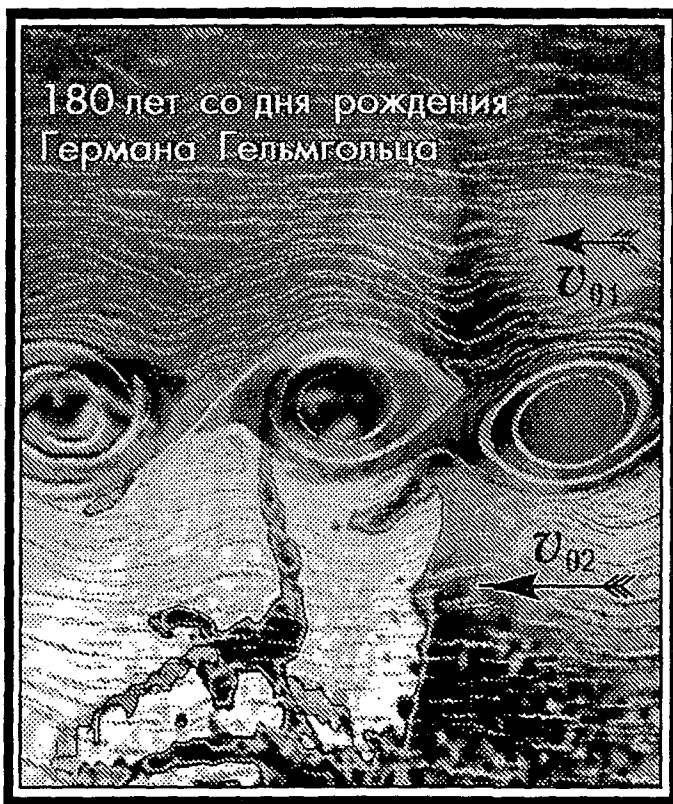


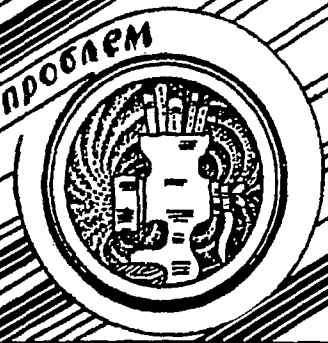
# Трикладная Деллинейная Динамика

180 лет со дня рождения  
Германа Гельмгольца





**Бифуркации  
в динамических  
системах различной природы**



**Обзоры актуальных проблем  
нелинейной  
динамики**



**Конференции, семинары, симпозиумы,  
аос**



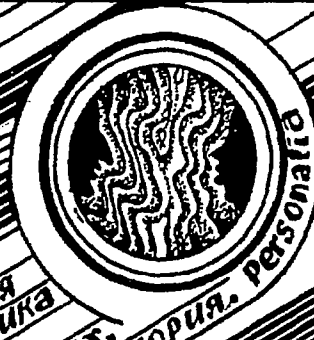
**детерминированный  
аос**



**Авто-  
волны,  
самоорганизация**



**Прикладные задачи  
нелинейной  
теории  
колебаний  
и волн**



**нелинейная  
динамика  
в лицах.  
История. персона**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

*Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва*

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**

*Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет*

*Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет*

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ**

*Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН*

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ**

*В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет*

*Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва*

*Б.А. Калинин, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет*

*В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пуцзино*

*С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН*

*П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет*

*Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет*

*Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород*

*Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный*

*В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет*

*В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет*

*В.К. Юлпатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород*

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

**ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 9, № 3, 2001, Саратов

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**

- Безручко Б.П., Диканев Т.В., Смирнов Д.А.* Глобальная реконструкция уравнений динамической системы по временной реализации переходного процесса . . . . . 3
- Постнов Д.Э., Сосновцева О.В., Сецинский Д.В., Борисов В.С.* Генерация и синхронизация стохастических колебаний в связанных возбудимых системах . . . . . 15
- Усанов Д.А., Вениг С.Б., Горбатов С.С., Труфакин Э.В.* Спектры выходного сигнала генератора на диоде Ганна в режиме НЧ и СВЧ-колебаний . . . . . 32
- Павлов А.Н., Зиганшин А.Р., Анищенко В.С.* Мультифрактальный анализ временных рядов . . . . . 39
- Бутковский О.Я., Кравцов Ю.А.* К вопросу о рациональном выборе интервала дискретизации процессов, в спектре которых имеется доминантная частота . . . . . 54

**ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС**

- Копейкин А.С., Матюшкин Д.Д., Вадивасова Т.Е., Сосновцева О.В., Анищенко В.С.* Эффекты синхронизации в цепочке стохастических бистабильных осцилляторов . . . . . 61
- Стольниц М.М., Пешикова А.Ю.* Математическая модель меланинового экрана, образующегося под действием ультрафиолетового излучения . . 73

**НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ**

- Нетребко А.В., Чичигина О.А.* Квазиравновесное распределение Больцмана . 85

**КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ**

- Rabinovich M.I., Rulkov N.F.* Nonlinear dynamics of dissipative systems: yesterday, today, and tomorrow . . . . . 96

**КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ**

- Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики . . . . . 119
- Управление риском: риск, устойчивое развитие, синергетика. . . . . 122
- Попов Ю.П.* Управление рисками и наука. Критический обзор: проблемы и перспективы . . . . . 124

**КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА**

- Трубецков Д.И., Рожнев А.Г.* Линейные колебания и волны . . . . . 128

- АНОНС . . . . . 31, 121

DEPARTMENT OF EDUCATION OF RUSSIAN FEDERATION

Izvestiya VUZ

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

scientific-technical journal

published since 1993

Published 6 times a year

Vol.9, № 3, 2001, Saratov

CONTENTS

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Global reconstruction of model equations from realizations of transients. *B.P. Bezruchko, T.V. Dikanev, D.A. Smirnov* . . . . . 3
- Noise induced oscillations and stochastic synchronization in coupled excitable systems. *D.E. Postnov, O.V. Sosnovtseva, D.V. Setsinsky, V.S. Borisov* . . . 15
- Output signal spectra of the Gunn-diode oscillator at the mode of LF and micro-wave oscillation. *D.A. Usanov, S.B. Wenig, S.S. Gorbatov, E.V. Trufakin* . . . . 32
- Multifractal analysis of time series. *A.N. Pavlov, A.R. Ziganshin, V.S. Anishchenko* . 39
- On the rational choice of discretization interval for processes with spectrum, containing dominant frequency. *O.Ya. Butkovskii, Yu.A. Kravtsov* . . . . . 54

DETERMINISTIC CHAOS

- Synchronization effects in an array of coupled bistable systems. *A.S. Kopeikin, D.D. Matjushkin, T.E. Vadivasova, O.V. Sosnovtseva and V.S. Anishchenko* . . 61
- Mathematical model of UV-induced melanin screen. *M.M. Stolnitz, A.Yu. Peshkova* . . 73

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Quasi-equilibrium Boltzmann distribution. *A.V. Netrebko, O.A. Chichigina* . . . . 85

CONFERENCES. MEETING. SYMPOSIUMS. SCIENTIFIC SCHOOLS

- Nonlinear dynamics of dissipative systems: yesterday, today, and tomorrow. *M.I. Rabinovich, N.F. Rulkov* . . . . . 96

BOOK REVIEW

- Contemporary problems of nonlinear dynamics. *G.G. Malinetskii, A.B. Potapov* . . 119
- Risk management: risk, sustainable development, synergetics . . . . . 122
- Risk management and science: critical review. *Yu.P. Popov* . . . . . 124

STUDENT'S BOOKSHELF

- Linear oscillation and waves. *D.I. Trubetskov, A.G. Rozhnev* . . . . . 128

- ANNOUNCEMENT . . . . . 31, 121



## ГЛОБАЛЬНАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО ВРЕМЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

*Б.П. Безручко, Т.В. Диканев, Д.А. Смирнов*

Проводится глобальная реконструкция по временным рядам дифференциальных и разностных уравнений, моделирующих объект в широкой области фазового пространства. Демонстрируется эффективность использования для этой цели временных реализаций неустановившихся движений (переходных процессов). Показано, что временные ряды переходных процессов имеют преимущества при реализации процедуры оптимизации структуры модели.

### Введение

Глобальной называют математическую модель, претендующую на описание объекта во всем фазовом пространстве (или в большей его части) в отличие от локальной, описывающей лишь малую окрестность некоторой точки. К настоящему моменту разработаны несколько эффективных подходов к глобальной реконструкции дифференциальных или разностных уравнений по экспериментальному временному ряду – конечному набору значений наблюдаемой переменной, измеренных в последовательные моменты времени [1–9]. Получаемые по временным рядам модели широко используются для целей прогноза [7,10], управления [3], классификации сигналов [11], передачи информации [12].

Обычно глобальные модели строятся по временным реализациям установившихся движений, соответствующих аттрактору в фазовом пространстве объекта. И такой подход представляется разумным, если необходимо осуществить прогноз поведения объекта после установления колебаний. Данная работа направлена на глобальное моделирование динамики объекта в целом, а не только определенного движения – на описание поведения во всем фазовом пространстве или значительной его части. Ее цель – показать на конкретных примерах, что при такой постановке вопроса успех реконструкции более вероятен при использовании нестационарных рядов – временных реализаций переходных процессов, когда изображающая точка в фазовом пространстве еще не достигла аттрактора. Подобные глобальные модели полезны в тех случаях, когда необходимо осуществить прогноз пути эволюции из произвольного начального состояния. Возможны и другие приложения, например, модель, построенная по временному

ряду, включающему переходный процесс, успешно применялась для вычисления ляпуновских показателей [13].

Произведено сравнение возможностей глобальных моделей, построенных по различным участкам временного ряда – содержащим и не содержащим переходный процесс. Исходя из цели работы, в качестве объектов выбраны наиболее показательные для иллюстрации эталонные диссипативные динамические системы (раздел 2) и использованы уже зарекомендовавшие себя подходы к реконструкции. Качество реконструкции оценивается сравнением функций, входящих в правые части исходной и восстановленной динамических систем (объекта и модели), а также через прогностические возможности восстановленной модели при различных начальных условиях (раздел 1).

В работе показано, что учет переходного процесса позволяет расширить область фазового пространства, в которой реконструируемые стандартными методами уравнения описывают динамику объекта (раздел 2), и приведена процедура оптимизации структуры модельных уравнений, в которой специфика исходного нестационарного временного ряда оказывается весьма плодотворной при выявлении лишних слагаемых (раздел 3). Полученные результаты обобщаются в заключении, где обсуждаются и ограничения на использование переходного процесса при моделировании.

## 1. Методика исследования

Наиболее употребительная схема глобального динамического моделирования по временным рядам состоит из трех следующих этапов.

1) Выбор структуры модельных уравнений, опираясь на априорную информацию, содержательные модели, результаты обработки ряда (например, оценку корреляционной размерности восстановленной по временному ряду фазовой траектории) и интуицию.

2) Преобразование исходного временного ряда в соответствии со сделанным выбором. Например, подавление шума, численное дифференцирование, интегрирование или другое преобразование скалярного временного ряда  $\{v_i\}_{i=1}^N$ ,  $v_i=v(t_i)$ ,  $t_i=i\Delta t$ ,  $i=1, \dots, N$ , и формирование ряда векторов состояния  $\{x_i\}$ .

3) Выделение из полученного ряда тренировочного участка (*окна реконструкции*); определение по нему коэффициентов модели; оценка ее качества по другой – тестовой части ряда с помощью критерия, определяемого целью моделирования.

Наше исследование затрагивает лишь третий этап – выбор места окна реконструкции в исходном ряде, обеспечивающего работоспособность модели в широкой области фазового пространства. Поэтому мы используем в качестве объектов эталонные дифференциальные уравнения и связанные отображения и строим модель в соответствии с их структурой; или полностью ее повторяем и при реконструкции ищем неизвестные коэффициенты; или при сохранении числа уравнений меняем лишь вид аппроксимирующих функций. Исходные временные ряды (дискретные последовательности значений одной из динамических переменных объекта) получают путем численного решения, при этом уровень шума незначителен и определяется лишь погрешностями численного метода и машинным округлением. Это позволяет уйти от решения сложных проблем двух первых этапов процедуры реконструкции и сосредоточиться на решении поставленной задачи<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> При моделировании реальных систем нельзя однозначно указать наилучшую структуру реконструируемых уравнений, кроме того, приходится решать проблему шумов. Это может оказать решающее влияние на успех моделирования и помешать оценке влияния на результат выбора места окна реконструкции, на что направлена данная работа.

В процессе исследования мы получаем модельные уравнения при различных положениях окна реконструкции на временном ряде. При этом в тренировочном ряде присутствует та или иная часть переходного процесса. Модели сравниваются с объектом с помощью следующих критериев качества:

- *непосредственное сопоставление* коэффициентов в уравнениях, как в разделе 2.1 (см. ниже), где структура модели полностью соответствует объекту;
- *погрешность аппроксимации*  $\varepsilon$ . Сравниваются функции, входящие в правые части уравнений объекта и модели ( $f_o$  и  $f_m$ ). Это имеет смысл только в том случае, когда исходные и модельные уравнения имеют схожую структуру. Так, в рассматриваемых ниже (разделы 2.2 и 2.3) примерах объект и модель имеют структуру

$$\dot{x} = y, \tag{1}$$

$$\dot{y} = f(x, y, t),$$

а погрешность аппроксимации  $\varepsilon$  определяется соотношением

$$\varepsilon = \iint_V [f_m(x, y, t) - f_o(x, y, t)]^2 dx dy dt. \tag{2}$$

Здесь  $V$  – область интегрирования, содержащая восстановленную фазовую траекторию (значительно более широкая, чем область аттрактора). Чем меньше значение  $\varepsilon$ , тем лучше модель;

- *дальность прогноза*  $\tau$  – длина временного интервала, на котором средняя ошибка предсказания достигает заданного значения. Значение  $\tau$  – усредненное по множеству начальных условий, границы которого далеко уходят за область аттрактора. Чем больше  $\tau$ , тем лучше модель.

Процедура исследования заключалась в следующем. Фиксировалась некото-

рая ширина *окна реконструкции* ( $M$  точек):  $\{v_i\}_{i=m}^{m+M-1}$ , где  $m$  – номер начальной точки. Значению  $m=0$  соответствует первая точка исходного временного ряда. При увеличении  $m$  окно реконструкции сдвигается по временному ряду в область установившихся движений. Модели восстанавливались при различных значениях  $m$ . Участок временного ряда, обеспечивающий наиболее эффективную модель, определялся по графикам зависимостей указанных выше критериев качества от  $m$ .

## 2. Примеры

### 2.1. Реконструкция многомодовой дискретной динамической системы.

Наличие более одного варианта установившихся движений (нескольких мод) характерно для динамических систем достаточной размерности. Временные ряды установившихся движений обычно соответствуют лишь одной моде<sup>2</sup> и могут не нести информации о пространственной конфигурации объекта. Например, при возбуждении синфазной (однородной) моды в системе идентичных связанных маятников каждый элемент движется так же, как если бы других элементов не было – то есть ряд не несет никакой информации о сложности системы. Однако временные ряды переходных процессов при установлении таких режимов могут нести в себе информацию о затухающих неоднородных модах и расширить возможности моделирования. Продемонстрируем это, используя в качестве объекта систему диссипативно связанных квадратичных отображений

<sup>2</sup> Исключением является режим перемежаемости.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + k(x_n^2 - y_n^2), \\ y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + k(y_n^2 - x_n^2), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $x, y$  – динамические переменные;  $k$  – параметр связи;  $\lambda$  – параметр неравновесности;  $n=0,1,2,\dots$  – дискретное время. Эта эталонная система характеризуется бесконечным числом регулярных и хаотических видов колебаний (вариантов синхронизации колебаний подсистем) и мультистабильностью [16–23]. Выберем значения параметров  $\lambda=1.8$ ,  $k=0.4\div 0.5$ , при которых в системе устанавливается синфазная хаотическая мода – когда  $x, y$  меняются во времени хаотически, но одинаково (имеет место хаотическая синхронизация). Заметим, что меньшим значениям  $k$  из выделенного интервала соответствует большая длительность переходных процессов по сравнению со значениями, близкими к 0.5. Это объясняется тем, что синфазная мода при выбранном значении  $\lambda$  устойчива лишь при  $k \geq 0.361$  [19], а вблизи бифуркационных значений параметра возмущения затухают слабее. Реконструкцию модельных уравнений будем проводить по ряду, начинающемуся с точки  $(x_0=0.1, y_0=0.2)$ , которая находится вне синфазного аттрактора. При этом рассмотрим различные варианты задания структуры модельных уравнений, исходных временных рядов и используемых критериев качества.

**2.1.1. Реконструкция по векторному ряду.** Реконструируем модельные уравнения в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda_1 - x_n^2 + k_1(x_n^2 - y_n^2), \\ y_{n+1} &= \lambda_2 - y_n^2 + k_2(y_n^2 - x_n^2), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, k_1, k_2$  – параметры, значения которых вычисляются по временному ряду. Воспользуемся для этого векторными рядами – последовательностями значений  $x_n$  и  $y_n$ , полученными при численном итерировании системы (3). Критерием качества модели в данном случае может служить совпадение значений коэффициентов связи  $k_1$  и  $k_2$  между собой и с  $k$ , а также  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  с  $\lambda$ . Так на рис. 1, где по оси ординат отложены восстановленные значения  $k_1$  и  $k_2$ , а по оси абсцисс – исходные значения коэффициента связи  $k$ , «правильным» значениям соответствует диагональ. То есть модели тем хуже, чем больше отклонения точек на рисунке от диагонали.

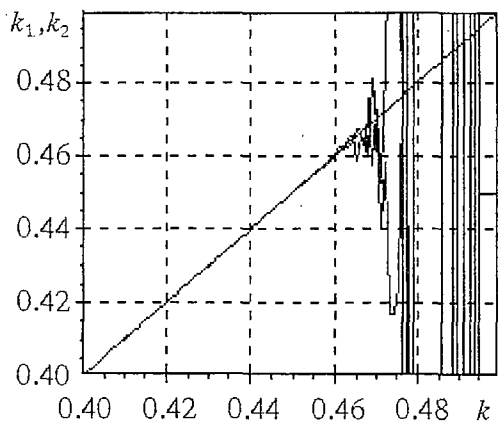


Рис. 1. Значения коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  модели (4), реконструированной по временным реализациям (3) для  $\lambda=1.8$  при различных  $k$ . Ширина окна реконструкции  $M=100, m=6$

Расчеты показывают, что результаты восстановления уравнений тем лучше, чем большую часть окна реконструкции занимает переходный процесс. Например, участок успешной реконструкции для  $m=6$  занимает на рис. 1 область лишь малых  $k$ , когда синфазный режим менее устойчив, а переходный процесс затягивается. В области больших  $k$ , где синфазное движение более устойчиво и протяженность переходного процесса уменьшается, результаты реконструкции значительно хуже (см. правую часть рисунка). Кроме того, зависимость коэффициентов модели от  $k$  становится существенно немонотонной. Последнее означает, что коэффициенты модели критичны к малым изменениям исходного временного ряда.



С уменьшением  $m$  до 0, когда доля переходного процесса среди точек ряда еще более существенна, уравнения успешно реконструируются во всем интервале выделенных на рисунке значений  $k$ , и наоборот, при существенном увеличении  $m$ , когда точки, соответствующие переходному процессу, перестают использоваться для реконструкции, область плохой реконструкции занимает почти весь рисунок.

**2.1.2. Реконструкция по скалярному ряду.** Усложним задачу реконструкции, перейдя к скалярному исходному временному ряду. Будем строить модели по временному ряду  $\{x_n\}$  объекта в виде

$$x_{n+1} = P(x_n, x_{n-1}), \quad (5)$$

где  $P(x_n, x_{n-1})$  – степенной полином, порядок (степень) которого подбирается в процессе моделирования. В качестве критерия качества модели используем значение времени предсказания  $\tau$ : чем больше  $\tau$ , тем лучше модель.

На рис. 2 представлены зависимости  $\tau$  от номера начальной точки  $m$  для модели (5). По графикам видно, что использование переходного процесса (уменьшение  $m$ ) приводит к повышению качества модели. Об этом же свидетельствует уменьшение интервалов  $m$  с хорошим предсказанием при уменьшении доли переходного процесса в исходном временном ряде. Кривой 2 соответствует больший, чем для 1, коэффициент диссипативной связи  $k$  в уравнениях объекта (3), при котором переходный процесс существенно короче.

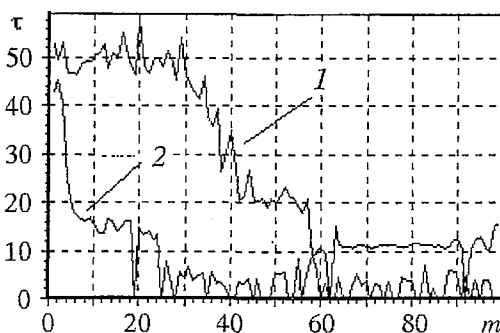


Рис. 2. Зависимость времени предсказания  $\tau$  модели (5) с полиномом степени 4 от номера начальной точки окна реконструкции  $m$  для значений  $k=0.2$  (кривая 1) и 0.3 (кривая 2). Ширина окна реконструкции  $M=100$

**2.2. Реконструкция системы с непрерывным временем.** Рассмотрим теперь пример реконструкции дифференциальных уравнений. В качестве объекта используем неавтономный осциллятор Тоды

$$\dot{x} = y, \quad (6)$$

$$\dot{y} = -0.1y - 1 + e^{-x} + \cos t.$$

Эта система представляет широкий класс нелинейных динамических систем, содержит экспоненциальную нелинейность и явную зависимость от времени. Скалярный временной ряд значений координаты  $x$  был получен путем численного интегрирования уравнений (6) методом Рунге – Кутты 4–го порядка с шагом 0.01. Начальные условия выбирались вне аттрактора, которым при данных значениях параметров является предельный цикл. Фазовая траектория, соответствующая исходному ряду, показана на рис. 3, а, где цифрами указаны номера некоторых точек (начальная имеет номер 0). Аттрактор расположен в области сгущения траекторий. По рисунку видно, что движения вблизи аттрактора занимают незначительную часть площади, охватываемой траекторией.

Структура модельных уравнений была выбрана в виде (1) с функцией

$$f(x, y, t) = P_n(x) + \gamma y + A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t), \quad (7)$$

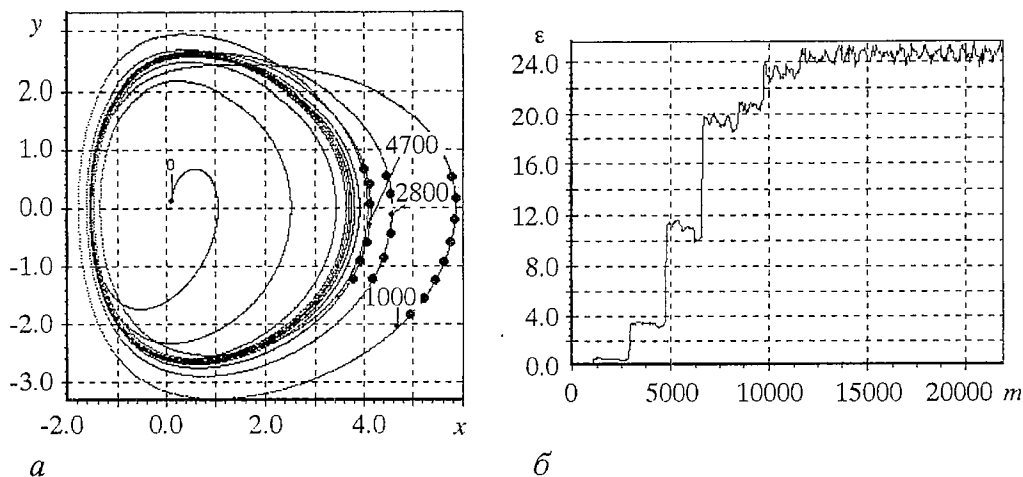


Рис. 3. *а* – фазовая траектория системы (6) при  $x(0)=y(0)=0.1$ , проекцией которой является исходный временной ряд; *б* – зависимость ошибки аппроксимации  $\epsilon$  от номера первой точки окна реконструкции  $m$ . Цифрами отмечены номера некоторых точек во временном ряде

где  $P_n(x)$  – полином. Использовалась технология реконструкции, опирающаяся на изложенную в разделе 1 схему и модернизированная для неавтономных систем [14,24,25]. По временному ряду определялись значения параметров  $\gamma, A, B, \omega$  и коэффициентов полинома.

На рис. 3, *б* приведена зависимость значения ошибки аппроксимации  $\epsilon$  от номера начальной точки окна реконструкции  $m$ . Ширина окна реконструкции  $M=2000$ , в то время как один характерный период колебаний содержит около 600 точек. Наилучшие модели получались при малых значениях  $m$  – при учете переходного процесса. Причем график  $\epsilon(m)$  имеет характерный «ступенчатый» вид, иллюстрирующий ценность того или иного участка ряда для целей глобальной реконструкции. Так, почти горизонтальные участки соответствуют выведению из тренировочного ряда точек из окрестности аттрактора, что свидетельствует об их малом влиянии на качество модели. Скачки между плоскими ступеньками на графике, на которых качество модели с ростом  $m$  быстро ухудшается, соответствуют исключению из тренировочного ряда точек, отмеченных на фазовом портрете (рис. 3, *а*) кружками. Эти точки принадлежат переходному процессу и наиболее удалены от аттрактора.

### 3. Использование переходного процесса для оптимизации структуры модели

Увеличение информации об объекте является не единственным поводом для использования переходных процессов при реконструкции модельных уравнений. Вторым не менее важным доводом за привлечение нестационарных данных является возможность их эффективного использования для оптимизации структуры модели (в нашем случае для борьбы с лишними членами в полиномах). Проиллюстрируем это на примере реконструкции уравнений осциллятора Ван дер Поля – Тоды

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (1-x^2)y - 1 + e^{-x} \end{aligned} \quad (8)$$

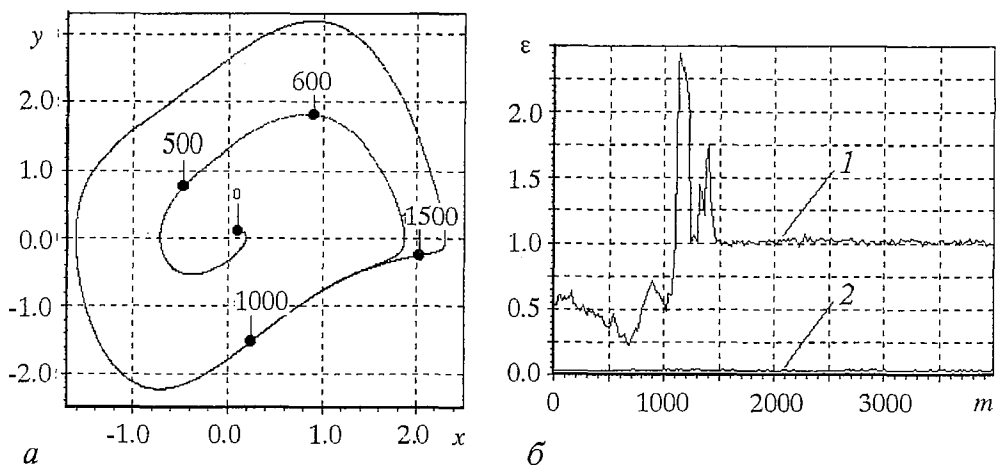


Рис. 4. *а* – фазовая траектория системы (8), проекцией которой является исходный временной ряд; *б* – зависимости ошибки аппроксимации  $\varepsilon$  от номера первой точки окна реконструкции  $m$  для модели {(1) и (9)} со стандартным полиномом 7-й степени (кривая 1) и модели вида {(1) и (10)} (кривая 2)

по скалярному временному ряду, которому соответствует фазовый портрет на рис. 4, *а*. Модель строилась в виде (1) в двух вариантах, отличающихся функциями  $f(x, y, t)$ . В первом случае использовался стандартный полином от двух переменных

$$f(x, y, t) = P_k(x, y) = \sum_{i+j \leq k} a_{ij} x^i y^j, \quad i+j \leq k. \quad (9)$$

Во втором – функция в виде

$$f(x, y, t) = (\lambda - x^2)y + P_n(x), \quad (10)$$

где  $P_n(x)$  – стандартный полином от одной переменной, аппроксимирующий экспоненту. Первая структура заведомо содержит множество «лишних» слагаемых (например, слагаемые с  $xy$ ,  $xy^2$ ,  $x^2y^2$ , ... и другие «не предусмотренные» вторым уравнением объекта (8)). В идеале, если полиномы бесконечны, а точность не ограничена, значения коэффициентов в «лишних» членах должны были бы получиться равными нулю. Но реально, из-за невозможности точной аппроксимации экспоненты конечным степенным рядом и ошибок округления, значения коэффициентов, рассчитанные по временному ряду, отличаются от нуля. Они подгоняются таким образом, чтобы удовлетворять используемому критерию качества модели в точках окна реконструкции. Однако вне этого окна, в тестовой части ряда, «лишние» слагаемые могут дать существенный вклад в результат и привести к значительным отличиям модели от объекта.

Сравним зависимости  $\varepsilon(m)$  для моделей {(1) и (9)} и {(1) и (10)} на рис. 4, *б*. Как и следовало ожидать, второй вариант моделирования, не обремененный «лишними» слагаемыми, дает на порядок лучший результат. Кроме того, здесь отсутствует зависимость  $\varepsilon$  от  $m$  (кривая 2), следовательно, использование переходного процесса не имеет здесь никаких преимуществ, то есть улучшение качества реконструкции достигается не за счет расширения посещаемой области фазового пространства, а вследствие уменьшения числа «лишних» слагаемых. Зато существенная зависимость  $\varepsilon$  от  $m$  присутствует при использовании первой модели {(1) и (9)}, которая изобилует «лишними» слагаемыми (кривая 1). Причем наиболее сильно это выражено при малых  $m$ , соответствующих переходным процессам, где колебания величины  $\varepsilon$  имеют большой размах.

Отмеченная немонотонность  $\varepsilon(m)$  объясняется существенной зависимостью

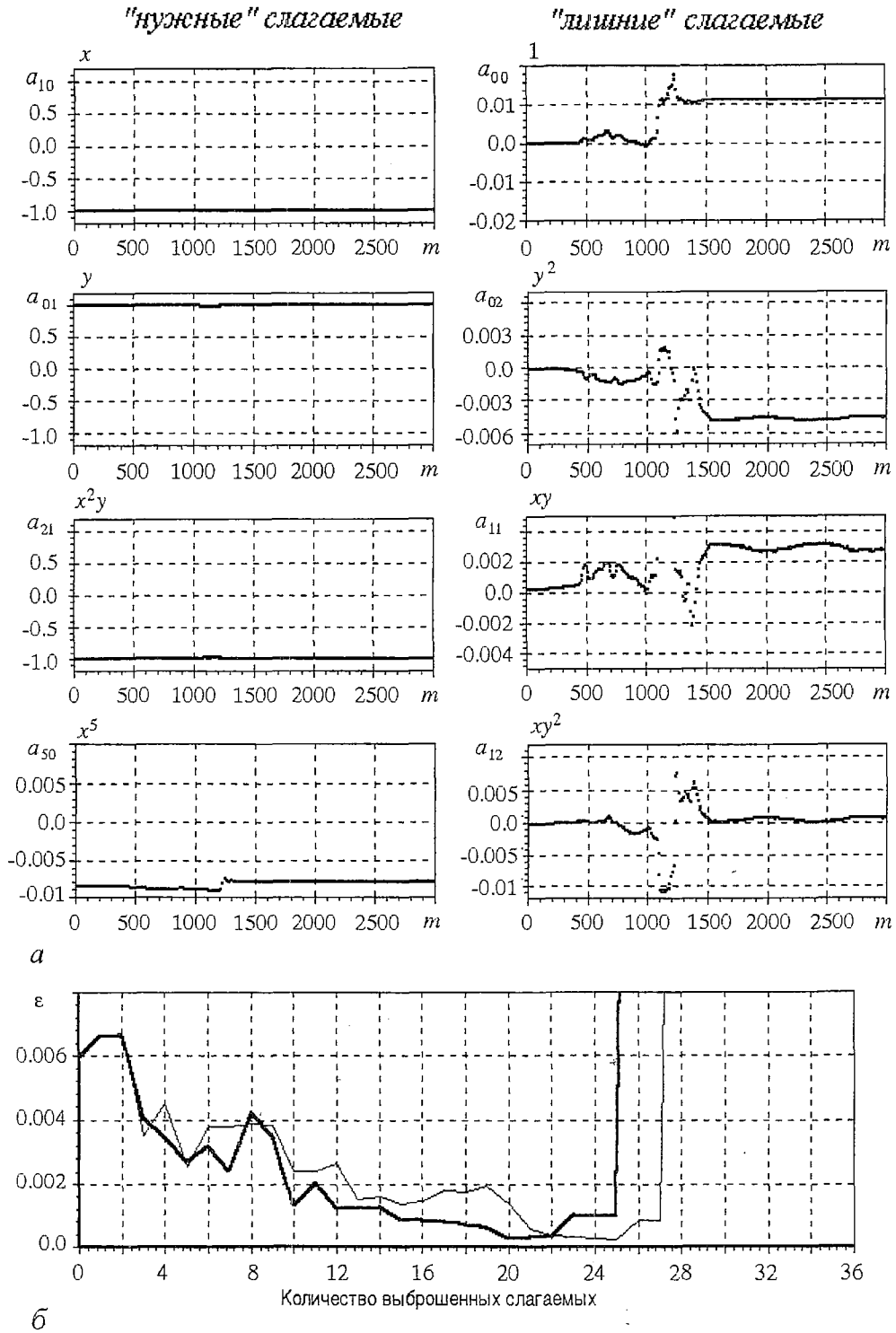


Рис. 5. Результаты реконструкции системы (8) по скалярному ряду: *a* – зависимость коэффициентов (при указанных рядом базисных функциях в полиномах) модели вида {(1) и (9)} от положения смещения окна реконструкции; *б* – зависимости ошибки аппроксимации  $\epsilon$  от числа слагаемых, исключенных при оптимизации модели, с использованием меры (11) (жирная линия) и (12)

от  $m$  коэффициентов при «лишних» слагаемых в области переходного процесса. На рис. 5, а представлены значения некоторых из 36 коэффициентов модели вида  $\{(1) \text{ и } (9)\}$  с полиномом 7-й степени, построенной по временной реализации системы (8) при различных  $m$ . Слева сгруппированы графики для «нужных», присутствующих в степенном представлении функции  $f$  объекта (8) слагаемых, а справа – для «лишних». Видно, что «лишние» коэффициенты существенно менее стабильны, чем «нужные», причем эта нестабильность появляется при перемещении начальной точки окна реконструкции именно в области переходного процесса.

Опираясь на сказанное, можно предложить процедуру улучшения структуры модели, основанную на последовательном удалении слагаемых, коэффициенты в которых наиболее нестабильны при изменении  $m$ . В качестве мер стабильности коэффициента  $a$  можно использовать, например,

- отношение его среднего значения к стандартному отклонению

$$m_1 = \langle a \rangle / \sigma_a; \quad (11)$$

- отношение среднего значения к стандартному отклонению разности значений коэффициента, полученных при соседних положениях окна реконструкции

$$m_2 = \langle a \rangle / [ \langle (a_{i+1} - a_i)^2 \rangle ]^{1/2}. \quad (12)$$

Угловые скобки означают усреднение по ансамблю значений  $a$ , полученных при разных  $m$ . Первая мера оценивает размах колебаний коэффициента, а вторая – степень немонотонности зависимости коэффициента от положения окна реконструкции.

Предложенную процедуру оптимизации структуры модели иллюстрирует рис. 5, б, где приведена зависимость критерия качества  $\epsilon$  (чем меньше  $\epsilon$ , тем лучше модель) от числа отброшенных «лишних» слагаемых. В соответствии с введенными мерами (11) или (12) выбирался наименее надежный коэффициент, и соответствующее слагаемое исключалось из модели. Процесс реконструкции уравнений повторялся уже с упрощенной функцией: находился следующий наименее стабильный коэффициент, который исключался из модели, и т.д. На рисунке представлена зависимость величины  $\epsilon$  от числа выброшенных коэффициентов при использовании различных мер нестабильности. Причем в приведенном примере более эффективным оказалось использование меры (12), оценивающей немонотонность зависимости коэффициентов от смещения окна реконструкции. Заметим, что после достижения минимума попытки дальнейшего упрощения модели приводят к резкому росту ошибки аппроксимации, так как процедура уже не может отличить «правильный» коэффициент от «лишнего».

## Заключение

На примерах реконструкции нескольких дискретных и потоковых динамических систем по скалярным и векторным временным рядам с использованием различных критериев качества моделей показано, что для целей глобального моделирования динамики объекта в широкой области фазового пространства наиболее ценная часть временного ряда соответствует переходному процессу. Следует подчеркнуть, что на реконструкцию моделей конкретного движения, нацеленных на дальнейший прогноз установившегося движения, нестационарная

часть временного ряда оказывает противоположное влияние – в этом случае учет переходного процесса даже вреден. Переходные процессы не играют особой роли, если структура искомой модели оптимальна (полностью адекватна объекту), но их использование весьма плодотворно при необходимости совершенствования структуры модели – выделения лишних элементов и избавления от них, например, при полиномиальном представлении функций. В работе предложены варианты соответствующей процедуры.

Представленные результаты получены на эталонных динамических системах, но касаются этапа общепринятой процедуры реконструкции по временным рядам, общего для работы и с реальными объектами. Поэтому мы полагаем, что они окажутся полезными при моделировании широкого класса систем, особенно многомодовых.

*Работа выполнена при поддержке Американского Фонда Гражданских Исследований и Развития для государств бывшего СССР (CRDF) (грант REC-006) и РФФИ (гранты № 99-02-17735, № 01-02-06039).*

### **Библиографический список**

1. *Crutchfield J.P., McNamara B.S.* Equations of motion from a data series // Complex Systems. 1987. Vol. 1. P. 417.
2. *Cremers J., Hubler A.* Construction of differential equations from experimental data // Z.Naturforschung A. 1987. Vol. 42. P. 797.
3. *Breeden J.L., Hubler A.* Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 42. P. 5817.
4. *Baake E., Baake M., Bock H.J., Briggs K.M.* Fitting ordinary differential equations to chaotic data // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. P. 5524.
5. *Gouesbet G., Letellier C.* Global vector-field approximation by using a multivariate polynomial  $L_2$  approximation on nets // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 4955.
6. *Brown R., Rulkov N.F., Tracy E.R.* Modeling and synchronizing chaotic systems from time-series data // Phys.Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 3784.
7. *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А., Кузнецов Ю.И., Ржанов А.Г.* Восстановление структуры динамической системы по временным рядам // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39, вып. 2. С. 269.
8. *Judd K., Mees A.* On selecting models for nonlinear time series // Physica D. 1995. Vol. 82. P. 426.
9. *Judd K., Mees A.* Embedding as a modeling problem // Physica D. 1998. Vol. 120. P. 273.
10. *Timmer J., Rust H., Horbelt W., Voss H.U.* Parametric, nonparametric and parametric modeling of a chaotic circuit time series // In proceedings of International Symposium NOLTA, 2000. Dresden. Vol. 2. P. 713.
11. *Kadtke J., Kremliovsky M.* Estimating statistics for detecting determinism using global dynamical models // Phys.Lett. A. 1997. Vol. 229. P. 97.
12. *Anishchenko V.S., Pavlov A.N.* Global reconstruction in application to multichannel communication // Phys.Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 2455.
13. *Noack B.R., Ohle F., Eckelmann H.* Construction and analysis of differential equations from experimental time series of oscillatory systems // Physica D. 1992. Vol. 56. P. 389.
14. *Hegger R., Kantz H., Schmuser F., Diestelhorst M., Kapsch R.-P., Beige H.* Dynamical properties of a ferroelectric capacitor observed through nonlinear time series analysis // Chaos. 1998. Vol. 8, № 3. P. 727.
15. *Bezruchko B.P., Dikanev T.V., Seleznev Ye.P., Smirnov D.A.* Constructing a

model of a non-autonomous piecewise-linear electronic circuit from a scalar time series // In proceedings of International Specialist Workshop NDES. 1999. Denmark. P. 65.

16. *Froyland J.* Some symmetric, two-dimensional, dissipative maps // *Physica D.* 1983. Vol. 8. P. 423.

17. *Waller I., Kapral R.* Spatial and temporal structure in systems of nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A.* 1984. Vol. 30, № 4. P. 2047.

18. *Кузнецов С.П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // *Известия вузов. Радиофизика.* 1985. Т. 28, № 8. С. 991.

19. *Кузнецов С.П., Пиковский А.С.* Переход от симметричного к несимметричному режиму хаотической динамики в системе диссипативно связанных рекуррентных отображений // *Известия вузов. Радиофизика.* 1989. Т. 32, № 1. С. 49.

20. *Pikovsky A.S., Grassberger P.* Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1991. Vol. 24. P. 4587.

21. *Inoue M., Nishi Y.* Highly complicated basins of periodic attractors in coupled chaotic maps // *Progr. Theor. Phys.* 1996. Vol. 95. P. 685.

22. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П.* Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // *ЖТФ.* 1990. Т. 60, вып. 10. С. 19.

23. *Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V.* Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 1014.

24. *Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Д.А.* Реконструкция уравнений неавтономного осциллятора по временному ряду (модели, эксперимент) // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1999. Т. 7, № 1. С. 49.

25. *Bezruchko B., Smirnov D.* Constructing nonautonomous differential equations from an experimental time series // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63, № 1. 016207.

*Саратовский государственный  
университет*

*Саратовское отделение Института  
радиофизики и электроники РАН*

*Поступила в редакцию 4.01.01*

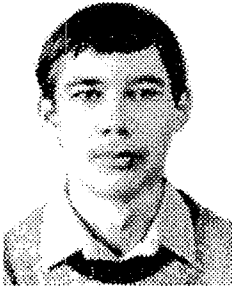
## GLOBAL RECONSTRUCTION OF MODEL EQUATIONS FROM REALIZATIONS OF TRANSIENTS

*B.P. Bezruchko, T.V. Dikanev, D.A. Smirnov*

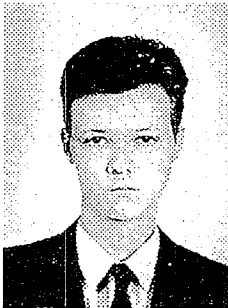
We perform global reconstruction (from time series) of differential equations and difference equations which describe an object in a wide area of a phase space. Efficiency of using time realizations of transients for this purpose is demonstrated. We show that time series of transients have some advantages for realizing a procedure of model structure optimization.



*Безручко Борис Петрович* – родился в 1946 году, окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1969). Профессор кафедры электроники и волновых процессов СГУ; ведущий научный сотрудник (по совместительству) Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН; доктор физико-математических наук. Область научных интересов – экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических и электронных системах, математическое моделирование по экспериментальной наблюдаемой. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



*Диканев Тарас Викторович* – родился в городе Саратове (1979). Студент 5-го курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Соросовский студент в 1997–2001 гг. Область научных интересов: анализ нестационарных временных рядов, динамическое моделирование по временным рядам. Автор и соавтор 8 публикаций по данной тематике.



*Смирнов Дмитрий Алексеевич* – родился в г. Ершове Саратовской области (1977). Окончил Высший колледж прикладных наук Саратовского государственного университета (1999). Ассистент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Соросовский студент (1996–1999), Соросовский аспирант (2000, 2001). Область научных интересов: конструирование математических моделей по экспериментальным временным рядам. Автор и соавтор 28 научных публикаций по данной тематике.





## ГЕНЕРАЦИЯ И синхронизация стохастических колебаний в связанных возбудимых системах

*Д.Э. Постнов, О.В. Сосновцева, Д.В. Сецинский, В.С. Борисов*

В радиофизическом эксперименте исследуются эффекты стохастической генерации квазирегулярных колебаний (когерентный резонанс) и механизмы синхронизации индуцированных шумом колебаний в связанных пороговых устройствах, относящихся к классу возбудимых систем. Обсуждаются возможные приложения полученных результатов для изучения стохастической динамики малых нейронных ансамблей.

### Введение

Исследования последних лет убедительно показали, что в нелинейных системах воздействие шума может индуцировать новые упорядоченные режимы, приводить к образованию более регулярных структур, увеличивать степень когерентности, вызывать рост усиления и увеличение отношения сигнал/шум и т.д. Другими словами, шум в нелинейных системах может играть конструктивную роль, вызывая рост степени порядка в системе. Наиболее ярким примером указанного поведения нелинейных систем при воздействии шума является эффект стохастического резонанса, когда отклик системы на слабый внешний периодический сигнал заметно усиливается с ростом интенсивности шума (для обзора см. [1] и ссылки там). Другой нелинейный эффект, так называемый когерентный резонанс, наблюдается в отсутствие внешнего периодического сигнала и выражается в существовании некоторого оптимального значения интенсивности шума, приложенного к нелинейной системе, для которого стохастические колебания наиболее близки к регулярным. Впервые этот эффект попал в поле зрения исследователей при изучении влияния флуктуаций на динамическую систему в окрестности точки седло–узловой бифуркации на предельном цикле [2,3]. Далее, в [4,5] развивался подход, рассматривающий когерентный резонанс как эффект «высвечивания» шумом колебательной динамики, которая в детерминированной системе реализуется за точкой бифуркации (седло–узловой, удвоения периода) и может быть активирована соответствующим выбором параметра. Шум при этом играет вспомогательную роль, а частота индуцированных им колебаний задается свойствами детерминированной системы.

Однако в [6] предложен, а в [7] экспериментально показан другой механизм

данного эффекта, который может реализоваться в возбудимых (не обязательно автоколебательных) системах и основан на изменении соотношения двух характерных времен возбудимой системы. Одно из них (время релаксации) соответствует эволюции системы из возбужденного состояния к состоянию равновесия. Это время слабо зависит от наличия флуктуаций и определяется свойствами самой системы. Другое – время активации – представляет собой, по сути, статистический временной масштаб и описывает процесс «выбрасывания» изображающей точки из состояния равновесия в возбужденный режим. Время активации существенно зависит от интенсивности шума и пропорционально  $e^{\lambda/D}$ , где  $D$  – интенсивность шума, а  $\lambda$  – параметр, определяемый высотой барьера и свойствами системы в соответствии с законом Аррениуса [8]. Баланс двух указанных времен и определяет наличие оптимального диапазона интенсивности шума, в котором регулярность генерируемых импульсов максимальна. Существенно, что при этом не предполагается близости системы к какой-либо точке бифуркации, данный механизм когерентного резонанса не связан с наличием замкнутых траекторий в фазовом пространстве детерминированной системы.

Таким образом, эффект когерентного резонанса может наблюдаться в системах, не имеющих в детерминированном случае осциллирующих решений. Этот факт показывает принципиальное отличие стохастических колебаний в режиме когерентного резонанса от детерминированных автоколебаний в присутствии шума, несмотря на их внешнюю схожесть, и делает актуальным исследование свойств таких колебаний. Так, представляет интерес выяснить, в какой мере приложимо к таким колебаниям явление синхронизации. Влияние флуктуаций на синхронизацию автоколебательных систем было исследовано впервые в [9,10]. Принципиальная возможность синхронизации стохастических систем была недавно показана на примере бистабильных систем [1] и исследована численно для ансамблей возбудимых систем [11–14]. Прикладной аспект подобных исследований определяется тем, что возбудимые системы играют важную роль при математическом описании функционирования живых систем и, в частности, при моделировании различных процессов, протекающих в нервных клетках (нейронах) и их ансамблях [15–17].

В данной работе мы излагаем результаты экспериментального исследования упомянутых выше вопросов. В первом разделе описана исследуемая возбудимая система, роль которой играет электронное пороговое устройство – моновибратор, а также способ количественного измерения степени регулярности стохастических колебаний. Во втором разделе приведены результаты, характеризующие эффект когерентного резонанса в одиночном моновибраторе при воздействии на него внешнего шумового сигнала. Третий раздел посвящен исследованию взаимной и вынужденной синхронизации стохастических колебаний в двух связанных моновибраторах, возбуждаемых независимыми источниками шума. Полученные результаты свидетельствуют о тесной связи режима стохастической синхронизации с достижением максимальной степени регулярности коллективного отклика двух систем на шумовое воздействие. Четвертый раздел содержит результаты по радиофизическому моделированию простейшего нейронного ансамбля – генератора ритма. Показано, что за счет введения дополнительных инерционных возбуждающих и подавляющих связей в системе можно добиться генерации еще одной, низкочастотной моды стохастических колебаний. Итоги работы подведены в заключении.

## 1. Исследуемая система и методика эксперимента

**Моновибратор.** Радиофизический эксперимент был построен на базе использования двух разновидностей схемы моновибратора – устройства с одним устойчивым состоянием, генерирующего импульс определенной длительности в ответ на превышение входным напряжением некоторого порогового уровня. Сами схемы приведены на рис. 1, а, б. Они содержат операционный усилитель, напря-

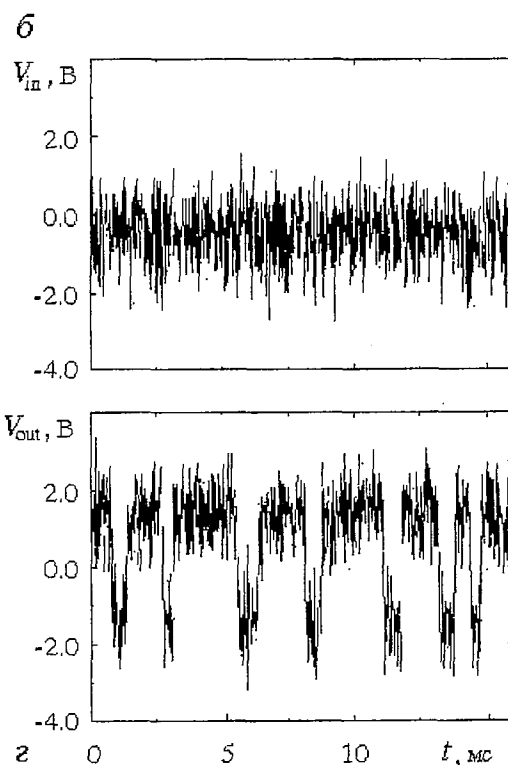
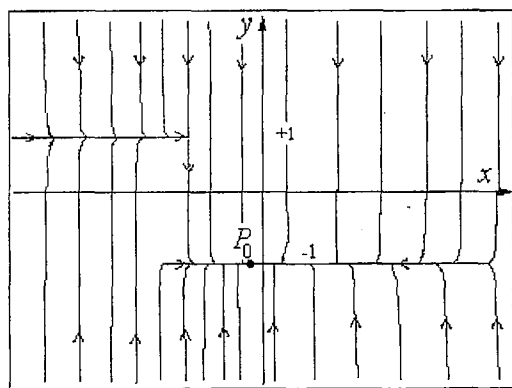
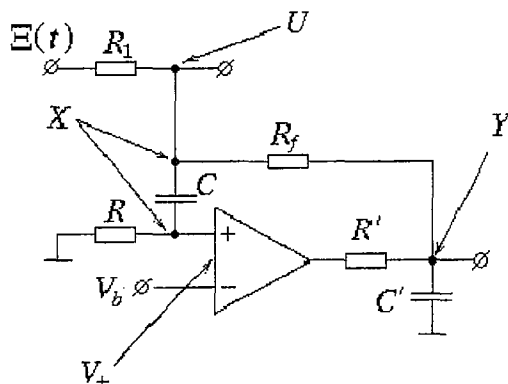
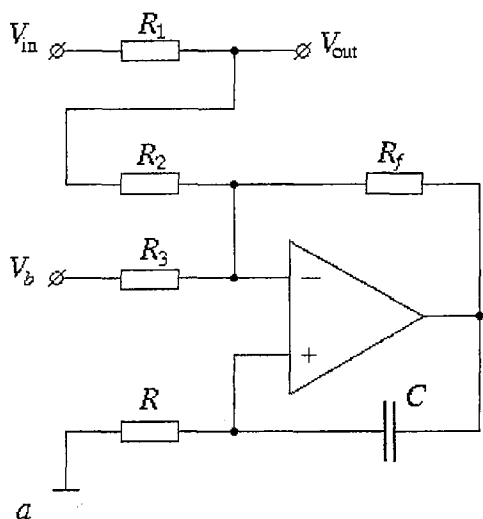


Рис. 1. а и б – две разновидности схемы моновибратора, демонстрирующие сходное поведение. Здесь  $\Xi(t)$  – шумовое напряжение на входе системы,  $V_b = +2.6$  В – пороговое напряжение; значения величин используемых резисторов и конденсатора:  $R_1 = 2.2$  кОм,  $R_2 = R_3 = R = 10$  кОм,  $R_f = 100$  кОм,  $C = 33$  нФ;  $E = \pm 15$  В – напряжение питания микросхемы  $\mu 741$ ; в – фазовый портрет системы, описываемой уравнениями (3); з – временная реализация сигнала  $V_{in}$  на входе и  $V_{out}$  на выходе моновибратора (схема а)

жение на выходе которого меняет знак в зависимости от полярности дифференциального напряжения на его входах. Емкость  $C$  включена в цепь положительной обратной связи и совместно с резистором  $R$  обеспечивает относительно медленный разряд, определяющий время формирования выходного импульса. Время разряда от напряжения насыщения  $E_{\text{sat}}$  до порогового напряжения  $V_b \leq E_{\text{sat}}$  может быть оценено как  $\tau_0 = -RC \ln 0.5(V_b/E_{\text{sat}} + 1)$ . Обе схемы демонстрируют идентичное поведение с тем лишь основным отличием, что длительность импульса (время релаксации) моновибратора (б) сильнее флуктуирует под воздействием внешнего шума вследствие непосредственной близости к источнику шума времязадающей  $RC$ -цепочки. В результате пик в спектре мощности моновибратора (б) несколько более широкий, чем у моновибратора (а).

Рассмотрим динамическую модель моновибратора. Для схемы (б), обозначая шумовое напряжение на входе как  $\Xi(t)$ , падение напряжения на  $C$  как  $X$  и падение напряжения на  $C'$  как  $Y$ , можно записать

$$\begin{aligned} RCdX/dt &= R/R_f(Y-U) + R/R_1(\Xi(t)-U), \\ R'C'dY/dt &= f(V_+ - V_b) - Y - R'/R_f(Y-U), \\ V_+ &= RCdX/dt, \quad U = V_+ + X, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $f()$  принимает значения напряжения насыщения  $-E_{\text{sat}}$  либо  $+E_{\text{sat}}$  в зависимости от знака аргумента. Введем безразмерное время  $t_2 = RCt$  и нормируем все напряжения на  $\pm E_{\text{sat}}$ . Тогда неравенство  $-E_{\text{sat}} < f() < +E_{\text{sat}}$  трансформируется в  $-1 < \chi() < +1$ ,  $X \Rightarrow x$ ,  $\Xi(t) \Rightarrow \xi(t)$  и т.д. В результате уравнения примут следующую форму:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (R/R_f)y - R(1/R_1 + 1/R_f)(x+x) + (R/R_1)\xi(t), \\ \varepsilon \dot{y} &= \chi(\dot{x} - v_b) - y - R'/R_f(y - x - \dot{x}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varepsilon = R'C'/(RC)$ , а точкой обозначена производная по  $t_2$ . Вводя безразмерные параметры  $\sigma = R(1/R_1 + 1/R_f)$ ,  $\alpha = (R/R_f)/(\sigma + 1)$ ,  $A = (R/R_1)/(\sigma + 1)$ ,  $\gamma = \sigma/(\sigma + 1)$  и пренебрегая членом с малым коэффициентом  $R'/R_f$ , приходим к окончательному виду уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha y - \gamma x + A\xi(t), \\ \varepsilon \dot{y} &= \chi(\dot{x} - v_b) - y. \end{aligned} \quad (3)$$

Фазовый портрет для модели (3) изображен на рис. 1, в. Как можно видеть, имеется единственное устойчивое состояние равновесия  $P_0$ . Расчет для него собственных значений в предположении  $\xi(t) = \text{const}$  (приближение медленного шума) дает  $\lambda_1 = -\gamma$  и  $\lambda_2 = -1/\varepsilon$ . Эти величины всегда отрицательны, так как  $\gamma$  и  $\varepsilon$  всегда больше нуля. Последнее справедливо для любых значений электронных компонентов схемы, так как сопротивления и емкости не принимают отрицательных значений. Таким образом, в рассматриваемой системе при вариации как ее собственных параметров  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$ , так и внешнего приложенного напряжения (изменение параметра  $A$ ), не происходит никаких бифуркаций, а аттрактором всегда является состояние равновесия  $P_0$  – устойчивый узел. По этой причине обсуждаемые ниже результаты по генерации стохастических колебаний не могут быть объяснены активацией шумом каких-либо колебательных свойств детерминированной системы.

Будучи активированным внешним сигналом, моновибратор генерирует один

импульс, после чего возвращается в исходное состояние. В условиях слабого шума на входе ( $A$  мало) генерируется случайная последовательность импульсов с длительностью  $\tau \approx \tau_0$ . Однако при достаточно сильном шуме на входе процесс генерации импульса может быть прерван, и разброс длительности импульсов становится значительным. На рис. 1, 2 приведен пример временной реализации входного шума (вверху) и сигнала на выходе моновибратора (генерируются импульсы отрицательной полярности).

Для проведения экспериментов описанные выше схемы моновибраторов были реализованы на базе микросхем операционных усилителей  $\mu 741$  и дополнены вспомогательными блоками. В качестве источников шума использовались специально изготовленные устройства, использующие шум рабочего режима стабилитрона. Такие генераторы обеспечивают близкое к гауссовому распределение и равномерный (в пределах 2 дБ) спектр мощности в интервале 0...50 кГц. Выходной сигнал экспериментальной установки оцифровывался и поступал в компьютер для обработки. Интенсивность шума в радиофизическом эксперименте оценивалась как средний квадрат напряжения  $D = \langle E^2(t) \rangle$  на выходе генератора шума. Таким образом, в уравнениях (3) безразмерный параметр  $A$  соответствовал  $D^{1/2}$ .

**Методика измерения регулярности.** Проявление эффекта когерентного резонанса заключается в том, что поведение системы становится более регулярным, близким к периодическому при оптимальной интенсивности шума. Для количественной характеристики этого эффекта в [4] использовался вариант отношения сигнал/шум, в [6] вычислялась автокорреляционная функция процесса. Эти методы удовлетворяли потребностям качественного рассмотрения эффекта когерентного резонанса в относительно простых ситуациях, когда выходной спектр мощности содержит единственный четко выраженный максимум. Для успешного решения задач о взаимной и вынужденной синхронизации таких систем этого оказалось недостаточно. По этой причине нами предложен более универсальный способ определения регулярности колебаний  $\beta$ , основанный на вычислении энтропии по спектру. Для подсчета  $\beta$  по дискретному временному ряду длиной  $2n$  спектр мощности  $P(\omega)$  сначала нормируется

$$s_n(\omega_i) = P(\omega_i) / \sum_{i=1}^{i=n} P(\omega_i),$$

затем вычисляется значение энтропии

$$E = -\sum_{i=1}^{i=n} s_n(\omega_i) \ln(s_n(\omega_i)).$$

С учетом того, что максимальное значение энтропии достигается при равномерном спектре (белый шум) и составляет

$$E_{\max} = -\sum_{i=1}^{i=n} 1/n \ln(1/n),$$

регулярность  $\beta$  может быть определена как

$$\beta = 1 - E/E_{\max}. \quad (4)$$

В таком определении значение  $\beta$  реагирует, по сути, на изрезанность спектра, принимая максимальное значение 1 в случае гармонических колебаний и минимальное 0 – для белого шума.

## 2. Когерентный резонанс в одиночной возбудимой системе

Рассмотрим, что происходит в моновибраторе при увеличении интенсивности шума  $D$ . При малых значениях  $D \ll 0.2 \text{ В}^2$  моновибратор генерирует относительно редкие импульсы, интервалы между которыми значительно больше, чем их длительность  $\tau$ . В результате спектр мощности выходного сигнала отвечает суперпозиции набора одиночных импульсов со случайными фазами, чему соответствует плавный подъем спектра в области низких частот (рис. 2, а, кривая 1). Для близкой к оптимальной интенсивности шума  $D \approx 0.45 \text{ В}^2$  паузы между импульсами приблизительно равны их длительности. Соответственно, пик в спектре смещается в более высокочастотную область и становится гораздо более четко выраженным (рис. 2, а, кривая 2).

На рис. 2, б приведены зависимости частоты, соответствующей положению пика в спектре мощности, и средней частоты следования импульсов от интенсивности шума  $D$ . Как можно видеть, в условиях эксперимента (в исследуемом диапазоне  $D$ ) они практически совпадают. Ниже будем говорить просто о частоте индуцированных шумом колебаний. При увеличении интенсивности шума положение пика в спектре меняется от 0 до примерно

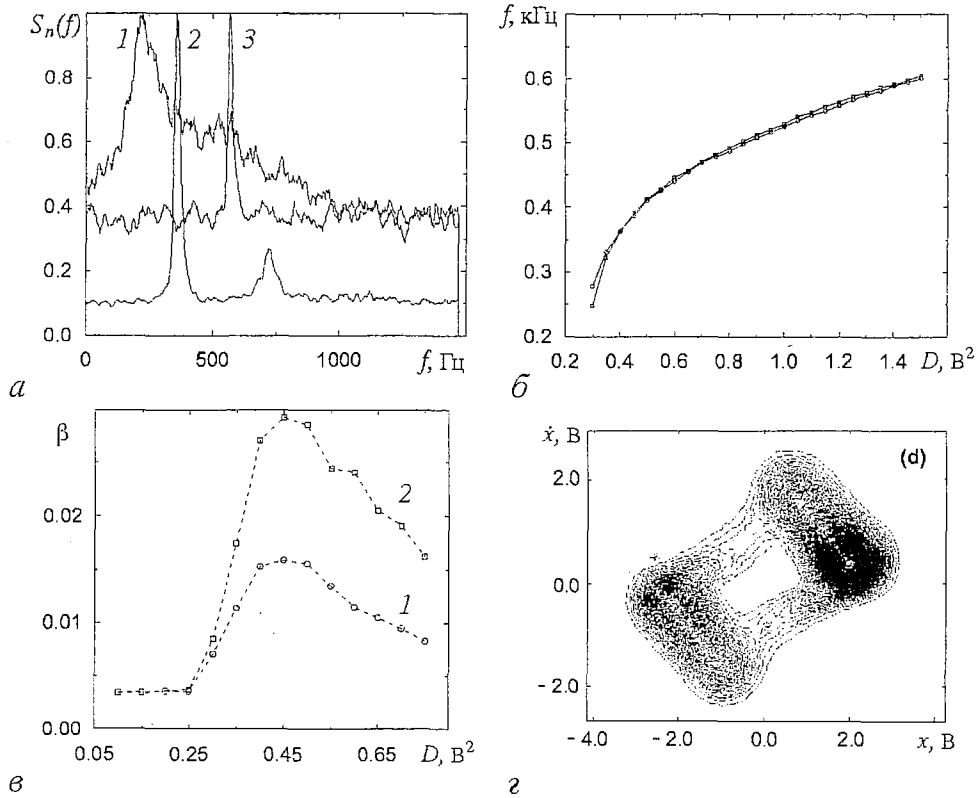


Рис. 2. а – фурье–спектры мощности, соответствующие стохастическим колебаниям одиночного моновибратора, для различной интенсивности шума  $D$  на входе: 1 –  $0.3 \text{ В}^2$ , 2 –  $0.45 \text{ В}^2$  и 3 –  $1.5 \text{ В}^2$  (для наглядности сравнения спектры нормированы на максимум); б – зависимость средней частоты следования импульсов и частоты, соответствующей положению пика в спектре мощности, от интенсивности воздействующего шума (видно, что они практически совпадают); в – зависимость регулярности стохастических колебаний двух моновибраторов от интенсивности шума на их входе; г – структура двумерной плотности распределения вероятности в случае оптимального шума

$1.5/(RC)$ . Это лишнее подтверждение того, что мы имеем дело с *порожденной* шумом квазирегулярной динамикой, а не с проявленным шумом детерминированным временным масштабом.

Зависимость регулярности  $\beta$  от интенсивности шума  $D$  на рис. 2, *в* имеет четко выраженный глобальный максимум примерно при  $D=0.45 \text{ В}^2$ , что объясняется оптимальным соотношением между длительностью генерируемых импульсов и длительностью пауз между ними. В терминологии работы А. Пиковского и Ю. Куртца [6] это как раз и соответствует балансу между временем активации (activation time) и временем эволюции системы к исходному состоянию (excursion time). Значениям  $D$  из оптимального интервала соответствует выраженная кольцевая структура двумерной плотности распределения вероятности на рис. 2, *г*, тогда как в случаях слабого и сильного шума распределение унимодально и качественно близко к гауссовому.

Степень проявления эффекта когерентного резонанса существенно зависит от характеристик воздействующего шумового сигнала. Две кривые на графике рис. 2, *в* соответствуют отклику двух одинаковых устройств, возбуждаемых различными генераторами шума. Различие в значении максимальной регулярности колебаний вызвано тем, что спектр выходного сигнала генератора шума во втором случае спадал быстрее, чем в первом.

При большой интенсивности шума паузы между импульсами становятся все меньше, поскольку система немедленно «выталкивается» шумом из состояния равновесия. Более того, сильный шум может прервать процесс генерации импульса, так что длительность импульсов также меняется случайным образом. Наконец, проявляет себя и аддитивная шумовая компонента в выходном сигнале. Как результат, пик в спектре мощности становится менее выражен на фоне шумового пьедестала (см. рис. 2, *а*, кривая 3), а регулярность вновь падает до близких к нулю значений (см. рис. 2, *в*).

### 3. Стохастическая синхронизация и достижение максимальной регулярности индуцированных шумом колебаний

Схема введения связи между двумя собранными, как показано на рис. 1, *а*, моновибраторами приведена на рис. 3. Ей соответствуют уравнения

$$\epsilon dx_{1,2}/dt = \chi \{x_{1,2} - y_{1,2} - [D_{1,2} \xi_{1,2}(t) + \alpha x_{1,2} + \gamma v_b]\} - y_{1,2}, \quad (5)$$

$$dy_{1,2}/dt = x_{1,2} - y_{1,2} + K(x_{1,2} - y_{1,2} - x_{2,1} + y_{2,1}).$$

При необходимости обеспечения однонаправленной связи последовательно с резистором  $R_c$  включался буферный каскад с высоким входным и низким выходным сопротивлениями. В результате член связи в уравнениях для одной из подсистем выпадал.

Предметом нашего рассмотрения является переход к синхронным сто-

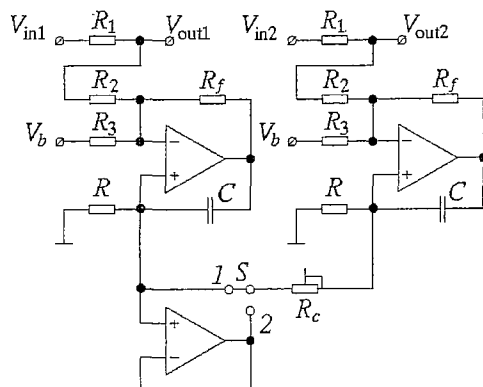


Рис. 3. Принципиальная схема двух резистивно связанных моновибраторов. Связь осуществляется через резистор связи  $R_c$ . В зависимости от положения переключателя  $S$  реализуется случай взаимной или однонаправленной связи

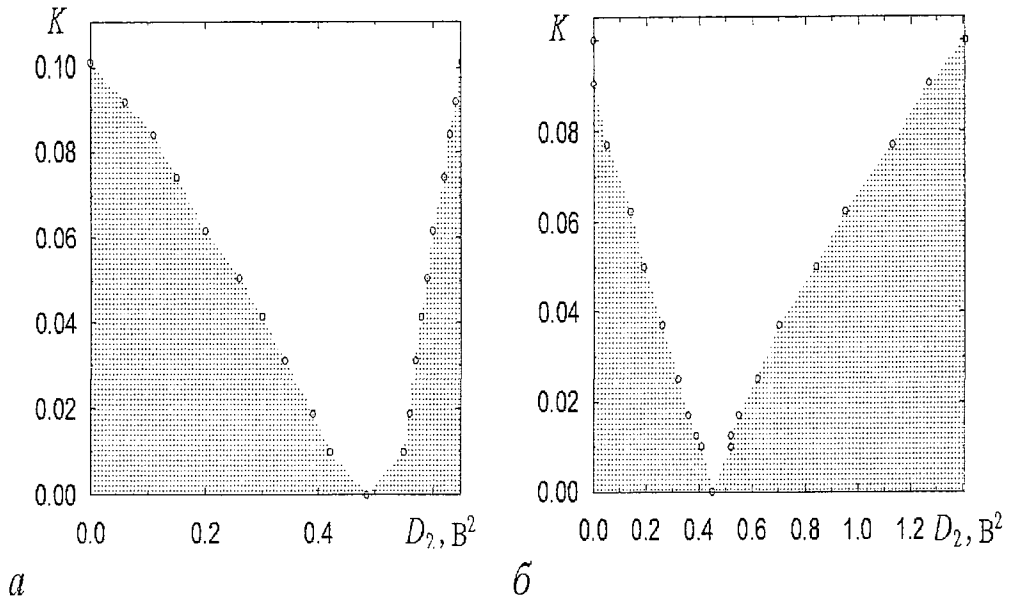


Рис. 4. Области стохастической синхронизации на плоскости параметров  $(D_2, K)$ , где  $D_2$  – интенсивность шума на входе второго моновибратора,  $K$  – коэффициент связи: *a* – случай однонаправленной связи, *б* – случай взаимной связи; интенсивность шума на входе первого моновибратора установлена оптимальной для проявления эффекта когерентного резонанса

хаотическим колебаниям и выявление соответствующих изменений в степени регулярности генерируемого связанными системами сигнала. Для возбудимой системы интенсивность шума играет роль универсального управляющего параметра, ответственного как за процессы возбуждения колебаний, так и за их частоту. По этой причине режимы связанных систем рассматривались на плоскости параметров  $(D_2, K)$ , где  $K$  – параметр связи. Интенсивность шума в первой системе  $D_1$  фиксировалась на некотором оптимальном для проявления эффекта когерентного резонанса уровне.

Стохастические колебания считались синхронными, если отношение их средних частот (количество импульсов в единицу времени) лежало в интервале  $1 - \Delta < f_1/f_2 < 1 + \Delta$ , где  $\Delta$  определялось точностью эксперимента (временем усреднения) и принималось равным 0.02. На рис. 4 приведены диаграммы, полученные для однонаправленной (*a*) и для взаимной (*б*) связи. Как можно видеть, в обоих случаях область синхронных стохастических колебаний расширяется по мере увеличения коэффициента связи  $K$ . В отличие от известных результатов по синхронизации переключений в бистабильной системе в режиме стохастического резонанса [1] данные результаты свидетельствуют об отсутствии порогового значения  $K$ , ниже которого синхронизация не наблюдается.

Каковы механизмы перехода к синхронным стохастическим колебаниям? На рис. 5 приведена эволюция фурье-спектров мощности колебаний в двух однонаправленно связанных моновибраторах в зависимости от значения коэффициента связи  $K$  для различного соотношения  $D_1$  и  $D_2$ . На серии спектров (*б*) ясно видно, как два пика в спектрах мощности колебаний связанных подсистем сближаются и сливаются по мере увеличения степени связи. В такой эволюции спектров нетрудно узнать эффект захвата частот, практически повторяющий соответствующий механизм для регулярных колебаний. Для серии спектров (*a*) картина качественно иная. Высота пика, соответствующего индуцированным



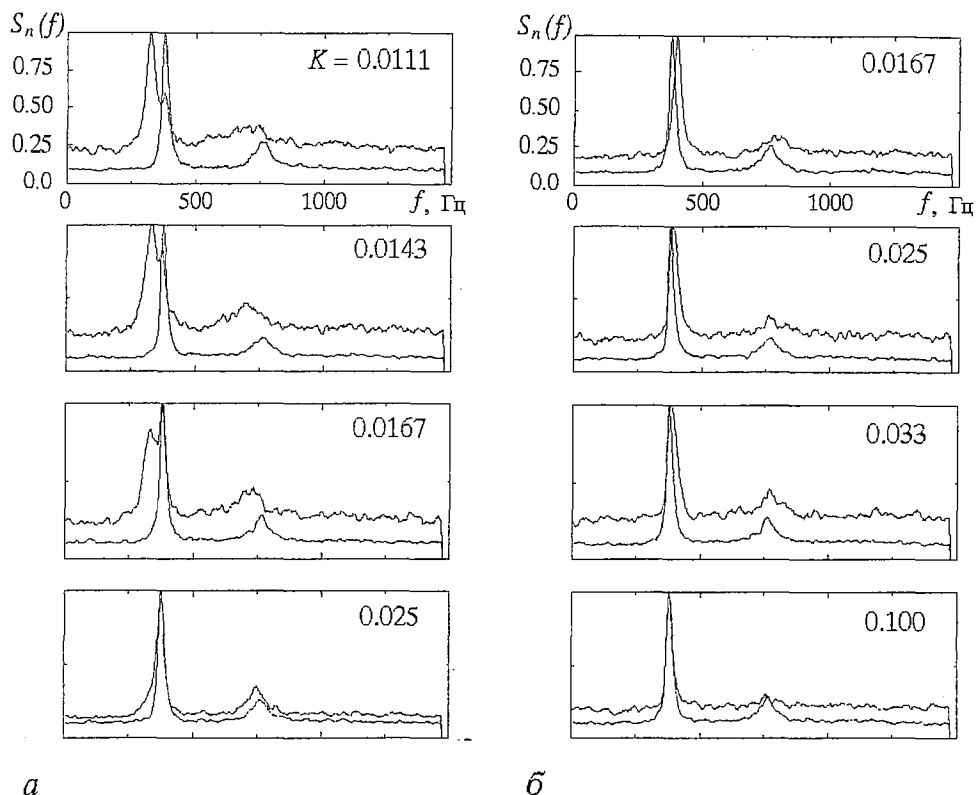


Рис. 5. Эволюция усредненных фурье-спектров мощности для однонаправленно связанных возбудимых систем: *a* – при движении по параметру  $K$  слева от основания клюва синхронизации для  $D_1=0.45 \text{ В}^2$ ,  $D_2=0.36 \text{ В}^2$  (синхронизация происходит через подавление собственной стохастической динамики одного из моновибраторов); *б* – при движении по параметру  $K$  справа от основания клюва синхронизации для  $D_1=0.45 \text{ В}^2$ ,  $D_2=0.52 \text{ В}^2$  (синхронизация происходит через захват основной частоты моновибратора). Все спектры нормированы на максимальное значение

шумом колебаниям во второй подсистеме, уменьшается до нуля по мере увеличения  $K$ . Однако в то же время появляется и растет новый пик на частоте воздействия первой подсистемы. Как результат, частоты колебаний в обеих подсистемах уже при  $K=0.025$  совпадают. Подобная эволюция спектров полностью отвечает другому известному механизму синхронизации регулярных колебаний – через подавление собственной динамики.

Таким образом, можно утверждать, что синхронизация индуцированных шумом колебаний в связанных возбудимых системах подчиняется закономерностям, которые аналогичны известным механизмам синхронизации регулярных колебаний. В спектре мощности при вариации степени связи наблюдается характерная эволюция спектров мощности; график отношения частот имеет типичные «полочки» при вариации параметра, ответственного за расстройку подсистем (см. ниже, рис. 6); явление захвата (на конечных временах) демонстрирует также мгновенная разность фаз стохастических осцилляторов [11].

Немаловажным является вопрос, каким образом эффекты синхронизации могут быть увязаны с изменением степени регулярности выходного сигнала? Иными словами, возможна ли ситуация, когда связанные стохастические осцилляторы совместно производят сигнал более высокой степени регулярности, нежели в автономном режиме?

В случае однонаправленной связи вторая подсистема может рассматриваться

как одиночная, на которую воздействует шумовой сигнал сложного состава. Он содержит как гауссов белый шум интенсивностью  $D_2$ , так и выходной сигнал первой подсистемы. На рис. 6, *a* приведены результаты измерения отношения частот совместно с графиками регулярности в обеих подсистемах в зависимости от значения параметра связи. Значения регулярности в первой подсистеме меняются слабо, так как ее режим не зависит от величины  $K$ . Их разброс иллюстрирует реальную точность измерений при выбранных параметрах оцифровки сигнала. Как можно видеть, ошибки измерения много меньше обсуждаемых изменений в значениях  $\beta$  для второй подсистемы, которые резко увеличиваются при достижении области синхронизации. Достигнутое при этом значение порядка 0.045 примерно на 50% превышает значение оптимума для нее при возбуждении только белым шумом (дано пунктиром).

На рис. 6, *б* приведены результаты аналогичного эксперимента для взаимно связанных моновибраторов. В этом случае менялся параметр  $D_2$ , что эквивалентно изменению расстройки по частотам. Как можно видеть, области стохастической синхронизации отвечает «полочка» на графике отношения частот (вверху). Этой же области изменения  $D_2$  соответствует заметный прирост регулярности колебаний в обеих связанных подсистемах. Существенно, что несмотря на изначально различные значения  $\beta_{\max}$  для двух подсистем (это иллюстрировалось на рис. 2, *в*), увеличение максимальных значений  $\beta$  наблюдается в каждой из них.

Итак, результаты радиофизического эксперимента говорят о том, что переход к режиму стохастической синхронизации сопровождается ростом регулярности индуцированных шумом колебаний, причем достигаемые при этом значения  $\beta$  существенно выше, нежели в случае одиночной возбудимой системы.

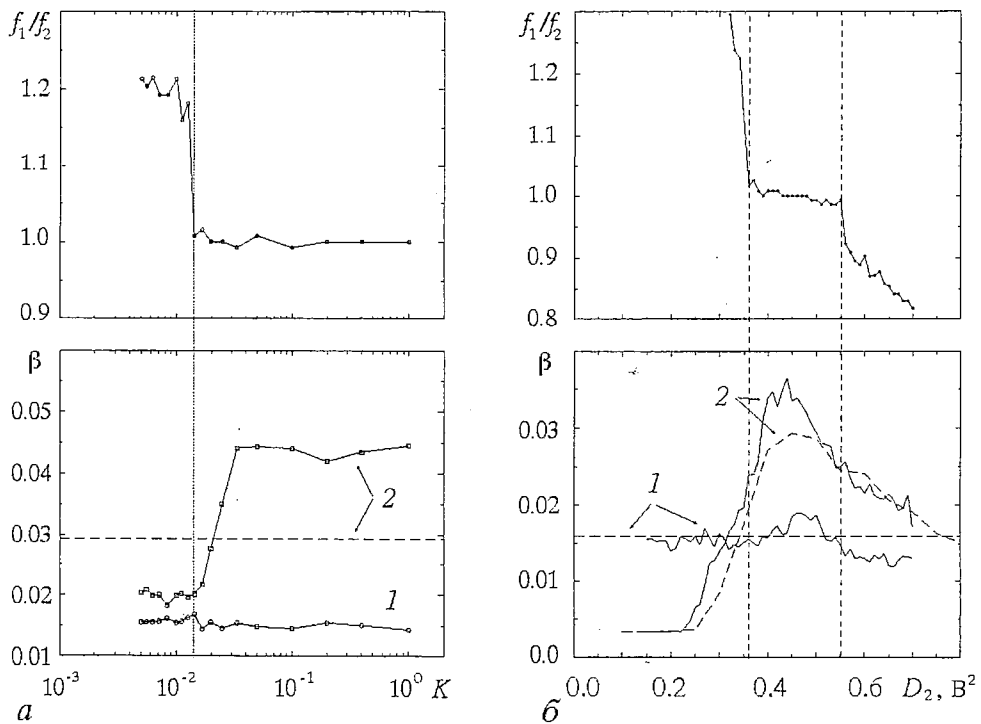


Рис. 6. Соотношение частот и регулярность индуцированных шумом колебаний: *a* – случай однонаправленного воздействия системы 1 на систему 2  $D_1=0.45 \text{ В}^2$ ,  $D_2=0.36 \text{ В}^2$ ; *б* – случай взаимной синхронизации для  $K=0.0125$ ,  $D_1=0.45 \text{ В}^2$ . Сплошные линии соответствуют регулярности связанных подсистем, а штриховые – несвязанных

#### 4. Моделирование нейронного генератора ритма и генерация двухмодовых стохастических колебаний

Описанные выше результаты по радиофизическому моделированию стохастической динамики возбудимых систем в режиме когерентного резонанса как минимум не противоречат представлениям о функционировании малых нейронных систем, которые представляют собой наиболее очевидный пример возможных практических приложений таких исследований.

Как можно видеть, наличие выраженного ритма в сигнале, который генерирует возбудимая система (либо их ансамбль), *не обязательно* связано с наличием детерминированного источника автоколебаний. Такой ритм может порождаться и стохастическим механизмом.

В этой связи представляет несомненный интерес выяснение, в какой степени подобный механизм генерации стохастических колебаний способен обеспечить функционирование более сложных структур возбудимых систем, таких, например, как нейронные схемы, ответственные за генерацию определенных типов движений – центральные генераторы ритма (ЦГР) [18].

Описанные в этом разделе результаты посвящены моделированию простейшего ЦГР улитки [19] (рис. 7, а), содержащего всего два управляющих нейрона и один исполнительный – мотонейрон. Нейроны А и В продуцируют ритм и воздействуют на мотонейрон С, который управляет разжимающими и сжимающими мышцами, обеспечивая вдох и выдох легких улитки. Нейрон С работает в переключаемом режиме и при отсутствии воздействия на него никакого ритма не генерирует. Принципиально важным для такой нейронной схемы является наличие инерционных взаимо- и самоподавляющих связей нейронов через синапсы, что обуславливает наличие двух метастабильных состояний, последовательно сменяющих друг друга.

Как необходимое условие работы подобных нейронных схем, предполагается либо спонтанная активность управляющих нейронов, что означает наличие у них автоколебательных свойств, либо наличие внешнего возбуждающего сигнала, близкого к периодическому. В рамках нашего исследования, напротив, нейроны полагались неспособными к самопроизвольному возбуждению, а внешнее воздействие считалось шумовым (что согласуется с многочисленными экспериментальными данными и общими представлениями о работе нейронных

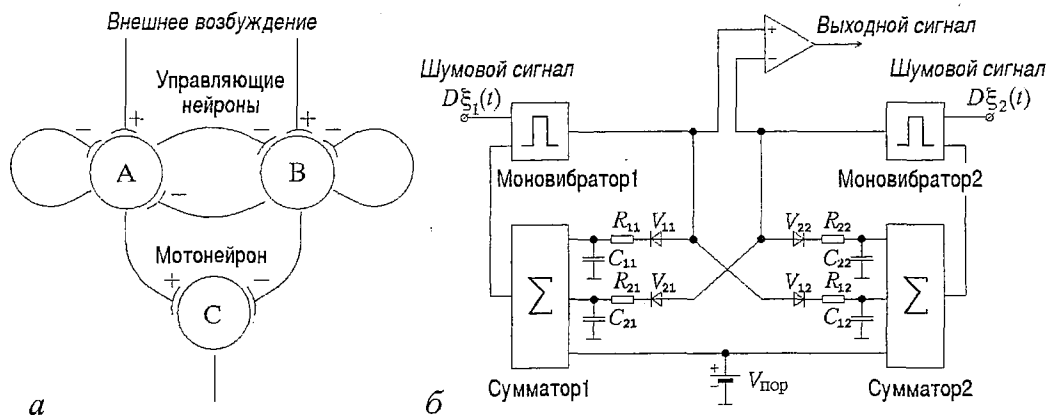


Рис. 7. а – центральный генератор ритма дыхания улитки состоит из трех нейронов А, В и С, охваченных подавляющими и возбуждающими связями [19]; б – экспериментальная установка, моделирующая работу ЦГР, состоит из двух моновибраторов, охваченных цепями взаимоподавляющей и самоподавляющей связи

систем [20]). Целью эксперимента являлось доказательство того, что даже в таком случае может генерироваться квазирегулярный низкочастотный сигнал, характеристики которого зависят от параметров приложенного шумового воздействия.

Для моделирования подобных свойств схема моновибратора (см. рис. 1, б) была модифицирована добавлением суммирующего элемента с несколькими входами, что позволило изменять порог его срабатывания в зависимости от приложенных ко входам потенциалов. Соответствующие напряжения вырабатывались на выходе выпрямительно-фильтрующих цепочек  $V_{ij}, R_{ij}, C_{ij}$  (рис. 7, б). Общая структура моделирующей установки строилась из следующих соображений.

- Каждый из двух моновибраторов охвачен цепью обратной связи  $V_{ii}, R_{ii}, C_{ii}; i=1,2$ . Ее действие проявляется в увеличении порогового напряжения при генерации импульсов, что эквивалентно ослаблению действующего шумового сигнала и направлено на прекращение индуцированных шумом колебаний.

- Цепи воздействия  $V_{ij}, R_{ij}, C_{ij}; i=1,2; j=1,2; i \neq j$  увеличивают порог одного моновибратора в результате активности другого, что соответствует их взаимоподавляющей связи.

- Постоянные времени описанных выше цепей само- и взаимоподавляющих связей выбирались много большими, чем собственное время релаксации моновибраторов  $RC, R_{ij}, C_{ij} \gg RC$ .

Изучение поведения стохастического генератора ритма проводилось при увеличении интенсивности шума  $D$ . Было найдено, что в эволюции спектра существует определенный сценарий. Для слабого шума импульсы на выходе моновибратора редки и напряжение на выходе  $RC$ -цепочек мало и практически не сдвигает пороговое напряжение. Спектр выходного сигнала соответствует суперпозиции единичных прямоугольных импульсов с различной фазой, гладкий и широкий на низкой частоте (рис. 8, а). Режим работы каждого из моновибраторов близок к случаю одиночной возбудимой системы при уровне шума ниже оптимального, как это обсуждалось в разделе 2.

При увеличении интенсивности шума до  $D \approx 0.22 \text{ В}^2$  наблюдается резкое увеличение регулярности выходного сигнала, причем в спектре мощности имеется

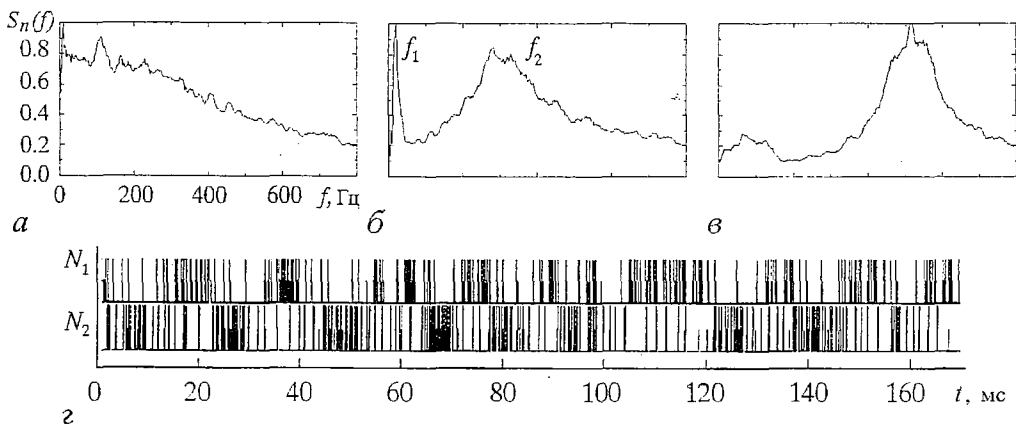


Рис. 8. Спектры мощности выходного сигнала схемы на рис. 7, б для различных значений интенсивности шума  $D$ : а –  $0.24 \text{ В}^2$ , б –  $0.34 \text{ В}^2$ , в –  $0.54 \text{ В}^2$  (все спектры нормированы на максимальное значение); з – временная реализация выходного сигнала моновибраторов 1 и 2 для случая оптимальной интенсивности шума

два выраженных пика (рис. 8, б). Более высокочастотный из них  $f_2$  соответствует частоте индуцированных шумом колебаний в одиночной возбудимой системе, тогда как второй пик  $f_1$  отражает появление низкочастотной моды стохастических колебаний. Соответствующие этому режиму работы временные реализации выходных сигналов моновибраторов показаны на рис. 8, г.

Электронная схема при этом работает следующим образом. Предположим, изначально оба моновибратора неактивны и их пороговые напряжения  $v_{b1}=v_{b2}=v_{b0}$ . Постоянные времени цепочек выбраны так, что  $R_{11}C_{11}=R_{22}C_{22} \gg R_{12}C_{12}=R_{21}C_{21} \gg RC$ . Пусть в некоторый момент времени приложенный шумовой сигнал вызывает генерацию нескольких импульсов в первом моновибраторе. При этом появляется положительное напряжение на выходе цепочки  $V_{12}, R_{12}, C_{12}$ , что увеличивает пороговое напряжение  $v_{b2}$  второго моновибратора и резко понижает вероятность его возбуждения. В результате такого дисбаланса первый моновибратор входит в режим генерации стохастических колебаний, тогда как второй находится в режиме молчания. Однако в результате действия цепочки  $V_{11}, R_{11}, C_{11}$  генерация импульсов первым моновибратором увеличивает его же собственное пороговое напряжение  $v_{b1}$ , что уменьшает вероятность возбуждения его шумовым сигналом. Импульсы становятся более редкими. Это, в свою очередь, создает преимущественные условия для возбуждения второго моновибратора, и процесс продолжается аналогичным образом.

Таким образом, в индуцированных шумом колебаниях, генерируемых схемой рис. 7, б, появляется временной масштаб, определяемый, с одной стороны, параметрами элементов цепочек  $R_{ij}, C_{ij}$ , а с другой – амплитудой импульсов и частотой их генерации  $f_2$  каждым из моновибраторов, то есть соотношением интенсивности приложенного шума и порогового напряжения. На рис. 9, а приведены графики зависимости частоты  $f_1$ , соответствующей этому временному масштабу, и частоты  $f_2$  от интенсивности шума  $D$ . При вариации  $D$  не наблюдается выраженной взаимосвязи изменения  $f_1$  и  $f_2$ , что позволяет говорить о двух независимых модах индуцированных шумом колебаний.

При увеличении интенсивности шума  $D$  выше некоторого оптимального значения описанный выше механизм низкочастотных переключений работает все хуже, так как возрастает вероятность произвольного (вне зависимости от

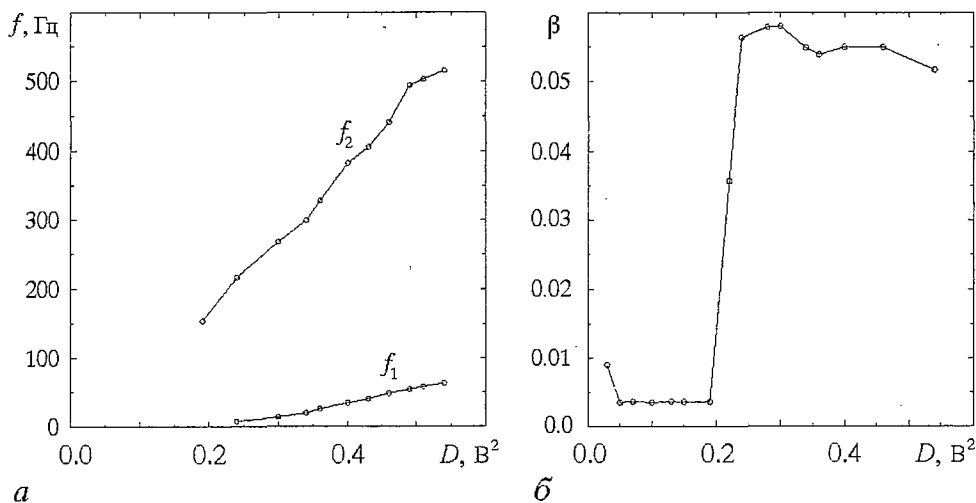


Рис. 9. а – изменение частот, соответствующих пикам в спектре, и б – регулярность выходного сигнала радиophysical модели ЦГР в зависимости от интенсивности шума  $D$

действующих пороговых напряжений) переключения схемы в любой момент времени. Об этом свидетельствует спектр колебаний на рис. 8, в при  $D=0.54 \text{ В}^2$ . Видно, что вместо выраженного пика в низкочастотной области наблюдается лишь незначительный подъем в спектре.

Отметим еще два важных факта. Во-первых, регулярность этих низкочастотных переключений схемы напрямую связана с регулярностью следования импульсов в каждом из моновибраторов и, таким образом, определяется эффектом когерентного резонанса, обсуждавшимся в разделе 2. Как видно из рис. 9, б, значение регулярности выходного сигнала  $\beta$  испытывает резкий скачок при значении  $D \approx 0.22 \text{ В}^2$ , которое соответствует появлению низкочастотных переключений. При этом пик на частоте  $f_2$ , соответствующий генерации импульсов в отдельном моновибраторе, оказывается размытым вследствие модуляции порогового напряжения. Во-вторых, несмотря на независимость источников шума в двух моновибраторах, по низкочастотной составляющей колебаний (то есть по огибающей временной реализации) они функционируют в противофазе. Этот факт определяется самой структурой подавляющих связей схемы. Таким образом, при воздействии шумового сигнала генерируются стохастические колебания с *заранее заданными фазовыми соотношениями*.

Возвращаясь к поставленной в начале раздела задаче, описанные выше результаты позволяют с уверенностью утверждать, что функционирование нейронных схем ЦГР, генерирующих низкочастотные ритмы с заданными фазовыми соотношениями, с успехом может моделироваться структурами возбудимых систем, не обладающих автоколебательными свойствами в отсутствие шума. При этом низкочастотная компонента генерируемых стохастических колебаний обладает высокой степенью регулярности и подчиняется фазовым соотношениям, заданным структурой связей.

### Заключение

Приведенные выше результаты экспериментального исследования генерации стохастических колебаний в одиночной и связанных возбудимых системах позволяют сделать следующие выводы.

- Возбуждаемое шумом пороговое электронное устройство (моновибратор) в полной мере демонстрирует эффект когерентного резонанса, что проявляется как значительное увеличение степени регулярности выходного сигнала в оптимальном диапазоне интенсивности шума. Как показывает анализ модельных уравнений моновибратора, эта динамическая система не имеет осциллирующих решений в детерминированном варианте. Таким образом, экспериментально подтвержден механизм когерентного резонанса, предложенный Пиковским и Куртцем в работе [6].
- Связанные моновибраторы, каждый из которых возбуждается собственным источником шума, демонстрируют явление стохастической синхронизации, при котором изначально различные частоты индуцированных шумом колебаний становятся равными в некотором диапазоне изменения управляющих параметров. Характер эволюции спектров мощности при переходе к режиму стохастической синхронизации аналогичен известным механизмам синхронизации регулярных колебаний захватом частот и подавлением собственной динамики. Режиму стохастической синхронизации соответствует значительный прирост максимальной степени регулярности индуцированных шумом колебаний.
- Введение инерционных взаимно- и самоподавляющих связей между моновибраторами позволило успешно воспроизвести особенности функциони-

рования нейронной схемы – центрального генератора ритма улитки. Данный эксперимент показывает, что эффект когерентного резонанса может играть принципиальную роль при выработке двигательных ритмов подобными нейронными системами. Иными словами, для генерации низкочастотных квазирегулярных колебаний с определенными фазовыми соотношениями *не обязательны* автоколебательные свойства нейронов либо наличие внешнего ритма. Данный факт открывает широкие перспективы для моделирования и описания динамики малых нейронных ансамблей на языке возбудимых стохастических систем и указывает перспективное направление дальнейших исследований.

*Данная работа была частично поддержана грантом CRDF REC-006, а также грантом РФФИ 01-02-16709.*

### **Библиографический список.**

1. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский–Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // УФН 1999. Т. 169, № 1. С. 7.
2. Gang H., Ditzinger T., Ning C.Z., Haken H. Stochastic resonance without external periodic force // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 807.
3. Rappel W.-J., Strogatz S.H. Stochastic resonance in an autonomous system with a nonuniform limit cycle // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 50. P. 3249.
4. Neiman A., Saporin P., Stone L. Coherence resonance at noisy precursors of bifurcations in nonlinear dynamics systems // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56. P. 270.
5. Lee S.-G., Neiman A., Kim S. Coherent resonance in a Hodgkin–Huxley neuron // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 3292.
6. Pikovsky A., Kurths J. Coherent resonance in a noise driving excitable system // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 775.
7. Postnov D.E., Han S.K., Yim T.G., Sosnovtseva O.V. Experimental observation of coherent resonance in cascaded excitable systems // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59. P. R3791.
8. Kramers H.A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reaction // Physica. 1940. Vol. 7. P. 284.
9. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
10. Стратонович Р.А. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике // М.: Сов. радио, 1961.
11. Han S.K., Yim T.G., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V. Interacting coherent resonance oscillators // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 1771.
12. Tanabe S., Shimokawa T., Sato S., Pakdaman K. Response of coupled noisy excitable systems to weak stimulation // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 2182.
13. Neiman A., Schimansky–Geier L., Cornell–Bell A., and Moss F. Noise-enhanced phase synchronization in excitable media // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 4896.
14. Hu B., Zhou C. Phase synchronization in coupled nonidentical excitable systems and array-enhanced coherent resonance // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. P. R1001.
15. Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Сильверстон А.И., Баженов М.В., Хуэрта Р., Суцник М.М., Рубчинский Л.Л. Синхронизация нейронных ансамблей // УФН. 1996. Т. 166, № 4. С. 365.
16. Winfree A.T. The geometry of biological time // Springer, Berlin, 1980.
17. Haken J. Principles of brain functioning // Springer–Verlag, Berlin, 1996.

18. *Simmers J., Meyrond P., Moulins M.* Dynamics networks of neurons // American scientist. 1995. Vol. 83(3). P. 262.

19. *Rosenzweig M.R., Leiman A.L., Breedlove S.M.* Biological psychology // Sinauer Associated, Inc. Sunderland, Massachusetts. 1996.

20. *Neiman A., Pei X., Russell D., Wojtenek W., Wilkens L., Moss F., Braun H.A., Huber H.T., Voigt K.* Synchronization of the noisy electrosensitive cells in the paddlefish // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82. P. 660.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 5.03.01  
после доработки 6.06.01

## NOISE INDUCED OSCILLATIONS AND STOCHASTIC SYNCHRONIZATION IN COUPLED EXCITABLE SYSTEMS

*D.E. Postnov, O.V. Sosnovtseva, D.V. Setsinsky, V.S. Borisov*

We consider the coherence resonance effect and stochastic synchronization in coupled excitable systems. We do the electronic experiment on the monovibrator (threshold device) to study the properties of noise induced oscillations and to simulate the stochastic behavior of simple neural circuit. We show that considered noise induced effects can provide the operation of small neural ensembles like central pattern generators.



*Постнов Дмитрий Энгелевич* окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности радиофизика и электроника (1983), до 1987 года – инженер кафедры радиофизики СГУ. Окончил аспирантуру при той же кафедре, защитив кандидатскую диссертацию «Регулярные и хаотические процессы в системах взаимодействующих нелинейных осцилляторов» (1990), защитил докторскую диссертацию (2000). С 1991 года работал старшим преподавателем кафедры радиофизики Саратовского университета, с 1995 года занимает должность доцента на той же кафедре. Опубликовано около 50 научных работ в отечественной и зарубежной печати.



*Сосновцева Ольга Владимировна* – родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Работала инженером в НИИ механики и физики при Саратовском университете (1989–1992). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1996) по структурам и свойствам аттракторов неавтономных и связанных динамических систем. Докторант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Имеет 10 публикаций в отечественной и зарубежной печати.





*Сецинский Дмитрий Вячеславович* – родился в 1978 году. Окончил физический факультет СГУ (2000). С 1999 года – инженер, с 2001 – аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика стохастических систем. Имеет шесть публикаций. Homepage: <http://chaos.ssu.runnet.ru/~dmitriy/dima.html>  
E-mail: [dmitriy@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:dmitriy@chaos.ssu.runnet.ru)



*Борисов Владимир Сергеевич* – родился в 1978 году. Окончил физический факультет СГУ (2000). Аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Автор четырех публикаций. Область научных интересов – радиофизика, электродинамика, нелинейная динамика.



*В Издательстве ГосУНЦ «Колледж» вышли в свет Лекции*

**Трубецков Д.И.** «След вдохновений и трудов упорных...»: Лекции. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2001. 104 с. ISBN 5-94409-006-5

В брошюре изложены два небольших курса лекций, прочитанных на традиционных школах Саратовского государственного университета «Нелинейные дни в Саратове для молодых» в 2000 и 2001 годах. Первый курс посвящен описанию жизни великого естествоиспытателя Германа Гельмгольца и его вклада в науку о колебаниях и волнах на примере четырех конкретных задач. Второй курс связан с событиями в естествознании в 1834 году, когда Гамильтон сформулировал канонические уравнения механики и принцип наименьшего действия, Клапейрон опубликовал мемуары Сади Карно, Бэббедж изобрел «аналитическую машину», Фарадей открыл законы электролиза, Ленц сформулировал «правило Ленца», а Скотт Рассел начал свои замечательные наблюдения за солитонами.

Лекции предназначены для школьников старших классов, студентов и аспирантов. Они могут оказаться полезными для учителей и преподавателей высшей школы, а также для всех тех, кто интересуется жизнью естественных наук.

*Заинтересованный читатель может заказать лекции  
по телефону: (845-2) 51-38-64  
по электронной почте E-mail: [and@cas.ssu.runnet.ru](mailto:and@cas.ssu.runnet.ru)*





## СПЕКТРЫ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ГЕНЕРАТОРА НА ДИОДЕ ГАННА В РЕЖИМЕ НЧ И СВЧ-КОЛЕБАНИЙ

*Д.А.Усанов, С.Б.Вениг, С.С.Горбатов, Э.В.Труфакин*

Представлены результаты экспериментального исследования влияния на спектр выходного сигнала СВЧ-генератора на диоде Ганна многочастотных НЧ-колебаний, возникающих в цепи питания генератора. Теоретически описаны условия возбуждения таких колебаний в генераторной схеме. Показано, что в условиях воздействия многочастотных НЧ-сигналов на СВЧ-генератор на диоде Ганна модуляция выходного сигнала может быть как преимущественно амплитудной, так и частотной.

Одной из особенностей работы СВЧ-генераторов на диодах Ганна является возбуждение в цепи питания низкочастотных колебаний, обусловленных существованием у этих диодов отрицательного дифференциального сопротивления в широком диапазоне частот [1–6]. Возможность возникновения низкочастотных колебаний в СВЧ-генераторах обычно предотвращается [3, 4], в частности, введением НЧ-фильтра в цепь питания. В то же время, известны работы, в которых показана возможность использования таких низкочастотных колебаний для амплитудной и частотной модуляции выходного сигнала [6, 7], для проведения двухпараметровых измерений с помощью автодинных устройств [8]. Помимо гармонических колебаний в низкочастотных цепях СВЧ-генератора на диоде Ганна могут возникать колебания сложного спектрального состава, вплоть до хаотических [9]. Поэтому представляет интерес исследование особенностей работы таких генераторов в условиях возбуждения как гармонических, так и НЧ-колебаний более сложного спектрального состава.

В настоящей работе представлены результаты экспериментального и теоретического исследования особенностей спектра выходного СВЧ-сигнала в генераторе на диоде Ганна при возбуждении многочастотных колебаний в его НЧ-цепях.

Для проведения экспериментальных исследований был использован СВЧ-генератор на диоде Ганна (рис. 1), который представляет собой отрезок прямоугольного металлического волновода (1) с короткозамыкающим поршнем (2), используемым для перестройки частоты генератора. Диод (3) устанавливается в разрыве стержневого держателя (4), являющегося продолжением центрального проводника коаксиала (5). Проводники коаксиальной линии изолированы от волновода диэлектрическими прокладками (6, 7). Напряжение

смещения от источника питания подается на диод через фильтр низкой частоты (8) по центральному проводнику коаксиала, который не только выполняет роль проводника в цепи питания, но и осуществляет связь активного элемента с резонатором. Резонатором является отрезок волновода, заключенный между диодом и короткозамыкающим поршнем. Отрезок волновода, подключенный к держателю с диодом с другой стороны, и следующая за ним волноведущая линия исполняют роль нагрузки.

В ходе эксперимента в цепи питания диода Ганна наблюдались как одночастотные, так и двухчастотные колебания низкой частоты. Установлено, что частоты и амплитуды таких колебаний зависят от положения короткозамыкающего поршня и напряжения смещения. Частота одной из составляющих изменялась в пределах от 0.1 до 2.0 МГц, частота второй – в пределах от 4.0 до 8.0 МГц. При этом соотношение частот не всегда равнялось целому числу. Значение амплитуд составляющих не выходило за диапазон от 0.5 до 2.0 В.

При возбуждении в низкочастотных цепях СВЧ-генератора на диоде Ганна одночастотных колебаний наблюдалось изменение спектра выходного СВЧ-сигнала, характерное для его амплитудной модуляции низкочастотным сигналом. В случае возбуждения двухчастотных НЧ-колебаний спектр выходного сигнала принимал вид, характерный для частотной модуляции при больших значениях индекса модуляции [10] (рис. 2). Величина девиации частоты при этом определялась амплитудой НЧ-колебаний и крутизной зависимости частоты СВЧ-генератора от напряжения на диоде Ганна. Изменение положения короткозамыкающего поршня также влияло на величину девиации частоты. В частности, с увеличением расстояния между плоскостью, в которой расположен диод Ганна, и поршнем величина девиации частоты увеличивалась и достигала значений до 40 МГц. Отметим, что вариации частот и амплитуд НЧ-колебаний в рассматриваемом эксперименте ограничивались значениями эквивалентных параметров конструктивных элементов НЧ- и СВЧ-контуров генератора.

Для расширения представлений о характере наблюдаемых явлений нами был проведен модельный эксперимент, в ходе которого через цепь питания СВЧ-генератора, работающего в одночастотном режиме (режиме подавления низкочастотных колебаний), подавались гармонические сигналы низкой частоты от двух стандартных генераторов сигналов в диапазоне частот  $0.01 \dots 2 \cdot 10^6$  Гц.

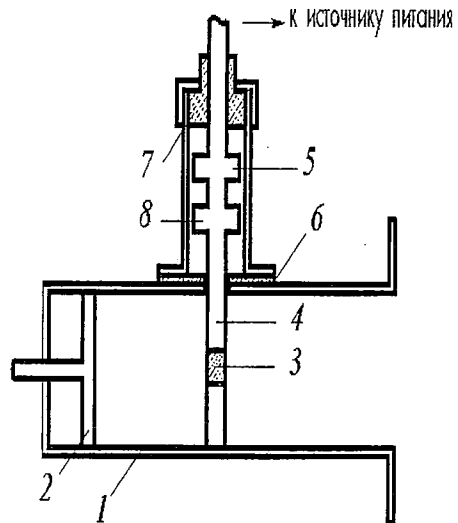


Рис. 1. Конструкция СВЧ-генератора на диоде Ганна: 1 – отрезок прямоугольного металлического волновода, 2 – короткозамыкающий поршень, 3 – диод Ганна, 4 – стержневой держатель, 5 – коаксиальная линия, 6, 7 – диэлектрические прокладки, 8 – фильтр НЧ

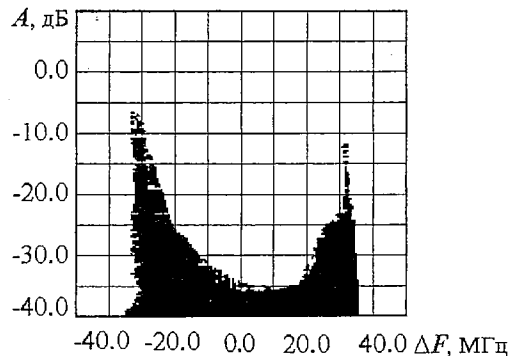


Рис. 2. Спектр частотно модулированного выходного СВЧ-сигнала

Как и ожидалось, в зависимости от напряжения питания на диоде Ганна при подаче внешних гармонических сигналов наблюдались как преимущественно амплитудная, так и частотная модуляции выходного СВЧ-сигнала с большим индексом модуляции. Подобный характер изменения преимущественного типа модуляции наблюдался как для внешних сигналов с одинаковыми частотами и разными амплитудами, так и в случае одинаковых амплитуд и различных частот. Было обнаружено, что при воздействии на СВЧ-генератор двух внешних НЧ-сигналов как с одинаковыми амплитудами и различными частотами, так и с одинаковыми частотами и различными амплитудами, существуют области параметров внешних сигналов, в которых при их изменении тип модуляции выходного СВЧ-сигнала не меняется. На рис. 3 на плоскости параметров внешних сигналов «частота – разность амплитуд» и «амплитуда – разность частот» показаны области преимущественного существования частотной 1 или амплитудной модуляции 2. В областях 3 при изменении параметров внешних сигналов тип модуляции выходного сигнала СВЧ изменяется.

При анализе характера изменения спектра выходного сигнала в зависимости от разности частот внешних НЧ-сигналов было обнаружено, что величина девиации частоты, которая определяет ширину спектра, может изменяться во времени, то есть при воздействии двух внешних сигналов происходит модуляция не только частоты СВЧ-сигнала, но и величины девиации частоты. Для малых значений разности частот внешних сигналов (до 24 Гц) возможно изменение во времени величины девиации с частотой, равной разности частот подаваемых внешних сигналов (рис. 4).

Следует отметить, что различные типы модуляции выходного сигнала при различных настройках СВЧ-генератора наблюдались и при подаче только одного внешнего низкочастотного сигнала, однако при этом преимущественно частотная модуляция наблюдалась в более узком диапазоне изменения параметров генератора, чем при воздействии двух внешних сигналов.

Для выяснения условий возникновения многочастотной НЧ-генерации в СВЧ-генераторе на диоде Ганна использовалась его эквивалентная схема, представленная на рис. 5. При составлении эквивалентной схемы СВЧ-генератора предполагалось, что источник напряжения через цепь питания связан с диодом

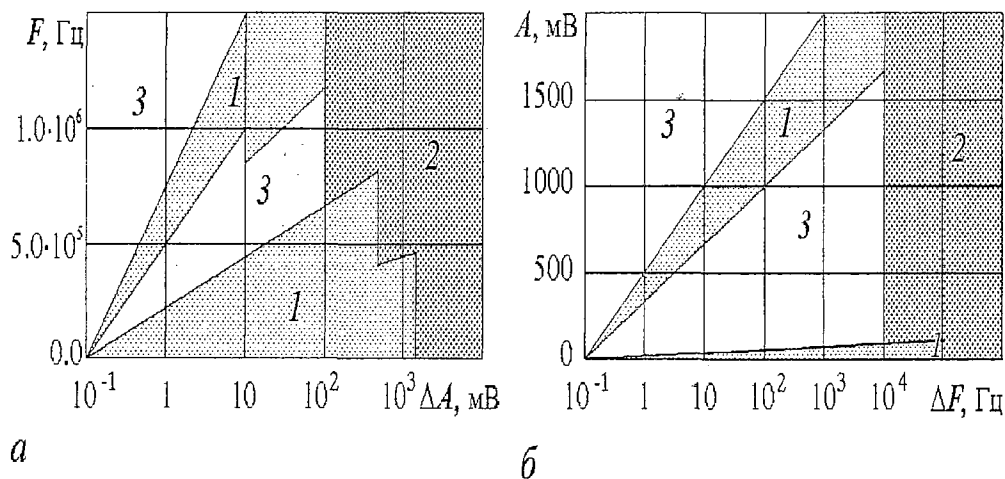


Рис. 3. Области существования частотной и амплитудной модуляции выходного СВЧ-сигнала на плоскости параметров внешних НЧ-сигналов: частота – разность амплитуд (а) и амплитуда – разность частот (б)

Ганна и элементом связи, который, в свою очередь, обеспечивает связь с резонансным контуром и нагрузкой. Цепь питания включает в себя фильтр НЧ. Диод Ганна представлен в виде эквивалентной схемы, содержащей параллельно соединенные нелинейные проводимость и реактивность диодной структуры с подключенными соответствующим образом пассивными и реактивными элементами корпуса и крепления. Элемент связи, в зависимости от настройки генератора может иметь как емкостный, так и индуктивный характер, а его связь с резонансным контуром и нагрузкой осуществляется через разделительные емкости. Нелинейная проводимость диода определяется из выражения для его вольтамперной характеристики  $i(U)$  [11]

$$i(U) = enS\{\mu(U + D)/l + V_S[(U + D)/V_p]^4\}/\{1 + [(U + D)/V_p]^4\},$$

где  $e$  – заряд электрона,  $n$  – концентрация электронов,  $S$  – площадь структуры,  $l$  – длина структуры,  $\mu$  – подвижность носителей заряда,  $V_S$  – скорость носителей заряда,  $V_p$ ,  $D$  – коэффициенты с размерностью напряжения.

Система дифференциальных уравнений для напряжений и токов в рассматриваемой эквивалентной схеме, составленная методом переменных состояния и представляющая собой математическую модель генератора на диоде Ганна, имеет в этом случае следующий вид:

$$dU/d\tau = 1/(\omega C_j)[i_s - i(U)]; \quad dU_s/d\tau = 1/(\omega C_s)(J_0 - i_s);$$

$$dU_{бн}/d\tau = 1/(\omega C_{бн})[(E_0 - U_{бн})/R_{см} - J_0];$$

$$di_s/d\tau = 1/(\omega L_s)(U_s - U - i_s R_s); \quad di_c/d\tau = 1/(\omega L_c)(U_{бн} - U_s); \quad di_k/d\tau = V;$$

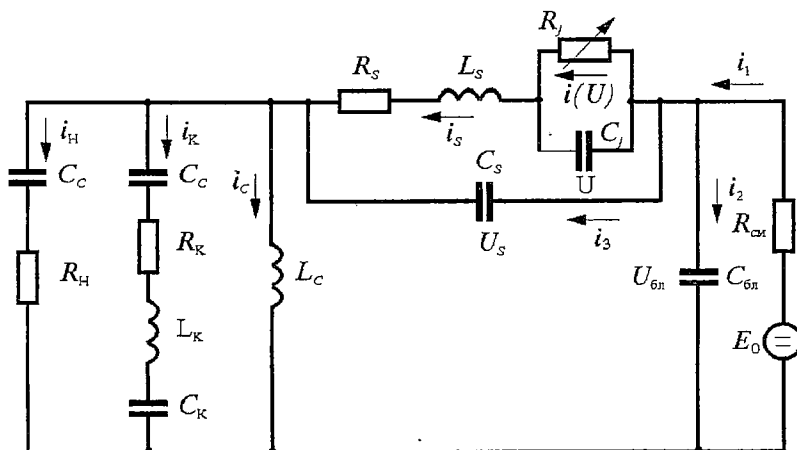


Рис. 5. Эквивалентная схема СВЧ-генератора на диоде Ганна

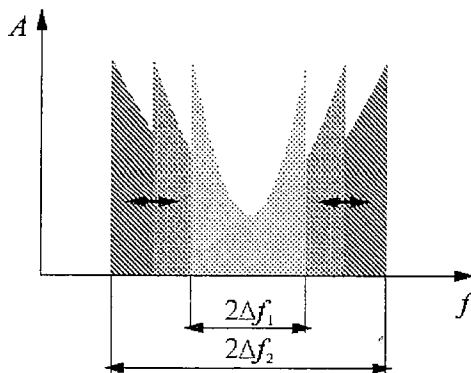


Рис. 4. Качественный вид спектра выходного СВЧ-сигнала при значениях разности частот одинаковых по амплитуде внешних НЧ-сигналов менее 24 Гц

$$dV/d\tau = 1/(\omega L_K)[(1/\omega)I_0 - \omega L_K i_K - 1/(\omega L_S)i_S - R_K V];$$

$$di_H/d\tau = 1/(\omega R_H)[dE/d\tau + i_S/C_S - i_H/C_C + J_0],$$

где  $J_0 = i_C + i_K + i_H$ ,  $\tau = \omega t$ .

При проведении расчета по этим уравнениям методом Рунге – Кутты четвертого порядка значения элементов эквивалентной схемы определялись по экспериментальным и справочным данным. Были выбраны следующие значения:  $E_0 = 3 \div 10$  В,  $R_{cm} = 2 \div 10$  Ом,  $C_{bn} = 10^{-12} \div 10^{-6}$  Ф,  $R_S = 0.5 \div 2$  Ом,  $L_S = 5 \cdot 10^{-10}$  Гн,  $C_S = 2 \cdot 10^{-11}$  Ф,  $L_K = 10^{-9}$  Гн,  $C_K = 10^{-11}$  Ф,  $R_H = R_K = 50$  Ом,  $L_C = (1 \div 3)10^{-9}$  Гн,  $C_C = (2 \div 10)10^{-12}$  Ф. Емкость структуры была положена равной «холодной» емкости,  $(6 \div 10)10^{-13}$  Ф. В ходе компьютерного эксперимента исследовалась зависимость режима колебаний в цепи питания генератора от величины постоянного смещения и значений параметров элементов эквивалентной схемы.

На рис. 6 представлены зависимости от времени напряжения на нагрузке для различных значений напряжения питания диода Ганна  $E_0$ , из которых следует, что при напряжениях, близких к пороговому, в НЧ-цепи могут возбуждаться двухчастотные колебания низкой частоты, составляющие спектра которых не связаны целочисленными соотношениями. С ростом напряжения питания

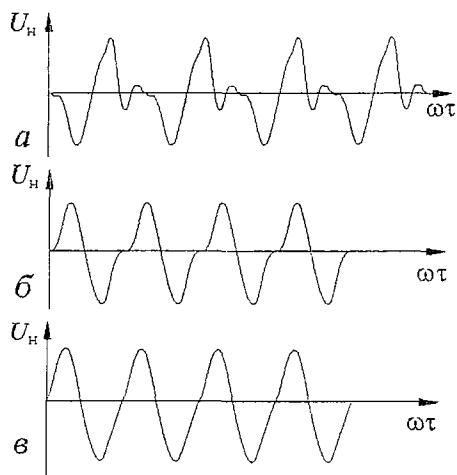


Рис. 6. Зависимость напряжения в нагрузке от времени для различных напряжений питания диода Ганна  $E_0$ : 4.7 В (а); 6 В (б); 8 В (в)

амплитуда более высокочастотной составляющей уменьшается и при  $E_0 > 8$  В колебания становятся одночастотными. Проведенное компьютерное моделирование подтвердило возможность возбуждения в цепи питания СВЧ-генератора на диоде Ганна двухчастотных низкочастотных колебаний, составляющие спектра которых не всегда связаны целочисленными соотношениями.

Таким образом, показано, что наличие в цепи смещения СВЧ-генератора на диоде Ганна низкочастотных колебаний может приводить преимущественно либо к частотной, либо к амплитудной модуляции выходного СВЧ-сигнала. В случае частотной модуляции выходного сигнала величина девиация частоты может достигать значений до 40 МГц.

## Библиографический список

1. Tsai W.C., Rosenbaum F.I. Bias circuit oscillations in Gunn devices // IEEE Trans. Electron. Dev. 1969. Vol. ED-16, № 2. P. 196.
2. Мальшиев В.А., Роздобудько В.В., Головкин А.С. Автомодулированные СВЧ-колебания на диоде Ганна // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1977. Т. 20, № 10. С. 85.
3. Романюк В.А., Шарифов Т.М. Паразитные колебания в СВЧ генераторах на активных двухполосниках // Радиотехника. 1977. Т. 32, № 5. С. 57.

4. Романюк В.А., Шарифов Г.М. Подавление паразитных НЧ колебаний в генераторах Ганна // Радиотехника. 1977. Т. 32, № 12. С.74.
5. Усанов Д.А., Горбатов С.С., Скрипаль А.В. Особенности низкочастотной генерации в диодах Ганна // Изв. вузов Радиоэлектроника. 1981. Т 24, № 10. С. 67.
6. Острейковский А.М. Особенности низкочастотной неустойчивости генераторов Ганна // Радиотехника. 1989. № 6. С. 19.
7. Усанов Д.А., Скрипаль А.В. Физика работы полупроводниковых приборов в схемах СВЧ. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. 376 с.
8. Усанов Д.А., Авдеев А.А. Использование эффекта автодинного детектирования в генераторах на диодах Ганна для двухпараметрового измерения диэлектриков // Дефектоскопия. 1995. № 4. С. 42.
9. Усанов Д.А., Вениг С.Б., Горбатов С.С., Труфакин Э.В. Хаотические колебания в СВЧ- и НЧ-цепях генератора на диоде Ганна // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 4. С. 20.
10. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1977. 608 с.
11. Murayama K., Ohmi T. Static negative resistance in highly doped Gunn diodes and application to switching and amplification // Japan. J. Appl. Phys. 1973. Vol. 12, № 12. P. 1931.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 5.03.01

## OUTPUT SIGNAL SPECTRA OF THE GUNN-DIODE OSCILLATOR AT THE MODE OF LF AND MICROWAVE OSCILLATION

*D.A.Usanov, S.B.Wenig, S.S.Gorbatov, E.V.Trufakin*

Results of experimental research of multifrequency LF oscillation (arising in the microwave Gunn oscillator feed circuit) influence on output signal spectrum of the Gunn oscillator are presented. Conditions of such oscillation excitation in the circuit of the oscillator are described theoretically. It was shown that the Gunn-oscillator output signal may be both predominantly amplitude-modulated and frequency-modulated.



*Усанов Дмитрий Александрович* – родился в г. Менделеевске (1943), окончил Саратовский государственный университет (1965), куда после нескольких лет службы на предприятии электронной промышленности поступил на работу и где работает заведующим кафедрой физики твердого тела по настоящее время. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области физики полупроводников и диэлектриков (1972) и доктора физико-математических наук в области радиофизика, включая квантовую радиофизику (1989). Профессор СГУ, академик МАН ВШ, заслуженный деятель науки РФ. Область научных интересов – твердотельная СВЧ-электроника, радиоволновые и оптические методы контроля, применение нелинейной динамики в полупроводниковой электронике СВЧ. Автор многих статей, патентов и изобретений по

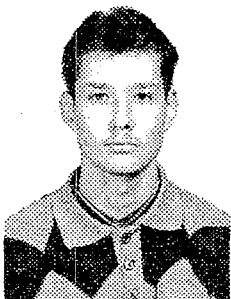
указанным выше направлениям. E-mail: UsanovDA@info.sgu.ru



*Вениг Сергей Борисович* – родился в Саратове (1957), окончил Саратовский государственный университет (1979). После окончания работал инженером ОКБ ПО «Тантал». С 1981 года, после перевода в очную аспирантуру, работает в СГУ. Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «радиофизика, включая квантовую радиофизику» (1988) и доктора физико-математических наук по специальностям «радиофизика» и «физика полупроводников и диэлектриков» (1999). Доцент кафедры физики твердого тела СГУ. Область научных интересов, по направлениям которой опубликовано более 60 научных работ, – физика полупроводников, твердотельная электроника и радиофизика. E-mail: WenigSB@info.sgu.ru



*Горбатов Сергей Сергеевич* – родился в г. Энгельсе Саратовской области (1946), окончил Саратовский государственный университет (1973). После окончания СГУ работал на предприятиях электронной промышленности и в НИИ механики и физики при СГУ. В настоящее время обучается в докторантуре СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ в области радиофизики (1991). Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, нелинейная динамика и полупроводниковая электроника СВЧ. Автор многочисленных статей по направлениям, указанным выше.



*Труфакин Эдуард Владимирович* – родился в г. Бельцы (1975), окончил Саратовский государственный университет (1998). Аспирант кафедры физики твердого тела СГУ. Область научных интересов – твердотельная электроника и нелинейная динамика.





## МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

*А.Н. Павлов, А.Р. Зиганшин, В.С. Анищенко*

В работе рассматриваются основные принципы мультифрактального формализма. Проводится мультифрактальный анализ последовательностей времен возврата в секущую плоскость для хаотического аттрактора, а также исследуются изменения структуры сигналов артериального давления белой крысы, вызванные стрессом.

### Введение

В последние годы в международной печати активно обсуждаются особенности мультискейлинговой структуры сигналов различной природы. Многие сигналы, которые приходится анализировать на практике, могут быть рассмотрены в качестве представителей специального класса сложных процессов, называемых «мультифракталами» [1–7]. Если простые (или монофрактальные) сигналы (например,  $1/f$ -шум) являются однородными в том смысле, что их скейлинговые свойства всюду остаются неизменными, то мультифрактальные процессы допускают разложение на подмножества (участки) с различными локальными свойствами скейлинга [8]. Соответственно, для количественного описания данных объектов требуется большое число характеристик.

Наличие мультискейлинговой структуры можно обнаружить в самых различных ситуациях: при анализе физиологических временных рядов [8,9] и символических последовательностей [10–12], при исследовании явления турбулентности [13–15] и в задачах об одномерных случайных блужданиях [16,17], в броуновском движении [18] и многих других примерах [19–26].

Чтобы количественно охарактеризовать мультискейлинговые явления обычно привлекают мультифрактальный анализ (который также часто называют мультифрактальным формализмом). Данный подход первоначально был предложен для статистического описания скейлинговых особенностей сингулярных мер и предполагал введение в рассмотрение функции  $f(\alpha)$ , называемой спектром сингулярности. Смысл этой функции состоит в следующем [18]. Предположим, что задана мера  $\mu$  на некотором множестве. Если это множество покрывать сферами радиуса  $\varepsilon$ , то мера в каждой такой сфере зависит от радиуса по степенному закону вида

$$\mu_\varepsilon(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha_\varepsilon}, \quad (1)$$

где  $\alpha_i$  – «экспонента сингулярности», а индекс  $i$  означает номер элемента покрытия. Чем меньше значение  $\alpha_i$ , тем более сингулярной является мера  $\mu_i$ . Предел  $\alpha=0$  соответствует распределению меры, подобному функции Дирака [18]. Спектр сингулярности  $f(\alpha)$  характеризует зависимость числа элементов покрытия  $N_\alpha$  (для которых  $\alpha_i$  равно некоторому значению  $\alpha$ ) от величины  $\epsilon$

$$N_\alpha(\epsilon) \sim \epsilon^{-f(\alpha)}. \quad (2)$$

В случае равномерного распределения меры на фрактальном множестве (классическим примером является канторово множество)  $\alpha_i = \alpha = \text{const}$  и спектр сингулярности представляет собой единственную точку на плоскости  $(\alpha, f)$ . При неравномерном распределении меры (например, биномиальное распределение на канторовом множестве [18]) функция  $f(\alpha)$  имеет более сложный («колоколообразный») вид.

На практике фракталы встречаются не только как сингулярные меры, но и как сингулярные функции. В связи с этим было предложено несколько обобщений концепции мультифрактальности на случай функциональных зависимостей. Наиболее удачным из них явилась разработка метода WTMM («Wavelet transform modulus maxima»), позволяющего исследовать сложную структуру любых экспериментальных данных, включая нестационарные процессы. WTMM–метод базируется на вейвлет–анализе [27], который называют математическим «микроскопом» из–за способности сохранять хорошее разрешение на разных масштабах. Привлекательность данного подхода состоит в том, что с его помощью можно анализировать как сингулярные меры, так и сингулярные функции; кроме того, он является более универсальным аппаратом для исследования мультискейлинговых свойств объектов по сравнению с ранее разработанными алгоритмами, например, методом структурных функций [28].

WTMM–метод часто интерпретируют как обобщение классических методов покрытия множества сферами, кубиками и т.п. с той лишь разницей, что вместо вышеупомянутых элементов покрытия используются вейвлеты. Поскольку базисные функции вейвлет–преобразования являются хорошо локализованными (солитоноподобными), они представляют собой эффективный математический аппарат для анализа принципиально неоднородных (нестационарных) процессов. Детали WTMM–метода обсуждаются в следующем разделе настоящей работы. Отметим, что переход от изучения сингулярных мер к сингулярным функциям (или временным рядам) сопровождается сменой используемых обозначений: вместо спектра сингулярности  $f(\alpha)$  рассматривается функция  $D(h)$ , имеющая приблизительно тот же смысл, где  $h$  называют экспонентой Хелдера или локальной экспонентой Херста (по смыслу она аналогична  $\alpha$ ), а  $D(h_0)$  представляет собой фрактальную размерность подмножества анализируемых данных, которое характеризуется локальной экспонентой  $h_0$ .

Математическое определение экспоненты Херста  $H$  звучит следующим образом [18]. Если  $g(x)$  есть функция, инвариантная по отношению к аффинным преобразованиям, то  $\forall x_0 \in R, \exists H \in R$  такое, что  $\forall \lambda > 0$ ,

$$g(x_0 + \lambda x) - g(x_0) \approx \lambda^H (g(x_0 + x) - g(x_0)). \quad (3)$$

Если  $g$  представляет собой случайный процесс, равенство будет выполняться только при фиксированных значениях  $\lambda$  и  $x_0$ . В случае  $H < 1$  функция  $g(x)$  является недифференцируемой и, по аналогии с экспонентой сингулярности  $\alpha$ , чем меньше  $H$ , тем более сингулярна  $g(x)$ .

При исследовании мультифрактальных объектов локальные скейлинговые свойства отличаются для разных подмножеств анализируемых данных, поэтому

говорят о локальных экспонентах Херста (экспонентах Холдера)  $h(x_0)$ , которые вводятся путем незначительного изменения определения  $H$  (3)

$$|g(x_0 + l) - g(x_0)| \sim Cl^{h(x_0)} \quad (4)$$

и характеризуют локальное сингулярное поведение объекта исследования. Как отмечается в [8], мультифрактальный подход для сигналов потенциально способен характеризовать широкий класс процессов, являющихся более сложными по сравнению с процессами, для описания которых достаточно одного числа (единственного значения фрактальной размерности). Несмотря на то, что концепция мультифрактальности разрабатывалась для класса самоподобных функций, WTMM-метод формально может применяться и при отсутствии фрактальных свойств анализируемого объекта. При этом, однако, возможна не вполне корректная интерпретация результатов [29], о чем будет упомянуто при изложении деталей алгоритма.

Целью настоящей работы является выявление особенностей мультискейлинговой структуры временных рядов различного происхождения. Наряду с тестовым примером, рассматриваемым для наглядного изложения работы WTMM-метода, мы проводим мультифрактальный анализ последовательностей времен возврата в секущую плоскость для хаотического аттрактора, а также исследуем изменения мультискейлинговой структуры сигналов артериального давления белой крысы, вызванные стрессом.

## 1. Мультифрактальный формализм

Подробное описание WTMM-метода приводится в работе [18]. Учитывая, что эта работа может быть недоступна российскому читателю, мы решили изложить в данном разделе основные детали алгоритма.

На первом шаге осуществляется вейвлет-преобразование функции  $g(x)$

$$T_\psi[g](x_0, a) = 1/a \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \psi_m^*[(x - x_0)/a] dx, \quad (5)$$

где в качестве  $g(x_0)$  обычно выбирают функцию распределения в точке  $x_0$ ,  $a$  – масштабный коэффициент,  $\psi$  – базисная функция вейвлет-преобразования, сконструированная, например, на основе производных функции Гаусса

$$\psi^{(m)} = (-1)^m \partial^m / \partial x^m [\exp(-x^2/2)]. \quad (6)$$

Если говорить о вейвлет-анализе как о математическом «микроскопе», то  $a$  определяет увеличение микроскопа, а  $\psi$  – оптические качества.

Выбор базисной функции (в данном случае, выбор параметра  $m$ ), как правило, определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из  $g(x)$ . С одной стороны, увеличение  $m$  позволяет проигнорировать крупномасштабные полиномиальные составляющие (устранить тренд) и анализировать мелко-масштабные вариации данной функции [27]. С другой стороны, многократное дифференцирование приводит к увеличению числа линий локальных экстремумов вейвлет-коэффициентов и появлению «ложных» линий (этот эффект будет рассмотрен позднее).

Если анализируемая функция  $g(x)$  непрерывно дифференцируема в точке  $x_0$  вплоть до производной порядка  $m$ , то коэффициенты ее вейвлет-преобразования при  $x=x_0$  подчиняются неравенству

$$T_{\psi}[g](x_0, a) \leq a^{m+1}, \quad a \rightarrow 0^+. \quad (7)$$

Для функции  $g(x)$ , имеющей особенности в точке  $x=x_0$ , локальное сингулярное поведение характеризуется экспонентой Хелдера  $h(x_0)$

$$T_{\psi}[g](x_0, a) \sim a^{h(x_0)}, \quad a \rightarrow 0^+. \quad (8)$$

Как отмечается в [27], вейвлет–преобразование устроено таким образом, что  $T_{\psi}[g](x_0, a)$  является регулярной функцией даже при нерегулярной  $g(x)$ . Вся информация о возможной особенности  $g(x)$  (включая ее локализацию  $x_0$  и показатель  $h(x_0)$ ) заключена в асимптотическом поведении коэффициентов  $T_{\psi}[g](x_0, a)$  при малых  $a$ . Если коэффициенты на малых масштабах расходятся, то  $g$  имеет особенность в  $x_0$ , и экспонента Хелдера может быть определена путем представления зависимости (8) в двойном логарифмическом масштабе и вычисления наклона  $\ln T_{\psi}[g](x_0, a)$  от  $\ln a$ . Если коэффициенты  $T_{\psi}[g](x_0, a)$  близки к нулю в окрестности  $x_0$  на малых масштабах, то  $g$  является регулярной в этой точке. Важное обстоятельство при расчете хелдеровских экспонент состоит в том, что искомые характеристики не зависят от выбора базисных функций вейвлет–преобразования, что позволяет говорить о том, что анализ локальной регулярности в некотором смысле универсален [18].

Второй шаг WTMM–метода предполагает выделение «скелетона» [18] (линий локальных экстремумов коэффициентов  $T_{\psi}[g](x_0, a)$  на каждом масштабе  $a$  или, что эквивалентно, линий локальных максимумов модулей коэффициентов  $|T_{\psi}[g](x_0, a)|$ ) и построение частичных функций  $Z(q, a)$ , в простейшем случае по формуле

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} |T_{\psi}[g](x_l(a), a)|^q, \quad (9)$$

где  $L(a)$  – множество всех линий ( $l$ ) максимумов модулей вейвлет–коэффициентов, существующих на масштабе  $a$ ;  $x_l(a)$  характеризует расположение на этом масштабе максимума, относящегося к линии  $l$ . Определение (9) не подходит для отрицательных значений  $q$ , поскольку возможна ситуация, когда  $|T_{\psi}[g](x_l(a), a)|=0$ . В связи с этим на практике используется другая формула

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} (\sup_{a' \leq a} |T_{\psi}[g](x_l(a'), a')|)^q, \quad (10)$$

то есть выбирается максимальное значение модуля коэффициентов вейвлет–преобразования вдоль каждой линии на масштабах, меньших заданного значения  $a$ . Согласно [18], выполняется следующая зависимость:

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}, \quad (11)$$

где величину  $\tau(q)$ , определяемую для некоторого значения  $q$  путем вычисления наклона  $\ln Z(q, a)$  от  $\ln a$ , называют скейлинговой экспонентой. Вариация степеней  $q$  при построении частичных функций (10) позволяет получить линейную зависимость  $\tau(q)=qH-1$  для монофрактальных объектов ( $H=d\tau/dq=\text{const}$ ) и нелинейную зависимость  $\tau(q)=qh-D(h)$  с большим числом хелдеровских экспонент  $h=d\tau/dq \neq \text{const}$  в случае мультифракталов.

При некоторых значениях  $q$  скейлинговые экспоненты  $\tau(q)$  имеют простую интерпретацию [8]. Так, существует взаимосвязь между  $\tau(2)$  и скейлинговой экспонентой спектральной плотности мощности  $S(f) \sim 1/f^{\beta}$

$$\beta = 2 + \tau(2). \quad (12)$$

$Z(q,a)$  отражает особенности скейлинга для больших флуктуаций при положительных  $q$  и малых флуктуаций при отрицательных  $q$ . Взаимосвязь между основными величинами, рассматриваемыми в рамках WTMM-алгоритма, определяется преобразованием Лежандра

$$D(h) = qh - \tau(q). \quad (13)$$

Мультифрактальный анализ представляет собой мощный математический аппарат, позволяющий характеризовать важные особенности сложной структуры процессов. Как отмечается в [18], существует аналогия между мультифрактальным формализмом и статистической термодинамикой: при изучении сингулярных мер переменные  $q$  и  $\tau(q)$  играют ту же самую роль, соответственно, что и величина, обратная температуре, и свободная энергия в термодинамике, а преобразование Лежандра (которое в случае сингулярных мер имеет вид  $f(\alpha) = \min_q [q\alpha - \tau(q)]$ ) означает, что вместо таких термодинамических характеристик как энергия и энтропия рассматриваются  $\alpha$  и  $f(\alpha)$ . Сам термин «мультифрактальный формализм», подразумевает некий подход, в рамках которого спектр сингулярности  $f(\alpha)$  может быть рассмотрен как преобразование Лежандра от  $\tau(q)$ .

Если речь идет об изучении сингулярных мер  $\mu$ , то при осуществлении вейвлет-преобразования в качестве  $g(x)$  выбирают функцию распределения

$g(x) = \mu(-\infty, x] = \int_{-\infty}^x d\mu$ . При анализе символических последовательностей (например, цепочка нуклеотидов молекулы ДНК) они обычно преобразуются в бинарные последовательности  $u(i) = \pm 1$  (в зависимости от того, какой нуклеотид встречается под номером  $i$ ), после чего рассматривается задача об одномерных случайных блужданиях «random walk» [30]

$$q(k) = \sum_{i=1}^k u(i). \quad (14)$$

Проводя мультифрактальный анализ зависимости  $g(k)$ , можно говорить об отсутствии корреляций в символической последовательности, если экспоненты Хелдера  $h=0.5$ , и о наличии корреляций при  $h \neq 0.5$  (иногда говорят также о корреляциях  $h > 0.5$  и антикорреляциях  $h < 0.5$  [30]).

Заметим, что процедура анализа мультискейлинговых явлений для одномерных случайных блужданий (13) приводит к тем же самым результатам, что и рассмотрение в качестве  $g(x)$  исходной бинарной последовательности  $g(i) = u(i)$ , но в последнем случае нужно еще исключить множитель  $1/a$  перед знаком интеграла в (5).

Несколько сложнее обстоит дело с временными рядами. Если анализируются сингулярности некоторого сигнала  $s(t)$ , то в качестве  $g(x)$  в (5) может рассматриваться либо сам сигнал  $s(t)$  (соответственно, интегрирование будет проводиться по времени), либо функция распределения (по аналогии с «random walk» можно рассмотреть интеграл с переменным верхним пределом от  $s(t)$ ). Как следствие, численные значения экспонент Хелдера могут различаться (обычно на 1). Согласно зависимости (7), тот же эффект будет наблюдаться, если убрать множитель  $1/a$  в (5). В известной литературе по мультифрактальному анализу не всегда четко оговаривается, что выбирается в качестве  $g(x)$  – характеризуются сингулярности самого процесса либо его функции распределения. В нашей работе проводится анализ локальной сингулярности функций распределения независимо от выбора объекта исследования (сингулярные меры либо временные ряды).

## 2. Тестирование WTMM-метода

Рассмотрим классический пример – канторово множество. Процедура его построения состоит в следующем: отрезок  $[0,1]$  делится на 3 равные части, после чего средняя часть выбрасывается. Затем те же операции проводятся с двумя оставшимися частями и т.д. На некотором шаге  $n$  данной процедуры мы получим  $2^n$  равных отрезков, каждый длиной  $3^{-n}$ .

Предположим теперь, что на канторовом множестве задано равномерное распределение меры  $\mu$  (например, массы), и для покрытия множества рассматриваются  $2^n$  элементов (окружностей) размера  $\varepsilon=3^{-n}$ . Мера, попадающая в каждый из этих элементов, будет равна  $\mu(Bx_i(\varepsilon))=2^{-n}$ , где через  $Bx_i(\varepsilon)$  обозначена окружность с центром в точке  $x_i$  и диаметром  $\varepsilon$ . Согласно формуле (1), экспонента сингулярности  $\alpha_i$ , определяемая наклоном зависимости  $\ln\mu(Bx_i(\varepsilon))$  от  $\ln\varepsilon$ , принимает значение  $\alpha_i=\ln 2/\ln 3$ . (В пределе  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  это значение экспоненты соответствует каждой точке канторова множества). В рассматриваемом примере размерность Хаусдорфа  $d_H=\alpha=\ln 2/\ln 3$ , а спектр сингулярности  $f(\alpha)$  состоит из одной точки ( $f(\alpha)=d_H=\alpha$ ) [18] (рис. 1).

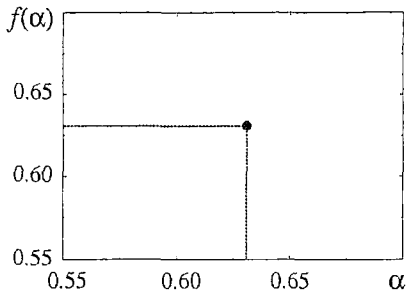


Рис. 1. Спектр сингулярности канторова множества

Выбрав в качестве базисной функции  $\psi_m^*$  Мхат-вейвлет ( $n=2$ ) и следуя алгоритму, изложенному в предыдущем разделе, на первом этапе мы провели вейвлет-преобразование функции  $g(x)$  и выделение линий локальных максимумов модулей вейвлет-коэффициентов (рис. 2, б). Как видно из рисунка, число локальных максимумов уменьшается при увеличении масштаба  $a$ . В соответствии с

Для проведения численного анализа канторову множеству ставится в соответствие бинарная последовательность, состоящая из нулей и единиц (нули обозначают выбрасываемые при построении ряда части отрезка). Таким образом, данный ряд вначале ( $n=0$ ) состоит из одного элемента «1», на первом этапе – из трех «101», на втором – из девяти «101000101» и т.д. Функция распределения для бинарной последовательности (можно определить  $g(x): [0,1] \rightarrow [0,1]$ ) представляет собой «чертову лестницу» (рис. 2, а).

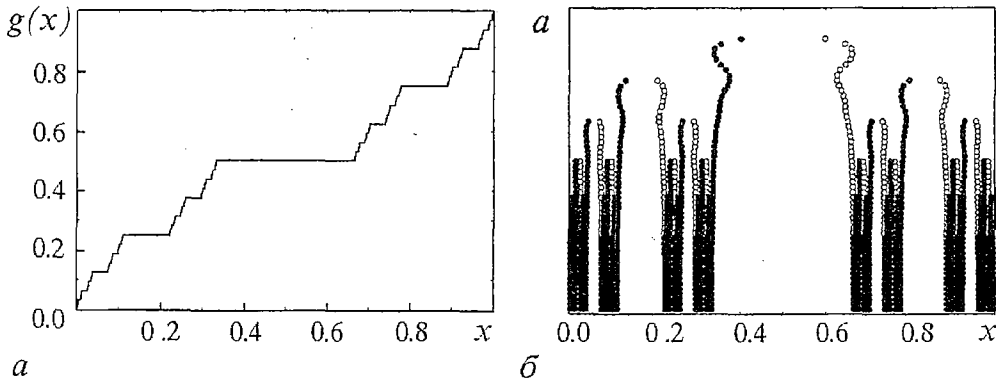


Рис. 2. а – функция распределения бинарной последовательности; б – линии локальных максимумов (черные кружочки) и минимумов (белые кружочки) вейвлет-коэффициентов

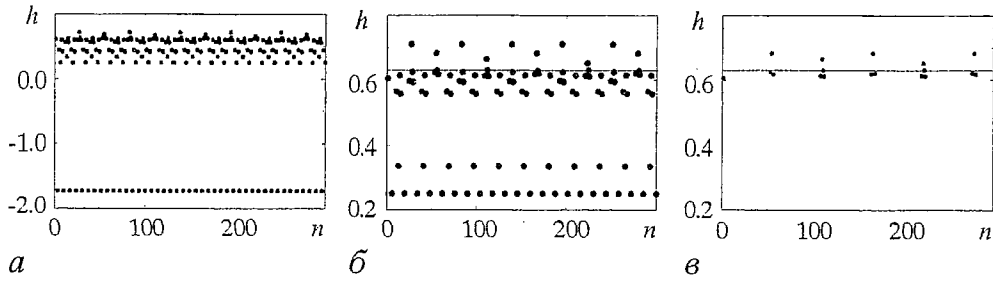


Рис. 3. Значения хелдеровских экспонент, вычисленные по различным линиям локальных максимумов модулей вейвлет-коэффициентов при:  $\ln a \geq 0$  (а);  $\ln a \geq 1$  (б);  $\ln a \geq 4$  (в)

(8), локальное сингулярное поведение  $g(x)$  может анализироваться путем построения зависимости  $\ln T_\psi[g](x_0, a)$  от  $\ln a^*$  и вычисления наклона аппроксимирующей прямой. Результаты расчетов, проведенных для различных линий локальных максимумов, представлены на рис. 3, а. Наряду с ожидаемым значением  $h = \ln 2 / \ln 3$  для некоторых линий (преимущественно самых коротких) получены значения хелдеровских экспонент, варьирующиеся в широких пределах. Картина меняется, если исключить из рассмотрения линии, «обрывающиеся» на малых масштабах и рассматривать степенные зависимости вейвлет-коэффициентов, например, при  $\ln a \geq 1$  (рис. 3, б) или  $\ln a \geq 4$  (рис. 3, в). Если для конкретной линии степенная зависимость (8) не выполняется, то есть вычисленное значение экспоненты  $h$  отличается от теоретического, то мы классифицируем ее как «ложную». (Это не означает, что сама линия получена вследствие численных ошибок, возникающие проблемы, по-видимому, связаны с плохим разрешением на малых масштабах). На практике изучение скейлинговых особенностей проводится при не слишком малых масштабных коэффициентах (мы выбирали обычно  $\ln a \geq 0.7$ ).

Непосредственные оценки экспоненты  $h$  из степенных зависимостей для вейвлет-коэффициентов могут быть менее точны, чем определение спектра скейлинговых экспонент  $\tau(q)$  частичных функций и вычисление локальных наклонов  $h = d\tau/dq$  (второй этап WTMM-метода). При большом числе элементов бинарной последовательности (большом числе шагов  $n$  при построении канторова множества) численно найденные значения  $h$  и спектра сингулярности  $D(h)$  практически не отличаются от теоретических. Так, в наших расчетах для  $n=10$  ошибка не превышала 1%.

Если в качестве анализирующего вейвлета используются производные высокого порядка функции Гаусса (большие значения параметра  $m$  в (6)), то число «ложных» линий локальных максимумов  $|T_\psi[g](x_0, a)|$  возрастает, что обуславливается осциллирующими «хвостами» солитоноподобных функций  $\psi^m$ . Поэтому при проведении мультифрактального анализа бывает целесообразно ограничиваться малым значением  $m$  (обычно  $m \leq 2$ ).

Мы рассмотрели случай равномерного распределения меры  $\mu$  на фрактальном множестве. Если мера распределена неравномерно, спектр сингулярности усложняется. Для иллюстрации проанализируем случай биномиального распределения [18]. Предположим, что отрезок  $[0, 1]$  вновь делится на 3 равные части, средняя часть выбрасывается, но теперь мы приписываем разные весовые коэффициенты  $p_1$  и  $p_2 = (1 - p_1) \neq p_1$  двум оставшимся интервалам,  $[0, 1/3]$  и  $[2/3, 1]$ . Если вначале ( $n=0$ ) мы примем для всего интервала  $[0, 1]$   $\mu_0=1$ , то

\* Поскольку осуществлен переход к фрактальной функции, мы можем говорить об экспонентах Хелдера  $h(x_0)$ , которые по смыслу аналогичны  $\alpha$  и принимают те же значения.

на первом шаге процедуры построения канторова множества двум отрезкам соответствуют меры  $\mu_1=p_1\mu_0$  и  $\mu_2=(1-p_1)\mu_0$ . При последующих шагах используются те же самые весовые коэффициенты  $p_1$  и  $p_2$ , когда проводится деление на части каждого из отрезков.

Покрывая фрактальное множество окружностями радиуса  $\varepsilon=3^{-n}$ , рассмотрим крайний левый и крайний правый отрезки. Для первого из них (содержащего точку  $x_0=0$ ) мера, попадающая в окружность  $B_1$  диаметра  $\varepsilon$ , равна  $\mu(B_1)=p_1^n\mu_0=p_1^n$ . Поэтому, согласно (1),  $\alpha(0)=\ln p_1/\ln(1/3)$ . Аналогично, для крайнего правого отрезка, содержащего точку  $x_0=1$ , можно записать  $\alpha(1)=\ln p_2/\ln(1/3)$ . Поскольку изначально  $p_1 \neq p_2$ , то и  $\alpha(0) \neq \alpha(1)$ . Соответственно, спектр сингулярности  $f(\alpha)$  уже не будет состоять только из одной точки. Рассмотрим сложную структуру спектра сингулярности мультифрактальных объектов на конкретных примерах.

### 3. Мультискейлинговая структура времен возврата

Проанализируем структуру последовательности времен возврата в секущую плоскость для хаотического аттрактора. С этой целью выберем в качестве системы, демонстрирующей хаотический режим динамики, модель Ресслера

$$\begin{aligned} dx/dt &= -(y+z), \\ dy/dt &= x+0.15y, \\ dz/dt &= 0.2+z(x-10) \end{aligned} \quad (15)$$

и зададим уравнение секущей в виде  $x=\Theta$  ( $\Theta=\text{const}$ ). Подставляя разные значения постоянной  $\Theta$ , рассмотрим как случай «правильного» задания секущей Пуанкаре (когда все траектории ее пересекают, причем, трансверсально), так и случай «неправильного» выбора секущей (часть траекторий в фазовом пространстве не пересекает плоскость  $x=\Theta$ , либо касается ее). Оба эти случая представляют интерес при изучении процессов преобразования сигналов пороговыми устройствами, если требуется охарактеризовать свойства сигнала на входе устройства путем анализа последовательности временных интервалов между моментами превышения порогового уровня. (Такие задачи возникают, например, в нейродинамике: в простейших моделях, описывающих работу нервных клеток, генерация импульсов происходит при превышении входным сигналом постоянного значения  $\Theta=\text{const}$  [31,32]. Смещение порога или, что эквивалентно, изменение амплитуды колебаний на входе приводит к изменению структуры последовательности времен между моментами генерации импульсов [33–37].)

Рассмотрим вначале случай, когда все фазовые траектории пересекают плоскость  $\Theta=\text{const}$ . При указанных значениях управляющих параметров системы Ресслера с этой целью можно выбрать широкий диапазон значений порогового уровня (приблизительно  $|\Theta| \leq 5.3$ ). На рис. 4, а приводятся результаты расчета хелдеровских экспонент для времен возврата при двух произвольно выбранных уровнях  $\Theta$ , принадлежащих данному диапазону:  $\Theta=1$  и  $\Theta=3$ . Обращают на себя внимание следующие два обстоятельства. Первое: даже незначительное по сравнению с амплитудой колебаний  $x(t)$  смещение плоскости  $x=\Theta$  от начала координат (точнее, от состояний равновесия системы, вокруг которых осуществляется движение в фазовом пространстве) приводит к существенному изменению локальной регулярности анализируемых данных. Для  $\Theta=1$  среднее значение хелдеровских экспонент  $h$  равно примерно 0.05, для  $\Theta=3$   $h \approx 0.4$ . Второе:



смещение порога приближает значения хелдеровских экспонент к уровню  $h=0.5$  (пунктирная линия), соответствующему случаю отсутствия корреляций в последовательности временных интервалов. Если для  $\Theta=1$  мы можем говорить о сильных корреляциях, при увеличении порога корреляции становятся слабее. Для иллюстрации на рис. 4, *а* приводятся результаты мультифрактального анализа времен возврата для  $\Theta=15$  («неправильный» выбор секущей Пуанкаре). В последнем случае  $h \approx 0.5$  при  $q=0$  (что соответствует максимуму спектра сингулярности  $D(h)$ ) – рис. 4, *б*).

Аналогичные выводы могут быть сделаны на основе других методов анализа мультискейлинговой структуры временных рядов, в частности, на основе DFA-алгоритма (detrended fluctuation analysis [30]). Данный метод также позволяет убедиться в изменении скейлинговых особенностей последовательности времен возврата при увеличении параметра  $\Theta$  и происходящем при этом уменьшении корреляций. Более детальное исследование мультискейлинговой структуры временных интервалов свидетельствует о том, что зависимость численных значений экспонент Хелдера от порога является сложной и нелинейной: в небольших диапазонах по параметру  $\Theta$  увеличение порога может приводить к уменьшению  $h$  (увеличению корреляций), тогда как при расширении диапазона изменения  $\Theta$  общая тенденция, отмеченная выше, сохраняется. В настоящее время неясно, с чем может быть связан такой эффект.

На рис. 4, *б* изображены спектры сингулярности при двух значениях порога. Полученная «колоколообразная» структура зависимости  $D(h)$  является типичной для мультифракталов. В рассматриваемом примере размерность Хаусдорфа  $D(q=0) \approx 1$  и практически не зависит от  $\Theta$ . (Небольшие отличия максимального значения  $D$  связаны с погрешностями аппроксимации зависимостей  $\ln Z(q, a)$  от  $\ln a$  при вычислении скейлинговых экспонент.) Более информативными являются значения  $h$ , соответствующие  $q=0$  (иногда рассматривают  $h(q=1)$ ), и диапазон изменения хелдеровских экспонент. Если локальные скейлинговые характеристики для различных подмножеств меняются незначительно (малый диапазон значений  $h$ ), можно говорить о том, что анализируемый временной ряд относится к монофрактальным объектам.

Как отмечается в [29], «колоколообразная» форма спектра сингулярности может быть даже в том случае, когда WTMM-метод применяется для обработки сигналов, не обладающих мультифрактальными свойствами. Если временной ряд характеризуется не бесконечным числом величин, описывающих особенности скейлинга, а конечным (небольшим) набором хелдеровских экспонент, то непрерывная зависимость  $D(h)$  представляет собой огибающую истинного спектра

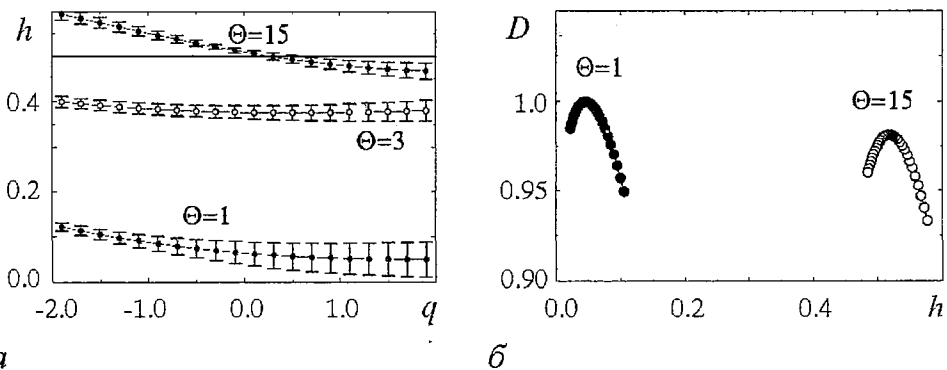


Рис. 4. Мультифрактальный анализ времен возврата. *а* – зависимости  $h(q)$ , вычисленные при различных значениях порогового уровня; *б* – типичная форма спектров сингулярности

сингулярности. Последнее означает, что, получив результаты, подобные изображенным на рис. 4, а, б, в общем случае мы не можем сказать достоверно, существуют ли участки временного ряда, где  $h$  принимает значение, например,  $0.55 \pm 0.03$ ? Во избежание сложностей в интерпретации результатов, целесообразнее не анализировать, конечно или бесконечно число скейлинговых характеристик, а рассматривать WTMM–метод как математический аппарат, позволяющий оценивать диапазон изменения хелдеровских экспонент (то есть степень сингулярности) и характеризовать наличие корреляций различной длительности в сильно неоднородных (нестационарных) временных рядах.

#### 4. Мультифрактальный анализ сигналов биологического происхождения

Привлечение аппарата мультифрактального формализма для исследования скейлинговых особенностей физиологических сигналов началось сравнительно недавно. В работе [8] проводился анализ мультискейлинговой структуры последовательностей кардиоинтервалов ( $R-R$ ), зарегистрированных в дневное и ночное время у относительно здоровых людей и у людей с нарушениями нормального функционирования сердечно–сосудистой системы. В [9] осуществлялось сравнение WTMM– и DFA–алгоритмов и иллюстрировалось применение обоих подходов к анализу  $RR$ –интервалов. Визуально форма спектров сингулярности кардиоинтервалов напоминает зависимости  $D(h)$ , представленные на рис. 4, б. (Как отмечалось, «колоколообразный» вид данных зависимостей является типичным для мультифрактальных объектов.) В диагностических целях интерес представляют численные значения хелдеровских экспонент и диапазон их изменения [8].

Мы решили проиллюстрировать работу WTMM–метода на другом примере – сигналах артериального давления белой крысы, зарегистрированных у бодрствующих крыс прямым способом (через вживление артериального катетера). Эксперименты проводились следующим образом. Вначале осуществлялась регистрация артериального давления в условиях свободного поведения животных (в течение 2–х часов), затем через венозный катетер вводился обзидан (препарат, блокирующий адренорецепторы, то есть блокирующий влияние симпатической нервной системы на сердечно–сосудистую систему, что приводит к урежению сердечного ритма) и проводилась запись артериального давления в течение еще 2–х часов. На следующий день крыса подвергалась стрессорному воздействию, которое приводило к нарушениям микроциркуляции и сократительной функции миокарда. Через 30 минут после окончания стресса вновь вводился обзидан и проводилась 2–часовая регистрация.

Чтобы ответить на вопрос об эффективности привлечения аппарата мультифрактального формализма для обработки сигналов, полученных в ходе данных экспериментов, нами были произвольно отобраны пять крыс, реализации артериального давления которых исследовались на основе WTMM–метода. (Мы ограничились небольшой базой данных, поскольку целью исследования на данном этапе являлось не накопление статистического материала, а выяснение вопроса: вызывает ли введение адреноблокаторов и стрессорное воздействие изменения локальной регулярности сигналов, либо скейлинговые характеристики остаются неизменными.)

Мультифрактальный анализ проводился для последовательностей временных интервалов между моментами превышения артериальным давлением порогового значения (аналог времен возврата в текущую Пуанкаре для хаотического аттрактора). Предварительно исходные сигналы подвергались

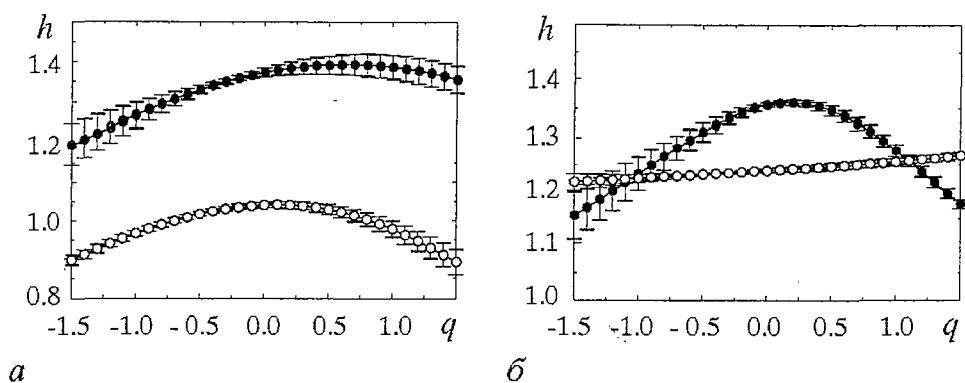


Рис. 5. Мультифрактальный анализ сигналов артериального давления белой крысы (различные типы реакции на стресс). Черные кружочки соответствуют зависимостям  $h(q)$  до стресса, белые – во время стресса

фильтрации с целью устранения «плавающего» среднего уровня (тренда). Для фильтрации использовались методы, ранее применяемые нами при обработке  $RR$ -интервалов [38]. Результаты мультифрактального анализа сводятся к следующему.

- Блокирование влияния симпатической нервной системы, вызванное введением обзидана, практически не сказывается на локальной регулярности анализируемых временных рядов. Во всех экспериментах с обзиданом численные значения хелдеровских экспонент либо оставались неизменными (в пределах точности вычислений), либо менялись, но очень незначительно (из пяти крыс у одной по реализации артериального давления было зафиксировано небольшое уменьшение экспонент Хелдера, еще у одной – небольшое увеличение  $h(q)$ , в трех случаях зависимость  $h(q)$  не менялась по сравнению с исходным состоянием). Таким образом, мультискейлинговая структура записей артериального давления почти не претерпевает изменений при введении адреноблокатора (либо они не настолько значительны, чтобы их можно было продиагностировать на основе мультифрактального формализма). Заметим, что в отличие от скейлинговых свойств некоторые статистические характеристики случайных процессов (например, среднее значение) меняются при введении обзидана.

- Стресс вызывает существенные изменения структуры временных рядов, хотя реакция на стресс может быть различной. Для анализируемой небольшой базы данных мы обнаружили два типа реакции: стресс приводил либо к заметному уменьшению хелдеровских экспонент, то есть к изменению локальной регулярности сигналов, которое было зафиксировано у четырех крыс (рис. 5, а), либо к изменению диапазона значений  $h(q)$ , зафиксированному у одной крысы (рис. 5, б). Последняя реакция наиболее интересна с точки зрения методов мультифрактального анализа: в результате стресса мультифрактальный процесс (сигнал артериального давления крысы в исходном состоянии) становится монофрактальным. Таким образом, исследование стрессорных воздействий в некоторых случаях может рассматриваться как анализ переходов от моно- к мультифрактальной структуре и наоборот. Поскольку наши эксперименты проводились на небольшом числе животных, в настоящее время мы не можем говорить о том, насколько типична та или иная реакция на стресс, однако можем констатировать, что аппарат мультифрактального формализма позволяет фиксировать изменения локальной регулярности сигналов при стрессорных воздействиях.

## Заключение

В настоящей работе рассмотрены основные принципы мультифрактального формализма и описан алгоритм, позволяющий анализировать локальное сингулярное поведение объекта исследования (Wavelet transform modulus maxima method). Данный алгоритм был протестирован нами на нескольких примерах (в статье мы ограничились только одним из них – канторовым множеством) и применен для анализа мультискейлинговой структуры сигналов различной природы. В частности, при исследовании последовательностей времен возврата в секущую Пуанкаре для хаотического аттрактора показано, что скейлинговые характеристики являются чувствительными к незначительным смещениям секущей  $x=\Theta=\text{const}$ ; удаление данной плоскости от состояний равновесия динамической системы, относительно которых происходит движение в фазовом пространстве, приводит к уменьшению корреляций в дискретных последовательностях. Нами было рассмотрено применение мультифрактального анализа для обработки данных медико–биологических экспериментов (записей артериального давления белой крысы в различных состояниях: в условиях свободного поведения, после введения адrenoблокатора и при стрессе). Обнаружено, что блокирование влияния симпатической нервной системы практически не сказывается на локальной регулярности сигналов, тогда как стрессорные воздействия вызывают существенные изменения хелдеровских экспонент и/или диапазона  $h(q)$ . Показано, что возможны ситуации, когда стресс приводит к переходам от мульти– к монофрактальной структуре (упрощению процесса) и наоборот.

Мультифрактальный анализ в настоящее время приобретает все большую популярность для обработки нестационарных данных самого различного происхождения. Детальные исследования структуры сигналов на базе вейвлет–преобразования и попытки проанализировать с помощью данного «микроскопа» изменения свойств изучаемых процессов на различных масштабах порой приводят к осознанию того, что рассматриваемые временные ряды являются по своей структуре даже еще более сложными, чем предполагалось ранее. Учитывая особенности и преимущества вейвлет–анализа, пожалуй, наиболее эффективного средства для обработки нестационарных сигналов, можно предположить, что интерес к мультифрактальному формализму будет расти в первую очередь в тех задачах, где требуется анализировать сильно неоднородные и нестационарные процессы, к которым неприменимо большинство классических методов статистической обработки данных. С этой точки зрения нам представляется перспективным продолжение исследований по привлечению аппарата мультифрактального формализма для анализа сложной структуры данных медико–биологических экспериментов.

Авторы выражают признательность Н.Б. Игошевой за предоставленные записи артериального давления крыс и за обсуждение результатов.

*А.Н. Павлов благодарит INTAS за поддержку (грант № YSF 99–4050). Работа была частично поддержана грантом № REC–006 Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF).*

## Библиографический список

1. Mandelbrot B.B. Fractals and multifractals: noise, turbulence and galazies, Selecta. New York: Springer–Verlag, 1989. Vol. 1.

2. Fractals in Science / Eds A.Bunde., S. Havlin. Berlin: Springer, 1994.
3. *Vicsek T.* Fractal Growth Phenomena, 2nd edn. Singapore: World Scientific, 1993.
4. *Tel T.* Fractals, multifractals, and thermodynamics// *Z. Naturforsch.* 1988. Vol. 43a. P. 1154.
5. *Halsey T.C.*, *Jensen M.H.*, *Kadanoff L.P.*, *Procaccia I.*, *Shraiman B.I.* Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets// *Phys. Rev. A.* 1986. Vol. 33. P. 1141.
6. *Frish U.*, *Parisi G.* Fully developed turbulence and intermittency// *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics/* Eds M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi. North-Holland, Amsterdam, 1985. P. 71.
7. *Jensen M.H.*, *Paladin G.*, *Vulpiani A.* Multiscaling in multifractals// *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 67. P. 208.
8. *Ivanov P.Ch.*, *Amaral L.A.N.*, *Goldberger A.L.*, *Havlin S.*, *Rosenblum M.G.*, *Struzik Z.R.*, *Stanley H.E.* Multifractality in human heartbeat dynamics// *Nature.* 1999. Vol. 399. P. 461.
9. *Stanley H.E.*, *Amaral L.A.N.*, *Goldberger A.L.*, *Havlin S.*, *Ivanov P.Ch.*, *Peng C.K.* Statistical physics and physiology: monofractal and multifractal approaches// *Physica A.* 1999. Vol. 270. P. 309.
10. *Strait B.J.*, *Dewey T.G.* Multifractals and decoded walks: applications to protein sequence correlations// *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52. P. 6588.
11. *Berthelsen C.L.*, *Glazier J.A.*, *Raghavachari S.* Effective multifractal spectrum of a random walk// *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 1860.
12. *Glazier J.A.*, *Raghavachari S.*, *Berthelsen C.L.*, *Skolnick M.H.* Reconstructing phylogeny from the multifractal spectrum of mitochondrial DNA// *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51. P. 2665.
13. *Benzi R.*, *Biferale L.*, *Paladin G.*, *Vulpiani A.*, *Vergassola M.* Multifractality in the statistics of the velocity gradients in turbulence// *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 67. P. 2299.
14. *Muzy J.F.*, *Bacry E.*, *Arneodo A.* Wavelets and multifractal formalism for singular signals: application to turbulence data// *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 67. P. 3515.
15. *Vainshtein S.I.*, *Sreenivasan K.R.*, *Pierrehumbert R.T.*, *Kashyap V.*, *Juneja A.* Scaling exponents for turbulence and other random processes and their relationships with multifractal structure// *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 50. P. 1823.
16. *Eisenberg E.*, *Bunde A.*, *Havlin S.*, *Roman H.E.* Range of multifractality for random walks on random fractals// *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 47. P. 2333.
17. *Dräger J.*, *Bunde A.* Multifractal features of random walks and localized vibrational excitations on random fractals: dependence on the averaging procedures// *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54. P. 4596.
18. *Muzy J.F.*, *Bacry E.*, *Arneodo A.* The multifractal formalism revisited with wavelets// *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1994. Vol. 4. P. 245.
19. *Arrault J.*, *Arneodo A.*, *Davis A.*, *Marshak A.* Wavelet based multifractal analysis of rough surfaces: application to cloud models and satellite data// *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 75.
20. *Arneodo A.*, *Decoster N.*, *Roux S.G.* Intermittency, log-normal statistics, and multifractal cascade process in high-resolution satellite images of cloud structure// *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83. P. 1255.
21. *Arneodo A.*, *Grasseau G.*, *Holschneider M.* Wavelet transform of multifractals // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol. 61. P. 2281.
22. *Arneodo A.*, *Aubenton-Carafa Y.D.*, *Audit B.*, *Bacry E.*, *Muzy J.F.*, *Thermes C.* What can we learn with wavelets about DNA sequences?// *Physica A.* 1998. Vol. 249. P. 439.

23. *Hentschel H.G.E.* Stochastic multifractality and universal scaling distributions // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 50. P. 243.
24. *Afraimovich V., Zaslavsky G.M.* Fractal and multifractal properties of exit times and Poincare recurrences// *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55. P. 5418.
25. *Wiklund K.O., Elgin J.N.* Multifractality of the Lorenz system// *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54. P. 1111.
26. *Pavlov A.N., Ebeling W., Molgedey L., Ziganshin A.R., Anishchenko V.S.* Scaling features of texts, images and time series// *Physica A.* 2001. Vol. 300. P. 310.
27. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. Т. 166, № 11.
28. *Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A.* Multifractal formalism for fractal signals: the structure–function approach versus the wavelet–transform modulus–maxima method // *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 47. P. 875.
29. *Veneziano D., Moglen G.E., Bras R.L.* Multifractal analysis: pitfalls of standard procedures and alternatives// *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52. P. 1387.
30. *Peng C.-K., Havlin S., Stanley H.E., Goldberger A.L.* Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series // *CHAOS.* 1995. Vol. 5. P. 82.
31. *Sauer T.* Reconstruction of dynamical system from interspike intervals // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 72. P. 3911.
32. *Castro R., Sauer T.* Correlation dimension of attractors through interspike intervals// *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55. P. 287.
33. *Hegger R., Kantz H.* Embedding of sequence of time intervals // *Europhysics Lett.* 1997. Vol. 38. P. 267.
34. *Janson N.B., Pavlov A.N., Neiman A.B., Anishchenko V.S.* Reconstruction of dynamical and geometrical properties of chaotic attractors from threshold–crossing interspike intervals // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. P. R4.
35. *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., Anishchenko V.S.* Extracting dynamics from threshold–crossing interspike intervals: possibilities and limitations // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 61. P. 5033.
36. *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., Anishchenko V.S.* Chaotic dynamics from interspike intervals // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. P. 036205.
37. *Pavlov A.N., Mosekilde E., Anishchenko V.S.* Extracting dynamics from return times// *Stochaos: Stochastic and Chaotic Dynamics in the Lakes/* Ed. by D.S. Broomhead, E.A. Luchinskaya, P.V.E. McClintock and T. Mullin. AIP Conf. Proc. № 502 (AIP, New York, 1999). P. 611.
38. *Анищенко В.С., Игошева Н.Б., Павлов А.Н., Хованов И.А., Якушева Т.А.* Сравнительный анализ методов классификации состояния сердечно–сосудистой системы при стрессе// *Биомедицинская радиоэлектроника.* 2000. № 2. С. 24.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 26.12.2000

## MULTIFRACTAL ANALYSIS OF TIME SERIES

*A.N. Pavlov, A.R. Ziganshin, V.S. Anishchenko*

Main principles of multifractal formalism are discussed. Multifractal analysis of sequence of the phase space trajectory return times to the Poincare section is performed.

Stress-induced by stress changes of the structure of white rats of blood-pressure signals are studied.



*Павлов Алексей Николаевич* родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Защитил кандидатскую диссертацию (1998). В настоящее время работает ассистентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: анализ временных рядов. Автор и соавтор более 30 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.

E-mail: pavlov@chaos.ssu.runnet.ru



*Зиганшин Амир Рустамович* родился в Саратове (1978). Окончил СГУ (2001). Инженер кафедры радиофизики и нелинейной динамики.



*Анищенко Вадим Семенович* – родился в 1943 году. Окончил физический факультет Саратовского университета (1966), защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАН, Заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, Лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru



## К ВОПРОСУ О РАЦИОНАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ИНТЕРВАЛА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ, В СПЕКТРЕ КОТОРЫХ ИМЕЕТСЯ ДОМИНАНТНАЯ ЧАСТОТА

*О.Я. Бутковский, Ю.А. Кравцов*

Проанализированы основные положения, лежащие в основе общепринятой оценки  $\tau = (0.2 \dots 0.3)\tau_c$ , связывающей длительность интервала дискретизации  $\tau$  со временем корреляции хаотического процесса  $\tau_c$ . Показано, что из двух масштабов, характеризующих корреляционную функцию процессов, спектр которых содержит доминантную частоту, на роль  $\tau_c$  может претендовать только короткий масштаб, сравнимый с периодом доминантных колебаний. При таком выборе  $\tau_c$  соблюдаются требования, налагаемые на интервал дискретизации  $\tau$  теоремой Котельникова.

Вопрос о рациональном выборе интервала дискретизации  $\tau$ , то есть интервала между последовательными отсчетами в задаче об адекватном (без заметной потери информации) представлении непрерывного сигнала  $y(t)$  дискретным временным рядом  $\{y(t)\} \equiv \{y(k\tau)\}$ , представляет интерес для множества систем, использующих цифровую обработку сигналов, в том числе и, в первую очередь, для радиотехнических и связанных систем и систем автоматического управления.

Во многих руководствах, (см. например, 1–3), для выбора  $\tau$  рекомендуется оценка

$$\tau \approx (0.2 \dots 0.3)\tau_c, \quad (1)$$

где  $\tau$  – время корреляции процесса, подвергаемого дискретизации. Оценка (1) широко используется, в частности, при дискретном представлении хаотических процессов для задач восстановления аттракторов и для оценки размерности хаотических систем [4–6]. В нашем недавнем обзоре [7] мы рекомендовали читателям «ПНД» оценочную формулу (1) для практического использования при решении обратных задач хаотической динамики.

Общепринятые рекомендации (1) были подвергнуты критике в комментариях [8], опубликованных от имени редколлегии журнала «Прикладная нелинейная динамика» в том же номере, что и наш обзор [7]. В комментариях проведен анализ хаотической системы Ресслера и на основании этого анализа сделан вывод, что оценка (1) дает слишком большие значения интервала  $\tau$ , выходящие за границы, регламентированные теоремой Котельникова.

Понимая важность проблемы адекватного выбора интервала дискретизации



$\tau$  для решения многих задач нелинейной динамики (в этом вопросе мы полностью солидаризируемся с мнением редколлегии), в данной работе мы хотели бы, исходя из первых принципов, уточнить интерпретацию времени корреляции  $\tau_c$  в оценке (1), с тем чтобы исключить нарушение условий, налагаемых теоремой Котельникова.

Приводимое ниже уточнение, стимулированное комментариями [8], касается процессов, в спектре которых имеется доминантная частота. Ниже мы покажем, что корреляционная функция таких процессов характеризуется двумя временными масштабами – коротким  $\tau_{c1}$  и длинным  $\tau_{c2}$ , при этом в соответствии со смыслом теоремы Котельникова в оценке (1) должен фигурировать короткий масштаб  $\tau_{c1}$ , а не масштаб  $\tau_{c2}$ , как это было принято в [8]. Тем самым в оценке (1) ликвидируется неоднозначность, которая может привести к нарушению условий применимости теоремы Котельникова.

Рассмотрим сначала ограничения на интервал дискретизации, вытекающие из теоремы Котельникова. Верхний предел для допустимой длительности интервала дискретизации  $\tau$  устанавливает теорема Котельникова (см., например, [9]), согласно которой

$$\max \tau = 1/(2F_{\max}), \quad (2)$$

где  $F_{\max}$  – это максимальная частота (верхняя граница) спектра. На практике под  $F_{\max}$  понимают интервал частот, отсчитываемый от нулевой частоты, в котором содержится основная доля (50% или 90%) энергии исследуемого процесса.

Практические рекомендации для первичного выбора интервала дискретизации были выработаны еще на заре развития цифровых методов обработки сигналов. Согласно этим рекомендациям, интервал дискретизации  $\tau$  следует выбирать так, чтобы на наименьших квазипериодах (наименьших характерных временных интервалах) исследуемого процесса  $T_{\min}$  укладывалось не менее 6÷10 отсчетов [1–3],

$$\tau \leq (1/10 \dots 1/6)T_{\min}. \quad (3)$$

Очевидно, такой выбор  $\tau$  согласуется с требованиями теоремы Котельникова (2), так как длительность минимального квазипериода  $T_{\min}$  сопоставима с  $1/F_{\max}$ , в результате чего  $\tau$  заведомо не может превысить  $\max \tau = 1/(2F_{\max})$ .

Оценка (3) носит *ориентировочный* характер. В каждом конкретном случае в зависимости от условий задачи и от возможностей, которыми располагает пользователь, возможна та или иная оптимизация  $\tau$ . Если верхний предел для времени дискретизации  $\tau$  регламентирован требованиями теоремы Котельникова (2), то нижний предел ограничен иными условиями. Дело в том, что при снижении  $\tau$  возникают по меньшей мере три нежелательных эффекта.

Во-первых, при  $\tau \rightarrow 0$  заметно возрастает общее число отсчетов  $N=T/\tau$  внутри выборки длительностью  $T$ , что существенно усложняет обработку массива данных  $\{y_k\}$ . Во-вторых, с уменьшением  $\tau$  обратная ковариационная матрица, построенная на отсчетах  $y_k$ , становится плохо обусловленной [1–3], при этом многие алгоритмы обработки, в частности, регрессионный и авторегрессионный алгоритмы экстраполяции сигнала теряют устойчивость. Наконец, в-третьих, с уменьшением  $\tau$  возрастает погрешность вычисления производных наблюдаемой функции  $y(t)$ , что неблагоприятно отражается на решении множества практических задач. Практический компромисс между указанными выше крайностями как раз и устанавливается рекомендацией (3).

Для иллюстрации принципа выбора  $F_{\max}$  рассмотрим процессы четырех типов, спектры и корреляционные функции которых представлены на рис. 1.

В случае процессов с нулевой несущей спектр  $\Phi(f)$  сосредоточен в области

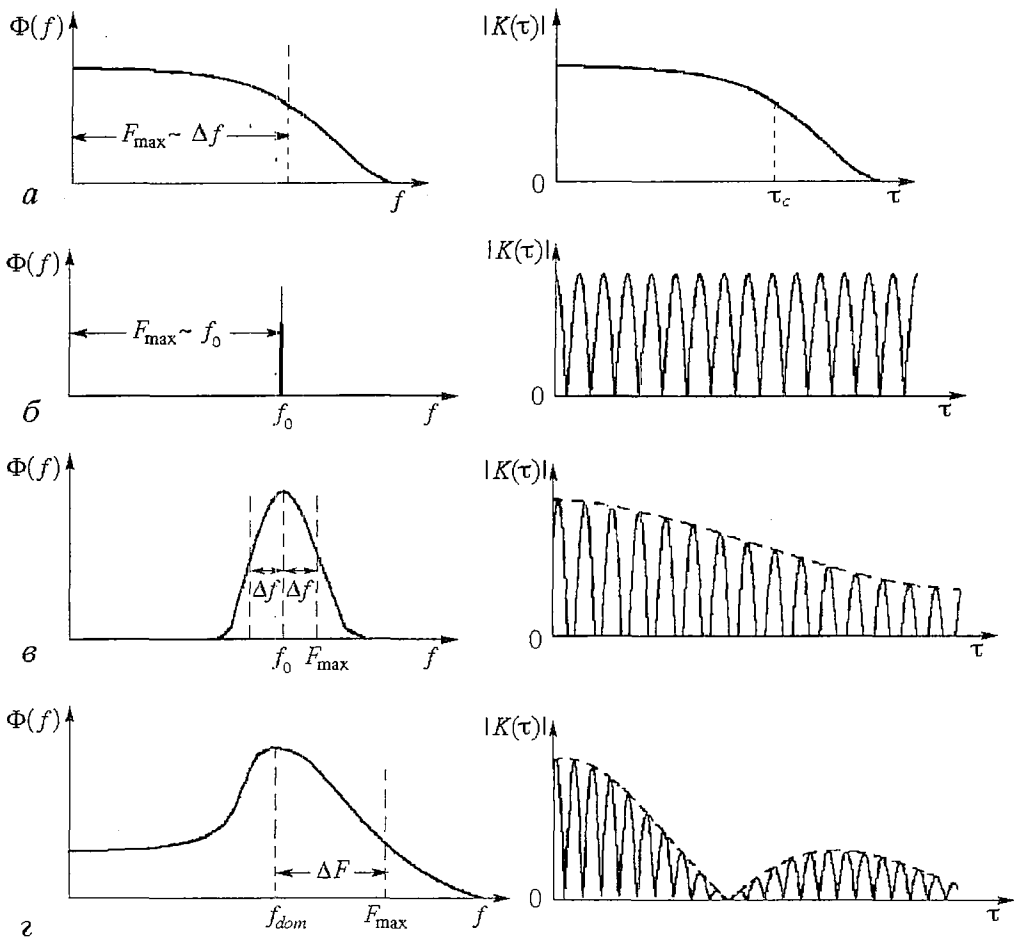


Рис. 1. Оценки верхней границы спектра  $F_{\max}$  и вид корреляционной функции  $K(\tau)$  для четырех видов спектра: а – для низкочастотного процесса с нулевой несущей; б – для монохроматического процесса; в – для узкополосного процесса с несущей  $f_0$ ; г – для широкополосного процесса с доминантной частотой в спектре

низких частот, а корреляционная функция  $K(\tau)$ , связанная с  $\Phi(f)$  преобразованием Фурье (теорема Винера – Хинчина), не имеет ярко выраженных осцилляций (рис. 1, а). В качестве  $F_{\max}$  здесь выступает ширина спектра  $\Delta f$ :  $F_{\max} \approx \Delta f$ . На правом рисунке – типичная корреляционная функция процесса с низкочастотным спектром. Учитывая, что радиус корреляции  $\tau_c$  для широкого плана процессов с низкочастотным спектром сопоставим с половиной наименьшего квазипериода  $T_{\min}$ ,

$$\tau_c \leq T_{\min}/2 \sim 1/(2F_{\max}). \quad (4)$$

Соотношение (3) часто записывают также в виде

$$\tau \leq (1/5 \dots 1/3)\tau_c \approx (0.2 \dots 0.3)\tau_c. \quad (5)$$

Именно эта оценка и рекомендуется для практического использования в руководствах [1–3] и в публикациях [4–7].

В случае монохроматического процесса с частотой  $f_0$  спектр представляет собой дельта-функцию, удаленную от начала оси частот на расстояние  $f_0$  (рис. 1, б), так что  $F_{\max} = f_0$ . Корреляционная функция такого процесса представляет собой синусоиду бесконечной протяженности с периодом  $T_0 = 1/f_0$ .

В случае узкополосного сигнала с несущей  $f_0$  и шириной спектра  $2\Delta f$  (рис. 1, в) под  $F_{\max}$  естественно понимать величину  $F_{\max} = f_0 + \Delta f$ , то есть расстояние от начала отсчета до правого (на рисунке) склона спектра. Корреляционная функция в этом случае представляет собой синусоидальный процесс с медленно меняющейся огибающей. Такая функция характеризуется двумя масштабами: периодом осцилляций  $\tau_{c1} \sim 1/f_0$  и характерным временем изменения огибающей  $\tau_{c2} \sim 1/\Delta f$ .

Наконец, для широкополосного сигнала, в спектре которого доминируют колебания с частотой  $f_{\text{dom}}$  (рис. 1, г), под  $F_{\max}$  следует понимать величину  $F_{\max} \approx f_{\text{dom}} + \Delta f$ , ограничивающую спектр со стороны высоких частот. Корреляционная функция широкополосного процесса, как и в предыдущем примере, имеет вид модулированной синусоиды. Такая корреляционная функция характеризуется двумя масштабами:  $\tau_{c1} \approx T_{\text{dom}}/2 \approx 1/(2f_{\text{dom}})$  и  $\tau_{c2} \approx 1/\Delta f$ .

В соответствии с теоремой Котельникова, во всех четырех случаях частота повторения отсчетов  $f_{\tau} = 1/\tau$  должна превышать удвоенную верхнюю границу спектра  $2F_{\max}$ :

$$f_{\tau} > 2F_{\max}. \quad (6)$$

При  $\tau > 1/(2F_{\max})$  или, что то же самое, при  $f_{\tau} < 2F_{\max}$  восстановление непрерывной функции  $y(t)$  по дискретным отсчетам  $y_k = y(k\tau)$  становится принципиально невозможным.

Из сказанного следует, что оценка (3) применима, строго говоря, только к колебаниям с низкочастотным спектром. В общем случае оценка (1) эквивалентна оценке (3), только если под радиусом корреляции  $\tau_c$  понимать *наименьший* корреляционный масштаб  $\tau_{c1}$ , сравнимый с  $1/(2F_{\max})$ , поскольку именно наименьший масштаб определяет (по теореме Котельникова) возможность восстановления непрерывного процесса  $y(t)$  по дискретному временному ряду  $y_k$ . В этом и заключается уточнение оценки (1): формулы вида (1) и (5) всегда будут согласованы с теоремой Котельникова, если вместо  $\tau_c$  в них подставлять  $\tau_{c1} \approx T_{\min}/2$ . В таком случае  $\tau$  должно удовлетворять неравенству

$$\tau \leq (0.2 \dots 0.3)\tau_{c1}, \quad \tau_{c1} \sim T_{\min}/2 \sim 1/(2F_{\max}). \quad (7)$$

С этих общих позиций мы можем рассмотреть теперь результаты расчетов, проведенных в работе [8], более детально.

В комментариях [8] вычислены (при определенных значениях параметров) корреляционная функция и спектральная плотность для хаотической системы Ресслера. Эти характеристики системы Ресслера приведены на рис. 2 (корреляционная функция) и на рис. 3 (спектральная плотность в децибелах). Особенностью системы Ресслера является наличие пика спектральной плотности в окрестности доминантной частоты  $f_{\text{dom}} \approx 0.15$  (см. рис. 3), так что качественно спектр системы Ресслера подобен спектру на рис. 1, г. Полуширина этого спектра  $\Delta f$  на уровне 0.5 от максимума составляет (0.05...0.1).

Наличие доминантной частоты проявляется здесь двояко. Во-первых, отдельные реализации колебаний в системе Ресслера имеют отчетливый квазисинусоидальный характер, как это видно, например, из рис. 4, тоже заимствованного из [8]. Характерный квазипериод колебаний  $T_{\min}$  составляет  $5 \pm 6$ ,

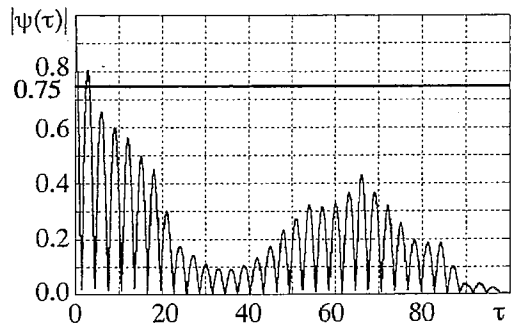


Рис. 2. Корреляционная функция процесса Ресслера, демонстрирующая осцилляции с доминантной частотой и медленное убывание огибающей с характерным временем  $\tau_{c2} \sim 1/\Delta f$

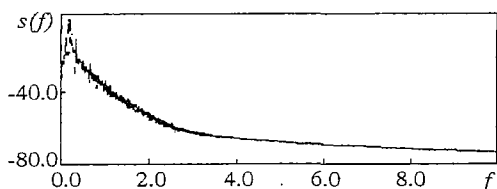


Рис. 3. Спектр мощности, рассчитанный по реализации  $x(t)$  системы Ресслера (заимствовано из [8, рис. 2]) с хорошо выраженной доминантной частотой  $f_{\text{dom}} \approx 0.15$  Гц

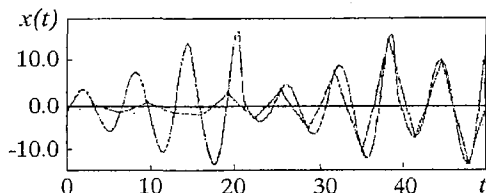


Рис. 4. Фрагмент реализации  $x(t)$  системы Ресслера (заимствовано из [8, рис. 4, a]); свидетельствует о наличии в спектре доминантной частоты. Точки, соединенные отрезками прямых линий, отвечают неправомерно большому интервалу дискретизации  $\tau_{c2}$ , нарушающему требования теоремы Котельникова

что согласуется с величиной доминантной частоты  $f_{\text{dom}} \sim 0.15$ . Во-вторых, в силу наличия доминантной частоты функция корреляции приобретает осциллирующий характер с характерным периодом  $T_{\text{min}} \sim 5 \div 6$ . Огибающая же корреляционной функции меняется с характерным временем  $15 \div 20$ , отвечающим полуширине спектра  $\Delta F \sim (0.05 \dots 0.1)$ .

Согласно изложенному выше, рекомендуемый интервал дискретизации для рассматриваемой системы можно оценить несколькими способами. Во-первых, располагая значением  $T_{\text{min}} \sim 5 \div 6$  из рис. 4, при помощи (1) мы получаем  $\tau \approx (0.6 \dots 1.0)$ . Во-вторых, такую же оценку для  $T_{\text{min}}$  мы получим, если оценим  $T_{\text{min}}$  либо как  $1/F_{\text{max}}$ , где в данном случае  $F_{\text{max}} = f_{\text{dom}} + \Delta F \approx (0.20 \div 0.25)$ , либо как период осцилляций на графике корреляционной функции (см. рис. 2). Во всех случаях для  $\tau$  мы получаем одну и ту же оценку  $\tau \approx (0.6 \dots 1.0)$ , что, разумеется, не противоречит теореме Котельникова.

Между тем, в комментариях [8] в качестве  $\tau_c$  предлагается взять характерное время спадания *огibaющей* корреляционной функции  $\tau_{c2}$ , которое оценивается величиной  $15 \div 20$ . Тогда по оценкам [8] выходит, что  $\tau \approx 3.2$ , то есть интервал дискретизации оказывается сравнимым с половиной квазипериода  $T_{\text{min}} \approx 5 \div 6$ . Ясно, что условия применимости теоремы Котельникова в этом случае нарушаются и сигнал  $y(t)$  восстановлен быть не может. Именно этот *неправомерный* выбор и иллюстрирует рис. 4, заимствованный из [8]. Если взять адекватную задаче оценку  $\tau \approx (0.6 \dots 1.0)$ , то на типичном квазипериоде уложится  $6 \div 10$  точек, что вполне достаточно для удовлетворительного воспроизведения как самого сигнала  $y(t)$ , так и фазового портрета системы Ресслера.

Таким образом, авторы вынуждены признать, что наш обзор [7] не содержал четкой интерпретации времени корреляции, необходимой для правильного использования формулы (1) в общем случае. Надлежащая интерпретация радиуса корреляции, при которой рекомендация (1) согласуется с требованиями теоремы Котельникова, предполагает, что при наличии доминантной частоты в качестве  $\tau_c$  надо брать не характерное время изменения огибающей, а мелкомасштабный период  $\tau_{c1}$  осцилляций корреляционной функции.

Данная работа частично была поддержана РФФИ (гранты 99-02-16625 и 00-02-17441) и ФЦП «Интеграция» (грант А-0030).

## Библиографический список

1. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя / Пер. с англ. под ред. Я.З. Цыпкина. М., 1991. 432 с.
2. Современные методы идентификации систем / Под. ред. М.Эйкхоффа. М.: Мир, 1983.
3. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. с. 584.
4. *Broomhead D.S., King G.P.*//Phys.D. 1986. Vol. 20. P. 217.
5. *Ланда П.С., Розенблюм М.Г.* Об одном методе оценки размерности вложения аттрактора по результатам эксперимента // ЖТФ. 1989. Т. 59, №1. С. 13.
6. *Ланда П.С., Розенблюм М.Г.* Сравнение методов конструирования фазового пространства и определение размерности пространств аттрактора по экспериментальным данным // ЖТФ. 1989. Т. 59, №11. С. 1.
7. *Аносов О.Л., Бутковский О.Я., Кравцов Ю.А.* Восстановление динамических систем по хаотическим временным рядам: краткий обзор // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, №1. С. 29.
8. Комментарий редакционной коллегии к статье О.Л. Аносова, О.Я. Бутковского и Ю.А. Кравцова. «Восстановление динамических систем по хаотическим временным рядам» // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, №1. С. 48.
9. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. М.: «Советское радио», 1974, 552 с.

*Владимирский госуниверситет  
Институт космических  
исследований РАН  
Space Research Center  
Polish Academy of Sciences*

*Поступила в редакцию 28.12.2000  
после доработки 28.03.2001*

## ON THE RATIONAL CHOICE OF DISCRETIZATION INTERVAL FOR PROCESSES WITH SPECTRUM, CONTAINING DOMINANT FREQUENCY

*O.Ya. Butkovskii, Yu.A. Kravtsov*

Basic concepts are analysed, leading to the estimate  $\tau=(0.2...0.3)\tau_c$ , which expresses the discretization interval  $\tau$  through the correlation time  $\tau_c$ . There are two time-scales, characterizing the correlation function of processes with spectrum, containing dominant frequency. Only the least scale can pretend to be chosen as  $\tau_c$ , which is comparable with the period of dominant oscillations. Such choice answers the Kotelnikov theorem requirements.



*Бутковский Олег Ярославович* – родился в Магнитогорске (1949). Окончил Магнитогорский педагогический институт (1973). После окончания работал в лаборатории физико-химических исследований МПИ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Московском педагогическом государственном университете по специальности радиофизика, в области теории колебаний и волн (1987). С 1987 года работает во Владимирском государственном университете. Область научных интересов – нелинейная динамика, нелинейная акустика, моделирование нелинейных явлений в медико-биологических системах. Опубликовал более 40 научных статей. E-mail: olegb@vpti.vladimir.ru



*Кравцов Юрий Александрович* – родился в Москве (1937). Окончил Московский энергетический институт (1960). После окончания института работал в РТИ АН СССР (до 1972), в Московском государственном педагогическом институте (до 1979), в Институте общей физики АН (до 1993). В настоящее время заведует отделом Института космических исследований РАН и является консультантом Центра космических исследований Польской Академии Наук. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в МГПИ (1963) и доктора физико–математических наук в области асимптотических методов волновой теории (1968). Автор и соавтор монографий «Введение в статистическую радиофизику», «Параметрические генераторы и делители частоты», «Геометрическая оптика неоднородных сред», «Caustics, catastrophes and wave fields», «Пределы предсказуемости», «Predictability of complex dynamical systems». Опубликовал свыше 300 научных статей в области волновой теории, статистической радиофизики и нелинейной динамики. Лауреат Государственной премии СССР. Член редколлегий журналов «Известия вузов. Радиофизика», «Акустический журнал», «Космическая радиофизика». E-mail: [kravtsov@asp.iki.rssi.ru](mailto:kravtsov@asp.iki.rssi.ru)

*Настоящее сообщение представляет собой ответ авторов обзора «Восстановление динамических систем по хаотическим временным рядам» (Изв. вузов. ПНД. 2000. Т. 8, № 1. С. 29) на критические замечания редколлегии, опубликованные вместе с указанной работой. Авторы согласились с тем, что в предыдущей статье не было дано четкой интерпретации понятия времени корреляции, что практически необходимо для правильного использования алгоритмов реконструкции.*

*В настоящей работе этот вопрос обсуждается авторами более детально, что представляется важным для решения практических задач реконструкции динамических систем по экспериментальным данным. Редколлегия считает дискуссию завершенной и надеется, что ее результаты будут интересны и полезны читателям нашего журнала.*



## ЭФФЕКТЫ СИНХРОНИЗАЦИИ В ЦЕПОЧКЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ БИСТАБИЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

*А.С. Копейкин, Д.Д. Матюшкин, Т.Е. Вадивасова,  
О.В. Сосновцева, В.С. Анищенко*

Численно исследуется явление пространственно–временной синхронизации в цепочке взаимно и однонаправленно связанных бистабильных осцилляторов, совершающих колебания под действием шума. Эффекты регуляризации проявляются в синхронизации средних частот переключений и в образовании стоячих и бегущих волн.

### Введение

Пространственно распределенные системы служат основой для изучения и моделирования пространственно–временного поведения в гидродинамике, химических реакциях, биологических системах и т.д. В них наблюдается широкий класс интересных явлений, которые не могут происходить в динамических системах с небольшим числом степеней свободы. Одной из наиболее популярных моделей пространственно распределенной системы является ансамбль взаимодействующих нелинейных генераторов [1]. Примерами из этой области служат цепочки контактов Джозефсона [2], взаимодействующие твердотельные лазеры [3], нейронные сети [4] и др. Кооперативное поведение большого числа связанных автоколебательных систем демонстрирует множество эффектов, среди которых можно выделить такие явления как кластеризация, образование когерентных структур и синхронизация.

Синхронизация является классическим примером самоорганизации в нелинейных автогенераторах. При этом следует учитывать, что реальные системы, как сосредоточенные [5], так и пространственно распределенные [6], подвержены случайным внешним воздействиям. Синхронизация автоколебаний в присутствии шума детально изучалась в [7]. Исследования последних лет показали, что эффекты, подобные синхронизации, наблюдаются не только в автоколебательных системах, но и в так называемых стохастических осцилляторах (то есть в таких системах, в которых колебания возникают благодаря действию шума). Так классическая концепция синхронизации была обобщена на широкий класс

бистабильных стохастических систем, для которых время возврата в исходное состояние представляет собой случайную величину [8–12]. В таких системах был обнаружен эффект захвата средних частот и мгновенных фаз переключений (стохастическая синхронизация).

Растущий интерес исследователей к системам с шумом приводит к постановке задач о стохастической синхронизации цепочек и решеток, состоящих из большого числа взаимодействующих стохастических осцилляторов. В работах [13–15] было показано, что цепочки и двумерные решетки связанных стохастических осцилляторов при некотором оптимальном уровне шума способны передавать слабый периодический сигнал и демонстрировать эффект стохастического резонанса. Однако изложенные результаты не несут информации относительно поведения индивидуальных частот и фаз парциальных осцилляторов. Исключением является работа [16], в которой решетка стохастических осцилляторов возбуждаемого типа рассматривается с точки зрения поведения мгновенных фаз осцилляторов. В то же время эффект частотно–фазовой синхронизации ансамбля бистабильных стохастических систем в настоящее время остается еще недостаточно изученным.

В данной работе мы стремимся детально исследовать явление возникновения упорядоченных структур под действием некоррелированного шума для важного класса стохастических систем, а именно, в цепочках бистабильных стохастических осцилляторов. В частности, мы ищем ответы на следующие вопросы. Как в цепочке стохастических бистабильных осцилляторов происходит согласование частот и фаз переключений отдельных элементов? Как влияют на эффекты синхронизации неидентичность параметров парциальных систем и тип связи?

## 1. Модели

В целях изучения эффектов синхронизации стохастических колебаний мы рассматриваем две базовые модели, описывающие бистабильную динамику: стохастический осциллятор Дуффинга и триггер Шмитта.

Нелинейный осциллятор Дуффинга под внешним воздействием изучается уже два десятилетия. Он часто используется для демонстрации разнообразных динамических колебательных режимов [17,18] и индуцированных шумом эффектов [19, 20].

Осциллятор Дуффинга, возбуждаемый случайной силой, можно рассматривать как модель стохастических колебаний броуновской частицы в двухъямном потенциале. Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + dU(x)/dx = D^{1/2}\xi(t). \quad (1)$$

Функция  $U(x) = -\alpha x^2/2 + \beta x^4/4$  задает форму потенциала, параметр  $\delta$  управляет рассеянием энергии,  $\xi(t)$  – источник гауссова белого шума с интенсивностью  $D$  и следующими свойствами:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(s) \rangle = \delta(t-s).$$

Здесь символы  $\langle \rangle$  и  $\delta(\ )$  обозначают оператор усреднения по времени и функцию Дирака, соответственно.

Уравнение (1) – классическая бистабильная система, называемая также осциллятором Крамерса. В отсутствие внешнего воздействия она характеризуется двумя устойчивыми состояниями равновесия и одним состоянием равновесия



седлового типа. Случайное воздействие обеспечивает переключения из одного состояния равновесия в другое.

В работе исследуется цепочка осцилляторов Крамерса, описываемая уравнениями

$$\dot{x}_j = y_j, \quad \dot{y}_j = -\delta y_j - dU_j(x_j)/dx_j + \gamma G_j(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) + (D_j)^{1/2} \xi_j(t), \quad j=1,2,\dots,m. \quad (2)$$

Здесь  $j$  – номер осциллятора в цепочке (дискретная пространственная координата), параметр  $\gamma$  характеризует степень связи, в то время как функции  $G_j$  определяют характер связи. Источники шума  $\xi_j(t)$ ,  $j=1,2,3,\dots,m$  – статистически независимы.

Триггер Шмитта – одна из самых простых пороговых систем [21,22], обладающих статической нелинейностью гистерезисного типа. В некотором приближении можно считать, что состояние триггера Шмитта безинерционным образом управляется с помощью механизма переключений. В этом состоит его преимущество по сравнению с инерционными бистабильными системами. Для последних существенно трудно поддающиеся анализу стохастические процессы, протекающие в пределах одной потенциальной ямы. При математическом моделировании идеальный триггер Шмитта задается уравнением

$$\dot{x}(t+\Delta t) = \text{sgn}(Kx(t) - \xi(t)). \quad (3)$$

Здесь  $\xi(t)$  – экспоненциально-коррелированный гауссов шум (процесс Орнштейна – Уленбека) с нулевым средним значением. Его корреляционная функция имеет вид  $\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = (D/\tau) \exp(-|t-s|/\tau)$ , где величина  $\tau=0.01$  – время корреляции шума. Параметр  $K$  характеризует порог срабатывания триггера.

Цепочка таких идеальных бистабильных систем, демонстрирующих чисто переключательное поведение, описывается уравнениями

$$\dot{x}_j(t+\Delta t) = \text{sgn}(Kx_j(t) - \gamma G_j(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) - \xi_j(t)), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

В рамках данной работы в моделях (2), (4) рассматривалась взаимная связь  $G_j = x_{j+1} + x_{j-1} - 2x_j$  и однонаправленная связь  $G_j = x_{j-1}$

Стохастические бистабильные системы имеют характерное время, которое соответствует средней частоте переключений из одного состояния в другое. Эта частота управляется интенсивностью шума и величиной потенциального барьера  $\Delta U$ . Так, для модели (1) средняя частота переключений (частота Крамерса) определяется экспоненциальным законом Аррениуса [23]

$$f \propto \exp(-\Delta U/D). \quad (5)$$

Следовательно, расстройка средних частот переключений в ансамбле осцилляторов может быть задана распределением интенсивностей шума  $D_j$

$$D_j = D_1 + [(j-1)/(m-1)]\Delta \quad (6)$$

или выбором значений параметров, управляющих высотой барьера

$$\alpha_j = \alpha_1 + [(j-1)/(m-1)]\Delta, \quad (7)$$

где  $\Delta$  – расстройка, установленная между первым и последним генераторами. Цепочки (2) и (4) исследовались с граничными условиями, соответствующими свободным концам. Начальные состояния парциальных осцилляторов выбирались так, чтобы обеспечить их случайное распределение по потенциальным ямам.

Полученные при интегрировании исследуемых моделей реализации стохастических колебаний парциальных осцилляторов позволяли вычислить соответствующие средние частоты переключений  $f_j = N_j / T$ , где  $N_j$  – число

переключений  $j$ -го осциллятора из одного состояния в другое (с учетом направления) за время наблюдения  $T$ . Для оценки степени синфазности переключений осцилляторов (под синфазностью понимается одновременность пребывания различных осцилляторов в одной и той же потенциальной ямке) рассматривалась величина

$$\sigma_x^2 = (1/m) \sum_{j=1}^m \langle x_j(t) - x_1(t) \rangle^2. \quad (8)$$

В целях получения более наглядного представления о поведении цепочки строились пространственно-временные диаграммы состояний, на которых пребывание каждого из осцилляторов цепочки в левой и правой ямке отмечалось соответственно черным и белым цветом.

## 2. Пространственно-временное поведение цепочек стохастических осцилляторов

Согласно недавним результатам [8–10], при взаимодействии бистабильных стохастических систем, с различными частотами переключений наблюдается явление стохастической синхронизации. Стохастическая синхронизация определяется как совпадение характерных средних времен или средних частот парциальных систем. Такой подход позволяет проанализировать разнообразие явлений, возникающих при взаимодействии большого количества связанных стохастических осцилляторов.

**Взаимная связь.** Для изучения общего характера поведения цепочек стохастических осцилляторов и установления рабочего диапазона параметров сначала исследовалась динамика цепочек, состоящих из идентичных взаимно связанных элементов, находящихся под воздействием шума одинаковой интенсивности (то есть  $D_j = D, j=1, 2, \dots, m$ ).

На рис. 1, *a* представлены полученные для однородной цепочки (2) зависимости средней частоты переключений  $F$  от интенсивности шума  $D$  при различных значениях коэффициента связи. Средняя частота  $F$  определялась усреднением парциальных частот переключений по ансамблю осцилляторов

$$F = (1/m) \sum_{j=1}^m f_j. \quad (9)$$

На основании полученных данных выбиралась область рабочих значений

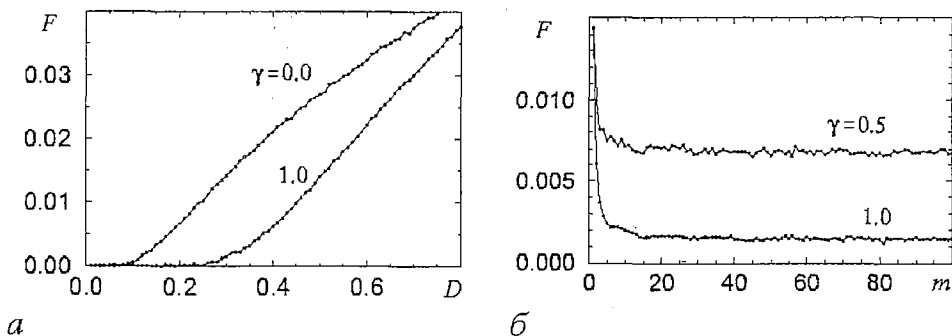


Рис. 1. Зависимости средней частоты переключений  $F$  от интенсивности шума  $D$  для цепочки длиной  $m=100$  (*a*) и от числа элементов цепочки при  $D=0.3$  (*б*). Результаты получены для однородной цепочки (2) со взаимной связью при  $\alpha=\beta=1, \delta=0.9$

$D \in [0.25, 0.3]$ , удовлетворяющих следующим условиям:  $F$  растет по экспоненте с ростом  $D$  и переключения между состояниями происходят достаточно часто, чтобы можно было говорить о стохастическом поведении. Рис. 1, б иллюстрирует зависимость  $F$  от длины цепочки  $m$  при фиксированном значении параметра связи. Величина  $F$  экспоненциально убывает с ростом  $m$ , стремясь к некоторому постоянному уровню. Видно, что при  $m > 20$  величина  $F$  уже практически не меняется при изменении  $m$ . Следовательно, цепочка из ста элементов ( $m=100$ ) является достаточно длинной и позволяет моделировать некоторые особенности поведения неограниченной среды.

В однородной цепочке индивидуальные частоты переключений осцилляторов  $f_j$  в пределах ошибок численного эксперимента равны между собой. Исключение составляют частоты первого и последнего осцилляторов, что объясняется краевым эффектом (рис. 2, а). С увеличением связи индивидуальные частоты растут до максимального значения при  $\gamma \approx 0.15$  и затем уменьшаются, стремясь к нулю. Стохастические переключения с ростом связи практически перестают наблюдаться. Таким образом, во взаимодействующих бистабильных системах, управляемых *некоррелированными* случайными воздействиями, может наблюдаться согласованное поведение и даже подавление стохастических переключений. Следует отметить, что для бистабильных систем, возбуждаемых одной и той же случайной силой  $\xi_j(t) \equiv \xi(t)$ , эффект подавления колебаний не наблюдается. В этом случае осцилляторы демонстрируют синфазное поведение  $x_j(t) \equiv x_1(t)$ ,  $y_j(t) \equiv y_1(t)$ ,  $j=2, \dots, m$  и частоты переключений управляются только интенсивностью шума (пунктирная линия на рис. 2, а).

Ансамбль осцилляторов с неидентичными параметрами и, как следствие, с различными характерными временами и частотами интересен и с концептуальной точки зрения, и в силу типичности такой ситуации во многих реальных системах. При задании в (2) расстройки частот переключений в соответствии с (6), взаимодействие осцилляторов, как и в случае однородной цепочки, приводит к тому, что с ростом параметра связи индивидуальные частоты переключений  $f_j$  становятся близкими к нулю (рис. 2, б). Кроме того, при значениях параметра связи  $\gamma > 0.4$  наблюдается сближение индивидуальных частот, которое можно рассматривать как эффект стохастической синхронизации. Зависимость дисперсии

индивидуальных частот  $\sigma_x^2 = (1/m) \sum_{j=1}^m f_j^2 - F^2$  от параметра  $\gamma$  приведена на рис. 2, в.

При задании расстройки в соответствии с (7) поведение парциальных частот было аналогичным (рис. 3).

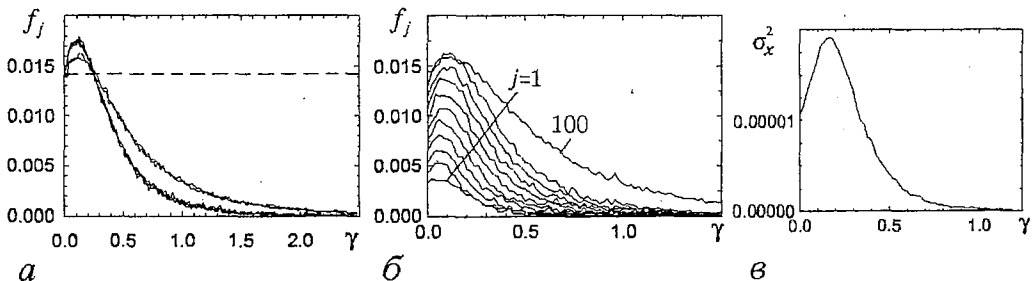


Рис. 2. Зависимости индивидуальных частот  $f_j$  ( $j=1, 20, 40, 60, 80, 100$ ) переключений осцилляторов модели (2) при  $\alpha=\beta=1$ ,  $\delta=0.9$  от параметра связи  $\gamma$ : а – в случае идентичных осцилляторов  $D_1=D=0.3$  (пунктиром отмечена зависимость, полученная для всех осцилляторов при использовании одного и того же источника шума в каждой ячейке); б – в случае введения расстройки согласно (6) при  $D_1=0.15$ ,  $\Delta=0.15$ ; в – зависимость дисперсии частот  $f_j$  от  $\gamma$

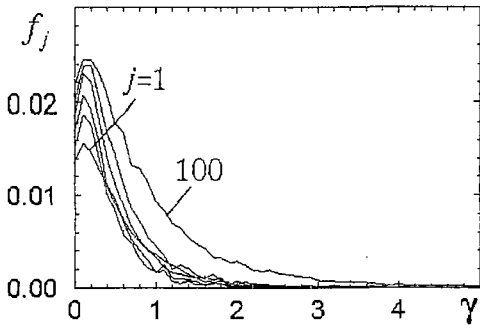


Рис. 3. Индивидуальные частоты переключений осцилляторов системы (2) с номерами  $j=1, 20, 40, 60, 80, 100$  в зависимости от параметра связи при введении расстройки в соответствии с (7) при  $\alpha_1=1.0, \Delta=-0.2$

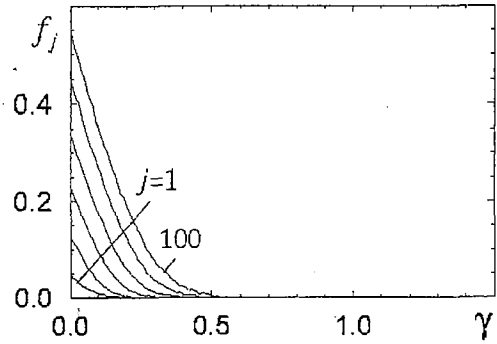


Рис. 4. Индивидуальные частоты переключений осцилляторов системы (4) с номерами  $j=1, 20, 40, 60, 80, 100$  в зависимости от степени взаимной связи при введении расстройки согласно (6) при  $D_1=0.4, \Delta=0.4$ . Параметр  $K$  полагался равным единице

Мы полагаем, что эффект подавления индуцированных шумом переключений типичен для бистабильных систем со взаимной связью. Он не зависит от способа задания расстройки частот – с помощью вариации интенсивности шума или значений параметра, управляющего высотой потенциального барьера. В целях подтверждения общности обнаруженного эффекта была исследована цепочка триггеров Шмитта (4) с линейной расстройкой интенсивностей шума. Результаты подтвердили полную аналогию в поведении парциальных частот двух исследованных систем (рис. 4). Подавление стохастических колебаний, вызванное взаимодействием парциальных систем, напоминает эффект «осцилляторной смерти», наблюдающийся в ансамблях автогенераторов [24]. Отличие состоит в том, что в детерминированном случае для достаточно больших расстроек связь приводит к шунтированию автоколебаний и амплитуда колебаний стремится к нулю. При этом их частота имеет постоянное значение. Напротив, в рассматриваемом нами случае стохастических осцилляторов к нулю стремятся частоты переключений. Более полная аналогия может быть проведена с эффектом образования замороженных состояний, наблюдающимся в ансамбле гармонических осцилляторов [25].

Эффект подавления играет упорядочивающую роль в поведении ансамбля. Кроме сближения и уменьшения частот стохастических переключений устанавливается соответствие между фазами переключений. Для системы (2) со

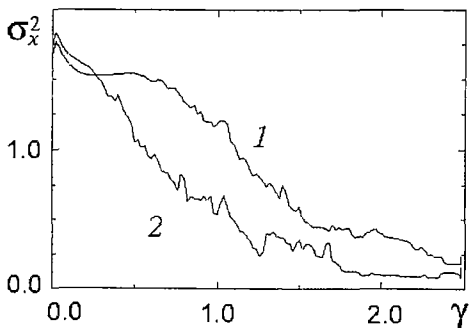


Рис. 5. Зависимость величины  $\sigma_x^2$  от степени взаимной связи для цепочки (2), состоящей из идентичных элементов (кривая 1) и из элементов с разными частотами переключений (кривая 2);  $\alpha=\beta=1, \delta=0.9$

взаимной связью наблюдается тенденция к синфазному поведению осцилляторов, то есть в установленный момент времени большинство генераторов долго находятся в одной «потенциальной яме». Величина  $\sigma_x^2$  с увеличением связи уменьшается (рис. 5, кривая 1). Это означает, что все осцилляторы стремятся совершать переключения одновременно с первым осциллятором цепочки. Аналогичные эффекты наблюдаются при введении расстройки индивидуальных частот в соответствии с условием (6) (рис. 5, кривая 2).

На рис. 6 приведены пространственно–временные диаграммы состояний цепочки (2) из 100 осцилляторов со взаимной связью. Белый цвет соответствует положению парциального осциллятора в левой ямке, а черным отмечено положение в правой ямке. Первоначально все осцилляторы были распределены по разным потенциальным ямкам случайным образом. При слабой связи осцилляторы могут находиться в каждом из двух состояний с почти равной вероятностью. Это отражено в равном количестве черных и белых ячеек, которые распределены произвольным образом (рис. 6, а). С увеличением связи формируются области одного цвета (рис. 6, б). Но переключения не полностью синфазны, поэтому границы цветных областей размыты. При дальнейшем увеличении связи чередование цветных областей становится редким (рис. 6, в), что является следствием замедления переключений.

В детерминированном случае появление синфазного режима соответствует полной синхронизации взаимодействующих систем [26]. В ансамбле бистабильных систем, управляемых некоррелированными случайными воздействиями, полная синхронизация не достигается. Однако, с другой стороны, сильное взаимодействие может препятствовать несинфазным колебаниям. В работе [16] показано, что в системе двух взаимно связанных бистабильных осцилляторов с независимыми источниками шума, возникновение когерентности стохастических переключений связано с бифуркациями вероятностной инвариантной меры. В результате только синфазные переходы становятся возможными. Подобное поведение типично и для ансамбля стохастических осцилляторов с диффузионной связью.

Однако в некоторых случаях синхронизация в ансамбле стохастических бистабильных осцилляторов с взаимной связью может приводить и к противофазным колебаниям осцилляторов. Такое поведение было обнаружено в модели (4). Пространственно–временные диаграммы, полученные для (4) при различных значениях параметра связи, представлены на рис. 7. Белый цвет по-

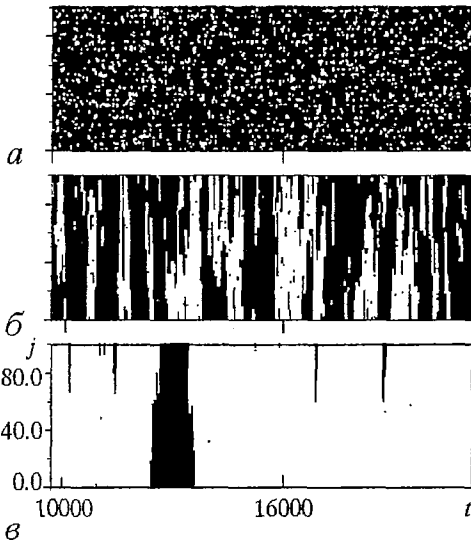


Рис. 6. Пространственно–временные диаграммы цепочки (2) со взаимной связью элементов при значениях параметра связи  $\gamma$ : 0.1 (а); 0.8(б); 2.0 (в). Осцилляторы цепочки расстроены в соответствии с (6). Белым цветом отмечены состояния с отрицательными значениями переменных  $x_j$ , а черным – с положительными

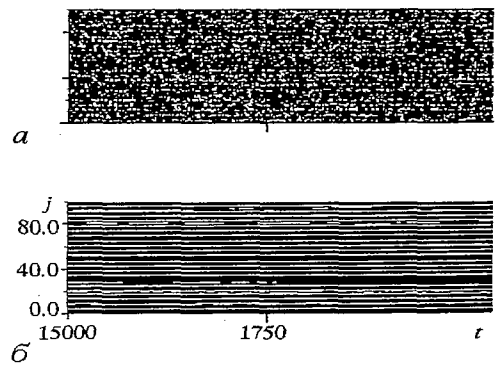


Рис. 7. Пространственно–временные диаграммы цепочки (4) со взаимной связью элементов при значениях параметра связи  $\gamma$ : 0.2 (а); 0.4 (б). Осцилляторы цепочки расстроены в соответствии с (6). Белым цветом отмечены состояния с отрицательными значениями переменных  $x_j$ , а черным – с положительными

прежнему соответствует левому устойчивому состоянию парциального осциллятора, а черный – правому.

**Однонаправленное взаимодействие.** Рассмотрим теперь, как изменится поведение цепочки стохастических осцилляторов при однонаправленной связи. В этом случае состояние любого парциального осциллятора не зависит от процессов, происходящих в последующих элементах цепочки, но находится под влиянием сигнала, поступающего с предшествующего осциллятора.

Частота переключений  $F$ , усредненная по ансамблю идентичных осцилляторов (2), демонстрирует то же самое поведение (рис. 8), что и при взаимной связи (см. рис. 1, а). Однако теперь  $F$  возрастает с увеличением коэффициента связи, поскольку происходит увеличение сигнала, воздействующего на каждый последующий элемент.

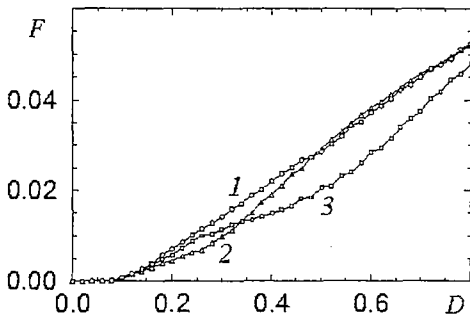


Рис. 8. Усредненная по всем осцилляторам частота переключений  $F$  в зависимости от интенсивности шума в цепочке (2) с односторонним взаимодействием и идентичными элементами при  $\alpha=\beta=1$ ,  $\delta=0.9$  и различных значениях параметра связи  $\gamma$ : 0.0 (кривая 1); 0.5 (кривая 2); 1.0 (кривая 3)

При наличии расстройки частот переключений (согласно (6)) наблюдается эффект захвата частот (рис. 9, а). С увеличением связи происходит согласование стохастических переключений осцилляторов. В отличие от взаимной связи, когда все индивидуальные частоты стремятся к нулевому значению, теперь частоты становятся близкими к частоте переключений первого осциллятора цепочки. Важно отметить, что эффект захвата частоты наблюдается в пределах некоторого диапазона изменения параметра связи. При достижении некоторого критического значения  $\gamma=\gamma_{кр}$  когерентность переключений парциальных осцилляторов разрушается. В цепочке триггеров Шмитта (4) с однонаправленным взаимодействием элементов также наблюдается синхронизация индивидуальных частот переключений на частоте первого осциллятора (рис. 9, б). В отличие от модели (2) разрушения синхронизации с ростом  $\gamma$  не происходит.

Таким образом, в цепочке однонаправленно связанных стохастических осцилляторов цепочки. Важно отметить, что эффект захвата частоты наблюдается в пределах некоторого диапазона изменения параметра связи. При достижении некоторого критического значения  $\gamma=\gamma_{кр}$  когерентность переключений парциальных осцилляторов разрушается. В цепочке триггеров Шмитта (4) с однонаправленным взаимодействием элементов также наблюдается синхронизация индивидуальных частот переключений на частоте первого осциллятора (рис. 9, б). В отличие от модели (2) разрушения синхронизации с ростом  $\gamma$  не происходит.

Таким образом, в цепочке однонаправленно связанных стохастических осцилляторов цепочки. Важно отметить, что эффект захвата частоты наблюдается в пределах некоторого диапазона изменения параметра связи. При достижении некоторого критического значения  $\gamma=\gamma_{кр}$  когерентность переключений парциальных осцилляторов разрушается. В цепочке триггеров Шмитта (4) с однонаправленным взаимодействием элементов также наблюдается синхронизация индивидуальных частот переключений на частоте первого осциллятора (рис. 9, б). В отличие от модели (2) разрушения синхронизации с ростом  $\gamma$  не происходит.

Таким образом, в цепочке однонаправленно связанных стохастических осцилляторов цепочки. Важно отметить, что эффект захвата частоты наблюдается в пределах некоторого диапазона изменения параметра связи. При достижении некоторого критического значения  $\gamma=\gamma_{кр}$  когерентность переключений парциальных осцилляторов разрушается. В цепочке триггеров Шмитта (4) с однонаправленным взаимодействием элементов также наблюдается синхронизация индивидуальных частот переключений на частоте первого осциллятора (рис. 9, б). В отличие от модели (2) разрушения синхронизации с ростом  $\gamma$  не происходит.

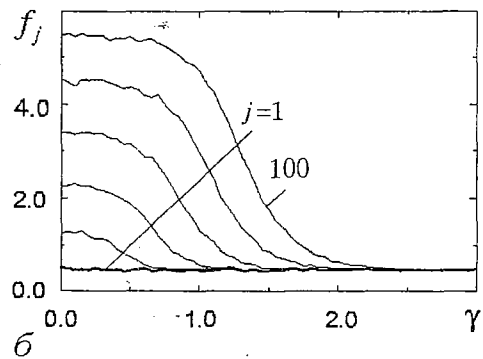
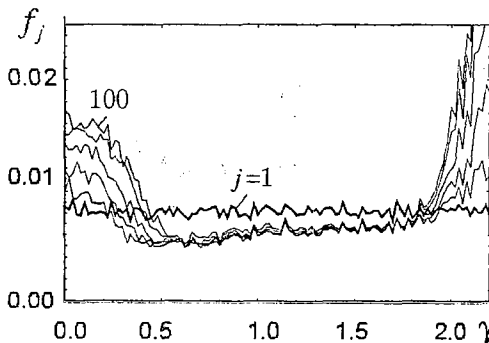


Рис. 9. Синхронизация индивидуальных частот переключений в однонаправленно связанной неоднородной цепочке осцилляторов Дуффинга при  $D_1=0.2$ ,  $\Delta=0.1$  (2) (а) и триггеров Шмитта (4) при  $D_1=0.4$ ,  $\Delta=0.4$  (б). Приведены зависимости частот переключений  $f_j$  от параметра связи для  $j=1, 2, 4, 6, 8, 10, 100$

бистабильных осцилляторов в зависимости от величины связи можно выделить три основных типа пространственно-временного поведения. Соответствующие этим типам поведения пространственно-временные диаграммы, полученные для модели (2), представлены на рис. 10. При слабом взаимодействии цепочка осцилляторов не демонстрирует никакой пространственно-временной регуляризации (рис. 10, а). При увеличении связи захват индивидуальных частот и согласование фаз переключений проявляется в образовании упорядоченных черно-белых полос (рис. 10, б). Возникновение структуры полос, расположенных под углом к осям координат, соответствует распространению вдоль цепочки фазовой волны стохастических переключений. Наклон полос определен фазовой скоростью волны  $v_\phi = \Delta j / \Delta t$ , где  $\Delta j$  – множество элементов, переключившихся из одного состояния в другое за время  $\Delta t$ . Фазовая скорость и длина волны могут управляться связью и интенсивностью шума. При дальнейшем увеличении параметра связи  $\gamma$  упорядоченная пространственно-временная структура разрушается (рис. 10, в).

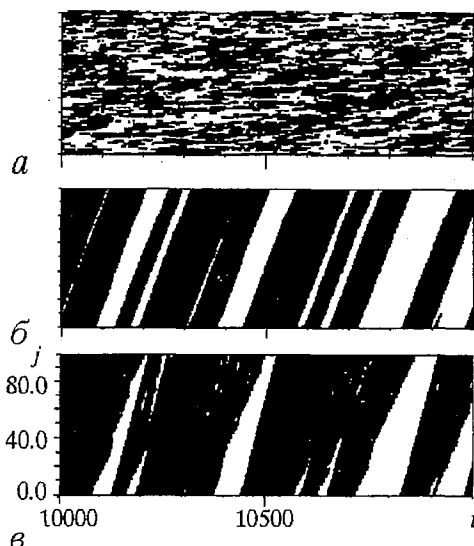


Рис. 10. Пространственно-временные диаграммы цепочки (2) с однонаправленной связью элементов при значениях параметра связи  $\gamma$ : 0.1 (а); 1.5 (б); 2.5 (в). Осцилляторы цепочки расстроены в соответствии с (б)

### Заключение

Проведенные численные исследования продемонстрировали явление пространственной стохастической синхронизации в одномерных средах, моделируемых цепочками взаимодействующих бистабильных элементов, управляемых внешними источниками шума. Эффекты стохастической синхронизации проявляются в захвате средних частот переключений парциальных осцилляторов, в возникновении синфазного или противофазного порядка переключений, в образовании «стоячих» и «бегущих» волн, соответственно, при взаимной и однонаправленной связи осцилляторов.

Также был обнаружен эффект «замедления» стохастических переключений, наблюдающийся в цепочках из большого числа бистабильных стохастических осцилляторов со взаимной связью. В этом случае при увеличении параметра связи индивидуальные частоты переключений стремятся к нулю. В то же время, при однонаправленном взаимодействии элементов цепочки индивидуальные частоты с ростом параметра связи приближаются к частоте первого осциллятора.

Полученные результаты показывают, что шум может играть важную роль в процессах самоорганизации ансамблей взаимодействующих нелинейных систем. Обнаруженные эффекты согласования частот и фаз стохастических переключений в исследованных ансамблях стохастических осцилляторов подчеркивают универсальность явления синхронизации.

*Данная работа частично поддержана грантом Фонда гражданских исследований и развития США (CRDF) и Министерства образования РФ (№ REC-006), грантом РФФИ (№ 00-02-17512), грантом Министерства образования РФ (№ 97-0-8.3-47), а также INTAS 00-00867.*

## Библиографический список

1. Kuramoto V. Chemical oscillations, waves and turbulence. Springer, Berlin, 1984.
2. Hadley P., Beasley M.R., Wiesenfeld K.// Phys. Rev. B. 1988. Vol. 38. P. 8712; Watanabe S., Strogatz S.H.// Physica D. 1994. Vol. 74. P. 197.
3. Roy R., Thornburg K.S.// J. Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 72. P. 2009.
4. Winfree A.T. The geometry of biological time. Springer, Berlin, 1980.
5. Horsthemke W., Lefever R. Noise-induced transitions. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
6. Garcia-Ojalvo J., Sancho J.M. Noise in spatially extended systems. Springer, New York (to be published).
7. Stratonovich R.L. Topics in the theory of random noise. Gordon and Breach, New York, 1967.
8. Neiman A.B. Synchronization like phenomena in coupled stochastic bistable systems// Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 3484.
9. Shulgin B.V., Neiman A.B., Anishchenko V.S. Mean switching frequency locking in stochastic bistable system driven by periodic force// Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 4157.
10. Anishchenko V.S., Silchenko A.N., Khovanov I.A. Synchronization of switching processes in coupled Lorenz systems// Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 316.
11. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка// УФН. 1999. Т. 169, № 1. С. 7.
12. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. 368 с.
13. Lindner J.F., Meadows B.K., Ditto W.L., Inghiosa M.E., Bulsara A.R. Array enhanced stochastic resonance and spatiotemporal synchronization// Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 3.
14. Zhang Y., Hu G., Gammaitoni L. Signal transmission in one-way coupled bistable systems: Noise effects// Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 2952.
15. Lindner J.F., Chandramouli S., Bulsara A.R., Löcher M., Ditto W.L. Noise enhanced propagation// Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. P. 5048.
16. Neiman A., Schimansky-Geier L., Cornell-Bell A., Moss F. Noise-enhanced phase synchronization in excitable media// Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 4896.
17. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer, New York, 1983. Sec. 2.2.
18. Moon F.C. Chaotic and Fractal Dynamics. Wiley, New York, 1992. Secs. 6.2 and 7.7.
19. Kapitaniak T. Stochastic resonance in chaotically forced systems// Chaos, Solitons & Fractals. 1993. Vol. 3. P. 405.
20. Dykman M.L., Mannella R., McClintock P.V.E., Moss F., Soskin S.M. Spectral density of fluctuations of a double-well Duffing oscillator driven by white noise// Phys. Rev. A. 1988. Vol. 37. P. 1303.
21. Fauve S., Heslot F. Stochastic resonance in a bistable system // Phys. Lett. A. 1983. Vol. 97. P. 5.
22. McNamara B., Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance// Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39. P. 4854.
23. Kramers H.A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions// Physica. 1940. Vol. 7. P. 284.
24. Osipov G.V., Sushchik M.M. Synchronized clusters and multistability in array of oscillators with different natural frequencies// Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 7198.



25. *Tass P.* Phase and frequency shifts in a population of phase oscillators// *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 56. P. 2043.

26. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motions in coupled oscillatory systems// *Prog. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69. P. 32.

*Pikovsky A.S.* On the interaction of strange attractors// *Z.Physik B.* 1984. Vol. 55. P. 149.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию  
после доработки*

*6.12.2000  
15.05.2001*

## SYNCHRONIZATION EFFECTS IN AN ARRAY OF COUPLED BISTABLE SYSTEMS

*A.S. Kopeikin, D.D. Matjushkin, T.E. Vadivasova,  
O.V. Sosnovtseva and V.S. Anishchenko*

We investigate numerically the spatiotemporal stochastic synchronization in one-dimensional media modeled by coupled bistable functional units driven by external noise. This phenomenon manifests itself as the mean switching frequency entrainment and as «in-phase» hopping dynamics in the form of «standing» and «running» waves at two- and one-way coupling, respectively.



*Копейкин Андрей Сергеевич* – родился в Саратове (1976), окончил физический факультет Саратовского университета (1998). В настоящее время учится в аспирантуре на кафедре радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Автор 5 научных работ.



*Матюшкин Дмитрий Дмитриевич* – родился в Саратове (1981). Среднее образование получил в экспериментальной школе-системе № 4 (специальность – биохимия). В настоящий момент – студент 4-го курса физического факультета СГУ



*Вадивасова Татьяна Евгеньевна* – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1981), доцент, кандидат физико-математических наук. В настоящее время – докторант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 40 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



*Сосновцева Ольга Владимировна* – родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Защитила кандидатскую диссертацию (1996). Неоднократно работала за рубежом: в Германии, Дании и Южной Корее. В настоящее время является докторантом кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – явления самоорганизации в ансамблях нелинейных хаотических и стохастических систем; особенности синхронизации хаотической динамики и стохастических процессов. Имеет около 30 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



*Анищенко Вадим Семенович* – родился в 1943 году. Окончил физический факультет Саратовского университета (1966), защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, Заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, Лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999). E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru



## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЛАНИНОВОГО ЭКРАНА, ОБРАЗУЮЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УЛЬТРАФИОЛЕТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

*М. М. Стольниц, А. Ю. Пешкова*

В работе представлена математическая модель УФ-индуцированного меланогенеза, который рассматривается как нелинейная динамическая система с отрицательной обратной связью. Получена система дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных) для числа меланоцитов, числа меланосом в меланоцитах и кератиноцитах и содержания меланина в базальном и верхних слоях эпидермиса. Обсуждаются проблемы численного решения уравнений системы и возможные применения модели для расчета оптимальных режимов УФ-терапии.

### Введение

Ультрафиолетовое излучение (УФИ) оказывает сильное влияние на кожу и весь организм человека, что проявляется в ряде эффектов, как вредных, так и необходимых для нормальной жизнедеятельности организма: воспалении, эритеме<sup>1</sup>, старении и пигментации кожи, синтезе витамина D, повреждении структур (ДНК, белков и фосфолипидов мембран) клеток эпидермиса, модуляции иммунной системы и канцерогенезе [1, 2]. Необходимость минимизировать отрицательные и усилить полезные эффекты УФИ обуславливает их интенсивное изучение.

Помимо естественных условий, проблемы оптимизации возникают при использовании УФИ в лечении ряда заболеваний, в том числе кожных, таких как псориаз, витилиго и др. [3]. Так, применение фотохимиотерапии, разработанной в середине 70-х годов, показало ее высокую эффективность, но натолкнулось на трудности, связанные с канцерогенным риском [4].

Организм располагает различными механизмами защиты, ослабляющими действие УФИ [5, 6]. Один из них – загар, который является результатом сложной реакции, заканчивающейся утолщением эпидермиса, накоплением в нем пигмента меланина и урокановой кислоты. Меланин синтезируется в самом нижнем, базальном слое эпидермиса и затем перемещается к верхним слоям, образуя (поскольку поглощение и рассеяние верхних слоев определяется содержанием

<sup>1</sup> Эритема – покраснение кожи, вызванное притоком крови вследствие расширения мелких кровеносных сосудов.

меланина) меланиновый экран, который уменьшает количество фотонов, попадающих в базальный слой эпидермиса, и защищает его и дерму от повреждения (рис. 1). Усиление синтеза меланина под действием УФИ приводит к уменьшению пропускания экрана. Таким образом, УФ-индуцированный меланогенез представляет собой нелинейную динамическую систему с отрицательной обратной связью.

В течение курса УФ-терапии стимуляция меланогенеза приводит к необходимости увеличения дозы с каждым последующим сеансом. С другой стороны, чрезмерное увеличение дозы вызывает эритему, а затем – воспаление, усиливает канцерогенный риск. Таким образом, возникает задача выбора оптимальных режимов УФ-терапии. В связи с этим представляет интерес математическое моделирование процессов, происходящих в эпидермисе под действием УФИ.

В литературе широко представлены модели распространения УФИ в коже и, в частности, в эпидермисе [7]. Однако, насколько известно, изменение параметров меланинового экрана и его влияние на прохождение следующих порций излучения не рассматривалось. Концепция меланинового экрана как динамической системы с отрицательной обратной связью была изложена в [8], но не получила дальнейшего развития.

В данной работе представлена математическая модель образования

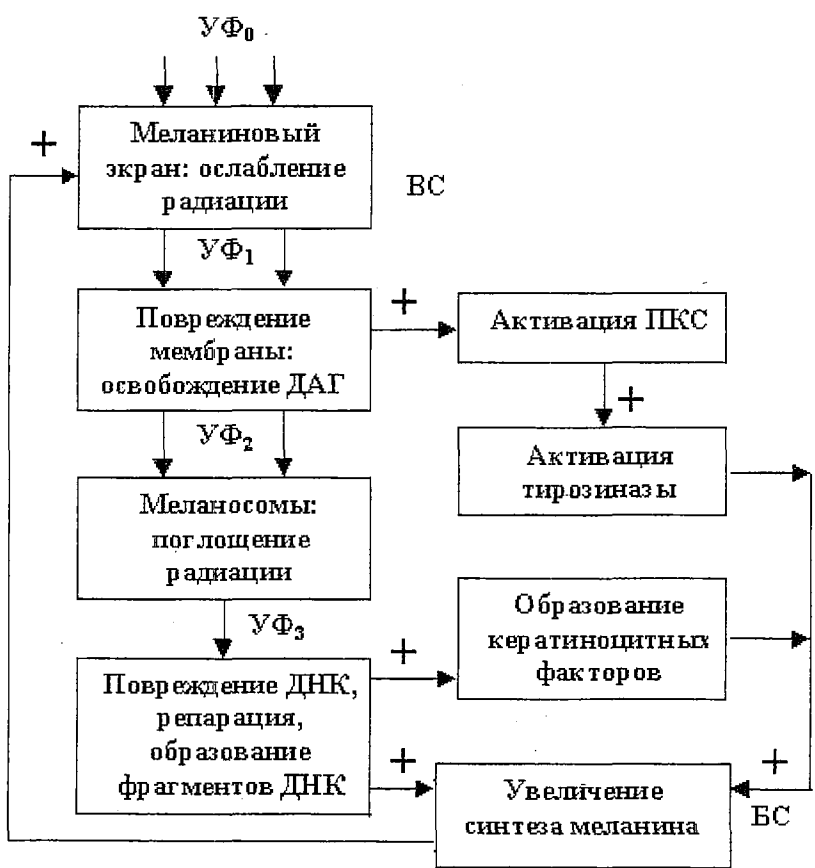


Рис. 1. Схема обратных связей УФ-индуцированного меланогенеза:  $UФ_0$ ,  $UФ_1$  и  $UФ_3$  – интенсивности падающего, прошедшего через верхние слои и дошедшего до клеточных ядер УФИ; ВС – верхние слои; БС – базальный слой

меланинового экрана под действием УФИ, учитывающая процессы на молекулярном, внутриклеточном, клеточном и тканевом уровнях.

### Математическая модель и ее биофизическое обоснование

Общая схема процессов взаимного влияния УФИ и меланинового экрана приведена на рис. 1.

Синтез меланина происходит в специализированных органеллах – меланосомах, вырабатываемых особыми клетками эпидермиса – меланоцитами. Затем меланосомы захватываются кератиноцитами (клетками, составляющими основу эпидермиса) нижних слоев<sup>2</sup>, где продолжают созревать или могут подвергнуться разрушению под действием лизосомальных ферментов. И в меланоцитах, и в кератиноцитах меланосомы формируют так называемые «козырьки» над ядрами клеток [9], создавая дополнительную защиту от повреждений ДНК излучением. При делении кератиноцитов часть меланосом переходит вместе с вытесненной клеткой в следующий слой. В верхних слоях<sup>3</sup> скорость разрушения меланосом резко возрастает, так как здесь происходит освобождение лизосомальных ферментов, разрушающих все органеллы клеток. При этом весь меланин, принесенный меланосомами, накапливается в виде гранул или «меланиновой пыли», не разрушаясь, а лишь покидая эпидермис вместе с отшелушивающимися клетками. Содержание меланина оказывает определяющее влияние на поглощение и рассеяние верхних слоев эпидермиса. Каждая из составляющих меланогенеза находится под контролем различных факторов организма. Их совокупность определяет и отклик на действие УФИ. В частности, большую роль в регуляции меланогенеза играют так называемые кератиноцитные факторы – физиологически активные вещества (нервный фактор роста, базовый фактор роста фибробластов, интерлейкины и другие), выделяемые кератиноцитами<sup>4</sup> в межклеточное пространство, которые, соединяясь со специфическими рецепторами на внешней поверхности плазматической мембраны меланоцитов и вызывая тем самым каскады внутриклеточных биохимических реакций, способствуют выживанию меланоцитов в стрессовых условиях, усилению пролиферации меланоцитов и синтеза меланосом [10]. Под действием УФИ количество этих веществ и, следовательно, вызываемый ими эффект возрастают. В данной модели не рассматривается усиление пролиферации кератиноцитов под действием УФИ – число (плотность) кератиноцитов считается постоянным.

Поскольку механизмы меланогенеза в настоящее время до конца не выяснены, описанная ниже модель содержит (наряду с твердо установленными фактами) ряд гипотез о пигментной системе эпидермиса.

**Первичные мишени УФИ в клетках нижних слоев эпидермиса.** Пройдя через верхние слои, ослабленное УФИ попадает в плазматические мембраны клеток базального слоя, вызывая различные фотохимические реакции. Для меланогенеза важное значение имеет выработка диацилглицерола (ДАГ) и последующая активация им протеинкиназы С (ПКС) [10]. Проходя через мембраны и поглощаясь в меланосомах, УФИ попадает в ядра кератиноцитов и

<sup>2</sup> Меланосомы могут захватываться и другими клетками [6], но этот процесс может быть существенным только при избыточном содержании меланосом в межклеточном пространстве.

<sup>3</sup> В модели базальный и шиповидный слои эпидермиса с делящимися клетками [5] объединены в блок «нижние слои», а роговой и зернистый – в блок «верхние слои».

<sup>4</sup> Практически все «кератиноцитные факторы» вырабатываются и многими другими клетками организма.

меланоцитов, вызывая повреждения ДНК. Репарация повреждений приводит к образованию фрагментов ДНК, свободно диффундирующих в цитоплазму и выходящих в межклеточное пространство. В последние годы были получены экспериментальные доказательства значительного влияния фрагментов ДНК на синтез меланина [10]. Механизмы этого влияния остаются недостаточно изученными, возможно, здесь задействован «страж генома» – белок p53 [11].

Опуская промежуточные стадии между поглощением фотонов и выделением ДАГ из фосфолипидов мембран, запишем уравнение для концентрации ДАГ

$$\dot{DAG} = \rho_{DAG} + \sigma_{DAG} \cdot UV_1 - \mu_{DAG} \cdot DAG, \quad (1)$$

где  $DAG$  – концентрация ДАГ;  $\rho_{DAG}$  – скорость выработки ДАГ в отсутствие УФИ;  $\sigma_{DAG}$  – коэффициент пропорциональности между добавкой к скорости выработки ДАГ под действием УФИ и его интенсивностью;  $UV_1$  – интенсивность УФИ на границе базального и верхних слоев эпидермиса;  $\mu_{DAG}$  – константа скорости деградации ДАГ; здесь и далее точка означает дифференцирование по времени.

Уравнения для числа повреждений и фрагментов ДНК имеют вид

$$\dot{D}a_j = \sigma_{Dj} \cdot UV_{2j} - R_j \cdot D a_j, \quad (2)$$

$$\dot{D}NF_j = \sigma_{DNFj} \cdot D a_j - \mu_{DNFj} \cdot DNF_j,$$

где  $j$  – индекс, указывающий тип клетки (кератиноцит или меланоцит одной из субпопуляций – см. ниже);  $D a_j$  – среднее число повреждений ДНК в клетке  $j$ -го типа;  $\sigma_{Dj}$  – константа эффективности преобразования фотонов в повреждения ДНК;  $UV_{2j}$  – интенсивность УФИ в ядре клетки  $j$ -го типа;  $R_j$  – константа скорости репарации повреждений;  $DNF_j$  – среднее число фрагментов ДНК в клетке  $j$ -го типа;  $\sigma_{DNFj}$  – константа скорости образования фрагментов ДНК из повреждений;  $\mu_{DNFj}$  – константа скорости ухода фрагментов ДНК.

**Меланоциты.** Согласно современным представлениям [10, 12], меланоциты – пролиферирующая популяция клеток, однако в стационарном состоянии, в отсутствие стимулирующих факторов, скорость их размножения незначительна. Поэтому долгое время зрелые меланоциты считались неделящимися, аналогично клеткам нервной системы [13]. В представленной модели меланоциты в «нормальном» состоянии рассматриваются как популяция, способная к размножению, но с малой вероятностью перехода из состояния покоя в митотический цикл. Численность популяции поддерживается постоянной за счет баланса скоростей деления, программированной и случайной гибели клеток. Под действием УФ-излучения меланоциты начинают интенсивно делиться, возрастают отношение объема ядер к объему цитоплазмы, скорость синтеза и число меланосом, количество отростков (дендритов), по которым осуществляется передача меланосом в кератиноциты [10, 13]. Все это позволяет определить новое состояние как «сверхактивное». В то же время, трактовка сверхактивного состояния как реально существующего наталкивается на ряд трудностей. Например, действие стимулирующих факторов на сверхактивные меланоциты должно переводить их в еще более активное состояние, и т.д. Очевидно, что на самом деле параметры меланоцитов распределены в некоторой области значений, и действие стимулирующих факторов вызывает смещение максимума этого распределения. Поэтому мы рассматриваем нормальные и сверхактивные меланоциты как состояния с крайними (минимальными или максимальными) значениями параметров, определяющих интенсивность меланогенеза<sup>5</sup>. Каждая из этих субпопуляций может включать неповрежденные («здоровые»), поврежден-

ные (с ДНК, поврежденными квантами УФ) и гибнущие клетки. Субпопуляции и схема переходов между ними представлены на рис. 2. Каждое состояние на схеме характеризуется сочетанием цвета (степень черноты), формы и размера соответствующей фигуры. Стрелки, возвращающиеся в состояние, из которого вышли, обозначают размножающиеся клетки. Скорости переходов зависят от различных факторов, что отражено на схеме значками, которыми «нагружены» стрелки.

Систему дифференциальных уравнений для числа (плотности) меланоцитов в каждом состоянии можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_{\alpha\beta\gamma} = & \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma 1} M_{\alpha\beta\gamma 1} + \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma 2} M_{\alpha\beta\gamma 2} + \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta 1\gamma} M_{\alpha\beta 1\gamma} + \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha 1\beta\gamma} M_{\alpha 1\beta\gamma} + \\
 & + [\chi_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma} - (\delta_{\alpha\beta\gamma 1}^{\alpha\beta\gamma} + \delta_{\alpha\beta\gamma 2}^{\alpha\beta\gamma} + \delta_{\alpha\beta 1\gamma}^{\alpha\beta\gamma} + \delta_{\alpha 1\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma} + \mu_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma})] M_{\alpha\beta\gamma}, \\
 & \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta 1\gamma 1} = 0 \text{ при } \alpha \neq \alpha 1, \beta \neq \beta 1, \gamma \neq \gamma 1, \\
 \chi_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma} = & \chi_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma d} = 0, \mu_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma} = \mu_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma h} = 0, \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta 1\gamma} = \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta 1\gamma d} = 0, \\
 \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha 1\beta\gamma} = & \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha 1\beta\gamma d} = 0, \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma d} = 0, \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma h} = \mu_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma h} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

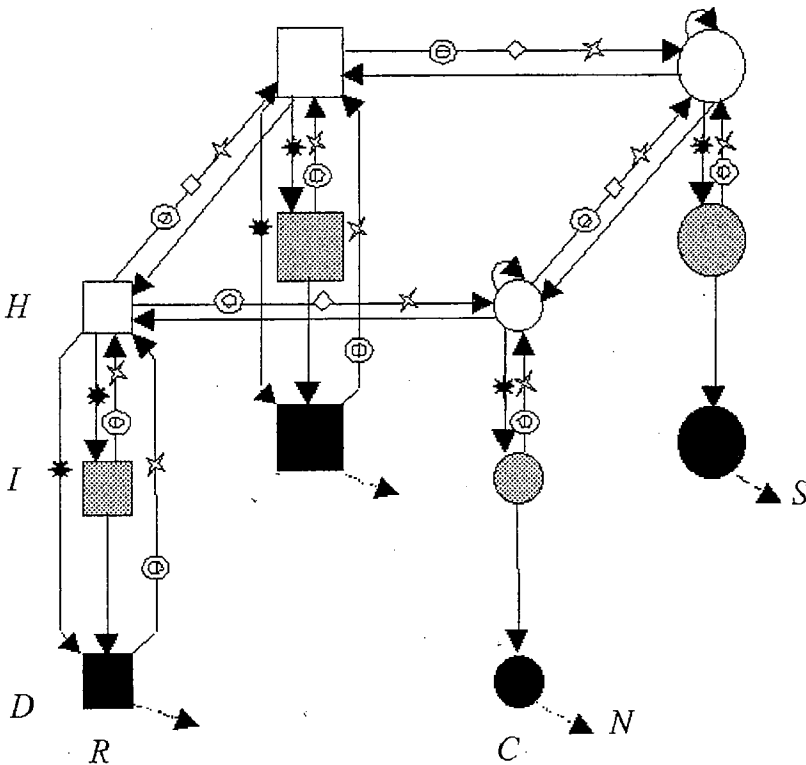


Рис. 2. Субпопуляции меланоцитов и переходы между ними: N, S, R, C, H, I, D – нормальные, сверхактивные, покоящиеся, циклические, здоровые, поврежденные и гибнущие меланоциты, соответственно; \* – регуляция УФ; ◇ – регуляция мембранными факторами (ДАГ, арахидоновая кислота, ферменты и т.д.); ⊕ – регуляция фрагментами ДНК; ⊖ – регуляция кератиноцитными факторами; ... – гибель

<sup>5</sup> Промежуточные значения параметров могут появляться как результат усреднения либо по «ансамблю» меланоцитов, либо по времени, которое отдельный меланоцит проводит в одном из состояний.

где  $M_{\alpha\beta\gamma}$  – число меланоцитов в состоянии  $\alpha\beta\gamma$ ;  $\delta_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha1\beta1\gamma1}$  – константы скоростей переходов из состояния  $\alpha1\beta1\gamma1$  в состояние  $\alpha\beta\gamma$ ;  $\alpha, \alpha1$  независимо пробегают значения  $n, s$  (нормальные или сверхактивные меланоциты);  $\beta, \beta1$  – значения  $r, c$  (пассивные или делящиеся, циклирующие, меланоциты);  $\gamma, \gamma1, \gamma2$  – значения  $h, i, d$  (здоровые, поврежденные и гибнущие меланоциты);  $\chi_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma}, \mu_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma}$  – константы скоростей рождения и гибели меланоцитов, соответственно.

Зависимости скоростей переходов из нормальных в сверхактивные меланоциты от интенсивности УФИ, кератиноцитных факторов, фрагментов ДНК и ДАГ задаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha\beta\gamma1}^{\alpha\beta\gamma} &= \delta_{\alpha\beta\gamma1}^{\alpha\beta\gamma} + \delta uv_{\alpha\beta\gamma1}^{\alpha\beta\gamma} UV_{2\alpha\beta\gamma}, \\ \delta_{s\beta\gamma}^{\beta\gamma} &= \delta 0_{s\beta\gamma}^{\beta\gamma} + \delta d_{s\beta\gamma}^{\beta\gamma} DAG + \delta f_{s\beta\gamma}^{\beta\gamma} DNF + \delta k_{s\beta\gamma}^{\beta\gamma} Rc, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\delta 0, \delta d, \delta uv, \delta f, \delta k$  – коэффициенты нулевого и первого порядка по соответствующему фактору в линейной зависимости константы скорости перехода, определяемого индексами;  $Rc$  – среднее число комплексов «рецептор – кератиноцитный фактор» в клетке<sup>6</sup>. Формула для  $Rc$ , полученная из решения уравнений кинетики взаимодействия рецепторов с кератиноцитными факторами в предположении быстрого установления стационара, имеет вид

$$Rc(t, M_{\alpha\beta\gamma}) = \rho_{RcKF} / (1 + \Delta \cdot \Sigma M_{\alpha\beta\gamma}), \quad (5)$$

где  $Rc(t, M_{\alpha\beta\gamma})$  – среднее число комплексов «рецептор – кератиноцитный фактор» на мембране меланоцита;  $\rho_{RcKF}$  и  $\Delta$  – комбинации констант, определяющих кинетику рецепторов и кератиноцитных факторов.

Предполагается, что переходы между остальными состояниями происходят с постоянными скоростями. Нелинейность зависимости  $Rc(t, M_{\alpha\beta\gamma})$  от числа меланоцитов приводит к нелинейности системы (3).

**Меланосомы.** Существуют различные классификации стадий созревания меланосом – согласно [13] этих стадий 6, согласно [2] – 4. В описываемой модели рассматриваются премеланосомы, в которых не происходит синтез меланина, последующие же дискретные стадии заменяются непрерывным распределением меланосом по возрастам.

Уравнения для числа премеланосом и меланосом в меланоцитах и в кератиноцитах нижних слоев имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{S}_j^{pr} &= \rho_j^{pr}(t) - \mu_{pr0j}^{ex}(t) \cdot S_j^{pr}, \\ (\partial/\partial t + \partial/\partial \tau) S_{0j}(t, \tau) &= -\mu_{0j}^{ex}(\tau) \cdot S_{0j}(t, \tau), \\ (\partial/\partial t + \partial/\partial \tau) S_{1j}(t, \tau) &= \mu_{0j}^{ex}(\tau) \cdot S_{0j}(t, \tau) - (\mu_1^{ex} + \mu_1^d) \cdot S_{1j}(t, \tau) \end{aligned} \quad (6)$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} S_{0j}(t, 0) &= \mu_{pr0j}^{ex}(t) \cdot S_j^{pr}(t), \quad S_{1j}(t, 0) = 0, \\ S_{0j}(0, \tau) &= S 0_{0j}(\tau), \quad S_{1j}(0, \tau) = S 0_{1j}(\tau), \end{aligned} \quad (7)$$

<sup>6</sup> Мы рассматриваем действие кератиноцитных факторов только какого-то одного типа.



где  $S_j^{pr}(t)$ ,  $S_{0j}(t, \tau)$  – среднее число премеланосом и средняя плотность распределения меланосом возраста  $\tau$  в одном меланоците или кератиноците, соответственно;  $j$  – состояние меланоцита (нормальное или сверхактивное);  $S_{1j}(t, \tau)$  – средняя плотность распределения меланосом возраста  $\tau$  в одном кератиноците, пришедших из одного меланоцита, находящегося в состоянии  $j$ ;  $\rho_j^{pr}$  – «константы» скорости синтеза премеланосом;  $\mu_{pr0j}^{ex}$  – «константы» скорости превращения премеланосом в меланосомы;  $\mu_{0j}^{ex}$  – «константы» скорости выхода меланосом из меланоцитов в кератиноциты;  $\mu_1^{ex}$ ,  $\mu_1^d$  – «константы» скорости деструкции меланосом в кератиноцитах и перехода их в верхние слои, соответственно;  $S_{0j}(\tau)$ ,  $S_{1j}(\tau)$  – начальные распределения меланосом по возрастам, в качестве которых удобно выбрать стационарные распределения.

Зависимость скорости выхода меланосом в кератиноциты аппроксимируется формулой

$$\mu_{0j}^{ex}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq \tau_0, \\ \mu_{00j}^{ex}, & \tau > \tau_0. \end{cases} \quad (8)$$

Формула предполагает нулевую вероятность выхода незрелых меланосом (расположенных, в основном, вблизи ядра) и постоянную вероятность выхода зрелых меланосом (расположенных, в основном, в отростках) с возрастом, большим некоторого критического  $\tau_0$ .

Рассмотрение можно упростить, ограничиваясь случаем стационарного распределения меланосом по возрастам ( $\rho_j^{pr} = \text{const}$ ), которое существует в отсутствие излучения. Зависимость от  $t$  появляется только при действии нестационарного УФ-И. Однако и в этом случае изменение числа меланосом можно «имитировать» изменением доли сверхактивных меланоцитов: так как у последних скорость рождения премеланосом и скорость выхода меланосом в кератиноциты выше, чем у нормальных меланоцитов, изменение отношения  $M_{сб\gamma}(t)/M_{н\beta\gamma}(t)$  приведет к изменению среднего числа меланосом в меланоцитах и кератиноцитах.

**Синтез меланина.** Степень меланизации (относительная концентрация меланина в меланосоме) может варьировать от 17.9% до 72.3% [14]. Схема синтеза меланина представлена на рис. 3. Ключевым ферментом синтеза меланина является тирозиназа, а субстратом – аминокислота тирозин [15]. Под действием УФ-И степень меланизации возрастает в результате увеличения тирозиназной активности. Медиаторами этого процесса являются ДАГ и фрагменты ДНК. ДАГ переводит в активное состояние протеинкиназу С (ПКС), в частности, ее  $\beta$ -изофермент, который, в свою очередь, фосфорилирует и тем самым активирует тирозиназу [10]. Мы предполагаем, что влияние фрагментов ДНК сводится к увеличению числа меланосом и учтено, как описано выше, в переходах из нормальных в сверхактивные меланоциты.

Уравнения для концентраций ПКС и тирозиназы в активном состоянии и степени меланизации меланосомы имеют вид

$$\begin{aligned} PKC_a &= [1 - \sigma_{PKCa,p} + \sigma_{D,p} \cdot DAG(t)] - [1 + \sigma_{D,p} \cdot DAG(t)] \cdot PKC_a, \\ d/dt[TS_a] &= [\sigma_{TSa,p} + \sigma_{P,TS} \cdot PKC_a(\tau)] - [\sigma_{TSa,p} + \sigma_{TSa,p} + \sigma_{P,TS} \cdot PKC_a(\tau)] \cdot TS_a, \\ d/dt[Dm] &= [A \cdot TS_a \cdot \exp(-\gamma\tau) / (1 + \alpha \cdot Dm)] [Tz / (K_m + Tz)], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $PKC_a$  – относительное содержание активной протеинкиназы С $\beta$ ;  $TS_a$  – концентрация активной тирозиназы;  $Dm$  – степень меланизации;  $Tz$  – концентрация тиро-

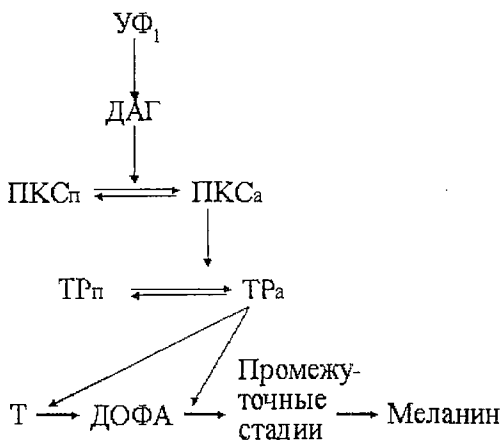


Рис. 3. Схема синтеза меланина: ДАГ – диацилглицерол; ПКСа – активная протеинкиназа С; ТРпа – активная тирозиназа; Т – тирозин; ДОФА – диокси-фенилаланин

зина (считается постоянной);  $K_m$  – константа Михаэлиса – Ментен;  $\sigma_{PKCa,p}$ ,  $\sigma_{TSp}$  – скорости переходов между активным и пассивным состояниями ПКСа и тирозиназы, соответственно;  $\sigma_{P,TS}$ ,  $\sigma_{D,P}$  – константы, характеризующие влияние ПКСа на тирозиназу и ДАГ на ПКСа, соответственно;  $\gamma$  – время жизни тирозиназы в меланосоме;  $A$ ,  $\alpha$  – феноменологические константы:  $A$  определяет максимальную скорость ферментной реакции (катализируемой тирозиназой),  $\alpha$  характеризует степень уменьшения доступной для реакции тирозиназы при увеличении концентрации меланина в меланосоме (эффект блокирования). Последнее уравнение системы ограничивает роль тирозиназы как ключевого фермента меланогенеза. Активность тирозиназы уменьшается с увеличением

возраста меланосомы за счет действия протеолитических ферментов – это учитывается экспоненциальным множителем с показателем  $(-\gamma t)$ .

### Меланин в нижних и верхних слоях. Параметры меланинового экрана.

Общее количество меланина в базальном слое определяется балансом синтеза меланина в меланоцитах и его выхода в верхние слои с делящимися кератиноцитами. В каждый кератиноцит меланин поступает из всех связанных с ним меланоцитов, поэтому его количество определяется отношением числа меланоцитов каждого типа к числу кератиноцитов, количеством меланосом в каждом из них и степенью их меланизации.

Уравнения для концентрации меланина в нижних и верхних слоях имеют вид:

$$ML_b = \sum_j M_j \cdot U_{0,j}(t) + Kc \cdot \sum_j U_{1,j}(t),$$

$$ML_u = \mu_1^{ex} \cdot Kc \cdot \sum_j U_{1,j}(t) - \chi \cdot ML_u, \quad (10)$$

$$U_{0,j}(t) = \int_0^{\tau_{max}} S_{0,j}(\tau) \cdot Dm(t, \tau) d\tau, \quad U_{1,j}(t) = \int_0^{\tau_{max}} S_{1,j}(\tau) \cdot Dm(t, \tau) d\tau,$$

где  $ML_b$ ,  $ML_u$  – содержание меланина в базальном и верхних слоях, соответственно;  $\tau_{max}$  – максимальный возраст меланосом;  $Kc$  – число (плотность) кератиноцитов;  $j$  – состояние меланоцита ( $j = \alpha\beta\gamma$ );  $\chi$  – константа скорости ухода меланина, обусловленного отшелушиванием клеток рогового слоя.

Пренебрегая рассеянием излучения в эпидермисе и рассматривая его как двухслойную однородную поглощающую среду; определим коэффициенты пропускания верхних и нижних слоев и выразим интенсивность излучения, падающего на мембраны и ядра клеток базального слоя как

$$T_{0,j}^{ms}(t) = \exp(-k_0^{cyr} \cdot d_{0,j}^{cyr}) \{1 - (Sq_j^{ms}/Sq_{0,j}^{nuc}) \cdot S_{0,j} \cdot \exp[-(k_j^{ms} \cdot U_{0,j}(t)/S_{0,j} - k_0^{cyr}) \cdot d_j^{ms}]\},$$

$$T_{1,j}^{ms}(t) = \exp(-k_1^{cyr} \cdot d_1^{cyr}) \{1 - \sum_j (Sq_j^{ms}/Sq_{1,j}^{nuc}) \cdot S_{1,j} \cdot \exp[-(k_j^{ms} \cdot U_{1,j}(t)/S_{1,j} - k_1^{cyr}) \cdot d_j^{ms}]\},$$

$$T_{up}(t) = \exp\{-[k_{up}^0 + k_{Mel} \cdot Mel_u(t)] \cdot d_{up}\}, \quad (11)$$

$$UV_1 = T_{up} \cdot UV_0, \quad UV_{2\alpha} = T_{0j}^{ms} \cdot UV_1, \quad UV_{2k} = T_1^{ms} \cdot UV_1,$$

где  $T_{ij}^{ms}$  – коэффициенты пропускания меланосом в меланоцитах в разных состояниях и в кератиноцитах ( $i = 0, 1$ ), соответственно;  $\alpha$  – принимает значения  $n, s$ , соответствующие состояниям меланоцита;  $Sq_j^{ms}$  – площадь меланосомы в меланоцитах в состоянии  $j$ ;  $Sq_{i,j}^{msc}$  – площадь ядра соответствующей клетки;  $k_i^{cyt}$ ,  $k_j^{ms}$ ,  $k_{up}^0$  и  $k_{Mel}$  – коэффициенты поглощения цитоплазмы, меланина в меланосомах и верхних слоях и кератина в верхних слоях, соответственно;  $T_{up}$  – коэффициент пропускания верхних слоев;  $UV_0$  – интенсивность падающего УФИ, которую можно выразить через дозу и время облучения в течение сеанса УФ-терапии (15 мин).

Полученные значения  $UV_1$  и  $UV_2$  можно подставить в уравнения (1) и таким образом замкнуть систему уравнений.

### Результаты и обсуждение

Для решения полученных уравнений приходится преодолевать трудности двойного характера: связанные со сложностью структуры (1) и со знанием численных значений параметров (2).

1. При попытке решать систему «в лоб» в общем случае возникает самосогласованная задача, параметры которой получаются как решения дифференциальных уравнений, в том числе, в частных производных, входят сложным образом в подынтегральные выражения и граничные условия. Само существование решения требует специального изучения, не говоря уже об огромных вычислительных ресурсах, требуемых при расчетах даже с фиксированным набором констант. Если же учесть возможный разброс значений констант (см. ниже), а также желательность варьирования параметров падающего излучения, ситуация становится практически безнадежной. Это же, хотя и в меньшей мере, относится и к случаю стационарного внешнего излучения. Однако структура системы дает возможность с разумными затратами рассмотреть практически важный случай: регулярное облучение организма или участка кожи в течение короткого времени (сеансы УФ-терапии длительностью порядка 10 мин.) с длительными (около суток) перерывами. При этом, очевидно, параметры среды не успевают заметно измениться за время сеанса, а последующий отклик происходит в отсутствие излучения. Тогда можно «расцепить» задачу: найти распределение интенсивности по толщине эпидермиса при заданных параметрах среды, решить систему дифференциальных уравнений при заданной интенсивности во время сеанса, вычислить новое распределение меланина и коэффициенты пропускания к началу следующего сеанса и т.д. Попутно определяется содержание меланина в базальном и верхнем слоях и зависимость коэффициента пропускания от времени и дозы. Именно этот подход применен при расчетах в данной работе. Следует отметить также, что модель включает в себя процессы, происходящие на тканевом, внутриклеточном и молекулярном уровнях, которые соответствуют разным масштабам времени<sup>7</sup>. Поэтому удастся построить цепочку квазистационарных приближений и значительно упростить задачу.

<sup>7</sup> Например, реакции активирования ПКС и тирозиназы, повреждения ДНК протекают за доли секунды, изменение уровня ДАГ и репарация повреждений – за десятки минут, изменения числа меланоцитов – за десятки часов и т.д.

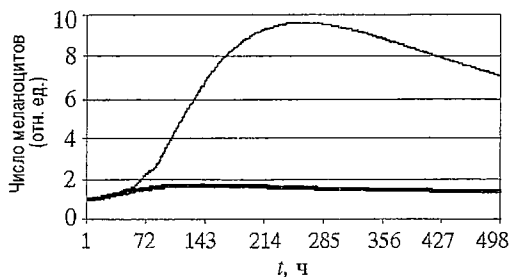


Рис. 4. Отклик меланоцитов на УФИ: жирная линия – единичное воздействие (15 мин); тонкая линия – четырехкратное облучение (по 15 мин каждый день через сутки)

2. Данные о численных значениях параметров описанных процессов крайне неточны, а в большинстве случаев просто отсутствуют. Поэтому выбор констант затруднен, и приходится прибегать к косвенным оценкам. Так, известно время митотического цикла меланоцитов – 33 часа [12], откуда получаем значение для скорости пролиферации  $\chi_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma}$ . Значение константы скорости отшелушивания  $\chi$  определяется по времени смены клеток эпидермиса (28 суток). Другие константы подобного типа можно оценить из

сравнения временных масштабов соответствующих процессов. В процессе пробных расчетов большинство значений параметров варьировали в широких пределах, с тем чтобы получить динамические характеристики загара, близкие к наблюдаемым. Однако, в силу имеющегося в настоящее время разброса значений, результаты следует рассматривать как иллюстративные, претендующие лишь на качественное соответствие экспериментам.

Аналитические и численные расчеты проводились с использованием пакета Mathcad 2000. Результаты вычислений представлены на рис. 4–8. Они качественно согласуются с экспериментальными данными [8]. Моделировались ситуации однократного и четырехкратного облучения 15-минутными «прямоугольными импульсами» УФИ. Из сравнения рис. 4, 7, 8 видно, что различные составляющие системы меланогенеза реагируют подобным образом, но с различными временными параметрами, что может приводить к дополнительной модуляции кривых отклика. Так, на рис. 8 наличие двух пиков обусловлено быстрым откликом меланосом по сравнению с меланоцитами. Интересную возможность

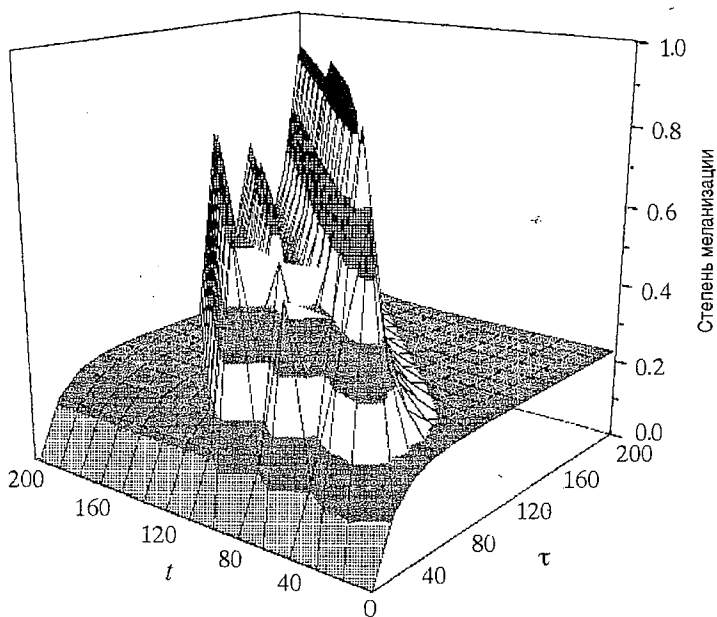


Рис. 5. Отклик степени меланизации меланосом на УФИ: четырехкратное облучение (по 15 мин каждый день через сутки);  $t$  – время после облучения (часы);  $\tau$  – возраст меланосом (часы)

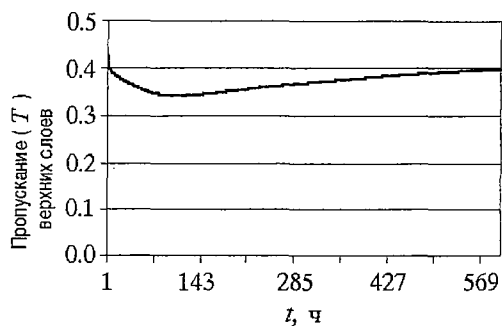


Рис. 6. Отклик коэффициента пропускания верхних слоев эпидермиса на УФ: единичное воздействие (15 мин)

управления поведением системы за счет нелинейности можно увидеть на рис. 7: при достаточно высокой частоте следования импульсов отклик системы аналогичен отклику на сигнал низкой частоты, но с большей амплитудой.

Исследование динамических режимов системы УФ-индуцированного меланогенеза представляет предмет отдельного рассмотрения, результаты которого планируется опубликовать в дальнейшем.

Несмотря на сугубо предварительный характер полученных результатов, уже сейчас просматривается возможность применения модели для определения оптимальных режимов ПУФА-терапии. Так, из рис. 6 видно, что увеличение времени между сеансами позволяет получить такой же эффект при меньшей дозе облучения.

*Работа выполнена при поддержке программы CRDF, грант № REC-006.*

## Библиографический список

1. Рубин А. Биофизика. М.: Наука, 1989.
2. Jimbow K., Fitzpatrick T.B., Wick M.W. Biochemistry and physiology of melanin pigmentation // Physiology, Biochemistry and Molecular Biology of the Skin, 2-nd Edition. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1991. P. 873.
3. Довжанский С.И., Утиц С.Р. Псориаз, или псориагическая болезнь. Ч. 1,2. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1992.
4. Nataraj A.J., Wolf P., Cerroni L., Ananthaswamy H.N. p53 mutation in squamous cell carcinomas from psoriasis patients treated with psoralen + UVA (PUVA) // J. Invest. Dermatol. 1997. Vol. 109, № 2. P. 238.
5. Чернух А.М. и др. Кожа. М.: Медицина, 1982.
6. Семкин В.И., Михайлов И.Н. Влияние солнечной инсоляции на структуру клеток эпидермиса // Изв. АН СССР. Сер. биол. 1984. № 2. С. 250.
7. Тучин В.В. Исследование биотканей методами светорассеяния // УФН. 1997. Т. 167, № 5. С. 517.

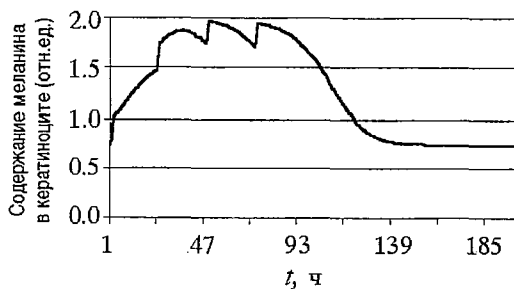


Рис. 7. Отклик содержания меланина в отдельном кератиноците на УФ: четырехкратное облучение (по 15 мин каждый день через сутки)

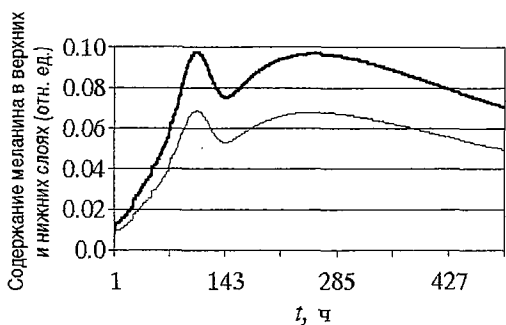


Рис. 8. Отклик содержания меланина в верхних и нижних слоях на УФ: четырехкратное облучение (по 15 мин каждый день через сутки)

8. *Mavlyutov A.H., Sinichkin Yu.P., Utz S.R.* Nonlinear effects of UV radiation on the human skin: erythema and pigmentation // *Nonlinear Dynamics and Structures in Biology and Medicine: Optical and Laser Technologies/* Ed. V.V. Tuchin. Proc. SPIE. 1997. Vol. 3053. P. 183.

9. *Kobayashi N. et al.* Supranuclear melanin caps reduce ultraviolet induced DNA photoproducts in human epidermis// *J. Invest. Dermatol.* 1998. Vol. 110. P. 806.

10. *Gilchrest B.A., Park H. et al.* Mechanisms of ultraviolet light-induced pigmentation // *Photochem. and Photobiol.* 1996. Vol. 63, № 1. P. 1.

11. *Gilchrest B.A., Eller M.S.* DNA photodamage stimulates melanogenesis and other photoprotective responses // *J. Invest. Dermatol. Symp. Proc.* 1999. Vol. 4. P. 35.

12. *Rosdahl I.K., Szabo G.* Mitotic activity of epidermal melanocytes in UV-irradiated mouse skin // *J. Invest. Dermatol.* 1978. Vol. 70, № 3. P. 143.

13. *Семкин В.И., Михайлов И.Н.* Ультраструктура меланоцитов и премеланосом эпидермиса человека в процессе меланогенеза // *Изв. АН СССР. Сер. биол.* 1979. № 2. С. 265.

14. *Kollias N.* Photoprotection by melanin // *Photochem. & Photobiol.* 1991. № 9. P. 135.

15. *Ros J.R., Rodriguez-Lopez J.N. and Garcia-Canovas F.* Analysis of a kinetic model for melanin biosynthesis pathway // *J. Biol. Chem.* 1992. Vol. 267. P. 3801.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 18.12.2000  
после доработки 4.04.2001*

## MATHEMATICAL MODEL OF UV-INDUCED MELANIN SCREEN

*M.M. Stolnitz, A.Yu. Peshkova*

The mathematical model of UV-induced melanogenesis as a nonlinear dynamic system with negative feedback is presented. The system of ordinary and partial differential equations for the number of melanocytes, number of melanosomes in melanocytes and keratinocytes and melanin content in lower and upper layers of epidermis is derived. Problems of numerical calculations of model equations and its possible applications to UV-therapy optimal modes calculation are discussed.

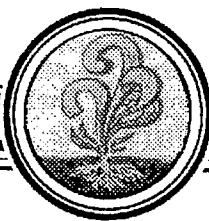


*Стольниц Михаил Маратович* – родился в Саратове (1954), окончил Саратовский госуниверситет (1977). Научный сотрудник НИИМФ СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика биологических процессов. Автор около 30 публикаций в отечественных и зарубежных журналах. E-mail: StolnizMM@info.sgu.ru



*Пешикова Анна Юрьевна* – родилась в Баку (1975), окончила Саратовский госуниверситет (1997). Аспирант кафедры оптики СГУ. Область научных интересов – нелинейные процессы в биологии. Автор 6 публикаций в отечественных и зарубежных журналах.

E-mail: Peshkova@yandex.ru



## КВАЗИРАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

*А.В. Нетребко, О.А. Чичигина*

Получено стационарное распределение плотности вероятности по координатам для неравновесных состояний системы, время жизни которых велико по сравнению с временем корреляций. Показано, что слабая неравновесность проявляется в уменьшении эффективной температуры. Результаты подтверждены компьютерным моделированием. Предложен способ определения пространственной зависимости потенциальной энергии по зависимости времени жизни состояния от температуры.

### Введение

Описание выхода системы из квазиравновесного состояния под действием флуктуаций является задачей, объединяющей различные разделы современной науки. Такая задача возникает, например, в теориях фазовых переходов [1] и химических реакций, при исследовании динамики сложных биомолекул [2], при вычислении коэффициента поверхностной диффузии в полупроводниках [3], при анализе срыва слежения радиотехнических и оптических систем автосопровождения [4]. В большинстве случаев динамика таких систем может быть смоделирована как движение броуновской частицы в сложном потенциальном поле.

Рассмотрим броуновское движение одной частицы в потенциальной яме  $U$  под действием внешних шумов, характеризующихся температурой  $T$ . Если частица может с течением времени выйти из этой ямы, то процесс является неравновесным и, строго говоря, не описывается стационарным распределением вероятностей. Для вычисления зависимости вероятности выхода от начальных условий и от времени необходимо решать уравнение Понтрягина [5] (см. также [6,7]), причем в случае сложного вида потенциала не удастся получить решение аналитическими методами. Это уравнение неприменимо, если среднее время до выхода  $\tau_{av}$  много больше времени «забывания» начального условия или времени корреляции

$$\tau_{av} \gg \tau_c, \quad (1)$$

то есть процесс является близким к стационарному. Тогда вероятность выхода не зависит от времени и начальных условий.

В таком квазиравновесном приближении можно описать ансамбль Гиббса, задаваемый температурой и потенциальной энергией, ввести не зависящее от

времени распределение вероятностей в фазовом пространстве  $w(q, v)$  и вычислить вероятность попадания частицы в область фазового пространства, соответствующую выходу частицы.

В работах [8–10] получена формула для нахождения константы выхода  $a$  (то есть величины, обратной среднему времени жизни) квазиравновесной системы. Постоянная  $a$  имеет смысл вероятности выхода в единицу времени. Вероятность такого события в единицу времени описывается интегралом от скалярного произведения вектора скорости и внешней нормали к поверхности  $S_0$ , выход частицы за которую считается выходом из ямы, и распределения вероятностей по всем скоростям и по  $S_0$ . Для частицы, описываемой координатами и скоростями, это выражение запишется в виде:

$$a = \int_{S_0} w(q, v) v_j n_j dS_0 dv, \quad (2)$$

где  $S_0$  – гиперповерхность в пространстве координат, пересечение которой означает выход из ямы;  $n_j$  – единичный вектор внешней нормали к  $S_0$ ;  $v_j n_j$  – скалярное произведение многомерных векторов. Гиперповерхность  $S_0$ , пересечение которой изображающей точкой символизирует выход из потенциальной ямы, естественно поместить на гребне потенциального барьера.

В работах [8–10] было показано также, что ввиду малости константы  $a$  процесс распада является экспоненциальным, напоминая тем самым спонтанный распад. А вероятность того, что частица, находившаяся в начальный момент в яме, будет там обнаружена в момент времени  $t$ , определяется выражением

$$P(t) = \exp(-at). \quad (3)$$

Задача данной работы – нахождение распределения вероятностей  $w(q, v)$  для частицы, движущейся в потенциальной яме до выхода. Очевидно, что при уменьшении вероятности выхода полученное нами распределение должно стремиться к распределению Гиббса, то есть это новое квазиравновесное распределение связано с константой  $a$ . Константа  $a$ , в свою очередь, определяется из (2) с помощью  $w(q, v)$ . Эта взаимная зависимость распределения и вероятности выхода и будет использована в работе.

## 1. Зависимость вероятности выхода частицы от ее средней потенциальной энергии

Рассмотрим две потенциальные ямы ( $U_1, U_2 \leq 0$ ) одинакового объема, такие что частица может переходить только из одной ямы в другую и процесс этих переходов является равновесным. Время выхода из  $i$ -й ямы  $\tau_{av,i}$  совпадает с временем перехода из одной ямы в другую и удовлетворяет условию (1). Если считать микросостоянием положение частицы в данной точке пространства, то согласно (1) номер ямы, в которой находится частица, окажется макропараметром, задающим ансамбль Гиббса. Тогда можно ввести распределения вероятностей только для каждой ямы в отдельности, но они не будут равновесными. Единственный способ определить ансамбль Гиббса для всей области движения частицы – это рассматривать номер ямы  $i$  как микросостояние, а температуру считать макропараметром, задающим этот ансамбль. Каждое такое микросостояние характеризуется энергией  $\langle U \rangle_i$ , имеющей смысл средней энергии частицы при движении ее в  $i$ -й потенциальной яме. Система находится в равновесном состоянии и вероятность нахождения частицы в той или иной яме (то есть в  $i$ -м микросостоянии) задается распределением Больцмана



$$w_1^B = \exp[-\langle U \rangle_1 / (kT)] / \{\exp[-\langle U \rangle_1 / (kT)] + \exp[-\langle U \rangle_2 / (kT)]\},$$

$$w_2^B = \exp[-\langle U \rangle_2 / (kT)] / \{\exp[-\langle U \rangle_1 / (kT)] + \exp[-\langle U \rangle_2 / (kT)]\},$$
(4)

где  $k$  – постоянная Больцмана. Выберем время  $\tau$  такое, что  $\tau_c \leq \tau \leq \tau_{av}$ , где  $\tau_c$  – время корреляции при движении внутри ямы, то есть время, за которое теряется информация о начальном положении частицы. Переходы в такой системе через время  $\tau$  можно считать марковским процессом, но вероятность того, что частица успеет за это время перейти в другую яму и вернуться обратно, пренебрежимо мала. При этих условиях марковская матрица (см., например, [6,7]), состоящая из вероятностей переходов в  $i$ -ю яму из  $j$ -й, согласно (3) запишется следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \exp(-a_1\tau) & 1 - \exp(-a_2\tau) \\ 1 - \exp(-a_1\tau) & \exp(-a_2\tau) \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения матрицы  $A$ :  $\lambda_1=1$ ,  $\lambda_2=2[\exp(-a_1\tau)+\exp(-a_2\tau)]-1 < 1$ . Собственный вектор, соответствующий  $\lambda_1$ , компонентами которого являются нормированные вероятности нахождения частицы в  $i$ -й яме, имеет вид

$$w_1 = [1 - \exp(-a_2\tau)] / [2 - \exp(-a_1\tau) - \exp(-a_2\tau)]$$

$$w_2 = [1 - \exp(-a_1\tau)] / [2 - \exp(-a_1\tau) - \exp(-a_2\tau)].$$
(5)

В то же время, матрица  $A^n$ , описывающая переходы за  $n \rightarrow \infty$  шагов, то есть за время  $t = n\tau \gg \tau_{av}$ , должна любое начальное распределение вероятностей переводить в распределение Больцмана (4).

Матрица, удовлетворяющая этому условию, выглядит следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} w_1^B & w_1^B \\ w_2^B & w_2^B \end{pmatrix}.$$

Эта матрица должна иметь общие собственные векторы с матрицей  $A$ , одно из ее собственных значений равно  $\lambda_1^n=1$ , так как второе собственное значение матрицы  $A$  зануляется при возведении в  $n$ -ю степень. Соответствующий этому значению собственный вектор матрицы  $A^n$  задает распределение Больцмана (4). Приравнявая (4) и (5), получаем

$$1 - \exp(-a_1\tau) \approx a_1\tau \approx C \exp[\langle U \rangle_1 / (kT)],$$
(6)

где  $C$  – некоторая функция, зависящая только от  $T$  и не зависящая от  $U$ . Итак, (6) дает экспоненциальную зависимость вероятности выхода от средней «глубины» ямы.

## 2. Среднее время выхода из двумерной потенциальной ямы

Для удобства рассмотрим двумерное броуновское движение в потенциальной яме  $U(x_1, x_2)$ , занимающей область  $\Omega$ , выход из которой происходит при пересечении замкнутой границы  $S_0$  длиной  $L \sim \Omega^{1/2}$ . Считаем, что  $U(S_0)=0$ . Частица находится в тепловом равновесии с поверхностью, на которой происходит движение. Распределение в фазовом пространстве может быть представлено в

виде произведения квазиравновесного распределения Больцмана  $w(x_1, x_2)$  и условного распределения по скоростям  $w'(v_1, v_2 | x_1, x_2)$ . Такая ситуация реализуется, например, в биологических системах [2], и ее исследование важно при вычислении времен перехода от одной конформации полипептидной цепи к другой. Этот переход можно описать как выход пробной частицы из потенциальной ямы размером порядка  $10^{-9}$  м, глубина которой (примерно  $10^{-21}$  Дж) сравнима с тепловой энергией. Такая задача встречается также при вычислении коэффициента поверхностной диффузии в полупроводниках [4].

При вычислении интеграла (2) выполним сначала интегрирование по скоростям. Условие теплового квазиравновесия частицы с поверхностью позволяет считать, что распределение по скоростям будет максвелловским везде, кроме области  $\delta S$  вблизи границы. Ширина  $\delta S$  порядка длины свободного пробега. Дело в том, что весь процесс движения частицы рассматривается до первого пересечения границы, и, значит, попасть в область  $\delta S$  частица может, двигаясь только по направлению к границе. Для каждой точки границы  $S_0$  можно ввести систему координат для скоростей, направив оси перпендикулярно ( $v_1$ ) и параллельно ( $v_2$ ) границе. Тогда распределение по скоростям на  $S_0$  будет аналогичным максвелловскому, но в диапазоне  $v_1 > 0$ ,

$$w'(v_1, v_2 | x_1, x_2 \notin \delta S) = w_M,$$

$$w'(v_1, v_2 | x_1, x_2 \in \delta S) = 2w_M \theta(v_1).$$

Окончательно получаем выражение для  $a$  в нашем случае

$$a = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \int_0^{\infty} dv_1 \int_{S_0} dl v_1 w(x_1, x_2) w_M.$$

Интегрирование для  $a$  может быть разбито на две части – координатную и связанную со скоростями:  $a = a' a''$ , где

$$a' = Lw(S_0),$$

$$a'' = \langle v_1 \rangle = [2kT/(m\pi)]^{1/2}.$$

Итак, получаем окончательное выражение для константы распада

$$a = [2kT/(m\pi)]^{1/2} Lw(S_0) = 1/\tau_{av}. \quad (7)$$

### 3. Квазиравновесное распределение Больцмана

Сравнение формул (6) и (7) показывает, что

$$w(S_0) = A \exp[\langle U \rangle / (kT)],$$

где  $A$  не зависит от  $U$ . Значит, стационарное распределение Больцмана не описывает квазиравновесное состояние частицы. Однако очевидно, что квазиравновесное распределение не должно кардинально отличаться от распределения Больцмана, и это отличие можно учесть с помощью некоторой поправки. Введем эту поправку  $\alpha$  следующим образом:

$$w(x, y) = (1/\Omega) \exp[(\langle U \rangle - U(x, y)\alpha) / (kT)]. \quad (8)$$

Это и есть квазиравновесное распределение Больцмана, удовлетворяющее условиям (6) и (7). Константа  $\alpha$  определяется из условия нормировки и характеризует неравновесность системы. Для определения  $\alpha$  и  $\langle U \rangle$  имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \int \exp[-U\alpha/(kT)] dx dy = \Omega \exp[-\langle U \rangle/(kT)], \\ \int U \exp[-U\alpha/(kT)] dx dy = \langle U \rangle \Omega \exp[-\langle U \rangle/(kT)]. \end{cases} \quad (9)$$

Первое из этих уравнений получается из условия нормировки, а второе – из того факта, что  $\langle U \rangle$  является математическим ожиданием  $U$ .

Ряд важных соотношений может быть получен в общем виде. А именно, из очевидного математического неравенства

$$\int U \exp[-U\alpha/(kT)] dx dy \geq U_{\min} \int \exp[-U\alpha/(kT)] dx dy$$

получаем не менее очевидное с физической точки зрения соотношение

$$\langle U \rangle \geq U_{\min}. \quad (10)$$

Знак равенства в (10) соответствует прямоугольной потенциальной яме.

Во введении была упомянута необходимость наличия предельного перехода (8) к распределению Больцмана ( $\alpha \rightarrow 1$ ) при уменьшении вероятности выхода  $a$ , то есть согласно (6) при  $\langle U \rangle/(kT) \rightarrow -\infty$ . Однако средняя энергия не является заданной величиной, поэтому в дальнейшем будем характеризовать глубину ямы минимальным значением потенциальной энергии  $U_{\min}$ .

Для сокращения вычислений введем безразмерные переменные  $\beta = U_{\min}/kT < 0$ ,  $0 < \gamma = \langle U \rangle/U_{\min} < 1$ ,  $0 < u = U/U_{\min} < 1$ . Тогда уравнения (9) перепишутся в виде

$$\begin{cases} \int \exp(-u\alpha\beta) dx dy = \Omega \exp(-\beta\gamma), \\ \int u \exp(-u\alpha\beta) dx dy = \Omega \gamma \exp(-\beta\gamma). \end{cases} \quad (11)$$

Далее продифференцируем первое уравнение в (11) по  $\beta$  и с учетом второго уравнения получим

$$(\partial\alpha/\partial\beta) \beta + \alpha = 1 + \partial\gamma/\partial\beta(\beta/\gamma). \quad (12)$$

В равновесном пределе  $\beta \rightarrow -\infty$  в левой части второго уравнения (11) можно вынести из-под знака интеграла максимальное значение медленно меняющейся по сравнению с экспонентой функции  $u$ , равное единице. Используя первое уравнение из (11), получаем

$$\gamma = 1. \quad (13)$$

Очевидно, что при малых температурах средняя энергия близка к минимальной. В этом случае второе слагаемое в правой части (12) зануляется, и получающееся уравнение дает искомый результат

$$\lim_{\beta \rightarrow -\infty} \alpha = 1.$$

В пределе больших температур  $\beta \rightarrow 0$  из (12) получается  $\alpha \rightarrow 1$ . В этом случае отсутствие искажений, которые могли бы возникнуть из-за конечного времени измерения, объясняется тем, что распределение само по себе (и в больцмановском варианте) является близким к равномерному, то есть искажать, фактически,

нечего. Однако важно учесть, что параметр  $\beta$  ограничен снизу условием (1), так как при больших температурах заметно возрастает вероятность выхода.

Кроме предельных значений  $\alpha$  (12) позволяет представить общий вид зависимости этого параметра неравновесности от  $\beta$ . Данная функция имеет максимум и, следовательно, всегда  $\alpha \geq 1$ . Покажем это.

Условие экстремума зануляет первое слагаемое в левой части (12). Для выяснения знака второго слагаемого в правой части, определяющего значение  $\alpha$  по сравнению с единицей, выразим  $\gamma$  из (11)

$$\gamma = \int u \exp(-u\alpha\beta) dx dy / \int \exp(-u\alpha\beta) dx dy.$$

Знак производной  $\partial\gamma/\partial\beta$  будет определяться знаком числителя, а именно, знаком выражения

$$-\int u^2 \exp(-u\alpha\beta) dx dy \int \exp(-u\alpha\beta) dx dy + \int u \exp(-u\alpha\beta) dx dy \int u \exp(-u\alpha\beta) dx dy. \quad (14)$$

Домножая (14) на

$$[(1/\Omega)\exp(\gamma\beta)]^2 > 0$$

и учитывая (8), получаем

$$-\langle u^2 \rangle + \langle u \rangle^2 \leq 0.$$

Следовательно, второе слагаемое в правой части (12) больше нуля и  $\alpha > 1$ . Данный результат подтверждается рассмотрением кусочно-постоянных потенциалов в работе [11]. Из этого можно сделать важный вывод, что влияние неравновесности процесса сводится к уменьшению эффективной температуры, то есть к сужению распределения по координатам. Это происходит из-за того, что маловероятные состояния не успевают реализоваться. Важно отметить, что формула (8) и уравнения (9) верны для любой размерности фазового пространства.

Полученный результат можно также интерпретировать как увеличение глубины потенциальной ямы в  $\alpha$  раз. Подобный эффект описан в работе [12], где показано, что одномерное движение массивной частицы под действием только упругих ударов более легких частиц может быть представлено как движение внутри некой потенциальной ямы с выполнением закона сохранения энергии.

#### 4. Оценка применимости метода квазиравновесных распределений

Рассмотренное описание не учитывает особенностей взаимодействия частицы с термостатом, поскольку квазиустановившееся распределение не зависит, например, от коэффициента трения  $h$ . Однако от него зависит время установления этого распределения  $\tau_c$ . Существуют два ограничения на применение формулы (8), описываемые неравенством (1). В случае сильного трения под временем корреляции следует понимать время, за которое броуновская частица проходит расстояние, равное характерному размеру ямы  $R$ , то есть

$$\tau_c \sim R^2/D,$$

где  $D$  – коэффициент самодиффузии. Причем  $D = kT/(hm)$ , следовательно

$$\tau_c \sim R^2 hm / (kT).$$

Это означает, что при слишком большом трении частица будет долгое время локализована в небольшой области ямы, то есть время корреляции оказывается

сравнимым с временем выхода  $\tau_{av}$  и вычисления времени выхода по формулам (8) дадут сильно искаженный результат.

В случае слишком малого трения время корреляции оценивается следующим образом:

$$\tau_c \sim h^{-1}.$$

Воздействие внешних шумов на частицу мало, и ее движение долгое время остается механическим, а не тепловым, возникают квазиустойчивые циклы. И опять время выхода, вычисленное без учета времени установления распределения, будет отличаться от истинного.

Итак, мы получили ограничения на допустимые значения коэффициента трения

$$1/\tau_{av} \ll h \ll \tau_{av} kT/(R^2 m).$$

В работе [2] приведены результаты компьютерного эксперимента по исследованию зависимости  $\tau_{av}$  от  $h$ , где величины

$$kT/(L^2 m) \sim 1, \quad \tau_{av} \sim 100$$

даны в безразмерных единицах. На интервале  $0.1 \leq h \leq 10$  показано отсутствие зависимости  $\tau_{av}$  от  $h$ , по мере удаления от указанного интервала в обе стороны  $\tau_{av}$  возрастает. Этот результат хорошо согласуется с нашей оценкой и доказывает применимость квазиравновесного распределения в пределах изменения коэффициента трения в сто раз.

## 5. Примеры вычислений для различных видов потенциалов

Рассмотрим параболическую потенциальную яму  $U=U_{\min}(1-r^2/R^2)$ . Для такой ямы соотношения (11) запишутся в виде

$$\begin{cases} e^{-\beta\alpha} - 1 = -\alpha\beta e^{-\gamma\beta}, \\ (\gamma\beta - \beta - 1/\alpha)\alpha e^{-\gamma\beta} = -1. \end{cases}$$

Для конусообразной ямы,  $U=U_{\min}(1-r/R)$ , получаются уравнения

$$\begin{cases} \beta\alpha - 1 + e^{-\beta\alpha} = 1/2 (\alpha\beta)^2 e^{-\gamma\beta}, \\ (\gamma\beta - \beta - 2/\alpha)\alpha e^{-\gamma\beta}/2 = -1. \end{cases}$$

Для ямы вида  $U=U_{\min}[1-(r/R)^{1/2}]$  имеем

$$\begin{cases} (6e^{-\beta\alpha} + (\beta\alpha)^3 - 3(\beta\alpha)^2 + 6\beta\alpha - 6)(\beta\alpha)^4/4 = e^{-\gamma\beta}, \\ (\gamma\beta - \beta - 4/\alpha)\alpha e^{-\gamma\beta}/4 = -1. \end{cases}$$

На рис. 1 представлены результаты вычислений зависимости  $\alpha$  от  $\beta$  для параболической потенциальной ямы (сплошная линия), для конусообразной (пунктирная линия), для корневой (штриховая линия) и для ямы вида  $U=U_{\min}[1-(r/R)^4]$  (штрихпунктирная линия).

Сравнение этих графиков позволяет сделать вывод, что изменение распределения, связанное с неравновесностью процесса, больше всего проявляется при  $|\beta| \sim 4$ . Причем это проявление тем меньше, чем ближе к прямоуголь-

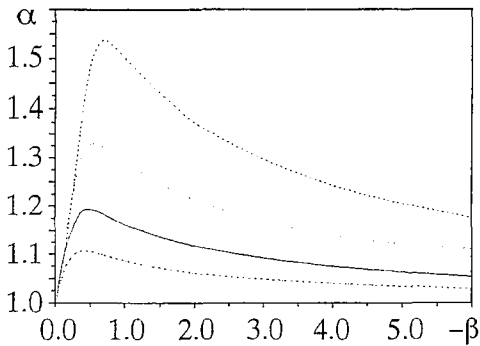


Рис. 1

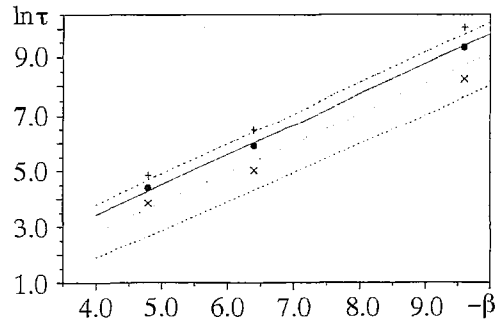


Рис. 2

ной оказывается вид потенциальной ямы. На рис. 2 представлена зависимость логарифма безразмерного среднего времени выхода частицы из потенциальной ямы в зависимости от  $\beta$  для тех же случаев, что и на рис. 1. Вычисления проводились по формуле

$$t = (-\pi \beta / 8)^{1/2} e^{-\gamma \beta},$$

следующей из формулы (7). Параметр приведения времени к безразмерному виду равен  $(mR^2/U_{\min})^{1/2}$ .

## 6. Компьютерное моделирование

В компьютерном эксперименте моделировалось движение частицы массы  $m=1$  под действием  $\delta$ -коррелированных сил  $\xi_x$  и  $\xi_y$  в потенциальном поле  $U(x,y)$  в соответствии с уравнениями

$$d^2x/dt^2 = -\partial U/\partial x - h v_x + w \xi_x,$$

$$d^2y/dt^2 = -\partial U/\partial y - h v_y + w \xi_y,$$

где  $\xi_x$  и  $\xi_y$  – случайные величины, равномерно распределенные на интервале  $[-1,1]$ . Воздействие этих случайных сил происходило с шагом по времени  $\tau_0=1/100$ , за единицу выбрано время прохождения через всю яму. Начальное положение частицы было выбрано на дне потенциальной ямы. Интегрирование проводилось методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности с автоматическим выбором шага интегрирования. Среднее время выхода находилось по 500 реализациям.

Для определения температуры, соответствующей амплитуде шумов  $w$ , учтем, что корреляционная функция такого шума определяется выражением

$$K = w^2 \langle \xi^2 \rangle = w^2/3.$$

С другой стороны, для шума, близкого к  $\delta$ -коррелированному,

$$K \approx 2kTh/\tau_0.$$

Из этих двух выражений получаем температуру

$$kT = w^2 \tau_0 / (6h).$$

В случае малых температур полученное время выхода было уточнено с учетом ненулевого времени корреляции случайных воздействий  $\tau_0$ , аналогичного времени свободного пробега. Дело в том, что после удара, предшествовавшего выходу частицы, она на протяжении времени  $\tau_0$  движется (без дополнительных ударов) с замедляющим ускорением  $(1/m)\partial U/\partial r|_{r=R}$ , и средняя скорость на границе, входящая в (7), будет меньше

$$\langle \tilde{v}_1 \rangle_{s_0} = \langle v_1 \rangle_{s_0-\delta} - (\tau_0/m)\partial U/\partial r|_{r=R},$$

где  $\langle v_1 \rangle_{s_0-\delta}$  – средняя скорость, направленная к границе, задаваемая просто распределением Максвелла, то есть вдвое меньшая скорости в (7). Эта поправка не превышает нескольких процентов. Результаты эксперимента представлены на рис. 2. Кружками показаны времена выхода из параболической ямы (сплошная линия), прямыми крестиками – из ямы, соответствующей штрихпунктирной линии, и косыми крестиками – из конусообразной ямы (пунктирная линия).

Компьютерное моделирование подтверждает также линейную зависимость среднего времени жизни состояния от радиуса ямы. На рис. 3 представлена экспериментальная зависимость времени жизни от коэффициента трения. Верхний график, маркированный крестиками, соответствует радиусу ямы, вдвое большему, чем радиус ямы, время выхода из которой показано на графике, маркированном квадратиками. Видно, что в области применимости теории время выхода из большей ямы вдвое больше, чем из меньшей.

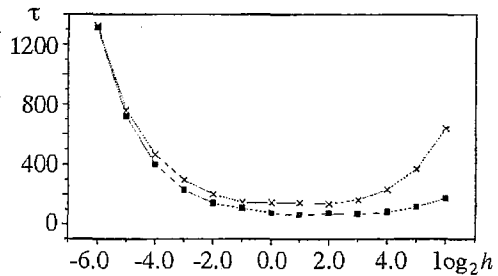


Рис. 3

За пределами этой области заметно влияние времени корреляции, которое описано в разделе 4.

## 7. Восстановление координатной зависимости потенциальной энергии по зависимости времени выхода от температуры

Показанная в разделах 5, 6 зависимость времени жизни состояния  $\tau(kT)$  от «кривизны стенок» потенциальной ямы  $U(x_1, x_2)$  позволяет решить и обратную задачу в том случае, когда потенциальная энергия точно не определена. Такая задача возникает, например, при попытке моделировать молекулярную структуру сложного биологического соединения по имеющимся данным о времени его распада или времени удерживания им какой-либо частицы.

Нами предложен алгоритм восстановления вида простейшей симметричной двумерной потенциальной ямы (заданного размера  $R$ ) по известной зависимости от температуры времени выхода  $\tau(kT)$  из этой ямы частицы массой  $m$ . При этом предполагаем, что потенциальную энергию можно представить в виде

$$U = U_{\min}[1 - (r/R)^p].$$

Таким образом, задача сводится к вычислению и последующему уточнению величин  $U_{\min}$  и  $p$ .

Согласно (7) и (8), учитывая, что  $L=2\pi R$ ,  $\Omega=\pi R^2$  и  $\tau=1/a$ , получаем

$$\langle U \rangle(\tau, kT) = kT \ln(2\tau/R)[2kT/(\pi m)]^{1/2}. \quad (15)$$

Подставляя имеющуюся зависимость  $\tau(kT)$ , получаем  $\langle U \rangle(kT)$ . Возьмем две точки на этой кривой в диапазоне наименьших температур, когда распределение (8) близко к распределению Гиббса ( $\alpha \approx 1$ ). Согласно теореме о распределении энергии по степеням свободы, следующей из распределения Гиббса [13],

$$\langle U \rangle(kT) = U_{\min} + 2/(pkT). \quad (16)$$

Записав (16) для каждой из выбранных точек, находим приближенные значения  $U_{\min}$  и  $p$ . Далее вычисляем по формулам (8) и (9)  $\alpha$  и более точную зависимость  $\langle U \rangle(kT)$  с учетом неравновесности процесса и, выбирая две новые точки на новой кривой  $\langle U \rangle(kT)$ , находим уточненные значения  $U_{\min}$  и  $p$ . Далее эту операцию можно повторять, получая все более точные их значения.

### Выводы

В случае квазиравновесного процесса распределение по координатам оказывается более узким, чем распределение Больцмана, и описывается формулами (8) и (9). Оно применимо в широком диапазоне значений коэффициента трения. В ряде случаев удается получить вид зависимости потенциальной энергии от координат по известной зависимости времени жизни состояния от температуры.

В заключение авторы благодарят Юрия Михайловича Романовского за привлечение внимания авторов к данной проблеме, Бориса Андреевича Гришанина за ценные замечания, позволившие существенно улучшить работу, а также Юрия Александровича Кравцова за интерес к работе.

*Работа проведена при частичной финансовой поддержке РФФИ 98-03-33191А и Государственной программы «Научные школы России» 00-15-97-843.*

### Библиографический список

1. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982. С. 521.
2. Romanovsky Yu.M., Netrebko A.V. // Izv. VUZ «AND». 1998. Т. 6, № 4. С. 31.
3. Болтакс Б.И. Диффузия в полупроводниках. М.: Физматгиз, 1961.
4. Обрезков Г.В., Разевиг В.Д. Методы анализа срыва слежения. М.: Сов. радио, 1977.
5. Понтрягин А., Андронов А., Витт А. // ЖЭТФ. 1933. Т. 3. С. 165.
6. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
7. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
8. Стратонович Р.Л. // ЖЭТФ. 1995. Т. 81. С. 729.
9. Стратонович Р.Л., Чичигина О.А. // ЖЭТФ. 1996. Т. 110. С. 1284.
10. Чичигина О.А. // Вестник Московского Университета. Сер. 3. Физика, Астрономия. 1997. № 5. С. 6.
11. Чичигина О.А. // Сб. памяти А.Н. Малахова/Под ред. А.И. Саичева. Н.Новгород: ТАЛАН, 2000. С. 98.
12. Синай Я.Г. ТМФ. 1999. Т. 121, № 1. С. 110.
13. Стратонович Р.Л., Полякова М.С. Элементы молекулярной физики, термодинамики и статистической физики. Изд-во Моск. ун-та, 1981. С. 44.

Институт механики МГУ  
Физический факультет МГУ

Поступила в редакцию 26.12.2000



## QUASI-EQUILIBRIUM BOLTZMANN DISTRIBUTION

*A.V. Netrebko, O.A. Chichigina*

Stationary coordinate distribution is received for nonequilibrium states of system, which lifetime is much more than correlations time. It is shown, that this weak nonequilibrium is revealed by decrease of effective temperature. Results are confirmed by computer simulations. The way of potential energy coordinate dependence determination by means of lifetime's temperature dependence is proposed.



*Нетребко Алексей Васильевич* – родился в 1955 году. Окончил механико–математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова в 1977 году, кандидат физико–математических наук. В настоящее время ведущий сотрудник Института механики Московского государственного университета. Область научных интересов: динамическая теория пластичности, математическое моделирование в механике деформируемого твердого тела, численные методы. Имеет около 30 научных работ.



*Чичигина Ольга Александровна* – родилась в 1971 году. Окончила физический факультет МГУ (1994), кандидат физико–математических наук, старший научный сотрудник физического факультета МГУ. Область научных интересов включает динамический хаос, случайные процессы, теорию информации. Автор более 10 научных работ.

E–mail: [chichigina@squeez.phyz.msu.su](mailto:chichigina@squeez.phyz.msu.su)



## NONLINEAR DYNAMICS OF DISSIPATIVE SYSTEMS: YESTERDAY, TODAY, AND TOMORROW \*

*M.I. Rabinovich, N.F. Rulkov*

### Introduction

Nonlinear dynamics (ND) is an interdisciplinary branch of science that gives researchers an effective tool enabling them to understand, describe, and predict the time evolution of physical, chemical, biological and social systems, provided that uncontrolled random impacts (noises, fluctuations) are not too great to disturb the cause–effect behavior.

Although ND rests upon a formalized, frequently fairly abstract mathematical apparatus it is an applied science since it studies nonlinear phenomena revealed in real or laboratory conditions, and its principal goals are prediction and, if possible, the control of the behavior of nonlinear systems. That is the reason why ND is constantly changing in time. What remains invariable is the approach to the analysis of nonlinear dynamical systems that was formulated in the nineteen thirties thanks primarily to the work of Mandelshtam and Andronov. Andronov's formulation of this approach contained three key points.

(i) Only those models demonstrating motions, which do not vary with small changes of the control parameters, can be regarded as really interesting ones. Andronov referred to these as models i.e. dynamical systems that are *structurally stable*.

(ii) To obtain insight into the dynamics of a system means to clarify all principal types of it's behavior under all possible initial conditions, i.e. one should investigate the behavior of the model as a whole rather than find particular solutions under specific initial conditions – hence Andronov's fondness of the methods of *phase space analysis*.

(iii) Consideration of the behavior of the system as a whole allows one to introduce the concept of topological equivalency of dynamical systems, and requires understanding of *local and global bifurcations* as control parameters are varied. Consideration of the topology of a phase portrait corresponds to a qualitatively stable motion of the system with small variation of governing parameters. Partitioning of the space of parameters into the regions with different behaviors then furnishes a complete picture of the potentialities of a dynamical system.

In fact, we are speaking about simplified models of real systems that highlight some phenomena and ignore others.

\* Презентация 2.07.2001 на Международной конференции, посвященной 100–летию со дня рождения А.А. Андропова «Progress in Nonlinear science», Nizhny Novgorod, Russia, July 2–6, 2001.

It is important to say that Mandelstam and Andronov had raised the level of nonlinear science about fifty years before it was acknowledged by a broad scientific community and became popular, when there appeared numerous «Nonlinear» journals, centers, institutes, and so on. Although their work and the works of their pupils were focused on physical problems, i.e., they were concerned with «Nonlinear physics» (radio electronic systems, mechanics, optics, acoustics), they always emphasized the universality of «Nonlinear thinking» which they mastered to perfection and passed this culture on to their pupils.

Similarly to quantum mechanics or the theory of relativity, nonlinear physics gave rise to a great variety of basic ideas and unexpected results. However, unlike quantum mechanics and the theory of relativity, nonlinear physics is concerned with systems of arbitrary spatio-temporal scales.

If we look backwards and omit details we can say that during the seventy years that have elapsed the interests of Nonlinear Dynamics were focused in time as follows.

1930s – 1960s	Periodic self-excited oscillations, weak interaction of oscillators, modes or waves, synchronization of oscillations.
1960s – 1980s	Strongly nonlinear waves, chaos, fractals, the birth of turbulence.
1980s – 1990s	Pattern formation, dynamics of systems with complex structure, models of memory, prediction and control of behavior by observed data.
1990s – 21 Century	Information dynamics (transmission and processing of information via nonlinear dynamical communication channels, dynamics of information networks, including Internet, information neuro-dynamics), ND of self-learning systems, dynamics of highrate processes and of quantum computations.

Basically, all these trends originated from the works of Faraday, Rayleigh, Poincare, van der Pol, Mandelstam, Andronov, and other founding fathers of nonlinear dynamics. However, different fields of nonlinear science have evoked greater or lesser interest of researchers, either following prominent discoveries or meeting requirements of the market, as was the case with the nonlinear dynamics of optical systems, laser dynamics including.

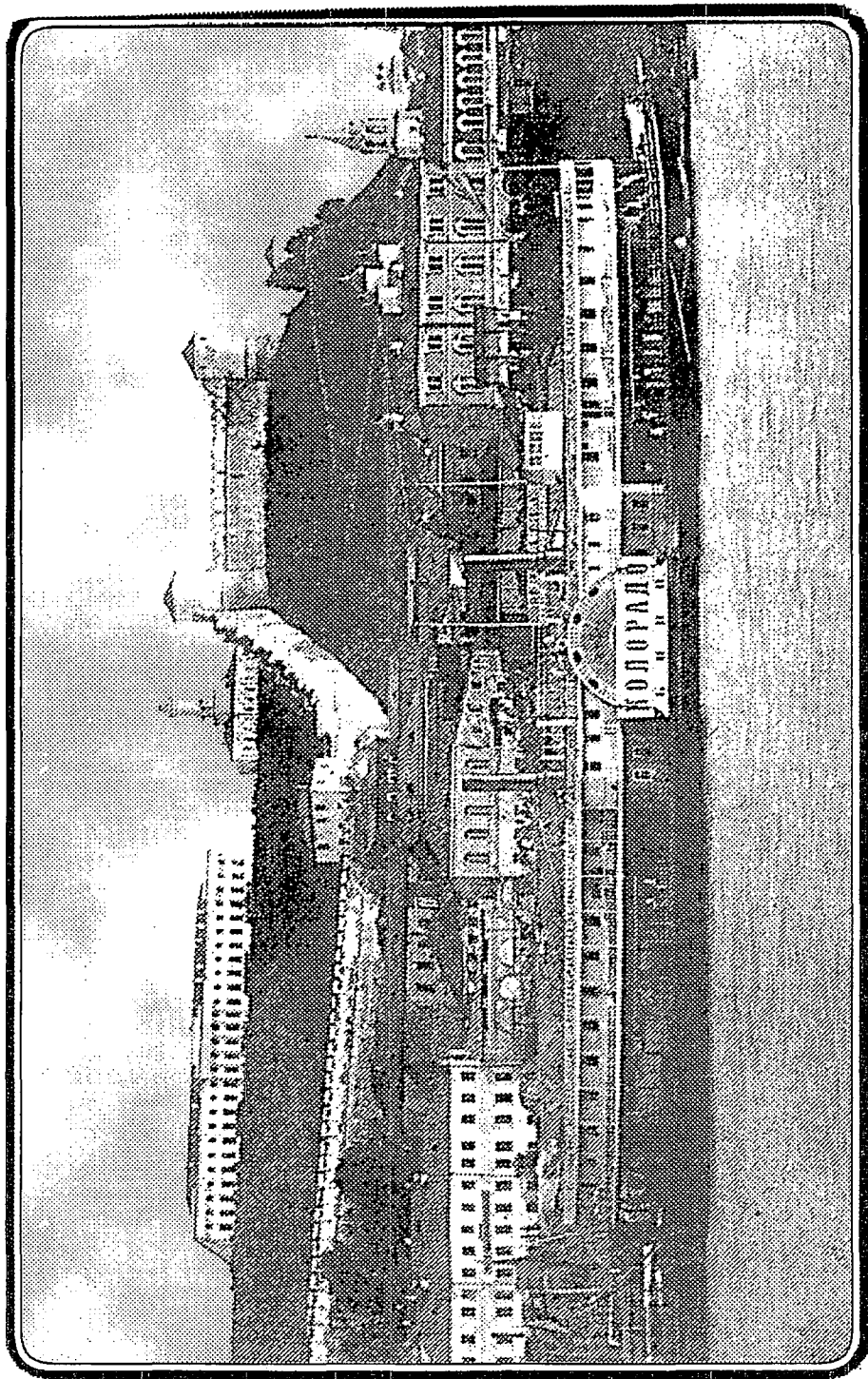
In this lecture we will discuss the most striking events that occurred in the nonlinear dynamics of dissipative systems in their historical retrospective. Meanwhile we realize that any such discussion is out to be subjective and bears the imprints of the authors' tastes.

### Acknowledgement

We thank A.V. Gaponov–Grekhov for many ideas and recommendations on the construction of this lecture. We are also grateful to L. Tsimring, V. Afraimovich, P. Varona, A. Selverston, H.D.I. Abarbanel and Ya. Sinai for useful discussions.

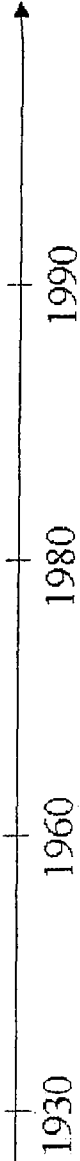
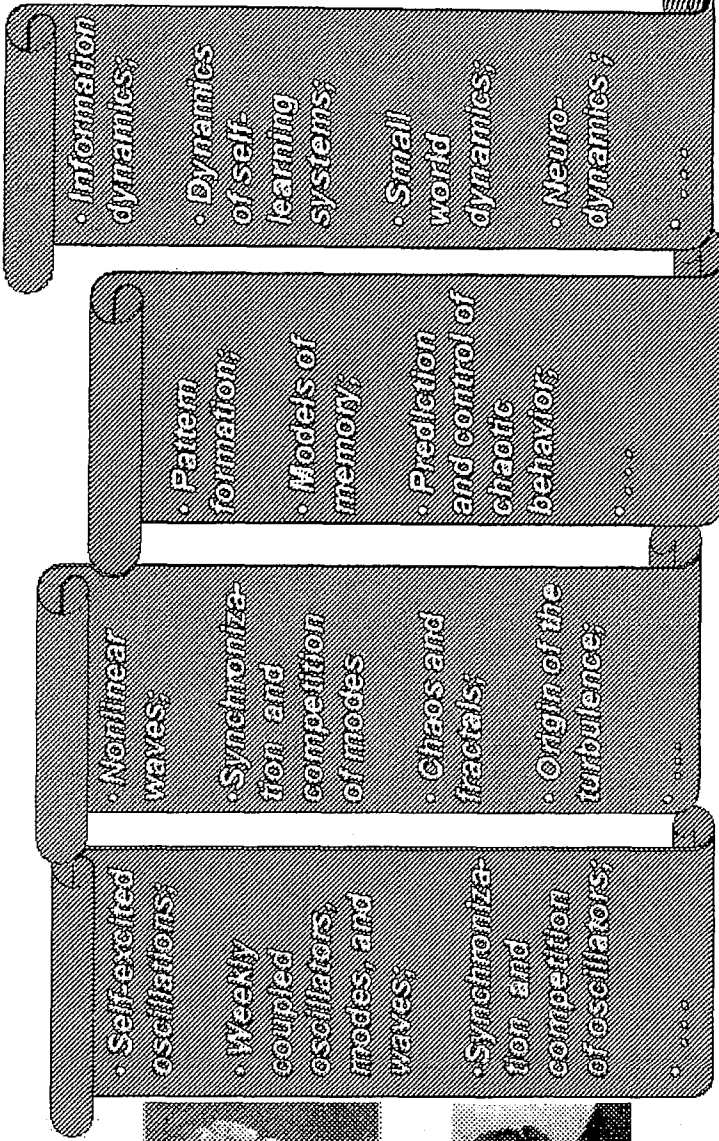
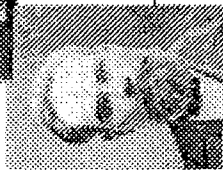
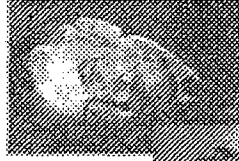
Institute of Applied Physics, RAS  
Nizhny Novgorod, Russia  
E-mail: gapgr@appl.sci-*nnov*.ru

Institute of Nonlinear Science  
San Diego, La Jolla USA  
e-mail: rabin@landau.UCSD.EDU



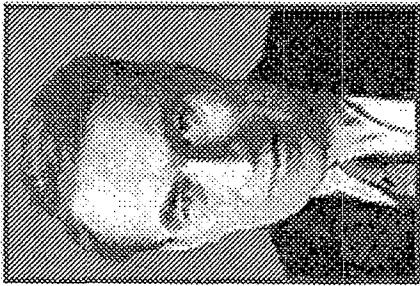
Slide 1. Nizhny Novgorod as A. Andronov might see it from the Volga river (at the beginning of 20-th century). As one can see the name of the ship is «Colorado». We think it was a beginning of wonderful tradition to organize scientific conferences on the ship cruising along the Volga river

# Nonlinear Dynamics of Dissipative Systems: from Classics to Modern Science



Slide 2. The flags of Nonlinear Dynamics, as we already mentioned in the Introduction, are changing in time. We show here the most attractive and challenging problems of Nonlinear Dynamics but we will not discuss here its mathematical methods

Slide 3. What remains constant despite the changing of the flags, is the approach to the analysis of nonlinear dynamical systems. The Mandelstam - Andronov's approach based on three «whales» which are formulated in this slide (see also the Introduction)



*“The main thing for us to do with equations of mathematical physics is to investigate what may and should be changed in them”*

*H. Poincaré, 1905*

### ***Andronov's approach toward understanding Nonlinear Dynamical Systems (1931):***

- Only those models demonstrating motions which do not vary with small changes of the parameters can be regarded as really interesting ones.
- To obtain insight into the dynamics of the system means to clarify all principal types of its behavior under all possible initial conditions.
- Consideration of the behavior of the DS as a whole allows to introduce the concept of the topological equivalence.

*Structural stability*

*Phase space analysis*

*Bifurcation analysis*

# Models, bifurcations, stability

## Universality of models

### Phenomena:

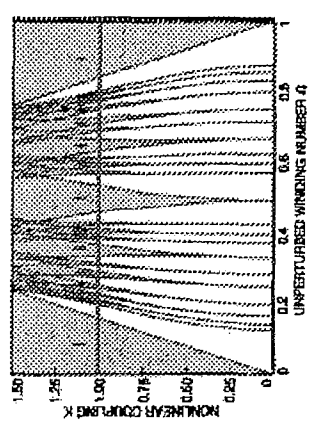
- Synchronization
- Devil's staircase
- Arnold tongues

### Models:

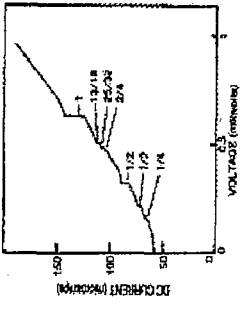
- Phase oscillator
- Circle map

$$\theta_{n+1} = \{\theta_n + \Omega + K \sin \theta_n\} \bmod 2\pi$$

Arnold tongues

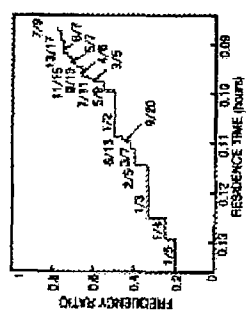


Josephson junction driven by a microwave current



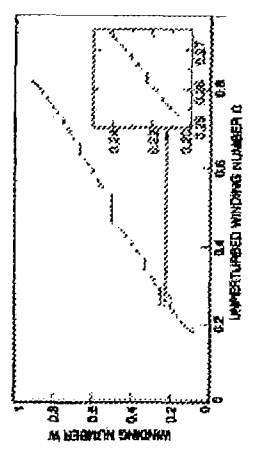
*V.N. Belykh, N.F. Petersen,  
O.H. Sorensen, Phys. Rev. B  
16, 4860 (1977)*

Belousov-Zhabotinsky reaction



*J. Maseko, H.L. Swinney  
Phys. Scr. 19, 35 (1985)*

Devil's staircase

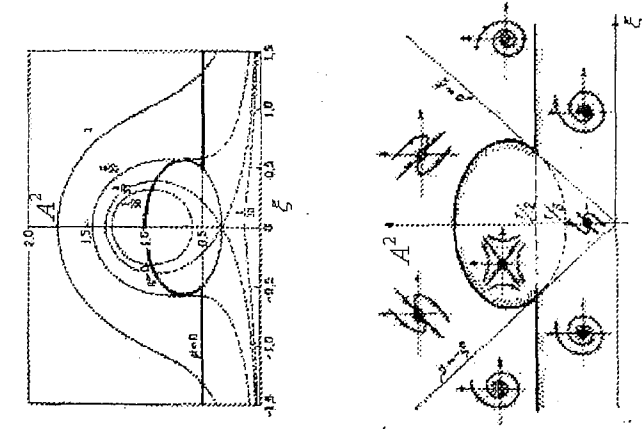


Slide 4. We would like to demonstrate the universality of the Mandelstam - Andronov's approach using as an example only one phenomenon, e.g. synchronization. Here we have to say a few words about the role of models. As Pablo Picasso wrote «Art is the lie that helps us to see the truth». The same holds true for modeling: A good mathematical model, of course, is a cartoon of reality but the model, because it is stripped of the secondary details, can permit deep analysis of the phenomenon. The modeler working with biological, chemical, engineering and other systems may enhance the understanding and prediction with the aid of various powerful dynamical concepts that have been learned in the other fields of science

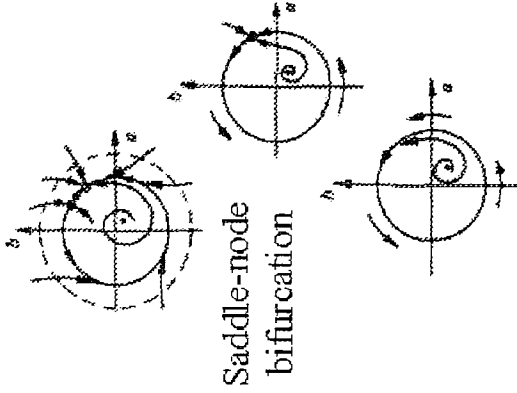
Slide 5. Classical pictures illustrating Synchronization and Competition phenomena. The amplitude equations here in fact are the Lotka - Volterra model that will be discussed later

# Key phenomena: synchronization and competition of oscillations (modes)

Forced synchronization



van der Pol (1927)  
Andronov, Vitt (1930)

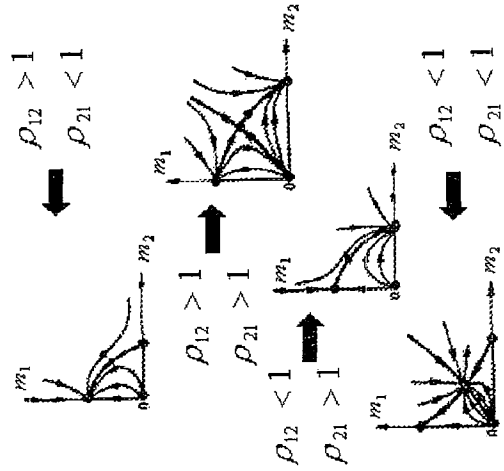


Saddle-node bifurcation

Competition

$$\dot{m}_i = m_i [1 - (m_i + \sum_{j \neq i} \rho_{ij} m_j)]$$

$$m_i = |a_i|^2$$



Andronov, Vitt (1934)

Mode-locking, hysteresis, multistability



# Winner-Less Competition Dynamics in Pattern Formation

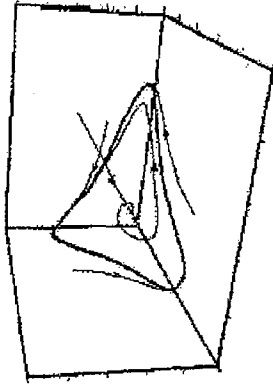
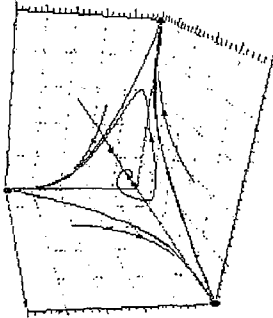
Lotka - Volterra model

$$\dot{a}_1 = a_1 [1 - (a_1 + \rho_+ a_2 + \rho_- a_3)]$$

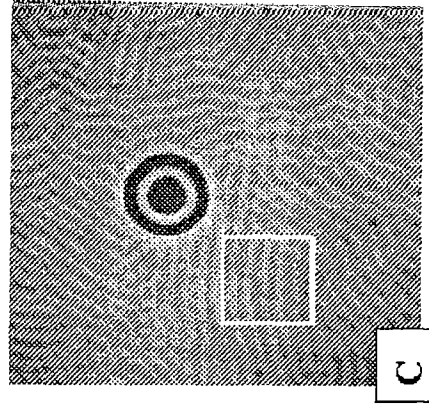
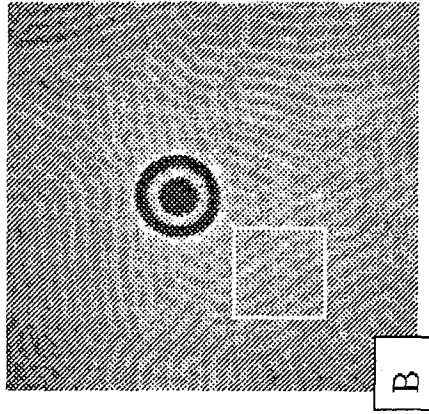
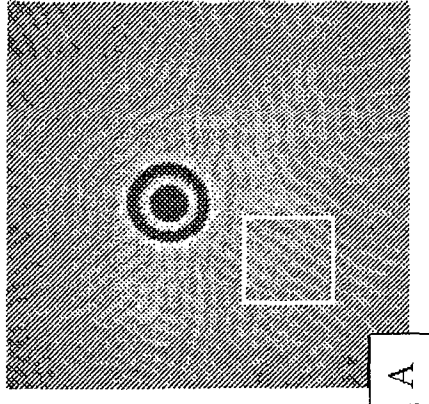
$$\dot{a}_2 = a_2 [1 - (a_2 + \rho_- a_1 + \rho_+ a_3)]$$

$$\dot{a}_3 = a_3 [1 - (a_3 + \rho_+ a_1 + \rho_- a_2)]$$

$$\rho_+ > 1, \rho_- < 1$$



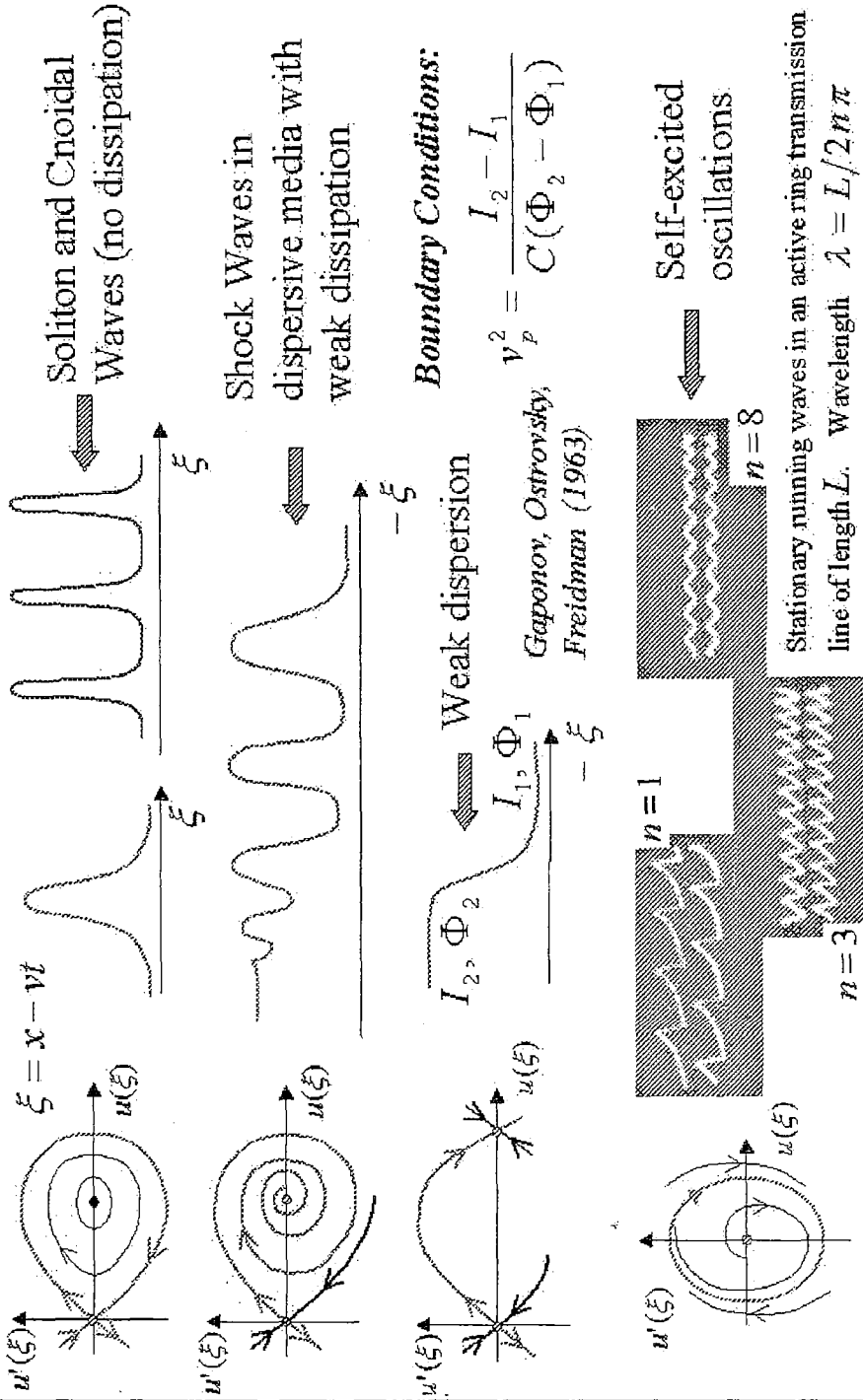
Kuppers - Lortz Instability (1969)



Slide 6. When the elements of the connection matrix are not symmetric the competition leads to sequential changing of the «winner». We call this phenomenon Winner-Less Competition (WLC). Such kind of competition is well known in the demographic dynamics and sociology (Voüing Paradox). Here one can see the WLC in the rotating convection in a horizontal liquid layer. It is clearly seen in the area marked by the white box. The rolls of convection with different orientation change each other periodically in time because of Kuppers - Lortz instability

Slide 7. The fact that steady state waves can be described using phase portraits is interesting, a useful, but trivial. What is not trivial, is the stability of such specific motions in the nonlinear media against nonsteady state perturbations. Why are such nongeneric solutions the attractors in functional phase space? The answer is different for different media. However, the physical reason of such stability is a behavior of the perturbations that are moving at the speed different from the speed of the steady state wave. Usually such stability exists in a finite region of the control parameters and depends on the specific bifurcation, as the result of which the steady state wave are transformed to more complex pattern. Without bifurcation theory to guide us, it would be difficult to organize and understand steady state waves and, more generally, any patterns of dynamical behavior. It is important to remember that a systematic study of generic cases in simple setting provides a solid foundation for investigation of more complex models, but it is no substitute for these investigations

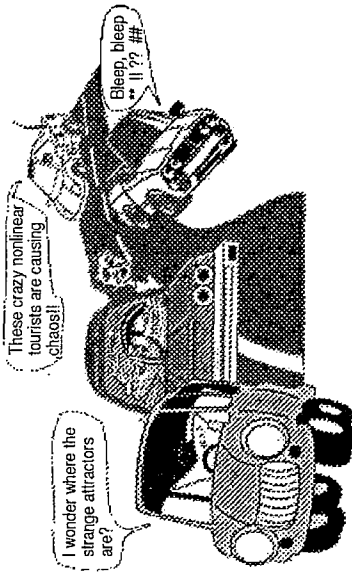
## From Nonlinear Oscillations to Nonlinear Waves



# Chaos

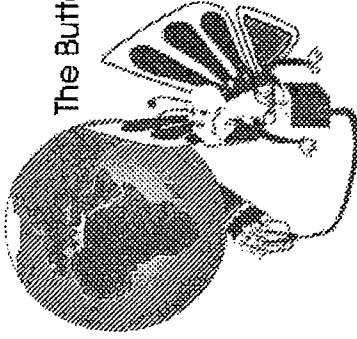
## Science and Fiction

*In the 70s it became clear that irregular deterministic behavior is amenable to analysis and to a certain extent to prediction*



$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$



The Butterfly Effect

*Sensitive dependence on initial conditions*

$$|\delta\mathbf{x}(t)| \sim |\delta\mathbf{x}(0)| e^{\lambda t}$$

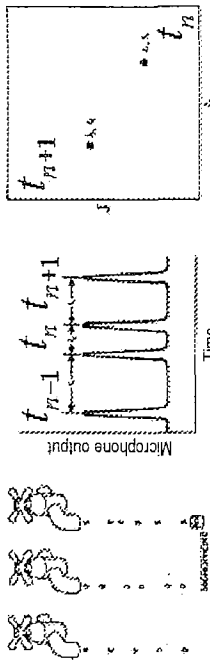
$\lambda$  - Lyapunov exponent

Slide 8. The term CHAOS has diverted attention from the real revolution that has taken place in our understanding of nonlinear dynamical systems toward «fiction». The main feature of dynamical chaos is an instability of the individual motions. Such instability is characterized by positive Lyapunov exponents

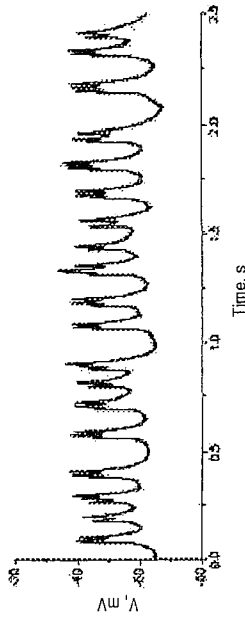
Slide 9. The ability of a dynamical theory to describe irregular phenomena strongly depends upon the number of active degrees of freedom involved in the phenomena. The universal patterns that have been discovered in chaotic systems with attractors (e.g. Order in Chaos) have small Hausdorff or fractal dimension. In these systems, trajectories return to a small region of the phase space with sufficient frequency that one can observe their recurrence and study the resulting patterns. In fact this is a basis for prediction

## Chaotic maps in experiment

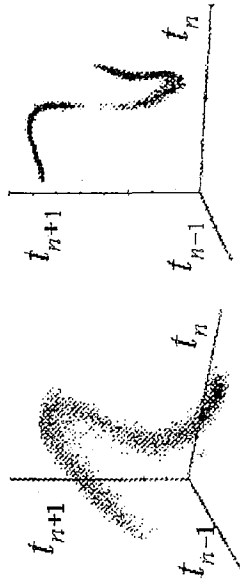
### Dripping faucet



### Chaotic neuron



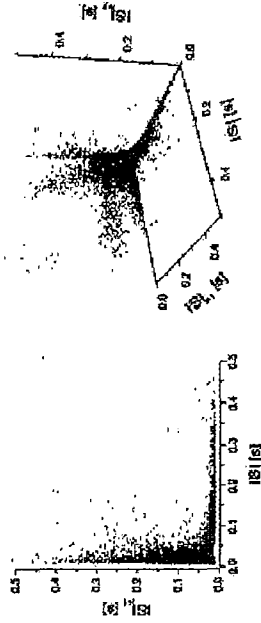
### Attractor from Experimental data



Robert Shaw, "The dripping faucet as a model chaotic system", (Santa Cruz, CA: Aerial Press) 1984

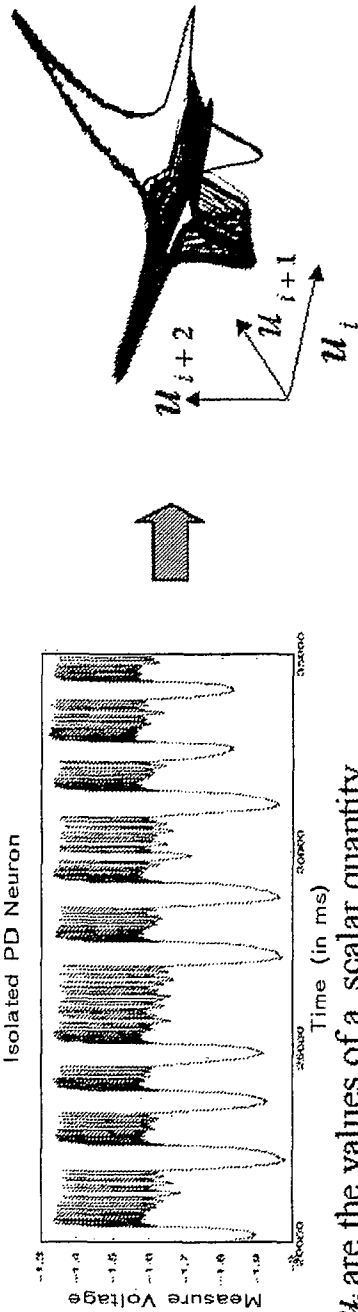
### Interspike Intervals Attractor

$$ISI(n+1) = F[ISI(n)]$$



A. Szucs, et al. *J. Neurophysiol.* 85, 1623 (2000)

# Geometry and Dynamics from time series (1980)



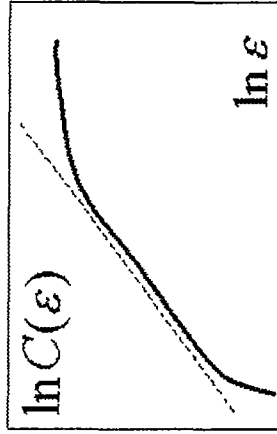
$u_i$  are the values of a scalar quantity measured at regular intervals of time. Reconstruction of the attractor in

$\mathbf{x}_i = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+m-1})$   
 $m$  is embedding dimension

*N.H. Packard, J.P. Crutchfield,  
 J.D. Farmer, R.S. Shaw,  
 PRL, 45, 712 (1980)*

## Prediction

- Low-dimensional dynamics
- EEG
- Climate
- Financial data



Correlation Dimension  $\Rightarrow C_m = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\epsilon)}{-\ln \epsilon} \leq 2 \log_{10} N$

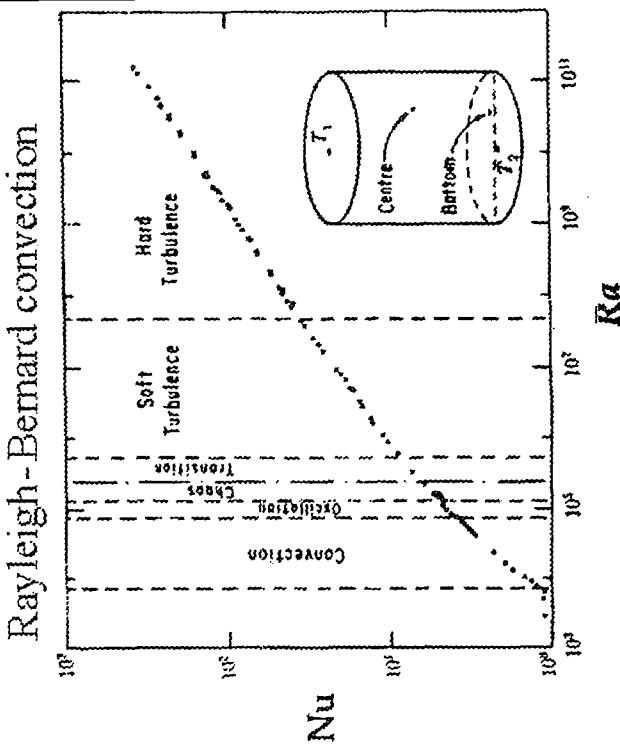
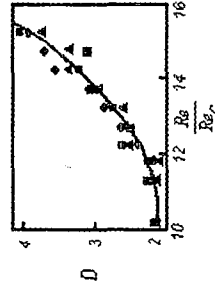
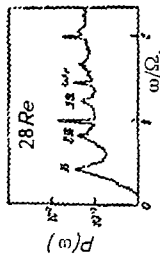
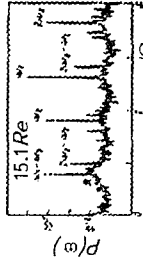
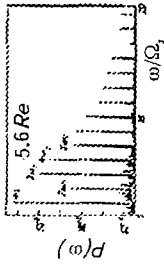
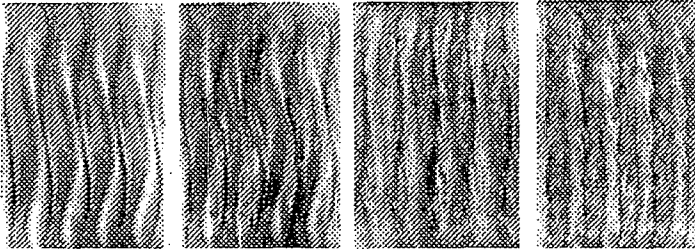
*P. Grassberger, I. Procaccia, PRL, 50, 346 (1983)*

Slide 10. First, we have to remember that «Prediction is difficult, especially if it concerns the future» (old Chinese proverb). Estimation of the dimension of attractors from experimental data is a procedure for effective distinguishing of the high-dimensional attractors from low-dimensional ones. Once low-dimensional chaotic models have been ruled out, prediction is possible

Slide 11. In systems with attractors of high-dimension naive arguments indicate that the recurrence times are astronomical. It is a small comfort and little help to know that a system is deterministic if the dimension is large. On the other hand low-dimensional chaos has no relationship to the developed turbulence

# Strange Attractors and Turbulence

Couette - Taylor flow



Variation of Nusselt number  $Nu$  as a function of Rayleigh number  $Ra$  for Rayleigh - Bernard convection in gaseous Helium.

A. Libshaber, Proc. Roy. Soc. Lond. A 413, 63 (1987)

P.R. Fenstermacher,

H.L. Swinney, J.P. Gollub.

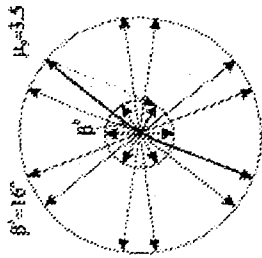
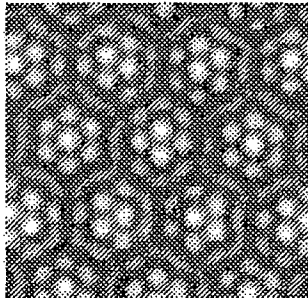
J. Fluid Mech. 94, 103 (1979)

A. Brandstater, et al. Phys. Rev. Lett.. 51, 1442 (1983)

Slide 12. Everything that we have discussed about the universality of the oscillation phenomena is correct when we are thinking about spatial or spatio-temporal patterns. The diversity of the patterns existing in the physical world usually arouses amazement, not only in fictional novels but in the scientific literature also. Perhaps still most curious is the fact that these diversified patterns are universal to a certain extent: hexagonal patterns on a giraffe's skin and hexagonal structures emerging in the convection in a liquid layer; isolated patterns in colonies of microorganisms and soliton structures in hydrodynamics and in nonlinear optics; spiral chaos in heart muscle fibrillation and spiral turbulence in chemical systems

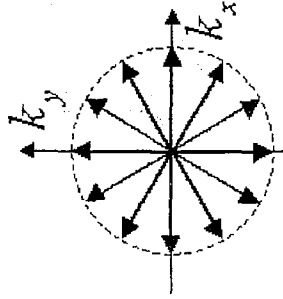
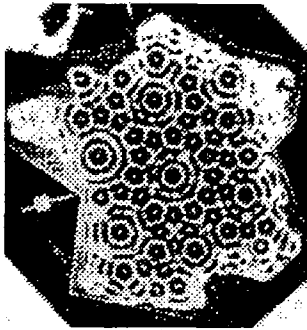
## PATTERN FORMATION

Super-lattice in Nonlinear Optics



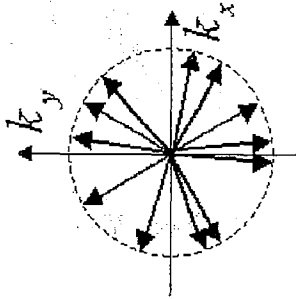
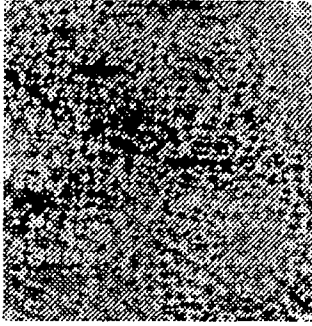
*M.A. Vorontsov, A. Yu. Karpov  
J. Opt. Soc. Am. B, 14, 34 (1997)*

Capillary Quasicrystals



*W.S. Edwards, S. Fauve,  
Phys. Rev. Lett. 47,  
788 (1993)*

Spatio-temporal Disorder in Capillary Ripples

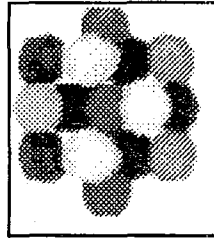
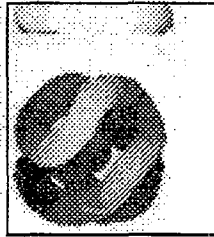
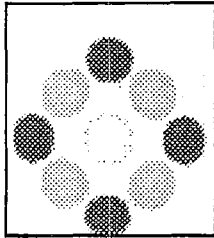
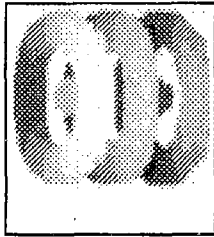


*A.B. Ezersky, M.I. Rabinovich,  
V.P. Reutov, I.M. Starobinets, Sov.  
Phys. JETP. 64, 1228 (1986)*

Slide 13. It is really amazing that the dynamics of nonlinear media or fields is quite often the dynamics of interaction of the localized states of particle-like modes. The well known example in conservative media is soliton. Here one can see two examples of such «particles» in nonlinear dissipative media. The «particles» presented on the right panel periodically oscillate with time. These are «oscillons»

## Localized states of dissipative fields

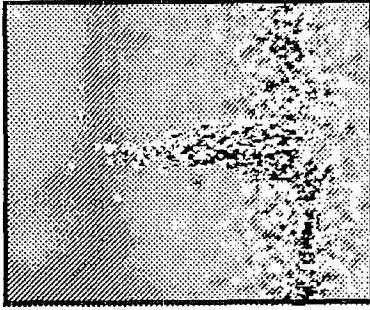
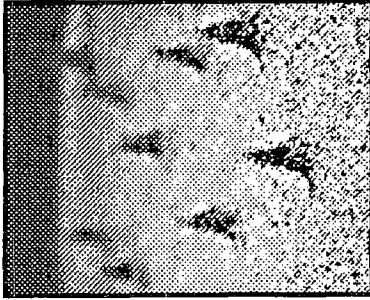
Particle-like states in 3-D  
dissipative medium



$$\partial_t u = -u + \beta u^2 - u^3 - (1 + \nabla^2)^2 u$$

K.A. Gorskikh, A.S. Lomov, M.I. Rabinovich, *Phys. Lett. A* **137**, 250 (1989)

Oscillons in granular medium



P. Umbanhowar, F. Melo, H. Swinney, *Nature*, **382**, 793 (1996)

**Model**

$$\partial_t \psi = \gamma \psi^* - (1 - i\omega)\psi + (1 + i\beta)\nabla^2 \psi - |\psi|^2 \psi - \rho \psi$$

$$\partial_t \rho = \alpha \nabla \cdot (\rho \nabla (|\psi|^2)) + D \nabla^2 \rho$$

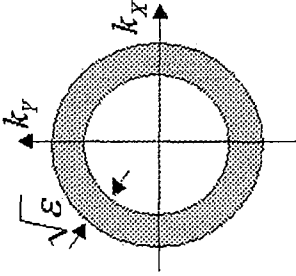
L.S. Tsimring and I.S. Aranson, *Phys. Rev Lett.* **79**, 213 (1997)



# Universal Models for Pattern Formation

Swift-Hohenberg (1977)

$$\partial_t u = [\varepsilon - (\nabla^2 + 1)^2 - u^2]u$$

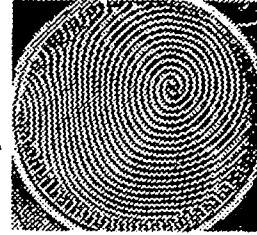
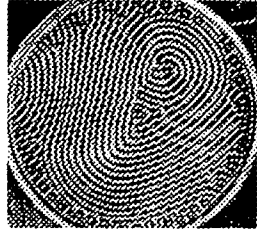
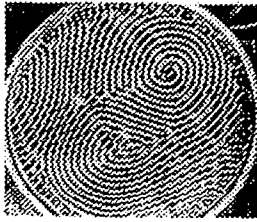
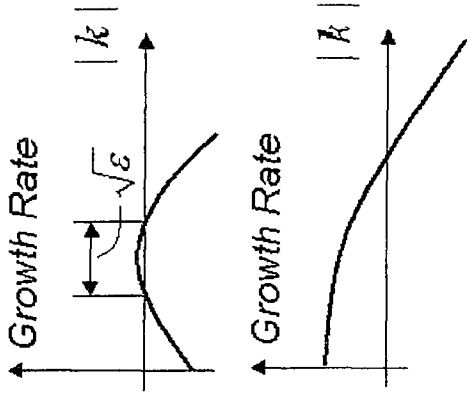


Complex Ginzburg-Landau

$$\partial_t A = \varepsilon A - (1 - i\beta) |A|^2 A + (1 + i\alpha) \nabla^2 A$$

Complex parametric Swift-Hohenberg

$$\partial_t A = i\gamma A^* - W^2 A - (1 + i\alpha) |A|^2 A + i\chi(\nabla^2 + k_0^2)A - (\mathbf{u} \cdot \nabla)A$$



0 sec

3 sec

10 sec

time

S.V. Kiyashko, L.N. Korzinov, M.I. Rabinovich, L.S. Tsimring, (1996)

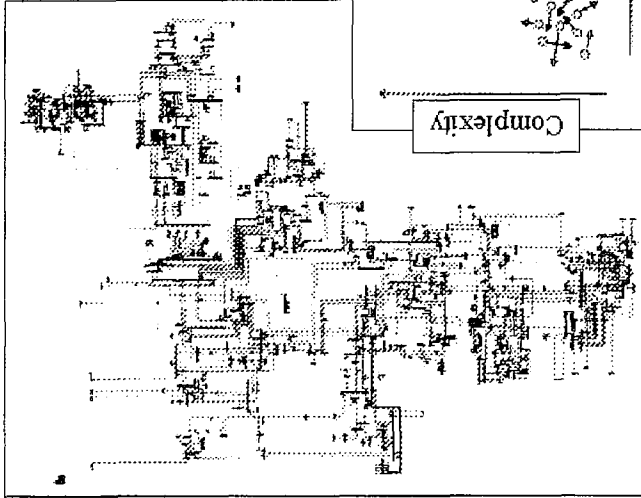
Slide 14. Under a certain idealization it is natural to consider the process of pattern formation the life of a dynamical system. The features of the life as  $t \rightarrow \infty$  then determine the characteristic aspects of the spatial patterns, be them regular or irregular. What kind of dynamical model should one choose? Here we show the hierarchy of model equations in which envelope fields, overlaying the background pattern of a certain structure, play the role of an order parameter. These models differ by the kind of bifurcation they show (see for details «The Dynamics of Patterns», M. Rabinovich, A. Ezersky, and P. Weidman, World Scientific, 2000)

Slide 15. Nowadays a lot of interest is devoted to nonlinear dynamics for the analysis of complex systems. What does it mean? If we use for a few words, then a complex system is a «dynamical system with many control parameters  $M$ ». In particular, they can be parameters that characterize the connections among subsystems. We agree that systems even with an infinite number of degrees of freedom  $N$  can be organized in a very simple way (e.g. regular lattice or homogeneous medium:  $M \geq 1$ ). Even when the  $N$  is not so high, but the topology of the organization is sophisticated ( $M \gg 1$ ), the system is complex. Now we know that the dynamics of complex systems can give us a lot of surprises

# Information Dynamics

## Dynamics of Complex Systems

New York State electric power grid



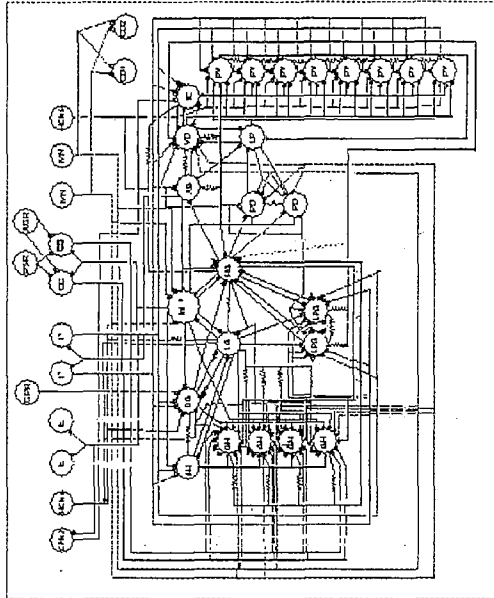
Complexity

Complexity



Regularity

Gastric Mill and Pyloric CPGs of Lobster

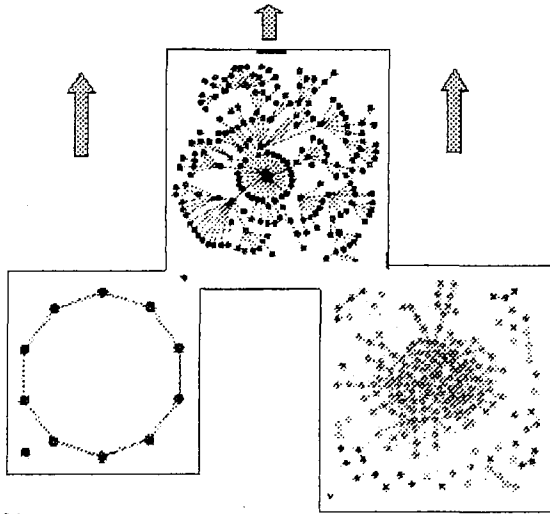


# Small-World Nonlinear Dynamics

Small-World (SW) network of dynamical systems enhance

SW stands for a network (medium) whose connectivity topology is placed somewhere between a regular and a completely random connectivity

- Signal-propagation speed
- Computational power
- Synchronization



The main properties of SWDN

- they can be highly clustered like regular networks
- they have small path length like random ones

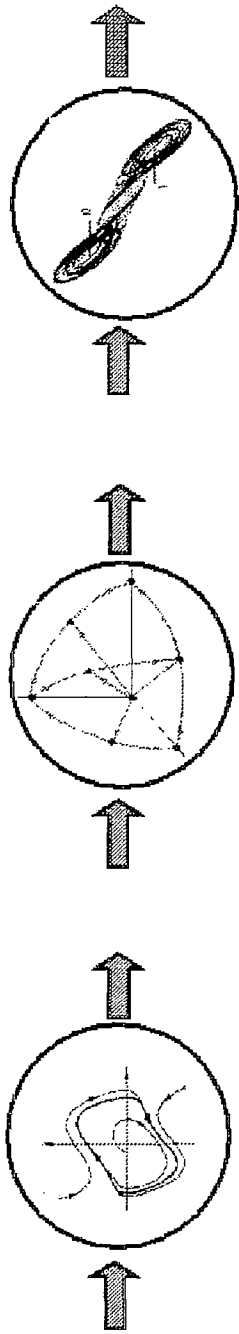
Slide 16. Example: Nonlinear dynamics of the network of chaotic oscillators depends on the topology. What are the new qualities? Regular topology gives rise to coherent oscillations but in a temporal scale that is not in accordance with fast signal processing. Random topologies give rise to fast system responses yet are unable to produce coherent oscillations in the network. Small-World topologies, which fall between random and regular ones, take advantage of the best features of both fast system response and coherent oscillations

L.F. Lago-Fernandez, R. Huerta, F. Corbacho, J.A. Siguenza, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2758 (2000)

S.H. Strogatz, *Nature* **410**, 268 (2001)

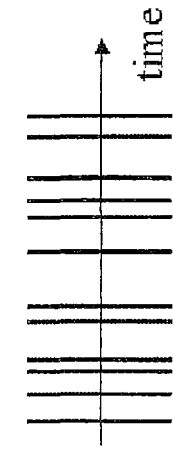
Slide 17. Any computation is a dynamical process. We are not just thinking about it if the time is not involved in the coding space (e.g. algebra). We can say more: any computation is a nonlinear dynamical process. A cascade of the linear functions, no matter how deep, is just the another linear function. The linear system is not able to compare the different signals, store them and so on. We show here three simplest example of «computation with attractors»: i) pulse position modulation, ii) content-addressable memory  $\leftrightarrow$  multistability, iii) coding with chaotic attractors or signal dependent control of chaos

# Computation and coding with Attractors



Limit cycle

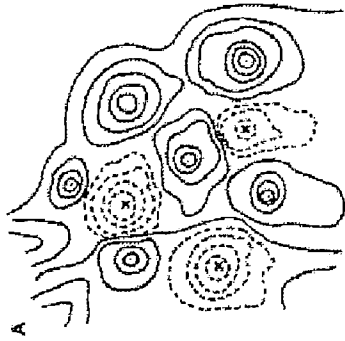
Multistability



Information

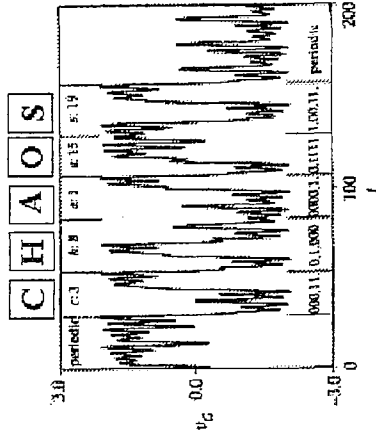


Modulation



Hopfield Model of associative memory

J.J. Hopfield, PNAS, 81, 3088 (1984)

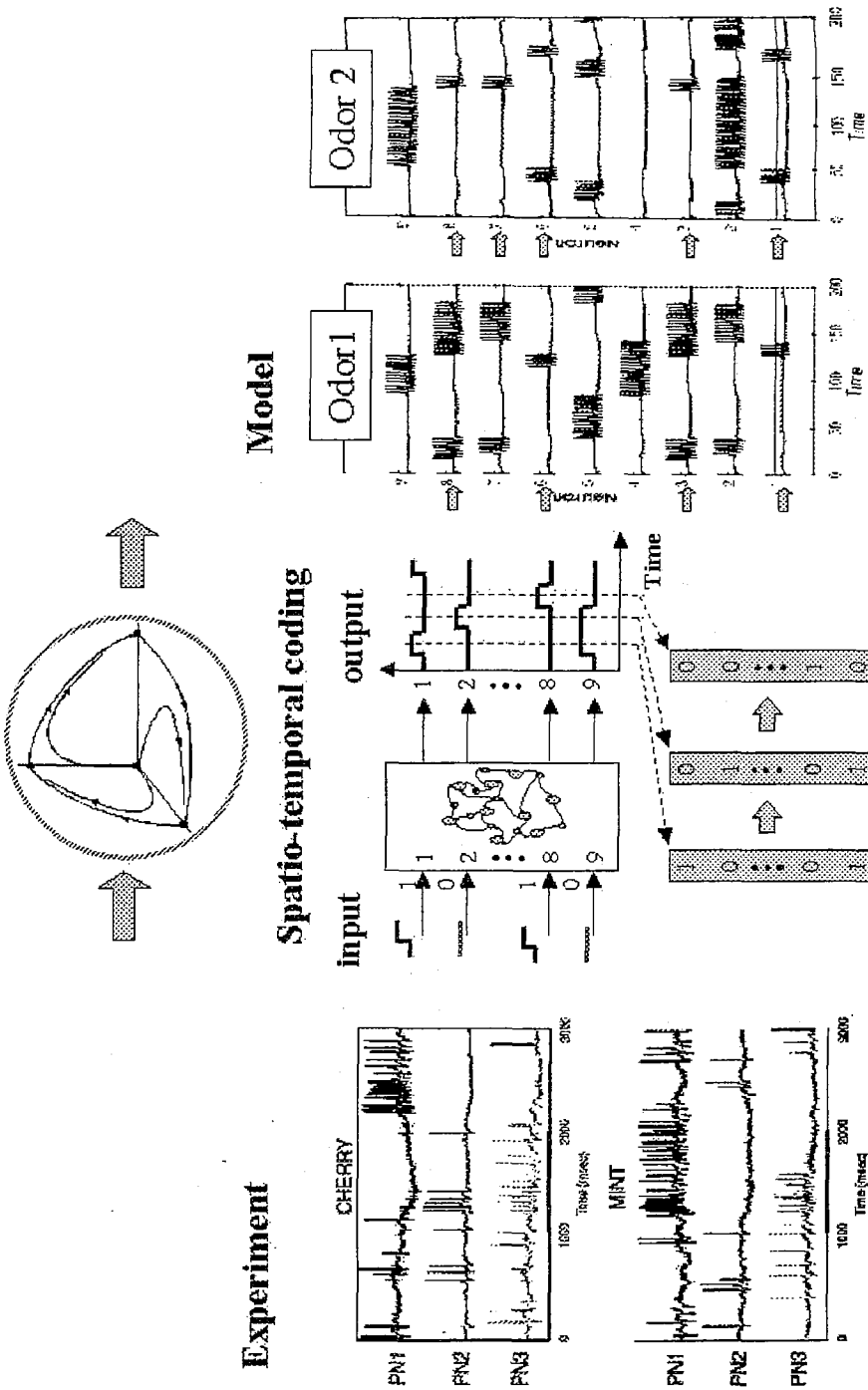


Coding with chaotic attractor

S. Hayes, C. Grebogi, E. Ott, PRL, 70, 3031 (1993)

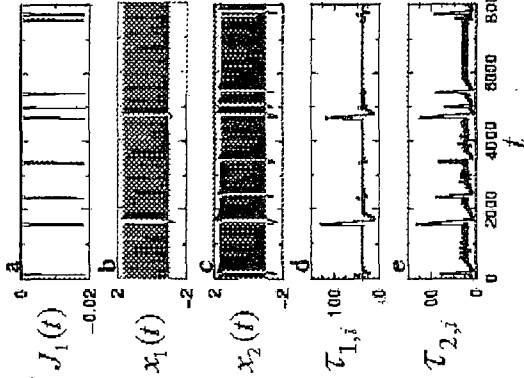
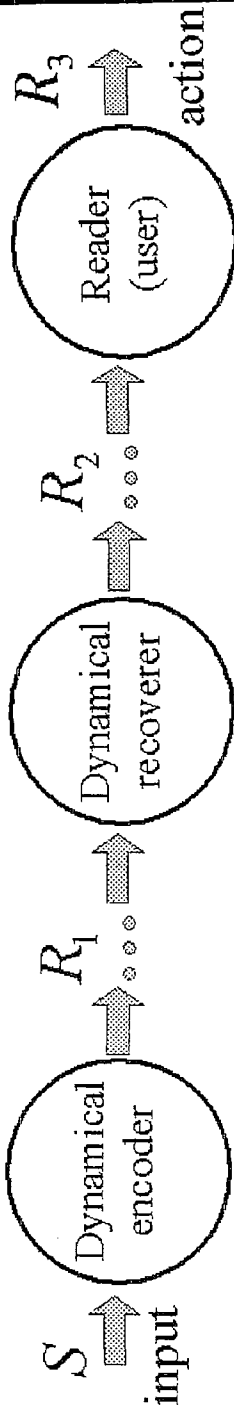
# Information Processing with WLC Dynamics

Slide 18. Computation with separatrices is a typical way that many biological systems use for information processing. As an example, we discuss here the nonlinear dynamical model that we have build based on the experiments with the olfactory system of the locust. The model reveals the origin of the spatio-temporal coding of the incoming signal e.g. stimulus. The idea is quite universal: a heteroclinic loop exists in the phase space of the corresponding NDS (it is shown for the case of  $N=3$ ). The presence of stimulus controls the sequence of the switching among different unstable states. This is a spatio-temporal coding that is robust, sensitive, reproductive, and has a large capacity (see for details M.Rabinovich, et al, Phys. Rev. Lett. 87, 068102, 2001)



Slide 19. From the viewpoint of classical information theory the active nonlinear dynamical elements are very specific parts of the communication channels. In particular, such elements are able to create new information (because of the instability in each element) and to transfer information from one coding space to the other (because of nonlinearity). Here we illustrate only one nontrivial phenomenon: information recovery very in active (neural) communication channels. The main result is absolutely surprising: the nonlinear dynamical element (reco- verer) is able to transfer the hidden information, that «disappear» after the first communication cascade, back to the working space. We think this phenomenon is important for understanding how the brain works

## Dynamical recovery of the hidden information



Information Recovery:

$$I(S, R_2) - I(S, R_1) \geq 0$$

average mutual information

$$I(S, R) = H(S) - H(S | R)$$

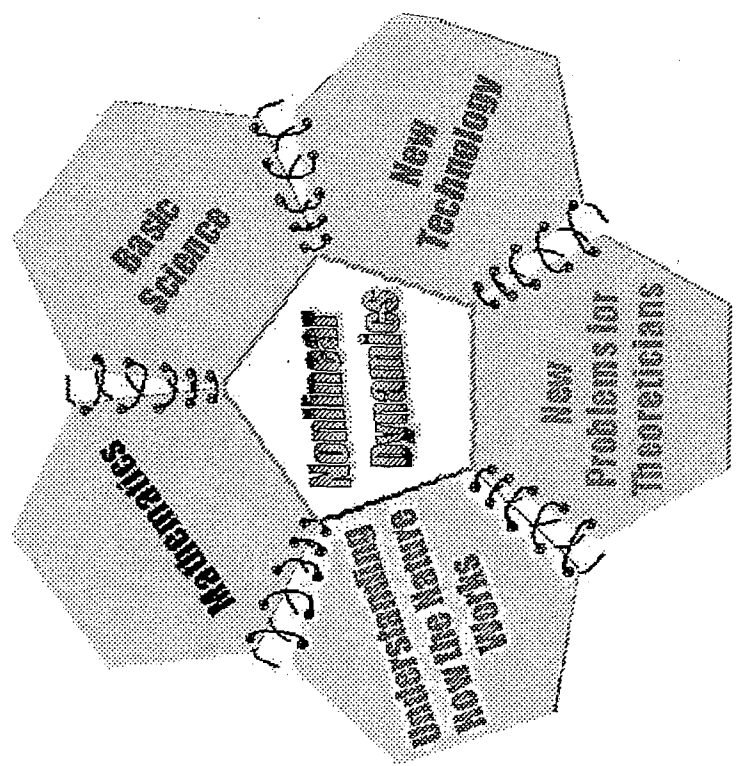
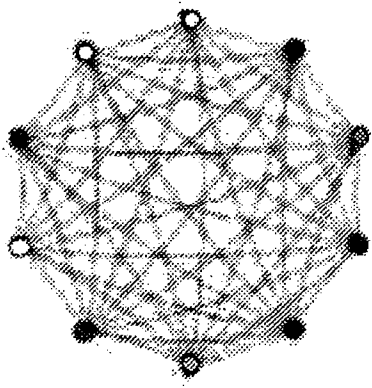
Classic Processing Inequality:

$$I(S, R_2) \leq I(S, R_1)$$

Dynamical «reco- verer» retrieves the information from hidden coding space and maps it into the readable coding space

M.C. Equia, M.I. Rabinovich, H.D.I. Abarbanel, *Phys. Rev. E.* **62**, 7111 (2000)

# CENTER OF THE SCIENTIFIC UNIVERSE ?



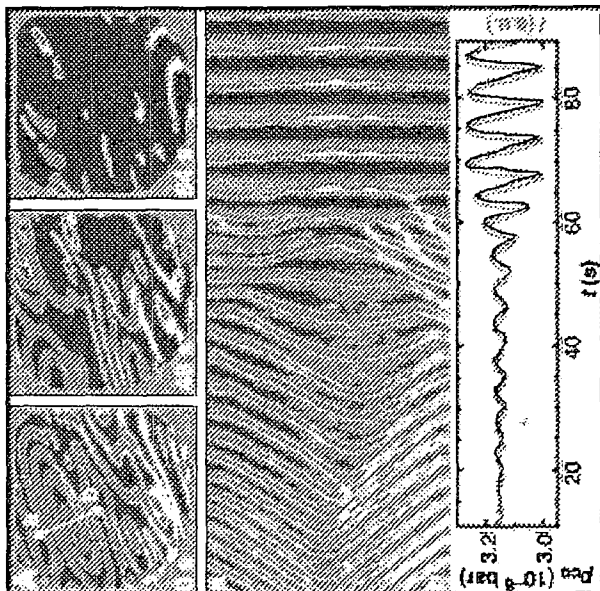
Slide 20. We think that after the previous discussion readers will agree with us that Nonlinear Dynamics is a crucial component of any applied science

Slide 21. We wish to conclude this talk by the slide on direct application of this Non-linear Dynamics to the modern technology

## Controlling Chemical Turbulence by Global Delayed Feedback

Pattern formation in catalytic CO oxidation on Pt(110)

Suppression of spiral-wave turbulence



Black areas are O covered; gray regions are mainly CO covered.

Variation of the CO partial pressure (black line) and the variation of the integral intensity (gray line)

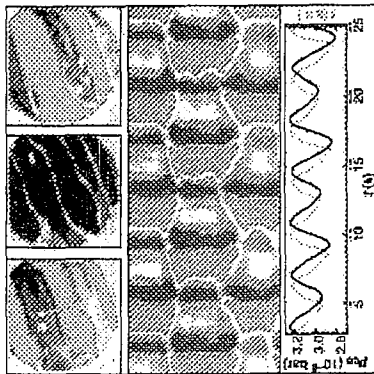
*M. Kim et al, Science, 292, 1357 (2001)*

Control of the dosing rate of CO:

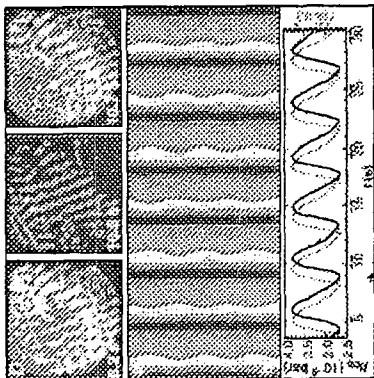
$$P_{CO} = P_0 + \mu[I(t - \tau) - I_0]$$

$I$  is the integral PEEM image intensity inside the observation window,  $P_0$  and  $I_0$  are the partial CO pressure and the average base level of the integral PEEM image intensity in the absence of feedback, and the coefficient  $\mu$  determines the feedback intensity.

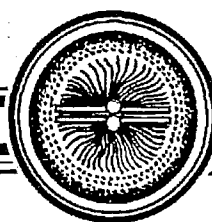
Phase clusters



Standing waves







## СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

*Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов*

© Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов, 2000  
© Эдиториал УРСС, 2000

М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.  
ISBN 5-8360-0110-3

В книге рассматриваются некоторые ключевые проблемы современной нелинейной динамики. Концепция авторов сводится к тому, что принципиальные трудности, с которыми столкнулся этот междисциплинарный подход, требуют новой парадигмы. В книге сделана попытка наметить ее возможные контуры. На смену эре диссипативных структур и эре динамического хаоса должна прийти новая эпоха. Если многие концепции и базовые математические модели ранее приходили в синергетику из физики, химии, гидродинамики, то теперь их основными поставщиками становятся нейронаука, теория риска, биология, теоретическая история, психология и другие области, связанные с анализом сложных необратимо развивающихся систем.

Обсуждается ряд оригинальных результатов, касающихся математического моделирования нелинейных явлений и анализа временных рядов. Большое внимание уделено таким бурно развивающимся в синергетике подходам, как теория инерциальных многообразий, реконструкции аттракторов, теория русел и джокеров, теория нейронных сетей. Это делает книгу интересной для специалистов в нелинейной динамике и смежных областях.

Более чем двадцатилетнее развитие синергетики заставляет подвести предварительные итоги и заново оценить основные идеи, модели, концепции, отредактированные в ходе большого пройденного пути, осмыслить «язык» нелинейной науки. Этому посвящена значительная часть книги, что делает ее полезной широкому кругу студентов, аспирантов и всем, кто хочет ознакомиться с конкретным математическим содержанием нелинейной динамики.

### Содержание

**Глава I. Предисловие, или игры со сложностью.** 1.1. Время оправдывать надежды. 1.2. Новая парадигма. Внешнее оправдание. 1.3. Логика нелинейной динамики.

### **Часть I. Нелинейная динамика и хаос: основные понятия**

**Глава 2. Язык нелинейной динамики.** 2.1. От истории к современности. Взгляд с птичьего полета. 2.2. Простое и сложное поведение. 2.3. Порядок и хаосе. 2.4. Прообразы динамического хаоса – 1. Сдвиг Бернулли. 2.5. Прообразы динамического хаоса – 2.

Проблема турбулентности. Лоренц, Рюэль и Такенс. 2.6. Преобразы динамического хаоса – 3. Небесная механика, Пуанкаре и «подкова Смейла».

**Глава 3. Динамические системы и их устойчивости.** 3.1. Что такое динамическая система. 3.2. Уравнения движения и отображение  $\varphi^t(x)$ . 3.3. Инвариантные множества. 3.4. Простейшие инвариантные множества и их устойчивость. 3.5. Асимптотическое поведение, физический смысл и разнообразные устойчивости.

**Глава 4. Бифуркации неподвижных точек динамических систем.** 4.1. Что такое бифуркация? 4.2. Теорема о центральном многообразии: выделение существенных размерностей для анализа бифуркации.

**Глава 5. Инвариантная мера динамических систем.** 5.1. Откуда приходит случайность? 5.2. Инвариантная мера и уравнение Перрона – Фробениуса. 5.3. Неразложимые, или эргодические, меры. 5.4. Устойчивость и сходимости мер. 5.5. Несколько важных теорем. 5.6. Примеры непрерывных инвариантных мер. 5.7. Численное исследование мер. Гистограммы. 5.8. Динамические системы с шумом. 5.9. Шум и «физическая мера». 5.10. Заключение. Зачем нужна инвариантная мера.

## **Часть II. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды**

**Глава 6. Параметры порядка и инерциальные многообразия.** 6.1. Самоорганизация. 6.2. Инерциальные многообразия, оценка размерности аттрактора.

**Глава 7. Жесткая турбулентность и ее упрощенные модели.** 7.1. Кратко об истории. 7.2. Как выглядят пики жесткой турбулентности в QTDGL. 7.3. Нелинейное уравнение Шредингера и его автомодельные решения. 7.4. Автомодельная обработка и приближение «замороженной формы»: упрощенная модель ограничения пика по высоте. 7.5. Макроскопическое описание жесткой турбулентности. 7.6. О возможном статистическом описании жесткой турбулентности. 7.7. Жесткая турбулентность и переключающая перемежаемость. 7.8. Чем интересна жесткая турбулентность?

**Глава 8. Нейронные сети.** 8.1. Нейронаука. 8.2. Элементарные представления о работе мозга. 8.3. Модель Хопфилда. 8.4. Смысл хаоса. 8.5. Многослойные нейронные сети.

**Глава 9. Энтропии и размерности аттракторов.** 9.1. Энтропия динамической системы. 9.2. Размерности аттракторов динамических систем.

**Глава 10. Ляпуновские показатели.** 10.1. Устойчивость и показатели Ляпунова. 10.2. Мультипликативная эргодическая теорема. 10.3. Некоторые свойства ляпуновских показателей. 10.4. Связь ляпуновских показателей с другими характеристиками. 10.5. Как вычисляют ляпуновские показатели?

**Глава 11. Реконструкция аттракторов по временным рядам.** 11.1. Временные ряды и их обработка. 11.2. Статистические методы обработки. 11.3. Идея реконструкции аттрактора. Теорема Такенса. 11.4. Выбор параметров реконструкции.

**Глава 12. Обработка временных рядов – важнейшие алгоритмы нелинейной динамики.** 12.1. Расчет фрактальной размерности аттрактора. 12.2. Свойства корреляционного интеграла. Оценка энтропии и другие полезные применения. 12.3. Предсказание временных рядов. 12.4. Оценка ляпуновских показателей по временному ряду. 12.5. Заключение. Что дали алгоритмы нелинейной динамики?

**Глава 13. Когда применимы алгоритмы нелинейной динамики?** 13.1. Проклятие размерности. 13.2. Порог фрактальности и трудности реконструкции. 13.3. Ложные соседи,

или почему динамика не восстанавливается на больших масштабах? 13.4. Алгоритмы нелинейной динамики для временных рядов как способы решения некорректной задачи.

**Глава 14. Русла и джокеры, или как сопрячь динамику со статистикой?** 14.1. Прогнозирование сложной динамики: почему мозг может, а реконструкции – нет? 14.2. Предикторы и трехслойные нейронные сети. 14.3. Когда сложная динамика может быть предсказуема? Русла и джокеры. 14.4. Как искать русла? 14.5. Что находится в конце русла? 14.6. Модельный пример. 14.7. Выводы и гипотезы.

**Задачи**

**Список литературы**



*Издательство УРСС специализируется на выпуске учебной и научной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской Академии Наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений.  
Полный каталог изданий представлен в Internet: <http://urss.ru>*

**Среди недавно вышедших книг в Издательстве УРСС имеются:**

**Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.** Современные проблемы нелинейной динамики.  
**Малинецкий Г.Г.** Хаос структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику.

**Пригожин И., Стенгерс И.** Время, хаос, квант.

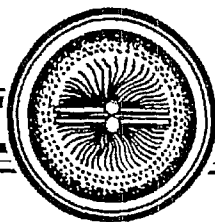
**Пригожин И., Стенгерс И.** Порядок из хаоса.

**Эбелинг В и др.** Физика процессов эволюции.

**Табор М.** Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике.

*Заинтересованный читатель может заказать  
книги наложенным платежом  
по тел. (095) 135-42-46  
или по электронной почте E-mail: [urss@urss.ru](mailto:urss@urss.ru)*





**УПРАВЛЕНИЕ РИСКОМ:  
риск, устойчивое развитие, синергетика**

*В.А. Владимиров, Ю.Л. Воробьев, С.С. Салов, М.И. Фалеев, Н.И. Архипова,  
М.А. Капустин, С.А. Кащенко, С.А. Косяченко, И.В. Кузнецов, В.В. Кульба,  
Г.Г. Малинецкий, Н.А. Махутов, В.Ф. Писаренко, А.В. Подлазов,  
С.А. Посаиков, А.Б. Потапов, М.Г. Шнирман*

© Изд-во «Наука», 2000

© Российская академия наук и изд-во «Наука», серия  
«Кибернетика: неограниченные возможности и воз-  
можные ограничения» (разработка, оформление), 1963  
(год основания), 2000z

М.: «Наука», 2000. 431 с.  
ISBN 5-02-008296-1

В книге намечены контуры исследовательской программы, связанной с построением математической теории безопасности и риска, стратегии и практики управления рисками. Рассматриваются принципы развития гражданской защиты, опыт, накопленный МЧС. Для специалистов в области проблем безопасности, студентов и аспирантов.

**Введение**

*Все, что мы узнаем, – это какое-то прибли-  
жение, ибо мы знаем, что не все еще законы мы  
знаем. Все изучается лишь для того, чтобы  
снова стать непонятным или, в лучшем случае,  
потребовать исправления.*

*Р. Фейнман*

Жизнь человека всегда была связана с опасностями. Почему же наука о риске рождается только сейчас?

Дело в том, что в настоящее время, с одной стороны, человечеством осознана угроза, которую несут катастрофы и стихийные бедствия, а с другой стороны, развитие точных наук достигло необходимого уровня для содержательного анализа этой области.

Говорят, что в период Карибского кризиса, в тяжелый момент американской истории Джоном Кеннеди были сказаны крылатые слова: «У меня есть тысячи специалистов, которые могут построить пирамиду, но нет ни одного, кто сказал бы, стоит ли ее строить». Или, говоря современным языком, в переломные моменты возникает особая нужда в системных аналитиках, в стратегическом анализе и планировании.

Работы по стратегии управления рисками с привлечением новых подходов из области фундаментальных наук были начаты в 1997 г. по инициативе МЧС России. В них участвуют исследователи из Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Института машиноведения им. А.А. Благоднарова РАН, Института проблем управления РАН, Международного института теории прогноза землетрясений и математической

геофизики, Московского физико-технического института, Московского и Ярославского государственных университетов и другие ученые.

Профессионалы, занимающиеся предупреждением и ликвидацией чрезвычайных ситуаций (ЧС), остро ощущают необходимость опираться на потенциал современной науки, а не действовать методом проб и ошибок. Жизнь ставит на повестку дня создание и разработку нового междисциплинарного подхода, который условно можно было бы назвать теорией риска.

Цель этой книги – обратить внимание на проблемы стратегии управления рисками, поскольку стратегические ошибки являются самыми дорогими. Практикам она показывает, какие научные идеи, связанные с устойчивостью и безопасностью, развиваются сейчас в этой области, какие задачи разумно ставить перед научными коллективами. Ученых она знакомит с «социальным заказом», обусловленным острой общественной потребностью прогнозировать чрезвычайные ситуации, смягчать их последствия, повысить эффективность соответствующих социальных институтов и улучшить состояние гражданской защиты в обществе в целом.

Особое внимание в ней уделено новым подходам, идеям, методам, появившимся в нелинейной динамике, которые могут быть полезны в сфере управления риском. Намечены контуры исследовательской программы, связанной с построением математической теории безопасности и риска.

Концепция авторов сводится к тому, что на основе накопленного в России и в мире опыта, предшествующих разработок может быть построена новая наука – математическая теория безопасности и риска. Эта теория должна находиться между уровнем, на котором принимаются политические и стратегические решения, и уровнем разработки конкретных технических средств и систем. В качестве методической основы для создания такой теории может быть использована нелинейная динамика и компьютерное моделирование.

Ряд предварительных результатов в этой области, в частности, теория самоорганизованной критичности, теория нормальных аварий, теория прогнозирующих нейросетей, теория динамического хаоса и другие, заставляют изменить сам взгляд на предупреждение, прогноз и смягчение последствий чрезвычайных ситуаций. На современном этапе речь должна идти о создании новой парадигмы в области управления риском. Многие важные черты чрезвычайных ситуаций, на которые обращают внимание практики, должны быть учтены и в теории.

Катастрофическое поведение внутренне присуще большинству сложных систем. Для них характерны общие закономерности, которые могут быть выявлены на основе нелинейной динамики и системного анализа. Здесь должна быть построена иерархия математических моделей и предложены эффективные стратегии управления.

Обсуждение задач управления риском и подходов, предлагаемых авторами этой работы, на многих научных конференциях и семинарах, в дискуссиях с рядом экспертов по безопасности природной и техногенной сферы позволило выделить несколько принципиальных вопросов. Ответы на них отражают существо рассматриваемого подхода, взаимосвязи и логику решавшихся в ходе проведения исследований проблем. Эти вопросы и ответы на них нам представляется разумным обсудить во введении.

## Оглавление

Введение

Глава I. Философия риска

Глава II. Взгляд на риск с позиций системного анализа

Глава III. Природные и техногенные риски. Российские реалии

Глава IV. Концепция управления риском и ее математические модели

Глава V. Статистика катастрофических событий

Глава VI. Пределы предсказуемости и прогноз редких событий

Глава VII. Режимы с обострением как аналогии катастрофических явлений

Глава VIII. Жесткая турбулентность как механизм возникновения катастроф

Глава IX. Циклические риски и системы с запаздыванием

Глава X. Самоорганизованная критичность как универсальный механизм катастроф

Глава XI. Русла и джокеры. Новый подход к прогнозу поведения сложных систем и катастрофических явлений

Глава XII. Системы управления в чрезвычайных ситуациях

Глава XIII. Социология риска

Глава XIV. Человеческое измерение риска

Приложения

Литература

## УПРАВЛЕНИЕ РИСКАМИ И НАУКА

### Критический обзор: проблемы и перспективы

*Чл.–корр. РАН Ю.П. Попов*

*Директор Института прикладной математики РАН*

В конце прошлого года в издательстве «Наука» в серии «Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения» вышла книга «Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика». Эта книга написана рядом ведущих специалистов из академических институтов и высшей школы и несколькими руководителями МЧС России. Она, на мой взгляд, указывает на ряд важных тенденций в развитии научных исследований, в организации науки, в ее взаимодействии с практикой. На них в этих заметках я бы и хотел обратить внимание.

#### Новый этап развития науки и системный синтез

В этом году и в Академии, и в Институте прикладной математики отмечался 90-летний юбилей основателя нашего института, выдающегося математика, механика, организатора науки, академика Мстислава Всеволодовича Келдыша.

Институт создавался для решения проблем, имеющих стратегическое значение и непосредственно относящихся к национальной безопасности. Выбор этих проблем в первые годы его работы был достаточно очевиден – это проблемы создания, как теперь говорят, ракетно-ядерного щита. Прикладная математика, компьютерное моделирование сыграли здесь исключительно важную роль.

Потом и в науке, и в ее организации в Академии наступил период специализации, новые науки и институты рождались «на стыке» научных дисциплин. От общего исследователи переходили к частному. Казалось, «время больших задач», под которые есть крупный государственный заказ, безвозвратно ушло.

Однако времена меняются. Меняется социальный заказ, задачи, приоритеты. Все чаще и ученые, и политики говорят о системном кризисе, в котором оказалась наша страна. В это емкое понятие вкладывается, в частности, утрата перспективы, образа желаемого будущего.

Естественно, ученые не могут оставаться в стороне от ключевых проблем, которые решает общество. Однако важно подчеркнуть, что сам тип этих проблем изменился. Все чаще ученых спрашивают, что надо сделать, чтобы вывести ту или иную сферу жизни общества из кризиса, какова государственная стратегия.

Внимание к стратегии тоже понятно – стратегические ошибки оказываются самыми дорогими. Прежде всего потому, что их нельзя исправить действиями, предпринимаемыми на других уровнях. Коллективы исследователей, которые берутся за такие комплексные проблемы, создают своеобразный «сборочный цех». В них знания конкретных людей, предшествующие результаты, полученные, как правило, в различных дисциплинах, опыт практиков осмысливаются, обобщаются, синтезируются, ради того, чтобы решить конкретную задачу. Для исследовательской работы такого сорта часто употребляется удачное, на мой взгляд, словосочетание «*системный синтез*».

Очевидно, системный синтез самым тесным образом связан с междисциплинарными исследованиями, которые всегда были сильной стороной отечественной науки. В нашем институте они в течение последних тридцати лет ведутся в научной школе чл.–корр. РАН С.П. Курдюмова, которого математики и физики, философы и экономисты, психологи и востоковеды не случайно считают «своим».

С библейских времен известно, что при строительстве капитальных сооружений (в первоисточнике приведен прекрасный пример с Вавилонской башней) особое значение имеет единый язык и, добавлю от себя, прочный фундамент. Что же является таким языком и таким фундаментом для междисциплинарных исследований, для системного синтеза? На мой взгляд – компьютерное моделирование и прогнозирование на основе

новых информационных технологий. Назову несколько причин этого, не вдаваясь в подробности.

- Мы имеем дело с настолько большим количеством факторов и процессов, что оценить их относительное значение можно, только построив модель и посмотрев, как различные явления и процессы меняют наблюдаемую картину.

- Сопряжение теоретических представлений с конкретной сложной системой, как правило, невозможно без мониторинга, без постоянной подстройки параметров на основе обработки больших информационных потоков, без компьютеров.

- Прогнозирование является одной из основных задач науки в целом. Уточнять нашу картину мира и развивать системы прогноза можно только предсказывая, ошибаясь, совершенствуя модели, алгоритмы, и постоянно выделяя главные, ведущие в данный момент факторы.

За этими словами стоят не только надежды на будущие успехи и благие пожелания, но и конкретный опыт нашего Института и других организаций Академии наук. Под руководством М.В.Келдыша в течение многих лет давался прогноз развития космических исследований и ряда систем вооружений. Рассматривались различные сценарии, искались оптимальные варианты, и на этой основе осуществлялось стратегическое планирование. Наличие коллективов, которые могут решать задачи такого масштаба, сейчас стало неотъемлемой чертой науки развитых стран.

### **Управление рисками. Надежды и реальность**

Многие привычные приметы нашей нынешней жизни даже при небольшом раздумье кажутся парадоксальными. Вот одна из них. Уже более 10 лет в России существует Министерство по чрезвычайным ситуациям. Это означает, что аварии, катастрофы, стихийные бедствия стали неотъемлемой частью жизни человечества. Возросли масштабы этих бед, расширился их спектр, возросло влияние этих неприятных неожиданностей на стратегию государств. Статистические данные показывают, что число пострадавших в результате техногенных катастроф и стихийных бедствий и величина ущербов приближаются к соответствующим показателям крупных вооруженных конфликтов.

Заметим, что техногенные катастрофы, – это не только гигантский материальный ущерб и унесенные человеческие жизни. Это возможное изменение стратегии огромных отраслей экономики, «алгоритмов развития» цивилизации. Достаточно вспомнить знаковые катастрофы XX века – Чернобыль и «Челленджер». На мой взгляд, и атомная энергетика, и космонавтика до сих пор не вполне оправились от шока, вызванного этими трагическими событиями.

Поэтому не случайно и в России, и в других развитых странах на рубеже XXI века стало ясно, что одной из основных технологий нашей цивилизации является *технология управления рисками*. Термин «управление рисками» пришел из страхового дела. Промышленники и страховщики уже давно осознали, что полностью избежать риска не удастся, – неполадки, аварии, катастрофы, к сожалению, являются неизбежными спутниками нашей технологической цивилизации. С точки зрения экономики, задача заключается в том, чтобы минимизировать экономический ущерб. Этому служат различные системы страхования, «размазывающие» риск, непосильный для одного экономического агента, на многих. Однако развитие атомной промышленности, опасных химических производств, транспортных систем заставляет взглянуть на проблему более широко.

Достаточно очевидно, что без глубоких серьезных исследований здесь не обойтись. В частности, под руководством академика К.В.Фролова и чл.-корр. РАН Н.А.Махутова была сформирована Государственная научно-техническая программа «Безопасность». В ней на высоком инженерном и научном уровне решаются вопросы обеспечения безопасности различных технических объектов. Однако на сегодняшний день этого уже недостаточно. Системный кризис заставляет думать о стратегии, обо всем наборе опасностей и угроз, с которыми может столкнуться наше общество, о привлечении методов фундаментальных наук в эту сферу.

При этом особое значение приобретает *теория управления риском*. Контуров этой

теории и намечаются в обсуждаемой книге. В ней много глав и много авторов, много организаций, которые они представляют. И все же ключевую роль в появлении этой книги, в теоретическом анализе поставленных в ней задач, на мой взгляд, сыграли два члена авторского коллектива. Первый заместитель Министра по чрезвычайным ситуациям России Юрий Леонидович Воробьев, поставивший ряд ключевых задач перед исследователями, и заместитель директора Института прикладной математики РАН Георгий Геннадьевич Малинецкий, предложивший исследовательскую программу, связанную с теорией управления риском. В качестве «центра кристаллизации» для исследований, связанных с теорией управления риском, выступил Институт прикладной математики имени М.В.Келдыша РАН. Многие вопросы этой теории обсуждались на институтских семинарах. Следует отметить, что и в Президиуме РАН, и в нашем Институте, и в ряде других институтов РАН установлены суперкомпьютеры, которые в принципе могут анализировать огромные объемы информации и анализировать редкие, крайне неблагоприятные сочетания факторов, влияющих на возникновение кризисных ситуаций в социально–технологических системах.

### **Управление рисками. Новые аспекты**

Наука, в особенности фундаментальная, начинается тогда, когда на многое удается взглянуть с единых позиций, выработать универсальный подход к анализу явлений и процессов, сформулировать общие закономерности. Именно такие моменты делают эту книгу важным событием в отечественной научной литературе. Обращу внимание только на несколько идей, ни в коей мере не преуменьшая значения остальных.

Привычными стали представления о базовых математических моделях. Однако, как показывают авторы книги, можно сделать следующий шаг – предложить универсальные компьютерные алгоритмы прогноза даже в тех случаях, когда еще не созданы теории и не построены математические модели. Грубо говоря, имея большую статистику, можно «научить» компьютер «предсказывать прошлое», а затем поручить ему обрабатывать текущую статистику. Такой подход с большим успехом применен академиком В.И.Кейлисом–Бороком и его коллегами для прогноза землетрясений. В книге показано, что аналогичным образом можно действовать при прогнозировании кризисных явлений в социально–технологических системах.

Функционирование любой сложной системы от организма до космического корабля связано с балансом положительных и отрицательных обратных связей. Нарушение этого баланса и может приводить к катастрофе. В зависимости от того, как они нарушаются, и возникают разные концептуальные и математические модели катастроф. Если преобладающими становятся сильные положительные обратные связи, то может возникнуть взрыв, эпидемия. По этому «катастрофическому» закону росло народонаселение Земли последние 100 тысяч лет. Особенно любопытно, что в некоторых системах с такими свойствами существуют «предвестники» – легко вычисляемые параметры, показывающие, что рассматриваемый объект находится в опасном состоянии. Как важно было бы, имея это в виду, сделать шаг от теории к практике для многих конкретных систем...

Другой механизм связан с увеличением времени запаздывания реакции объекта на возмущающие воздействия. И этот механизм достаточно универсален. Он характерен для самых разных объектов, от тяжелых поражений иммунной системы организма до нашествия саранчи и предкатастрофических режимов работы ядерных реакторов.

Парадоксальным является поведение многих сложных систем, которые «сами идут к катастрофе», стремятся к критическому состоянию. Такие объекты рассматриваются в теории самоорганизованной критичности, обсуждаемой в книге. Поразительно, как много явлений и процессов описывает эта теория. Наводнения и биржевые крахи, землетрясения и инциденты с хранением ядерного оружия, ураганы и вспышки на Солнце, сели и утечка конфиденциальной информации.

Теория управления риском существенно отличается от обычных естественно–научных теорий. Чтобы оказаться полезной, она должна быть понята и востребована не только исследователями, но и инженерами, управленцами, руководителями. Поэтому в



книге содержится большой гуманитарный компонент. Это глубокое и серьезное обсуждение философии и социологии риска, тех коренных сдвигов в мировидении, которые принесли риски и катастрофы постиндустриальной эпохи.

Еще одна интересная тенденция современной науки. Раньше «понимание» было основано на простейших физических моделях. Сейчас такими «объясняющими образами» становятся компьютеры, отдельные черты психики или системы организма. Например, авторы обсуждают вопрос, как же нам удастся ориентироваться в сложном, быстро меняющемся мире, если возможности человека оперативно обрабатывать информацию весьма ограничены. Для объяснения этого феномена авторы выдвигают концепцию *русел* и *джокеров*. Русла – те области в пространстве переменных, которые мы наблюдаем, где о происходящем можно судить на основе небольшой информации. Здесь ситуацию можно «просчитать», строя простые модели. Но есть и «области джокеров», где переменных слишком много и на передний план выходят вероятностные или игровые моменты. Авторам удалось перекинуть мостик от этих общих соображений к конкретным моделям и новым поколениям прогнозирующих систем.

### На пороге будущего

В каждой книге, главных мыслей всегда немного. Наиболее важными мыслями этой книги мне представляются следующие.

Концепция устойчивого развития в условиях России тесно связана с управлением риском природных и техногенных катастроф, социальных нестабильностей. Повышение устойчивости общества относительно этих возмущений является необходимым условием для выхода из кризиса. Хочется надеяться, что понимание этого найдет отражение и в официальных документах разных уровней.

Управление рисками, как наглядно показывает изложенная теория и подтверждает практика 10-летней работы МЧС России, является жизненно важной сферой для нашего общества. Кризис в Приморье подтвердил это в очередной раз. Считаю, что пришло время думать не об управлении рисками чрезвычайных ситуаций различного характера, а об *управлении кризисными ситуациями* в различных сферах жизнедеятельности.

Проведенный авторами анализ показывает, что уровень управления рисками в России должен быть повышен. По-видимому, разумно воспользоваться американским опытом. У них аналогичная структура (ФЕМА) осуществляет прежде всего координацию действий различных служб, занимающихся прогнозом, предупреждением и ликвидацией последствий различных бедствий. Кроме того, эта организация обеспечивает деятельность президента США в кризисных ситуациях любого характера. Видимо, эволюция МЧС России в связи с увеличением масштабов и сложности решаемых задач, должна происходить в том же направлении.

Среди множества рисков, с которыми мы сталкиваемся в нашей реальности, наиболее существенны *стратегические риски*. Это те опасности, которые связаны с принятием решений (или отсутствием таковых), меняющих траекторию развития страны. По-видимому, назрела необходимость оценить стратегические риски широкого круга принимаемых в стране решений и, в частности, связанных с национальной безопасностью.

Книга наглядно показывает, насколько велик масштаб задач, связанных с управлением риском. Эти задачи, если рассматривать только их научный аспект, гораздо шире тех проблем, за которые может взяться любой институт Академии. В определенном смысле это сверхзадача для всего научного сообщества. Ученые могут и должны уже сегодня на серьезной научной базе, на основе высоких технологий предупреждать общество об опасностях и угрозах, с которыми оно может столкнуться. Исследователи могут гораздо активнее, чем сейчас, участвовать в управлении рисками. Обсуждаемая книга это очень ярко показывает.

Институт прикладной математики  
им. М.В.Келдыша РАН

Поступила в редакцию 10.07.2001



## ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

*Д. И. Трубецков, А. Г. Рожнев*

© Центр «Интеграция», 2001

© Д.И. Трубецков, А.Г. Рожнев, 2001

М.: Физматлит, 2001. 416 с.

ISBN 5-94052-028-6

Настоящий учебник содержит последовательное изложение основ линейной теории колебаний и волн. Начиная с простого линейного осциллятора, рассматриваются последовательно усложняющиеся теоретические модели: осциллятор под внешним воздействием, связанные осцилляторы и среда из осцилляторов, кинематика волны и неустойчивости, волны в неоднородных средах. Изложение иллюстрируется примерами из физики, химии, биологии, экономики. Наряду с этим представлен математический аппарат, используемый в линейной теории колебаний и волн.

Для студентов и аспирантов физических и физико-технических специальностей вузов, а также научных работников, интересующихся исследованиями колебательных и волновых процессов.

### Введение

Может показаться странным, что в наше время, к которому вполне подходит титул «нелинейное», появляется книга о линейных колебаниях и волнах.

В своем известном эссе «Нелинейность» (Знание – сила. 1982, № 1. С. 34–36) Ю. А. Данилов пишет следующее: «Отпечаток распространенного некогда заблуждения относительно якобы главенствующей роли линейности в окружающем нас мире несет на себе сам термин «нелинейность»: его создатели сочли первичной линейность, а нелинейность восприняли как нечто вторичное, производное от линейности и определили через ее отрицание». И далее: «Современный физик, доведись ему заново создавать определение столь важной сущности, как нелинейность, скорее всего поступил бы иначе и, отдав предпочтение нелинейности как более важной и распространенной, из двух противоположностей определил бы линейность как «не нелинейность». Однако есть и другое мнение, принадлежащее М.А.Миллеру (Волны, волны, волны... Препринт. Нижний Новгород, 1993. С. 36): «...я осмеливаюсь позволить себе высказать совсем уж смелую догадку, которая теперь уж выглядит почти как теоремка. Я утверждаю: описание любого нелинейного явления может быть сведено к набору (конечному или для страховки – к бесконечному!) линейных соотношений (уравнений или других алгоритмических представлений – открытых или скрытых для непосредственных измерительных проверок). Кое-кто посчитает это сведение тривиальным, а кое-кто неверным. Пожалуйста,

определите свое место между этими крайними позициями, а может быть, вам удастся найти критерии (признаки), определяющие виды нелинейных связей, допускающих сведение к конечным комбинациям линейных».

Обе гипотезы красивы и допустимы, но существует классическая линейная теория колебаний и волн, существует линейное мировоззрение, тесно связанное с математическим аппаратом. Этот аппарат весьма разработан, вполне адекватен многим задачам естествознания, а иногда и задачам из гуманитарных наук. Так что, следуя все той же работе М.А. Миллера, хочется воскликнуть: «Все линейное от Бога, а нелинейное от Лукавого!»

Главная идея книги показать единство колебательных и волновых процессов совершенно различной природы, интересуясь, в первую очередь, свойствами этих процессов, а не деталями поведения системы, связанными с проявлениями ее природы (физической, биологической, химической и т.д.). Общие свойства реальных систем устанавливаются на основе анализа моделей, основная из которых классический линейный осциллятор и его модификации. В гл. 1 рассматривается линейный гармонический осциллятор. В качестве примеров анализируются математический маятник, колебательный контур, система хищник–жертва, химический и экономический «маятники». Там же определенное внимание уделено неизохронным колебаниям. Осциллятор как динамическая система, поведение которой исследуется с помощью фазовой плоскости, является героем гл. 2. Анализ различных состояний равновесия для линейного осциллятора с затуханием продолжен в гл. 3, где вводится понятие нормальных колебаний, неоднократно используемое на протяжении всей книги. Изучение фазовой плоскости завершает гл. 4, где рассматривается осциллятор с отрицательным трением и дана общая классификация особых точек на фазовой плоскости. Здесь же кратко обсуждается понятие бифуркации.

Первое усложнение модели – осциллятор под действием внешней силы (гл. 5 и 6). Следующий шаг состоит в рассмотрении осциллятора с изменяющимися во времени параметрами и параметрического резонанса (гл. 7). Важным в этой главе представляется изложение математического аппарата, связанного с исследованием уравнения Матье, методом усреднения, приближением Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна и нахождением адиабатических инвариантов.

В последующих двух главах модель осциллятора используется как «кирпичик» для построения более сложных систем: двух связанных осцилляторов и цепочки связанных осцилляторов (гл. 8 и 9). В гл. 8 вводятся важные понятия собственных мод и собственных частот колебаний, связанности колебаний, рассматривается влияние граничных условий на собственные частоты. Гл. 9 начинается часть книги, посвященную волновым явлениям. Последовательно проведен переход в цепочке связанных осцилляторов к одномерной сплошной среде, подробно обсуждаются понятие волны и причины существования в среде пространственной и временной дисперсии.

Волны в системах с границами и резонанс волновых систем рассмотрены в гл. 10. В следующих двух главах обсуждаются линейные волны в реальных средах – в жидкости (гл. 11) и в плазме (гл. 12). В частности, описаны гравитационные и капиллярные волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости (в случае капиллярных волн указывается на связь с моделью атомного ядра), рассмотрены особенности волн в стратифицированной жидкости (внутренние волны Россби), волны от мгновенного источника на поверхности воды и система волн за движущимся источником.

Для плазмы приводится гидродинамическое описание и элементы кинетической теории. Рассмотрены плазменные ленгмюровские колебания, плазма в продольном поле и затухание Ландау.

Важные вопросы о способах введения понятий групповой скорости, фазовой скорости и скорости распространения энергии составляют содержание гл. 13. Примеры волновых неустойчивостей в различных системах приведены в гл. 14. В ней же на примере задачи о двух взаимодействующих электронных потоках вводятся и обсуждаются понятия абсолютной и конвективной неустойчивостей. В главе об энергии и импульсе волн (гл. 15) на примере уравнения Клейна – Гордона получено уравнение переноса усредненной плотности энергии волнового пакета в диспергирующей среде. Приводится изящный способ вычисления плотности электромагнитного поля в среде с дисперсией, принадлежащий М. Л. Левину. Достаточно подробно изложен вариационный принцип Уизема получения уравнения, характеризующего перенос усредненной плотности энергии

волновым пакетом в средах с дисперсией без «привязки» к конкретному уравнению. Волны с положительной и отрицательной энергией в электронике, физике плазмы и гидродинамике описаны в гл. 16. Там же устанавливается их связь с нормальным и аномальным эффектами Доплера. Рассмотрен метод связанных волн и его приложение к задачам сверхвысоочастотной электроники. Завершает книгу глава о волнах в плавно неоднородных средах и нерезонансных параметрических процессах. Рассмотрено приближение геометрической оптики и выход за его рамки. Изложено решение задачи о поведении электромагнитной волны вблизи точки поворота при отражении от неоднородного диэлектрического слоя. Кратко обсуждается взаимодействие линейных волн.

В книге довольно много математики, но это не математика ради математики. Авторы, используя математический аппарат, руководствовались следующим высказыванием Л.И.Мандельштама (восьмая лекция из книги «Лекции по теории колебаний» (М.: Наука, 1972. С. 73)), относящимся к обсуждению лимитационного движения материальной точки по желобку определенной формы: «Здесь наглядные рассуждения ничего не дают, а необходимо математическое исследование. Без него вы не получите серьезного ответа. Начинающему очень часто кажется: к чему вся эта математика? Ему кажется, что и «так все ясно». Но в действительности какой-нибудь существенный пункт при этом может остаться неясным. Соблюдать меру требуемой математической строгости – самое трудное для физика. Правильнее будет сказать так: ему необходимо уметь определять эту меру».

Сумели ли авторы этого добиться, судить читателю.

## Оглавление

Предисловие

Введение

**Глава 1. Линейный гармонический осциллятор.** 1.1. Общие замечания и определения. 1.2. Консервативный осциллятор. 1.3. Примеры осцилляторов в физике, химии, биологии. 1.4. «Экономический маятник» – линейные колебания в простой модели экономики. 1.5. Электрон в магнитном поле. Электроны–осцилляторы. 1.6. Изохронные и неизохронные колебания. 1.7. Энергетические соотношения для усредненных величин. Теорема вириала.

**Глава 2. Осциллятор как динамическая система.** 2.1. Динамические системы: основные определения и классификация. 2.2. Особая точка типа центр. 2.3. Положения равновесия и особые точки. 2.4. Фазовый портрет системы хищник–жертва. 2.5. Особая точка типа седло. 2.6. Устойчивость положений равновесия.

**Глава 3. Линейный осциллятор с затуханием.** 3.1. Основные свойства осциллятора с затуханием. Логарифмический декремент и добротность. 3.2. Колебания с медленно меняющейся амплитудой. 3.3. Метод нормальных колебаний. 3.4. Немного о квантовом осцилляторе. 3.5. Особая точка типа устойчивый фокус. Аттракторы. 3.6. Осциллятор с сильным затуханием. Устойчивый узел.

**Глава 4. Осцилляторы с отрицательным трением.** Общая классификация особых точек на фазовой плоскости. 4.1. Примеры систем с отрицательным трением. 4.2. Фазовые портреты: неустойчивый фокус и неустойчивый узел. 4.3. Общая классификация особых точек на фазовой плоскости. 4.4. Понятие бифуркации динамической системы.

**Глава 5. Осциллятор под действием внешних сил. Резонанс.** 5.1. Примеры и эталонное уравнение. 5.2. Метод комплексных амплитуд. 5.3. Случай гармонической внешней силы. 5.4. Резонанс. 5.5. Фазовые соотношения при резонансе. 5.6. Энергетические соотношения при резонансе и метод усреднения.

**Глава 6. Осциллятор под произвольным внешним воздействием.** 6.1. Периодическая внешняя сила. 6.2. Произвольная внешняя сила. 6.3. Предельные случаи.

**Глава 7. Осциллятор с изменяющимися параметрами.** 7.1. Вводные замечания. 7.2. Параметрическая неустойчивость. 7.3. Теория Флоке. 7.4. Осциллятор с параметрической

неустойчивостью (модельная система). 7.5. Уравнение Матье. 7.6. Параметрическая неустойчивость в двухконтурной схеме. Соотношения Мэнли – Роу. 7.7. Медленное изменение параметров. Адиабатический инвариант. 7.8. Движение в быстро осциллирующем поле. Маятник Капицы. Лазер на свободных электронах.

**Глава 8. Колебания в системе связанных осцилляторов.** 8.1. Примеры связанных осцилляторов. 8.2. Два связанных идентичных осциллятора. 8.3. Парциальные системы и парциальные частоты. 8.4. Два связанных осциллятора с силовой связью. 8.5. Связанные осцилляторы под действием гармонической силы. 8.6. Колебания системы  $N$  связанных осцилляторов. 8.7. Цепочка идентичных осцилляторов.

**Глава 9. Переход к одномерной сплошной среде в цепочке связанных осцилляторов. Волны. Дисперсия.** 9.1. Вводные замечания. 9.2. Что же такое волна? 9.3. Напоминание о волновой терминологии. Общее линейное уравнение. Дисперсионное соотношение. Диспергирующие волны; групповая скорость. 9.4. С чем связано существование дисперсии в среде? Пространственная и временная дисперсия.

**Глава 10. Волны в распределенных системах с границами.** 10.1. Влияние граничных условий. Отражение и прохождение волны в среде со скачкообразным изменением параметров. 10.2. Струна с закрепленными концами. 10.3. Волны в одномерном резонаторе. Резонанс волновых систем.

**Глава 11. Линейные волны в жидкости.** 11.1. Основные уравнения гидродинамики идеальной жидкости. Звуковые волны. Акустический эффект Доплера. 11.2. Основные уравнения линейной теории волн в стратифицированной жидкости. 11.3. Гравитационные и капиллярные волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости. 11.4. Круговые волны на воде. 11.5. Волны за движущимся источником. 11.6. Внутренние волны в стратифицированной жидкости. Линейные волны Россби.

**Глава 12. Линейные волны в плазме.** 12.1. Общие сведения о плазме. 12.2. Гидродинамическое описание плазмы (основные уравнения плазменной гидродинамики). 12.3. Дисперсионное уравнение для плазменных ленгмюровских колебаний, и анализ важных частных случаев. 12.4. Элементы кинетической теории плазмы (плазма в продольном электрическом поле; плазменные колебания и затухание Ландау). 12.5. Дисперсия волн в двухжидкостной гидродинамике. Ионно–звуковые волны.

**Глава 13. Кинематика волнового движения.** 13.1. О различных способах введения понятия групповой скорости. Скорость распространения энергии. 13.2. Два парадокса Л.И. Мандельштама. 13.3. Фазовая, групповая и скорость распространения энергии волн в некоторых сплошных средах.

**Глава 14. Введение в теорию устойчивости и неустойчивости волновых систем.** 14.1. Общие замечания. 14.2. Примеры волновых неустойчивостей. 14.3. Абсолютная и конвективная неустойчивости (метод характеристик). Волновые неустойчивости двух взаимодействующих электронных потоков. 14.4. Неустойчивость Гельмгольца. 14.5. Усиление и непропускание. Критерий разделения. Еще примеры неустойчивостей.

**Глава 15. Энергия и импульс волн.** 15.1. Уравнение переноса плотности энергии для волнового пакета в диспергирующей среде. 15.2. Вариационный принцип Уизема. 15.3. Плотность энергии электромагнитного поля в среде с дисперсией. 15.4. Что же такое волновая энергия для линейных волн? 15.5. Импульс волнового пакета.

**Глава 16. Волны с отрицательной энергией. Связанные волны.** 16.1. Общие замечания. 16.2. Волны с положительной и отрицательной энергией. 16.3. Связанные волны, синхронизм. Нормальный и аномальный эффект Доплера.

**Глава 17. Волны в неоднородных средах.** 17.1. Приближение геометрической оптики. 17.2. Образование каустик и рефракция. 17.3. Градиентный диэлектрический волновод. 17.4. Электромагнитные волны в слоисто–неоднородной среде. 17.5. Взаимодействие линейных волн в неоднородной среде.

Список литературы

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*  
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина, Ж.А. Иванова*  
Художник *Д.В. Соколов*  
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*  
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136  
Банковские реквизиты  
р/с № 40603810900000000378 в ЗАО АКБРиР «Экономбанк» г. Саратова,  
БИК 046311722, кор.счет банка 30101810100000000722

**Подписка на I-ое полугодие 2002 года**

по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498,  
стоимость подписки на I полугодие 120 руб.

Подписка на весь год (240 руб.) по заявочным письмам  
непосредственно в редакции.

**Зарубежная подписка** в России оформляется в ЗАО «МК-Периодика»  
по адресу: 129110, Россия, Москва, ул. Гиляровского, 39

ЗАО «МК-Периодика».

Тел.: (095) 281-93-45, 284-50-08; факс: (095) 281-37-98.

E-mail: [info@periodicals.ru](mailto:info@periodicals.ru)

**Правила подписки за рубежом** на сайте <http://www.periodicals.ru>

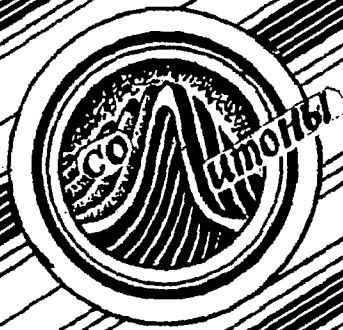
Сдано в набор 1.09.01. Подписано к печати 17.11.01. Формат 70x108/16  
Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная. Гарнитура Латинская  
Усл. печ. л. 7,67 (8,25). Уч.-изд. л. 7,5. Тираж 200. Заказ 237

Издательство ГосУНЦ «Колледж». Лицензия ЛР №020773 от 15.05.98  
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Тел. (845-2)523864, факс (845-2) 523864  
E-mail: [and@cas.ssu.runnet.ru](mailto:and@cas.ssu.runnet.ru)  
<http://cas.ssu.runnet.ru>

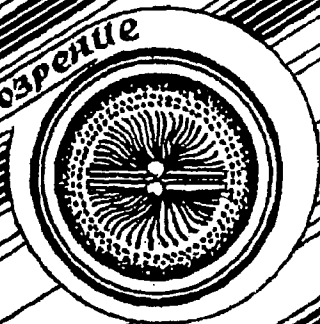
Отпечатано на ризографе GR 3750 Издательства ГосУНЦ «Колледж»

© Издательство ГосУНЦ «Колледж» 

© Оформление художника Д.В. Соколова, 2001



Книжное обозрение



**EDITOR-IN-CHIEF**

*Yu.V. Gulyaev*, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

**EDITORS**

*D.I. Trubetskov*, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

*D.A. Usanov*, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

**SECRETARY-IN-CHIEF**

*B.P. Bezruchko*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

**EDITORIAL BOARD**

*V.S. Anishchenko*, Professor, Saratov University

*Yu.A. Danilov*, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

*B.A. Kalinikos*, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

*V.I. Krinsky*, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

*S.P. Kuznetsov*, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

*P.S. Landa*, Professor, Moscow University

*L.A. Ostrovsky*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

*Yu.M. Romanovsky*, Professor, Moscow University

*E.E. Son*, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

*V.D. Shalfeev*, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

*V.V. Tuchin*, Professor, Saratov University

*V.K. Yulpatov*, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



для студентов и преподавателей в журнале



Современной нелинейной динамики

# ЧУЖОЙ НОС ДРУГИМ СОБЛАЗН

*Козьма Прутков*

