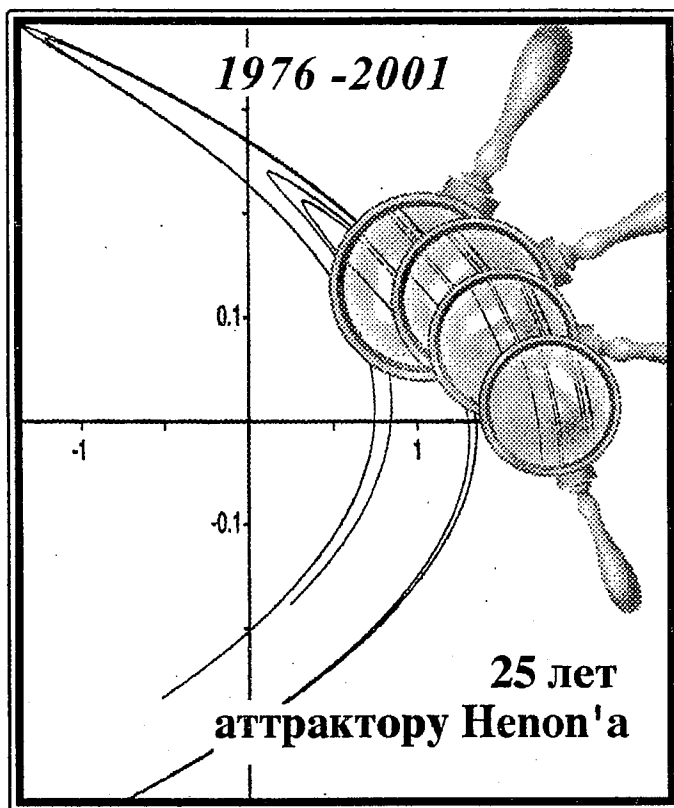


Трикладная Детальная Динамика





Бифуркации
в динамических
системах различной природы



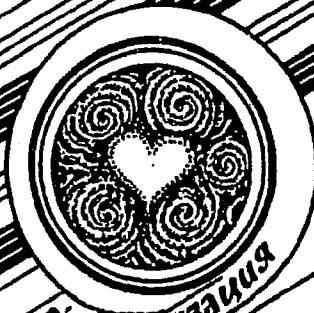
Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики



Конференции, семинары, симпозиумы



Детерминированные



Авто-
волны,
самоорганизация



Прикладные задачи
нелинейной
теории
колебаний
и волн



Нелинейная
динамика
в
лизах.
История. Персоналия

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Калинин, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В.К. Юлпатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 9, № 2, 2001, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Материалы Второй международной конференции

«Фундаментальные проблемы физики», 9-14 октября 2000, Саратов, Россия

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Современное состояние исследований в области плазменной релятивистской СВЧ-электроники в ИОФ РАН 3

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Метод восстановления уравнений с гармоническим внешним воздействием по временному ряду 27

Селезнев Е.П., Захаревич А.М. Структура пространства управляющих параметров модели нелинейного осциллятора при двухчастотном воздействии. . 39

Блиох К. Ю. Функциональный подход к неавтономным динамическим системам: фаза Берри и проблемы гамильтоновости, сильной устойчивости, квантуемости 45

КВАНТОВЫЙ ХАОС

Югай К.Н., Блинов Н.В., Широков И.В. Динамический хаос - макроскопические квантовые явления в длинных джозефсоновских переходах. . . 51

ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ

Марков Г.А., Чугунов Ю.В. Резонансный плазменно-волновой разряд в ионосфере Земли 60

Журавлев В.М. Точно интегрируемые модели взаимодействия волн с непрерывным спектром 76

Бархатов Н.А., Беллюстин Н.С., Емельянов Н.Н. Динамика нелинейного взаимодействия неоднородностей потока солнечного ветра с земной магнитосферной системой 82

Блиох К.Ю., Усатенко О.В. Двухмасштабный геометрический резонанс: от параметрического резонанса в осцилляторе до термодинамических циклов 92

КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА

Кузнецов А.П., Рожнев А.Г., Трубецков Д.И. Линейные колебания и волны. Сборник задач 112

Хованова Н.А., Хованов И.А. Методы анализа временных рядов 114

КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ

Жусубалиев Ж.Т., Колоколов Ю.В. Бифуркации и хаос в релейных и широтно-импульсных системах автоматического управления 117

DEPARTMENT OF EDUCATION OF RUSSIAN FEDERATION

Izvestiya VUZ

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

scientific-technical journal

published since 1993

Published 6 times a year

Vol.9, №2, 2001, Saratov

CONTENTS

Materials of the Second International Conference

«Fundamental Problems of Physics», October 9-14, 2000, Saratov, Russia

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

Present state of plasma relativistic microwave electronics in General physics
institute of RAS. *M.V. Kuzelev, A.A. Rukhadze, P.S. Strelkov* 3

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Method for reconstruction of equations with harmonic driving from time series.
B.P. Bezruchko, D.A. Smirnov 27

Structure of the control parameters space in the model of the nonlinear oscillator
under two-frequency driving. *Ye.P. Seleznev, A.M. Zakharevich* 39

Functional approach to non-autonomous dynamic systems: Berry phase and
problems of hamiltonianness, strong stability, quantization. *K. Yu. Bliokh*. . . 45

QUANTUM CHAOS

Dynamical chaos and macroscopic quantum phenomena in long Josephson
junctions. *K.N.Yugay, N.V.Blinov, I.V.Shirokov* 51

JOURNAL IN JOURNAL

Resonance plasma-wave discharge in the Earth's ionosphere. *G.A. Markov,*
Yu.V. Chugunov. 60

Exactly integrable models of the wave interaction with continuous spectrum.
V.M. Zhuravlev 76

Dynamics of nonlinear interaction between inhomogeneities of Solar wind flow and
the Earth magnetosphere. *N.A. Barkhatov, N.S. Belliustin, N.N. Emel'yanov*. . 82

Two-scale geometric resonance: from parametric resonance in oscillator to thermo-
dynamic cycles. *K.Yu. Bliokh, O.V. Usatenko* 92

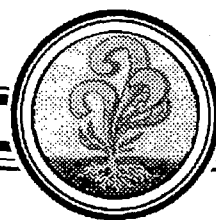
STUDENT'S BOOKSHELF

Linear oscillation and waves: book of problems. *A.P. Kuznetsov, A.G. Rozhnev,*
D.I. Trubetskoy 112

Methods of time series analysis. *N.A. Khovanova, I.A. Khovanov* 114

BOOK REVIEW

Bifurcations and chaotic oscillations in relay and pulse-width automatic control
systems. *Zh.T. Zhusubaliyev, Yu.V. Kolokolov*. 117



СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ ПЛАЗМЕННОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СВЧ-ЭЛЕКТРОНИКИ В ИОФ РАН

М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, П.С. Стрелков

Дан обзор современного состояния теоретических и экспериментальных исследований в новой перспективной области СВЧ-электроники - плазменной релятивистской СВЧ-электроники. Приборы плазменной релятивистской СВЧ-электроники по своим параметрам являются уникальными. По ширине полосы генерации и легкости перестройки частоты они не имеют аналогов среди приборов вакуумной СВЧ-электроники, а по достигнутым мощностям не уступают им.

1. Историческое введение

Плазменная СВЧ-электроника зародилась в 1949 году после первых работ А.И.Ахиезера и Я.Б.Файнберга [1] в СССР и Д.Бома и Е.Гросса [2] в США, в которых было теоретически предсказано явление пучковой неустойчивости. Явление это состояло в аномально сильном взаимодействии плотного, быстрого, но тогда еще нерелятивистского электронного пучка с более плотной плазмой, намного превосходящем обычное столкновительное взаимодействие. Предсказывалось, что плотный моноэнергетический электронный пучок будет весьма эффективно тормозиться в плазме, возбуждая в ней плазменные колебания. Такое эффективное торможение объяснялось явлением коллективного взаимодействия пучка с плазмой, причем характерный временной масштаб торможения дается выражением

$$\tau = 1/\delta, \quad \delta = [n_b/(2n_p)]^{1/3}\omega_p. \quad (1.1)$$

Пространственный масштаб торможения пучка при этом порядка $l = u\tau \approx u/\delta$. Здесь n_b и n_p - плотности электронов пучка и плазмы, соответственно; ω_p - плазменная частота (частота плазменных колебаний); δ - временной инкремент нарастания неустойчивости; u - скорость электронов пучка.

Инкремент (1.1), а следовательно, и приведенное время торможения пучка достигаются в условиях, когда частота возбуждаемых плазменных колебаний удовлетворяет условию

$$\omega = \omega_p \leq ku, \quad (1.2)$$

то есть когда фазовая скорость плазменной волны порядка (точнее, несколько меньше) скорости пучка. Здесь k - волновой вектор плазменной волны. Это

условие позволило понять механизм аномально сильного взаимодействия плотного электронного пучка с плазмой: очевидно, что такое взаимодействие обусловлено вынужденным черенковским излучением электронами пучка плазменных волн, которое сопровождается преобразованием кинетической энергии пучка в энергию плазменных волн. Отсюда следует оценка эффективности такого преобразования, что можно назвать также эффективностью излучения электронным пучком плазменных волн

$$\text{КПД} = E^2/(4\pi n_b m u^2/2) \approx [n_b/(2n_p)]^{1/3}. \quad (1.3)$$

Здесь $E^2/(4\pi)$ - энергия поля колебаний плазменной волны. Согласно этой оценке при $n_b \approx 0.01 n_p$ и $u \approx 10^{10}$ см/с (то есть энергии пучка $E_b \approx 30$ кэВ) около 20% энергии пучка может трансформироваться в энергию плазменных волн. Так, если $n_p = 10^{12}$ см⁻³, $n_b = 10^{10}$ см⁻³ (то есть плотность тока пучка $j_b \approx 15$ А/см²), то плотность мощности потерь энергии пучка должна достигать 75 кВт/см², причем такие потери пучок испытывает за время 10^{-10} с, то есть на длине $l \approx 1$ см.

Первые же эксперименты, проводимые в Харьковском и Сухумском физико-технических институтах, а также и за рубежом, подтвердили высокую эффективность коллективного взаимодействия электронного пучка с плазмой. Пучок электронов действительно весьма эффективно терял свою энергию (более 30%). На очень малых расстояниях от места инжекции пучок застревал в плазме. Вместе с тем электромагнитное излучение из плазмы оказалось незначительным - менее 1% мощности пучка трансформировалось в СВЧ-излучение, покидающее плазму.

Причину низкой эффективности излучения из плазмы, естественно, усмотрели в малой, нерелятивистской фазовой скорости возбуждаемых пучком плазменных волн. Из малой фазовой скорости волн следуют их потенциальность и запертость в плазме.

Вместе с тем преимущества плазменно-пучковых систем казались очень привлекательными: в первую очередь, это легкость перестройки частоты излучения и возможность создания широкополосных (шумовых) источников СВЧ. Поэтому в Институте радиотехники и электроники РАН и Харьковском физико-техническом институте были проведены специальные исследования по созданию согласующих устройств, выводящих излучение из плазмы. В результате, были созданы довольно эффективные широкополосные генераторы и усилители СВЧ, не имеющие аналогов в вакуумной СВЧ-электронике [3,4].

Несмотря на достигнутые успехи, нерелятивистская плазменная СВЧ-электроника не могла серьезно конкурировать с вакуумной СВЧ-электроникой из-за сложностей изготовления систем вывода излучения из плазмы.

Положение в плазменной СВЧ-электронике существенно изменилось в начале 70-х, когда в руках ученых появились релятивистские сильноточные электронные пучки с плотностями тока $1 \div 10$ кА и энергией порядка 1 МэВ. Еще до этого к весьма обнадеживающим выводам привели теоретические исследования. Хотя инкремент развития пучковой неустойчивости уменьшался с ростом релятивистского фактора электронов γ [5]

$$\delta = [n_b/(2n_p)]^{1/3} \omega_p / \gamma, \quad \gamma = 1/(1 - u^2/c^2)^{1/2}, \quad (1.4)$$

что очевидно увеличивает длину релаксации пучка в плазме и, казалось бы, свидетельствует об ослаблении взаимодействия пучка с плазмой, в действительности, дело обстоит иначе. Именно из-за увеличения длины релаксации пучка возросла эффективность передачи пучка плазменным волнам, оказавшись равной [6]

$$\text{КПД} = E^2/[4\pi n_b mc^2(\gamma-1)] \approx 1/2[n_b/(2n_p)]^{1/3}(\gamma+1). \quad (1.5)$$

Заметим, что при больших γ , согласно (1.5), величина КПД может стать порядка единицы. Эта формула, однако, справедлива только пока $\text{КПД} \ll 1$. Вычисления же показывают [7], что максимальная эффективность обычно не превышает 30÷35%.

Отметим еще два важных теоретических результата, существенно определивших становление и развитие релятивистской плазменной СВЧ-электроники. Первый теоретический результат - это так называемый предельный вакуумный ток не нейтрализованного по заряду тонкого трубчатого электронного пучка, транспортируемого через пустой цилиндрический металлический волновод (ток Богданкевич - Рухадзе [8])

$$J_0 = (mc^3/e) (\gamma^{2/3}-1)^{3/2}/[\Delta_b/r_b+2\ln(R/r_b)] \approx 17(\gamma^{2/3}-1)^{3/2}/[\Delta_b/r_b+2\ln(R/r_b)] \text{ кА}. \quad (1.6)$$

Здесь R - радиус металлического волновода, r_b - средний радиус пучка, $\Delta_b \ll r_b$ - его толщина. Ток (1.6) определяется торможением электронов пучка под действием поля собственного пространственного заряда. Однако, если заряд пучка нейтрализован тяжелыми ионами, то появляется другой предельный ток, определяемый условием устойчивости транспортировки пучка (ток Пирса), равный [9]

$$J_{\Pi} = J_0[(\gamma^2-1)/(\gamma^{2/3}-1)]^{3/2} > J_0\gamma^2. \quad (1.7)$$

Второй важный теоретический результат определяет условие возбуждения электронным пучком замагниченного плазменного резонатора, которое оказывается возможным, если плотность плазмы превышает пороговое значение [10]

$$\omega_p^2 > \omega_{p \text{ пор}}^2 = k_{\perp n}^2 u^2 \gamma^2. \quad (1.8)$$

Здесь $k_{\perp n}$ - волновое число n -й поперечной моды плазменной волны, определяемое профилем плазмы в волноводе [7].

Величины J_0 и J_{Π} определяют характерные предельные токи сильноточных электронных пучков, которые могут использоваться в релятивистских плазменных источниках СВЧ. Условие (1.8) определяет порог плотности плазмы, выше которого возможно черенковское усиление плазменной волны релятивистским электронным пучком в замагниченном плазменном волноводе.

Таким образом, к началу 1976 года была подготовлена почва для формулировки основных принципов релятивистской плазменной СВЧ-электроники, которые и были окончательно сформулированы в работах [11-13]. С этого момента началось длительное тесное сотрудничество между коллективами теоретиков и экспериментаторов, приведшее к созданию новой области СВЧ-электроники - релятивистской плазменной СВЧ-электроники. Результаты этих исследований и приводятся ниже.

Отметим здесь же, что первый удачный экспериментальный плазменный релятивистский генератор (ПРГ) СВЧ был создан в лаборатории физики плазмы ИОФ АН [14], на котором и был достигнут успех в 1982 году. Этот год считается годом рождения релятивистской плазменной СВЧ-электроники.

2. Теоретическая плазменная релятивистская СВЧ-электроника

2.1. Линейная теория плазменного релятивистского СВЧ-усилителя.

Простейшая теоретическая модель плазменного СВЧ-усилителя представляет собой прямолинейный релятивистский электронный пучок, распространяющийся в

сильном продольном внешнем магнитном поле параллельно оси металлического волновода радиуса R с плазменным заполнением. Пучок инжектируется в волновод в плоскости $Z=0$, а в плоскости $Z=L$ расположен коллектор и начинается система вывода излучения - рупор. Плазма и пучок однородны вдоль оси волновода, холодные, полностью замагниченные и нейтрализованные по заряду и току. В поперечном сечении волновода пучок и плазма являются тонкими трубчатыми со средними радиусами $r_b < R$, $r_p < R$ и толщиной Δ_b , Δ_p , соответственно, причем $\Delta_{b,p} \ll r_{b,p}$.

В линейном приближении спектры собственных колебаний описанной системы определяются из дисперсионного уравнения [15, 16], которое следует из уравнений Максвелла, уравнений холодной гидродинамики плазмы и уравнения Власова для электронов пучка (см. далее нелинейную теорию усилителя)

$$D_p D_b = \theta \omega_p^2 \omega_b^2 \gamma^3 \chi^4 / (k_{\perp p}^2 k_{\perp b}^2). \quad (2.1.1)$$

Здесь

$$D_p \equiv \omega^2 - \omega_p^2 \chi^2 / k_{\perp p}^2 \quad (2.1.2a)$$

и

$$D_b \equiv (\omega - k_z u)^2 - \omega_b^2 \gamma^3 \chi^2 / k_{\perp b}^2 \quad (2.1.2b)$$

дисперсионные функции, нули которых определяют спектры волн в невзаимодействующих плазме и электронном пучке [17]; θ - параметр, характеризующий степень связи пучковых и плазменных волн; параметры $k_{\perp p}^2$ и $k_{\perp b}^2$ имеют смысл квадратов поперечных волновых чисел волн плазмы и пучка; ω - частота; k_z - продольное волновое число; ω_p и ω_b - ленгмюровские частоты электронов плазмы и пучка, соответственно; u - невозмущенная скорость электронов пучка; $\chi^2 = k_z^2 - \omega^2/c^2$.

Параметр связи θ обладает важными свойствами: при $r_b = r_p$ $\theta=1$; во всех остальных случаях $\theta < 1$. Например, для азимутально-симметричных возмущений в области низких частот, когда $\omega R / (u\gamma) < 1$,

$$\theta = \begin{cases} \ln(R/r_p) / \ln(R/r_b), & r_b < r_p, \\ \ln(R/r_b) / \ln(R/r_p), & r_b > r_p. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

При увеличении частоты ω величина θ сильно уменьшается.

Вблизи тех ω и k_z , где дисперсионные функции (2.1.2) одновременно обращаются в ноль, имеется сильное черенковское (одночастичное или коллективное) взаимодействие между пучком и плазмой. Это возможно только в области $\omega < k_z c$, где пучковые и плазменные волны являются поверхностными. В частности, спектр поверхностной плазменной волны в наиболее важном длинноволновом пределе ($k_z \rightarrow 0$) дается формулой [17]

$$\omega = \omega_p k_z c / (k_{\perp p}^2 c^2 + \omega_p^2)^{1/2}, \quad (2.1.4)$$

где квадрат поперечного волнового числа плазменной волны определяется выражением (для азимутально-симметричного случая)

$$k_{\perp p}^2 = [r_p^2 \Delta_p \ln(R/r_p)]^{-1}. \quad (2.1.5)$$

Волна со спектром (2.1.4) называется еще плазменной кабельной волной [7, 18]. С увеличением волнового числа ($k_z R > 1$) фазовая скорость волны (2.1.4) сильно уменьшается и волна становится потенциальной.

Для $k_{\perp b}^2$ в длинноволновом пределе также справедлива формула (2.1.5), но с заменой индекса p на b . При этом из (2.1.2b) легко определяются спектры

пучковых волн - быстрой и медленной (подробнее см. [7, 15, 16]). Медленная волна пучка имеет отрицательную энергию, что и приводит к неустойчивости пучка в плазме. Частота, на которой фазовая скорость поверхностной плазменной волны (2.1.4) совпадает со скоростью пучка u , называется частотой одночастичного черенковского резонанса (резонанс волна - частица). Та частота, где фазовая скорость плазменной волны равна фазовой скорости медленной волны пучка, называется частотой коллективного черенковского резонанса (резонанс волна - волна). Можно показать, что с уменьшением ω_p частота одночастичного резонанса уменьшается и при

$$\omega_p^2 = \omega_{p0}^2 = k_{\perp}^2 u^2 \gamma^2 \quad (2.1.6)$$

обращается в нуль [15, 16]. Если плазменная частота меньше пороговой частоты (2.1.6), то одночастичный черенковский резонанс невозможен. Однако отсутствие резонанса не означает отсутствия вынужденного черенковского излучения, то есть отсутствия усиления. Ниже будет показано, что при большой плотности электронного пучка реальный порог значительно ниже определенного формулой (2.1.6).

Усиление волн в пучково-плазменной системе в зависимости от ее параметров (в первую очередь, ω_p и $|r_b - r_p|/R$) возможно в различных областях частот. Так, если коэффициент связи $\theta \approx 1$, то усиливаются волны в широкой области частот, практически от нуля и до частоты, превышающей частоту резонанса волна - волна. Такие широкополосные плазменные усилители в литературе называют томсоновскими. Когда же коэффициент связи $\theta \ll 1$, усиление происходит в узкой полосе частот. Эти узкополосные плазменные усилители называют в литературе рамановскими [15, 16, 19].

На рис. 1 приведены, как функции плазменной частоты ω_p , наиболее важные для пучково-плазменного взаимодействия частотные характеристики. Кривая 1 изображает верхнюю по частоте границу полосы усиления, кривая 2 - нижнюю границу. То есть усиление возможно лишь на частотах, заключенных между кривыми 1 и 2. Кривая 3 определяет частоты, на которых коэффициент усиления максимален. Кривая 4 задает частоту коллективного резонанса, а кривая 5 - частоту одночастичного резонанса. Кривые получены для реальной экспериментальной системы со следующими параметрами: $R=1.8$ см, $r_p=1.1$ см, $r_b=0.6$ см, $\Delta_b = \Delta_p = 0.1$ см, $I_b = 2$ кА, $\gamma = 2$ ($u = 2.6 \cdot 10^{10}$ см/с).

Из рис. 1 видно, что усиление возникает только при превышении частотой ω_p некоторого порогового значения. На рисунке порог отмечен вертикальной прямой «А». Этот порог оказывается примерно вдвое ниже, чем по формуле (2.1.6), что связано с большой величиной тока пучка. Далее имеется определенный диапазон плазменных частот (между вертикальными прямыми «А» и «D»), для которого нижняя граница полосы усиления равна нулю - зона томсоновского усиления. А при еще больших плазменных частотах (правее вертикальной прямой «D») нижняя граница полосы усиления становится отличной от нуля и происходит сужение полосы усиливаемых частот с

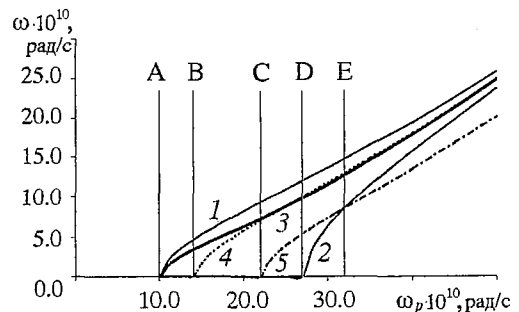


Рис. 1. Важнейшие частоты плазменного усилителя в зависимости от плазменной частоты: кривая 1 - верхняя граница полосы усиления, кривая 2 - нижняя граница полосы усиления, кривая 3 - частота максимального коэффициента усиления, кривая 4 - частота коллективного резонанса, кривая 5 - частота одночастичного резонанса

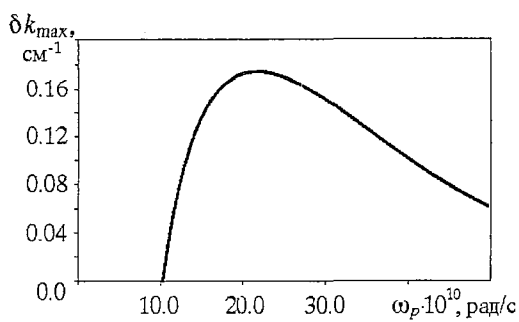


Рис. 2. Зависимость максимального коэффициента усиления от плазменной частоты

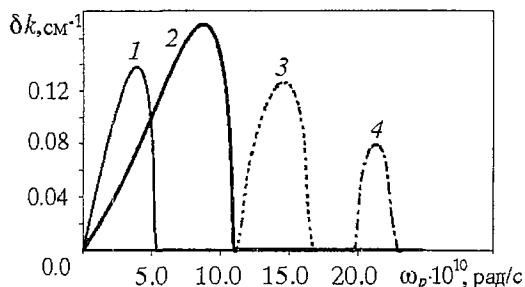


Рис. 3. Зависимости коэффициентов усиления от частоты для различных плазменных частот

ростом ω_p - зона рамановского усиления. В свою очередь, зоны томсоновского и рамановского усиления подразделяются на вспомогательные промежуточные области (прямые «В», «С», «Е»). Из рис. 1 также видно, что с ростом ω_p существенно сужается полоса усиления, повышается частота максимального усиления (кривая 3), причем в итоге она сливается с частотой коллективного резонанса (кривая 4). Таким образом, при повышении частоты и больших токах пучково-плазменное взаимодействие носит все более коллективный характер, что связано с уменьшением коэффициента θ при увеличении ω . Напротив, частота одночастичного резонанса (кривая 5) с ростом частоты все более уходит в сторону от кривой 3. Более того, как видно из рис. 1, на частоте одночастичного резонанса усиление в конце концов вообще пропадает [15].

На рис. 2 изображены в зависимости от ω_p максимальный коэффициент усиления (величина $\delta k = |\text{Im}(k_z)|$, вычисленная вдоль кривой 3 рис. 1) для систем с теми же параметрами, что и на рис. 1. Видно, что имеется некоторая оптимальная плазменная частота, при которой реализуется абсолютный максимум коэффициента усиления.

На рис. 3 изображены коэффициенты усиления для системы с теми же параметрами, что и на предыдущих двух рисунках, но в зависимости от частоты ω и для различных ω_p : $15 \cdot 10^{10}$, $25 \cdot 10^{10}$, $35 \cdot 10^{10}$, $45 \cdot 10^{10}$ рад/с. На этом рисунке, кривые 1 и 2 весьма характерны для зависимостей от ω коэффициентов усиления широкополосного томсоновского усилителя, а кривые 3 и 4 характерны для рамановского режима усиления.

2.2. Нелинейная теория плазменного СВЧ-усилителя. Общие нелинейные уравнения плазменного СВЧ-усилителя для электромагнитного поля волн E -типа и индуцированных в плазме и пучке токов записываются в виде [15, 16]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi = -4\pi [\Delta_b \delta(r-r_b) j_b + \Delta_p \delta(r-r_p) j_{pz}], \quad (2.2.1)$$

$$j_b = en_b \int v(z, t_0) \delta[t-t(z, t_0)] dt_0, \quad \partial j_p / \partial t = \omega_p^2 E_z / (4\pi), \quad E_z = [\partial^2 / \partial z^2 - (1/c^2) \partial^2 / \partial t^2] \psi.$$

Здесь E_z - продольная составляющая напряженности электрического поля, ψ - поляризационный потенциал, n_b - невозмущенная плотность электронов пучка. В системе (2.2.1) индуцированный в плазме ток j_p определяется в линейном приближении (о влиянии нелинейности плазмы и возможности ей пренебречь см. [20]), а для тока пучка j_b используется модель, основанная на вычислении

характеристик уравнения Власова электронов пучка и представлении его функции распределения в виде интеграла по начальным данным [7, 21]. При этом $t(z, t_0)$ и $v(z, t_0)$ решения характеристической системы уравнения Власова

$$dt/dz = 1/v, \quad vdv/dz = (e/m)(1-v^2/c^2)^{3/2}E_z, \quad (2.2.2)$$

дополненной начальными условиями (условия инжекции): $t(z=0)=t_0$, $v(z=0)=u$. Из уравнений (2.2.1) и (2.2.2) следует дисперсионное уравнение (2.1.1) и, следовательно, все остальные результаты линейной теории.

Общие уравнения (2.2.1), (2.2.2) преобразуются к виду, удобному для решения задачи усиления волн с учетом следующих факторов: а) поперечная структура поля волн в плазменно-пучковом волноводе заранее неизвестна, а устанавливается самосогласованно по мере продвижения в область больших Z ; б) не обязательно задан частотный спектр усиливаемого сигнала, а следовательно, необходимо рассматривать одновременное усиление разночастотных волн, взаимодействующих между собой на нелинейной стадии; в) у всех эффективно усиливаемых пучком волн продольные волновые числа близки к частоте волны, деленной на невозмущенную скорость пучка. Эти соображения позволяют представить поляризационный потенциал поля ψ в виде [15, 16]

$$\psi = 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \varphi_n(\mathbf{r}_{\perp}) \sum_{s=1} [A_{ns}(z) \exp(-is\Omega t + is\Omega z/u) + \text{К.С.}] \}. \quad (2.2.3)$$

Здесь Ω - некоторая малая частота, с помощью которой осуществляется «дискретизация» спектра усиливаемого сигнала. По порядку величины $\Omega=2\pi/T$, где T может быть длительностью импульса пучка. Представление (2.2.3) позволяет вместо интеграла Фурье по частотам пользоваться рядом Фурье. С учетом (2.2.3) система (2.2.1) и (2.2.2) преобразуется в следующие нелинейные уравнения релятивистского плазменного СВЧ-усилителя [15, 16]:

$$dy/d\xi = \eta, \quad d\eta/d\xi = (i/2) (1 + 2\gamma^2 u^2 \eta^2 / c^2)^{3/2} \sum_{s=1} [s \exp(-isy) L_s^* (\alpha_{bs} \rho_s + j_s) - \text{К.С.}], \quad (2.2.4)$$

$$dj_s/d\xi = is/(2\gamma^2) [(1/\alpha_{ps} - 1)j_s - \theta(s)\alpha_{bs} L_s^* \rho_s].$$

Здесь

$$\rho_s = (1/\pi) \int_0^{2\pi} \exp(isy) dy_0, \quad L_s^* = 1 - 2i\gamma^2(1/s) d/d\xi, \quad (2.2.5)$$

$$\alpha_{ps} = \omega_p^2 / [k_{\perp p}^2(s) u^2 \gamma^2], \quad \alpha_{bs} = \omega_b^2 \gamma^3 / [k_{\perp b}^2(s) u^2 \gamma^2],$$

а величины $k_{\perp p}^2(s)$, $k_{\perp b}^2(s)$, $\theta(s)$ совпадают с соответствующими величинами линейной теории, но с заменой $\omega \rightarrow s\Omega$. В (2.2.4) введены также безразмерные характеристики и переменные

$$y = \Omega [t(z, t_0) - z/u], \quad \eta = [u - v(z, t_0)] / v(z, t_0), \quad y_0 = \Omega t_0, \quad \xi = \Omega z / u. \quad (2.2.6)$$

Эффективность излучения (усиления) определяется как относительная часть потока кинетической энергии пучка, преобразованная в поток энергии излучения [15, 22]

$$\text{КПД} = 1 - 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} [1 + 2\gamma^2 (u/c)^2 \eta^2]^{-1/2} dy_0. \quad (2.2.7)$$

Система (2.2.4) дополняется граничными условиями. В усилительной задаче они задаются на входной границе $Z=0$. В достаточно общем виде они записываются так [15, 16]:

$$\begin{aligned} j_s|_{\xi=0} &= j_{s0}, \\ y|_{\xi=0} &= y_0 + 1/2 \sum_{s=1}^L [b_s \exp(isy_0 + i\phi_s) + \text{К.С.}], \\ \eta|_{\xi=0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Здесь j_{s0} - подаваемые на вход усилителя плазменные колебания, $y_0 \in [0, 2\pi]$ соответствует невозмущенному пучку, а второе слагаемое во втором соотношении (2.2.8) соответствует модуляции пучка по плотности. Здесь для определенности рассматривается случай, когда плазменные колебания на вход не подаются, то есть все j_{s0} равны нулю. Зато пучок инжектируется слабо модулированным по плотности: $|b_s| = 0.01 \div 0.05$.

Ниже, на основе результатов численного решения нелинейных уравнений плазменного усилителя для тех же параметров, что и на рис. 1-3, получены: максимальная эффективность усиления; длина, на которой эффективность усиления максимальна (оптимальная длина); спектр усиливаемого сигнала. Для определения максимальной эффективности и оптимальной длины достаточно рассмотреть усиление монохроматического сигнала, то есть использовать граничные условия (2.2.8) только с одним отличным от нуля слагаемым: $b_1 \neq 0$, $b_{2,3,\dots} = 0$. Для определения же спектра требуется учет многих $b_s \neq 0$, причем так, чтобы в полосу усиления попадало большое число волн.

На рис. 4 показана максимальная эффективность усилителя монохроматического сигнала в зависимости от ω_p , а на рис. 5 - оптимальная длина L усилителя, на которой эта эффективность достигается. Эти данные получены при частоте Ω (см. (2.2.3)), соответствующей кривой 3 рис. 1 и $b_1 = 0.01$. Видно, что эффективность усилителя довольно высока во всем рассматриваемом диапазоне плазменных частот [22], а длина не велика, и в достаточно широкой области практически не зависит от ω_p . Особенно высока эффективность около порога возникновения усиления [15, 16, 22], где длина усилителя резко возрастает (на рис. 4 и 5 порог $\omega_p = 10.1 \cdot 10^{10}$ рад/с отмечен вертикальной прямой). Конечно, оптимальная длина зависит от входной модуляции пучка b_1 , но эта зависимость слабая и для другой амплитуды модуляции b_1' пересчитывается по формуле $L' - L = \delta k^{-1} \ln |b_1' / b_1|$, где δk представлен на рис. 2.

На рис. 6 для нескольких плазменных частот представлены спектральные плотности излучения на выходе усилителя с оптимально подобранной длиной, когда выходная мощность достигает максимума. Спектральная же плотность

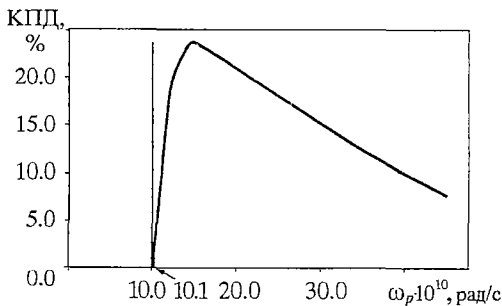


Рис. 4. Зависимость эффективности усиления от плазменной частоты

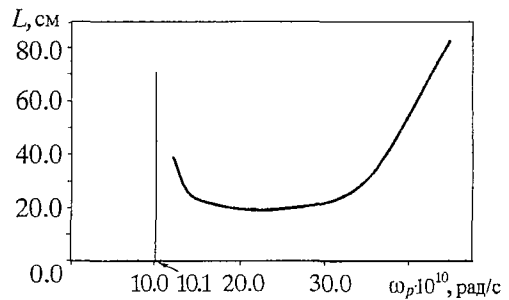


Рис. 5. Зависимость оптимальной длины усилителя от плазменной частоты

входного сигнала была при этом равномерно распределена во всем представленном на рисунке частотном диапазоне. Кривые 1-4 рис. 6 рассчитаны в точности для тех же параметров, что и соответствующие линейные кривые $\delta k(\omega)$ рис. 3. Видно, что излучение сосредоточено в несколько более узкой полосе частот, чем предсказывает линейная теория, что обусловлено нелинейной конкуренцией волн. Максимум же спектральной плотности соответствует максимуму линейного коэффициента усиления $\delta k(\omega)$. Относительная ширина спектров излучения и их центральная частота сильно зависят от плазменной частоты.

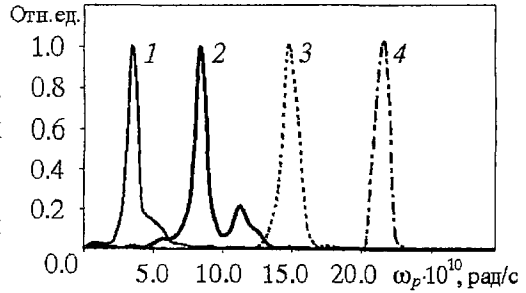


Рис. 6. Спектральные плотности излучения на выходе усилителя для различных плазменных частот

2.3. Линейная теория плазменного СВЧ-генератора. В теории плазменного СВЧ-усилителя предполагается, что все усиленное пучком электромагнитное излучение беспрепятственно выходит из объема усилителя через границу $z=L$. На самом деле на выходной границе $z=L$ усиливаемая пучком плазменная волна частично отражается и возвращается на вход системы $z=0$. Это может служить причиной самовозбуждения усилителя, то есть начала генерации излучения. При рассмотрении плазменного СВЧ-генератора полагают, что на входе системы $z=0$ расположена металлическая сетка, прозрачная для электронов пучка и непрозрачная для излучения. Выходная граница $z=L$ является переходом от плазменного волновода к излучающему рупору. Излучающий рупор представляет собой коаксиальный вакуумный волновод с внешним радиусом R , как и у плазменного волновода, и внутренним радиусом r_0 несколько большим среднего радиуса плазменной трубки r_p . При переходе через границу $z=L$ плазменная кабельная волна трансформируется в вакуумную кабельную. При этом происходит изменение фазовой скорости и структуры СВЧ-поля волны, что и является причиной частичного отражения падающей слева на излучающий рупор плазменной волны.

Для определения коэффициентов отражения плазменной волны по мощности k^2 и по амплитуде k от границы $z=L$ разработаны специальные численные методы [23], основанные либо на прямом решении стационарной дифракционной задачи, либо на определении времени вытекания СВЧ-поля из плазменного резонатора. Имеются и аналитические приближенные формулы [24]. Все подходы дают близкий результат. Поэтому при разработке теории плазменного СВЧ-генератора считается, что коэффициент отражения по амплитуде k известен. На рис. 7 изображены в зависимости от частоты коэффициенты отражения по амплитуде, посчитанные при $r_p=1.1$ см и $r_0=1.15$ см для четырех значений плазменной частоты - тех же, что и на рис. 3 и 6. Вертикальными прямыми на рис. 7 отмечены частоты, на которых коэффициенты усиления (см. рис. 3) и спектральные плотности излучения усилителя (см. рис. 6) достигают максимумов. Видно, что коэффициенты отражения значительны, хотя отражение по мощ-

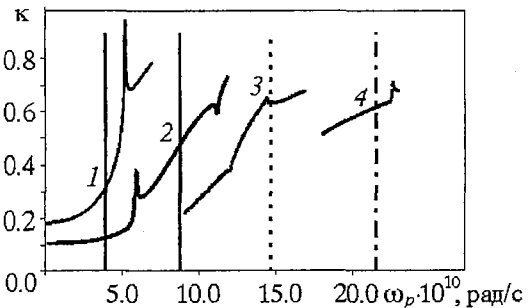


Рис. 7. Зависимости коэффициентов отражения от частоты для различных плазменных частот

ности k^2 в рассматриваемых случаях не превышает 0.5. Пики и изломы на зависимостях, представленных на рис. 7, возникают при близости частоты к какой-либо из частот отсечки системы.

В основе линейной теории плазменного СВЧ-усилителя лежат линеаризованные уравнения (2.2.1), общее решение которых в плазменной области системы при $0 < z < L$ записывается в виде

$$\psi = \sum_{j=1}^4 A_j \exp(ik_z z), \quad (2.3.1)$$

где $k_{zj} = k_{zj}(\omega)$ - корни дисперсионного уравнения (2.1.1). Это уравнение имеет четвертый по k_z порядок, поэтому решение (2.3.1) содержит четыре слагаемых. Постоянные A_j определяются с учетом конкретизированных выше свойств границ системы $z=0$ и $z=L$. Результатом является уравнение для определения комплексных частот плазменного СВЧ-генератора [7, 24]

$$1 = \kappa(\omega) \sum_{j=1}^3 \alpha_{j4}(\omega) \exp\{i[k_{zj}(\omega) - k_{z4}(\omega)]L\}, \quad (2.3.2)$$

где α_{j4} - известные из теории коэффициенты трансформации волн при $z=0$ [7]. Таким образом, если величина $\kappa(\omega)$ известна, то расчет плазменного СВЧ-генератора в линейном приближении сводится хотя и к сложной, но чисто алгебраической задаче (2.3.2).

Основной результат линейной теории состоит в том, что к частоте, близкой к частоте коллективного резонанса, являющейся рабочей частотой генератора, добавляется мнимая поправка, обусловленная передачей энергии от пучка резонатору и выносом энергии из резонатора через рупор [7, 24, 25]

$$\delta\omega = iu/(2L)[\text{Im}\delta kL - \ln(q/|k|)]. \quad (2.3.3)$$

Здесь ω - резонансная частота, δk - определяется из рис. 2, а q - постоянная (в пределах от 2 до 3). Формула (2.3.3) является упрощенным вариантом существенно более общего выражения [7, 23]. Она справедлива, если $\omega L/|u| \gg 1$ и групповая скорость плазменной волны близка к скорости u .

Из (2.3.3) следует условие самовозбуждения плазменно-пучкового резонатора [15, 16, 23]

$$\text{Im}\delta kL = \ln(q/|k|), \quad (2.3.4)$$

откуда определяют стартовые параметры начала генерации. Обычно это - стартовый ток пучка или стартовая длина резонатора. При больших, чем стартовые, токе или длине режим усиления срывается в режим генерации. Из рис. 2 и 7 легко оценить стартовую длину. Если плазменная частота не слишком близка к критической, то стартовая длина в среднем близка к 15 см (от 10 см до 20 см). Если теперь обратиться к рис. 5, на котором изображена оптимальная длина усилителя, то окажется, что она больше стартовой. Следовательно, такой усилитель либо переходит в режим генерации, либо его длину следует делать меньше, увеличив при этом уровень входного сигнала (для сохранения оптимальной эффективности), либо следует улучшить согласование плазменного резонатора с излучающим рупором.

2.4. Нелинейная теория релятивистского плазменного СВЧ-генератора.

Общие нелинейные уравнения плазменного СВЧ-генератора получаются из (2.2.1) заменой выражения для j_b соотношением, основанным на несколько иной модели. В теории генераторов наиболее удобна модель, основанная на методе крупных частиц. При этом [24-26]

$$j_b = (en_b \lambda / N) \sum_j v_j(t) \delta(z - z_j(t)), \quad (2.4.1)$$

где λ - некоторая характерная длина, N - число электронов (крупных частиц) на участке невозмущенного пучка длиной λ , а $z_j(t)$ и $v_j(t)$ - решения уравнений движения j -го электрона

$$dz_j/dt = v_j, \quad (2.4.2)$$

$$dv_j/dt = (e/m)(1 - v_j^2/c^2)^{3/2} E_z.$$

Система (2.4.2) решается с начальными условиями (условия инжекции): $z_j(t=t_{0j})=0$, $v_j(t=t_{0j})=u$, где t_{0j} - время инжекции j -го электрона в плазменный резонатор. Обычно длину λ увязывают с процедурой регуляризации входящих в (2.4.1) дельта-функций. Возможны и иные варианты ее выбора.

Наиболее общий подход в нелинейной теории плазменного СВЧ-генератора, очевидно, состоит в прямом решении системы (2.2.1) и (2.4.1). При этом требуется дополнительное граничное условие для поляризационного потенциала ψ на открытой границе плазменного резонатора $z=L$. Это нестационарное парциальное условие излучения в коаксиальный волновод было сформулировано [27] и применено к решению задачи о плазменном СВЧ-генераторе в самой общей постановке. Одним из важных результатов общей нелинейной теории плазменного СВЧ-генератора является то, что при длительной квазистационарной инжекции пучка в системе возбуждается электромагнитное излучение из достаточно узкого спектрального интервала

$$\Delta\omega \ll \omega, \quad (2.4.3)$$

что согласуется и с результатами по нелинейной теории плазменного СВЧ-усилителя (см. рис.6).

Выполнение неравенства (2.4.3) позволяет разработать достаточно простую и физически наглядную модель плазменного СВЧ-генератора, позволяющую провести подробный анализ его основных характеристик. Основываясь на (2.4.3), введем в рассмотрение волну с фиксированной средней частотой и медленно меняющейся амплитудой. В частности, поляризационный потенциал попутной (резонансной) с пучком плазменной волны представим в виде (см. (2.2.3))

$$\psi = 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\mathbf{r}_\perp) [A_n(z,t) \exp(-i\omega t + i\omega z/u) + \text{К.С.}], \quad (2.4.4)$$

где A_n медленные по сравнению с соответствующим экспоненциальным множителем функции координаты z и времени - медленно меняющиеся амплитуды. Уравнения для медленно меняющихся амплитуд можно получить, используя процедуру (правило) усреднения

$$\langle \Phi \rangle = 1/\lambda \int_{z-\lambda/2}^{z+\lambda/2} \Phi(z') \exp(i\omega t - i\omega z'/u) dz'. \quad (2.4.5)$$

Здесь Φ - усредняемая величина; λ - характерная длина, входящая в (2.4.1). Она, как это следует из (2.4.4) и (2.4.5), определяется формулой

$$\lambda = 2\pi u/\omega. \quad (2.4.6)$$

Подставляя (2.4.4) в уравнения (2.2.1) и (2.4.1) и применяя указанную выше процедуру усреднения, после довольно громоздких выкладок получим следующую систему уравнений плазменного СВЧ-генератора [24-26]

$$(\partial/\partial\xi + \tilde{v}\partial/\partial\tau)J^+ = i/(2\gamma^2)[(1/\alpha_p - 1)J^+ - \theta\alpha_b^*L\langle\rho\rangle], \quad (2.4.7)$$

$$dy/d\tau = \eta_p, \quad d/d\tau[\eta_j/(1 - \beta^2\eta_j^2)^{1/2}] = -(i\gamma^3/2)[\exp(-i\tau + iy_j)L^*(\alpha_b\langle\rho\rangle + J^+) - \text{К.С.}].$$

Здесь

$$\langle\rho\rangle = (2/N)\sum_j f(\tau_{0j})\exp(i\tau - iy_j), \quad L_s^* = 1 - 2i\gamma^2(\partial/\partial\xi + \beta^2\partial/\partial\tau). \quad (2.4.8)$$

В (2.4.7) и (2.4.8) использованы следующие безразмерные переменные и обозначения:

$$\tau = \omega t, \quad \xi = \omega z/u, \quad y_j = \omega z_j/u, \quad \eta_j = v_j/u, \quad \beta = u/c, \quad \tilde{v} = V_g/u, \quad (2.4.9)$$

где V_g - групповая скорость плазменной волны (2.1.4), параметры θ , α_b , α_p определены в линейной теории усилителя и формулах (2.2.5).

Уравнения (2.4.7) и соотношения (2.4.8) полностью соответствуют уравнениям плазменного усилителя (2.2.4) и (2.2.5) при $s=1$, но только являются нестационарными. Величина $\langle\rho\rangle$ является комплексной амплитудой возмущения плотности заряда пучка и соответствует одному из ρ_s в уравнениях плазменного усилителя. В формулу для $\langle\rho\rangle$ (2.4.8) введена функция $f(\tau_{0j})$, где τ_{0j} - момент влета электрона в плазменный резонатор. Эта функция позволяет моделировать фронты пучка и его модуляцию. Величина J^+ является медленной амплитудой попутной с пучком плазменной волны и соответствует одной из функций j_s в (2.2.4).

Уравнений (2.4.7) недостаточно для создания теории плазменного СВЧ-генератора. Необходим учет еще и встречной плазменной волны, осуществляющей обратную связь в генераторе. Встречная волна не находится в резонансе с пучком и в среднем с ним не взаимодействует. Взаимодействие встречной и попутной волн происходит только на продольных границах плазменного резонатора, где они трансформируются друг в друга. Эта трансформация формулируется в виде следующего граничного условия обратной связи [7, 22]

$$J^+(\xi=0, \tau) = -\kappa J^+(\xi=\xi^+, \tau - \xi^+/\tilde{v}), \quad (2.4.10)$$

где κ - рассматривавшийся ранее коэффициент отражения, $\xi^+=\omega L/u$ - безразмерная длина плазменного резонатора, а знак минус в (2.4.10) отвечает изменению фазы волны при отражении от металлической сетки при $z=0$. Уравнения (2.4.7) с граничным условием (2.4.10) являются замкнутой системой нелинейной теории релятивистского плазменного СВЧ-генератора [22-24]. Изложенные в предыдущем п. 2.3 результаты линейной теории следуют естественно из полученных выше систем уравнений и условия обратной связи.

Уравнения (2.4.7) и (2.4.10) пригодны и весьма эффективны в теории плазменных генераторов на импульсных электронных пучках при условии (см. (2.4.3)), что $\omega T \gg 1$, где T - характерный временной масштаб изменения тока пучка. Например, при стационарной инжекции электронного пучка при определенных условиях возможно установление и стационарного режима генерации [28], в котором $\partial/\partial\tau=0$ и уравнения (2.4.7) переходят в (2.2.4) (можно обозначить j_s как J^+), а условие обратной связи (2.4.10) записывается в виде

$$J^+(\xi=0) = -\kappa J^+(\xi=\xi^+). \quad (2.4.11)$$

Уравнения (2.2.4) вместе с граничным условием (2.4.11) являются краевой задачей на собственные значения, решения которой определяют стационарные режимы работы плазменного СВЧ-генератора. Собственным же значением является

$J^+(\xi=0)$. Сам факт существования стационарных режимов совсем не очевиден, но если они есть, то найти их можно с помощью простого итерационного процесса. При очень малом значении $J^+(\xi=0)$ решаются уравнения (2.2.4) и определяется $J^+(\xi=\xi^+)$. Затем по (2.4.11) вычисляется новое значение $J^+(\xi=0)$ и снова решаются уравнения (2.2.4) и т.д. Если этот процесс сойдется, то будет найден возможный режим стационарной работы плазменного СВЧ-генератора. Впрочем можно не осуществляя итерационного процесса сразу исходить из нестационарной задачи (2.4.7), (2.4.10). Она не намного сложнее и позволяет исследовать установление стационарных или квазистационарных режимов генерации.

Рассмотрим некоторые результаты моделирования плазменного СВЧ-генератора при стационарной инжекции электронного пучка [28]. Будем варьировать длину плазменного резонатора и менять плазменную частоту, но зафиксируем прежние параметры: $I_b=2$ кА, $R=1.8$ см, $r_b=0.6$ см, $\Delta_b=\Delta_p=0.1$ см, $\gamma=2$, $r_p=1.1$ см. На рис. 8 для четырех плазменных частот тех же, что и на рис. 3, 6 и 7, представлены в зависимости от длины плазменного резонатора L эффективности генерации (коэффициенты отражения брались с рис. 7). Резкое возрастание эффективности излучения от нуля до некоторой довольно значительной величины связано с превышением стартовой длины генерации. Причем стартовые длины по рис. 8 очень близки к тем, что определяются из (2.3.4). При дальнейшем увеличении длины плазменного резонатора наблюдаются осцилляции эффективности, что связано с перемещением точки насыщения пучковой неустойчивости от границы $z=L$ к меньшим z и обратно. Максимальные значения эффективностей генерации оказываются даже несколько выше максимальных эффективностей усиления монохроматического сигнала. Однако сравнение с рис. 4 подтверждает уменьшение эффективности излучения с ростом плазменной частоты. В целом применение разнообразных методов и моделей расчетов черенковских плазменных СВЧ-усилителей и генераторов на плотных релятивистских электронных пучках дает близкие результаты по эффективностям, спектрам, критическим плазменным частотам и стартовым параметрам, зависимостям от основных характеристик пучково-плазменной системы и согласуется с результатами экспериментальных исследований, о которых речь ниже.

3. Экспериментальная плазменная релятивистская СВЧ-электроника

3.1. Плазменный релятивистский черенковский СВЧ-генератор. Первые эксперименты по возбуждению сильноточным РЭП волн в плазменном волноводе, как уже отмечалось, были проведены в 1982 году [14]. Схема ПРГ почти не изменялась с 1982 года по 2000 год, она представлена на рис. 9. Эту схему можно найти в обзорных статьях [29-33], в которых приведены также результаты экспериментов и методики измерений. Импульс высокого напряжения подается на катод ускорителя 1. Электронный пучок 2 инжектировался вдоль оси круглого металлического волновода 3, предварительно заполненного трубчатой плазмой 4.

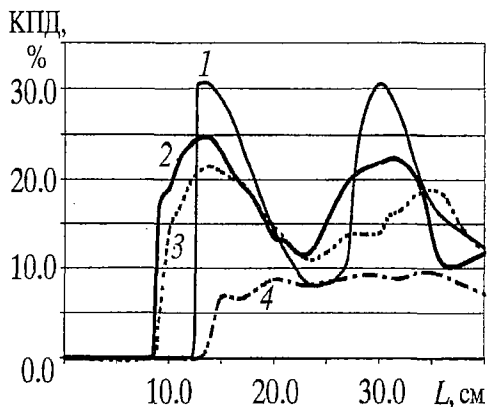


Рис. 8. Зависимости максимальной эффективности генерации от длины плазменного резонатора для различных плазменных частот

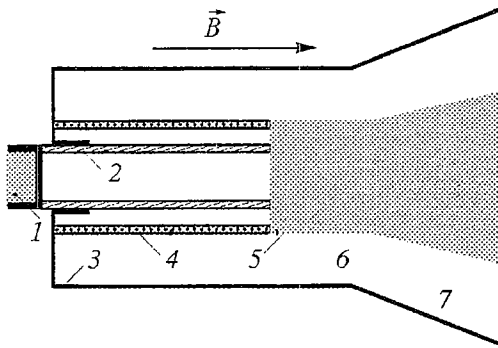


Рис. 9. Схема ПРЛ: 1 - катод ускорителя, 2 - РЭП, 3 - металлический волновод, 4 - плазма, 5 - коллектор РЭП, 6 - коаксиальный вакуумный волновод, 7 - рупор

поперечные размеры (пучок, плазма, волновод), а также плотность плазмы и пучка, величина магнитного поля постоянны вдоль длины. Это обстоятельство значительно упрощает теоретический анализ. Плазма помещена в сильное постоянное магнитное поле $\Omega_e > \omega$, это обеспечивает отсутствие резонансного поглощающего слоя, где выполняется равенство частоты излучения и гибридной частоты $\omega^2 = \omega_p^2 + \Omega_e^2$.

Значительная часть энергии, возбуждаемой волной, содержится в вакуумном зазоре между плазмой и стенкой волновода. Близость структуры поля этой части плазменной волны к структуре волны ТЕМ коаксиального излучающего устройства, высокая фазовая скорость, близкая к скорости света, обеспечивают высокую эффективность вывода энергии медленных плазменных волн (МПВ) в коаксиальное излучающее устройство. Применение коаксиального выходного излучающего устройства обеспечивает возможность эффективного вывода излучения в широкой полосе частот.

Ниже мы обсудим результаты экспериментов без указания описания

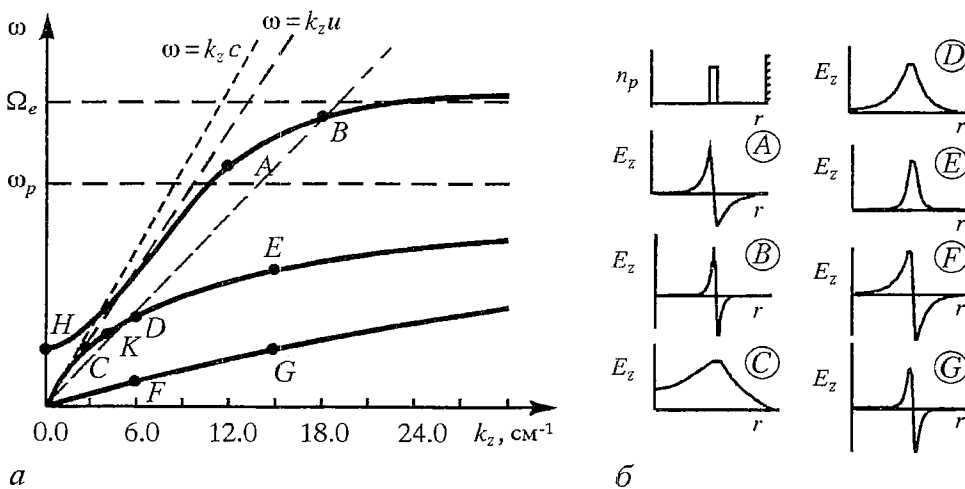


Рис. 10. а - дисперсионные кривые в плазменном волноводе в конечном магнитном поле: кривая *HAB* - быстрая мода E_{01} ; кривые *CE* и *FG* - медленные плазменные волны с индексами $l=0$ и $l=1$; линия *DB* - медленная пучковая волна; $\Omega_e/(2\pi)=56$ ГГц; $\omega_p/(2\pi)=40$ ГГц; б - зависимости $n_p(r)$ и $E_z(r)$ для точек *A, B, C, D, E, F, G*

Пучок и плазма помещены в однородное продольное магнитное поле \mathbf{B} . Электроны пучка имеют только продольную компоненту скорости. Длина электронного пучка ограничивалась торцом центрального проводника 5 коаксиального выходного излучающего устройства 6. СВЧ-волна генерируется в плазменном волноводе, затем распространяется по вакуумному коаксиальному волноводу 6 и излучается рупором 7. В эту схему заложены следующие основные идеи.

Трубчатая плазма имеет диаметр больше диаметра пучка и не попадает в диод сильноточного ускорителя. Все

измерений. Они описаны в цитированных выше обзорах либо в указанной в них библиографии. Начнем с анализа дисперсионных кривых для конкретных условий эксперимента. Дисперсия плазменного волновода для случая, когда циклотронная частота больше плазменной частоты, $\Omega_e > \omega_p$, радиус металлического волновода $R=1.8$ см, радиус трубчатой плазмы $r_p=1$ см, толщина плазмы $\Delta r_p=0.1$ см, ток пучка $J_b=2$ кА и $\gamma=2$ показана на рис. 10, а. Из быстрых мод, $v_{ph} > c$, представлена только низшая по радиальному индексу азимутально-симметричная E -волна (кривая HAB). При уменьшении плотности плазмы частоты этой ветви понижаются и данная плазменная кривая превращается в вакуумную моду круглого волновода E_{01} . При частотах $\omega > \omega_p$ (кривая AB) волна становится медленной, $v_{ph} < c$, и при $k_z \rightarrow \infty$ $\omega \rightarrow \Omega_e$. На рисунке приведена линия $\omega=k_z u$, для электронного пучка с энергией электронов 500 кэВ. С учетом конечной плотности электронов пучка дисперсия медленной пучковой волны изображена линией DB . Таким образом, пучок может возбуждать волну с частотой и волновым вектором, соответствующим точке B . На рис. 10, б изображены распределения компоненты высокочастотного электрического поля E_z по радиусу. Видно, что при больших значениях k_z поле E_z сосредоточено в основном в плазме (см. распределение $E_z(r)$ в точке B). Если радиус пучка $r_b=0.5$ см, то поле E_z внутри электронного пучка для резонансной частоты в точке B оказывается малым и возбуждение этой волны затрудняется.

Рассмотрим теперь дисперсию МПВ, частоты которых лежат ниже ω_p . На рис. 10, а изображены две плазменные азимутально-симметричные моды CDE и FG . Мода CDE является низшей по количеству вариаций вдоль радиуса (см. распределение $E_z(r)$ в точках C, D, E), мода FG более высокой (см. распределение $E_z(r)$ в точках F, G). При больших значениях k_z частота для обеих мод стремится к ω_p , а высокочастотное электрическое поле содержит только продольную компоненту E_z и сосредоточено внутри плазмы (см., например, распределение $E_z(r)$ в точке E). Таким образом, волна превращается в продольную плазменную волну безграничной холодной плазмы с частотой ω_p и групповой скоростью близкой к нулю. При малых k_z поле E_z распределено по всему объему волновода (см., например, распределение $E_z(r)$ в точке C) и значительная часть энергии поля содержится в радиальной компоненте E_r .

Картина силовых линий электрического поля в точке D (см. рис 10, б) показана на рис. 11 и качественно подтверждает распределение $E_z(r)$ (см. распределение $E_z(r)$ в точке D на рис. 10, б). Поле E_z максимально в плазме и

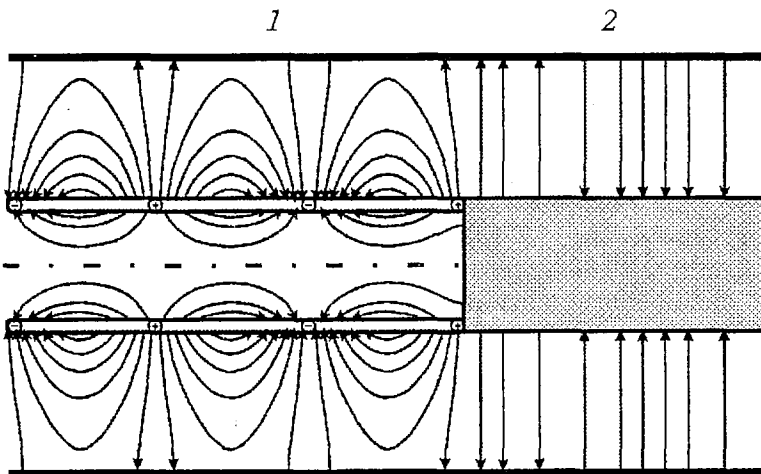


Рис. 11. Картина силовых линий электрического поля в плазменном волноводе азимутально-симметричной моды МПВ

спадают как к оси волновода, так и к стенке волновода. Между плазмой и стенкой волновода поле в основном имеет радиальную компоненту E_r . Видно, что поле вне плазмы велико, когда $2\pi/k_z \geq R - r_p$. Отсюда, следуют два важных вывода. Распределение поля в зазоре между плазмой и стенкой волновода напоминает картину поля ТЕМ-моды коаксиального волновода, что способствует хорошей трансформации этой волны в волну коаксиального металлического волновода, через которое излучение выводится в окружающее пространство. Второе важное обстоятельство состоит в том, что на стенке металлического волновода поле мало и имеет только радиальную компоненту. Наличие сильного внешнего продольного магнитного поля делает невозможным высокочастотный пробой на стенке волновода.

В отличие от быстрых мод вакуумного волновода, где поперечное волновое число $k_{\perp n}$ постоянно для данной моды, поперечное волновое число для каждой моды МПВ плавно изменяется при изменении частоты. Азимутально-симметричные моды МПВ удобно классифицировать по значению k_{\perp} в точке $\omega=0$, $k_z=0$. Именно $k_{\perp n}$ определяет наклон кривых МПВ относительно оси k_z . Большое различие в $k_{\perp n}$ для соседних по радиальному индексу мод n позволяет возбуждать только одну низшую по радиальному индексу моду МПВ в окрестности точки D (см. рис. 10, а). Обратим внимание, что в точке D поле E_z на радиусе пучка $r_b=0.5$ см имеет значительную величину, поэтому возбуждение волны в точке D предпочтительнее, чем в точке A .

Зависимость пространственного инкремента δk амплитуды электрического поля от частоты для различных значений плотности плазмы приведена на рис. 2. Видно, что по линейной теории может возбуждаться широкая полоса частот. Важно, что максимальное значение пространственного инкремента остается практически постоянным в широкой области частот, в данном случае от 12 до 20 ГГц. Это позволяет надеяться, что можно создать генератор или усилитель с широкой перестройкой частоты излучения и с постоянной эффективностью только за счет изменения плотности плазмы без изменения геометрии прибора.

Величина максимальных значений δk на рис. 2 при фиксированной энергии электронов зависит от тока пучка и связи электронного пучка с МПВ. В эксперименте изменялся зазор между трубчатыми РЭП и плазмой. При уменьшении этого зазора E_z в пучке возрастает (см. распределение $E_z(r)$ в точке D на рис. 10, б) и δk увеличивается.

Здесь следует сделать замечание. Рис. 10 построен для случая $\Omega_e > \omega_p$ ($\Omega_e = 1.4 \omega_p$), а рис. 11 - для случая $\Omega_e \gg \omega_p$. Анализ показывает, что ход дисперсионной кривой в области, где $\omega \approx 0.3 \div 0.5 \omega_p$ (область частот, возбуждаемых пучком волн), при $\Omega_e \gg \omega_p$ и конечном магнитном поле $\Omega_e \geq 1.2 \omega$ примерно одинаков. Поэтому требование $\Omega_e > \omega_p$ и даже $\Omega_e \geq 1.2 \omega$ достаточно для использования расчета по возбуждению волн, проведенных в приближении $\Omega_e \rightarrow \infty$. Дисперсия волн на частотах $\omega = 0.3 \div 0.5 \omega_p$ при условии $\Omega_e \leq \omega$ качественно отличается от случая $\Omega_e \gg \omega_p$.

Проведены расчеты нелинейных процессов усиления монохроматической волны и шумового сигнала. Максимальные значения КПД усиления в условиях рис. 2 в режиме усиления монохроматической волны достигают 30% (см. рис. 8), а в режиме шумового сигнала 15% (см. рис. 4) на характерной длине примерно 20÷40 см (см. рис. 5). Максимальная эффективность усиления и мощность излучения достигается при токе РЭП примерно равном значению предельного вакуумного тока I_0 .

Перейдем теперь к экспериментальным работам и их сравнению с теорией. Спектры ПРГ при разных значениях плотности плазмы представлены на рис. 12 [34, 35]. Видно, что средняя частота излучения возрастает от 4 ГГц до 30 ГГц с увеличением плотности плазмы от $4 \cdot 10^{12}$ см⁻³ до $7 \cdot 10^{13}$ см⁻³. Метод измерения

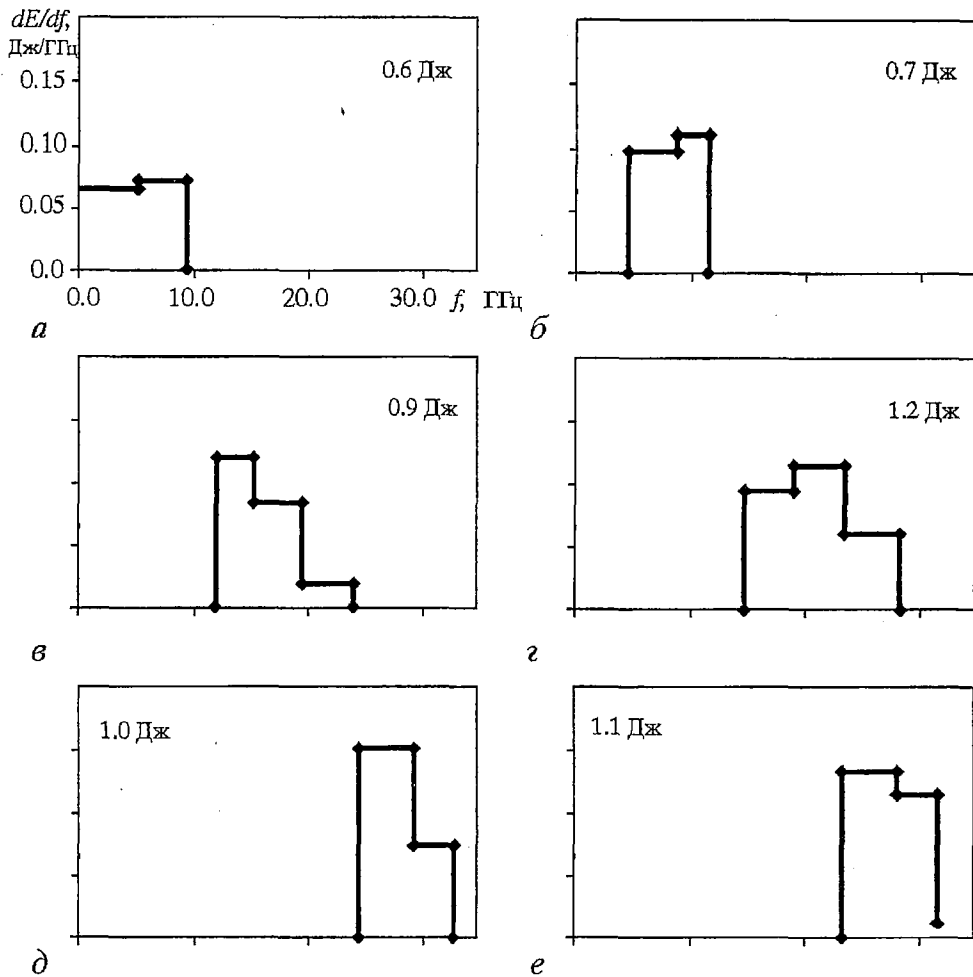


Рис. 12. Спектры частот плазменного релятивистского СВЧ-генератора при различных значениях плотности плазмы (10^{13} см^{-3}): а - 0.4, б - 0.8, в - 2.3, г - 4.4, д - 6.0, е - 7.0. На каждом из рисунков указана полная энергия СВЧ-импульса в джоулях

спектров основан на регистрации полной энергии СВЧ-излучения за импульс калориметром (диаметр калориметра 30 см), перед которым располагались частотные фильтры. Этот метод позволяет определить энергию СВЧ-импульса в каждом из заданных восьми частотных полос от 0 до 32 ГГц.

Сравнение экспериментальной зависимости среднего значения частоты ПРГ от плотности плазмы с результатами расчетов приведено на рис. 13. Расчет проведен для усилителя, на вход которого подается спектр частот в полосе от 0 до 40 ГГц. Видно, что зависимость средней частоты от плотности плазмы в эксперименте хорошо совпадает с расчетом. Генерация МПВ

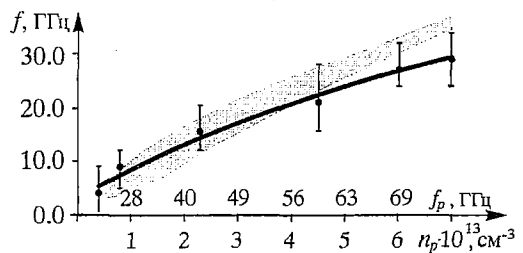


Рис. 13. Зависимость частоты СВЧ-излучения f от плотности плазмы n_p и плазменной частоты $f_p = \omega_p / (2\pi)$ построена по экспериментальным результатам, вертикальные отрезки определяют границы измеренного спектра и соответствуют рис. 12. В заштрихованной области частот согласно расчету находится спектр излучения по уровню 0.3 от максимального значения спектральной плотности. Расчет выполнен для $\Omega_e / (2\pi) \gg f_p$, в эксперименте $\Omega_e / (2\pi) = 62 \text{ ГГц}$

возникает в полном соответствии с теорией при $n_p > 3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$. Наблюдается расхождение с теорией в области высоких значений плотности плазмы, что, по-видимому, связано с нарушением условия $\Omega_e > \omega_p$. На рис. 13 указана измеренная ширина спектра. Однако точность измерения ширины спектра невелика, можно только утверждать, что ширина спектра не превосходит указанной на рисунке и не меньше чем половина от приведенной на рисунке. Поэтому из рис. 13 следует, что ширина спектра ПРГ либо больше, либо равна расчетному значению ширины спектра усилителя.

Длительность СВЧ-импульса в этом эксперименте была равна 25 нс во всем диапазоне значений плотности плазмы. Таким образом, 1 Дж соответствует мощности 40 МВт, а КПД при этом равен 4%. Обратим внимание на тот факт, что при изменении плотности плазмы от 10^{13} см^{-3} до $7 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ мощность СВЧ-излучения почти постоянна. Это возможно, если величина δk почти постоянна для данного диапазона плотностей плазмы (см. рис. 12). Кроме того, необходимо, чтобы коэффициент отражения волны от перехода плазменный волновод - вакуумный коаксиальный излучающий рупор на частоте излучения не зависел бы от значения плотности плазмы.

Результаты, представленные на рис. 12 и 13, получены для длины плазменного волновода $L=20 \text{ см}$, $B=2.2 \text{ Тл}$ и $n_p=(0.4 \div 7) \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, при этом $\Omega_e/\omega_p = 3.5 \div 0.82$. Расчеты же проведены для $\Omega_e \gg \omega_p$. Из рисунка следует, что расчетные и экспериментальные данные совпадают при $\omega_p < \Omega_e$. Эта закономерность сохраняется при уменьшении магнитного поля, расхождение между расчетом и экспериментом появляется при меньших значениях плотности плазмы, когда выполняется условие $\omega_p > \Omega_e$ и поэтому исчезает генерация высоких частот. При длине плазменного волновода 10 см и $B=2.2 \text{ Тл}$ мощность излучения возрастает до 60 МВт, но исчезает генерация низких частот. Это объясняется тем, что при малых значениях n_p резко уменьшается величина δk (см. рис. 12).

Одно из преимуществ ПРГ заключается в принципиальной возможности использования токов, превышающих значение предельного вакуумного тока. В эксперименте (в условиях) использовался ток 2.0 кА (при $eU=500 \text{ кэВ}$), а предельный вакуумный ток был равен $I_0=3.5 \text{ кА}$. Повышение тока инжекции до 3 кА не приводит к увеличению мощности СВЧ-излучения, что объясняется расчетным падением КПД усилителя при токах, близких и превышающих значение предельного вакуумного тока.

Таким образом, обнаруженные в эксперименте закономерности качественно подтверждаются расчетом, а одна из основных зависимостей от n_p (см. рис. 13) совпадает с расчетом количественно. Это означает, что в эксперименте действительно возбуждается азимутально-симметричная мода МПВ с радиальным индексом $l=0$. Ширина спектров излучения и эффективность генерации определяются зависимостью $\delta k(\omega)$ и нелинейным процессом захвата электронов полем излучения.

Итак, экспериментально реализован ПРГ, в котором возможна широкая перестройка средней частоты (в 7 раз) с постоянной времени ($\sim 30 \text{ мкс}$), определяемой возможностью изменения плотности плазмы в электродинамической системе. Такую перестройку не могут обеспечить вакуумные релятивистские СВЧ-генераторы. Основные закономерности, предсказанные расчетом, подтверждены экспериментально.

3.2. Плазменный релятивистский СВЧ-усилитель. Эксперименты по плазменному релятивистскому СВЧ-генератору продемонстрировали их уникальную особенность: возможность перестройки частоты генерации в широких пределах ($4 \div 28 \text{ ГГц}$) за счет изменения плотности плазмы при примерном постоянстве СВЧ-мощности излучения.

Спектр излучения ПРГ оказался довольно широким, $\Delta f/f \sim 0.3$. Широкий спектр излучения представляет интерес для решения ряда прикладных задач. Однако имеет большое практическое значение - создание источников монохроматического излучения с таким же, как у ПРГ, широким диапазоном перестройки частоты.

Как уже говорилось, задача усиления монохроматического сигнала наиболее проста для теоретического рассмотрения. Еще раз напомним ее постановку. На вход полуограниченного металлического волновода, заполненного плазмой, подается узкополосный высокочастотный сигнал. Вдоль оси волновода инжектируется сильноточный РЭП. Пучок и плазма фокусируются однородным бесконечно сильным магнитным полем. Волны, возникающие при взаимодействии РЭП с плазмой, распространяются в направлении движения электронов РЭП без отражений. Исследуется распределение напряженности электрического поля вдоль оси волновода, изучаются механизмы ограничения мощности СВЧ-излучения.

Поскольку такая постановка задачи имеет детальное теоретическое описание, было естественно начать экспериментальное исследование с изучения усилителя. Однако оказалось, что реализация сформулированной выше задачи создания усилителя в эксперименте оказалась чрезвычайно сложной.

Усилитель в эксперименте имеет выход, и мощное СВЧ-излучение выводится в атмосферу. Таким образом, в эксперименте обязательно существует устройство, в котором плазменные волны трансформируются в волны вакуумного волновода и затем через выходное диэлектрическое окно излучаются в атмосферу. Итак, в эксперименте невозможно создать переход от плазменного волновода в вакуумный волновод, который имеет коэффициент отражения равный нулю в широком диапазоне частот.

Для того, чтобы процессы в эксперименте были близки к идеальной постановке, необходимо создать переход от плазменного волновода в вакуумный с возможно малым значением коэффициента отражения. Кроме того, на входе усилителя помещаются поглотители СВЧ-излучения, которые должны полностью поглощать излучение, отраженное от выходного устройства. Такой поглотитель исключает возможность возникновения режима генерации. Обе экспериментальные задачи - создание выходного устройства с малым коэффициентом отражения и широкополосного идеального поглотителя на входе усилителя оказались - очень сложными. По этой причине экспериментальные работы по плазменному релятивистскому СВЧ-усилителю выполнены были только в последнее время [36, 37].

Схема установки изображена на рис. 14. Трубочатая плазма 1 со средним радиусом 7.5 мм и толщиной 1 мм расположена в продольном однородном магнитном поле с индукцией 1.6 Тл в цилиндрическом металлическом волноводе 2 с радиусом 22 мм. Плазма создается в разряде с горячим катодом в газе ксеноне. Потенциал катода 600 В, ток разряда до 100 А, давление газа 3.5×10^{-4} Тор. Вдоль оси волновода распространяется трубчатый релятивистский электронный пучок 3 со следующими параметрами: энергия электронов 550 кэВ, ток 1.5 кА, длительность импульса 150 нс, средний радиус пучка 10 мм, толщина пучка 1 мм. На входе усилителя установлен СВЧ-преобразователь 4, возбуждающий во входном коаксиале ТЕМ-моду, которая трансформируется в быструю и медленную моды плазменного волновода. Медленная плазменная мода усиливается РЭП, затем трансформируется в ТЕМ-моду выходного металлического коаксиального волновода и излучается выходным коаксиальным рупором большого сечения 5. Длина, на которой возможно взаимодействие РЭП и плазмы, равна 29 см.

Поглотитель 6 со следующими параметрами: внешний радиус 22 мм, внутренний радиус 11.5 мм, длина 14 см - устанавливался на расстоянии 3 см от конус-

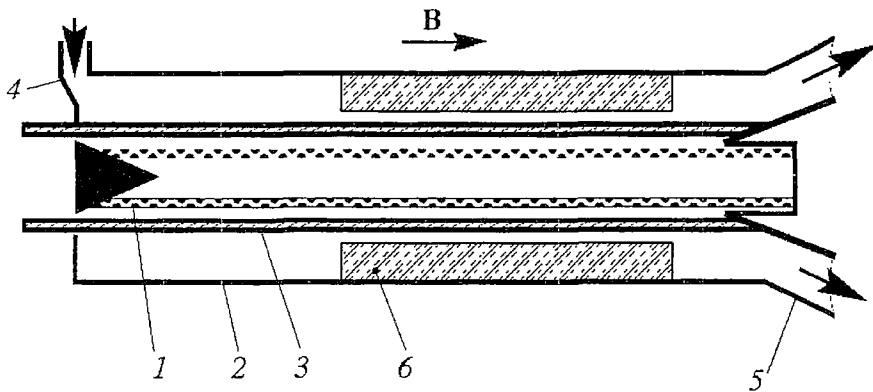


Рис. 14. Схема плазменного релятивистского СВЧ-усилителя: 1 - трубочатая плазма, 2 - металлический волновод, 3 - РЭП, 4 - СВЧ-преобразователь, 5 - рупор, 6 - поглотитель

ного коллектора РЭП на выходе системы. Коэффициент поглощения СВЧ-мощности составил: 20 дБ для ТЕМ-волны в коаксиале с внутренним радиусом 5 мм и внешним радиусом 22 мм; 50 дБ для TM_{01} -волны в волноводе радиусом 22 мм. Измерения были проведены на частоте 9.1 ГГц.

В качестве источника входного СВЧ-сигнала использовался один из двух импульсных магнетронов. Первый магнетрон имел частоту $f_0=12.9$ ГГц, длительность импульса 2 мкс, мощность $P_{\text{вх}}=75$ кВт. Параметры второго магнетрона были соответственно 9.1 ГГц, 20 мкс, 40 кВт.

Для оценки выходной СВЧ-мощности и спектра излучения использовался приемный тракт, представляющий собой волновод 23×10 мм², в котором принимаемая СВЧ-мощность регистрировалась двумя детекторами. Первый детектор (широкополосный приемник) измерял всю СВЧ-мощность в приемном тракте. На входе второго детектора (узкополосный приемник) был включен один из двух узкополосных СВЧ-фильтров ($\Delta f=0.29$ ГГц при $f_0=12.9$ ГГц; $\Delta f=0.51$ ГГц при $f_0=9.1$ ГГц), настроенный на частоту магнетрона. Чувствительности обоих приемников по мощности были приблизительно одинаковыми, поэтому в том случае, когда спектр излучения на входе приемного тракта был уже полосы пропускания СВЧ-фильтра, отношение сигналов с узкополосного и широкополосного приемников было равно единице. Если же спектр излучения на входе приемного тракта был шире полосы пропускания СВЧ-фильтра, это отношение уменьшалось. Таким образом, существовала возможность оценки ширины спектра выходного СВЧ-излучения.

Для абсолютного измерения выходной СВЧ-мощности использовался широкополосный широкоапертурный СВЧ-калориметр. Калориметр измерял полную энергию Q выходного СВЧ-импульса. Огибающая СВЧ-импульса регистрировалась детектором, и это позволяло определить выходную мощность СВЧ-излучения.

Поскольку эксперименты по плазменному СВЧ-усилителю в процессе производства, мы здесь приведем только некоторые хорошо известные результаты.

Если на вход подавался сигнал $f_1=9.1$ ГГц при $\Delta f_1=0.51$ ГГц с мощностью 40 кВт, то на выходе наблюдалось усиленное излучение с той же частотной характеристикой при выходной мощности 8 МВт, то есть коэффициент усиления равен 200. Усиление имеет место в области плотностей плазмы $3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3} < n_p < 1.2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Если же на вход подавался сигнал $f_2=12.9$ ГГц при $\Delta f_2=0.29$ ГГц с мощностью 75 кВт, то на выходе наблюдалось усиленное излучение с той же частотной характеристикой в 3 МВт, то есть коэффициент усиления равен 40. Усиление имеет место в

области плотностей плазмы $1 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3} < n_p < 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Эти области усиления, так же как и сам коэффициент однопроходного усиления, полностью согласуются с теорией, представленной на рис. 3.

Согласно теории существует диапазон плотностей плазмы, при котором режим усиления реализуется одновременно на обеих частотах подаваемого на вход сигнала. Видно, что это происходит при указанных выше коэффициентах усиления при плотности плазмы $n_p = 1.2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$.

Общие выводы

Из изложенного выше очевидным образом следует уникальность черенковских плазменных релятивистских источников СВЧ-излучения, несомненные преимущества параметров таких источников по сравнению с параметрами вакуумных источников СВЧ-излучения. Перечислим главные из них.

- В плазменных релятивистских источниках СВЧ благодаря эффектам нейтрализации пространственного заряда и тока пучка возможно использование пучков с токами, сравнимыми или даже превосходящими значение предельного вакуумного тока пучка той же геометрии в вакуумной системе. В свою очередь, это обстоятельство открывает возможность достижения в плазменных источниках СВЧ-излучения больших мощностей, чем в соответствующих вакуумных источниках. В реализованных нами генераторах СВЧ-излучения пока достигнуты уровни мощности сравнимые с мощностями вакуумных приборов, хотя теория предсказывает возможность существенного повышения мощности плазменных источников.

- В плазменных релятивистских источниках СВЧ-излучения возможна очень быстрая электронная перестройка частоты излучения, что принципиально отличает эти источники от вакуумных аналогов. Выше это было продемонстрировано в области частот от 4 ГГц и до 28 ГГц в полном согласии с теорией. При этом мощность генерации во всей области частот была на уровне 50 МВт.

- Еще одним несомненным преимуществом плазменных релятивистских источников СВЧ-излучения по сравнению с вакуумными является их широкополосность. В томсоновском режиме относительная ширина полосы генерации СВЧ-излучения $\Delta\omega/\omega \geq 0.3$. Вместе с тем легко осуществить переход к рамановскому режиму с узким спектром генерации $\Delta\omega/\omega \geq 0.05$. В аналогичных вакуумных источниках СВЧ-излучения такие параметры недостижимы.

- Преодолены трудности по реализации плазменного релятивистского усилителя СВЧ-излучения. В одном приборе реализовано усиление мощности на частотах $f_1 = 9.1$ ГГц в 200 раз и $f_2 = 12.9$ ГГц в 50 раз. В области плазменных усилителей СВЧ-излучения не все проблемы еще до конца решены: эффективное усиление удастся осуществить в области низких частот, $\omega \ll \omega_p$, когда используемый излучающий рупор обладает малым коэффициентом отражения и самовозбуждение источника СВЧ не происходит. Расширение полосы усиления в плазменных релятивистских усилителях наталкивается на проблему минимизации отражательных свойств рупора излучения в широкой полосе частот, что является основной пока еще нерешенной проблемой плазменной релятивистской СВЧ-электроники.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов «Электроника и Радиотехника» Миннауки и «Университеты России».

Библиографический список

1. Ахиезер А.И., Файнберг Я.Б. О взаимодействии пучка заряженных частиц с электронной плазмой // ДАН СССР. 1949. Т. 69, № 3. С. 551.
2. Bohm D., Gross E. Theory of plasma oscillations // Phys. Rev. 1949. Vol. 75, № 11. P. 1851.
3. Бернашевский Г.А., Богданов Е.В., Кислов В.Я., Чернов З.С. Плазменные и электронные СВЧ усилители и генераторы. М.: Сов. Радио, 1965.
4. Трубецков Д.И., Пищик Л.А. Черенковские нерелятивистские плазменные СВЧ приборы // Физика плазмы. 1989. Т. 15, № 3. С. 200.
5. Рухадзе А.А. О взаимодействии релятивистского пучка заряженных частиц с плазмой // ЖТФ. 1962. Т. 32, № 6. С. 669.
6. Ковтун Р.И., Рухадзе А.А. К теории нелинейного взаимодействия релятивистского пучка электронов с плазмой // ЖЭТФ. 1970. Т. 58, № 6. С. 1219.
7. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990.
8. Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Устойчивость РЭП и проблема предельных токов // УФН. 1971. Т. 103, № 4. С. 609.
9. Рухадзе А.А. и др. Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980.
10. Аронов Б.И., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Возбуждение электромагнитных волн в плазменных волноводах электронным пучком // Plasma Phys. 1976. Vol. 16, № 1. P. 101.
11. Рабинович М.С., Рухадзе А.А. Принципы сильноточной релятивистской плазменной СВЧ электроники // Физика плазмы. 1976. Т. 2, № 5. С. 715.
12. Богданкевич Л.С., Рабинович М.С. и Рухадзе А.А. Релятивистская плазменная СВЧ электроника // Изв. вузов. Физика. 1979. Т. 10, № 2. С. 47.
13. Богданкевич Л.С., Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Плазменная СВЧ электроника // УФН. 1981. Т. 133, № 1. С. 3.
14. Кузелев М.В., Мухаметзянов Ф.Х., Рабинович М.С. и др. Плазменный релятивистский СВЧ генератор // ЖЭТФ. 1982. Т. 83, № 4. С. 1358; то же ДАН СССР. 1982. Т. 267, № 4. С. 829.
15. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Современное состояние теоретической релятивистской плазменной СВЧ-электроники // Физика плазмы. 2000. Т. 26, № 3. С. 231.
16. Биро М., Красильников М.А., Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Проблемы теории релятивистской плазменной СВЧ-электроники // УФН. 1997. Т. 167, №10. С. 1025.
17. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. О влиянии редкой фоновой плазмы на спектры излучения СВЧ-генератора на сильноточном релятивистском электронном пучке // Физика плазмы. 1999. Т. 25, № 5. С. 471.
18. Кузелев М.В., Мухаметзянов Ф.Х., Шкварунец А.Г. Черенковская генерация низшей моды коаксиального плазменного волновода // Физика плазмы. 1983. Т. 9, № 6. С. 1137.
19. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Вынужденное излучение сильноточных релятивистских электронных пучков // УФН. 1987. Т. 152, № 2. С. 285.
20. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Метод характеристик уравнения Власова в начальной и граничной задачах электродинамики // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 10. С. 867.
21. Кузелев М.В., Лазутченко О.В., Рухадзе А.А. Режимы и спектры черенковской пучковой неустойчивости в нелинейной плазме // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 10. С. 958.
22. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Оптимальные эффективности и спектры излучения черенковских плазменных СВЧ-усилителей на сильноточных РЭП // Физика плазмы. 1998. Т. 24, №6. С. 530.

23. *Карташов И.Н., Красильников М.А., Кузелев М.В.* Отражение электромагнитных волн от перехода волновода с трубчатой плазмой в вакуумный коаксиальный волновод // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 12. С. 1502.

24. *Биро М., Красильников М.А., Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Нелинейная теория плазменного СВЧ-генератора на кабельной волне // ЖЭТФ. 1997. Т. 111, № 4. С. 1258.

25. *Красильников М.А., Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Нелинейная динамика резонансного вынужденного черенковского излучения в пространственно-ограниченной плазме // ЖЭТФ. 1995. Т. 108, № 2(8). С. 521.

26. *Красильников М.А., Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Каскадные процессы в плазменном генераторе // ЖЭТФ. 1997. Т. 112, № 4(10). С. 1299.

27. *Бобылев Ю.В., Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Свешиников А.Г.* Нестационарные парциальные условия излучения в задачах релятивистской сильноточной плазменной СВЧ-электроники // Физика плазмы. 1999. Т. 25, № 7. С. 615.

28. *Красильников М.А., Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Об установившихся режимах плазменного генератора // КСФ. 1996, № 7-8. С. 22.

29. *Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С.* Релятивистская плазменная СВЧ-электроника // УФН. 1985. Т. 146, № 4. С. 709.

30. *Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С., Шкварунец А.Г.* Релятивистская сильноточная плазменная СВЧ-электроника: преимущества, достижения, перспективы // Физика плазмы. 1987. Т. 3, № 11. С. 1370.

31. *Kuzelev M.V., Rukhadze A.A., Strelkov P.S., Shkvarunets A.G.* High power broad-band tunable microwave plasma-beam oscillator // Proc. Beams-96, Prague. 1996. Vol. 1. P. 225.

32. *Рухадзе А.А., Стрелков П.С., Шкварунец А.Г.* Широкополосный релятивистский плазменный СВЧ-генератор // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 3. С. 682.

33. *Loza O.T., Shkvarunets A.G., Strelkov P.S.* Experimental plasma relativistic microwave electronics // IEEE Trans. On Plasma Sciences. 1998. Vol. 26, № 6. P. 615.

34. *Кузелев М.В., Лоза О.Т., Пономарев А.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С., Ульянов Д.К., Шкварунец А.Г.* Спектральные характеристики релятивистского плазменного СВЧ-генератора на РЭП // ЖЭТФ. 1996. Т. 109, №1. С. 208.

35. *Стрелков П.С., Ульянов Д.К.* Спектры излучения плазменного релятивистского СВЧ-генератора // Физика плазмы. 2000. Т. 26, №3. С. 379.

36. *Пономарев А.В., Стрелков П.С., Шкварунец А.Г.* Реализация плазменного СВЧ-усилителя // Физика плазмы. 1998. Т. 24, №1. С. 53.

37. *Пономарев А.В., Стрелков П.С., Шкварунец А.Г.* // Физика плазмы. 2000. Т. 26, № 7. С. 633.

Физический факультет МГУ
Институт общей физики РАН

Поступила в редакцию 12.01.2001
после доработки 26.03.2001

PRESENT STATE OF PLASMA RELATIVISTIC MICROWAVE ELECTRONICS IN GENERAL PHYSICS INSTITUTE OF RAS

M.V. Kuzelev, A.A. Rukhadze, P.S. Strelkov

The review of present state of theoretical and experimental investigations in a novel perspective branch of microwave electronics - plasma relativistic microwave electronics is presented. Devices of plasma relativistic microwave electronics are exceptional. The wide radiation frequency band and very simple frequency retuning of

plasma relativistic microwave devices make them preferable in compare of the vacuum ones, the achieved power of such devices is comparable to the vacuum microwave devices.



Кузелев Михаил Викторович - родился в Москве (1953), окончил физический факультет МГУ (1976). Защитил кандидатскую диссертацию (МГУ, 1980) по физике плазмы, докторскую диссертацию (1988) по теоретической физике, профессор (с 1991). Заведующий кафедрой прикладной математики Московского государственного университета печати. Член ряда Ученых советов. Область научных интересов: электродинамика плазмы, физическая электроника и численное моделирование плазмы. Автор более 150 научных работ, в том числе 10 обзоров и 4-х монографий.



Рухадзе Анри Амвросьевич - родился в Грузии (1930), окончил МИФИ (1954). Защитил кандидатскую диссертацию (ФИАН, 1958) по мезодинамике, докторскую диссертацию (ФИАН, 1964) по физике плазмы, профессор (с 1971) кафедры физической электроники физического факультета МГУ, главный научный сотрудник Института общей физики РАН. Лауреат двух Государственных премий (1981, 1991) и Премии им. М.В. Ломоносова I степени (МГУ, 1989). Член ряда научных советов и редколлегий научных журналов. Область научных интересов: физика плазмы, электродинамика материальных сред и физическая электроника. Автор более 400 научных работ, в том числе более 40 обзоров и 10 монографий. E-mail: rukh@fpl.gpi.ru



Стрелков Павел Сергеевич - родился в Москве (1939), окончил физический факультет МГУ (1962). Защитил кандидатскую диссертацию (ФИАН, 1970), докторскую диссертацию (ФИАН, 1984) по физике плазмы, профессор (с 1994). Заведующий лабораторией плазменной электроники Института общей физики РАН. Член ряда Ученых советов. Область научных интересов: физика плазмы, плазменная электроника и техника физического эксперимента. Автор более 100 научных работ, в том числе 10 обзоров и соавтор 1 монографии по плазменной электронике.



МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ГАРМОНИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПО ВРЕМЕННОМУ РЯДУ

Б.П. Безручко, Д.А. Смирнов

Предлагается общий подход к построению глобальных моделей гармонически возбуждаемых систем по временным рядам. Он является модификацией стандартного метода глобальной реконструкции дифференциальных уравнений: в модельные уравнения входит полином, аргументами которого являются не только последовательные производные наблюдаемой, но и функции, явно зависящие от времени. Работоспособность и детали предложенного подхода демонстрируются в численных экспериментах.

Введение

Методы реконструкции обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) по временным рядам развиваются уже более десяти лет [1-4]. Они достаточно успешно применяются для прогноза [5], качественного описания динамики [5,6], расчета характеристик аттрактора [7], классификации систем [8,9]. Успех моделирования по временному ряду в решающей степени зависит от выбора *структуры модельных уравнений* (количества уравнений и вида функций в их правых частях), адекватной наблюдаемым переменным. Этот выбор является наиболее трудной частью процедуры реконструкции, и вряд ли здесь можно рассчитывать на универсальные рецепты. Тем не менее используемые методы ориентированы, как правило, на реконструкцию ОДУ в универсальном виде (без учета специфики исследуемой системы). Например, согласно распространенному подходу [4-7,10], который мы будем называть *стандартным*, уравнения восстанавливаются в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ &\dots \\ \dot{y}_D &= f(y_1, y_2, \dots, y_D), \end{aligned} \tag{1}$$

где y_1 - наблюдаемая, а функция f является полиномом порядка K

$$f(y_1, y_2, \dots, y_D) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^K c_{l_1, l_2, \dots, l_D} \prod_{j=0}^D y_j^{l_j}, \quad \sum_{j=1}^D l_j \leq K. \quad (2)$$

Однако во многих случаях подобные методики оказываются не работоспособными - в частности, стандартные модели часто оказываются весьма громоздкими и дают расходящиеся решения. Эти трудности возникают, например, при моделировании систем, находящихся под внешним воздействием, которым посвящена данная работа.

Перспективным путем развития методов глобальной реконструкции ОДУ представляется модификация универсальных подходов применительно к некоторым достаточно узким классам объектов. Применительно к гармонически возбуждаемым осцилляторам, такая модификация стандартного подхода использовалась в [11-13]. Модификация состояла в том, что реконструировались *неавтономные* ОДУ, то есть в уравнения модели включались функции, явно зависящие от времени (внешнее воздействие)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= f(y_1, y_2) + a \cos \omega t + b \sin \omega t, \end{aligned} \quad (3)$$

где f - полином (2). Эта структура модельных уравнений отражает частный случай, один из возможных способов внесения воздействия - аддитивный (силовой).

В данной работе предлагается общий подход к глобальному нелинейному моделированию объектов, находящихся под гармоническим воздействием. Согласно этому подходу стандартная структура (1) модифицируется таким образом, что аргументами функции f являются не только y_1, \dots, y_D , но и слагаемые $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, описывающие внешнее воздействие. Однако и такая модель может оказаться весьма громоздкой, поэтому для многих ситуаций целесообразно использовать упрощенную структуру модели. Упрощенный подход состоит в том, что модель имеет вид (1)-(2), но все коэффициенты могут зависеть от времени, то есть величины c_{l_1, l_2, \dots, l_D} заменяются выражениями $(c_{l_1, l_2, \dots, l_D} + a_{l_1, l_2, \dots, l_D} \cos \omega t + b_{l_1, l_2, \dots, l_D} \sin \omega t)$.

Далее, в п. 1 обсуждаются возможности стандартного метода и причины его неэффективности. Предлагаемые подходы описываются и обосновываются в п. 1. В разделе 2 их эффективность демонстрируется на различных численных примерах.

1. Методы построения модели по временному ряду

1.1. Стандартный подход. Рассмотрим кратко стандартный подход к глобальной реконструкции и обсудим возможные причины его неэффективности. Пусть имеется скалярный временной ряд - конечный набор значений некоторой величины v , измеренных в дискретные моменты времени, разделенные интервалом выборки Δt : $\{v_i\}_{i=1}^{N_v}$, $v_i = v(t_i)$, $t_i = i\Delta t$, $i=1, \dots, N_v$. Пусть выборка произведена достаточно часто, то есть последовательные значения v отличаются друг от друга достаточно слабо по сравнению с общим размахом колебаний. Требуется построить систему ОДУ (модель), которая достаточно хорошо воспроизводит наблюдаемый ряд.

Схема решения этой задачи при стандартном подходе выглядит следующим образом. Выбирается некоторое значение размерности модели D . Восстанавливаются векторы состояния $y(t_i)$ методом последовательных производных (производные находятся по временному ряду численно [5,10]).

Проводится аппроксимация зависимости $\dot{y}_D(y)$ полиномом (2). Значения коэффициентов полинома c_{1, t_2, \dots, t_D} определяются методом наименьших квадратов, то есть так, чтобы минимизировать средний квадрат погрешности аппроксимации

$$\varepsilon^2 = 1/N \sum_{i=1}^N (\dot{y}_D(t_i) - f(y_1(t_i), \dots, y_D(t_i)))^2, \quad (4)$$

где N - количество векторов, восстановленных по скалярному временному ряду. Поскольку коэффициенты линейно входят в выражение для f , задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Наконец, проверяется эффективность полученной модели. Критерии эффективности определяются, вообще говоря, целями моделирования, но в качестве наиболее часто используемых можно указать следующие. Для проверки *качественного сходства* поведения объекта и модели фазовая траектория модели сравнивается с траекторией, восстановленной по временному ряду. Точность *количественного описания* оценивается, например, по дальности прогноза [14]. Для ее расчета сначала вычисляется величина $\sigma(\tau)$ - среднеквадратичная¹ погрешность прогноза наблюдаемой переменной v с упреждением τ , нормированная на стандартное отклонение величины v . Затем определяется такое упреждение τ_{pred} , когда величина $\sigma(\tau)$ становится больше некоторого порогового значения: $\sigma(\tau_{pred}) \geq \sigma_c$. Это время упреждения τ_{pred} и называется *дальностью прогноза*. Если модель неэффективна, то следует изменять (как правило, увеличивать) порядок полинома K или размерность D и строить новую модель.

Однако опыт использования этой процедуры показывает, что стандартная структура модели очень часто (особенно при больших значениях D , то есть больше 3-4) оказывается не эффективной. Восстановленные уравнения во многих случаях демонстрируют поведение, качественно отличное от поведения объекта, в том числе дают расходящиеся решения [5,6]. Видимых причин этого несколько. Во-первых, при большом значении размерности нужно численно определять производные высокого порядка, что сопряжено с существенными погрешностями из-за влияния шумов. Во-вторых, для аппроксимации сложной зависимости $\dot{y}_D(y)$ может потребоваться полином высокого порядка, который содержит огромное число коэффициентов $M=(D+K)!/(D!K!)$. Это приводит к снижению надежности оценок их значений. В-третьих, траектория в фазовом пространстве модели может выйти за пределы области, обеспеченной экспериментальными данными, а тогда дальнейшее поведение модели перестает сколько-нибудь соответствовать объекту. В результате модельная траектория может (что часто и происходит) уйти на бесконечность.

Итак, причиной неудач применения стандартного подхода является громоздкость получающихся моделей. Это практически неизбежно, так как для существующего многообразия реальных систем вариант модели (1)-(2), как правило, не является естественным, наилучшим образом соответствующим объекту, а использование такой структуры уравнений требует построения моделей высокой размерности. Это хорошо видно на примере реконструкции динамических систем². Согласно результатам работ [16,17] почти любую систему ОДУ можно привести к виду (1) для почти любой наблюдаемой v . Но для того чтобы в общем

¹ Усреднение проводится по различным начальным условиям. Причем, начальные условия объекта берутся из той части временного ряда, которая не использовалась для построения модели. Прогноз рассчитывается при одинаковых начальных условиях модели и объекта.

² Мы называем динамической системой только математический объект, в отличие от существующей практики применения этого термина к реальным системам [15].

случае гарантировать взаимно однозначное соответствие векторов состояния исходной динамической системы («объекта») и модели (1), величина D должна удовлетворять условию $D > 2d$. Здесь d - размерность гладкого многообразия, внутри которого происходит наблюдаемое движение исходной системы (или фрактальная размерность аттрактора, если движение происходит на хаотическом аттракторе).

Таким образом, можно наметить направление совершенствования стандартной модели - уменьшение D и K за счет изменений ее структуры, учитывающих специфику объекта (ценой отказа от части претензий на универсальность).

1.2. Модификация структуры модельных уравнений. Для моделирования систем, находящихся под гармоническим воздействием, мы предлагаем использовать специальную структуру уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ &\dots \\ \dot{y}_D &= F(y_1, y_2, \dots, y_D, \cos\omega t, \sin\omega t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $y_1 = v$, а функция F зависит явно от времени через функции $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$. Ее можно выбрать в виде полинома степени K от $D+2$ переменных и далее использовать алгоритм п. 1. Однако здесь возникает проблема: при $K \geq 2$ в такой полином будут входить линейно зависимые слагаемые, например, $\cos^2\omega t$ и $\sin^2\omega t$, и задача расчета коэффициентов не будет иметь единственного решения. Необходимо исключить из полинома лишние слагаемые. Для этого запишем функцию F в виде

$$F(y_1, y_2, \dots, y_D, \cos\omega t, \sin\omega t) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^K P_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^L (\cos\omega t, \sin\omega t) \prod_{j=1}^D y_j^{l_j}, \quad (6)$$

$$l_1 + l_2 + \dots + l_D + L = K,$$

где по сравнению с (2) вместо каждого коэффициента $c_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}$ стоит функция $P_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^L (\cos\omega t, \sin\omega t)$ - полином порядка L , который не содержит линейно зависимых слагаемых. Чтобы получить выражение для него, нужно записать полный стандартный полином порядка L от двух переменных ($\cos\omega t$ и $\sin\omega t$) и в нем всюду заменить $\sin^2\omega t$ на $1 - \cos^2\omega t$. При этом, опуская нижний индекс полинома, получим

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= c, \\ P^{(1)} &= c + a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t, \\ P^{(2)} &= c + a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t + a_2 \cos^2\omega t + b_2 \sin\omega t \cos\omega t, \\ &\dots \\ P^{(L)} &= c + a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t + \dots + a_L \cos^L\omega t + b_L \sin\omega t \cos^{L-1}\omega t. \end{aligned} \quad (7)$$

Изложенный подход позволяет по скалярному временному ряду реконструировать уравнения динамической системы под гармоническим внешним воздействием в общем случае. Он имеет следующие преимущества по сравнению со стандартным подходом:

- в большинстве случаев требуется меньше уравнений для описания движения,

следовательно, меньше производных нужно рассчитывать путем численного дифференцирования и, как правило, меньше коэффициентов необходимо учесть в функции F ;

- непосредственный учет внешнего воздействия позволяет в ряде случаев “ухватить” существенные черты исследуемой системы и получить качественное сходство поведения модели и объекта.

Однако предложенный подход не лишен полностью недостатков, свойственных стандартному методу. Он лишь позволяет в ряде случаев несколько ослабить их влияние. Так, в общем случае получающаяся модель тоже громоздка, но все-таки более компактная, чем стандартная. По всей видимости, такой подход наиболее эффективен для тех случаев, когда достаточно использовать модель невысокой размерности с полиномом невысокого порядка (см. последний пример в разделе 2).

Возможным шагом в направлении упрощения структуры модели и увеличения ее эффективности является переход к модели (5) с мультипликативным воздействием

$$F(y_1, y_2, \dots, y_D, \cos\omega t, \sin\omega t) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^K (c_{l_1, l_2, \dots, l_D} + a_{l_1, l_2, \dots, l_D} \cos\omega t + b_{l_1, l_2, \dots, l_D} \sin\omega t) \prod_{j=1}^D y_j^{l_j}, \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^D l_j \leq K.$$

Функции $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ входят в выражение (8) линейно. Такая модель содержит значительно меньше коэффициентов $M = 3(D+K)!/(D!K!)$, чем общая модель (5)-(7). В то же время выражение (8) служит вполне эффективной аппроксимацией для достаточно широкого класса систем (см. примеры раздела 3). Таким образом, на практике мы рекомендуем использовать для моделирования гармонически возмущаемых систем уравнения (5), (8), только в крайнем случае прибегая к уравнениям более общего вида (5)-(7).

Для построения моделей (5)-(7) или (5), (8) можно воспользоваться стандартной процедурой п. 1, если предварительно рассчитать по временному ряду значение периода воздействия T . Способ вычисления периода воздействия предложен в [13] и может быть использован без изменений и в нашем случае. В той же работе показано, что при реконструкции неавтономных уравнений требуется высокая точность определения периода воздействия, иначе на исследуемом временном интервале может произойти значительный «набег фазы» между истинным воздействием и его аппроксимацией.

2. Численные примеры

Далее мы проиллюстрируем преимущества предлагаемого подхода на численных примерах. Исходные скалярные временные ряды во всех случаях были получены путем интегрирования известных систем ОДУ (объектов моделирования) методом Рунге - Кутты 4-го порядка с шагом $\Delta t = 0.01$. Длина ряда в каждом случае составляла 6000 значений (примерно 10 характерных периодов колебаний). По исходному ряду реконструировались стандартная модель (1)-(2) и неавтономная - (5), (8). Приведены также результаты, которых удается достичь с помощью модели с аддитивным воздействием. Последний пример иллюстрирует

применение модели общего вида (5)-(7). Для каждого из подходов представлены только результаты, относящиеся к наиболее эффективной модели. Для оценки эффективности используются критерии, изложенные в п. 1. Для расчета дальности прогноза τ_{pred} мы приняли пороговое значение ошибки равным $\sigma_c=0.05$. Величина τ_{pred} приводится в единицах периода воздействия T , так как это характерный временной масштаб для всех примеров.

Первый пример иллюстрирует работоспособность предложенной методики при наличии шума. Наблюдаемый временной ряд - хаотическая временная реализация координаты y_1 гармонически возбуждаемого осциллятора Дуффинга

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\gamma_0 y_2 - y_1 - y_1^3 + A_0 \cos \omega_0 t, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\gamma_0 = 0.1$, $A_0 = 35$, $\omega_0 = 1$. Систему (9) можно привести к виду (1) с $D = 4$ и полиномом 3-го порядка. Для этого дважды продифференцируем по времени второе уравнение и в полученное равенство вместо $A_0 \cos \omega_0 t$ подставим его выражение из (9). Получим

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ \dot{y}_3 &= y_4, \\ \dot{y}_4 &= -\gamma_0 y_4 - (1 + 3y_1^2 + \omega_0^2) y_3 - 6y_1 y_2^2 - \omega_0^2 \gamma_0 y_2 - \omega_0^2 (y_1 + y_1^3). \end{aligned} \quad (10)$$

Естественно, что наилучшая модель (1)-(2) получена при $D = 4$, $K = 3$, а наилучшая модель (5), (8) - при $D = 2$, $K = 3$. В обоих случаях коэффициенты восстановленных уравнений отличаются от соответствующих исходных значений меньше, чем на 1%. Время прогноза τ_{pred} достаточно велико для обеих моделей: $6T$ и $7T$, соответственно. Здесь стандартный метод также дал хороший результат, поскольку структура исходной системы приводится в точности к виду (1)-(2). Однако заметим, что для построения стандартной модели пришлось рассчитывать четыре производных, а для неавтономной - только две. Поэтому при добавлении к тому же временному ряду нормального белого шума (10^{-3} от уровня сигнала) стандартный метод уже не приводит к успеху из-за огромных погрешностей в определении четвертой производной, а неавтономная модель (5), (8) еще вполне эффективна.

Второй пример. Наблюдаемый ряд - хаотическая временная реализация координаты гармонически возбуждаемого осциллятора Тоуды (фазовая траектория показана рис. 1, а)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -0.45y_2 + (5 + 4\cos t)(\exp(-y_1) - 1) + 7\sin t. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично первому примеру можно показать, что уравнения (11) приводятся к виду (1) с $D = 4$ и сложной функцией в правой части

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ \dot{y}_3 &= y_4, \\ \dot{y}_4 &= -0.45y_4 + (y_3 + 0.45y_2)[8/7y_2 \exp(y_1) - 1] + \exp(-y_1)[y_2^2 - y_3 - 8/7y_2(\exp(-y_1) - 1)] \times \\ &\times \frac{16/7(\exp(-y_1) - 1)(y_3 + 0.45y_2) + 4[y_4 + 0.45y_3 - 10y_2 \exp(-y_1)] + 35}{7 - 4y_2 \exp(-y_1) + 16/7[\exp(-y_1) - 1]^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

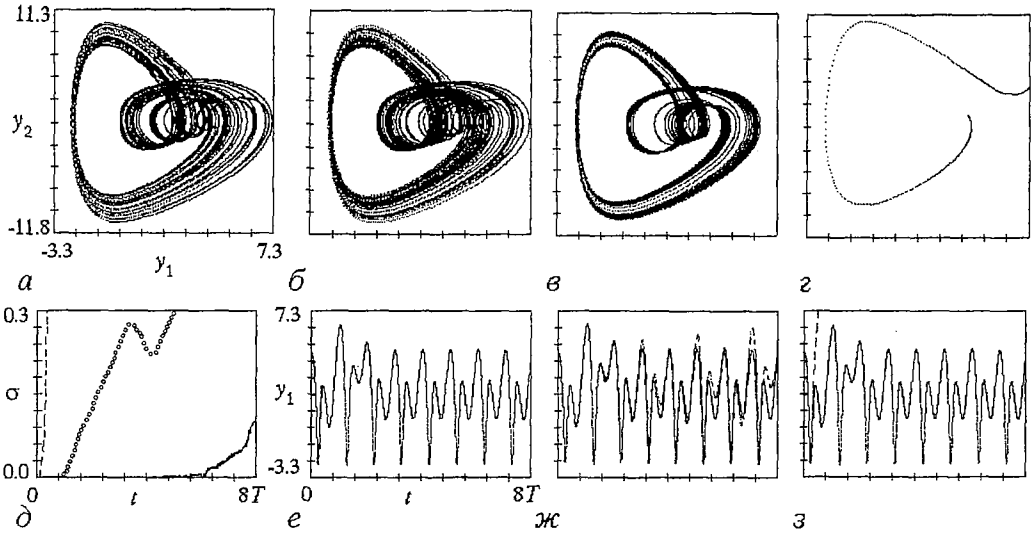


Рис. 1. а - Аттрактор осциллятора Тода (11); б, в, г - фазовые траектории модели (5), (8) ($D = 2$, $K = 9$), модели (3) ($D = 2$, $K = 10$) и стандартной модели ($D = 4$, $K = 6$), соответственно; д - ошибки прогноза для стандартной модели (штриховая линия), модели (3) (кружки) и модели (5), (8) (сплошная линия); е, ж, з - исходный временной ряд (сплошная линия) и прогноз (штриховая линия) с помощью моделей (5), (8), (3) и (1)-(2), соответственно

Наилучшая модель (5), (8) с $D = 2$ и $K = 9$ весьма эффективна (рис. 1, б, е). Значения ее коэффициентов близки к значениям соответствующих коэффициентов исходной системы (для такого сравнения в исходной системе нужно заменить экспоненту разложением в ряд Тейлора). Модель с аддитивным воздействием ($D = 2$ и $K = 10$) дает существенно худшие результаты (рис. 1, в, ж), так как учет только аддитивного воздействия недостаточен. Стандартный подход (даже в отсутствие шума) не приводит к успеху из-за того, что зависимость в правой части системы (1) слишком сложна для аппроксимации полиномом: оптимальная для прогноза стандартная модель ($D = 4$ и $K = 6$) имеет глобально неустойчивые траектории (рис. 1, г, з). Дальности прогноза для оптимальных моделей (5), (8), (3) и (1)-(2) равны соответственно $7T$, $1.5T$ и $0.15T$. На рис. 1, д приведены графики $\sigma(\tau)$, по которым определялась дальность прогноза, на рис. 1, е - з показаны исходные временные реализации и прогноз.

Третий пример. Наблюдаемый временной ряд - хаотическая временная реализация координаты x системы Рёсслера при воздействии на координату z

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b - cz + xz + A \cos t, \end{aligned} \tag{13}$$

где $a = 0.398$, $b = 2.0$, $c = 4.0$, $A = 1.0$. Система (13) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ \dot{y}_3 &= ab - cy_1 + (ac - 1)y_2 + (a - c)y_3 + y_1^2 - ay_1y_2 + y_1y_3 - \\ & - \frac{y_2(y_1 + b - ay_2 + y_3)}{a + c - y_1} + \frac{-(1 - a^2)A \cos t + (1 - c^2 - 2cy_1 - y_2 - y_1^2)A \sin t}{a + c - y_1}, \end{aligned} \tag{14}$$

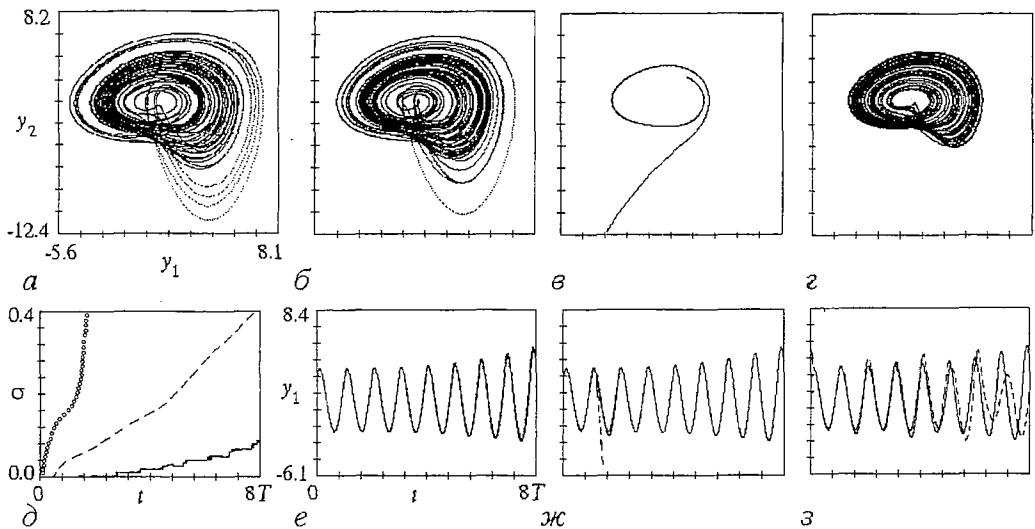


Рис. 2. а - Аттрактор системы Рёсслера (14); б, в, г - фазовые траектории модели (5), (8) ($D = 3$, $K = 5$), модели (3) ($D = 3$, $K = 5$) и стандартной модели ($D = 5$, $K = 3$), соответственно; д - ошибки прогноза для стандартной модели (штриховая линия), модели (3) (кружки) и модели (5), (8) (сплошная линия); е, ж, з - исходный временной ряд (сплошная линия) и прогноз (штриховая линия) с помощью моделей (5), (8), (3) и (1)-(2), соответственно

где $y_1 = x$ (проекция фазовой траектории показана на рис. 2, а). Результаты сравнения фазовых траекторий различных моделей, свидетельствующие в пользу модели (5), (8), приведены на рис. 2, б - г. Дальности прогноза для оптимальных моделей (5), (8), (3) и (1)-(2) равны соответственно $4T$; $0.25T$ и $0.35T$ (рис. 3, д - з). Заметим, что хотя в исходные уравнения (13) воздействие входит аддитивно, модель (3) не работает, а модель (5), (8) эффективна.

Четвертый пример. Наблюдаемый временной ряд - хаотическая временная реализация координаты y неавтономной системы Рёсслера, отличающейся от (13) тем, что воздействие осуществляется на координату y . В этом случае система Рёсслера приводится к виду

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= y_2, \\
 \dot{y}_2 &= y_3, \\
 \dot{y}_3 &= -b - aA^2/2 - cy_1 + (ac - 1)y_2 + (a - c)y_3 - ay_1^2 + (a^2 + 1)y_1y_2 - ax_2^2 - ax_1x_3 + \\
 &+ x_2x_3 + A[(1 - 2a^2 + ac)\text{cost} + (1 + a - c - a^2)\text{ sint}] + y_1A[(1 - a^2)\text{cost} + a\text{ sint}] - \\
 &- y_2A\text{ sint} + y_3A\text{ cost} + [(a+1)/2]A^2\text{ sin}2t,
 \end{aligned} \tag{15}$$

где $y_1 = y$ (проекция фазовой траектории показана на рис.3а). Здесь функция в правой части последнего уравнения содержит не только первые степени воздействия, но и вторую гармонику. Однако это слагаемое не вносит существенного вклада в качественное поведение системы, да и количественный его вклад не очень велик. Поэтому в данном случае предложенная методика работоспособна. Наилучшая модель (5), (8) имеет аттрактор, аналогичный исходному (рис. 3, б). Траектории моделей (1), (2) и (3) глобально неустойчивы (рис. 3, в, г). Дальности прогноза для оптимальных моделей (5), (8), (3) и (1)-(2) равны соответственно $1T$, $0.25T$ и $0.3T$ (см. рис. 3, д - з). Этот пример показывает, что структура (5), (8) пригодна для описания достаточно широкого класса гармонически возбуждаемых систем (когда за вклад внешнего гармонического воздействия в решение отвечают в основном его первые степени).

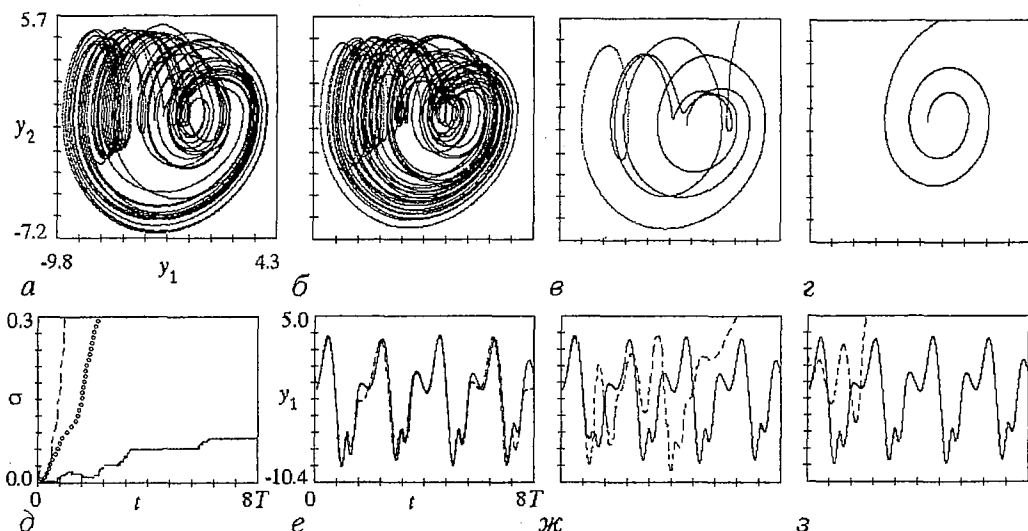


Рис. 3. *а* - Аттрактор системы Рёсслера (15); *б, в, г* - фазовые траектории модели (5), (8) ($D = 3$, $K = 5$), модели (3) ($D = 3$, $K = 2$) и стандартной модели ($D = 4$, $K = 3$), соответственно; *д* - ошибки прогноза для стандартной модели (штриховая линия), модели (3) (кружки) и модели (5), (8) (сплошная линия); *е, ж, з* - исходный временной ряд (сплошная линия) и прогноз (штриховая линия) с помощью моделей (5), (8), (3) и (1)-(2), соответственно

Можно, конечно, привести примеры систем, для моделирования которых предлагаемая методика неэффективна. Это системы (5) со сложной зависимостью функции f от воздействия, когда при аппроксимации недостаточно ограничиться первыми его степенями (8). В таких случаях иногда удается с успехом использовать модели вида (5)-(7). В качестве примера рассмотрим реализацию координаты y_1 осциллятора Дуффинга, возбуждаемого внешней гармонической силой, прошедшей нелинейное преобразование

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\gamma_0 y_2 - y_1 - y_1^3 + A_0 \cos^3 \omega_0 t, \end{aligned} \quad (16)$$

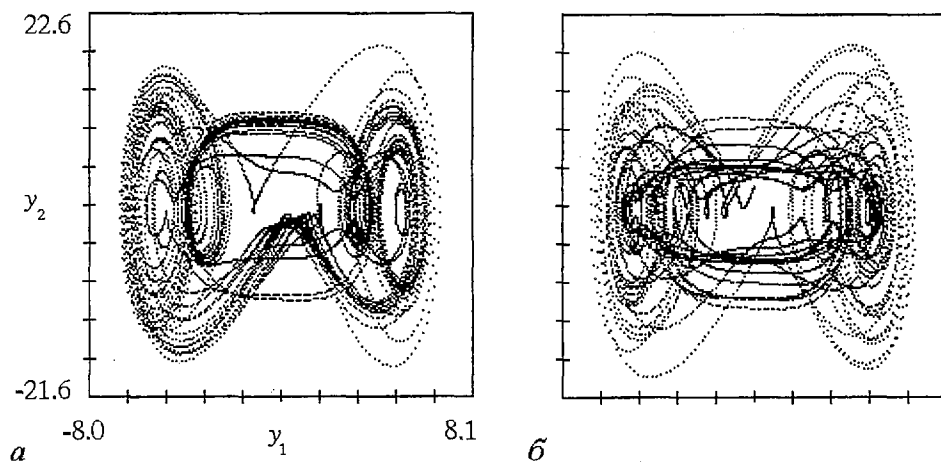


Рис. 4. *а* - Аттрактор осциллятора Дуффинга (16); *б* - аттрактор модели (5)-(7) ($D = 2$, $K = 3$)

где $\gamma_0 = 0.1$, $A_0 = 150$, $\omega_0 = 1$ (рис. 4, а). Здесь только модель общего вида (5)-(7) с $D = 2$ и $K = 3$ позволяет получить удовлетворительный результат: она демонстрирует качественно схожий аттрактор (рис. 4, б) и обеспечивает прогноз на $3T$ вперед³. Модели с другой структурой (использованные в предыдущих примерах) дают прогноз не более чем на $0.25T$ и не воспроизводят исходный аттрактор. Однако следует ожидать, что в общем случае модели (5)-(7) будут эффективны только при невысокой размерности D (и, особенно, если из них удастся исключить многие «лишние» слагаемые).

Заключение

Успех моделирования по временным рядам определяется выбором адекватного математического аппарата, информативных динамических переменных и соответствующей им структуры модельных уравнений, а также методикой вычисления значений входящих в них параметров. По-видимому, при этом можно рассчитывать на полезные рекомендации по выбору подхода лишь в отношении достаточно узких классов моделируемых объектов.

В данной работе предложена структура модельных уравнений для объектов, находящихся под внешним гармоническим воздействием. Эта структура выбирается с учетом априорной (или полученной экспериментально) информации о наличии воздействия и включает в себя полином, коэффициенты которого зависят от времени по гармоническому закону. Преимущество такого подхода заключается в том, что он позволяет обойтись моделью с меньшим (чем при стандартном методе) количеством уравнений и в которой, в то же время, учтены существенные специфические черты исходного объекта. На ряде примеров проиллюстрирована эффективность используемой структуры уравнений (как при силовом, так и при параметрическом характере воздействия).

Предложенная структура модели может оказаться непригодной для моделирования некоторых систем (когда необходимо учесть не только первые степени воздействия, но и более высокие). Для таких случаев предложена более общая структура уравнений, применение которой, однако, затрудняется тем, что она слишком громоздка. Тем не менее она может оказаться полезной при невысокой размерности и исключении некоторых («лишних» для моделирования данного объекта) слагаемых. Таким образом, представляется, что предложенный подход имеет достаточно широкую область применимости и может, во многих случаях, существенно облегчить построение моделей гармонически возбуждаемых систем.

Работа выполнена при поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития (грант REC-006) и РФФИ (гранты 99-02-17735 и 01-02-06039).

Библиографический список

1. Cremers J., Hubler A. Construction of differential equations from experimental data // Z. Naturforschung A. 1987. Vol. 42. P. 797.

³ Не очень высокая дальность прогноза обусловлена тем, что модель содержит много лишних слагаемых, которые вносят искажения. Теоретически, соответствующие коэффициенты должны быть равны нулю, но на практике они отличаются от нуля из-за погрешностей вычислений.

2. Baake E., Baake M., Bock H.J., Briggs K.M. Fitting ordinary differential equations to chaotic data // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. P. 5524.

3. Brown R., Rulkov N.F., Tracy E.R. Modeling and synchronizing chaotic systems from time-series data // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 3784.

4. Gouesbet G., Letellier C. Global vector-field approximation by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 4955.

5. Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А., Кузнецов Ю.И., Ржанов А.Г. Восстановление структуры динамической системы по временным рядам // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39, вып. 2. С. 269.

6. Янсон Н.Б., Анищенко В.С. Моделирование динамических систем по экспериментальным данным // Изв. вуз. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С. 112.

7. Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С. Применение статистических методов при решении задачи глобальной реконструкции // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, № 8. С. 7.

8. Kadtke J. Classification of highly noisy signals using global dynamical models // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 203. P. 196.

9. Kadtke J., Kremliovsky M. Estimating statistics for detecting determinism using global dynamical models // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 229. P. 97.

10. Gouesbet G., Maquet J. Construction of phenomenological models from numerical scalar time series // Physica D. 1992. Vol. 58. P. 202.

11. Hegger R., Kantz H., Schmuser F., Diestelhorst M., Kapsch R.-P., Beige H. Dynamical properties of a ferroelectric capacitors observed through nonlinear time series analysis // Chaos. 1998. Vol. 8, № 3. P. 727.

12. Безручко Б.П., Диканев Т.В., Селезнев Е.П., Смирнов Д.А. Восстановление дифференциальных уравнений неавтономной динамической системы по экспериментальным данным // Тез. докл. V Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур - ХАОС'98». Саратов, 1998. С.68-69; Constructing a model of a non-autonomous piecewise-linear electronic circuit from a scalar time series // Proceedings of 5th International specialist workshop NDES. Denmark, 1999. P. 65.

13. Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Д.А. Реконструкция уравнений неавтономного нелинейного осциллятора по временному ряду: модели, эксперимент // Изв. вуз. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 1. С. 49.

14. Farmer J.D., Sidorowich J.J. Predicting chaotic time series // Phys. Rev. Lett.. 1987. Vol. 59. P. 845.

15. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во СГУ, 1999. 368 с.

16. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Dynamical systems and turbulence. Warwick, 1980 / Eds. D.Rang and L.S.Young. Lecture notes in mathematics. Vol. 898. P. 366.

17. Sauer T., Yorke J., Casdgli M. Embedology // Journal of Statistical Physics. 1991. Vol. 65, № 3-4. P. 579.

18. Hasler M. Electrical circuits with chaotic behavior // Proceedings of the IEEE. 1987. Vol. 75. P. 40.

Институт радиотехники
и электроники РАН,
Саратовское отделение
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 19.12.2000
после доработки 18.05.2001

METHOD FOR RECONSTRUCTION OF EQUATIONS WITH HARMONIC DRIVING FROM TIME SERIES

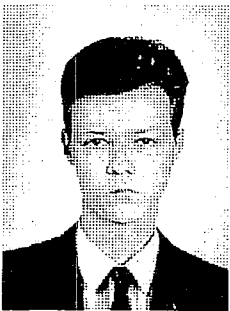
B.P. Bezruchko, D.A. Smirnov

We propose a general approach to constructing global models of harmonically driven systems from time series. It is a modification of the standard method of global reconstruction of differential equations - a polynomial, which arguments are sequential derivatives of an observable along with explicit functions of time, enters in model equations. Efficiency and details of the approach are demonstrated by various numerical examples.



Безручко Борис Петрович - родился в 1946 году, окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1969). Профессор кафедры электроники и волновых процессов СГУ; ведущий научный сотрудник (по совместительству) Саратовского филиала института радиотехники и электроники РАН; доктор физико-математических наук. Область научных интересов - экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических и электронных системах, математическое моделирование по экспериментальной наблюдаемой. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.

E-mail: BezruchkoBP@info.sgu.ru



Смирнов Дмитрий Алексеевич - родился в Ершове Саратовской области (1977). Окончил Высший колледж прикладных наук Саратовского государственного университета (1999). Аспирант кафедры электроники, колебаний и волн СГУ, специальность - радиофизика. Соросовский студент (1996-1999), Соросовский аспирант (2000). Область научных интересов: конструирование математических моделей по экспериментальным временным рядам. Автор и соавтор 26 научных публикаций по данной тематике.



СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ ДВУХЧАСТОТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Е.П. Селезнев, А.М. Захаревич

Численно исследуется многообразие резонансных циклов дискретной модели нелинейного осциллятора при двухчастотном воздействии с рациональным соотношением частот, подчиняющимся последовательности чисел Фибоначчи. Дана классификация циклов, прослежена эволюция структуры плоскости управляющих параметров в зависимости от соотношения частот.

В последние годы изучение систем, находящихся под квазипериодическим воздействием, привлекает к себе внимание в связи с изучением странных нехаотических аттракторов (СНА) [1-7]. Однако их исследование, особенно в физическом эксперименте, сопряжено с рядом трудностей, в частности, с нахождением области существования в пространстве управляющих параметров и определением бифуркаций, которые они претерпевают. В [5] предложен, а в [6,7] экспериментально апробирован метод перехода к странному нехаотическому аттрактору в нелинейном осцилляторе при двухчастотном воздействии, основанный на бифуркации резонансных циклов, чьи числа вращения принадлежат последовательности чисел Фибоначчи и в пределе стремятся к “золотому сечению”. В связи с этим возникает задача классификации многообразия резонансных движений, исследования их динамики и эволюции структуры плоскости управляющих параметров при последовательном изменении соотношения частот внешнего воздействия. В данной работе эта задача решается численно на примере отображения вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon \sin 2\pi y_n \\ y_{n+1} = y_n + \omega \pmod{1}, \end{cases} \quad (1)$$

где x_n, y_n - динамические переменные, λ и ε - управляющие параметры, ω - характеризует соотношение частот внешнего воздействия.

При рациональных значениях параметра $\omega = k/m$ (где k и m - целые числа) система (1) демонстрирует многообразие резонансных циклов, которые с изменением параметров λ и ε эволюционируют к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода.

Анализ фазовых портретов показывает, что для исследования и классификации циклов удобно использовать их стробоскопические сечения с периодом $1/\omega$. Такой подход позволяет сформулировать общий принцип классификации циклов системы (1): при $\varepsilon=0$ каждый цикл периода N может быть реализован m способами (где m известно из соотношения $\omega=k/m$ и соответствует наименьшему периоду цикла системы (1)), определяемыми фазой воздействия y_n . В силу того, что y_n принимает дискретные значения, в соответствии с данным принципом классификации при $\varepsilon=0$ циклы системы (1) отличаются сдвигом между значениями y , аналогично [8].

На рис. 1 на плоскости параметров (λ, ε) приведены линии бифуркаций циклов при $\omega=1/2$. Светлые области соответствуют периодическим режимам, серые – хаотическим, тонкими сплошными обозначены линии бифуркаций удвоения периода (мультипликатор циклов на них обращается в -1), жирными – седлоузловые бифуркации (мультипликатор циклов на них обращается в $+1$), l_0

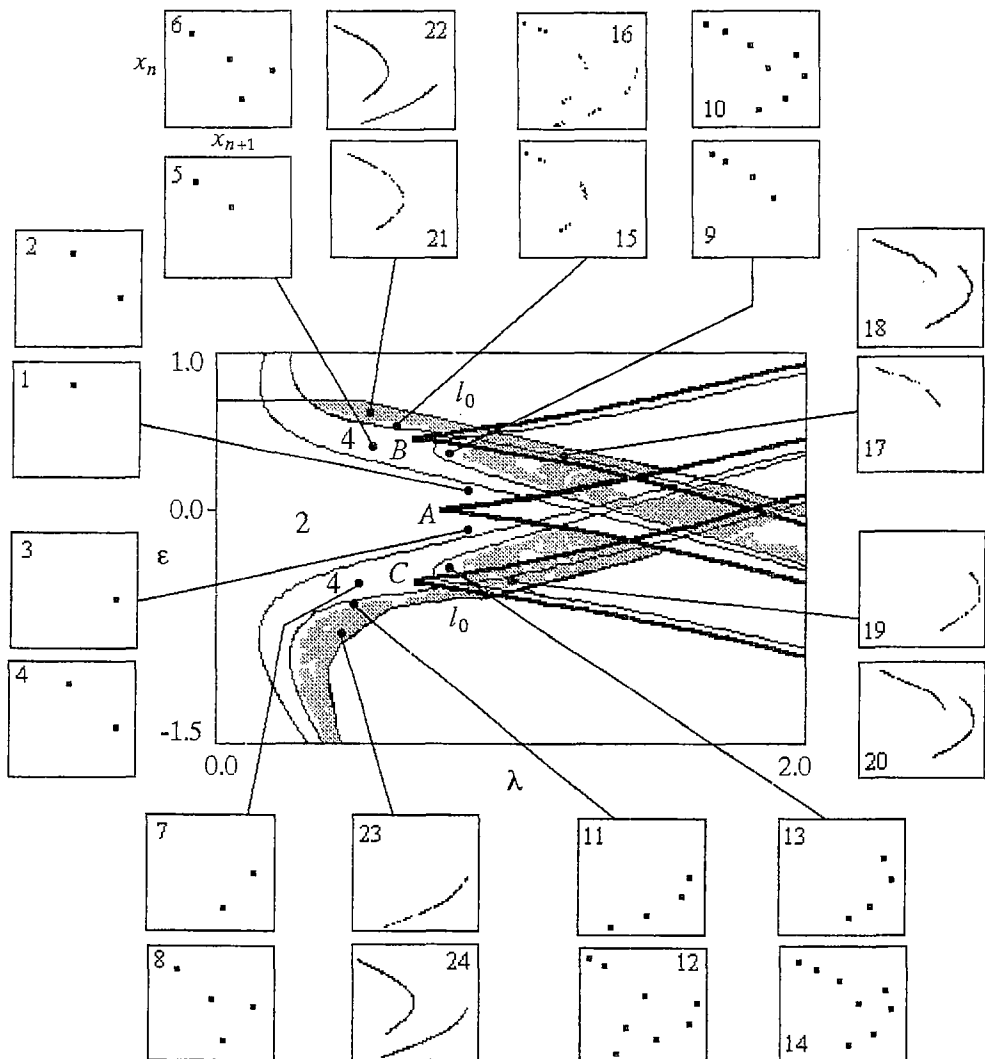


Рис. 1. Структура плоскости управляющих параметров (λ, ε) при значении $\omega=1/2$

отмечена линия, за пределами которой система с нулевых начальных условий убегает на бесконечность. В выделенных фрагментах на плоскости (x_{n+1}, x_n) представлены фазовые портреты циклов и их сечения Пуанкаре при фазе стробирования $y=0$. Плоскость параметров изобилует структурами типа «crossroad», на ней имеется сборка A с координатами $(0.75, 0)$, линии складки которой ограничивают области существования двух базовых циклов периода $m=2$. Фрагменты 1, 2 и 3, 4 иллюстрируют фазовые портреты и стробоскопические сечения этих циклов при значениях параметров $\lambda=0.9, \epsilon=0.1$ и $\lambda=0.9, \epsilon=-0.1$, соответственно. Циклы имеют одинаковые фазовые портреты и отличить их можно только по сечениям Пуанкаре. С изменением управляющих параметров каждый из этих циклов демонстрирует удвоения периода. В области существования циклов удвоенного периода имеются сборки B и C , а общее количество циклов равно уже 4 (фрагменты 5–12 на рис.1). Следует отметить, что стробоскопические сечения их фазовых портретов напоминают противофазные циклы в связанных квадратичных отображениях [8].

В случае $\omega=2/3$ количество сборок и бифуркационных структур типа «crossroad» на плоскости параметров увеличивается (рис. 2). Здесь имеется три

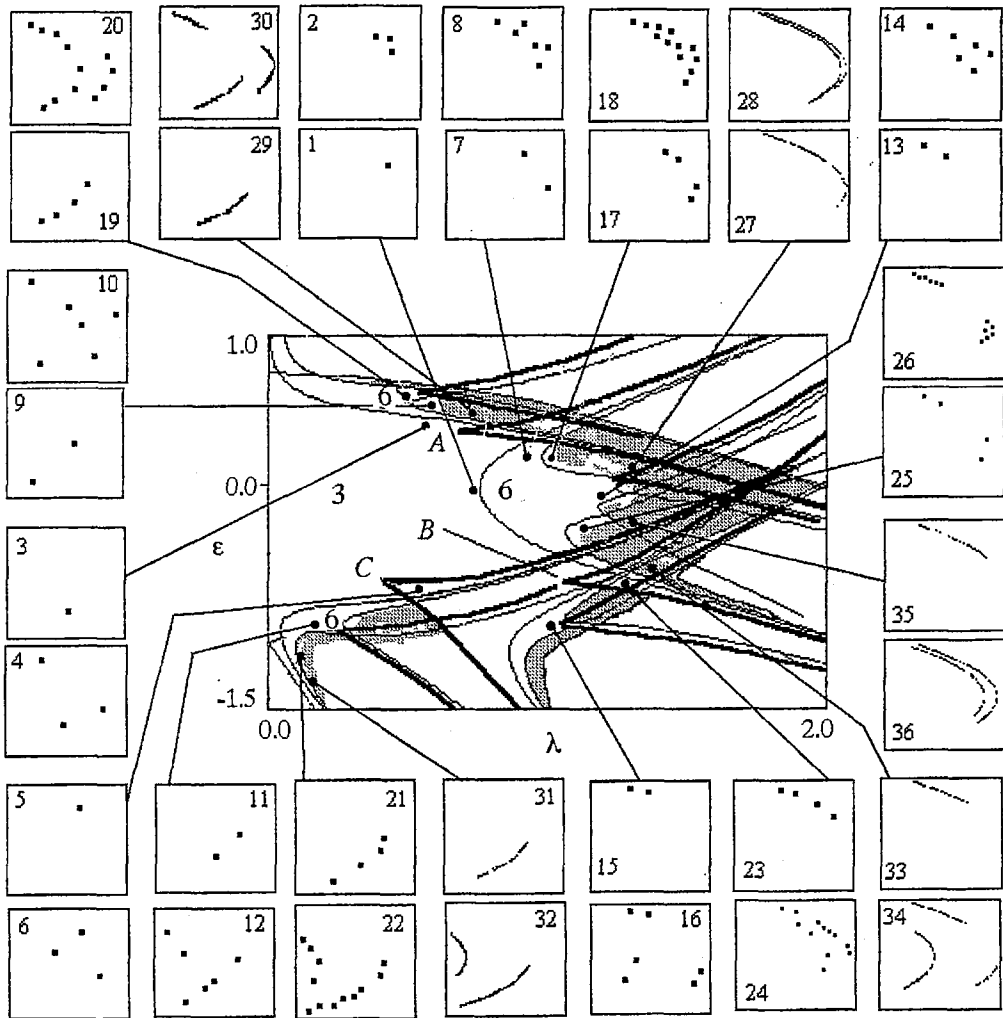


Рис. 2. Структура плоскости управляющих параметров (λ, ϵ) при значении $\omega=2/3$

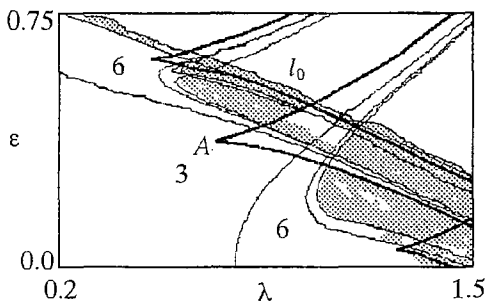


Рис. 3. Увеличенный фрагмент рис. 2

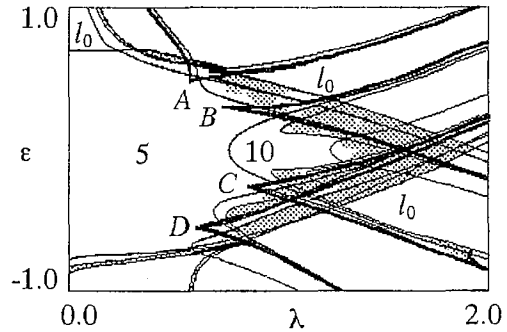


Рис. 4. Структура плоскости управляющих параметров (λ, ϵ) при значении $\omega=3/5$

сборки A, B, C , линии складки которых ограничивают области существования трех базовых циклов периода 3 (фрагменты 1–6). С изменением параметров эти циклы эволюционируют к хаосу через последовательность удвоений периода, при этом в результате удвоения на базе каждого формируется пара циклов – синфазный и несинфазный (фрагменты 7–16 на рис.2). Стробоскопическое сечение синфазного цикла располагается вдоль диагонали фазовой плоскости (фрагменты 9–12), а противофазного – трансверсально (фрагменты 7, 8 и 13–16). С изменением параметров циклы эволюционируют к хаосу через последовательность удвоений периода, а в итоге на базе каждого цикла формируется m -связный хаотический аттрактор. Рис. 3 иллюстрирует увеличенный фрагмент плоскости параметров при $\omega=2/3$. Из рис. 3 видно, что внутри областей существования циклов удвоенного периода имеются структуры типа «crossroad», внутри областей циклов более высокого порядка также формируются структуры типа «crossroad», и такая последовательность наблюдается вплоть до перехода к хаосу.

С дальнейшим изменением параметра ω количество базовых циклов растет, плоскость параметров (λ, ϵ) становится более изрезанной, количество структур типа «crossroad» на ней увеличивается. Рис. 4 иллюстрирует структуру плоскости управляющих параметров (λ, ϵ) для $\omega=3/5$.

Сопоставление рис. 1–4, а также численные исследования для других значений ω показывают, что при нечетных значениях m для бифуркационных линий, проходящих через точку $\lambda=0.75, \epsilon=0$, сохраняется (по сравнению с квадратичным отображением) значение мультипликатора, равное -1 (см. рис. 2, 3). При четных знаменателях m значение мультипликатора цикла в этой точке равно $+1$, для $m=2$ эта точка является точкой сборки, на складках которой происходят седло–узловые бифуркации (см. рис. 1), а для других четных значений наблюдается бифуркация потери симметрии, последнее связано с симметрией циклов для четных значений m относительно вращения [9].

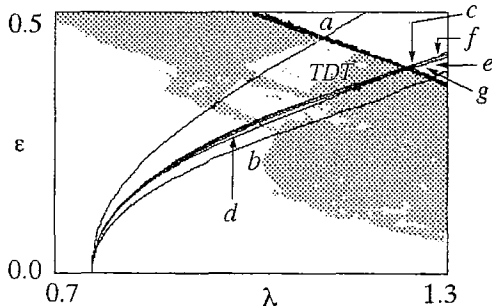


Рис. 5. Сходимость линий бифуркаций удвоения периода и потери симметрии (для $\omega=5/8, 21/34$) при изменении частоты воздействия: кривая a соответствует $\omega=2/3$, $b - \omega=3/5$, $c - \omega=5/8$, $d - \omega=8/13$, $e - \omega=13/21$, $f - \omega=21/34$, $g - \omega=34/55$. Точка TDT соответствует терминальной точке при $\omega=(5^{1/2}-1)/2$

Таким образом, при рациональных значениях ω для многообразия циклов системы справедлив принцип, предложенный для связанных систем с удвоением периода, основанный на

временном сдвиге (или сдвиге фаз) колебаний в подсистемах. С приближением параметра ω к «золотому сечению» $\omega=(5^{1/2}-1)/2$ количество циклов увеличивается. Соответственно, на плоскости параметров растет множество областей типа «crossroad»; граница перехода к хаосу для каждого цикла остается гладкой, однако в целом плоскость параметров имеет сложную многолистную структуру. Такая последовательность изменений объясняет сложный, изрезанный вид границы перехода к хаосу для иррационального значения ω . При этом линия бифуркации удвоения периода одного из базовых (периода m) циклов, а также линия потери симметрии, проходящие через точку плоскости параметров $\lambda=0.75$, $\epsilon=0$, в пределе стремятся к линии бифуркации удвоения тора, что иллюстрирует рис. 5.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-02-17735, при поддержке U.S. Civilian Research Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union, Award № REC-006 и Федеральной Программы «Интеграция», грант № 696.3

Библиографический список

1. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. // Physica D. 1984. Vol. 13. P. 261.
2. Feudel U., Kurths J., Pikovsky A. // Physica D. 1995. Vol. 88. P. 176.
3. Kuznetsov S., Pikovsky A., Feudel U. // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. R 1629.
4. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.N. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4451.
5. Kuznetsov S., Pikovsky A., Feudel U. // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P.1585.
6. Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Селезнев Е.П., Фойдель У. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, №6. С. 3.
7. Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev Ye.P. // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, №6. P. 7828.
8. Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П. // ЖТФ. 1990. Т. 60, №10. С.19.
9. Krupa M., Roberts M. // Physica D. 1992. Vol. 57. P. 417.

Саратовское отделение
Института радиотехники и
электроники РАН,
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 18.01.2001

STRUCTURE OF THE CONTROL PARAMETERS SPACE IN THE MODEL OF THE NONLINEAR OSCILLATOR UNDER TWO-FREQUENCY DRIVING

Ye.P. Seleznev, A.M. Zakharevich

Manifold of resonance cycles of the discrete model of nonlinear oscillator under two-frequency external force with rational frequency ratio is investigated numerically. Classification of cycles is down and dependence of structure evolution of the control parameter plane from frequency ratio is investigated.



Селезнев Евгений Петрович – родился в Саратове (1960), окончил Саратовский государственный университет (1982). Старший научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – экспериментальное и численное исследование нелинейных динамических систем. Автор и соавтор 70 научных работ.



Захаревич Андрей Михайлович – родился в Саратове (1982). Студент 2-го курса факультета нелинейных процессов Саратовского университета. Область научных интересов – нелинейная динамика радиофизических систем.



ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД К НЕАВТОНОМНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ: ФАЗА БЕРРИ И ПРОБЛЕМЫ ГАМИЛЬТОНОВСТИ, СИЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ, КВАНТУЕМОСТИ

К. Ю. Блюх

В работе обсуждаются преимущества и перспективы применения функционального подхода к неавтономным динамическим системам. При таком подходе характеристики системы полагаются зависящими от времени не явно, а через произвольные функции параметров. Демонстрируются основные результаты применения функционального подхода к линейным адиабатическим системам - они связывают геометрические фазы Берри, проблемы определения гамильтоновости системы, квантования и сильной устойчивости.

Основные результаты, упоминаемые в этой статье, были получены в работе [1]. Там можно найти их подробное изложение и строгие доказательства. Целью данной статьи является обсуждение функционального подхода к неавтономным динамическим системам, благодаря которому М. Берри обнаружил геометрические фазы [2, 3], и с помощью которого в [1] был проведен с новых позиций анализ линейных адиабатических систем. Традиционным в теории неавтономных систем является временной подход, когда параметры системы предполагаются известными функциями независимой переменной (времени) и анализ системы проводится в фазовом пространстве, расширенном одним измерением времени. При функциональном подходе изменяющиеся параметры системы предполагаются произвольными функциями времени и искомые решения анализируются как функционалы параметров. Фазовое пространство расширяется теперь помимо времени несколькими измерениями пространства параметров. Функциональный подход кажется более сложным по сравнению с временным, и, может быть, поэтому в его применении не видели смысла. Тем более, что всякая задача в функциональной постановке может быть сведена к соответствующей временной задаче.

Но, несмотря на это, результаты применения функционального подхода к неавтономным системам оказались весьма успешными. С неожиданной легкостью функциональный подход позволил получить новые фундаментальные результаты. Это подтверждается тем, как была создана теория геометрических фаз Берри [3]. Тогда Берри и его последователи применили функциональный подход к адиабатическим системам, которые до этого казались полностью изученными при

традиционном временном подходе. Однако внимание исследователей геометрических фаз в первую очередь было направлено на изучение свойств самого эффекта и не обратилось к подходу, постановке задачи, которая позволила его обнаружить. В работе [1] и в настоящей статье демонстрируются результаты, полученные при последовательном функциональном подходе к линейным адиабатическим системам. Оказалось, что функциональный подход позволяет по-новому осветить и связать между собой различные фундаментальные вопросы теории динамических систем.

Ниже мы сформулируем основную идею функционального подхода, продемонстрируем его возможности и перспективы в теории динамических систем.

1. Основная идея

Рассмотрим неавтономную линейную задачу в двух постановках

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mu(t))\mathbf{x}. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ - искомая вектор-функция, \mathbf{A} - невырожденная квадратная матрица. Постановку задачи (1) назовем *временной* - матрица системы является некоторой функцией времени. Можно ставить вопрос о гамильтоновости, устойчивости и сильной устойчивости системы (1). Например, к уравнению (1) применимо замечание Биркгофа [4] о том, что в окрестности неособой точки всегда существует замена координат, приводящая его к тривиальной гамильтоновой форме (локальное выпрямление фазовых траекторий). Постановку задачи (2) будем называть *функциональной* - здесь матрица системы является сложной функцией и зависит от времени через произвольные ограниченные функции некоторых параметров $\mu(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_k(t))$. Во многих физических задачах такая постановка представляется более естественной.

Действительно, в физических системах изменяются во времени параметры этих систем: длина маятника, жесткость пружины, плотность среды и т. п. При этом система характеризуется тем, как эти параметры входят в уравнения, то есть в рассматриваемом случае - зависимостью $\mathbf{A}(\mu)$. (Вот почему естественно расширять фазовое пространство системы пространством параметров, а не временем.) Независимо от того, изменяются ли параметры по какому-то одному закону $\mu = \mu^{(1)}(t)$ или по другому закону $\mu = \mu^{(2)}(t)$, мы имеем дело с одной и той же физической системой. В конце концов, конкретизация зависимости параметров от времени часто является следствием определенной аппроксимации или идеализации системы, и на одном временном интервале зависимость параметров от времени может аппроксимироваться функцией $\mu^{(1)}(t)$, а на другом - функцией $\mu^{(2)}(t)$. Поэтому определение фундаментальных свойств системы - гамильтоновости, сильной устойчивости и т. п. - не должно зависеть от того, как именно изменяются параметры во времени. Видимо, этим объясняется эффективность применения функционального подхода при решении таких общих вопросов.

Функциональность постановки задачи важна, когда речь идет о заменах координат

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}[\mu(t)]\mathbf{y}, \quad (3)$$

где $\mathbf{D}[\mu(t)]$ является матрицей-функционалом параметров. Можно выделить два типа замен (3).

- *Локальные* - $\mathbf{D}[\mu(t)] = \mathbf{D}(\mu(t))$ является функцией параметров и зависит только от их *текущих* значений;

- *Интегральные* - $\mathbf{D}[\mu(t)]$ является интегральным функционалом $\mu(t)$ и зависит от *предыдущих* значений параметров, то есть от предистории системы. Интегральные замены, вообще говоря, расходятся при $t \rightarrow \infty$.

Применение функционального подхода и смысл разделения замен координат на локальные и интегральные продемонстрируем в приближении адиабатического изменения параметров: $\mu = \mu(\epsilon t)$, $\epsilon \ll 1$. Ниже мы сформулируем, следуя [1], основы функциональной теории линейных адиабатических систем (2), пренебрегая в уравнении и его решениях членами порядка ϵ^2 и выше и считая, что матрица \mathbf{A} имеет различные ненулевые текущие собственные значения.

2. Общий формализм

С помощью определенной локальной замены

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}(\mu(\epsilon t), \mu'(\epsilon t)) \mathbf{y}$$

уравнение (2) приводится к почти диагональному виду (недиагональные слагаемые имеют порядок ϵ^2) и тогда легко строятся n независимых асимптотических экспоненциальных решений

$$y_j(t) \approx y_j(0) \exp\left\{\int_0^t \lambda_j(\mu(\epsilon \tau), \mu'(\epsilon \tau)) d\tau\right\}, \quad (4)$$

где $j=1, \dots, n$. Разделив слагаемые порядка ϵ^0 и ϵ^1 , эффективные собственные числа λ_j можно представить в виде

$$\lambda_j = \lambda_j^{(0)} + \lambda_j^{(1)}. \quad (5)$$

Слагаемые нулевого порядка являются функциями параметров

$$\lambda_j^{(0)} = \lambda_j^{(0)}(\mu(\epsilon t)) \quad (6)$$

(на самом деле это текущие собственные числа матрицы \mathbf{A} исходной системы (2)). Слагаемые первого порядка пропорциональны $\mu'(\epsilon t) \sim \epsilon$, то есть представимы в виде

$$\lambda_j^{(1)} = \chi_j(\mu(\epsilon t)) \mu'(\epsilon t). \quad (7)$$

Здесь $\chi_j(\mu)$ - некоторые поля на μ -пространстве параметров. Как мы увидим ниже, в нетривиальном случае эти поля непотенциальны.

Подставив (5) - (7) в (4), получим

$$y_j(t) \approx y_j(0) \exp\left\{\int_0^t \lambda_j^{(0)}(\mu(\epsilon \tau)) d\tau + \psi_j(t)\right\}, \quad (8)$$

где

$$\psi_j(t) = \int_0^t \chi_j(\mu(\epsilon \tau)) \mu'(\epsilon \tau) d\tau = \int_l \chi_j(\mu) d\mu \quad (9)$$

- интеграл по времени от $\lambda_j^{(1)}$ сводится к контурному интегралу в μ -пространстве.

Заметим, что если поле $\chi_j(\mu)$ потенциально: $\chi_j(\mu) = \text{grad}_\mu \phi_j(\mu)$, то величина (9) является локальной

$$\psi_j = \phi_j(\mu(\epsilon t)) - \phi_j(\mu(0))$$

и может быть сведена к нулю локальной заменой

$$y_j \rightarrow y_j \exp\{\phi_j(\mu(0)) - \phi_j(\mu(\epsilon t))\}.$$

Поэтому, не ограничивая общности, мы рассматриваем только непотенциальные поля $\chi_j(\mu)$. В этом случае величины $\psi_j(l)$ нелокальны - они существенно зависят от геометрии контура l (то есть от предыстории системы) и по сути являются комплексными геометрическими фазами Берри [3].

3. Главные результаты

1. Показатели решений (8) определяют характеристические показатели уравнения

$$p_j(t) \equiv \ln(y_j(t)/y_j(0)) \approx \langle \lambda_j^{(0)} \rangle_t + \psi_j/t, \quad (10)$$

где $\langle \lambda_j^{(0)} \rangle_t = 1/t \int_0^t \lambda_j^{(0)} dt$ - средние значения локальных собственных чисел. Второе слагаемое в (10), вообще говоря, не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, так как геометрические фазы могут неограниченно расти даже при ограниченных вариациях параметров (например, если изображающая точка системы непрерывно циркулирует в μ - пространстве). Таким образом, геометрические фазы вместе с локальными собственными значениями определяют глобальный качественный портрет системы на больших временах $t \geq \varepsilon^{-1}$.

2. Оба слагаемых в (10) нелокальны и являются интегральными функционалами параметров. Локальные замены координат оставляют инвариантными собственные числа его матрицы $\lambda_j^{(0)}(\mu)$ и геометрические фазы (поля $\chi(\mu)$). Таким образом, локальные замены координат оставляют инвариантным глобальный качественный портрет системы, не влияя, в частности, на ее устойчивость. Напротив, используя интегральные замены координат, уравнение (2) всегда может быть приведено к тривиальной устойчивой гамильтоновой системе $\dot{y}=0$ (например, заменой $y_j \rightarrow y_j \exp\{-p_j(t)t\}$).

3. Если определять гамильтоновость системы как приводимость ее к канонической форме без изменений глобального качественного портрета, то упомянутый в первом разделе результат Биркгофа не будет иметь силы - предлагаемая им замена может оказаться нелокальной. Используемый функциональный подход позволяет решить задачу о гамильтоновости системы в таком случае. В частности, для осцилляторных систем (2) с чисто мнимыми текущими собственными значениями $\text{Re} \lambda_j^{(0)} = 0$ получается следующий асимптотический результат [1].

Множество гамильтоновых систем есть множество систем с чисто мнимой фазой Берри: $\text{Re} \chi_j = 0$; оно же есть множество сильно устойчивых систем; оно же есть множество квантуемых систем.

Заключение и перспективы

Предлагаемый функциональный подход к неавтономным динамическим системам имеет несколько преимуществ как уже используемых, так и перспективных.

- Геометрические фазы, являющиеся самостоятельным важным физическим эффектом, можно ввести только при функциональной постановке задачи (асимптотические решения адиабатической задачи во временной постановке (1) были известны задолго до введения фаз Берри).

• При этом геометрические фазы в адиабатических системах остаются обособленным и, в некотором смысле, экзотическим эффектом. Последовательный функциональный подход к решению задачи (2) позволяет показать, что комплексные геометрические фазы вместе с локальными собственными числами определяют глобальный качественный портрет системы и по сути являются вторыми членами в асимптотическом разложении характеристических показателей уравнения.

• Это, в свою очередь, позволяет связать теорию фаз Берри с общими вопросами теории неавтономных уравнений: устойчивостью, гамильтоновостью, квантованием. Полученные результаты показывают, что геометрические фазы часто играют определяющую роль при решении этих проблем. Они позволяют связать новым образом указанные общие проблемы не только с геометрическими фазами, но и, с их помощью, между собой (курсив в конце предыдущего раздела). Соответствующие теоремы доказаны в [1] только благодаря функциональному подходу.

• Важно, что при функциональном подходе выявляются тесные связи между локальными и глобальными характеристиками системы. Если во временном подходе малая окрестность неособой точки не может сообщить никакой глобальной информации о системе, то при функциональном подходе некоторые выводы о важных глобальных характеристиках системы (гамильтоновость и пр.) можно сделать.

• Отдельно отметим, что упоминавшаяся выше проблема определения гамильтоновости системы - малоизученная и представляющая интерес для математической физики задача [5]. Мы показали, что она может быть сформулирована по-разному в зависимости от функциональной или временной постановки задачи. Функциональный подход может помочь более эффективному ее решению.

• Наконец, функциональный подход к неавтономным динамическим системам открывает новые возможности для изучения резонансов и неустойчивостей систем, вызванных вариациями параметров. При временном подходе универсальным является язык преобразований Фурье и анализа резонансных компонент в спектре конкретной зависимости параметров от времени. При функциональном подходе анализ проводится сразу для широкого класса функций зависимостей параметров от времени с помощью изучения геометрических структур на пространстве параметров системы. Уже получены первые результаты в этом направлении [6, 7].

Функциональный подход представляется нам более перспективным в теории неавтономных систем. Все результаты, применения временного подхода также получаются и в функциональном, но благодаря применению последнего можно получить еще и другие важные результаты. Простота и лаконичность результатов, полученных для линейных адиабатических систем, позволяют надеяться на аналогичные результаты в более сложных (нелинейных и неадиабатических) случаях, ведь сама идея функционального подхода, очевидно, распространяется на общий случай неавтономной системы. Исходя из функционального подхода, можно последовательно пересмотреть многие основные понятия теории неавтономных систем - эти исследования еще впереди.

Библиографический список

1. Bliokh K.Yu. // J. Phys. A: Math. Gen. 2001 (to be published).
2. Berry M.V. // Proc. R. Soc. A. 1984. Vol. 392. P. 45.

3. Виницкий С.И., Дербов В.Л., Дубовик В.М., Марковски Б.Л., Степановский Ю.П. // УФН. 1990. Т. 160. С. 6.

4. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат. 1941.

5. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. университета, 1995.

6. Bliokh K.Yu. // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. Vol. 32. P. 2551.

7. Блюх К.Ю., Усатенко О.В. Двухмасштабный геометрический резонанс: от параметрического резонанса в осцилляторе до термодинамических циклов // Изв. вуз. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 2. С. 92.

Радиоастрономический институт
НАН Украины

Поступила в редакцию

12.01.01

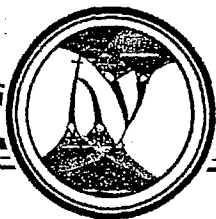
FUNCTIONAL APPROACH TO NON-AUTONOMOUS DYNAMIC SYSTEMS: BERRY PHASE AND PROBLEMS OF HAMILTONIANNES, STRONG STABILITY, QUANTIZATION

K. Yu. Bliokh

Advantages and perspectives of applying the functional approach to non-autonomous dynamic systems are discussed. Characteristics of the system are assumed to depend on time indirectly, through arbitrary functions of parameters under this approach. Main results of functional approach application to linear adiabatic systems are demonstrated. They connect geometric Berry phases, problems of determining whether the system is Hamiltonian, quantization and strong stability.



Блюх Константин Юрьевич - родился в Харькове (1976), окончил физический факультет Харьковского государственного университета (1998). Учился в аспирантуре и работает в Радиоастрономическом институте НАН Украины. Область научных интересов - динамические системы с параметрами и их неустойчивости, волны в неоднородных средах, взаимодействия колебаний. Имеет 10 публикаций в отечественных и зарубежных журналах. E-mail: kostya@bliokh.kharkiv.com



ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС И МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ДЛИННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДАХ

К.Н. Югай, Н.В. Блинов, И.В. Широков

Показано, что в асимптотических стационарных состояниях квантовое число, характеризующее магнитный поток в длинном джозефсоновском переходе, является целым. В нестационарных состояниях квантовое число принимает как целые, так и полуцелые значения. В состояниях динамического хаоса переходы между состояниями и время пребывания в каком-либо состоянии носят нерегулярный характер.

Введение

Джозефсоновский переход представляет собой систему, состоящую из двух сверхпроводников, разделенных между собой тонким слоем изолятора (SIS) или нормального металла (SNS). Толщина изолирующего слоя должна быть такой, чтобы имела место фазовая когерентность этих сверхпроводников, которая обеспечивается при выполнении условия, что толщина слоя, например, изолятора не превышает длины когерентности сверхпроводника. Переходы типа SIS или SNS называются туннельными; впервые они были рассмотрены в 1962 году Джозефсоном, который показал, что через переход, несмотря на наличие изолирующего слоя, может протекать ток интенсивностью $I_s = I_c \sin \varphi$, где φ - разность фаз волновой функции сверхпроводящего конденсата на переходе, I_c - критическое значение тока, и что при $I > I_c$ переход излучает электромагнитные волны СВЧ-диапазона. Эти эффекты, названные эффектами Джозефсона, были подтверждены экспериментально. На основе джозефсоновских переходов созданы квантовые интерферометры - сквиды (Superconducting Quantum Interference Device - SQUID), являющиеся датчиками сверхслабых магнитных полей.

Джозефсоновские переходы вызывают устойчивый интерес с момента их открытия. Кроме огромного практического значения, они обладают рядом замечательных свойств, среди которых в настоящее время на первый план выдвинулись их нелинейные свойства. Оказалось, что джозефсоновский переход служит прекрасным объектом, на котором можно изучать разнообразные нелинейные свойства, например, динамический хаос, причем не только теоретически, но и экспериментально.

Джозефсоновские переходы с длиной, большей джозефсоновской глубины проникновения магнитного поля в переход, называются длинными. Длинные джозефсоновские переходы (ДДП) являются наиболее простыми для описания, но, кроме того, практические туннельные переходы и являются чаще всего таковыми.

Динамический хаос в ДДП представляет большой интерес еще и потому, что он может служить источником динамического шума в построенных на основе ДДП устройствах, в частности, в сквидах, и тем самым ограничивать чувствительность этих устройств. Кроме того, динамический хаос в ДДП является интереснейшим физическим явлением, возникающим в нелинейной системе в отсутствие случайной внешней силы [2-6]. Несмотря на относительную простоту рассматриваемой системы (см., например, [7,8]), ДДП, как показывают исследования, проявляет новые неожиданные свойства по мере углубления наших знаний о нем.

В предыдущих работах [3-6] нами было показано, что среди множества решений граничной задачи Феррелла-Прейнджа, описывающей стационарные состояния ДДП во внешнем магнитном поле в отсутствие тока смещения, имеются устойчивые и неустойчивые стационарные состояния, причем устойчивыми оказались только мейснеровские и флюксонные состояния. При наличии же тока смещения стационарные состояния существуют только в определенной области параметров задачи: внешнего магнитного поля H_0 , тока смещения β , длины перехода L . Достаточно очевидно, что при больших токах смещения β уравнение Феррелла-Прейнджа не будет иметь решений. Поэтому возникает вопрос, при каких значениях β стационарные состояния ДДП исчезают или как в плоскости параметров (β, H_0) будет выглядеть граница, разделяющая эту плоскость на области, в которых стационарные состояния существуют по одну сторону от этой границы и не существуют по другую? Поскольку эта граница является линией, на которой меняется характер решений уравнения Феррелла-Прейнджа, будем далее называть ее бифуркационной кривой. Так как число решений уравнения Феррелла-Прейнджа изменяется при варьировании параметров H_0 , β , возникает другой вопрос: каков вид бифуркационных кривых на плоскости (β, H_0) , разделяющих плоскость параметров на области с различным числом стационарных решений уравнения Феррелла-Прейнджа? Каковы свойства нестационарных состояний вблизи бифуркационной границы, отделяющей область, где нет стационарных решений, от всей остальной области, с точки зрения хаоса?

В настоящей работе сделана попытка более подробно исследовать эти устойчивые и неустойчивые решения и проанализировать проблему с точки зрения квантования магнитного потока. Устойчивые состояния, в которых внешнее магнитное поле проникает в переход только на характерное расстояние λ_J - джозефсоновскую глубину проникновения, то есть быстро спадает вглубь перехода, называются мейснеровскими. Мейснеровские состояния характерны для слабых внешних магнитных полей, меньших критического динамического поля H_{dc} , однако они появляются и при больших, чем H_{dc} , полях [5]. Магнитный поток мейснеровского состояния равен нулю. В флюксонных состояниях магнитное поле проникает в переход в виде джозефсоновских вихрей (флюксон, солитон). Направление магнитного поля в вихре совпадает с направлением внешнего поля. Магнитный поток каждого флюксона и антифлюксона равен одному кванту магнитного потока. В антифлюксоне направление магнитного поля противоположно направлению внешнего поля. Показано, что стационарные состояния существуют только с нулевым, целым и полуцелым числом квантов магнитного потока. Состояния с полуцелым числом квантов магнитного потока всегда являются неустойчивыми. Среди состояний с целым числом квантов потока флюксонные состояния являются устойчивыми, а антифлюксонные - неустойчивыми. Среди состояний с нулевым числом квантов потока устойчивыми могут быть только мейснеровские состояния. Сформулирована теорема, которая позволит определять устойчивые и неустойчивые состояния по признаку квантования магнитного потока. Показано также, что в нерегулярных,

хаотических состояниях число квантов потока является нерегулярной функцией времени.

Разрешенные состояния

В общем случае ДДП описывается нестационарным уравнением синус-Гордона [7]

$$\varphi_{tt}(x,t) + 2\gamma\varphi_t(x,t) - \varphi_{xx}(x,t) = -\sin\varphi(x,t) + \beta. \quad (1)$$

Здесь $\varphi(x,t)$ - разность фаз волновой функции сверхпроводящего конденсата на переходе; β - плотность тока смещения, нормированная на критическую плотность тока перехода j_c ; x - расстояние вдоль перехода, отсчитываемое от левого края перехода и нормированное на джозефсоновскую глубину проникновения

$$\lambda_J = [C\Phi_0/(8\pi^2 j_c d)]^{1/2};$$

Φ_0 - квант магнитного потока; $d=2\lambda_L+b$, λ_L - лондоновская глубина проникновения; b - толщина диэлектрического барьера; t - время, нормированное на обратную джозефсоновскую частоту ω_J

$$\omega_J = [2\pi c j_c / (C\Phi_0)]^{1/2};$$

C - емкость перехода на единицу площади; $\gamma = \Phi_0\omega_J/4\pi c R j_c$ - коэффициент диссипации на единицу площади перехода, R - сопротивление перехода на единицу площади. В уравнении (1) и далее нижние индексы у функции φ обозначают соответствующие производные, например, $\varphi_{tt} \equiv \partial^2\varphi/\partial t^2$. Уравнение (1) должно быть дополнено граничным условием в виде

$$\varphi_x(x,t)|_{x=0} \equiv H(0,t) = \varphi_x(x,t)|_{x=L} \equiv H(L,t) = H_0[1 - a \exp(-t/2t_0) \cos 0.5t], \quad (2)$$

где L - длина перехода, нормированная на λ_J ; H_0 - внешнее магнитное поле, перпендикулярное переходу и нормированное на величину $\Phi_0/(2\pi\lambda_J d)$; a и t_0 - некоторые параметры, характеризующие возмущение на границе ДДП. В качестве начальных условий использовались $\varphi(t)=0$ и $\varphi_t(t)=0$. Прежде всего исследуем стационарные состояния ДДП с помощью численного интегрирования уравнения Феррелла-Прейнджа, являющегося стационарным вариантом уравнения синус-Гордона

$$\varphi_{xx}(x) = \sin\varphi(x) - \beta, \quad (3)$$

с граничным условием

$$\varphi_x(x)|_{x=0} = \varphi_x(x)|_{x=L} = H_0. \quad (4)$$

Численное интегрирование уравнения (3)-(4) позволило установить на плоскости параметров (β, H_0) области с определенным числом решений [5]. Границы между областями - бифуркационные кривые - характеризуют существенную перестройку системы. Решения граничной задачи (3) - (4) при заданных параметрах β , H_0 и L будем называть разрешенными состояниями. Их число изменяется при изменении этих параметров, а именно, при росте H_0 и L число разрешенных состояний увеличивается, а при росте β - уменьшается вплоть до нуля. Расчеты показали, что при заданном наборе параметров β , H_0 и L часть разрешенных состояний устойчивы, а остальные неустойчивы. Неустойчивость состояний определялась следующим образом: нестационарное уравнение синус-Гордона линейризовалось в окрестности стационарного решения: $\varphi(x,t) = \varphi(x) + \theta(x,t)$, где $\theta(x,t)$ - малое возмущение. Уравнение для $\theta(x,t)$ - линейризованное уравнение синус-Гордона (1),

решается затем с помощью разложения этой функции по полной системе собственных функций оператора Шредингера с потенциалом $\cos[\varphi(x)]$

$$\theta(x,t) = \sum_n \exp(\lambda_n t) u_n(x), \quad (5)$$

где $u_n(x)$ - собственные функции оператора Шредингера:

$$-u_{xx}(x) + u(x)\cos\varphi(x) = Eu(x), \quad (6)$$

$$u_x(x)|_{x=0} = u_x(x)|_{x=L} = 0.$$

Тогда

$$\lambda_n = -\gamma \pm (\gamma^2 - E_n)^{1/2}, \quad (7)$$

где γ - коэффициент диссипации в уравнении синус-Гордона. При $\lambda_n < 0$ решение $\varphi(x)$ - устойчиво, а при $\lambda_n > 0$ - неустойчиво. Неустойчивые состояния распадаются и, как показали расчеты, переходят в одно из устойчивых состояний - мейснеровское или какое-либо флюксонное состояние [5, 6]. На рис. 1 представлена схема переходов между состояниями при $H_0=1,9$; $\beta=0$; $L=10$. Здесь устойчивое состояние 6 - мейснеровское, 8 - однофлюксонное, 10 - двухфлюксонное, 12 - трехфлюксонное. Взаимное расположение горизонтальных черточек на рисунке соответствует значениям термодинамического потенциала Гиббса, вычисленного по формуле

$$G = \int_0^L dx [1/2\varphi_x^2(x) + 1 - \cos\varphi(x) - \beta\varphi(x) - H_0\varphi_x(x)]. \quad (8)$$

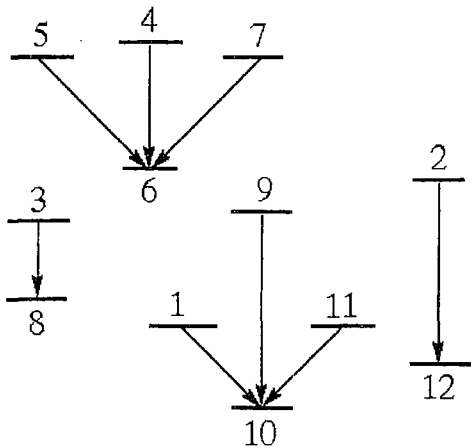


Рис. 1. Схема переходов между состояниями

Здесь G - термодинамический потенциал Гиббса на единицу длины перехода вдоль внешнего магнитного поля, нормированный на величину $\Phi_0/(16\pi^3\lambda_j d)$. Уравнение Феррелла-Прейнджа является экстремалью функционала (8). Исследование второй вариации G показывает, что все экстремумы этого функционала удовлетворяют необходимым и достаточным условиям сильного минимума [9]. Таким образом, все решения уравнения (3)-(4) (и устойчивые и неустойчивые) соответствуют минимумам термодинамического потенциала Гиббса, один из которых является глобальным, остальные - локальными. Иными словами, в стационарных условиях термодинамический потенциал Гиббса принимает дискретные, квантованные значения, соответствующие его локальным или глобальным минимумам. Все эти минимумы соответствуют разрешенным состояниям. Не все из локальных минимумов оказываются равноправными, часть из них оказываются устойчивыми, часть - неустойчивыми.

Квантование потока в стационарных состояниях

Для бесконечно длинного перехода однофлюксонное решение обладает значениями: $\varphi(x)|_{x \rightarrow -\infty} = 0$, $\varphi(x)|_{x \rightarrow +\infty} = 2\pi$, полный магнитный поток

$$\Phi = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x) dx = 1/(2\pi) [\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)] = 1. \quad (9)$$

Здесь магнитный поток Φ нормирован на квант потока Φ_0 . В случае n -флюксонных состояний $\Phi = n$ (см., например, [5]). В случае переходов конечной длины ситуация существенным образом меняется. В работе [6] нами было показано, что полный магнитный поток

$$\Phi = 1/(2\pi) [\varphi(L) - \varphi(0)]$$

не равен единице для однофлюксонного состояния. Однако в случае переходов конечной длины на краях перехода всегда текут экранирующие токи и поток флюксона должен рассчитываться иным образом. Сформулируем теорему, позволяющую учесть эффекты на границах перехода конечной длины.

Теорема. Если функция $\varphi(x)$ является решением стационарной граничной задачи синус-Гордона (3)-(4), то магнитный поток

$$\Phi = 1/(2\pi) \int_{x_1}^{x_2} \varphi_x(x) dx = 1/(2\pi) [\varphi(x_2) - \varphi(x_1)] \equiv \Phi_n, \quad (10)$$

где $\Phi_n = n$ ($n=0,1,2,\dots$) - для мейснеровских и квазимейснеровских состояний $n=0$, для флюксонных и антифлюксонных - $n > 0$, $\Phi_n = n + 1/2 \pm \arcsin \beta$ ($n=0,1,2,\dots$) - для всех остальных состояний, а x_1 и x_2 - ближайшие соответственно левому и правому краям перехода точки, в которых $j(x_1) = \varphi_{xx}(x_1) = j(x_2) = \varphi_{xx}(x_2) = 0$.

Доказательство. Действительно, из определения точек x_1 и x_2 следует $j(x) = \varphi_{xx} = \sin \varphi - \beta = 0$. Отсюда имеем $\varphi_1(x) = 2\pi n + \arcsin \beta$ или $\varphi_2(x) = (2n+1)\pi - \arcsin \beta$, где $n = 0,1,2,\dots$ (Числа $n \geq 0$, так как происходит набег фазы φ от точки x_1 до точки x_2). Функции $\varphi(x_1)$ и $\varphi(x_2)$ принимают вид или $\varphi_1(x)$, или $\varphi_2(x)$, причем $n_2 > n_1$ (n_2 - числа n в точке x_2 , а n_1 - в точке x_1). Подставляя в (3) различные комбинации функций φ_1 и φ_2 , получим $\Phi_n = n$ ($n=0,1,2,\dots$) и $\Phi_n = n + 1/2 \pm \arcsin \beta$ ($n=0,1,2,\dots$). Поток $\Phi_n = 0$ соответствует мейснеровским и квазимейснеровским состояниям, $\Phi_n = n$ ($n > 0$) - флюксонным и антифлюксонным состояниям (названия состояний с $n=0$ и с $n > 0$ - по определению), а $\Phi_n = n + 1/2 \pm \arcsin \beta$ ($n=0,1,2,\dots$) - всем остальным состояниям.

Заметим, что флюксонные и антифлюксонные состояния можно отличить друг от друга по следующему признаку: в точках x_1 и x_2 для флюксонных состояний $j_x > 0$, для антифлюксонных - $j_x < 0$. Это означает, что поле флюксона совпадает с внешним полем, поле антифлюксона противоположно внешнему полю. Кроме того, флюксонные состояния устойчивы, а антифлюксонные - нет. Что касается мейснеровских и квазимейснеровских состояний, то их различить можно по признаку устойчивости: мейснеровские состояния устойчивы, а квазимейснеровские - нет.

Таким образом, асимптотические стационарные состояния ДДП характеризуются значениями магнитного потока $\Phi_n = n$ ($n=0,1,2,\dots$), то есть поток определяется целыми квантовыми числами n . Разрешенные состояния с значениями потока $\Phi_n = n + 1/2 \pm \arcsin \beta$ ($n=0,1,2,\dots$) распадаются и в асимптотических стационарных состояниях их нет. Однако обратим внимание на то, что устойчивые стационарные состояния двукратно вырождены. Это вырождение снимается в состояниях с полуцелым значением квантового числа. Асимптотические состояния находились с помощью решения нестационарного уравнения синус-Гордона (1)-(2).

На рис. 2 представлены асимптотические стационарные состояния для $\gamma = 0.26$ и $L = 10$.

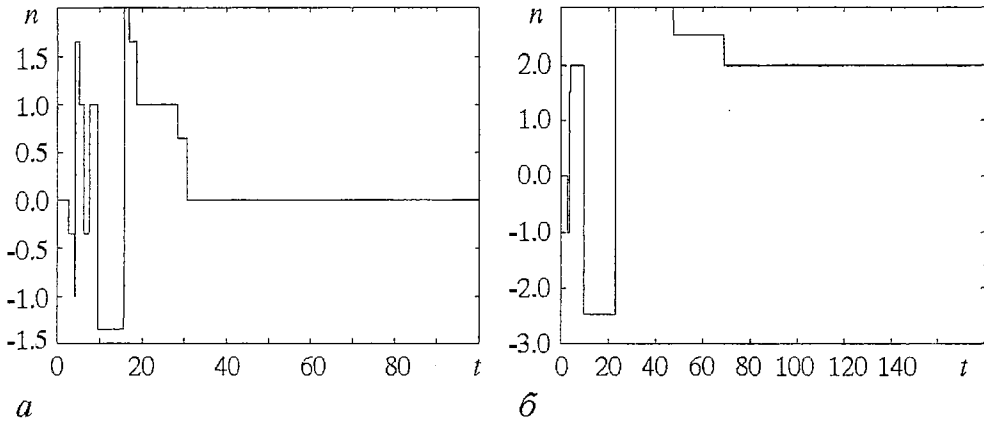


Рис. 2. Асимптотические стационарные состояния: а - мейснеровское при $\beta=0.45, H_0=1.256, a=3.0$; б - двухфлюксонное при $\beta=0.08, H_0=2.0, a=2.0$

Динамический хаос и квантование магнитного потока

Перейдем к рассмотрению нестационарных состояний. Как отмечалось выше, при увеличении тока смещения β число стационарных состояний уменьшается. Расчеты показывают, что при этом увеличивается число нестационарных состояний. В общем случае, как было показано в [4], в ДДП возникает три кластера состояний - стационарный, регулярный и хаотический. В настоящем разделе рассмотрим нестационарные состояния - регулярные и хаотические - с точки зрения квантования потока.

В ДДП конечной длины как в стационарных, так и в нестационарных режимах на краях перехода текут экранирующие токи и необходимо определить точки x_1 и x_2 - ближайшие, соответственно, левому и правому краям перехода точки, в которых токи равны нулю. В данном случае, однако, x_1 и x_2 будут функциями времени: $x_1=x_1(t)$ и $x_2=x_2(t)$, и условиями нахождения этих точек будет равенство нулю в них полного тока - тока сверхпроводимости и квазичастичного, то есть $j(x_1, t)=j(x_2, t)=0$, где $j(x, t)=\varphi_{xx}(x, t)+2\gamma\varphi_x(x, t)-\varphi_{xx}(x, t)$. Таким образом, для случая нестационарных состояний может быть сформулирована следующая теорема.

Теорема. Если функция $\varphi(x, t)$ является решением нестационарной граничной задачи синус-Гордона (1)-(2), то поток

$$\Phi(t) = 1/(2\pi) \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \varphi_x(x, t) dx = 1/(2\pi) [\varphi(x_2, t) - \varphi(x_1, t)] \equiv \Phi_n(t), \quad (11)$$

где $\Phi_n(t) = n(t)$ ($n=0,1,2,\dots$) - для мейснеровских и квазимейснеровских состояний $n=0$, для флюксонных и антифлюксонных - $n \neq 0$, $\Phi_n(t)=n(t)+1/2 \pm \arcsin \beta$ ($n=0,1,2,\dots$) - для всех остальных состояний, а x_1 и x_2 - ближайшие, соответственно, левому и правому краям перехода точки, в которых $j(x_1, t)=j(x_2, t)=0$.

Доказательство этой теоремы не приводится, так как оно аналогично доказательству соответствующей теоремы для стационарного случая, рассмотренного в предыдущем разделе.

Здесь n является функцией времени в том смысле, что в разные моменты времени n принимает разные значения. В отличие от стационарных состояний

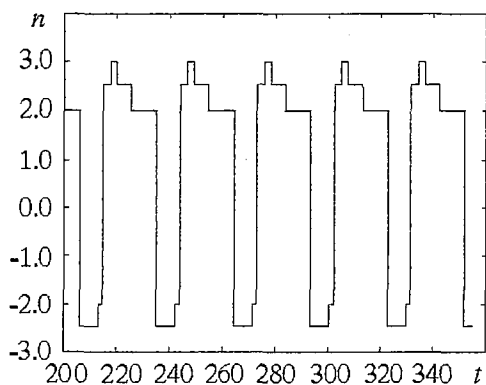


Рис. 3. Зависимость магнитного потока от времени в регулярном режиме при $\gamma=0.1$, $\beta=0.125$, $H_0=1.917$, $L=10$ и $a=1.4$

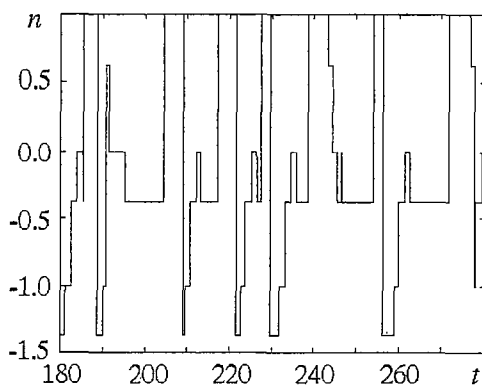


Рис. 4. Зависимость магнитного потока от времени в хаотическом режиме при $\gamma=0.12$, $\beta=0.38$, $H_0=1.41$, $L=6$ и $a=0.0$

магнитный поток $\Phi(t)$ принимает различные значения из всего ряда $\Phi_n(t) = n(t)$ и $\Phi_n(t) = n(t)+1/2 \pm \arcsin\beta$ ($n=0,1,2,\dots$), пребывая в каждом из них какое-то определенное время. При заданных параметрах поток $\Phi(t)$ изменяется во времени скачкообразно. Кроме того, сами точки x_1 и x_2 перемещаются с течением времени и характер перемещения в регулярных и хаотических состояниях оказывается различным.

На рис. 3 представлена зависимость магнитного потока от времени в регулярном режиме. В работе [4] отмечалось, что начальное состояние существенным образом влияет на асимптотическое состояние ДДП с диссипацией. Расчеты показывают, что при $a=0.0 \div 1.35$; $2.64 \div 3.90$ и т.д. реализуется регулярное состояние с максимальным числом $n=2$, а при $a=1.36 \div 2.63$; $3.91 \div 5.21$ и т.д. - состояние, изображенное на рис. 3 и т.д. Таким образом, этот параметр существенно влияет на эволюцию распределения магнитного потока. Но общим является то, что поток в данный момент времени может характеризоваться как целыми, так и полуцелыми квантами магнитного потока. Причем реализуются состояния со значениями потока $\Phi_n(t) = n(t)$ и $\Phi_n(t) = n(t)+1/2 \pm \arcsin\beta$ ($n=0,1,2,\dots$). Из рисунка видно, что система в нестационарном режиме пробегает состояния и устойчивые, и неустойчивые в стационарном режиме. Переходы между состояниями происходят скачкообразно. На рис. 2 и 3 учтено, что во флюксоне магнитное поле совпадает с внешним полем, а в антифлюксоне - противоположно (в точках x_1 и x_2 для флюксонных состояний $j_x > 0$, а для антифлюксонных - $j_x < 0$). Время пребывания в любом состоянии в регулярном режиме изменяется регулярно.

На рис. 4 представлена зависимость магнитного потока от времени в хаотическом режиме. Как видно, значение магнитного потока также изменяется скачкообразно, однако смена состояний происходит нерегулярно, время пребывания в каком-либо состоянии изменяется хаотически. Видно также, что реализуются состояния со

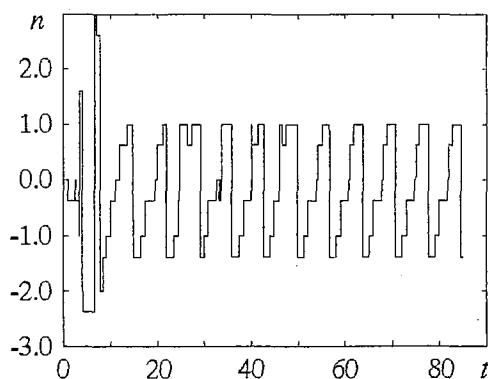


Рис. 5. Зависимость магнитного потока от времени в неустойчивом режиме при $\gamma=0.12$, $\beta=0.38$, $H_0=1.41$, $L=6$ и $a=4.2$

целым, так и с полужелым значением кванта магнитного потока. В диапазоне значений $a=0.0\div 3.62$ реализуется хаотический режим, который сменяется регулярным режимом при $a=3.63\div 7.58$, вновь сменяющийся хаотическим при $a=7.59\div 13.51$ и т.д. Отметим, что характер состояния - регулярный или хаотический - устанавливался с помощью расчета показателя Ляпунова.

Такое же нерегулярное поведение магнитного потока имеет место и в начальный период времени, в неустановившемся режиме, при переходе к стационарному (см. рис. 2) и к регулярному режиму (рис. 5).

Заключение

Расчеты, проведенные нами, показали, что макроскопическое квантование магнитного потока в ДДП в стационарных и динамических режимах существенно различается. В стационарных режимах квантовое число, определяющее магнитный поток, принимает только целые значения. В динамических режимах кроме целых вступают в игру и полужелые числа, точнее, $n(t)+1/2\pm\arcsin\beta$. В состояниях динамического хаоса переходы между ними и время пребывания в каждом из них имеют нерегулярный характер, тогда как в регулярных режимах - регулярный.

Пока трудно сказать, является ли обнаруженное свойство квантования динамических нелинейных систем в хаотических и регулярных состояниях общим для макроскопических квантовых систем или нет. Однако удивительно, что, например, целые и полужелые квантовые числа рассматриваемой системы поддаются такой простой и понятной интерпретации. Что касается хаоса в системе, то, очевидно, мы имеем здесь дело с квантовым хаосом, но описываемым в терминах классической нелинейной динамики. На возможность такого описания квантового хаоса было указано в [10]. Мы надеемся подробнее исследовать этот вопрос применительно к хаосу в ДДП в следующей работе.

Работа поддержана грантом «Университеты России - фундаментальные исследования» № 990032.

Библиографический список

1. Josephson B.D. Possible new effects in superconductive tunneling // Phys.Lett. 1962. Vol.1. P. 251.
2. Yeh W.J., Symko O.G., Zheng D.J. Chaos in Josephson junctions without external rf driving force // Phys. Rev. B. 1990. Vol. 42, № 7. P. 4080.
3. Yugay K.N., Blinov N.V., Shirokov I.V. Asymptotic states in long Josephson junctions in an external magnetic field // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 49, № 17. P. 12036.
4. Yugay K.N., Blinov N.V., Shirokov I.V. Effect of memory and dynamical chaos in long Josephson junctions // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 51, № 18. P. 12737.
5. Yugay K.N., Blinov N.V., Shirokov I.V. Bifurcations and a chaos strip of long Josephson junctions // Low Temp. Phys. 1999. Vol. 25, № 7. P. 530.
6. Yugay K.N., Blinov N.V., Shirokov I.V. Flux quantization in stationary and nonstationary states in long Josephson junctions // Low Temp. Phys. 2000. Vol. 26, № 11. P. 1067.
7. Barone A., Paterno G. Physics and applications of the Josephson effect. Wiley-Interscience, New York, 1982.
8. Лухарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985.
9. Коша А. Вариационное исчисление. М.: ВШ, 1983.

10. *Yugay K.N., Tvorogov S.D.* Strange attractor and the probabilities of transitions of an anharmonic oscillator in an external time-dependent field// Proc. SPIE. 1998. Vol. 3485. P. 560.

*Омский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 7.02.01
после доработки 29.03.01*

DYNAMICAL CHAOS AND MACROSCOPIC QUANTUM PHENOMENA IN LONG JOSEPHSON JUNCTIONS

K.N.Yugay, N.V.Blinov, I.V.Shirokov

It is shown, that the quantum number characterizing the flux in asymptotic stationary states of a long Josephson junction is integer. The quantum number is both integer and half-integer in nonstationary states. Transitions between states and lifetime of any states have an irregular character in dynamical chaos states.



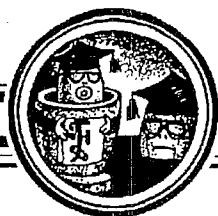
Югай Климентий Николаевич - родился в Узбекистане, окончил физико-технический факультет Томского политехнического института (1966). После окончания работал в ТПИ. С 1977 года работает в Омском государственном университете. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ТПИ (1970), доктора физико-математических наук в Томском государственном университете (1995) в области нелинейных явлений в оптике и сверхпроводимости. Опубликовал 104 научные статьи. Редактор направления «Физика» в журнале «Вестник Омского университета». E-mail: yugay@phys.omsu.omscreg.ru



Блинов Николай Валерьевич - родился в Караганде (1960), окончил физический факультет Омского государственного университета (1982). После окончания работает в Омском государственном университете. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Томском государственном университете (1992) в области физики поверхностных явлений. Опубликовал 22 научные статьи.



Широков Игорь Викторович - родился в Омске (1963), окончил физический факультет Омского государственного университета (1985). Работает в Омском государственном университете. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Томском государственном университете (1990) и доктора физико-математических наук (1996) в области математической и теоретической физики. Опубликовал 65 научных статей.



РЕЗОНАНСНЫЙ ПЛАЗМЕННО-ВОЛНОВОЙ РАЗРЯД В ИОНОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Г.А. Марков, Ю.В. Чугунов

Экспериментально показаны возможности формирования в ионосфере Земли волнового разряда в свистовом диапазоне частот. Обсуждаются особенности его структуры и динамики. Приведены данные о возмущениях, стимулируемых модулированным разрядом, в околоземном пространстве. Демонстрируются возможности использования такого разряда в качестве НЧ плазменной антенны.

Введение

Активное волновое воздействие на ионосферу Земли является в настоящее время эффективным средством изучения нелинейных ионосферных явлений и определения возможностей их технологического использования. Особенно сильные воздействия возможны в резонансных областях частот $\omega_{\text{Вi}} \leq \omega \leq \omega_{\text{Ве}}$, где $\omega_{\text{Ве}}$ и $\omega_{\text{Вi}}$ – гирочастоты электронов и ионов, соответственно. Следует, прежде всего, отметить, что в условиях нижней ионосферы $h \leq 150$ км уже при напряжениях электрических полей $E_{\sim} 10$ В/см возможно возбуждение резонансных ВЧ-разрядов бортовыми радиоисточниками летательных аппаратов.

Ионизационное самовоздействие полей электромагнитных источников в указанном свистовом диапазоне частот допускает совместную концентрацию ионизирующего излучения и образующейся плазмы [1–6]. В результате такого самовоздействия наблюдается формирование плазменно-волновых каналов, локализующих энергию излучения и ее выделение в узкой магнитной силовой трубке. Образующаяся при разряде плазменная неоднородность автоматически [7] подсогласовывает короткую возбуждающую антенну с генератором накачки и окружающей средой, что увеличивает эффективность передачи энергии от источника в плазму силовой трубки. В ночной ионосфере возбуждаемый на высотах $h \geq 150$ км бортовым радиоисточником плазменно-волновой канал может быть источником мощных потоков горячих частиц вдоль геомагнитного поля.

Для экспериментальной проверки высказанных предположений и исследования локальных и крупномасштабных возмущений параметров ионосферной и магнитосферной плазмы, стимулированных радиоизлучением с борта летательного аппарата, был предложен и реализован ионосферный эксперимент «Активный шнур». Основным отличием указанного эксперимента от

других экспериментов, в которых также использовалось мощное радиоизлучение, являются достаточно большие амплитуды ближних полей, способные вызвать электрический разряд и существенно изменить плотность плазмы вблизи летательного аппарата. Кроме того, особенностью эксперимента «Активный шнур» является выбор резонансного частотного диапазона $\omega_{нр}, \nu_e < \omega_{рф} < \omega < \omega_{ве}$, где $\omega_{нр}$ – частота нижнегибридного резонанса, ν_e – частота столкновений электронов, $\omega_{рф}$ – плазменная частота фоновой плазмы. В указанном диапазоне легко реализовать усиление поля в фокусе резонансного конуса [1,3,5] и наблюдать ионизационное самоканалирование плазменных [1–3] и свистовых [4,6] волн. Еще одна особенность – сравнительно долгое время реализации эксперимента в одной и той же силовой трубке (~3 мин).

Основные результаты лабораторного моделирования эксперимента «Активный шнур» приведены в работах [1–8]. Стационарная структура разряда (в дальнейшем мы будем называть его плазменно-волновым разрядом), возбуждаемого дипольной антенной из двух колец, ориентированной вдоль внешнего магнитного поля и оси симметрии установки, показана на фотографии рис. 1, на которой видны две отличающиеся области разряда. Первая область локализована вблизи антенны и представляет собой конусный объем, основание которого лежит в плоскости источника (антенны), а вершина – на оси плазменной камеры. На образующих конуса достигаются максимумы концентрации разрядной плазмы и амплитуды электрического поля [3]. Угол раствора конуса α при умеренных мощностях накачки соответствует линейному дисперсионному уравнению для плазменных волн в данном диапазоне частот $\text{tg}\alpha = (\epsilon_{\perp} / |\epsilon_{\parallel}|)^{1/2}$, где α – угол между групповой скоростью плазменных волн и внешним магнитным полем, ϵ_{\perp} и ϵ_{\parallel} – поперечная и продольная компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы. Это означает, что в первой области разряд возбуждается и поддерживается «ближним» электромагнитным полем антенны и полем пучка плазменных волн, возбуждаемых антенной. Вершина конуса соответствует геометрическому фокусу пучка плазменных волн при данной геометрии. После прохождения фокуса структура разряда качественным образом меняется. Во второй области разряд представляет собой сильно вытянутый вдоль магнитного поля (вблизи оси системы) плазменный шнур. Электрическое поле и концентрация разрядной плазмы локализованы внутри шнура. Концентрация электронов в шнуре может превышать концентрацию электронов фоновой плазмы на несколько порядков, а температура электронов разрядной плазмы – порядка энергии ионизации. Эти величины, а также длина шнура зависят от мощности генератора накачки. Поперечный размер (радиус) шнура зависит от величины внешнего магнитного поля и давления, но всегда мал по сравнению с радиусом камеры. В этой области реализуется разряд в виде самосогласованного плазменно-волнового канала, оторванного от стенок плазменной камеры. Продольный размер канала существенно превышает радиус плазменной камеры и при давлениях $p < 10^{-2}$ Торр определяется продольным размером этой камеры. Возможные структуры такого разряда были изучены в лабораторных условиях в широком интервале давлений,



Рис. 1. Структура ВЧ-разряда, формируемого в результате ионизационного самоканалирования плазменных волн в продольном магнитном поле $B_0 = 500$ Гс при $p = 2 \times 10^{-2}$ Торр, $f = 200$ МГц, $V_0 = 50$ В; z – расстояние от дипольного источника, формирующего разряд, r_a – радиус возбуждающих колец источника

параметров фоновой плазмы, мощности генератора накачки и геометрии антенной системы [2,3]. Следует сразу отметить, что усложнение геометрии антенной системы (например, применение квадрупольных конфигураций) или работа генератора в сильно нелинейном режиме могут приводить к более сложным стационарным конфигурациям плазменно-волнового разряда [2]. Однако сильно вытянутые вдоль магнитного поля неоднородности разрядной плазмы реализуются и в этих более сложных конфигурациях. Из динамических режимов следует отметить режим модуляции или «мигания» разряда, который осуществляется путем амплитудной модуляции сигнала генератора накачки низкой частотой. Динамика разрядной плазмы характеризуется в этом случае [5] периодическим изменением параметров плазмы в канале с частотой модуляции, появлением сильного диамагнитного сигнала и генерацией ускоренных электронов и ионов в широком интервале энергий.

Лабораторное моделирование указанных выше разрядных явлений применительно к условиям нижней ионосферы на высотах $h \sim (90 \div 150)$ км показало возможность создания на этих высотах сильных локальных возмущений в виде плазменных неоднородностей с регулируемыми параметрами, вытянутых вдоль геомагнитного поля. Резонансный плазменно-волновой разряд возбуждается в ближнем электромагнитном поле бортовой дипольной антенны, легко управляется и характеризуется оптимальным вводом энергии в окружающую плазму. Лабораторное моделирование [8] и расчеты указанных процессов позволяют сделать оценки основных параметров возбуждаемой плазменной неоднородности в ионосфере [9]. Существенную роль в формировании плазменной неоднородности могут играть диффузионные процессы. Схема ионосферного эксперимента и структура формируемой плазменной неоднородности показана на рис. 2.

Длина собственно разрядной части L_d определяется масштабом затухания плазменных волн, формирующих разряд, $L_d \sim \omega \lambda_{\parallel} / v_e$. Здесь $\lambda_{\parallel} = 2\pi/k_{\parallel}$, k_{\parallel} – компонента волнового вектора вдоль внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 . Продольный масштаб диффузионной части неоднородности определяется соотношением $L_D \sim (D_{\parallel} / \nu_a)^{1/2}$, где $D_{\parallel} = \epsilon_e / (m v_e)$ – коэффициент униполярной диффузии электронов вдоль \mathbf{B}_0 , ϵ_e – энергия электронов, e и m – заряд и масса электрона, ν_a – частота рекомбинации частиц (в нижней ионосфере это частота прилипания электронов к атомам кислорода). Поперечный масштаб плазменной неоднородности L_{\perp} зависит от перпендикулярной вектору \mathbf{B}_0 компоненты скорости аппарата, структуры

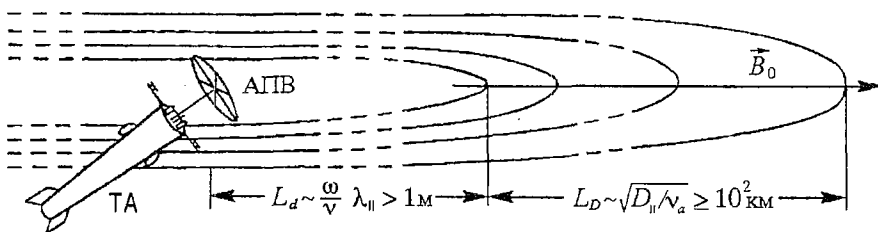


Рис. 2. Схема ионосферного эксперимента с условным изображением метеоракеты с антенной плазменных волн (АПВ), диагностическими приборами в головной части ракеты и телеметрическими антеннами (ТА) по бокам ракеты. Формируемая в результате разряда плазменная неоднородность изображена линиями равной концентрации

ближнего поля, возбуждающей разряд антенны и диффузионных процессов. В ракетных экспериментах [10–14] $L_{\perp} \sim 100$ м.

В таблицу сведены расчетные данные по основным параметрам плазменной неоднородности в зависимости от высоты полета при частоте генератора накачки 480 кГц и подводимой мощности $W \sim 1$ кВт, из которых видно, что наиболее благоприятные условия для реализации достаточно протяженных (продольные масштабы разрядной части L_d больше 1 км) и интенсивных (по возмущению концентрации и температуры) плазменных неоднородностей осуществляются на высотах, больших 130 км. Причем диффузионная часть неоднородности сильно возрастает с увеличением высоты из-за роста длины свободного пробега электронов $l_e(h)$ [15]. Следует отметить, что подобные возмущения ионосферной плазмы можно создавать и на больших высотах, если в спутниковых экспериментах использовать напуск газа в область излучающей антенны.

Таблица

Высота над поверхностью Земли h (км)	100	120	140	160
Длина разрядной части шнура L_d (м)	15	150	1500	7500
Усредненная плотность плазмы в разрядной части шнура (см^{-3})	$3 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$\sim 10^6$
Длина диффузионной части шнура L_D (м)	10	200	10^4	$2 \cdot 10^5$

Известно, что магнитосфера Земли, особенно в высоких широтах, представляет собой сильно неравновесную систему, в которой происходят различного рода взаимодействия электромагнитных волн и частиц, направляемых геомагнитным дипольным полем. Одна из распространенных точек зрения состоит в том, что магнитосфера есть распределенный альвеновский мазер, в котором «рабочее вещество» представляет собой энергичную часть электронов при анизотропной функции распределения частиц по скоростям (например, частицы радиационных поясов), а резонаторная система состоит из силовых трубок геомагнитного поля, заполненных «холодными» частицами. Возбуждаемые электромагнитные моды есть свистовые или альвеновские волны. Они направляются геомагнитным полем и (или) неоднородным распределением концентрации «холодных» частиц (волноводные дакты) и испытывают отражение в сопряженных точках в основаниях силовой трубки геомагнитного поля, иногда на ионосферных высотах. Степень возбуждения такой системы характеризует, прежде всего, уровень высыпающихся энергичных частиц из силовой трубки геомагнитного поля и уровень шумовых электромагнитных излучений в ней. Следует ожидать, что изменение концентрации частиц в основании силовой трубки и натекание надтепловых частиц плазменно-волнового разряда в ее объем могут существенно изменить уровень взаимодействия волн и частиц в силовой трубке геомагнитного поля, в основании которой возбуждается разряд. Прежде всего изменяются условия возбуждения, каналирования и отражения свистовых и альвеновских электромагнитных волн, захваченных в возмущенную разрядом трубку. При этом могут измениться потоки высыпающихся из такой трубки заряженных частиц. Модуляция потоков частиц разрядом означает возбуждение переменных токов с масштабами возмущенной трубки.

Важной физической задачей, которая также может моделироваться в

подобных экспериментах, является создание новых типов низкочастотных излучателей (плазменных антенн). Первый вариант создания таких антенн связан с увеличением эффективности излучения дипольной антенны на частоте накачки при возбуждении вокруг нее плазменно-волнового разряда или, другими словами, при помещении антенны в достаточно плотный и протяженный плазменный объем. Это может быть реализовано как в пассивном, так и в активном режимах. В пассивном режиме происходит увеличение дипольного момента из-за эффективного увеличения геометрических размеров излучателя. Активный способ основан на предположении, что зажигание плазменно-волнового разряда в ближнем поле дипольной антенны в большинстве случаев приводит к дополнительному согласованию антенны с выходом генератора, то есть к достаточно эффективному вводу электромагнитной энергии в плазменный объем [7]. В дипольной конфигурации это означает, что, как правило, растет и излучаемая из этого объема электромагнитная мощность на частоте накачки. Кроме того, из-за возбуждения поверхностных волн в плазменной неоднородности больших размеров возможно существенное изменение диаграммы направленности и коэффициента усиления антенны. Второй вариант связан с возможностями переизлучения из плазменного объема сигнала с частотой модуляции сигнала накачки, то есть создания на ионосферных высотах низкочастотной активной плазменной антенны, достаточно эффективно излучающей электромагнитные сигналы в интервале частот 10÷1000 Гц.

1. Натурный эксперимент «Активный шнур»

Эксперимент «Активный шнур» был реализован в шести ракетных пусках. Для эксперимента были использованы метеоракеты МР-12 с блоком научной аппаратуры (БНА). БНА располагался в головной части ракеты и содержал аппаратуру воздействия на параметры окружающей среды и аппаратуру диагностики возмущений параметров. К аппаратуре воздействия относились ВЧ-генератор с блоками питания и автоматики и телескопическая антенна для возбуждения плазменных волн. Для усиления воздействия использовались взрывы пиропатронов и дополнительный напуск газа в область возбуждающей разряд антенны. Диагностика возмущений осуществлялась с помощью автоколебательного и ленгмюровских зондов, счетчиков энергичных частиц разных диапазонов энергий, бортового приемника НЧ-колебаний электромагнитного поля, анализатора массового состава заряженных частиц, датчиков величины геомагнитного поля и фотометра. На рис. 2 показано схематичное расположение датчиков научных приборов на ракете во время эксперимента.

ВЧ-генератор был собран по ключевой мостовой схеме и имел следующие параметры: рабочая частота $f=480$ кГц, амплитуда выходного напряжения $V_0 \geq 1$ кВ, номинальная мощность на согласованную нагрузку ~ 1 кВт. Генератор работал в телеграфном режиме амплитудной модуляции по специальной циклограмме. Частоты модуляции f_1 и f_2 менялись от эксперимента к эксперименту, но всегда удовлетворяли условию $f_1, f_2 < 1$ кГц.

В качестве ВЧ-источника в экспериментах использовались двухэлектродные антенны плазменных волн (АПВ), которые разворачивались над головной частью ракеты из-за ее вращения после схода створок обтекателя ($h \geq 50$ км) и выдвигения вдоль оси ракеты диэлектрической штанги-держателя антенны ($l \geq 2$ м). Для экспериментов, выполненных в северной части Норвежского моря (1986 [12] и 1989 [11,13]) с борта исследовательского судна «Профессор Зубов», антенна была выбрана в виде проволочного кольца диаметром 2 м с металлическими спицами-

растяжками, поднятого штангой–держателем на 2 м над ракетой, и металлического штыря ($l_* \sim 25$ см), соединенного с корпусом ракеты. ВЧ–напряжение от генератора подводилось между корпусом ракеты и проволочным кольцом. Металлический штырь предназначался для облегчения зажигания разряда и экранирования датчиков диагностической аппаратуры, расположенных на верхней плате БНА, от воздействия ВЧ–поля. Величины подводимого ВЧ–напряжения, тока через антенну и сдвига фаз между током и напряжением контролировались по специальному телеметрическому каналу.

В экспериментах, выполненных на полигоне Капустин Яр (48° N, 70° E) в 1986 году [10], использовалась такая же АПВ с проволочным и штыревым электродами, а в 1991 году [14] была использована антенна в виде двух полуцилиндров из металлической сетки. Сетка диаметром 2 м и высотой образующей 1.2 м распускалась после схода створок обтекателей и выдвижения штанги–держателя и приобретала цилиндрическую поверхность из–за вращения ракеты. К полуцилиндрам подводилось ВЧ–напряжение амплитудой $V_0 \sim 1.5$ кВ.

Все пуски ракет были выполнены в ночное либо в вечернее время, когда ионосферная плазма на высотах проведения экспериментов ($h \leq 150$ км) была прозрачна для излучения, формируемого АПВ на рабочей частоте 480 кГц. Ракеты запускались под углом $\sim 85^\circ$ к горизонту при азимуте $\sim 108^\circ$ в средних широтах и в южном направлении геомагнитного меридиана в полярной области. В экспериментах в средних широтах использовались возвратно–наклонное зондирование плазменной неоднородности в диапазоне 18÷23 МГц, пассивный прием электромагнитного излучения на частоте 480 кГц и частотах модуляции f_1 и f_2 , телевизионное сопровождение на начальном участке трассы. Эксперименты в Норвежском море проводились синхронизованно с пролетом спутников «Ореол–3» (1986) и «Ионозонд» (1989).

2. Результаты экспериментов

2.1. Возбуждение, динамика и основные параметры плазменно–волнового канала. Пуски ракет в средних широтах проводились в условиях спокойной ионосферы, когда высотное распределение ионосферной плазмы соответствовало обычному для ночного времени на данных широтах. Основным результатом экспериментов 1986 года [10] было подтверждение возможности создания в ионосфере вытянутой вдоль геомагнитного поля резкой плазменной неоднородности и формирования модулированных разрядом потоков ускоренных частиц. На рис. 3 приведены графики, отражающие изменения потоков быстрых электронов $I_e(t)$ с энергией $\mathcal{E}_e \geq 2.2$ кэВ относительно уровня фона I_b (кривая 1) и концентрация плазмы $N(t)$ (кривая 2) в окрестности ракеты во время полета. Там же проставлены контрольные высоты h и приведена циклограмма работы ВЧ–генератора (кривая 3), в которой верхний уровень соответствовал модуляции с частотой $f_1 = 960$ Гц, средний – модуляции с частотой $f_2 = 240$ Гц, нижний уровень означал паузу в работе генератора. Полное раскрытие антенны произошло на 128 секунде (из–за задержки схода одной из створок обтекателя) и сопровождалось, по–видимому, кратковременным замыканием выхода генератора на корпус, что привело к срыву генерации и образованию в результате дугового разряда газового облака. Пик $N(t)$ при $t = 134$ с обусловлен ионизацией этого газа полем антенны. После раскрытия антенны разряд перешел в нормальную фазу в виде вытянутой вдоль геомагнитного поля плазменной неоднородности. Концентрация в разряде четко отслеживала циклограмму работы генератора, а ее величина достигала значений 10^7 см $^{-3}$. На 218 секунде полета на высоте $h = 140$ км был произведен

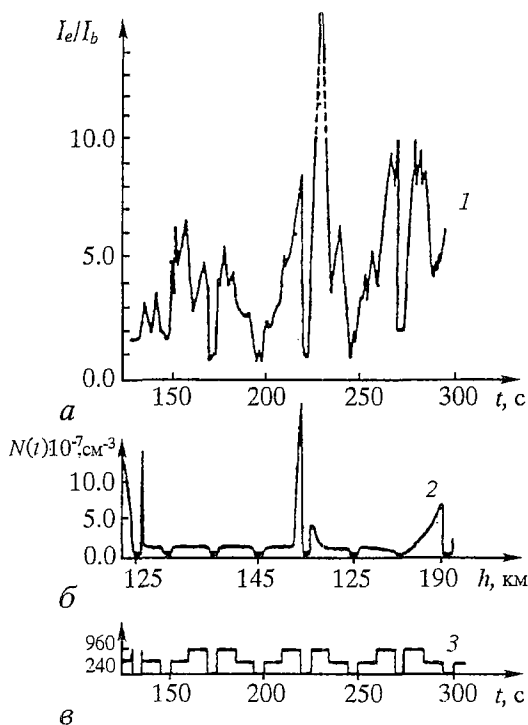


Рис. 3. Результаты эксперимента в средних широтах: а – кривая возмущения потоков электронов $I_e(t)$ с энергией $\epsilon_e \geq 2.2$ кэВ относительно фонового уровня I_b ; б – возмущения плотности плазмы $N(t)$ вблизи головной части ракеты при возбуждении ВЧ-разряда, модулированного в соответствии с циклограммой (в) на частотах 960 Гц и 240 Гц, t – время полета, h – высота подъема

могут формироваться в протяженных волновых каналах за счет захвата и ускорения частиц полем косых ленгмюровских волн. Поэтому при включении генератора после перерыва на 225 секунде плотность энергичных электронов возрастала в несколько раз. Величина вкладываемой в разряд ВЧ-мощности заметно зависела от давления газа и на высотах $h < 100$ км составляла в среднем величину, приблизительно равную 0.5 кВт, на высотах $h \geq 130$ км – меньше 0.3 кВт и резко увеличивалась примерно до значения 0.6 кВт при напуске газа.

2.2. Модуляция разрядом потоков высыпавшихся частиц больших энергий. Основной целью экспериментов в полярной части Норвежского моря было исследование влияния поля излучения ракетного ВЧ-источника на возбуждение электромагнитных НЧ-неустойчивостей в полярной ионосфере и возможностей модуляции ВЧ-разрядом с борта ракеты потоков высыпавшихся частиц большой энергии. Эксперимент был реализован запуском метеорокетов МР-12 на широте $68^\circ N$ и долготе 0° в вечернее время 20.09.86 в 22.45 по всемирному времени (UT), 9.10.89 в 18.31 UT и 6.10.89 в 19.19 UT. Для диагностики использовалась аппаратура на ракетах и комплексы научной аппаратуры на спутнике «Ореол-3» советско-французского проекта «Аркад-3» и спутнике «Ионозонд». Запуск ракеты 20.09.86 и 06.10.89 проходил в периоды геомагнитных возмущений и был согласован с полетом спутников «Ореол-3» (1986) и «Ионозонд» (1989), чтобы обеспечить возможность регистрации на борту

специальный напуск примерно 8 г воздуха в сторону антенны. За время выброса $\tau_n \sim 10$ с в ионосфере образовалась газовая неоднородность с масштабом $L \sim v_s \tau_n \sim 5$ км (v_s – скорость звука), в которой был сформирован вытянутый вдоль геомагнитного поля плазменно-волновой канал; концентрация в канале при этом возросла до значений $N > 10^8$ cm^{-3} , резко увеличились потоки ускоренных электронов и мощность, отдаваемая ВЧ-генератором в плазму.

О вытянутости вдоль геомагнитного поля плазменной неоднородности свидетельствовала модуляция сигналов с фотометра, обусловленная вращением ракеты. В результате вращения ракеты блендирующее устройство ФЭУ просматривало либо большую, либо меньшую часть плазменного столба.

Подтверждением факта образования сильно вытянутого плазменно-волнового канала являются сдвиги по времени максимумов потоков быстрых электронов I_e (см. рис. 3) относительно максимумов $N(t)$, связанных с напуском газа на 134 и 218 секундах. Достаточно интенсивные по сравнению с фоном потоки электронов с энергией $\epsilon_e \geq 2.2$ кэВ

спутников низкочастотных электромагнитных возмущений в ионосфере вблизи силовой трубки геомагнитного поля, в которой находилась ракета. Особенностью запуска 9.10.89 в 18.31 UT была спокойная геомагнитная обстановка в указанной части Норвежского моря.

Результаты обработки телеметрической информации для старта 9 октября 1989 года [11] приведены на рис. 4, где полетное время и соответствующие высоты h ракеты над поверхностью земли показаны на горизонтальной оси. На вертикальной оси отложены величины плотности потока быстрых электронов I_e с энергией $E_e > 40$ кэВ (кривые 1,2). Кривая 3 на рис. 4 отражает циклограмму работы генератора накачки 480 кГц, аналогичную кривой 3 на рис. 3.

Наиболее важным результатом эксперимента является доказательство возможности модуляции плазменно-волновым разрядом в ионосфере потока высыпавшихся электронов с энергиями $E_e \geq 40$ кэВ. В данном эксперименте, когда возмущенность магнитосферы была достаточно слабой, во время пауз в работе генератора накачки уровень потока всегда достигал своего фонового значения. Однако при включении генератора поток резко возрастал, уровень высыпания на высотах 130÷150 км превышал фоновое значение в 5÷10 раз. Отмеченные высоты, как видно из рис. 4, отвечают установившемуся, квазистационарному уровню потока при воздействии.

На верхнем графике рис. 4, а приведен фрагмент зависимости плотности потока быстрых электронов от времени полета, позволяющий проследить тонкую временную структуру потока. Из поведения кривых рис. 4 видно, что имеется несколько характерных времен, определяющих параметры вариации потока. Во-первых, это время выхода вариаций на квазистатическое состояние $\tau_1 \sim 1 \div 1.5$ мин. Далее есть характерные времена $\tau_2 \sim 2$ с и $\tau_3 \sim 0.3 \div 0.5$ с, отражающие тонкую структуру вариаций потока. И есть $\tau_4 \sim 1$ с – время, характеризующее процесс релаксации или нарастания потока при выключении и включении генератора. По-видимому, τ_2 – период баунс-осцилляций быстрых электронов между полярными шапками разных полушарий, а τ_3 – период колебаний ионосферного альвеновского резонатора (см. п. 2.4).

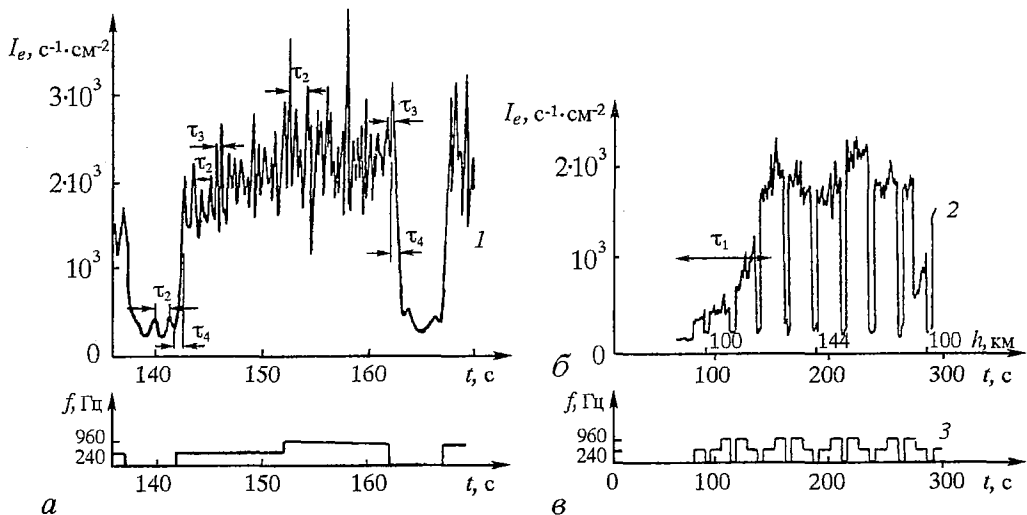


Рис. 4. Полярный эксперимент в спокойной ионосфере. Относительная модуляция потоков быстрых электронов с энергией $E_e \geq 40$ кэВ, стимулированная ВЧ-разрядом, формируемым бортовым источником, работающим в соответствии с циклограммой амплитудной модуляции (кривая 3). На горизонтальных осях отложены время t и высота h полета ракеты.

В экспериментах 20.09.86 и 06.10.89 при условиях более сильных возмущений магнитосферы (K_p -индекс был равен 4) фоновый уровень высыпавшихся быстрых электронов был на порядок больше. Глубина модуляции потока в соответствии с циклограммой работы ВЧ-генератора накачки оказалась порядка 30%, а время выхода на квазистационарные колебания существенно сократилось [12].

Отметим, что модуляция потоков высыпавшихся частиц означает генерацию переменного тока в возмущенной силовой трубке.

2.3. Возбуждение НЧ электромагнитных возмущений резонансным разрядом в полярной ионосфере. В эксперименте 20 сентября 1986 года приемная аппаратура спутника «Ореол-3» обнаружила сильные шумовые возмущения электромагнитных полей в ионосфере и возбуждение спорадических волновых резонансов в окрестности гирочастоты протонов при работе дипольного ВЧ-источника мощностью порядка 1 кВт на высотах $h \geq 140$ км в режиме телеграфной модуляции с частотами 240 и 960 Гц. После выхода ракеты с ВЧ-источником на борту на высоты $h > 120$ км приемники спутника зафиксировали появление интенсивных шумовых НЧ-сигналов. Область появления НЧ-сигналов лежит внутри авроральной зоны, местоположение которой определялось по измерениям продольного тока на спутнике. В [12] приведены в качестве примера графики изменений горизонтальной составляющей электрического поля, зафиксированные приемниками спутника в двух частотных интервалах: 450÷1000 Гц и 100÷200 Гц. Там же представлены графики изменений потоков ионов с энергией $\xi_i \sim 3.5$ кэВ и электронов с энергией $\xi_e \geq 40$ кэВ по данным приборов, установленных на борту ракеты, и циклограмма работы ВЧ-генератора.

В качестве источников возбуждения широкого спектра НЧ-возмущений в ионосфере в условиях эксперимента можно рассматривать вариации потоков высыпавшихся энергичных частиц (как естественного происхождения, так и стимулированные в результате воздействия), а также низкочастотную модуляцию локальных параметров ионосферной плазмы вблизи ракеты модулированным ВЧ-разрядом. В результате такого воздействия возможна заметная модуляция естественных ионосферных токовых струй, что наблюдалось в ряде экспериментов с наземными передатчиками [16].

Особый интерес представляют, по-видимому, спектры НЧ электромагнитных колебаний, зафиксированных аппаратурой спутника в верхней ионосфере в то

время, когда ВЧ-источник был выведен ракетой на высоты $h \geq 130$ км (UT=22.47.28÷22.49.04). В этих условиях, как оказалось, в ионосфере возбуждался целый спектр спорадических резонансных колебаний в окрестности гирочастоты ионов водорода f_H . На рис. 5 приведены примеры обработки волновых измерений со спутника для трех разных временных интервалов в этом эксперименте.

Кривая 1 - спектр горизонтальной составляющей электрического поля для случая работы источника на предельно малых для наблюдаемого эффекта высотах $h \approx 130$ км (UT≈22.47). На кривой хорошо выделены пики, соответствующие частоте модуляции $f_2 = 240$ Гц, частоте ее гармонике $3f_2$ и гирочастоте ионов водорода f_H .

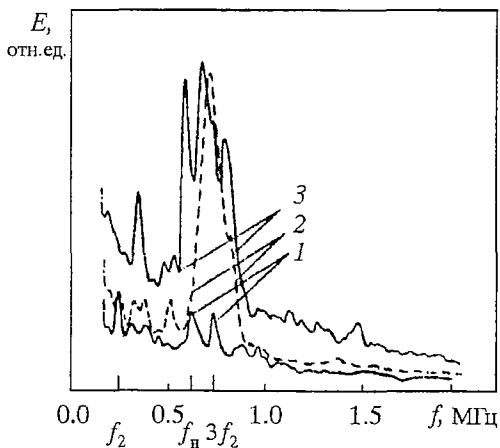


Рис. 5. Спектры НЧ-излучений, зарегистрированных на борту спутника во время работы ВЧ-генератора: 1 - высота ракеты $h = 130$ км, частота модуляции $f_2 = 240$ Гц; 2 - $h = 152$ км, $f_2 = 240$ Гц; 3 - $h = 156$ км, $f_1 = 960$ Гц

С ростом высоты полета ракеты h происходит существенное расширение полосы возбуждаемых частот вблизи f_H и наблюдается заметное увеличение амплитуды возбуждаемых в ионосфере колебаний (кривая 2, $h=152$ км, UT=22.48.16). И, наконец, кривая 3 (высота $h=155$ км, режим модуляции с частотой 960 Гц) показывает сложную динамику спектра низкочастотных колебаний, возбуждаемых на ионосферных высотах вблизи силовой трубки геомагнитного поля, где происходит воздействие. После прохождения апогея спектр шумовых спорадических излучений постепенно возвращался на уровень, соответствующий обычной шумовой картине. Наличие нескольких выделенных резонансных пиков на кривых рис. 5, по-видимому, не может быть объяснено нелинейным взаимодействием возбуждаемых НЧ-полей с плазмой ввиду их малости, но может служить подтверждением возможности существования в возмущенной полярной ионосфере НЧ свистовых и, возможно, сравнительно высокочастотных альвеновских резонансов. Достаточно быстрое изменение резонансных кривых во время эксперимента говорит о локальности и спорадичности обнаруженных резонансов. Резонансы связаны, по-видимому, с образованием в ионосфере резких плазменных неоднородностей с характерным масштабом в несколько десятков (сотен) километров вдоль геомагнитного поля и временем жизни в несколько секунд. Такие неоднородности могут образовываться во время магнитных бурь [17], а также при ионизационном самоканалировании сильных ВЧ-полей [13]. Поэтому исследование обнаруженных спорадических волновых НЧ-резонансов представляет значительный интерес как для понимания физики явления, так и для натурального моделирования некоторых нелинейных авроральных явлений в ионосфере Земли, а возможно, и для разработки новых средств НЧ-радиосвязи.

2.4. Плазменно-волновая антенна. Идея использования модулированного радиоразряда в качестве активной плазменной антенны была проверена в специальном ионосферном эксперименте, результаты которого представлены в данном разделе [14]. Эксперимент был реализован в ходе полета метеоракеты МР-12, запущенной с полигона Капустин Яр 06.02.91 в 20.30 по московскому времени. Ракета двигалась под углом 85° к горизонтالي в восточном направлении. Схема эксперимента описана в п. 2.3. Отличием данного эксперимента была конструкция антенны плазменных волн – электрического диполя, ориентированного поперек оси ракеты. В результате вращения ракеты возбуждающий разряд диполь поворачивался относительно силовых линий геомагнитного поля \mathbf{V}_0 и проходил все состояния ориентации от поперечной до продольной по отношению к \mathbf{V}_0 . Модуляция разряда в данном эксперименте осуществлялась на частотах $f_1=240$ Гц и $f_2=120$ Гц. В верхней части траектории полета были взорваны четыре калий-литиевых пиропатрона, один за другим с периодом порядка 10 секунд.

Бортовой НЧ-приемник с магнитной антенной, расположенный на откидной штанге на расстоянии 1 м от ракеты, как и в предыдущих экспериментах, фиксировал возбужденные в окружающей плазме сигналы с амплитудой $\Delta H > 0.04$ Ое, соответствующие частотам модуляции разряда f_1 и f_2 . Циклограмма зафиксированных сигналов строго соответствовала циклограмме работы генератора накачки, а величина сигналов оказалась больше динамического диапазона приемника. Можно предположить, что сигнал плазменной антенны обусловлен модуляцией геомагнитного поля H_0 , возникающей при формировании и рассасывании горячей плазменной неоднородности разряда в ионосфере. Его величина $\Delta H \sim H_0 \cdot W/P$ [9] пропорциональна отношению мощности W , вводимой в разряд, к мощности потерь энергии электронами разряда ($P \sim \delta v_e \epsilon_e N V$, δ – доля энергии, теряемая электроном при столкновении; V – объем плазменной

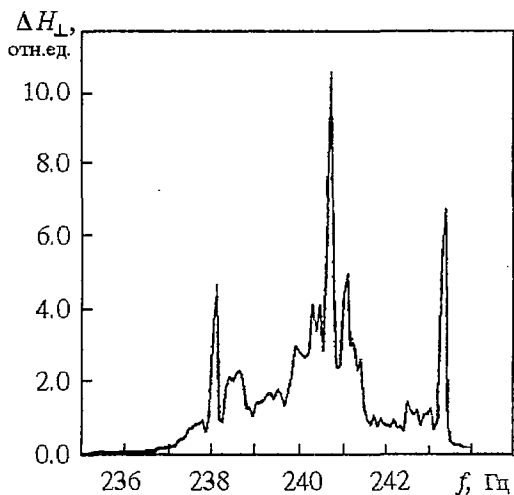


Рис. 6. Спектральный состав излучения плазменной антенны, принятый на земле. Время усреднения $\Delta t=300$ с

Прием СНЧ-сигналов (f_1 и f_2) на земле осуществлялся приемником «ТИС» с полосой $\Delta f=10$ Гц с помощью ферритовых антенн, ориентированных в восточном направлении для регистрации излучения с ортогональной по отношению к геомагнитному полю поляризацией ΔH_{\perp} (поляризация восток-запад) и в южном направлении для регистрации полей с преимущественно продольной поляризацией ΔH_{\parallel} (поляризация север-юг). Принятые на земле сигналы обеих поляризаций имели шумовой характер и отличались от фона большей в среднем амплитудой «шума». При спектральном анализе этих сигналов было обнаружено узкополосное излучение, сдвинутое относительно частот модуляции («мигания») разряда f_1 и f_2 в «синюю» сторону на величину $\Delta f_{1,2} \sim 3 \cdot 10^{-3} f_{1,2}$ (рис. 6), и наличие характерных модуляционных спутников, указывающих на амплитудную модуляцию принимаемого излучения. Отношение амплитуды модуляционных пиков на частоте 2.6 Гц к амплитуде основного сигнала максимально (≥ 0.1) для сигнала с поляризацией восток-запад, принимаемого на частоте 240 Гц. Поведение принимаемых сигналов во времени характеризует рис. 7, где по горизонтальной оси отложены частоты, по вертикальной оси – время от момента запуска ракеты, а величина почернения отражает амплитуду сигнала на заданной частоте в момент времени, соответствующий центру интервала спектральной обработки $\Delta t \sim 12$ с. На правой вертикальной оси дополнительной линией отмечено время работы генератора, формирующего разряд, и стрелками отмечены моменты взрывов пиропатронов.

Из приведенных данных следует, что регистрируемые сигналы появляются после включения генератора накачки и формирования в ионосфере плазменно-волнового разряда. Максимальные значения принятых сигналов совпадают (в пределах времени обработки, если $\Delta t \leq 6$ с) с моментами переключения режимов работы генератора накачки, что свидетельствует о наблюдении сигналов плазменной антенны, формируемой в ионосфере плазменно-волновым разрядом. Амплитуда сигналов ΔH_{\parallel} , принятых антенной с продольной поляризацией, оказалась на порядок больше амплитуды сигналов ΔH_{\perp} . После взрывов пиропатронов на 176, 186, 198 и 208-й секундах (стрелки на рис. 7) сигналы ΔH_{\perp} уменьшились по амплитуде и расщепились по частоте. Сигналы ΔH_{\parallel} , наоборот, достигли своего максимума во время взрывов, уменьшились после выключения

неоднородности) и уменьшается с ростом эффективной частоты столкновений электронов ν_e . Принимаемый диамагнитный сигнал $\Delta H \sim H_0$ содержит в себе все низкочастотные компоненты колебаний геомагнитного поля и может быть использован в диагностических целях. После взрывов пиропатронов и напусков газа величина принимаемых бортовым приемником СНЧ-сигналов уменьшалась на полтора-два порядка и постепенно восстанавливалась до прежнего уровня примерно за 6 секунд. Объяснение этого эффекта заключается в многократном увеличении плотности нейтрального газа в окрестности ракеты при взрывах и соответствующем увеличении эффективной частоты столкновений электронов ν_e .

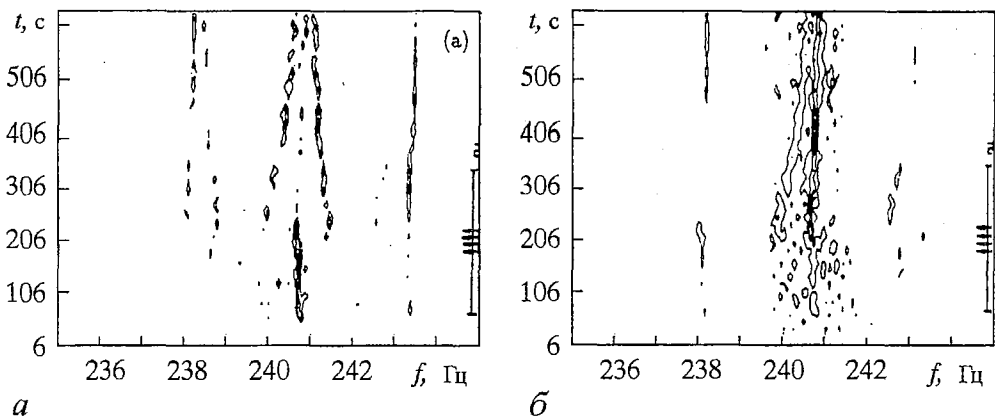


Рис. 7. Динамические спектры принятого на земле НЧ-излучения для поляризации восток-запад (а) и поляризации север-юг (б). Степень почернения пропорциональна величине спектральной плотности мощности сигнала. Справа вертикальной линией отмечено время работы бортового генератора, стрелки – моменты взрывов пиропатронов

генератора накачки и снова проявились в виде затухающей последовательности пиков, в которой также прослеживается расщепление по частоте. Модуляционные сигналы ($\pm f_3 = 2.6$ Гц) также видны после выключения генератора в виде двух замирающих последовательностей. В работе [18] модуляция излучения плазменной антенны с частотой 2.6 Гц, как и модуляция потоков высыпающихся частиц, объясняется возбуждением ионосферного альвеновского резонанса потоками быстрых электронов в возмущенной силовой трубке.

2.5. Влияние разрядной плазмы на излучение бортовых антенн. Влияние разрядной плазмы на характеристики излучения штатной телеметрической антенны ракеты показано в данном разделе [19].

Эксперимент был реализован в ходе полета метеоракеты МР-12, запущенной с полигона Капустин Яр 06.02.91 в 20.30 по московскому времени.

Основное внимание уделено начальному участку полета ракеты $h < 90$ км. На этих высотах плотность плазмы в разряде, формируемом АПВ, велика $N \gg 10^8$ см⁻³ и оказывает заметное влияние на характеристики телеметрического сигнала. Форма плазменного образования ВЧ-разряда на этом участке полета имеет вид покрывающей ракету оболочки. Размеры и форма этой оболочки зависят от соотношения длины свободного пробега электронов l_e с диффузионной длиной прилипания $l_d \sim (D/\nu_a)^{1/2}$ (D – коэффициент амбиполярной диффузии, ν_a – частота прилипания электронов к молекулам кислорода), гирорадиусом электронов r_H и масштабом сноса $l_{||} \sim v/\nu_a$ (v – скорость ракеты).

Теоретическое рассмотрение (см. ссылки в [20]) и лабораторные эксперименты [21,22] указывают на существенное влияние плазмы оболочки на входные и излучательные характеристики антенн. Отмечается, в частности, что оболочка может изменять входной импеданс антенны, ее сопротивление излучения и диаграмму направленности.

В ходе эксперимента на поверхности земли в районе места старта ракеты регистрировался телеметрический сигнал, представляющий собой последовательность радиоимпульсов с частотой заполнения 200 МГц. Сигнал излучался двумя петлевыми антеннами (ТА, см. рис. 2), симметрично расположенными по бокам ракеты, плоскость петель была параллельна образующей цилиндра тела ракеты.

Диагностика параметров плазменного образования производилась с

использованием ленгмюровского зонда и анализатора глубины вариаций геомагнитного поля, возникающих из-за диамагнетизма разрядной плазмы при формировании и релаксации плазменных неоднородностей. К сожалению, для описываемого этапа эксперимента значения концентрации в возбуждаемом разряде выходили за пределы калиброванной шкалы приборов или находились вблизи верхней границы этой шкалы, поэтому данные по концентрации нельзя считать слишком надежными. Интересные особенности в принимаемом телеметрическом сигнале наблюдались в первые 25 секунд работы возбуждающего разряд генератора. Генератор включался на 59 секунде полета, что соответствовало высоте $h \approx 70$ км. До 69 секунды ($h \approx 80$ км) сигнал генератора модулировался с частотой 240 Гц, после чего происходила смена частоты модуляции на 120 Гц и генератор работал еще 10 секунд.

По оценкам, выполненным на основе данных, полученных с анализатора вариаций геомагнитного поля и ленгмюровского зонда, можно заключить, что в первые десять секунд работы генератора концентрация плазмы N в области дипольного источника разряда значительно превышала 10^9 см $^{-3}$, о чем свидетельствовал выход показаний приборов за пределы калиброванной шкалы. После смены частоты модуляции концентрация упала до значений $N \geq 10^9$ см $^{-3}$ (порядка верхнего предела, доступного измерению) и далее медленно убывала до момента выключения генератора, после чего концентрация становилась близкой к фоновой.

После зажигания разряда (на 59 секунде полета) уровень принимаемого на земле телеметрического сигнала несколько уменьшался и далее медленно спадал до момента переключения частоты модуляции, а непосредственно перед переключением регистрировался неуверенно. После переключения частоты модуляции сигнал появлялся вновь с уровнем порядка исходного. Спустя две секунды (на 71 секунде полета) телеметрический сигнал резко возрос и, колеблясь, оставался большим до момента выключения генератора, создающего разряд. Уровень телеметрического сигнала после выключения генератора падал до исходного.

На рис. 8 представлена зависимость уровня принимаемого на земле телеметрического сигнала от времени полета ракеты $S(t)$ в интервале между 69 и 79-й секундами полета. Видно, что принимаемый сигнал усиливался более чем в десять раз. Вариации повышенного уровня сигнала рис. 8 соответствуют колеба-

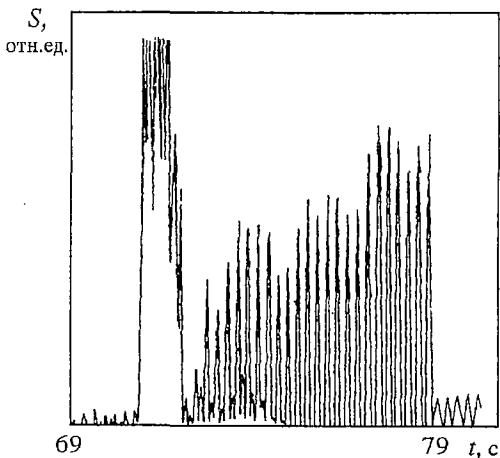


Рис. 8. Изменения уровня принимаемого телеметрического сигнала в зависимости от времени полета ракеты

ниям плотности плазмы в разряде в пределах 20%, что указывает на резонансный характер наблюдаемого явления. Быстрая модуляция $S(t)$ обусловлена вращением ракеты.

Аналогичные эффекты возрастания принимаемого телеметрического сигнала наблюдались на 100 и 110-й секундах полета при частоте модулирующего сигнала 240 Гц. При этом уровень сигнала был несколько меньшим, чем для описанного выше интервала времени, а интервал времени наблюдения эффекта существенно короче.

По нашему мнению, эффект связан с изменением диаграммы направленности телеметрической антенны из-за формирования вокруг тела ракеты

оболочки за критической плазмы. В оболочке возбуждаются медленные поверхностные волны, которые трансформируются в поле излучения на хвостовой оперении ракеты. Изменение частоты быстрой модуляции $S(t)$ на рис. 8 связано, по-видимому, с изменением условий переизлучения поверхностных волн на хвостовых стабилизаторах из-за вариаций параметров плазменной оболочки. Из-за малости диффузионной длины прилипания l_d на высотах $h < 80$ км плазма разряда локализована вблизи возбуждающей антенны в головной части ракеты и не влияет на величину телеметрического сигнала. На высотах $h \geq 120$ км плазменная неоднородность вытягивается вдоль геомагнитного поля и концентрация электронов у ракеты становится меньше критической для телеметрического сигнала. В результате величина телеметрического сигнала падает до обычного уровня, а величина сигнала, переизлучаемого на частоте поля, формирующего разряд, становится достаточной для уверенной регистрации на расстоянии более 1000 км от места запуска ракеты [23].

Заключение

Приведенные экспериментальные результаты свидетельствуют о возможности формирования в ионосфере плазменно-волнового разряда и о его сильном влиянии на характеристики излучения бортовых антенн, особенно в вистлеровском диапазоне частот. Оказалось, что изменение геометрии разряда и мощности, вкладываемой в разряд, позволяет управлять угловым спектром излучения, его интенсивностью, а модуляцией разряда возможно изменять низкочастотный спектр излучения. На основании изложенных экспериментальных результатов, а также лабораторного моделирования этих явлений в плазменных камерах, можно сделать вывод о том, что подобные плазменные образования могут быть использованы в качестве легко управляемых нелинейных плазменно-волновых антенн в широком диапазоне частот, а также для достаточно эффективной накачки в заданную силовую трубку геомагнитного поля низкочастотных электромагнитных волн. Показана возможность глубокой модуляции потоков высыпающихся частиц таким разрядом.

Описанные эффекты должны приниматься во внимание при планировании и интерпретации ионосферных экспериментов и, вероятно, могут быть полезны для согласования излучателей космических аппаратов, а также для диагностики околоземного пространства. Кроме того, представленные результаты существенно расширяют наши знания о физике волновых разрядов в ионосферной плазме.

Работа выполнена при поддержке программы «Университеты России», грант № 992852, и программы поддержки ведущих научных школ, грант № 00-15-96772.

Библиографический список

1. Марков Г.А., Миронов В.А., Сергеев А.М. О самоканализации плазменных волн в магнитном поле // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. С. 672.
2. Марков Г.А., Миронов В.А., Сергеев А.М., Соколова И.А. Многопучковая самоканализация плазменных волн // ЖЭТФ. 1981. Т. 80, № 6. С. 2264.
3. Марков Г.А., Миронов В.А., Сергеев А.М., Савин В.Г. Фокусировка и каналирование нижнегибридных волн и плазмы при ВЧ пробое газа // Физика плазмы. 1980. Т. 6, № 3. С. 670.
4. Вдовиченко И.А., Марков Г.А., Миронов В.А., Сергеев А.М. Ионизационная самоканализация вистлеров в плазме // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44, вып. 5. С. 216.

5. Марков Г.А. Ионизационное самоканалирование модулированных плазменно-волновых пучков в магнитном поле // ЖЭТФ. 1998. Т. 113, вып. 4. С. 1989.

6. Кудрин А.В., Курина Л.Е., Марков Г.А. Ионизационное самоканалирование свистовых волн в столкновительной замагниченной плазме // ЖЭТФ. 1997. Т. 112, вып. 4(10). С. 1285.

7. Марков Г.А. Наблюдение резонансной автонастройки магнитных антенн плазмой ВЧ-разряда // Физика плазмы. 1988. Т. 14, № 9. С. 1094.

8. Марков Г.А., Попова Л.Л., Чугунов Ю.В. Моделирование нелинейного воздействия пучка плазменных волн на ионосферную плазму // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 11, № 23. С. 1465.

9. Кудрин А.В., Марков Г.А., Трахтенгерц В.Ю. и др. Эффекты вторичного излучения при воздействии на ионосферу интенсивным электромагнитным пучком // Геомагнетизм и аэрономия. 1991. Т. 31, № 2. С. 334.

10. Агафонов Ю.Н., Бабаев А.П., Бажанов В.С. и др. Плазменно-волновой разряд в ионосфере Земли // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, № 17. С. 1.

11. Агафонов Ю.Н., Бажанов В.С., Исякаев В.Я. и др. Стимулирование высывания энергичных частиц плазменно-волновым разрядом в полярной ионосфере // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52, № 10. С. 1127.

12. Агафонов Ю.Н., Бажанов В.С., Галперин Ю.И. и др. НЧ-возмущения в ионосферной плазме, стимулированные бортовым ВЧ-источником // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16, № 1. С. 65.

13. Марков Г.А., Чугунов Ю.В. Глобальные магнитосферные возмущения, стимулированные плазменно-волновым разрядом в нижней ионосфере // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37, вып. 6. С. 799.

14. Агафонов Ю.Н., Башилов Г.В., Марков Г.А., Чугунов Ю.В. Активная плазменная антенна в ионосфере Земли // Геомагнетизм и аэрономия. 1996. Т. 36, № 4. С. 206.

15. Фаткуллин М.Н. и др. Эмпирические модели среднеширотной ионосферы. М.: Наука, 1981. 286 с.

16. Гетманцев Г.Г., Комраков Н.П., Коробков П.П., Мироненко Л., Митяков Н.А., Рапопорт В.О., Трахтенгерц В.Ю., Фролов В.Л., Череповицкий В.А. // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 18. С. 621.

17. Лайонс Л., Уильямс Д. // Физика магнитосферы. М.: Мир, 1987. 312 с.

18. Лехтинен Н.Г., Марков Г.А., Файнштейн С.М. Возбуждение альвеновского резонатора плазменно-волновым разрядом // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 3-4. С. 312.

19. Марков Г.А., Умнов А.Л. Влияние плазмы ВЧ разряда на излучение телеметрической антенны метеоракеты // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 1. С. 121.

20. Мареев Е.А., Чугунов Ю.В. Антенны в плазме. Н.Новгород: ИПФ АН СССР, 1991. 230 с.

21. Ким А.В., Марков Г.А., Смирнов А.В., Умнов А.Л. Плазменная антенна-генератор // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. С. 34.

22. Курина Л.Е., Марков Г.А., Умнов А.Л. Моделирование спутниковой антенны, настраиваемой плазменной нагрузкой // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37, № 6. С. 707.

23. Дейнеко В.М., Иванов В.И., Марков Г.А., Чугунов Ю.В. Влияние плазменно-волнового разряда на излучение дипольной антенны, стимулирующей этот разряд в нижней ионосфере // Геомагнетизм и аэрономия. 1993. Т. 33, № 2. С. 160.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию 28.12.2000

RESONANCE PLASMA-WAVE DISCHARGE IN THE EARTH'S IONOSPHERE

G.A. Markov, YU.V. Chugunov

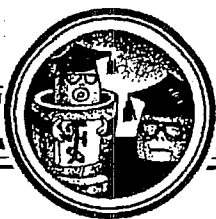
The possibilities of formation of a wave discharge in the whistler frequency range in the Earth's ionosphere are showed experimentally. The structure and dynamics of discharge are discussed. Data on perturbations stimulated by a modulated discharge in the near-Earth space are presented. The possibilities of using such a discharge as a low-frequency plasma antenna are demonstrated.



Марков Герман Анатольевич – родился в 1939 году, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1963). После окончания ГГУ работает на кафедре электродинамики Нижегородского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1975) и доктора (1989) физико-математических наук в области радиофизики и физики плазмы. Опубликовал 80 научных статей по направлениям, указанным выше.



Чугунов Юрий Владимирович – родился в 1941 году, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1965). После окончания ГГУ работает в Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1973) и доктора (1988) физико-математических наук в области радиофизики и физики плазмы. Автор монографии «Антенны в плазме». Опубликовал более 90 научных статей по направлениям, указанным выше.



ТОЧНО ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

В.М. Журавлев

С помощью метода обобщенных тождеств Лагранжа для сопряженных уравнений строится представление Лакса точно интегрируемой модели взаимодействия волн в непрерывном спектре в неоднородной среде. Проводится общий анализ полученных уравнений и способов их использования в теоретических и прикладных физических задачах нелинейных волновых процессов.

Точно интегрируемые модели резонансного взаимодействия волн в диспергирующей слабонелинейной среде (см. например, [1-4]) имеют широкое применение в различных прикладных задачах нелинейной оптики, теории плазмы, гидродинамики и т.д. (см. например, [2,5]). Типичная физическая задача, которая описывается такой моделью, это возбуждение волн на комбинационных частотах под воздействием нескольких (обычно не более 3) когерентных источников монохроматических волн в слабонелинейной (с квадратичной нелинейностью) среде. В реальности чаще приходится иметь дело с ситуацией, когда в нелинейной среде распространяется сигнал, имеющий непрерывный спектр, слабо эволюционирующий при прохождении сигнала через среду. В задаче о самофокусировке излучения такой подход использован в недавней работе [6]. Эволюция спектра в таких задачах, в частности, связана с тем, что в непрерывном спектре всегда существует бесконечно много компонент, которые связаны резонансными соотношениями для волновых чисел типа $k_1+k_2=k_3$. В результате возникает задача о том, при каких условиях динамика спектра оказывается точно интегрируемой, что можно рассматривать как условие устойчивости такого спектра по отношению к совместному действию дисперсионных эффектов и эффектов нелинейности.

Другой не менее важной проблемой, приводящей к аналогичной задаче, является проблема построения и исследования многомерных нелинейных уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [7,8]. Формально, процедура построения представлений типа Лакса - Захарова - Шабата (ЛЗШ) на основе тождеств Лагранжа, предложенная в [3,4], позволяет строить такие представления для многомерных уравнений. Однако при этом возникают серьезные технические трудности, связанные с громоздкостью вычислений. Но, если от части координат избавиться с помощью преобразований Фурье-Лапласа, то соответствующие нелинейные уравнения сводятся к бесконечной (нумерованной набором непрерывных параметров) совокупности нелинейных уравнений в размерности 1+1, для которой метод тождеств Лагранжа

позволяет получить решение проблемы построения представления ЛЗШ в компактной форме.

В простейшем варианте обе сформулированные задачи эквивалентны исследованию на интегрируемость с помощью МОЗР следующей совокупности уравнений

$$\partial a_k / \partial t + v_k(x, t) \partial a_k / \partial x = \int_{-\infty}^{\infty} w_{kk'}(x, t) a_{k'} dk'. \quad (1)$$

Здесь $a_k = a_k(x, t)$ - амплитуды Фурье распространяющегося в среде возмущения. В случае, если рассматривается задача о медленной эволюции Фурье-компонент возмущения в слабонелинейной среде, то x, t - «медленные» координаты, и полный волновой процесс получается обратным Фурье-преобразованием по «быстрым» координатам. В этом случае $v_k(x, t)$ - групповая скорость Фурье-компоненты с номером k . Если же система получается с помощью понижения координатной размерности, то полный волновой процесс представляется в виде

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_k(x, t) e^{iky} dk, \quad (2)$$

и $v_k(x, t)$ описывает дисперсию по дополнительной координате y . Подобный подход применен в работе [6]. В обоих случаях ядро $w_{kk'} = w_{kk'}(x, t)$ интегрального оператора в правой части уравнения (1) описывает взаимодействие отдельных Фурье-компонент возмущения или сигнала за счет нелинейности среды и, возможно, ее неоднородности.

Рассмотрим задачу описания всех моделей типа (1), определяемых функциями $v_k(x, t)$, $w_{kk'}(x, t)$, которые имеют представление ЛЗШ и, следовательно, интегрируются с помощью МОЗР. По аналогии с [3,4] применим для этого метод тождеств Лагранжа.

Для решения этой задачи совместно с уравнениями (1) рассмотрим сопряженную систему уравнений

$$-\partial \phi_k / \partial t - \partial / \partial x [v_k(x, t) \phi_k] = \int_{-\infty}^{\infty} w_{k'k} \phi_{k'} dk'. \quad (3)$$

Здесь $\phi_k(x, t)$ - функции, сопряженные к функциям a_k . Умножая уравнения (1) на ϕ_k слева, а уравнения (3) на a_k справа, интегрируя их по k , и затем, вычитая полученные соотношения, приходим к обобщенному закону сохранения

$$\partial / \partial t \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k a_k dk + \partial / \partial x \int_{-\infty}^{\infty} v_k(x, t) \phi_k a_k dk = 0, \quad (4)$$

который автоматически выполняется, если существует такая функция $\psi(x, t)$, что

$$\partial \psi / \partial x = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k a_k dk, \quad \partial \psi / \partial t = \int_{-\infty}^{\infty} v_k(x, t) \phi_k a_k dk. \quad (5)$$

Рассмотрим вспомогательную вектор-функцию $\Psi(\mathbf{k}) = \text{col}(\psi, \phi_k)$ и дополнительно функции $b_{kk'}(x, t)$ и $c_k(x, t)$ такие, что

$$\partial \phi_k / \partial x = \int_{-\infty}^{\infty} b_{kk'} \phi_{k'} dk' + c_k \psi. \quad (6)$$

Тогда совокупность уравнений (3), (5) и (6) может быть представлена в виде двух интегро-дифференциальных уравнений относительно вектор-функции Ψ

$$\partial \Psi(\mathbf{k}) / \partial x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(k, k') \Psi(k') dk', \quad \partial \Psi(\mathbf{k}) / \partial t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{V}(k, k') \Psi(k') dk', \quad (7)$$

где $\mathbf{U}(k, k')$ и $\mathbf{V}(k, k')$ - две матрицы размерности 2×2 , имеющие вид

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(k, k', x, t) &= \begin{pmatrix} 0 & a_{k'} \\ c_k \delta(k') & b_{kk'} \end{pmatrix}, \\ \mathbb{V}(k, k', x, t) &= \begin{pmatrix} 0 & v_k a_{k'} \\ -v_k c_k \delta(k') & d_{kk'} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $d_{kk'} = -\omega_{k'k} - v_k b_{kk'} - v_{k,x} \delta(k-k')$, а $\delta(k)$ - δ -функция Дирака. Совокупность уравнений (3) и (5) содержит в себе исходную систему уравнений (1), поэтому соотношения (6), не вносящие никаких дополнительных ограничений на вид функций ϕ_k , ψ и a_k , приводят к тому, что вся совокупность уравнений (7) содержит в себе исходную систему уравнений (1). Условие совместности системы (7) может быть записано в форме обобщенного условия «нулевой кривизны» Захарова - Шабата [2]

$$\mathbb{U}(k, k')_{,t} - \mathbb{V}(k, k')_{,x} + \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbb{U}(k, k''), \mathbb{V}(k'', k')] dk'' = 0, \quad (9)$$

где $[\cdot, \cdot]$ - обычный матричный коммутатор. Условия (9) эквивалентны исходному уравнению и некоторому дополнительному набору уравнений на вспомогательные функции $b_{kk'}(x, t)$ и $c_k(x, t)$. Вид этих уравнений устанавливается с помощью явного вычисления условий (9). Таким образом, уравнения (7)-(9) образуют некоторый аналог представления Лакса исходной системы уравнений.

Согласно [3,4], чтобы (7)-(9) в точности являлись представлением Лакса, в матрицах (8) должен содержаться произвольный комплексный параметр λ , превращающий систему (7) в нетривиальную систему двух спектральных задач, от которого не зависят неизвестные функции a_k исходного уравнения. Эти условия выполняются, если предположить, что от λ линейно зависят вспомогательные функции $b_{kk'}$ и c_k , в простейшем случае только $b_{kk'}$. Поэтому полагаем

$$b_{kk'}(x, t) = P_k(x, t) \lambda \delta(k-k') + q_{kk'}, \quad (10)$$

где

$$q_{kk'}(x, t) = Q_{kk'}(x, t) + iR_k(x, t) \delta(k-k')$$

при условии, что $Q_{kk'} = 0$. Подстановка (10) в (9) приводит к следующему выражению для матрицы взаимодействия $\omega_{kk'}$

$$\omega_{kk'} = P_{k'}(v_k - v_{k'}) / (P_k - P_{k'}) [Q_{k'k} + iR_{k'}(x, t) \delta(k-k')] + (iN_k - \partial v_k / \partial x) \delta_{kk'}$$

и системе уравнений относительно функций a_k и $Q_{kk'}$:

$$\partial a_k / \partial t + \partial (v_k(x, t) a_k) / \partial x + i(N_k + v_k) a_k = -i \int_{-\infty}^{\infty} (v_k - v_{k'}) Q_{k'k} a_{k'} dk' / (P_k - P_{k'}) \quad (11)$$

$$\partial / \partial t Q_{kk'} + \partial / \partial x [g_{k,k'}(x, t) Q_{kk'}] + \omega_k (v_{k'} - v_k) a_{k'} a_k^* + i(N_k - N_{k'}) Q_{kk'} = -i \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,k',k''} q_{kk''} q_{k''k'} dk'', \quad (12)$$

при дополнительной редукции $c_k = \omega_k a_k^*$. Здесь

$$g_{k,k'}(x, t) = (P_k v_k - P_{k'} v_{k'}) / (P_k - P_{k'}),$$

$$G_{k,k',k''}(x, t) = [P_k (v_k - v_{k''}) (P_{k''} - P_{k'}) - P_{k'} (v_{k''} - v_{k'}) (P_k - P_{k''})] / (P_k - P_{k'}),$$

$$v_k(x, t) = \lim_{k \rightarrow k'} [P_k (v_k - v_{k'}) R_{k'}(x, t) / (P_k - P_{k'})].$$

Кроме этого должны выполняться следующие соотношения

$$\begin{aligned}\partial/\partial t[R_k(x,t)] + \partial/\partial x[N_k(x,t)] &= 0, \\ \partial/\partial t[P_k(x,t)] + \partial/\partial x[v_k(x,t)P_k(x,t)] &= 0, \\ \omega_k Q_{k'k} + Q_{kk'}^* \omega_k &= 0.\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что система явно содержит два различных класса полевых переменных: a_k и $Q_{kk'}$. Остальные функции описывают, условно, характеристики среды, в которой происходит движение.

Эти уравнения естественным образом переходят в хорошо известную точно интегрируемую систему $N(N+1)/2$ волн в случае

$$\begin{aligned}a_k(x,t) &= i \sum_{m=1}^N A_m(x,t) \delta(k-k_m), \\ Q_{kk'}(x,t) &= i \sum_{m,n=1}^N B_{mn}(x,t) \delta(k-k'-k_m+k_n)\end{aligned}$$

и условия, что $B_{mn} = B_{nm}^*$, $m=1, \dots, N$ и k_m связаны резонансными соотношениями: $k_l - k_m + k_n = k$, для всех номеров l, n, m, i в диапазоне от 1 до N . Это решение представляет собой частное (дискретное) решение общей задачи о точно интегрируемой модели взаимодействия волн в непрерывном спектре. В представленной "непрерывной" форме записи резонансный характер взаимодействия, описываемый такой системой, выглядит гораздо естественней, нежели в поэлементной.

Отметим также еще одно свойство непрерывной записи. Именно, явное разбиение системы уравнений (11) на две подсистемы относительно функций a_k и $Q_{kk'}$ дает повод интерпретировать ее как систему, описывающую динамику «частиц» со свойствами, задаваемыми функциями a_k , взаимодействующих с «полем», которое описывается с помощью функции $Q_{kk'}$. Такая формулировка вполне согласуется с общей тенденцией в физике вводить в рассмотрение частицеподобные «квантовые» возбуждения типа фотонов, фононов и т.д. Это свойство системы просматривается уже в дискретном ее варианте для случая $N(N+1)/2$ волн. Компоненты, соответствующие частицам в односолитонном решении, описываются функциями типа солитонов $\text{ch}^{-1}(x-ut)$, а соответствующие «модам» поля - функциями типа «кинков» $\text{th}(x-ut)$.

Аналогичные свойства, по-видимому, сохраняются и в случае $N \rightarrow \infty$. Соответствующие формулы в компактной форме дают представление ЛЗШ для счетного набора гармоник. Использование МОЗР для такой счетной системы, по-видимому, не должно существенно усложнять построение решения. Интегрирование же этой системы в случае непрерывной зависимости от k всех функций в них с помощью МОЗР представляет собой отдельную проблему, решение которой здесь рассматривать нецелесообразно (в основном из-за недостатка места).

В заключение обратим внимание на следующие важные особенности построенной точно интегрируемой системы. Во-первых, эта система в непрерывном случае описывает распространение нелинейных волн в среде с произвольной дисперсией, что задается зависимостью групповых скоростей v_k от k . Фактически это означает, что, по-видимому, можно найти такие условия, что данная система после Фурье-преобразования вида

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_k(x,t) \exp(ikx - \Omega_k t) dk$$

при некоторых функциях Ω_k будет давать точное решение для всех других типов нелинейных уравнений, интегрируемых с помощью МОЗР в размерности 1+1, например, КдВ и т.п. Эти условия должны быть связаны с выбором зависимости

неизвестных функций a_k и $Q_{kk'}$ от параметров k и k' . Можно предположить, что такой подход даст возможность в более приемлемой с точки зрения физики форме, чем методы конечнозонного интегрирования (см. например, [2]), решить задачу о совместном описании солитонов и «радиационного фона», возникающего при взаимодействии солитонов с границами области, в которой происходит движение.

Во-вторых, можно также предположить, что такой подход дает «универсальное» представление интегрируемых с помощью МОЗР многомерных уравнений в размерности 1+2 и выше, о чем уже говорилось во вводной части данной статьи. Действительно, используя (2) при условии $v_k=k$, первое уравнение системы (1) можно преобразовать к виду

$$u_t - iu_{xy} = \int Q(x,t,y;y')u(x,t,y')dy'. \quad (13)$$

Это уравнение описывает нелинейные волны в двумерном координатном пространстве с нелокальным в направлении координаты y взаимодействием. Это взаимодействие задается функцией

$$Q(x,t,y;y') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{kk'}(x,t) \exp[i(ky - k'y')] dk dk',$$

для описания которой служит второе уравнение в (1), преобразующееся аналогично первому. Для того, чтобы получить системы в большей координатной размерности, достаточно ввести двух-, трех- и т.д. параметрическую нумерацию функций частиц и полей, то есть рассматривать уравнения (1) и (11) относительно $a_{k_1 k_2 k_3 \dots}$ и соответствующие Фурье-преобразования типа (2) по всем дополнительным параметрам.

В-третьих, рассмотренная система (1) имеет первый порядок по координатным производным, что соответствует в дискретных задачах линейной дисперсии. Однако в работе [4] была получена точно интегрируемая система взаимодействия $N(N+1)/2$ волн для случая квадратичной дисперсии среды. Рассмотренное непрерывное обобщение дискретной задачи возможно и в этом случае, и в случае более высоких порядков дисперсии среды. В связи с этим обратим внимание на то, что последнее уравнение (13) очень похоже на уравнение Шредингера. Точного соответствия можно добиться как раз при увеличении исходного порядка дисперсии до двух. Последнее может быть полезным при решении квантовых задач.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00260)

Библиографический список

1. Захаров В.Е., Манаков С.В. // ЖЭТФ. 1975. Т. 69, № 5. С. 1654.
2. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
3. Журавлев В.М. // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 61, вып. 4. С. 254.
4. Журавлев В.М. // ЖЭТФ. 1996. Т. 110, № 6. С. 910.
5. Сухоруков А.П. Нелинейные волновые процессы взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988.
6. Изъяуров С.А., Козлов С.А. // Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 71, вып. 11. С. 666.
7. Захаров В.Е. Метод обратной задачи рассеяния // Солитоны / Под ред. Р.Буллафа, Ф.Кодри. М.: Мир, 1983. 270 с.

8. Захаров В.Е., Манаков С.В. // Функци. анализ и его прил. 1985.Т. 19, вып. 2. С.11.

Ульяновский государственный
университет
Институт теоретической физики

Поступила в редакцию 20.12.2000
после доработки 11.03.2001

EXACTLY INTEGRABLE MODELS OF THE WAVE INTERACTION WITH CONTINUOUS SPECTRUM

V.M. Zhuravlev

Interaction with a continuous spectrum in inhomogeneous media is constructed the Laks representation of exactly integrable model of the wave by the generalized Lagrange identities method for the conjugated equations. The general analysis of the obtained equations and ways of their use in theoretical and applied physical problems of non-linear wave processes are carried out.



Журавлев Виктор Михайлович - родился в Алма-Ате (1953). Окончил физический факультет Московского государственного университета (1976). После окончания МГУ работал в Морском гидрофизическом институте АН УССР. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГИ АН УССР (1987) в области физики взаимодействия атмосферы и океана. С 1992 года - преподаватель Ульяновского государственного университета. В настоящее время декан физико-технического факультета этого университета. Опубликовал более 80 научных статей по направлениям: физика взаимодействия атмосферы и океана, обработка данных, теория нелинейных волновых процессов, теория гравитации и космология. E-mail: zhuravl@sv.univen.ru



ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПОТОКА СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА С ЗЕМНОЙ МАГНИТОСФЕРНОЙ СИСТЕМОЙ

Н.А. Бархатов, Н.С. Беллюстин, Н.Н. Емельянов

Численными методами изучен процесс обтекания потоком плазмы солнечного ветра локализованного препятствия в виде магнитного поля Земли. Исследование проведено в магнитогидродинамическом приближении. Нестационарность такого взаимодействия определяется неоднородностями натекающего потока, а также переходными и волновыми процессами, обусловленными неустойчивостями движения среды. Компьютерная программа двумерного вычислительного магнитогидродинамического моделирования была создана авторами для исследования этих вопросов. Эта программа позволяет реализовать быстрый просмотр одномерных компьютерных динамических сценариев для подбора параметров. С помощью программы продемонстрировано модельное взаимодействие магнитосферы Земли с неоднородностью плотности и скорости в солнечном ветре. Показано, как модельное двумерное возмущение проникает во внутримангнитосферную область, создавая там заметное изменение земного магнитного поля. Решены трудности, связанные с хаотическими режимами из-за временной и пространственной дискретности вычислительной модели.

Введение

Взаимодействие потока плазмы солнечного ветра с магнитным полем Земли является предметом устойчивого интереса в связи с существенными изменениями, которые могут вызвать в окрестностях Земли нестационарные процессы на Солнце. Многие важные аспекты этого взаимодействия могут быть удовлетворительно рассмотрены в рамках магнитогидродинамического (МГД) приближения. При этом достаточно сильное магнитное поле Земли B_0 является локализованным препятствием на пути потока плазмы, и обтекание его плазмой во многом сходно с обычным гидродинамическим обтеканием препятствия потоком [1,2]. Нестационарность динамического обтекания определяется неоднородностями натекающего потока, а также турбулентностью, то есть переходными и волновыми процессами, обусловленными неустойчивостями движения среды. Ясно, что быстрое развитие вычислительной техники ставит в центр исследований околоземных МГД-процессов вычислительное

моделирование. Такой подход позволяет, в частности, успешно исследовать нелинейные процессы, практически недоступные аналитическим методам, применявшимся в научных исследованиях ранее [3, 4]. Однако на пути вычислительных методов есть трудности, самые серьезные из которых связаны с «вычислительными неустойчивостями». Они зависят от временной и пространственной дискретности модели. Кроме того, принципиальную роль играют недавно обнаруженные хаотические режимы в точечных нелинейных системах. Определенный порядок в их классификации удалось навести [5]. Однако, когда речь идет о большом числе связанных точечных элементов или о распределенной системе, вопрос об их устойчивости и поведении относится пока к сфере вычислительных экспериментов, где речь идет лишь о накоплении экспериментальных фактов и их предварительной систематизации. С учетом этих обстоятельств нами создана оригинальная компьютерная программа, реализующая известные МГД-уравнения для космической плазмы

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + c^2 \Delta \mathbf{B} / (4\pi\sigma),$$

$$\partial \mathbf{V} / \partial t = -(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} - (V_s^2/\rho_0)\nabla\rho_0 - (\mathbf{B} \times \text{rot}\mathbf{B}) / (4\pi\rho_0) + (\eta/\rho_0)\Delta\mathbf{V} + (\zeta + \eta/3)(\text{grad div}\mathbf{V})/\rho_0,$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0,$$

$$\partial\rho_0/\partial t + \text{div}\rho_0\mathbf{V} = 0,$$

где \mathbf{B} - магнитное поле, \mathbf{V} - скорость плазмы, ρ_0 - плотность среды, V_s - скорость звука, η и ζ - коэффициенты вязкости, σ - проводимость.

Двумерная вычислительная МГД-модель позволяет, в частности, моделировать обтекание локализованной области сильного магнитного поля потоком плазмы. Главным преимуществом рассматриваемой двумерной модели перед «истинной» трехмерной является более высокая скорость счета, при этом с ее помощью можно выяснить многие важные свойства МГД-обтекания. Программа рассчитана на общедоступные персональные компьютеры типа Pentium III и в стандартном режиме использует пространственную сетку 600×600 точек. Интегрирование проводится методом конечных разностей с постоянной квадратной пространственной сеткой и с постоянным шагом интегрирования по времени. В программу встроена подпрограмма, реализующая интегрирование МГД-уравнений в одномерном приближении по аналогичной схеме. Она позволяет в сотни раз быстрее просматривать одномерные сценарии и подбирать оптимальные параметры задачи. Использование простейшей схемы интегрирования позволяет, когда это возможно, добиваться контролируемого перехода к случаю непрерывной среды путем измельчения пространственной сетки и временного шага. Как показали проведенные вычислительные эксперименты, сочетание одномерной и двумерной программ позволяет быстро продвигаться в понимании МГД-процессов.

В настоящей работе приведены результаты модельных расчетов рассеяния волновых возмущений на земной магнитосфере в двух случаях. В первом случае рассматривается простейшая модель, не учитывающая движение среды. При этом проясняются общая структура формирования модельной магнитосферы и физический смысл явления. Второй случай более близок к реальности - поток плазмы натекает на препятствие со скоростью, превышающей скорости волн среды, и формирует ударную волну.

1. Рассеяние возмущения в неподвижной среде

В первой группе численных экспериментов не будем учитывать скорость сноса солнечного ветра. Такое приближение важно для правильного понимания

процесса рассеяния и взаимодействия неоднородностей солнечного ветра с магнитосферой Земли. Рассеяние целесообразно рассмотреть в два этапа, поскольку область сильного магнитного поля в окружающей однородной плазме будет выдавливать плазму до тех пор, пока не установится равновесная статическая область с сильным магнитным полем и пониженной концентрацией плазмы. В таком процессе формирования самосогласованной «магнитосферы» вследствие диамагнетизма плазмы магнитное поле может несколько уменьшиться, если оно не поддерживается внешними источниками. Полученная статическая неоднородность в плазме и будет рассматриваться как модельная магнитосфера, которая на втором этапе этого вычислительного эксперимента подвергается воздействию неоднородности солнечного ветра.

Рассмотрим результаты проведенных вычислительных экспериментов, в которых вязкость среды была выбрана несколько завышенной по сравнению с реальным значением в солнечном ветре для обеспечения устойчивости и приемлемой быстроты численного счета. Фактически, в рассматриваемых примерах такое завышение вязкости проявляется только в незначительном затухании волны. На рис. 1 показан динамический процесс формирования модельной магнитосферы. Линейный размер представленной пространственной области составляет примерно 3 млн. км, размер модельной магнитосферы - около 200 тыс.

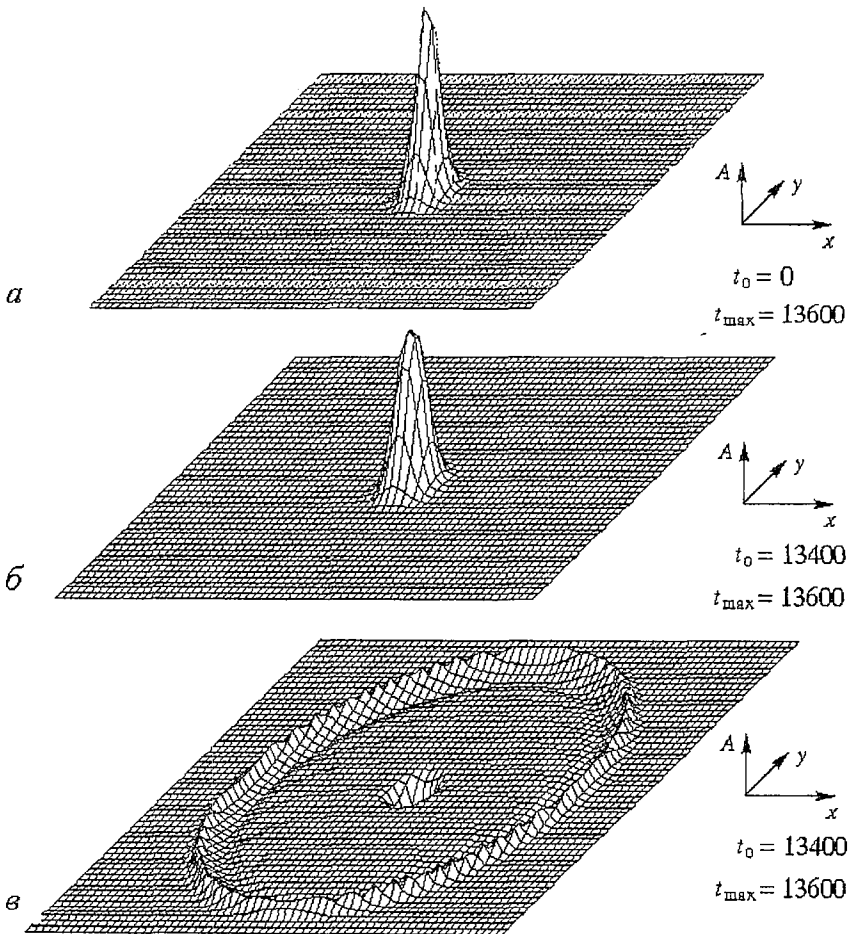


Рис. 1. Изменение магнитного поля (а, б) и плотности плазмы (в) в процессе формирования модельной магнитосферы

км. Рис. 1, а демонстрирует начальное условие - поперечную к плоскости ХУ компоненту сильного магнитного поля B_z с амплитудой в центре 0.3 Гс (аналога геомагнитного). Начальное магнитное поле компактно локализовано в области в центре рисунка. Остальные шесть переменных из МГД-уравнений в начальный момент тривиальны - пять из них равны нулю, а плотность постоянна. После необходимого числа итерационных шагов, реализующих уравнения, B_z - компонента магнитного поля несколько расплывается (рис. 1, б), зато информационно-содержательным становится распределение плотности, изображенное на рис. 1, в. В центральной области, где магнитное поле выдавило плазму, наблюдается сильный, но неподвижный статический провал плотности, окруженный разбегающейся звуковой концентрической волной.

Таким образом, рассматриваемый динамический процесс сопровождается выбросом из возмущенной области концентрической звуковой волны. Для получения модельной магнитосферы необходимо подождать, пока волна отойдет на достаточное расстояние, и вырезать пространственный фрагмент, что также позволяет созданное программное средство. Необходимые параметры, позволяющие вырезать центральную область рисунка в качестве модельной магнитосферы, можно быстро определить моделированием в одномерном приближении. Фрагмент, содержащий центральную область рисунка, принимается в качестве

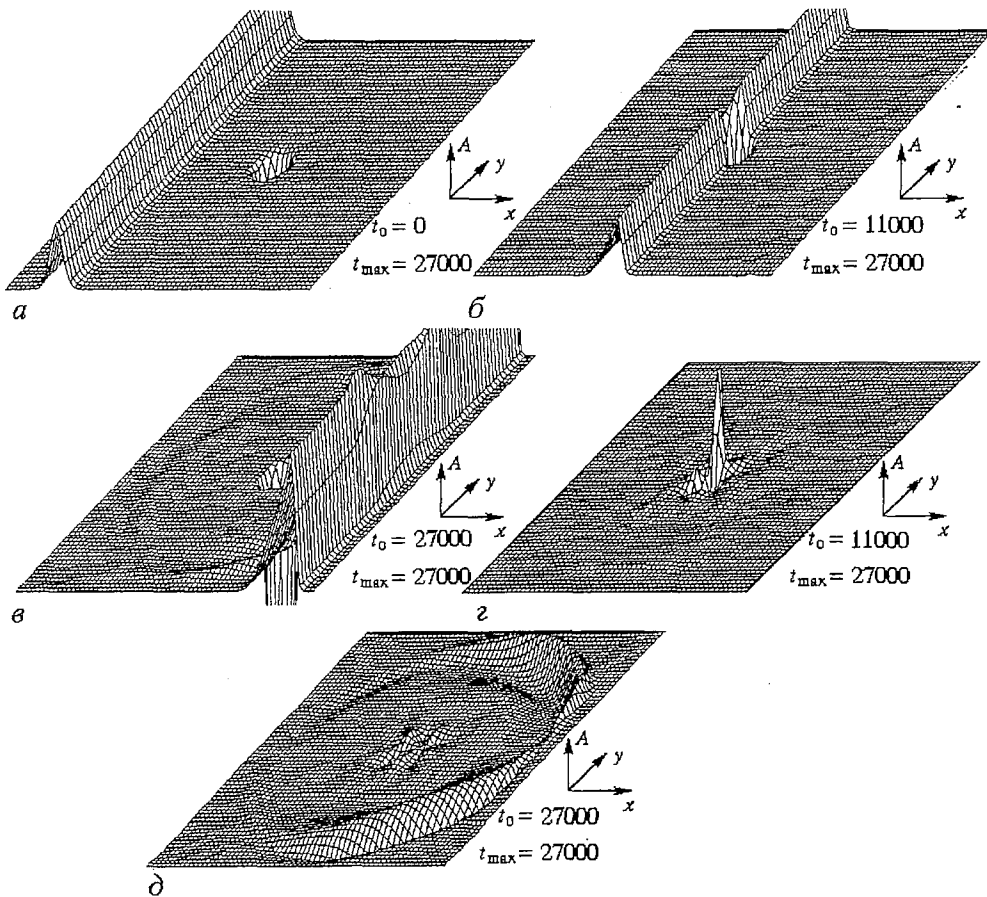


Рис. 2. Переменные плотности (а, б, в) и скорости (г, д) плазмы при прохождении волнового возмущения через магнитосферу

модельной магнитосферы. Созданная программа обеспечивает возможность использования в дальнейшем полученного фрагмента в виде начального условия.

Модельное рассеяние неоднородности солнечного ветра на земной модельной магнитосфере является вторым этапом этого исследования. Картина рассеяния представлена на рис. 2 распределением плотности и скорости плазмы. На рис. 2, *а* показано начальное распределение плотности: амплитуда возмущения составляла десятки процентов от фонового, скорость перемещения возмущения 500 км/сек; на рис. 2, *б* - распределение плотности в момент рассеяния; на рис. 2, *в* - прошедшая и рассеянная волны после взаимодействия магнитосферы с неоднородностью. На рис. 2, *г* и *д* показана компонента скорости V_Y в момент взаимодействия и после рассеяния, соответственно. Длительность всего представленного на рисунках динамического процесса - примерно 6000 сек.

Особый интерес представляет изменение магнитного поля во внутренней области магнитосферы, в центральной части которой расположена Земля. Динамика изменения магнитного поля (рис. 3) свидетельствует о возрастании величины B_z примерно на 5% во время прохождения (рис. 3, *б*) неоднородности солнечного ветра с последующим восстановлением (рис. 3, *в*) после акта рассеяния. Таким образом, модель показывает, что процесс прохождения неоднородности через магнитосферу может сопровождаться значительным импульсом геомагнитного поля (SI), а также разбеганием волн в плазме солнечного ветра. Следует

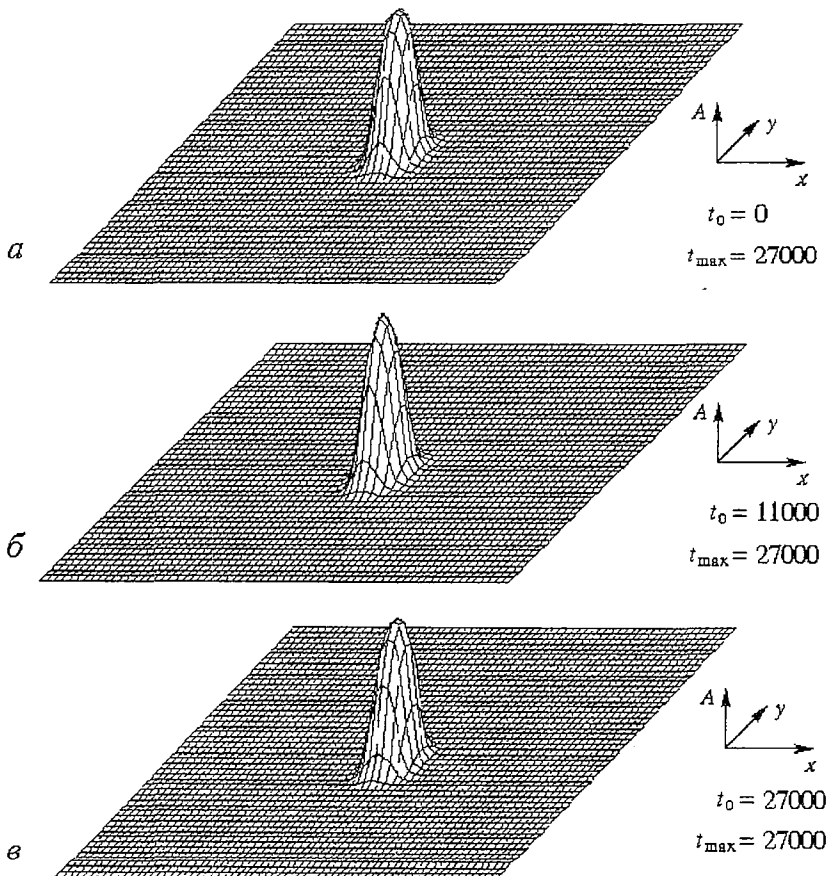


Рис. 3. Возрастание магнитного поля в момент прохождения возмущения через магнитосферу - «внезапный импульс»

ожидать, что качественно похожий процесс будет иметь место при рассмотрении влияния неоднородности солнечного ветра и в рамках более сложной модели.

2. Рассеяние неоднородности солнечного ветра на магнитосфере в условиях сноса среды

Рассмотрим теперь случай сноса плазмы солнечного ветра со скоростью, превышающей скорости волн среды. В этой ситуации область сильного магнитного поля в модели должна удерживаться внешней силой в точке (X_0, Y_0) - в противном случае она придет в движение и будет увлечена потоком. Для обеспечения этого нужно заменить в правой части МГД-уравнений \mathbf{B} на $\mathbf{B} + \mathbf{B}_0$, где \mathbf{B}_0 - магнитное поле Земли, которое направлено вдоль оси Z , не зависит от времени и определяется несложной модельной формулой, отвечающей дипольному распределению в плоскости XY

$$B_0 = A / [(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + r]^{1/2}.$$

Здесь A - постоянная, а малый параметр r добавлен для того, чтобы обеспечить конечное значение поля в точке (X_0, Y_0) .

Заключительный численный эксперимент по взаимодействию модельной магнитосферы с неоднородностью плотности и скорости поставлен уже с учетом обтекания магнитосферы плазмой солнечного ветра. На рис. 4 представлены стационарные профили четырех основных МГД-переменных, возникшие в результате обтекания плазмой области внешнего магнитного поля. Отношение скорости сноса к скорости звуковой волны (число Маха) здесь равно 5. Из рис. 4, *а* видно, что поток плазмы «выдувает» магнитное поле в хвост магнитосферы. Возникающая вследствие этого процесса стационарная структура магнитного поля качественно отражает свойства реальной земной магнитосферы. На рис. 4, *б* показано выдавливание плазмы из области сильного магнитного поля как в центральной области магнитосферы, так и в ее хвосте. Кроме этого отчетливо просматривается ударная волна в распределениях плотности и скорости, сформированная в результате взаимодействия потока солнечного ветра с локализованной областью сильного магнитного поля. Из рис. 4, *в* следует, что внутри магнитосферы сохраняется лишь небольшая область, где скорость V_x мала

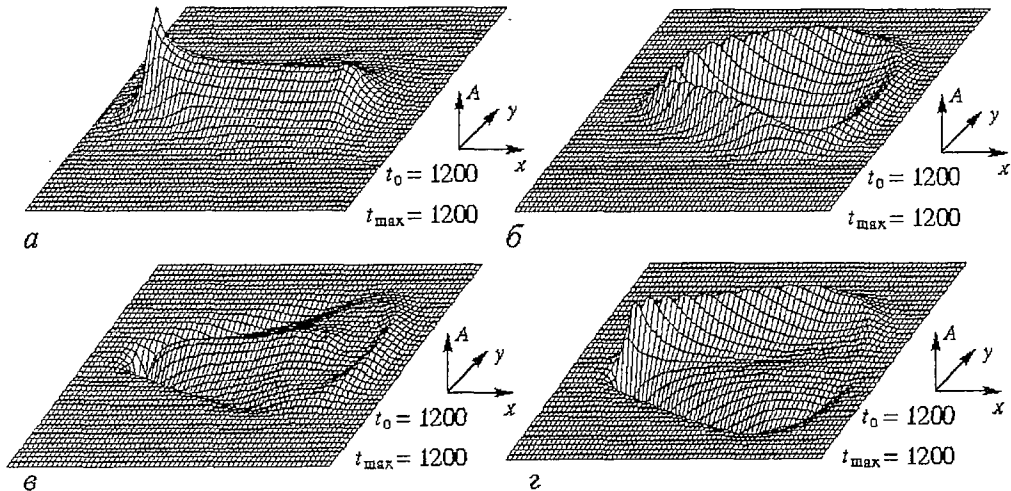


Рис. 4. МГД-переменные стационарной магнитосферы, возникшей в процессе обтекания Земли потоком плазмы солнечного ветра

и куда поток не проникает. Поперечное разбегание потока показано на рис. 4, *г* распределением скорости V_y .

Представленная на рис. 4 ситуация является исходной для изучения рассеяния набегающего возмущения, динамика которого показана на рис. 5 для плотности плазмы. На рис. 5, *а* локализованное вдоль и протяженное поперек волновое возмущение подходит к магнитосфере; рис. 5, *б* соответствует моменту непосредственного взаимодействия, когда влияние набегающего возмущения на центральную область магнитосферы максимально. На рис. 5, *в* показано, как профиль магнитосферы восстановился, а возмущение сместилось в хвост модельной магнитосферы.

Особый интерес представляет динамика магнитного поля при прохождении возмущения через область магнитосферы, вызывающая «внезапный импульс» (SI). Последовательность кадров, отвечающих этому процессу, представлена на серии рис. 6. Видно, как натекающее возмущение вызывает ощутимый подъем

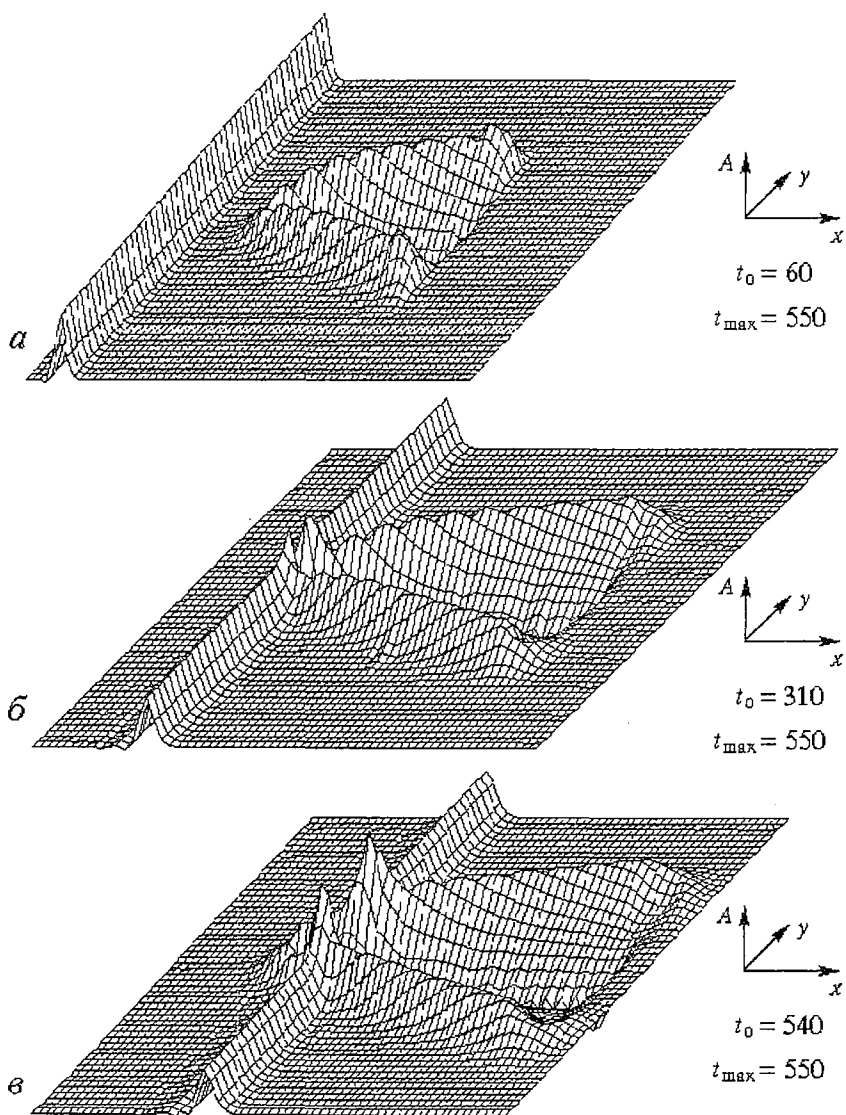


Рис. 5. Распределение плотности плазмы на этапах прохождения волнового возмущения через магнитосферу

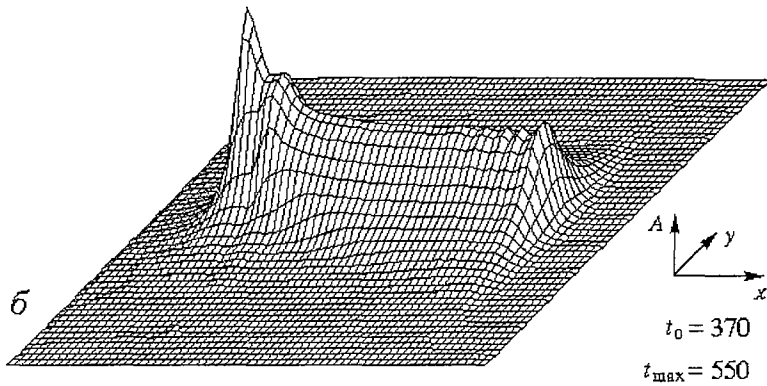
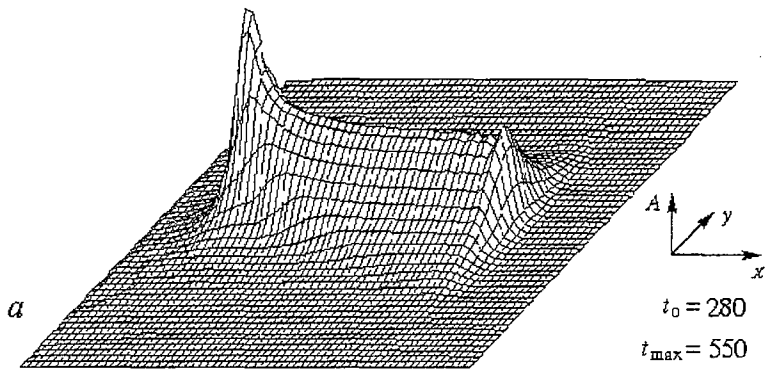


Рис. 6. Возмущения магнитного поля в центральной области магнитосферы и в хвосте

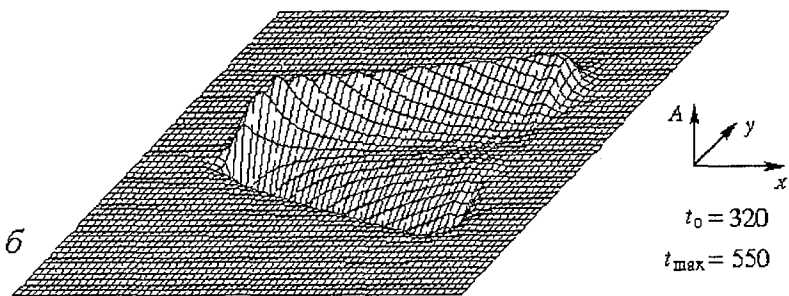
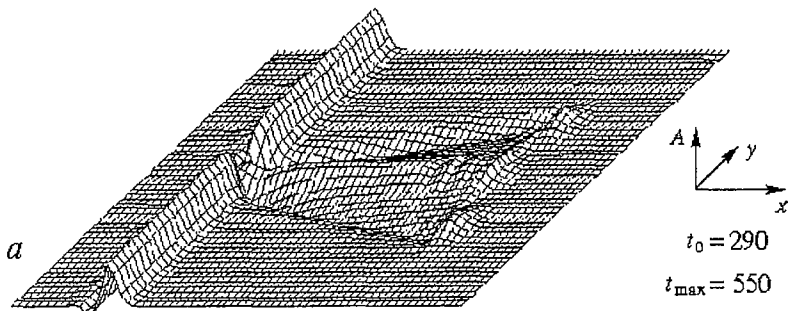


Рис. 7. Распределения продольной и поперечной скоростей плазмы в момент прохождения возмущения через центральную часть магнитосферы

геомагнитного поля в задней части центральной области магнитосферы (рис. 6, а). Он не превышает нескольких процентов от стационарного значения в момент наибольшего прохождения возмущения. На периферии, в хвосте магнитосферы влияние сносимого возмущения в доленом отношении проявляется более отчетливо, поскольку там слабее земное стационарное магнитное поле (рис. 6, б).

На рис. 7 показаны распределения продольной и поперечной скоростей при прохождении возмущения через магнитосферу. Сравнение с рис. 4, в и рис. 4, г показывает ощутимое влияние возмущения на распределение скоростей в этот момент.

Выводы

В настоящей работе показано, что созданная нами компьютерная программа успешно реализует моделирование МГД-процессов в космической плазме. Поставленные численные эксперименты иллюстрируют основные особенности взаимодействия плазмы и магнитного поля. Продемонстрировано возникновение диамагнитного плазменного статического объекта, сопровождаемое звуковым волновым процессом. Рассмотренный модельный пример рассеяния плоского возмущения на этом объекте является частным случаем общезначимой задачи рассеяния плоской волны на пространственно локализованной неоднородности среды.

Созданная программа позволяет выяснить различные особенности картины взаимодействия неоднородного солнечного ветра с модельной магнитосферой Земли. Полученные в вычислительных экспериментах результаты могут быть использованы для объяснения связи параметров возмущений космической среды и вариаций геомагнитного поля. В рамках рассмотренной модели магнитосферы показано, что двухкратное возрастание плотности в потоке солнечного ветра может вызывать «внезапный импульс» SI - изменение на несколько процентов магнитного поля во внутренней области магнитосферы. Разработанная методика анализа взаимодействия неоднородностей солнечного ветра с магнитосферой оказалась полезной для оценки геоэффективности различных типов возмущений, обусловленных солнечной активностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-05-64689) и научной программы «Университеты России».

Библиографический список

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.
2. Лэмб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. 343 с.
3. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 683 с.
4. Электродинамика плазмы. Под ред. Ахизера А.И. М.: Наука, 1974. 720 с.
5. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с.

*Нижегородский государственный
педагогический университет
Научно-исследовательский
радиофизический институт*

Поступила в редакцию 19.01.01

DYNAMICS OF NONLINEAR INTERACTION BETWEEN INHOMOGENEITIES OF SOLAR WIND FLOW AND THE EARTH MAGNETOSPHERE

Barkhatov N.A., Belliustin N.S., Emel'yanov N.N.

The process of flow of Solar wind plasma over the localized barrier such as the Earth magnetic field is studied by the numerical methods. The research is carried out in magnetohydrodynamic approach. Nonstationarity of such interaction is occasioned by inhomogeneities of the coming flow, transient and wave processes, which are caused by instabilities of medium movement, as well. The computer program of two-dimensional computing magnetohydrodynamic simulation was created for the research of these problems. This program allows to review quickly the one-dimensional computing dynamic process scenario for the selection of parameters. The model interaction of the Earth magnetosphere with density and velocity inhomogeneity in the Solar wind was demonstrated by the program. It was shown, that the model two-dimensional disturbance penetrates into magnetosphere region. It creates the noticeable change of the Earth magnetic field there. Problems, connected with random regimes because of time and space discrete of computing model were solved.



Бархатов Николай Александрович - родился в Горьком (1948). Окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1971), аспирантуру ИЗМИР АН (Троицк, Моск. обл.). Работает в Научно-исследовательском радиофизическом институте (с 1978 г.) и в Нижегородском государственном педагогическом университете (с 1986 г.). Доктор физико-математических наук (1997). Профессор (1998) кафедры теоретической физики. Соросовский профессор. Тема кандидатской диссертации - «Ультранизкочастотные волны в солнечном ветре и магнитосфере земли» (1981); докторской - «Распространение магнитогидродинамических возмущений в солнечном ветре и околоземном пространстве» (1997). Опубликовал около 100 научных работ по вышеуказанным направлениям, а также в области моделирования и прогнозирования динамических процессов в космической плазме с использованием средств компьютерного моделирования и методов искусственных нейронных сетей. В НГПУ читает курсы: «Теоретическая физика - Электродинамика», «Электрорадиотехника», «Волновые явления в космической плазме», «Солнечно-земная физика».



Беллустин Николай Сергеевич - родился в Горьком (1950). Окончил с отличием радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1972), работает в Научно-исследовательском радиофизическом институте. Кандидат физико-математических наук (1978), старший научный сотрудник (1991). Тема кандидатской диссертации: «Некоторые вопросы распространения и излучения электромагнитных волн в магнитоактивной плазме». Опубликовал около 65 научных работ по вышеуказанным направлениям, а также в области теории искусственных нейронных сетей и их применения для обработки визуальных изображений и для прогнозирования и моделирования сложных динамических систем, в том числе финансово-экономических процессов.



Емельянов Николай Николаевич - родился в Горьком (1978). В настоящее время - студент 5-го курса (магистратура) физического факультета Нижегородского государственного педагогического университета.



ДВУХМАСШТАБНЫЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС: от параметрического резонанса в осцилляторе до термодинамических циклов

К.Ю. Блюх, О.В. Усатенко

Рассматривается влияние двухмасштабных изменений параметров на поведение различных динамических систем. Обнаружено возникновение параметрической неустойчивости, названной нами двухмасштабным геометрическим резонансом. Этот эффект может быть описан с помощью некоторых геометрических структур на расширенном фазовом пространстве; он обладает общими свойствами и описывается подобным образом в, казалось бы, совершенно непохожих системах. В статье предложены общие модели двухмасштабного геометрического резонанса и рассмотрены конкретные примеры: классический осциллятор, осциллятор Ван дер Поля и термодинамическая система с идеальным газом.

Введение

В последние годы физики и математики уделяют много внимания системам с иерархией эволюций. В движении таких систем можно выделить «быстрые» и «медленные» компоненты. С одной стороны, для анализа таких систем имеются традиционные асимптотические методы - метод усреднения, метод многих масштабов и т. п. (см., например, [1, 2]). С другой стороны, бурно развивающиеся геометрические методы математической физики позволили найти интересные и, возможно, более адекватные формы для описания систем с различными масштабами эволюций. На втором пути были обнаружены не замеченные ранее важные особенности поведения как классических, так и квантовых систем. Так, введенные в 80-х годах Берри и Ханнеем геометрические фазы сразу же стали неотъемлемой частью адиабатической теории систем с параметрами (см. обзор [3] и ссылки там). Появились и работы, демонстрирующие возможность возникновения параметрических неустойчивостей, связанных с геометрическими структурами и обладающих необычными «геометрическими» свойствами [4, 5].

В данной работе рассматривается явление параметрической неустойчивости, которая также возникает вследствие разделения масштабов эволюции и может быть описана в рамках некоторой геометрической структуры. Эта неустойчивость присутствует во многих динамических системах общего вида: от простейших, типа осциллятора, и до сложных статистических систем, типа газа частиц. Насколько нам известно, этот тип неустойчивости до сих пор не рассматривался как самостоятельный, и в отдельных примерах соответствующее ему изменение энергии системы рассчитывалось из других физических соображений и моделей.

Это, по-видимому, связано со следующим обстоятельством. Как отмечалось, до недавнего времени для анализа динамики неавтономных систем с параметрами использовались, в основном, различные асимптотические методы. При этом обычно сравниваются характерный обратный временной масштаб изменения параметров ϵ и характерный обратный масштаб изменения решений ω при постоянных значениях параметров. Хорошо известны два предельных случая соотношения этих величин: $\epsilon \ll \omega$ – адиабатическое приближение; $\epsilon \gg \omega$ – высокочастотное приближение. Иногда также можно построить точные решения для случая, когда зависимость параметров от времени является достаточно простой функцией (например, гармонической). При этом изменения параметров во времени снова имеют свой единственный характерный масштаб ϵ (в гармоническом случае – частоту), и возможно рассмотрение случая $\epsilon \sim \omega$.

Подобные методы обнаружили в физических системах общего положения только один, наиболее известный тип параметрической неустойчивости – *параметрический резонанс* (ПР), который наблюдается во всех осцилляторных системах. ПР возникает при периодической зависимости параметров от времени, причем период T должен быть равен одному из значений бесконечной дискретной последовательности, которая начинается в области, соответствующей $\epsilon \sim \omega$, и продолжается в область, соответствующую адиабатичности $\epsilon \ll \omega$. Зависимость инкремента ПР от периода изменений параметра во времени носит характер острых пиков с вершинами в точках резонансных периодов; высота этих пиков экспоненциально уменьшается с ростом периода (то есть в сторону уменьшения $\epsilon \sim T^{-1} \ll \omega$).

В данной работе в противоположность рассматривавшимся ранее *одномасштабным* изменениям параметров (с одним характерным масштабом) проведен анализ *двухмасштабных* изменений параметров. Под двухмасштабными мы понимаем осцилляции параметров, в которых на одном характерном периоде чередуются участки с большим и малым временным градиентом. То есть в пределах одной осцилляции параметра есть два характерных масштаба изменения: на одних участках параметры изменяются адиабатически ($\epsilon \ll \omega$), а на других – неадиабатически ($\epsilon \gg \omega$). Характерные виды двухмасштабных изменений параметров показаны на рис. 1. В общем случае (рис. 1, а) форма такой зависимости параметров от времени напоминает релаксационные колебания, также представляющие пример двухмасштабной зависимости (см., например, [6]). На рис. 1, б приведен предельный случай двухмасштабных вариаций параметров – участки постоянных значений параметров ($\epsilon = 0$) чередуются с их мгновенными скачками ($\epsilon = \infty$). Такие зависимости параметров от времени будем называть *предельно двухмасштабными*.

Известные асимптотические методы основываются на одном характерном масштабе изменения параметров и не применимы в данном случае¹. Оказывается, при непрерывном, даже не периодическом, двухмасштабном осцилляции параметров в системе общего вида возникает параметрическая неустойчивость. Мы будем называть ее *двухмасштабным геометрическим резонансом* (ДГР); смысл этого названия станет ясен ниже.

Возникновение ДГР обусловлено тем фактом, что эволюция системы различна при адиабатических и неадиабатических изменениях параметра. В

¹ При использовании метода разных масштабов можно рассматривать зависимость параметров от времени как комбинацию (например, сумму или произведение) двух компонент с разными масштабами. При этом может быть, что одна компонента меняется адиабатически, а другая осциллирует с высокой частотой, но каждая из них демонстрирует уже одномасштабную зависимость от времени. Однако рассматриваемая нами двухмасштабная зависимость не может быть представлена в виде комбинации двух одномасштабных компонент.

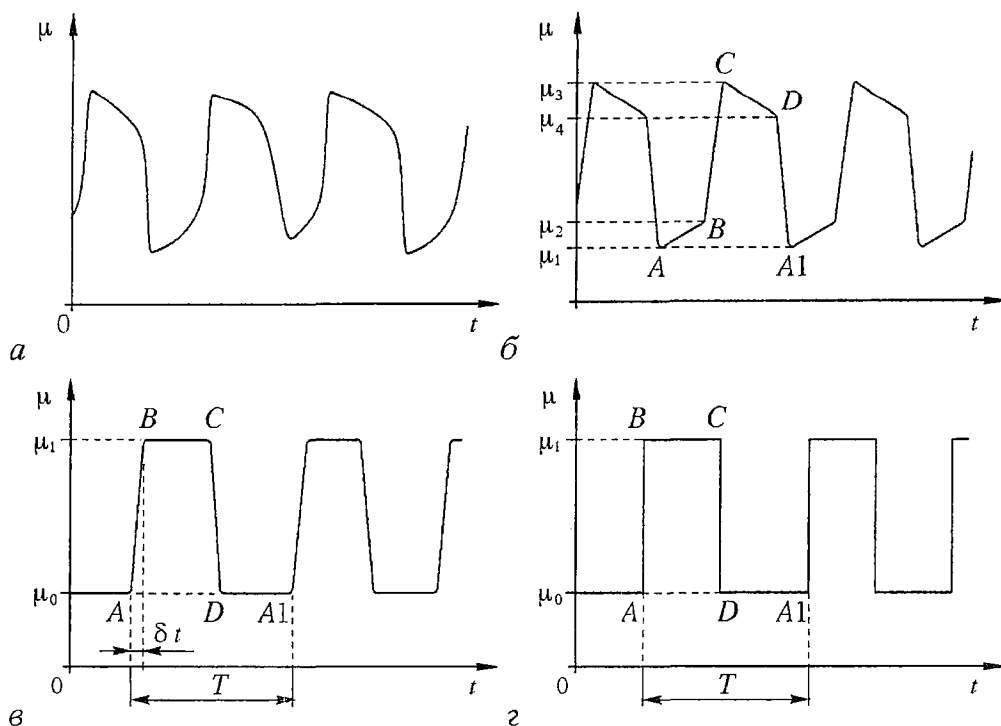


Рис. 1. Примеры двухмасштабных зависимостей $\mu(t)$: а – общий вид; б, в – различные схемы; z – «предельно двухмасштабный» случай

результате при проведении замкнутого цикла изменений параметра, в котором адиабатические изменения чередуются с неадиабатическими, возникает своего рода гистерезис и полная работа, совершаемая внешними силами при проведении такого цикла, отлична от нуля. Таким образом, при постоянных циклических двухмасштабных изменениях параметра в системах без потерь энергия будет все время неограниченно увеличиваться.

ДГР обладает свойством *геометричности*. Изменение энергии и инкремент неустойчивости не зависят от того, как именно изменялся параметр во времени (разумеется, в пределах сделанных предположений о двухмасштабном характере этих изменений), а определяются только значениями параметра в начальных и конечных точках его адиабатических и неадиабатических изменений. Изменение энергии при ДГР может быть представлено в виде контурного интеграла в некоторой параметро–энергетической плоскости; тогда очевидно, что изменение энергии не зависит явно от времени, а только от траектории изображающей точки системы в этой плоскости. Геометричность ДГР приводит к тому, что прирост энергии на одном двухмасштабном цикле зависит только от амплитуды изменения параметров и не зависит от времени совершения цикла. Это означает, что эффективный инкремент неустойчивости обратно пропорционален характерному периоду изменения параметров и не имеет «пиковой» резонансной зависимости².

² Полностью аналогичная ситуация реализуется и при *геометрической неустойчивости* (ГН), связанной с наличием в линейной осцилляторной системе комплексных фаз Берри [4]. Там речь идет об адиабатических изменениях нескольких независимых параметров. Изменение энергии при ГН зависит от геометрии пути изображающей точки системы в пространстве параметров и пропорционально площади, ограниченной соответствующим контуром. Однако ГН присутствует лишь в негамильтоновых осцилляторных системах и поэтому в физике может считаться скорее случаем исключительным [5].

Тем не менее, рассматриваемый здесь эффект ДГР мы назвали резонансом. Это связано с тем, что в простейшем предельном случае классического осциллятора с периодической зависимостью собственной частоты от времени ДГР переходит в обычный параметрический резонанс. Однако такой двухмасштабный параметрический резонанс существенно отличается от параметрического резонанса при гармонической зависимости собственной частоты от времени. Зоны неустойчивости одинаково плотно закрывают всю область $T \gg \omega$, а огибающая зависимости инкремента неустойчивости от периода T демонстрирует свойство геометричности – обратно пропорциональную зависимость (п. 2.2).

Возникновение гистерезиса, площадь которого равна совершаемой работе, наводит на мысль об аналогии с работой, совершаемой над идеальным газом при термодинамических циклах. И действительно, там имеем дело именно с двухмасштабным изменением параметра. Пусть дан идеальный газ в сосуде с поршнем; параметром является положение поршня или объем газа. Рассмотрим цикл, состоящий из происходящих поочередно изотермических и адиабатических (в термодинамическом понимании) процессов³. При адиабатическом процессе поршень перемещается быстро (характерное время движения поршня много меньше характерного времени теплообмена с окружающей средой). При изотермическом процессе поршень перемещается медленно, чтобы температура газа в каждый момент времени успевала сравняться с заданной температурой окружающей среды (характерное время движения много больше характерного времени теплообмена). При таком цикле энергия системы не растет, поскольку мы имеем дело с неконсервативной системой, отдающей свою энергию окружающей среде. Однако при постоянном проведении циклов работа, производимая внешним источником при движении поршня, растет неограниченно. Если подобные циклы проводить в замкнутой термодинамической системе, то энергия (температура) системы будет неограниченно расти, причем ее рост будет обладать всеми свойствами ДГР.

В данной статье даны общие обоснования эффекта ДГР (пп. 1.1, 1.2) и рассмотрен ряд характерных примеров динамических систем, в которых данный эффект может наблюдаться. Во всех из них обнаружен ДГР, который проявляет себя в разных случаях по-разному, но описывается подобным образом. В качестве простейшей линейной системы подробно рассмотрен классический осциллятор (пп. 2.1, 2.2). Далее рассматривается нелинейная система с предельным циклом – генератор Ван дер Поля (п. 3.1). Наконец, последовательные рассуждения приводят нас к обнаружению эффекта ДГР в идеальном газе (п. 3.2).

1. Общие модели эффекта

В этом разделе представлены две общего вида модели, которые объясняют эффект ДГР и его свойства в одномасштабных осцилляторных системах и двухмасштабных осцилляторных системах с медленной релаксацией. В следующих разделах рассмотрен ДГР на примерах конкретных физических систем и отмечены сходства и особенности возникновения ДГР в этих системах по сравнению с

³ При упоминании «адиабатического процесса» нужно быть внимательным, чтобы избежать путаницы. Адиабатический процесс в механике означает достаточно медленное изменение параметра. Адиабатический процесс в рассматриваемых термодинамических системах означает достаточно быстрое изменение параметра, чтобы система не успевала обмениваться энергией с окружающей средой, и в то же время достаточно медленное, чтобы успевало устанавливаться внутреннее равновесие.

предложенными здесь моделями. Общим местом всех рассуждений и основным условием возникновения ДГР является различие эволюции системы при разных характерных временных масштабах изменений параметра.

1.1. Одномасштабная система. Рассмотрим консервативную осцилляторную одномасштабную систему. Под одномасштабностью системы подразумеваем, что все ее собственные частоты являются величинами одного порядка, что позволяет традиционным образом различать адиабатические и неадиабатические изменения параметров. Пусть состояние этой системы характеризуется ее полной энергией E и значением некоторого вещественного энергоемкого параметра $\mu > 0$. Предположим, что при заданных начальных условиях и характере изменения параметра энергия системы определяется только текущим значением параметра. Например, при адиабатических изменениях параметра такую связь задает адиабатический инвариант системы. Тогда в общем виде можно записать дифференциал энергии системы при адиабатическом изменении параметра

$$dE|_{\text{ad}} = f_1(E_0, \mu_0, \mu) d\mu, \quad (1)$$

где E_0 и μ_0 - значения энергии и параметра, соответственно, в начале адиабатического изменения μ . По аналогии с (1) положим, что дифференциалу энергии при неадиабатическом изменении μ соответствует некоторая другая функция $f_2(E, \mu)$

$$dE|_{\text{nonad}} = f_2(E_0, \mu_0, \mu) d\mu, \quad (2)$$

где E_0 и μ_0 обозначают теперь значения энергии и параметра в начале неадиабатического изменения μ . Выражения (1) и (2) определяют два пересекающихся семейства кривых в плоскости $(dE/d\mu, \mu)$. Кривые каждого семейства не пересекаются между собой и отличаются значениями начальных условий подобно фазовым траекториям системы.

Рассмотрим теперь изменение энергии системы при одном двухмасштабном цикле. Пусть он, например, соответствует циклу А-В-С-D-A1 на рис. 1, б. Если зависимость энергии системы от параметра и фазовых переменных и зависимость параметра от времени являются гладкими непрерывными функциями, то величина $dE/d\mu$ непрерывна при изменениях параметра. Конечные значения энергии и параметра для участка адиабатического изменения μ являются начальными для следующего за ним неадиабатического участка и так далее. Тогда изображение двухмасштабного цикла в плоскости $(dE/d\mu, \mu)$ качественно соответствует картине, представленной на рис. 2. Изменение энергии системы, произошедшее в результате этого цикла,

$$\Delta E = \oint dE = \int_1 (dE/d\mu) d\mu \neq 0. \quad (3)$$

Как видно, ΔE сводится к контурному интегралу в плоскости $(dE/d\mu, \mu)$ и по модулю равно площади, ограничиваемой контуром А-В-С-D-A1 на рис. 2. Этот контур не замкнут, поскольку в результате цикла энергия изменяется и изображающая точка системы при конечном значении параметра, равном начальному, попадает на кривую, отличную от начальной.

Знак изменения энергии зависит от направления движения по контуру. Поскольку при одном двухмасштабном цикле изменение энергии отлично от нуля, то при постоянном двухмасштабном изменении параметра энергия будет непрерывно уменьшаться или расти. В первом случае ($\Delta E < 0$) контур асимптотически приближается подобно спирали к отрезку на оси абсцисс μ (см.

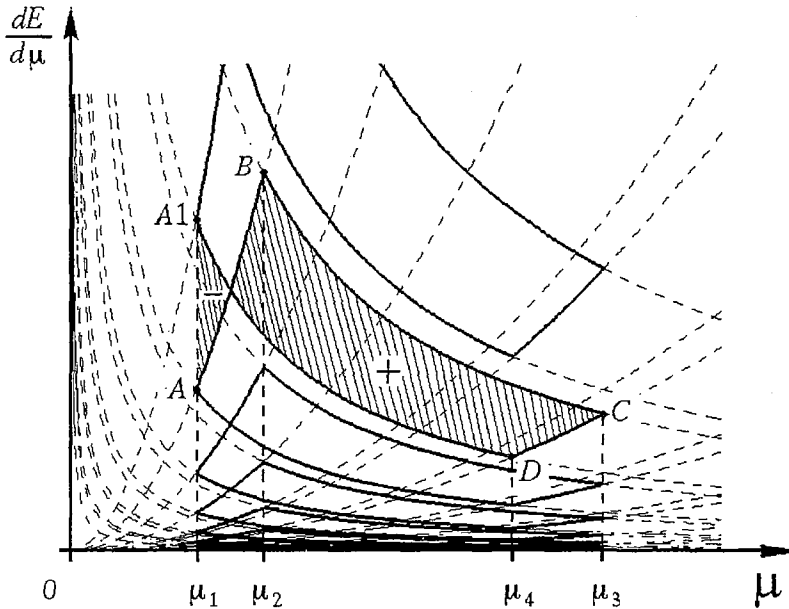


Рис. 2. Траектория изображающей точки абстрактной системы в плоскости $(dE/d\mu, \mu)$ при двухмасштабных вариациях параметра (сплошная линия). Штриховые параболы – кривые $f_1(E_0, \mu_0, \mu)$, а гиперболы – $f_2(E_0, \mu_0, \mu)$. Заштрихована площадь, ограниченная контуром, соответствующим одному двухмасштабному циклу А–В–С–D–А1 на рис. 1, б. Знаками «+» и «-» отмечены знаки ее вкладов в изменение энергии (3)

рис. 2), поскольку энергия системы должна быть ограничена снизу. Такое поведение контура соответствует тому, что

$$f_{1,2}(0, \mu_0, \mu) = \left. \frac{dE}{d\mu} \right|_{\substack{\text{ad, nonad} \\ E_0=0}} = 0. \quad (4)$$

Во втором случае ($\Delta E > 0$) движение происходит по тому же спиральному контуру в обратном направлении, он неограниченно расходится (см. рис. 2), и энергия системы, как будет видно из дальнейшего, экспоненциально растет.

Это и определяет неустойчивость системы – ДГР. Учитывая, что изменение энергии при ДГР определяется площадью контура в плоскости $(dE/d\mu, \mu)$, которая не зависит явно от времени, несложно сформулировать основные геометрические свойства ДГР:

(I) приращение энергии на одном периоде изменений параметра не зависит от длительности периода, то есть инкремент на больших временах обратно пропорционален характерному периоду (под характерным периодом здесь понимается отношение полного времени к числу колебаний параметра);

(II) инкремент ДГР при малой амплитуде осцилляций параметра пропорционален квадрату этой амплитуды (так как площадь контура пропорциональна квадрату его линейного размера);

(III) рост энергии при ДГР не зависит (в отличие от ПР) от соотношения фаз изменения параметра и решений.

Важным следствием свойства (I) является то, что ДГР развивается как при периодических, так и при непериодических двухмасштабных вариациях параметров. Это делает его гораздо менее «чувствительным» к форме зависимости параметра от времени по сравнению с параметрическими резонансами.

Как уже отмечалось во введении, этими же свойствами обладает

геометрическая неустойчивость, при которой изменение энергии выражается контурным интегралом в пространстве нескольких параметров [4, 5].

1.2. Двухмасштабная система с релаксацией. Рассмотрим двухмасштабную систему, то есть систему, в эволюции которой присутствуют два характерных временных масштаба. Пусть система состоит из двух взаимодействующих частей: подсистемы 1 и подсистемы 2. Каждая из этих подсистем имеет осцилляторный характер движения с характерными временами одного порядка ω^{-1} . Пусть также в системе есть медленная релаксация энергии: энергия распределяется между подсистемами в некотором постоянном отношении (для простоты рассуждений считаем, что поровну). При этом характерное время релаксации $\tau \gg \omega^{-1}$. За характерное время эволюции системы принимаем большее из времен: τ . Тогда адиабатическими изменениями параметра системы будут изменения с характерным временем T

$$\tau \ll T. \quad (5)$$

Неадиабатическими назовем изменения параметра с характерным временем δt

$$\omega^{-1} \ll \delta t \ll \tau. \quad (6)$$

Как видно, неадиабатические для системы в целом изменения параметра являются адиабатическими для ее подсистем.

Рассмотрим двухмасштабный цикл из определенных таким образом адиабатических и неадиабатических изменений некоторого энергоемкого параметра подсистемы 1 (допустим, характерной частоты ее осцилляций). Считаем, что этот цикл соответствует циклу А-В-С-D-А1 на рис. 1, в. Состояния системы, соответствующие точкам А-А1, приведены в таблице (рис. 3). Пусть сначала (точка А на рис. 1, в) система находилась в равновесии, ее полная энергия была $E^{(A)}=E_0$, энергия каждой из подсистем - $E_0/2$. На участке А-В совершается неадиабатическое увеличение параметра в $\eta > 1$ раз. Это изменение адиабатично по колебаниям подсистемы 1, и существует некий адиабатический инвариант, который определяет изменение энергии этой подсистемы. Предположим для простоты, что этот адиабатический инвариант является таким же, как и для классического осциллятора: отношение энергии к частоте (значению нашего параметра) остается примерно постоянным. Тогда энергия подсистемы 1 увеличивается на участке А-В в η раз и становится равной $\eta E_0/2$. Энергия подсистемы 2 при этом не успевает измениться, так как время изменения параметра подсистемы 1 много меньше характерного времени обмена энергией между подсистемами. Полная энергия системы станет равна $E^{(B)}=(\eta+1)E_0/2$. Далее

Точка на рис. 1, в	Значения параметра	Энергия подсистемы 1	Энергия подсистемы 2	Полная энергия системы
А	μ_0	$(1/2)E_0$	$(1/2)E_0$	E_0
В	$\mu_1 = \eta \mu_0$	$(\eta/2)E_0$	$(1/2)E_0$	$[(\eta+1)/2]E_0$
С	$\mu_1 = \eta \mu_0$	$[(\eta+1)/4]E_0$	$[(\eta+1)/4]E_0$	$[(\eta+1)/2]E_0$
Д	μ_0	$[(\eta+1)/(4\eta)]E_0$	$[(\eta+1)/4]E_0$	$[(\eta+1)^2/(4\eta)]E_0$
А1	μ_0	$[(\eta+1)^2/(8\eta)]E_0$	$[(\eta+1)^2/(8\eta)]E_0$	$[(\eta+1)^2/(4\eta)]E_0$

Рис. 3. Таблица изменений значений параметра и энергии двухмасштабной системы с релаксацией, соответствующая циклу А-В-С-D-А1 на рис. 1, в

параметр претерпевает некоторое адиабатическое изменение. В простейшем случае его значение остается постоянным (участок В-С на рис. 1, в). В это время происходит релаксация и перераспределение энергии между двумя подсистемами. Поскольку полная энергия системы при этом не меняется, $E^{(C)}=(\eta+1)E_0/2$, энергия каждой подсистемы в точке С станет равна $(\eta+1)E_0/4$. Затем на участке С-Д параметр подсистемы 1 неадиабатически для всей системы (но адиабатически для подсистемы 1) уменьшается в η раз. Согласно нашей гипотезе об адиабатическом инварианте энергия подсистемы 1 при этом также уменьшается в η раз и в точке Д станет равна $(\eta+1)E_0/(4\eta)$. Энергия подсистемы 2 при этом не успевает измениться, а полная энергия будет равна $E^{(D)}=(\eta+1)E_0/(4\eta)+(\eta+1)E_0/4=(\eta+1)^2E_0/(4\eta)$. И, наконец, на участке Д-А1 происходит равное распределение энергии между подсистемами без изменения полной энергии. В результате в точке А1 имеем: энергии подсистем равны $(\eta+1)^2E_0/(8\eta)>E_0/2$, полная энергия системы $E^{(A1)}=(\eta+1)^2E_0/(4\eta)>E_0$.

Таким образом, в результате двухмасштабного циклического изменения параметра полная энергия системы увеличилась в $(\eta+1)^2/(4\eta)>1$ раз. Ясно, что при непрерывных двухмасштабных осцилляциях параметра энергия системы будет экспоненциально расти. Это и есть ДГР. Инкремент этого роста будет равен

$$\chi = \ln[(\eta+1)^2/(4\eta)]/T > 0, \quad (7)$$

где T - характерный период осцилляций параметра. Свойства (I)-(III) п. 1.1 также следуют непосредственно из (7) и проведенных здесь рассуждений. Свойство (II) имеет место при $\eta \rightarrow 1$. Действительно, полагая $\eta=1+\delta$, $\delta \ll 1$, из (7) получаем $\chi \approx \delta^2/(4T)$, что подтверждает сделанный выше вывод о пропорциональности инкремента квадрату малой амплитуды.

2. Простейшая одномасштабная система - классический осциллятор

Как известно, многие физические модели и теории, претендующие на некоторую общность, проверяются сначала на своего рода элементарном кирпичике теоретической физики - классическом осцилляторе. Наша работа не будет исключением.

2.1. Общий случай. Рассмотрим уравнение классического гармонического осциллятора

$$x'' + \omega^2 x = 0, \quad (8)$$

в котором роль параметра играет собственная частота $\mu \equiv \omega$. Полная энергия осциллятора записывается в виде

$$E = (x'^2 + \omega^2 x^2)/2 \quad (9)$$

(массу осциллятора полагаем равной единице). Общим решением уравнения (8) при постоянной частоте является

$$x = a \cos(\omega t + \varphi), \quad (10)$$

где a и φ - соответственно амплитуда и фаза решения, задаваемые начальными условиями задачи. Подставляя (10) в (9), получим

$$E = a^2 \omega^2 / 2. \quad (11)$$

Рассмотрим дифференциалы энергии осциллятора при адиабатическом и неадиабатическом изменениях параметра и сравним их с моделью п. 1.1.

Пусть частота в некотором интервале времени изменяется адиабатически, значения энергии и частоты в начале интервала – E_0 и ω_0 , соответственно. При адиабатических изменениях параметра в гамильтоновой осцилляторной системе сохраняется определенная комбинация амплитуды решения и значения параметра, называемая адиабатическим инвариантом (см., например, [1, 7]). В данном случае адиабатическим инвариантом является величина

$$I = E/\omega \approx E_0/\omega_0. \quad (12)$$

Из (12) запишем адиабатический дифференциал энергии в виде

$$dE|_{\text{ad}} = (E_0/\omega_0)d\omega. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь неадиабатическое изменение частоты осциллятора. Предположим, что оно происходит с бесконечным временным градиентом ($\varepsilon=\infty$), что соответствует скачку параметра. При этом мы должны гладко сшить решения до и после скачка. Условием сшивания является непрерывность значений x и x' . В результате изменение энергии (9) при скачке частоты будет равно

$$(E - E_0)|_{\text{nonad}} = x^2(\omega^2 - \omega_0^2)/2, \quad (14)$$

где E_0 и ω_0 – значения соответственно энергии и частоты в начале скачка. Тогда, используя (10) и (11), получим из (14)

$$E|_{\text{nonad}} = E_0[1 + (\omega^2 - \omega_0^2)\cos^2\varphi_0/\omega_0^2], \quad (15)$$

где φ_0 – значение фазы решения в момент скачка параметра. Дифференцируя теперь выражение (15), получим

$$dE|_{\text{nonad}} = (2E_0\omega/\omega_0^2)\cos^2\varphi_0 d\omega. \quad (16)$$

Заметим, что при неадиабатическом изменении частоты изменение энергии, зависит, в отличие от (2), не только от значений энергии и параметра, но еще и от фазы решения в момент скачка параметра. Тем не менее, адиабатический и неадиабатический дифференциалы энергии (13) и (16) имеют различный вид, как мы и предполагали в п. 1.1, и это определяет разницу адиабатической и неадиабатической эволюции системы. Выражения (13) и (16) описывают два семейства кривых в плоскости $(dE/d\omega, \omega)$: адиабатическим изменениям частоты соответствуют отрезки прямых, параллельных оси абсцисс; неадиабатическим – отрезки прямых, проходящих под разными углами через начало координат.

На самом деле для возникновения ДГР в адиабатических изменениях параметра нет необходимости. Подобно тому, как для неадиабатических изменений параметра мы рассматривали для простоты предельный случай мгновенного скачка ($\varepsilon=\infty$), положим, что адиабатические изменения параметра происходят предельно медленно, то есть с нулевой скоростью $\varepsilon=0$. Это означает просто постоянство параметра на любом конечном интервале адиабатических изменений (см. рис. 1, 2). Рассмотрим возникновение ДГР и инкремент решений осциллятора при таком «предельно двухмасштабном» изменении частоты.

Используя (15) и учитывая, что энергия системы не меняется при постоянном значении параметра, получаем выражение для энергии осциллятора после N двухмасштабных циклов

$$E_N = E_0 \prod_{i=1}^N [1 + (\omega_1^2 - \omega_0^2)\cos^2\varphi_i/\omega_0^2][1 + (\omega_0^2 - \omega_1^2)\cos^2\varphi'_i/\omega_1^2], \quad (17)$$

где φ_i и φ'_i – фазы решения (10) в моменты скачков частоты соответственно от ω_0 к ω_1 и обратно. Значение энергии (17) существенно зависит от фаз решения в моменты скачков параметра. Однако, если мы рассматриваем ансамбль систем со случайными фазами или одну систему со случайными скачками параметра в течение достаточно долгого времени, то по фазам можно провести усреднение.

Как будет ясно из дальнейшего, в результате ДГР решение экспоненциально растет, поэтому усреднять по фазам надо логарифм энергии. Из (17) в результате усреднения по φ_i и φ' имеем

$$\langle \ln E_N/E_0 \rangle = 2N \ln[(\omega_0 + \omega_1)^2 / (4\omega_0\omega_1)], \quad (18)$$

где использовано тождество

$$\langle \ln(1 + \alpha \cos^2 x) \rangle \equiv 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} \ln(1 + \alpha \cos^2 x) dx = 2 \ln\{[1 + (1 + \alpha)^{1/2}]/2\}.$$

Из (18) видно, что усредненный по фазам логарифм энергии линейно растет с числом двухмасштабных циклов. То есть энергия примерно экспоненциально растет со временем на интервалах, много больших времени одного цикла: $E \approx E_0 \exp(\chi t)$. Инкремент при этом равен

$$\chi = (2/T) \ln[(\omega_0 + \omega_1)^2 / (4\omega_0\omega_1)] = (2/T) \ln[1/(1 - A^2)] > 0, \quad (19)$$

где $T = t/N$ – средняя продолжительность одного двухмасштабного цикла. Здесь мы ввели относительную амплитуду модуляции параметра

$$A = (\omega_1 - \omega_0) / (\omega_1 + \omega_0) \in [0, 1). \quad (20)$$

Отметим, что выражение для инкремента ДГР в осцилляторе (19) с точностью до множителя 2 совпадает с формулой (7), полученной для совершенно другой системы. Свойства ДГР (I) и (II), сформулированные в п. 1.1, проверяются так же, как и для формулы (7). Свойство (III) при этом не корректно, так как мы рассматриваем систему со случайными фазами.

На рис. 4 приведены результаты численного моделирования ДГР в классическом осцилляторе и их сопоставление с аналитическими результатами. На рис. 4, а показана двухмасштабная зависимость частоты от времени, с помощью которой моделировался ДГР. Характерные времена связаны соотношениями $\delta t \ll 2\pi/\omega \ll T$, разделяющими малое неадиабатическое время скачков и большое адиабатическое время среднего периода. Период двухмасштабного цикла имеет неопределенность $\delta T > 2\pi/\omega_0$, что позволяет считать фазы решений в моменты скачков параметров случайными. Рис. 4, б демонстрирует траекторию изображающей точки системы в плоскости $(dE/d\omega, \omega)$. Заштрихована площадь, ограниченная контуром, соответствующим одному двухмасштабному циклу изменения $\omega(t)$. Как и предполагалось в п. 1.1, траектория представляет собой разворачивающийся спиралевидный контур, площадь которого с каждым витком увеличивается (ср. с рис. 2). Неадиабатическим скачкам частоты соответствуют согласно (16) участки контура, близкие к отрезкам прямых, проходящих через начало координат. При постоянной частоте изображающая точка системы покоится, а на малых участках максимальной кривизны функции $\omega(t)$ (см. рис. 4, а), где осуществляется переход между адиабатическим и неадиабатическим приближениями изменения частоты, величина $dE/d\omega$ сильно меняется при практически неизменной частоте. Этим участкам соответствуют участки контура, близкие к отрезкам вертикальных прямых. (В случае предельно двухмасштабного цикла (см. рис. 1, з), когда переход между адиабатичностью и неадиабатичностью происходит в одной точке, контур в плоскости $(dE/d\omega, \omega)$ становится разрывным и

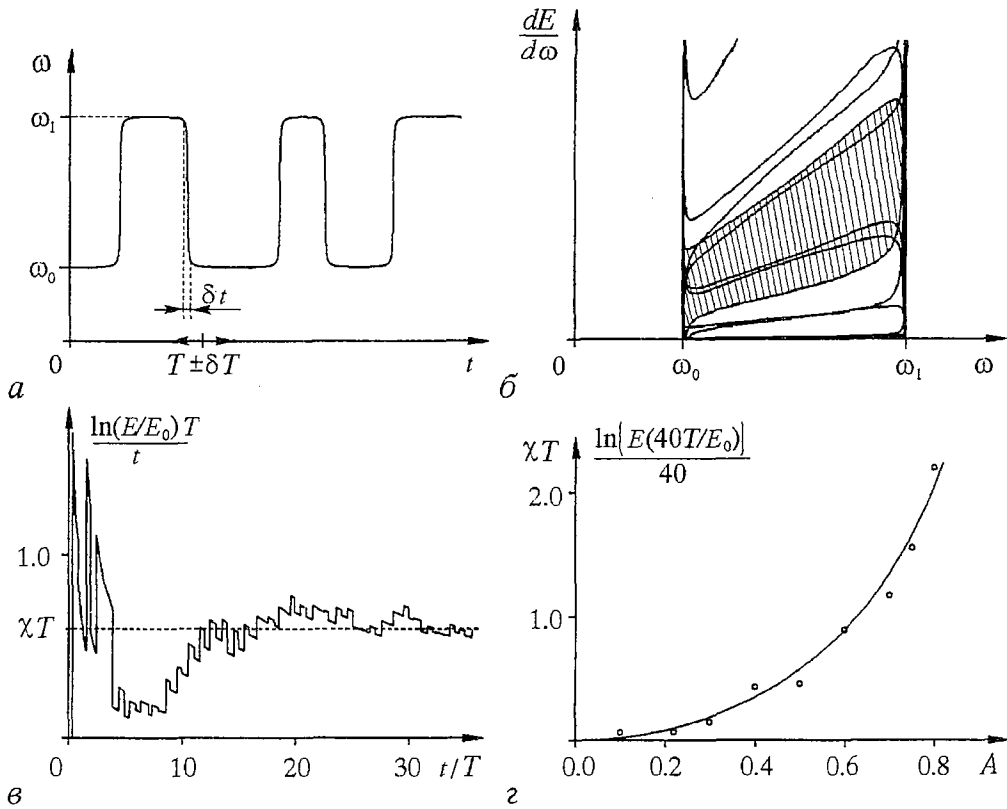


Рис. 4. Результаты численного моделирования ДГР в классическом осцилляторе

состоит только из отдельных отрезков прямых, проходящих через начало координат.) На рис. 4, в приведена зависимость эффективного инкремента роста энергии $\ln(E/E_0)/t$ от времени в безразмерных единицах периода T . Видно, что на временах порядка нескольких десятков периодов и больше эффективный инкремент близок к теоретическому, рассчитанному по формуле (19). Наконец, на рис. 4, г сравниваются зависимости теоретического инкремента (19) и эффективного инкремента роста энергии на сорока двухмасштабных периодах от относительной амплитуды модуляции параметра A . Видно, что формула (19) хорошо соответствует расчетам как при малых, так и при больших (когда A близко к единице) амплитудах. Отметим, что некоторые отклонения рассчитанных значений инкремента на рис. 4, в, г от теоретических (19) могут быть связаны с тем, что формула (19) получена в предположении случайности и равновероятности фаз решений при скачках параметра. При численном же моделировании обеспечивалась только случайность фаз, вероятность появления различных фаз имеет некоторую функцию распределения, отличную от константы.

2.2. Периодические двухмасштабные изменения параметра и переход к параметрическому резонансу. Как следует из предыдущего пункта, изменение энергии осциллятора при двухмасштабных вариациях частоты существенно зависит от соотношения фаз решения и изменения параметра. Мы оставили без внимания это свойство, считая эти соотношения случайными и проведя по ним усреднение. Если рассматривать строго периодические двухмасштабные изменения параметра, то соотношение фаз решения и параметра будут определенными. Тогда коэффициенты преобразования решений на одном периоде изменения частоты

(мультипликаторы) будут более сложным образом зависеть от амплитуды и периода изменений параметра.

Для описания такой ситуации по-прежнему рассматриваем «предельно двухмасштабные» изменения параметра (см. рис. 1, з), то есть мгновенные скачки частоты, между которыми она постоянна. В этом случае с помощью сшивания решений и их производных в моменты скачков частоты несложно найти мультипликаторы системы (эта задача решена, например, в [8])

$$\lambda_{1,2} = b \pm (b^2 - 1)^{1/2}, \quad (21)$$

$$b = \cos[(1+A)\tilde{\omega}T/2]\cos[(1-A)\tilde{\omega}T/2] - (1+A^2)/(1-A^2)\sin[(1+A)\tilde{\omega}T/2]\sin[(1-A)\tilde{\omega}T/2]. \quad (22)$$

Здесь использована относительная амплитуда A изменений параметра, введенная в (20); $\tilde{\omega}=(\omega_0+\omega_1)/2$ - средняя частота. Согласно теореме Флоке - Ляпунова, инкременты решений выражаются через мультипликаторы (21) как

$$\chi_{1,2} = (1/T)\ln|\lambda_{1,2}|. \quad (23)$$

Отсюда и из (21) видно, что решения будут обладать ненулевыми инкрементами при

$$|b| > 1. \quad (24)$$

Это условие, примененное к выражению (22), определяет области неустойчивости системы.

При малых амплитудах изменений параметра $A \ll 1$ из (22) получим

$$b \approx \cos\tilde{\omega}T + O(A^2).$$

Отсюда (см. (24)) заключаем, что неустойчивость может наблюдаться лишь вблизи

$$\tilde{\omega}T = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Таким образом, при малых амплитудах периодических двухмасштабных вариаций параметра неустойчивость представляет собой разновидность обычного параметрического резонанса. Однако по сравнению с классическим случаем параметрического резонанса, когда $\omega(t)$ является гармонической функцией, имеются и существенные отличия. Проиллюстрируем это несколькими рисунками.

На рис. 5 приведены области неустойчивости (они закрашены черным цветом) в полуполосе $(T, A) = (0, \infty) \otimes [0, 1]$ для рассмотренного случая предельно двухмасштабных изменений частоты (рис. 5, а, б) и случая гармонического параметрического резонанса, когда $\omega = \tilde{\omega}(1 + A \cos(2\pi t/T))$ (рис. 5, в, г).

При гармоническом параметрическом резонансе при фиксированной малой амплитуде A самой широкой является первая зона неустойчивости $T = \pi/\tilde{\omega}$, а с ростом периода T ширина зон экспоненциально убывает [14, 15]. При $T \rightarrow \infty$ отношение площади областей неустойчивости к полной площади полуполосы (T, A) стремится к нулю, $S_{inst}/S \approx 0$. Заметим, что при ДГР, когда нет фазовых соотношений, неустойчивость наблюдается при любых A и T , то есть $S_{inst}/S = 1$.

В случае периодических двухмасштабных изменений параметра ширина зон неустойчивости при фиксированной малой амплитуде не уменьшается с

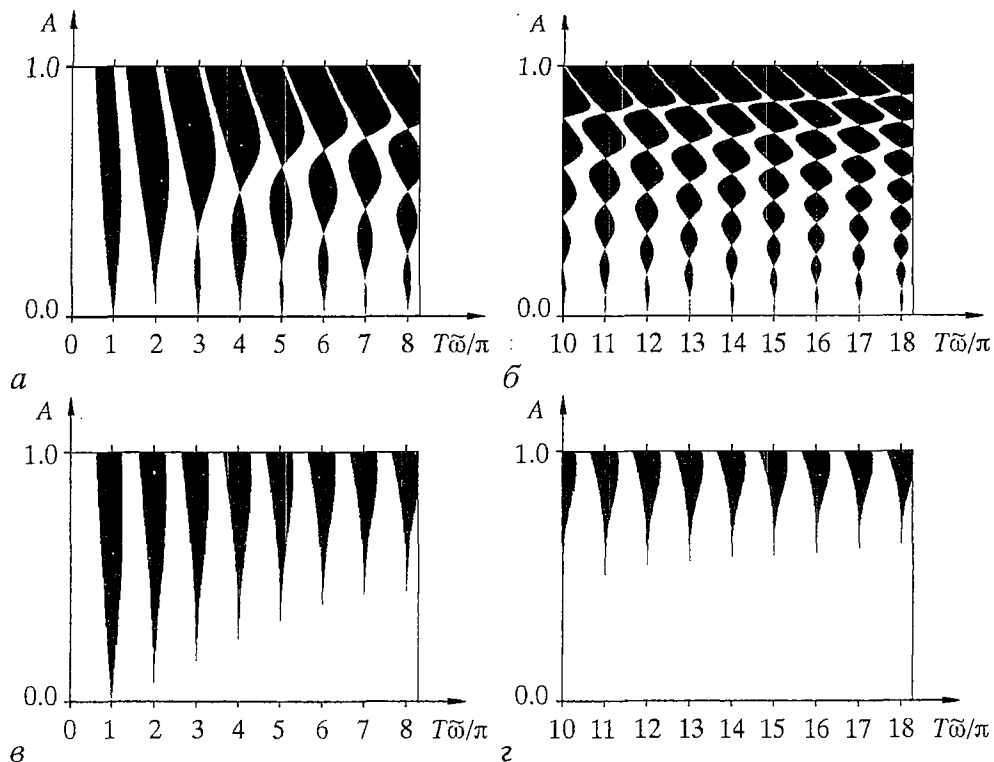


Рис. 5. Области неустойчивости классического осциллятора при периодических вариациях частоты: *а, б* - двухмасштабных; *в, г* - синусоидальных. По координатным осям отложены характеристики зависимости $\omega(t)$: по оси абсцисс - безразмерный период, где $\tilde{\omega}$ - среднее значение частоты; по оси ординат - безразмерная амплитуда $A \in [0,1)$

ростом периода (ширина нечетных зон $\Delta T \approx 2A/\tilde{\omega}$). Области неустойчивости изменяют свою форму, происходит перестройка их структуры, однако плотность, с которой они заполняют плоскость, остается примерно постоянной. Численно было найдено, что отношение площади областей неустойчивости к полной площади полуполосы (T, A) стремится к величине $S_{inst}/S \approx 0.44$.

Итак, плотность зон неустойчивости при периодических двухмасштабных вариациях частоты лежит между минимальным значением 0, соответствующим гармоническому параметрическому резонансу, и максимальным значением 1, соответствующим ДГР.

На рис. 6 показаны зависимости инкремента неустойчивости от периода при двухмасштабных и синусоидальных изменениях параметра для различных значений относительной амплитуды A . При синусоидальных вариациях частоты инкремент имеет резонансную пиковую структуру, огибающая которой экспоненциально уменьшается с ростом T (см., например, [15]). При двухмасштабных изменениях частоты зависимость произведения χT от периода T также имеет резонансную пиковую структуру, но с равными главными максимумами. То есть крупномасштабная огибающая этого графика ведет себя так, как было бы при ДГР: $\chi \sim T^{-1}$ - свойство геометричности (I) (см. п. 1.1).

Подытожим результаты проведенного выше сравнительного анализа плотностей зон неустойчивости и зависимостей инкремента от периода. Периодичность $\omega(t)$ обуславливает появление фазовых условий, которые приводят к резонансной структуре неустойчивости. Двухмасштабность $\omega(t)$ вызывает появление у нее геометрических свойств. В результате неустойчивость, возникающая при периодических двухмасштабных изменениях параметра, носит в

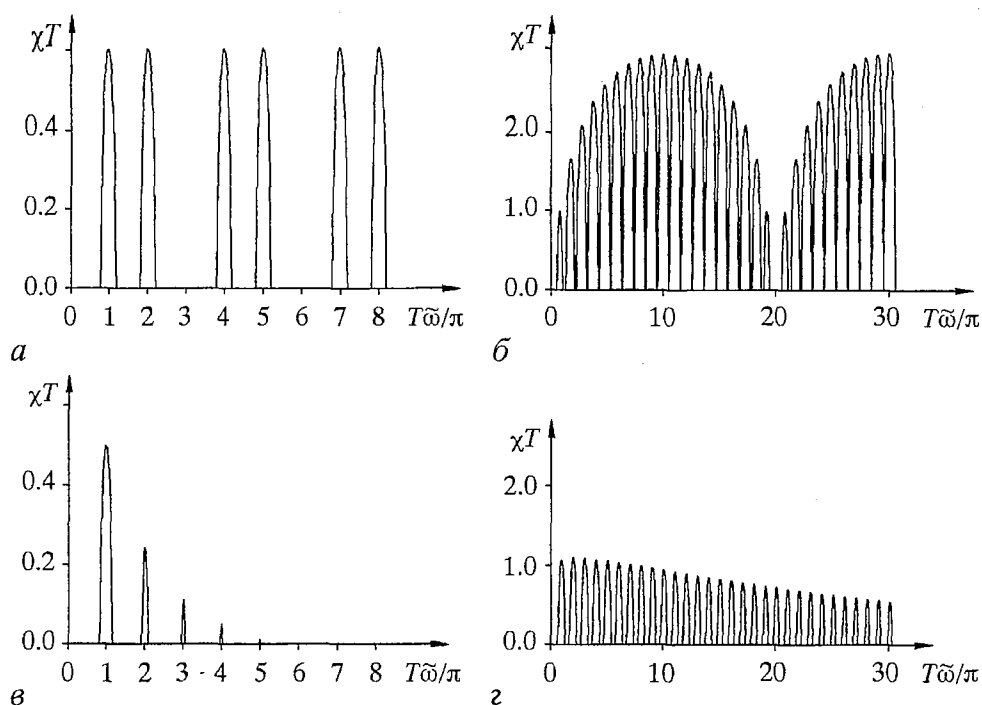


Рис. 6. Зависимости инкремента χ неустойчивости классического осциллятора от периода T вариаций частоты при двухмасштабных ($a, б$) и синусоидальных ($в, г$) зависимостях $\omega(t)$. Значение амплитуды A : $1/3$ ($a, в$); $9/10$ ($б, г$)

себе черты обоих явлений – гармонического параметрического резонанса и ДГР – и ее можно рассматривать как промежуточный случай между ними.

3. Двухмасштабные системы с релаксацией

В этом разделе рассмотрим проявления ДГР в системах с двумя характерными масштабами движения: быстрыми осцилляциями и медленной релаксацией. Покажем полную аналогию частных случаев с общей моделью п. 1.2 и увидим, что она описывает ДГР в таких различных системах, как нелинейный осциллятор и идеальный газ.

3.1. Уравнение Ван дер Поля. Простейшей двухмасштабной системой с релаксацией можно считать осциллятор с предельным циклом, описываемый уравнением Ван дер Поля

$$m\dot{x}'' - \beta\dot{x}' + \alpha x'^3 + kx = 0. \quad (26)$$

Заменой

$$y = (\beta/\sigma)^{1/2}x$$

уравнение (26) приводится к виду

$$y'' - \tau^{-1}(y' - y^3) + \omega^2 y = 0. \quad (27)$$

Здесь $\tau^{-1} = \beta/m$, $\omega^2 = k/m$. Асимптотическим решением уравнения (27) при $\tau^{-1} \rightarrow 0$ является (см., например, [2])

$$y \approx 2C \sin \omega t / [C^2 \omega^2 - (C^2 \omega^2 - 4)e^{-t/\tau}]^{1/2} + O(\tau^{-1}), \quad (28)$$

где C - константа интегрирования. Решение (28) содержит два движения с двумя разными масштабами: синусоидальные осцилляции с частотой ω и экспоненциальную релаксацию к предельному циклу с характерным временем τ . Полагаем

$$\tau \gg \omega^{-1},$$

тогда решение на предельном цикле при $C=2/\omega$ будет иметь вид

$$y^{(C)} = (2/\omega) \sin \omega t. \quad (29)$$

Предположим, что коэффициент k в исходном уравнении (26), а вместе с ним и частота ω в уравнении (27), совершают двухмасштабные осцилляции согласно модели п. 1.2 и рис. 1, в. То есть участки изменения частоты с характерным временем δt чередуются с участками, где частота постоянна в течение достаточно большого времени порядка T и для характерных времен выполнены условия (5) и (6).

Поскольку система с предельным циклом неконсервативна и ее энергия всегда стремится к постоянному значению на предельном цикле, мы не можем говорить об изменении энергии за счет двухмасштабных изменений параметра. Вместо этого подсчитаем работу, которую совершает над системой внешний источник, проводящий один двухмасштабный цикл изменения частоты.

Рассмотрим цикл А-В-С-D-A1 на рис. 1, в. Пусть вначале система находилась на предельном цикле, определяемом решением (29) с $\omega = \omega_0$. При скачке частоты на участке А-В благодаря соотношениям (6) можно пренебречь медленными релаксационными процессами и определить работу как изменение энергии обычного осциллятора при адиабатическом изменении частоты. Тогда, учитывая, что решение (29) имеет амплитуду $a=2/\omega$, из (11)-(13) получим

$$W_1 = \Delta E_1 = 2(\omega_1 - \omega_0)/\omega_0. \quad (30)$$

На следующем участке, В-С, система успевает благодаря (5) приблизиться к новому положению предельного цикла, определяемого решением (29) с $\omega = \omega_1$. Работа при этом, очевидно, не совершается. По аналогии с (30) вычисляется работа, совершаемая при скачке С-D,

$$W_2 = \Delta E_2 = 2(\omega_0 - \omega_1)/\omega_1. \quad (31)$$

На заключительном участке D-A1 система вновь релаксирует к исходному предельному циклу (29) с $\omega = \omega_0$. Полная энергия системы остается неизменной, а полная работа, совершенная внешним источником, изменявшим частоту системы, равна

$$W = W_1 + W_2 = 2(\omega_1 - \omega_0)^2 / (\omega_1 \omega_0) > 0. \quad (32)$$

Отметим, что работа, совершаемая при одном двухмасштабном цикле, не зависит от его периода. Кроме того, ввиду адиабатичности изменений частоты (второе неравенство (6)) совершаемая работа не зависит от фаз решения. Наконец, как несложно увидеть, при малых амплитудах осцилляций параметра работа (32) пропорциональна квадрату этой амплитуды. Налицо полная аналогия со свойствами геометричности (I)-(III) п. 1.1.

Этот результат можно трактовать в русле рассуждений, приведенных в п. 1.2, где рассматривались две релаксирующие подсистемы, составляющие одну консервативную систему. Предположим, что одна из подсистем - это конечная рассматриваемая система, а другая - бесконечно большая подсистема, *окружаю-*

щая среда. Тогда плотность энергии окружающей среды не меняется вследствие ее бесконечного размера, и энергия рассматриваемой системы всегда релаксирует к одному и тому же значению, определяющему равновесие с окружающей средой. В осцилляторе Ван дер Поля все происходит именно таким образом. Два средних члена уравнений (26), (27) описывают знакопеременное затухание, и предельный цикл определяет равновесие осциллятора с некоторыми внешними источниками энергии. Таким образом, можно говорить, что имеет место ДГР, выполнены все его свойства. Изменения же энергии мы не наблюдаем, потому что следим только за одной неконсервативной подсистемой, а полная система обладает бесконечно большой энергией.

Следующий пункт продемонстрирует правомочность и логичность такой трактовки результатов.

3.2 Идеальный газ. Рассмотрим систему, изображенную на рис. 7. Сосуд, заполненный идеальным газом, разделен на две части перегородкой, пропускающей тепло и не пропускающей частицы газа. Число частиц в двух частях газа равно N_1 и N_2 . Объемы двух частей сосуда равны V_1 и V_2 , причем объем первой части можно изменять с помощью перемещающегося поршня: $V_1 = V_1(t)$. Эта величина является параметром.

Очевидна полная аналогия этой системы с системой, рассмотренной в п. 1.2. Двумя подсистемами являются части газа в двух частях сосуда. Осцилляторное движение подсистем представляет собой движение молекул газа между стенками и имеет в данном случае случайный характер. Характерное время пролета частицы между стенками равно $\omega^{-1} = L/v$, где L - расстояние между стенками, а v - среднее значение модуля скорости частиц. Ясно, что величина ω^{-1} изменяется вместе с изменением объема газа. Во-первых, изменяется расстояние между стенками, а во-вторых, изменяется температура и среднее значение модуля скорости частиц в соответствии с уравнением состояния идеального газа. Таким образом, изменяя параметр системы, мы как и раньше изменяем характерную частоту колебаний в подсистеме. Релаксацией между двумя подсистемами является теплообмен между частями газа через перегородку. При этом, как известно, устанавливается равное распределение плотности энергии. Характерное время теплообмена $\tau \gg \omega^{-1}$.

Вычислим изменение состояния рассматриваемой системы при двухмасштабном изменении параметра V_1 в соответствии с рис. 1, в. Характерные времена τ и T удовлетворяют условиям (5) и (6). На участках А-В и С-Д изменения объема V_1 можно пренебречь теплообменом и считать, что вторая часть газа не меняет своего состояния, а первая изменяет свои характеристики в соответствии с уравнением адиабатического (в термодинамическом смысле) процесса

$$\Theta_1 V_1^{\gamma-1} = \text{const}, \quad (33)$$

где Θ - температура газа, а γ - показатель адиабаты. Выражение (33) является одновременно и адиабатическим инвариантом в механическом смысле для подсистемы 1. На участках В-С и D-A1 постоянства объема V_1 происходит теплообмен и устанавливается тепловое равновесие между двумя частями газа. Начальные и конечные значения величин связываются с помощью закона сохранения энергии. Учитывая, что энергия газа $E \sim N\Theta$, получим

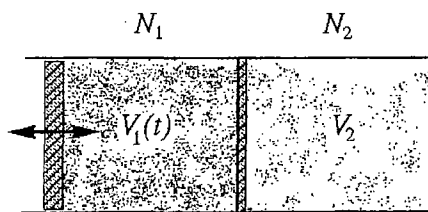


Рис. 7. Термодинамическая двухмасштабная система с релаксацией

$$N_1\Theta_1 + N_2\Theta_2 = \text{const.} \quad (34)$$

С помощью уравнений (33) и (34) для соответствующих участков процесса несложно получить значение температуры газа в конечной точке А1

$$\Theta^{(A1)} = \Theta^{(A)}[N_1N_2\eta^2 + (N_1^2 + N_2^2)\eta + N_1N_2]/[(N_1 + N_2)^2\eta] > \Theta^{(A)}. \quad (35)$$

Здесь $\Theta^{(A)}$ - начальная температура частей газа в точке А, $\eta = (V_{11}/V_{10})^{\gamma-1}$, а V_{10} и V_{11} соответственно минимальное и максимальное значения, между которыми изменяется параметр V_1 . При постоянных двухмасштабных осцилляциях объема V_1 температура системы будет экспоненциально расти с инкрементом

$$\chi = (1/T) \ln\{[N_1N_2\eta^2 + (N_1^2 + N_2^2)\eta + N_1N_2]/[(N_1 + N_2)^2\eta]\} > 0. \quad (36)$$

Очевидно, что мы имеем дело с ДГР и свойства (I)-(III) п. 1.1 несложно проверить, как и в предыдущих случаях. При $N_1 = N_2$ формула (36) совпадает с формулой (7), полученной в общей модели п. 1.2.

Рассмотрим другой предельный случай $N_2 \rightarrow \infty$. Тогда подсистема 2 играет роль бесконечной окружающей среды (мы говорили о таком подходе в конце предыдущего пункта). В этом случае температура (35) стремится к начальной, $\Theta^{(A1)} \rightarrow \Theta^{(A)}$, а инкремент (36) - к нулю, $\chi \rightarrow 0$. Это вполне понятно с физической точки зрения - температура есть полная энергия, деленная на полное число частиц, и при бесконечном числе частиц и конечных изменениях энергии ее изменение равно нулю. Тем не менее, полная энергия этой бесконечной системы все время растет. Подсчитаем работу, которую совершает за один двухмасштабный цикл внешний источник, изменяющий параметр V_1 . Она равна изменению полной энергии системы

$$W = \Delta E = (N_1 + N_2)(\Theta^{(A1)} - \Theta^{(A)}).$$

Подставляя (35), получим

$$W = \Delta E = [N_1N_2/(N_1 + N_2)]\Theta^{(A)}(\eta - 1)^2/\eta > 0. \quad (37)$$

При $N_2 \rightarrow \infty$ (37) принимает вид

$$W = \Delta E = N_1\Theta^{(A)}(\eta - 1)^2/\eta > 0. \quad (38)$$

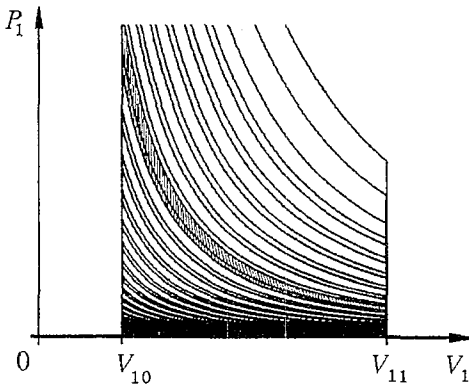


Рис. 8. Траектория изображающей точки термодинамической системы (рис. 7) в плоскости (P_1, V_1) . Движение происходит по спирали по часовой стрелке. Заштрихована площадь, ограниченная контуром, соответствующим одному двухмасштабному циклу изменения V_1

Видно, что эта формула с точностью до постоянного множителя совпадает с (32), полученной для осциллятора Ван дер Поля - системы, также находящейся в контакте с бесконечной окружающей средой. Заметим, что, поскольку при $N_2 \rightarrow \infty$ температура системы не меняется, $\Theta^{(A1)} = \Theta^{(A)}$, работа и полная энергия при непрерывных двухмасштабных осцилляциях параметра растут линейно во времени, а не экспоненциально.

В заключение приведем изображение рассмотренного процесса в плоскости (P_1, V_1) (рис. 8). Один двухмасштабный цикл состоит из двух адиабатических и двух изохорических

процессов. При конечном числе частиц двух частей газа контур, соответствующий одному двухмасштабному циклу, не замыкается и при дальнейших двухмасштабных осцилляциях разматывается спиральным образом (ср. с рис.2 и рис. 4, б). Работа и изменение энергии системы, как известно, равны $W = \Delta E = \int P dV$, то есть площади, ограниченной контуром в (P, V) -плоскости. В случае, когда одна из подсистем является бесконечной ($N_2 \rightarrow \infty$), контур, соответствующий одному двухмасштабному циклу, замыкается и в дальнейшем повторяет сам себя. Налицо полная аналогия с осцилляторными системами: моделью п. 1.1 (см. рис. 2) и классическим осциллятором (п. 2.1, рис. 4, б). Соответствие между плоскостью $(dE/d\mu, \mu)$ и (P, V) -плоскостью объясняет термодинамическое соотношение $P = -(\partial E / \partial V)_S$, где S - энтропия.

Заключение

Выше мы ввели понятие двухмасштабного геометрического резонанса как явления общего для динамических систем, привели ряд примеров и попытались создать общие модели для его описания. Является ли такой подход всего лишь новой формой описания уже известных явлений или за ним стоят более глубокие физические основания?

В пользу первого говорит то, что некоторые рассмотренные в статье задачи известны из других областей. Во-первых, уравнение осциллятора с периодическими скачками частоты (п. 2.2) хорошо известно в квантовой механике, физике твердого тела (модель Кронига - Пенни) [9-11] и оптике слоистых сред [12-14]. Оптические зоны непрозрачности и запрещенные зоны, получаемые в квантовой механике, являются зонами неустойчивости в нашем случае. Это связано с тем, что вместе с экспоненциально растущим всегда присутствует и экспоненциально затухающее решение, и в задачах с ограниченными решениями экспоненциально растущее решение отбрасывается как не удовлетворяющее граничным условиям. В оптике слоистых сред имеются и активные системы с пучками, в которых допускаются неограниченные решения и рассматриваемые зоны также являются зонами неустойчивости [17]. Для анализа этих задач применяются известные методы теории уравнений с периодическими коэффициентами. Во-вторых, уравнение осциллятора со случайными скачками частоты (п. 2.1) также использовалось для квантовой частицы и волновых возмущений в неоднородных средах. Отсюда известен эффект локализации Андерсона [18-20] - подобно тому, как мы отмечали экспоненциальный рост решений, в этом случае для волновой функции частицы оставляется решение с соответствующим экспоненциальным затуханием в пространстве: частица оказывается локализована. Эта задача решалась с помощью теории уравнений со случайными коэффициентами [21].

Задачи с двухмасштабным изменением параметра в осцилляторе Ван дер Поля (п. 3.1) и в системе с идеальным газом (п. 3.2), по-видимому, не рассматривались ранее. Кроме того, до сих пор не было предпосылок к рассмотрению приведенных задач в одном русле, сложно было найти между ними что-либо общее. Так же и методы, применяемые в одном типе задач, малопригодны для другого. Вряд ли имеет смысл рассчитывать изменение температуры в несложной термодинамической системе с помощью методов теории уравнений со случайными коэффициентами и сравнивать результаты с решением уравнения осциллятора.

Между тем, общность рассмотренных задач несомненно имеет место. В этих задачах при подобных двухмасштабных вариациях энергоемкого параметра

решения обнаруживают экспоненциальный рост. Запишем эффективный инкремент (36) роста температуры в термодинамической системе в виде

$$\chi = (1/T) \ln\{1 + \xi/(\xi + 1)^2 (\eta - 1)^2/\eta\} > 0. \quad (39)$$

Напомним, что здесь T - характерный период изменения параметра $V_1^{\gamma-1}$, η - отношение максимальной на периоде величины параметра к минимальной, а $\xi = N_2/N_1$ - отношение чисел частиц в двух сосудах. Если положить $\xi=1$, то формула (39) с точностью до множителя 2 соответствует формуле (19) - инкременту ДГР в осцилляторе, где роль параметра η играет собственная частота ω . Если задать $\xi \rightarrow \infty$, то рассматривая работу, пропорциональную $N_1(\xi+1)(\exp(\chi T)-1)$, из (39) с точностью до постоянного множителя можно получить выражение (32), описывающее ДГР в осцилляторе Ван дер Поля (в этом случае роль одного из сосудов играет бесконечная окружающая среда).

Таким образом, в столь разных задачах неустойчивость при двухмасштабных изменениях параметра описывается фактически одной и той же формулой! А учитывая нетривиальный вид формулы (39), трудно допустить случайность такого совпадения. Это дает основание считать универсальной физическую природу эффекта. Она, по-видимому, связана с различием в эволюции систем при адиабатических и неадиабатических изменениях параметра. Мы предложили вариант описания ДГР в рамках некоторой геометрической структуры, возникающей на расширенном фазовом пространстве. Как в осцилляторе, так и в системе с идеальным газом изменение энергии при ДГР можно представить в виде контурного интеграла в плоскости $(dE/d\mu, \mu)$ и получить отсюда основные свойства (I)-(III) эффекта. В целом, предложенный нами формализм лежит в русле разнообразных геометрических методов, получивших широкое применение в теории динамических систем. Геометрический язык в теории резонансов и неустойчивостей представляет собой альтернативу формальному алгебраическому языку Фурье-компонент и, кажется, в некоторых случаях адекватнее отражает физическую суть явлений.

Можно надеяться, что введение понятия ДГР, с одной стороны, позволит по-новому взглянуть на многие задачи с параметрами, выявить структуры, определяющие их эволюции, а с другой стороны, поможет предсказать новые физические явления - возникновение неустойчивостей при двухмасштабных вариациях параметров в различных системах. В заключение отметим, что нам нигде не встречалось описание системы, рассмотренной в п. 3.2, где при ограниченных перемещениях поршня наблюдается неограниченный рост температуры. Возможно, такой недиссипативный механизм перевода механической энергии в тепловую представляет отдельный интерес.

Библиографический список

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
2. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
3. Веницкий С.И., Дербов В.Л., Дубовик В.М., Марковски Б.Л., Степановский Ю.П. Топологические фазы в квантовой механике и поляризационной оптике // УФН. 1990. Т. 160. С. 6.
4. Bliokh K.Yu. The appearance of a geometric-type instability in dynamic systems with adiabatically varying parameters // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. Vol. 32. P. 2551.
5. Bliokh K.Yu. Geometric amplitude, adiabatic invariants, quantization and strong stability of Hamiltonian systems // J. Phys. A: Math. Gen. 2001 (to be published).
6. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.
7. Бакай А.С., Степановский Ю.П. Адиабатические инварианты. Киев: Наукова думка, 1981.

8. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1980.
9. Kronig R. de L., Penney W.G. Quantum mechanics of electrons in crystal lattices // Proc. Roy. Soc. A. (London). 1931. Vol. 103. P. 499.
10. Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
11. Зеегер К. Физика полупроводников. М.: Мир, 1977.
12. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: Издательство иностранной литературы, 1959.
13. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.
14. Элаши Ш. Волны в активных и пассивных периодических структурах // ТИИЭР. 1976. Т. 64. С. 12.
15. Bell M. A note on Mathieu functions // Proceedings of the Glasgow Mathematical Association. 1957. Vol. 3. P. 132.
16. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая механика. М.: Наука, 1965.
17. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. М.: Наука, 1989.
18. Anderson P.W. Absence of diffusion in certain random lattices // Phys. Rev. 1958. Vol. 109. P. 1492.
19. Займан Дж. Модели беспорядка. М.: Мир, 1982.
20. Пастур Л.А., Фиготин А.Л. Случайные и почти периодические самосопряженные операторы. М.: Наука, 1991.
21. Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990.

Радиоастрономический институт
НАН Украины,
Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию 30.11.2000

TWO-SCALE GEOMETRIC RESONANCE: from parametric resonance in oscillator to thermodynamic cycles

K.Yu. Bliokh, O.V. Usatenko

Influence of two-scale variations of parameters on the behavior of different dynamic systems is considered. Parametric instability is discovered under these conditions. We call it «two-scale geometric resonance». It can be described with the help of certain geometric structures on the extended phase space. Two-scale geometric resonance possesses similar properties and it is described in similar ways in seemingly absolutely different systems. General models are presented in the paper for the two-scale geometric resonance description and specific examples are considered: classical oscillator, Van der Pol oscillator and thermodynamic system with ideal gas.



Usatenko Oleg Viktorovich - родился в городе Валуйки (1946). Окончил физический факультет Харьковского государственного университета (1969). Работает на кафедре теоретической физики ХГУ, а с недавнего времени в Институте радиофизики и электроники НАН Украины. Защитил кандидатскую диссертацию «Длинноволновые возбуждения в металлах со сложной поверхностью Ферми» (1978). В 1984 - 1987 годах преподавал в университете Константины, Алжир. В 1994 - 1996 годах был приглашенным профессором университета Ниццы, Франция. Область научных интересов: нелинейная динамика и волны, динамические системы с адиабатически изменяющимися параметрами, спектры квазипериодических систем, физическая лингвистика, финансовые модели и эконофизика. Имеет более 40 публикаций.



ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ Сборник задач

А.П. Кузнецов, А.Г. Рожнев, Д.И. Трубецков

© Центр «Интеграция», 2001
© Коллектив авторов, 2001

М.: Физматлит, 2001. 128 с.
ISBN 5-94052-023-5

В сборнике представлено более 200 задач по линейной теории колебаний и волн, охватывающих основные положения теории, математический аппарат, а также задачи на колебательные и волновые процессы из различных областей физики. Значительное внимание уделено таким важным разделам теории, как связанные колебания и волны, волновые неустойчивости, волны в жидкости, волны в диспергирующих средах. Задачи апробированы на семинарских занятиях по курсу теории колебаний и волн на физическом факультете, на факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета.

Для студентов и аспирантов физических и физико-технических специальностей вузов, а также для научных работников, интересующихся теорией колебаний и волн.

Предисловие

В своем замечательном эссе «Раздумья про раздумья» (Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 6. С. 67) М. А. Миллер, обсуждая сценарий познания, выделяет в нем решение разнообразных задач. «Задачи, с которыми приходится работать людям (и в физике, и вне ее), составляют как бы свой своеобразный «мирок», то есть созданное нашим воображением игровое пространство чуд и чудодейств (Wunder und Zauber), ловко переплетенное с пространством реальных движений, и мы иногда теряем ориентацию: кто кого первичнее («природнее»). ... Итак, мир задач... Имея в виду, прежде всего, физику (но в глубине сознания рассчитывая и на большее), я хотел бы различать: задачи на предсказания, задачи на свойства и задачи на сходства.»

Настоящий сборник вводит читателя в «мирок» задач, которые предлагались студентам физического факультета и факультета нелинейных процессов (Высший

колледж прикладных наук) Саратовского государственного университета (СГУ) при изучении общего курса лекций «Теория волновых процессов» и на семинарах по курсам лекций «Линейные колебания» и «Линейные волны».

В классификации М.А. Миллера в теории колебаний и волн больше всего задач на свойства, а еще больше на сходства. Среди задач на свойства в этой классификации выделяются задачи на устойчивость, задачи преобразования чего-то во что-то, задачи на оптимальность.

Сборник содержит задачи самого разного уровня – от очень простых, которые в принципе в состоянии решить школьник, до сложных, в чем-то напоминающих знаменитые задачи П.Л. Капицы и требующих фактически проведения небольшого научного исследования. Авторы специально не стали исключать простые задачи из сборника, памятуя высказывание Л.Д. Ландау, что «... для изучения чего-либо неважно, какие именно следует решать задачи, главное, чтобы их было достаточно много». Кроме того, доля таких задач невелика.

По мнению авторов, при решении задач, особенно по теории волн (методы исследования неустойчивостей, связанные волны, волны в ограниченных структурах), самым активным образом следует использовать компьютер. Ответом не обязательно должна быть аналитическая формула, это может быть, например, и результат решения трансцендентного уравнения или системы дифференциальных уравнений на компьютере. Кроме того, компьютер позволяет быстро представить результаты в наглядном графическом виде, например, на фазовой плоскости.

Ответы и решения приведены не для всех задач, а лишь для наиболее важных (с точки зрения авторов) – для изучения соответствующего раздела теории.

Составляя и решая приведенные задачи или находя их в других книгах (см. список литературы), авторы испытывали иногда эстетическое удовольствие от красоты и изящества некоторых решений. Если эти чувства разделят с авторами читатели, то книга выполнит свое предназначение.

В заключение авторы выражают благодарность А.А. Кузнецову и П.А. Гуменюку за помощь в подготовке решений задач.

Авторы

Содержание

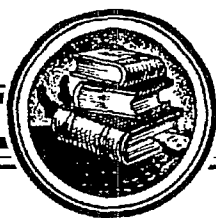
Предисловие

Задачи

Физические примеры осцилляторов. Период и частота колебаний. Свободный осциллятор. Вынужденные колебания. Неустойчивость. Фазовое пространство. Связанные колебания. Волновое уравнение. Дисперсия. Волновые пакеты. Эффект Доплера. Эффект Вавилова – Черенкова. Излучение волн. Волны на воде. Связанные волны и волновые неустойчивости. Волны в дискретных цепочках. Колебания и волны в ограниченных системах. Математическое дополнение.

Ответы

Список литературы



МЕТОДЫ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Н.А.Хованова, И.А.Хованов

© Н.А.Хованова, И.А.Хованов, 2001
© Оформление Д.В.Соколов, 2001
© Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2001

Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2001. 120 с., ил.
ISBN 5-900641-98-8

В учебном пособии излагаются методы анализа стационарных и нестационарных временных рядов, базирующиеся на теории случайных процессов и статистической радиофизике. Наряду с классическими подходами - вероятностным и спектральным - представлены специальные методы, основанные на применении преобразования Гильберта и вейвлет-анализа. Рассматриваются методы, используемые на этапах, предшествующих анализу временных рядов - основные методы сбора, обработки и предварительного анализа данных.

Пособие ориентировано на студентов и аспирантов естественно-научных специальностей университетов.

Введение

Во многих областях науки и техники перед исследователями стоит следующая задача: как на основе данных, полученных на конечном интервале времени или пространства, сформировать максимально достоверное представление об исходном образе, с которым связаны эти данные, то есть о его природе и основных характеристиках. Для решения этой задачи выработаны различные методы анализа данных, изучению которых посвящено пособие.

Анализ данных производится, главным образом, с применением компьютеров; исследователи выполняют, в основном, творческую работу - ставят задачи, выбирают методы их решения и интерпретируют полученные результаты. Данные, которые получают исследователи в результате проведенных наблюдений или экспериментов, могут быть непрерывными или дискретными. Для обработки на ЭВМ они должны быть представлены в дискретной форме, поэтому непрерывные данные дискретизируются по аргументу и превращаются во

временные ряды, если наблюдаемый процесс протекает во времени, или в случайные поля, если процесс развивается в пространстве. Под термином временной ряд понимают последовательность чисел, представляющих собой значения некоторого процесса в дискретные моменты времени. Эти значения измеряются обычно через равные промежутки времени. Если одновременно регистрируются несколько характеристик процесса, то говорят о многомерных временных рядах.

Природа временных рядов различна. Это могут быть данные наблюдений излучения, приходящего из космоса, медицинских и биологических сигналов, информационных потоков в сетях связи, колебательных и волновых процессов в радиофизических устройствах, поведения атмосферных и океанических течений, колебаний земной коры, динамики биологических популяций, показателей финансового рынка и т.п. Все перечисленные процессы порождаются принципиально различными системами или совокупностями систем, но могут быть изучены в рамках единого подхода, заключающегося в обработке экспериментальных данных методами анализа временных рядов. Однако выбор методов сбора, обработки и анализа данных наблюдений в значительной степени зависит от того, какое физическое явление представляет изучаемый процесс, и от целей, которые достигаются обработкой.

Данные, полученные в результате наблюдения реального физического явления, могут рассматриваться как детерминированные либо как случайные.

Детерминированные процессы - это процессы, которые можно описать явными математическими формулами. К ним относятся, например, колебания математического маятника, изменение потенциала между обкладками конденсатора по мере его зарядки или разрядки и т.п. Однако в формировании любого процесса участвует огромное количество факторов, которые невозможно учесть полностью; эти факторы рассматриваются как случайные (неконтролируемые) источники, порождающие недетерминированную (случайную) составляющую процесса. Поэтому общим подходом является анализ процессов в природе и технике как случайных. Именно такие процессы мы будем рассматривать, а понятие реализация случайного процесса будем в дальнейшем отождествлять с понятием временной ряд.

Анализируя временной ряд, исследователи, как правило, не знают его природу, поэтому, прежде всего, стараются разделить анализируемый ряд на детерминированную и случайную составляющие.

Далее обычно при изучении временных рядов ставятся следующие цели: описание характерных особенностей ряда; подбор математических моделей анализируемого временного ряда; предсказание будущих значений процесса на основе его предыстории (прошлых наблюдений); управление процессом, порождающим временной ряд.

Наиболее общим подходом является представление временного ряда в виде последовательности случайных величин. В этом случае для анализа вероятностных свойств процесса применяют методы статистической обработки данных - вероятностные методы анализа, которые являются универсальными и могут применяться к данным различной природы. Другим классическим подходом обработки данных является их спектральный анализ, то есть оценка гармонического состава процесса (спектра) по данным конечной протяженности. Качество оценки спектра оказывает решающее влияние при формировании наших представлений об исходном явлении.

Изучению вероятностных методов и методов спектрального анализа, которые являются классическими, посвящена первая часть пособия. Помимо классических методов, очень часто, учитывая специфику временного ряда и изучаемого явления, приходится применять специальные методы, рассмотрению

которых посвящена вторая часть пособия. Специальные методы используются, например, в тех случаях, когда необходимо провести анализ процесса с меняющимися во времени характеристиками или перейти к другому, более информативному представлению исходного временного ряда, раскладывая его на составляющие. К таким методам относятся, в частности, преобразование Гильберта и вейвлет-преобразование. В третьей части пособия рассматриваются методы, используемые на этапах, предшествующих анализу данных, основные методы сбора, обработки данных и предварительного анализа, при этом внимание уделяется вероятным источникам ошибок.

Первая часть пособия написана Н.А. Ховановой, вторая и третья - И.А. Ховановым.

Авторы искренне признательны доценту кафедры радиофизики и нелинейной динамики Т.Е. Вадивасовой за полезные дискуссии и ценные замечания по затронутым в пособии вопросам.

Оглавление

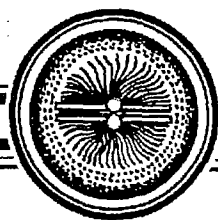
Введение

- 1. Классические методы анализа временных рядов.** 1.1. Вероятностные методы. 1.1.1. Некоторые понятия теории случайных процессов. Классификация случайных процессов. 1.1.2. Плотность вероятности. 1.1.3. Вычисление плотности вероятности. 1.1.4. Среднее значение и дисперсия. 1.1.5. Вычисление среднего значения и дисперсии. 1.1.6. Ковариационные и корреляционные функции. Коэффициент корреляции. 1.1.7. Вычисление ковариационных и корреляционных функций. 1.2. Спектральный анализ. 1.2.1. Преобразование Фурье и его основные свойства. 1.2.2. Эффекты, обусловленные конечной длиной реализации. 1.2.3. Непрерывно-дискретное преобразование Фурье. Теорема Котельникова. 1.2.4. Дискретное преобразование Фурье. 1.2.5. Быстрое преобразование Фурье. 1.2.6. Эффект утечки. Оконные функции. 1.2.7. Функция спектральной плотности. 1.2.8. Функция когерентности. 1.2.9. Вычисление спектральной плотности. 1.2.10. Параметрический спектральный анализ.
- 2. Специальные методы анализа временных рядов.** 2.1. Методы сведения к стационарности. 2.2. Преобразование Гильберта. 2.3. Вейвлет-преобразование.
- 3. Общая схема анализа данных.** 3.1. Подготовка данных к анализу. 3.1.1. Редактирование данных. 3.1.2. Дискретизация. Ошибки маскировки частот и квантования. 3.1.3. Предварительная обработка данных. 3.2. Оценивание основных свойств реализаций. 3.3. Анализ данных. 3.3.1. Анализ отдельных реализаций. 3.3.2. Анализ ансамбля реализаций.

Литература

Приложение

*Заинтересованный читатель может заказать
учебное пособие наложенным платежом
по почте: 410601, Саратов, главпочтамт, а/я 3150, Лёвиной Н.Н.
по электронной почте: and@cas.ssu.runnet.ru
по телефону: (845-2) 52-38-64*



БИФУРКАЦИИ И ХАОС В РЕЛЕЙНЫХ И ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ж.Т. Жусубалиев, Ю.В. Колоколов

© Ж.Т. Жусубалиев, Ю.В. Колоколов, 2001

© Изд-во «Машиностроение-1», 2001

М.: Изд-во «Машиностроение-1», 2001, 120 с. Табл. 5, ил. 51, библиогр. назв. 93
ISBN 5-94275-003-3

Предисловие

Основная цель настоящей монографии состоит в том, чтобы представить новые результаты по исследованию хаотических колебаний в релейных и широтно-импульсных системах автоматического управления, поведение которых обычно описывается кусочно-гладкими дифференциальными уравнениями.

К настоящему времени известны три типичных бифуркационных сценария развития хаоса в диссипативных системах (см., например, [1–6]): последовательность бифуркаций удвоения периода цикла (сценарий Фейгенбаума), кризис периодических колебаний и переход к хаосу через перемежаемость (сценарий Помо – Манневилля) и различные варианты перехода к хаосу через возникновение и последующее разрушение квазипериодических колебаний (переход через разрушение двумерного тора или сценарий Рюэля – Такенса – Ньюхауса).

В кусочно-гладких динамических системах указанные механизмы далеко не исчерпывают все возможные сценарии перехода к хаосу. Существует гораздо более широкий класс бифуркационных явлений, пока еще не охваченных определенной классификацией, теоретический и численный анализ которых представляет чрезвычайно трудную задачу.

В имеющихся монографиях по теории нелинейных колебаний особенности перехода к хаосу и бифуркации в кусочно-гладких динамических системах остаются мало освещенными. Между тем, динамические системы указанного класса находят много приложений в различных задачах механики, радиофизики и электроники, теории колебаний и управления, силовой преобразовательной техники.

В книге сделана попытка систематизировать наиболее важные результаты, относящиеся к хаотическим колебаниям и бифуркациям в автономных и неавтономных кусочно-гладких динамических системах, содержащиеся, как правило, в отдельных статьях.

За последние годы выпущено много книг, посвященных фундаментальным и прикладным проблемам теории динамического хаоса (см., например, [1–11]). Более

широко, подробно и доступно основные математические положения, современное состояние теории колебаний и волн изложены в недавно вышедшей монографии [1] (см. также [2]), в которой с единой точки зрения рассмотрены колебательные и волновые процессы в системах различной физической природы.

Нельзя не упомянуть прекрасно написанную книгу [3] (см. также [4]), адресованную, в первую очередь, студентам старших курсов, аспирантам и молодым исследователям естественнонаучных, технических специальностей вузов, изучающих природу нелинейных явлений в физических, технических, биологических системах. В этой монографии изложены фундаментальные основы нелинейной динамики, включающие элементы теории динамических систем, теории устойчивости и бифуркаций и теории динамического хаоса. В книгу включены результаты исследований в области синхронизации и управления хаосом, по реконструкции динамических систем, стохастическому резонансу и синхронизации стохастических колебаний.

Авторы сознательно отказались от подробного изложения математических положений, основных определений и понятий теории динамического хаоса, отсылая читателя, который заинтересован в детальном их изучении, к указанным выше двум монографиям и к другим более специальным источникам (см., например, [6, 7, 11]).

Вместе с тем, такие важные вопросы, как методы поиска периодических движений и исследования их локальной устойчивости, бифуркации в автономных и неавтономных динамических системах с разрывными правыми частями, требуют специального рассмотрения. Там, где представлялось возможным, эти вопросы изложены в соответствующих разделах данной монографии, а также в публикации [11].

В *первой главе* численно и аналитически изучаются динамические режимы и бифуркации в отображении Хенона. В монографии эти материалы являются основой для последующих двух глав и предназначены, главным образом, для изучения основных свойств колебаний в релейной системе с гистерезисом и в системах управления с широтно-импульсной модуляцией, анализа структуры карты динамических режимов, типичных бифуркационных механизмов перехода от регулярных колебаний к хаосу.

Вторая глава, наиболее обширная, посвящена анализу бифуркаций и хаотических колебаний в релейной системе с гистерезисом. В качестве конкретного примера релейной системы с гистерезисом рассматривается транзисторный преобразователь постоянного напряжения, поведение которого описывается четырехмерной кусочно-линейной системой автономных дифференциальных уравнений. В плоскости параметров построены области режимов периодических и хаотических колебаний.

Изучаются закономерности возникновения различных предельных циклов, устанавливаются возможные их бифуркации, анализируются причины возникновения недегерминированных режимов.

В *третьей главе* изложены результаты исследований сложной динамики систем управления с широтно-импульсной модуляцией. В качестве базового объекта для исследований рассматривается транзисторный преобразователь постоянного напряжения с широтно-импульсной модуляцией, поведение которого описывается трехмерной кусочно-гладкой системой неавтономных дифференциальных уравнений. Исследование этой динамической системы сведено к изучению свойств трехмерного кусочно-гладкого отображения. Излагаются методы поиска периодических решений и анализа их локальной устойчивости. Основное внимание в разделе уделяется изучению синхронизации квазипериодических колебаний на двумерном торе через особые типы бифуркаций, которые принципиально не реализуются в гладких динамических системах.

Как известно, в динамических системах с разрывными правыми частями возможны специфические нарушения условий существования периодического движения, связанные с изменением числа участков фазовых траекторий, из которых сшивается траектория этого движения. Подобные нарушения топологической структуры фазового пространства получили название *C-бифуркаций* периодических решений [20] (приставка «C-» происходит от слова «сшивание»). В зарубежной литературе такие бифуркации получили название «*border-collision bifurcations*» [6].

Важно заметить, что *C-бифуркации* не являются общеизвестными, во всяком случае, в большинстве монографий по теории нелинейных колебаний, за исключением монографии М.И. Фейгина [20], они не рассматриваются.

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору А.Х. Гелигу и профессору С.Ф. Яцуну за детальное рецензирование книги, а также за ряд ценных замечаний, в значительной мере способствовавших улучшению ее содержания.

Литература

1. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит, 1997. 496 с.
2. Landa P.S. Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems. Kluwer Academic Publishers. 1996. 456 p.
3. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с.
4. Anishchenko V.S. Dynamical Chaos – Models and Experiments. Singapore: World Scientific, 1995. 392 p.
5. Fradkov A.L. Introduction to Control of Oscillations and Chaos. Singapore: World Scientific, 1998.
6. Chen G., Dong X. From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications. Singapore: World Scientific, 1998. 462 p.
7. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Singapore: World Scientific, 1998. 431 p.
8. Mosekilde E. Topics in Nonlinear Dynamics: Applications to Physics, Biology and Economic Systems. Singapore: World Scientific, 1996. 380 p.
9. Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems / Edited by Chen G. CRC Press, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. 2000. 401 p.
10. Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O. Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems. Kluwer Academic Publishers, 1999. 528 p.
11. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т., Колоколов Ю.В., Терехин И.В. К расчету локальной устойчивости периодических режимов в импульсных системах автоматического регулирования // АИТ. 1992. №6. С. 93.
12. Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е. Структура периодических орбит хаотической автоколебательной системы, описываемой разностными уравнениями второго порядка // Радиотехника и электроника. 1994. № 8–9. С. 1392.

Содержание

Предисловие

Глава 1. Динамика отображения Хенона. 1.1. Введение. 1.2. Разбиение плоскости параметров отображения Хенона на области периодических и хаотических колебаний. 1.3. Бифуркационный анализ отображения Хенона. 1.4. Выводы. Литература.

Глава 2. Хаотические колебания в динамике релейных систем автоматического управления с гистерезисом. 2.1. Введение. 2.2. Постановка задачи. Математическая модель релейной системы с гистерезисом. 2.3. Схема замещения и математическая модель четырехмерной релейной системы с гистерезисом. Двухпараметрический анализ динамических режимов. 2.4. Анализ картины ветвления. 2.5. О причинах возникновения недетерминированных режимов в релейной системе с гистерезисом. 2.6. Выводы. Литература.

Глава 3. С-бифуркации и хаотические колебания в системах управления с широтно-импульсной модуляцией. 3.1. Введение. 3.2. Схема замещения и математическая модель системы автоматического управления с широтно-импульсной модуляцией первого рода. Методы анализа динамических режимов. 3.3. Анализ областей существования резонансных циклов на двумерном торе. 3.4. Выводы. Литература

*Заинтересованный читатель может заказать у авторов книгу
наложенным платежом по электронной почте: cct@cafct.kursk.ru*

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина, Ж.А. Иванова*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136
Банковские реквизиты
р/с № 40603810900000000378 в ЗАО АКБРиР «Экономбанк» г. Саратова,
БИК 046311722, кор.счет банка 30101810100000000722

Подписка на I-ое полугодие 2002 года

по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498,
стоимость подписки на I полугодие 120 руб.
Подписка на весь год (240 руб.) по заявочным письмам
непосредственно в редакции.

Зарубежная подписка в России оформляется в ЗАО «МК-Периодика»
по адресу: 129110, Россия, Москва, ул. Гиляровского, 39
ЗАО «МК-Периодика».
Тел.: (095) 281-93-45, 284-50-08; факс: (095) 281-37-98.
E-mail: info@periodicals.ru

Правила подписки за рубежом на сайте: <http://www.periodicals.ru>

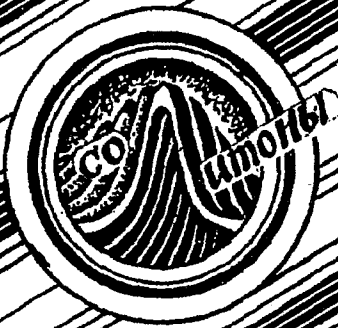
Сдано в набор 1.06.01. Подписано к печати 17.07.01. Формат 70x108/16
Бумага сыктывкарская. Печать плоская. Гарнитура Латинская
Усл. печ. л. 10,5(7,5). Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 200. Заказ 221

Издательство ГосУНЦ «Колледж». Лицензия ЛР №020773 от 15.05.98
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел. (845-2)523864, факс (845-2) 523864
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru
<http://cas.ssu.runnet.ru>

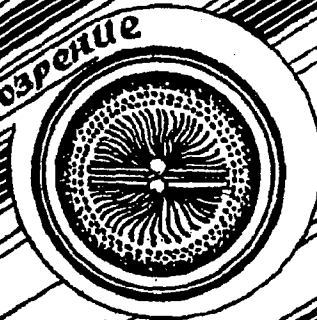
Отпечатано на ризографе GR 3750 издательства ГосУНЦ «Колледж»

© Издательство ГосУНЦ «Колледж» 

© Оформление художника Д.В. Соколова, 2001



Книжное обозрение



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



для студентов и преподавателей в журнале - методические заметки



Современной нелинейной динамики

БДУ!

Козма Прутков

