему рассмотрением вместо x и k обратных величин), то речь идет об *отталкивании от нуля*, которое обычно объясняется дискретной природой процесса или действием механизмов, препятствующих вырождению.

Отталкивание от нуля можно ввести многими способами [86–88], например, заменив (29) на

$$x_{t+1} = k_t x_t + b_t, \quad (31)$$

¹¹ Отметим, что для BS-модели $\lambda > 3$ и активность долго «гостит» в одной области, то есть эволюционный процесс обыкновенно затрагивает не всю экосистему целиком, а идет лишь в какой-то ее области.

где b_i – небольшая положительная детерминированная или случайная добавка (в этом случае, как легко видеть, $\langle x \rangle = \langle b \rangle / (1 - \langle k \rangle)$ [86]), либо на

$$x_{t+1} = \max \{k_t x_t; c\}, \quad (32)$$

то есть не позволяя x_t опускаться ниже некоторого значения c (без потери общности можно считать, что каждый раз, когда x_t падает ниже c , начинается новый процесс с $x_0=c$). Кроме того, предполагаем, что, несмотря на ограничение $v < 0$, коэффициент отображения k с заметной долей вероятности принимает значения больше 1, то есть что x может расти не только за счет введенного отталкивания от нуля, но и «естественным» образом.

В отличие от отображения (29) отображения (31) и (32) характеризуются экспоненциальным стационарным распределением $p(\xi)$ и, соответственно, степенным $p(x)$.

Если обозначить через $\pi(k)$ распределение вероятностей смещения k , для $p(\xi)$ можно записать рекуррентное соотношение

$$p(\xi, t+1) = \int p(\xi - k, t) \pi(k) dk, \quad (33)$$

разложив в котором $p(\xi - k)$ в ряд по степеням k до второго члена и перейдя к непрерывному времени, получаем [87]

$$\partial p / \partial t = -v \partial p / \partial \xi + T \partial^2 p / \partial \xi^2, \quad (34)$$

где $T = \langle k^2 \rangle / 2$. Можно убедиться, что стационарное решение уравнения (34) при условии ограниченности ξ снизу имеет вид

$$p(\xi) \sim e^{-\xi/T}, \quad (35)$$

что приводит к степенному виду (2) для распределения $p(x)$ с

$$\alpha = -v/T. \quad (36)$$

Этот результат легко можно получить и без вычислений, поскольку уравнение (34) описывает частицу, находящуюся в ограниченном слева линейном потенциале напряженности v при температуре T . Как известно, плотность вероятности в этом случае описывается распределением Больцмана (35) [87].

Формула (36) для показателя распределения является приближенной. Чтобы найти выражение для точного значения, подставим распределение (35) в формулу (33)

$$e^{-\alpha \xi} = \int e^{-\alpha(\xi - k)} \pi(k) dk.$$

Откуда получаем уравнение $\langle e^{\alpha k} \rangle = \langle k^\alpha \rangle = 1$ [86,87].

Здесь необходимо обратить внимание на два обстоятельства, делающих мультипликативный процесс более адекватным образом самоорганизованно критических явлений, чем устойчивые законы распределения или ветвящиеся процессы:

1) в отличие от устойчивых законов распределения, характеризующихся значениями $\alpha \leq 2$, СЗРВ, порождаемые мультипликативным процессом, могут иметь любые положительные α ;

2) в отличие от ветвящихся процессов, которые характеризуются чистым СЗРВ только при единичном коэффициенте размножения, мультипликативный процесс описывается распределениями с тяжелыми хвостами и при $\langle k \rangle$, отличном от 1.0 (причем показатель, вообще говоря, отличается от $\alpha = 1/2$, присущего ветвящимся процессам).

Последнее обстоятельство особенно важно, поскольку отображение (29) в каком-то смысле тоже представляет собой ветвящийся процесс, когда на очередном шаге происходит превращение каждой частицы в k частиц. Однако существенным обстоятельством здесь является то, что флуктуации величины k действуют *одновременно на все* делящиеся частицы, в то время как для обычного ветвящегося процесса флуктуации *независимы* для каждой делящейся частицы [87]. Поэтому, если математическое ожидание числа частиц, получающихся при делении одной частицы, обозначить через m , а дисперсию через D , то математическое ожидание числа частиц, получающихся при делении x частиц, есть mx , а дисперсия – xD .

Если попытаться представить шаг ветвящегося процесса в виде (29), то математическое ожидание и дисперсия коэффициента k будут равны значениям этих величин для ветвящегося процесса, отнесенным к одной частице, то есть m и D/x , соответственно. Таким образом, чем больше число частиц, делящихся на некотором шаге, тем более узким будет распределение для коэффициента k , описывающего этот шаг в терминах мультипликативного процесса (самоусреднение). А поскольку коэффициент размножения $m < 1$, то для достаточно больших x дальнейшее увеличение числа частиц становится практически невероятным, что и приводит к нарушению степенного вида закона распределения для некритического ветвящегося процесса.

Ситуацию, однако, можно «выправить», если поставить параметры ветвящегося процесса в зависимость от числа делящихся частиц, то есть позволить частицам «чувствовать» друг друга, например, следующим образом. Пусть каждая из имеющихся x частиц с вероятностью $q_x = m/x$ превращается в x частиц, а с вероятностью $p_x = 1 - q_x$ – распадается. Тогда математическое ожидание и дисперсия для коэффициента k равны, соответственно, m и $m - m^2/x$, то есть при больших x зависимостью k от x можно пренебречь, и получается обыкновенный мультипликативный процесс, описываемый СЗРВ.

Сформулированные правила ветвящегося процесса можно интерпретировать как индуцированный риск, то есть проблемы, порождаемые уже имеющимися, причем в количестве, пропорциональном их числу. Именно такое целостное поведение и типично для критических систем, однако не следует забывать, что установка параметров ветвящегося или мультипликативного процесса в характерные значения, создающая условия для появления степенных зависимостей с определенными показателями, происходит путем самоорганизации на основе локальных правил. То есть мультипликативный процесс можно рассматривать для описания механизма появления степенных зависимостей, но не для объяснения их природы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ – грант № 99–01–01091 и РГНФ – грант № 99–03–19696.

Библиографический список

1. Воробьев Ю.Л., Малинецкий Г.Г., Махутов Н.А. Теория риска и технологии обеспечения безопасности. Подход с позиций нелинейной динамики. Часть III// Проблемы безопасности в чрезвычайных ситуациях. 1998. № 11. С. 5.
2. Воробьев Ю.Л., Малинецкий Г.Г., Махутов Н.А. Теория риска и технологии обеспечения безопасности. Подход с позиций нелинейной динамики. Часть III// Проблемы безопасности в чрезвычайных ситуациях. 1999. № 1. С. 18.
3. Владимиров В.А., Воробьев Ю.Л. и др. Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика. М.: Наука, 2000 (в печати).
4. Катастрофы и общество. М.: Контакт–Культура, 2000. 332 с.
5. Воробьев Ю.Л., Малинецкий Г.Г., Махутов Н.А. Управление риском и устойчивое развитие. Человеческое измерение // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 6. С. 12.

6. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
7. *Зыков В.С.* Моделирование волновых процессов в возбудимых средах. М.: Наука, 1984. 166 с.
8. *Obukhov S.P.* Self-organized criticality: Goldstone modes and their interactions // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65, № 12. P. 1395.
9. *Gould S.J., Eldredge N.* Punctuated equilibrium comes of age // *Nature.* 1993. Vol. 366. P. 223.
10. *Lowen S.B., Teich M.C.* Fractal renewal processes generate $1/f$ noise // *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 47, № 2. P. 992.
11. *Maslov S., Paczuski M., Bak P.* Avalanches and $1/f$ noise in evolution and growth models // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 73, № 16. P. 2162.
12. *Kanamori B.H., Anderson D.L.* Theoretical basis of some empirical relations in seismology // *Bull. Seism. Soc. Am.* 1975. Vol. 65, № 5. P. 1073.
13. *Голыцын Г.С.* Землетрясения с точки зрения теории подобия // *ДАН.* 1996. Т.346, № 4. С. 536.
14. Reduction and predictability of natural disaster / Eds J.B. Rundle, D.L. Turcotte, W. Klein // *Proceedings of the workshop «Reduction and predictability of natural disasters» held January 5–9, 1994 in Santa Fe, New Mexico, 1995.*
15. *Rhodes C.J., Anderson R.M.* Power laws governing epidemics in isolated populations // *Nature.* 1996. Vol. 381. P. 600.
16. *Turcotte D.* Fractals and Chaos in Geology and Geophysics. Cambridge Univ. Press, 1997 (Second Edition).
17. *Mantegna R.N., Stanley H.E.* Scaling behavior in the dynamics of an economic index // *Nature.* 1995. Vol. 376. P. 46.
18. *Bak P.* How nature works: the science of self-organized criticality. Springer-Verlag, New York, Inc. 1996. 205 p.
19. *Lu E.T., Hamilton R.J.* Avalanches and the distribution of solar flares // *Astrophysical Journal.* 1991. Vol. 380. P. L89.
20. *Lu E.T., Hamilton R.J., McTiernan J.M., Bromund K.R.* Solar flares and avalanches in driven dissipative systems // *Astrophysical Journal.* 1993. Vol. 412. P. 841.
21. *Подлазов А.В., Осокин А.Р.* Самоорганизованно критическая модель солнечных вспышек // *Математика. Компьютер. Образование.* Вып.7, часть II, С.384–392. Сборник трудов конференции. М.: Прогресс–Традиция, 2000.
22. *Яблонский А.И.* Математические модели в исследовании науки. М.: Наука, 1986. 352 с.
23. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967. 752 с.
24. *Харрис Т.* Теория ветвящихся процессов. М.: Мир, 1966. 355 с.
25. *Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В.* Парадигма самоорганизованной критичности. Иерархия моделей и пределы предсказуемости // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т.5, № 5. С. 89.
26. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения // *Теория вероятностей и математическая статистика.* М.: Наука, 1983. 304 с.
27. *Золотарев В.М.* Устойчивые законы и их применения // *Новое в жизни, науке, технике. Математика, кибернетика.* № 11. М.: Знание, 1984. 64 с.
28. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol. 38, № 1. P. 364.
29. *Zhang Y–C.* Scaling theory of self-organized criticality // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 63, № 5. P. 470.
30. *Majumdar S.N., Dhar D.* Height correlations in the Abelian sandpile mode // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1991. Vol. 24. P. L357.
31. *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980. 298 с.
32. *Sornette D., Johansen A., Dornic I.* Mapping self-organized criticality onto criticality // *J. Phys. I (France).* 1995. Vol. 5. P. 325.
33. *Clar S., Drossel B., Schwabl F.* Forest fires and other examples of self-organized criticality // *J. Phys.: Cond. Mat.* 1996. Vol. 8. P. 6803.

34. *Dhar D., Ramaswamy R.* Exactly solved model of self-organized critical phenomena // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 63, № 16. P. 1659.
35. *Bak P., Chen K.* Aggregate fluctuations from independent sectoral shocks: Self-organized criticality in a model of production and inventory dynamics // *Ricerche Economiche*. 1993. Vol. 47. P. 3.
36. *Feder H.J.S., Feder J.* Self-organized criticality in a stick-slip process // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 66, № 20. P. 2669.
37. *Manna S.S.* Critical exponents of the sand pile models in two dimensions // *Physica A*. 1991. Vol. 179, № 2. P. 249.
38. *Olami Z., Feder H.J.S., Christensen K.* Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 68, № 8. P. 1244.
39. *Christensen K., Olami Z.* Scaling, phase transition, and nonuniversality in a self-organized critical cellular-automaton model// *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 46, № 4. P. 1829.
40. *Grassberger P.* Efficient large-scale simulations of a uniformly driven system // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49, № 3. P. 2436.
41. *Bottani S., Delamotte B.* Self-organized criticality and synchronization in pulse coupled relaxation oscillator systems: the Olami, Feder and Christensen model and the Feder and Feder model// *Physica D*. 1997. Vol. 103, № 1-4. P. 430.
42. *Klein W., Rundel J.* Comment on «Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes»// *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71, № 8. P. 1288.
43. *Carlson J.M., Langer J.S.* Properties of earthquake generated by fault dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62, № 22. P. 2632.
44. *Carlson J.M., Langer J.S.* Mechanical model of an earthquake fault// *Phys. Rev. A*. 1989. Vol. 40, № 11. P. 6470.
45. *de Sousa Vieira M.* Self-organized criticality in a deterministic mechanical model // *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 46, № 10. P. 6288.
46. *Liu W.-S., Lu Y.N., Ding E.J.* Dynamical phase transition and self-organized criticality in a theoretical spring-block model// *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51, № 3. P. 1916.
47. *Held G.A., Solina D.H. II, Keane D.T., Haag W.J., Horn P.M., Grinstein G.* Experimental study of critical-mass fluctuations in an evolving sandpile // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65, № 9. P. 1120.
48. *Jaeger H.M., Liu C., Nagel S.R.* Relaxation at the angle of repose // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62, № 1. P. 40.
49. *Paczuski M., Boettcher S.* Universality in sandpiles, interface depinning, and earthquake models // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77, № 1. P. 111.
50. *Andersen J.V., Sornette D., Leung K.-T.* Tri-critical behavior in rupture induced by disorder // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 2140.
51. *Zhang S., Fan Q., Ding E.* Critical processes, Langevin equation and universality // *Phys. Lett. A*. 1995. Vol. 203. P. 83.
52. *Bak P., Chen K., Tang C.* A forest-fire model and some thoughts on turbulence // *Phys. Lett. A*. 1990. Vol. 147, № 5-6. P. 297.
53. *Drossel B. and Schwabl F.* Self organization in a forest-fire model // *Fractals*. 1993. Vol. 1, № 4. P. 1022.
54. *Drossel B., Clar S., Schwabl F.* Crossover from percolation to self-organized criticality // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 50, № 4. P. R2399.
55. *Grassberger P., Kantz H.* On a forest fire model with supposed self-organized criticality // *J. of Stat. Phys.* 1991. Vol. 63, № 3-4. P. 685.
56. *Drossel B.* Self-organized criticality and synchronization in the forest-fire model // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 936.
57. *Newman M.E.J., Sibani P.* Extinction, diversity and survivorship of taxa in the fossil record. <http://xxx.lanl.gov/abs/adap-org/9811003>
58. *Newman M.E.J.* A model of mass extinction// *J. Theor. Biol.* 1997. Vol. 189. P. 235.

59. *Roberts B.W., Newman M.E.J.* A model for evolution and extinction // *J. Theor. Biol.* 1996. Vol. 180. P. 39.
60. *Sole R.V., Manrubia S.C.* Criticality and unpredictability in macroevolution// *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55, № 4. P. 4500.
61. *Sneppen K., Bak P., Flyvbjerg H., Jensen M.H.* Evolution as a self-organized critical phenomena // *Proc. Natl. Acad. Sci USA.* 1995. Vol. 92. P. 5209.
62. *Sole R.V., Bascompte J.* Are critical phenomena relevant to large-scale evolution?// *Proc. R. Soc. London B.* 1996. Vol. 263. P. 161.
63. *Sole R.V., Alonso D., McKane A.* Scaling in a multispecies network model ecosystem. <http://xxx.lanl.gov/abs/adap-org/9907010>
64. *Keitt T.H., Stanley H.E.* Dynamics of North American breeding bird populations // *Nature.* 1998. Vol. 393. P. 257.
65. *Sole R.V., Manrubia S.C., Benton M., Bak P.* Self-similarity of extinction statistics in the fossil record // *Nature.* 1997. Vol. 388. P. 764.
66. *Burlando B.* The fractal dimension of taxonomic systems // *J. Theor. Biol.* 1990. Vol. 146. P. 99.
67. *Burlando B.* The fractal geometry of evolution // *J. Theor. Biol.* 1993. Vol. 163. P. 161.
68. *Newman M.E.J., Eble G.J.* Decline in extinction rates and scale invariance in the fossil record. <http://xxx.lanl.gov/abs/adap-org/9809004>
69. *Newman M.E.J.* Self-organized criticality, evolution and the fossil extinction record// *Proc. R. Soc. London B.* 1996. Vol. 263. P. 1605.
70. *Bak P., Flyvbjerg H., Lautrup B.* Coevolution in a rugged fitness landscape// *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 46, № 10. P. 6724.
71. *Bak P., Sneppen K.* Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution// *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71, № 24. P. 4083.
72. *Paczuski M., Maslov S., Bak P.* Avalanche dynamics in evolution, growth, and depinning models// *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53, № 1. P. 414.
73. *Grassberger P.* The Bak - Sneppen model for punctuated evolution// *Phys. Lett. A.* 1995. Vol. 200. P. 277.
74. *Maslov S.* Time directed avalanches in invasion models// *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 74, № 5. P. 562.
75. *Klafter J., Shlesinger M.F., Zumofen G.* Beyond Brownian motion// *Physics Today.* 1996 (February). P. 33.
76. *Sole R.V., Manrubia S.C.* Extinction and self-organized criticality in a model of large-scale evolution // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 1. P. R42.
77. *Newman M.E.J., Roberts B.W.* Mass-extinction: Evolution and the effects of external influences on unfit species // *Proc. R. Soc. London B.* 1995. Vol. 260. P. 31.
78. *Newman M.E.J., Sneppen K.* Avalanches, scaling and coherent noise // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 6. P. 6226.
79. *Sneppen K., Newman M.E.J.* Coherent noise, scale invariance and intermittency in large systems // *Physica D.* 1997. Vol. 110. P. 209.
80. *Rubio M.A., Edwards C.A., Dougherty A., Gollub J.P.* Self-affine fractal interface from immiscible displacement in porous media // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 63, № 16. P. 1685.
81. *Leschhorn H., Tang L.-H.* Avalanches and correlations in driven interface depinning // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, № 2. P. 1238.
82. *Sneppen K.* Self-organized criticality and interface growth in a random medium // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 69, № 24. P. 3539.
83. *Kim J.M., Kosterlitz J.M.* Growth in restricted solid-on-solid model// *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62, № 19. P. 2289.
84. *Подлазов А.В.* Модель гекатонхейров освобождения поверхности и мягкая универсальность в теории самоорганизованной критичности// *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1999. Т. 7, № 6. С. 3.
85. *Maslov S., Paczuski M.* Scaling theory of depinning in the Sneppen model// *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 50, № 2. P. R643.
86. *Sornette D.* Linear stochastic dynamics with nonlinear fractal properties// *Physica A.* 1998. Vol. 250. P. 295.

87. Sornette D., Cont R. Convergent multiplicative processes repelled from zero: power laws and truncated power laws // J. Phys. France I. 1997. Vol. 7. P. 431.

88. Sornette D. Multiplicative processes and power laws // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 4811.

*Институт прикладной
математики РАН*

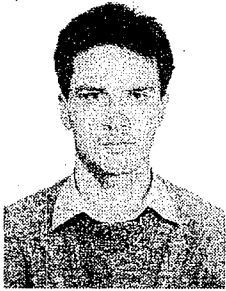
*Поступила в редакцию 21.11.00
после доработки 28.02.01*

SELF-ORGANIZED CRITICALITY AND RISK ANALYSIS

A.V. Podlasov

We analyze the catastrophic behaviour of many complex systems from the point of view of the theory of self-organized criticality. This theory is now one of the most rapidly growing branches of the nonlinear science.

Main attention is focused on presentation and generalization of conceptions of the theory of self-organized criticality related to the risk management. Among the phenomena considered there are flicker-noise, punctuated equilibrium, power probability distributions and property of integrity.



Подлазов Андрей Викторович – родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996). Работает в Институте прикладной математики РАН, аспирант Московского физико-технического института. Область интересов – нелинейная динамика, теория самоорганизованной критичности. E-mail: tiger@spp.keldysh.ru



РОЖДЕНИЕ И СМЕРТЬ ФРАКТАЛЬНОГО ТОРА В МОДЕЛИ РЕАКЦИИ БЕЛОУСОВА – ЖАБОТИНСКОГО

А.Д. Караваяев, А.Б. Рыжков, В.П. Казаков

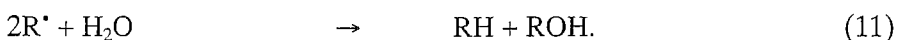
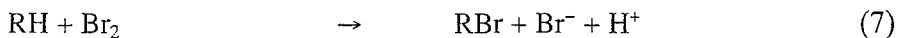
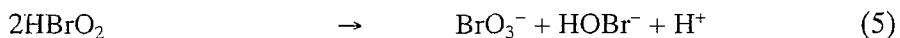
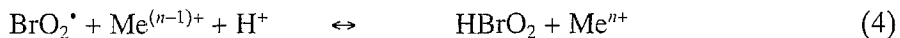
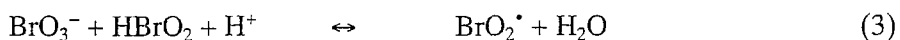
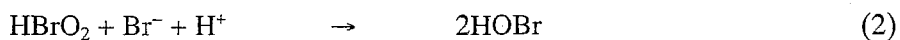
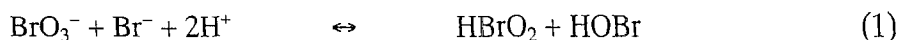
На 11-стадийной модели автоколебательной реакции Белоусова – Жаботинского исследован механизм рождения и гибели хаотического тороидального аттрактора – фрактального тора. Обнаружено, что он появляется в результате каскада бифуркаций удвоения периода резонансного состояния на торе, а исчезает через перемежаемость I типа. Построенная бифуркационная диаграмма показывает, что фрактальные торы существуют в достаточно широком диапазоне, где закономерно чередуются резонансные состояния, фрактальные торы и области перемежаемости. Это дает основание полагать, что динамика исследуемой модели, как и самой реакции Белоусова – Жаботинского, является существенно двухчастотной, и эволюция ее режимов протекает на торе при глобальной тенденции числа вращения к уменьшению.

Введение

Автоколебательная химическая реакция Белоусова – Жаботинского (БЖ) демонстрирует замечательное разнообразие динамики: от простых периодических колебаний до различных видов хаоса [1,2]. Переход к хаосу в системе БЖ следует известным универсальным закономерностям [3], однако, если появление хаотического аттрактора в результате каскада бифуркаций удвоения периода надежно зарегистрировано, экспериментальные наблюдения других сценариев (через перемежаемость, появление гомоклинической структуры, разрушение T^2 -тора) носят разрозненный, фрагментарный характер [2,4–7]. Эффективным средством, позволяющим прояснить особенности и механизм возникновения наблюдаемых хаотических режимов, являются модельные исследования [7–10]. Ранее [11] с использованием достаточно реалистичной 11-стадийной модели нами был обнаружен переход к хаосу от двумерного тора через каскад бифуркаций удвоения периода, который сопровождался появлением хаотического тороидального аттрактора – фрактального тора (ФТ) [5,12]. Детальному исследованию механизма рождения и гибели фрактального тора в модели реакции БЖ и посвящено данное сообщение.

Модель

Модель базируется на следующей реакционной схеме [13]:



С учетом балансов получаем следующую нелинейную кинетическую модель:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= -\omega_1 - \omega_2 - \omega_6 + \omega_7 + \omega_7 & \omega_1 &= k_1 B x_1 - k_{-1} x_2 x_3 & x_1 &= [\text{Br}^-] \\ dx_2/dt &= \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - 2\omega_4 & \omega_2 &= k_2 x_1 x_2 & x_2 &= [\text{HBrO}_2] \\ dx_3/dt &= \omega_1 + 2\omega_2 + \omega_5 - \omega_6 - \omega_8 & \omega_3 &= k_3 B x_2 - k_{-3} x_4 & x_3 &= [\text{HOBr}] \\ dx_4/dt &= 2\omega_3 - \omega_4 & \omega_4 &= k_4 x_4 (A - x_5) - k_{-4} x_2 x_5 & x_4 &= [\text{BrO}_2^\bullet] \\ dx_5/dt &= \omega_4 - \omega_{10} & \omega_5 &= k_5 x_2^2 & x_5 &= [\text{Me}^{n+}] \\ dx_6/dt &= \omega_6 - \omega_7 & \omega_6 &= k_6 x_1 x_3 - k_{-6} x_6 & x_6 &= [\text{Br}_2] \\ dx_7/dt &= -\omega_8 + \omega_9 + \omega_{10} - 2\omega_{11} & \omega_7 &= k_7 C x_6 & x_7 &= [\text{R}^\bullet] \\ dx_8/dt &= \omega_8 - \omega_9 & \omega_8 &= k_8 x_3 x_7 & x_8 &= [\text{Br}^\bullet] \\ & & \omega_9 &= k_9 C x_8 & A &= [\text{Me}^{n+}, (n-1)+]_0 \\ & & \omega_{10} &= k_{10} C x_5 & B &= [\text{BrO}_3^-]_0 \\ & & \omega_{11} &= k_{11} x_7^2 & C &= [\text{RH}]_0 \end{aligned}$$

где $[\text{Me}^{n+}, (n-1)+]_0$, $[\text{BrO}_3^-]_0$, $[\text{RH}]_0$ – исходные концентрации, соответственно, ионов церия, бромат-ионов и малоновой кислоты, $\{x_i\}$ – текущие концентрации веществ,

$\{k_i\}$ – константы скоростей стадий. Численные значения констант скоростей приведены ниже [9]:

$k_1=2.1$	$k_{-3}=4.2 \cdot 10^7$	$k_6=8.0 \cdot 10^9$	$k_9=1.0 \cdot 10^6$
$k_{-1}=1.0 \cdot 10^4$	$k_4=8.0 \cdot 10^4$	$k_{-6}=1.1 \cdot 10^2$	$k_{10}=0.2$
$k_2=3.0 \cdot 10^6$	$k_{-4}=8.9 \cdot 10^3$	$k_7=4.6 \cdot 10^{-3}$	$k_{11}=3.2 \cdot 10^9$
$k_3=42$	$k_5=3.0 \cdot 10^3$	$k_8=10^5 \dots 10^8$	

В качестве варьируемого параметра выбрана константа k_8 , определяющая скорость образования ключевого интермедиата – бромид-ионов. Расчеты велись как для закрытой системы, но с поддержанием исходных концентраций бромата $[\text{BrO}_3^-]_0$ и малоновой кислоты $[\text{RH}]_0$ на постоянном уровне (pool chemicals approximation), что позволяло получать стационарные режимы. Набор концентраций $[\text{RH}]_0=0.2$ М, $[\text{BrO}_3^-]_0=0.08$ М, $[\text{Me}^{n+, (n-1)+}]=5 \cdot 10^{-4}$ М, $[\text{H}^+]=1$ М выбран как наиболее подходящий для демонстрации эволюции тороидальных аттракторов в модели. Расчет кинетики проводили (m, k) -методом Новикова [14], хорошо зарекомендовавшим себя при работе с жесткими системами. Корреляционная размерность (D_2) вычислялась с помощью программы KORDIM [15, 16] в 8-мерном фазовом пространстве, а показатели Ляпунова – интегрированием уравнений движения согласно известному алгоритму [17].

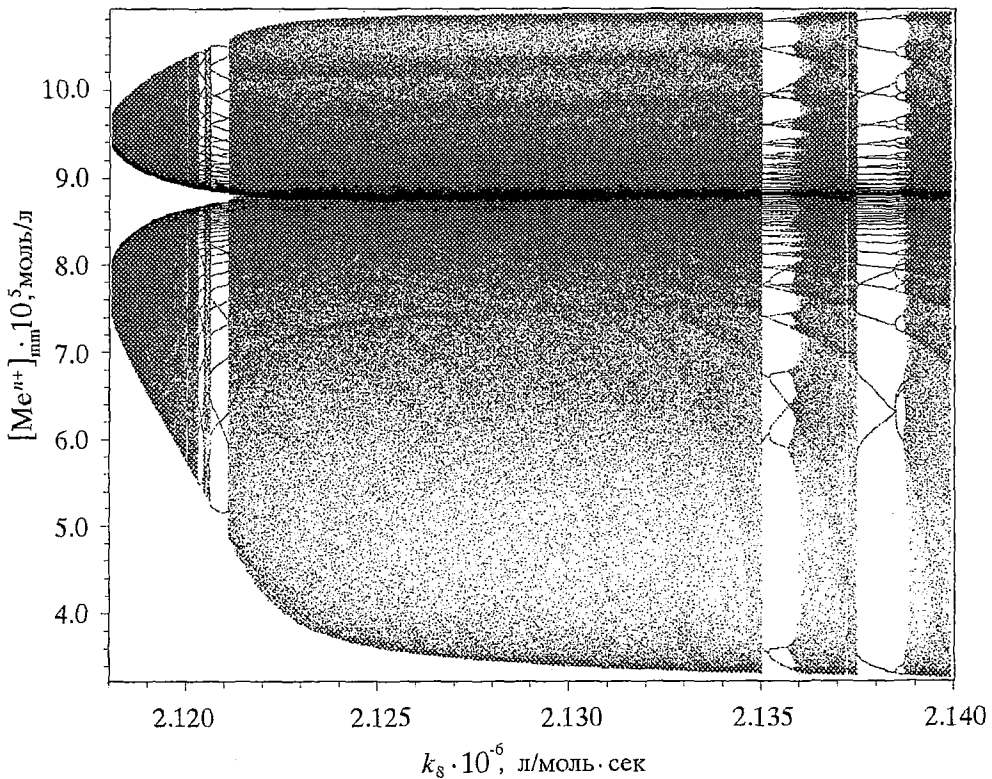


Рис. 1 Бифуркационная диаграмма перехода от T^2 -тора к фрактальному тору (по оси ординат отложены точки максимумов и минимумов колебаний концентрации ионов металла $[\text{Me}^{n+}]_{\text{min}}$ в зависимости от величины k_8)

Результаты и их обсуждение

Как было показано ранее [10,18], в данной модели существует единственная стационарная точка. При возрастании параметра k_8 вследствие суперкритической бифуркации Хопфа она теряет устойчивость, и появляются квазисинусоидальные колебания. Их амплитуда монотонно возрастает, пока не происходит вторая бифуркации Хопфа, в результате которой рождаются двухчастотные квазипериодические колебания (T^2 -тор в фазовом пространстве). По мере возрастания k_8 тор постепенно увеличивается в размерах и деформируется, его траектории приближаются к неустойчивой стационарной точке, а внутренний диаметр стягивается в узкую трубку. Этот процесс заканчивается разрушением тора и возникновением хаотических пачечных колебаний, которые содержат длинные участки с медленно меняющимися концентрациями реагентов и резкие «всплески» с предшествующим трендом из нескольких низкоамплитудных пичков [10].

Отметим, что подобный (в общих чертах) характер эволюции T^2 -тора в системе БЖ наблюдался в проточном реакторе [5], однако тонкая структура этого перехода (вследствие трудностей экспериментального характера) ускользает от внимания исследователей.

Соответствующая бифуркационная диаграмма представлена на рис. 1 (по вертикальной оси отложены концентрации Me^{n+} в точках максимумов и минимумов колебаний, а по горизонтальной – значения контролирующего параметра). Хаотическим режимам соответствуют размытые вертикальные полосы, а периодическим – дискретные наборы относительно небольшого числа точек. Квазипериодической динамике отвечает диапазон с относительно равномерным заполнением точек и четкими границами, в котором видны узкие

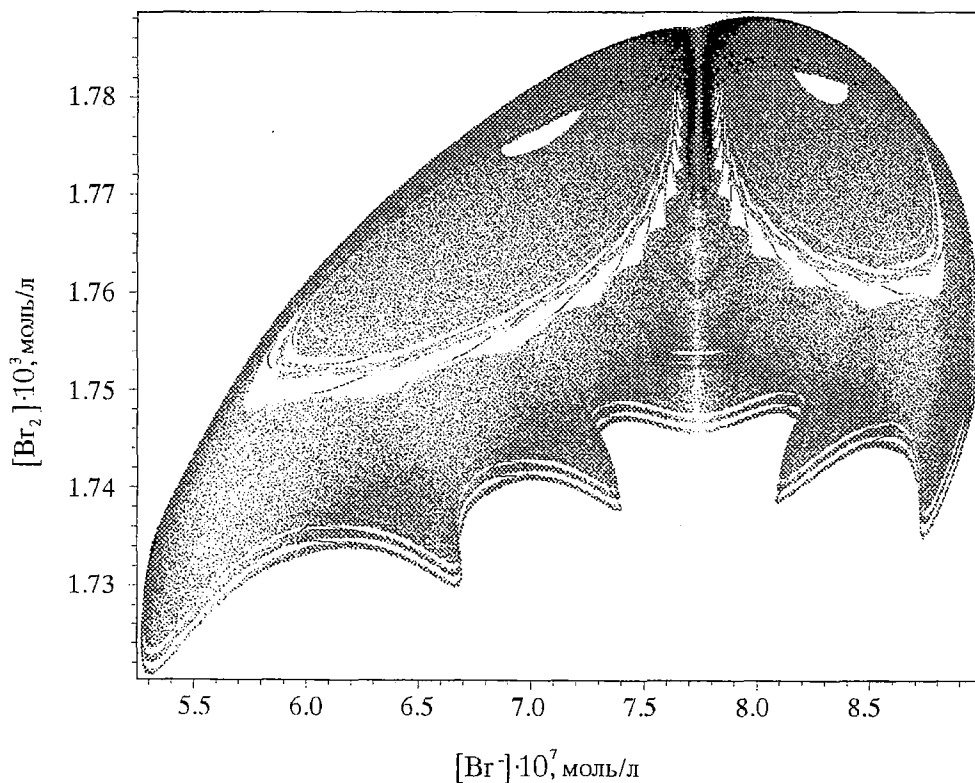


Рис. 2. Эволюция сечения тора плоскостью при переходе от T^2 -тора к фрактальному тору. Сечение строилось при непрерывном монотонном изменении величины k_8 в интервале от $2.118 \cdot 10^6$ до $2.128 \cdot 10^6 \text{ M}^{-1} \text{ c}^{-1}$ (при $[Br^-]_c = 7.8 \cdot 10^{-6} \text{ M}$)

окна резонансов на торе. Происходящие при этом изменения формы и размеров тора наглядно демонстрирует рис. 2, где полное сечение тора плоскостью построено при плавном движении по k_8 в том же диапазоне. Вначале гладкая эллиптическая форма контура сохраняется, но затем эллипс деформируется, и на нем появляется легкая волнистость, свидетельствующая о начале образования складок на поверхности тора. Постепенно эта деформация усиливается, и в итоге контур приобретает довольно экзотическую форму со множеством «зубцов». Он представляет собой сечение складчатого тора, известного как фрактальный тор [6, 12]. Характерные особенности последнего демонстрирует рис. 3. Его складчатая структура хорошо просматривается на сечении Пуанкаре, причем по мере

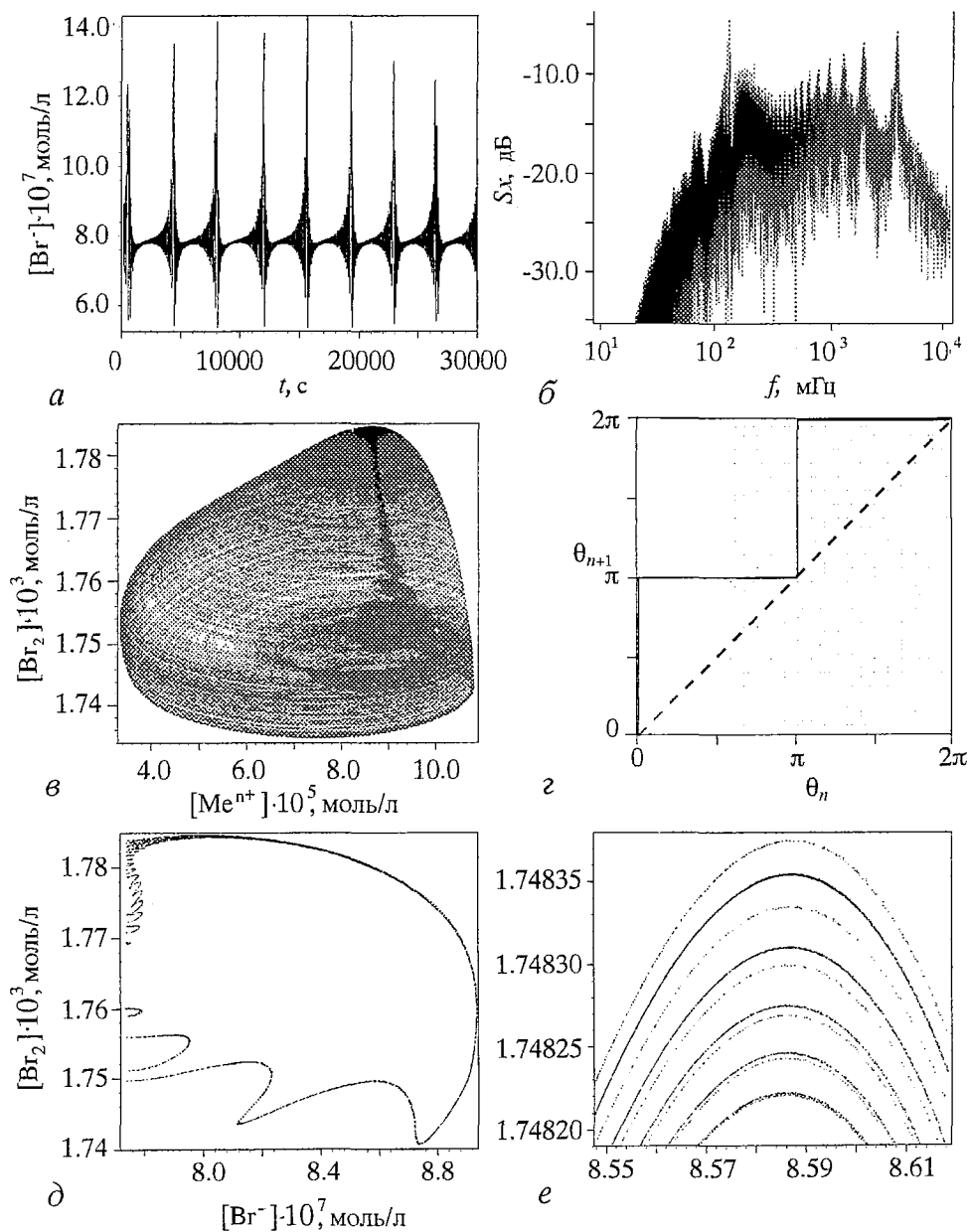


Рис. 3. Кинетическая кривая (а), спектр мощности (б), фазовый портрет (в), сечение Пуанкаре (д) и его фрагмент (е) для хаотического режима при $k_8=2.13 \cdot 10^6 \text{ M}^{-1}\text{c}^{-1}$. Сечение строилось при $[Me^{n+}]_c=8.8 \cdot 10^{-5} \text{ M}$ (разрывы возникают из-за небольшого наклона оси аттрактора – часть точек не попадает в плоскость сечения)

перехода с внутренней на внешнюю поверхность тора складки сужаются, вытягиваются и «прилипают» друг к другу, так что их становится невозможно различить. Вычисленный спектр показателей Ляпунова λ_n содержит одно положительное значение $\lambda_1=(5.9\pm 0.1)\cdot 10^{-4}$, одно нулевое $\lambda_2=(0\pm 1)\cdot 10^{-5}$ и остальные отрицательные: $\lambda_3=-1.68\cdot 10^{-3}$, $\lambda_4=-0.99971$, $\lambda_5=-2.86221$, $\lambda_6=-3.00594$, $\lambda_7=-3.16172$, $\lambda_8=-3.20988$. Как и всякий хаотический аттрактор, он имеет фрактальную структуру (корреляционная размерность, рассчитанная по $5\cdot 10^4$ точкам в 8-мерном фазовом пространстве $D_2=2.4\pm 0.1$), но она различима лишь при ближайшем рассмотрении (рис. 3, e). Оценка размерности Хаусдорфа согласно гипотезе Каплана – Йорке [3] дает значение $D_{KY}=2+\lambda_1/\lambda_3=2.35$, что согласуется с приведенной выше величиной D_2 .

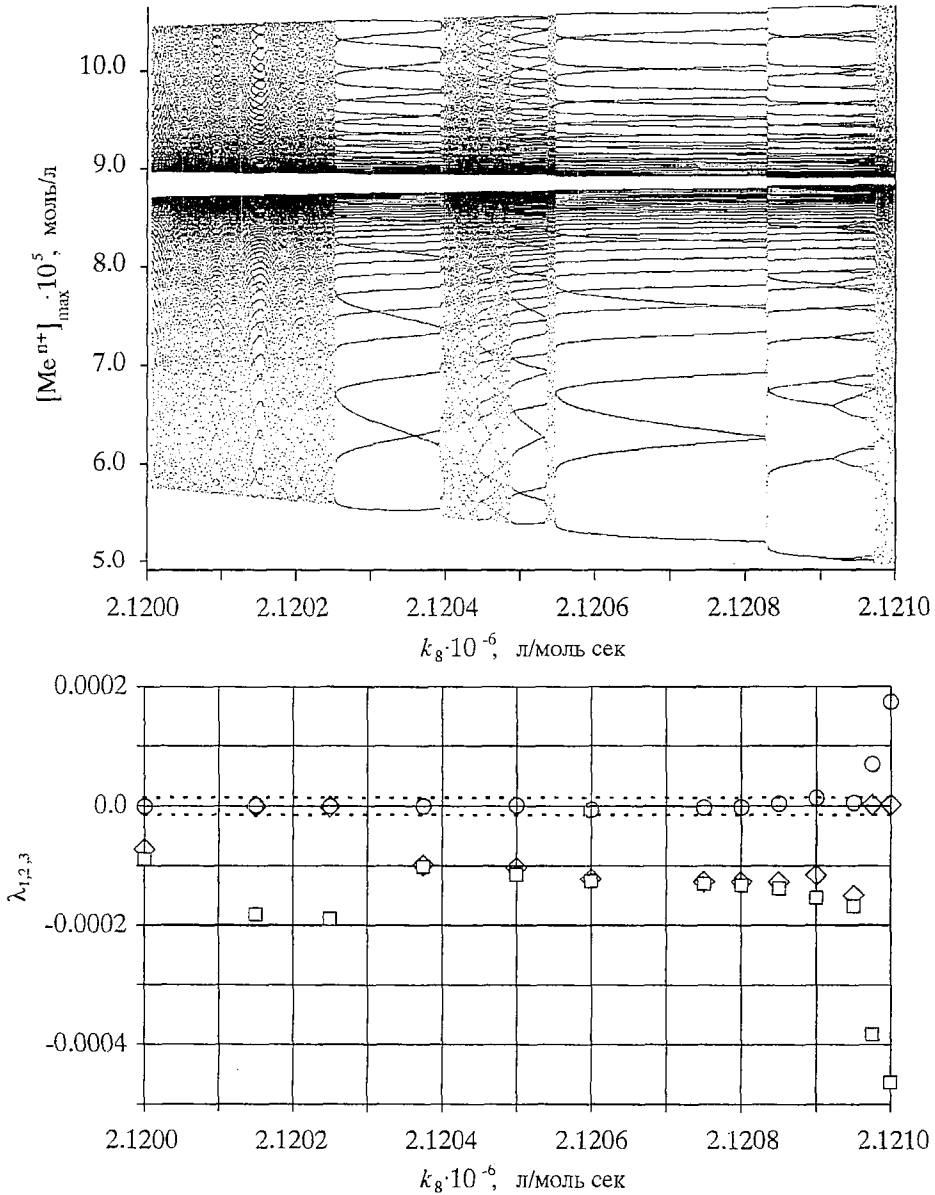


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма и значения трех наибольших показателей Ляпунова ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) для узкого переходного диапазона

Несомненно, что описанная динамика системы с характерной трансформацией тора представляет собой разновидность универсального сценария перехода к хаосу – через разрушение инвариантного двумерного тора [3,12]. Как именно это происходит, демонстрирует рис. 4. Как видим, появлению хаотического режима (фрактального тора) предшествует возникновение резонансного состояния на торе ($\lambda_1=0$, $\lambda_2<0$, $\lambda_3<0$), которое затем претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода. Дальнейшая эволюция появившегося ФТ вновь приводит к периодическому резонансному состоянию, и этот цикл: резонанс на

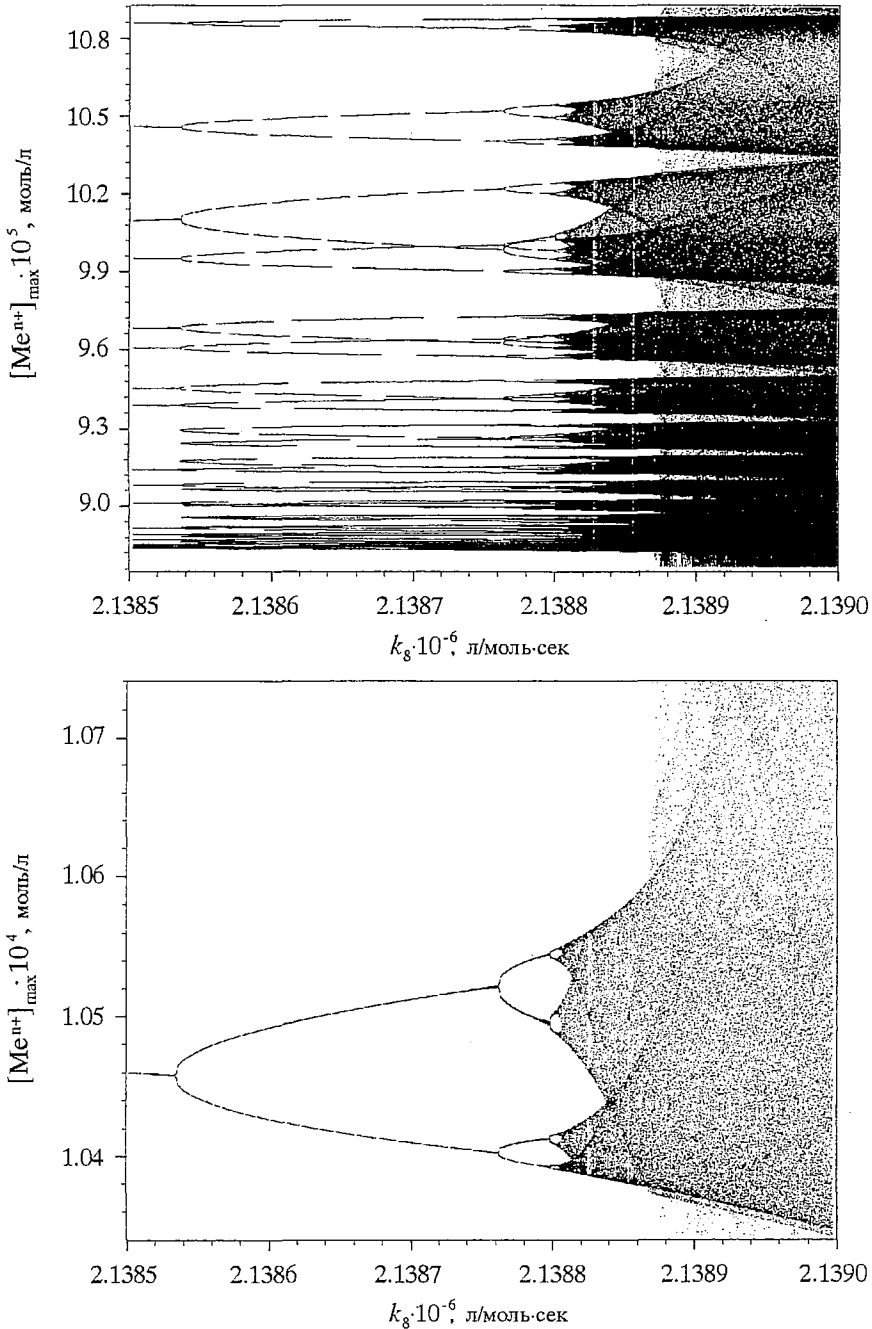


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма каскада удвоения периода (а, по оси ординат отложены точки максимумов колебаний концентрации ионов металла $[Me^{n+}]_{max}$) и ее фрагмент (б) для одной из точек резонанса (с числом вращения $W=f_1/f_2=1/27$)

торе – каскад удвоения резонансов – хаотический тороидальный аттрактор – резонанс, повторяется вновь и вновь. Один из каскадов удвоения из этой цепочки представлен на рис. 5. Расстояние между последующими удвоениями быстро сокращается (соотношение длин интервалов между последующими бифуркациями для первых членов ряда составляет 5.2, 6.0, 5.4), и, наконец, при критическом значении параметра появляется хаотический режим.

Если снизу (по k_8) область существования ФТ очерчена резко, то ее верхняя граница выражена не столь явно. При возрастании величины k_8 мы наблюдаем следующую картину: система не выходит на какое-либо определенное хаотическое или периодическое состояние, а вместо этого на кинетической кривой появляются чередующиеся участки хаотического и «псевдопериодического» поведения (рис. б, а). Причем по мере возрастания k_8 длина последних постепенно увеличивается,

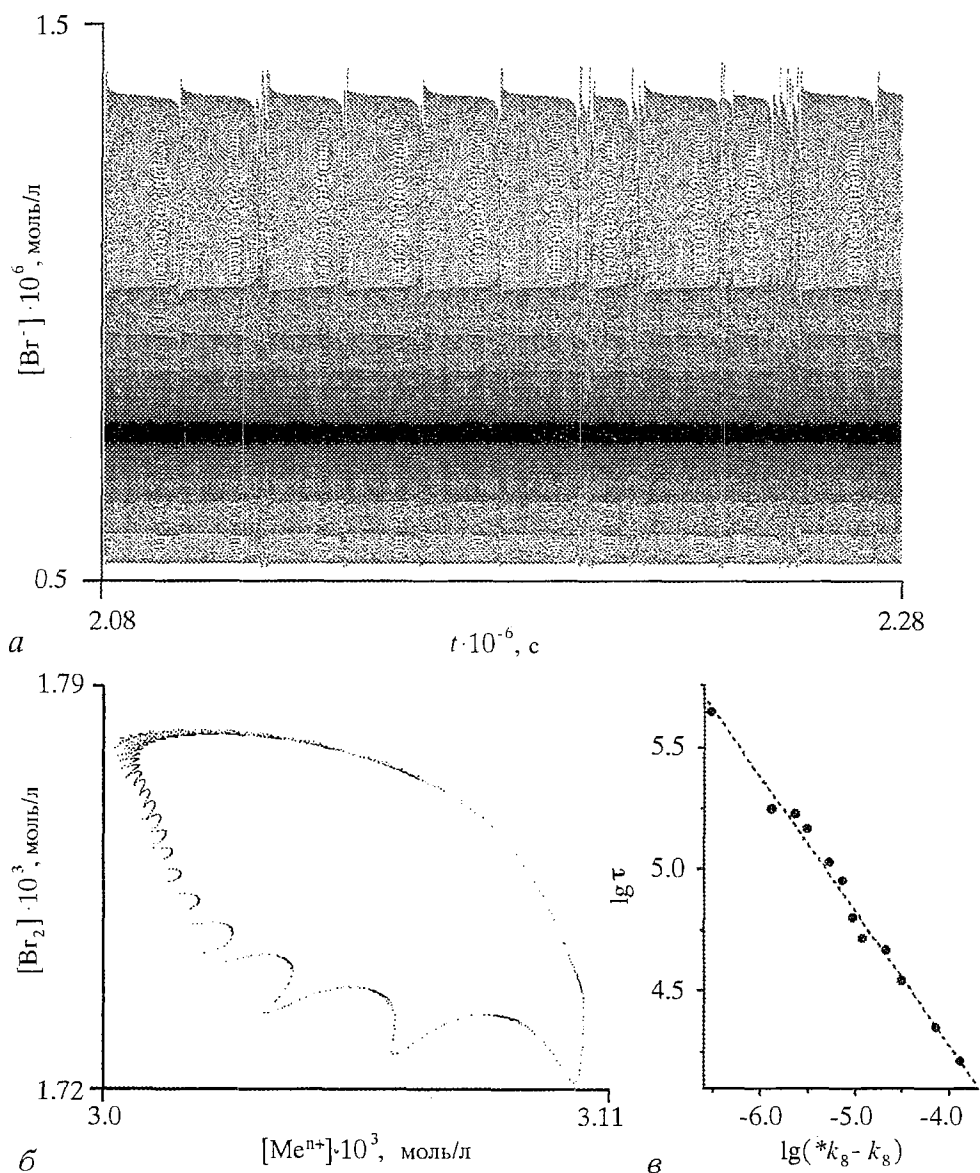


Рис. 6. Кинетическая кривая (а) и сечение Пуанкаре (б) для режима, отвечающего перемежаемости ($k_8=2.14053 \cdot 10^6 \text{ M}^{-1}\text{s}^{-1}$), в – зависимость логарифма средней длительности «почти периодической» фазы τ от величины $\lg(*k_8 - k_8)$

пока, наконец, при критическом значении параметра $*k_8$ не появляется действительно периодический режим – резонанс на торе (с числом вращения $W=1/28$). Очевидно, что описанная выше динамика характерна для перемежаемости [3]. На рис. 6 приведены временная серия, сечение Пуанкаре и зависимость логарифма средней длительности «почти периодической» фазы τ от величины $\lg(*k_8 - k_8)$. Как видим, эта зависимость имеет вид $\tau \sim (*k_8 - k_8)^{-\gamma}$ с показателем $\gamma \approx 0.55$. Полученное значение γ позволяет констатировать, что исчезновение фрактального тора (и появление нового резонансного состояния) происходит через перемежаемость I типа [19]. В целом, подобный сценарий разрушения резонансов – через каскад удвоения периода и перемежаемость первого типа, полностью согласуется с известной теоремой о разрушении двумерного резонансного тора [19].

Построение бифуркационной диаграммы в большем масштабе показывает, что фрактальные торы существуют в достаточно широком диапазоне, где закономерно чередуются резонансные состояния, ФТ и области перемежаемости (рис. 7). При возрастании k_8 число вращения W уменьшается, а области, занимаемые периодическими состояниями, становятся шире. Примечательно, что, казалось бы, сложная картина чередования сложнопериодических и хаотических состояний подчиняется простым закономерностям арифметики Фарея [3]: между двумя периодическими режимами с числами вращений $W_1 = p_1/q_1$ и $W_2 = p_2/q_2$ лежит режим с W , равным «фареевской» сумме этих величин:

$$W = W_1 \oplus W_2 = (p_1 + p_2)/(q_1 + q_2), \quad W_1 < W < W_2, \quad p = n, \quad q = n + m,$$

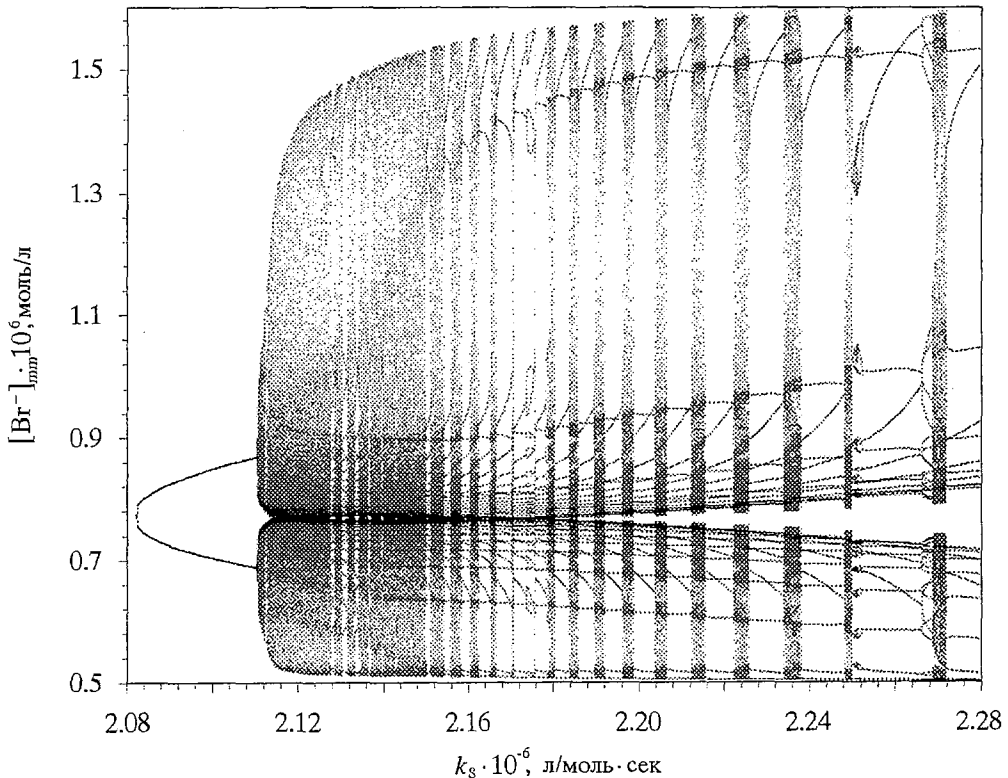


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма модели системы БЖ для области хаотических тороидальных режимов ($[Br^-]_{\text{mm}}$ – точки максимумов и минимумов колебаний концентрации бромид-ионов),

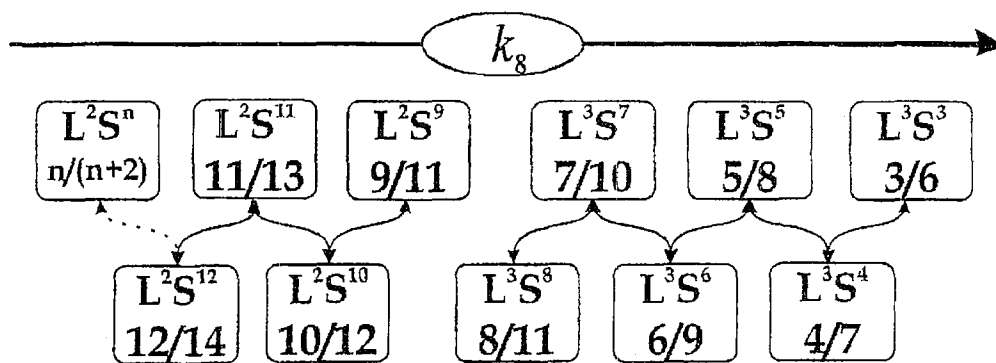


Рис. 9

где n – число малых пиков, а m – число больших (высокоамплитудных) пиков на кинетической кривой за один период колебаний (соответствующий режим обозначается $L^n S^m$). На диаграмме (рис. 9) изображена последовательность периодических режимов (резонансов) в исследуемой области.

Полученные результаты дают основание полагать, что динамика исследуемой модели, как и самой реакции БЖ, является существенно двухчастотной (или имеет два существенно различающихся временных масштаба), и эволюция описанных выше режимов протекает на торе при глобальной тенденции W к уменьшению.

Надо отметить, что экспериментальная регистрация фрактального тора требует использования прецизионной техники и больших затрат времени. Пока существует единственное наблюдение подобного динамического объекта в системе БЖ (с $f_1/f_2 \sim 1/40$) [5]. Более похожий фрактальный тор (с $f_1/f_2 \sim 1/30$) был получен в расчетах по уравнениям, вытекающим из теории нормальных форм для взаимодействующих базисных гистерезисной бифуркации и бифуркации Хопфа [7]. Появление на нем складок связывалось со сложной структурой фазового пространства в гетероклинической ситуации. Однако авторам [7] не удалось получить подобный объект в 7-параметрической модели реакции БЖ, не известен он и для других моделей.

В нашем случае сильная складчатость поверхности ФТ в значительной мере обуславливается присутствием гомоклинической структуры, которая в наибольшей степени проявляет себя вблизи базового седло-фокуса. Эта структура возникает при разрушении особой – гомоклинической траектории, существующей в модели при близких значениях параметров [20]. То есть появление хаоса здесь оказывается тесно связанным с гомоклиническими эффектами.

Таким образом, впервые для модели реакции БЖ продемонстрирован механизм возникновения и исчезновения фрактального тора в результате эволюции инвариантного тора в окологомоклинических условиях. Показано, что рождение ФТ происходит после каскада бифуркаций удвоения периода резонансного состояния на T^2 -торе, а исчезновение – через перемежаемость.

Авторы признательны Г.Г. Малинецкому за предоставление программы KORDIM, Е.А. Новикову за алгоритм (m, k) -метода и А.Б. Потапову за помощь в расчете корреляционной размерности и показателей Ляпунова.

Библиографический список

1. Колебания и бегущие волны в химических системах / Под ред. Р. Филда, М. Бургер. М.: Мир, 1988.
2. Argoul F., Arneodo A., Richetti P., Roux J.C., Swinney H.L. Chemical chaos: from hints to confirmation// Acc. Chem. Res. 1987. Vol. 20, № 12. P. 436.

3. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
4. Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics / Ed. by C. Vidal, A. Pacault. Springer-Verlag: Berlin, 1981.
5. Argoul F., Arneodo A., Richetti P., Roux J.C. From quasiperiodicity to chaos in the Belousov – Zhabotinskii reaction. I. Experiment // J. Chem. Phys. 1987. Vol. 86, № 6. P. 3325.
6. Argoul F., Arneodo A., Richetti P. J. Dynamique symbolique dans la reaction de Belousov – Zhabotinskii: une illustration experimentale le la theorie de Shil'nikov des orbites homoclines// J. Chim. Phys. 1987. Vol. 84, № 11/12. P. 1367.
7. Richetti P., Roux J.C., Argoul F., Arneodo A. From quasiperiodicity to chaos in the Belousov – Zhabotinskii reaction. II. Modeling and theory // J. Chem. Phys. 1987. Vol. 86, № 6. P. 3339.
8. Носков О.В., Караваев А.Д., Спивак С.И., Казаков В.П. Моделирование сложной динамики реакции Белоусова – Жаботинского: решающая роль быстрых переменных // Кинетика и катализ. 1992. Т. 33, № 3. С. 704.
9. Noskov O.V., Karavaev A.D., Kazakov V.P., Spivak S.I. Chaos in simulated Belousov – Zhabotinsky Reaction// Mend. Commun. 1994, № 3. P. 82.
10. Noskov O.V., Karavaev A.D., Kazakov V.P., Spivak S.I. Quasiperiodic to bursting oscillations transition in the model of the Belousov – Zhabotinsky reaction // Mend. Commun. 1997, № 1. P. 27.
11. Караваев А.Д., Рыжков А.Б., Носков О.В., Казаков В.П. Наблюдение фрактального тора в модели реакции Белоусова – Жаботинского // Докл. Акад. наук. 1998. Т. 363, № 1. С. 71.
12. Aronson D.G., Chory M.A., Hall G.R., McGehee R.P. Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane: computer-assisted study// Commun. Math. Phys. 1982. Vol. 83. № 3. P. 303.
13. Ruoff P., Noyes R.M. An amplified oregonator model simulating alternative excitabilities, transitions in types of oscillations, and temporary bistability in a closed system // J. Chem. Phys. 1986. Vol. 84, № 3. P. 1413.
14. Novikov E.A., Golushko M.I., Shitiov Y.A. Approximation of Jacobi matrix in the (m,k) – method of order three // Advances in Modeling & Analysis. A.: AMSE Press. 1995. Vol. 28, № 3. P. 19.
15. Малинецкий Г.Г., Потанов А.Б. О вычислении размерностей странных аттракторов. Препр. ИПМ АН СССР. № 101. М., 1987.
16. Малинецкий Г.Г., Потанов А.Б. О вычислении размерностей странных аттракторов// ЖВМ и МФ. 1988. Т. 28, № 7. С. 1021.
17. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series // Phisica D. Vol. 16, № 3. P. 285.
18. Рыжков А.Б., Носков О.В., Караваев А.Д., Казаков В.П. Стационары и бифуркации реакции Белоусова – Жаботинского // Мат. моделирование. 1998. Т. 10, № 2. С. 71.
19. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
20. Носков О.В., Караваев А.Д., Казаков В.П. Гомоклиника в модели реакции Белоусова – Жаботинского // Докл. Акад. наук. 1997. Т. 353. № 6. С. 774.

Институт органической химии
Уфимского научного центра РАН

Поступила в редакцию 13.09.2000
после доработки 14.11.2000

BIRTH AND DEATH OF FRACTAL TORE IN THE BELOUSOV – ZHABOTINSKY REACTION MODEL

A.D. Karavaev, A B. Ryzhkov, V.P. Kazakov

The mechanism of birth and destruction of chaotic toroidal attractor – fractal tore – is investigated for the 11-stage Belousov – Zhabotinsky reaction model. It is revealed,

that fractal torus emerges as a result of period–doubling bifurcations cascade of a resonant state on torus, and disappears through type I intermittency. Constructed bifurcation diagram shows, that fractal toris exist in a wide enough range, where resonant states, fractal toris and areas of intermittency appear conformingly in turn. It gives the basis to believe, that observed model dynamics, as the Belousov – Zhabotinsky reaction itself, involves two fundamental frequencies, and that the evolution of described regimes occurs on torus upon general tendency of rotation number to reduction.



Казakov Валерий Петрович – родился в 1934 году. Окончил химический факультет Ленинградского государственного университета по специальности радиохимия (1957). Работал в Институте археологии Ленинградского отделения АН СССР (1958–1960), Институте неорганической химии СО АН СССР (1960–1965), Институте теплофизики СО АН СССР (1965–1968), Институте органической химии БНЦ АН СССР (УНЦ РАН) (с 1968 года по настоящее время). Доктор химических наук, профессор, академик Академии творчества (Москва), член–корреспондент РАН, заслуженный деятель науки Башкирской АССР. Область научных интересов – химическая физика. Автор монографии «Хемилюминесценция уранила, лантаноидов и d -элементов» и соавтор монографий «Низкотемпературная хемилюминесценция» и «Радиолюминесценция водных растворов». Имеет более 300 публикаций в отечественных и зарубежных журналах.



Караваяев Александр Дмитриевич – родился в 1956 году. Окончил технологический факультет Уфимского нефтяного института (1978), кандидат химических наук, старший научный сотрудник Института органической химии УНЦ РАН. Область научных интересов – физико–химические колебательные системы (эксперимент и математическое моделирование). Имеет более 60 публикаций в отечественных и иностранных журналах. E–mail: karavaev@ngt.ru



Рыжков Андрей Борисович – родился в 1974 году. Окончил химический факультет Башкирского государственного университета (1990), поступил в аспирантуру Института органической химии УНЦ РАН. Область научных интересов – моделирование и численное исследование сложных нелинейных химических систем. Имеет 6 публикаций в отечественных и зарубежных журналах. E–mail: RedAndr@chem.anrb.ru



АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ВРЕМЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

К. Е. Бобров, А. М. Искольдский

Обсуждаются численные методы анализа данных (конечных упорядоченных последовательностей натуральных двоичных кодов), отвечающих фрагментам траекторий, полученных численным решением разностной модели конечного числа нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти уравнения представляют детерминированные хаотические динамические системы. Процедура классификации реализует разбиение множества последовательностей, прошедших процедуру отбора (по установленным критериям), на два класса. Формализуется понятие устойчивости результатов классификации. Исследуется устойчивость этих результатов по отношению к моделируемым численно малым (в определенном смысле) вариациям параметров схемы измерения, а также – к параметрам процедуры классификации. Показано, что существуют примеры последовательностей данных и процедур их обработки, для которых получаемые результаты устойчивы. На основании результатов, получаемых от процедуры классификации, можно рассматривать вопросы, касающиеся типа аттрактора соответствующей гладкой динамической системы.

Введение

Процедуры, описанные в данной работе, имеют отношение к анализу маломодовых моделей быстропротекающих процессов в электрофизике, представленных, в частности, в [1, 2]. В работе исследованы конечные упорядоченные последовательности кодов, полученные в результате численного решения нелинейных дифференциальных уравнений, представляющих динамическую систему, которая находится в установившемся режиме. Для получения реализаций использованы разностные схемы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Предлагаемая процедура классификации осуществляет разбиение на два класса множества последовательностей, прошедших процедуру отбора по установленным критериям.

Важно формализовать и определить устойчивость результатов классификации по отношению к малым изменениям режимов регистрации. Численно моделируются следующие изменения параметров режима регистрации: шага квантования по времени, шага квантования по амплитуде, длины реализации. Проверка устойчивости результатов, получаемых от процедуры классификации, позволяет сделать вывод о том, является ли этот результат характеристикой процесса. Предполагается, что получаемые результаты классификации также будут устойчивы при малых изменениях параметров процедуры обработки.

Кроме того, предполагается сравнить результаты классификации типов реализации, которые получаются при применении к зарегистрированным данным

процедуры классификации, с известными результатами классификации для соответствующих режимов рассматриваемых динамических систем.

Данные, получаемые в результате численного или реального экспериментов, представляют собой упорядоченные последовательности кодов (отсчетов), которые интерпретируются как целые (конструктивные) числа. В случае реального эксперимента аналого-цифровой преобразователь (АЦП) выдает на каждом такте код, интерпретируемый как одно из целых чисел в диапазоне, определяемом разрядностью АЦП. При численном эксперименте формат данных, получаемых на каждом такте работы расчетного алгоритма, может быть и форматом с плавающей точкой. Множество таких кодов конечно. Затем с помощью программы производится нормировка и округление до ближайшего целого числа получаемых от программы решений системы дифференциальных уравнений.

1. Реализации и процедуры вычислений

В результате преобразования, осуществляемого АЦП, получают упорядоченные двоичные коды разрядностью k , где k – разрядность АЦП. В численном эксперименте используется разностная схема решения дифференциальных уравнений Рунге–Кутты с шагом интегрирования 0.01. Далее применяется стандартная процедура округления числа до ближайшего целого в сочетании с процедурой нормировки на диапазон кодов, определяемых заданной разрядностью. Для моделирования перехода от k -разрядного АЦП к АЦП с меньшей разрядностью используется процедуру сдвига вправо исходных кодов. Для получения реализаций с более редким шагом применяется процедура про-реживания.

Изучение свойств аттрактора динамической системы по результатам регистрации конечного фрагмента траектории одной переменной производится по процедуре Паккарда и Такенса [3], основанной на теореме Такенса [4, 5]. Когда имеется только одна последовательность кодов конечной длины N , строится массив размерностью $(N - n \times m) \times n$, в котором каждая последующая реализация получается сдвигом относительно исходной на некоторое фиксированное и одинаковое для всех сдвигов количество кодов m . Обычно n называется размерностью соответствующего псевдофазового портрета.

Будем называть строку длиной n массива, построенного по процедуре Паккарда и Такенса, вектором размерностью n .

Определим, что вектор имеет соседей, если среди остальных (то есть не совпадающих с ним покомпонентно) векторов существует хотя бы один вектор, у которого одна из компонент (чисел) отличается (по модулю) от соответствующей компоненты исходного вектора не более чем на единицу, а все остальные компоненты совпадают.

При заданной размерности псевдофазового портрета n подсчитывается число векторов, не имеющих ни одного соседа. Если векторы, не имеющие соседей, отсутствуют, на выходе процедуры имеем код «0», если они есть – код «1».

В данном случае все вычисления производятся при $n=3$, хотя этот выбор мог быть и другим. Исходим из предположения, что структура псевдофазового портрета («дырчатость») должна сохраняться при проективных преобразованиях.

Предполагаем, что аттрактор гладкой динамической системы является гладким многообразием, если результат процедуры классификации равен «0», и странным аттрактором, если результат – «1».

Под устойчивостью результата классификации понимаем его неизменность при независимых малых (в определенном смысле) вариациях N , τ , k , m . Для исследования устойчивости сравниваются результаты классификации при вариациях N , τ , m в два раза в большую и меньшую сторону, при вариациях k на единицу в большую и меньшую сторону.

При эксперименте необходимо выбрать оптимальные (в определенном смысле) параметры регистрации – длину реализации N , шаг квантования сигнала по времени τ , разрядность АЦП k , а также параметр процедуры – величины сдвига m . Мы требуем устойчивости (в определенном смысле) получаемого результата. Если результат классификации типа аттрактора гладкой динамической системы априорно известен (для данной модели в определенном режиме), то, помимо устойчивости, представляет интерес сравнение полученного нами результата классификации с априорно известным.

В данной работе мы имеем дело с малоразрядными данными (от 4 до 6), которые типичны для АЦП, применяемых для регистрации быстропротекающих процессов. При этом необходимо выполнение следующих требований.

- Мгновенное значение амплитуды сигнала не должно выходить за допустимые границы.

- Число отсчетов в реализации N необходимо задавать как 2^{nk} .

- Шаг по времени τ выбирается равным половине промежутка от ближайшего максимума до ближайшего минимума и в то же время так, чтобы при заданной длине N в реализации было не менее двух экстремумов.

- После получения реализации в описанной выше процедуре будем выбирать m как число отсчетов между экстремумами, ближайшими к началу.

Установленные требования направлены на то, чтобы реконструируемый псевдофазовый портрет отвечал «случаю общего положения»: был достаточно «представительным» (требования к длине реализации), «невыврожденным», например, в диагональ (требования к величине сдвига), и в то же время обладал свойством «дырчатости» только в том случае, когда аттрактор соответствующей гладкой динамической системы является странным (требования к шагу по времени).

Если эти требования не удовлетворяются, данная реализация считается непригодной для работы процедуры классификации, так как при работе с такой реализацией не следует ожидать устойчивости результатов или того, что данные результаты будут (в определенном смысле) совпадать с априорно известными результатами классификации типа аттрактора соответствующей гладкой динамической системы.

Описанная процедура классификации применена к анализу временных последовательностей кодов, полученных в результате численного решения по разностной схеме:

системы уравнений Лоренца [6]

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ;\end{aligned}\tag{1}$$

системы уравнений Франческини [7]

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= -2X_1 + 4 \cdot 5^{1/2} X_2 X_3 + 4 \cdot 5^{1/2} X_4 X_5 \\ \dot{X}_2 &= -9X_2 + 3 \cdot 5^{1/2} X_1 X_3 + 3 \cdot 5^{1/2} X_6 X_7 \\ \dot{X}_3 &= -5X_3 + 9 X_1 X_7 - 7 \cdot 5^{1/2} X_1 X_2 + R, \\ \dot{X}_4 &= -5X_4 - 5^{1/2} X_1 X_5, \\ \dot{X}_5 &= -X_5 - 3 \cdot 5^{1/2} X_1 X_4,\end{aligned}\tag{2}$$

$$\dot{X}_6 = -8X_6 - 4 \cdot 5^{1/2} X_2 X_7,$$

$$\dot{X}_7 = -5 X_7 + 5^{1/2} X_2 X_6 - 9 X_1 X_3,$$

где $R=f_{k_3}/a$ – аналог числа Рейнольдса. Схема реализации процедуры и результаты анализа приведены ниже.

2. Результаты численных экспериментов

2.1. Численная модель системы уравнений Лоренца (1) в режиме странного аттрактора: $\sigma=10, b=8/3, r=26$

а. С помощью разностной схемы получаем реализацию X -компоненты системы. Из этой реализации, как было описано выше, получаем реализации с другими N, τ, k .

б. В результате работы описанной выше процедуры получаем:

- для пятиразрядной реализации, выбранной с учетом требований, перечисленных выше, при изменении разрядности от 5 к 6 и от 5 к 4 результат не меняется и равен «1»;

- результат также не меняется при длинах реализаций $N/2, N \times 2$, при вариациях τ в два раза в меньшую и большую сторону и при таких же вариациях m .

в. Априорно известный результат классификации типа аттрактора, полученный в [6]: аттрактор – странный.

2.2. Численная модель системы уравнений Лоренца (1) в режиме цикла: $\sigma=10, b=8/3, r=100$

а. См. п.2.1.а.

б. См. п.2.1.б. В данном случае не меняющийся результат процедуры равен «0».

в. См. п.2.1.в. В данном случае, как и в [6], аттрактор – гладкое многообразие.

2.3. Численная модель системы уравнений Франческини (2) в режиме странного аттрактора (хаос): $R=500$

а. См. п.2.1.а. В данном случае получаем реализацию X_3 -компоненты.

б. См. п.2.1.б.

в. См. п.2.1.в. В данном случае, как и в [7], аттрактор – странный.

2.4. Численная модель системы уравнений Франческини (2) в режиме цикла: $R=200$

а. См. п.2.1.а. В данном случае получаем реализацию X_3 -компоненты.

б. См. п.2.1.б. В данном случае не меняющийся результат процедуры равен «0».

в. См. п.2.1.в. В данном случае, как и в [7], аттрактор – гладкое многообразие.

Выводы

Процедура классификации реализует разбиение множества последовательностей, прошедших процедуру отбора (по установленным критериям), на два класса.

В рассматриваемых реализациях N, τ, k и параметр процедуры классификации m выбраны таким образом, что результаты классификации типа реализаций устойчивы. Обнаружено, что полученные результаты классификации

совпадают (в определенном смысле) с априорно известными результатами классификации типов аттракторов гладких динамических систем.

Дальнейшие модификации процедуры классификации могут быть следующими. Можно установить порог для числа векторов, не имеющих соседей (по введенному выше определению). Можно производить вычисления при других размерностях псевдофазового портрета n .

Во всех предлагаемых процедурах операции с плавающей точкой отсутствуют. Это позволяет легко реализовать соответствующие вычисления с использованием алгоритмов распараллеливания, что может быть принципиально при обработке больших объемов данных.

Таким образом, мы имеем возможность делать обоснованные предположения о типе аттрактора гладкой динамической системы, не вычисляя его фрактальной размерности.

Библиографический список

1. Волков Н. Б., Искольдский А.М. Об аналогии между начальными стадиями зарождения турбулентности и электрического взрыва проводников// Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51, вып. 11. С. 560.
2. Волков Н.Б., Зубарев Н. М., Зубарева О.В., Шкатов В.Т. Динамическое прерывание тока и вихревые структуры в токонесящей плазмоподобной среде// Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, вып. 13. С. 43.
3. Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. Geometry from a Time Series // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 712.
4. Takens F. Lect. Notes in Math., Vol. 898. N. Y.: Springer, 1981. P. 366.
5. Sauer T., Yorke J., Casdagli M. Embedology// J. Stat. Phys. 1991. Vol. 65. P. 579.
6. Лоренц Э. Странные аттракторы. М.: Мир. 1981. С. 88.
7. Franceschini V. Bifurcations of tori and phase locking in a dissipative system of differential equations // Physica D. 1983. Vol. 6, № 3. P. 285.

*Институт электрофизики
УрО РАН*

*Поступила в редакцию 21.11.2000
после доработки 5.03.2001*

ALGORITHMIC CLASSIFICATION OF TIME SERIES

K. E. Bobrov, A. M. Iskoldsky

The numerical methods of a data analysis (finite ordered sequences of natural binary codes) are discussed. There are corresponding to pieces of trajectories, obtained by a numerical solution of difference model of finite number of nonlinear ordinary differential equations. These equations represent the determined chaotic dynamic systems.

The procedure of a classification realizes splitting set of sequences, which were selected by the procedure of a selection (by defined criterions), on two classes.

The concept of stability of results of a classification is formalized. The stability of obtained results of classification in relation to numerically simulated small (in a defined sense) variations of parameters of registration scheme, and also – to parameters of the procedure of a classification is investigated. It is shown, that there are examples of sequences of the data and procedures of their processing, for which one the obtained results are steady.

Based on results, obtained from the procedure of a classification, it is possible to consider problems, concerning to a type of an attractor of the corresponding smooth dynamic system.



Бобров Константин Евгеньевич – родился в 1966 году. Окончил физико-технический факультет Уральского политехнического института по специальности «электроника и автоматика физических установок» (1992). С 1992 года работает в лаборатории моделирования электрофизических процессов Института электрофизики Уральского Отделения РАН в должности программиста. E-mail: cn@ami.uran.ru



Искольдский Александр Михайлович – родился в 1939 году. Окончил Новосибирский университет по специальности «физика плазмы» (1963). С 1963 по 1968 год учился в аспирантуре и работал в Новосибирском институте ядерной физики, с 1968 по 1980 в Институте автоматизации и элетрометрии СОАН. Был зам. директора этого института, зам. главного редактора журнала «Автометрия». В 1985 году защитил докторскую диссертацию по специальности «электрофизика». Долгое время был председателем Совета по автоматизации научных исследований. В начале Томского филиала СО АН, затем Уральского филиала АН. В настоящее время – заведующий лабораторией моделирования электрофизических процессов Института электрофизики УрО РАН. Имеет открытие и несколько изобретений. E-mail: ami@ami.uran.ru



*В Издательстве ГосУНЦ «Колледж»
вышли в свет учебные пособия*

Хованова Н.А., Хованов И.А. Методы анализа временных рядов: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2001. 120 с.: ил. ISBN 5-900641-98-8.

В учебном пособии излагаются методы анализа стационарных и нестационарных временных рядов, базирующиеся на теории случайных процессов и статистической радиофизике. Наряду с классическими подходами – вероятностным и спектральным – представлены специальные методы, основанные на применении преобразования Гильберта и вейвлет-анализа. Рассматриваются методы, используемые на этапах, предшествующих анализу временных рядов – основные методы сбора, обработки и предварительного анализа данных.

Пособие ориентировано на студентов и аспирантов естественно-научных специальностей университетов.
Ил. 162. Библиогр.: 591 назв.

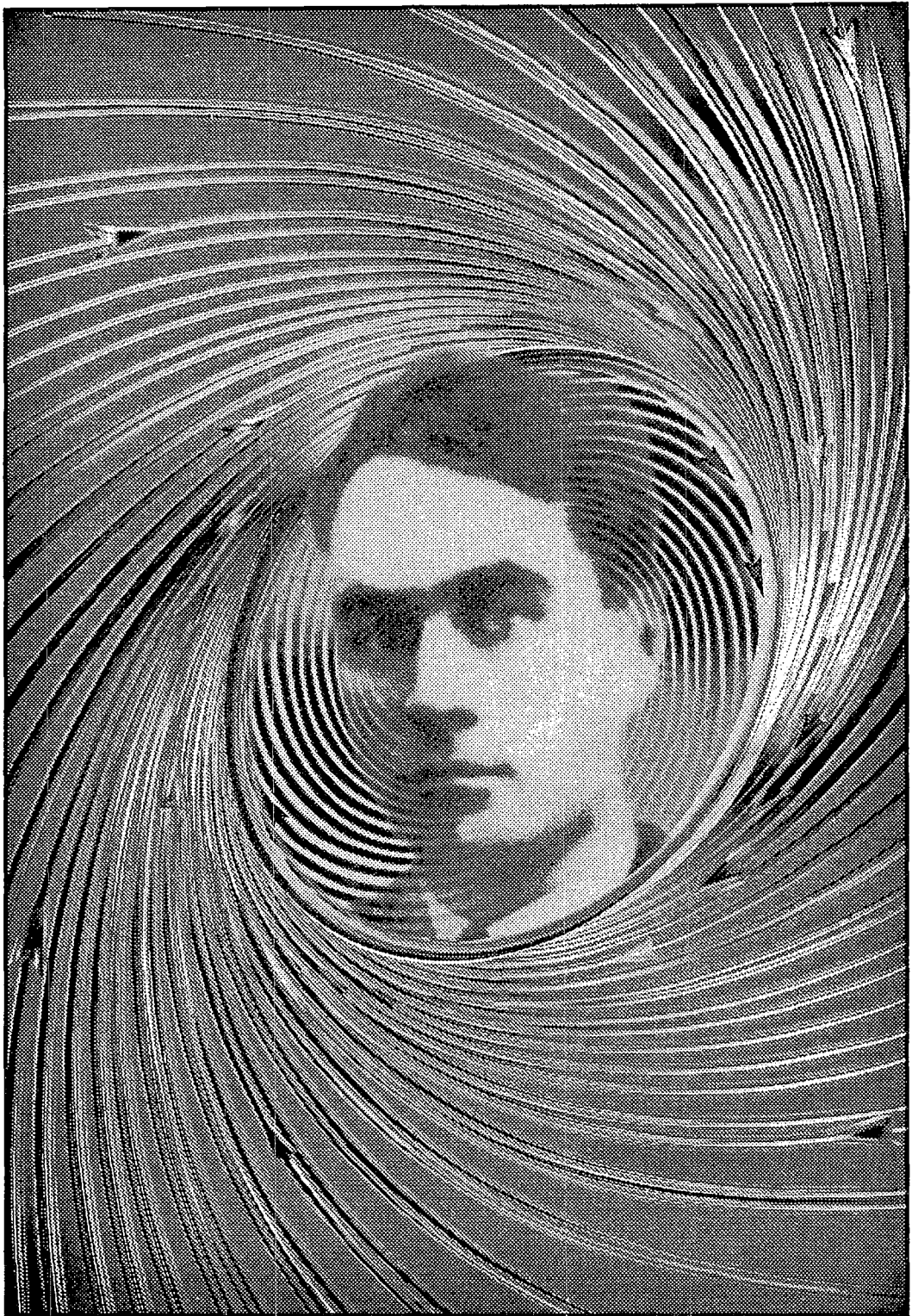
Более развернутая информация об издании будет дана в следующем номере

Безручко Б.П., Лёвин Ю.И., Смирнов Д.А. Моделирование неавтономных систем по временным рядам: Учебное пособие. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2001. 44 с.

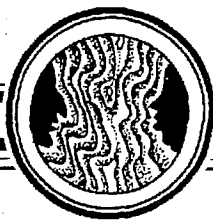
Рассматриваются подходы к построению модельных дифференциальных уравнений по временным рядам – последовательностям значений наблюдаемой величины, измеренных в дискретные моменты времени. Наиболее сложной, творческой, неподдающейся алгоритмизации частью такого моделирования является выбор структуры уравнений. Если выбор сделан успешно с учетом специфики объекта, можно получить хорошую модель даже там, где универсальные подходы оказываются бесполезными. Эта важнейшая черта моделирования по временному ряду рассматривается в данной работе на примере объектов, находящихся под внешним гармоническим воздействием. Предлагается убедиться в эффективности специальных «технологий» моделирования: пользоваться готовыми программами, провести реконструкцию неавтономных дифференциальных уравнений, а также по экспериментальным временным рядам построить модели реальных нелинейных электрических цепей.

Предназначено для практических занятий по курсу «Математическое моделирование» для студентов факультета нелинейных процессов и физического факультета Саратовского госуниверситета.

анонсанонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс
онс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс
с анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс



В этом году Александру Александровичу Андронову исполнилось бы 100 лет. В замечательной книге Анны Ливановой «Физики о физиках» есть очерк «Из рассказов об Андронове». К юбилею редакция журнала помещает отрывки из очерка, характеризующие разносторонность этого удивительного человека.



Изв.вузов «ПНД», т.9, № 1, 2001

ИЗ РАССКАЗОВ ОБ АНДРОНОВЕ*

Выступая на праздновании шестидесятилетия академика Андропова – это было в 1961 году, спустя восемь лет после его смерти, – Виталий Лазаревич Гинзбург высказал общее отношение к нему.

– Память об Александре Александровиче занимает какое-то особое место в душе многих людей, и в моей в том числе. Думаю, что это объясняется тем, что в одном Александре Александровиче переплелись и сочетались различные качества, которые, даже взятые в отдельности, встречаются не так уж часто. Хороший, очень квалифицированный, «настоящий» физик вызывает уважение тех, кто любит физику, учится или работает в этой области. Хорошего педагога ценят студенты. Благородного, принципиального и обаятельного человека любят те, кто понимает значение этих высоких качеств. Но вот когда все это объединяется в одном человеке, тогда-то и получается нечто неповторимое. Здесь нет простого сложения, напротив, проявляется какая-то когерентность, и в результате возникает исключительная человеческая личность. Я хочу ограничиться упоминанием только трех людей, связанных между собой. Это Павел Сигизмундович Эренфест, Леонид Исаакович Мандельштам и Александр Александрович Андронов. Эренфест относится к той категории людей, о которой идет речь, и вместе с тем он оказал явное и, видимо, глубокое влияние на Андропова. Мало о ком Александр Александрович говорил с таким энтузиазмом и теплотой, а ведь это было через добрых двадцать лет после встречи с Эренфестом. О Леониде Исааковиче Мандельштаме, учеником которого был Андронов, присутствующие, вероятно, знают немало, если говорить о нем как о выдающемся физике и педагоге. Но он был в не меньшей мере замечательным человеком. Отношение к нему многих, в том числе Андропова, было просто трогательным. Мандельштам пользовался огромным моральным авторитетом. Существование таких людей порождает стандарты, оказывает глубокое влияние на окружающих. Человеком именно такого калибра и был Александр Александрович Андронов. Говорить о нем, используя обычные эпитеты и термины, невозможно, получилось бы совсем не то, что нужно. Найти какие-то новые слова я не умею. Поэтому я и попытался пояснить свою мысль, упомянув об Эренфесте и Мандельштаме. Тот, кто знал Андропова, видел его отношение к науке, к преподаванию и к людям, должен был сам измениться, должен был многое понять. <...>

* © Анна Ливанова. Физики о физиках. М.: Молодая гвардия, 1968. 256 с., илл., серия «Эврика».

Когда Александра Александровича Андропова попросили рассказать, какой смысл он вкладывает в понятие «научная школа», он ответил:

– Научной школой я называю группу научных работников, возглавляемых одним крупным ученым или несколькими ведущими фигурами, объединенных областью научной работы и ее *методом*, дающих в науке *нечто новое, оригинальное*, характерное для всех работников данной школы. Для научной школы характерна апробация трудов внутри школы, что обеспечивает высокий научный уровень работ. Живой контакт с крупным ученым, участие в коллоквиумах и семинарах, когда открывается возможность систематически воспитывать научного работника, является фактором первостепенного значения. С другой стороны, наличие учеников, молодых ученых не позволяет руководителю отставать от жизни. Резерфорд говорил, что ученики заставляют его оставаться молодым...

Так определил Андронов научную школу.

Но, вероятно, научная школа и нечто большее. Это не только общие интересы, направление исследований, стиль и метод работы, единый взгляд на вещи и идейная близость. Как ни странно может это прозвучать, научной школе свойственны, мне хочется сказать, и человеческие качества. И Андронов был одним из лучших представителей такой именно школы Мандельштама, не только научной, но и человеческой.

В Андронове, как подчеркивал каждый, кто его знал, сочетались большая внутренняя сила, твердость и высшая честность с огромным обаянием. Вероятно, все вместе и послужило причиной исключительного влияния Андропова на окружающих его людей.

– Александр Александрович был для нас моральным эталоном и пользовался ни с чем не сравнимым авторитетом, – рассказывает Николай Николаевич Баутин, один из ближайших учеников Андропова. – Мы все часто бессознательно и в меру своих возможностей пытались подражать ему. В затруднительных случаях, когда мы не знали, как поступить, и нельзя было с ним посоветоваться, мы думали, как в этом случае поступит Александр Александрович. Это относится не только к вещам, связанным с наукой, но и к любым человеческим поступкам. Андронов был человек, который никогда не сфальшивит; и не думает о своей личной выгоде. Такое встречается не часто. К сожалению, бывает обратное. Кажется, что поступками руководят интересы дела или польза ближних. Но где-то, так сказать, в далеком плане, учитываются и собственные интересы – иногда сознательно, иногда подсознательно. У Александра Александровича такого никогда не было. И это знали все. Никому и в голову не могло прийти, что в чем-то может сыграть роль его собственная заинтересованность, собственная – в узком смысле. Это качество его даже нельзя свести к эпизодам. Оно некая аксиома или абстракция, которая возникает после общения с Андроновым в течение длинного ряда лет...

Последние слова Баутина в какой-то мере объясняют, почему об Андронове так трудно писать. Конечно, факты его жизни, слова его и поступки укладываются в его образ, характер, не противоречат ему. Но насколько сам человек сложнее и богаче суммы всех этих фактов, слов и поступков. И как показать живым такого человека и те черты его, что стали для окружающих «аксиомой или абстракцией, которая возникает после общения в течение длинного ряда лет»? Как мне, не знавшей Андропова, сделать это доступным для тех, кому тоже не довелось с ним общаться? Изложить факты, оценки – совершенно недостаточно. И все-таки придется повторить, здесь будет говориться только о некоторых фактах жизни, об эпизодах, о некоторых высказываниях и поступках, о содержании некоторых работ. Не потому, конечно, что такой путь лучший, а потому, что он, вероятно, единственно возможный. И я выбрала его с надеждой, что по этим разрозненным чертам и эпизодам читатель все-таки сумеет представить себе Андропова хоть в какой-то степени близким тому, каким он был в действительности. <...>

– Влияние Александра Александровича на нас было колоссально, – подтверждает и второй из учеников Андропова, Юрий Исаакович Неймарк. –

Причем оно было не только интеллектуальное, но, можно сказать, и физиологическое. Все мы даже переняли какие-то детали его почерка, какие-то буквы стали писать по-андроновски. Я заметил это на себе, а потом увидел у других. И в манере держаться, разговаривать мы невольно подражали ему. Андронов был сильной личностью, но, конечно, не в затасканном ницшеанском смысле слова... <...>

У Андропова была абсолютная нетерпимость, даже ненависть ко всякому проявлению провинциализма в науке. Он говорил, что провинциализм – это самое ужасное, что может постичь науку, это означает ее прозябание, конец ее как настоящего, передового знания. Отсюда постоянное стремление Андропова знать все, что делается в данной области и в смежных областях, стремление его обладать исчерпывающей информацией. Он понимал, насколько необходимы, как ценны всякие связи между учеными, обмен информацией, обсуждение возникающих проблем. Понимал, как губительно для коллектива ученых вариться только в собственном соку.

Быть всегда на переднем крае той области науки, которой занимаешься, вести исследования на самом высоком уровне – только так обязан работать ученый.

Михаил Александрович Леонтович, друг Андропова еще со времен их аспирантуры и соавтор первой их общей печатной работы, подчеркивал исключительную научную честность Андропова <...>.

Научную честность многие толкуют крайне несложно: чисто и добросовестно делать работу, публиковать то, что действительно сделано лично тобой, трезво оценивать результаты. Такое было для Андропова не больше чем азбука. Наука, говорил он, прежде всего должна быть объективна, и притом безжалостно объективна. Она не смеет поддаваться никаким вненаучным воздействиям, в том числе влиянию конъюнктуры... <...>

В разных коллективах, – говорит Баутин, – могут обсуждаться разные вещи, и обсуждаться по-разному. В присутствии генерала для подчиненных его мнение обязательно, генералу не принято перечить. То же, мне кажется, бывает и у медиков в присутствии высшего авторитета. В Андропове не было ничего «генеральского». На его научных семинарах обсуждение носило очень свободный характер. Александр Александрович мгновенно понимал чужую точку зрения. И менял свою, если она была неправильна. Он тут же признавался, если допустил какой-нибудь промах, хотя промахи случались у него крайне редко. Но, с другой стороны, почти всегда за тремя-четырьмя фразами, которые он произносил, мы видели второе, глубокое понимание предмета, ситуации, природы вещей и чувствовали, насколько наше понимание примитивней и неоформленней.

Такая же атмосфера была у Андропова и дома. Всегда народ. Коллективная работа мысли, коллективное думание. В такой обстановке, казалось, сами собой рождались новые идеи.

Может быть, наивысшая из отпущенных человеку радостей – это возможность делиться своей радостью с близкими людьми. Самая большая радость ученого – творчество. И для того, кто испытывает потребность в творческом общении, кому оно действительно необходимо, такое сотворчество и есть, вероятно, наивысшая радость. Если этим отношениям не мешают побочные обстоятельства, вроде тщеславия, стремления к личной славе, ложного понимания авторитета, тогда они становятся одинаково необходимыми и учителям и ученикам.

Но отношения Андропова с учениками были не только радостью. Они были еще и напряженным трудом. Андронов постоянно держал в поле зрения научную деятельность учеников и сотрудников, направлял их, активно им помогал. Подобно своему учителю, Андронов при беседе с каждым учеником и сотрудником тоже имел свой особый разговор. Такие «свои особые разговоры» вовсе не возникали сами собой, они требовали немалой предварительной работы.

Андрей Викторович Гапонов показал мне сохранившуюся еще со времен его аспирантуры объемистую папку, заполненную листами бумаги с характерным

андроновским почерком. Одни большие, исписанные формулами и чертежами, другие маленькие, всего в несколько слов, листки эти, копившиеся неделя за неделей, месяц за месяцем, год за годом, отражают деловую сторону отношений Андропова со своими аспирантами; они – свидетели стиля его руководства. Новые мысли и идеи, предложения, замечания, критика, одобрение, варианты схем и решений – здесь присутствовало все.

Такие «дела» Андронов заводил на своих аспирантов. И на сотрудников. И на студентов – тех, кого он в то время «растил». Если собрать воедино все эти папки, то станет осязаемым труд, вложенный Андроновым в воспитание будущих ученых. Но в папках лишь доля этого труда. Сколько его было затрачено на семинары, на подготовку к чтению лекций, просто на беседы, не отраженные ни в каких записях, ни в каких бумагах. Но зато прочно вошедшие в сознание и в творчество его учеников. Не случайно близкий друг Андропова Габриель Семенович Горелик подчеркивал, что работы Андропова и его школы оставляют впечатление редкого единства. <...>

– Моя специальность – теория нелинейных колебаний – довольно узкая, охватывающая сравнительно небольшой круг ученых–специалистов, – сказал однажды Андронов.

Действительно, его научная жизнь была целиком отдана теории нелинейных колебаний. А если уточнить – была посвящена поискам или созданию математических методов, аппарата, с помощью которого удавалось описывать нелинейные процессы, решать нелинейные задачи. <...>

Основные идеи, определившие научный путь Андропова, возникли у него и оформились еще в аспирантские годы. Они составили содержание его кандидатской диссертации. А свет увидели в образе двух маленьких заметок.

Первая называется «Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний», вторая – «Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний». Вторая статья была напечатана в 1929 году в журнале Французской академии наук «Compte rendu», на родине Пуанкаре. <...>

Любой процесс в колебательной системе можно представить на <фазовой> плоскости движением точки по некоторой кривой, которая называется интегральной кривой, или фазовой траекторией. Такое геометрическое изображение поведения колебательной системы Андронов назвал ее фазовым портретом.

Стремясь найти общий характер поведения интегральных кривых, Пуанкаре открыл свои «предельные циклы». Предельным циклом он назвал замкнутую интегральную кривую нелинейного дифференциального уравнения. Предельным этот цикл называют потому, что соседние с ним кривые как снаружи, так и изнутри приближаются к нему асимптотически, то есть подходят к нему все ближе и ближе, в пределе сливаясь с ним совсем. С этой работой Пуанкаре и познакомился Андронов спустя почти пятьдесят лет после ее появления. И вдруг явственно увидел, что предельные циклы и есть решение волновавшей его задачи об автоколебаниях. <...>

Андронов легко изобретал новые слова... Как первопроходчик, он давал имена открытым им землям, крестил их. Каждый, кто после Андропова совершает путешествие по этим землям, не может не оценить точности его словесных находок. Так появился термин «грубость». <...>

«Грубость», которую Андронов сначала усмотрел в реальных системах, а затем перевел на язык математики, оказалась очень доброкачественным и тонким инструментом. С помощью этого инструмента удалось описать поведение многих физических систем. <...>

... работы Андропова и его школы, математический аппарат, найденный и разработанный или созданный им заново для решения нелинейных задач, и самый подход его, такой революционный и новый при своем зарождении, теперь уже

стали классикой. Они вошли в подлинно золотой фонд научной мысли – но не как историческая ценность; они лежат в фундаменте сегодняшних исследований, они – часть обязательных курсов, им учат молддежь. Для студентов – колебателей, радиофизиков и механиков – «нелинейное мышление» теперь стало «своим», естественным. В этом огромная заслуга Андропова. <...>

... Классикой давно стала и книга «Теория колебаний», написанная еще в середине тридцатых годов совместно А. А. Андроновым, А. А. Виттом и С. Э. Хайкиным.

Так, благодаря исследованиям Андропова и многочисленным работам, для которых эти исследования послужили основой и отправным пунктом, развилась советская «нелинейная» школа физиков, механиков и математиков, занявшая в области теории колебаний ведущее место в мировой науке. <...>

... Трудно сказать, к какому типу теоретика ближе подходил сам Андронов. Думается, он и не сопоставлял себя ни с Бором, ни с Эйнштейном. Он шел своим путем и оставался ему верен до конца: «Моя специальность – теория нелинейных колебаний».

Это была его работа. А рядом с ней существовало немалое число наук, которые не просто интересовали, а глубоко увлекали Андропова.

– На его рабочем столе, – вспоминает Гапонов, – книги по медицине, биологии, математике, физике, художественные и исторические всегда присутствовали в равной пропорции. Интерес к медицине, биологии, физиологии и другим естественным наукам заставлял его систематически следить за научной литературой во всех областях. Андронов никогда не страдал узостью интересов, свойственной многим ученым даже с мировым именем. Конечно, в первую очередь он был физиком и математиком. Но трудно было встретить человека, столь глубоко знавшего русскую и зарубежную художественную литературу.

– Его образованность и широта интересов поражали всех, – рассказывает и Баутин. – Например, он как-то, еще до войны, выступил на защите биологической диссертации «О регенерации хрусталика в глазу рыб». Он участвовал в дискуссии наравне с биологами, совершенно свободно чувствуя себя в этой области. Нас тогда это очень удивило. Так же отлично знал он и историю. <...>

При каждом случайно возникавшем разговоре на любую тему обнаруживалось, что и это Андронов тоже знает. Наконец, мы вовсе перестали удивляться энциклопедичности его знаний, какой бы области они ни касались. Часто в наших спорах мы стали пользоваться «недозволенным приемом», при недостатке собственных аргументов говорили: «Так сказал Александр Александрович». Это действовало мгновенно и безотказно, о чем бы спор ни заходил – о физике или математике, о биологии, медицине или истории.

Что касается художественной литературы, то у Андропова были очень резко выраженные вкусы и пристрастия по отношению к писателям и даже к отдельным произведениям. Очень любил он и отлично знал всего Пушкина, Герцена, Лескова. Он мог читать наизусть, страница за страницей, не только стихи, но и прозаические произведения, даже прозу Герцена, такую непростую. Любил «Думу про Опанаса» Багрицкого. Не сразу, но крепко полюбил Пастернака, особенно некоторые его стихи. Когда бывал у Рытовых, за столом всегда возникали литературные споры. Однажды кто-то из присутствующих сказал, что в стихах Пастернака много непонятного. Андронов стал с жаром доказывать, что у Пастернака осмыслено каждое слово. Если знать ситуацию, при которой написано стихотворение, то можно и в самых сложных стихах объяснить все, до последнего слова.

Неизвестно, действительно ли Андронов так уж полностью был в этом убежден или говорил в запальчивости, защищая поэта, потому что, когда его попросили объяснить что-то у Пастернака, он с чуть заметной иронией, подсмеиваясь то ли над собой, то ли над собеседником, ответил:

– Я теперь забыл некоторые из обстоятельств, а потому вряд ли смогу все объяснить.

А может, он и не захотел объяснять. Потому что разве можно и, главное, нужно ли так вот разъединять на отдельные слова, анатомировать поэзию? Тем более поэзию Пастернака...

Марина Цветаева в удивительно интересной статье о Маяковском и Пастернаке писала:

«Иносказание – Пастернак...

Шифр – Пастернак. Маяковский – световая реклама, или, что лучше, прожектор, или, что еще лучше – маяк».

В подтверждение, почему «иносказание – Пастернак», Цветаева расшифровывает строчки стихотворения, написанного им на смерть Маяковского.

«Беру любой пример. Смерть поэта:

Лишь был на лицах влажный сдвиг,
Как в складках прорванного бредня.

Слезный, влажный сдвиг, сдвинувший все лицо. Бредень прорван – проступила вода – слезы».

Наверное, подобным же образом мог бы «рассказывать Пастернака» и Андронов, если бы захотел... <...>

Андронов ни к чему не мог относиться спокойно и не замечать или делать вид, что не замечает больших и мелких безобразий. Вот один случай из его депутатской практики.

Андронову стало известно, что весьма влиятельная в городе особа, директор одного завода, готовится самочинно занять квартиру своего дальнего родственника, одинокого и беспомощного старика. Выяснив, на какой день назначен въезд, Александр Александрович купил на этот день билет на московский поезд и с билетом в кармане явился к месту происшествия.

У дома стоял уже полупустой грузовик с мебелью, рабочие тащили по лестнице шкафы и серванты.

Андронов поднялся наверх, нашел главное действующее лицо и голосом, не допускающим ослушания, попросил, чтобы их оставили вдвоем.

Оставшись наедине с директором, Андронов назвал себя – хотя необходимости в этом не было, кто его не знал? – вынул билет на поезд и сказал следующие слова (может быть, здесь они несколько смягчены):

– То, что вы мерзавец и подонок, известно и вам и мне. Но если вы немедленно уберетесь отсюда и забудете о старике и его квартире, я вам тоже обещаю не вспоминать об этой грязной истории. В противном случае я сегодня же уезжаю в Москву, видите, вот билет, и, даю вам слово, не вернусь в Горький до тех пор, пока вы не понесете должного наказания.

Неизвестно, что ответил Андронову директор – Александр Александрович об этом не распространялся, – но мебель тут же стали сносить вниз.

О депутатских делах Андропова можно рассказывать долго. Деятельность эта протекала на глазах у горьковчан, результаты ее видела масса людей, очень многие ощутили ее на своей собственной судьбе. И все знали, что такую огромную общественную работу ведет выдающийся ученый...

В городском музее теперь лежат рядом удостоверения академика и депутата Верховного Совета.

И все-таки многого он сделать не мог...

Андронов остро и болезненно переживал происходившие в те времена нарушения законности. Он старался употребить свое влияние, воспользоваться своим именем и положением, чтобы хоть как-то повлиять на ход событий, облегчить судьбы людей.

Он мог прийти на заседание и сказать несколько теплых и уважительных слов о том, кого на этом заседании «обсуждали». Он приходил и говорил эти слова. Он утверждал, что именно он, Андронов, является инициатором данной «ПОДОЗРИТЕЛЬНОЙ» работы или соруководителем «порочного» семинара.

Слово его, едва ли не самого уважаемого в городе человека, академика, депутата, имело вес.

Последние годы были особенно трудными. Неизлечимая болезнь – тяжелая гипертония – разрушала организм, и владевшее им ощущение беспомощности накладывало отпечаток на всю его жизнь.

Сил становилось все меньше, работы – все больше.

Читатели Ольги Берггольц теперь часто произносят ее слова о «главной книге». Главная книга – это не только самая лучшая книга писателя, самая необходимая – и ему и читателю. Это большее. Это итог жизни, исполнение своего предназначения. Это книга, которая почти всегда впереди, книга, которая часто так и не бывает написана.

«Главная книга» Андропова могла оказаться второй частью «Теории колебаний». Весь огромный размах нелинейной теории колебаний, распространение ее на новые области физики и техники, успехи, завоеванные ею с тридцатых годов, когда была написана первая часть, – это стало бы содержанием новой книги. Она подвела бы итог проделанной работы – не только работ Андропова и его учеников, но и других ученых, других коллективов физиков, механиков и математиков. А может, главная книга стала бы «Общей динамикой машин»; Андронов много и глубоко размышлял над содержанием и структурой этой книги и уже начал ее писать. Вероятно, довести ее до конца мог только он один, только он представлял ее всю, видел ее в своем воображении.



Изв.вузов «ПНД», т.9, № 1, 2001

Международная межвузовская конференция

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
ЭЛЕКТРОНИКИ И РАДИОФИЗИКИ СВЧ**

Саратов, Россия, 20–24 марта 2001

Организаторы

- Министерство высшего и среднего образования РФ
- Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
- Государственный учебно–научный центр «Колледж»
при поддержке
- Российского фонда фундаментальных исследований
- IEEE MTT/ED/AP/CPMT Saratov–Penza chapter (technical support)

Организационный и программный комитет

Д.И. Трубецков, чл.–корр. РАН, проф., ректор СГУ, председатель; Е.К. Алгазинов Воронеж, Россия; Н.А. Бушуев, Саратов, Россия; Н.Д. Девятков, Москва, Россия; А.В. Гапонов–Грехов, Нижний Новгород, Россия; А.Д. Григорьев, Санкт–Петербург, Россия; Ю.А. Гуляев, Москва, Россия; А.Г. Литвак, Нижний Новгород, Россия; Gun–Sik Park, Сеул, Корея; А.С. Победоносцев, Фрязино, Россия; В.Д. Тупикин, Саратов, Россия; Н.И. Синицин, Саратов, Россия; В.А. Солнцев, Москва, Россия; Г.Г. Соминский, Санкт–Петербург, Россия; А.П. Сухоруков, Москва, Россия; Д.А. Усанов, Саратов, Россия; Ю.А. Файнберг, Харьков, Украина.

Локальный оргкомитет

Д.И. Трубецков, председатель; Ю.И. Левин, зам. председателя; А.Е. Храмов, отв. секретарь; А.А. Короновский, Л.В. Красичков, Е.С. Мчедлова, В.П. Марнопольская.

Научная программа

На конференции обсуждались исследования по следующим направлениям:

- физические процессы при взаимодействии свободных носителей заряда с электромагнитными полями;
- вакуумная СВЧ–электроника;

- вакуумная микроэлектроника;
- твердотельная СВЧ-электроника;
- хаос и формирование структур в СВЧ-электронике и радиофизике;
- применение СВЧ-излучения.

В программу конференции были включены лекции, краткие сообщения и стендовые доклады участников школы по современным проблемам нелинейной динамики.

По материалам конференции издан сборник «Современные проблемы электроники и радиофизики СВЧ» (Саратов, Россия, 20–24 марта 2001 года): Материалы конференции. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2001. 188 с.

Аналитический обзор по тематике

На международной межвузовской конференции «Современные проблемы электроники и радиофизики СВЧ» представлено 15 обзорных лекций и 92 научных доклада, авторами которых являются 218 российских и 11 ученых из ближнего и дальнего зарубежья. В докладах представлено состояние современных исследований в России и в ближнем зарубежье по сверхвысокочастотной электронике и радиофизике, главным образом, в области создания теории, экспериментального изучения и разработки вакуумных и твердотельных электронных СВЧ-приборов, а также их приложений в различных областях естествознания (в частности, в биологии и медицине).

В рамках конференции были затронуты проблемы по следующим научным направлениям: физические процессы при взаимодействии свободных носителей заряда с электромагнитными полями (*Моносов Г.Г.* Исследование электромагнитных шумов в магнетроне с помощью двумерного компьютерного моделирования; *Казарян Г.М., Пеклевский А.В., Ролдугина Т.К., Саввин В.Л., Сухоруков А.П.* О динамике электронного пучка в реверсивной области циклотронного преобразователя СВЧ-энергии и др.); вакуумная СВЧ электроника (*Зайцев Н.И., Гинзбург Н.С., Завольский Н.А., Запевалов В.Е., Иляков Е.В., Кулагин И.С., Лыгин В.К., Моисеев М.А., Розенталь Р.М.* Теоретическое и экспериментальное исследование высокоэффективного релятивистского гиротрона сантиметрового диапазона длин волн; *Гельвич Э.А., Жарый Е.В., Закурдаев А.Д., Пугнин В.И.* Многолучевые клистроны: Тенденции развития и др.); вакуумная микроэлектроника (*Тумарева Т.А., Соминский Г.Г.* Полевые эмиттеры с фуллереновым покрытием для систем вакуумной электроники; *Савельев С. Г., Синицын Н. И., Торгашиов Г. В., Григорьев Ю. А.* Исследование пленочных углеродных катодов, полученных методом пиролиза и др.); твердотельная СВЧ-электроника (*Усанов Д.А.* Устройства, элементы и узлы твердотельной СВЧ-электроники на высших типах колебаний и др.); хаос и формирование структур в СВЧ-электронике и радиофизике (*Гинзбург Н.С., Зайцев Н.И., Иляков Е.В., Кулагин И.С., Новожилова Ю.В., Розенталь Р.М., Сергеев А.С.* Теоретическое и экспериментальное исследование хаотической генерации в лампе обратной волны мегаваттного уровня мощности, *Рыскин Н.М.* Сложная динамика и хаос в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью и др.); численное моделирование физических процессов в приборах сверхвысокочастотной электроники (*Andreev Y.V., Grigoriev A.D.* TREMSI computer code for nonstationary electronic processes simulation, *Yaogen Ding, Rodyakin Vladimir, Sandalov Aleksandr.* 2.5D PIC Arsenal-MSU computer code and physics investigations of the high power MBK и др.); применения СВЧ излучения в биологии и медицине (*Гапочка М.Г., Королев А.Ф., Сухоруков А.П., Сысоев Н.Н.* Биоэлектромагнитная совместимость (биологические и медицинские аспекты), *Гуляев Ю.В., Синицын Н.И., Петросян В.И., Елкин В.А., Бецкий О.В.* Эффекты резонансно-волнового состояния водных и биологических сред).

Конференция отмечает, что в России сохраняется высокий уровень научных

исследований в области радиофизики и электроники СВЧ, о чем свидетельствует уровень и тематика докладов, представленных на конференцию. Научные исследования, проводимые в России по направлению конференции, соответствуют мировому уровню, а в ряде случаев даже превосходят его. Однако, работы ведутся преимущественно за счет накопленного в предыдущие десятилетия научного потенциала: приборов, установок, измерительной аппаратуры, материалов, высокопрофессионального кадрового состава специалистов.

Результаты работ по сверхвысокочастотной электронике и радиофизике СВЧ, доложенных на конференции «Современные проблемы электроники и радиофизики СВЧ», помогут сформировать новые и уточнить существующие представления о физических явлениях и процессах, методах исследования, найдут приложение в практике прикладных исследований, новых технологиях, практике преподавания. Тезисы докладов опубликованы в сборнике, вышедшем к началу конференции.

Участники конференции надеются, что Правительство Российской Федерации, Министерство образования РФ, Министерство промышленности, науки и технологий РФ, другие Министерства и ведомства поставят на повестку дня вопрос о стимулировании использования научных достижений по сверхвысокочастотной электронике и радиофизике непосредственно в России.

Подавляющее большинство докладов, представленных на конференции, основаны на исследованиях, проводимых в рамках грантов Российского фонда фундаментальных исследований. В связи с этим конференция обращает внимание, что продолжение значительной части исследовательских работ в области сверхвысокочастотной электроники и радиофизики в высших учебных заведениях оказалось возможным во многом за счет поддержки соответствующих проектов Российским фондом фундаментальных исследований.

Оргкомитет

Решение конференции

В конференции, созванной по инициативе Министерства образования РФ, Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского и Государственного учебно-научного центра «Колледж» СГУ при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и ИБЕЕ МТТ (ED/AP/CPMT Saratov – Penza Chapter, (technical support), приняли участие 86 представителей университетов и высших учебных заведений (МГУ, СПб ГТУ, СГУ, СГТУ, ЧелГУ, Каб-БалкГУ, СамГАЭКУ, Н-НГУ Белорусский ГИИР, Украинский ИРФЭ и др.), академических институтов (ИРЭ РАН, Москва; ИПФ РАН, Нижний Новгород; ИРФЭ НАН, Харьков и др.), промышленных предприятий (ГННПП «Исток», Фрязино; ГНПП «Алмаз», Саратов и др.), ведущих исследования в области сверхвысокочастотной электроники и радиофизики, главным образом, в области создания теории, экспериментального изучения и разработки вакуумных электронных СВЧ-приборов, а также их приложений в различных областях естествознания (в частности, в медицине). Было заслушано и обсуждено 118 лекций и докладов, к началу конференции вышла книга тезисов докладов.

Участники конференции подчеркивают высокий уровень заслушанных лекций и докладов. Положительная черта конференции – участие в ней научной молодежи: молодые исследователи представили 47 докладов.

Конференция отмечает также следующее.

- Возрождение межвузовских конференций (данная конференция третья в новой России; первая прошла в Саратове, вторая – в Санкт-Петербурге) несомненно важный момент в научной жизни вузов, научных работников РАН и промышленных предприятий, занимающихся СВЧ-электроникой и радиофизикой.

- Однако, вакуумная СВЧ-электроника, которой, в основном, была посвящена конференция, переживает сегодня огромные трудности, хотя 10 лет назад США допускали превосходство СССР в вакуумной СВЧ-электронике –

единственной из 20 неядерных технологий оборонного значения. Самое страшное, что идет не обновление научных вузовских школ, а их разрушение.

- Потерян интерес студентов к специальностям, связанным с СВЧ-электроникой и радиофизикой во многих высших учебных заведениях; у выпускников отсутствует желание работать на СВЧ-электронных предприятиях.

- В известной степени потеря интереса к данным специальностям связана с архаичностью соответствующих программ и курсов лекций, поскольку ряд вузов не может из-за отсутствия финансирования вести серьезные научные исследования в области вакуумной СВЧ-электроники, а оснащение учебных лабораторий оставляет желать лучшего.

- Из исследований уходит натурный эксперимент, превращая вакуумную СВЧ-электронику в сугубо компьютерную науку.

Налицо кризис, преодоление которого участники конференции видят в следующем.

- К концу 2001 года необходимо разработать межотраслевую научно-техническую программу по созданию источников когерентного электромагнитного излучения для мощных СВЧ-комплексов научного, народно-хозяйственного и оборонного назначения. Желательно, чтобы предложения по проектам программ предусматривали частичное финансирование со стороны потенциального заказчика, в том числе и зарубежного.

- Необходимо включить перечень учебных специальностей, относящихся к вакуумной СВЧ-электронике (в частности, специальность «радиофизики и электроника»), в число имеющих оборонное значение.

- Необходимо выделить целевым образом средства на обновление материальной базы учебных и научных лабораторий вузов в области вакуумной СВЧ-электроники.

- Следует рекомендовать СВЧ-электронным предприятиям выделить средства на поддержку существующих филиалов и базовых кафедр, а также средства для заключения контрактов со студентами, желающими по окончании вуза работать на этих предприятиях.

- Следует всячески поддерживать проведение семинаров, конференций, школ и т.п. в области вакуумной СВЧ-электроники, акцентируя внимание на участие в них молодых научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Рабочая программа

Вторник, 20 марта 2001

- 9.00 Регистрация участников конференции
- 15.30 Открытие конференции.
- 16.00 Трубецков Д.И. Кентавры и творцы-одиночки в СВЧ-электронике
- 16.50 Короновский А.А., Храмов А.Е. Вейвлетный анализ и его применение к анализу временных реализаций

Среда, 21 марта 2001

- 9.00 Моносов Г.Г. Исследование электромагнитных шумов в магнетроне с помощью двумерного компьютерного моделирования
- 9.50 Тумарева Т.А., Соминский Г.Г. Полевые эмиттеры с фуллереновым покрытием для систем вакуумной электроники
- 10.40 Рыскин Н.М. Сложная динамика и хаос в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью
- 11.50 Привезенцев А.П. Причина и случай в динамике пространственного заряда
- 12.10 Корниенко В.Н., Черепенин В.А (2+1) численная модель двухсекционного черенковского генератора
- 12.30 Казарян Г.М., Пеклевский А.В., Ролдугина Т.К., Саввин В.Л., Сухоруков А.П. О динамике электронного пучка в реверсивной области циклотронного преобразователя СВЧ-энергии

- 12.50 *Чигарев С.Г., Евдокимов В.В., Ильин А.Ю., Мазур Т.А., Мясин Е.А.* Повышение выходной мощности оротрона за счет подавления собственных нерабочих частот периодической структуры
- 13.10 *Рувинский Г.В., Мелешкевич П.М., Бакуменко А.В.* Перспективы восстановления электровакуумных приборов СВЧ, снятых с эксплуатации
- 15.00 *Andreev Y.V., Grigoriev A.D.* TREMSI computer code for nonstationary electronic processes simulation
- 15.50 *Кривошеев П.В., Лыгин В.К., Мануилов В.Н.* О бомбардировке катода электронами, захваченными в адиабатическую ловушку гиротрона
- 16.10 *Морев С.П.* Распространение флуктуаций плотности тока и кинетического потенциала вдоль сходящегося аксиально-симметричного пучка с учетом поперечного разброса скоростей электронов
- 16.30 *Гельвич Э.А., Жарый Е.В., Закурдаев А.Д., Пугнин В.И.* Многолучевые клистроны. Тенденции развития
- 16.50 *Соминский Г.Г., Воскресенский С.В.* Источник широкополосных квазишумовых СВЧ излучений большой мощности нового типа
- 17.10 *Грицунов А.В., Чурюмов Г.И.* Спектральное моделирование СВЧ-приборов
- 17.30 *Мустафаев А.Г., Тешев Р.Ш., Бегидов Р.М., Мустафаев А.Г.* Влияние электронного облучения на параметры лавинно-пролетных диодов
- 19.00 *Churyumov G.I., Frolova T.I., Gerasimov V.P., Gritsunov A.V., Kopot M.A.* The Re-Entrant Distributed-Emission Crossed Field Tubes. Theory and Experiment
- 19.20 *Nikitenko O.M.* Electrostatic potential of crossed-field system with complex electrodes' configuration
- 12.00 Стендовая секция

Четверг, 22 марта 2001

- 9.00 *Гапочка М.Г., Королев А.Ф., Сухоруков А.П., Сысоев Н.Н.* Биоэлектромагнитная совместимость (биологические и медицинские аспекты)
- 9.50 *Гуляев Ю.В., Симицын Н.И., Петросян В.И., Ёлкин В.А., Бецкий О.В.* Эффекты резонансно-волнового состояния водных и биологических сред
- 10.40 *Евдокимов В.В., Мясин Е.А., Чигарев С.Г., Цейтлин М.Б., Мазур Т.А., Ильин А.Ю.* Исследование работы мощного двухкаскадного резонансного усилителя с открытой электродинамической системой
- 11.50 *Yaogen Ding, Rodyaikin Vladimir, Sandalov Aleksandr.* 2.5D PIC Arsenal-MSU Computer Code and Physics Investigations of the High Power MBK.
- 12.10 *Петросян В.И., Симицын Н.И., Ёлкин В.А.* Радиолюминесценция водных и биологических сред
- 12.30 *Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Эффекты синхронизации в цепочке квазигармонических автогенераторов в присутствии случайных и гармонических воздействий
- 12.50 *Гапочка М.Г., Королев А.Ф., Сухоруков А.П., Сысоев Н.Н.* Биоэлектромагнитная совместимость (физические аспекты)
- 13.10 *Клюев С.Б.* Измерение замедления электромагнитной волны в несимметричном двойном шелевом волноводе
- 15.00 *Канаков О.И., Шалфеев В.Д.* Структурообразование в цепочках потоково связанных бистабильных элементов
- 15.50 *Поляков О.П.* Фрактальные особенности многопоточковой хаотизации в тонком плазменном слое
- 16.10 *Защкин А.П., Кургузкин А.А., Молевич Н.Е.* Поперечные автоволновые структуры в широкоапертурном лазере с инерционным фазовым фильтром
- 16.30 *Beletskii N.N., Bludov Y.V.* Propagation of nonlinear surface polaritons in 2D electron system placed into high magnetic field
- 16.50 *Двоешерстова М.Ю., Чириманова А.П., Чередника В.И.* Численный анализ свойств пьезоакустических граничных волн, распространяющихся вдоль границы двух пьезокристаллов
- 17.10 *Матросов В.В., Мишагин К.Г., Шалфеев В.Д.* Хаотические колебания в ансамбле двух параллельно связанных ФАП
- 12.00 Стендовая секция

Пятница, 23 марта 2001

- 9.00 *Усанов Д.А.* Устройства, элементы и узлы твердотельной СВЧ–электроники на высших типах колебаний
- 9.50 *Гинзбург Н.С., Зайцев Н.И., Иляков Е.В., Кулагин И.С., Новожилова Ю.В., Розенталь Р.М., Сергеев А.С.* Теоретическое и экспериментальное исследование хаотической генерации в лампе обратной волны мегаваттного уровня мощности
- 10.40 *Савельев С. Г., Синицын Н. И., Торгашов Г. В., Григорьев Ю. А.* Исследование пленочных углеродных катодов, полученных методом пиролиза
- 11.50 *Калитёнков Н.В.* Взаимодействие радиоволн КВ диапазона с неоднородностями высокоширотной ионосферы и пучками авроральных электронов
- 12.10 *Попов В.В., Теперик Т.В.* Магнитополяризационная терагерцевая спектроскопия двумерных электронных систем в полупроводниках
- 12.30 *Ушаков Н.М.* Оптическое возбуждение СВЧ–сигналов в планарных периодических структурах металл–полупроводник–металл.
- 13.00 *Павельев Д.Г., Кошуринов Ю.И., Устинов В.М., Жуков А.Е., Копьев П.С.* Сверхрешетки со сверхширокими минизонами для приборов ММ и СВММ диапазонов длин волн
- 15.00 *Запезалов В.Е.* Селекция мод в гиротронах высокой мощности
- 15.50 *Зайцев Н.И., Гинзбург Н.С., Завольский Н.А., Запезалов В.Е., Иляков Е.В., Кулагин И.С., Лыгин В.К., Моисеев М.А., Розенталь Р.М.* Теоретическое и экспериментальное исследование высокоэффективного релятивистского гиротрона сантиметрового диапазона длин волн
- 16.10 *Макарян В.Г., Молевич Н.Е.* Волны в неравновесной среде с отрицательной второй вязкостью, описываемые обобщенным уравнением Курамото – Сивашинского и уравнением с интегральной дисперсией
- 16.30 *Накрап И.А., Савин А.Н., Шараевский Ю.П.* Моделирование характеристик многополосковых линий передачи с ферритом при возбуждении магнитостатических волн
- 16.50 *Завершинский И.П., Коган Е.Я.* Излучение тонкого тела в сверхзвуковом потоке неравновесного газа
- 17.10 *Мустафаев А.Г., Тешев Р.Ш., Мустафаев А.Г.* Физические процессы при воздействии магнитного поля на полупроводниковые структуры
- 12.00 Стендовая секция

Суббота, 24 марта 2001

- 9.00 *Кураев А.А., Синицын А.К.* Электродинамика нерегулярных волноводов
- 9.50 *Алексеев Ю.К., Дмитриев С.С., Сухоруков А.П.* Модуляция электронного потока на отверстии диафрагмы в поле открытого резонатора
- 10.10 *Алексеев Ю.К., Ачкасов В.В., Сухоруков А.П.* Модуляция электронного потока слабонеоднородным переменным полем вблизи критического значения амплитуды напряжённости
- 10.45 Закрытие конференции



Изв.вузов «ПНД», т.9, № 1, 2001

VI International School

CHAOTIC OSCILLATIONS and PATTERN FORMATION

CHAOS '01

Saratov, Russia, October 2–7, 2001

Organized by

- Saratov State University (SSU)
- State Educational and Scientific Center «College» of SSU
- Saratov Branch of the Radio Engineering and Electronics Institute of Russian Academy of Sciences
- Ministry for Young People Affair, Sport and Tourism of Saratov Region

Sponsored by

- Ministry for General and Professional Education of Russian Federation
- Russian Foundation for Basic Research
- Center for Assistance in Consolidation of High Education and Fundamental Science (Center «Integration»)
- Civil Research and Development Foundation (CRDF)
- Institute of Electrical and Electronic Engineers, Electron Device Society, USA (technical support)

Organizing committee

Chairman D.I.Trubetskov, Saratov State University, Russia

Scientific committee

V.S.Anishchenko, Saratov State University, Saratov, Russia
A.V.Gaponov-Grekhov, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod, Russia
Yu.A.Danilov, Kurchatov Scientific Center, Moscow, Russia
A.S.Dmitriev, Institute of Radio-Engineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
W.Ebeling, Humboldt-University, Berlin, Germany
S.N.Gurbatov, University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia
G.Th.Guria, National Center for Haematology, Biophysics and Cryobiology Laboratory, Moscow, Russia
N.A.Irisova, Institute of General Physics, Moscow, Russia
Yu.L.Klimontovich, Moscow State University, Moscow, Russia
P.S.Landa, Moscow State University, Moscow, Russia
Gun-Sik Park, Seoul National University, Korea
V.P.Ponomarenko, Institute for Applied Mathematics, Nizhny Novgorod, Russia
M.I.Rabinovich, University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia
V.D.Shalfeev, University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia
M.M.Sushchik, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod, Russia

Local committee

D.I.Trubetskov, Chairman
V.G.Anfinogentov, B.P.Bezruchko, A.E.Hramov, A.A.Koronovskiy,
L.V.Krasichkov, Yu.I.Levin, E.S.Mchedlova, Yu.P.Sharaevskii.

Objective and scope

The School is organized to continue the series of International Schools on Chaotic Oscillations in Radio-physics and Electronics held in Saratov (1985, 1988, 1991, 1994, 1998). These Schools were widely attended by researchers from the former Soviet Union and provided a discussion of different problems in nonlinear dynamics.

The main topics of the School

- Methods of Theoretical Analysis of Chaotic Behaviour
- Experimental Investigations of Nonlinear Phenomena
- Diagnostics of Chaos
- Piece-Wise Linear Systems
- Nonlinear Waves
- Self-Organization and Spatio-Temporal Chaos
- Application to Microwave Electronic Systems
- Nonlinear Phenomena in Biology
- Nonlinear Phenomena in Sociology
- Nonlinear Dynamics and Modern Education

The lectures, talks of participants, discussions on modern problems of nonlinear dynamics and its applications will be organized. Authors are welcome to take part in the School. Please fill the attached Registration form and send one to Organizing Committee before 30 April 1998. You can contribute a presentation as Lecture, Talk or Poster. In this case, please send one page abstract of your presentation in LaTeX format by e-mail preferably. You have not to use any your own commands and macroses in LaTeX. You can find LaTeX sample file at <http://cas.ssu.runnet.ru/chaos01/chaos01.html> or ask the file by e-mail: chaos01@cas.ssu.runnet.ru. The official School languages will be Russian and English. The lectures will be published in focus issue of «Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics» journal. We plan to publish all accepted abstracts before the School. Note, that your abstract will appear in Book of Abstracts if you will send its electronic version to Organizing Committee of CHAOS'01 by e-mail.

Location

To keep up the traditions the School will be held in a comfortable holiday hotel not far from Saratov city. Participants will be accommodated in single and double rooms. Three meals (breakfast, dinner and supper) will be served at cafeteria.

Schedule

Tentative School schedule is following: three lectures (50 min each) before dinner, two lectures and talks after dinner. Poster session will be organized throughout the School. Scientific discussions and social events will take place in the evening.

Registration

A Registration Form is attached (return by e-mail if possible). The registration deadline is 15 July 2001. A confirmation of registration and information on acceptance of contribution will be sent to participants after registration deadline. Full information on the registration and accommodation will be provided in the second announcement.

The Second Announcement will be distributed to those interested in July 2001. The organization of the School will be carried out by e-mail.

Address

Organizing Committee of CHAOS '01
College of Applied Science
Saratov State University
155 Moscovskaya, Saratov 410026 RUSSIA
Tel.: +7 (8452) 514294,
Fax: +7 (8452) 523864
E-mail: chaos01@cas.ssu.runnet.ru
WWW: <http://cas.ssu.runnet.ru/chaos01/chaos01.html>

Registration form

Full name (first, middle initial and surname):
Full organization address:
Telephone and FAX numbers:
E-mail address:
The title of presentation:
Abstract:
 I plan to attend the School.
 I would like to present:
 Lecture (50 min)
 Talk (15 min)
 Poster

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Лёвина, Ж.А. Иванова*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136
Банковские реквизиты
р/с №40603810900000000378 ЗАО АКБРиР «Экономбанк» г. Саратова,
БИК 046311722, кор. счет банка 30101810100000000722

Подписка на I-ое полугодие 2002 года

по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498,
стоимость подписки на I полугодие 120 рублей
Подписка на весь год (240 руб.) по заявочным письмам
непосредственно в редакции

Зарубежная подписка в России оформляется в ЗАО «МК-Периодика»
по адресу: 129110, Россия, Москва, ул. Гиляровского, 39,
ЗАО «МК-Периодика»
тел.: (095) 281-93-45, 284-50-08; факс: (095) 281-37-98
E-mail: info@periodicals.ru

Правила подписки за рубежом на сайте: <http://www.periodicals.ru>

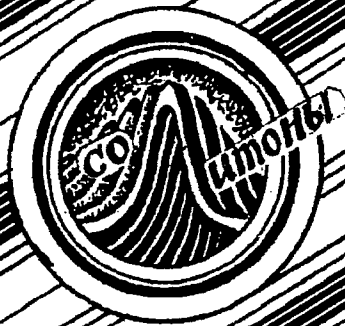
Сдано в набор 1.05.01. Подписано к печати 5.06.01. Формат 70x108/16
Бумага сыктывкарская. Печать плоская. Гарнитура Латинская
Усл. печ.л. 10,85 (7,75). Уч.-изд. л. 10.3. Тираж 200 экз. Заказ 216

Издательство ГосУНЦ «Колледж». Лицензия ЛР №020773 от 15.05.98

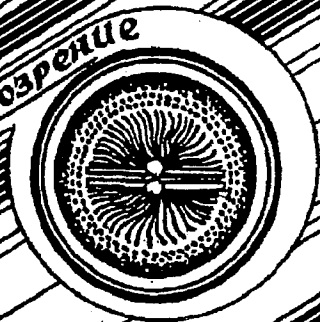
410026, Саратов, ул. Московская, 155
Тел. (845-2)52-38-64, факс (845-2) 52-38-64
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru
<http://cas.ssu.runnet.ru>

Отпечатано на ризографе GR 3750 издательства ГосУНЦ «Колледж»

© Издательство ГосУНЦ «Колледж» 
© Оформление художника Д.В. Соколова, 2001



Книжное обозрение



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



для студентов и преподавателей в журнале



Современной нелинейной динамики

Многие вещи нам непонятны не
потому, что наши понятия слабы, но
потому, что эти вещи не входят в круг
наших понятий.

Козьма Прутков

