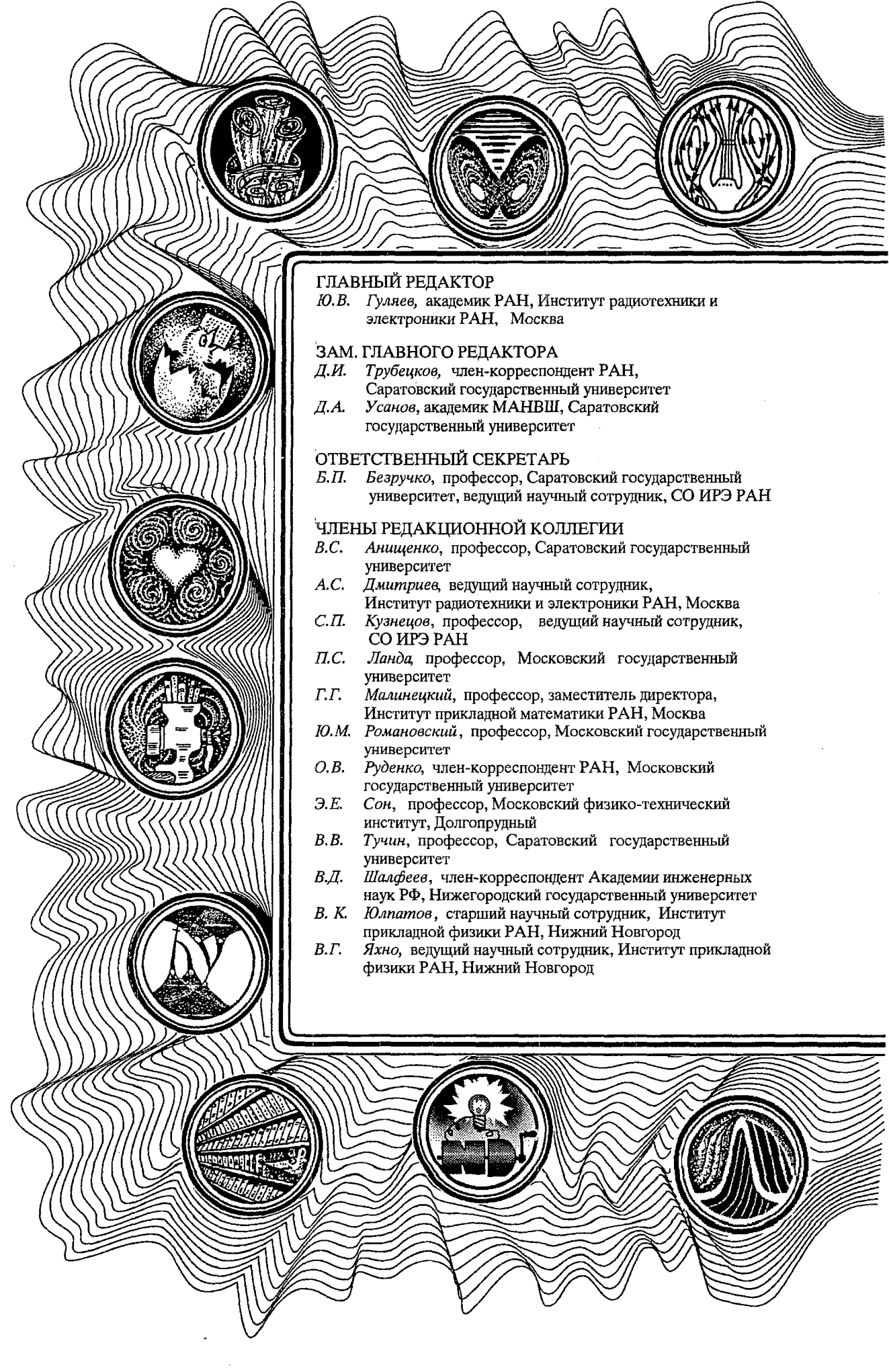


Трикладная Делнейная Динамика



120 лет со дня рождения Л.И.Мандельштама

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуллев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СО ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

А.С. Дмитриев, ведущий научный сотрудник, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, СО ИРЭ РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Г.Г. Малинецкий, профессор, заместитель директора, Институт прикладной математики РАН, Москва

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

О.В. Руденко, член-корреспондент РАН, Московский государственный университет

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В. К. Юлпатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

В.Г. Яхно, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 12, № 6, 2004, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

*Материалы VII Международной школы «Хаотические автоколебания
и образование структур», Саратов, Россия, октябрь 1–6, 2004*

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

- Макаренко Н.Г.* Временные ряды из геометрии и топологии пространственно-временного хаоса 3
Ланда П.С. Турбулентность в струйных течениях: Что это такое?..... 17
Никифоров А.И., Рябов Д.С., Чечин Г.М. Динамический хаос в трехмерной диссипативной системе с группой симметрии D_2 28
Андреев Ю.В., Коротеев М.В. О хаотической природе звуков речи..... 44

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

- Волков Е.И.* Вынужденные колебания биритмичной пары релаксационных осцилляторов вблизи бифуркации Андронова – Хопфа 60

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Смирнов Д.А., Бодров М.Б., Безручко Б.П.* Оценка связанности осцилляторов по временным рядам путем моделирования фазовой динамики: Пределы применимости метода 79
Безручко Б.П., Смирнов Д.А., Сысоев И.В. Реконструкция при наличии скрытых переменных: Модифицированный алгоритм Бока..... 93
Павлов А.Н., Сосновцева О.В. Применение двойного вейвлет-анализа для исследования эффектов модуляции в динамике нефронов 105

АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

- Казанцев В.Б.* Динамическое преобразование импульсных сигналов в нейронных системах 118
Клиньшов В.В., Казанцев В.Б., Некоркин В.И. Фазово-амплитудные кластеры в ансамбле генераторов Ван дер Поля..... 129
Клиньшов В.В., Некоркин В.И. Динамика системы нейронов с последеполаризацией и ингибиторной обратной связью..... 144

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

- Короновский А.А., Москаленко О.И., Попов П.В., Храмов А.Е.* Некоторые общие подходы к анализу хаотической синхронизации в связанных динамических системах..... 159

КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ

- ХАОС'2004 191

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA

- Трубецков Д.И.* Чудо по имени Миллер 196

DEPARTMENT OF EDUCATION OF RUSSIAN FEDERATION
Izvestiya VUZ
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS
scientific-technical journal
published since 1993

Published 6 times a year

Vol. 12, № 6, 2004, Saratov

C O N T E N T S

*Transactions of the VII International School «Chaotic Oscillations
and Pattern Formation», Saratov, Russia, October 1–6, 2004*

DETERMINISTIC CHAOS

<i>Makarenko N.G.</i> Time series from geometry and topology of spatio-temporal chaos	3
<i>Landa P.S.</i> Turbulence in jet flows: What is it?	17
<i>Nikiforov A.I., Ryabov D.S., Chechin G.M.</i> Dynamical chaos in three-dimensional dissipative system with D_2 -symmetry group	28
<i>Andreyev Yu.V., Koroteyev M.V.</i> On chaotic nature of speech signals	44

BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

<i>Volkov E.I.</i> Forced oscillation modes in a birhythmic system of two coupled relaxation oscillators near Andronov–Hopf bifurcation	60
---	----

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

<i>Smirnov D.A., Bodrov M.B., Bezruchko B.P.</i> Estimation of coupling between oscillators from time series via phase dynamics modeling: Limits of method's applicability	79
<i>Bezruchko B.P., Smirnov D.A., Sysoev I.V.</i> Reconstruction with hidden variables: Modified Bock's approach	93
<i>Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V.</i> Application of double-wavelet analysis to study modulation phenomena in dynamics of nephrons	105

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

<i>Kazantsev V.B.</i> Dynamic transformation of pulse signals in neuronal systems	118
<i>Klinshov V.V., Kazantsev V.B., Nekorkin V.I.</i> Phase-amplitude clusters in ensemble of van der Pol generators	129
<i>Klinshov V.V., Nekorkin V.I.</i> Dynamics of system of neurons with afterdepolarization and inhibitory feedback	144

METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

<i>Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Popov P.V., Hramov A.E.</i> Some approaches for chaotic synchronization analysis in coupled dynamical systems	159
---	-----

CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIA. SCIENTIFIC SCHOOLS

XAOC'2004	191
------------------------	-----

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

<i>Trubetskov D.I.</i> Prodigy by name Miller	196
---	-----



ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ ИЗ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ХАОСА*

Н.Г. Макаренко

В работе рассматриваются методы преобразования геометрии и топологии 2D-паттернов в скалярные временные ряды на основе формализма математической морфологии и вычислительной топологии. Методы иллюстрируются на примере динамики магнитного поля Солнца.

Подходите к вашим задачам с правильного конца и начинайте с ответов. Тогда в один прекрасный день вы, возможно, найдете правильный вопрос.

Р. ван Гулик. «Отшельник в журавлиных перьях»

Введение

Наиболее удачная попытка решения обратной задачи – получения модели *непосредственно из данных* принадлежала Иоганну Кеплеру из Вюртенберга (1571–1630). Три знаменитых закона эллиптического движения планет были получены им в результате чудовищных по объему ручных вычислений, проделанных над наблюдениями пражского астронома *Тихо Браге* (1546–1601). Модель Кеплера – не только замечательный пример получения *явных знаний из таблиц данных*. Она имела предсказательные возможности, реализованные в так называемых *Рудольфовых таблицах* – наперед рассчитанных эфемерид нескольких планет.

Исторический контекст современных подходов к реконструкции модели из наблюдений можно найти в известной аллегории *пещеры Платона* [1]. В VII главе

*Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия

трактата «Государство» Платон описал узников, которые видят в отблесках костра на стенах пещеры лишь тени внешнего мира, по которым они и должны восстановить реальность. Эвристически реконструкция аттрактора из скалярных временных рядов, которые рассматривались как типичные «тени» фазовой траектории на первую координату, была предложена в 1980-м группой *Паккарда* [2]. Формализм появился год спустя, когда *Такенс* [3] обобщил теорему Уитни о вложении дифференцируемых многообразий в R^n на динамические потоки и каскады. Предположим, что для динамической системы $\varphi^t(\mathbf{x}) : M \rightarrow M$ на некотором компактном n -мерном многообразии M определена наблюдаемая¹ как непрерывная нелинейная функция фазовой точки $h(\mathbf{x}(t)) : M \rightarrow R$ и выполняется *Кредо идеального экспериментатора* [4]. Тогда теорема Такенса [3, 5] утверждает, что отображение $\Phi : M \rightarrow R^{2n+1}$ запаздывающих координат

$$\Phi(\mathbf{x}) = (h(\mathbf{x}), h(\varphi^{\tau}(\mathbf{x})), \dots, h(\varphi^{2n\tau}(\mathbf{x}))) \quad (1)$$

– вложение в R^{2n+1} с точностью до предположения о типичности. Полученный образ будет диффеоморфной копией реального аттрактора и наследует все его динамические характеристики [6]. Копия содержит даже топологию аттрактора, поскольку существует связь между структурой множества $C(h) = \{\mathbf{x} \in M \mid dh(\mathbf{x}) = 0\}$ критических точек функции h и топологией многообразия M [7].

Новый способ построения модели из наблюдаемого сигнала называют *эмбедологией*, как производное от английского слова *embedding* – вложение [5, 8]. Техническая сторона эмбедологии основана на богатом арсенале разработанных *ad hoc* методов для численных оценок динамических инвариантов аттрактора [9-13] и его гомологий [14]. На базе алгоритма Такенса возникли новые нелинейные методы анализа временных рядов [15, 16] и многомерная техника их прогноза [17-19]. Существенным ограничением является, однако, то обстоятельство, что эмбедология адаптирована к точечному источнику сигнала, динамика которого не зависит от пространственной сложности.

Хаотические сценарии *распределенных* динамических систем принято называть *пространственно-временным хаосом* [20-22]. При экспериментальном анализе такого хаоса приходится иметь дело с двумя видами сложности: *временной* и *пространственной*. Последняя кодируется геометрией и топологией пространственной структуры системы. Проекциями такой динамики в «Мир Экспериментатора» являются мгновенные снимки (*snapshots*), то есть матричные данные, такие как фотографические и цифровые изображения, сцены или карты. В качестве собирательного термина такого разнообразия удобно использовать термин *паттерн*.

Немногочисленные попытки прямого обобщении эмбедологии на матричные данные [22, 23] привели к интересным результатам. Для последовательности мгновенных снимков пространственного поля скоростей динамической системы градиентного типа определялась фрактальная размерность в матричном пространстве вложений. Оказалось, что снимкам с ламинарным режимом соответствует целочислен-

¹ То есть сигнал или реализация – то, что наблюдается. В общем случае, может зависеть от параметров, так что может и не наблюдаться при некоторых их значениях. Чтобы избежать катастроф при проекции, предположим, что наблюдаемая является гладкой функцией Морса, то есть ее критические точки изолированы и невырождены.

ная размерность, а снимки, предшествующие бифуркациям, описываются ее дробными значениям [22]. К сожалению, «матричная эмбедология» связана с огромным объемом вычислений. Однако существует другая возможность. Комфорт скалярной эмбедологии можно сохранить, если преобразовать геометрию и топологию паттерна в скалярные величины. Это можно сделать с помощью некоторых дескрипторов, определенных на изображении. Их можно найти в методах математической морфологии и вычислительной топологии.

Математическая морфология и геометрия случайных полей

Пусть $K \in R^d$ – выпуклое замкнутое ограниченное множество² и $B_\varepsilon(x)$ – замкнутый шар с центром в x и радиусом ε . Тогда тело K_ε , параллельное K на расстоянии ε , определяется как объединение шаров

$$K_\varepsilon = \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x). \quad (2)$$

Очевидно, что K_ε состоит из всех точек K и точек, ε -близких к его границе ∂K . K_ε называют часто *дилатацией* или «раздуванием» K . Объем параллельного тела дается *формулой Штейнера* [24, 25] как точный полином по степеням ε

$$Vol K_\varepsilon = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} W_i \varepsilon^i. \quad (3)$$

Коэффициенты W_i , $i = 0, 1, \dots, d$ называют *функционалами Минковского*. Пусть, например, K – квадрат со стороной a . Тогда

$$Vol K_\varepsilon = a^2 + 4a\varepsilon + \pi\varepsilon^2 = F(K) + P(K)\varepsilon + \pi\varepsilon^2,$$

где F и P – площадь и периметр K ; последний коэффициент с точностью до π равен *характеристике Эйлера* $\chi(K) = 1$, которая определена ниже.

В общем случае рассмотрим класс \mathbf{B} подмножеств $\{A\} \in R^d$, которые можно представить как *конечное* объединение компактных, выпуклых подмножеств, и пусть пустое множество $\emptyset \in \mathbf{B}$. Определим функционал $\chi: \mathbf{B} \rightarrow R$ соотношениями

$$\chi(A) = \begin{cases} 1, & A \neq \emptyset \\ 0, & A = \emptyset \end{cases} \quad \text{для выпуклого } A \text{ и} \quad (4)$$

$$\forall A, B \in \mathbf{B}, \quad \chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B),$$

где вторая строка (4) выражает свойство аддитивности χ . *Функционалы Минковского* W_α над \mathbf{B} определяются как интегралы [25]

$$W_\alpha(A) = \int \chi(A \cap E_\alpha) d\mu[E_\alpha], \quad \alpha = 0, \dots, d-1; \quad W_d(A) = \omega_d(1) \chi(A), \quad (5)$$

где $\omega_d(1) = \pi^{d/2} / [\Gamma(d/2 + 1)]$ – объем d -мерного единичного шара³, E_α – α -мерная гиперплоскость в R^d . Символом $d\mu[E_\alpha]$ обозначена плотность геометрической меры:

²Такое множество называют *компактом*.

³Например, для $d = 1, 2, 3$ имеем $\omega_1(1) = 2$; $\omega_2(1) = \pi$; $\omega_3(1) = 4\pi/3$, соответственно.

$\alpha = 0, 1, 2$ соответствует случайным точкам, линиям и плоскостям. Мера $\int d\mu [E_\alpha]$ инвариантна относительно группы G твердотельных движений⁴, поэтому ее плотность называют *кинематической* [26]. Она нормирована так, что для шара $\omega_d(r)$ с радиусом r

$$W_\alpha(\omega_d(r)) = \omega_d(1) r^{d-\alpha}.$$

Согласно (5) в R^d существует $d + 1$ функционал.

Рассмотрим бинарное изображение $I(x, y) = [0 \wedge 1]$, $x, y \in Z^2$, образованное черными ($I = 0$) или белыми ($I = 1$) пикселями на квадратной решетке $Z^2 \in R^2$. Для любого кластера $A \subseteq I(x, y)$, согласно (5), $W_2(A) = \pi\chi(A)$, где $\chi(A)$ определяется согласно (4) и называется *характеристикой Эйлера* A . Легко убедиться, что χ не меняется при гомотопиях A .

Для $W_0(A)$ гиперплоскость E_α вырождается в точку $E_0 = \mathbf{x} \equiv (x, y)$; выражение $\chi(A \cap \mathbf{x}) = 1$ для любой $\mathbf{x} \in A$, и равно нулю в противном случае. Плотность меры случайных точек на плоскости определяется бивектором $d\mu[E_0] = dx \wedge dy$, где внешнее умножение $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ автоматически учитывает якобиан при изменении координат, в отличие от обычного $-dxdy$. Таким образом, $W_0(A)$ – *Лебегова* мера точек в A , то есть его площадь $F(A)$:

$$W_0(A) = \int \chi(A \cap E_0) d\mu(E_0) = \int_A dx \wedge dy = F(A). \quad (6)$$

Наконец, $W_1(A) = \int \chi(A \cap E_1) d\mu(E_1)$, где E_1 – случайная прямая в R^2 . Нам необходима кинематическая плотность случайных прямых на плоскости, пересекающих A . Введем подходящую систему координат, определив любую прямую в R^2 парой (p, ϕ) , где p – длина нормали, опущенной в начало координат, и ϕ – угол между нормалью и положительным направлением оси x . Можно показать [26], что $d\mu(E_1) = dp \wedge d\phi$ – инвариант относительно группы G . Поэтому

$$W_1(A) = \int \chi(A \cap E_1) dp \wedge d\phi = \int_{A \cap E_1} dp \wedge d\phi = \int_0^{2\pi} p d\phi = P(A), \quad (7)$$

где $P(A)$ – периметр области A . Таким образом, все функционалы Минковского имеют простой геометрический смысл: это периметр, площадь и связность бинарного изображения. Кроме того, W_i обладают *морфологическими свойствами*: они аддитивны, инвариантны относительно группы G , непрерывны в метрике Хаусдорфа [24, 25]. Интересно, что два первых функционала можно выразить через $W_2(A) \sim \chi(A)$.

Пусть A – геометрическое тело в R^2 с кусочно-гладкой границей ∂A ; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – внешние углы в вершинах линейных участков ∂A ; ds – элемент длины дуги и k – ее кривизна. Тогда локальные (k) и глобальные (χ) свойства A связаны *теоремой Гаусса – Бонне* [27]:

$$\sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) + \int_{\partial A} k ds = 2\pi\chi(A). \quad (8)$$

⁴Поскольку группа G транзитивна, то есть переводит любую точку A в B , существует одна инвариантная мера с точностью до масштабной константы. Если группа сильно транзитивна, так что несколько преобразований могут перевести $A \rightarrow B$, может случиться, что такой меры нет вообще.

Рассмотрим теперь случай «серого» изображения, где $I(x, y) \in [a, b]$. Его легко свести к бинарному варианту, если определить множество уровней⁵ высоты h : $B_h = \{(x, y) | I = h\}$, $a \leq h \leq b$, или множество выбросов за уровень h : $A_h = \{(x, y) | I \geq h\}$, $a \leq h \leq b$ графика функции $I(x, y)$.

В геометрии случайных полей [28]

имеют дело с контурными картами, образованными множествами выбросов $A_u(F, Z) = \{t | F(t) \geq u\}$ непрерывного случайного поля $F(t)$, $t \in Z \subset R^N$, $F \in R^M$ за уровень u . Предположим, что компакт Z и его граница ∂Z являются достаточно простыми. Пусть поле $F(t)$ достаточно регулярно в некотором определенном смысле [28]. На рис. 1, например, множеством A_u являются серые области; ∂Z — прямоугольник и $A_u \cap \partial Z = \emptyset$. Выберем в качестве основного направления ось ординат t_2 . Будем двигаться вдоль t_2 и изучать точки, в которых $\partial F / \partial t_2 > 0$ и ∂A_u имеет горизонтальную касательную. В этих критических точках граница ∂A_u может быть выпуклой или вогнутой. Припишем каждой «выпуклой» точке границы индекс $k = 0$, а «вогнутой» — индекс $k = 1$; пусть m_k — число точек индекса k . Тогда дифференциально-топологическая характеристика Эйлера $\chi_{DT}(A)$ выражается через число критических точек на границах компонент ∂A [28]:

$$\chi_{DT}(A) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k m_k. \quad (9)$$

Для компонент A_u на рис. 1 существует 5 критических точек. Из них вклад, равный $(+1)$, в χ_{DT} дают три выпуклые точки А, С, D с индексом $k = 0$, а вклад, равный (-1) , — две вогнутые точки В, Е с индексом $k = 1$. Таким образом, имеем $\chi_{DT} = 3 - 2 = 1$.

Другой способ оценки χ основан на алгоритме Серра [25]. Покроем множество A_u достаточно регулярного поля квадратной решеткой. Пусть V, E, F — число узлов, ребер и граней решетки, соответственно, целиком содержащихся в A_u (см. рис. 1). Тогда, согласно известной формуле Эйлера: $\chi(A) = V - E + F$.

Описанная техника является основной в морфологическом анализе изображений [24, 25] и геометрии случайных полей [28-31]. Функционалы W_i можно вычислить, например, в *Image Processing Toolbox* пакета *MatLab*. Оператор дилатации [24, 25, 32], который используется для получения параллельного тела, позволяет вычислить для изображения еще один полезный скаляр. Он связан со скейлинговыми свойствами паттерна и называется размерностью Минковского — Булигана [33].

Рассмотрим кривую Γ на плоскости и $\forall x \in \Gamma$, определим открытый диск радиусом ε с центром в точке x : $B_\varepsilon(x) = \{y | \|x - y\| < \varepsilon\}$. Тогда ε -покрытием или шарфом Минковского называется множество точек $\Gamma(\varepsilon) = \{y | y \in B_\varepsilon(x), x \in \Gamma\}$. Пусть $\mu(\Gamma(\varepsilon))$ — Лебегова мера ε -покрытия. Тогда размерность Минковского — Булигана определяется как скорость изменения $\mu(\Gamma(\varepsilon))$ при изменении радиуса ε

⁵То есть областей, на которых изображение имеет «тональность» окраски $I(x, y) = h$.

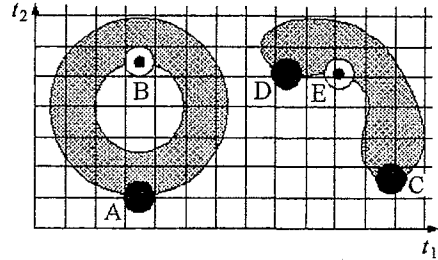


Рис. 1. Пример определения χ_{DT} согласно (9)

$$d_M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{2 - \log \mu(\Gamma(\varepsilon)) / \log \varepsilon\} \quad (10)$$

и является одной из множества фрактальных размерностей [33, 34]. Для компактов дилатация получается лишь за счет граничных точек, вдоль которых «прокатываются» диски. При работе с цифровыми изображениями возникает проблема выбора *дискретно-непрерывной последовательности* [32] радиусов на ортогональной решетке Z_2 . Введенная в [35] концепция *точной дилатации*, основанная на точном решении уравнения эйконала из геометрической оптики, позволяет избежать проблемы искажения расстояний и определить подходящее множество радиусов. При этом граница области дилатации растет с постоянной скоростью вдоль нормали к границе множества.

Морфологический анализ позволяет описать геометрию паттерна. Однако одной и той же геометрии могут соответствовать совершенно различные топологии. Так, два фрактала могут иметь одинаковую *бокс-размерность* [33, 34], но отличаться «пористостью», то есть числом «дыр». Методы вычислительной топологии [36-38] дополняют морфологический анализ в том смысле, что позволяют описывать «форму» изображения и его области, в которых мера отсутствует.

Вычислительная топология

Наиболее простой способ изучения топологии изображения заключается в простом приеме: оценке изменения связности паттерна, то есть числа его отдельных компонент при изменении разрешения. Для этого необходимо формализовать понятие *разделимости* фрагментов. Топологическое пространство⁶ X называют *связным*, если оно не может быть разложено на объединение двух непустых, несвязных и замкнутых множеств [39]. Если X *несвязно*, то существуют два замкнутых множества U и V таких, что $U \cap V = \emptyset$ и $U \cup V = X$. Это понятие было адаптировано Робинс [40, 41] для использования в компьютерном эксперименте, где всегда приходится иметь дело с конечным разрешением ε . Основная идея, восходящая к Кантору⁷, заключается в определении некоторых свойств паттерна, меняющихся при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Подмножество X метрического пространства с метрикой d называется ε -*несвязным*, когда оно может быть разложено на два множества, *которые разделены расстоянием, по меньшей мере, равным ε* . Формально существуют два замкнутых подмножества U и V такие, что $U \cup V = X$ и

$$d(U, V) = \inf_{x \in U, y \in V} d(x, y) > \varepsilon. \quad (11)$$

В противном случае X является ε -*связным*. При заданном разрешении ε , X имеет обычное разбиение в виде несвязного объединения его ε -компонент. Основной вопрос заключается в том, какую информацию о связности множества X несет изменение несвязности разбиения при $\varepsilon \rightarrow 0$. Пусть $C(\varepsilon)$ – число ε -компонент множества.

⁶Грубо говоря, топологическим пространством называют множество объектов, снабженное понятием *окрестности* или *близости*.

⁷По Кантору, X связно, если любые его две точки могут быть связаны с помощью ε -цепи, то есть последовательности точек x_0, \dots, x_n , таких что $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ для $i = 1, \dots, n$.

Определим величину, которую называют *индексом несвязности* [40], как

$$\gamma = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}. \quad (12)$$

Для самоподобного фрактала γ совпадает с его бокс-размерностью. В [40, 41] используется подсчет компонент связности, основанный на так называемом минимальном натянутом дереве – МОД. Этот граф не содержит циклов и соединяет конечное множество точек так, что суммарная длина всех его ребер минимальна [42, 43]. Если упорядочить длины ветвей МОД по возрастанию, то удаление ветвей с фиксированным значением ε разбивает точки на ε -несвязные компоненты (кластеры).

Дальнейшую информацию о топологии паттернов можно получить методами алгебраической топологии [36-38, 43-46]. В наиболее общей постановке, пусть X – топологическое или метрическое *пространство скрытых параметров*, R^D – *пространство наблюдателя* и $f : X \rightarrow R^D$ – вложение. Пусть, например, $U \subset X$ – конечное множество точек окружности X , выбранных случайно, и $Y = f(U) \subset R^2$ – его образ, наблюдаемый на дисплее компьютера. Какие свойства X наследуются в его конечно-точечном приближении Y ? Как следует соединить точки Y , чтобы полученная структура сохраняла форму X или, точнее, его гомологии [44, 45]? Однако эта тема превышает возможности одной статьи. Вместо этого полезно показать, как работают уже описанные выше методы на примере реальной физической системы.

Морфология и топология глобального магнитного поля Солнца

Наиболее известным проявлением детерминизма в солнечной активности является циклическое изменение числа солнечных пятен с периодом около 11 лет, установленное в 1843 году астрономом-любителем *Генрихом фон Швабе*, с 1848 года регистрируемое так называемыми *числами Вольфа* [47]. Кроме 11-летней циклическости (*закон Швабе – Вольфа*) наблюдается пространственное изменение количества пятен в течение каждого цикла по гелиоширотам, описываемое *законом Шпёнера*. Следующей важной характеристикой солнечной активности является *закон Хэйла*, который в 1908 г. установил, что солнечные пятна обладают сильными магнитными полями⁸. Пятна обычно образуют биполярные группы, в которых ведущие, по вращению Солнца, p -пятна в северном полушарии имеют полярность северного полюса Солнца до его *переполусовки*⁹ в период максимума 11-летнего цикла, а ведомые f -пятна имеют полярность южного полюса. В южном полушарии порядок полярности p - и f -пятен – обратный. Эта ситуация сохраняется в течение 11 лет и меняется на обратную в следующем цикле, так что через каждые 22 года порядок полярности повторяется.

Крупномасштабные структуры (с пространственным разрешением более 5°) принято называть *глобальным* или *фоновым* магнитным полем Солнца. Динамика для этих масштабов проявляется в распределении униполярных областей, которые эволюционируют в течение приблизительно 11 лет [49]. Нейтральные магнитные линии, разделяющие эти области, изображают в форме так называемых H_α синоптические

⁸Общий магнитный поток в пятнах достигает 10^{21} максвелл.

⁹Инверсии знака глобального магнитного поля [48].

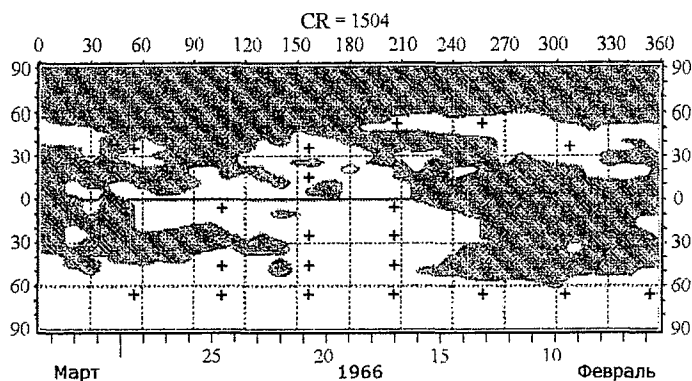


Рис. 2. Синоптическая H_α магнитная карта Солнца для CR1504. N -полярность показана серым

ских карт, которые показывают топографию распределения знака фонового магнитного поля, усредненного на масштабе одного кэррингтоновского оборота¹⁰, в цилиндрической проекции (рис. 2). Последовательность таких карт покрывает интервал времени 1915–2002 гг. [50]. Магнитограммы, содержащие топографию радиальной компоненты магнитного поля, существуют¹¹ с 1976 г. Синоптические карты отображают реальные структуры, по меньшей мере, гомеоморфно, так что топологические свойства сохраняются. Именно поэтому они интересны для приложения описанных выше методов [43, 51–53].

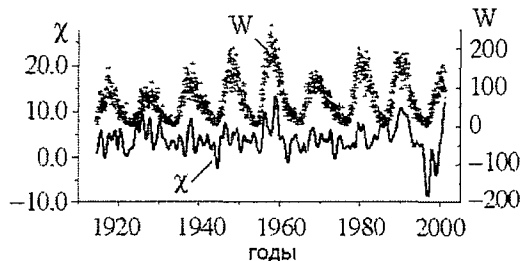


Рис. 3. Сравнение поведения сглаженных значений Эйлеровой характеристики χ с числами Вольфа W для CR 815 (1972)

функционалов сглаживались. На рис. 3 в качестве примера приведен график характеристики Эйлера χ , вычисленной для объединенной выборки магнитограмм и H_α -карт (циклы № 15–23) [53], после сглаживания фильтром Уиттекера¹², вместе со значениями чисел Вольфа.

Вложение этих двух временных рядов в R^3 показано на рис. 4. Фазовые портреты по пятнам и глобальному полю существенно различаются. Для реконструкции по χ оценки корреляционной размерности ν и K – энтропии с использованием Гауссовского ядра [54] дали $\nu = 2.309 \pm 0.023$, $K = 0.06 \text{ bit/CR}$. Известные оценки ν для реконструкций по числам Вольфа варьируются в пределах $\nu \approx 2.1 \dots 3.5$ [55, 56]. Размерность Минковского – Булигана d_M , вычисленная для трех солнечных циклов и показанная на рис. 5, меняется в диапазоне [1.17... 1.37].

¹⁰ Один кэррингтоновский оборот – $1\text{CR} \approx 27$ дней.

¹¹ Wilcox Solar Observatory Synoptic Charts: <http://quake.stanford.edu/~wso/synoptic.html>

¹² Этот фильтр сохраняет статистические моменты до второго порядка.

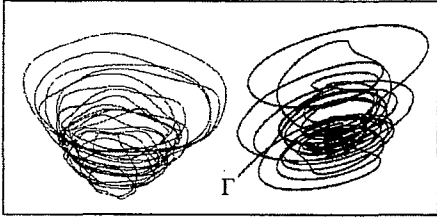


Рис. 4. Вложения в R^3 временного ряда чисел Вольфа (слева) и χ (справа)

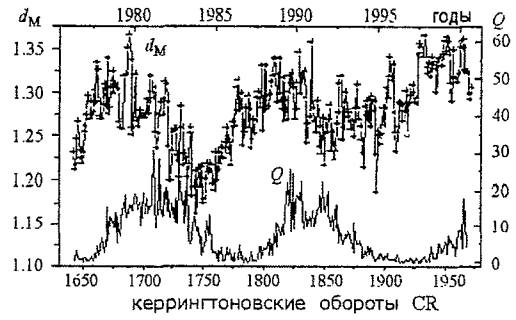


Рис. 5. Сравнение поведения ежемесячных значений вспышечного индекса Q и размерности Минковского d_M

Нижний график на рис. 5 показывает изменение так называемого вспышечного индекса Q , который был введен чешским астрономом Я. Клечком в 1957 г. Этот индекс приблизительно характеризует общую энергию, излучаемую вспышками по всему спектру наблюдаемого электромагнитного излучения (от радиоволн до рентгеновских и гамма лучей) за день¹³. Максимальная корреляция между двумя кривыми наблюдается при сдвиге d_M вперед приблизительно на $12CR$. Таким образом, изменению вспышечной активности предшествует перестройка геометрии нейтральной линии [57].

Размерность d_M не единственная фрактальная характеристика, которую можно получить из синоптических карт. Оказывается, все морфологические функционалы демонстрируют мультифрактальный скейлинг. Мультифрактальные свойства мелкозернистого магнитного поля Солнца были обнаружены впервые по магнитограммам малых областей, полученным с высоким разрешением [58]. Оказалось, что сингулярная мера присутствует и для крупномасштабного поля.

Будем рассматривать график функции как некоторую меру. Ее можно определить либо как нормированную сумму ординат в некотором интервале или боксе C_δ размером δ , либо как вариацию графика в этом боксе. Пусть $C = \{C_\delta\}$ – множество всех таких боксов. Определим крупнозернистый гельдеровский показатель меры в боксе выражением [59]

$$\alpha(C_\delta) = \frac{\log \mu(C_\delta)}{\log \delta}. \quad (13)$$

Пусть $N_\delta(\alpha, \epsilon) = \#\{C_\delta : \alpha(C_\delta) \in (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)\}$, где $(\#)$ – число непустых боксов, содержащих меру с показателем $\alpha \pm \epsilon$. Тогда крупнозернистый мультифрактальный спектр больших отклонений определяется выражением [58]

$$f_g(\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(\alpha, \epsilon)}{\log(1/\delta)}. \quad (14)$$

На рис. 6 приведен пример такого спектра для χ . Асимметричная форма спектра на рисунке, возможно, связана с сосуществованием двух различных мер¹⁴.

¹³На графике приведены ежемесячные значения Q из базы данных <http://www.koeri.boun.edu.tr/astronomy/>

¹⁴Лежандровский мультифрактальный спектр [33] не позволяет выявить такие детали – он всегда является выпуклой кривой.

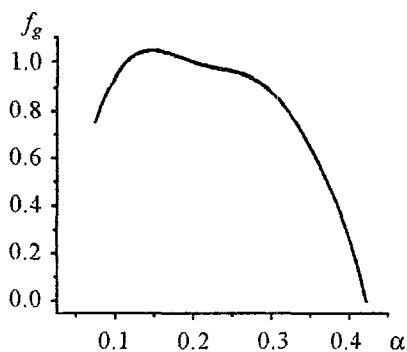


Рис. 6. Спектр больших отклонений для временного ряда χ

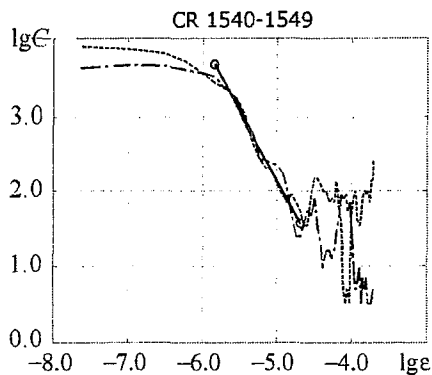


Рис. 7. Определение индексов несвязности $\gamma_{(+)} = 1.8$ и $\gamma_{(-)} = 2.0$ полей разной полярности для кортежа с переполосовкой: CR1540 – CR1549

Индекс несвязности (12) вычислялся отдельно для областей северной $\gamma_{(+)}$ и южной $\gamma_{(-)}$ полярностей по кортежам, образованным «склежкой» десяти H_α -карт, как наклон зависимости числа несвязных областей C от ϵ по графику, построенному в двойном логарифмическом масштабе. Оказалось, что для кортежей, содержащих переполосовки глобального поля, существует хорошо выраженный скейлинговый участок, общий для обеих полярностей (рис. 7). Наклон прямолинейного участка меняется в диапазоне от $\gamma_{(+)} = 1.8 \pm 0.1$ до $\gamma_{(-)} = 2.0 \pm 0.1$. Для наборов H_α -карт, не содержащих инверсий глобального поля, прямолинейный участок отсутствует вообще, а кривые $\lg C$ от $\lg \epsilon$ расходятся для областей разной полярности. Таким образом, переполосовки сопровождаются «стиранием» выделенных масштабов для магнитных структур Солнца. Аналогичные эффекты возникают обычно вблизи точек фазовых переходов физических систем и интерпретируются в рамках теории самоорганизующейся критичности [18]. Подтверждение этого результата по магнитограммам имело бы большое значение для физики инверсий магнитного поля Солнца. Дальнейшие результаты, основанные на вычислении гомологий синоптических карт, можно найти в [60].

Приведенные примеры показывают, что «арифметизация» изображений может быть весьма полезна при интеллектуальном анализе матричных данных.

Библиографический список

1. Платон. Государство // Собр. соч. М., 1971. Т. 3. Ч. 1.
2. Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. Geometry from a time series // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 712-716.
3. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Lecture Notes in Math. 1981. Vol. 898. P. 366-381.
4. Афраймович В.С., Рейман А.М. Размерности и энтропии в многомерных системах // Нелинейные волны. Динамика и эволюция. М.: Наука, 1989. С. 238-262.
5. Sauer T., Yorke J.A., Casdagli M. Embedology // J. Statist. Phys. 1991. Vol. 65. P. 579-616. URL: <http://math.gmu.edu/~tsauer/>

6. *Eckmann J.P., Ruelle D.* Ergodic theory of chaos and strange attractors // *Rev. Mod. Phys.* 1985. Vol. 57. P. 617-656.
7. *Gilmore R., Lefranc M.* The Topology of Chaos: Alice in Stretch and Squeezeland. Wiley, New York. 2002. 495 p.
8. *Rapp P.E., Schah T.I., Mees A.I.* Models of knowing and the investigation of dynamical systems // *Physica D.* 1999. Vol. 132. P. 133-149.
9. *Grassberger P., Procaccia I.* On the characterization of strange attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. P. 346-349.
10. *Parker T.S., Chua L.O.* Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. Springer, 1989. 348 p.
11. *Ott E., Sauer T., Yorke J.A.* Coping with chaos: Analysis of chaotic data and the exploitation of chaotic systems. John Wiley and Sons. 1994. 432 p.
12. *Schreiber T.* Interdisciplinary application of nonlinear time series methods // *Phys. Rep.* 1999. Vol. 308, № 2. URL:<http://xyz.lanl.gov/chaodyn/980700>.
13. *Small M., Tse C.K.* Optimal embedding: A modelling paradigm // *Physica D.* Vol. 194. 2004. P. 283-296.
14. *Muldoon M., MacKay R.S., Broomhead D.C., Huke J.P.* Topology from time series // *Physica D.* 1993. Vol. 65. P. 1-16.
15. *Lay Ying-Cheng, Ye N.* Recent developments in chaotic time series analysis // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2003. Vol. 13, № 6. P. 1383-1422.
16. *Ruelle D.* Chaotic evolution and strange attractors // The statistical analysis of time series for deterministic nonlinear systems. Cambridge University Press, 1989.
17. *Farmer J.D., Sidorovich J.J.* Predicting chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59. P. 845-848.
18. *Малинецкий Г.Г., Пономов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: УРСС, 2002. 358 с.
19. *Макаренко Н.Г.* Эмбедология и нейропрогноз // Лекции по нейроинформатике. Ч. 1, Нейроинформатика-2003, V Всерос. научн.-тех. конф. Москва, 2003. С. 86-148.
20. *Crutchfield J. P., Kaneko K.* Phenomenology of Spatiotemporal Chaos // *Directions in Chaos*, World Scientific. 1987. P. 272-353.
21. *Mayer-Kress G., Kaneko K.* Spatiotemporal Chaos and Noise // *J. Stat. Phys.* 1989. Vol. 54, №5-6. P. 1489-1508.
22. *Рабинович М.И., Фабрикант А.П., Цимринг Л.Ш.* Конечномерный пространственный беспорядок // *УФН.* 1992. Т. 42. С. 1-42.
23. *Parlitz U., Merkwirth Ch.* Time series Analysis of spatially extended systems // Intern. Symp. on Nonlinear Theory and its Applications NOLTA'98, Crans-Montana, Switzerland, Sept.14-17, 1998. P. 775-778.
<http://WWW.DPI.Physik.Uni-Goettingen.DE/~ulli/>
24. *Michielsen K., De Raedt H.* Morphological Image Analysis // *Comp. Phys. Commun.* 2000. Vol. 132. P. 94-103.
25. *Serra J.* Image analysis and mathematical morphology. Academ.Press, 1988. 610 p.

26. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М.: Наука, 1983. 358 с.
27. Торн Дж. Начальные главы дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1982. 360 с.
28. Adler R.J. The geometry of random fields. // J.Wiley & Sons, N.Y., 1981. 280 p.
29. Stoyan D., Kendall W.S., Mecke K. Stochastic Geometry and its applications. J.Wiley & Sons, 1995. 436 p.
30. Worsley K.J. The geometry of random images // Chance. 1996. Vol. 9, № 1. P. 27-40.
31. Worsley K.J. Estimating the number of peaks in a random field using the Hadwiger characteristic of excursion sets, with applications to medical images // Annals of Statistics. 1995. Vol. 23. P. 640-669.
32. Rosenfeld A., Klette R. Digital geometry // Information Sciences. 2002. Vol. 148. P. 123-127. <http://www.tcs.auckland.ac.nz/~rklette/>
33. Falconer K. Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons, 1990. 288 p.
34. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: ИКИ, 2002. 654 с.
35. Costa L. da F., Kaye B.H. and Montagnoli C. Accurate Fractal Estimation using Exact Dilations // Electronic Letters. 1999. Vol. 35. P. 1829-1836.
36. Dey T. K., Edelsbrunner H., Guha S. Computational Topology // Advances in Discrete and Computational Geometry / Eds B. Chazelle, J. E. Goodman and R. Pollack. Contemporary Mathematics, AMS, Providence. 1998. <http://www.cse.ohio-state.edu/tamaldehy/papers.html>
37. Kaczynski T., Mischaikow T., Mrozek M., Computing Homology // Homology, Homotopy and Applications. 2001. Vol. 5. P. 233-256.
38. Carlsson E., Carlsson G., de Silva V. An algebraic topological method for feature identification // Preprint. August 12, 2003. <http://math.Stanford.EDU/comptop/preprints/>
39. Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1968. 432 с.
40. Robins V., Meiss J.D., Bradley E. Computing connectedness: Disconnectedness and discreteness // Physica D. 2000. Vol. 139. P. 276-300.
41. Robins V., Meiss J.D., Bradley E. Computing connectedness: An exercise in computational topology // Nonlinearity. 1998. Vol. 11. P. 913-922.
42. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. Введение. М.: Мир, 1989. 478 с.
43. Макаренко Н.Г. Как получить временные ряды из геометрии и топологии пространственных паттернов // Лекции по нейроинформатике. Ч. 2. Нейроинформатика-2004, VI Всерос. науч.-тех. кон. М., 2004. С. 140-199.
44. Шапиро И.С., Ольшанецкий М.А. Лекции по топологии для физиков. Москва-Ижевск: РХД, 2001. 128 с.
45. Robins V. Computational Topology for Point Data: Betti Numbers of Alpha-Shapes // Morphology of Condensed Matter: Physics and Geometry of Spatially Complex Systems, K. Mecke and D. Stoyan (Eds), Lecture Notes in Physics 600, Springer. 2002. P. 261-275.

46. *Gameiro M., Kalies W. D., Mischaikow K.* Topological Characterization of Spatial Temporal Chaos. <http://www.math.gatech.edu/~mischaik/papers/>
47. *Витинский Ю.И., Конецкий М., Куклин Г.В.* Статистика пятнообразовательной деятельности Солнца. Москва, 1986. 296 с.
48. *Макаров В.И., Тавастииерна К.И.* Глобальные особенности процесса солнечной активности // сб. Вариации глобальных характеристик Солнца. Киев, 1992. С. 270-301.
49. *Mouradian Z., Soru-Escout I.* On the dynamics of the large-scale magnetic fields of the Sun and the sunspot cycle // *Astron. & Astroph.* 1991. Vol. 251. P. 649-654.
50. *Айманова Г.К., Макаренко Н.Г., Макаров В.И., Тавастииерна К.С.* Оценка параметров порядка фоновых магнитных полей Солнца по H-альфа картам. Период: 1914-1984 // *Солнечные данные.* 1982, № 2. С. 97-102.
51. *Макаренко Н.Г., Каримова Л.М., Макаров В.И., Тавастииерна К.С.* Контурная статистика крупномасштабных солнечных полей // сб. Современные проблемы солнечной цикличности. Санкт-Петербург, 1997. С. 139-143.
52. *Makarenko N.G., Karimova L.M., Novak M.* Dynamics of Solar magnetic fields from Synoptic charts // *Emergent Nature. Patterns, Growth and Scaling in the Sciences.* World Scientific, 2001. P. 197-207.
53. *Макаренко Н.Г.* Геометрия и топология случайных полей в физике Солнца // *Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца.* 2001. Вып. 113. С. 202-213.
54. *Dics C.* Estimating invariants of noisy attractors // *Phys.Rev. E.* 1996. Vol. 53, № 5. P. R4263-R4266.
55. *Mundt M.D., Maguire II W.B., Chase R.P.R.* Chaos in the sunspot Cycles: analysis and prediction // *J.Geophys.Res.* Vol.96, № A2. P. 1705-1716.
56. *Serre T., Nesme-Ribes E.* Nonlinear analysis of solar cycles // *Astron. Astrophys.* 2000. Vol. 360. P. 319-330.
57. *Mordvinov A.V., Salakhutdinova I.I., Plyusnina L.A., Makarenko N.G., Karimova L.M.* The topology of background magnetic fields and solar flare activity // *Solar Physics.* 2002. Vol. 211. P. 241-253.
58. *Lawrence J.K., Cadavid A.C., Ruzmaikin A.A.* On the multifractal distribution of Solar magnetic fields // *Astrophys.J.* 1996. Vol. 465. P. 425-435.
59. *Riedi R.H.* Multifractal Processes // *Long range dependence: theory and applications.* Eds. Doukhan, Oppenheim and Taqqu, Birkhauser. 2002. P. 625-715.
60. *Макаренко Н.Г., Каримова Л.* Анализ глобального магнитного поля Солнца методами математической морфологии и вычислительной топологии // *Физика Солнца и звезд.* Элиста, 2003. С. 1-59.

*Институт математики,
Алматы, Казахстан*

Поступила в редакцию 20.12.2004

TIME SERIES FROM GEOMETRY AND TOPOLOGY OF SPATIO-TEMPORAL CHAOS

N.G. Makarenko

The transformation of geometry and topology of 2D patterns into scalar time series with the help of the mathematical morphology and computational topology methods are considered. The approaches are illustrated by the example of the solar magnetic field investigation.



Макаренко Николай Григорьевич – 1945 года рождения. Окончил Свердловский государственный университет по специальности «астрономия», кандидат физико-математических наук. Ведущий научный сотрудник, руководитель группы в лаборатории компьютерного моделирования Института математики (Алматы, Казахстан). Член правления Российской Ассоциации по нейронной информатике. Область научных интересов: фрактальная геометрия, вычислительная топология, детерминированный хаос, нейронные сети, физика Солнца. Имеет более 50 научных публикаций.

E-mail: chaos@math.kz



ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЯХ: ЧТО ЭТО ТАКОЕ?*

П.С. Ланда

- Дается краткое описание свойств турбулентных течений в затопленных дозвуковых струях. На начальном участке струи, где турбулентные пульсации достаточно малы, для расчетов процессов в струе используется метод Крылова – Боголюбова. Показано, что результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Понятие турбулентности включает в себя множество самых различных аспектов. Часто этим термином называют все явления динамического хаоса, часто любые случайные волны в сплошных средах, даже вызванные какими-либо внешними случайными источниками. Чтобы избежать неопределенности, в этой работе рассматривается только гидродинамическая турбулентность. Но и она бывает разная. Существует так называемая развитая турбулентность, которую можно охарактеризовать рядом универсальных закономерностей. Пионерами работ в этой области являются А.Н. Колмогоров и А.М. Обухова [1–4], а их продолжателями — И. Прокаччия, В.С. Львов и др. [5, 6]. Но с точки зрения теории колебаний и нелинейной динамики более интересным является переход от ламинарного течения к турбулентному, причины этого перехода и процесс развития турбулентности на начальном участке. Известно, что турбулентность в потоках жидкости или газа возникает при увеличении числа Рейнольдса, пропорционального скорости потока и обратно пропорционально вязкости. Первые экспериментальные работы по турбулентности были выполнены именно в этом русле [7, 8]. Проблемой устойчивости ламинарного течения жидкости занимались такие выдающиеся ученые как В. Гайзенберг [9] и Л.Д. Ландау [10]. Однако их результаты носили скорее математический характер. Из них невозможно сделать заключение о механизме возникающей неустойчивости. Широко распро-

*Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия

страненный в последние годы взгляд на возникновение турбулентности как на возбуждение автоколебаний верен только в исключительных случаях, когда в потоке имеется обратная связь. Как правило, такая связь отсутствует, вследствие чего автоколебания возбудиться не могут даже при наличии сильной неустойчивости. Здесь существенно, что неустойчивость в жидкости имеет конвективный характер, а не абсолютный. Отсюда следует, что причиной перехода к турбулентности является не возбуждение автоколебаний, а некий «фазовый переход» [11], вызванный сильным усилением слабого шума, всегда имеющегося в любой системе. В результате такого перехода система может перейти в качественно новое состояние, которое как раз и представляет собой турбулентное состояние.

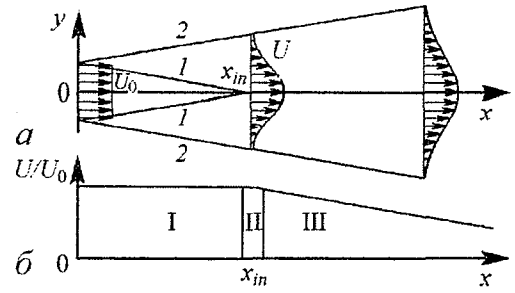
Такой переход легко может быть прослежен на примере струйных потоков. В отличие от течений в каналах, струйные потоки бывают ламинарными только при очень малых числах Рейнольдса. В широком диапазоне чисел Рейнольдса так называемые гидродинамические волны, рожденные очень слабыми случайными источниками во входном сечении струи, усиливаются и распространяются вниз по потоку со скоростью порядка скорости струи. Частотный спектр этих волн является весьма широким. Однако по мере распространения спектр гидродинамических волн существенно сужается, и на фоне этих случайных волн рождаются сравнительно крупномасштабные структуры — вихри, которые получили название когерентных структур. Образование таких структур сопровождается резким усилением интенсивности пульсаций скорости, что и можно трактовать как фазовый переход. Конечно, этот переход не является резко выраженным, как, например, в нелинейном осцилляторе с чисто мультипликативным шумом [12]. Однако, как показали наши исследования, существует глубокая аналогия между процессами в таком осцилляторе и в струях.

Интересно, что гидродинамические волны, взаимодействуя с каким-либо препятствием или неоднородностью, не испытывают простого отражения, а индуцируют акустические волны, распространяющиеся вверх по потоку. В свою очередь, акустические волны, взаимодействуя с препятствием или неоднородностью, индуцируют гидродинамические волны, распространяющиеся вниз по потоку. Безусловно, в этом заключен механизм некоторой обратной связи. Однако эта обратная связь в свободных струях является нелинейной и довольно слабой. Она не может не только вызвать самовозбуждение автоколебаний, но и поддерживать уже возбужденные автоколебания. Только в струях, взаимодействующих с жесткими препятствиями, например, в струях, ударяющихся об экран (так называемые импактные струи) [13], такое возбуждение автоколебаний имеет место.

Вытекая из сопла, струя жидкости всегда заметно расширяется. Это связано с тем фактом, что, благодаря вязкости, соседние слои жидкости все больше вовлекаются в поток. Профиль средней скорости существенно изменяется при удалении от сопла. Если вблизи сопла он является почти прямоугольным, то дальше он постепенно становится колоколообразным. Уширение струи и изменение профиля средней скорости проиллюстрировано на рис. 1.

Так как вблизи сопла, из которого вытекает струя, флуктуации скорости являются достаточно малыми, для расчета перехода к турбулентности можно использовать квазилинейные методы, в частности, метод Крылова – Боголюбова [14]. Мы рассматриваем плоскую струю и используем в качестве исходных двумерные уравнения Навье – Стокса для функции тока $\Psi(t, x, y)$ и завихренности $\tilde{\Omega}(t, x, y)$. В без-

Рис. 1. *a* — схематическое изображение расходящейся свободной струи, иллюстрирующее изменение ее средней скорости и уширение пограничного слоя (линии 1, 2 соответствуют внутренней и внешней границам пограничного слоя); *b* — схематическая зависимость относительной средней скорости U/U_0 вдоль оси струи от относительного расстояния x от выходного отверстия сопла.



размерных координатах они имеют вид

$$\tilde{\Omega}(t, x, y) = \Delta \Psi(t, x, y), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\Omega}(t, x, y)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi(t, x, y)}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\Omega}(t, x, y)}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial \Psi(t, x, y)}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\Omega}(t, x, y)}{\partial x} - \frac{2}{\text{Re}} \Delta \tilde{\Omega}(t, x, y) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где Δ — оператор Лапласа, $\text{Re} = 2U_0 d/\nu$ — число Рейнольдса, U_0 — средняя скорость в центре сопла. Заметим, что при таком выборе безразмерных переменных круговые частоты $\omega = 2\pi f$ измеряются в единицах $S = \omega d/U_0 \equiv \pi \text{St}$, где $\text{St} = 2fd/U_0$ — число Струхала.

В соответствии с нашими представлениями о природе турбулентности в струях, возникновение турбулентных пульсаций вызвано, главным образом, случайными возмущениями на выходе сопла. В большинстве работ, посвященных устойчивости этих малых возмущений [15–17], авторы представляют решение в виде суммы средних значений и малых отклонений от средних. По нашему мнению, эта процедура неудачна по двум причинам: во-первых, точные уравнения для средних значений неизвестны, а во-вторых, случайные возмущения вносят существенный вклад в средние значения. Поэтому мы представляем решение уравнений (1), (2) в виде суммы динамических и случайных составляющих. Пренебрегая случайными возмущениями везде, кроме выходного сечения сопла, мы полагаем

$$U(t, 0, y) = u_d(0, y) + \xi_1(t, y), \quad V(t, 0, y) = v_d(0, y) + \xi_2(t, y), \quad (3)$$

$$U(t, x, y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V(t, x, y) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

— продольная и поперечная скорости течения, $u_d(0, y)$ и $v_d(0, y)$ — динамические составляющие скорости на выходе из сопла, $\xi_1(t, y)$ и $\xi_2(t, y)$ — случайные возмущения. Из уравнений (1), (2) следует, что динамические составляющие $u_d(x, y)$,

$v_d(x, y)$ и $\Omega_d(x, y)$ описываются уравнениями

$$\Omega_d(x, y) = \frac{\partial u_d(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial v_d(x, y)}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_d(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v_d(x, y)}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$u_d(x, y) \frac{\partial \Omega_d(x, y)}{\partial x} + v_d(x, y) \frac{\partial \Omega_d(x, y)}{\partial y} - \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega_d(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_d(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (6)$$

Поскольку аналитическое решение этих уравнений невозможно, мы задали $u_d(x, y)$ в форме

$$u_d(x, y) = \frac{1}{1 + \tanh(q/\delta_{00} + r_0)} \left[1 - \tanh \left(q \frac{|y| - 1}{\delta_0(x)} - r(x) \right) \right], \quad (7)$$

где $\delta_0(x)$ и $r(x)$ — неизвестные функции x , q — неизвестная константа, $\delta_0(x)$ — относительная толщина пограничного слоя, $\delta_{00} = \delta_0(0)$, $r_0 = r(0)$. В случае ламинарного истечения из сопла можно положить $\delta_{00} = 1/(b_0\sqrt{\text{Re}})$, где b_0 — некоторая постоянная.

Толщины внутренней и внешней частей пограничного слоя ($\delta_1(x)$ и $\delta_2(x)$) определяются соотношениями

$$u_d(x, 1 - \delta_1(x)) = \alpha, \quad u_d(x, 1 + \delta_2(x)) = 1 - \alpha, \quad (8)$$

где α — число, близкое к 1. Как следует из (7) и (8),

$$q \frac{\delta_1(x)}{\delta_0(x)} + r(x) = \text{arc tanh}(2\alpha - 1), \quad q \frac{\delta_2(x)}{\delta_0(x)} - r(x) = \text{arc tanh}(2\alpha - 1). \quad (9)$$

Складывая выражения (9), находим связь между q и α :

$$q = 2 \text{arc tanh}(2\alpha - 1). \quad (10)$$

Например, при $\alpha = 0.95$ имеем $q \approx 3$. Подставляя (10) в (9), находим

$$\frac{\delta_1(x)}{\delta_0(x)} = \frac{1}{2} - \frac{r(x)}{q}, \quad \frac{\delta_2(x)}{\delta_0(x)} = \frac{1}{2} + \frac{r(x)}{q}. \quad (11)$$

Чтобы найти неизвестные функции в выражении (7), мы используем приближенные законы сохранения для потоков импульса и энергии. Обычно такие законы выводятся для средних значений этих потоков, исходя из уравнения Рейнольдса [18, 19]. Поэтому они включают в себя так называемую турбулентную вязкость. Мы выведем их исходя из уравнений (4)–(6) для динамических составляющих. С этой целью мы преобразуем уравнения (4)–(6) следующим образом. Подставляя $\Omega_d(x, y)$ из уравнения (4) в уравнение (6) и принимая во внимание, что на начальном участке струи производные $\partial^2 u_d/\partial x^2$ и $\partial^2 v_d/\partial x^2$ пренебрежимо малы, получаем

$$u_d(x, y) \frac{\partial^2 u_d(x, y)}{\partial x \partial y} + v_d(x, y) \frac{\partial^2 u_d(x, y)}{\partial y^2} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial^3 u_d(x, y)}{\partial y^3} = 0. \quad (12)$$

Учитывая уравнение непрерывности (5), перепишем уравнение (12) в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_d^2(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial (u_d(x, y)v_d(x, y))}{\partial y} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_d(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (13)$$

Интегрируя (13) по y , получаем следующее приближенное уравнение:

$$\frac{\partial u_d^2(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial (u_d(x, y)v_d(x, y))}{\partial y} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_d(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (14)$$

Закон сохранения для потока импульса находится путем интегрирования уравнения (14) по y от $-\infty$ до ∞ с учетом того, что $u_d(x, \pm\infty) = 0$ и $\partial u_d(x, \pm\infty)/\partial y = 0$. Таким образом, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u_d^2(x, y) dy = 0. \quad (15)$$

Чтобы вывести закон сохранения для динамической составляющей потока энергии, умножим уравнение (14) на $2u_d(x, y)$ и преобразуем его к виду

$$\frac{\partial u_d^3}{\partial x} + \frac{\partial (u_d^2 v_d)}{\partial y} = \frac{4}{\text{Re}} u_d \frac{\partial^2 u_d}{\partial y^2}. \quad (16)$$

Интегрируя затем (16) по y от $-\infty$ до ∞ и принимая во внимание указанные выше граничные условия, находим

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u_d^3(x, y) dy = -\frac{4}{\text{Re}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u_d(x, y)}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (17)$$

Так как $u_d(x, y)$ является четной функцией y , из (15) и (17) получаем следующие приближенные уравнения:

$$\int_0^{\infty} u_d^2(x, y) dy = \int_0^{\infty} u_d^2(0, y) dy, \quad (18)$$

$$3 \int_0^{\infty} u_d^2(x, y) \frac{\partial u_d(x, y)}{\partial x} dy = -\frac{4}{\text{Re}} \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial u_d(x, y)}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (19)$$

Подставляя (7) в (18) и учитывая, что

$$\int_0^{\infty} u_d^2(0, y) dy \approx 1,$$

находим соотношение между $r(x)$ и $\delta_0(x)$:

$$\ln \left[2 \cosh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r(x) \right) \right] - \frac{q}{\delta_0(x)} + r(x) - \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r(x) \right) \right] = 0. \quad (20)$$

На участке струи, где выполняется условие

$$\frac{q}{\delta_0(x)} \gg 1, \quad (21)$$

соотношение (20) сводится к $2r(x) \approx 1$, то есть $r(x) \approx r_0 = 0.5$. Отсюда и из (13), (11) следует, что

$$\delta_1(x) \approx \frac{\delta_0(x)}{3}, \quad \delta_2(x) \approx \frac{2\delta_0(x)}{3}. \quad (22)$$

Подставляя (7) в (19) и принимая во внимание (20), мы находим дифференциальное уравнение для $\delta_0(x)$:

$$\begin{aligned} & \left\{ 5 \tanh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) - 4 - \cosh^{-2} \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) - \frac{2q}{\delta_0(x)} \left[1 - \tanh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{4} \left(3 + \tanh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) \right) \cosh^{-2} \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) \right] \right\} \frac{d\delta_0(x)}{dx} = \\ & = \frac{4q^2}{3\text{Re}\delta_0(x)} \left[1 + \tanh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) \right] \times \\ & \times \left[1 + \tanh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) + \cosh^{-2} \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) \right]. \quad (23) \end{aligned}$$

Аналитически решение этого уравнения можно найти только при условии (21). При этом условии уравнение (23) принимает вид

$$\frac{d\delta_0(x)}{dx} = \frac{16q^2}{3\text{Re}\delta_0(x)}, \quad (24)$$

откуда следует

$$\delta_0(x) = \sqrt{\delta_{00}^2 + 2kx}, \quad \frac{d\delta_0(x)}{dx} = \frac{k}{\delta_0(x)}, \quad (25)$$

где $k = 16q^2/(3\text{Re})$.

Выражения для $v_d(x, y)$ и $\Omega_d(x, y)$ могут быть найдены путем решения уравнений (4), (5). В результате находим

$$\begin{aligned} v_d(x, y) = & - \frac{16q\text{sign } y}{3\text{Re}\delta_0(x) \left(1 + \tanh(q/\delta_{00} + r_0) \right)} \times \\ & \times \left[\frac{q(|y| - 1)}{\delta_0(x)} \tanh \left(\frac{q(|y| - 1)}{\delta_0(x)} - r_0 \right) - \right. \\ & \left. - \frac{q}{\delta_0(x)} \tanh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) - \ln \frac{\cosh \left(q(|y| - 1)/\delta_0(x) - r_0 \right)}{\cosh \left(q/\delta_0(x) + r_0 \right)} \right], \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_d(x, y) = & -\frac{q \operatorname{sign} y}{\delta_0(x) \left(1 + \tanh(q/\delta_{00} + r_0)\right)} \times \\
& \times \left\{ \left(1 + \frac{256q^4(|y| - 1)^2}{9\delta_0^4(x)\operatorname{Re}^2}\right) \cosh^{-2}\left(\frac{q(|y| - 1)}{\delta_0(x)} - r_0\right) - \right. \\
& -\frac{256q^2}{9\delta_0^2(x)\operatorname{Re}^2} \left[\frac{q^2}{\delta_0^2(x)} \cosh^{-2}\left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0\right) - \frac{q}{\delta_0(x)} \left((|y| - 1) \tanh\left(\frac{q(|y| - 1)}{\delta_0(x)} - r_0\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \tanh\left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0\right)\right) + \ln \frac{\cosh\left(q(|y| - 1)/\delta_0(x) - r_0\right)}{\cosh\left(q/\delta_0(x) + r_0\right)} \right] \left. \right\}. \quad (27)
\end{aligned}$$

Подставляя далее в уравнения (1), (2)

$$U(t, x, y) = u_d(x, y) + \frac{\partial \psi(t, x, y)}{\partial y}, \quad V(t, x, y) = v_d(x, y) - \frac{\partial \psi(t, x, y)}{\partial x}, \quad (28)$$

$$\tilde{\Omega}(t, x, y) = \Omega_d(x, y) + \Omega(t, x, y)$$

и учитывая (4)–(6), находим уравнения для стохастических компонент $\psi(t, x, y)$ и $\Omega(t, x, y)$, которые запишем в виде

$$\Omega - \Delta \psi = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u_d(x, y) \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v_d(x, y) \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \Omega_{dy}(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Omega_{dx}(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2}{\operatorname{Re}} \Delta \Omega = \\
= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad (30)
\end{aligned}$$

где

$$\Omega_{dx}(x, y) = \frac{\partial \Omega_d(x, y)}{\partial x}, \quad \Omega_{dy}(x, y) = \frac{\partial \Omega_d(x, y)}{\partial y}.$$

Согласно (3), граничные условия для уравнений (29), (30) имеют вид

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{x=0} = \xi_1(t, y), \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0} = -\xi_2(t, y). \quad (31)$$

Уравнения (29), (30) с граничными условиями (31) мы решаем методом Крылова – Боголюбова для распределенных систем [20]. В нулевом приближении мы получаем следующее уравнение для стохастической компоненты функции тока:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial t} + u_d(x, y) \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} + v_d(x, y) \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} - \\
- \Omega_{dy}(x, y) \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \Omega_{dx}(x, y) \frac{\partial \psi_0}{\partial y} - \frac{2}{\operatorname{Re}} \Delta \Delta \psi_0 = 0. \quad (32)
\end{aligned}$$

Частное решение уравнения (32) ищем в виде суммы бегущих волн частоты S с медленно меняющимся волновым числом $Q(S, x)$:

$$\psi_0(t, x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(S)}(x, y) \exp \left[i \left(St - \int_0^x Q(S, x) dx \right) \right] dS. \quad (33)$$

Принимая во внимание, что струя расширяется медленно, функцию $f^{(S)}(x, y)$ и волновое число $Q(S, x)$ можно представить в виде ряда по некоторому условному малому параметру $\mu \sim 1/\sqrt{\text{Re}}$:

$$f^{(S)}(x, y) = f_0(S, x, y) + \mu f_1(S, x, y) + \dots,$$

$$Q(S, x) = Q_0(S, x) + \mu Q_1(S, x) + \dots, \quad (34)$$

где $f_0(S, x, y)$, $f_1(S, x, y)$, \dots — неизвестные функции, которые (вместе со своими производными) должны обращаться в нуль при $y = \pm\infty$.

Подставляя (33), с учетом (34), в уравнение (32) и сохраняя члены, содержащие только первые производные по x , получаем для функций $f_0(S, x, y)$ и $f_1(S, x, y)$ следующие уравнения:

$$L_0(Q_0)f_0 = 0, \quad (35)$$

$$L_0(Q_0)f_1 = iQ_1L_1(Q_0)f_0 - L_2(Q_0)f_0, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} L_0(Q_0) = & i(S - u_d(x, y)Q_0) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - Q_0^2 \right) + v_d(x, y) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} - Q_0^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) + \\ & + iQ_0 \Omega_{dy}(x, y) + \Omega_{dx}(x, y) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} - 2Q_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + Q_0^4 \right), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} L_1(Q_0) = & u_d(x, y) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 3Q_0^2 \right) + 2SQ_0 - 2iQ_0v_d(x, y) \frac{\partial}{\partial y} - \\ & - \Omega_{dy}(x, y) + \frac{8iQ_0}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - Q_0^2 \right), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} L_2(Q_0) = & S \left(2Q_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial x} \right) + u_d(x, y) \left[\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - 3Q_0 \left(Q_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial x} \right) \right] - \\ & - iv_d(x, y) \left(2Q_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Q_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) - \Omega_{dy}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \\ & + \frac{4i}{\text{Re}} \left[2Q_0 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial Q_0}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - Q_0^2 \left(2Q_0 \frac{\partial}{\partial x} + 3 \frac{\partial Q_0}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Уравнение (35) с указанными выше граничными условиями описывает несамосопряженную краевую задачу, где Q_0 играет роль собственного значения. Подобные краевые задачи, но на конечном интервале, решались М.В. Келдышем [21]. Согласно теореме Фредгольма для линейных краевых задач, описываемых неоднородными уравнениями, уравнение (36) имеет нетривиальное решение только при условии

$$iQ_1 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\chi}(S, x, y) L_1(Q_0) f_0(S, x, y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\chi}(S, x, y) L_2(Q_0) f_0(S, x, y) dy = 0, \quad (40)$$

где $\bar{\chi}(S, x, y)$ — комплексно-сопряженная собственная функция сопряженной краевой задачи, описываемой уравнением:

$$i \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - Q_0^2 \right) \left[(S - u_d(x, y) Q_0) \bar{\chi} \right] - \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} - Q_0^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) (v_d(x, y) \bar{\chi}) + \\ + i Q_0 \Omega_{dy}(x, y) \bar{\chi} - \frac{\partial (\Omega_{dx}(x, y) \bar{\chi})}{\partial y} - \frac{2}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^4 \bar{\chi}}{\partial y^4} - 2Q_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial y^2} + Q_0^4 \bar{\chi} \right) = 0. \quad (41)$$

Условие (40) позволяет найти поправку $Q_1(S, x)$ к собственному значению $Q_0(S, x)$.

Действительная часть собственного значения $Q(S, x)$ равна реальному волновому числу $K(S, x)$, которое позволяет найти фазовую скорость волны, а мнимая часть $Q(S, x)$ определяет коэффициент усиления волны $\Gamma(S, x)$. Найденные таким образом зависимости Γ от S для ряда значений x показаны на рис. 2. Мы видим, что диапазон частот (в числах Струхали), в котором происходит усиление гидродинамических волн, во-первых, существенно сужается при удалении от сопла, а во-вторых, значительно сдвигается в низкочастотную область.

Полученные нами результаты дают хорошее качественное согласие с известными экспериментальными данными и позволяют объяснить многие наблюдаемые явления. При этом оказывается, что часто в объяснениях, даваемых экспериментаторами, причина принимается за следствие и наоборот. Характер зависимостей коэффициента усиления гидродинамических волн от частоты и расстояния от сопла позволяет сделать заключение о возможности моделирования процессов в струе цепочкой нелинейных осцилляторов и выбрать параметры этой модели.

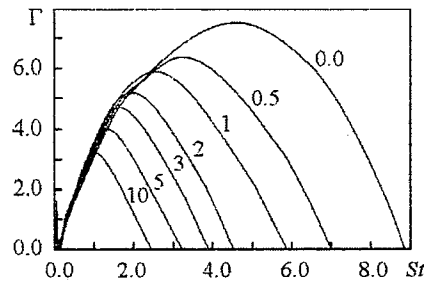


Рис. 2. Зависимости коэффициента усиления Γ гидродинамических волн от числа Струхали для разных расстояний от сопла. Значение безразмерного расстояния x указано возле соответствующей кривой

Библиографический список

1. *Бовшверов В.М., Красильников В.Н.* Предварительные результаты акустического зондирования атмосферы монохроматическим лучом // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 44–46.
2. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299–303.
3. *Колмогоров А.Н.* Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // ДАН СССР. 1941. Т. 32. С. 19–21.
4. *Обухов А.М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока // ДАН СССР. 1941. Т. 32. С. 22–24.
5. *Segel D., L'vov V.S., Procaccia I.* Extended self-similarity in turbulent systems: an analytically solvable example // Phys. Rev. Letters. 1996. Vol. 76. P. 1828.
6. *L'vov V.S., Procaccia I.* Towards a nonperturbative theory of hydrodynamic turbulence: fusion rules, exact bridge relations and anomalous scaling functions // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 6268.
7. *Hagen G.* Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren // Pogg. Ann. 1839. Vol. 46. P. 423.
8. *Reynolds O.* An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1883. Vol. 174. P. 935.
9. *Heisenberg W.* Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen // Ann. Phys. 1924. Vol. 74. P. 577.
10. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44. С. 339–342.
11. *Ланда П.С.* Возникновение турбулентности в незамкнутых течениях жидкости как неравновесный шумоиндуцированный фазовый переход второго рода // ЖТФ. 1998. Т. 68. С. 31.
12. *Ланда П.С., Заикин А.А.* Неравновесные индуцированные шумом фазовые переходы в простых системах // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 358.
13. *Chih-Ming Ho, Nosseir N.S.* Dynamics of an impinging jet 1. The feedback phenomenon // J. Fluid Mech. 1981. Vol. 105. P. 1192.
14. *Landa P.S., McClintock P.V.E.* Development of turbulence in subsonic submerged jets // Phys. Rep. 2004. Vol. 397. P. 1.
15. *Crighton D.G., Gaster M.* Stability of slowly diverging jet flow. // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 77. P. 397.
16. *Plaschko P.* Helical instabilities of slowly diverging jets // J. Fluid Mech. 1979. Vol. 92. P. 209.
17. *Michalke A.* Survey on jet instability theory // Progr. Aerosp. Sci. 1984. Vol. 21. P. 159.
18. *Гиневский А.С.* Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиноведение, 1969.
19. *Белоцерковский С.М., Гиневский А.С.* Моделирование турбулентных струй и следов методом дискретных вихрей. М.: Наука, 1995.

20. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983.
21. Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // ДАН СССР. 1951. Т. 77. С. 11–14.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию 25.12.2004

TURBULENCE IN JET FLOWS: WHAT IS IT?

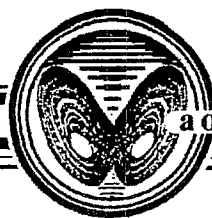
P.S. Landa

Brief description of the properties of turbulent flows in submerged subsonic jets is given. Within the jet's initial part, where turbulent pulsations are sufficiently small, the asymptotic Krylov–Bogolyubov method is used for calculating of the jet processes. It is shown that the results of the calculations are in good coincidence with experimental data.



Ланда Полина Соломоновна – родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий сотрудник МГУ. Область научных интересов - теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор пяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», выпущенной в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика».

E-mail: landa@phys.msu.su



ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В ТРЕХМЕРНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЕ С ГРУППОЙ СИММЕТРИИ D_2 *

А.И. Никифоров, Д.С. Рябов, Г.М. Чечин

Ранее нами были найдены все возможные трехмерные диссипативные системы с квадратичными нелинейностями, которые являются инвариантными относительно одной из 32 точечных групп кристаллографической симметрии и могут при этом демонстрировать хаотическое поведение при определенных значениях входящих в них параметров. Среди них была обнаружена система с симметрией D_2 , которая является более простой и более элегантной по сравнению с известными системами Лоренца и Ресслера, принадлежащими к тому же классу диссипативных систем. В настоящей работе исследуется регулярная и хаотическая динамика этой системы с акцентом на применимость общих положений теории нелинейных физических систем с дискретной симметрией.

Введение

В работе [1] Спротт поставил задачу нахождения трехмерных диссипативных систем с квадратичными нелинейностями, которые обладают хаотическими аттракторами и являются более простыми в смысле своей аналитической структуры по сравнению со ставшими уже классическими системами Лоренца [2] и Ресслера [3]. Найденные им 19 типов систем получены с помощью непосредственного машинного перебора возможных значений коэффициентов соответствующих уравнений.

В работе [4] мы поставили перед собой иную цель, а именно, нахождение диссипативных систем с квадратичными нелинейностями (или нелинейностями других типов), которые обладали бы некоторыми группами дискретной симметрии и демонстрировали бы при этом хаотическое поведение. Наряду с развитием общего метода поиска таких систем, основанного на теории представлений групп симметрии, в [4] полностью решена поставленная задача для случая трехмерных диссипативных систем с квадратичными нелинейностями, которые обладают кристаллографической

* Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия

точечной симметрией. Оказалось, что хаотические аттракторы могут наблюдаться только в системах со следующими семью группами симметрии (в обозначениях Шенфлиса):

$$C_1, C_s, C_2, C_3, S_4, D_2, C_{3v}. \quad (1)$$

В работе [4] также продемонстрировано, что разработанные ранее (см., например, работы [5, 6]) теоретико-групповые методы исследования нелинейной динамики для консервативных систем с дискретной симметрией, основанные на идее *бушей мод*, могут оказаться плодотворными и при изучении диссипативных систем с хаотическим поведением.

Среди обнаруженных в [4] систем, демонстрирующих наличие детерминированного хаоса, особый интерес представляет система с симметрией D_2 , которая, на наш взгляд, является более простой и более изящной по сравнению с системами Лоренца и Ресслера. Именно этой системе и посвящена настоящая работа.

1. Построение диссипативной системы с точечной группой симметрии D_2

Рассматриваемая диссипативная система, которую для краткости мы будем называть D_2 -системой, может быть найдена следующим простым образом. Точечная группа D_2 состоит из четырех элементов симметрии: тождественного элемента E и трех поворотов на 180° вокруг осей X , Y и Z , которые мы обозначаем символами C_2^x , C_2^y , C_2^z , соответственно. В качестве генераторов (образующих элементов) этой группы можно выбрать любые два из этих поворотов, например, C_2^x и C_2^y . В трехмерном пространстве им соответствуют следующие преобразования координат:

$$\begin{aligned} C_2^x &: (x, y, z) \rightarrow (x, -y, -z); \\ C_2^y &: (x, y, z) \rightarrow (-x, y, -z). \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим теперь трехмерную диссипативную систему с квадратичными нелинейностями общего вида и запишем ее в форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= f_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= f_3(x, y, z), \end{aligned} \quad (3)$$

где функции $f_i(x, y, z)$ являются полиномами второй степени по всем трем своим аргументам. Потребуем, чтобы под действием обоих преобразований (2) система (3) оставалась инвариантной. В результате получим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D_1 yz, \\ \dot{y} &= By + D_2 xz, \\ \dot{z} &= Cz + D_3 xy. \end{aligned} \quad (4)$$

Эта система содержит шесть произвольных параметров (A, B, C, D_1, D_2, D_3) . С помощью масштабных преобразований¹ $x = \alpha\tilde{x}$, $y = \beta\tilde{y}$, $z = \gamma\tilde{z}$, $t = \delta\tilde{t}$, перехода от старых переменных (x, y, z, t) к новым переменным $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})$, можно четыре из шести произвольных параметров системы (4) обратить в ± 1 , приведя тем самым эту систему к некоторой «канонической» форме. В результате в D_2 -системе остаются лишь два произвольных параметра, которые мы будем обозначать буквами a и b .

Можно показать [4], что хаотическое поведение будет наблюдаться в D_2 -системе не при всех ее возможных канонических формах. Например, в системе вида²

$$\dot{x} = ax + yz,$$

$$\dot{y} = by + xz,$$

$$\dot{z} = z + xy$$

хаотическое поведение невозможно, поскольку она приводится к форме Онзагера

$$\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \dot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \dot{z} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

где

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + z^2) + xyz.$$

С другой стороны, как показано в [4] с помощью непосредственного вычислительного эксперимента, D_2 -система с канонической формой вида

$$\dot{x} = -ax + yz,$$

$$\dot{y} = -by + xz, \tag{5}$$

$$\dot{z} = z - xy$$

при $a > 0$, $b > 0$ может обладать хаотическими аттракторами.

2. Аттракторы в D_2 -системе

Как известно, о хаотичности поведения динамической системы можно судить по знаку старшего показателя Ляпунова λ_{\max} (см., например, [7]). На рис. 1 черным цветом показаны области в плоскости параметров (a, b) , в которых $\lambda_{\max} > 0$ и где, следовательно, поведение нашей системы является хаотическим. Уже из этого рисунка видно, что области параметров системы (5), для которых имеет место хаотическое поведение и которые изображены черным цветом, перемежаются областями белого цвета, соответствующими регулярному движению (для них $\lambda_{\max} \leq 0$).

Более подробная картина чередования хаотического и регулярного движений рассматриваемой динамической системы проявляется на рис. 2. При его построении мы использовали симметричность изображения на рис. 1 относительно диагонали $a = b$ и проследили характер поведения системы при изменении параметров a и b вдоль прямой $a + b = 4$, перпендикулярной вышеуказанной диагонали. Рис. 2, a

¹Заметим, что эти масштабные преобразования не изменяют группу симметрии D_2 рассматриваемой системы.

²Для удобства здесь и далее новые переменные, полученные в результате масштабных преобразований, мы по-прежнему будем обозначать буквами x, y, z .

получен в результате прохождения этой прямой с некоторым малым шагом изменения параметра a , который отложен по горизонтальной оси. В силу конечности ЭТОГО шага и узости некоторых областей регулярного движения, точки, для которых вычислялись значения $\lambda_{\max}(a)$, не всегда точно попадают в такие области, в силу чего резкие скачки показателя Ляпунова вниз иногда не достигают нулевого уровня. На рис. 2, б для более узкого интервала изменения параметра a приведен график $\lambda_{\max}(a)$ с большей степенью разрешения.

Особенно наглядно чередование областей регулярного и хаотического движений видно на бифуркационной диаграмме, изображенной на рис. 3. Построена она следующим образом. По горизонтальной оси по-прежнему отложены значения параметра a вдоль выделенной нами прямой $a + b = 4$, перпендикулярной диагонали $a = b$ (см. рис. 1). По вертикальной оси отложены значения переменной $x(t)$, которые она принимает при пересечении фазовой траектории с плоскостью $y = 0$ независимо от направления этого пересечения. Как и на диаграмме логистического отображения, здесь хорошо просматривается появление в области хаоса окон регулярного движения различной ширины.

Обратим внимание на то, что на рис. 3, а при увеличении параметра a от значения 2.45 до 2.70 видны каскады бифуркаций регулярного движения, которые «постепенно» приводят к хаосу. При проходе окон регулярного движения слева направо хаотическое движение «скачком»

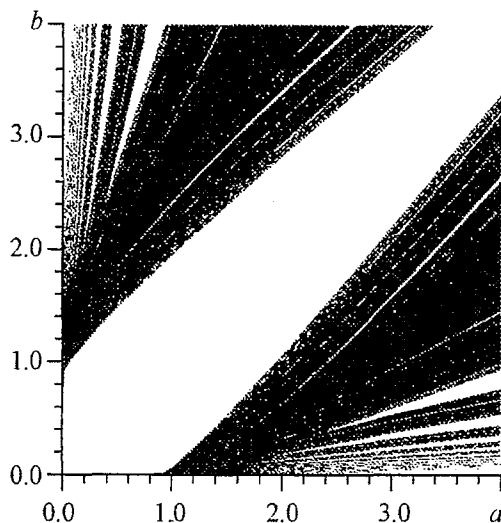


Рис. 1. Области параметров (a, b) , в которых может наблюдаться хаотическое поведение D_2 -системы (черный цвет соответствует значениям параметров, при которых $\lambda_{\max} > 0$)

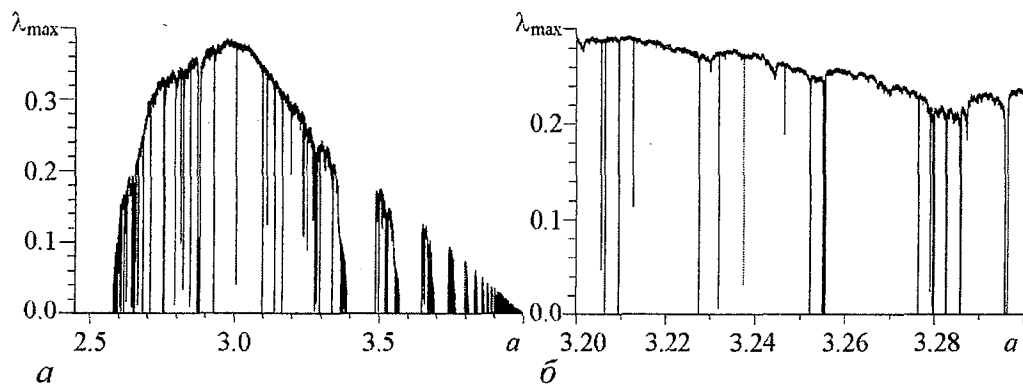


Рис. 2. Зависимость старшего показателя Ляпунова λ_{\max} от параметра a при изменении последнего вдоль прямой $a + b = 4$: $a \in [2.45, 4.0]$ (а); $a \in [3.2, 3.3]$ (б)

переходит в регулярное движение (далее наблюдается новый каскад бифуркаций и переход к новому участку хаотического движения). На рис. 3, *в* ($a \in [3.3, 4.0]$) наблюдается, в известном смысле, противоположная картина: в результате обратных

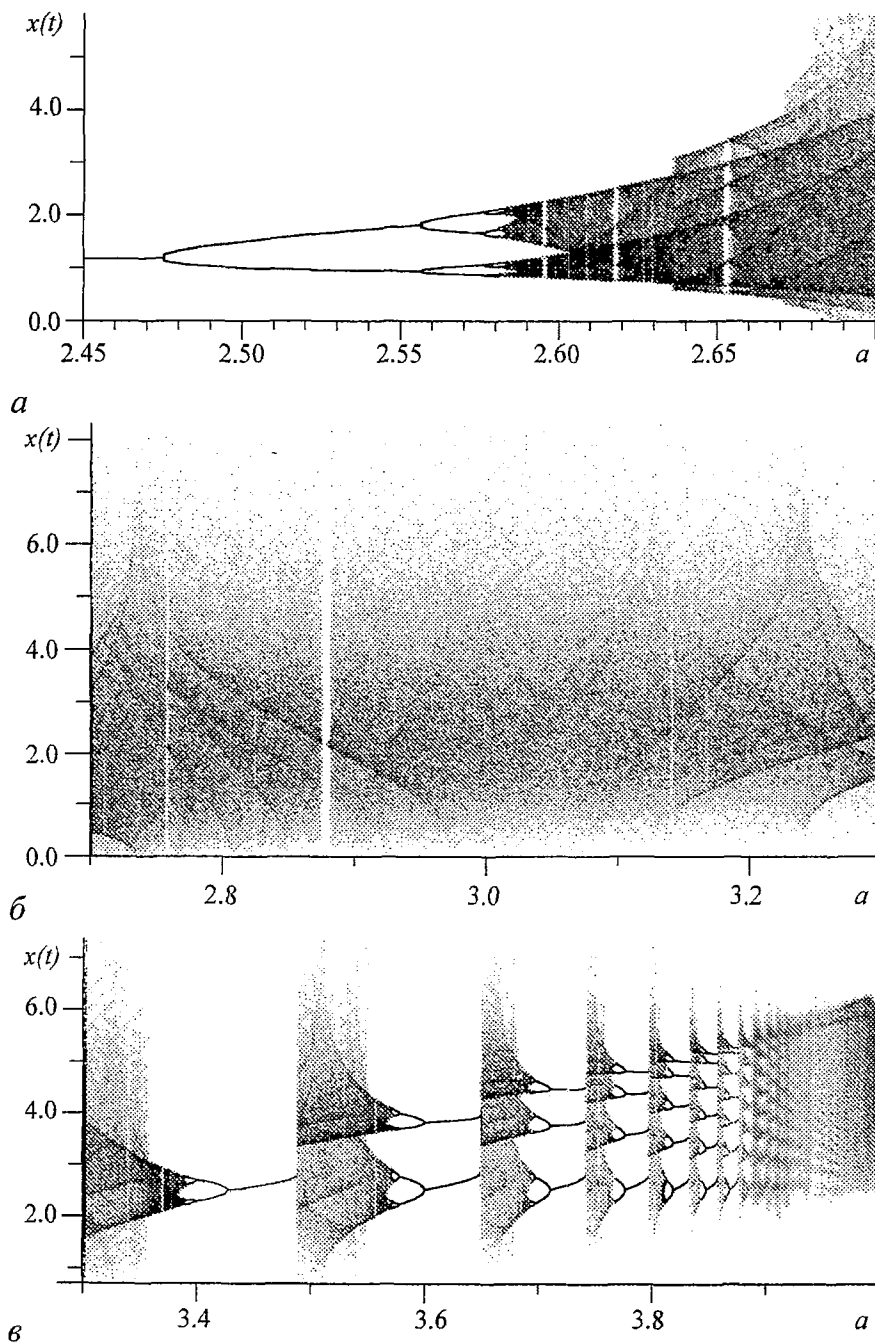


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма D_2 -системы при изменении параметров a и b вдоль прямой $a+b = 4$ для $a \in [2.45, 2.70]$ (*а*); $a \in [2.7, 3.3]$ (*б*); $a \in [3.3, 4.0]$ (*в*)

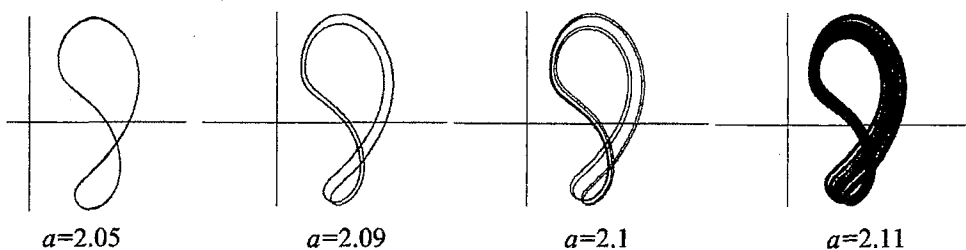


Рис. 4. Каскад бифуркаций аттракторов в проекции на плоскость YZ при увеличении параметра a от значения 2.05 до значения 2.11 при $a + b = 3$

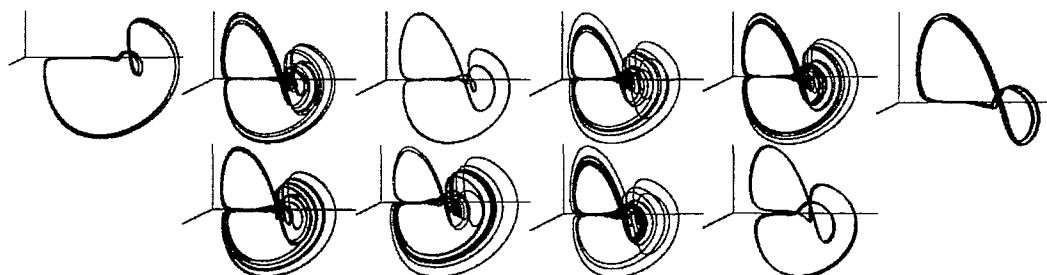


Рис. 5. Эволюция аттракторов при уменьшении параметра a от значения 2.89 до значения $a = 2.80$ с шагом 0.01 (трехмерное изображение)

бифуркаций кратность аттрактора³ понижается до некоторых минимальных величин (которые, кстати, последовательно принимают значения 1, 2, 3, 4, ...), после чего хаос возникает «скачком». На рис. 3, в также хорошо видно «сгущение» (уменьшение ширины) окон регулярного движения по мере приближения параметра a к значению 4.0.

На рис. 4 представлен каскад бифуркаций удвоения периода (в проекции на плоскость YZ) для аттракторов, возникающих при движении вдоль диагонали $a + b = 3$ для $a \in [2.05, 2.11]$, а на рис. 5 приведены трехмерные изображения аттракторов D_2 -системы при движении с шагом 0.01 вдоль той же диагонали $a + b = 3$ для значений a из интервала $[2.80, 2.89]$. С другой стороны, из рис. 1 видно, что на рассматриваемом в последнем случае интервале изменения параметра a существуют достаточно узкие, чередующиеся области хаотического и регулярного движения, что и демонстрируется на обсуждаемом сейчас рис. 5.

3. Некоторые симметричные аспекты динамики D_2 -системы

3.1. Одномерные инвариантные многообразия. При исследовании динамики систем с дискретной симметрией важную роль играют инвариантные многообразия, выделяемые подгруппами группы симметрии исходной системы [5, 6]. В рассматриваемом нами случае их нахождение тривиально – таковыми многообразиями являются координатные оси X , Y и Z , все точки которых стационарны (неподвижны) по

³Имеются в виду аттракторы для значений переменной $x(t)$, полученных описанным выше способом.

отношению к группам преобразований C_2^x , C_2^y и C_2^z , соответственно. Эти группы являются подгруппами группы D_2 (каждая из них содержит лишь один нетривиальный элемент – поворот на 180° вокруг соответствующей координатной оси⁴).

Тот факт, что вышеуказанные множества, которые мы будем обозначать символами M_X , M_Y и M_Z , являются инвариантными многообразиями в динамическом смысле, можно увидеть непосредственно из системы уравнений (5). Действительно, полагая, например, $x(t) \equiv 0$, $z(t) \equiv 0$, мы получим из (5) непротиворечивое уравнение движения для переменной $y(t)$: $\dot{y} = -by$. Таким образом, система (5) допускает решение вида $(0, y(t), 0)$, которое и определяет ось Y как инвариантное многообразие M_Y . Иными словами, решая систему (5) с начальными условиями $x(0) = 0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = 0$ и считая процедуру такого решения идеальной (абсолютно точной), мы находим, что фазовая точка в любой момент времени остается на оси Y и при этом ее динамика описывается тривиальной формулой

$$y(t) = y_0 e^{-bt}. \quad (6)$$

Однако при решении системы (5) с помощью любого численного метода судьба фазовой точки определяется не только вышеуказанными соображениями, но и *устойчивостью* инвариантного многообразия $M_Y \equiv (0, y(t), 0)$. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Для того чтобы исследовать устойчивость движения на оси Y , линеаризуем систему уравнений (5) вблизи решения $[0, y(t), 0]$, то есть будем искать ее решение в форме $[\delta_1(t), y(t), \delta_2(t)]$, предполагая, что $\|\delta_i(t)\|$ ($i = 1, 2$) являются бесконечно малыми величинами. Подставляя такую форму решения в уравнения (5) и отбрасывая член второго порядка малости во втором уравнении, приходим к системе двух уравнений относительно $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= -a\delta_1 + \gamma(t)\delta_2, \\ \dot{\delta}_2 &= \delta_2 - \gamma(t)\delta_1, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\gamma(t) = y_0 e^{-bt}$.

Общее решение полученной системы линейных дифференциальных уравнений с *переменными* коэффициентами выражается через функции Бесселя и имеет достаточно громоздкий вид. В связи с этим воспользуемся для анализа системы (7) следующим приближенным приемом. Будем считать γ не зависящей от времени функцией, каковой она на самом деле является ($\gamma(t) = y_0 e^{-bt}$), а *постоянным* параметром ($\gamma = const$), который при движении фазовой точки вдоль оси Y принимает все возможные значения на отрезке $[0, y_0]$. Тогда для каждого фиксированного значения $\gamma \in [0, y_0]$ можно провести анализ устойчивости системы (7) (которая становится системой линейных дифференциальных уравнений с *постоянными* коэффициентами) стандартным методом. Таким образом, мы представляем себе, что при своем движении фазовая точка последовательно проходит все участки оси Y , на которых характер устойчивости будет различным. Результаты такого приближенного анализа далее будут сравнены с результатами прямого численного решения «правильной» системы (7).

⁴Именно поэтому мы используем одинаковые обозначения для этого элемента и для порождаемой им группы.

Введем вектор $\vec{\delta} = [\delta_1(t), \delta_2(t)]$ и перепишем систему (7) в матричной форме

$$\dot{\vec{\delta}} = A\vec{\delta}, \quad (8)$$

где $A = \begin{pmatrix} -a & \gamma \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}$, а $\gamma = \text{const}$.

Дальнейший анализ устойчивости сводится к исследованию собственных значений матрицы A , которые следующим образом выражаются через ее след $\text{Sp } A$ и определитель $\text{Det } A$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (\text{Sp } A \pm \sqrt{D}), \quad \text{где}$$

$$D = (\text{Sp } A)^2 - 4\text{Det } A.$$

В терминах $\text{Sp } A$, $\text{Det } A$ мы приходим к хорошо известной диаграмме устойчивости, изображенной на рис. 6, *a* (см., например, [8]). При этом для определенной уравнением (8) матрицы A имеем

$$\text{Sp } A = 1 - a, \quad \text{Det } A = -a + \gamma^2, \quad (9)$$

$$D = (1 + a)^2 - 4\gamma^2.$$

Воспользуемся теперь обсуждаемой диаграммой для анализа устойчивости инвариантного многообразия M_γ для тех значений параметров системы (5), для которых получается изображенная на рис. 7, *a* гомоклиническая траектория: $a = 2.893$, $b = 0.107$. В этом случае из формул (9) мы имеем

$$\text{Sp } A = -1.893, \quad \text{Det } A = -2.893 + \gamma^2,$$

$$D = (3.893)^2 - 4\gamma^2.$$

Проведя горизонтальную линию на общей диаграмме, изображенной на рис. 6, *a*, при значении $\text{Sp } A = -1.893$, видим, что она пересекает три различные по своим свойствам устойчивости области – области седла, устойчивого узла и устойчивого фокуса, границы между которыми определяются условиями $\text{Det } A = 0$ и $D = 0$. В результате приходим к диаграмме устойчивости при изменении параметра γ , приведенной на рис. 6, *b*.

Рассмотрим теперь достаточно большое значение y_0 (например, $y \sim 10$ или $y \sim 100$) и учтем, что $\gamma = y_0 e^{-bt}$. Тогда из рис. 6, *b* ясно, что фазовая точка начинает свое движение от y_0 в сторону нуля, а фазовая траектория бесконечно приближается

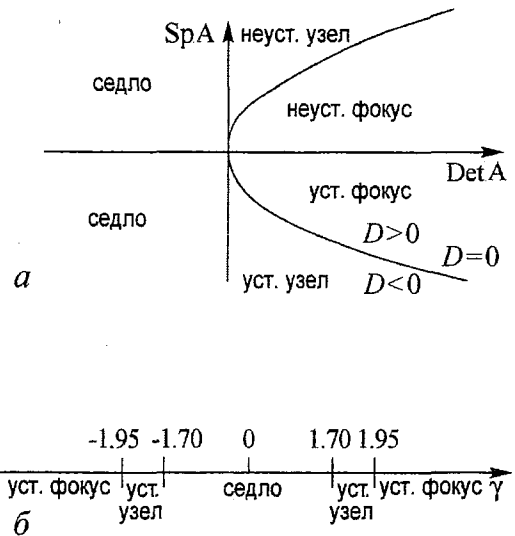


Рис. 6. *a* – общая диаграмма устойчивости двумерной системы (8) и *b* – диаграмма устойчивости по параметру γ при $a = 2.893$, $b = 0.107$

(экспоненциально, поскольку $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$) к оси Y – сначала с *накручиванием* на нее (вплоть до значения t , при котором $\gamma = 1.9465$), а потом без накручивания (до значения t , при котором $\gamma = 1.7009$). После прохождения значения $\gamma = 1.7009$ фазовая траектория попадает в область неустойчивости и удаляется от оси Y . Схематически поведение фазовой траектории вблизи инвариантного многообразия M_Y показано на рис. 7, б.

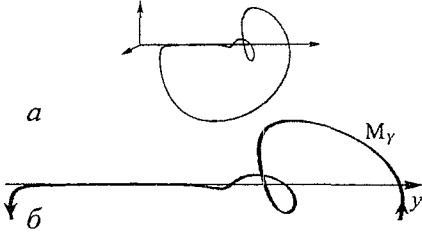


Рис. 7. «Гомоклиническая» траектория ($a = 2.893$, $b = 0.107$) и поведение фазовой траектории вблизи инвариантного многообразия M_Y .

После удаления от M_Y на значительное расстояние фазовая траектория вновь возвращается на это инвариантное многообразие, образуя некоторую петлю. В результате получается «гомоклиническая траектория»⁵, изображенная на рис. 7, а. Заметим, что в нашем случае это название не является полностью традиционным, поскольку под термином гомоклиническая траектория обычно понимается траектория, которая выходит из *особой точки* по неустойчи-

вому направлению и входит в нее же по устойчивому направлению. Рассмотренная же выше «гомоклиническая траектория» связана не с особой точкой, а с некоторым инвариантным многообразием M_Y .

Отметим также, что границы областей существования устойчивого фокуса, устойчивого узла и седла, которые были найдены нами с помощью приближенного метода, с хорошей степенью точности совпадают с результатами, полученными при непосредственном численном решении системы дифференциальных уравнений (7).

Рассмотрим теперь устойчивость инвариантных многообразий M_X и M_Z . В первом случае анализ устойчивости сводится к исследованию системы дифференциальных уравнений $\dot{\delta} = A\delta$, где $A = \begin{pmatrix} -b & \gamma \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}$ и $\gamma = x_0 e^{-at}$. Из этого следует, что можно воспользоваться полученными ранее результатами для случая M_Y , просто делая замену $a \leftrightarrow b$. В частности, для уже рассмотренного нами случая $a = 2.893$, $b = 0.107$ находим, что $\text{Sp } A = 0.893 > 0$. Тогда из рис. 6, а очевидно, что *все* точки множества M_X будут неустойчивыми (седло, неустойчивый узел или неустойчивый фокус).

Совершенно аналогично, анализ устойчивости многообразия M_Z сводится к исследованию системы $\dot{\delta} = A\delta$, где $A = \begin{pmatrix} -a & \gamma \\ \gamma & -b \end{pmatrix}$ и $\gamma = z_0 e^t$. Таким образом, $\text{Sp } A = -(a + b)$, $\text{Det } A = ab - \gamma^2$, $D = (a - b)^2 + 4\gamma^2$ и при $a = 2.893$, $b = 0.107$ мы имеем: $\text{Sp } A = -3$, $\text{Det } A = 0.30955 - \gamma^2$, $D = 7.7618 + 4\gamma^2$. С ростом t движение фазовой точки будет происходить вдоль оси Z в сторону $+\infty$ или $-\infty$ (в зависимости от знака z_0) и при этом траектория будет *прижиматься* к оси Z только для значений $\gamma \in [-0.55637, +0.55637]$, которые соответствуют устойчивому узлу (все точки оси Z , соответствующие значениям γ вне этого интервала, являются седловыми).

⁵В связи с обсуждаемыми гомоклиническими контурами заметим, что их форма от начальных условий не зависит.

3.2. Особые точки. Из условия $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0$ находим следующие пять особых точек для рассматриваемой D_2 -системы (5):

$$1 - (0, 0, 0); \quad 2 - (\mu, \nu, \mu\nu); \quad 3 - (\mu, -\nu, -\mu\nu); \\ 4 - (-\mu, \nu, -\mu\nu); \quad 5 - (-\mu, -\nu, \mu\nu),$$

где $\mu = \sqrt{b}, \nu = \sqrt{a}$.

Первая точка является началом координат. Точки 2, 4 расположены в плоскости $y = \sqrt{a}$, а точки 3, 5 – в плоскости $y = -\sqrt{a}$, причем симметрично относительно начала координат. Первая особая точка является седло-узлом, что видно непосредственно из системы (5), поскольку ее линеаризация в окрестности начала координат означает просто отброс нелинейных членов во всех уравнениях. В общем же случае, линеаризуя систему (5) в окрестности особой точки (x_0, y_0, z_0) , приходим к выводу, что для анализа характера устойчивости этой точки необходимо найти знаки вещественных частей собственных значений матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -a & z_0 & y_0 \\ z_0 & -b & x_0 \\ -y_0 & -x_0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В нашем случае достаточно проанализировать устойчивость лишь одной из четырех особых точек 2, 3, 4, 5, поскольку все они получаются друг из друга действием элементов симметрии группы D_2 . Подставляя в уравнение (10) $x_0 = \sqrt{b}, y_0 = \sqrt{a}, z_0 = \sqrt{ab}$, то есть координаты особой точки 2, и вычисляя соответствующий характеристический полином, получим

$$\lambda^3 + \lambda^2(a + b - 1) + 4ab = 0. \quad (11)$$

Характер устойчивости рассматриваемой особой точки можно определить с помощью критерия Рауса – Гурвица. Вычисляя определители, входящие в этот критерий, находим, что второй из них, $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3^6$, оказывается отрицательным: $\Delta_2 = -4ab < 0$ в случае $a > 0, b > 0$ (напомним, что хаотическое поведение системы (5) возможно лишь при таких знаках параметров a и b). Таким образом, особая точка 2 – $(\sqrt{b}, \sqrt{a}, \sqrt{ab})$, а значит, и симметрично связанные с ней точки 3, 4, 5, являются *неустойчивыми* во всей области интересующих нас параметров a и b . С учетом того, что начало координат является седло-узлом, приходим к выводу, что устойчивых особых точек в D_2 -системе при $a > 0, b > 0$ нет.

3.3. Динамические домены. Согласно общей теории нелинейных систем с дискретной симметрией [5, 6], различные динамические режимы в данной системе классифицируются по подгруппам G_j ее группы симметрии G_0 . При этом, если рассматриваемый динамический режим инвариантен относительно подгруппы $G_j \subset G_0$, то можно утверждать, что в исходной системе должно существовать вполне определенное число n «близнецов» – динамических доменов ⁷ этого режима, причем

⁶Здесь a_i ($i = 0, 1, 2, 3$) суть коэффициенты при последовательных степенях параметра λ в характеристическом уравнении (11).

⁷Этот термин заимствован из теории фазовых переходов в кристаллах.

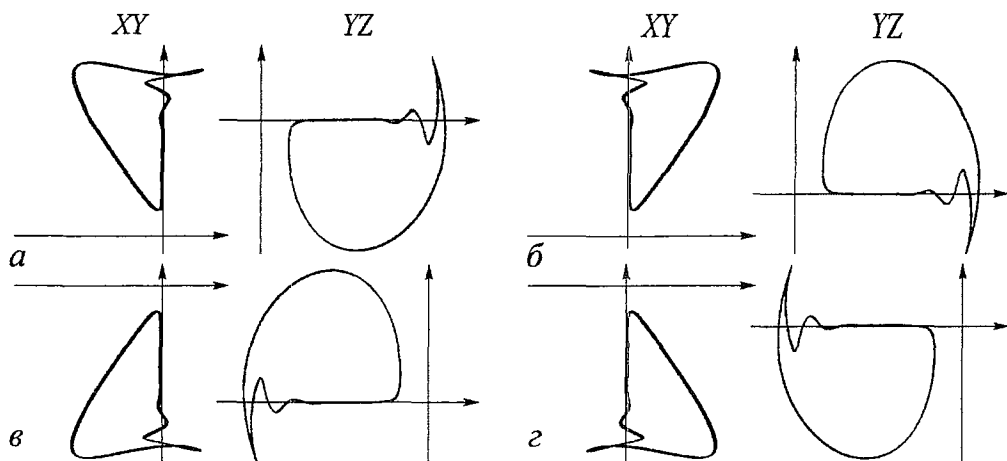


Рис. 8. Проекция «близнецов» гомоклинической траектории ($a = 2.893$, $b = 0.107$) на координатные плоскости XY (левый столбец) и YZ (правый столбец)

это число равно порядку подгруппы G_j в группе G_0 , то есть $n = \|G_0\|/\|G_j\|$ ⁸. Эти различные динамические домены получаются друг из друга за счет действия тех элементов симметрии группы G_0 , которые исчезают при понижении симметрии $G_0 \rightarrow G_j$.

В качестве группы G_0 в нашем случае выступает точечная группа D_2 , относительно которой инвариантны динамические уравнения (5). Подгруппами группы $G_0 = D_2$ являются: группа тривиальной симметрии C_1 (она состоит лишь из одного тождественного элемента), сама группа D_2 и три взаимно-сопряженные подгруппы второго порядка – C_2^x , C_2^y , C_2^z .

На рис. 7, *a* приведено трехмерное изображение гомоклинической траектории, которая некоторой своей частью «прижимается» к инвариантному многообразию M_U ($a = 2.893$, $b = 0.107$). Она была получена при различных начальных условиях, в частности, при $\{x(0) = 0.04, y(0) = 0.05, z(0) = 0.06\}$ ⁹. На рис. 8 изображены ее проекции на координатные плоскости XY и YZ .

Из рис. 8, *a* видно, что наша гомоклиническая траектория не обладает никакой нетривиальной симметрией и, следовательно, ее группа симметрии $G_j = C_1$. Порядок этой подгруппы в группе D_2 равен 4, в силу чего в фазовом пространстве D_2 -системы заведомо существуют области, в которых располагаются еще три «близнеца» рассматриваемой нами сейчас гомоклинической траектории. Проекция этих близнецов (динамических доменов) гомоклинической траектории ($a = 2.893$, $b = 0.107$) на координатные плоскости XY и YZ приведены на рис. 8, *б*, *в* и *г*, соответственно. При выборе начальных условий для их построения удобно учесть, что бассейны притяжения динамических доменов, как и сами они, переходят друг в друга под действием элементов симметрии группы D_2 , исчезнувших при понижении симметрии $G_0 \rightarrow G_j$. Например, если для построения рис. 8, *a* начальные условия имели вид $\{x(0) = 0.04, y(0) = 0.05, z(0) = 0.06\}$, то для постро-

⁸Здесь символом $\|G\|$ обозначен порядок группы G , то есть число ее элементов.

⁹Здесь и далее начальная часть траектории, описывающая «историю выхода» на данный аттрактор, то есть соответствующая переходному процессу, отброшена.

ения рис. 8, b их можно выбрать следующим образом: $\{x(0) = -0.04, y(0) = 0.05, z(0) = -0.06\}$.

При изменении параметров (a, b) в окрестности тех значений, при которых получается рассмотренная выше гомоклиническая траектория, происходят бифуркации этой траектории, приводящие, в конце концов, к возникновению хаотического аттрактора. Этот процесс иллюстрируется рис. 9, где показан такой аттрактор при $(a = 2.9, b = 0.1)$. Здесь изображен аттрактор, который порожден бифуркациями двух смежных близнецов гомоклинической траектории, соприкасающихся вдоль оси Y . Такое объединение связано с тем, что при выходе из устойчивой части инвариантного многообразия M_Y в область неустойчивости, фазовая траектория с равной вероятностью может отклониться от оси Y в *любую* сторону по отношению к оси Z . Эти отклонения при многократных обходах по кривым, близким к исследуемой нами гомоклинической траектории, действительно происходят в разные стороны, причем, последовательность оборотов (в положительном или отрицательном направлениях по отношению к оси Z) является *случайной*.

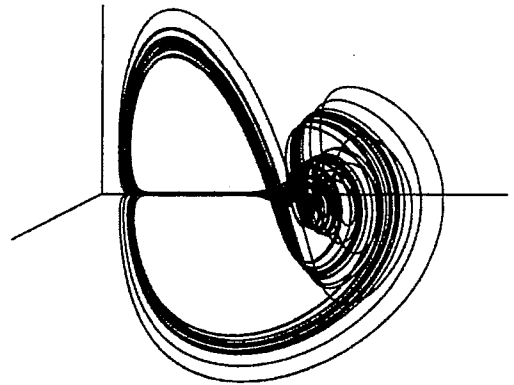


Рис. 9. Хаотический аттрактор, развивающийся из гомоклинической траектории, изображенной на рис. 7 ($a = 2.9, b = 0.1$)

Заметим, что, если рассмотреть совокупность всех доменов, каждый из которых обладает симметрией $G_j \subset G_0$, то полученное в результате множество всех аттракторов-близнецов снова имеет исходную симметрию G_0 . Это общее положение теории хорошо иллюстрируется рис. 10. Здесь показаны проекции на плоскость YZ четырех *разных* аттракторов ($a = 0.883, b = 2.117$), каждый из которых обладает лишь тривиальной симметрией C_1 (левая часть рисунка). В результате же их *наложения* получается фигура с симметрией D_2 (правая часть рисунка).

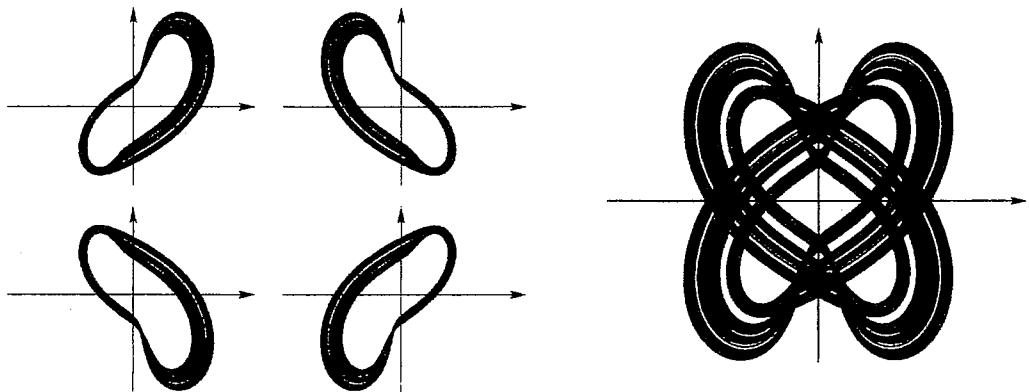


Рис. 10. Проекция на плоскость YZ «близнецов» хаотического аттрактора с симметрией C_1 ($a = 0.883, b = 2.117$) и результат их наложения друг на друга (справа)

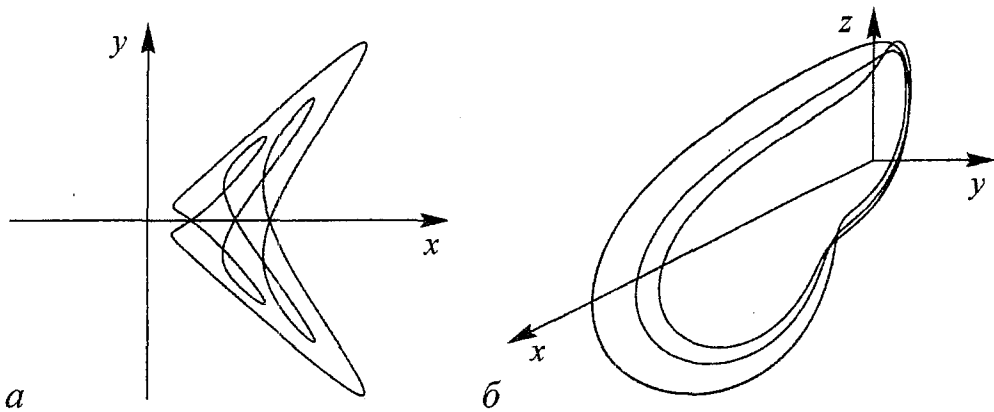


Рис. 11. Регулярный аттрактор с симметрией C_2 , соответствующий циклу 3 при $a = 0.878$, $b = 2.122$ (а) и регулярный аттрактор с симметрией C_1 , соответствующий циклу 3 при $a = 0.889$, $b = 2.111$ (б)

3.4. Симметрия аттракторов. Рассмотренный в предыдущем разделе аттрактор представлял собой гомоклиническую траекторию ($a = 2.893$, $b = 0.107$), симметрия которой характеризуется тривиальной подгруппой $C_1 \subset D_2$. Однако, как уже отмечалось, группа симметрии системы D_2 имеет в качестве подгрупп три взаимно сопряженные группы второго порядка: C_2^x , C_2^y , C_2^z . В силу этого следует ожидать,

что в рассматриваемой системе могут существовать аттракторы (регулярные и хаотические) и с такими группами симметрии. Один из регулярных аттракторов с группой симметрии C_2^x , соответствующий циклу 3, был обнаружен в одном из окон регулярного движения ($a = 0.878$, $b = 2.122$)¹⁰. Проекция этого аттрактора на плоскость XU приведена на рис. 11, а, где хорошо видна его симметрия относительно оси X .

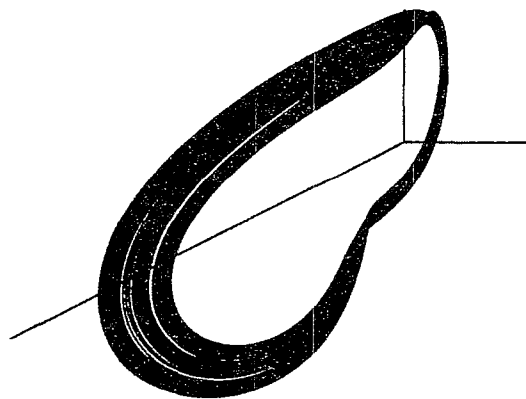


Рис. 12. Хаотический аттрактор с симметрией C_1 , развивающийся из регулярного аттрактора, приведенного на рис. 11, б, в результате каскада бифуркаций ($a = 0.89$, $b = 2.11$)

Если в случае гомоклинической траектории ($a = 2.893$, $b = 0.107$) выделенной была ось Y , то для рассматриваемого сейчас аттрактора (рис. 11, а) выделенной является ось X . Объяснение этого факта можно получить с помощью исследования устойчивости ин-

вариантных многообразий M_X и M_Y . Анализ устойчивости многообразия M_Y показывает, что при $a = 0.878$, $b = 2.122$ оно будет *всюду неустойчивым*, в то время как многообразие M_X , наоборот, при $\gamma > 1.457$ ($\gamma = x_0 e^{-at}$) является устойчивым. Очевидно, именно таким характером устойчивости многообразий M_X и M_Y объясняется расположение аттрактора на рис. 11, а вблизи оси X , которая является при этом его осью симметрии.

¹⁰ Аттрактор, соответствующий циклу 3, но обладающий симметрией C_1 , изображен на рис. 11, б ($a = 0.889$, $b = 2.111$), а развивающийся из него хаотический аттрактор при $a = 0.890$, $b = 2.110$ представлен на рис. 12.

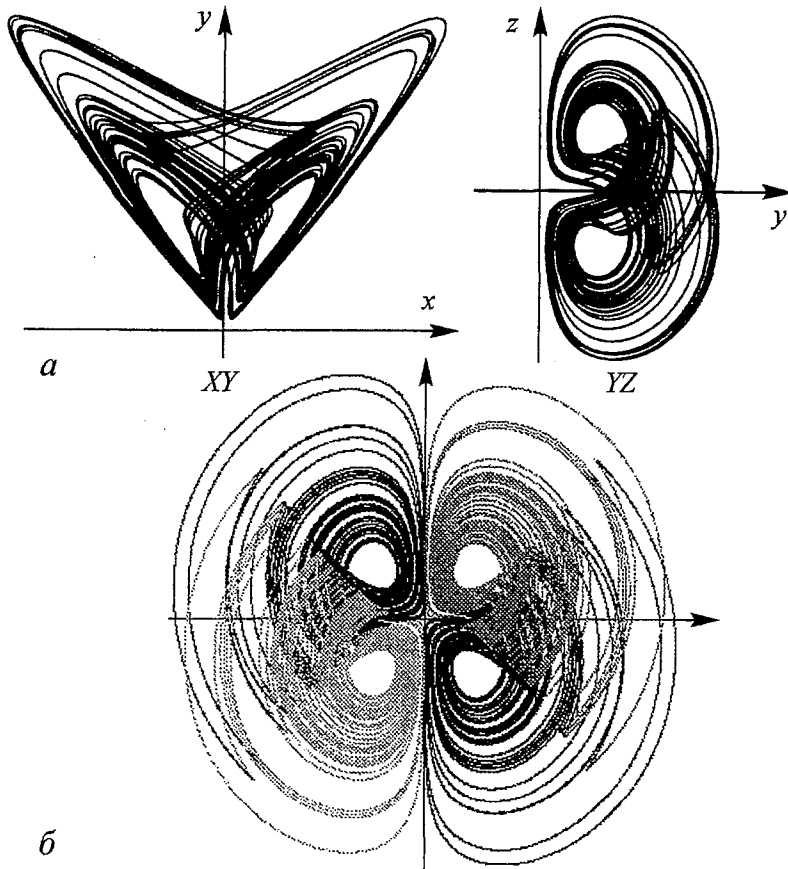


Рис. 13. Хаотический аттрактор D_2 -системы при $a = 4$, $b = 1$ (а) и оба его близнеца (б)

При $a = 4$, $b = 1$ в D_2 -системе существует хаотический аттрактор с симметрией C_2^y . Легко проверить, что в этом случае «привлекательной» вновь становится ось Y , поскольку инвариантное многообразие M_X оказывается неустойчивым, а вполне определенная часть ($\gamma > 2$) многообразия M_Y является устойчивой. Аттрактор расположен вблизи оси Y , которая является его осью симметрии, что хорошо видно из проекций этого аттрактора на плоскости XY и YZ , показанных на рис.13, а. В середине «глаз» рассматриваемого хаотического аттрактора располагаются особые точки 2 и 4, которые, как уже отмечалось, являются неустойчивыми и, следовательно, не могут принадлежать аттрактору.

Поскольку симметрия аттрактора ($a = 4$, $b = 1$) определяется точечной группой C_2^y , которая является подгруппой второго порядка группы симметрии D_2 -системы, то у этого хаотического аттрактора должен существовать один близнец, который получается действием на него элементов симметрии C_2^z (или C_2^x). Оба эти хаотические аттрактора-близнецы представлены на рис. 13, б (разумеется, каждому из них соответствует свой бассейн притяжения).

Подчеркнем, что, говоря о симметрии аттракторов, прежде всего хаотических, мы имеем в виду не только визуальную констатацию этого факта, но и проверку симметрии аттрактора с помощью соответствующей компьютерной программы, алгоритм которой описан в нашей работе [4].

Выше были приведены примеры регулярных и нерегулярных аттракторов с группами симметрии C_1 и C_2 . Исходя из общих теоретических соображений, можно ожидать, что при некоторых значениях параметров a, b может произойти бифуркация объединения (слияния) близнецов хаотических аттракторов с симметрией C_2^y в единый аттрактор с симметрией, определяемой полной группой рассматриваемой системы – $G_0 = D_2$. Тем не менее, такое объединение нам обнаружить пока что не удалось.

Разумеется, особый интерес представляют точки бифуркаций аттракторов, в которых скачком изменяется их симметрия (они являются аналогами точек фазовых переходов в кристаллах), однако исследование этого вопроса выходит за рамки настоящей статьи.

Заключение

В данной работе исследованы вопросы регулярной и нерегулярной динамики трехмерной динамической системы с квадратичными нелинейностями, уравнения которой инвариантны относительно точечной группы симметрии D_2 . Более подробное исследование этой системы предполагается провести в рамках другой работы. При этом представляется весьма перспективным использование теории хаотических аттракторов, развитой в [8], а также использование топологических методов [9, 10].

Выражаем искреннюю благодарность В.П. Сахненко за поддержку развиваемого авторами направления исследований и Н.А. Колодину за проведение ряда вычислений на начальной стадии подготовки данной статьи.

Библиографический список

1. *Sprott J.C.* Some simple chaotic flows // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol.50. P.R647.
2. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // *J. Atmos. Sci.* 1963. Vol.20. P.130.
3. *Rossler O.E.* An equation for continuous chaos // *Phys. Lett. A.* 1976. Vol.57. P.397.
4. *Chechin G.M., Ryabov D.S.* Three-dimensional chaotic flows with discrete symmetries // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol.69. P.036202.
5. *Сахненко В.П., Чечин Г.М.* Симметричные правила отбора в нелинейной динамике атомных смещений // *Докл. Акад. Наук.* 1993. Т.330. С.308.
6. *Chechin G.M., Sakhnenko V.P.* Interaction between normal modes in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry. Exact results // *Physica D.* 1998. Vol. 117. P. 43.
7. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. (Серия «Современная теория колебаний и волн»). М.: Физматлит, 2001.
8. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Новые методы хаотической динамики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 318 с.
9. *Gilmore R.* Topological analysis of chaotic dynamical systems // *Rev. Mod. Phys.* 1998. Vol.70. P.1455.
10. *Letellier C., Gilmore R.* Covering dynamical systems: twofold covers // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol.63. P.016206.

Ростовский государственный
университет

Поступила в редакцию

16.11.2004

DYNAMICAL CHAOS IN THREE-DIMENSIONAL DISSIPATIVE SYSTEM WITH D_2 -SYMMETRY GROUP

A.I. Nikiforov, D.S. Ryabov, G.M. Chechin

Earlier, we found all three-dimensional dissipative systems with quadratic nonlinearities which are invariant with respect to any of 32 point symmetry groups of crystallographic symmetry and which can demonstrate chaotic behavior for appropriate values of their pertinent parameters. Among these systems, there is one with the D_2 -symmetry group. This system seems to be more simple and more elegant than those by Lorenz and Rossler which also belong to the above mentioned class of dissipative systems. In the present paper, we investigate regular and chaotic dynamics of the D_2 -symmetry system emphasizing the usefulness of the general theory of the nonlinear dynamical systems with discrete symmetries.



Никифоров Антон Игоревич – родился в Ростове-на-Дону (1980), окончил физический факультет РГУ (2003). В настоящее время – ассистент преподавателя в университете Бригама Янга (г. Прово, шт. Юта, США). Область интересов – динамический хаос в системах с дискретной симметрией, структурные фазовые переходы, символьные вычисления.



Рябов Денис Сергеевич – родился в Москве (1982). В настоящее время является студентом 2-го года магистратуры РГУ. Область научных интересов – теоретико-групповые методы в физике, вычислительная физика.



Чечин Георгий Михайлович – родился в Новочеркасске (1937), окончил РГУ (1960), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и вычислительной физики Ростовского государственного университета. Научный руководитель студенческой лаборатории нелинейной кристаллофизики при НИИ физики РГУ. Соросовский доцент. Читает лекции по численным методам, вычислительной и нелинейной физике. Область научных интересов – теоретико-групповые методы в физике, теория фазовых переходов, нелинейная динамика и вычислительная физика. Автор около 100 научных публикаций.
E-mail: chechin@phys.rsu.ru



О ХАОТИЧЕСКОЙ ПРИРОДЕ ЗВУКОВ РЕЧИ*

Ю.В. Андреев, М.В. Коротеев

Рассматриваются отдельные фонемы с точки зрения нелинейной динамики. Проводится анализ фазовых портретов сигналов в пространстве вложения, оценка размерности и старшего показателя Ляпунова. Показано, что речевые сигналы имеют невысокую размерность и положительный старший показатель Ляпунова.

Введение

В последнее десятилетие наблюдается определенный подъем интереса к изучению процесса речеобразования. Это связано как с практическими задачами сжатия информации, обусловленными возрастающей ролью коммуникаций в обществе, так и с развитием новых методов исследования сложных систем.

В предшествующий период основные успехи в исследовании речи, особенно в практическом плане, были достигнуты с помощью метода линейного предсказания [1, 2]. Он основан на том, что изменения речевого аппарата происходят на временах значительно больших, чем характерный период колебаний речевого сигнала. Поэтому на малых временных масштабах речевой аппарат можно считать стационарной системой и заменять его линейным фильтром, возбуждаемым специальным сигналом.

Хотя этот подход и основан на методе линейного предсказания, его название не должно вводить в заблуждение: неявно он предполагает нелинейную природу процесса речеобразования. С одной стороны, предсказание следующего отсчета дискретного речевого сигнала осуществляется при помощи линейной комбинации нескольких предыдущих отсчетов, однако с другой стороны, сигнал возбуждения

*Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия

является в этой модели сложным сигналом с бесконечно широким спектром – периодической последовательностью импульсов для вокализованных звуков или шумовым сигналом для невокализованных. В то же время вопрос о природе источника, способного генерировать как широкополосные периодические сигналы, так и шумоподобные сигналы практически не обсуждается в литературе.

Помимо линейного предсказания, развивался также подход, связанный с физическим моделированием процесса речеобразования. Например, для вокализованных звуков была предложена нелинейная модель [3]. В ней голосовые связки представлены колеблющимися массами, а речевой тракт – двусторонней линией передачи (длинной линией). Нелинейным элементом является жесткость связи двух колеблющихся масс. Она представлена кусочно-кубической разрывной функцией, причем разрыв соответствует смыканию связок. При расчетах эту функцию аппроксимируют кусочно-линейной функцией. Модель описывается системой дифференциальных уравнений. Решения этой системы для разных наборов значений параметров довольно реалистично аппроксимируют некоторые гласные звуки [3].

С развитием теории динамического хаоса и появлением методов анализа хаотических систем, в том числе методов решения обратных задач нелинейной динамики, например, реконструкции аттрактора по наблюдениям одной переменной [4-6], методов реконструкции уравнений динамических систем [7] и др., появляются работы, в которых делаются попытки применить идеологию и методы нелинейной динамики к исследованию речевых сигналов. Среди них следует отметить работы [8, 9], в которых исследовались переходные явления в некоторых специфических звуках, таких как крики обезьян и плач младенцев. В них были обнаружены бифуркации удвоения периода, торы, переход к хаосу.

Наблюдавшиеся различными исследователями явления указывают на определенное сходство динамической системы речеобразования с поведением модельных хаотических систем. Поэтому имеет смысл попытка по наблюдаемому речевому сигналу, который в реальной системе может быть представлен, например, напряжением на выходе микрофона, восстановить неизвестную, вообще говоря, многомерную динамическую систему, его порождающую, или, по меньшей мере, оценить ее характеристики. В работах [10, 11] были выполнены такие виды исследований речевого сигнала, как восстановление фазового портрета, построение сечения Пуанкаре, оценка размерности фазового пространства соответствующей динамической системы, оценка старшего показателя Ляпунова. Исследования выполнялись с короткими, относительно стационарными фрагментами японской гласной фонемы «а» (часть исследований была проведена для гласной фонемы «и»).

В данной работе динамические характеристики речевых сигналов исследуются на более широком материале, включающем помимо основных гласных звуков некоторые фрикативные согласные (шипящие и свистящие). Заметим, что вообще нестационарность процессов речеобразования сильно усложняет применение к ним методов нелинейной динамики. В связи с этим, первым этапом должно стать изучение отдельных гласных и согласных звуков, а затем уже возможен переход к связной речи. Несмотря на трудности в изучении речевой динамики, вызываемые нестационарностью, именно она тесно связана с передачей информации в речевом сигнале. Стационарный квазипериодический или шумовой сигнал несет ничтожную информацию по сравнению с нестационарным речевым сигналом. Информативность речи

обусловлена ее нестационарностью, которая является следствием постоянных изменений в структуре речевого аппарата при формировании речи, в то время как при произнесении отдельных фонем речевого аппарата мало подвижен.

Для подтверждения хаотической природы речевых сигналов производилось восстановление динамической системы, соответствующей речевому сигналу, оценка корреляционной размерности, оценка старшего показателя Ляпунова. Обсуждаются трудности, возникающие при применении методов нелинейной динамики к речевым сигналам, и проблемы интерпретации полученных результатов.

1. Реконструкция фазового пространства речевых сигналов

При изучении временных рядов, в частности, дискретных речевых сигналов, применяют методы, развитые в последние десятилетия, такие как оценка показателей Ляпунова, оценка корреляционной размерности, анализ главных компонент. Эти методы используются и в настоящей работе.

Но первой задачей, которую нужно решить, прежде чем станет возможным применение методов нелинейной динамики, является реконструкция множества, соответствующего речевому сигналу, из временного ряда.

Исходным материалом для анализа является аналоговый речевой сигнал. Чтобы не потерять ключевой информации нужно выбрать разумную величину частоты дискретизации. Часто считают, что полоса частот речевого сигнала невелика, и что для большинства применений ее можно ограничить величиной порядка 4 кГц. Например, в телефонии сигнал ограничивают полосой 300–3500 Гц, для многих приложений, связанных со сжатием речи, сигнал оцифровывают с частотой 8 кГц, что согласно теореме Котельникова ограничивает его полосой 4 кГц. Как показывают результаты данного исследования, для некоторых звуков, у которых имеется шумовой участок в диапазоне 3–10 кГц, этого недостаточно, хотя это может быть неважно для задач сжатия или распознавания. В данной работе гласные оцифровывались с частотой 11.025 кГц, а некоторые согласные звуки с частотой 44.1 кГц.

Были исследованы гласные звуки «а», «о», «и», «э», «у» и согласные фрикативные «ш», «с», «з». Брались звуки, как произносимые отдельно, так и выделенные из связной речи, произнесенные как женскими, так и мужскими голосами.

Длительность записанных звуков составляла несколько секунд, однако для анализа использовались фрагменты длительностью от 0.5 до 1 секунды. При этом из каждого ряда, представляющего тот или иной звук, выделялись участки по возможности большей стационарности. Дискретизированный речевой сигнал (временной ряд) рассматривался как сигнал, произведенный неизвестной динамической системой. Необходимо заметить, что все методы исследования нелинейных динамических систем разработаны для стационарных, эргодических систем. Очевидно, систему речеобразования нельзя считать стационарной, точно так же нельзя говорить и об «аттракторе» речевой системы. Именно поэтому здесь будем рассматривать только более или менее стационарные участки речевого сигнала.

Помимо нестационарности существенной трудностью при применении методов нелинейной динамики к речи является временная многомасштабность – наличие в речевом сигнале колебаний с частотами, отличающимися на порядки. Это проявляется в том, что значимые частоты в спектре речевого сигнала могут занимать

диапазон от сотен герц до нескольких килогерц, что сильно отличает их от сигналов модельных хаотических систем, таких, например, как система Ресслера.

Наиболее часто для реконструкции фазового пространства и аттрактора динамической системы применяется метод, основанный на теореме Такенса. Суть метода состоит в геометрической интерпретации сигнала динамической системы в евклидовом пространстве заданной размерности d . Временной ряд (x_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, прореживается с шагом τ . Чтобы получить точки пространства вложения R^d , из прореженного временного ряда берут последовательно по d отсчетов, так что $\bar{x}_i = (x_i, x_{i+\tau}, K, x_{i+(d-1)\tau})$ [4, 6, 12, 13]. Точкам арифметического пространства взаимно-однозначно ставятся в соответствие векторы соответствующего пространства R^d . Величина τ носит название лага или времени задержки [13, 14]. Выбору лага, который во многом определяет качество вложения, посвящено большое количество литературы [13, 14], однако смысл рекомендаций часто сводится к выбору 2–4 точек на квазипериод колебаний. Однако, как отмечалось выше, в речевых сигналах присутствуют колебания, периоды которых отличаются на порядки. Если ориентироваться на период быстрых колебаний, то в построенном d -мерном множестве будет плохо представлена медленная динамика. Чтобы ее учесть, придется делать размерность пространства чрезмерно большой. Если ориентироваться на медленные колебания, есть опасность совершенно упустить из виду быстрые движения. По всей видимости, для речевых сигналов вместо равномерного прореживания «по Такенсу» нужно применять неравномерное, когда векторы для пространства R^d набираются так, что в векторе присутствуют как близкие, так и далекие элементы временного ряда. Некоторые рекомендации по такой технике можно найти в [15].

В данной работе было использовано равномерное прореживание при вложении траектории в пространство R^d . Применение очень длинных отрезков траекторий (до сотен тыс. точек) позволяет строить «плотные» множества в R^d , что, по мнению авторов, уменьшает последствия, связанные с многомасштабностью динамики сигналов. Построенные точки определяют фазовую траекторию неизвестной динамической системы и являются фазовыми портретами соответствующих звуков речи.

Для характеристики звуковых сигналов мы используем также сонограммы. В сонограммах вдоль оси абсцисс откладывается время, вдоль оси ординат – частота, а яркость цвета пропорциональна величине энергии, приходящейся на данную частоту в данный момент времени. Таким образом, сонограмма показывает эволюцию спектра сигнала во времени.

На рис. 1 и 2 приводятся реализации и сонограммы для гласного звука «а» и для согласного «ш». Важно отметить, что гласные звуки демонстрируют выраженную квазипериодическую структуру, в то время как рассмотренные согласные звуки несут шумоподобный характер, что видно как в реализациях, так и на сонограммах этих звуков. У гласных, как это показано на примере звука «а», энергия сконцентрирована в области низких частот и спектр имеет выраженные пики на основной частоте и формантных частотах (гармониках), что можно увидеть на сонограмме для этого звука в виде светлых полос, соответствующих большей энергии на данных частотах, в то время как для звука «ш» энергия гораздо более равномерно распределена по спектру, и сам спектр более соответствует спектру шума, то есть не содержит выраженных пиков. Похожая картина наблюдается и для других рассмотренных согласных звуков («с», «ф»).

При построении фазовых портретов, соответствующих звуковым сигналам, проводилась оценка размерности подпространства, занимаемого множеством, соответствующим звуку. Для этого использовалась процедура Брумхеда – Кинга (Каруна – Лозва) [12]. Суть ее состоит в том, что в пространстве R^d для этого множества строится новый ортонормированный базис, оптимальный в смысле среднеквадратичной ошибки приближения этого множества. Он строится из собственных векторов ковариационной матрицы векторов множества, причем сумма квадратов проекций множества на оси нового базиса, то есть, фактически, энергия, приходящаяся на то или иное направление, определяется собственными значениями ковариационной матрицы. Это означает, что если множество занимает в пространстве подпространство меньшей размерности, то часть собственных значений будет нулевой или близкой к нулю, если исходные данные слегка зашумлены.

Уточняя описание процедуры Брумхеда – Кинга, мы можем сказать, что из векторов \bar{x}_i строится матрица $X = (\bar{x}_1^T \bar{x}_2^T \dots \bar{x}_N^T)$, в которой исходные векторы представлены ее столбцами, затем находится ковариационная матрица $A = X \cdot X^T$ размера $d \times d$, и вычисляются ее собственные значения и собственные векторы. Затем множество проецируется на базис из собственных векторов [16].

Приведем фазовые портреты для двух звуков «а», произнесенных одним и тем же диктором в разных отрывках связного текста. Множества построены в трехмер-

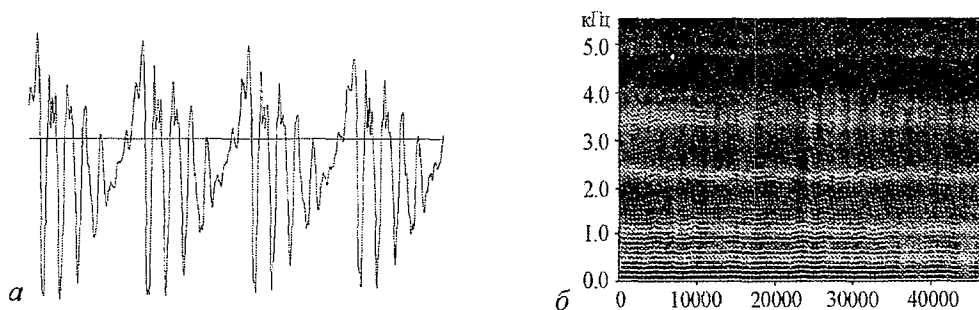


Рис. 1. Реализация и сонограмма для звука «а»

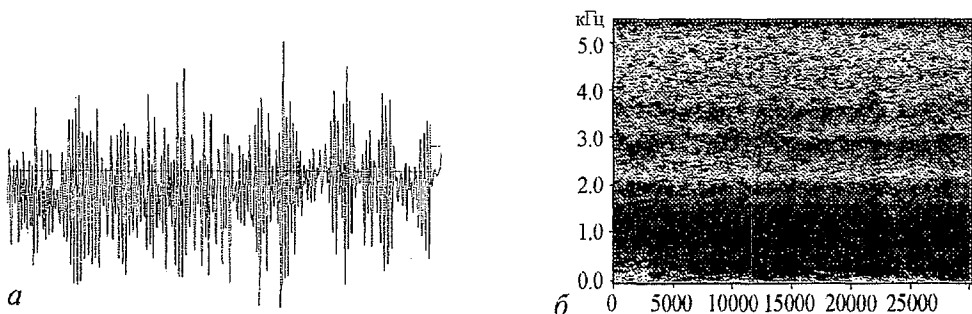


Рис. 2. Реализация и сонограмма для звука «ш»

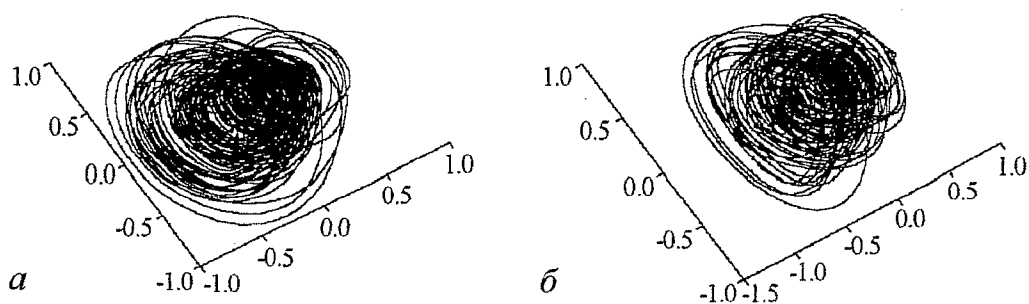


Рис. 3. Фазовые портреты звуков «а» из связанных отрывков текста одного диктора

ном пространстве, однако для удобства сопоставления мы приводим их проекции на одну и ту же плоскость (рис. 3). Кроме того, приведем графики нормированных собственных чисел, определяющих размерность подпространства, в котором лежат множества (рис. 4). Они показывают, что основная часть энергии сигнала приходится на два первых собственных числа, в то время как уровень энергии, соответствующий другим собственным числам, значительно ниже. Видно также, что четвертое собственное число находится уже вблизи уровня 10^{-2} . Таким образом, с указанной точностью можно ограничиться трехмерным подпространством, определяемым тремя собственными числами, наибольшими по величине.

В целом, фазовые портреты звуков одного диктора демонстрируют некоторую схожесть, что отмечалось и для других гласных звуков. Кроме того, из приведенных фазовых портретов видно также, что они отличаются значительной гладкостью, что указывает на отсутствие значимых высокочастотных компонент, что свойственно гласным звукам.

Некоторое небольшое различие в динамике одного и того же звука можно объяснить редукцией гласного «а» в разных отрывках, что соответствует различию фонем звука «а» для данного диктора.

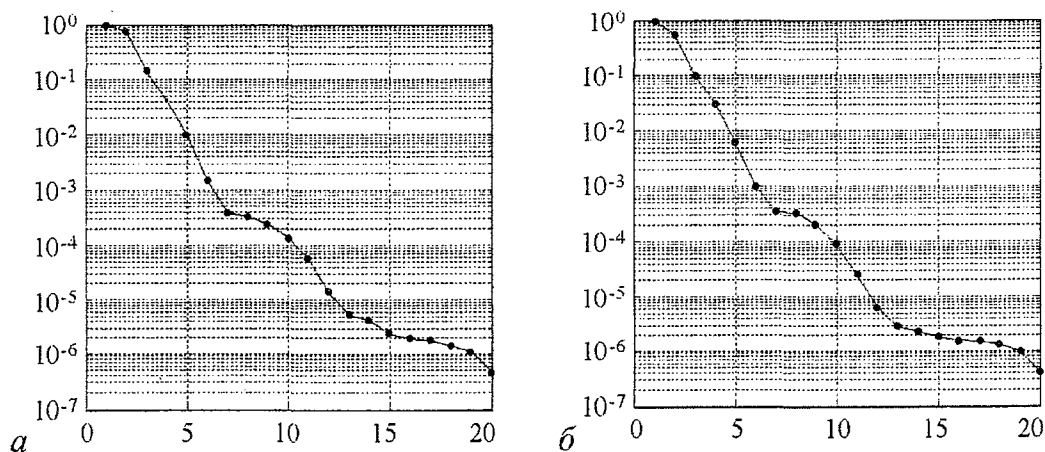


Рис. 4. Собственные числа в порядке убывания их величины для множеств на рис. 3

Аналогичное рассмотрение было проведено и для других гласных звуков. Можно сказать, что фазовые портреты гласных звуков имеют, как правило, схожие особенности у одного и того же диктора. Кроме того, структура фазовых портретов подтверждает «почти» периодический характер гласных звуков, осложняемый некоторой нестационарностью. Фазовые портреты гласных звуков отличаются гладкостью и повторяемостью. Оценки размерности подпространства фазового пространства, в котором располагаются множества, соответствующие гласным звукам, полученные с помощью спектра собственных значений ковариационной матрицы, указывают, что размерность этого множества невелика и находится на уровне 3–4. Для всех гласных звуков можно отметить также присутствие области повышенной мощности в спектре на уровне 9–13 кГц, причем устранение этой области слабо сказывается на качестве речи. В спектрах, вполне аналогично тому, как это было показано на примере звука «а», четко выделяется основная частота и формантные частоты (гармоники). При исследовании отдельно произносимых гласных звуков замечено, что в силу условий формирования они получаются более стационарными, а фазовые портреты отличаются гладкостью по сравнению со звуками, выделенными из связной речи.

2. Двойственная природа звука «з»

Исследование звука звонкой фриктивной согласной «з» выявило некоторые черты, которые роднят его как с гласными звуками, так и с шумовыми шипящими. Фазовый портрет звука «з» (женский голос) приведен на рис. 5, а. Так как это не гласный звук, можно было бы ожидать существенного отличия структуры его фазового портрета от портретов гласных звуков. Однако его фазовый портрет имеет общие черты с портретами гласных. В частности, в нем хорошо заметна тороидальная структура. В то же время, наблюдается высокочастотная изрезанность, которая свидетельствует о наличии высокочастотной шумовой компоненты в сигнале. Эта компонента отчетливо наблюдается на спектре мощности сигнала (рис. 6). По уровню спектральной плотности она примерно на 30 дБ ниже, чем главная низкочастотная компонента. Однако эта компонента сигнала занимает полосу порядка 2000 Гц, а узкополосная низкочастотная, регулярная компонента – только 10 Гц. Поэтому их интегральные мощности отличаются примерно в десять раз. Это позволяет наблюдать присутствие шумовой компоненты сигнала в фазовых портретах.

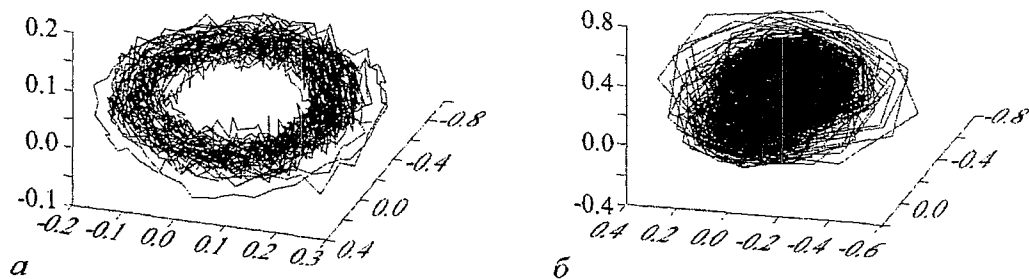


Рис. 5. Фазовый портрет для главных компонент звука «з»: а – женский голос, б – мужской голос

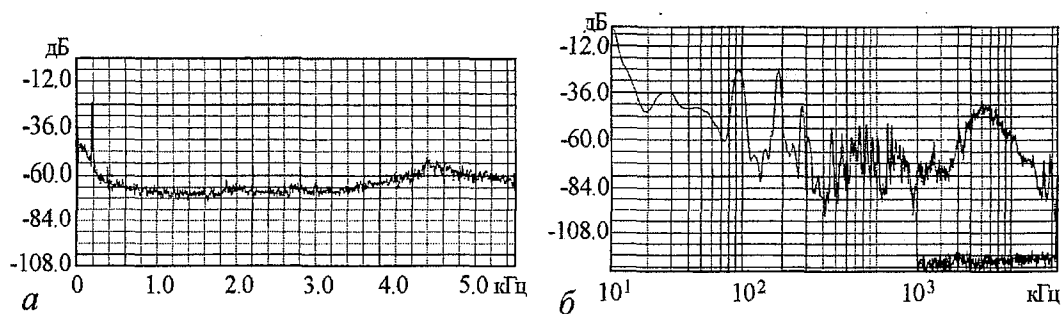


Рис. 6. Спектр мощности звука «з»: а – женский голос, б – мужской голос (нижняя кривая – спектр сигнала после ФНЧ 0–2000 Гц)

Анализ структуры фазового портрета и спектра звука «з», произносимого женским голосом, показывает, что частота 11 кГц для оцифровки, по-видимому, недостаточна. Поэтому сигнал звука «з» мужского голоса был оцифрован с частотой 44.1 кГц. Типичный фазовый портрет такого сигнала приведен на рис. 5, б. Его вид с характерными изломами показывает, что даже частоты дискретизации в 44.1 кГц недостаточно для получения гладких данных.

Спектральная структура звука «з» для мужского голоса отличается от соответствующей структуры спектра для женского голоса (рис. 6). В частности, этот спектр содержит большое число гармоник основной частоты. Как и спектр мощности для женского голоса он содержит шумовую компоненту в области частот от 3 до 12 кГц. Однако линейчатые спектральные компоненты простираются практически до «шумовой» области спектра.

Таким образом, звук «з» имеет двойственную структуру – он объединяет в себе свойства вокализованных сигналов (гласных звуков), что проявляется в наличии тороидальной структуры фазового портрета и присутствии основного тона и его гармоник в спектре, и шумоподобных сигналов, что добавляет шумовую высокочастотную компоненту как к портретам, так и к спектру. Чтобы проиллюстрировать сказанное, выделим из сигнала низкочастотную и высокочастотную составляющие.

После применения ФНЧ с полосой 0–2000 Гц получаем сигнал на рис. 7

(сверху). Спектр этого сигнала приведен на рис. 6, б (нижняя кривая). Даже визуально сигнал очень напоминает сигналы гласных звуков. И действительно, на слух такой сигнал воспринимается как вокализованный звук, напоминающий «у» или «ы».

Как следует из приведенных фазовых портретов низкочастотной составляющей сигнала «з», этот сигнал имеет выраженную тороидальную структуру довольно низкой размерности. Как видно из проекции портрета на координаты

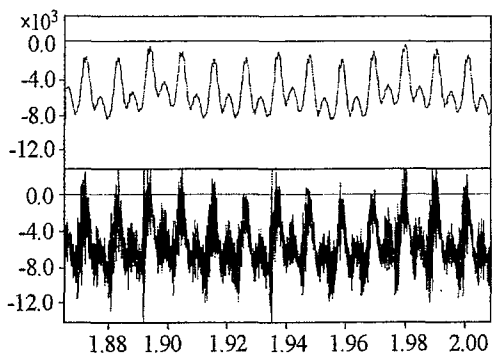


Рис. 7. Звук «з» – мужской голос, сверху – после применения ФНЧ 2 кГц, нижняя кривая – исходный сигнал

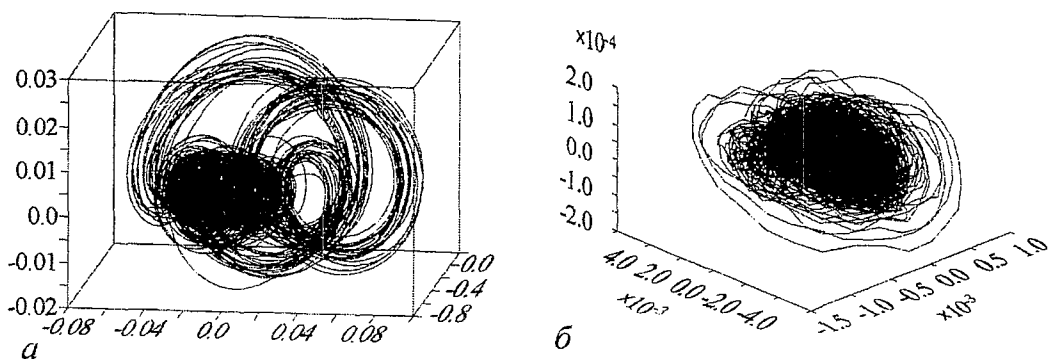


Рис. 8. Проекция фазового портрета в базисе собственных векторов отфильтрованного звука «з» на координаты 1–2–3 (а) и 4–5–6 (б)

наты 4–5–6 (рис. 8), она представляет собой шумовой «остаток» существенно меньшей амплитуды. Низкая размерность полученного множества подтверждается расчетом спектра собственных значений ковариационной матрицы, дающей оценку размерности множества $d = 3$.

Для того чтобы выяснить, чему соответствует высокочастотная область «шума» на спектре исходного звука, исходный сигнал был пропущен через полосовой фильтр 3–10 кГц. Результаты указанной фильтрации приводятся на рис. 9.

На слух отфильтрованный в полосе 3–10 кГц сигнал воспринимается как шипящий, близкий к «с». Как следует из анализа спектра собственных значений, размерность «шумовой» составляющей сигнала «з» также ограничена небольшой величиной $d = 4–5$, что подтверждается и проекциями фазового портрета (рис. 10). Все это свидетельствует в пользу ее динамического происхождения.

Таким образом, звук «з» действительно сочетает в себе черты гласного и согласного звуков, причем обе его составляющие, по-видимому, являются достаточно низкоразмерными. Остается вопрос, каким образом формируется звук такой двойственной природы? Авторы предполагают, что сигнал на рис. 6 может быть по-

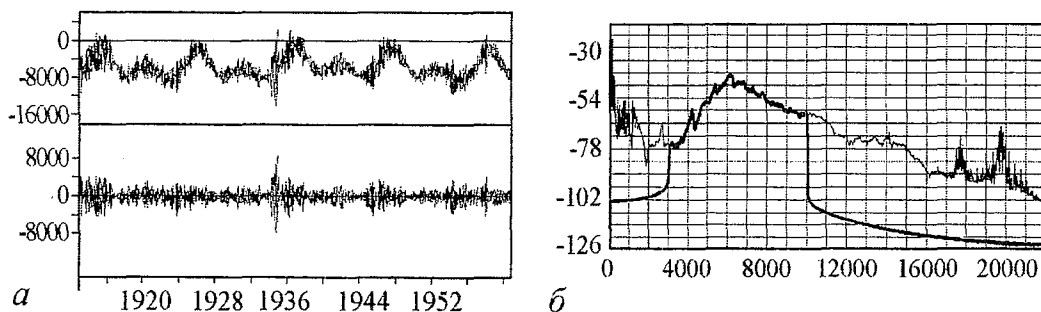


Рис. 9. Характеристики «шумовой» части звука «з»: а – реализация исходного сигнала (верхняя кривая) и отфильтрованного в полосе 3–10 кГц; б – спектр исходного сигнала и отфильтрованного

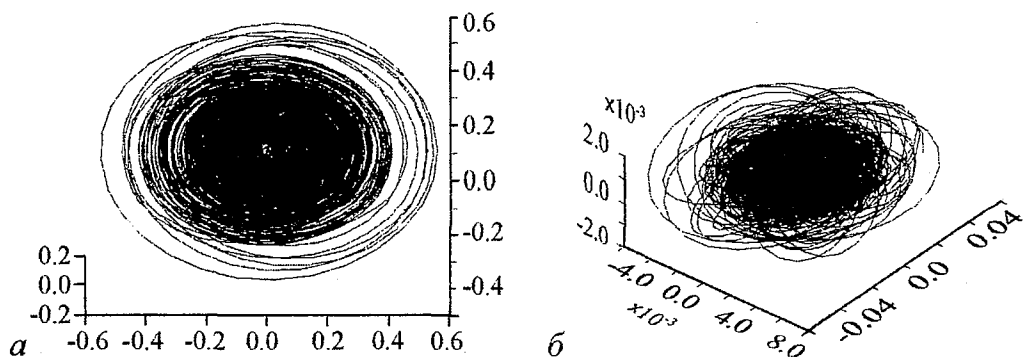


Рис. 10. Фазовый портрет отфильтрованного (3–10 кГц) сигнала в базисе собственных векторов. *а* – координаты 1–2–3, *б* – координаты 4–5–6

рожден путем возбуждения нелинейного высокочастотного резонатора сравнительно низкочастотным гармоническим сигналом, однако подтверждение этой гипотезы требует дальнейшего исследования.

3. Оценка старшего ляпуновского показателя

Как известно, D -мерная динамическая система описывается набором d показателей Ляпунова. Если динамический режим системы является хаотическим, то старший показатель Ляпунова (максимальный) положителен. Это означает, что две траектории, выходящие из малой окрестности, экспоненциально быстро разбегаются. В простых модельных системах, как правило, только старший показатель Ляпунова является положительным, остальные – отрицательны. В настоящей работе мы приводим оценки старшего ляпуновского показателя для различных звуков, как выделенных из отрывков текста, так и отдельно произносимых.

Вычисление старшего показателя Ляпунова несложно, если известны уравнения движения динамической системы. В этом случае для точек на траектории системы вычисляют локальные коэффициенты растяжения, которые затем усредняют, получая, таким образом, старший показатель Ляпунова. Для получения локального коэффициента растяжения в момент времени t_k в окрестности текущей точки траектории \mathbf{x}_k берут близкую точку \mathbf{x}'_k и на отрезке времени Δt помимо основной траектории рассчитывают траекторию, исходящую из точки \mathbf{x}'_k . Локальный показатель Ляпунова рассчитывается по формуле

$$\lambda_k = \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}'_{k+1}\|}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k\|} \right),$$

где \mathbf{x}'_{k+1} и \mathbf{x}_{k+1} – точки соответствующих траекторий в момент времени $(t_k + \Delta t)$. Затем вектор $(\mathbf{x}'_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1})$ нормируют, чтобы его длина оставалось малой, и повторяют процедуру.

Если уравнения движения не известны, а известна только одна наблюдаемая траектория системы, то расчет траектории, близкой к наблюдаемой, невозможен. В таком случае применяют локально-линейные предикторы для расчета траекторий, проходящих вблизи наблюдаемой траектории [17]. Если наблюдаемая траектория достаточно длинна, то она много раз пройдет по одной и той же области фазового пространства, и в окрестности любой ее точки найдется много других близких точек. Сначала находят векторы, попадающие в окрестность текущей точки. Затем строят линейное преобразование окрестности текущей точки в окрестность следующей точки на траектории (совместно для всех точек окрестности). На основе матрицы данного линейного преобразования вычисляют коэффициент растяжения вектора отклонения на временном интервале, соответствующем переходу от текущей точки траектории к следующей. Логарифм этого коэффициента является локальным показателем Ляпунова в текущей точке. В окрестности следующей точки процедуру повторяют. Показатель Ляпунова динамической системы получают усреднением локальных показателей на достаточно большом участке траектории [18, 19]. Очевидно, точность полученной оценки определяется линейностью преобразования окрестности в следующую окрестность, а значит, наличием достаточного количества близких точек в окрестности каждой точки траектории, что определяется длиной траектории.

Приведем оценки старшего ляпуновского показателя для отдельного гласного звука. Далее будут приведены результаты расчета для всех рассмотренных в работе звуков, однако более детальное изложение мы дадим для гласного звука «а», как и ранее.

На рис. 11 приводится отрывок реализации и восстановленный фазовый портрет для отдельно произнесенного звука «а». На рисунке фрагмента сигнала видны два временных масштаба – «большой период» $T_1 = 50$ отсчетов, соответствующий частоте основного тона 200 Гц (частота дискретизации 11025 Гц), и «период» малых колебаний $T_2 = 13$ (850 Гц). Фазовый портрет сигнала в пространстве вложения приводится на соседнем рисунке. Портрет зарисован двумя изначально очень близкими траекториями (начальное отклонение = 0.024). В совокупности эти две траектории, быстро разбежавшись, представляют сложный торообразный портрет этого сигнала.

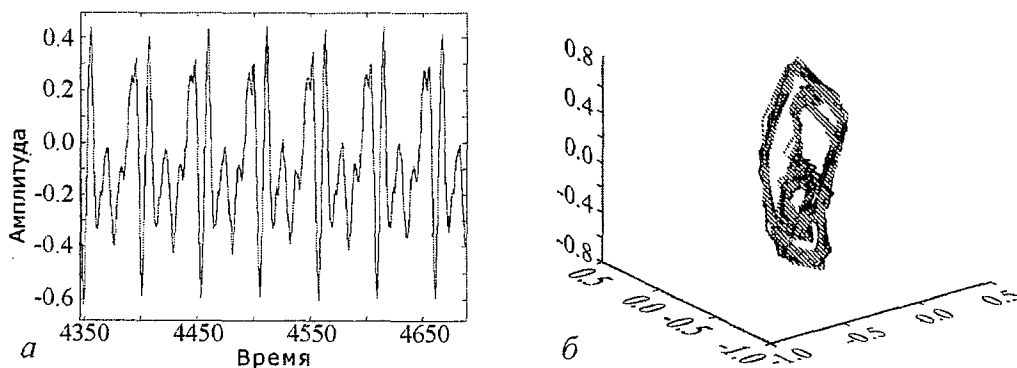


Рис. 11. Отрывок реализации гласного звука «а» и фазовый портрет этого звука (женский голос). На фазовом портрете показана исходная траектория и траектория локально-линейного предиктора

Старший ляпуновский показатель для различных звуков при реализации мужскими и женскими голосами

звук	λ	Характеристики
И (ж)	5050 (8,4)	$F_s = 11025$ Гц 10000 отсчетов
А (м)	2830 (4,7)	
У (ж)	4750 (7,9)	20000 отсчетов
У (м)	732 (1,2)	
Э (ж)	3210 (5,3)	10000 отсчетов
Э (м)	3800 (6,3)	10000 отсчетов
О (ж)	2750 (4,5)	10000 отсчетов
О (м)	2160 (3,6)	10000 отсчетов
С (ж)	6360 (10,6)	10000 отсчетов
Ш (ж)	6140 (10,2)	20000 отсчетов
Ш (м)	2830 (4,7)	20000 отсчетов

Оценка показателя Ляпунова с помощью методики, описанной выше, для этого сигнала дает $\lambda \sim 600 \text{ с}^{-1}$. Для того чтобы можно было сравнивать показатели Ляпунова реальных сигналов с модельными системами такими, например, как система Лоренца, нужно привести их к одному временному масштабу. Так, в системе Лоренца средний период малого колебания равен ~ 0.7 , а в нашем случае $\sim 13/11025$, то есть масштабы различаются приблизительно в 600 раз. В пересчете к временному масштабу системы Лоренца для звука «а» получаем $\lambda \sim 1$, то есть показатели Ляпунова обеих систем сопоставимы. Для гласных звуков «у» и «и» получены близкие значения оценок показателя Ляпунова в относительных величинах для сравнения с системой Лоренца. Существенно, однако, отметить другое. Положительность старшего ляпуновского показателя указывает на хаотический характер, присущий динамике речевого аппарата. В таблице приводятся образцы расчетов старшего ляпуновского показателя в различных гласных и согласных звуках при различном качестве стационарности рассматриваемого временного ряда. Мы даем абсолютные значения старшего показателя, а также для удобства сравнения в скобках приводим те же величины, пересчитанные в соответствии с временным масштабом системы Лоренца. Следует отметить значительное увеличение показателя Ляпунова для согласных звуков. Кроме того, как уже неоднократно упоминалось ранее, в силу нестационарности процесса речеобразования мы получаем различные значения для старшего показателя на стационарных участках и на больших участках произнесения звука, на которых уже сказываются нестационарные эффекты.

4. Вычисление корреляционной размерности речевых сигналов

Одним из основных методов оценки размерности множества, получающегося в пространстве вложения для речевого сигнала, является метод оценки корреляционной размерности. Здесь ситуация вполне аналогична той, которая имеет место

для оценки размерности аттрактора хаотической динамической системы. Для нахождения корреляционной размерности сначала вычисляют корреляционный интеграл [6, 14]

$$C(\varepsilon, N) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \theta(\varepsilon - |\bar{x}_i - \bar{x}_j|),$$

где \bar{x}_i, \bar{x}_j – точки d -мерного пространства вложения, ε – расстояние между этими точками, а θ – функция Хевисайда. Тогда корреляционная размерность определяется из соотношения

$$v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lg C(\varepsilon, N)}{\lg \varepsilon},$$

где N – число точек в фазовом пространстве вложения [20]. Корреляционная размерность также дает оценку размерности того множества, которое получается для речевых сигналов в фазовом пространстве [13, 20].

Приведем результаты, относящиеся к вычислению корреляционной размерности для различных гласных и согласных звуков, произносимых различными дикторами, а также размерности для небольших связных отрывков речи. На рис. 12 и 13 приводятся графики корреляционной размерности при различных размерностях пространства вложения для отдельно произносимых звуков.

Оценка корреляционной размерности дает значимый результат лишь в том случае, когда рост размерности пространства вложения приводит к определенному насыщению, то есть когда кривые, соответствующие различному выбору размерности пространства, начинают существенно приближаться друг к другу. Такая ситуация

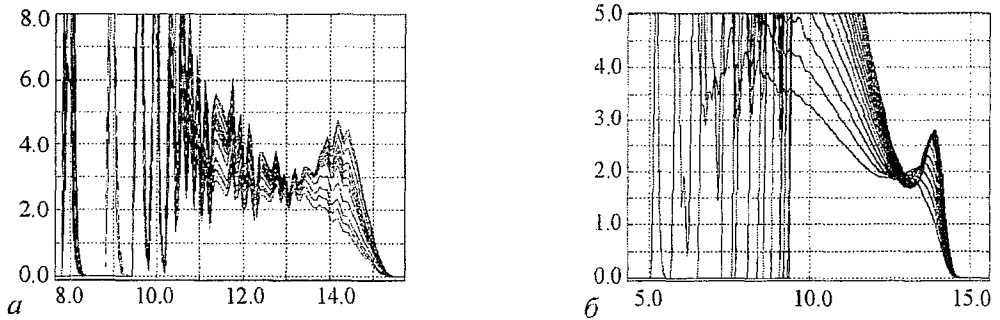


Рис. 12. Корреляционная размерность гласного звука «а» (а) и гласного звука «у» (б). Мужской голос. Размерности пространства вложения 4–18

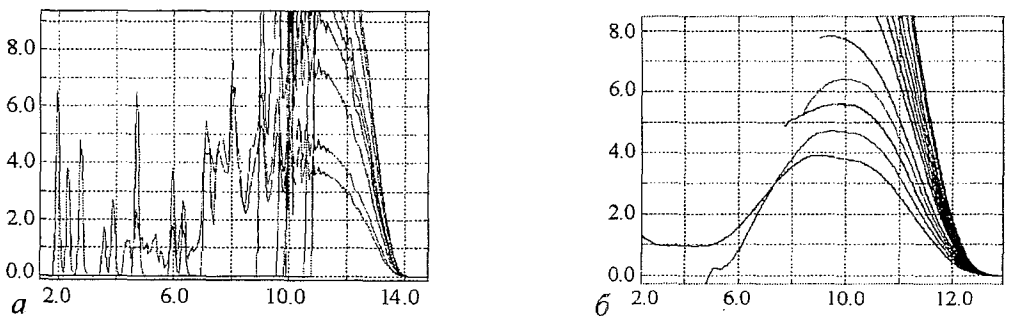


Рис. 13. Корреляционная размерность звука «ш» (а) и соответствующие сглаженные кривые (б). Женский голос. Размерности пространства вложения 4–18.

видна на рис. 12, *а* и *б*, где область насыщения дает величину корреляционной размерности 2.5–3 в обоих случаях. Шумоподобный звук «ш» дает иную картину (рис. 13). Для него не удастся получить явного участка с насыщением, что указывает на увеличение размерности множества в этом случае. Впрочем, следует отметить, что указанное обстоятельство вполне согласуется с фазовыми портретами для звука «ш», которые указывали на то, что энергия в данном случае распределена по собственным значениям более равномерно, нежели в случае гласных звуков.

Выводы

В данной статье представлены результаты анализа применения методов нелинейной динамики для анализа речевых сигналов. В качестве результатов анализа мы приводим данные по различным гласным и согласным звукам, как специально записанным для данного исследования, так и выделенным из связной речи. В силу большого объема полученных результатов в качестве иллюстрации мы приводили, в основном, данные, полученные для гласного звука «а» и некоторых согласных. Нами были таким же образом проанализированы и другие гласные звуки: «и», «э», «о». Мы сознательно избегали пока анализа двугласных в силу их более сложной природы. Все гласные звуки, выделенные из речи, обладают в той или иной степени квазипериодической структурой, в отличие от согласных звуков, часть которых носит шумовой характер, а часть должна рассматриваться как сложные переходные процессы. Обобщая все полученные частные результаты, можно сказать следующее.

При рассмотрении речевых сигналов мы имеем дело со сложной нестационарной системой. Главной целью настоящей работой служило выявление нелинейного динамического характера системы, порождающей речевой сигнал, а также хаотическое поведение в этой системе при речеобразовании. Этот вопрос, как нам представляется, не может быть решен в одной публикации, потому что является чрезвычайно обширным. В работе мы ограничились лишь рассмотрением отдельных звуков, однако от звуков необходимо совершать переход к их сочетаниям, а затем и к связной речи.

Показано, что при вложении, согласно методике, основанной на теореме Такенса, в пространство большой размерности, гласные звуки можно с хорошей точностью выделить в нем как некоторые множества, лежащие в подпространстве небольшой размерности. Для всех гласных звуков размерность этого подпространства составляет примерно 3–4. Представленные в статье результаты по анализу отдельных гласных звуков укрепляют доказательную базу о превалировании нелинейных эффектов при формировании речевого сигнала.

Характерные особенности произнесения звуков, присущие данному диктору, обнаруживаются при рассмотрении восстановленных множеств в фазовом пространстве динамической системы в виде особой структуры, присущей построенным множествам. Таким образом, замечено, что особенности речеобразования конкретного человека можно, в принципе, трактовать геометрически, что способно открыть пути к созданию банков речевых звуков, где они трактуются с этой точки зрения и могут быть применены в различных областях.

Расчет старшего ляпуновского показателя, проведенный для всех рассмотренных звуков, и его положительная величина указывает на присутствие хаотического

поведения в динамической системе речевого тракта, что является существенным аргументом в пользу наличия хаотической нелинейной динамики в речеобразовании.

Проведенный расчет корреляционной размерности для гласных звуков дает оценку размерности пространства вложения различных звуков. Для всех гласных звуков оценка корреляционной размерности дает значение на уровне 3–4, в то время как для рассмотренных согласных звуков не удается получить четкого значения этой характеристики.

Библиографический список

1. Маркел Дж., Грэй А. Линейное предсказание речи. М.: Связь, 1980. 308 с.
2. Макхол Дж. Линейное предсказание. Обзор // ТИИЭР. 1975. Т. 53, № 2. С. 20.
3. Ishizaka K., Flanagan J.L. Synthesis of voiced sounds from a two-mass model of the vocal cords // The Bell System Technical Journal. July-August, 1972. Vol. 51, № 6. P. 1233.
4. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Lecture notes in mathematics, № 898, Springer-Verlag, 1981. P. 366-381.
5. Noakes L. The Takens embedding theorem // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1991. Vol. 1. P. 867.
6. Farmer J.D., Sidorowich J.J. Predicting chaotic time series // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 59, № 8. P. 845.
7. Безручко Б.П., Диканев Т.В., Смирнов Д.А. Тестирование на однозначность и непрерывность при глобальной реконструкции модельных уравнений по временным рядам // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 4. С. 69.
8. Herzel H., Berry D., Titze I.R., Saleh M. Analysis of vocal disorders with method from nonlinear dynamics // J. Speech Hear. Res. 1994. Vol. 37. P. 1008-1019.
9. Titze I.R. The physics of small-amplitude oscillation of the vocal folds // J. Acoust. Soc. Am. 1988. Vol. 83. P. 1536-1552.
10. Tokuda I., Tokunaga R., Aihara K. A simple geometrical structure underlying speech signals of the japanese vowel /a/ // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1996. № 1. P. 159.
11. Tokuda I., Miyano T., Aihara K. Surrogate analysis for detecting nonlinear dynamics in normal vowels // J. Acoust. Soc. Am. Dec., 2001. Vol. 110(6). P. 3207.
12. Broomhead D.S., King G.P. Extracting qualitative dynamics from experimental data // Phys. D. 1986. Vol. 20. P. 217.
13. Kantz H., Schröder T. Nonlinear time series analysis. Cambridge university press, 2000. 304 p.
14. Lai Y.-C., Ye N. Recent developments in chaotic time series analysis // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2003. Vol. 13, № 6. P. 1383.
15. Judd K., Mees A. Embedding as a modeling problem // Physica D. 1998. Vol. 120. P. 273.
16. Ланда П.С., Розенблюм М.Г. Об одном методе оценки размерности вложения аттрактора по результатам эксперимента // ЖТФ. 1989. Т. 59, вып. 1. С. 13.

17. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. P. 346.
18. *Eckmann J.-P., Kamphorst S.O., Ruelle D., Ciliberto S.* Lyapunov exponents from time series // *Phys. Rev. A.* 1986. Vol. 34. P. 4971.
19. *Ланда П.С., Розенблюм М.Г.* Сравнение методов конструирования фазового пространства и определения размерности аттрактора по экспериментальным данным // *ЖТФ.* 1989. Т. 59, вып. 11. С. 1.
20. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // *Physica D.* 1983. Vol. 9. P. 189.

*Институт радиотехники
и электроники РАН, Москва*

Поступила в редакцию 20.12.2004

ON CHAOTIC NATURE OF SPEECH SIGNALS

Yu. V. Andreyev, M. V. Koroteyev

Phonetic signals are considered from the viewpoint of nonlinear dynamics. Phase portraits of the signals are analyzed in embedding space, dimension and the largest Lyapunov exponent are estimated. It is shown that dimension of speech signals is low and the largest Lyapunov exponent is positive.



Андреев Юрий Вениаминович – родился в Уфе (1960), окончил Московский Физико-технический институт (1983). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Институте радиотехники и электроники РАН (1993) в области обработки информации методами нелинейной динамики. Опубликовал более 20 работ в этой и смежных областях. Старший научный сотрудник ИРЭ РАН.
E-mail: yuwa@cplire.ru



Коротеев Максим Валерьевич – родился в 1976 году. В 1999 году окончил факультет аэромеханики и летательной техники МФТИ. В настоящее время младший научный сотрудник Института радиотехники и электроники РАН. Кандидат физико-математических наук (2004). Область научных интересов – динамический хаос, анализ временных рядов, гидродинамика, асимптотические методы. Автор более 10 работ.



Изв. вузов «ПНД», т. 12, № 6, 2004

УДК 534.05179

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ БИРИТМИЧНОЙ ПАРЫ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВБЛИЗИ БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА – ХОПФА*

Е.И. Волков

Рассмотрены динамические режимы, возникающие в системе из двух одинаковых релаксационных осцилляторов ФитцХью – Нагумо, параметры которых выбраны вблизи бифуркации рождения цикла, при действии слабого гармонического сигнала на оба элемента. Показано, что обмен медленной переменной, порождающий три устойчивых предельных цикла: синфазный, антифазный и предельно асимметричный (один осциллятор не генерирует всплеск), радикально меняет отклик системы на сигнал по сравнению с классической динамикой вынужденных колебаний. Помимо ожидаемых языков синхронизации, которые образуются при взаимодействии синфазного аттрактора с сигналом, присутствие сосуществующих решений приводит, по крайней мере, к трем эффектам: 1 – появление широких полос синхронизации сигнала и противофазного решения на высоких частотах, кратных частоте противофазных колебаний, и резкое сужение основной полосы синхронизации противофазного решения; 2 – появление интервалов периодов сигнала, в которых образуются предельные циклы с несколькими всплесками быстрой переменной в течение полного периода и с дискретным одинаковым набором межвсплесчных интервалов в каждом осцилляторе; 3 – образование узких интервалов периодов сигнала, приводящих к сложным предельным циклам с неодинаковым числом всплесков быстрой переменной у осцилляторов в одном периоде и резко различными длительностями межвсплесчных интервалов. Предложено качественное объяснение механизма образования сложных ритмов в рассмотренных областях параметров, задающих релаксационность осцилляторов и их близость к точке бифуркации.

Введение

Динамика вынужденных колебаний изолированной автоколебательной системы изучается начиная с работ Ван дер Поля [1] и имеет мощное математическое обоснование [2]. Основные явления, связанные с синхронизацией автоколебаний

*Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия.

и внешних сигналов, давно рассмотрены и вошли как в старые [3, 4], так и в новые [5] книги. В классической теории нелинейных колебаний рассмотрены, как правило, вынужденные режимы в сосредоточенных системах. Однако закономерности вынужденной синхронизации часто используются при интерпретации физиологических экспериментов, см. например [6], и при разработке медицинских воздействий [7]. Эти системы являются распределенными, например, многоклеточными. При этом неявно предполагается, что связи между элементами распределенной системы так устроены, что система реагирует на сигнал как единый автоколебательный элемент. Однако это не всегда так. Давно известно, что взаимодействие одинаковых автоколебательных систем может приводить к мультиритмичности, то есть к сосуществованию нескольких устойчивых предельных циклов с разными периодами и фазовыми соотношениями. Например, использование небольших ансамблей из четырех, шести и восьми клеток стало популярным для объяснения наборов ритмов походок разных живых существ [8–10]. Цепочки из 3, 4 и 5 одинаковых биологических осцилляторов демонстрируют разные колебательные режимы [11]. Динамика сцепленных модельных нейронов [12–17], решеток Тоды [18], электронных осцилляторов [19, 20], лазеров [21], химических реакторов и их моделей [22–24], трехмерных бэрстеров [25, 26] также активно изучается с целью выяснения многообразия возможных коллективных мод в системах, состоящих из одинаковых или почти одинаковых элементов. Ранее при изучении систем из двух и трех одинаковых осцилляторов было показано теоретически [4, 27–30] и экспериментально [19, 31, 32], что локальный диффузионный обмен может порождать несколько предельных циклов с разными периодами. Мультиритмичность довольно естественно получается, когда связь между предельными циклами содержит задержку [33, 34]. Детальное изучение динамики ансамблей **релаксационных** двумерных осцилляторов с N -образной изоклиной показало, что большая жесткость изолированного осциллятора и преобладание обмена медленной переменной обеспечивают устойчивость несинфазных режимов в широкой области параметров [35–38]. В этих исследованиях основными бифуркационными параметрами являлись: параметр (обозначим его A), определяющий близость системы к бифуркации Андронова – Хопфа (БАХ) рождения предельного цикла, и параметр C , задающий интенсивность обмена медленной переменной. Линейный обмен медленной переменной является одним из вариантов ингибиторной связи, так как он способен существенно замедлять движение изображающих точек на значительных промежутках предельного цикла, то есть увеличивать разность фаз между осцилляторами. Одновременно, такой обмен не разрушает устойчивость однородного состояния (синфазные колебания) в ансамблях локально связанных двумерных осцилляторов с N -образной изоклиной для быстрой переменной.

Взаимодействие периодического сигнала с *мультиаттракторной* системой может приводить к образованию неожиданных режимов или способов захвата частоты, так как механизм «расталкивания» фаз за счет взаимодействия осцилляторов не всегда может быть согласован с сигналом в рамках простого аттрактора. Например, если сигнал одинаково и когерентно модулирует параметры связанных автоколебательных систем и имеет период близкий к периоду антифазного решения, то рассогласование фаз сигнала и разности фаз элементов в антифазном решении, может привести к потере его устойчивости. Настоящая работа посвящена исследованию коллективных режимов в системе из двух одинаковых ин-

гибиторно связанных релаксационных осцилляторов ФитцХью - Нагумо (ФХН) в присутствии слабого гармонического сигнала, но вблизи порога генерации автоколебаний изолированного элемента.

Интерес к динамике автоколебательных и возбудимых систем вблизи порога генерации всегда был большим, так как именно в этой области наблюдается максимальная регулируемость систем. В последнее время внимание к этой области обусловлено, в частности, большим количеством исследований «стохастического резонанса» в массивах нелинейных возбудимых элементов (см., например, обзор [39]), изучением динамики нейронов [40] и их ансамблей [41]. В отличие от исследований по стохастическому резонансу, где параметры осцилляторов выбираются близко к БАХ, но элементы являются возбудимыми, в настоящей работе будет исследована роль сигнала в системе с двумя осцилляторами, параметры которых выбраны недалеко от точки бифуркации их рождения, но с «автоколебательной» стороны, а биритмичность обусловлена типом связи.

Будет проведено систематическое численное исследование решений для двух областей значений параметров: область сосуществования синфазного и противофазного режимов и область сосуществования синфазного и несимметричного режима, в котором только один осциллятор совершает полноамплитудные колебания. Механизм образования сложных аттракторов связан с наличием так называемой бифуркации «утки», которая проявляется при бифуркации Андронова – Хопфа при правильном выборе степени нелинейности осцилляторов.

1. Модель и выбор областей параметров

Система из двух осцилляторов ФХН, обменивающихся медленной переменной, находящаяся под действием гармонического сигнала, описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = A - y_1 + C(x_2 - x_1) + A_s \sin(2\pi t/T_s), \quad (1)$$

$$\varepsilon \frac{dy_1}{dt} = x_1 - y_1^3/3 + y_1, \quad (2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = A - y_2 + C(x_1 - x_2) + A_s \sin(2\pi t/T_s), \quad (3)$$

$$\varepsilon \frac{dy_2}{dt} = x_2 - y_2^3/3 + y_2. \quad (4)$$

Хорошо известно, что изолированные элементы данной системы находятся в устойчивом стационарном состоянии при $|A| > 1.0$, из которого при $|A| = 1.0$ рождается предельный цикл в результате БАХ, обусловленной в данном случае наличием N-образной изоклины. Решающее значение для процесса образования ритмов при взаимодействии автоколебательных элементов имеет величина ε . Из изучения коллективных мод локально сцепленных осцилляторов известно, что релаксационность определяет богатство набора аттракторов, размеры областей их устойчивости в пространстве параметров и скорости переходов между аттракторами [35, 36, 42].

В нашем случае рабочая область по ε ($0.001 < \varepsilon < 0.01$) обеспечивает заметную область сосуществования синфазного и антифазного решений на фазовой диаграмме и разумное число сложных аттракторов при наличии сигнала, так как при больших релаксационностях очень малые изменения периода сигнала приводят к смене аттрактора, что затрудняет анализ закономерностей синхронизации.

В этом параграфе будет рассмотрена автономная пара осцилляторов ($A_s = 0$), перечислены основные решения и показаны области их существования на параметрической плоскости. Динамическое поведение двух сцепленных одинаковых двумерных осцилляторов изучалось много раз и основные результаты хорошо известны. Однако наш выбор значений параметра A около БАХ и интервала значений релаксационности приводит к появлению малоизвестных режимов, которые интересны как в автономной системе (1)-(4) при $A_s = 0$, так и при взаимодействии этой системы с сигналом. Причины появления этих режимов связаны с существованием так называемой бифуркации «утки» [43], то есть с образованием периодических траекторий малого периода и амплитуды, которые предшествуют взрывному появлению обычного релаксационного цикла при переходе параметра A через точку бифуркации (рис. 1).

Амплитуды этих циклов крайне чувствительны к величине параметра A , а период $\sim \sqrt{\varepsilon}$. Эти особенности и определяют рабочую область по параметру ε , так как при больших релаксационностях (очень малых ε) «утиные» траектории практически не видны. Динамическое поведение **изолированных** осцилляторов типа ФХН при наличии «утки» под действием периодического сигнала изучено [44–46], хотя и не так подробно, как классический осциллятор ФХН. Основное внимание было направлено на исследование режима динамического хаоса, который образуется при $\varepsilon \sim 0.1$, и на резонанс сигнала с малоамплитудными колебаниями. Совсем недавно [47] хаотизация кусочно-линейного осциллятора ФХН при наличии слабого гармонического сигнала была продемонстрирована аналитически.

При наличии ингибиторного взаимодействия двух осцилляторов набор динамических режимов расширяется. На рис. 2 представлена часть фазовой диаграммы

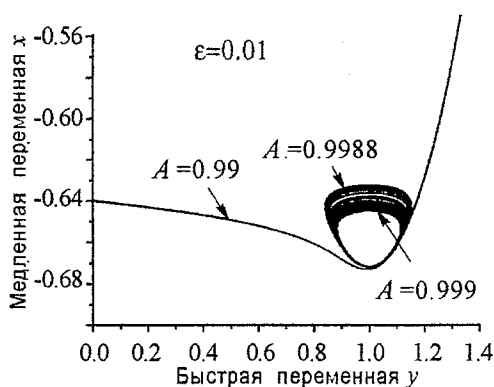


Рис. 1. Поведение фазовых траекторий изолированного осциллятора ФХН при $\varepsilon = 0.01$ при $A = 0.999$, $A = 0.9988$ и $A = 0.99$ вблизи точки срыва. Для $A = 0.99$ в выбранном масштабе поместилась только часть хорошо известной траектории осциллятора ФХН



Рис. 2. Границы устойчивости режима 1:0 (до $A = 0.997$) и противофазного аттрактора (до $A = 0.95$) при $\varepsilon = 0.003$.

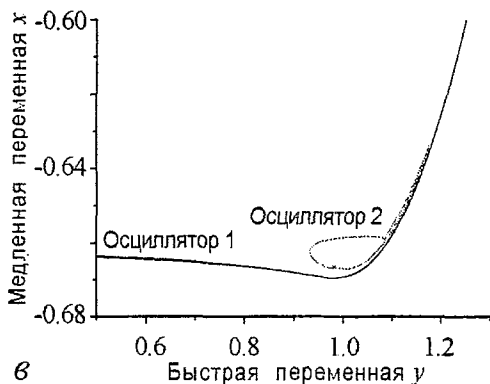
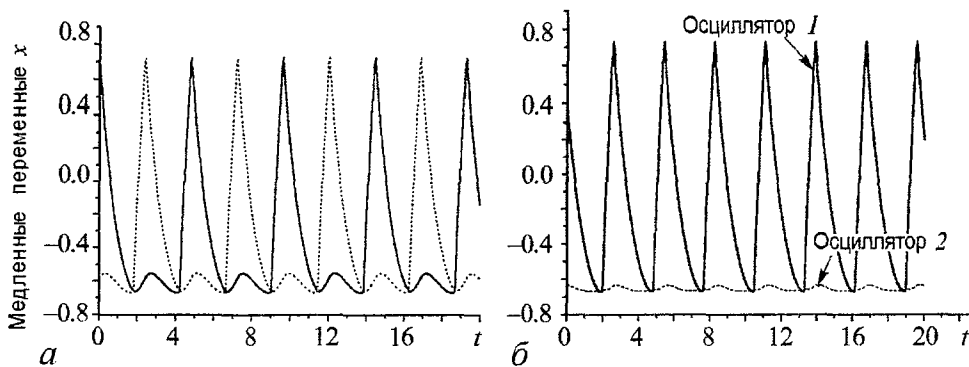


Рис. 3. Развертки медленных переменных двух связанных осцилляторов (без сигнала) при $A = 0.98$, $\varepsilon = 0.003$. a – противофазный режим, $C = 0.4$ (траектории различаются толщиной линий); b – режим 1:0, $C = 0.18$; v – детальный фазовый портрет режима 1:0 вблизи точки срыва

($A < 0.95$) системы (1), примыкающая к БАХ для $\varepsilon = 0.003$. На ней изображены границы устойчивости двух типов динамических режимов как функции параметров A (близость к бифуркации) и C (сила связи).

Основной противофазный режим (рис. 3, a), который в жестких системах ($\varepsilon \sim 10^{-4}$) устойчив при очень малых силах связи, при промежуточных релаксационностях уступает место режиму 1:0 (рис. 3, b), где только один осциллятор совершает полноамплитудные колебания, то есть генерирует вспышку быстрой переменной.

Рис. 3, v показывает поведение траекторий на фазовой плоскости. Видно, что тот из осцилляторов, который не генерирует вспышки, имеет траекторию, состоящую из двух частей: петля «утиной» траектории и вторая, узкая петля, вытянутая вдоль траектории большого цикла второго осциллятора. Вторая петля обусловлена ингибиторной связью, а первая петля порождается собственной динамикой, так как разность значений медленных переменных осцилляторов очень мала в области образования «утиной» петли. Вся траектория расположена внутри большого цикла и генерация вспышки невозможна.

Области фазовой диаграммы на рис. 2 не являются сплошными, так как имеются очень малые интервалы сил связи, где устойчив только синфазный режим. Эти интервалы разделяют решения, которые по сути одинаковы, но различаются деталями траекторий малых петель. Исследование этого тонкого эффекта, который имеет место только вблизи бифуркации, выходит за рамки настоящей работы.

Усиление релаксационности осцилляторов прижимает область устойчивости режима 1:0 к $A = 1.0$ и расширяет область устойчивости противофазного режима. Например, при $\varepsilon = 0.001$ и $A = 0.97$, синфазное решение с периодом ($T_{in} = 2.87$) и противофазный цикл ($T_{anti} = 4.53$ при $C = 0.2$) начинают сосуществовать уже при $C \sim 0.05$. Напротив, ослабление релаксационности (например, $\varepsilon = 0.01$) расширяет область устойчивости режима 1:0 ($C \in (0.053, 0.29)$ при $A = 0.97$), отодвигая область начала устойчивости антифазного режима в сторону больших сил связи. Отметим, что значения параметра $\varepsilon \sim 0.01$ являются весьма популярными при численном изучении ансамблей осцилляторов ФХН. В изолированном осцилляторе с такой релаксационностью утиные траектории наблюдаемы лишь в очень малой области параметров [41, 47], но, как мы увидим ниже, в ингибиторно связанных осцилляторах связь обеспечивает попадание фазовой точки в область существования утиных траекторий и устойчивый режим 1:0 занимает существенную часть фазовой диаграммы вблизи БАХ.

Второй важный параметр системы (1)-(4) – амплитуда сигнала. Выбор параметра A вблизи БАХ определяет и масштаб амплитуды сигнала, которая не должна сильно превышать разность между A и 1.0. Мы рассмотрим отдельно режимы, возникающие при наличии сигнала с амплитудой меньше и больше ($1.0 - A$). Если амплитуда сигнала заметно больше этой разности, то положительные части длиннопериодических сигналов ($T_s > T_{anti}$) будут надолго сдвигать эффективное значение параметра A в область устойчивости стационарного состояния ($A > 1.0$). При нашем выборе записи сигнала, синфазное смещение A_{eff} обоих осцилляторов в область существования устойчивого стационарного состояния приведет к полному доминированию синфазного решения. В настоящей работе будут рассмотрены синфазные сигналы, но если сигналы, приложенные к разным осцилляторам, сдвинуты по фазе, то ограничение по амплитуде сигнала может быть изменено.

Уравнения системы решались, как правило, традиционным численным методом Рунге – Кутты 4-го порядка (с двойной точностью). Сравнение разных версий этого метода и изменение точности вычислений позволяют утверждать, что представленные результаты не являются артефактами численных методов или долгоживущими переходными процессами. Алгоритмы поиска и идентификации аттракторов основаны на переборе начальных точек и наблюдениях за динамикой межвспышечных интервалов каждого осциллятора по мере выхода систем на аттрактор. Поиск границ устойчивости найденного аттрактора удобно производить, медленно меняя один или два параметра, не покидая найденный аттрактор и уточняя шаг по параметрам в случае потери устойчивости аттрактора.

2. Синхронные режимы: сигналы малой амплитуды

При обсуждении набора динамических режимов прежде всего следует отметить, что классические закономерности вынужденных колебаний изолированного осциллятора имеют место и в системе (1)-(4) для синфазного решения. Синфазный аттрактор, который устойчив при данном типе связи, имеет малый бассейн притяжения. Оценки показывают, что при отсутствии сигнала система (1)-(4) с $\varepsilon \approx 0.001$ покидает этот аттрактор, если разность значений медленных переменных между ос-

цилляторами превышает 2–3 процента. При приближении фазовых точек к минимуму изоклины этого различия оказывается достаточно для дефазирования системы после резкого скачка одной фазовой точки на вторую ветвь изоклины. При добавлении синфазного сигнала бассейн синфазного решения резко расширяется для тех периодов сигнала, которые не порождают сложных решений в системе (1)-(4). Далее мы будем рассматривать только режимы, отличающиеся от синфазного, имея в виду, однако, что они с ним сосуществуют.

При наличии сигнала все сложные режимы имеют период, кратный периоду сигнала, то есть $nT_s = T$, где T - полный период, состоящий из некоторого числа оборотов каждого осциллятора по своему предельному циклу. Обычно (для изолированных осцилляторов) это соотношение выглядит как $nT_s = \sum^m T_i$, где T_i - набор из m межвысшыщечных интервалов за период T . Если амплитуда сигнала невелика, то и флуктуации T_i невелики, что позволяет в первом приближении заменить T_i на средний период колебаний и ввести традиционное число вращения m/n (см., например, [5]). Однако присутствие ингибиторной связи и близость системы к БАХ накладывают свои ограничения на набор T_i , так как теперь

$$nT_s = \sum^{m_1} T_i^{(1)} = \sum^{m_2} T_i^{(2)},$$

где m_i числа вспышек в первом (втором) осцилляторе за один период.

Теперь, в отличие от вынужденных колебаний изолированного осциллятора, m_1 может быть не равно m_2 , и разброс T_i может быть большим даже в случае $m_1 = m_2$. Иными словами, синхронизация каждого осциллятора с внешним сигналом должна учитывать дефазирющее действие ингибиторной связи между осцилляторами.

Рассмотрим основные эффекты сигнала с добифуркационной амплитудой, то есть сигнала с $A_s < (1.0 - A)$ в разных областях значений периода сигнала. При выборе конкретных значений периода сигнала мы будем использовать периоды синфазного и противофазного режимов как точки отсчета. Если период сигнала близок к периоду цикла изолированного осциллятора, то весь эффект сигнала сводится к расширению бассейна притяжения синфазного режима.

2.1. Симметричные периодические режимы. В этом параграфе рассмотрим отдельно режимы с $m_1 = m_2$. Действие синфазного сигнала с периодами, кратными периоду антифазного режима T_{anti} , проявляется в образовании полос синхронизации $nT_s = T_{anti}$, где $n = 2, 4$ (более высокие частоты сигнала не рассматривались) во всем интервале изученных релаксационностей. Случай $n = 1, 3$ следует рассматривать отдельно, так как здесь устойчивость антифазного режима зависит от ϵ . Физическая причина синхронизации ясно видна из рис. 4, на котором представлены развертки медленных переменных и сигнала.

Отрицательные полупериоды сигналов уменьшают эффективное значение A и ускоряют наступление вспышки. Антифазные колебания точно подстраиваются под сигнал за счет значительного изменения периода, то есть в широком интервале значений периода сигнала (от $T_s = 1.97$ до 2.55 при указанных выше параметрах). Когда фазовые точки осцилляторов далеко от точки срыва, они нечувствительны к сигналу

(рефрактерное состояние) и время прохода по циклу является главным характерным временем процесса. В силу рефрактерности большей части траекторий это время нельзя уменьшать как угодно с помощью сигнала, что и дает нижнюю границу полосы синхронизации режима с $2T_s = T_{anti}$. Из сравнения траекторий на рис. 4 до и после выключения сигнала легко видеть, что вблизи области генерации вспышки сигнал значительно увеличивает расстояние между траекториями осцилляторов в фазовом пространстве. Этот эффект важен при обсуждении чувствительности аттракторов к внешним воздействиям, например, шумовым. Если период сигнала точно равен половине периода автономного антифазного цикла, то сигнал не оказывает влияния, так как вспышки происходят при нулевом значении сигнала. Дальнейшее увеличение периода синфазного сигнала приводит к слиянию фазовых точек и переходу системы на синфазные колебания. Аналогично происходит синхронизация и при $n = 4$, но с более узкой полосой $T_s \in (1.0, 1.3)$.

Значительно сложнее обнаружить синхронизацию при $n = 3$, $3T_s = T_{anti}$, так как в этом случае работают как отрицательные, так и положительные полупериоды сигнала (рис.5) и полоса синхронизации очень узкая по сравнению с $n = 2, 4$ (T_s от 1.47 до 1.5 при $\varepsilon = 0.003$). Заметим, что период получившегося режима короче, чем период автономного антифазного цикла ($T_{anti} = 5.0$ при $\varepsilon = 0.003$), а развертки несимметричны: один положительный полупериод сигнала задерживает наступление вспышки у одного осциллятора, а один отрицательный полупериод ускоряет появление вспышки у второго осциллятора. Задерживающий полупериод сигнала сильно сближает траектории осцилляторов вблизи точки срыва один раз за период, в то время как в автономном антифазном режиме такое сближение происходит дважды за период.

Синхронизация синфазного сигнала с противофазным режимом при $T_s \approx T_{anti}$ может происходить за счет несимметрии разверток результирующего режима вблизи точек срыва, аналогично тому как это имело место выше при синхронизации $3T_s = T_{anti}$. И в этом случае следует отметить наличие очень коротких временных интервалов, где значения переменных осцилляторов по обоим переменным почти совпадают, но производные имеют разные знаки (рис. 6). Тем не менее, начиная с релаксационностей $\varepsilon \leq 0.001$, этой малости достаточно для убегания от синфазного режима, и противофазный режим формально устойчив, хотя полоса синхронизации очень узкая (T_s от 4.48 до 4.54, при $T_{anti} = 4.53$, $\varepsilon = 0.001$). Помимо узости полосы синхронизации, наличие участков с близкими траекториями означает большую чувствительность к шуму, который переводит систему в синфазный режим.

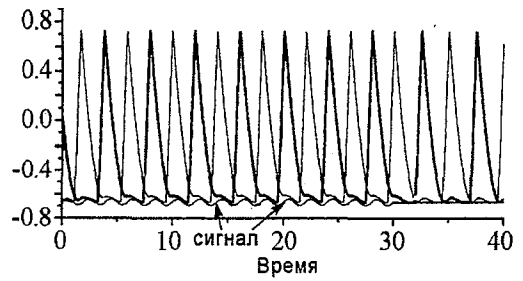


Рис. 4. Развертки медленных переменных (осцилляторы различаются толщиной линий) для антифазного аттрактора, синхронного с двумя периодами сигнала, $A_s = 0.025, T_s = 2.0$ при $A = 0.97, C = 0.2, \varepsilon = 0.003$. Развертка сигнала смещена к медленному участку траектории вблизи $x_i = -0.66$ и искусственно увеличена, чтобы было легче следить за влиянием сигнала на генерацию вспышек быстрой переменной, которая в этих координатах наблюдается как резкое возрастание медленной переменной. При $T = 30$ сигнал выключен и система выходит на обычный антифазный режим колебаний, устойчивый за счет ингибиторной связи

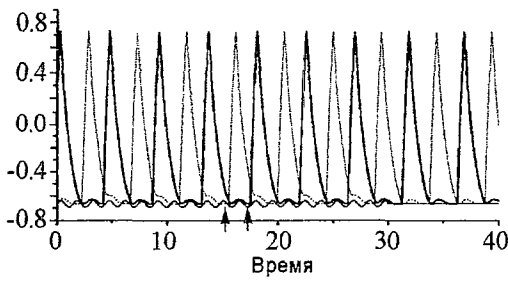


Рис. 5. Развертки медленных переменных для антифазного аттрактора, синхронного с тремя периодами сигнала $A_s = 0.025, T_s = 1.47$, при $C = 0.2, A = 0.97, \epsilon = 0.003$. Стрелками отмечены примеры задерживающего и ускоряющего полупериодов сигнала, соответственно

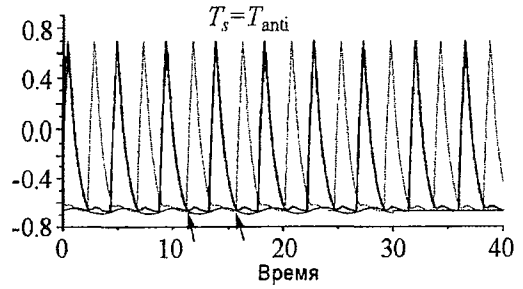


Рис. 6. Развертки медленных переменных для антифазного аттрактора, синхронного с сигналом $A_s = 0.025, T_s = 4.5$, при $C = 0.2, A = 0.97, \epsilon = 0.001$. Стрелками указаны критические моменты, которые определяют потерю устойчивости антифазного решения при уменьшении релаксационности. Для сравнения с автономным антифазным режимом сигнал выключен при $T = 30$

Если релаксационность не очень велика, например, $\epsilon = 0.003$, то синфазный сигнал с периодом, близким к T_{anti} , приводит к образованию нового сложного предельного цикла, структура которого есть результат взаимодействия ингибиторной связи и сигнала (рис. 7), $2T_s = T_1 + T_2$, где T_i - два существенно разных межвспышечных интервала, составляющих полный период цикла. Обозначим такой режим R222: на два периода сигнала приходится по два межвспышечных интервала в каждом осцилляторе (рис. 7, а).

Короткий интервал - это минимальное время движения по циклу, в то время как большой интервал обусловлен двумя последовательными задержками одного осциллятора вблизи точки срыва за счет ингибиторной связи. В этом режиме важны все полупериоды сигнала: отрицательные ускоряют наступление всплеск, несмотря на значительную разность значений медленных переменных (по сравнению с автономным антифазным режимом), а положительные полупериоды обеспечивают «сдвоенность» задержек осцилляторов, то есть большой разброс межвспышечных интервалов. Динамический механизм разного отклика осцилляторов на сигнал нетривиален и связан с образованием дополнительной очень маленькой петли на фазовом порт-

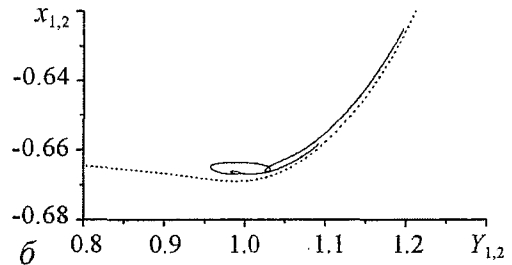
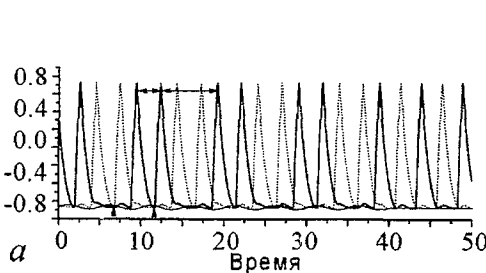


Рис. 7. а - развертки медленных переменных для сложного аттрактора, синхронного с двумя периодами сигнала $A_s = 0.025, T_s = 5.0$, при $C = 0.2, A = 0.97, \epsilon = 0.003$. Величины интервалов между всплесками: 2.8, 7.2 (указаны на развертке одного осциллятора). Отмечены моменты образования неодинаковости T_i . Сигнал выключен при $T = 40$. б - часть фазового портрета вблизи точек срывов, отмеченных на рис. (а)

следующий цикл, несмотря на близость фазовых переменных обоих осцилляторов. В этом принципиальное отличие данного режима от режимов $nT_s = T_{anti}, n = 1, 3$, в которых траектории близко сходились при нулевом значении сигнала, а не при максимально положительном. Часть траектории, выходящая из петли и поднимающаяся вдоль предельного цикла, обусловлена ингибиторной связью со вторым осциллятором, фазовая точка которого перескочила на вторую ветвь изоклины. Какой из осцилляторов выйдет на петлевую траекторию, определяется их предысторией, а сама петля есть одна из «утиных» траекторий, которые мы рассматривали в предыдущем параграфе. Эти траектории образуются только вблизи бифуркации рождения цикла и роль сигнала с добифуркационной амплитудой сводится к кратковременному, но в нужный момент, смещению эффективного значения параметра A ближе к 1.0, что увеличивает область притяжения «утиных» траекторий. Размеры этих петель и их характерные периоды зависят от ε таким образом, что с ростом релаксационности область существования петель исчезает, а вместе с ней и область устойчивости режима R222 и аналогичных ему. Размер полосы (или полос) синхронизации R222 мал по сравнению с T_{anti} ($T_s \in (5.0, 5.2)$ при $A_s = 0.02, \varepsilon = 0.003, A = 0.97$), так как продолжительность короткого межвспышечного интервала уже минимальна и определяет размер полосы синхронизации. Изменяя период сигнала, можно обнаружить и другие предельные циклы, образование которых обусловлено наличием «утиных» траекторий: например, при $T_s = 4.1$ устойчив режим R655 с пятью вспышками в течение шести периодов сигнала.

2.2. Несимметричные периодические режимы. В режимах типа R222 траектории осцилляторов сдвинуты во времени, но одинаковы по числу вспышек в полном периоде. Однако внешний сигнал может породить и глобально несимметричные решения, с неодинаковыми числами вспышек у осцилляторов. На рис. 8 представлен самый простой цикл этого типа для сигналов с добифуркационной амплитудой: R212.

Как и в случае режима R222, один из положительных полупериодов сигнала удерживает один из осцилляторов вблизи точки срыва на петлевой траектории, позволяя второму генерировать подряд две вспышки. По существу, положительные полупериоды работают через раз, так как второй не влияет на этот режим, действуя в течение рефрактерной части траектории. Поэтому данный режим может существовать и в форме R112 в довольно широком интервале периодов сигнала $T_s \in (7.3, 7.7)$. При значительном увеличении периода сигнала появляются дополнительные возможности для образования устойчивых несимметричных режимов вида R225, R113, так как на положительном полупериоде сигнала может уместиться несколько вспышек быстрой переменной. Однако исследования сигналов с большими периодами выходит за пределы данной работы.

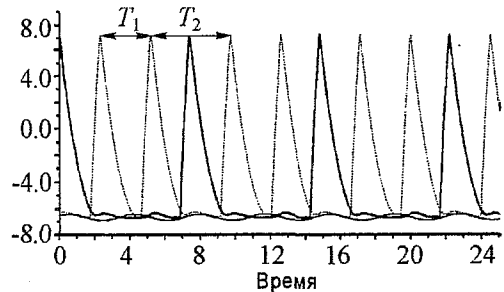


Рис. 8. Развертки медленных переменных для сложного несимметричного аттрактора R212, синхронного с двумя периодами сигнала $A_s = 0.025, T_s = 3.7$, при $C = 0.2, A = 0.97, \varepsilon = 0.003$. Величины интервалов между вспышками у одного осциллятора: $T_1 = 2.9, T_2 = 4.5$

До сих пор были использованы такие параметры модели ($A = 0.97, C = 0.2$), которые соответствуют сосуществованию синфазного и противофазного устойчивых предельных циклов (см. рис. 2). Однако на фазовой диаграмме имеется ещё одна область биритмичности, в которой синфазный режим сосуществует с режимом 1:0. Выберем для определенности $A = 0.98, C = 0.15, A_s = 0.015$. В этой области параметров сигнал может породить предельные циклы, отличающиеся от рассмотренных выше. Прежде чем переходить к новым режимам, отметим, что антифазный предельный цикл, который неустойчив в автономной системе при такой силе связи, становится устойчивым при наличии сигнала, если значение периода $T_s \in (2.4, 2.67)$, то есть стабилизируется синхронный режим $2T_s = T_{anti}$. Остается устойчивым и режим R222 (см. рис. 7) в пределах узких полос синхронизации $T_s \in (1.78, 1.85)$ и $T_s \in (5.425, 5.52)$.

Специфическими к данному выбору параметров A и C являются аттракторы, возникающие из-за взаимодействия сигнала и цикла 1:0. Прежде всего отметим, что основная полоса синхронизации режима 1:0 довольно узка: $T_s \in (2.85, 2.93)$, так как расстояние между предельными циклами осцилляторов на фазовой плоскости мало (см. рис. 3, б) и даже небольшое рассогласование периодов оказывается достаточным для слипания фазовых траекторий и перехода к синфазному режиму по краям основной полосы синхронизации.

Однако при отклонении величины периода сигнала от полосы основной синхронизации возникают предельно несимметричные режимы типа $nT_s = nT_i^1 = T^2$, например: R331 ($T_s = 3.7, 3.72$), R551 ($T_s = 3.35$), R661 ($T_s = 3.37, 3.38$), R771 ($T_s = 3.22$) и т.д. Наиболее простой пример такого аттрактора для $n = 3$ приведен на рис. 9.

Аналогично устроены и другие режимы этого типа: $(n - 1)$ колебание с $T_i \sim 2.9$ и одно колебание с $T_i \sim 5.2$. Иными словами, $(n - 1)$ колебание в режиме R1:0 и один антифазный цикл.

Можно найти такие периоды сигналов, при которых реализуется другой предельный случай: симметричные аттракторы, состоящие из чередующихся частей режима R1:0, например, R433 ($T_s = 4.12, 4.17$), R855 ($T_s = 3.5$) (рис. 10).

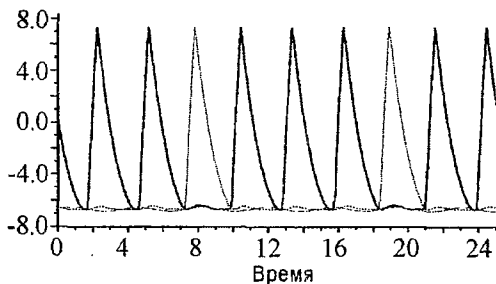


Рис. 9. Развертки медленных переменных для сложного несимметричного аттрактора R331, синхронного с тремя периодами сигнала $A_s = 0.015, T_s = 3.7$, при $C = 0.15, A = 0.98, \varepsilon = 0.003$. Величины интервалов между вспышками у одного осциллятора: 2.92, 2.92, 5.25

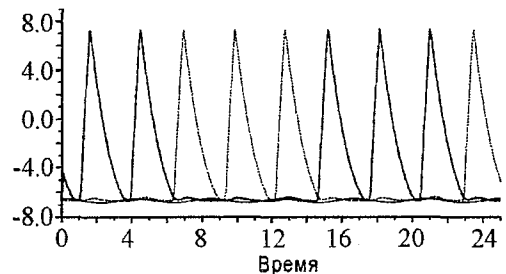


Рис. 10. Развертки медленных переменных для сложного симметричного аттрактора R433, синхронного с четырьмя периодами сигнала $A_s = 0.015, T_s = 4.15$, при $C = 0.15, A = 0.98, \varepsilon = 0.003$. Величины интервалов между вспышками: $4T_s = 16.6 = 2.86 + 2.94 + 10.8$

В обоих типах режимов разброс значений межвспышечных интервалов максимален по сравнению со всеми вышеперечисленными аттракторами, так как максимальное значение T_i должно быть кратно большому числу длительностей минимальных циклов. Узость полос синхронизации определяется необходимостью точной подгонки длительности сигнала под какое-либо число минимальных циклов, которые уже нельзя укоротить ни сигналом, ни связью.

В рассмотренной области фазовой диаграммы сигнал порождает и другие устойчивые предельные циклы с очень узкими полосами синхронизации. Их изучение выходит за рамки данной работы.

3. Синхронные режимы: большие сигналы

Рассмотрим теперь сигналы, амплитуды которых больше величины $(A - 1.0)$. В этом случае в течение части положительного полупериода сигнала $A_{eff} > 1.0$ осцилляторы останавливают движение по предельному циклу, если их фазовые точки близки к точке срыва. Как отмечалось выше, при больших амплитудах синфазного сигнала это приводит к доминированию синфазного режима. Поэтому будут рассмотрены те амплитуды сигналов, при которых образуются нетривиальные динамические режимы, не получающиеся при добифуркационных амплитудах сигналов.

Увеличение амплитуды сигнала приводит к появлению устойчивых режимов типа $nT_s : nT^1 : 0$, где n чаще всего равно 1. Эти режимы представляют собой еще более сложное образование, чем автономный режим R1:0, так как синхронизация одного осциллятора с сигналом



Рис. 11. Диаграмма синхронизации режима $nT_s : nT^1 : 0$ без разделения по n при $A = 0.97, \epsilon = 0.003, C = 0.2$, амплитуда сигнала $A_s = 0.05$

должна сопровождаться удержанием второго осциллятора вблизи стационарного состояния. Согласование этих требований приводит к необычному виду диаграммы синхронизации (рис. 11), вычисленной, например, для $A = 0.97, A_s = 0.05, \epsilon = 0.003, C = 0.2$, то есть для значений параметров, при которых автономный режим 1:0 неустойчив. Прямоугольниками представлены области устойчивости режима $nT_s : nT^1 : 0$ для любых n , в зависимости от периода сигнала.

Видно, что вся широкая область по T_s разбивается на сегменты, разделенные промежутками, где имеется только синфазный режим. Размеры сегментов определяются характерным временем малоамплитудных осцилляций траекторий осцилляторов вблизи точки срыва. Для демонстрации роли этих колебаний рассмотрим поведение траекторий при таком периоде сигнала $T_s = 4.1$, который обеспечивает заметный интервал времени удержания обеих фазовых точек около стационарного состояния (рис. 12).

На рис. 12, а показан один период режима R1:1:0 и ясно виден интервал времени, в котором сигнал удерживает оба осциллятора в стационарном состоянии. При таком разрешении неясно, почему только один осциллятор доходит до точки срыва и дает вспышку, когда действие сигнала прекращается. Детальная картина поведения траекторий представлена на рис. 12, б. Из нее ясно, что тот осциллятор, который

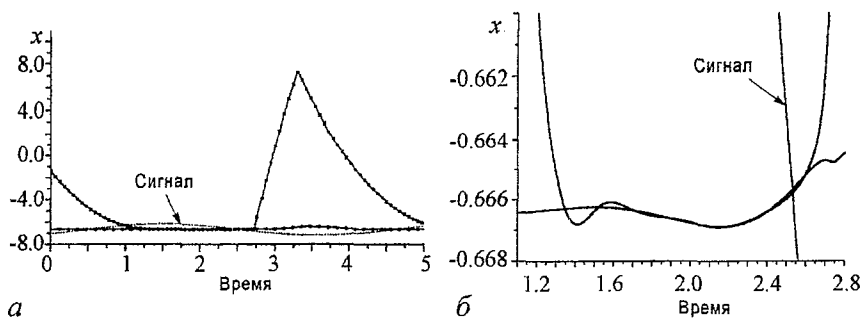


Рис. 12. *a* – развертки медленных переменных для режима $R1 : 1 : 0$ при $A = 0.97$, $\varepsilon = 0.003$, $C = 0.2$, амплитуда сигнала $A_s = 0.05$; *б* – детальное поведение траекторий около точки срыва

приближается к точке срыва после генерации вспышки, попадает в режим малоамплитудных осцилляций, которые приводят его к новому срыву. Так как периоды осцилляций не зависят от периода сигнала, то найдутся такие интервалы периодов сигнала, в которых удерживающее действие сигнала закончится в момент практически полного слияния траекторий, что приведет к синфазному режиму. Поэтому размеры интервалов значений периодов сигнала, где на синхрограмме (см. рис. 11) имеются только синфазные колебания, имеют порядок периодов малоамплитудных «утиных» осцилляций. Рассмотренные режимы образуются и в той области фазовой диаграммы, например, $A = 0.98$, $C = 0.15$, $A_s = 0.04$, где устойчив автономный режим $R1:0$.

4. Обсуждение

Принципиальным отличием данной работы от многочисленных исследований по вынужденным колебаниям нелинейных осцилляторов является рассмотрение системы, в которой исходно имеется сосуществование по крайней мере двух предельных циклов, различающихся периодами и фазовыми соотношениями. Была рассмотрена вполне реалистическая ситуация, в которой сигнал представляет собой некоторое общее поле, одинаково модулирующее параметры обоих осцилляторов. На амплитуду сигнала были наложены ограничения, позволяющие избежать полного доминирования синфазного режима колебаний, вынужденные колебания которого уже хорошо изучены.

В качестве модели, обладающей мультиритмичностью, была использована простая «базовая» система из двух одинаковых релаксационных осцилляторов ФХН, связанных диффузией по медленным переменным. В модели в явном виде присутствуют параметры управляющие степенью нелинейности (ε) и близостью к бифуркации (A) Андронова – Хопфа. Вблизи БАХ такая связь обеспечивает существование трех устойчивых предельных циклов и попарное сосуществование по крайней мере двух из них. Обмен медленной переменной в реакционно-диффузионных уравнениях обычно рассматривается в связи с изучением диссипативных структур и автосолиитонов в средах, где диффузия ингибитора быстрее, чем диффузия активатора [52, 53]. В автоколебательных системах подобные взаимодействия обнаруживаются при исследовании малых ансамблей из нейронов [54]. Недавние исследования генетиче-

ских осцилляторов также привели к моделям, где доминирует обмен медленной переменной [55, 56].

Изучение взаимодействия сигнала с несинфазными предельными циклами выявило два основных механизма образования коллективных режимов. Первый механизм - это классический захват частоты колебаний, который работает в случае образования антифазного режима. Существуют интервалы значений периода сигнала, в которых реализуется антифазный режим $nT_s = T_{anti}$. Особенность систем с антифазными циклами, порожденными ингибиторной связью, состоит в том, что максимальный размер полосы синхронизации имеет место при $n = 2$, а полоса с $n = 1$ очень узка и наблюдается только для очень жестких осцилляторов. Синхронизация на удвоенной частоте приводит к устойчивым антифазным колебаниям даже при малых силах связи, где автономный антифазный режим неустойчив. Кроме того, есть физические основания полагать, что антифазный режим с $n = 2$ значительно менее чувствителен к шуму, чем автономный антифазный режим, так как траектории вынужденных колебаний проходят дальше от точки срыва. Выделенность $n = 2$ обусловлена в нашем случае наличием только двух осцилляторов в системе. Однако ясно, что похожие особенности процесса взаимодействия сигнала и предельных циклов с разными фазовыми соотношениями будут иметь место и в массивах из большего числа осцилляторов.

Второй механизм действия сигнала связан с существованием «утиных» траекторий (см. рис. 1), если значение A близко к БАХ и осциллятор не очень жесткий. В автономной системе это приводит к режиму 1:0, то есть к постоянному удержанию одного осциллятора вне цикла. При наличии сигнала удержание перестает быть постоянным. Сигнал модулирует отклонение A_{eff} от бифуркационного значения, приводя к тому, что какой-либо из осцилляторов задерживается на малой петле «утиной» траектории на очень короткое время, позволяя второму осциллятору совершить два, три и т.д. (в зависимости от периода сигнала) цикла подряд. Сигнал чередует режимы 1:0 и антифазный режим, порождая такие моды, как R222 (см. рис. 7), R212 (см. рис. 8), R331 (см. рис. 9) и другие. Если амплитуда сигнала больше расстояния до точки бифуркации, то возникают дополнительные режимы типа $n : n : 0$, в которых сигнал управляет полосами синхронизации (см. рис. 11). Все режимы, в которых участвует второй механизм действия сигнала, значительно более чувствительны к шуму, чем антифазный режим. При наличии сосуществующего устойчивого синфазного режима вопрос о наблюдаемости этих режимов в реальных процессах заслуживает отдельного рассмотрения.

Следует отметить еще одну особенность аттракторов, индуцируемых сигналом вблизи БАХ, проявляющуюся в распределениях величин межвспышечных интервалов. На классической диаграмме синхронизации, состоящей из языков синхронизации, разброс T_i обычно имеет тот же порядок, что и отношение периодов сигнала и свободного периода автоколебательной системы. В нашей системе вариации межвспышечных интервалов могут быть велики, даже когда период сигнала не сильно отличается от периода автономных колебаний. Причина большой вариабельности связана с образованием предельных циклов типа R222, R433, в которых осцилляторы периодически попадают на «утиные» траектории, а значения T_i принимают дискретные значения из-за наличия ингибиторной связи, которая делает траектории нечувствительными к сигналам в течение рефрактерных периодов почти фик-

сированной длительности. Для осцилляторов связанных по медленной переменной описанное явление можно рассматривать как механизм генерации variability в присутствии сигнала.

Использованный метод исследования не может гарантировать нахождения всех периодических решений даже в ограниченном интервале изменения периода сигнала. Однако, он эффективен для нахождения наиболее вероятных решений. В работе рассмотрена популярная, но все-таки «теоретическая» модель, которая не описывает конкретные процессы. Полученные результаты необходимо проверить на других моделях, демонстрирующих мультиритмичность. Однако, выявленные специфические особенности действия сигнала на мультиритмичные системы следует принимать во внимание при интерпретации экспериментальных данных о динамике вынужденных колебаний массивов осцилляторов, особенно, если заранее неизвестен тип взаимодействия между ними.

Автор признателен Б. Безручко, М. Заксу, А. Кузнецову, А. Полежаеву, А. Пиковскому, М. Розенблюму за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, Программы «Проблемы радиофизики» ОФН РАН и Программы поддержки ведущих научных школ.

Библиографический список

1. *Van der Pol B.* Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. (Reception with reactive triode) // *Phil. Mag.* 1926. Vol. 3. P. 64.
2. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978
3. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968.
4. *Ланда П.С.* Автоколебательные системы с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
5. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2001.
6. *Glass L., Mackey M.C.* From Clocks to Chaos. The Rhythms of Life. Princeton University Press, 1988.
7. *Tass P.A.* Phase Resetting in Medicine and Biology. Stochastic Modelling and Data Analysis. Springer, Berlin, 1999.
8. *Yuasa H., Ito M.* Coordination of many oscillators and generation of locomotory patterns // *Biol. Cybern.* 1990. Vol. 63. P. 177.
9. *Collins J.J., Stewart I.N.* Coupled nonlinear oscillators and the symmetries of animal gaits // *J. Nonlinear Sci.* 1993. Vol. 3. P. 349.
10. *Golubitsky M., Stewart I., Buono P.-L., Collins J.J.* A modular network for legged locomotion // *Physica D.* 1998. Vol. 115. P. 56.
11. *Takamatsu A. et al.* Spatiotemporal Symmetry in Rings of Coupled Biological Oscillators of *Physarum* Plasmodial Slime mold // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87. P. 078102.

12. Wang X.-J., Rinzel J. Alternating and synchronous rhythms in reciprocally inhibitory model neurons // *Neural Comput.* 1992. Vol. 4. P. 84.
13. Cymbalyuk G.S., Nikolaev E.V., Borisyyuk R.M. In-phase and antiphase self-oscillations in a model of two electrically coupled pacemakers // *Biol. Cybern.* 1994. Vol. 71. P. 153.
14. Абарбанель Г.Д., Рабинович М.И., Селверстон А. и др. Синхронизация в нейронных ансамблях // *Усп. Физ. Наук.* 1996. Т. 166. № 4. С. 363.
15. Postnov D., Han S.K., Kook H. Synchronization of diffusively coupled oscillators near the homoclinic bifurcation // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60. P. 2799.
16. Courbage M., Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Senneret M. Emergence of chaotic attractor and anti-synchronization for two coupled monostable neurons // *Chaos.* 2004. Vol. 14. P. 1148.
17. Kopell N., Somers D. Anti-phase solutions in relaxation oscillators coupled through excitatory interactions // *J. Math. Biol.* 1995. Vol. 33. P. 261.
18. Ebeling W., Landa P.S., Ushakov V.G. Self-oscillations in ring Toda chains with negative friction // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. P. 046601.
19. Ruwisch D., Bode M., Schutz P., Markus M. Parallel analog computation of coupled cell cycles with electrical oscillators // *Phys. Lett.A.* 1994. Vol. 186. P. 137.
20. Brailove A.A., Linsay P.S. An experimental study of a population of relaxation oscillators with a phase-repelling mean-field coupling // *Int. J. Bifurcation Chaos.* 1996. Vol. 6. P. 1211.
21. Khibnik A.I. et al. Amplitude dropout in coupled lasers // *Phys. Rev. A.* 2000. Vol. 62. P. 063815.
22. Bar-Eli K. Coupling of identical chemical oscillators // *J. Phys. Chem.* 1990. Vol. 94. P. 2368.
23. Yoshimoto M., Yoshikawa K., Mori Y. Coupling among three chemical oscillators: synchronization, phase death, and frustration // *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 47. P. 864.
24. Vanag V.K., Yang L., Dolnik M., Zhabotinsky A.M., Epshtein I.R. Oscillatory cluster patterns in a homogeneous chemical system with global feedback // *Nature.* 2000. Vol. 406. P. 389.
25. Rabinovich M., Huerta R., Bazhenov M., Kozlov A.K., Abarbanel H.D.I. Computer simulations of stimulus dependent state switching in basic circuits of bursting neurons // *Phys. Rev.E.* 1998. Vol. 58. P. 6418.
26. Sosnovtseva O. V., Postnov D. E., Nekrasov A. M., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H. Phase multistability of self-modulated oscillations // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66, P. 036224.
27. Rand R.H., Holmes P.J. Bifurcations of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-linear Mech.* 1980. Vol. 15. P. 387.
28. Schreiber I., Holodniok M., Kubiček M., Marek M. Periodic and aperiodic regimes in coupled dissipative chemical oscillators // *J. Stat. Phys.* 1986. Vol. 43, P. 314.
29. Aronson D.G., Doedel E.J., Othmer H.G. An analytical and numerical study of the bifurcations in a system of linearly-coupled oscillators // *Physica D.* 1987. Vol. 25. P. 20.

30. *Ashwin P., King G.P., Swift J.W.* Three identical oscillators with symmetrical coupling // *Nonlinearity*. 1990. Vol. 3. P. 585.
31. *Crowley M.F., Epstein I.R.* Experimental and theoretical studies of a coupled chemical oscillator: phase death, multistability, and in-phase and out-of-phase entrainment // *J.Phys.Chem.* 1989. Vol. 93. P. 2496.
32. *Ruwisch D., Bode M., Volkov D.V., Volkov E.I.* Collective modes of the three coupled relaxation oscillators: the influence of detuning // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1999. Vol. 9, P. 1969.
33. *Ramana Reddy D.V., Sen A., Johnston G.L.* Experimental evidence of time-delay-induced death in coupled limit-cycle oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85. P. 3381.
34. *Renversez G.* Synchronization in two neurons: Results for a two-component dynamical model with time-delayed inhibition // *Physica D*. 1998. Vol. 114. P. 147.
35. *Volkov E.I., Stolyarov M.N.* Birhythmicity in a system of two coupled oscillators // *Phys. Lett. A*. 1991. Vol. 159, P. 61.
36. *Volkov E.I., Stolyarov M.N.* Temporal variability in a system of coupled mitotic timers // *Biol. Cybern.* 1994. Vol. 71. P. 451.
37. *Волков Д.В., Столяров М.Н., Волков Е.И.* Эффективный численный способ изучения динамики цепочек сильно релаксационных осцилляторов // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1996. Т. 4, № 3. С. 77.
38. *Volkov E.I., Stolyarov M.N.* Temporal variability generated by coupling of mitotic timers // *J. Biol. Systems*. 1995. Vol. 3. P. 63.
39. *Анищенко В. С., Нейман А. Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л.* Стохастический резонанс: индуцированный шумом порядок // *Усп. Физ. Наук*. 1999. Т. 169. С. 7.
40. *Izhikevich E.M.* Resonance and selective communication via bursts in neurons having subthreshold oscillations // *BioSystems*. 2002. Vol.67. P.95.
41. *Medvedev G.S., Cisternas J.E.* Multimodal regimes in a compartmental model of the dopamine neuron // *Physica D*. 2004. Vol. 194. P. 333.
42. *Somers D., Kopell N.* Rapid synchronization through fast threshold modulation // *Biol. Cybern.* 1993. Vol. 68. P. 393.
43. *Eckhause W.* Relaxation oscillations including a standard case of French ducks // In: *Springer Lecture Notes Math*. 1983. Vol.985. P. 449.
44. *Braaksma B., Grasman J.* Critical dynamics of the Bonhoeffer-van der Pol equation and its chaotic response to periodic stimulation // *Physica D*. 1992. Vol. 68. P. 265.
45. *Lloyd D., Lloyd A.L., Olsen L.F.* The cell division cycle: a physiologically plausible dynamic model can exhibit chaotic solutions // *BioSystems*. 1992. Vol. 27. P. 17.
46. *Landa P. S., Rabinovitch A.* Exhibition of intrinsic properties of certain systems in response to external disturbances // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 61. P. 1829.
47. *Sekikawa M., Inaba N., Tsubouchi T.* Chaos via duck solution breakdown in a piecewise linear van der Pol oscillator driven by an extremely small periodic perturbation // *Physica D*. 2004. Vol. 194. P. 227.

48. *Treutlein H., Schulten K.* Noise-induced neural impulses // *Eur. Biophys. J.* 1986. Vol. 13. P. 355.
49. *Volkov E.I., Stolyarov M.N., Zaikin A., Kurths J.* Coherence resonance and polymodality in inhibitory coupled excitable oscillators // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 066202.
50. *Postnov D.E., Sosnovtseva O.V., Han S.K., Kim W.S.* Noise-induced multimode behavior in excitable systems // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66. P. 016203.
51. *Volkov E.I., Ullner E., Zaikin A.A., and Kurths J.* // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68. P. 061112.
52. *Кернер Б., Осинков В.* // *Усп. Физ. Наук.* 1990. Т. 33. С. 679.
53. *Castets V., Dulos E., Boissonade J., De Kepper P.* Experimental evidence of a sustained standing turing-type nonequilibrium chemical pattern // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 2953.
54. *Wang X-J., Rinzel J.* Alternating and synchronous rhythms in reciprocally inhibitory model neurons // *Neural Comp.* 1992. Vol. 4. P. 84
55. *McMillen D., Kopell N., Hasty J., Collins J.J.* Synchronizing genetic relaxation oscillators by intercell signalling // *Proc. Natl. Acad. Sci.* 2002. Vol. 99. P. 679.
56. *Kuznetsov A., Kaern M., Kopell N.* Synchrony in a population of hysteresis-based generic oscillators // *SIAM J. Appl. Math.* 2005. Vol. 65. P. 392.

Отделение теоретической физики Поступила в редакцию 29.11.2005
Физического института им. П.Н. Лебедева
РАН, Москва

**FORCED OSCILLATION MODES IN A BIRHYTHMIC SYSTEM
OF TWO COUPLED RELAXATION OSCILLATORS
NEAR ANDRONOV – HOPF BIFURCATION**

E.I. Volkov

A system of two identical relaxation oscillators of the FitzHugh-Nagumo type with the parameters chosen in the vicinity of a bifurcation of limit cycle emergence was examined for the dynamic modes arising in the presence of a weak harmonic signal applied to both elements. Slow variable exchange between them gives rise to three stable limit cycles called in-phase, anti-phase, and extremely asymmetrical, in which only one of the oscillators generates spikes. In this study, we show that slow variable exchange also causes this system to respond to weak harmonic forcing in a manner quite different from what is known in the classical dynamics of forced oscillations. In addition to the expected synchronization tongues generated by interaction of the signal with the in-phase attractor, we observed at least three other consequences of the coexistence of different solutions: (i) there appeared broad bands of synchronization of the signal with the anti-phase solution at high frequencies multiple to the frequency of the anti-phase oscillations, whereas the base synchronization frequency band became much narrower; (ii) signal period ranges were found in which the limit cycles were such that several spikes were produced over the complete period and each oscillator was characterized with the same set of discrete

interspike intervals; and (iii) narrow signal period ranges were detected, in which complex limit cycles emerged, with oscillators producing different numbers of spikes per complete period and at very different interspike intervals. A qualitative explanation is proposed for the mechanism whereby complex rhythms arise in the regions of the parameters setting the relaxation properties of oscillators and their proximity to the bifurcation point.



Волков Евгений Израилевич – родился в Москве (1947). Закончил физический факультет МГУ (1971). Защитил кандидатскую диссертацию (1976). С 1976 года сотрудник сектора теоретической биофизики ФИ РАН. С 1988 года заместитель директора отделения теоретической физики ФИ РАН. В 2002 году защитил диссертацию «Исследование механизмов генерации ритмов в системах взаимодействующих биологических и физических осцилляторов» на звание доктора физико-математических наук. Область научных интересов - модели биологических мембран, математические модели автоколебательных процессов в физике и биологии, исследование коллективных режимов в небольших сетях из релаксационных элементов, роль шумов и слабых сигналов в генерации новых ритмов. Автор многих статей в отечественных и зарубежных изданиях. E-mail: volkov@td.lpi.ru



**ОЦЕНКА СВЯЗАННОСТИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ
ПУТЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФАЗОВОЙ ДИНАМИКИ:
ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА***

Д.А. Смирнов, М.Б. Бодров, Б.П. Безручко

Рассматривается задача определения наличия и направленности связи между колебательными системами только по их временным реализациям. Один из эффективных «нелинейных» подходов к ее решению основан на расчете фаз колебаний по наблюдаемым сигналам и построении модельного отображения для фазовой динамики, свойства которого позволяют судить о характере связи. Подход теоретически обоснован для слабонелинейных и слабосвязанных фазовых осцилляторов под действием нормально-белого шума. В работе в вычислительном эксперименте выясняются практические пределы применимости подхода (при различных свойствах шумов, величинах фазовой нелинейности осцилляторов и интенсивности связи). Показана применимость используемых рабочих формул для оценок связанности для широкого круга ситуаций.

Введение

Проблема определения наличия и преимущественного направления взаимодействия (связи) между двумя колебательными системами важна во многих отраслях научных исследований и практики [1-11], в частности, в медицинской диагностике [10, 11]. Для ее решения существует ряд традиционных методов в математической статистике, спектральном анализе и теории информации. В последнее время новые перспективные методы предлагаются в рамках нелинейной динамики; анализ различных подходов приведен в [11]. Один из них, названный в [12] методом эволюционного отображения, рассмотрен в данной работе. Он опирается на известный из теории колебаний факт относительно высокой чувствительности фазы колебаний к внешнему воздействию и основан на эмпирическом моделировании фазовой динамики (МФД) систем и расчете интенсивности взаимодействия по значениям параметров

* Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия.

полученной модели [12]. Метод МФД эффективен для анализа колебательных процессов, которые обладают явно выраженными основными ритмами колебаний (при этом можно корректно определить фазы колебаний) и не синхронизованы друг с другом. В его исходном варианте [12] для обеспечения надежных результатов требуются длинные стационарные ряды (около 5000 характерных периодов при умеренных шумах). Но в биологии, медицине, климатологии и других областях очень распространены нестационарные последовательности измеряемых величин [13]. При этом возникает потребность определения характеристик связанности по относительно коротким сегментам таких рядов и отслеживание их изменений во времени. Для решения этой задачи в рабочие формулы для оценок связанности были введены поправки [14], которые обеспечивают их несмещенность в случае относительно коротких рядов (длиной вплоть до 50 характерных периодов), а также были предложены рабочие формулы для их 95-процентных доверительных интервалов [14].

Выражения для новых оценок были получены для линейных несвязанных осцилляторов под действием нормального белого шума. Их применимость в других случаях не доказана и тщательно не исследовалась. Целью данной работы является систематическое исследование пределов применимости этих формул. Необходимость такого рассмотрения определяется разнообразием ситуаций, когда требуется выявить характер связи по коротким рядам.

В разделе 1 данной работы кратко описан метод МФД (п. 1.1) и методика исследования пределов его применимости (п. 1.2). В разделе 2 приведены результаты исследования: показано, как влияют на применимость оценок свойства шума (п. 2.1), нелинейность осцилляторов (п. 2.2), интенсивность связи и шума наблюдений (п. 2.3), несколько факторов вместе (п. 2.4). В заключении сделаны выводы о достаточно широкой области применимости рассмотренных рабочих формул [13] для оценки интенсивности и направленности взаимодействия.

1. Методика исследования

1.1. Метод, основанный на моделировании фазовой динамики. Основная идея метода – оценить, насколько сильно зависит будущая эволюция фазы одной системы от текущего значения фазы другой системы. Для этого по исходным временным рядам от двух систем $\{x_1(t_1), \dots, x_1(t_N)\}$ и $\{x_2(t_1), \dots, x_2(t_N)\}$ ($t_i = i\Delta t$, Δt – интервал выборки) получают временные ряды фаз их колебаний $\{\varphi_1(t_1), \dots, \varphi_1(t_N)\}$ и $\{\varphi_2(t_1), \dots, \varphi_2(t_N)\}$ [15, 16]. Затем по полученным реализациям фаз строят математическую модель.

Форму модели выбирают из следующих соображений. Для широкого круга ситуаций фазовая динамика осцилляторов, имеющих ярко выраженный основной ритм колебаний, адекватно описывается стохастическими дифференциальными уравнениями [17]

$$d\varphi_{1,2}/dt = \omega_{1,2} + G_{1,2}(\varphi_1, \varphi_2) + \xi_{1,2}(t), \quad (1)$$

где $\omega_{1,2}$ – параметры, определяющие угловые частоты колебаний, $\xi_i(t)$ – независимые гауссовы белые шумы с нулевым средним и автокорреляционными функциями (АКФ) $\langle \xi_i(t)\xi_i(t') \rangle = \sigma_i^2 \delta(t - t')$. При работе с дискретными временными рядами

удобно рассматривать разностную форму уравнений

$$\Delta_{1,2}(t) = F_{1,2}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \mathbf{a}_{1,2}) + \varepsilon_{1,2}(t), \quad (2)$$

где $\Delta_i(t) \equiv \varphi_i(t + \tau) - \varphi_i(t)$ – приращение фазы за время τ , $\varepsilon_i(t)$ – шумы с нулевым средним, F_i – тригонометрические многочлены, \mathbf{a}_i – векторы их коэффициентов.

Для построения модели (2) задают интервал τ (обычно принимается равным характерному периоду колебаний [18]) и порядки многочленов F_i . Используя временные ряды, получают оценки коэффициентов $\hat{\mathbf{a}}_i$ методом наименьших квадратов. Затем рассчитывают интенсивности воздействия осцилляторов друг на друга по коэффициентам модели.

Если бы «истинные» уравнения фазовой динамики были известны априори, интенсивность воздействия второй системы на первую c_1 определилась бы как крутизна зависимости F_1 от φ_2 , и первой на вторую – c_2 – аналогично:

$$c_{1,2}^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial F_{1,2}(\varphi_1, \varphi_2, \mathbf{a}_{1,2}) / \partial \varphi_{2,1})^2 d\varphi_1 d\varphi_2. \quad (3)$$

Индекс направленности определяется разницей c_1 и c_2 . Это были бы *истинные* характеристики связи. Но при анализе временного ряда имеются только оценки коэффициентов $\hat{\mathbf{a}}_i$, по которым нужно рассчитать оценки величин c_1 и c_2 . Наиболее прямой путь – использование формулы (3), подставляя оценки $\hat{\mathbf{a}}_i$ вместо истинных значений \mathbf{a}_i . Но при этом оценки $\hat{c}_{1,2}$ оказываются хороши только для очень длинных стационарных сигналов (длина порядка 5000 характерных периодов при частоте выборки 10–20 точек на периоде и умеренном уровне шума [12, 14]). Для более коротких рядов, с которыми приходится сталкиваться при анализе многих реальных сигналов, эти оценки оказываются смещенными. В [14] были предложены новые оценки $\hat{\gamma}_{1,2}$ для величин $c_{1,2}^2$ и оценка $\hat{\delta} \equiv \hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_1$ для индекса направленности в форме $\delta = c_2^2 - c_1^2$ (см. Приложение). Были получены также формулы для их 95-процентных доверительных интервалов вида $[\hat{\gamma}_i - 1.6\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_i}, \hat{\gamma}_i + 1.8\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_i}]$ и $\hat{\delta} \pm 1.6\hat{\sigma}_{\hat{\delta}}$, где $\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_i}$ и $\hat{\sigma}_{\hat{\delta}}$ рассчитываются по *тому же* короткому ряду. Новые оценки не смещены и обеспечивают частоту ошибочных выводов не выше 5% и для относительно коротких рядов (хотя с длиной не менее 50 периодов [14]).

1.2. Методика исследования пределов применимости метода. Рабочие формулы для оценок $\hat{\gamma}_{1,2}$, $\hat{\delta}$ были получены аналитически для линейных несвязанных фазовых осцилляторов с нормальным белым шумом, то есть для системы (1) с $G_{1,2} \equiv 0$. Ее уравнения аналитически приводятся к виду

$$\Delta_i(t) = \omega_{1,2}\tau + \varepsilon_i(t), \quad i = 1,2, \quad (4)$$

где ε_i – независимые нормальные шумы с дисперсиями $\sigma_i^2\tau$ и корреляционными функциями, линейно спадающими до 0 на интервале от 0 до τ [14]. Если одно из перечисленных свойств системы (нормальность и вид корреляционной функции шумов ε_i , линейность осцилляторов, отсутствие связи) нарушается, то и оценки $\hat{\gamma}_{1,2}$, $\hat{\delta}$ могут стать смещенными, а рабочие формулы для доверительных интервалов могут не соответствовать 95-процентной надежности.

В работе мы проводим систематическое исследование пределов применимости рабочих формул для оценок $\hat{\gamma}_{1,2}$, $\hat{\delta}$ и их доверительных интервалов при вариации различных свойств осцилляторов. Для этого ищем ответы на следующие вопросы:

- при каких условиях оценки $\hat{\gamma}_{1,2}$ остаются несмещенными;
- при каких условиях вероятность ошибочных выводов о направлении связи не превышает 5%.

Кроме оценки количества ошибочных выводов важен и вопрос о том, при каких условиях достаточно высока вероятность правильных выводов о направлении связи¹ (для определенности мы выясняли, когда эта вероятность не менее 75%).

Для ответа на эти вопросы рассчитывается смещение оценок $\hat{\gamma}_{1,2}$. Смещение оценки $\hat{\gamma}_i$ есть разность между ее математическим ожиданием $M[\hat{\gamma}_i]$ и истинным значением оцениваемой величины c_i^2 . Математическое ожидание находится путем усреднения по ансамблю из 1000 временных рядов (стандартное отклонение среднего служит оценкой погрешности, с которой найдено $M[\hat{\gamma}_i]$). Если c_i^2 не известно априори, то оно принимается равным значению $\hat{\gamma}_i$, рассчитанному по длинному ряду ($N = 200000$ точек). Оценка признается смещенной, если разность $M[\hat{\gamma}_i] - c_i^2$ отличается от нуля больше, чем на удвоенную величину погрешности, с которой найдено $M[\hat{\gamma}_i]$.

По тому же ансамблю из 1000 рядов рассчитывается число ошибочных (правильных) выводов о наличии и направлении связи и определяется, не превышает ли оно 5% (не меньше ли оно 75%).

Временные ряды значений фаз в численных экспериментах имели длину $N = 1000$ точек (кроме специально оговоренных случаев). В пп. 2.2–2.4 временные ряды генерировались системой стохастических дифференциальных уравнений, что реализовалось путем их численного интегрирования методом Эйлера с шагом 0.01л. Величина τ всегда принималась равной 2π , что примерно составляет характерный период, то есть время нарастания фазы на 2π . Следуя [12, 14], мы использовали многочлены F_i третьего порядка. Для более полного представления результатов рассчитывался также индекс фазовой когерентности [19] $\rho = \sqrt{\langle |\exp^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}| \rangle}$ (угловые скобки означают усреднение по времени), который показывает степень синхронности колебаний и может сигнализировать о неприменимости метода (по наблюдениям [20] это имеет место, если $\rho > 0.6$).

2. Численный эксперимент

2.1. Влияние свойств шума. Оценки $\hat{\gamma}_{1,2}$, $\hat{\delta}$ получены для уравнений (4) с шумами $\varepsilon_{1,2}$, которые имеют нормальное распределение и корреляционные функции, линейно спадающие до нуля на интервале $[0, \tau]$. Чтобы проверить, насколько необходимо выполнение этих условий, метод применялся для оценки связанности по временным реализациям системы разностных уравнений (4) с различными свойствами шумов $\varepsilon_{1,2}$.

Варьирование времени корреляции. Шумы $\varepsilon_{1,2}$ принимались нормальными и с АКФ, линейно спадающими до нуля на интервале $[0, T]$. Время корреляции T ва-

¹Кроме ошибочных и правильных выводов могут быть и неопределенные, то есть когда достоверно не удастся выявить направление связи.

рыровалось в диапазоне $[0, 10\tau]^2$. Интервал выборки Δt принимался равным 0.2π (то есть $\tau = 10\Delta t$). Уровни шума $\sigma_{1,2}$ менялись в диапазоне $[0, 0.6]$. В результате расчетов получено, что для всех T и уровней шума число ошибочных выводов о наличии связи не превышает 4%, и оценки $\hat{\gamma}_{1,2}$, $\hat{\delta}$ остаются несмещенными. Например, получено математическое ожидание оценок $M[\hat{\gamma}_i] \approx 1.3 \cdot 10^{-4}$ со стандартным отклонением $3.1 \cdot 10^{-3}$ для $\sigma_{1,2} = 0.12$ и $T = 10\tau$. Таким образом, судя по рассмотренному примеру, изменение корреляционной функции шумов $\varepsilon_{1,2}$ не ограничивает применимость оценок.

Различные законы распределения. Рассматривались шумы $\varepsilon_{1,2}$ с качественно различными законами распределения и корреляционными функциями, спадающими до нуля на интервале $[0, \tau]$. Для упрощения вычислений использовался интервал выборки $\Delta t = \tau = 2\pi$, чтобы АКФ была спадающей до нуля за один шаг дискретного времени и можно было бы использовать для генерирования ряда последовательность независимых величин $\varepsilon_{1,2}(t_i)$ ³. Рассматривались шумы со следующими свойствами:

- негладкая плотность распределения (равномерное распределение на отрезке);
- асимметричное распределение (распределение хи-квадрат с одной степенью свободы, приведенное к нулевому среднему);
- бимодальное распределение (случайное чередование значений из двух гауссовых распределений с различными средними).

Интенсивности шумов $\sigma_{1,2}$ менялись в диапазоне от 0 до 0.6. Результаты для всех законов распределения и уровней шума практически одинаковы: оценки не смещены и число ошибочных выводов о наличии связи составляет не более 5%. Например, для равномерного распределения с $\sigma_{1,2} = 0.12$ получено: $M[\hat{\gamma}_i] \approx 1.0 \cdot 10^{-4}$, стандартное отклонение $3.7 \cdot 10^{-3}$, число ошибок 5%. Для асимметричного распределения с $\sigma_{1,2} = 0.12$: $M[\hat{\gamma}_i] \approx 2.3 \cdot 10^{-4}$, стандартное отклонение $3.8 \cdot 10^{-3}$, число ошибок 5%. Для бимодального распределения с $\sigma_{1,2} = 0.12$: $M[\hat{\gamma}_i] \approx 1.4 \cdot 10^{-4}$, стандартное отклонение $3.6 \cdot 10^{-3}$, число ошибок 4.9%. Таким образом, вид функции распределения шумов $\varepsilon_{1,2}$ также не повлиял на применимость оценок.

2.2. Влияние индивидуальной нелинейности осцилляторов. Чтобы проверить, насколько «портятся» свойства оценок связанности в случае наличия нелинейности осцилляторов, оценки рассчитывались по временным реализациям системы (1) с $G_i(\varphi_1, \varphi_2) = \omega_i + b \cos \varphi_i$, $\omega_1 = 1.1$, $\omega_2 = 0.9$ и нормальными белыми шумами $\xi_{1,2}$. Коэффициент b определяет «величину фазовой нелинейности». Уровень шума $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ менялся в диапазоне $[0, 0.66]$, b – в диапазоне $[0, 0.80]$. Рассчитывалось смещение оценок и число ошибочных выводов о наличии связи (правильных выводов здесь не может быть, так как связи нет).

Результаты для оценки $\hat{\gamma}_1$ представлены на рис. 1, а (для $\hat{\gamma}_2$ они аналогичны). Оценка $\hat{\gamma}_1$ не смещена и вероятность ошибочного вывода о наличии связи не больше 5% в области слева от сплошной линии, то есть даже при достаточно сильной нелинейности (значения b до 0.3–0.7). Черным показана область, где вероятность

²Нужная корреляционная функция шума обеспечивалась путем фильтрации нормального белого шума с помощью скользящего среднего.

³Обеспечить последовательность случайных величин с заданным законом распределения и заданной АКФ можно с помощью метода, использующего преобразование Фурье и подгонку амплитуд [21], но это требует более трудоемких расчетов.

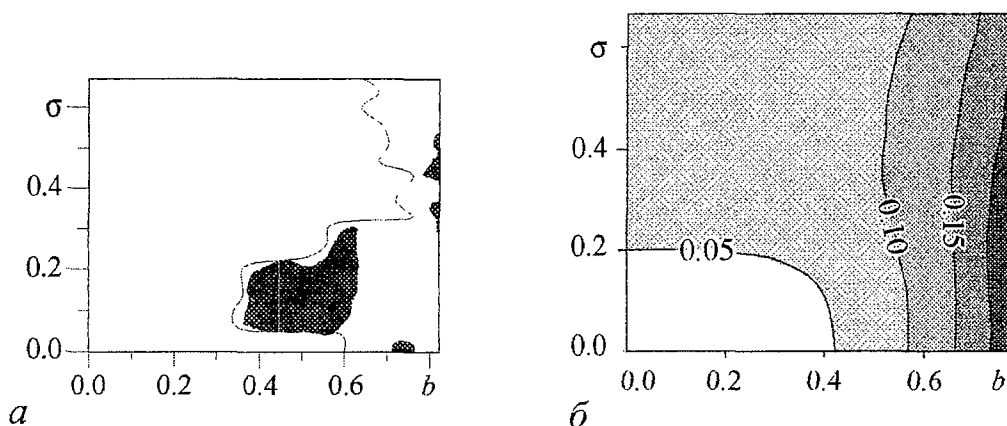


Рис. 1. *а* – области на плоскости коэффициент нелинейности – уровень шума: слева от сплошной линии – нет смещения оценки $\hat{\gamma}_1$ и вероятность ошибочного вывода о наличии влияния второго осциллятора на первый не более 5%, черный цвет – вероятность ошибки больше 5%; *б* – значения индекса фазовой когерентности в серых полутонах. На рис. 2, *а*, 3 и 4, *а* эта информация совмещена и приведена на одной плоскости

ошибочного вывода превышает 5%. На рис. 1, *б* показаны величины индекса фазовой когерентности. Хотя с ростом нелинейности его величина растет, так как распределение разности фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ на отрезке $[0, 2\pi]$ становится все более неравномерным, но она все-таки мала и не может выявить ситуации, где велика вероятность ошибок и/или смещены оценки.

Выразим результаты в относительных «физических» единицах, то есть вклад нелинейности $b \cos \varphi_1$ и шума ξ_1 в динамику по отношению к вкладу слагаемого $\omega_1 = 1.1$, которое можно интерпретировать как влияние линейной компоненты возвращающей силы осциллятора. Величину нелинейности выразим как b/ω_1 а уровень шума как $\sigma/\sqrt{2\pi\omega_1}$ (так как вклад белого шума за период $T_1 = 2\pi/\omega_1$ есть $\sigma\sqrt{T_1}$, а вклад возвращающей силы равен $\omega_1 T_1 = 2\pi$). Тогда численные значения по оси абсцисс на рис. 1, *а* практически не изменятся, а по оси ординат – уменьшатся примерно в 2.5 раза. Вывод: оценки не смещены и вероятность ошибочного вывода о наличии связи не более 5% для интенсивности шумов в диапазоне 0–25% от линейной компоненты возвращающей силы и фазовой нелинейности – вплоть до 30–70%. Таким образом, область применимости метода оказывается совсем не бесконечно малой по величине нелинейности.

2.3. Влияние силы связи между осцилляторами. Чтобы проверить, насколько применимы оценки $\hat{\gamma}_{1,2}$, $\hat{\delta}$ при наличии связи между осцилляторами, они рассчитывались по временным реализациям системы (1) с $G_{1,2}(\varphi_1, \varphi_2) = \omega_{1,2} + k_{1,2} \sin(\varphi_{2,1} - \varphi_{1,2})$, $\omega_1 = 1.1$, $\omega_2 = 0.9$ и нормальными белыми шумами $\xi_{1,2}$. Коэффициенты k_1, k_2 определяют силу связи. Поочередно рассматривались два случая:

- однонаправленная связь, когда один из коэффициентов равен нулю, а другой определяет и силу, и направление связи;
- двунаправленная связь, когда сумма коэффициентов k_1, k_2 определяет общую силу связи, а их разность – ее направление.

Кроме того, рассматривалось влияние шума наблюдений на применимость метода (для краткости эти результаты приведены только для случая однонаправленной связи).

Однонаправленная связь. $k_1 = 0$, значение $k_2 = k$ менялось в диапазоне $(0, 0.25]$, уровень шума $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ – в диапазоне $[0, 0.5]$. На рис. 2, а представлена область, где оценки $\hat{\gamma}_{1,2}$ не смещены (это условие дает правую границу, почти вертикальную) и число правильных выводов не менее 75% (это условие дает изогнутую левую границу – минимальную надежно идентифицируемую величину связи). Внутри этой области индекс фазовой когерентности достигает значений 0.8 (рис. 2, а), то есть даже при таких больших значениях ρ метод может оставаться работоспособным. Левая граница при малых уровнях связи – почти прямая линия ($\sigma \approx 4.6k$), правая граница дается условием $k \approx 0.21$.

Причины смещения оценок в случае больших k : при низких уровнях шума – синхронизация (см. рис. 2, а), при больших уровнях шума – только нелинейность фазовой динамики, вызванная наличием связи. Таким образом, при фиксированном уровне шума наилучшая ситуация – промежуточная величина однонаправленной связи (при малой связи мала вероятность правильного вывода – мешает шум, при большой связи появляется смещение оценок – мешает синхронизация или нелинейность). С ростом длины ряда область применимости оценок расширяется (см. результаты для ряда длиной $N = 4000$ на рис. 2, б).

В относительных единицах (на плоскости $k/\omega_2, \sigma/\sqrt{2\pi\omega_2}$) получим, что метод работает для уровней связи до 20% от линейной возвращающей силы. Сила связи в 20% может быть надежно выявлена по ряду длиной 1000 точек для уровней

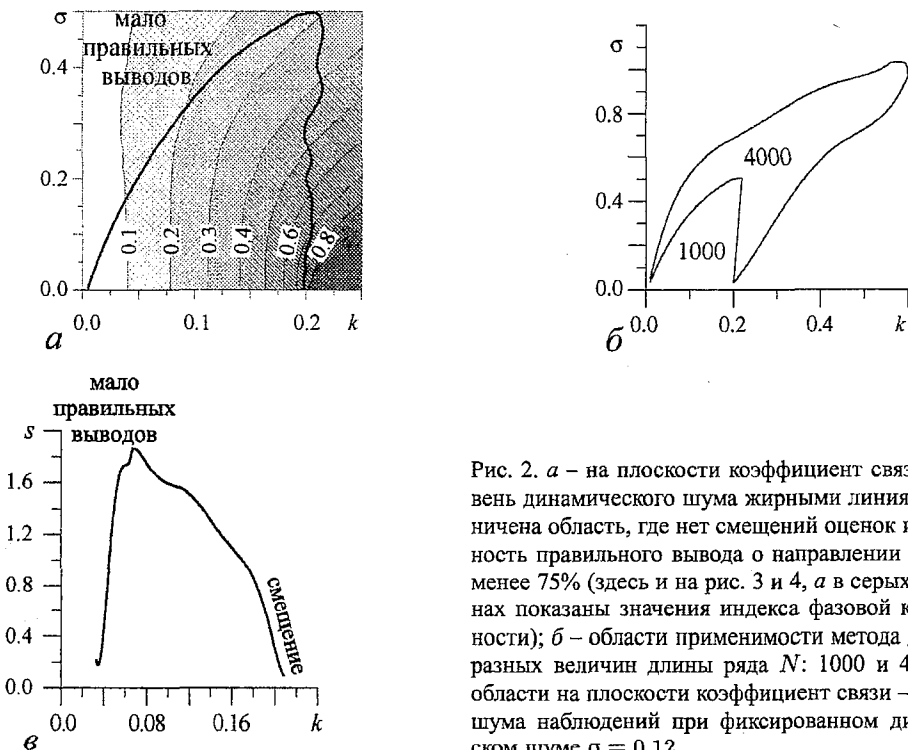


Рис. 2. а – на плоскости коэффициент связи – уровень динамического шума жирными линиями ограничена область, где нет смещений оценок и вероятность правильного вывода о направлении связи не менее 75% (здесь и на рис. 3 и 4, а в серых полукругах показаны значения индекса фазовой когерентности); б – области применимости метода для двух разных величин длины ряда N : 1000 и 4000; в – области на плоскости коэффициент связи – уровень шума наблюдений при фиксированном динамическом уровне шума $\sigma = 0.12$

шума вплоть до 20%. Может быть надежно выявлена и сколь угодно слабая связь, если достаточно мал уровень шума. Таким образом, область применимости метода вновь оказывается широкой.

Влияние шума наблюдений. При фиксированном уровне динамического шума временной ряд значений фаз формировался путем добавления к истинным значениям фаз аддитивного нормального белого шума со стандартным отклонением s , которое варьировалось в широком диапазоне. Область применимости метода показана на рис. 2, в (для $\sigma = 0.12$). По сравнению с зависимостью от уровня динамического шума правая граница изгибается влево, то есть с ростом уровня шума максимальная идентифицируемая величина связи уменьшается. Относительную величину шума наблюдений можно оценить как его стандартное отклонение, деленное на стандартное отклонение фазы φ_2 , свернутой в отрезок $[0, 2\pi]$: $s / \sqrt{\langle (\varphi_2 \bmod 2\pi)^2 \rangle} \approx s/1.8$.

Результаты при этом таковы: направление связи величиной 7% можно достоверно определить при уровне шума наблюдений вплоть до 100%, метод работает для уровней связи до 20% при шуме до 30%. То есть вновь область применимости имеет значительные размеры.

Двунаправленная связь. $k_1 = k, k_2 = k+0.02$. Величина k менялась в диапазоне $[0, 0.1]$. Величина асимметрии связи всегда равна 0.02. Уровень шума $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ менялся в диапазоне $(0, 0.12]$.

Результаты расчетов представлены на рис. 3. Область эффективности оценок связанности ограничена справа (то есть при росте силы связи). Вновь индекс фазовой когерентности не превышает в этой области 0.8. И вновь имеется две причины ограничения применимости метода. При малом шуме это преимущественно повышение синхронности колебаний, ведущее к смещению оценок. При большем шуме – больший разброс значений оценок, что ведет к малой вероятности правильных выводов.

В относительных единицах k/ω_2 и $\sigma/\sqrt{2\pi\omega_2}$ границы применимости метода до 8% по силе связи при шуме до 2% (и до 2% по силе связи при шуме около 5%). Уровень шума в 5% – максимально допустимый. Таким образом, и при наличии двунаправленной связи метод работает в значительных пределах по значениям связи и шума. Но эта область уже, чем ранее представленные, поскольку мала ве-

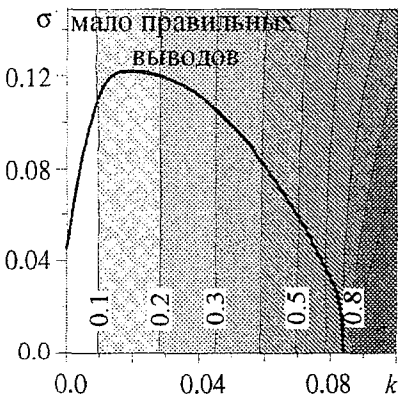


Рис. 3. На плоскости параметров коэффициент связи – уровень шума жирными линиями показана область, где нет смещений оценок, вероятность ошибочного вывода о направлении связи не более 5% и вероятность правильного вывода не менее 75%. В серых полутонах показаны значения индекса фазовой когерентности

личина асимметрии связи. С увеличением асимметрии связи (при фиксированной ее суммарной силе) границы применимости метода раздвигаются (см. выше случай однонаправленной связи как наиболее благоприятный).

2.4. Связанные осцилляторы Ван дер Поля. Более реалистична ситуация, когда наблюдению доступны не сами значения фаз, а значения переменных, по которым еще нужно рассчитать фазы и, следовательно, неизбежно внести некоторые погрешности. Для имитации такой ситуации в качестве объекта мы взяли связанные осцилляторы Ван дер Поля:

$$d^2x_{1,2}/dt^2 = 0.2(1 - x_{1,2}^2)dx_{1,2}/dt - \omega_{1,2}^2x_{1,2} + k_{1,2}(x_{2,1} - x_{1,2}) + \xi_{1,2}, \quad (5)$$

где $\omega_{1,2}$ – круговые частоты колебаний, $\omega_1 = 1.02$, $\omega_2 = 0.98$, $\xi_{1,2}$ – нормальный белый шум. В качестве наблюдаемых брались переменные x_1, x_2 . Фазы колебаний рассчитывались с помощью построения аналитического сигнала через преобразование Гильберта. Интервал выборки $\Delta t = 0.1\pi$, чтобы обеспечить 20 точек на характерном периоде (эта частота выборки позволяет без больших искажений рассчитать фазу сигнала [14, 22]). Длина ряда была равна $N = 1400$ точек, после расчета фаз отбрасывались 200 полученных значений с каждого края, чтобы избежать краевых эффектов [14]. Итоговый временной ряд значений фаз вновь содержал 1000 точек (50 характерных периодов). Осцилляторы в данном случае характеризуются индивидуальной фазовой нелинейностью, шум в уравнениях фазовой динамики не в точности нормальный белый. Таким образом, данный объект представляет собой вариант нарушения сразу нескольких приведенных выше условий. Рассматриваем случай однонаправленной связи: $k_1 = 0$, значение $k_2 = k$ менялось в диапазоне $[0, 0.08]$.

Без шума наблюдений. Уровень динамического шума $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ менялся в диапазоне $[0, 0.16]$. На рис. 4, а представлена область, где оценки не смещены (правая граница) и вероятность правильного вывода о направлении связи не менее 75% (левая граница). Вероятность ошибочного вывода здесь всегда не более 5%. Границы области – практически прямые линии. Внутри этой области индекс фазо-

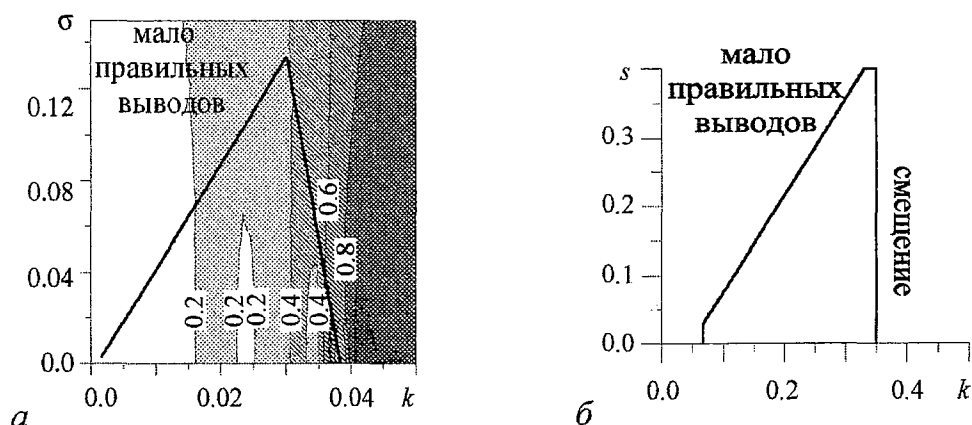


Рис. 4. а – на плоскости параметров коэффициент связи – уровень динамического шума для осцилляторов Ван дер Поля жирными линиями показана область, где нет смещений оценок и вероятность правильного вывода о направлении связи не менее 75%; б – та же область на плоскости коэффициент связи – уровень шума наблюдений (при фиксированном динамическом шуме $\sigma = 0.025$)

вой когерентности достигает примерно 0.7 (рис. 4, а). Справа от нее он становится больше, и оценки становятся смещенными из-за синхронности колебаний осцилляторов. Левая граница связана с малой вероятностью правильных выводов. Результаты вполне аналогичны п. 2.3 (см. рис. 2, а), только границы линейны, а не изогнуты, и правая граница не вертикальна, а наклонена влево. В относительных единицах вклады силы связи и шума можно выразить как $k\sqrt{2\langle x_2^2 \rangle} / \omega_2^2 \sqrt{\langle x_2^2 \rangle} \approx 1.4k$ и $\sigma\sqrt{T_2} / \omega_2^2 \sqrt{\langle x_2^2 \rangle} \approx 1.4\sigma$ (здесь $\langle x_2^2 \rangle \approx 2.3$). Границы применимости – до 6.5% по силе связи (меньше, чем для фазовых осцилляторов, рис. 2, а) и до 17% по шуму (примерно так же, как для фазовых осцилляторов).

С шумом наблюдений. Уровень динамического шума был принят $\sigma = 0.025$. Стандартное отклонение шума наблюдений (нормальный белый шум, добавленный к наблюдаемым $x_{1,2}$) менялось в диапазоне $[0, 0.4]$. Область эффективности метода показана на рис. 4, б. В относительных единицах по оси ординат (отношение s к стандартному отклонению x_2 , при этом единицы уменьшаются в 1.5 раза) получим, что допускается шум до 25%. Количественное отличие влияния шума наблюдений в переменной x от шума наблюдений в самой фазе имеет место: по сравнению с рис. 2, в область эффективности стала существенно уже, особенно по уровню шума (допускается шум до 25% вместо 60%). Это говорит о том, что значения фаз весьма чувствительны к шуму в наблюдаемой. Тем не менее, и с этими замечаниями размеры области применимости метода значительны, а не пренебрежимо малы.

Заключение

Как показывают результаты проведенных численных экспериментов, метод определения наличия и направления связи между колебательными системами по временным рядам, основанный на моделировании фазовой динамики, имеет достаточно широкую область применимости. Несмотря на то, что выражения для оценок выведены в приближении линейных несвязанных осцилляторов под действием нормального белого шума, метод эффективен при различных свойствах шумов и конечных (не малых) величинах нелинейности, связи и шума наблюдений. По рассмотренным в работе примерам можно сделать следующие выводы:

- вариация функции корреляции и функции распределения вероятностей шума в разностных уравнениях фазовой динамики не влияет на применимость метода;
- допустимо наличие индивидуальной нелинейности осцилляторов до 30 – 60% от линейной компоненты возвращающей силы, но возможно наличие существенных ошибок метода, когда вклад нелинейности и шума в фазовую динамику примерно одинаков;
- допустима связь между осцилляторами примерно до 5 – 20% от линейной компоненты возвращающей силы;
- при некоторых величинах связи допустим измерительный шум (шум наблюдения) в значениях фаз колебаний примерно до 100% и в самих наблюдаемых до 25%;
- значение индекса фазовой когерентности, с одной стороны, не является однозначным показателем применимости метода и при $\rho \approx 0.1$ могут иметь место смещения оценок и частые ошибочные выводы о наличии связи, с другой стороны, при $\rho \approx 0.8$ метод может быть вполне эффективен;

- вероятность правильного вывода о наличии и направлении связи мала в случае очень слабой связи и больших шумов, но соответствующие границы применимости раздвигаются при увеличении длины ряда;
- вероятность ошибочного вывода о наличии и направлении связи велика при очень сильной связи из-за повышения синхронности колебаний осцилляторов, соответствующие границы применимости мало меняются при увеличении длины ряда.

Хотя суммированные здесь эмпирические условия применимости метода могут несколько измениться количественно при рассмотрении других типов нелинейности и связи осцилляторов, полученные результаты уже позволяют утверждать, что эти условия достаточно мягки. Тем самым подтверждена перспективность и целесообразность применения метода на практике для анализа сложных систем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-02-16305), программы BRNE (REC-006), гранта Президента РФ (МК-1067.2004.2) и Фонда содействия отечественной науке.

Приложение

Рабочие формулы для оценок связанности

Формулы для оценок связанности $\hat{\gamma}_{1,2}$ получены для системы линейных несвязанных осцилляторов с нормальным белым шумом [14] и выражаются через оценки коэффициентов модели (2), где функции F_i – тригонометрические многочлены

$$F_i = \sum_{m,n} [a_{i,m,n} \cos(m\varphi_1 + n\varphi_2) + b_{i,m,n} \sin(m\varphi_1 + n\varphi_2)], i = 1, 2. \quad (\text{П1})$$

Оценки коэффициентов многочленов $\hat{a}_{i,m,n}$ и $\hat{b}_{i,m,n}$ получают методом наименьших квадратов, а оценки их дисперсий есть

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_{i,m,n}}^2 = \frac{2\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2}{N-k} \times \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{k} \right) \cos \left(\frac{l(m\hat{a}_{1,0,0} + n\hat{a}_{2,0,0})}{k} \right) \exp \left(- \frac{l(m^2\hat{\sigma}_{\varepsilon_1}^2 + n^2\hat{\sigma}_{\varepsilon_2}^2)}{2k} \right) \right), \quad (\text{П2})$$

где $\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2$ – оценка дисперсии шума ε_i в разностных уравнениях (4):

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2 = \frac{1}{N-k-L_i} \sum_{j=1}^{N-k} \left(\Delta_i(t_j) - \frac{1}{N-k} \sum_{l=1}^{N-k} \Delta_i(t_l) \right), \quad (\text{П3})$$

L_i – число коэффициентов многочлена F_i . Для оценки дисперсий $\hat{b}_{i,m,n}$ формула та же самая.

Выражение для $\hat{\gamma}_1$ через оценки коэффициентов и их дисперсий

$$\hat{\gamma}_1 = \sum_{m,n} n^2 \left(\hat{a}_{1,m,n}^2 + \hat{b}_{1,m,n}^2 - 2\hat{\sigma}_{\hat{a}_{1,m,n}}^2 \right); \quad (\text{П4})$$

аналогично и для $\hat{\gamma}_2$. Индекс направленности связи определяется как $\hat{\delta} = \hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_1$.

Оценка дисперсии $\hat{\gamma}_1$ есть:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_1}^2 = \begin{cases} \sum_{m,n} n^4 (\hat{\sigma}_{\hat{a}_{1,m,n}}^2 + \hat{\sigma}_{\hat{b}_{1,m,n}}^2), & \hat{\gamma}_1 \geq 5 \sqrt{\sum_{m,n} n^4 (\hat{\sigma}_{\hat{a}_{1,m,n}}^2 + \hat{\sigma}_{\hat{b}_{1,m,n}}^2)}, \\ \frac{1}{2} \sum_{m,n} n^4 (\hat{\sigma}_{\hat{a}_{1,m,n}}^2 + \hat{\sigma}_{\hat{b}_{1,m,n}}^2), & \end{cases} \quad (\text{П5})$$

где

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_{i,m,n}}^2 = \begin{cases} 2\hat{\sigma}_{\hat{a}_{i,m,n}}^4 + 4 \left(\hat{a}_{i,m,n}^2 - \hat{\sigma}_{\hat{a}_{i,m,n}}^2 \right) \hat{\sigma}_{\hat{a}_{i,m,n}}^2, & \hat{a}_{i,m,n}^2 - \hat{\sigma}_{\hat{a}_{i,m,n}}^2 \geq 0, \\ 2\hat{\sigma}_{\hat{a}_{i,m,n}}^4, & \end{cases} \quad (\text{П6})$$

для $\hat{\sigma}_{\hat{b}_{i,m,n}}^2$ – то же самое. Оценка дисперсии $\hat{\gamma}_2$ вычисляется аналогично. Для индекса направленности имеем оценку дисперсии $\hat{\sigma}_{\hat{\delta}}^2 = \hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_1}^2 + \hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_2}^2$.

Доверительные интервалы для оценок связанности выражаются через их дисперсии. Так 95-процентный доверительный интервал был найден полуэмпирически и составляет $[\hat{\gamma}_i - 1.6\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_i}, \hat{\gamma}_i + 1.8\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_i}]$ для $\hat{\gamma}_i$ и $[\hat{\delta} - 1.6\hat{\sigma}_{\hat{\delta}}, \hat{\delta} + 1.6\hat{\sigma}_{\hat{\delta}}]$ для индекса направленности.

Библиографический список

1. *Palus M., Stefanovska A.* Direction of coupling from phases of interacting oscillators: An information-theoretic approach // *Phys. Rev. E.* 67, 055201(R) (2003).
2. *Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Makarenko V.I., Llinas R.* Olivo-cerebellar cluster-based universal control system // *PNAS.* 2003. Vol. 100, 13064.
3. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.H.* Bimodal oscillations in nephron autoregulation // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66. P. 061909.
4. *Jevrejeva S., Moore J., Grinsted A.* Influence of the Arctic Oscillation and El Nino, Southern Oscillation (ENSO) on ice conditions in the Baltic Sea: The wavelet approach // *Journal of Geophysical Research.* 2003. Vol. 108. P. 4677.
5. *Bezruchko B., Ponomarenko V., Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* Characterizing direction of coupling from experimental observations // *Chaos.* 2003. Vol. 13. P. 179.
6. *Schiff S.J., So P., Chang T., Burke R.E., Sauer T.* Detecting dynamical interdependence and generalized synchrony through mutual prediction in a neural ensemble // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54. P. 6708.
7. *Arnhold J., Lehnertz K., Grassberger P., Elger C.E.* A robust method for detecting interdependences: application to intracranially recorded EEG // *Physica D.* 1999. Vol. 134. P. 419.
8. *Meeren H.K.M., Pijn J.P.M., van Luijtelaaar E.L.J.M., Coenen A.L.M., Lopes da Silva F.H.* Cortical focus drives widespread corticothalamic networks during spontaneous absence seizures in rats // *J. Neurosci.* 2002. Vol. 22. P. 1480.
9. *Feldmann U., Bhattacharya J.* Predictability improvement as an asymmetrical measure of interdependence in bivariate time series // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2004. Vol. 14. P. 504.

10. *Mormann F., Kreuz T., Rieke C., Andrzejak R.G., Kraskov A., David P., Elger C., Lehnertz K.* On the predictability of epileptic seizures // *Clin. Neurophysiol.* p. in press (2004).
11. *Quiñan Quiroga R., Kraskov A., Kreuz T., Grassberger P.* Performance of different synchronization measures in real data: a case study on electroencephalographic signals // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. P. 041903.
12. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* Detecting direction of coupling in interacting oscillators // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. P. 045202.
13. *Каплан А.Я.* Нестационарность ЭЭГ: методологический и экспериментальный анализ // *Успехи физиол. наук.* 1998. Т. 29, № 3. С. 35.
14. *Smirnov D.A., Bezruchko B.P.* Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68. P. 046209.
15. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J., Schafer C., Tass P. A.* Phase synchronization: from theory to data analysis // *Neuro-informatics / Eds F. Moss and S. Gielen, Handbook of Biological Physics, Elsevier Science, New York.* 2001. Vol. 4. P. 279.
16. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Instantaneous phase method in studying chaotic and stochastic oscillations and its limitations // *Fluctuation and Noise Letters.* 2004. Vol. 4, № 1. P. L219.
17. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2000. Vol. 10. P. 2291.
18. *Rosenblum M.G., Cimponeriu L., Bezerianos A., Patzak A., Mrowka R.* Identification of coupling direction: application to cardiorespiratory interaction // *Physical Review E.* 2002. Vol. 65. P. 041909.
19. *Mormann F., Lehnertz K., David P., Elger C.E.* Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients // *Physica D.* 2000. Vol. 144. P. 358.
20. *Bezruchko B., Ponomarenko V., Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* Characterizing direction of coupling from experimental observations // *Chaos.* 2003. Vol. 13, № 1. P. 179.
21. *Schreiber T., Schmitz A.* Improved surrogate data for nonlinearity tests // *Physical Review Letters.* 1997. Vol. 77. P. 635.
22. *Huang N.E., Shen Z., Long S.R.* The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *The Royal Society.* 1998. P. 903.

*Саратовский государственный
университет
Саратовское отделение ИРЭ РАН*

Поступила в редакцию 22.11.2004

ESTIMATION OF COUPLING BETWEEN OSCILLATORS FROM TIME SERIES VIA PHASE DYNAMICS MODELING: LIMITS OF METHOD'S APPLICABILITY

D.A. Smirnov, M.B. Bodrov, B.P. Bezruchko

The problem of determination of the presence and directionality of coupling between oscillatory systems only from their time realizations is considered. One of the efficient «nonlinear» approaches to its solution is based on calculation of the phases of oscillations from the observed signals and construction of a model map describing the phase dynamics, whose properties allow coupling characterization. The approach was justified theoretically for weakly nonlinear and weakly coupled phase oscillators under the influence of normal white noise. In this work, we find out practical limits of applicability of the approach in numerical experiment (for different properties of noise and different values of phase nonlinearity and coupling intensity). Applicability of the employed working formulas for coupling estimators in a wide range of situations is shown.



Смирнов Дмитрий Алексеевич – родился в 1977 году. Окончил Высший колледж прикладных наук Саратовского государственного университета (1999). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика в СГУ (2001). Область научных интересов: теория динамических систем, математическое моделирование, анализ временных рядов, научные вычисления. Имеет 67 научных публикаций, в том числе 16 статей в реферируемых журналах. Поддержан индивидуальными грантами РФФИ (2001-2003), Президента РФ (2004), Фонда содействия отечественной науке (2004), программы BRNE (2004).



Бодров Максим Борисович – родился в 1981 году. Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2003). Аспирант кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Имеет 17 научных публикаций. Область научных интересов: компьютерное моделирование биологических процессов, изучение явления синхронизации, разработка методов обнаружения характера и интенсивности взаимодействия между сложными системами по их экспериментальным данным.



Безручко Борис Петрович – родился в 1946 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1969). Доктор физико-математических наук (1995), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Научные интересы - экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических и электронных системах, математическое моделирование по экспериментально наблюдаемым временным рядам. Опубликовал более 100 статей в российских и зарубежных изданиях.



РЕКОНСТРУКЦИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СКРЫТЫХ ПЕРЕМЕННЫХ: МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ БОКА *

Б.П. Безручко, Д.А. Смирнов, И.В. Сысоев

Рассматривается задача оценки параметров модели по временным рядам в условиях, когда часть переменных не наблюдается и/или данные сильно зашумлены. С помощью введенных количественных критериев сравниваются различные алгоритмы решения задачи на основе метода множественной стрельбы – алгоритм Бока и его модифицированный вариант, допускающий разрывы фазовой траектории модели. Показано, что модифицированный метод существенно эффективнее для хаотических рядов большой длины и предъявляет более мягкие требования к стартовым догадкам, что существенно расширяет возможности его практического применения.

Введение

Задача построения математической модели¹, описывающей сложную динамику исследуемого объекта, по временным реализациям экспериментально наблюдаемых величин $\eta(t)$, возникает во многих областях науки и техники и имеет различные постановки [1]. Мы рассматриваем постановку, в которой структура модельных уравнений полностью известна из «первых принципов» или других соображений:

$$dy/dt = f(y, c), \quad (1)$$

где y – модельная переменная (D -мерный вектор состояния), а c – P -мерный вектор параметров, который необходимо найти. Задача сводится к оценке неизвестных параметров c_1, \dots, c_P по наблюдаемым данным, которые имеют вид дискретной последовательности отсчетов – временного ряда $\{\eta_i\} = \{\eta_1, \dots, \eta_N\}$, где i – номер

*Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия.

¹В нелинейной динамике ее называют реконструкцией динамических систем, в статистике – идентификацией систем.

отсчета, N – длина ряда². Такая постановка встречается, например, в аэродинамике (оценка коэффициентов аэродинамических сил при летном эксперименте с самолетом [2]), лазерной физике (оценка скоростей перехода между уровнями рабочего вещества газового лазера [3]), радиотехнике (моделирование электрических цепей с сегнетоэлектрическими или полупроводниковыми нелинейностями [4, 5]), клеточной биологии (оценка параметров модели нейрона [6], модели сигнального пути клеток определенного вида [7]).

Стандартная процедура реконструкции модели (1) предполагает знание векторного временного ряда значений y , то есть требуется иметь ряды всех D компонент, формируемых по данным эксперимента из ряда наблюдаемой $\{\eta_i\}$. Например, одна из переменных может просто совпадать с наблюдаемой, то есть измеряется непосредственно, а другие – получаются из нее дифференцированием, интегрированием, использованием временной задержки, весовым суммированием и другими способами. Однако нередко из-за невозможности измерить нужную величину вследствие зашумленности или иных причин удается сформировать ряды лишь для $l < D$ компонент y . ($D - l$) переменных, ряды которых не могут быть получены из данных наблюдения, называют *скрытыми*. Наличие скрытых переменных сильно усложняет задачу, требуя использования специальных подходов.

В этой ситуации основная тяжесть задачи построения модели переносится на этап оценки параметров, причем в число искомых величин кроме параметров вводят начальные условия. Обычно для оценки параметров используется метод наименьших квадратов³, который формулируется в данной ситуации следующим образом. Нужно подобрать такие начальные условия модели y^0 и параметры c , чтобы обеспечить минимальное отклонение решения модельных уравнений y от данных экспериментального наблюдения y_{η}^l . Сравнение проводится только по l нескрытым компонентам y . То есть требуется минимизировать функцию:

$$S(y^0, c) = \sum_{i=1}^N (y_i^l(y^0, c) - y_{\eta i}^l)^2 = \min, \quad (2)$$

где $y_i^l(y^0, c)$ – l -мерный вектор «нескрытой» части решения уравнений (1), $y_{\eta i}^l$ – аналогичные значения, полученные из ряда наблюдаемой. Минимизацию (2) проводят с помощью численных итерационных методов, отправляясь от некоторых *стартовых догадок* для искомых величин y^0, c .

В случае хаотических рядов траектория модели очень чувствительна к начальным условиям, поэтому «рельеф» целевой функции (2) при значительном N весьма изрезан и имеет множество локальных минимумов, а область сходимости в глобальный минимум, соответствующий наиболее точным оценкам, очень узка, то есть требуются исключительно удачные стартовые догадки, чтобы туда попасть. Обойти трудности обещает изящный технический трюк – алгоритм множественной

² Будем называть величину η просто наблюдаемой и ограничимся случаем, когда она скалярна, – наиболее сложным, но очень распространенным.

³ Следует сказать, что более статистически предпочтительными были бы оценки, полученные методом максимального правдоподобия, но его использование на практике затруднительно из-за сложности функции максимального правдоподобия и в данной работе отвлекло бы от основной цели исследования. Отметим, что, если шум является аддитивным, нормальным и дельта-коррелированным, оба метода совпадают.

стрельбы [8, 9]. Но, как показывает опыт, он требует дополнительных усилий для его успешной реализации. Эта проблема уже привлекала к себе внимание [3, 10], но систематический ее анализ не проводился. В данной работе мы ввели количественные критерии эффективности процедуры оценки параметров и проводим анализ условий работоспособности наиболее продуктивных алгоритмов реализации метода множественной стрельбы (раздел 1). В численном эксперименте (раздел 2) на примере эталонной хаотической системы, в том числе при добавлении измерительных шумов, мы демонстрируем, что для длинных рядов наиболее эффективен модифицированный алгоритм Бока, ослабляющий требование непрерывности фазовой траектории модели на интервале наблюдения.

Актуальность поставленной задачи объясняется тем, что хаотическое поведение изучаемых систем и дефицит априорной информации о значениях искомых величин типичны в исследовательской практике. Кроме параметров, рассматриваемые методы позволяют получить значения самих скрытых переменных. Учитывая, что эти величины могут быть в принципе недоступны прямому измерению, рассматриваемая процедура выступает в роли универсального «измерительного прибора».

1. Методы оценки параметров при наличии скрытых переменных

1.1. Метод начального условия

Так называют метод оценки параметров, состоящий в минимизации непосредственно функции (2), где N – длина всего наблюдаемого временного ряда [11]. На практике при требуемых достаточно больших⁴ N он, как правило, неприменим, особенно в случае хаоса, поскольку из-за экспоненциальной чувствительности траектории модели к начальным условиям y^0 область сходимости в глобальный минимум целевой функции (2) столь мала, что в нее почти невероятно попасть. Недостатки этого подхода в сравнении с другими продемонстрированы, в частности, в [9] и [5], и поэтому мы не будем его подробно рассматривать.

1.2. Метод множественной стрельбы⁵

1.2.1. Алгоритм Бока. Увеличить допустимые значения N и погрешностей в стартовых догадках позволяет модификация метода начального условия. Она направлена на то, чтобы хотя бы на промежуточных этапах минимизации целевой функции снизить чувствительность траектории модели к начальным условиям y^0 . Это достигается путем разбиения исходного ряда на L более коротких фрагментов (n – длина фрагмента, $N = Ln$) и использования начальных условий на этих фрагментах $y_1^0, y_{n+1}^0, \dots, y_{(L-1)n+1}^0$ в качестве дополнительных искомых величин – аргументов

⁴Без достаточного количества точек нельзя выудить из сигнала информацию при наличии шумов, кроме того, важно, чтобы используемый ряд отражал все временные масштабы объекта.

⁵Название «метод множественной стрельбы» происходит от аналогии с методом решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Поскольку множественная стрельба лежит в основе нескольких методов, первоначальный алгоритм, предложенный Боком, будем именовать «алгоритм Бока».

целевой функции S :

$$S(\mathbf{y}_1^0, \dots, \mathbf{y}_{(L-1)n+1}^0, \mathbf{c}) =$$

$$= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{y}_{(i-1)n+j}^l \left(\mathbf{y}_{(i-1)n+1}^0, \mathbf{c} \right) - \mathbf{y}_{\eta(i-1)n+j}^l \right)^2 = \min, \quad (3)$$

где нижний индекс $\mathbf{y}_{(i-1)n+1}^0$ соответствует первой точке i -го фрагмента. Чтобы избежать большого числа независимых неизвестных, увеличивающего дисперсию оценок, вводится условие непрерывности траектории модели – «сшивания» фрагментов:

$$\mathbf{y}_{in+1}^0 = \mathbf{y}_{in+1} \left(\mathbf{y}_{(i-1)n+1}^0, \mathbf{c} \right), \quad i = 1, \dots, L - 1. \quad (4)$$

Минимизация (3) при условии (4) – это задача условной минимизации. При произвольном выборе стартовых догадок для всех искомым величин траектория модели, как правило, состоит из L нестыкующихся фрагментов. Но в процессе работы итерационного метода условие (4) удовлетворяется все лучше и лучше, так что в итоге траектория модели оказывается непрерывной. Заметим, что при $L = 1, n = N$ алгоритм Бока превращается в метод начального условия.

Хотя в [9] утверждается, что для эффективности алгоритма Бока не требуется стартовых догадок, близких к истинным значениям, *практика показывает, что это чаще всего не так* (см. ниже, раздел 2). Алгоритм только до некоторой степени расширяет возможности оценки параметров по хаотическому ряду по сравнению с «наивным» методом начального условия. Все же итоговое условие (4) часто оказывается для хаотических систем слишком жестким и при достаточно большой длине N удается попасть только в локальные минимумы целевой функции (3).

1.2.2. Кусочные методы. Чтобы точнее оценить параметры, проще всего разбить ряд на короткие сегменты (l штук) и проводить реконструкцию по каждому из сегментов отдельно. Итоговая оценка получается как среднее арифметическое $\bar{\mathbf{c}} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \mathbf{c}_i$. Такой подход называют «кусочным» [10]; при использовании на отдельных сегментах алгоритма Бока будем говорить о *кусочном методе множественной стрельбы*. Проблема здесь состоит в том, что для короткого сегмента оценка может быть существенно смещенной (даже оценки максимального правдоподобия лишь асимптотически не смещены) и это смещение может не устраняться при усреднении по l кускам. Поэтому погрешности оценок для кусочного метода больше, чем для исходного алгоритма Бока, если при использовании последнего удастся найти глобальный минимум.

1.2.3. Модифицированный метод. Опираясь на статистические соображения [10], можно утверждать, что использование сразу всего объема данных позволяет получать оценки с меньшим смещением, чем при кусочных подходах. Поэтому мы предлагаем обратить внимание на модификацию алгоритма Бока (далее – *модифицированный метод*), которая уже использовалась в работе [3] для нехаотических рядов вынужденно, поскольку эти ряды составлялись из нескольких измерений. Возможность построения такой модификации также упоминалась в [10]. Модифицированный метод состоит в отказе от непрерывности траектории модели в некоторые моменты времени внутри интервала наблюдения, то есть условие (4) не требуется для $(\nu - 1)$ моментов времени. Это означает, что начальные условия модели в эти

ν моментов, включая начальный, становятся независимыми искомыми величинами. В отличие от (3), где разрывность траекторий была следствием способа получения данных, мы предлагаем искусственно ввести возможность разрывов. Мы выберем их распределенными равномерно внутри интервала наблюдения. По сравнению с кусочным методом параметры с всегда удерживаются одинаковыми на всех сегментах. Такой подход сочетает ослабление требований к непрерывности траекторий модели с использованием всего длинного ряда в целом для оценки параметров. Он имеет два свободных параметра: ν – число сегментов с независимыми начальными условиями и L – число подсегментов, на которые делится каждый сегмент для реализации алгоритма Бока, где $N = \nu Ln$. При $\nu = 1$ модифицированный метод сводится к алгоритму Бока. Этот подход, на наш взгляд незаслуженно, не получил до сих пор широкого распространения. По всей видимости, это связано с тем, что нарушение гладкости траектории на первый взгляд не сулит хорошей модели и настораживает.

2. Сравнительный анализ в численном эксперименте

2.1. Методика сравнения

Чтобы охарактеризовать и сопоставить эффективность алгоритмов, нами использовались следующие способы представления информации и количественные меры. На плоскостях параметров c_{i_1}, c_{i_2} (рис. 1, *a-в*), в шкале серого отмечены результаты выбора соответствующих стартовых догадок. Белым показаны стартовые точки, откуда достигается глобальный минимум, то есть получаются очень точные оценки параметров. Оттенками серого – точки, позволившие при оптимизации достичь лишь локального минимума, из которых получается оценка, далекая от истинных значений параметров – чем хуже, тем темнее. Для удобства на осях откладываются значения, нормированные так, чтобы идеальной догадке (истинным значениям параметров c_i^0) соответствовала центральная часть рисунка: $b_i = (c_i - c_i^0) / c_i^0$. Точка $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ соответствует глобальному минимуму, если пренебречь шумами, включая погрешности вычислений. Размер светлой области на рис. 1 характеризует эффективность мето-

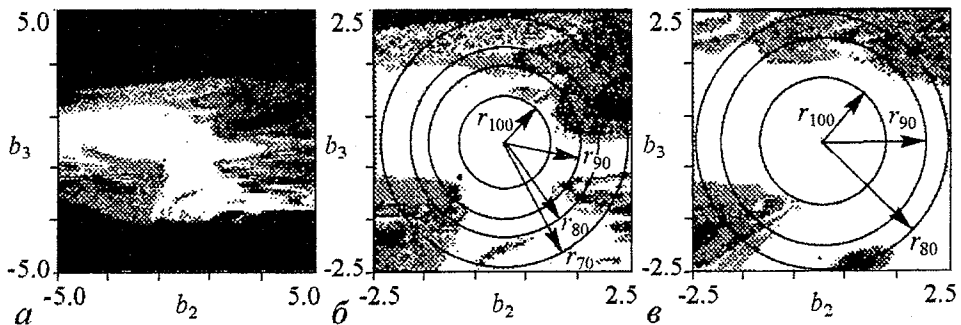


Рис. 1. Плоскость нормированных стартовых догадок для параметров системы Лоренца (сечение пространства параметров плоскостью $b_1 = 0$). Белым обозначены точки, откуда достигается глобальный минимум, оттенками серого – локальные минимумы (интенсивность зависит от их удалённости от глобального), черным – алгоритм минимизации расходится: *a, б* – алгоритм Бока при $L = 30, n = 35$; *в* – модифицированный метод с $L = 15, n = 35, \nu = 2$

да – чем она больше, тем работоспособнее алгоритм. Области хороших догадок в типичном случае сильно изрезаны, поэтому в качестве интегральной характеристики эффективности метода использовалась мера, показывающая долю белых точек в круге радиуса r с центром в начале координат⁶. Обозначим через μ относительную площадь светлой области внутри круга с центром в точке $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, это – оценка вероятности попадания в глобальный минимум, если ошибка в стартовых догадках не больше r . Чем больше μ при данном r , тем эффективнее метод. Терпимость метода к ошибкам в стартовых догадках усредненно характеризуется величиной радиуса r_μ , при которой вероятность попадания в глобальный минимум не меньше заданного μ (см. рис. 1, б, в). Для определенности далее будем, как правило, использовать r_{100} – радиус области 100-процентной сходимости.

2.2. Оценка параметров системы Лоренца

Методику исследования эффективности методов (работоспособности при длинных рядах и «терпимости» к стартовым догадкам) проиллюстрируем на конкретном примере системы Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= c_1 (y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 &= -y_2 + y_1 (c_3 - y_3) \\ \dot{y}_3 &= -c_2 y_3 + y_1 y_2 \end{aligned} \quad (5)$$

с параметрами $c_1^0 = 10$, $c_2^0 = 8/3$, $c_3^0 = 46$ по решению, полученному при начальном условии $y_1 = -7.60$, $y_2 = -12.37$, $y_3 = 38.66$, произвольно выбранном на хаотическом аттракторе (старший ляпуновский показатель $\lambda_1 = 1.23$ [9]). Уравнения интегрировались методом Рунге – Кутты 4-го порядка с шагом 0.001, интервал выборки составлял 0.002 (около 280 точек на характерном периоде T). В качестве ряда скалярной наблюдаемой использовалась последовательность значений переменной y_1 . Для большей реалистичности к переменной добавлялся нормальный шум наблюдения: $\eta = y_1 + \xi$. Две остальные переменные y_2 и y_3 считались скрытыми, их временные ряды – неизвестными.

Угадать истинные (идеальные, наилучшие) стартовые догадки маловероятно, поэтому, следуя работам [5, 9], при оценке параметров в качестве стартовых догадок для всех переменных модели $\mathbf{y}_1^0, \mathbf{y}_{n+1}^0, \dots, \mathbf{y}_{(L-1)n+1}^0, \dots, \mathbf{y}_{(v-1)Ln+(L-1)n+1}^0$ использовались значения наблюдаемой в соответствующие моменты времени. Такой подход неплохо зарекомендовал себя, хотя он и не идеален⁷. Для минимизации целевой функции использовался обобщенный метод Гаусса – Ньютона [9].

На рис. 1, а, б в разных масштабах представлены результаты исследования сходимости в глобальный минимум для алгоритма Бока (п. 2.2) при различных старто-

⁶Наиболее информативная картинка получится, если строить шар в пространстве всех стартовых догадок, но для удобства иллюстрации мы ограничимся двумерной характеристикой.

⁷Варианты использования идеальных стартовых догадок для скрытых переменных, а также идеальных догадок с добавленным к ним шумом также были рассмотрены нами достаточно подробно, но результаты оказались качественно сходны с приведенными ниже.

вых догадках для параметров. Картины получены в случае длины ряда, при которой алгоритм Бока дает максимальный радиус стопроцентной сходимости. На рис. 1 приведены сечения пространства параметров плоскостью $b_1 = 0$, поскольку в рассматриваемом случае ошибки в параметре b_1 наименее критичны. Как видно из рис. 1, *а, б*, область сходимости алгоритма Бока в случае незашумленного ряда достаточно широка – диаметр окружности r_{100} на плоскости нормированных параметров больше 1.0, то есть допускаются ошибки в стартовых догадках больше 100%. Существуют и очень удаленные от истинных значений области, откуда также достигается сходимость в глобальный минимум (см. рис. 1, *а*). Однако модифицированный метод еще менее требователен к стартовым догадкам для параметров: сравните рис. 1, *б* и рис. 1, *в*, где значения r_{100} , r_{90} , r_{80} существенно больше, а соответствующая r_{100} белая область – шире.

Рис. 2 позволяет оценить зависимость результатов моделирования от уровня измерительного шума, добавлявшегося к ряду аддитивно и имевшего нормальное распределение. Из рис. 2, *а*, где построены графики меры $\mu(r)$ при различных уровнях шума, видно, что работоспособность подхода сохраняется и при наличии шума умеренной интенсивности: горизонтальная площадка при $\mu = 1$, соответствующая радиусу 100-процентной сходимости, несколько укорачивается, но остается весьма значительной – r_{100} уменьшается при использовании исходного алгоритма с 1.1 до 0.7, а модифицированного (при $\nu = 2$) – с 1.2 до 0.9. Аналогичные выводы можно сделать из рис. 2, *б*, где показаны зависимости $r_{100}(N)$ для незашумленного ряда (при $\nu = 1$ и $\nu = 4$) и для ряда, к которому был добавлен 1-процентный шум.

О преимуществах модифицированного метода свидетельствует более светлый тон рис. 3, где на плоскостях параметров длина сегмента n – количество сегментов L для алгоритма Бока и модифицированного подхода (с $\nu = 2$) интенсивностью се-

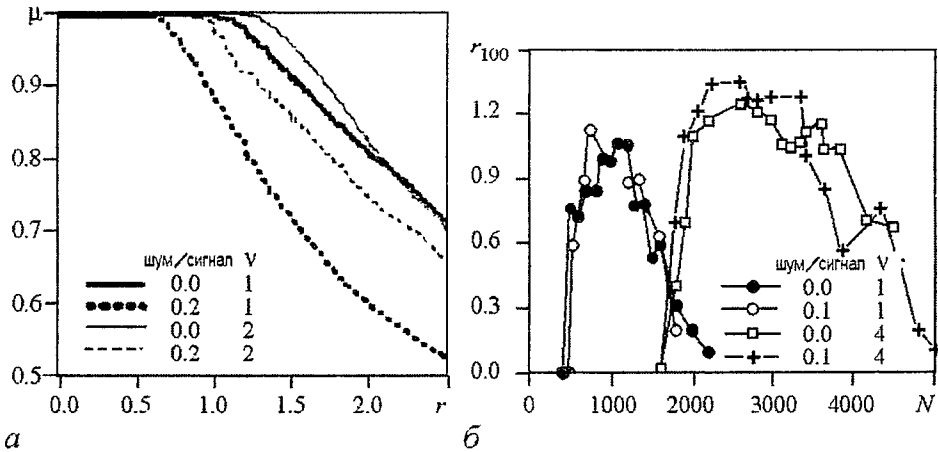


Рис. 2. Иллюстрация зависимости результатов моделирования от уровня шума: *а* – мера $\mu(r)$ для алгоритма Бока (жирные кривые) и для модифицированного метода (тонкие кривые) при различных уровнях шума, числами показано отношение шум/сигнал в единицах стандартных отклонений; *б* – зависимость радиуса стопроцентной сходимости r_{100} от общей длины ряда N при разных уровнях шума

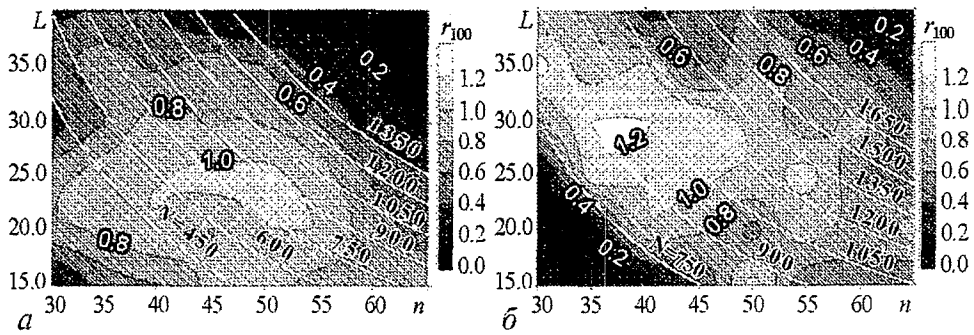


Рис. 3. Зависимость $r_{100}(L, n)$ для алгоритма Бока (а) и модифицированного подхода при $\nu = 2$ (б). Чем темнее область, тем меньше в ней r_{100} . На ограничивающих области линиях уровня указана точная величина r_{100} , нанесенные на рисунок белые гиперболы соответствуют значениям постоянной длины ряда $N = \text{const}$

рого показана зависимость $r_{100}(L, n)$: чем темнее область, тем меньшему значению r_{100} она соответствует. Точные значения r_{100} указаны на ограничивающих разные области линиях уровня. Максимально достижимое значение r_{100} для модифицированного метода больше, чем для алгоритма Бока: не только область с $r_{100} \geq 1$ больше, но и внутри нее выделяется область с $r_{100} > 1$. Кроме того, рассматривая белые гиперболы (линии $N = \text{const}$) на рис. 3, можно сделать вывод, что преимущества модифицированного метода сильнее проявляются для более длинных рядов.

Последние выводы подтверждаются и уточняются на рис. 4, а, где показана величина r_{100} в зависимости от N для разного числа сегментов ν (параметры L и n подбирались так, чтобы получить максимальный r_{100})⁸. Холмообразная форма зависимостей $r_{100}(N)$ определяется двумя факторами: при очень малых N не хватает точек для подгонки параметров, а при больших сказывается экспоненциальная чувствительность к начальным условиям – за время $\tau_\lambda = 1/\lambda_1$ малые возмущения достигают макромасштабов. Кривые, соответствующие большим значениям ν , достигают бóльших значений r_{100} и сдвинуты вправо, в сторону более длинных рядов. При этом шире становятся и интервалы по оси N с ненулевыми значениями r_{100} , то есть с увеличением числа разрывов диапазон длин ряда, в котором можно получить хорошую модель, возрастает.

Проведенное исследование (см. рис. 4, б) показывает, что оптимальное значение длины сегмента Ln связано с ляпуновским временем τ_λ и числом разрывов ν . Для случаев $\nu = 1 \div 4$ оптимальные длины соответствуют 1–3 ляпуновским временам (см. верхнюю шкалу по оси абсцисс), смещаясь в сторону меньших значений с ростом ν . Это можно объяснить со следующих позиций. Шансы на успех реконструкции зависят от допустимой длины сегмента Ln , на которой малые возмущения начальных условий еще не слишком возрастают, а также, от числа $P + \nu D$ свободных параметров, которые нужно подогнать по ряду. Увеличивая число разрывов, мы ослабляем чувствительность к начальным условиям, но одновременно увеличиваем количество подгоняемых величин. При $\nu = 1$ их всего шесть, при $\nu = 2$ – девять,

⁸Для этого удобно использовать белые гиперболы на рис. 3 – линии $N = \text{const}$, выбирая L и n , соответствующие более светлым областям.

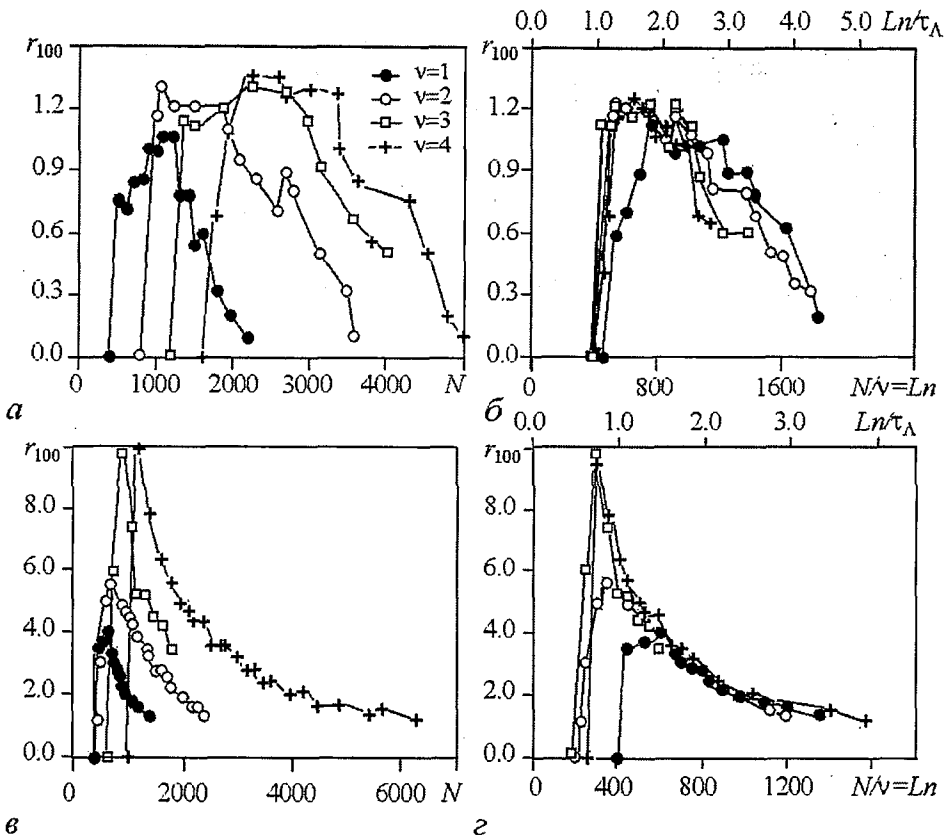


Рис. 4. Зависимость радиуса стопроцентной сходимости r_{100} : *a* – от общей длины используемого ряда N при различном числе разрывов ($v - 1$); *б* – от длины сегмента (Ln); *в, г* – аналогичные зависимости, построенные при использовании в качестве стартовых догадок для скрытых переменных их истинных значений (идеальных догадок), с добавлением к ряду 1-процентного нормального шума наблюдения

а при $v = 4$ – уже пятнадцать. Поэтому с ростом общего количества подгоняемых величин результат реконструкции более критичен к ошибкам в начальных условиях и интервал значений Ln с ненулевым r_{100} сужается.

Рис. 4, *в, г* аналогичны рис. 4, *а, б*, но при их построении использовались не реалистичные, то есть взятые только из наблюдаемой, а идеальные догадки для скрытых переменных, что заметно облегчает процесс моделирования. Это объясняет основное отличие этих графиков – кривые в целом лежат намного выше. На рис. 4, *г* наилучшие результаты соответствуют длине сегмента, немного меньшей одного ляпуновского времени, что, на наш взгляд, объясняется введением в ряд наблюдаемой аддитивного шума.

Сходные результаты были получены и при других значениях параметров: $c_1^0 = 10$, $c_2^0 = 8/3$, $c_3^0 = 28$ – см. рис. 5, где приведена зависимость, аналогичная рис. 3. Видно, что в целом фон на рис. 5, *б* светлее, чем на рис. 5, *а*, то есть модифицированный метод дает в среднем больший радиус сходимости. Кроме того, на рис. 5, *б* выделяется область с $r_{100} \geq 1.0$, которой нет на рис. 5, *а*. При этом преимущества модифицированного метода проявляются при больших длинах ряда.

Аналогично исследовался случай моделирования по временным рядам, записанным при использовании в качестве наблюдаемой величины y_2 .

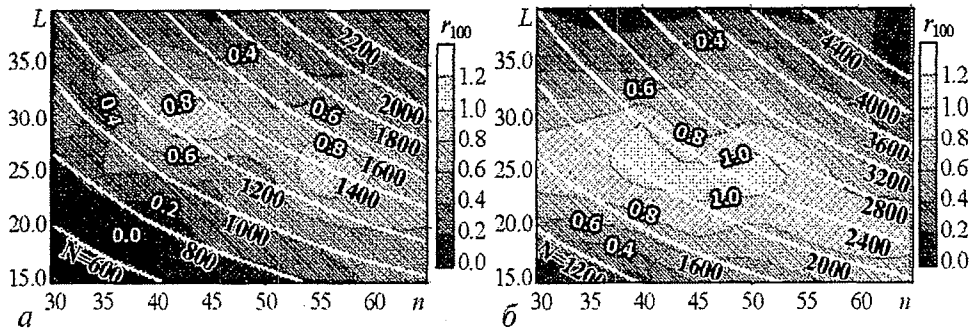


Рис. 5. Зависимость $r_{100}(L, n)$ для алгоритма Бока (а) и модифицированного подхода при $\nu = 2$ (б). Значения параметров: $c_1^0 = 10$, $c_2^0 = 8/3$, $c_3^0 = 28$

Заключение

С помощью введенного количественного критерия проведено сравнение работоспособности различных реализаций метода множественной стрельбы для оценки параметров при наличии скрытых переменных. На примере реконструкции параметров системы Лоренца показано, что исходный алгоритм Бока уступает его модификации, заключающейся в допуске разрывов траектории модели при сохранении единых значений параметров.

Продемонстрирована степень влияния на результат оценивания параметров длины используемого ряда, количества его сегментов, выбора наблюдаемой и способа задания стартовых догадок для скрытых переменных. Показано, что шансы на успех оценки значений параметров возрастают с увеличением длины ряда, если одновременно увеличивается число допустимых разрывов траектории модели. При этом длина сегмента, на котором соблюдается требование непрерывности траектории, должна быть тем меньше и ближе к ляпуновскому времени, чем больше количество разрывов.

Модифицированный метод имеет ряд преимуществ по сравнению с алгоритмом Бока, поскольку он свободен от ограничений, связанных с высокой чувствительностью к начальным условиям: накапливающиеся вдоль фазовой траектории невязки отбрасываются в разрешенных этим подходом разрывах. Он позволяет использовать ряды большой длины, что дает возможность уточнить оценки параметров за счет введения в рассмотрение дополнительного объема данных, причем такие оценки статистически предпочтительнее, чем получаемые с помощью кусочного метода множественной стрельбы (п. 2.2.2). При использовании рядов фиксированной длины он в большинстве случаев предъявляет меньшие требования к стартовым догадкам для искомых параметров, а иногда позволяет получить достаточно точные оценки, когда с помощью алгоритма Бока это невозможно сделать ни при каких стартовых догадках, даже равных истинным значениям.

Показано, что влияние шума (вплоть до 0.2 от уровня сигнала) на процесс моделирования при достаточных длинах ряда не существенно для обеих методик. Следует сказать, что точность оценки параметров при условии попадания в глобальный минимум целевой функции и для выбранной длины ряда наибольшая для

алгоритма Бока, предъявляющего самые жесткие требования при подгонке, меньше для модифицированного метода, и еще меньше для кусочного метода множественной стрельбы. Если же учесть, что попасть в глобальный минимум гораздо проще при использовании модифицированного метода, то он в итоге имеет практические преимущества даже в смысле точности оценок. Но следует учитывать и то, что, так как модифицированный метод предъявляет меньшие требования к адекватности используемой модели, существует опасность при слишком малом размере сегментов успешно подогнать под наблюдаемый ряд «чужую» модель.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (05-02-16305), CRDF (REC-006) и гранта Президента РФ для молодых ученых (МК-1067.2004.2).

Библиографический список

1. *Льонг.* Идентификация систем. Теория для пользователей. - М.: Наука, 1991. 432 с.
2. *Макаренко Н.Г.* Эмбедология и нейропрогноз // Лекции по нейроинформатике, М.: МИФИ, 2003. С. 2-67.
3. *Horbelt W., Timmer J., Bunner M.J., Meucci R. and Ciofini M.* Identifying physical properties of a CO₂ laser by dynamical modeling of measured time series // Phys. Rev. E, 2001. Vol.64. P. 016222.
4. *Hegger R., Kantz H., Schmuser F., Diestelhorst M., Kapsch R.-P., and Beige H.* Dynamical properties of a ferroelectric capacitors observed through nonlinear time series analysis // Chaos, 1998. Vol. 8, № 3. P. 727-754.
5. *Timmer J., Rust H., Horbelt W., and Voss H.* Parametric, nonparametric and parametric modelling of a chaotic circuit time series// Phys. Lett. A. 2000. Vol. 274. P. 123-134.
6. *Tokuda I., Parlitz U., Illing L., Kennel M. and Abarbanel H.D.I.* Parameter estimation for neurons // Experimental Chaos, Proceedings of the 7th Experimental Chaos Conference, San Diego, USA, 2002.
7. *Swameye I., Muller T.G., Timmer J., Sandra O., and Klingmuller U.* Identification of nucleocytoplasmic cycling as a remote sensor in cellular signaling by databased modeling // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2003. Vol. 100. P. 1028-1033.
8. *Bock H.* in: K. Ebert, P. Deuffhard W. Jager (Eds.), Modelling of Chemical Reaction Systems, Springer Berlin, 1981. Vol. 18. Chap. 8. P. 102-125.
9. *Baake E., Baake M., Bock H.G., and Briggs K.M.* Fitting ordinary differential equations to chaotic data // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. No. 8. P. 5524-5529.
10. *Pisarenko V.F., Sornette D.* Statistical methods of parameter estimation for deterministically chaotic time series. Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69. P. 036122.
11. *Horbelt W.* Maximum likelihood estimation in dynamical systems: PhD thesis, University of Freiburg, 2001. <http://webber.physik.uni-freiburg.de/horbelt/diss/>.

*Саратовский государственный
университет
Саратовское отделение ИРЭ РАН*

Поступила в редакцию 22.11.2004

RECONSTRUCTION WITH HIDDEN VARIABLES: MODIFIED BOCK'S APPROACH

B.P. Bezruchko, D.A. Smirnov, I.V. Sysoev

The task of model parameter estimation from experimental time series under the assumption that some variables cannot be measured or their series are very noisy is considered. Based on proposed quantitative criteria two algorithms – original Bock's approach and its modification that allows discontinuity of model trajectory are compared. The modified method is shown to be significantly more efficient for long series. Also with the modified approach the worse starting guesses for parameters to be estimated are acceptable.



Сысоев Илья Вячеславович – выпускник лицея Колледжа прикладных наук СГУ. Соросовский студент факультета нелинейных процессов СГУ, стипендиат Президента и Правительства России, а также Фонда некоммерческих программ «Династия». С 2004 года аспирант и по совместительству инженер НИИ ФНС СГУ, а также соисполнитель ряда грантов РФФИ, CRDF, Министерства образования и науки РФ. Область научных интересов: математическое моделирование по временным рядам радиофизических и биологических систем в условиях дефицита информации об объекте. В том числе разработка подходов в случае, когда часть переменных не может быть измерена. Автор 16 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



Изв. вузов «ПНД», т. 12, № 6, 2004

УДК 517.9

**ПРИМЕНЕНИЕ ДВОЙНОГО ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТОВ МОДУЛЯЦИИ
В ДИНАМИКЕ НЕФРОНОВ***

А.Н. Павлов, О.В. Сосновцева

В работе предлагается метод исследования эффектов взаимодействия ритмических компонент в нестационарной многомодовой динамике, основанный на двойном вейвлет-анализе. На тестовых примерах иллюстрируются возможности и ограничения данного подхода. Рассматривается применение двойного вейвлет-анализа к сигналам давления в проксимальных канальцах нефронов крыс в целях количественного описания эффектов модуляции быстрой (миогенной) динамики нефронов медленным ритмом, обусловленным механизмом канальцево-гломерулярной обратной связи. Показано, что взаимодействие между двумя механизмами является более сильным для крыс с повышенным артериальным давлением по сравнению с крысами, имеющими нормальное артериальное давление.

Введение

Характерной особенностью динамики биологических систем является сосуществование нескольких ритмических компонент, обусловленных различными механизмами. Известно, например, что в функционировании сердечно-сосудистой системы человека можно выделить, по крайней мере, 5 независимых временных масштабов [1]. Похожая ситуация встречается на самых разных уровнях - начиная от микроскопического уровня отдельной клетки (быстрые и медленные процессы в динамике нейронов [2], бета-клеток поджелудочной железы [3] и т.д.) до системного уровня (функционирование отдельных органов или организма в целом [4-8]).

Сосуществование независимых ритмов в динамике биологической системы может приводить к различным формам их взаимодействия. Хорошо известным примером является синхронизация колебаний. За последние годы экспериментальные

*Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия.

и численные исследования синхронизации неоднократно проводились для самых разных физиологических систем, включая сердечно-сосудистую систему [9, 10], малые ансамбли нервных клеток [11] и т.д. Помимо синхронизации, при наличии нескольких ритмических компонент может наблюдаться эффект модуляции, когда амплитуда или частота быстрого ритма модулируется медленным процессом. Данный эффект легко обнаружить и количественно охарактеризовать в численном анализе быстрой динамики. Сложности возникают в экспериментальных исследованиях, так как на практике обычно можно осуществить запись одной переменной состояния (чаще всего это будет медленная переменная, в которой каким-то образом отражена быстрая динамика). Поэтому возникает вопрос о том, возможно ли в этом случае извлечь информацию о характеристиках модуляции и отслеживать изменение данных характеристик во времени?

В проводимых нами исследованиях эффекты модуляции изучались на примере динамики нефронов. Нефрон представляет собой функциональный элемент почек, который может быть рассмотрен как фильтрующее устройство с внутренним механизмом обратной связи (так называемой канальцево-гломерулярной обратной связи), которая регулирует поступающий поток крови в зависимости от концентрации NaCl на выходе. Этот механизм регуляции может приводить к незатухающим колебаниям давления в проксимальных канальцах с периодом 30-40 секунд (медленный ритм). Экспериментально было показано, что соответствующие колебания являются периодическими (или почти периодическими) для крыс с нормальным артериальным давлением и нерегулярными (хаотическими) для крыс с повышенным артериальным давлением. Быстрый ритм обусловлен миогенным механизмом, который ассоциируется с изменением диаметра артериол и порождает колебания с периодом 5-10 секунд.

При анализе динамики нефронов в экспериментах, необходимо отметить, что обрабатываемые сигналы зачастую являются сильно нестационарными. Наличие нестационарности создает различные проблемы при определении характеристик модуляции, поскольку они могут существенно меняться вслед за изменениями параметров системы. Чтобы анализировать модуляцию, необходимо вначале разделить быстрые и медленные ритмы из скалярного временного ряда. Сделать это можно с помощью процедуры полосовой фильтрации. Однако, если мгновенные частоты ритмов демонстрируют существенные изменения во времени, принципиальным оказывается выбор параметров фильтра. С одной стороны, нельзя использовать узкий частотный диапазон при фильтрации из-за нестационарности (мгновенные частоты ритмов могут значительно отклоняться от среднего значения, и полоса пропускания фильтра должна быть достаточной, чтобы учесть эти отклонения). С другой стороны, нельзя брать слишком широкий диапазон, так как в противном случае ритмы не удастся разделить (в полосу пропускания для быстрого ритма попадут гармоники медленного ритма и комбинационные частоты). Возникающие проблемы можно решать с помощью адаптивных фильтров [12], но более эффективным инструментом исследования нестационарной многомодовой динамики является вейвлет-анализ [13, 14]. В настоящей работе мы предлагаем метод двойного вейвлет-анализа, позволяющий количественно характеризовать эффекты нелинейного взаимодействия ритмических компонент в нестационарной многомодовой динамике.

1. Двойной вейвлет-анализ

1.1. Метод. Спектральный анализ биологических процессов часто базируется на вейвлет-преобразовании [13,14]. Преимущества данного подхода по сравнению с преобразованием Фурье неоднократно обсуждались в печати. Если исследователя интересует только факт наличия каких-либо периодических составляющих в анализируемом процессе, то для их выявления можно использовать классические методы. Если же необходимо получить информацию о временной эволюции ритмических компонент, то вейвлеты, несомненно, оказываются предпочтительнее.

Вейвлет-преобразование сигнала $x(t)$ имеет следующий вид:

$$T_x(a, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \psi^* \left(\frac{u-t}{a} \right) du, \quad (1)$$

где $T_x(a, t)$ - коэффициенты преобразования, a - параметр масштаба. Выбор базисной функции ψ зависит от решаемой задачи. Например, анализ локальных сингулярностей вообще не зависит от ψ [15,16], но при исследовании ритмической динамики важной характеристикой является разрешение базисной функции во временной и в частотной областях. Ритмические компоненты обычно анализируются с помощью вейвлета Морле, формулу для которого упрощенно можно записать следующим образом:

$$\psi(\tau) = \pi^{-1/4} \exp(j2\pi f_0 \tau) \exp \left[-\frac{\tau^2}{2} \right]. \quad (2)$$

Преобразование (1) представляет собой двумерное разложение скалярного сигнала, при котором частота $f = f_0/a$ и время t интерпретируются как независимые переменные. В нашей работе параметр f_0 , характеризующий локализацию вейвлета во временной и в частотной областях, выбран равным 1. Дальнейший анализ может проводиться либо для коэффициентов $T_x(f, t)$, либо для плотности энергии $E_x(f, t) \sim |T_x(f, t)|^2$. Можно рассматривать $E_x(f, t)$ как поверхность в 3-мерном пространстве, чьи сечения в фиксированные моменты времени соответствуют локальным энергетическим спектрам. Наиболее важная информация об этой поверхности содержится в поведении локальных максимумов, то есть во временной эволюции пиков локальных спектров. Эволюция пиков во времени характеризует мгновенные частоты $f_i(t)$ ритмических компонент, которые довольно легко извлечь из вейвлет-спектра $E_x(f, t)$. Помимо частот можно отслеживать изменения во времени величины пиков спектра или мгновенной плотности энергии $e_i(t)$, ассоциирующейся с каждым ритмом. Учитывая, что энергия пропорциональна квадрату амплитуды, появляется возможность исследовать динамику мгновенных амплитуд характерных ритмов $a_i(t)$.

Для изучения особенностей модуляции быстрой динамики медленной переменной состояния нами предлагается использовать извлеченные мгновенную частоту $f_{fast}(t)$ или амплитуду $a_{fast}(t)$ быстрого ритма в качестве входного сигнала для еще одного вейвлет-преобразования (1). Полученный при этом вейвлет-спектр будет содержать информацию о всех процессах, принимающих участие в модуляции. Предложенный подход, названный нами двойным вейвлет-анализом [17], позволяет

количественно описывать нестационарную временную динамику модулированного процесса - выявлять все ритмы, участвующие в модуляции, определять глубину модуляции для каждого из них и анализировать изменение характеристик модуляции во времени.

1.2. Тестирование метода. Проиллюстрируем возможности и ограничения метода двойного вейвлет-анализа. С этой целью рассмотрим вначале классические примеры амплитудной и частотной модуляции, полученные с помощью двух гармонических функций

$$x(t) = A(1 + m \cdot \sin(\Omega t + \varphi)) \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

$$x(t) = A \sin[\omega t + m \cdot \sin(\Omega t + \varphi) + \varphi_0]. \quad (4)$$

Выберем $A \in [1; 10]$, $m \in [0; 1]$ – глубина модуляции, $\Omega = 2\pi \cdot 0.03$ и $\omega = 2\pi \cdot 0.15$. Начальные фазы φ и φ_0 являются случайными числами.

Применение метода двойного вейвлет-анализа к сигналам (3) и (4) позволяет четко идентифицировать два ритма, выделить мгновенную амплитуду (рис. 1, *a*) и мгновенную частоту (рис. 2, *a*) быстрого (модулируемого) ритма и, рассматривая эти переменные в качестве новых входных сигналов для вейвлет-преобразования, определить характеристики модуляции. При осуществлении такого анализа выявляются следующие особенности метода.

1. Вейвлет-анализ обладает эффектом усреднения, который возникает из-за того, что свойства сигнала в данный момент времени изучаются внутри «окна» конечной ширины, определяемого функцией ψ . Частота модуляции оценивается правильно

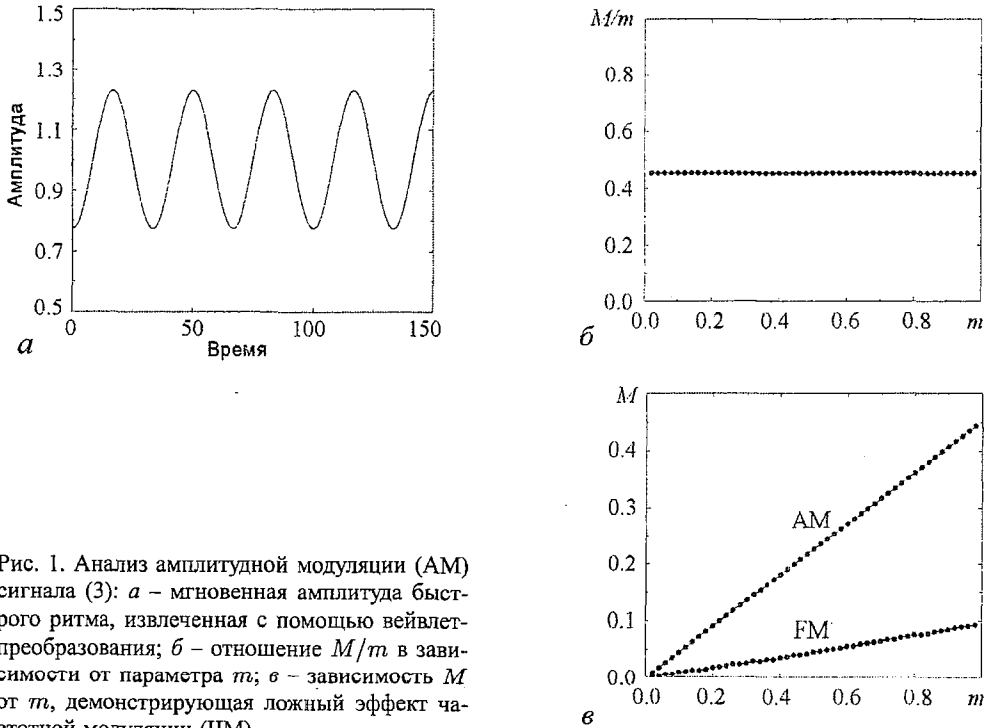


Рис. 1. Анализ амплитудной модуляции (АМ) сигнала (3): *a* – мгновенная амплитуда быстрого ритма, извлеченная с помощью вейвлет-преобразования; *б* – отношение M/m в зависимости от параметра m ; *в* – зависимость M от m , демонстрирующая ложный эффект частотной модуляции (ЧМ)

но, но вычисленная глубина модуляции M (полученная из вейвлет-анализа) оказывается примерно вдвое меньше ее истинного значения (так как M является характеристикой, усредненной внутри окна). Отметим, что для амплитудной модуляции (рис. 1, б) отношение M/t не зависит ни от t , ни от A , являясь постоянной величиной, и существует лишь очень слабая зависимость от t для случая частотной модуляции (рис. 2, б). Более того, соответствующие отношения M/t практически совпадают в обоих случаях. Это означает, что эффекты усреднения оказываются непринципиальными - мы всегда можем определить истинную глубину модуляции, умножив результаты двойного вейвлет-анализа на постоянный множитель (примерно равный 2.2).

2. В случае только амплитудной модуляции (3) метод может показывать «ложные» эффекты слабой частотной модуляции, которая имеет, приблизительно в 5 раз меньшую глубину, чем истинная амплитудная модуляция (рис. 1, в). По аналогии, может возникать эффект ложных амплитудных изменений в случае только частотной модуляции (4), который примерно в 10 раз меньше истинной модуляции (рис. 2, в). Следовательно, получив результаты анализа экспериментальных данных, необходимо проверить, являются ли посчитанные характеристики сопоставимыми с возможными ложными эффектами.

3. Результаты двойного вейвлет-анализа достаточно устойчивы к аддитивным флуктуациям. Мы добавляли различные виды шума к процессу $x(t)$ ($1/f$ -шум, моделирующий медленную нестационарность, нормально распределенные случайные процессы с интенсивностями $[10^{-4}; 10^{-2}]$) и убедились в том, что полученные при этом характеристики практически совпадают с характеристиками, представленными на рис. 1, б, в и рис. 2, б, в.

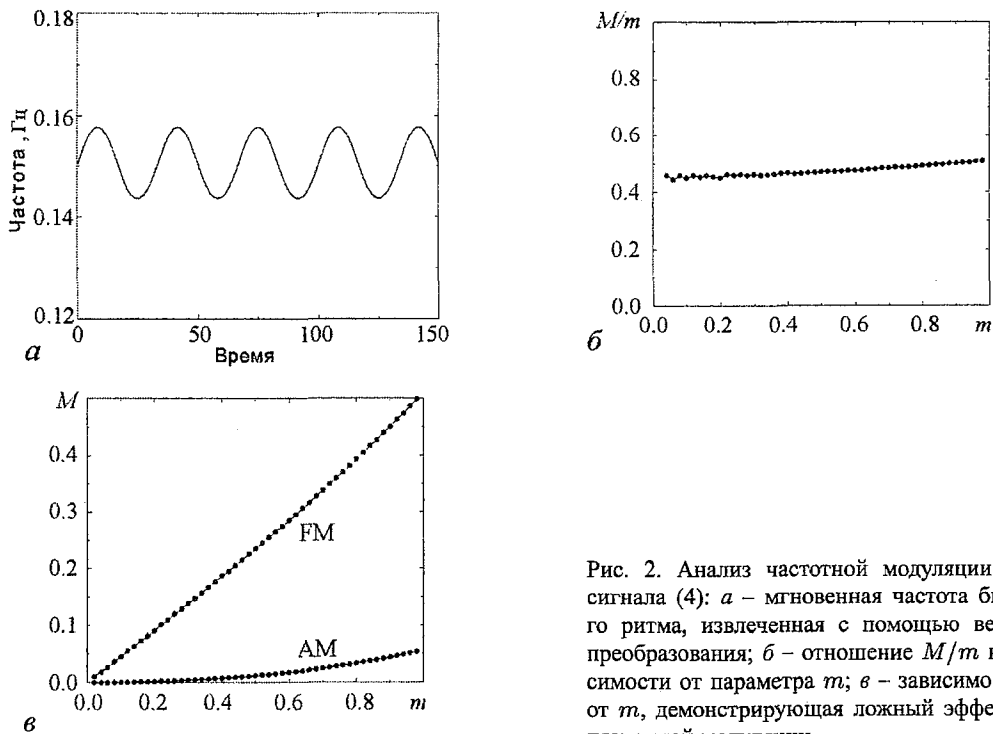


Рис. 2. Анализ частотной модуляции (ЧМ) сигнала (4): а - мгновенная частота быстрого ритма, извлеченная с помощью вейвлет-преобразования; б - отношение M/t в зависимости от параметра t ; в - зависимость M от t , демонстрирующая ложный эффект амплитудной модуляции

Проиллюстрируем теперь работу метода в случае более сложной динамики и рассмотрим модель генератора Анищенко – Астахова [18], которая описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= kx + y - xz - bx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + gx(x + |x|)/2. \end{aligned} \tag{5}$$

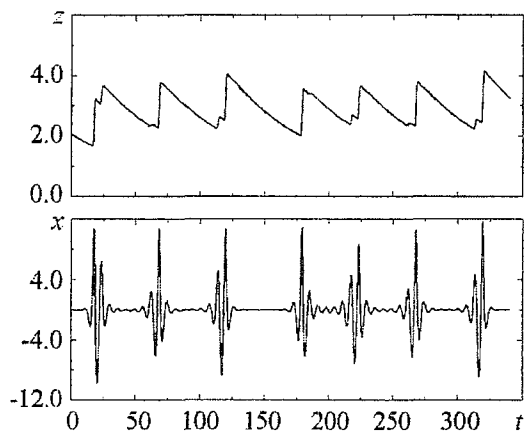


Рис. 3. Временные зависимости медленной z и быстрой x переменных в модели (5). В данном случае $k = 2.90328$, $g = 0.012505$ и $b = 5 \cdot 10^{-5}$

Варьируя значения управляющих параметров k , g и b , можно получить множество различных режимов, включая хаотическую динамику. В частности, одним из них является режим автомодуляции. Этот автономный режим характеризуется медленными колебаниями для переменной z и быстрой динамикой для переменных x и y [19]. Стремясь проиллюстрировать работоспособность метода для нестационарной динамики, мы выбрали случай переходного хаоса (рис. 3). Временная зависимость быстрой переменной модели (5) демонстрирует эффект модуляции медленным ритмом - амплитуда и частота сигнала $x(t)$ меняются во времени с периодом медленной переменной $z(t)$.

На рис. 4, *a* представлена временная зависимость мгновенной частоты быстрого ритма, извлеченная из сигнала $z(t)$. В данном случае для части периода колебаний эта частота принимает значения, достаточно близкие к гармонике медленного ритма, и разрешения вейвлет-преобразования оказывается недостаточно для того, чтобы их разделить. Это приводит к тому, что некоторые точки мгновенной частоты могут быть пропущены. Но и в таких условиях существует возможность определить частоту и глубину модуляции, осуществив интерполяцию и последующее вейвлет-преобразование извлеченной временной зависимости (рис. 4, *б*). В данном случае глубина частотной модуляции M_f принимает значение, примерно равное 1.1. Исследование мгновенной амплитуды быстрого ритма методом двойного вейвлет-анализа дает значение глубины амплитудной модуляции $M_a \approx 0.95$. Частоты модуляции практически совпадают с мгновенной частотой медленного ритма (рис. 4, *в*), а полученные значения глубины модуляции соответствуют ожидаемым величинам, которые можно приблизительно оценить из сигнала $x(t)$ на рис. 3. Таким образом, предложенный метод позволяет оценивать характеристики модуляции в случае сложной многомодовой динамики. Отметим, что добавление медленной нестационарности к анализируемому сигналу и аддитивного белого шума не оказывало заметного влияния на вычисляемые величины.

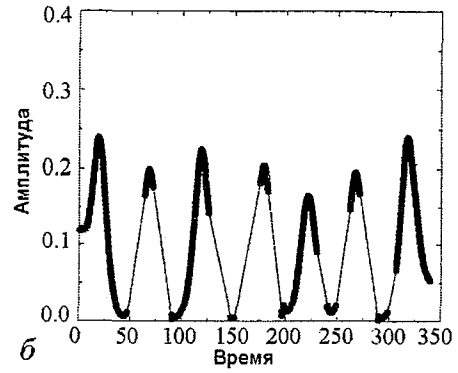
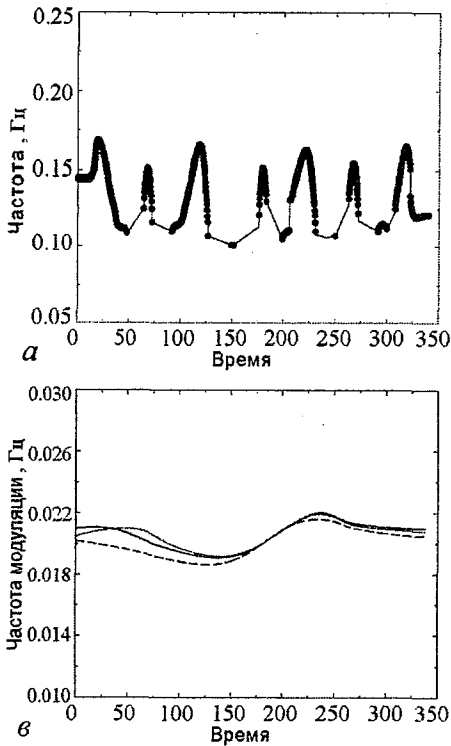


Рис. 4. Мгновенная частота (а) и амплитуда (б) быстрого ритма, извлеченные из сигнала $z(t)$ системы (5) для случая автомодуляции в режиме переходного хаоса. Пропущенные точки проинтерполированы сплайнами, что, однако, несущественно для корректного оценивания характеристик модуляции. Мгновенные частоты модуляции (в) для случаев АМ (пунктир) и ЧМ (точки). Сплошная зависимость представляет мгновенную частоту медленной динамики

2. Применение метода к анализу экспериментальных данных

Рассмотрим применение техники вейвлет-анализа к изучению особенностей нелинейного взаимодействия ритмических компонент в динамике нефрона. Экспериментальные работы [20,21] продемонстрировали, что нефрон может генерировать незатухающие колебания с характерным периодом 30-40 секунд (медленный ритм) и 5-10 секунд (быстрый ритм). Для крыс с нормальным артериальным давлением соответствующие колебания обычно являются регулярными, а для крыс с повышенным артериальным давлением (так называемых спонтанных гипертензивных крыс) наблюдается сильно нерегулярная динамика. К настоящему времени было предпринято лишь несколько попыток исследования взаимодействия между механизмами, ответственными за генерацию быстрого и медленного ритма в динамике нефрона [22, 23]. В данной работе мы рассмотрим особенности модуляции быстрого ритма медленной динамикой в сигналах, записанных в ходе специальной серии биологических экспериментов.

Характерные примеры сигналов давления в проксимальных канальцах нефронов для крыс с нормальным и повышенным артериальным давлением представлены на рис. 5. На рис. 6 показаны извлеченные после первого вейвлет-преобразования мгновенные частоты быстрого ритма. Для крысы с нормальным артериальным давлением мгновенная частота демонстрирует колебания относительно значения 0.16 Гц, которые позволяют предположить наличие модуляции медленной динамикой. Для крысы с повышенным артериальным давлением соответствующие отклонения частоты от среднего значения значительно сильнее, и даже визуально можно определить, что характеристики модуляции (частота и глубина) меняются во времени.

Для получения количественной информации об этих характеристиках выделенные временные зависимости мгновенных частот (см. рис. 6) были проанализированы с помощью второго вейвлет-преобразования.

Рис. 7 демонстрирует, как частоты модуляции меняются во времени. Черные кружочки на этом рисунке показывают временные зависимости мгновенной частоты медленного ритма, а белые кружочки соответствуют мгновенной частоте модуляции. Для крысы с нормальным артериальным давлением (рис. 7, а) отклонения двух частот не превышают 0.01 Гц, что сопоставимо с допустимыми погрешностями метода. Для крысы с повышенным артериальным давлением (рис. 7, б) частота модуляции также близка к частоте медленного ритма, но динамика является более нестационарной. Некоторая задержка по времени между двумя зависимостями, изображенными на рис. 7, а, вероятно связана с эффектом усреднения: чтобы определить частоту в данный момент времени, мы используем скользящее «окно», ширина которого определяется шириной вейвлета ψ , то есть мы рассматриваем как предшествующую, так и последующую динамику. Из-за эффекта усреднения изменения характеристик модуляции могут быть зафиксированы раньше (а в некоторых случаях позже), чем они происходят на самом деле. Следовательно, временная зависимость мгновенной частоты медленного ритма может не воспроизводиться в полной мере, но качественное сходство является несомненным. По аналогии с частотными характеристиками, применение вейвлет-преобразования к сигналам мгновенной амплитуды быстрого

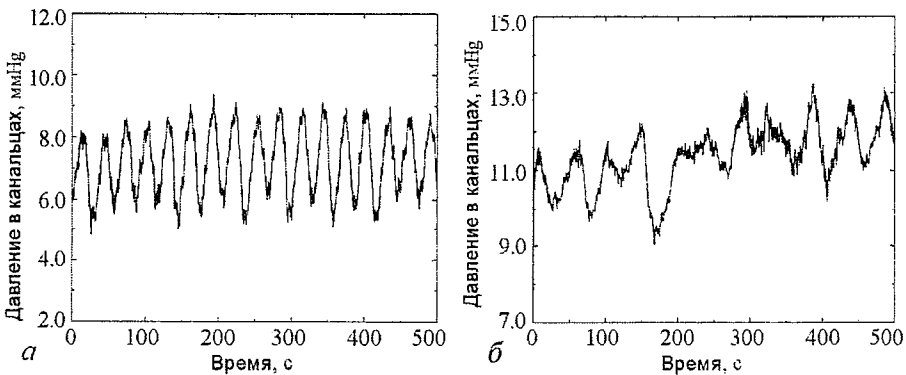


Рис. 5. Сигналы давления в проксимальных каналах нефрона для крысы с нормальным давлением (а) и повышенным давлением (б)

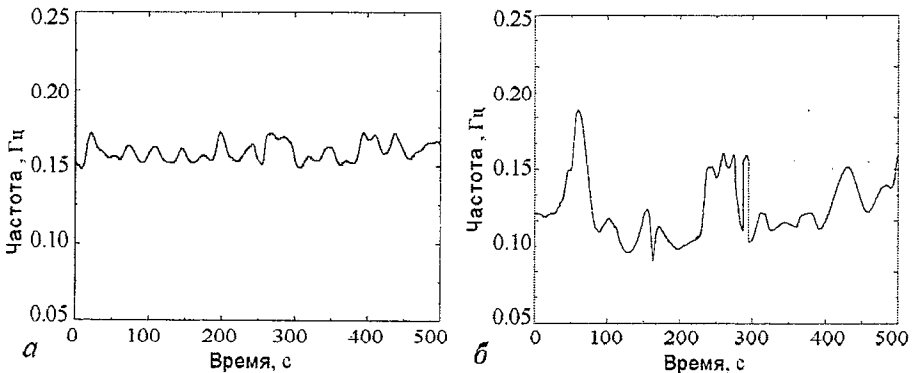


Рис. 6. Мгновенные частоты быстрого ритма, извлеченные из сигналов, представленных на рис. 5

ритма нефрона позволило проанализировать эффекты амплитудной модуляции. Соответствующие результаты показаны на рис. 8 и подтверждают выводы, сделанные для случая частотных изменений.

Не только частота, но и глубина модуляции не является постоянной во времени (рис. 9), и для количественного описания динамики целесообразно использовать усредненные характеристики. Для сигнала, изображенного на рис. 5, а, получено значение $M_f \approx 0.4$, тогда как для реализации, представленной на рис. 5, б, $M_f \approx 1.2$, то есть имеет место достаточно сильная частотная модуляция. Для тех же самых сигналов получены соответственно значения $M_a \approx 0.28$ и $M_a \approx 0.4$. Это означает, что эффекты амплитудных изменений менее выражены с точки зрения абсолютных значений величины M .

Обратимся теперь к результатам статистического анализа серии экспериментов. Мы использовали 76 записей давления в проксимальных канальцах нефронов (34 записи для крыс с нормальным артериальным давлением и 42 записи для случая гипертензии). На рис. 10 представлены значения глубины частотной и амплитудной модуляции. Результаты, полученные для крыс с нормальным давлением

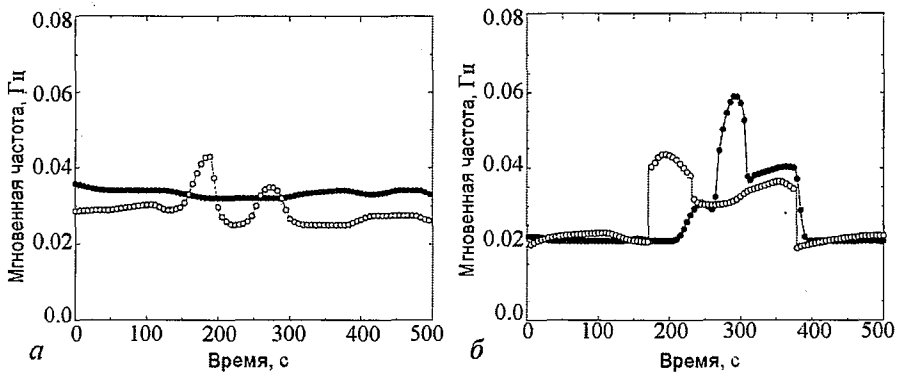


Рис. 7. Результаты двойного вейвлет-анализа сигналов, представленных на рис. 5. Рисунки (а) и (б) соответствуют случаю частотной модуляции для крысы с нормальным и повышенным артериальным давлением. Черные кружочки показывают мгновенные частоты медленного ритма, а белые кружочки - мгновенные частоты модуляции

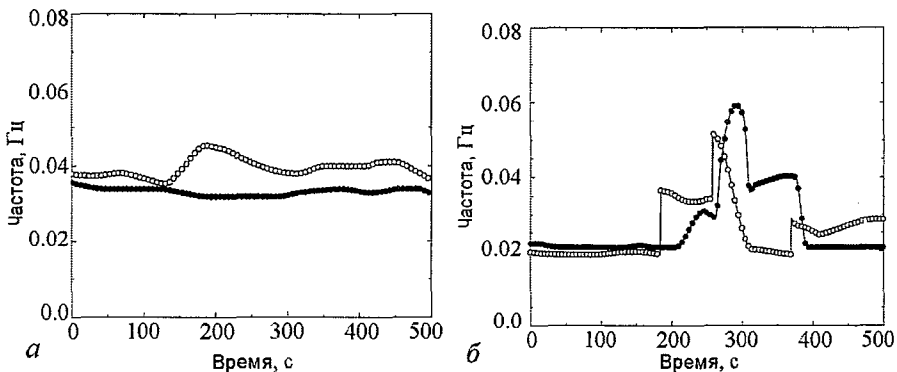


Рис. 8. Анализ амплитудной модуляции в структуре сигналов, представленных на рис. 5. Обозначения те же, что и на рис. 7

(1-я группа), показаны белыми кружочками, для крыс с повышенным давлением (2-я группа) - черными. Средние значения глубины модуляции по всем данным вместе со стандартной ошибкой среднего равны $M_a = 0.49 \pm 0.02$ и $M_f = 1.08 \pm 0.06$; эти значения отмечены пунктирными линиями на рис. 10. Хорошо видно, что глубина модуляции и, следовательно, эффекты взаимодействия между двумя механизмами являются более сильными для гипертензивных крыс. Число нефронов, для которых глубина частотной модуляции превышает среднее значение, составляет 75% во 2-й группе и лишь 18% в 1-й группе. Для случая амплитудных изменений мы получили соответственно значения 64% и 21%. Несколько меньшие различия в амплитудных характеристиках могут быть связаны с меньшими значениями M_a по сравнению с M_f и, следовательно, с вероятным присутствием дополнительных ложных эффектов, которые будут влиять на определение характеристик амплитудной модуляции. Если проводить анализ для двух групп по отдельности, то получаются следующие значения $M_a = 0.40 \pm 0.02$ и $M_f = 0.74 \pm 0.06$ для крыс с нормальным давлением; $M_a = 0.55 \pm 0.02$ и $M_f = 1.35 \pm 0.06$ для крыс с повышенным артериальным давлением.

Основываясь на полученных результатах, мы можем предположить, что механизм регуляции входящего потока крови в индивидуальных нефронах является более сложным (и, вероятно, более эффективным), чем считалось ранее. В случае гипертензии активные части сосудов нефрона демонстрируют большую вариабельность

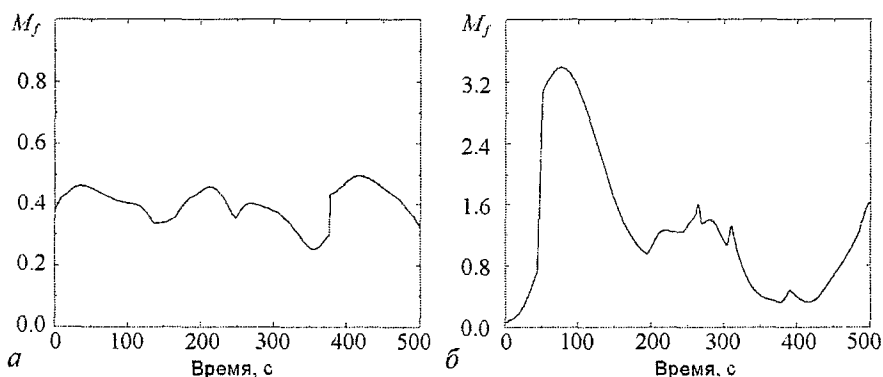
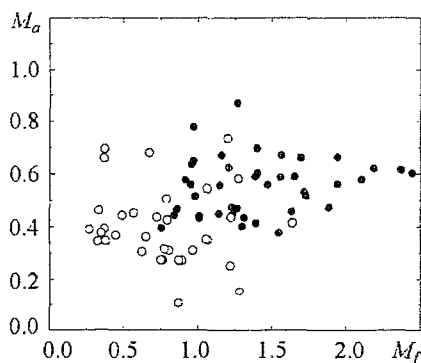


Рис. 9. Временные зависимости глубины частотной модуляции для крысы с нормальным давлением (а) и крысы с повышенным давлением (б)

Рис. 10. Статистический анализ эффектов модуляции в динамике нефронов крыс с нормальным \circ давлением (34 сигнала) и с повышенным \bullet давлением (42 сигнала). Пунктирные линии соответствуют средним значениям характеристик модуляции



своих колебаний: при повышении давления сосуды не только сильнее расширяются (отражая амплитудные изменения в сигналах давления), но и чаще сокращаются (что проявляется в частотной модуляции). Можно предположить, что частотная модуляция является механизмом, препятствующим сильному расширению сосудов за счет более частого их сокращения. Отметим, что данные выводы были сделаны как для случая спонтанных гипертензивных крыс (то есть специально выведенных крыс, для которых повышенное давление является обычным состоянием), так и при анализе данных биологических экспериментов по искусственной гипертензии, которая являлась следствием специальной операции. Во всех этих случаях повышение артериального давления сопровождалось более выраженными эффектами амплитудной и частотной модуляции миогенной динамики нефрона медленным ритмом по сравнению со случаем нормального давления.

Заключение

Для исследования особенностей нелинейного взаимодействия между ритмами в случае нестационарной многомодовой динамики нами предложен метод двойного вейвлет-анализа, который позволяет выявлять все спектральные компоненты, участвующие в модуляции, оценивать их вклад в этот процесс и получать количественную информацию о том, как характеристики модуляции меняются во времени. Поскольку многомодовая нестационарная динамика очень распространена в природе, область потенциального применения техники двойного вейвлет-анализа достаточно широка. Возможные ограничения данного метода проиллюстрированы в нашей работе на нескольких примерах, включая случай нестационарной многомодовой динамики в присутствии флуктуаций.

Разработанный метод был применен для исследования эффектов модуляции в динамике нефронов почек. В соответствии с полученными результатами как для крыс с нормальным артериальным давлением, так и при гипертензии наблюдаются оба типа модуляции (амплитудная и частотная). Амплитудные изменения ранее уже были описаны в литературе, однако наличие частотной модуляции, насколько нам известно, в экспериментальных исследованиях показано впервые.

Установлено, что существуют четкие различия между двумя группами крыс: гипертензивные крысы обычно демонстрируют более глубокую модуляцию (и амплитудную, и частотную). Наличие сильной частотной модуляции в динамике нефронов позволяет нам предположить, что механизм регуляции входящего потока крови в индивидуальных нефронах является более сложным, чем считалось ранее: регуляция обеспечивается не только за счет изменений диаметров активной части сосудов (то есть амплитудных изменений), но и также за счет подстройки частоты миогенного ритма.

Авторы выражают признательность E. Mosekilde, N.-H. Holstein-Rathlou и D.J. Marsh за предоставленные экспериментальные данные и за многочисленные дискуссии.

Проводимые исследования были поддержаны грантом INTAS 01-2061. А.Н. Павлов благодарит индивидуальную поддержку грантами Президента России (МК-2512.2004.2), Министерства Образования и Науки РФ и CRDF (Y1-P-06-06).

Библиографический список

1. *Stefanovska A. and Bračić M.* Physics of the human cardiovascular system // Contemporary Physics. 1999. Vol. 40. P. 31.
2. *Braun H.A., Bade H., and Hensel H.* Static and dynamic discharge patterns of bursting cold fibers related to hypothetical receptor mechanisms // Pflügers Arch. 1980. Vol. 386. P. 1.
3. *Goldbeter A.* Biochemical Oscillations and Cellular Rhythms. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
4. *Tuckwell H.C.* Introduction to Theoretical Neurobiology. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. Vols. 1 and 2.
5. *Beuter A., and Edwards R.* Using frequency domain characteristics to discriminate physiological and parkinsonian tremors // Journal of Clinical Neurophysiology. 1999. Vol. 16, No. 5. P. 484.
6. *Hoffman U., Yanar A., Franzeck U.K., Edwards J.M., and Bollinger A.* The frequency histogram: a new method for the evaluation of laser Doppler flux motion // Microvascular Res. 1990. Vol. 40. P. 293.
7. *Holstein-Rathlou N.-H., He J., Wagner A.J., and Marsh D.J.* Patterns of blood pressure variability in normotensive and hypertensive rats // Am. J. Physiol. 1990. Vol. 269. P. R1230.
8. *Sturis J., Mosekilde E., and Van Cauter E.* Modeling modulatory effects on pulsatility // Methods in Neurosciences. 1994. Vol. 20. P. 393.
9. *Schäfer C., Rosenblum M.G., Abel H., and Kurths J.* Synchronization in the human cardiorespiratory system // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 857.
10. *Anishchenko V.S., Balanov A.G., Janson N.B., Igosheva N.B., and Bordugov G.V.* Entrainment between heart rate and weak noninvasive forcing // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10. P. 2339.
11. *Kopell N., Ermentrout G.B., Whittington M.A., and Traub R.D.* Gamma rhythms and beta rhythms have different synchronization properties // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 2000. Vol. 97. P. 1867.
12. *Tass P., Rosenblum M.G., Weule J., Kurths J., Pikovsky A., Volkman J., Schnitzler A., and Freund H.-J.* Detection of n:m phase locking from noisy data: application to magnetoencephalography // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. P. 3291.
13. *Daubechies I.* Ten Lectures on Wavelets. S.I.A.M., Philadelphia, 1992.
14. *Grossmann A. and Morlet J.* Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // S.I.A.M. J. Math. Anal. 1984. Vol. 15. P. 723.
15. *Ivanov P.Ch., Nunes Amaral L.A., Goldberger A.L., Havlin S., Rosenblum M.G., Struzik Z.R., and Stanley H.E.* Multifractality in human heartbeat dynamics // Nature. 1999. Vol. 399. P. 461.
16. *Muzy J.F., Bacry E., and Arneodo A.* Wavelets and multifractal formalism for singular signals: application to turbulence data // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol. 67. P. 3515.
17. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H., and Marsh D.J.* Double-wavelet approach to study frequency and amplitude modulation in renal autoregulation // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70. P. 031915.
18. *Anishchenko V.S.* Dynamical Chaos - Models and Experiments. Singapore: World Scientific, 1995.
19. *Sosnovtseva O.V., Postnov D.E., Nekrasov A.M., Mosekilde E., and Holstein-Rathlou N.-H.* Phase multistability analysis of self-modulated oscillations // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. P. 036224.

20. *Holstein-Rathlou N.-H., and Leyssac P.P.* TGF-mediated oscillations in the proximal intratubular pressure: differences between spontaneously hypertensive rats and Wistar-Kyoto rats // *Acta Physiol. Scand.* 1986. Vol. 126. P. 333.
21. *Yip K.P., Holstein-Rathlou N.-H., and Marsh D.J.* Mechanisms of temporal variation in single-nephron blood flow in rats // *Am. J. Physiol.* 1993. Vol. 262. P. F427.
22. *Chon Ki.H., Chen Y.-M., Marmarelis V.Z., Marsh D.J., and Holstein-Rathlou N.-H.* Detection of interaction between myogenic and TGF mechanisms using nonlinear analysis // *Am. J. Physiol.* 1994. Vol. 267. P. F160.
23. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., and Holstein-Rathlou N.-H.* Bimodal oscillations in nephron autoregulation // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66. P. 061909.

*Саратовский государственный
университет
Датский технический университет*

Поступила в редакцию 20.01.2005

APPLICATION OF DOUBLE-WAVELET ANALYSIS TO STUDY MODULATION PHENOMENA IN DYNAMICS OF NEPHRONS

A.N. Pavlov, O.V. Sosnovtseva

Based on the double-wavelet analysis, the paper proposes a method to study interaction phenomena of rhythmic components in nonstationary multimode dynamics. Possibilities and limitations of the approach are illustrated for a number of test examples. Application of the double-wavelet analysis is considered for tubular pressure signals from rat nephrons in order to quantify the modulation phenomena of the fast (myogenic) dynamics of nephrons by the slow rhythm caused by the tubulo-glomerular feedback mechanism. It is shown that interaction between the two mechanisms is stronger in hypertensive rats than in normotensive rats.



Павлов Алексей Николаевич родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Защитил кандидатскую диссертацию (1998). В настоящее время работает доцентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: динамика биологических систем, анализ временных рядов. Имеет более 40 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати. E-mail: pavlov@chaos.ssu.runnet.ru



Сосновцева Ольга Владимировна родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Защитила кандидатскую диссертацию (1996). Неоднократно работала за рубежом: в Германии, Дании и Южной Корее. В настоящее время работает в Датском техническом университете (г. Люнбю). Научные интересы - явления самоорганизации в ансамблях нелинейных хаотических и стохастических систем; особенности синхронизации хаотической динамики и стохастических процессов, динамика биологических систем. Имеет около 50 публикаций в отечественной и зарубежной печати. E-mail: olga@fysik.dtu.dk



ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ В НЕЙРОННЫХ СИСТЕМАХ*

В.Б. Казанцев

В работе изучается динамика модели нейрона с импульсным внешним воздействием в виде ограниченных серий импульсов. Исследуются процессы преобразования входного импульсного сигнала в зависимости от характеристик стимула и состояния самого нейрона. В качестве модели нейрона используется модифицированная система ФитцХью – Нагумо с пороговым многообразием. Показано, что отклик модели обладает селективными свойствами как по числу входных импульсов (интегрирующий отклик), так и по интервалу следования импульсов (резонансный отклик). Сигналы отклика формируются в зависимости от параметров модели и представляют собой как одиночные импульсы, так и серии импульсов с определенным числом составляющих импульсов.

Введение

Вопрос о том, как нейроны кодируют и преобразовывают информацию, является одним из ключевых при исследовании и моделировании различных нейронных систем [1–6]. Согласно представлениям нейрофизиологов нейронные ансамбли формируют пространственно-временные структуры (паттерны) активности определенной пространственной конфигурации. Во времени такие структуры представляют собой последовательности импульсов (спайков) с изменяющимся межимпульсным (межспайковым) интервалом. Сенсорные сигналы, поступающие в мозг по различным каналам, модифицируют текущий паттерн активности, что соответствует отклику нейронной системы на изменяющиеся условия внешней среды. Так, например, формируются моторные паттерны в оливо-мозжечковой системе, процессы ассоциативного восприятия и пространственно-временного связывания в таламо-кортикальной системе и др. Ключевым моментом здесь является наличие у нейронов собственной

*Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия.

динамики. Сенсорные сигналы лишь определенным образом модулируют текущее состояние нейронной системы [5].

На уровне отдельных нейронов задача о «нейронном коде» сводится к формированию отклика нейрона на стимулирующий (сенсорный) импульсный сигнал. Одним из основных свойств этого отклика является способность «интегрировать» входящие сигналы [3]. Нейрон генерирует отклик в ответ на определенное число входных импульсов. Каждый последующий импульс вызывает скачок потенциала нейрона (постсинаптический потенциал), приближающий нейрон к порогу возбуждения. Роль собственной динамики нейрона сводится здесь к процессам релаксации к потенциалу покоя. Более интересный случай связан с наличием у нейронов собственной колебательной активности [5]. В этом случае отклик обладает резонансными свойствами и нейроны способны осуществлять фазово-частотную селекцию сигналов [7]. Такие свойства имеют, например, нейроны нижних олив, обладающие спонтанными квазисинусоидальными колебаниями ниже порога возбуждения. Известны также более сложные варианты отклика, включающие генерацию импульса отклика на тормозящее (подавляющее) воздействие, генерацию серий (берстов) импульсов и др. [7, 8].

С точки зрения нелинейной динамики, задача о нейронном отклике сводится к изучению динамических режимов нелинейной системы с неавтономным импульсным воздействием [9–12]. В классическом случае периодического воздействия на автоколебательную систему возможна вынужденная синхронизация системы внешним сигналом. В неавтономном фазовом пространстве она соответствует замкнутым обмоткам на инвариантном торе. Разрушение инвариантного тора может сопровождаться возникновением сложных предельных множеств (хаотических) аттракторов, соответствующих хаотическому отклику системы [10, 11]. Для простейших нейроноподобных систем, например, классической модели ФитцХью – Нагумо [13], обладающей порогом возбуждения, также широко изучались режимы стимул-индуцированной синхронизации и хаотического отклика [12, 14–16]. Исследование динамических режимов таких систем сводится, как правило, к одномерным отображениям фазы (окружности). Возможность вынужденной синхронизации и хаоса показана и для более сложных нейронных моделей (модель Ходжкина – Хаксли, модель Хиндмарш – Розе) [17, 18]. В большинстве работ по неавтономной динамике нейронных систем внешнее воздействие выбирается, как правило, периодическим, и изучаются устойчивые установившиеся динамические режимы. Вопрос о динамическом преобразовании (отклике) нейронов на отдельные импульсы, ограниченные серии импульсов (берсты), серии с изменяющимся межимпульсным интервалом – динамические режимы, которые можно рассматривать как переходные процессы, изучался сравнительно мало. Здесь, кроме упомянутых выше интегрорезонансных свойств, исследовались фазовые свойства отклика, эффекты фазовой переустановки за счет импульсного воздействия.

В этой работе рассматриваются процессы преобразования импульсов и серий импульсов в модели нейрона с пороговым многообразием и устанавливается динамическая связь между нейронным «входом» и «выходом». Показывается, что, кроме интегрорезонансных свойств отклика, нейрон за счет собственной динамики способен формировать серии импульсов отклика с заданным числом импульсов в серии и межимпульсным интервалом.

1. Модель

Для моделирования процессов преобразования нейронами импульсных сигналов рассмотрим следующую динамическую систему, являющуюся модификацией классических уравнений ФитцХью – Нагумо [7, 13, 19]

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) - v + I_{st}(t), \\ \dot{v} = \varepsilon(g(u) - v - I). \end{cases} \quad (1)$$

Переменная u качественно описывает динамику мембранного потенциала нейрона, переменная v - динамику трансмембранных ионных токов [2, 4]. Нелинейная функция f имеет вид $f(u) = u - u^3/3$ и качественно характеризует нелинейные свойства ионных каналов, параметр $I > 0$ задает уровень деполяризации мембраны постоянным внешним смещением, параметр $\varepsilon > 0$ характеризует емкостные свойства мембраны. Функцию $g(u)$ выберем кусочно-линейной следующего вида:

$$g(u) = \begin{cases} \alpha u, & \text{при } u < 0, \\ \beta u, & \text{при } u \geq 0. \end{cases}$$

Она качественно описывает зависимость медленной переменной v от потенциала мембраны u и, фактически, определяет нелинейный характер ионных токов, восстанавливающих потенциал мембраны. Заметим, что введение функции $g(u)$, отличающее уравнения (1) от классических уравнений ФитцХью – Нагумо, обеспечивает при определенных параметрах расположение u, v - изоклин, качественно согласующееся с моделью Морриса – Лекара [7, 20]. Функция $I_{st}(t)$ описывает импульсный сигнал стимула и будет определена ниже.

1.1. Автономная динамика модели. Рассмотрим сначала основные черты собственной (автономной) динамики системы (1) при $I_{st}(t) = 0$. В зависимости от параметров она может иметь от одного до трех состояний равновесия. Наиболее интересным для нашего рассмотрения является случай возбудимой динамики с тремя состояниями равновесия. Его иллюстрирует качественный фазовый портрет системы на рис. 1. Состояние равновесия $O_1(u^{(1)}, v^{(1)})$ является устойчивым

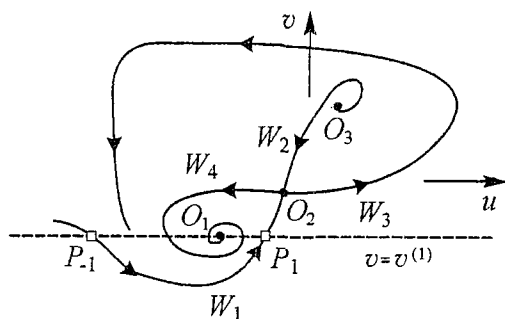


Рис. 1. Качественный фазовый портрет системы (1)

фокусом и соответствует потенциалу покоя нейрона. Состояния равновесия $O_3(u^{(3)}, v^{(3)})$ и $O_2(u^{(2)}, v^{(2)})$ - неустойчивый фокус и седло, соответственно. Входящая сепаратриса $W_1(O_2)$ последнего формирует порог возбуждения нейрона. При превышении этого порога нейрон генерирует импульс возбуждения, в противном случае - релаксирует к состоянию покоя. Сепаратрисы седла O_2 в зависимости от параметров могут изменять взаимное расположение, что соответствует бифуркациям петель сепаратрис. Детальный бифуркационный анализ системы (1) был проведен в работе [21]. Было показано, в частности, что на плоскости параметров (ε, I) существует кривая, отвечающая бифуркации «большой петли» сепаратрис $W_3(O_2) \rightarrow W_1(O_2)$,

в результате которой в системе рождается устойчивый предельный цикл, охватывающий все три состояния равновесия. Динамика системы в этом случае становится бистабильной. При превышении порога нейрон переходит в режим периодической генерации импульсов возбуждения (спайков).

1.2. Аппроксимация синаптической связи. Получение нейроном входных сигналов осуществляется через синаптическую связь. С функциональной точки зрения действие такой связи (химический синапс) можно аппроксимировать следующим образом.

Каждый проходящий импульс за счет различных биохимических механизмов создает так называемый постсинаптический потенциал (ПСП) [2, 3]. Если его величина сравнительно мала, то нейрон возвращается к состоянию покоя. При достижении порога возбуждения нейрон генерирует отклик. Синаптическая связь может быть возбуждающей и тормозящей (подавляющей). В первом случае постсинаптический потенциал (ВПСП) имеет положительный знак и деполяризует мембрану, во втором случае (ТПСП) - отрицательный и гиперполяризует мембрану (рис. 2). Применительно к модели (1) аппроксимируем действие синаптической связи следующим образом. При получении входного импульса в момент времени t_0 величина на переменной u (мембранный потенциал) изменяется на некоторую величину u_p ($u_p > 0$ для ВПСП и $u_p < 0$ для ТПСП). Далее, до прихода следующего импульса в момент времени $t_0 + \tau$ динамика нейрона определяется автономной системой (1). Таким образом,

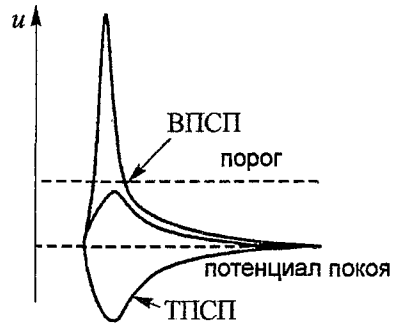


Рис. 2. Синаптическая связь. Возбуждающий и тормозящий постсинаптические потенциалы

$$\begin{aligned}
 u(t) &= u(t, u_{t_0}, v_{t_0}), \\
 v(t) &= v(t, u_{t_0}, v_{t_0}), \\
 u_{t_0} &= u(t_0) + u_p, \\
 v_{t_0} &= v(t_0).
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

На фазовой плоскости рис. 1 условия (2) определяют мгновенный скачок переменной u на величину u_p в момент прихода импульса t_0 . Предположим, что нейрон получает входной сигнал в форме серии импульсов с межимпульсным интервалом τ . Обозначим состояние системы после прихода n -го импульса (u_n, v_n) . Тогда для следующего импульса

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= u(\tau, u_n, v_n) + u_p, \\
 v_{n+1} &= v(\tau, u_n, v_n).
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Следовательно, траектории неавтономной системы (1) определяют в трехмерном фазовом пространстве нелинейное двумерное отображение Пуанкаре (3). Пусть в начальный момент времени $t = 0$ нейрон находится в состоянии покоя O_1 . Тогда состояние нейрона на момент прихода n -го импульса будет определяться траекторией отображения (3) с начальными условиями $u_1 = u^{(1)} + u_p, v_1 = v^{(1)}$. Порог возбужде-

ния в модели задается входящей сепаратрисой седла $W_1(O_2) : v = W(u)$ (см. рис. 1). Тогда условие генерации импульса отклика в ответ на n -й входной импульс можно записать в виде $v_n - W(u_n) < 0$. Заметим, что выражения (3) для интегрирующего отклика могут быть записаны аналитически [19]. В резонансном случае отображение (3) строится численно.

2. Результаты

2.1. Интегрорезонансный отклик. Рассмотрим особенности интегрорезонансного отклика модели (1) на серии импульсов (дуплеты и триплеты), поступающих через синаптический вход $I_{st}(t)$ (2). Заметим, прежде всего, что нейрон генерирует

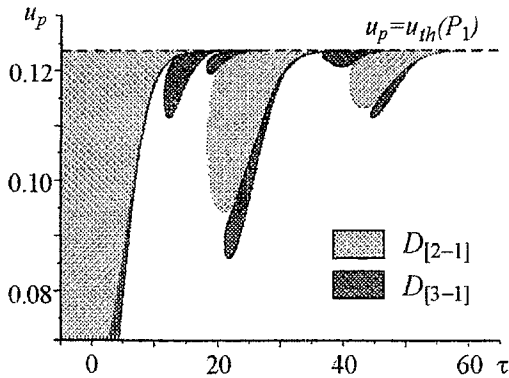


Рис. 3. Области интегрорезонансного отклика на дуплеты ($D_{[2-1]}$) и триплеты ($D_{[3-1]}$) входных импульсов в случае ВПСП. Значения параметров: $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$, $I = 0.21$, $\varepsilon = 0.3491$. Величина порога для одиночного стимула $u_{th}(P_1) \approx 0.124$

отклик на одиночный импульс при достаточно сильной амплитуде синаптической связи, $u_p > u_{th}$, где u_{th} - величина порога возбуждения, определяемая первым пересечением сепаратрисы $W_1(O_2)$ с прямой $v = v^{(1)}$ (точка P_1 на рис. 1). При $u_p < u_{th}$ нейрон генерирует отклик на серии из двух и более импульсов при определенном интервале их следования. Области отклика на дуплеты и триплеты, полученные численным интегрированием системы (1) представлены на рис. 3. Расположение этих областей на плоскости (τ, u_p) носит резонансный характер. Вследствие затухающего характера подпороговых колебаний

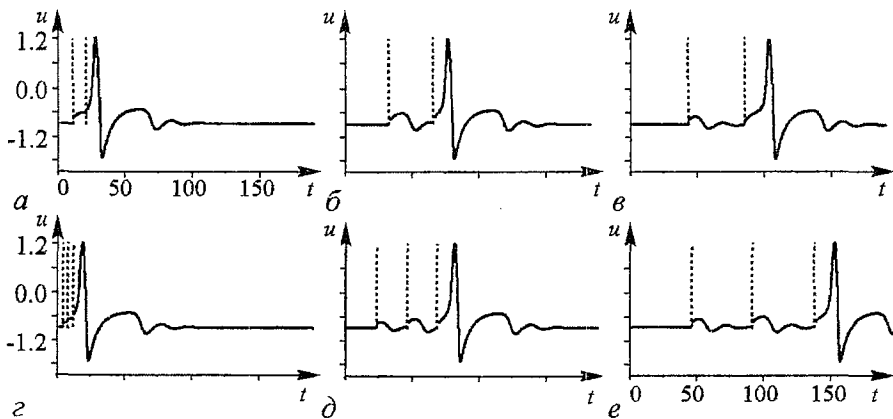


Рис. 4. Временные реализации интегрорезонансного отклика в случае ВПСП при воздействии дуплетом a - $в$ и триплетом импульсов $г$ - $е$. Входные импульсы показаны пунктирными линиями. Значения параметров: $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$, $I = 0.21$, $\varepsilon = 0.3491$. a - $u_p = 0.122$, $\tau = 11$; $б$ - $u_p = 0.123$, $\tau = 33$; $в$ - $u_p = 0.114$, $\tau = 43$; $г$ - $u_p = 0.078$, $\tau = 4.19$; $д$ - $u_p = 0.0931$, $\tau = 23.24$; $е$ - $u_p = 0.1148$, $\tau = 46.36$

«амплитуды» этих областей уменьшаются с увеличением межимпульсного интервала в серии. Очевидно также, что при $\tau \rightarrow 0$ минимальная амплитуда связи для получения отклика $u_p(0) = u_{th}/M$, где M - число импульсов в серии. При увеличении межимпульсного интервала $\tau \rightarrow \infty$ границы областей отклика асимптотически приближаются к прямой $u_p = u_{th}$. Это соответствует перебросу системы после прихода $(M - 1)$ -го импульса в малую окрестность пороговой сепаратрисы, вдоль которой она может эволюционировать сколь угодно долго до прихода следующего импульса в серии. Временные реализации, отвечающие различным областям отклика, представлены на рис. 4.

2.2. Отклик на подавляющее воздействие. В случае тормозящего подавляющего воздействия нейрон $u_p < 0$ также способен генерировать отклик. Это происходит вследствие того, что при выбранных параметрах пороговая сепаратриса $W_1(O_2)$ имеет вторую точку P_{-1} (см. рис. 1) пересечения с прямой $v = v^{(1)}$ при $u < u^{(1)}$. Тогда, при достаточно сильной тормозящей связи, $u_p < u_{th}(P_{-1})$, приходящий импульс перебрасывает систему за пороговую сепаратрису и генерируется импульс отклика. Аналогично случаю возбуждающей связи при $u_{th}(P_{-1}) < u_p < 0$ нейрон формирует отклик и на серии импульсов. Области отклика на ТПСИ и характерные временные реализации представлены на рис. 5, 6, соответственно.

Рис. 5. Области интегрорезонансного отклика на дуплеты ($D_{[2-1]}$) и триплеты ($D_{[3-1]}$) входных импульсов в случае ТПСИ. Значения параметров: $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$, $I = 0.21$, $\varepsilon = 0.3491$. Величина порога для одиночного стимула $u_{th}(P_{-1}) \approx -0.455$

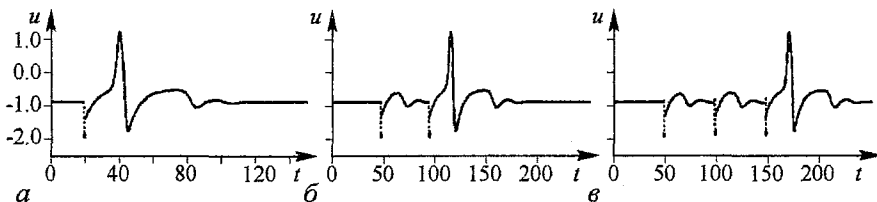
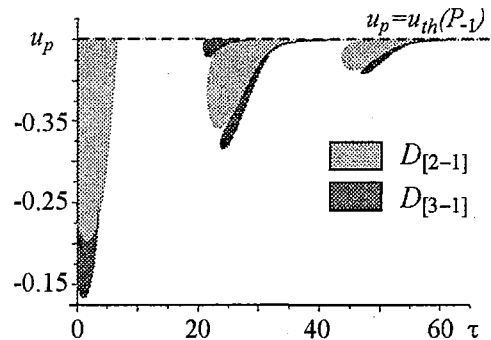


Рис. 6. Характерные временные реализации отклика модели (1) на серии входных импульсов в случае ТПСИ. Значения параметров: $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$, $I = 0.21$, $\varepsilon = 0.3491$. а - отклик на одиночный импульс при $u_p = -0.5$; б - отклик на дуплет импульсов, $u_p = -0.44$, $\tau = 46.83$; в - отклик на триплет, $u_p = -0.42$, $\tau = 48.97$

2.3. Берст-отклики. При приближении параметров модели к бифуркационным значениям «большой» петли пороговая сепаратриса $W_1(O_2)$ приближается к выходящей сепаратрисе $W_3(O_2)$ и начинает совершать колебания, охватывая все три состояния равновесия (рис. 7). Это приводит к появлению конечного числа N точек пересечения P_i порогового многообразия $W_1(O_2)$ с прямой $v = v^{(1)}$ в области воз-

буждающего воздействия $u_p > 0$ и N точек пересечения P_{-i} в области подавляющего воздействия. Таким образом, появляется возможность получения отклика в виде серии импульсов (берст-отклик). Так, например, при воздействии на нейрон одиночным импульсом с амплитудой связи, $u_{th}(P_i) < u_p < u_{th}(P_{i+1}), i = 1, 2, \dots, N$, нейрон генерирует отклик в виде серии i импульсов, после чего возвращается в состояние покоя O_1 . Заметим, что при приближении к бифуркационному значению число оборотов сепаратрисы возрастает и при рождении предельного цикла $N \rightarrow \infty$. В этом случае отклик нейрона при превышении порога имеет вид периодической незатухающей последовательности импульсов возбуждения. При больших N точки P_i расположены очень близко друг от друга (рис. 7, б) и для получения требуемой серии отклика необходима очень точная настройка амплитуды связи u_p . Изменение максимального числа импульсов в серии N происходит при изменении параметра в окрестности бифуркационной границы. Отклик на максимальное число импульсов происходит для всех значений амплитуды связи $u_p > u_{th}(P_N)$ и точной настройки u_p не требует. Различные варианты отклика по максимальному числу импульсов представлены на рис. 8. Аналогично, берст-отклики можно получить и при подавляющем воздействии одиночным импульсом. Нейрон откликается серией из i импульсов при значениях амплитуды связи $u_{th}(P_{-(i+1)}) < u_p < u_{th}(P_{-i})$ (рис. 8, в).

При воздействии на нейрон серией импульсов также можно получить берст-отклики. Если при получении M входных импульсов система преодолевает порог, попадая в надпороговую область между i -м и $(i + 1)$ -м витками пороговой сепаратрисы, то нейрон генерирует отклик в виде серии из i импульсов. При перестройке параметров можно добиться отклика по максимальному числу N импульсов в серии, перебрасывая систему в область за последний (внешний) виток пороговой сепаратрисы (см. рис. 7). На плоскости параметров интегрорезонансного отклика (τ, u_p) области берст-отклика расположены внутри соответствующих областей одиночного отклика (см. рис. 3). Примеры динамического преобразования серий импульсов иллюстрирует рис. 9.

Таким образом, модель (1) способна осуществлять динамическое преобразование $M \rightarrow N$ серий импульсов за счет изменения амплитуды синаптической свя-

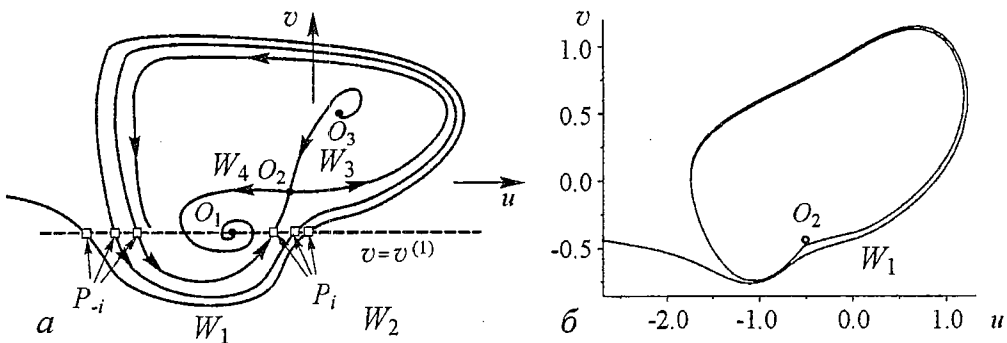


Рис. 7. а – качественный фазовый портрет системы (1) в сложнопороговом режиме. Точки $P_{\pm i}$ соответствуют пересечениям пороговой сепаратрисы $W_1(O_2)$ с прямой $v = v^{(1)}$ и определяют пороговые значения берст-откликов на одиночный импульс; б – пороговая сепаратриса W_1 , полученная численным моделированием системы (1). Число оборотов сепаратрисы соответствует максимальному числу импульсов берст-отклика, $N = 3$. Значения параметров: $\alpha = 0.5, \beta = 2, I = 0.21, \varepsilon = 0.34898$

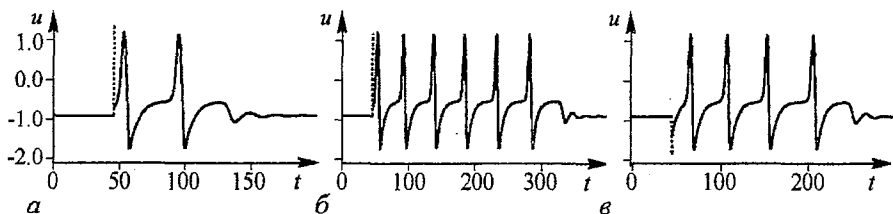


Рис. 8. Временные реализации берст-отклика на одиночный импульс при сложнопороговой динамике модели (1). Отклики получены по максимальному числу импульсов, $|u_p| > u_{th}(P_{\pm N})$. Значения параметров: $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$, $I = 0.21$. а - серия $N = 2$, в случае ВПСП при $\varepsilon = 0.349$; б - $N = 6$, ВПСП отклик при $\varepsilon = 0.348978$; в - $N = 4$, ТПСП отклик при $\varepsilon = 0.349785$

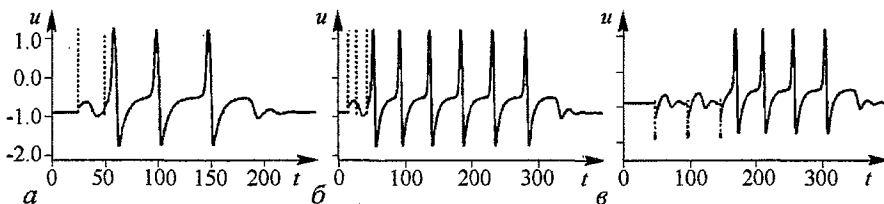


Рис. 9. Динамическое преобразование серий импульсов при сложнопороговом поведении модели (1). Значения параметров: $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$, $I = 0.21$. а - преобразование [2 - 3] при интегрорезонансном берст-отклике в случае ВПСП, $\varepsilon = 0.34898$, $u_p = 0.121$, $\tau = 25$; б - преобразование [3 - 6], $\varepsilon = 0.348978$, $u_p = 0.12259$, $\tau = 14.46$; в - преобразование [3 - 4] при подавляющем воздействии, $\varepsilon = 0.348978$, $u_p = -0.42$, $\tau = 48.97$

зи или перестройки параметров системы в окрестности бифуркационной границы. Эта возможность достигается за счет интегрорезонансной подпороговой динамики и сложного поведения пороговой сепаратрисы, обеспечивающего, фактически, мультитиповое возбуждение системы.

2.4. Временные характеристики отклика. Исследуем временные характеристики сигналов отклика по отношению к входным сигналам. Заметим, прежде всего, импульсы отклика всегда следуют с определенной временной задержкой относительно последнего импульса во входной серии (см. рис. 4). Эта задержка не связана с задержкой синаптической связи, так как в используемом приближении действие связи принимается мгновенным. Величина временного запаздывания в модели (1) определяется динамикой системы в окрестности седлового состояния равновесия O_2 . Рассмотрим, для определенности, воздействие одиночным возбуждающим импульсом и одиночный отклик. Время T_d запаздывания импульса отклика соответствует времени достижения максимума переменной u при превышении порога на некоторую величину $z = u_p - u_{th}$. Положим $z \ll 1$. Время T_d можно условно разделить на два интервала: время движения в малой окрестности седла O_2 и время движения вдоль выходящей сепаратрисы $W_3(O_2)$ (см. рис. 1, 7, б). Нетрудно видеть, что на втором интервале время движения практически не зависит от z , так как траектории сравнительно быстро прижимаются к сепаратрисе по устойчивому трансверсальному направлению. Время движения на первом участке легко оценить, построив отображение отрезка L_0 в отрезок L_1 (рис. 10, а), который, фактически, яв-

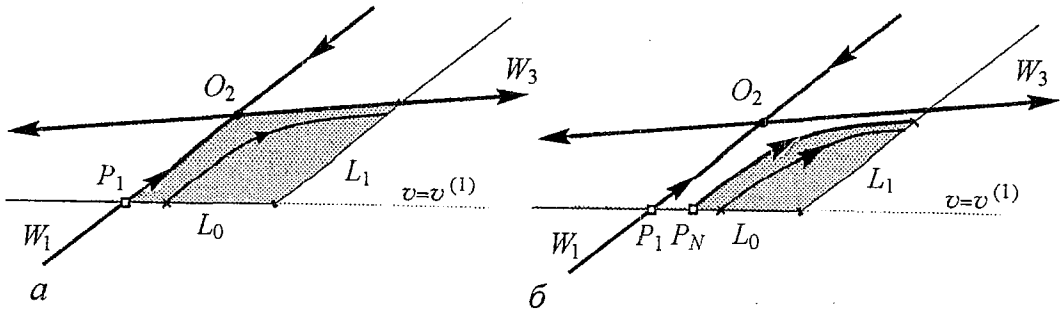


Рис. 10. *а* – качественный вид фазовой плоскости системы (1) в окрестности седла O_2 (линейное приближение). Траектории системы задают отображение отрезка L_0 в отрезок L_1 , определяющее характерные времена запаздывания при одиночном импульсном отклике; *б* – локальная динамика системы (1) при сложнопороговом возбуждении. Берст-отклик по максимальному числу импульсов $u_p > u_{th}(P_N)$ обладает конечным временем запаздывания

ляется изохроной для дальнейшего движения. Разница времен для двух различных амплитуд связи u_{p1} и u_{p2} определяется выражением

$$T_{d1} - T_{d2} = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{u_{p2} - u_{th}}{u_{p1} - u_{th}}, \quad (4)$$

где $\lambda_2 > 0$ корень характеристического уравнения седла O_2 . Таким образом, при $u_p \rightarrow u_{th}$ задержка отклика начинает неограниченно нарастать согласно (4). Другими словами, выбирая амплитуду связи u_p можно получить сколь угодно большую задержку возникновения отклика.

Существенно иная ситуация реализуется в случае берст-отклика (рис. 10, б). Максимальное время задержки при отклике в виде i импульсов конечно и определяется временем движения по i -му витку пороговой сепаратрисы $W_1(O_2)$ до достижения ближайшего максимума по u переменной (пика первого импульса в серии). Далее, поскольку с каждым витком сепаратриса W_1 все ближе проходит к состоянию равновесия O_2 , межимпульсный интервал с каждым последующим импульсом нарастает согласно оценке (4). Кроме того, при $u_p \rightarrow u_{th}(P_i)$ межимпульсный интервал двух последних импульсов в серии бесконечно нарастает. Заметим, что при берст-откликах по максимальному числу импульсов и достаточно сильной амплитуде связи $u_p \gg u_{th}(N)$ межимпульсный интервал слабо зависит от u_p , и отклик оказывается в некотором смысле стандартизированным, то есть определяется собственной динамикой системы.

Заключение

Отметим ряд наиболее важных моментов формирования отклика нейроноподобной модели (1) на импульсный сигнал.

- За счет осцилляторно-затухающей подпороговой динамики нейронная система приобретает интегрорезонансные свойства. Такие свойства обеспечивают возможность динамической селекции импульсных сигналов по двум основным характеристикам: числу импульсов в серии и интервалу следования импульсов.
- Наличие порогового многообразия, форма и расположение которого управляется параметрами системы, позволяет получать селективный отклик и при подавляющем синаптическом воздействии ТПСП на нейрон.

- Осцилляторные свойства пороговой сепаратрисы при приближении к бифуркации петли сепаратрис приводят к явлению мультипорогового возбуждения и формирования берст-откликов. Количество импульсов в серии отклика управляется амплитудой синаптического воздействия. Другими словами, «пластичность» синаптической связи способна обеспечить «настройку» нейрона на формирование определенного отклика.

- Показана возможность динамического преобразования $M \rightarrow N$ импульсных серий. Здесь число входных импульсов M можно трактовать как некоторую «интенсивность сенсорного сигнала», которая за счет определенной «настройки» нейрона преобразуется в серию $M = 1, 2, \dots, \infty$ стандартизированных импульсов. Другими словами, система осуществляет классификацию входных сигналов с $N \times M$ вариантами преобразования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-02-17135), гранта CRDF (программа BRHE, НОЦ-006) и гранта Президента РФ для молодых ученых (МК-4586.2004.2).

Библиографический список

1. *Николлс Дж., Мартин Р., Валлас Б., Фукс П.* От нейрона к мозгу. М.: Изд-во УРСС, 2003. 672 с.
2. *Рубин А.Б.* Биофизика: В 2 т. М.: Книжный дом «Университет», 2000. 486 с.
3. Principles of Neural Science / Eds Kandel E.R., Schwartz J.H., Jessell T.M. Third Edition. Prentice-Hall Intern. Inc. 1991. 1135 P.
4. *Scott A.* Neuroscience: a mathematical premier. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
5. *Llinas R.* I of the Vortex. From Neurons to Self. MIT Press, Cambridge, Massachusetts 2002, 302 P.
6. *Brenner N., Strong S.P., Koberle R., Bialek W., de Ruyter van Steveninck R.R.* Synergy in a neural code // Neural Computation. 2000. Vol. 12. P. 1531.
7. *Izhikevich E.M.* Neural excitability, spiking and bursting // Int. J. Bifurc. Chaos. 2000. Vol. 10, № 6. P. 1171.
8. *Казанцев В.Б., Некоркин В.И.* Динамика колебательных нейронов. Информационные аспекты // Нелинейные волны 2002. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2003. 29 с.
9. *Андронов А.А., Витт, А.А., Хайкин, С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 916 с.
10. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: ФМЛ, 2001. 296 с.
11. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
12. *Гласс Л., Мэкки М.* От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. 248 с.
13. *FitzHugh R.* Mathematical models of excitation and propagation in nerve. In Biological Engineering (Ed. H.P. Schwan), 1969. 1-85.
14. *Kaplan D.T., Clay J.R., Manning T., Glass L., Guevara M.T., Shrier A.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 4074.

15. *Yoshino K., Nomura T., Pakdaman K., Sato S.* Synthetic analysis of periodically stimulated excitable and oscillatory membrane models // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 59. P. 956.
16. *Pakdaman K.* Periodically forced leaky integrate-and-fire model // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. P. 041907.
17. *Eguia M.C., Rabinovich M.I., Abarbanel H.D.I.* Information transmission and recovery in neuron communication channels // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62. P. 7111.
18. *Nowotny T., Zhigulin V.P., Selverston A.I., Abarbanel H.D.I., Rabinovich M.I.* Enhancement of synchronization in a hybrid neural circuit by spike-timing dependent plasticity // *Journal Neuroscience.* 2003. Vol. 23. P. 9776.
19. *Kazantsev V.B.* Selective communication and information processing by excitable systems // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. P. 056210.
20. *Rinzel J., Ermentrout B.B.* in *Methods in neuronal modelling* / Edited by C. Koch and I. Segev. MIT press, Cambridge Massachussets, 1998, p. 251.
21. *Dmitrichev A.S., Shapin D.S., Kazantsev V.B., Nekorkin V.I.* Динамика модели нейрона со сложно-пороговым возбуждением // *Математическое моделирование.* 2005 (в печати).

*Институт прикладной физики РАН
Нижний Новгород*

Поступила в редакцию 29.12.2004

DYNAMIC TRANSFORMATION OF PULSE SIGNALS IN NEURONAL SYSTEMS

V.B. Kazantsev

The dynamics of a neuron model with external pulse forcing in the form of bounded bursts is investigated. The processes of transformation of input pulse signal depending on the stimulus characteristics and neuron internal state are studied. A modified FitzHugh-Nagumo system with a threshold manifold is used as the neuron model. It is found the neuron response provides selectivity on the number of acquired pulses (integrate-and-fire response) and on the inter-spike interval value (resonant response). The response signals are formed depending on the model parameters and represent either single pulses or pulse bursts with controllable number of constituent pulses.



Виктор Борисович Казанцев – родился в Дзержинске Нижегородской области (1973). В 1996 году окончил радиофизический факультет ННГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1999). В настоящее время является старшим научным сотрудником отдела нелинейной динамики Института прикладной физики РАН в Нижнем Новгороде. Область научных интересов – теория колебаний и волн, нелинейная динамика дискретных систем и нейродинамика. Имеет более 60 научных публикаций.



ФАЗОВО-АМПЛИТУДНЫЕ КЛАСТЕРЫ В АНСАМБЛЕ ГЕНЕРАТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ*

В. В. Клиньшов, В. Б. Казанцев, В. И. Некоркин

В работе представлены результаты исследования коллективной динамики ансамбля глобально связанных генераторов Ван дер Поля. Исследуется эффект формирования фазово-амплитудных кластеров согласно заданному стимулу. Кластеры соответствуют разбиению генераторов на две группы, колебания в которых происходят в противофазе. Эффект может быть использован для осуществления различных процессов обработки информации, в частности, для записи, хранения и распознавания бинарных образов.

Введение

Интерес к исследованию информационно-вычислительных систем, в той или иной степени имитирующих процессы в нейронных сетях мозга, – нейрокомпьютеров – чрезвычайно вырос в последнее время. В значительной степени это объясняется тем, что казавшаяся еще сравнительно недавно чисто теоретической проблема построения таких систем в связи с успехами современной молекулярной и полупроводниковой микроэлектроники приобрела прикладной характер. Сейчас вполне обоснованно считается, что новая генерация компьютеров будет базироваться на принципах нейрокомпьютинга.

Структурно нейрокомпьютеры представляют собой сети, состоящие из большого числа взаимодействующих активных элементов, работающих параллельно. В основе работы нейропроцессоров лежит коллективная динамика нелинейных взаимодействующих подсистем, приводящая к процессам структурообразования и реализующая механизмы ассоциативной памяти. Динамические свойства элементов нейропроцессоров варьируются в достаточно широких пределах. В процессоре Hopffild [1–3] это бистабильные элементы, в нейрокомпьютере Hoppensteadt-

*Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия.

Izhikevich [4] - простейшие колебательные элементы (в приближении фазового описания), а в сети Baird, Eeckman [5] элементы могут демонстрировать хаотическую динамику (см. также [6, 7]).

Важной характеристикой нейрокомпьютерных процессоров является архитектура связей между элементами. Именно за счет подходящим образом организованной структуры связей и пространственной конфигурации процессора удается осуществить в нейросистемах даже с очень простой собственной динамикой элементов сложные вычислительные процедуры. Например, нейропроцессор Хопфилда, межэлементные связи которого удовлетворяют так называемому правилу Хебба (правилу формирования определенной матрицы весовых коэффициентов), может осуществлять запоминание и/или распознавание бинарных информационных образов.

В данной работе будет показано, что на базе сети глобально связанных генераторов Ван дер Поля может быть реализован нейропроцессор типа Хопфилда. Будут представлены результаты исследования коллективной динамики системы. Изучены процессы формирования фазовых и фазово-амплитудных кластеров в соответствии с бинарным информационным шаблоном, задаваемым через матрицу коэффициентов связи. Такие свойства системы позволяют осуществлять запись, хранение и распознавание двоичных образов, кодируемых в виде фазовых кластеров. Будут изучены характеристики процесса фазового кластерообразования.

В разделе 1 мы вводим в рассмотрение модель сети генераторов Ван-дер-Поля. Раздел 2 посвящен вопросу формирования в системе фазовых кластеров и «запоминанию» наперед заданных шаблонов. В разделе 3 рассматривается более общий случай фазово-амплитудных кластеров. В разделе 4 обсуждаются временные характеристики динамики системы. Раздел 5 посвящен функционированию сети при частично «испорченных» связях между элементами. В разделе 6 мы касаемся проблемы распознавания образов в изучаемой системе. В Заключение кратко сформулированы основные результаты работы. В Приложениях 1, 2 и 3 представлены доказательства некоторых вспомогательных утверждений.

1. Модель

Рассмотрим сеть, состоящую из N генераторов Ван дер Поля, связанных глобальной резистивной связью по току. Динамика такой сети описывается следующей системой

$$\frac{d^2 x_j}{dt^2} + \Omega_j^2 x_j = \mu \frac{dx_j}{dt} (1 - x_j^2) + \varepsilon \sum_{k=1}^N c_{jk} \left(\frac{dx_k}{dt} - \frac{dx_j}{dt} \right), \quad (1)$$

где $j = \overline{1, N}$, x_j - напряжение на выходе j -го генератора; $0 < \mu \ll 1$ - малый параметр; ε - положительный параметр, характеризующий силу связи между элементами; $C = \{c_{ij}\}$ - симметричная ($c_{jk} = c_{kj}$) матрица связи, формирующая архитектуру сети; Ω_j - частота колебаний в j -м элементе сети при $\varepsilon = 0$. Будем рассматривать динамику системы (1) в случае достаточно слабого взаимодействия ($\varepsilon = \mu d$) и малых частотных расстройок ξ_j между элементами ($\Omega_j = 1 + \mu \xi_j$). Как известно [8], в этом случае систему (1) можно усреднить по периоду быстрых осцилляций и перейти к

укороченным уравнениям для фаз и амплитуд

$$\begin{aligned} \frac{dr_j}{d\tau} &= \frac{r_j}{2}(1 - r_j^2) + \frac{d}{2} \sum_{k=1}^N c_{jk} (r_k \cos(\phi_k - \phi_j) - r_j), \\ \frac{d\phi_j}{d\tau} &= \xi_j + \frac{d}{2} \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{r_j} c_{jk} \sin(\phi_k - \phi_j). \end{aligned} \quad (2)$$

где $\tau = \mu t$, а r_j и ϕ_j - амплитуда и фаза j -го элемента, соответственно.

2. Фазовые кластеры и запоминание образов

Покажем, что в сети (2) могут быть сформированы так называемые фазовые кластеры (группы элементов с близкими значениями фаз), отвечающие наперед заданному шаблону. Рассмотрим сначала случай достаточно «слабых» связей между элементами. Пусть начальное распределение фаз колебаний генераторов ϕ_j будет произвольным, а амплитуды колебаний r_j в начальный момент удовлетворяют условию $r_j \geq r^-$ (см. Приложение 1, П.1.4). Поскольку эти начальные условия принадлежат бассейну притяжения области I (рис. 1), все траектории системы (2), «стартующие» с них, попадают за некоторое конечное время в область I и из нее не выходят. Нетрудно видеть, что при $\delta \rightarrow 0$ «размеры» инвариантной области I удовлетворяют условию

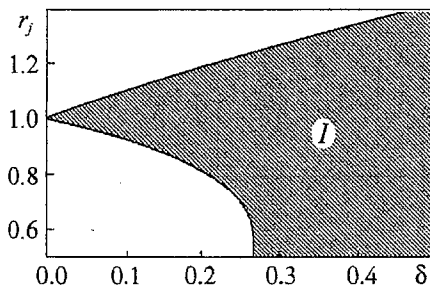


Рис. 1. Границы инвариантной области в зависимости от величины δ

$$r^0 \rightarrow 1, \quad r^+ \rightarrow 1,$$

и, следовательно, можно считать, что $r_j \approx 1, j = \overline{1, N}$. В этом случае динамика системы (2) фактически определяется системой уравнений для фаз

$$\frac{d\phi_j}{d\tau} = \xi_j + \frac{d}{2} \sum_{k=1}^N c_{jk} \sin(\phi_k - \phi_j). \quad (3)$$

Система (3) является градиентной, поскольку может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{d\phi_j}{d\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \phi_j}, \quad (4)$$

где

$$U(\phi_1, \dots, \phi_N) = -\frac{d}{4} \sum_{j,k=1}^N c_{jk} \cos(\phi_k - \phi_j) - \sum_{j=1}^N \xi_j \phi_j. \quad (5)$$

В силу градиентности системы (3) при любых начальных условиях траектории системы (3) асимптотически стремятся к одному из устойчивых состояний равновесия, соответствующих локальным минимумам функции $U(\phi_1, \dots, \phi_N)$. Координаты каждого из состояний равновесия системы (3) определяют некоторое распределение фаз колебаний $\{\phi_j\}$.

Рассмотрим задачу о формировании в сети генераторов фазовых кластеров в соответствии с некоторым наперед заданным шаблоном. Пусть $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_N)$ - вектор-строка, элементы которой равны $\Psi_j = \pm 1$; данная строка может содержать некоторую информацию в двоичной кодировке. Например, это может быть черно-белый зрительный образ. Определим на множестве из N элементов, входящих в систему, два подмножества

$$\begin{aligned} S_p &= \{j = \overline{1, N} | \Psi_j = +1\}, \\ S_m &= \{j = \overline{1, N} | \Psi_j = -1\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Зададим матрицу связи c_{jk} так, чтобы при любых начальных условиях в сети (1) формировались два фазовых кластера, в один из которых входят только элементы с номерами $j \in S_p$, а в другой - только с $j \in S_m$, причем эти два кластера должны колебаться в противофазе. Для этого матрицу связи необходимо определить в соответствии с так называемым правилом Хебба [9]

$$c_{jk} = \frac{1}{N-1} \Psi_j \Psi_k. \quad (7)$$

2.1. Сеть тождественных генераторов. Рассмотрим сначала процесс формирования фазовых кластеров в случае отсутствия частотных расстроек между элементами ($\xi_j \equiv 0$). В Приложении 2 показано, что в этом случае потенциальная функция U (5) вида

$$U(\phi_1, \dots, \phi_N) = -\frac{d}{4(N-1)} \sum_{j,k=1}^N \Psi_j \Psi_k \cos(\phi_k - \phi_j)$$

имеет линию локальных минимумов

$$L = \left\{ \phi_j = \phi_0 + \frac{\pi}{2} \Psi_j, j = \overline{1, N}, \phi_0 \in R \right\}.$$

Состояния равновесия системы (3), соответствующие линии L , имеют $N-1$ отрицательных ляпуновских показателей и один нулевой, отвечающий этой линии. В этих состояниях равновесия фазы $\{\phi_j\}$ образуют требуемое распределение. При этом фазы $\{\phi_j\}$ образуют две группы с разностью фаз между ними π . Другими словами, сеть (1) распадается на две группы элементов, в одну из которых входят элементы с $j \in S_p$, $\phi_j = \phi_0 + \frac{\pi}{2}$, а в другую - с $j \in S_m$, $\phi_j = \phi_0 - \frac{\pi}{2}$. Следовательно, система (1) осуществляет запоминание образа (шаблона) Ψ в виде фазовых кластеров ¹.

¹Описанную динамику ансамбля качественно можно пояснить с точки зрения взаимодействия пар осцилляторов: пары с одинаковым значением Ψ_j имеют положительную связь c_{jk} и стремятся синхронизоваться в фазе, а с противоположными, соответственно, в противофазе. Важно, что «стремления» различных пар не противоречат друг другу, и существует только одно состояние, в котором все они удовлетворяются.

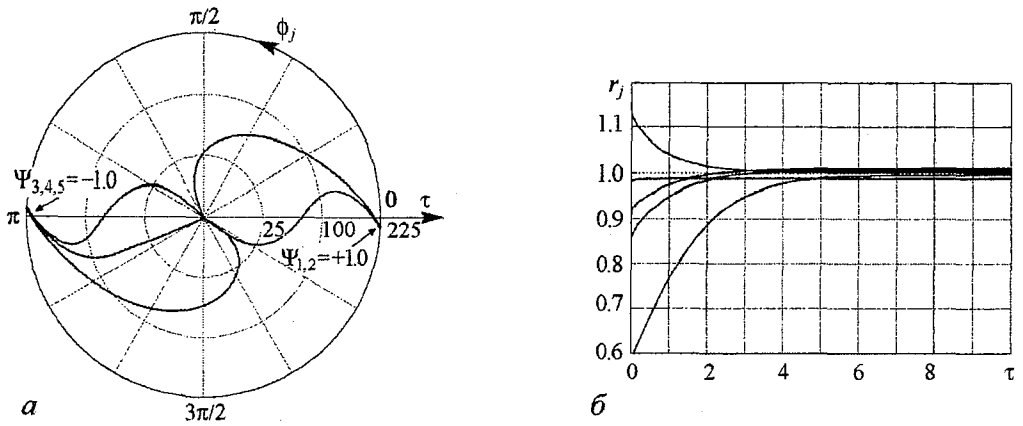


Рис. 2. Зависимость от времени фаз (а) и амплитуд (б) ансамбля идентичных генераторов. На графике 2, а в полярных координатах вдоль радиуса отложено время, а угловая координата соответствует фазам генераторов. $N = 5$, $\Psi = (+1, +1, -1, -1, -1)$, $d = 0.05$



Рис. 3. Формирование фазовых кластеров в ансамбле $N = 6536$ генераторов. Цветом обозначены фазы генераторов, для наглядности элементы выстроены в решетку 66×66 . Начальный (а), промежуточный (б) и конечный моменты времени (в)

Процесс образования фазовых кластеров иллюстрирует рис. 2, на котором представлены результаты численного моделирования системы (1) при случайных начальных условиях. В системе образуются два фазовых кластера (рис. 2, а), а амплитуды быстро достигают значений, близких к единице (рис. 2, б).

Совершенно аналогично происходит процесс фазового кластерообразования в сети из большого числа элементов. На рис. 3 представлены «мгновенные снимки» распределения фаз колебаний в последовательные моменты времени в сети из $N = 4356$ элементов. В качестве шаблона была выбрана картина Леонардо да Винчи «Мона Лиза», которая была закодирована бинарным способом. Для наглядности генераторы локализованы в узлах пространственной решетки.

2.2. Сеть генераторов в случае частотных расстройек. Пусть теперь в системе (3) присутствуют частотные расстройек. Для определенности предположим, что частоты собственных колебаний генераторов распределены в некотором интервале и $\zeta = \sup_j |\xi_j|$. Наличие расстройек может существенно повлиять на динамику системы и, в частности, на процесс кластерообразования. Значительная разница частот может привести к неправильным фазовым соотношениям в установившемся режиме

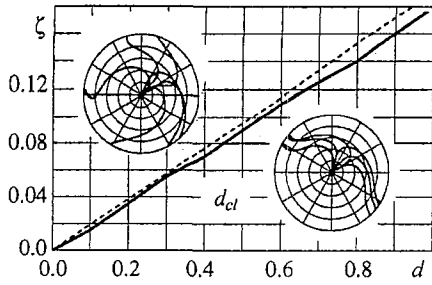


Рис. 4. Максимальная расстройка, при которой достигается формирование фазовых кластеров с разбросом не более $\delta\phi = \pi/8$, в зависимости от силы связи d . Сплошная линия - результаты численного счета, пунктирная - численная оценка. На полярных графиках приведены типичные зависимости $\phi(\tau)$ для случаев $\zeta < \zeta_{\max}$ и $\zeta > \zeta_{\max}$. $N = 6$

или к отсутствию синхронизации вообще. Отметим также, что в этом случае точное совпадение фаз ϕ_j внутри кластера невозможно и можно ожидать образования кластеров с некоторым внутренним разбросом фаз $\delta\phi$. Найдем условия на параметр ζ , при которых невозможно образование фазовых кластеров с внутренней разностью фаз не более $\delta\phi$ ($0 < \delta\phi < \pi/2$), таких что

$$\begin{aligned} |\phi_j - \phi^+| &\leq \frac{\delta\phi}{2}, & \Psi_j &= +1, \\ |\phi_j - \phi^-| &\leq \frac{\delta\phi}{2}, & \Psi_j &= -1, \\ |\phi^+ - \phi^-| &= \pi. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку фазовые кластеры (8) соответствуют устойчивому состоянию равновесия системы (3), элементы должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{2(N-1)} \sum_{k=1}^N \Psi_j \Psi_k \sin(\phi_k - \phi_j) = \xi_j, \quad j = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Оценим левые части системы (9) при условии (8)

$$\left| \frac{d}{2(N-1)} \sum_{k=1}^N \Psi_j \Psi_k \sin(\phi_k - \phi_j) \right| \leq \frac{d}{2(N-1)} \sum_{k=1}^N |\sin(\phi_k - \phi_j)| \leq \frac{d}{2} \sin \delta\phi.$$

Отсюда нетрудно видеть, что система (9) будет несовместной, если

$$\zeta > \frac{d}{2} \sin \delta\phi. \quad (10)$$

Таким образом, в области параметров, выделяемой неравенством (10), требуемые фазовые кластеры не существуют². Вне этой области параметров фазовые кластеры, в принципе, могут существовать даже при наличии в системе (3) расстройек ξ_j . На рис. 4 в плоскости параметров (d, ζ) численно построена область d_{cl} , для которой в сети из шести элементов происходит образование двух фазовых кластеров с внутренней разностью фаз не более $\delta\phi = \pi/8$ для случайно распределенных в интервале $|\xi_j| \leq \zeta$ расстройек и случайно заданного образа Ψ .

²Отсюда следует, в частности, что для $\delta\phi = \frac{\pi}{2}$ фазовые кластеры вообще не существуют при $\zeta > \frac{d}{2}$, и элементы ансамбля колеблются с разными частотами

3. Фазово-амплитудные кластеры

Рассмотрим теперь динамику системы (2) при произвольных значениях коэффициента связи d . Предположим, что частотные расстройки отсутствуют, то есть $\xi_j = 0$. В этом случае ограничиться лишь фазовым описанием динамики нельзя, поскольку размеры инвариантной области I становятся существенными (см. рис. 1), и амплитуды колебаний элементов могут значительно отличаться от единицы, оказывая влияние на динамику фаз. Покажем, что для этих d в системе (2) возможно образование более сложных кластеров - фазово-амплитудных.

Пусть элементы сети по-прежнему взаимодействуют в соответствии с правилом Хебба (7). Будем искать решение системы (2) в виде двух фазово-амплитудных кластеров, то есть

$$r_j = \begin{cases} r_p, & \text{если } j \in S_p, \\ r_m, & \text{если } j \in S_m, \end{cases}$$

$$\phi_j = \begin{cases} \phi_p, & \text{если } j \in S_p, \\ \phi_m, & \text{если } j \in S_m. \end{cases}$$

Из (2) получаем систему для переменных $r_p, r_m, \Delta\phi$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{dr_p}{d\tau} &= \frac{r_p}{2}(1 - r_p^2) + \frac{d}{2(N-1)}N_p(r_p + r_m), \\ \frac{dr_m}{d\tau} &= \frac{r_m}{2}(1 - r_m^2) + \frac{d}{2(N-1)}N_m(r_p + r_m), \\ \frac{d\Delta\phi}{d\tau} &= \frac{d}{2} \left(\frac{r_p}{r_m} + \frac{r_m}{r_p} \right) \sin \Delta\phi, \end{aligned} \quad (11)$$

где N_m и N_p - соответственно «размеры» множеств S_m и S_p , $\Delta\phi = \phi_p - \phi_m$. Можно показать, что для фиксированных N_m и N_p система (11) имеет единственное устойчивое состояние равновесия $O(r_p = r_p^*, r_m = r_m^*, \Delta\phi = \pi)$, принадлежащее инвариантной области I , где r_p^* и r_m^* - решения нелинейной системы следующего вида

$$\begin{aligned} (N-1)r_p(1 - r_p^2) + dN_p(r_p + r_m) &= 0, \\ (N-1)r_m(1 - r_m^2) + dN_m(r_p + r_m) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что в системе (12) r_p^* и r_m^* зависят не только от коэффициента связи d , но и от параметров N_p и N_m . На рис. 5 для сети из $N = 8$ элементов представлены значения r_p^* и r_m^* для двух значений параметра d , полученные путем численного решения системы (12).

На рис. 6 представлен процесс образования фазово-амплитудных кластеров в сети из восьми элементов для $d = 0.5$, $\Psi = (+1, +1, -1, -1, -1, -1, -1, -1)$. Элементы сети делятся на две группы, имеющие различные амплитуды и фазы, соответствующие множествам S_p и S_m .

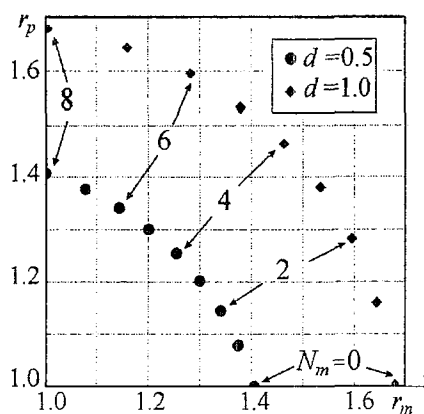


Рис. 5. Амплитуды фазово-амплитудных кластеров при $N = 8$. Каждая точка соответствует одному значению параметров N_m и d

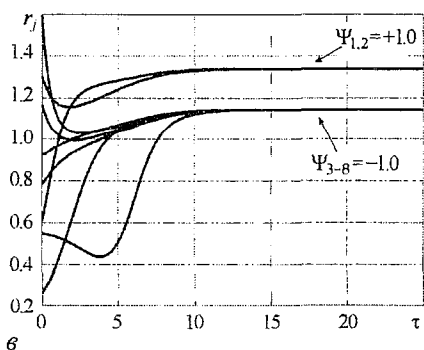
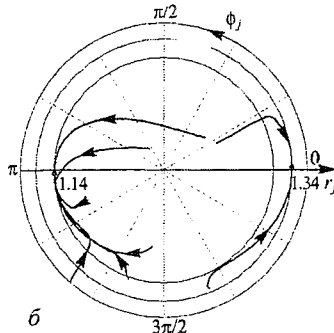
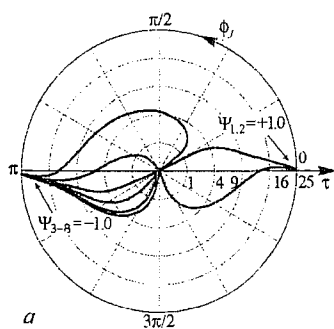


Рис. 6. Формирование фазово-амплитудных кластеров. *a* – зависимость фаз от времени, *б* – проекция фазового портрета системы на плоскость амплитуд и фаз, *в* – зависимость амплитуд от времени. $N = 8$, $\Psi = (+1, +1, -1, -1, -1, -1, -1, -1)$, $d = 0.5$

4. Время ответа ансамбля

Процесс записи образа-шаблона с помощью системы (1) занимает определенное время. Для характеристики длительности этого процесса введем понятие времени ответа $\tau_{\delta\phi}$ ансамбля: назовем так время, за которое фазовые соотношения в ансамбле становятся соответствующими предъявленному образу Ψ с точностью до $\delta\phi$, то есть для любой пары j, k выполняются условия

$$\begin{aligned} |\phi_j - \phi_k| &< \delta\phi, & \text{если } \Psi_j = \Psi_k, \\ |\phi_j - \phi_k - \pi| &< \delta\phi, & \text{если } \Psi_j = -\Psi_k. \end{aligned}$$

Время ответа зависит от параметров системы и, очевидно, от начальных условий. На рис. 7 приведена зависимость среднего времени ответа системы $\tau_{\delta\phi}$ ($\delta\phi = \pi/8$) от коэффициента связи d для двух значений N . Усреднение проводилось по 8 реализациям со случайными начальными условиями. Видно, что зависимость среднего времени ответа от силы связи имеет вид, близкий к $\tau_{\delta\phi} \sim d^{-1}$. Поэтому для достаточно быстрой записи образа в сеть (1) необходимо обеспечить не слишком малый коэффициент связи между элементами. Заметим также, что при увеличении числа генераторов N время ответа возрастает. Однако, как показали результаты численного моделирования, размер системы N влияет на время ответа гораздо слабее, чем сила связи d .

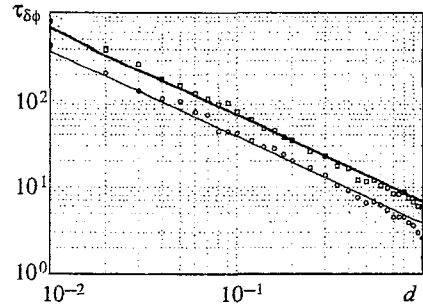


Рис. 7. Зависимость времени ответа системы от коэффициента связи, $\delta\phi = \pi/8$. Точками обозначены результаты усреднения трех реализаций со случайными начальными условиями, прямыми - аппроксимация вида $\tau_{\delta\phi} \approx d^{-1}$. $N = 4, 8$

5. Динамика сети с «поврежденными» связями

Рассмотрим динамику сети (1), в которой связи между некоторыми элементами отсутствуют ($c_{j'k'} = 0$). Несмотря на отсутствие части связей, за счет взаимодействия с оставшимися элементами элементы с поврежденными связями могут синхронизоваться, не нарушая структуры кластеров, соответствующих данному образу Ψ (см. сноску 2 на стр. 134). Можно утверждать, что синхронизация какого-либо элемента нарушится только в случае его полной изоляции от сети ($c_{j'k} = 0$ для всех k). Тогда, очевидно, j' -й элемент не попадет ни в один из формирующихся кластеров и, следовательно, требуемые фазовые соотношения не могут быть достигнуты.

Введем понятия степени повреждения ансамбля и качества его работы. Степенью повреждения s назовем отношение

$$s = \frac{L_{sp}}{L_{tot}},$$

где L_{sp} - число «поврежденных» связей, а $L_{tot} = N(N - 1)$ - полное число связей. Качеством работы q ансамбля назовем величину

$$q = \frac{N_{ph}}{N},$$

где N_{ph} - число генераторов, достигшее нужных фазовых соотношений. Как сказано выше, $N_{ph} = N - N_{is}$, где N_{is} - количество полностью изолированных элементов.

Пусть связи разрываются случайным образом. Можно показать, что при больших N зависимость $q(s)$ имеет вид (см. Приложение 3)

$$q = 1 - s^N. \quad (13)$$

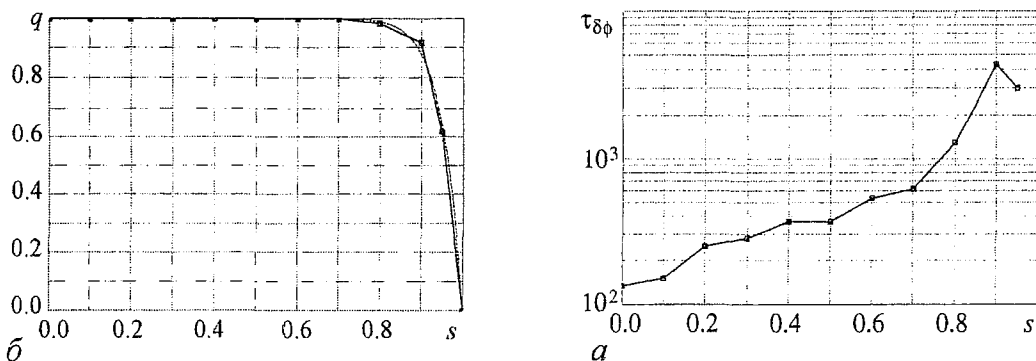


Рис. 8. *a* – качество работы $q(s)$. Сплошная линия - результаты численного моделирования, усредненные по 3 реализациям, пунктирная - аналитическая оценка; *б* – время ответа ансамбля $\tau_{\delta\phi}$ в зависимости от степени повреждения связей s . $N = 20, d = 0.1$

Отсюда следует, что чем больше значение N , тем выше надежность системы. Например, для снижения качества работы ансамбля из 20 генераторов на 10% в нем необходимо разорвать около 90% связей. Такой результат достигается из-за избыточности связей в сети, так как каждый элемент в ней связан с каждым другим.

На рис. 8, *a* приведены результаты численного моделирования системы (1),(7) при случайном разрывании связей. Эти результаты хорошо согласуются с оценкой (13). Отметим также, что «испорченная» система характеризуется большим временем ответа, чем исходная³ (рис. 8, *б*).

6. Ансамбль в режиме распознавания образов

В разделе 2 мы рассмотрели систему (1) в режиме запоминания заданного бинарного образа, когда матрица связи задавалась по правилу Хебба (7). В этом случае динамика ансамбля характеризуется наличием единственного аттрактора, а именно: предельного цикла, отвечающего синхронным колебаниям генераторов с определенными фазовыми соотношениями. Однако, если определить связи между элементами по-другому, система может выполнять и иную функцию, а именно: распознавать зашумленные образы из некоторого набора. Так, пусть имеется M различных бинарных образов $\Psi^{(1)}, \dots, \Psi^{(M)}$, а нас интересует, какому из них соответствует какой-либо искаженный образ Ψ^* . Пусть матрица связи задана следующим образом:

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^M \frac{1}{N-1} \Psi_j^{(l)} \Psi_k^{(l)}. \quad (14)$$

Тогда при небольшом числе M в системе (3) существует уже не одно, а M устойчивых состояний равновесия, каждое из которых отвечает формированию кластеров, определяемых одним из образов $\Psi^{(l)}$. В этом случае в зависимости от начальных условий система придет в одно из этих состояний равновесия. Следовательно, неизвестный образ Ψ^* может быть распознан, если отвечающие ему начальные усло-

³Для «испорченной» системы время ответа определялось по достижению нужных фазовых соотношений между неизолрованными генераторами.

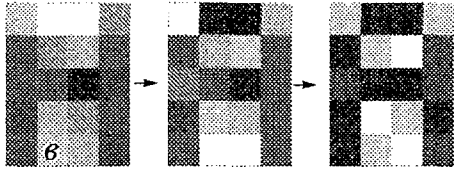
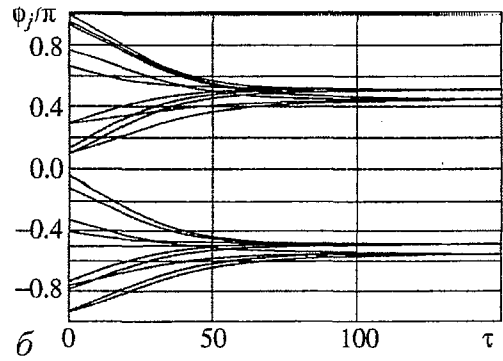
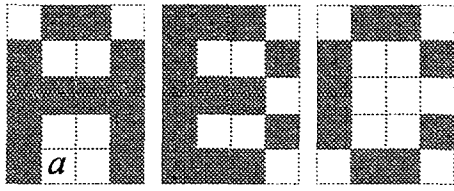


Рис. 9. Динамика ансамбля $N = 20$ генераторов с $M = 3$ записанными образами. a – записанные образы; b – зависимость фаз генераторов от времени; c – оттенками серого обозначены фазы генераторов в начальный, промежуточный и конечный моменты времени

вия принадлежат области притяжения соответствующего образа из «библиотеки» системы.

На рис. 9 представлена динамика системы (1),(14) при $N = 20, M = 3$. В матрицу связи записаны бинарные образы, соответствующие первым трем буквам латинского алфавита (рис. 9 a). Ансамбль формирует фазовые кластеры, соответствующие образу буквы «А» (рис. 9 c), к которому были наиболее близки начальные условия, то есть в зашумленном образе распознает один из наперед заданного набора.

Заключение

В работе исследована динамика ансамбля генераторов Ван дер Поля с глобальной резистивной связью. Показано, что основным эффектом фазовой динамики системы является формирование фазовых кластеров, определяемых матрицей связи. Учет амплитудной динамики позволил получить более сложные фазово-амплитудные кластеры, которые проявляются при достаточно большом коэффициенте связи d . Интерпретируя распределение генераторов по двум кластерам как некую информацию в двоичном коде, можно осуществлять с помощью предложенной системы запись, хранение и распознавание бинарных информационных образов. Указан вид матрицы связи, при которой можно добиться выполнения ансамблем этих функций.

Исследованы характеристики динамики ансамбля и показано, что она является достаточно устойчивой как к расстройке параметров отдельных элементов, так и к частичному повреждению связей между ними. Если эти нарушения не превышают некоторого порога, функционирование системы существенно не меняется.

К недостаткам изученной системы следует отнести достаточно малую емкость «библиотеки» в режиме распознавания. Емкостью назовем максимальное число образов $M_{\max}(N)$, при котором сеть функционирует правильно. При увеличении M

проявляется несколько нежелательных эффектов. Во-первых, это появление так называемых «паразитных» аттракторов, не соответствующих ни одному образу из набора $\Psi^{(1)}, \dots, \Psi^{(M)}$. Во-вторых, при увеличении M происходит потеря устойчивости некоторых состояний равновесия, отвечающих образам из «библиотеки», что приводит к невозможности эти образы распознать [6].

Работа поддержана грантом РФФИ №03-02-17135, грантом Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и их руководителей МК-4586.2004.2, грантом CRDF (программа BRHE, REC-006), Фондом содействия отечественной науке.

Приложение 1

Существование инвариантной области

Покажем существование в фазовом пространстве системы (2) инвариантной области. Пусть $R = \sup_j r_j$. В силу (2) имеем

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{R}{2}(1 - R^2) + \frac{d}{2} \sum_{k=1}^N c_{jk}(r_k \cos(\phi_k - \phi_j) - R) \leq \frac{R}{2}(1 - R^2) + Rd(N - 1) \sup_{j,k} c_{jk}. \quad (\text{П.1.1})$$

Из (П.1.1) нетрудно получить, что

$$\frac{dR}{d\tau} \leq 0, \quad \text{если } R \geq r^0, \quad (\text{П.1.2})$$

где $r^0 = \sqrt{1 + 2\delta}$, $\delta = d(N - 1) \sup_{j,k} c_{jk}$. Отсюда вытекает, что при τ , превышающем некоторое конечное значение τ_0 , амплитуды колебаний генераторов удовлетворяют неравенствам

$$r_j(t) \leq r^0, \quad j = \overline{1, N} \quad (\text{П.1.3})$$

Будем рассматривать область параметров, выделяемую условием $\gamma < 1$, где $\gamma = 3\delta r^0$ (данное условие имеет место при $\delta < \delta_0 \approx 0.2688$). Покажем теперь, что

$$\frac{dr_j}{d\tau} \geq 0, \quad \text{если } r_j \in [r^-, r^+], \quad (\text{П.1.4})$$

где

$$r^- = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right), \quad r^+ = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \quad \theta = \arccos \gamma.$$

Действительно, принимая во внимание (П.1.3), получаем, что

$$\frac{d}{2} \sum_{k=1}^N c_{jk}(r_k \cos(\phi_k - \phi_j) - r_j) \geq -d(N - 1) \sqrt{1 + 2\delta} \sup_{j,k} c_{jk} = -\delta r^0. \quad (\text{П.1.5})$$

Тогда, используя (П.1.5), из (2) получаем

$$\frac{dr_j}{d\tau} \geq \frac{r_j}{2}(1 - r_j^2) - \delta r^0. \quad (\text{П.1.6})$$

Нетрудно видеть, что функция, стоящая в правой части (П.1.6), является неотрицательной при $r_j \in [r^-, r^+]$ и, следовательно, условие (П.1.4) действительно выполняется.

Таким образом, при $\gamma < 1$ одновременно выполняются условия (П.1.3) и (П.1.4). Поскольку $r^+ < R^0$, выполнение этих условий означает, что на границе области

$$I = \{\phi_j, r_j | \phi_j \in S^1, r^+ < r_j < r^0\}$$

векторное поле системы (2) ориентировано внутрь этой области. Следовательно, I - инвариантная область системы (2).

Приложение 2

Докажем, что функция

$$U(\phi_1, \dots, \phi_N) = - \sum_{j,k=1}^N \Psi_j \Psi_k \cos(\phi_k - \phi_j) \quad (\text{П.2.1})$$

имеет минимум только в точках $\phi_j = \phi_0 + \frac{\pi}{2} \Psi_j$, где ϕ_0 - произвольное число. Сделаем замену переменных

$$\varphi_j = \phi_j - \phi_1 + \frac{\pi}{2}(\Psi_j - \Psi_1), \quad j = \overline{1, n},$$

тогда (П.2.1) переписывается в виде

$$U = - \sum_{j,k=1}^N \cos(\varphi_k - \varphi_j) = -S_s^2 - S_c^2, \quad (\text{П.2.2})$$

где

$$S_c = \sum_{j=1}^N \cos \varphi_j, \quad S_s = \sum_{j=1}^N \sin \varphi_j$$

Запишем необходимые условия минимума функции $U(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_j} = 2(S_c \sin \varphi_j - S_s \cos \varphi_j) = 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad (\text{П.2.3})$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_j^2} = 2(S_c \cos \varphi_j + S_s \sin \varphi_j) > 0, \quad j = \overline{1, N}. \quad (\text{П.2.4})$$

Отметим, что обе суммы S_c и S_s не могут одновременно быть нулевыми, иначе не выполняется (П.2.4), следовательно, из (П.2.3) все тангенсы $\tan \varphi_j$ равны между собой. Но $\varphi_1 = 0$, значит $\tan \varphi_j = 0$, и $\varphi_j = 0$ или $\varphi_j = \pi$. Тогда (П.2.4) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_j^2} = 2S_c \cos \varphi_j > 0, \quad j = \overline{1, N}. \quad (\text{П.2.5})$$

Неравенства (П.2.5) выполняются для любого j , следовательно, $S_c > 0$, $\cos \varphi_j > 0$ и точка $O(\varphi_j = 0)$ является единственным минимумом функции U (П.2.2). В исходных переменных это соответствует утверждению, которое необходимо доказать.

Найдем вероятность P_{is} полной изоляции какого-либо элемента сети (1) при разрывании в нем L_{sp} связей. Для изоляции надо разорвать $(N - 1)$ определенных связей, а всего их $L_{tot} = N(N - 1)$, следовательно

$$P_{is} = \frac{C_{L_{tot}-N+1}^{L_{sp}-N+1}}{C_{L_{tot}}^{L_{sp}}} = \frac{(L_{tot} - N + 1)! L_{sp}!}{(L_{sp} - N + 1)! L_{tot}!}. \quad (\text{П.3.1})$$

Очевидно, что при малом числе изолированных генераторов среднее их количество $\langle N_{is} \rangle = NP_{is}$, следовательно,

$$q = 1 - P_{is}. \quad (\text{П.3.2})$$

Упростим выражение (П.3.1) в случае больших N . Нетрудно видеть, что

$$P_{is} = \frac{L_{sp}(L_{sp} - 1) \dots (L_{sp} - N + 2)}{L_{tot}(L_{tot} - 1) \dots (L_{tot} - N + 2)} = \prod_{k=0}^{N-2} \frac{L_{sp} - K}{L_{tot} - K}. \quad (\text{П.3.3})$$

Каждый сомножитель в (П.3.3) равен

$$\frac{L_{sp} - K}{L_{tot} - K} = s - \frac{(1 - s)K}{L_{tot} - K}. \quad (\text{П.3.4})$$

Прологарифмируем (П.3.3) с учетом (П.3.4), заменяя приближенно суммы интегралами,

$$\begin{aligned} \ln P_{is} &= \sum_{k=0}^{N-2} \ln(L_{sp} - K) - \sum_{k=0}^{N-2} \ln(L_{tot} - K) \approx \int_{L_{sp}-N+2}^{L_{sp}} \ln NdN - \int_{L_{tot}-N+2}^{L_{tot}} \ln NdN \approx \\ &\approx L_{sp} \ln L_{sp} - (L_{sp} - N) \ln(L_{sp} - N) - L_{tot} \ln L_{tot} + (L_{tot} - N) \ln(L_{tot} - N) \approx \\ &\approx N(\ln L_{sp} - \ln L_{tot}) = N \ln s. \end{aligned} \quad (\text{П.3.5})$$

Подставляя (П.3.5) в (П.3.2), получим

$$q = 1 - s^N.$$

Библиографический список

1. *Hopfield I.I.* Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1982. № 79. P. 2554-2558.
2. *Hopfield I.I.* Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1984. № 81. P. 3088-3092.
3. *Hopfield I.I., Tank D.V.* Neural computation of decisions in optimization problems //Biol. Cibern. 1985. Vol. 52, № 3. P. 141-153.
4. *Hoppensteadt Frank C. and Izhikevich Eugene M.*// Physical Review Letters, 5 April 1999. Vol. 82, № 14. P. 2983-2986.
5. *Baird B., Eeckman F.* A normal form projection algorithm for associative memory // in: Associative Neural Memories / Ed. Hasson M.H. NY, Oxford: OVP, 1933, 350 p.

6. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
7. Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие. М.: Наука, 2002.
8. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 408 с.
9. *Hebb D.O.* The Organization of Behavior. New York, 1949.

*Институт прикладной физики РАН
Нижний Новгород
Нижегородский государственный
университет*

Поступила в редакцию 29.12.2004

PHASE-AMPLITUDE CLUSTERS IN ENSEMBLE OF VAN DER POL GENERATORS

V.V. Klinshov, V.B. Kazantsev, V.I. Nekorkin

Collective dynamics of an ensemble of globally coupled Van der Pol generators is investigated. The formation of phase-amplitude clusters according to a given stimulus is studied. The clusters appear as two groups of generators oscillating in opposite phase. The effect can be used for various information processing functions, including input, storage and recognition of binary images.



Клиньшов Владимир Викторович - родился в 1984 году в Нижнем Новгороде, учится в магистратуре Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. Область научных интересов - теория нелинейных колебаний и волн, нейродинамика.



Некоркин Владимир Исаакович - родился на Украине в 1948 году, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1981, ННГУ) и доктора физико-математических наук (1992, СГУ). С 1971 года работал в Нижегородском институте прикладной математики, с 1983 по 1986 год в Нижегородском политехническом институте, с 1986 года и по настоящее время работает на радиофизическом факультете ННГУ, профессор. Область научных интересов - теория колебаний и волн, структурообразование и нелинейные волны в непрерывных и дискретных средах, синхронизация и пространственно-временной хаос. Имеет более 100 научных публикаций в указанных направлениях, соавтор двух монографий. В качестве приглашенного профессора читал лекции в Мадридском и Стэнфордском университетах. Работал в Калифорнийском университете.



ДИНАМИКА СИСТЕМЫ НЕЙРОНОВ С ПОСЛЕДЕПОЛЯРИЗАЦИЕЙ И ИНГИБИТОРНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ*

В.В. Клиньшов, В.И. Некоркин

Проведено исследование динамики модели, описывающей систему нейронов с последеполяризацией и ингибиторной обратной связью, под действием гармонического входного стимула. Показано, что данная система способна осуществлять функции краткосрочной памяти с возможностью хранения как одного, так и двух информационных образов в виде периодической нейронной активности ее элементов. Предложены способы записи, считывания и стирания информации, оценена рабочая область параметров системы.

Введение

Одной из задач современной нейродинамики является изучение процессов обработки информации нейронными сетями головного мозга [1–7]. В частности, большой интерес вызывает проблема моделирования процессов хранения информационных образов в так называемой краткосрочной памяти [6–8]. Краткосрочной памятью (далее КСП, или просто память) принято называть [1] возможность хранения мозгом поступающей от органов чувств информации в течение небольшого периода времени (порядка 1 - 100 с). Современные нейрофизиологи предполагают, что хранение достаточно сложных образов КСП осуществляется в виде кластеров периодической нейронной активности [1, 7]. В [7, 8] описан динамический механизм функционирования краткосрочной памяти, основанный на известном свойстве некоторых нервных клеток коры головного мозга - последеполяризации. Данное свойство заключается во временном повышении возбудимости нейронной мембраны после однократной генерации потенциала действия. В работе [7] представлена функциональная схема нейронной сети, в которой может осуществляться хранение информации в виде кластеров активности, а в [8] приведена математическая модель элемента такой сети и объяснен динамический механизм функционирования КСП.

Важно заметить, что предложенная система памяти состоит из ансамбля нейронов с последеполяризацией, находящихся под воздействием осцилляторного сигнала и коротких информационных импульсов. Если до прихода информационного импульса на какой-либо элемент он совершал подпороговые колебания, то после воздействия начинает периодически генерировать потенциал действия (спайк) на

*Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия.

каждом пике осцилляторного сигнала, и тем самым факт поступления импульса «запоминается» элементом. Однократно подав информационные сигналы на некоторую совокупность нейронов сети, можно запомнить в ней произвольный информационный образ в виде кластера периодической нейронной активности. Для стирания записанной информации необходимо подать на все элементы импульсы отрицательной полярности.

Однако подобная схема позволяет запомнить только один информационный образ. В то же время известно, что человек, например, способен одновременно хранить в КСП до 7-9 различных образов. Данная особенность модели связана с тем, что элементы в ней фактически не взаимодействуют, тогда как введение взаимодействия между ними может устранить указанный недостаток. Оказывается, наличие ингибиторных (подавляющих) обратных связей между нейронами приводит к появлению на пике осцилляторного сигнала нескольких «подциклов», на каждом из которых может возбуждаться определенная группа нейронов. Таким образом, в системе существует несколько различных кластеров активности, периодически сменяющих друг друга [7].

Данная работа посвящена исследованию динамической модели сети нейронов с последеполаризацией и межэлементными ингибиторными обратными связями на примере системы двух нейронов. Мы показываем, что данная система способна хранить в виде кластеров периодической спайковой активности не один, а два информационных образа одновременно. Такая возможность появляется из-за наличия в достаточно широкой области параметров режима поочередного возбуждения элементов. Предложены способы записи, считывания и стирания информации из системы, оценены различные характеристики ее динамики в зависимости от управляющих параметров.

Статья структурирована следующим образом. В разделе 1 вводится динамическая модель системы памяти. Далее для простоты рассматривается только случай двух элементов. В разделе 2 обсуждаются базовые свойства динамики системы, а в разделе 3 более подробно изучаются ее медленные движения. Раздел 4 посвящен режиму, в котором периодически возбуждается один из нейронов, а другой совершает подпороговые колебания. В разделе 5 рассмотрены различные режимы, характеризующиеся периодической активностью обоих элементов, и показано, что они могут возбуждаться с временной задержкой. В разделе 6 проведена оценка рабочей области параметров, в которой система функционирует корректно и способна осуществлять хранение памяти. В заключении подводятся итоги работы и делаются некоторые заключительные замечания.

1. Модель

В настоящей работе в качестве модели нейрона рассмотрим предложенный в [8] элемент, динамика которого описывается системой следующего вида

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \frac{du}{dt} &= v - f(u), \\
 \frac{dv}{dt} &= w - u + x(t), \\
 \frac{dw}{dt} &= -\beta w + \gamma [g(u) - p(w)].
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь u - мембранный потенциал нейрона, переменная v описывает ионные токи, w характеризует возбудимость мембраны, $x(t)$ - входной стимулирующий сигнал, $f(u)$ - нелинейная функция кубического вида, $g(u)$ и $p(w)$ - пороговые функции

$$f(u) = \begin{cases} u, & \text{если } u \leq \sigma, \\ \sigma \left(1 - 2 \frac{u - \sigma}{u_0 - 2\sigma} \right), & \text{если } \sigma \leq u \leq u_0 - \sigma, \\ u - u_0, & \text{если } u \geq u_0 - \sigma, \end{cases}$$

$$g(u) = \frac{1}{\exp[\kappa(\frac{1}{2}u_0 - u)] + 1},$$

$$p(w) = \frac{1}{\exp[\kappa(w_0 - w)] + 1},$$

где $\varepsilon, \beta, \gamma, u_0, w_0, \sigma, \kappa$ - постоянные параметры (в дальнейшем положим $u_0 = 5$, $w_0 = 0.2$, $\sigma = 0.2$, $\kappa = 500$). Первые два уравнения (1) аналогичны классической системе ФитцХью - Нагумо [9, 10], третье же позволяет учесть специфические последеполаризационные свойства нейрона.

В отсутствие сигнала ($x(t) \equiv 0$) система (1) в широкой области параметров находится в покое. Если же подействовать на нейрон коротким импульсным сигналом, он возбуждается и генерирует так называемый потенциал действия (спайк), причем после однократного возбуждения его порог временно понижается, что соответствует последеполаризации. При действии же на данную систему гармонического сигнала

$$x(t) = V \cos \frac{2\pi t}{T} \quad (2)$$

в ее фазовом пространстве сосуществуют две устойчивые периодические траектории, одна из которых отвечает подпороговым колебаниям нейрона, а другая - периодической генерации потенциала действия [8]. Обозначим данные режимы через «0» и «1», соответственно.

Пусть система (1), (2) в начальный момент времени находится в режиме «0». Тогда дополнительное действие короткого импульса положительной полярности может перевести ее в режим «1», что соответствует запоминанию информации о поступлении данного стимула. Для приведения элемента в начальное состояние (стирания информации) необходимо подействовать на него импульсом отрицательной полярности, и тогда он будет снова готов к записи последующей информации. Таким образом, система (1) может осуществлять функцию памяти (КСП) емкостью один бит. На рис. 1 представлена схема системы (1) и зависимость от времени мембранного потенциала $u(t)$ под действием сигнала $x(t)$.

В ансамбле нейронов вида (1),(2), находящихся под действием гармонического сигнала, возможно запоминание больших объемов информации. Так, для записи в систему некоторого образа необходимо подействовать короткими возбуждающими (информационными) импульсами на элементы, отвечающие этому образу. Тогда в сети возникнет кластер периодической нейронной активности, соответствующий данному шаблону, что и будет соответствовать его хранению в памяти.

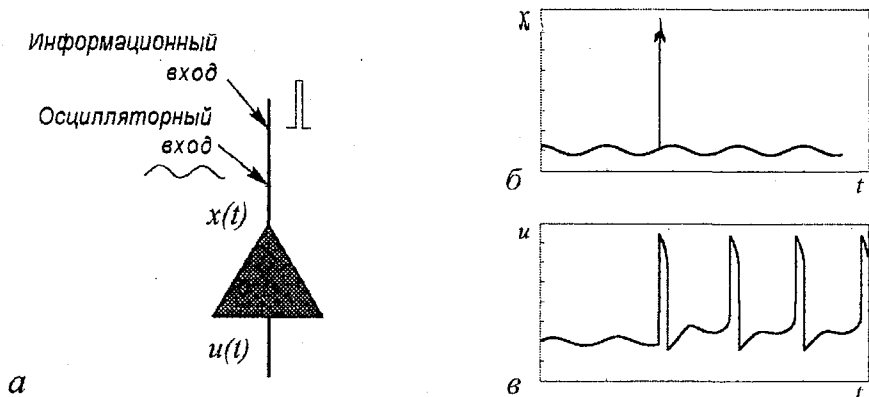


Рис. 1. а – схема одного запоминающего элемента, б – суммарный сигнал, поступающий на его вход, в – временная реализация мембранного потенциала $u(t)$

Рассмотрим подробнее динамику такой нейронной сети, состоящей из N одинаковых нейронов вида (1) под действием гармонического сигнала (2). Прежде всего ответим на принципиальный вопрос: может ли такая система хранить одновременно несколько различных информационных образов? Поскольку элементы идентичны и находятся под действием одного и того же внешнего сигнала, то в режиме «1» они будут генерировать потенциалы действия в одной фазе, то есть в одни и те же моменты времени. Следовательно, даже если информационные импульсы поступят на нейроны в разные моменты, некоторое время спустя они составят *один* кластер периодической нейронной активности. Это значит, что описанная система может хранить только *единственный* информационный образ.

Данный недостаток можно устранить, если ввести в нее еще один элемент - интернейрон, осуществляющий ингибиторную обратную связь между элементами [7]. Пусть это будет нейрон Маллока – Питса [5] с весовыми коэффициентами воздействия ото всех элементов, равными единице. Структурная схема сети с обратными связями представлена на рис. 2, а ее модель имеет вид

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \frac{du_j}{dt} &= v_j - f(u_j), \\
 \frac{dv_j}{dt} &= w_j - u_j + V \cos \frac{2\pi t}{T} - \lambda F, \\
 \frac{dw_j}{dt} &= -\beta w_j + \gamma [g(u_j) - p(w_j)], \\
 F &= g \left[\sum_{k=1}^N u_k \right],
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

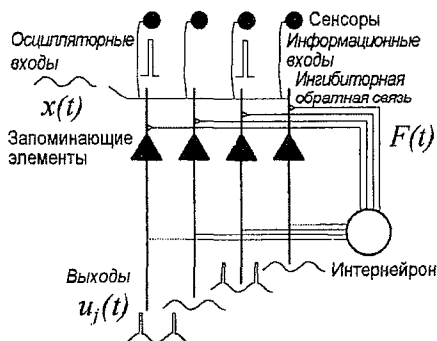


Рис. 2. Структурная схема системы памяти. Запоминающие элементы находятся под действием осцилляторного сигнала, информационные импульсы, поступающие на них, переводят элементы из режима «0» в режим «1». Интернейрон обеспечивает ингибиторную обратную связь между элементами, обеспечивая возможность хранения нескольких образов одновременно

где λ - коэффициент обратной связи, а F - мембранный потенциал интернейрона. Если в некоторый момент времени ни один элемент (3) не возбужден ($u_k \leq \frac{1}{2} u_0$),

то $F \approx 0$, и обратная связь не влияет на динамику нейронов. Если же некоторые из элементов возбуждены ($u_k > \frac{1}{2}u_0$), то $F \approx 1$, и интернейрон ингибирует остальные элементы, то есть подавляет возможную генерацию потенциала действия на них.

Введение нового элемента в структуру сети приводит к появлению в ней нового режима динамики, а именно, существования нескольких кластеров периодической нейронной активности, возбуждающихся поочередно с некоторой временной задержкой и состоящих из различных элементов. Данные кластеры могут соответствовать *нескольким* различным информационным образам, которые *одновременно* хранятся в памяти системы. Таким образом, введение обратных связей позволяет повысить емкость системы КСП с одного образа до нескольких.

На рис. 3 проиллюстрирована динамика сети (3) при отсутствии ($\lambda = 0$) и наличии ($\lambda > 0$) ингибиторной обратной связи между ее элементами. В обоих случаях в систему записывается сначала один образ, а через некоторое время другой. Видно, что в первом случае система не способна отдельно сохранять оба образа, и на ее выходе мы получаем кластер периодической активности, соответствующий «смеси» обоих шаблонов. Во втором же случае сеть демонстрирует периодическое возбуждение *двух* групп нейронов с временной задержкой между ними, и введенные образы остаются различимыми.

Указанные свойства сети с обратной связью (3) можно наблюдать уже для $N = 2$. В этом случае уравнения, описывающие ее, принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du_j}{dt} &= v_j - f(u_j), \\ \frac{dv_j}{dt} &= w_j - u_j + V \cos \frac{2\pi t}{T} - \lambda F, \\ \frac{dw_j}{dt} &= -\beta w_j + \gamma [g(u_j) - p(w_j)], \\ F &= g[u_1 + u_2], \end{aligned} \tag{4}$$

где $j = 1, 2$. Тогда существует 4 различных информационных образа, которые в принципе способна хранить такая сеть. Обозначим их последовательностями из двух

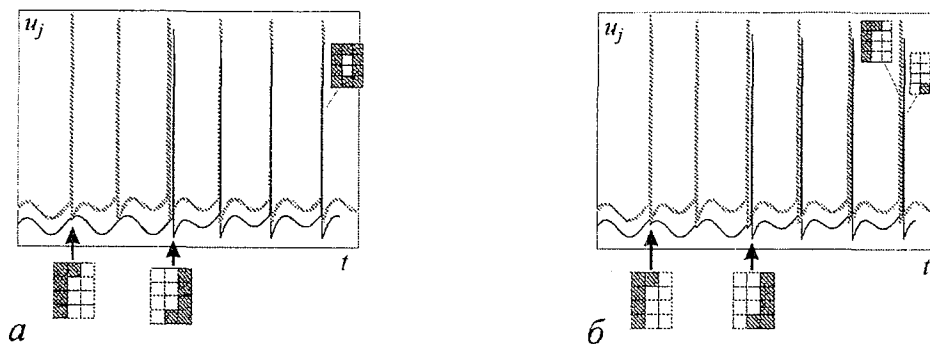


Рис. 3. Динамика запоминающей системы из 12 элементов при записи в нее последовательно двух образов. Стрелочками обозначены моменты подачи информационных импульсов. *a* – случай отсутствия обратной связи ($\lambda = 0$), *б* – обратная связь присутствует ($\lambda = 0.6$). Для удобства изображения графики мембранных потенциалов групп нейронов, соответствующих различным образам, разнесены по вертикали. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$, $\beta = 0.05$, $\gamma = 3$

цифр «0» или «1», каждая из которых характеризует состояние одного из нейронов. Так, если система хранит образ {00}, то это соответствует подпороговым колебаниям обоих элементов; образ {01} соответствует подпороговой динамике первого и периодическому возбуждению второго элементов; если же в сеть записан образ {11}, это значит, что оба нейрона периодически генерируют импульсы действия.

Далее мы покажем, что, наряду с возможностью хранить *один* из образов {00}, {01}, {10}, {11}, сеть (4) может одновременно хранить *два* образа - {01} и {10}. Режим существования двух кластеров периодической активности ассоциируется здесь с режимом поочередного возбуждения двух нейронов с временной задержкой между импульсами действия. Благодаря этому два образа {01} и {10} различаются системой и не «путаются» с образом {11}, которому соответствует режим одновременного возбуждения обоих нейронов.

2. Основные свойства системы

Изучим динамику системы (4) в ее семимерном фазовом пространстве $G = R^6 \times S$, где $S = R(\text{mod } T)$ отражает периодичность сигнала $x(t)$. Из-за наличия в системе малого параметра ϵ при двух производных в G существуют так называемые быстрые и медленные движения [11–13]. Медленные движения происходят на многообразии медленных движений

$$W = \{(u_{1,2}, v_{1,2}, w_{1,2}, t) \in G \mid u_{1,2} = f(v_{1,2})\}$$

и в его малой (порядка ϵ) окрестности. Это многообразие состоит как из устойчивых, так и из неустойчивых компонент, следовательно, возможно существование неблуждающих траекторий, имеющих как медленные (движение в окрестности многообразия W), так и быстрые (движение между различными W компонентами вдоль «быстрых» траекторий) движения. Это так называемые релаксационные (разрывные) колебания. Многообразие медленных движений W системы (4) имеет четыре устойчивых компоненты

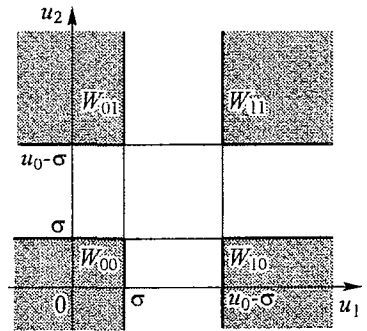


Рис. 4. Многообразия $W_{k_1 k_2}$ в проекции на плоскость u_1, u_2

$$W_{k_1 k_2} = W_1^{k_1} \cap W_2^{k_2}, \quad k_{1,2} = \overline{0, 1}, \quad (5)$$

где W_m^k - следующие множества, вложенные в G :

$$W_m^0 = \{(u_{1,2}, v_{1,2}, w_{1,2}, t) \in G \mid u_m = v_m, v_m \leq \sigma\}, \quad m = \overline{1, 2},$$

$$W_m^1 = \{(u_{1,2}, v_{1,2}, w_{1,2}, t) \in G \mid u_m = v_m + u_0, v_m \geq -\sigma\}, \quad m = \overline{1, 2}.$$

Проекции многообразий $W_{k_1 k_2}$ на плоскость u_1, u_2 представлены на рис. 4. Траектории системы (4) двигаются вблизи устойчивых компонент медленных движений, «перескакивая» между ними за бесконечно малые промежутки времени. Если в

какой-либо момент времени t изображающая точка находится вблизи многообразия $W_{k_1 k_2}$, то j -й элемент возбужден при $k_j = 1$ и находится ниже порога возбуждения при $k_j = 0$; таким образом, индекс k_j определяет состояние j -го элемента.

Медленные движения траекторий системы (4) в ε -окрестности устойчивого многообразия $W_{k_1 k_2}$ определяются следующей системой:

$$\begin{aligned} \frac{dv_j}{dt} &= w_j - v_j - k_j u_0 + V \cos \frac{2\pi t}{T} - \lambda F, \\ \frac{dw_j}{dt} &= -\beta w_j + \gamma (g(u_j) - p(w_j)), \\ F &= g[v_1 + v_2 + u_0(k_1 + k_2)], \\ u_j &= v_j + k_j u_0, \end{aligned} \quad (6)$$

а быстрые движения между многообразиями – системой:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du_j}{dt} &= v_j^0 - f(u_j), \\ v_j &= v_j^0 = \text{const}, \\ w_j &= w_j^0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (7)$$

3. Медленные движения системы

Изучим динамику системы (4) в рамках приближения быстрых и медленных движений, то есть при $\varepsilon \rightarrow 0$. Пусть $\kappa \gg 1$, $u_0 \gg \sigma$, w_0, V, λ и $\gamma \gg \beta w_0$. Тогда в (6) можно положить $F = 0$ вблизи многообразия W_{00} и $F = 1$ вблизи других многообразий (5). Аналогично будем считать, что $g(u_j) = 0$ при $u_j < \sigma/2$ и $g(u_j) = 1$ при $u_j > \sigma/2$; $p(w_j) = 0$ при $w_j < w_0$ и $p(w_j) = 1$ при $w_j > w_0$.

Исследуем движения системы (6) на различных многообразиях $W_{k_1 k_2}$.

Многообразие W_{00} . В этом случае оба элемента находятся ниже порога возбуждения, и $F = 0$. Рассмотрим динамику одного из нейронов, например, первого, описываемого системой

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= w_1 - v_1 + V \cos \frac{2\pi t}{T}, \\ \frac{dw_1}{dt} &= -\beta w_1. \end{aligned}$$

Решение этой системы записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} w_1(t) &= c_1 e^{-\beta t}, \\ v_1(t) &= \frac{c_1}{1 - \beta} e^{-\beta t} + c_2 e^{-t} + \tilde{V} \cos(\omega t - \varphi), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\omega = 2\pi/T$, $\varphi = \arctan \omega$, $\tilde{V} = V/\sqrt{1 + \omega^2}$, а c_1 и c_2 – произвольные константы, определяемые начальными условиями.

Многообразие W_{01} . Пусть теперь первый элемент ниже порога возбуждения, а второй генерирует потенциал действия, $F = 1$. Запишем систему (6) для второго элемента

$$\frac{dv_2}{dt} = w_2 - v_2 - u_0 + V \cos \frac{2\pi t}{T} - \lambda,$$

$$\frac{dw_2}{dt} = -\beta w_2 + \gamma(1 - p(w_j)).$$

Т.к. в первом уравнении $-u_0$ много больше всех остальных слагаемых, а $\gamma \gg \beta w_0$, то приближенно можно записать

$$v_2(t) \approx c_1 - u_0 t,$$

$$w_2(t) \approx \min(c_2 + \gamma t, w_0),$$

где c_1 и c_2 - произвольные константы, определяемые начальными условиями.

Многообразие W_{10} . Динамика системы аналогична случаю W_{01} .

Многообразие W_{11} . Когда оба элемента возбуждены, решение системы (6) описывается формулами, аналогичными (9).

4. Периодическое возбуждение одного элемента

Рассмотрим систему (4), в которой элемент с номером 1 находится в режиме «1», то есть периодически генерирует потенциалы действия, а элемент с номером 2 - в режиме «0», то есть колеблется ниже порога возбуждения. Тогда будут иметь место периодические переходы траектории системы между окрестностями многообразий W_{00} и W_{10} . Пусть в моменты времени $t_n^e = nT + t_0^e$, $n \in \mathbf{Z}$ первый нейрон возбуждается, то есть система (4) осуществляется переход $W_{00} \rightarrow W_{10}$, а в моменты $t_n^e + \tau^* = nT + t_0^e + \tau^*$ происходит обратный переход. Тогда в течение времени от t_n^e до $t_n^e + \tau^*$ траектория системы (4) определяется формулами, аналогичными (9), с начальными условиями $v_1(t_n^e) = \sigma$. Как показано в [8], движение по многообразию W_{10} происходит в течение времени $\tau^* \approx \frac{2\sigma}{u_0}$, и при условии $\gamma > \frac{w_0 u_0}{2\sigma}$ переход в окрестность многообразия W_{00} осуществляется вблизи точки

$$v_1 = -\sigma, \quad w_1 = w_0.$$

Следовательно, константы c_1 и c_2 в системе (8) для промежутка времени от $t_n^e + \tau^*$ до t_{n+1}^e следует выбрать

$$c_1 = e^{\beta t_1},$$

$$c_2 = -e^{t_1} \left[\widetilde{w}_0 + \widetilde{V} \cos(\omega t_1 - \varphi) + \sigma \right],$$

где $t_1 = t_n^e + \tau^*$, $\widetilde{w}_0 = \frac{w_0}{1 - \beta}$. Тогда динамика первого нейрона в течение данного промежутка времени будет описываться следующим образом:

$$w_1(t) = w_0 e^{-\beta(t-t_1)},$$

$$v_1(t) = \widetilde{w}_0 e^{-\beta(t-t_1)} - \left[\widetilde{w}_0 + \widetilde{V} \cos(\omega t_1 - \varphi) + \sigma \right] e^{t_1-t} + \widetilde{V} \cos(\omega t - \varphi). \quad (10)$$

В момент $t_{n+1}^e = t_1 + T - \tau^*$ система (4) достигает границы многообразия W_{00} , следовательно, в формулах (10) $v_1(t_{n+1}^e) = \sigma$. Это условие приводит нас к уравнению для нахождения t_1

$$\tilde{w}_0 [e^{-\beta T^*} - e^{-T^*}] + \tilde{V} [\cos(\omega(t_1 - \tau^*) - \varphi) - \cos(\omega t_1 - \varphi)e^{-T^*}] - \sigma [1 + e^{-T^*}] = 0,$$

где $T^* = T - \tau^*$. При $T \gg \tau^*$ решение данного уравнения приближенно имеет вид

$$t_n = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{\sigma [1 + e^{-T}] - \tilde{w}_0 [e^{-\beta T} - e^{-T}]}{\tilde{V} [1 - e^{-T}]} + \frac{\varphi}{\omega} + \frac{2\pi n}{\omega}. \quad (11)$$

Определим область параметров системы (4), в которой возможно периодическое возбуждение элемента. Выражение (11) имеет смысл только при

$$\tilde{V} [1 - e^{-T}] > \sigma [1 + e^{-T}] - \tilde{w}_0 [e^{-\beta T} - e^{-T}], \quad (12)$$

то есть при достаточно большой амплитуде гармонического сигнала (2).

5. Периодическое возбуждение обоих элементов

Пусть теперь в режиме «1» находятся оба элемента системы (4), и пусть в какой-то момент времени t они находятся в одинаковых состояниях ($u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$, $w_1 = w_2$). Тогда из симметрии системы (4) их состояния будут одинаковы в любой момент времени, и колебания нейронов будут осуществляться в одной фазе. Исследуем на устойчивость данный синхронный режим динамики сети. Будем использовать приближение малой длительности спайка $\tau^* \ll T$, тогда производные в (4) в течение времени порядка τ^* можно считать постоянными.

Пусть в момент t_n^e очередного возбуждения первого элемента системы (4) второй элемент «отстал» и возбудился с небольшой задержкой δt_n . Тогда, если $\delta t_n < \tau^*$, система (4) совершит последовательность переходов между окрестностями многообразий $W_{00} \rightarrow W_{10} \rightarrow W_{11} \rightarrow W_{01} \rightarrow W_{00}$, а если $\delta t_n > \tau^*$, то имеет место последовательность переходов между окрестностями многообразий $W_{00} \rightarrow W_{10} \rightarrow W_{00} \rightarrow W_{01} \rightarrow W_{00}$. В любом случае, возвращение в окрестность W_{00} произойдет вблизи точки

$$P_n(v_1 = -\sigma + \delta v_n, w_1 = w_0 + \delta w_n, v_2 = -\sigma, w_2 = w_0),$$

где разности δv_n и δw_n имеют значения

$$\begin{aligned} \delta v_n &= \begin{cases} (w_0 + \sigma + V \cos \omega t_n^e - \lambda) \delta t_n, & \delta t_n \leq \tau^* \\ (w_0 + \sigma + V \cos \omega t_n^e) \delta t_n - \lambda \tau^*, & \delta t_n \geq \tau^* \end{cases}, \\ \delta w_n &= -\beta w_0 \delta t_n. \end{aligned} \quad (13)$$

Изучим динамику системы (4) в течение следующего периода внешнего сигнала до момента возбуждения нейронов. Очевидно, траектория системы будет находиться в течение этого промежутка времени вблизи многообразия W_{00} , причем

стартовать она будет в окрестности точки P_n . Тогда изменение во времени разностей $\delta v = v_1 - v_2$ и $\delta w = w_1 - w_2$ будет подчиняться следующему уравнению:

$$\begin{aligned}\frac{d\delta v}{dt} &= \delta w - \delta v, \\ \frac{d\delta w}{dt} &= -\beta\delta w,\end{aligned}$$

а зависимости от времени $v_1(t)$ и $w_1(t)$ близки к (10), так как величины $|\delta v|$ и $|\delta w|$ малы.

Траектория системы (4) достигнет границы многообразия W_{00} в момент времени, близкий к $t_{n+1}^e = t_n^e + T$. Обозначим $\overline{\delta v_n} = \delta v(t_{n+1}^e)$, тогда, принимая во внимание (13), получаем

$$\overline{\delta v_n} = \delta v_n e^{-T} + \frac{\delta w_n}{1-\beta} (e^{-\beta T} - e^{-T}) = \lambda_1 e^{-T} \delta t_n - \lambda e^{-T} \min(\delta t_n, \tau^*), \quad (14)$$

где

$$\lambda_1 = w_0 + \sigma + V \cos(\omega t_n^e) - \beta \widetilde{w_0} (e^{(1-\beta)T} - 1).$$

Очевидно, что в зависимости от знака $\overline{\delta v_n}$ система будет совершать либо переход $W_{00} \rightarrow W_{10}$ (при $\overline{\delta v_n} > 0$), либо $W_{00} \rightarrow W_{01}$ (при $\overline{\delta v_n} < 0$).

Выберем параметры системы в области, в которой $\lambda < \lambda_1$, тогда $\overline{\delta v_n} > 0$, и в момент времени t_{n+1}^e осуществляется переход $W_{00} \rightarrow W_{10}$, что приведет к появлению ингибиторной обратной связи, то есть $F = 1$. В момент времени t_{n+1}^e значения переменных равны $w_2 = w_0 e^{-\beta T}$, $v_2 = \sigma$, и в силу системы (6) производная

$$\frac{dv_2}{dt} = \lambda_2 - \lambda, \quad (15)$$

где

$$\lambda_2 = w_0 e^{-\beta T} - \sigma + V \cos \omega t_{n+1}^e.$$

В зависимости от знака $\frac{dv_2}{dt}$ в (15) динамика сети будет принципиально различаться. Пусть $\frac{dv_2}{dt} > 0$, то есть $\lambda < \lambda_2$ (слабая обратная связь). Тогда потенциал u_2 второго нейрона продолжает расти несмотря на его ингибирование, и он быстро «догоняет» первый. Если же $\lambda > \lambda_2$ (сильная обратная связь), то в (15) $\frac{dv_2}{dt} < 0$, и второй нейрон может возбудиться только после прекращения генерации импульса действия первым (рис. 5). Задержка между моментами возбуждения в этом случае составит

$$\delta t_{n+1} = \frac{\lambda \tau^* + \overline{\delta v_n}}{\lambda_2}. \quad (16)$$

Далее будем рассматривать систему именно в случае сильной обратной связи.

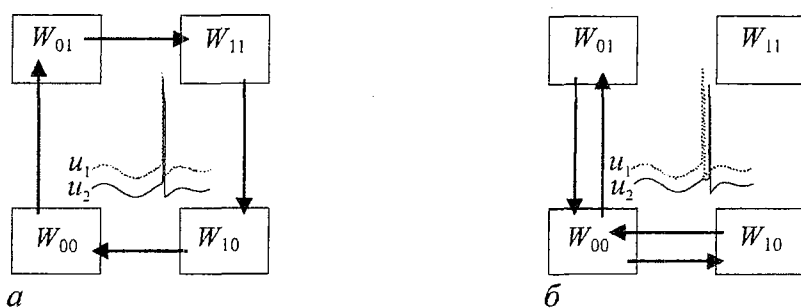


Рис. 5. Последовательности переходов между окрестностями многообразий и соответствующие им временные реализации $u_1(t), u_2(t)$ для случаев: *a* – слабой обратной связи ($\lambda < \lambda_2$), *б* – сильной обратной связи ($\lambda > \lambda_2$). Графики $u_1(t)$ и $u_2(t)$ разнесены по вертикали для удобства

5.1. Динамика системы при учете времени движений вдоль быстрых траекторий. Выше предполагалось, что быстрые движения системы (7) происходят мгновенно. Однако мы покажем, что качественный учет конечности времени этих движений позволит более корректно описать динамику системы (4) в случае сильной обратной связи.

Рассмотрим систему (4) в момент начала возбуждения первого нейрона t_{n+1}^e , то есть когда начинается переход $W_{00} \rightarrow W_{10}$, и $v_1(t_{n+1}^e) = \sigma, v_2(t_{n+1}^e) = \sigma - \overline{\delta v_n}$. Тогда в силу (7) при $u_1 < u_0 - \sigma$ имеем

$$\varepsilon \frac{du_1}{dt} = \sigma - f(u_1) = 2\sigma \frac{u_1 - \sigma}{u_0 - 2\sigma}.$$

Поскольку это движение начинается из ε -окрестности многообразия W_{00} , то $u_1(t_{n+1}^e) \approx \sigma + \varepsilon$. Тогда решение данного уравнения имеет вид

$$u_1(t) = \sigma + \varepsilon \exp \frac{2\sigma(t - t_n^e)}{\varepsilon(u_0 - 2\sigma)}. \quad (17)$$

Оценим время «включения» обратной связи t_{fb} , то есть время достижения переменной u_1 значения $u_0/2$. Из (17) следует

$$t_{fb} = \frac{\varepsilon(u_0 - 2\sigma)}{2\sigma} \ln \frac{u_0 - 2\sigma}{2\varepsilon}.$$

Очевидно, что даже при сильной обратной связи ($\lambda > \lambda_2$) второй элемент может «успеть» возбудиться до включения ингибирования. Это произойдет, если он не слишком сильно «отстает» от первого, а именно если выполняется условие

$$\overline{\delta v_n} < \lambda_2 \frac{\varepsilon(u_0 - 2\sigma)}{2\sigma} \ln \frac{u_0 - 2\sigma}{2\varepsilon} = \delta v_0. \quad (18)$$

При выполнении (18) траектория системы (4) перейдет в окрестность W_{11} , и задержка между моментами генерации спайков на нейронах составит

$$\delta t_{n+1} = \frac{\overline{\delta v_n}}{\lambda_2}. \quad (19)$$

Выберем параметры системы в области $\lambda < \lambda_3$, где

$$\lambda_3 = \lambda_1 - \frac{\delta v_0 e^T}{\tau^*}.$$

Тогда условие (18) выполняется тогда и только тогда, когда $\delta t_n < \frac{\delta v_0 e^T}{\lambda_1 - \lambda} < \tau^*$. Заметим, что величину δv_0 можно сделать сколь угодно малой путем уменьшения ε , поэтому в некоторых случаях мы будем этой величиной пренебрегать.

5.2. Точечное отображение S . Из (16), (19) следует, что в области параметров $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$ система (4) порождает точечное отображение $S : \delta t_n \rightarrow \delta t_{n+1}$, связывающее временные задержки между моментами возбуждения элементов на последовательных периодах внешнего сигнала. Принимая во внимание (14), получаем

$$\delta t_{n+1} = \begin{cases} \delta t_n \frac{(\lambda_1 - \lambda)e^{-T}}{\lambda_2}, & \text{если } \delta t_n < \frac{\delta v_0 e^T}{\lambda_1 - \lambda}, \\ \delta t_n \frac{(\lambda_1 - \lambda)e^{-T}}{\lambda_2} + \tau^* \frac{\lambda}{\lambda_2}, & \text{если } \frac{\delta v_0 e^T}{\lambda_1 - \lambda} \leq \delta t_n \leq \tau^*, \\ \delta t_n \frac{\lambda_1 e^{-T}}{\lambda_2} + \tau^* (1 - e^{-T}) \frac{\lambda}{\lambda_2}, & \text{если } \delta t_n \geq \tau^*. \end{cases} \quad (20)$$

Структура отображения (20) имеет ясный физический смысл. Пусть первый элемент на n -ом периоде внешнего сигнала возбудился раньше второго на время δt_n , тогда и на следующем периоде второй элемент немного задержится. Тогда при достаточно большом отставании второй нейрон не может возбудиться до окончания генерации импульса действия на первом, и задержка между ними составляет ненулевое значение, превышающее время возбуждения τ^* . Однако, если отставание невелико, то он успевает возбудиться до включения ингибирования и постепенно догоняет первый.

Проанализируем возможные режимы динамики системы (4), когда оба ее элемента находятся в режиме «1». На рис. 6 представлено отображение S , а также

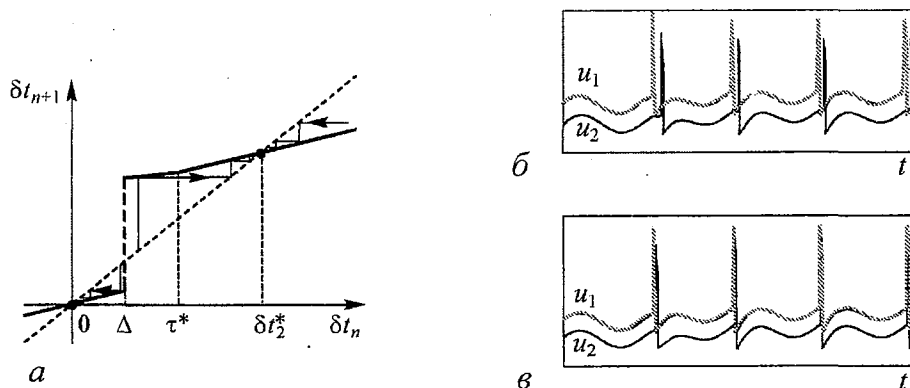


Рис. 6. а – Отображение S ; б – временные реализации $u_{1,2}(t)$ для траектории системы (4), соответствующей нетривиальной неподвижной точке отображения; в – то же для тривиальной неподвижной точки

зависимости $u_{1,2}(t)$, отвечающие различным траекториям этого отображения. Отображения S имеет две устойчивых неподвижных точки, одна из которых тривиальна ($\delta t_1^* = 0$), а вторая соответствует ненулевой задержке между импульсами на элементах

$$\delta t_2^* = \tau^* \frac{\lambda (e^T - 1)}{\lambda_2 e^T - \lambda_1}.$$

Область притяжения тривиальной неподвижной точки отображения (20) определяется неравенством $\delta t < \frac{\delta v_0 e^T}{\lambda_1 - \lambda}$, а точки с координатой δt_2^* - неравенством $\delta t > \frac{\delta v_0 e^T}{\lambda_1 - \lambda}$. Таким образом, если элементы были возбуждены в близкие моменты времени, то они синхронизируются. Если же мы возбудим элементы в системе (4) с достаточной задержкой, то они на всех последующих периодах сигнала будут возбуждаться с задержкой. Заметим, что из симметрии системы задержка может быть как положительной (первый элемент возбуждается раньше), так и отрицательной (первый элемент отстает).

Итак, система (4) характеризуется высокой мультистабильностью: в ней существует *шесть* устойчивых периодических траекторий. Четыре из них отвечают образам $\{00\}$, $\{01\}$, $\{10\}$, $\{11\}$, а две - одновременному хранению двух образов $\{01\}$ и $\{10\}$. На рис. 7 приведена бифуркационная диаграмма для системы (4), иллюстрирующая возникновение режимов $\{01\}/\{10\}$ и $\{10\}/\{01\}$. Показаны зависимости времени задержки δt от λ для различных периодических траекторий. При $\lambda < \lambda_2$ существует только режим $\{11\}$, которому соответствует $\delta t = 0$. При $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$ существуют все три режима, при $\lambda_3 < \lambda < \lambda_4 = \lambda_1 + \frac{\delta v_0 e^T}{\tau^*}$ режимы возбуждения с задержкой исчезают. При $\lambda > \lambda_4$ появляется режим, в котором на последовательных периодах внешнего сигнала значение δt принимает то положительное, то отрицательное значение, то есть отстает то один, то другой элемент. Данный режим обозначен как $\{01\}/\{10\}/\{10\}/\{01\}$.

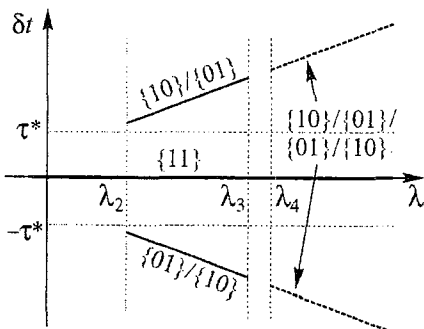


Рис. 7. Зависимость времени задержки от коэффициента обратной связи $\delta t(\lambda)$ для различных режимов динамики системы

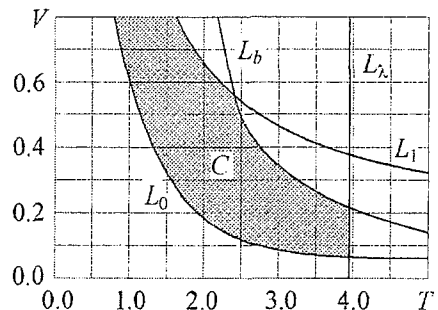


Рис. 8. Область C параметров корректной работы системы и кривые, ограничивающие ее, для параметров $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$, $\beta = 0.05$, $\gamma = 3$

6. Рабочая область параметров

Выделим область параметров внешнего сигнала $C(T, V)$, в которой реализуется динамика системы (4), описанная выше, то есть возможно хранение в ней как одного, так и двух образов. Будем использовать приближение $\varepsilon \rightarrow 0$, при котором $\lambda_1 \approx \lambda_3 \approx \lambda_4$. Область C ограничена кривыми L_0, L_1, L_b и L_λ (рис. 8), которые имеют следующий смысл:

1. Кривая $L_0 = \{T, V \mid \tilde{V} [1 - e^{-T}] = \sigma [1 + e^{-T}] - \tilde{w}_0 [e^{-\beta T} - e^{-T}]\}$. Ниже данной кривой не выполнено условие (12), следовательно, невозможен режим «1».
2. Кривая $L_1 = \{T, V \mid \tilde{V} = \sigma\}$. Выше этой кривой невозможен режим «0».
3. Выше кривой L_b в режиме «1» осуществляется генерация нейронами не отдельных спайков, а их пачек (берстов), что обозначает дублирование информации и является нежелательным эффектом.
4. Кривая $L_\lambda = \{T, V \mid T = T_{\max}\}$. Правее этой кривой $\lambda_3 < \lambda_2$, и, следовательно, не существует интервала значений $\lambda \in (\lambda_2, \lambda_3)$. Это означает, что возможен лишь режим поочередного «отставания» элементов. Значение T_{\max} является решением уравнения

$$(e^{-\beta T_{\max}} - 1) + \frac{\beta}{1 - \beta} (e^{(1-\beta)T_{\max}} - 1) = 2 \frac{\sigma}{w_0}.$$

Заключение

Таким образом, в области параметров C в системе (4) возможно хранение как одного, так и двух образов одновременно. Если одному образу соответствует кластер периодической активности сети, то двум образам соответствуют два кластера, возбуждающиеся с временной задержкой.

Подробно изучив динамику сети (3) при $N = 2$, можно понять, каким образом осуществляется хранение нескольких образов и при большем числе элементов. Так, если мы возбудим одну группу нейронов в (3) одновременно (или почти одновременно), а другую - с небольшой временной задержкой, то элементы внутри обеих групп будут стремиться сблизиться по фазе, так как они находятся под действием одного внешнего сигнала, а обратная связь не успевает включаться, чтобы «отдалить» их по фазе. Различные же группы взаимодействуют как два отдельных элемента, и ингибиторная обратная связь приводит к задержке между моментами их возбуждения.

На примере двух элементов становится понятен недостаток системы, проявляющийся и при больших N . Он заключается в невозможности хранения двух различных образов, в которых есть совпадающие элементы, хранящие «1». Так, невозможно в системе (4) хранение образов {01} и {11} одновременно. Если все же записать в систему два таких образа, то элементы, принадлежащие обоим, будут возбуждаться только в кластере, соответствующем последнему записанному образу. Заметим, что

данный недостаток становится несущественным при больших объемах памяти N , если записываемые образы имеют не слишком много единичных элементов (например, это могут быть видеообразы, представленные *контурами*).

Работа поддержана грантом РФФИ № 03-02-17135.

Библиографический список

1. *Хакен Г., Хакен-Крелль М.* Тайны восприятия. М., 2002
2. *Hebb D.O.* The organization of Behavior. Wiley, New York, 1949.
3. *Xiao-Jing Wang.* Synaptic reverberation underlying mnemonic persistent activity // TRENDS in Neuroscience, Vol. 24. № 8. August 2001.
4. *Николлс Дж.Г., Мартин А.Р., Валлас Б.Дж., Фукс П.А.* От нейрона к мозгу. М., 2003.
5. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
6. *White Olivia L., Lee Daniel D., and Sompolinsky Haim.* Short-term memory in orthogonal neural networks // Phys. Rev. 2004. Vol. 92, № 14.
7. *Lisman John E., Idiart Marco A.* Storage of 7 ± 2 short-term memories in oscillatory subcycles // Science. 1995. Vol. 267, № 1. P. 1512-1514.
8. *Клиньшов В.В., Некоркин В.И.* Модель нейрона с последеполяризацией и краткосрочная память // Изв. вузов. Радиофизика (принята к печати).
9. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in model of nerve membrane // Biophys. J. 1961. Vol. 1. P. 445.
10. *Nagumo J.S., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. of IRF. 1962. Vol 50. P. 2061.
11. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
12. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильязенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНТИ АН СССР. М., 1986, № 5. С. 165.
13. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.

*Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород*

Поступила в редакцию 24.12.2004

DYNAMICS OF SYSTEM OF NEURONS WITH AFTERDEPOLARIZATION AND INHIBITORY FEEDBACK

V.V. Klinshov, V.I. Nekorkin

The dynamics of a model describing a system of neurons with afterdepolarization and inhibitory feedback is investigated. We show that this system under the influence of an oscillatory stimulus can realize functions of short term memory. One or two different informational images can be stored in the system as the clusters of periodical neural activity. The methods of information input, output and erasing are described. Corresponding parameter regions are estimated.



НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ПОДХОДЫ К АНАЛИЗУ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СВЯЗАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ*

А.А. Короновский, О.И. Москаленко, П.В. Попов, А.Е. Храмов

Исследуется синхронизация связанных хаотических осцилляторов. Предложенные новые подходы для выявления синхронного поведения осцилляторов применяются для изучения хаотической синхронизации как в системах с конечным числом степеней свободы, так и в распределенных автоколебательных системах.

Введение

Синхронизация хаотических колебаний является одним из фундаментальных явлений нелинейной теории колебаний и волн. Она проявляется в системах различной природы, например, в физических [1–8] и биологических [9–14] системах. В настоящее время выделяют несколько основных типов синхронизации связанных хаотических осцилляторов, которые изучались (и изучаются) как теоретически, так и экспериментально [15–18].

Режим *lag-синхронизации* хаотических осцилляторов со слегка различающимися значениями управляющих параметров реализуется, когда колебания в одной системе отстают от колебаний в другой на некоторый временной сдвиг τ : $x_1(t + \tau) \cong x_2(t)$. С увеличением параметра связи между хаотическими системами временной сдвиг τ уменьшается и стремится к нулю, а синхронный режим стремится к режиму *полной синхронизации* [19–21], означающему совпадение векторов $x_1(t) \cong x_2(t)$, характеризующих поведение рассматриваемых хаотических динамических систем [22–25].

Обобщенная синхронизация [26–28], введенная в рассмотрение для односторонне связанных динамических систем, означает, что существует некоторая функциональная зависимость между состояниями хаотических осцилляторов, то есть $x_2(t) = F[x_1(t)]$.

*Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1–6 октября 2004, Саратов, Россия.

Наконец, необходимо назвать *фазовую синхронизацию*. Для определения режима фазовой синхронизации вводится в рассмотрение мгновенная фаза $\phi(t)$ хаотического сигнала [15–18, 29, 30]. Фазовая синхронизация означает, что в рассматриваемой системе связанных осцилляторов имеет место совпадение фаз хаотических сигналов, в то время как их амплитуды остаются независимыми.

Также на границах различных типов хаотической синхронизации наблюдаются особые типы перемежающегося синхронного поведения, в частности, перемежающиеся lag– [31] и обобщенная [32] синхронизации.

Все вышеназванные типы синхронизации хаотических осцилляторов взаимосвязаны друг с другом [2, 20, 26, 33], однако полной ясности в этом вопросе до сих пор нет. Для каждого типа хаотической синхронизации существуют свои способы определения факта установления синхронного режима колебаний. Так, режим lag–синхронизации может быть выявлен с помощью функции подобия [19]

$$S^2(\tau) = \frac{\langle |\mathbf{x}_2(t + \tau) - \mathbf{x}_1(t)|^2 \rangle}{\sqrt{\langle |\mathbf{x}_1(t)|^2 \rangle \langle |\mathbf{x}_1(t)|^2 \rangle}}. \quad (1)$$

Если в рассматриваемой системе связанных осцилляторов реализуется режим lag–синхронизации, то функция подобия $S(\tau)$ принимает минимальное значение $\sigma = \min_{\tau} S(\tau) = 0$ для величины τ , соответствующей временному сдвигу между векторами состояния. Понятно, что функция подобия может быть использована и для диагностирования режима полной синхронизации. В этом случае $S(\tau)$ обращается в ноль при $\tau = 0$. Режим полной синхронизации также можно определить непосредственным сравнением векторов состояний взаимодействующих систем $\mathbf{x}_1(t)$ and $\mathbf{x}_2(t)$. Случай режима обобщенной синхронизации более сложный, поскольку функциональная зависимость $F[\cdot]$, связывающая между собой вектора состояния ведущей и ведомой подсистем, может быть весьма сложной. Однако и здесь существуют методы, позволяющие определить явление синхронизации однонаправленно связанных хаотических осцилляторов, например, метод вспомогательной системы [34] или метод ближайших соседей [26, 35]. Режим обобщенной синхронизации может быть также диагностирован с помощью расчета старшей условной ляпуновской экспоненты связанной системы [36].

Наконец, фазовая синхронизация двух связанных хаотических осцилляторов имеет место в том случае, если разность мгновенных фаз $\phi(t)$, введенных для хаотических сигналов $\mathbf{x}_{1,2}(t)$ тем или иным способом, остается ограниченной во времени

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| < \text{const}. \quad (2)$$

Возможно определить среднюю частоту

$$\bar{\Omega} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t)}{t} = \langle \dot{\phi}(t) \rangle, \quad (3)$$

которая должна быть одинаковой для обеих хаотических систем. Таким образом, захват фаз влечет за собой совпадение частот. При этом средняя частота $\bar{\Omega}$, определенная из динамики мгновенной фазы $\phi(t)$ хаотического сигнала, должна совпадать с основной частотой $\Omega_0 = 2\pi f_0$ фурье–спектра. При невыполнении этого условия полученные результаты не могут считаться корректными (более подробно см. [37]).

К сожалению, не существует универсального способа введения мгновенной фазы хаотического сигнала. Для «хороших» динамических систем с относительно простой топологией хаотического аттрактора, фурье-спектр которых содержит одну основную частотную компоненту¹ f_0 , существует несколько методов, позволяющих определить мгновенную фазу $\phi(t)$ хаотического сигнала. Прежде всего, фаза ϕ хаотического сигнала может быть введена как угол в полярной системе координат на плоскости (x, y) [19, 38]

$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \text{ или } \phi = \arctan \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad (4)$$

но при этом все траектории проекции хаотического аттрактора на плоскости (x, y) (или плоскости (\dot{x}, \dot{y})) должны вращаться вокруг начала координат. Иногда возможно использовать преобразование координат, чтобы получить подходящую для введения фазы проекцию [15, 38]. Другим способом определения фазы для хаотической динамической системы является введение в рассмотрение аналитического сигнала [17, 29]

$$\zeta(t) = x(t) + j\tilde{x}(t) = A(t)e^{j\phi(t)}, \quad (5)$$

где функция $\tilde{x}(t)$ является преобразованием Гильберта временной реализации $x(t)$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (6)$$

(P.V. в соотношении (6) означает, что интеграл вычисляется в смысле главного значения). Соответственно фаза $\phi(t)$ хаотического сигнала $x(t)$ определяется из соотношений (5) и (6). Наконец, для определения фазы хаотического сигнала может быть использована поверхность сечения Пуанкаре [17, 29], так что фаза определяется как

$$\phi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad (7)$$

где t_n – момент времени, соответствующий n -му пересечению поверхности сечения Пуанкаре фазовой траекторией. Кроме этого, мгновенная фаза хаотического сигнала может быть введена с помощью вейвлетного преобразования [39], однако при этом должны быть соответствующим образом подобраны вид и параметры вейвлетной функции [40].

Все вышеописанные «классические» подходы дают сходные корректные результаты для «хороших» систем [38]. В то же самое время, эти методы часто приводят к некорректным результатам для систем с плохо определенной фазой (см., например, [15, 37]). Вследствие этого, диагностика режима фазовой синхронизации подобных систем, как правило, затруднена. Иногда наличие фазовой синхронизации может быть выявлено с помощью косвенных наблюдений [38, 41] и измерений [42].

В работах [43–48] были предложены новые подходы детектирования режимов хаотической синхронизации связанных хаотических осцилляторов. Для описания сложных хаотических динамических систем, в фурье-спектре которых отсутствует одна ярко выраженная компонента, предлагается анализировать поведение системы на различных временных масштабах (анализировать синхронизацию отдельных

¹Пример хаотического аттрактора и спектра такой «хорошей» системы рассмотрен ниже.

компонент в спектре). Это позволяет рассматривать различные виды хаотической синхронизации с единых позиций.

В представленной работе проводится систематическое рассмотрение предложенных подходов применительно к изучению совместной динамики, включая явление хаотической синхронизации в связанных динамических системах с малым числом степеней свободы и распределенных автоколебательных системах. Также в работе обсуждаются некоторые общие закономерности установления режимов хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы.

Структура настоящей работы следующая: раздел 1 посвящен диагностированию синхронизации временных масштабов [44] и рассмотрению эффективности этого метода на примере систем с малым числом степеней свободы. Раздел 2 посвящен другому способу диагностирования режима хаотической синхронизации – через исследование синхронизации отдельных спектральных компонент связанных хаотических систем. В разделе 3 изучается синхронизация временных масштабов в распределенных автоколебательных средах. В Заключении представлены выводы и замечания.

1. Синхронизация временных масштабов

Одним из новых и, на наш взгляд, перспективных подходов к диагностированию хаотической синхронизации является подход, основанный на концепции синхронизации временных масштабов [43, 44, 48], которая заключается в следующем. Для некоторого исследуемого сигнала $g(t)$, который, как предполагается, порождается некоторой колебательной системой (это может быть некоторая модельная динамическая система, экспериментальный временной ряд физической, биологической и т.п. системы), вводятся временные масштабы s , соответствующие частотам f фурье-спектра, и ассоциированные с ними фазы $\phi_s(t)$.

Последнее означает, что для хаотического сигнала рассматривается некоторое непрерывное семейство фаз $\phi_s(t)$, которые характеризуют его поведение на различных временных масштабах. Как будет показано далее, любой тип синхронного поведения хаотических осцилляторов будет приводить к тому, что во временных реализациях $x_1(t)$ и $x_2(t)$ взаимодействующих систем обязательно будут присутствовать временные масштабы, на которых будет выполняться условие захвата фаз, аналогичное (2).

Для введения подобного непрерывного множества фаз возможно использовать непрерывное вейвлетное преобразование с комплексным базисом [49–52]. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

1.1. Определение семейства фаз хаотической системы с помощью непрерывного вейвлетного преобразования. Непрерывное вейвлетное преобразование [49–55] временного ряда $x(t)$ осуществляется при помощи свертки

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{s, t_0}^*(t) dt, \quad (8)$$

где $\Psi_{s,t_0}(t)$ – вейвлетная функция, получающаяся из материнского вейвлета $\Psi_0(t)$:

$$\Psi_{s,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-t_0}{s}\right). \quad (9)$$

Временной масштаб s определяет ширину вейвлета $\Psi_{s,t_0}(t)$, t_0 – временной сдвиг вейвлетной функции вдоль оси времени, символ «*» в соотношении (8) означает комплексное сопряжение. Следует отметить, что при проведении вейвлетного анализа понятие «временной масштаб», как правило, используется вместо понятия «частота», традиционного для фурье-преобразования.

В качестве материнского вейвлета был использован вейвлет Морле [56]

$$\Psi_0(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\Omega_0\eta) \exp\left(\frac{-\eta^2}{2}\right) \quad (10)$$

Выбор значения параметра вейвлета $\Omega_0 = 2\pi$ обеспечивает соотношение $s = 1/f$ между временным масштабом s вейвлетного преобразования и частотой f преобразования Фурье [49, 54].

Вейвлетная поверхность

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)| \exp(j\phi(s, t_0)) \quad (11)$$

характеризует поведение системы на каждом временном масштабе s в любой момент времени t_0 . Величина $|W(s, t_0)|$ характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба s в момент времени t_0 . Как правило, в рассмотрение также вводят мгновенное

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2 \quad (12)$$

и интегральное

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0 \quad (13)$$

распределения энергии по временным масштабам.

В то же самое время, естественным образом оказывается определенной фаза

$$\phi_s(t) = \phi(s, t_0) = \arg W(s, t) \quad (14)$$

для каждого временного масштаба s . Иными словами, оказывается возможным характеризовать поведение каждого временного масштаба s с помощью ассоциированной с ним фазы $\phi_s(t)$.

Если существует некоторый диапазон временных масштабов $[s_1; s_2]$, такой, что для любого временного масштаба $s \in [s_1; s_2]$ выполняется условие захвата фаз

$$|\phi_{s_1}(t) - \phi_{s_2}(t)| < \text{const} \quad (15)$$

и доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на этот диапазон, отлична от нуля

$$E_{\text{синх}} = \int_{s_1}^{s_2} \langle E(s) \rangle ds > 0, \quad (16)$$

то временные масштабы $s \in [s_1; s_2]$ являются синхронизованными, а хаотические осцилляторы находятся в режиме *синхронизации временных масштабов* [44, 48]. В соотношении (15) $\phi_{s_{1,2}}(t)$ – непрерывные фазы первого и второго осцилляторов, соответствующие синхронизованным временным масштабам s .

В том случае, если взаимодействующие осцилляторы находятся в режиме хаотической синхронизации, временные реализации $x_1(t)$ и $x_2(t)$ обязательно содержат некоторый диапазон временных масштабов Δs , в которых фазы синхронизованы друг с другом. Для того, чтобы обнаружить синхронизацию временных масштабов, необходимо проверить выполнение условий (15) и (16).

Рассмотрим некоторые примеры использования вышеизложенного подхода к анализу различных синхронных режимов связанных хаотических осцилляторов с малым числом степеней свободы.

Пример 1. Фазовая синхронизация двух связанных систем Ресслера. Анализ фазовой синхронизации и ее связь с синхронизацией временных масштабов обобщается подробно в работах [44, 48, 57].

В качестве модели в работе [48] рассматривалась система двух взаимно связанных систем Ресслера со слегка отличающимися параметрами

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= p + z_{1,2}(x_{1,2} - c), \end{aligned} \quad (17)$$

где $a = 0.165$, $p = 0.2$ и $c = 10$. Управляющие параметры $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta$ определяют расстройку параметров, а ε является параметром связи. В работе [19] было показано, что при выбранных значениях управляющих параметров и значении параметра связи $\varepsilon = 0.05$ в рассматриваемой системе наблюдается фазовая синхронизация.

Для рассматриваемого случая мгновенная фаза хаотического сигнала может быть весьма просто введена с помощью одного из вышеупомянутых традиционных способов (4)–(7). Хаотический аттрактор обладает весьма простыми топологическими свойствами: проекция аттрактора на плоскость (x, y) похожа на сильно «размазанный» предельный цикл, изображающая точка при этом всегда вращается вокруг начала координат (рис. 1, а). Фурье-спектр содержит один основной пик на частоте $f_0 \simeq 0.163$, которая совпадает со средней частотой $\bar{f} = \bar{\Omega}/2\pi$, определяемой из поведения мгновенной фазы $\phi(t)$ с помощью соотношения (3). При этом выполняется критерий эффективности введения фазы, рассмотренный в [37]. Понятно, что в данном случае не возникает никаких сложностей с установлением факта фазовой синхронизации взаимно связанных систем Ресслера (17) с помощью традиционных методов анализа фазовой синхронизации.

Метод, основанный на введении семейства фаз хаотического сигнала, показывает, что временные масштабы $s_1 = s_2 = s_0 = 1/f_0 \simeq 6$ обеих хаотических систем, соответствующие частотам $\bar{\Omega}_{1,2}$, синхронизованы друг с другом, а фазы $\phi_{s_{1,2}}(t)$, ассоциированные с этими временными масштабами, оказываются захваченными, что приводит к выполнению условия (15). Временные масштабы, близкие к временному масштабу s_0 , также синхронизованы, однако диапазон временных масштабов, демонстрирующих синхронную динамику, зависит от величины связи между системами.

В то же самое время существуют такие временные масштабы, которые остаются несинхронизованными. Именно эти временные масштабы определяют различие в поведении связанных хаотических систем.

Поведение различных временных масштабов двух связанных систем Ресслера (17) при $\epsilon = 0.05$ иллюстрирует рис. 1, *b*. Отчетливо видно, что разность фаз $\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)$ на временном масштабе $s_0 = 6$ ограничена для всех значений времени, а временные масштабы $s_0 = 6$ обеих систем, соответствующие основной частоте Фурье-спектра f_0 , синхронизованы друг с другом. Важно также отметить, что спектры мощности $\langle E_{1,2}(s) \rangle$ вейвлетного преобразования близки друг к другу и временные масштабы s , близкие к основному временному масштабу s_0 , которые характеризуются наибольшим значением энергии (например, временной масштаб $s = 5$), также синхронизованы друг с другом. Одновременно существуют временные масштабы, такие как $s = 3.0$, $s = 4.0$, и т.п., динамика которых остается несинхронизованной.

Таким образом, если для взаимно связанных хаотических осцилляторов удастся ввести единственную мгновенную фазу $\phi(t)$ и в системе с ростом параметра связи возникает режим фазовой синхронизации, то одновременно в системе будет наблюдаться и синхронизация временных масштабов.

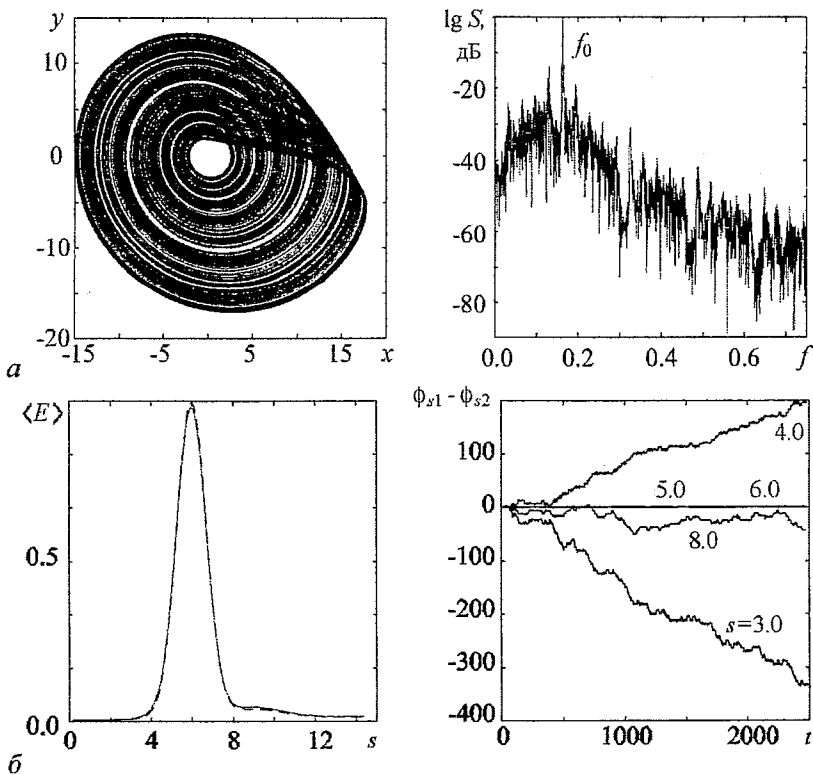


Рис. 1. *a* – хаотический аттрактор и спектр системы Ресслера (17) при $\epsilon = 0$; *b* – нормированный вейвлетный спектр мощности $\langle E(s) \rangle$ первой (сплошная линия) и второй (штриховая линия) систем Ресслера (17), зависимость разности фаз от времени t для различных временных масштабов s при $\epsilon = 0.05$

Пример 2. Синхронизация двух связанных систем Ресслера с плохо определенной фазой. Рассмотрим теперь более сложную задачу, когда корректно ввести мгновенную фазу $\phi(t)$ хаотического сигнала $x(t)$ с помощью традиционных методов (4)–(7) невозможно. Понятно, что в этом случае определить наличие фазовой синхронизации с помощью (2) невозможно, а следовательно, необходимо для диагностики хаотической синхронизации использовать другие, более сложные методы (например, с помощью косвенных измерений [42]). В то же самое время подход, основанный на анализе фазовой динамики временных масштабов, позволяет также просто и эффективно установить факт наличия хаотической синхронизации между системами, как и для ранее рассмотренного в п. 1.1. случая системы с хорошо определенной фазой хаотического сигнала.

Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим две неидентичных взаимно связанных системы Ресслера с плохо определенной фазой (рис. 2, а):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2} + \varepsilon(y_{2,1} - y_{1,2}), \\ \dot{z}_{1,2} &= p + z_{1,2}(x_{1,2} - c), \end{aligned} \quad (18)$$

где ε – параметр связи, $\omega_1 = 0.98$, $\omega_2 = 1.03$. Значения управляющих параметров по аналогии с работой [42] выбраны следующими: $a = 0.22$, $p = 0.1$, $c = 8.5$. Там же с

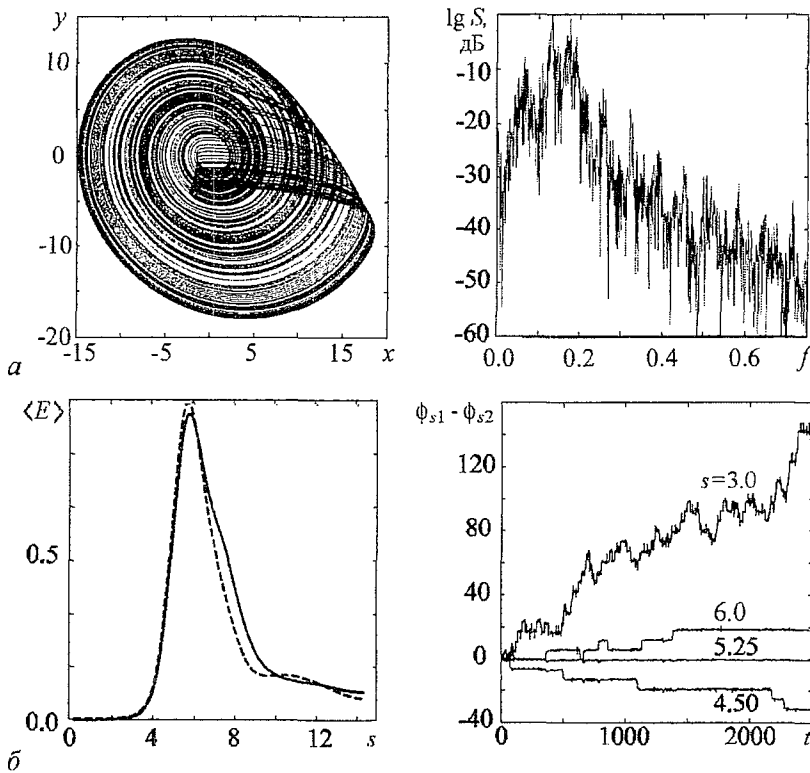


Рис. 2. а – хаотический аттрактор и спектр системы Ресслера (18) при $\varepsilon = 0$; б – нормированный вейвлетный спектр мощности $\langle E(s) \rangle$ для первой (сплошная линия) и второй (штриховая линия) систем Ресслера (18), зависимость разности фаз на различных временных масштабах s от времени t при $\varepsilon = 0.05$

помощью метода косвенных измерений было показано, что при значении параметра связи $\varepsilon = 0.05$ в системе двух связанных систем Ресслера (18) с плохо определенной фазой имеет место хаотическая синхронизация. Анализ поведения временных масштабов дает аналогичный результат (см. подробнее работы [44, 48]): для временных масштабов $s = 5.25$, характеризующихся наибольшим значением энергии в вейвлетном спектре $\langle E(s) \rangle$ наблюдается захват фаз (рис. 2, б), а следовательно, эти временные масштабы синхронизованы друг с другом. Одновременно, ряд других масштабов (например, $s = 4.5, 6.0$ и др.) остаются несинхронизованными, и, соответственно, разность фаз на этих масштабах с течением времени возрастает неограниченно.

Таким образом, анализ поведения различных временных масштабов однозначно свидетельствует о синхронизации связанных хаотических осцилляторов с плохо определенной фазой (18). Очевидно, что механизм возникновения явления синхронизации остается тем же самым, что и в ранее рассмотренном случае (см. п. 1.1.). Синхронизация хаотических осцилляторов обусловлена существованием временных масштабов s , на которых динамика обеих систем синхронна. Таким образом, несмотря на то, что в рассматриваемой системе невозможно корректно определить мгновенную фазу $\phi(t)$ хаотического сигнала, с помощью введенного семейства фаз $\phi_s(t)$ в данном случае можно говорить о существовании режима синхронизации временных масштабов.

Пример 3. Обобщенная синхронизация системы Ресслера и системы Лоренца. Перейдем теперь к рассмотрению другого типа синхронного поведения хаотических осцилляторов – обобщенной синхронизации. В качестве примера ведущего хаотического осциллятора выбрана система Ресслера, а в качестве ведомого – система Лоренца. Уравнения, описывающие поведение ведущей системы, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega y_1 - z_1, \\ \dot{y}_1 &= \omega x_1 + a y_1, \\ \dot{z}_1 &= p + z_1(x_1 - c). \end{aligned} \quad (19)$$

Ведомая система задана уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -\sigma(x_2 - y_2), \\ \dot{y}_2 &= r u(t) - y_2 - u(t) z_2, \\ \dot{z}_2 &= u(t) y_2 - b z_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь управляющий сигнал $u(t)$ и значения управляющих параметров по аналогии с работой [27] выбраны в виде: $u(t) = x_1 + y_1 + z_1$, $p = 2$, $c = 4$, $\omega = 1$, $a = 1$, $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 2.666$. Там же аналитически было показано, что ведомая система (20) является асимптотически стабильной для любого управляющего сигнала $u(t)$ и произвольных начальных условий, и, соответственно, несмотря на то, что ведущая и ведомая системы совершенно различны, в данном случае всегда будет реализовываться режим обобщенной синхронизации. Очевидно, что наличие обобщенной синхронизации может быть также установлено с помощью других методов, например, метода вспомогательной системы [34] или расчета спектра условных ляпуновских экспонент [36].

Вид хаотических аттракторов и спектров мощности однонаправленно связанных систем Ресслера и Лоренца представлены на рис. 3, а и б. Отчетливо видно, что в спектре ведомой системы Лоренца присутствуют компоненты, соответствующие частотам спектра системы Ресслера. Если динамика хаотических осцилляторов синхронизована на некоторых временных масштабах s , то на этих масштабах будет иметь место явление захвата фаз $\phi_{s1,2}(t)$, соответствующих этим масштабам.

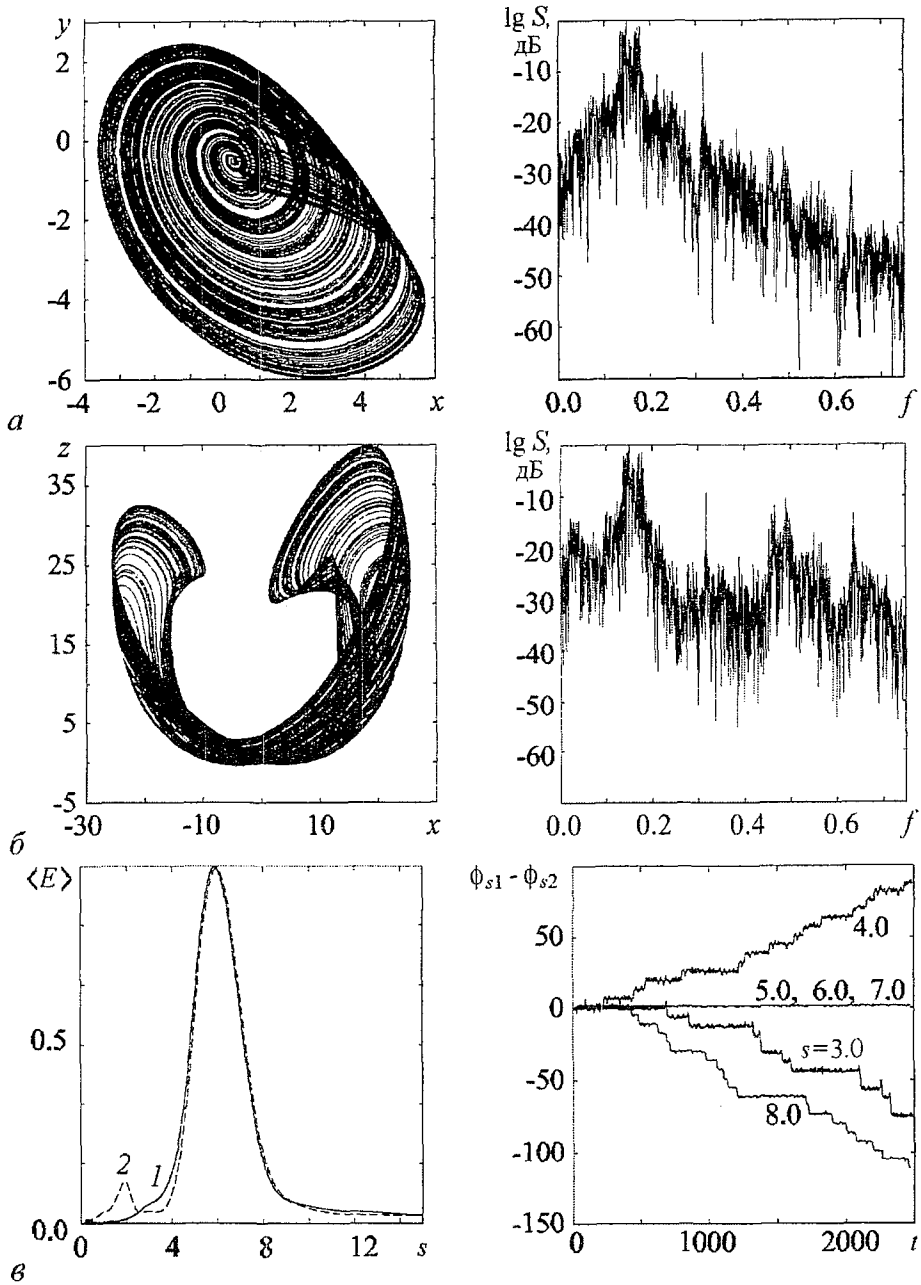


Рис. 3. Хаотический аттрактор и спектр систем Ресслера (19) (а) и Лоренца (20) (б); нормированные вейвлетные спектры мощности $\langle E(s) \rangle$ систем Ресслера (19) (линия 1) и Лоренца (20) (линия 2), разность фаз $\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)$ между связанными системами (20) и (19) (в)

Зависимость разности фаз $\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)$ от времени для различных временных масштабов s показана на рис. 3, в. Отчетливо видно, что существует диапазон временных масштабов ($s \approx 5 \div 7$), динамика систем на которых синхронизована. В то же самое время, как и ранее в случае фазовой синхронизации (ср., например, с рис. 1, б), часть временных масштабов остается несинхронизованной.

Итак, обобщенная синхронизация двух однонаправленно связанных совершенно различных хаотических систем проявляется как синхронное поведение некоторых временных масштабов s , на которых наблюдается явление захвата фаз $\phi_s(t)$. Таким образом, из проведенного рассмотрения следует, что различные типы хаотической синхронизации (такие как фазовая и обобщенная синхронизации) оказываются весьма похожими, если анализировать динамику временных масштабов взаимодействующих хаотических систем. Так, временные масштабы однонаправленно связанных систем Ресслера и Лоренца, демонстрирующих режим обобщенной синхронизации, ведут себя так же, как и временные масштабы двух связанных систем Ресслера (17) в случае фазовой синхронизации, хотя в данном случае невозможно корректно ввести мгновенную фазу $\phi(t)$ хаотического сигнала ни для системы Ресслера, ни для системы Лоренца (см. рис. 3, а и б). Очевидно, что возникает необходимость рассмотреть вопрос о том, как соотносятся друг с другом различные типы хаотической синхронизации и как осуществляются переходы от одного типа синхронного поведения к другому. Использование анализа поведения систем на различных временных масштабах в этом смысле оказывается очень удобным, так как позволяет взглянуть с единых позиций на различные типы хаотической синхронизации. Это проблема детально рассматривается в следующем пункте.

1.2. От несинхронных колебаний к режиму полной синхронизации. В работе [19] было показано, что существуют определенные соотношения между фазовой, lag- и полной синхронизацией в связанных хаотических осцилляторах со слегка различающимися параметрами. При увеличении параметра связи в такой системе сначала осуществляется переход от несинхронных колебаний к режиму фазовой синхронизации². С последующим ростом параметра связи в системе возникает режим lag-синхронизации, а затем, по мере дальнейшего увеличения связи, хаотические осцилляторы стремятся к режиму полной синхронизации, что находит свое отражение в уменьшении практически до нуля временного сдвига τ .

Рассмотрим поведение различных временных масштабов s двух неидентичных взаимно связанных систем Ресслера (18). Если рассматриваемые осцилляторы не находятся в режиме фазовой синхронизации, то их поведение является несинхронизованным на всех временных масштабах s . Рис. 4, а иллюстрирует поведение фаз временных масштабов двух связанных систем Ресслера для достаточно малого параметра связи. Спектры мощности вейвлетного преобразования $\langle E(s) \rangle$ довольно сильно отличаются друг от друга для первой и второй систем (см. подробнее работу [48]), однако максимальное значение энергии в обоих случаях приходится примерно на один и тот же временной масштаб s . Очевидно, что в этом случае разность фаз $\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)$ растет неограниченно на всех временных масштабах. Это озна-

²Последнее имеет место только в том случае, если существует возможность корректно ввести фазы хаотических сигналов, генерируемых каждым из связанных хаотических осцилляторов.

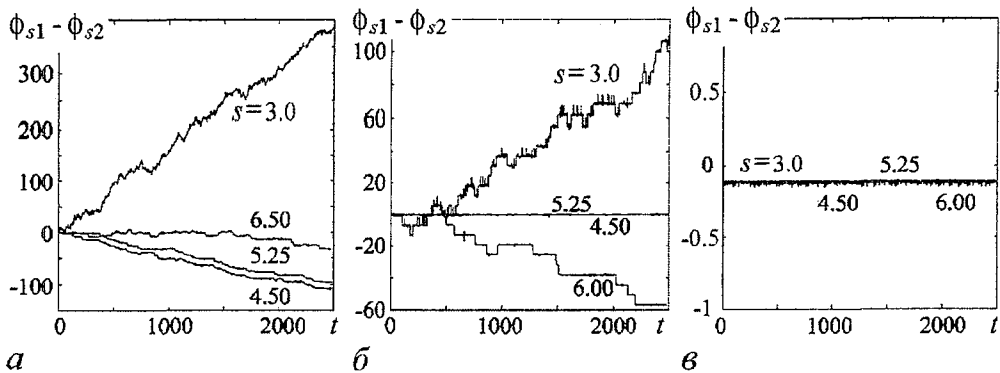


Рис. 4. Зависимость от времени разности фаз для систем Ресслера (18) на различных временных масштабах при увеличении параметра связи ϵ : а – 0.025; б – 0.07; в – 0.25

чает, что в рассматриваемых системах не существует таких временных масштабов, которые были бы синхронизованы друг с другом, следовательно и сами системы являются несинхронизованными.

Как только какие-либо из временных масштабов рассматриваемых динамических систем синхронизуются (например, при увеличении параметра связи между системами), возникает режим фазовой синхронизации. Очевидно, что при этом в первую очередь оказываются синхронизованными те временные масштабы, на которые приходится наибольшая доля энергии вейвлетного спектра $\langle E(s) \rangle$. Остальные временные масштабы по-прежнему остаются рассинхронизованными (см. рис. 2, б).

С дальнейшим увеличением параметра связи между связанными динамическими системами, все большее количество временных масштабов оказываются синхронизованными и можно сказать, что степень синхронизации³ увеличивается. Так, в рассмотренной системе, с дальнейшим увеличением параметра связи (например, при $\epsilon = 0.07$) временные масштабы, бывшие ранее несинхронизованными, синхронизуются (рис. 4, б). Видно, что, например, временные масштабы $s = 4.5$ в обеих системах синхронизованы друг с другом, в отличие от предыдущего случая $\epsilon = 0.05$ (см. рис. 2, б), когда они были несинхронизованы. Количество временных масштабов, на которых наблюдается захват фаз, увеличивается, но в то же самое время некоторые временные масштабы (например, $s = 3.0$ и $s = 6.0$) остаются несинхронизованными, как и ранее.

Возникновение режима lag-синхронизации [19] между осцилляторами означает, что все временные масштабы s двух рассматриваемых систем стали синхронизованными. Действительно, из условия lag-синхронизации $x_1(t - \tau) \simeq x_2(t)$ следует, что $W_1(s, t - \tau) \simeq W_2(t, s)$ и, соответственно, $\Phi_{s1}(t - \tau) \simeq \Phi_{s2}(t)$. Очевидно, что в этом случае для всех временных масштабов s должно выполняться условие захвата фаз (15). При этом вейвлетные спектры обеих систем совпадают друг с другом и захват фаз наблюдается на всех временных масштабах s (рис. 4, в, построенный для $\epsilon = 0.25$). При этом важно отметить, что разность фаз для случая lag-синхронизации не равна нулю и обуславливается величиной временного запаздывания τ .

³В данном случае под «степенью синхронизации» понимается диапазон временных масштабов, на которых связанные системы демонстрируют синхронное поведение, приводящее к захвату фаз (15).

По мере увеличения параметра связи ϵ разность фаз $\Phi_{s1}(t) - \Phi_{s2}(t)$ (также как и время запаздывания τ) уменьшается и стремится к нулю [19] и в системе устанавливается режим полной синхронизации.

Итак, режимы фазовой, lag- и полной синхронизации естественным образом связаны друг с другом и тип синхронного поведения, реализующийся в системе, определяется числом синхронизованных временных масштабов. В то же самое время соотношение между фазовой и обобщенной синхронизацией к настоящему времени до конца не выяснено. Существуют работы (см., например, [2, 20]), в которых рассматривается вопрос о том, как соотносятся между собой эти типы синхронизации. Например, в [20] показано, что две однонаправленно связанные системы Ресслера могут демонстрировать режим обобщенной синхронизации, в то время как фазовая синхронизация не наблюдается. Подобный эффект может быть легко пояснен с помощью анализа поведения временных масштабов. Уравнения, описывающие динамику однонаправленно связанных систем Ресслера, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1, \\
 \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + a y_1, \\
 \dot{z}_1 &= p + z_1(x_1 - c), \\
 \dot{x}_2 &= -\omega_2 y_2 - z_2 + \epsilon(x_1 - x_2), \\
 \dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + a y_2, \\
 \dot{z}_2 &= p + z_2(x_2 - c),
 \end{aligned} \tag{21}$$

где $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ и $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$ – вектора состояний первой (ведущей) и второй (ведомой) систем, соответственно. Значения управляющих параметров выбраны следующими: $\omega_1 = 0.8$, $\omega_2 = 1.0$, $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10$ и $\epsilon = 0.2$. При данных значениях управляющих параметров в системе реализуется режим обобщенной синхронизации (см. подробнее [20]). Почему в данном случае невозможно выявить режим фазовой синхронизации, хотя имеет место обобщенная синхронизация, становится ясно из анализа поведения временных масштабов.

Рассмотрим фурье-спектры связанных хаотических осцилляторов (рис. 5). Видно, что в спектре присутствуют основные спектральные компоненты с частотами $f_1 = 0.125$ и $f_2 = 0.154$ (отмечены на рисунке стрелками). Анализ поведения временных масштабов показывает, что временные масштабы $s_1 = 1/f_1 = 8$ связанных осцилляторов, соответствующие частоте f_1 (и масштабы, близкие к s_1), оказываются синхронизованными, в то время как временные масштабы $s_2 = 1/f_2 \simeq 6.5$ и близкие к ним демонстрируют несинхронное поведение.

Причина такого поведения временных масштабов становится понятной из анализа вейвлетных спектров $\langle E(s) \rangle$ обеих систем. Временной масштаб s_1 ведущей системы Ресслера характеризуется большим значением энергии, в то время как доля энергии, приходящейся на этот масштаб в ведомой системе, достаточно мала. Вследствие этого, ведущая система навязывает свою динамику ведомой системе на временном масштабе s_1 . Напротив, доля энергии, приходящейся на временной масштаб s_2 ведущей системы, мала, а ведомой – велика. Ведущая система не может навязывать свою динамику ведомой системе, и временные масштабы s_2 остаются несинхронизованными.

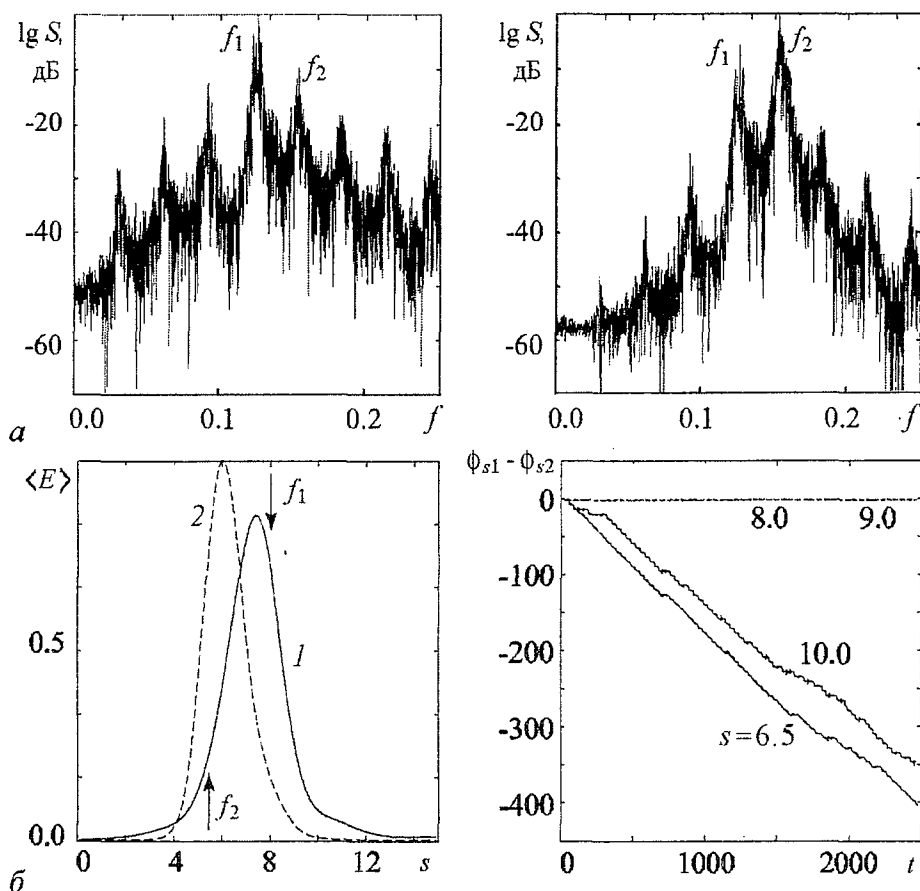


Рис. 5. Фурье-спектры для ведущей и ведомой систем Ресслера (21) при $\epsilon = 0.2$ (а); нормированное распределение энергии в вейвлетном спектре $\langle E(s) \rangle$ для первой (линия 1) и второй (линия 2) систем Ресслера (18), разность фаз $\Phi_{s1}(t) - \Phi_{s2}(t)$ для различных временных масштабов (б)

Итак, обобщенная синхронизация однонаправленно связанных систем Ресслера проявляется как синхронное поведение временных масштабов, точно так же, как до этого было с фазовой синхронизацией. Совершенно понятно, почему в данном случае не наблюдается явление фазовой синхронизации. Из рис. 5 видно, что мгновенная фаза $\Phi_{1,2}(t)$ хаотических сигналов $x_{1,2}(t)$, определенная при помощи традиционных методов (4)–(7), обуславливается частотами f_1 и f_2 , из которых только частоты f_1 оказываются синхронизованными. Соответственно, наблюдение за мгновенной фазой $\Phi_{1,2}(t)$ не даст возможности определить наличие фазовой синхронизации в данном случае.

1.3. Мера синхронизации хаотических осцилляторов. Введение в рассмотрение непрерывного множества временных масштабов s с ассоциированными с ними фазами хаотического сигнала и выделение диапазона синхронных масштабов $\Delta s = s_2 - s_1$ позволяет ввести количественную характеристику меры хаотической синхронизации связанных систем. Она определяется как относительная доля энергии

вейвлетного спектра, приходящаяся на синхронные временные масштабы [43, 44],

$$\gamma = \int_{s_1}^{s_2} \langle E(s) \rangle ds / \int_0^{\infty} \langle E(s) \rangle ds, \quad (22)$$

где $\langle E(s) \rangle$ – интегральное распределение энергии вейвлетного спектра по масштабам, определяемое формулой (13). При $\gamma = 0$ режим хаотической синхронизации связанных подсистем отсутствует. При $\gamma \neq 0$ в системе реализуется режим синхронизации временных масштабов. При $\gamma = 1$ колебания в каждой из подсистем идентичны или сдвинуты друг относительно друга на некоторый интервал времени τ , а системы находятся в режиме lag-синхронизации [15]. Рост γ от 0 до 1 свидетельствует об увеличении доли энергии, приходящейся на синхронные временные масштабы s . Фактически, величина γ характеризует насколько близки друг другу хаотические колебания в каждой из связанных активных сред. Важно отметить, что с точки зрения синхронизации временных масштабов и введенной меры синхронизации, режимы полной синхронизации и lag-синхронизация оказываются идентичными. По сути дела, они являются одним и тем же синхронным режимом.

Если синхронное поведение наблюдается отдельно на нескольких диапазонах временных масштабов Δs_i , то можно ввести меры синхронизации γ_i соответственно для каждого из диапазонов временных масштабов Δs_i , а также интегральную характеристику меры синхронизации по всем диапазонам синхронных временных масштабов

$$\gamma = \sum_i \gamma_i. \quad (23)$$

На рис. 6 приведена зависимость меры хаотической синхронизации γ от параметра связи ϵ для изучавшихся ранее взаимно связанных систем Ресслера (18) (для определенности приведена зависимость для первой из связанных систем). С ростом параметра связи доля энергии колебательного процесса, приходящаяся на синхронизованные масштабы, увеличивается. Для значения параметра связи $\epsilon = 0.039$, соответствующего возникновению режима фазовой синхронизации, относительная доля энергии, приходящаяся на синхронизованные временные масштабы, равна $\gamma = 0.21$. При больших значениях параметра связи ($\epsilon > 0.2$) величина γ стремится к единице. Последнее означает, что вся энергия хаотических автоколебаний приходится на синхронизованные временные масштабы, и в системе, как уже отмечалось выше, устанавливается режим lag-синхронизации.

Аналогичное поведение меры хаотической синхронизации наблюдалось и для других связанных хаотических систем, рассмотренных в статье выше, и мы не приводим их для экономии места (подробнее см. работу [44]).

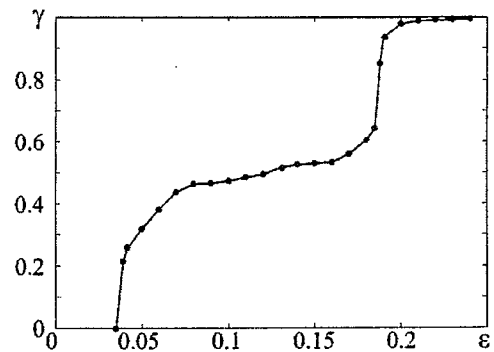


Рис. 6. Зависимость меры синхронизации γ для первой системы Ресслера (18) от параметра связи ϵ

2. Синхронизация спектральных компонент связанных хаотических систем

2.1. Взаимосвязь между фурье- и вейвлетным преобразованиями. Введение множества фаз хаотического сигнала возможно не только при помощи непрерывного вейвлетного преобразования, но с использованием преобразования Фурье.

Так как временной масштаб s , введенный в рассмотрение при помощи непрерывного вейвлетного преобразования, связан с частотой, определяемой при помощи преобразования Фурье (это соотношение $s = 1/f$ выглядит достаточно просто для морлет-вейвлета с параметром $\Omega_0 = 2\pi$), синхронизация хаотических колебаний должна быть также связана с появлением фазового соотношения между частотными компонентами f соответствующих фурье-спектров $S(f)$.

Следует также отметить, что непрерывное вейвлетное преобразование обладает более слабым разрешением в частотном диапазоне, чем преобразование Фурье. Вейвлетное преобразование как бы сглаживает фурье-спектр, при этом динамику временного масштаба s определяет не только спектральная составляющая фурье-спектра $f = 1/s$, но и соседние частотные компоненты, при этом степень их влияния определяется как расположением этих компонент в фурье-спектре, так и их интенсивностью. Таким образом, из того факта, что связанные хаотические осцилляторы синхронизованы на временном масштабе s вейвлетного спектра, еще не следует, что соответствующие частотные компоненты $f = 1/s$ фурье-спектра рассматриваемых систем также синхронизованы.

С целью выявления взаимосвязи между непрерывным вейвлетным преобразованием и преобразованием Фурье рассмотрим несколько модельных примеров.

В качестве первого примера рассмотрим периодический синусоидальный сигнал $f(t) = \sin(\omega t)$. Фурье-спектр такого сигнала характеризуется наличием одного четко выраженного максимума на частоте $f = \omega/2\pi$, равной собственной частоте периодического сигнала. Вейвлетный спектр в данном случае представляет собой колокообразную кривую, имеющую один максимум на временном масштабе $s = 1/f$ (если в качестве материнского вейвлета используется морлет-вейвлет с параметром $\Omega_0 = 2\pi$). В то же самое время ширина вейвлетного спектра намного больше чем у фурье-спектра, что связано с меньшим разрешением вейвлетного преобразования по масштабам. При этом фаза вейвлетного спектра на всех временных масштабах будет меняться периодически с периодом $T = 1/f$. Фурье- и вейвлетный спектры, а также зависимость амплитуды и фазы вейвлетного спектра от времени (для временного масштаба $s = 1$) показаны на рис. 7 для периодического сигнала при $\omega = 2\pi$.

В качестве второго примера рассмотрим периодический сигнал $f(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$, представляющий собой сумму двух синусов с кратными частотами ω_1 и ω_2 . Для определенности выберем $\omega_1 = 2\pi$ и $\omega_2 = 4\pi$. Теперь в фурье-спектре присутствуют два четко выраженных максимума приблизительно одинаковой амплитуды на частотах $f_1 = \omega_1/2\pi$ и $f_2 = \omega_2/2\pi$ (рис. 8, а), а вейвлетный спектр по-прежнему представляет собой колокообразную кривую, но уже с двумя максимумами на временных масштабах $s_1 = 1/f_1$ и $s_2 = 1/f_2$; причем чем больше частота, тем меньше амплитуда вейвлетного спектра на временном масштабе, соответствующем этой частоте (рис. 8, б). Теперь весь диапазон временных масштабов можно разделить на две части, между которыми наблюдается четкая граница: вбли-

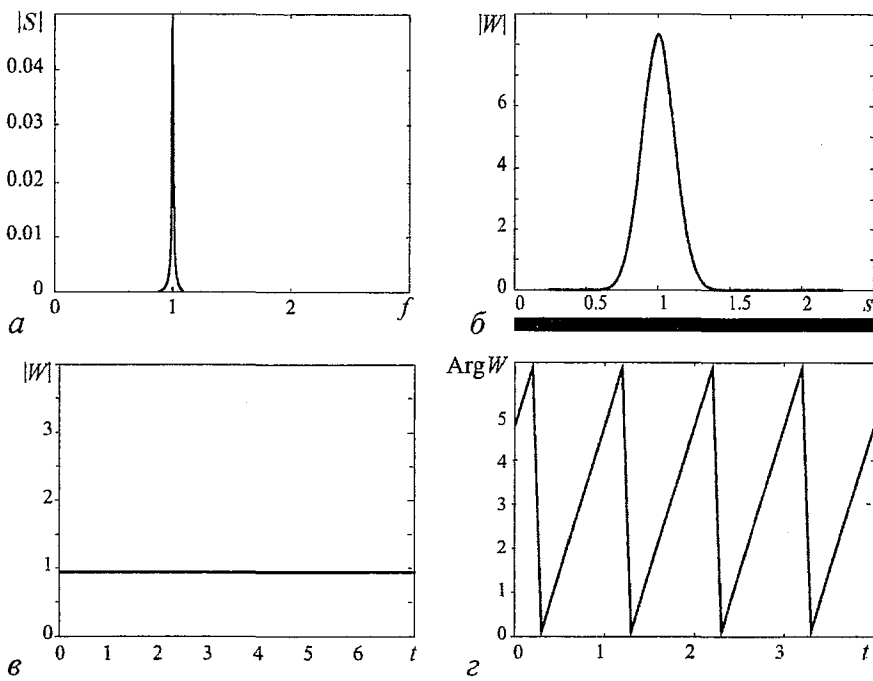


Рис. 7. Фурье- (а) и вейвлетный (б) спектры, а также вейвлетные поверхность (в) и фаза (г) периодического сигнала

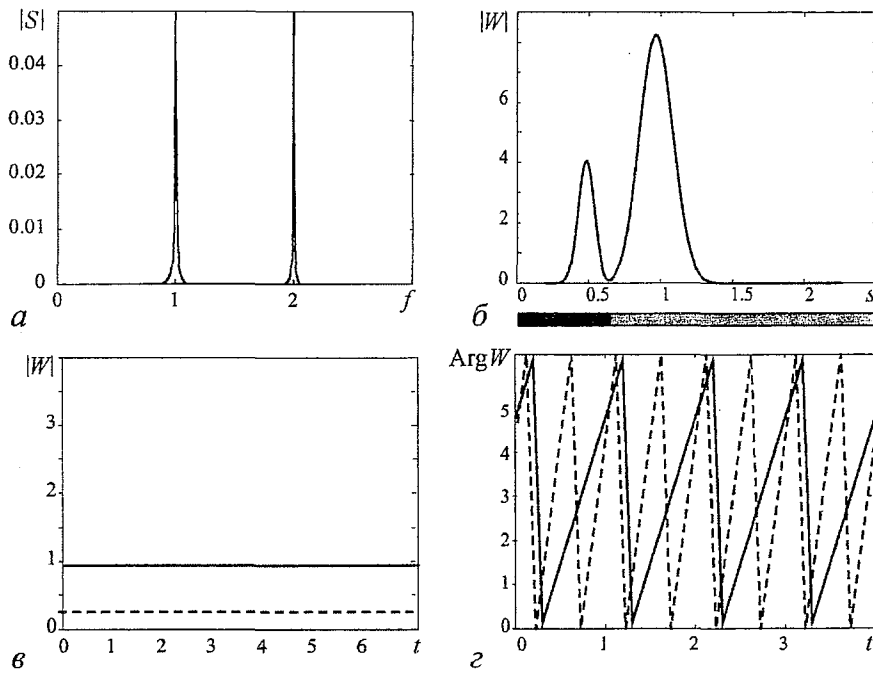


Рис. 8. Фурье- (а) и вейвлетный (б) спектры, а также вейвлетные поверхность (в) и фаза (г) суммы двух периодических сигналов с кратными частотами

зи временного масштаба s_1 (показано серым цветом) фаза меняется периодически с периодом $T_1 = 1/f_1$, вблизи s_2 (показано черным цветом) – с периодом $T_2 = 1/f_2$. Зависимости амплитуды и фазы вейвлетного спектра от времени, приведенные на рис. 8, в, з, соответствуют временным масштабам $s = 1$ (сплошная линия) и $s = 0.4$ (штриховая линия).

Если частоты ω_1 и ω_2 находятся в иррациональном соотношении, причем они расположены друг к другу достаточно близко, то есть в системе наблюдается квазипериодическая динамика, ситуация будет аналогичной. Однако, если сильно уменьшить амплитуду синуса на частоте ω_2 , то фаза будет совершать колебания с периодом $T_2 = 2\pi/\omega_1$ на всех временных масштабах (рис. 9, а). Такая ситуация связана с тем, что амплитуда вейвлетного спектра на временном масштабе s_2 , обусловленная спектральной компонентой с частотой ω_2 , становится столь малой, что не оказывает почти никакого влияния на поведение системы (рис. 9, б). В вейвлетном спектре имеется только один максимум на временном масштабе s_1 . Чтобы проявилась вторая компонента фурье-спектра с частотой ω_2 , нужно увеличивать параметр вейвлета; например, в роли материнского вейвлета использовать морлет-вейвлет с параметром $\Omega_0 = 16$ (вейвлетный спектр для такого случая приведен на рис. 9, в). Конечно, в таком случае не будет наблюдаться такое простое соотношение между частотой и временным масштабом, но, тем не менее, этот метод позволяет достаточно хорошо уловить вторую частоту и наблюдать фазовую динамику с периодами $T_1 = 2\pi/\omega_1$ (показано черным) и $T_2 = 2\pi/\omega_2$ (показано серым) на различных временных масштабах.

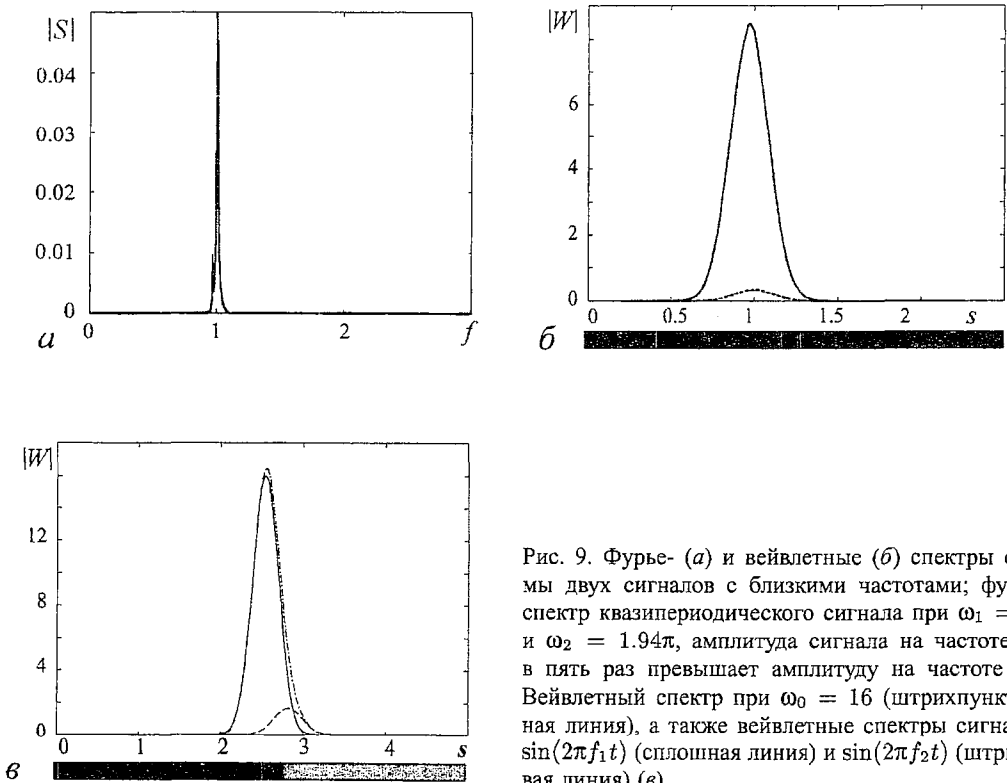


Рис. 9. Фурье- (а) и вейвлетные (б) спектры суммы двух сигналов с близкими частотами; фурье-спектр квазипериодического сигнала при $\omega_1 = 2\pi$ и $\omega_2 = 1.94\pi$, амплитуда сигнала на частоте ω_1 в пять раз превышает амплитуду на частоте ω_2 . Вейвлетный спектр при $\omega_0 = 16$ (штрихпунктирная линия), а также вейвлетные спектры сигналов $\sin(2\pi f_1 t)$ (сплошная линия) и $\sin(2\pi f_2 t)$ (штриховая линия) (в)

2.2. Критерий синхронизации спектральных компонент фурье-спектров связанных динамических систем. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – временные реализации, порождаемые связанными хаотическими осцилляторами. Фурье-спектры соответствующих колебаний будут определяться соотношением

$$S_{1,2}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{1,2}(t)e^{-i2\pi ft} dt. \quad (24)$$

Для каждой спектральной компоненты f фурье-спектра $S(f)$ может быть введена в рассмотрение мгновенная фаза $\phi_f(t) = \phi_{f0} + 2\pi ft$. Однако, в силу того, что фаза $\phi_f(t)$ линейно растет с течением времени, разность фаз взаимодействующих осцилляторов для этой частоты $\phi_{f1}(t) - \phi_{f2}(t) = \phi_{f01} - \phi_{f02}$ оказывается всегда ограниченной, и условие захвата фаз (2), традиционно используемое для определения режима фазовой синхронизации, в данном случае оказывается бесполезным. Очевидно, критерий синхронизации связанных осцилляторов на частотной составляющей f должен быть иным.

В работе [47] в качестве установления критерия возникновения хаотической синхронизации предложен следующий подход. Поскольку в режиме lag-синхронизации поведение взаимодействующих хаотических осцилляторов, как было показано выше, оказывается синхронизованным на всех временных масштабах s вейвлетного преобразования, то следует ожидать, что и все частотные компоненты фурье-спектров рассматриваемых систем тоже должны быть синхронизованными. В этом случае $x_1(t - \tau) \simeq x_2(t)$, и следовательно, в силу (24), должно выполняться соотношение $S_2(f) \simeq S_1(f)e^{i2\pi\tau f}$. Поэтому, в том случае, когда два связанных хаотических осциллятора находятся в режиме lag-синхронизации, их мгновенные фазы, соответствующие спектральной компоненте f фурье-спектров $S_{1,2}(f)$, будут связаны между собой как $\phi_{f2}(t) \simeq \phi_{f1}(t) + 2\pi\tau f$, а разность фаз $\phi_{f2}(t) - \phi_{f1}(t)$ должна подчиняться соотношению

$$\Delta\phi_f = \phi_{f1}(t) - \phi_{f2}(t) = 2\pi\tau f. \quad (25)$$

Таким образом, на плоскости $(f, \Delta\phi_f)$ точки, отвечающие разности фаз спектральных компонент хаотических осцилляторов, находящихся в режиме lag-синхронизации, должны располагаться вдоль прямой, имеющей угловой коэффициент $k = 2\pi\tau$. Разность фаз $\Delta\phi_f$ может быть подсчитана способом, изложенным в работе [58], либо с помощью вычисления взаимной спектральной плотности [59].

Так как при разрушении режима lag-синхронизации (например, с уменьшением параметра связи между осцилляторами) часть временных масштабов s вейвлетных спектров, как мы видели ранее, выходит из синхронизма, то можно ожидать, что и часть спектральных компонент фурье-спектров в режиме синхронизации временных масштабов (но не в режиме lag- или полной синхронизации) также будет рас-синхронизована, что будет проявляться в отклонении точек на плоскости $(f, \Delta\phi_f)$ от прямой линии. При этом разумно полагать, что в первую очередь будут выходить из синхронизма те спектральные компоненты, на долю которых приходится малая доля энергии, тогда как спектральные компоненты в фурье-спектрах, характеризующиеся большей долей энергии, будут оставаться синхронизованными, и соответствующие им точки на плоскости $(f, \Delta\phi_f)$ будут по-прежнему располагаться вдоль прямой

линии. По мере дальнейшего уменьшения параметра связи, все большая часть спектральных компонент будет выходить из состояния синхронизма, но до тех пор, пока наиболее «энергетические» компоненты будут синхронизованы, связанные системы будут демонстрировать режим хаотической синхронизации.

Проиллюстрируем данный подход на примере взаимосвязанных слабонеидентичных систем Ресслера (18).

Рис. 10, *а* иллюстрирует возрастание числа синхронизованных спектральных компонент фурье-спектров $S_{1,2}(f)$ при увеличении параметра связи: $\epsilon = 0.05$ соответствует возникновению режима фазовой синхронизации, $\epsilon = 0.1$ – режиму фазовой синхронизации, $\epsilon = 0.15$ – режиму lag-синхронизации, когда все спектральные компоненты оказываются синхронизованными.

На рис. 10, *б* для значения управляющего параметра $\epsilon = 0.05$ (режим фазовой синхронизации) приведены распределения разности фаз $\Delta\phi_f$ спектральных компонент f , мощность которых превышает заданный уровень L (L – пороговый уровень мощности, начиная с которого учитывались спектральные компоненты f_j фурье-спектров $S_{1,2}(f)$). Видно, что по мере «отсечения» частотных компонент, обладающих малой долей энергии, доля синхронизованных спектральных компонент будет возрастать. Таким образом, при возникновении режима фазовой синхронизации наиболее «энергетичные» спектральные компоненты синхронизируются в первую очередь, и наоборот, при разрушении режима lag-синхронизации первыми выходят из синхронизма спектральные компоненты, на которые приходится малая доля энергии колебаний.

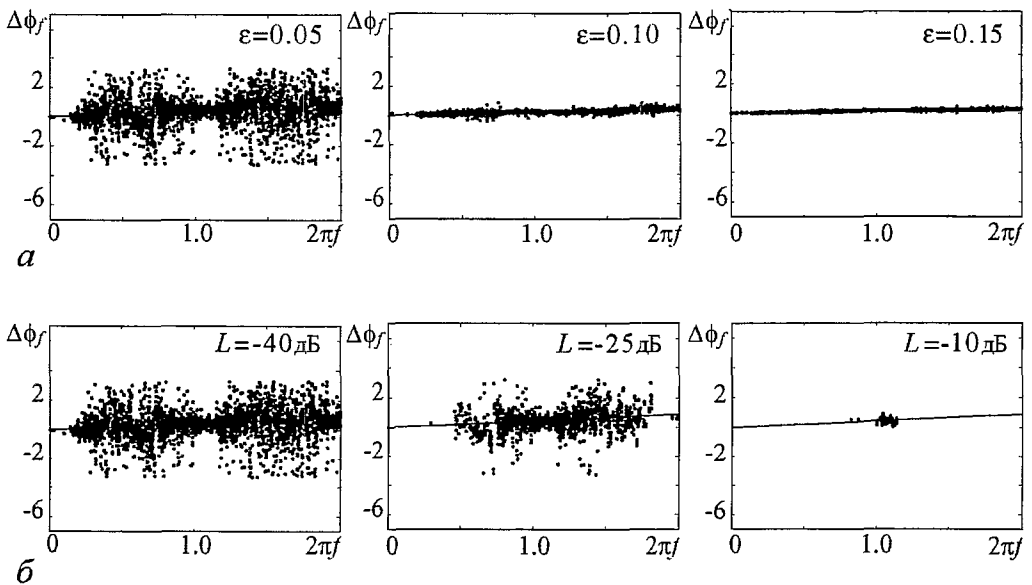


Рис. 10. Разность фаз $\Delta\phi_f$ для различных частотных компонент фурье-спектров систем Ресслера (18): *а* – при увеличении параметра связи ϵ , $L = -40$ дБ; *б* – при увеличении уровня мощности L , $\epsilon = 0.05$

2.3. Количественная характеристика степени хаотической синхронизации. Аналогичная характеристика степени хаотической синхронизации (22) может быть введена и для спектральных компонент. В данном случае меру синхронизации можно определить как долю энергии, приходящуюся на синхронизованные f_s спектральные компоненты,

$$\rho = \frac{\sum_{j_s} S(f_{j_s}) \Delta f}{\sum_j S(f_j) \Delta f}, \quad (26)$$

где суммирование в числителе ведется по синхронизованным f_{j_s} спектральным компонентам фурье-спектров $S(f)$, а в знаменателе – по всем частотным компонентам f_j ; Δf – шаг дискретизации по частоте.

При отсутствии синхронизации все спектральные компоненты рассинхронизованы, и доля энергии ρ , приходящаяся на синхронизованные спектральные компоненты, естественно, равна нулю. Затем, при установлении режима фазовой синхронизации, по мере увеличения параметра связи, увеличивается число спектральных компонент, и соответственно, растет доля энергии, приходящаяся на синхронизованные спектральные компоненты. В тот момент, когда все спектральные компоненты синхронизируются (устанавливается режим lag-синхронизации), доля энергии синхронизованных компонент ρ будет равна единице.

На рис. 11 показана зависимость меры синхронизации ρ от величины параметра связи ε , полученная для рассматриваемой системы (18). Длина временных реализаций $x_{1,2}(t)$, по которым определялись фурье-спектры связанных хаотических осцилляторов, составляла 2000 единиц безразмерного времени (что соответствует примерно 12500 характерным периодам колебаний в системах), шаг дискретизации по времени был выбран $h = 0.2$. Спектральные компоненты фурье-спектров считались синхронизованными, если для разности фаз $\Delta\phi_f$ выполнялось соотношение

$$|\Delta\phi_f - 2\pi\tau f| < \delta, \quad (27)$$

где величина $\delta = 0.04$ характеризует точность, с которой определялось, являются ли рассматриваемые спектральные компоненты f синхронизованными.

Как видно из рис. 11, доля энергии, приходящаяся на синхронизованные частотные компоненты, действительно увеличивается от значений, близких к нулю в случае отсутствия режима хаотической синхронизации, до значений, близких к единице при значениях параметра связи ε , соответствующих режиму lag-синхронизации.

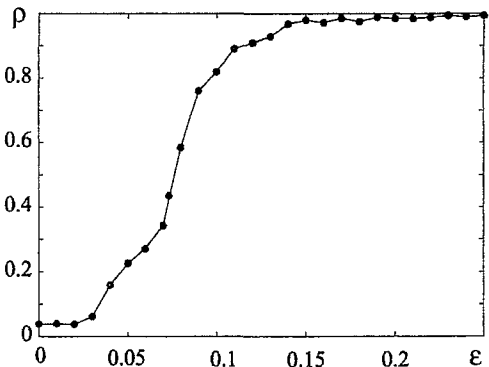


Рис. 11. Зависимость доли энергии ρ , приходящейся на синхронизованные спектральные компоненты фурье-спектров системы (18), от параметра связи ε

2.4. Поведение спектральных компонент в режиме хаотической синхронизации. Теперь рассмотрим, каким образом ведут себя близкие частотные компоненты двух связанных осцилляторов при увеличении связи между ними. В качестве модели осцилляторов, демонстрирующих поведение, близкое к одночастотному, рассмотрим два взаимно связанных генератора Ван дер Поля со слегка различающимися параметрами

$$\ddot{x}_{1,2} - (\lambda - x_{1,2}^2) \dot{x}_{1,2} + \Omega_{1,2}^2 x_{1,2} = \pm \varepsilon (x_{2,1} - x_{1,2}), \quad (28)$$

где $\Omega_{1,2} = \Omega \pm \Delta$ – слегка различающиеся парциальные частоты; $x_{1,2}$ – переменные, описывающие поведение первого и второго автогенераторов, соответственно; ε – параметр связи. Параметр нелинейности $\lambda = 0.1$ был выбран малым для того, чтобы колебания автогенераторов были близки к одночастотным, асимметричный вид связи обеспечивает установление в системе (28) синхронного режима, аналогичного режиму lag-синхронизации в хаотических системах, когда колебания в генераторах происходят на одной частоте, при этом имеет место небольшая разность фаз колебаний, уменьшающаяся с ростом параметра связи.

Используя метод медленно меняющихся амплитуд, будем искать решение (28) в виде $x_{1,2} = A_{1,2} e^{i\omega t} + A_{1,2}^* e^{-i\omega t}$, $\dot{A}_{1,2} e^{i\omega t} + \dot{A}_{1,2}^* e^{-i\omega t} = 0$, где символ «*» означает комплексное сопряжение, ω – частота, на которой происходят колебания в системе (28). Проводя усреднение по быстро изменяющимся переменным, получаем уравнения для комплексных амплитуд

$$\dot{A}_{1,2} = \frac{1}{2} (\lambda - |A|^2) A + i \frac{1}{2\omega} [(\Omega_{1,2}^2 - \omega^2) A_{1,2} \mp \varepsilon (A_{2,1} - A_{1,2})]. \quad (29)$$

Выбирая комплексную амплитуду в виде

$$A_{1,2} = r_{1,2} e^{i\varphi_{1,2}}, \quad (30)$$

получаем уравнения для амплитуд $r_{1,2}$ и фаз $\varphi_{1,2}$ связанных осцилляторов

$$\begin{aligned} \dot{r}_{1,2} &= \frac{1}{2} (\lambda - |r_{1,2}|^2) r_{1,2} \pm \frac{\varepsilon r_{2,1}}{2\omega} \sin(\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1}), \\ \dot{\varphi}_{1,2} &= \frac{\Omega_{1,2}^2 - \omega^2 \pm \varepsilon}{2\omega} \mp \frac{\lambda r_{2,1}}{2\omega r_{1,2}} \cos(\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1}). \end{aligned} \quad (31)$$

Условием синхронных колебаний генераторов (28) на частоте ω является равенство нулю производных $\dot{r}_{1,2}$ и $\dot{\varphi}_{1,2}$. Полагая, что разность фаз колебаний $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ достаточно мала, удерживая члены первого порядка малости по $\Delta\varphi$ в соотношении (31), получаем следующие зависимости для разности фаз

$$\Delta\varphi_{1,2} = \frac{\lambda \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2 \pm 2\sqrt{\Omega\Delta}(\varepsilon + \Omega\Delta)}}{2\varepsilon + 4\Omega\Delta} \quad (32)$$

и частоты

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2 \pm 2\sqrt{\Omega\Delta}(\varepsilon + \Omega\Delta)}, \quad (33)$$

которые соответствуют устойчивому и неустойчивому решениям системы (31). Из соотношений (32), (33) видно, что при малых значениях параметра расстройки Δ

разность фаз $\Delta\phi$ колебаний связанных осцилляторов на частоте ω прямо пропорциональна частоте колебаний ω и обратно пропорциональна параметру связи ε

$$\Delta\phi = \frac{\lambda\omega}{2\varepsilon}. \quad (34)$$

Таким образом, у взаимно связанных осцилляторов со слегка различающимися параметрами происходит захват близких частотных компонент фурье-спектров, при этом разность фаз между ними определяется соотношением (34). Важно подчеркнуть, что временное запаздывание между спектральными компонентами

$$\tau = \frac{\Delta\phi}{\omega} \sim \varepsilon^{-1} \quad (35)$$

не зависит от частоты, а следовательно, оказывается одинаковым для всех спектральных компонент. Именно благодаря этому факту становится возможным установление режима lag-синхронизации хаотических осцилляторов, когда динамика связанных систем на всех частотах отличается на один и тот же сдвиг по времени. Закономерность (35) имеет место для целого ряда динамических систем, и по всей видимости, носит универсальный характер.

На рис. 12 приведена зависимость временного сдвига τ между основными частотными компонентами фурье-спектров взаимодействующих хаотических систем Рёсслера от параметра связи ε . Основная частота в спектре близка к $\omega = 1$ и слегка изменяется с увеличением параметра связи. Отчетливо видно, что после того, как основные спектральные компоненты фурье-спектров взаимодействующих осцилляторов оказываются синхронизованными (что соответствует установлению режима синхронизации временных масштабов), временной сдвиг между ними подчиняется универсальному степенному закону (35). В работах [45, 47] численно было показано, что полученная зависимость временного сдвига между основными частотными компонентами выполняется и для других связанных хаотических систем, которые с ростом параметра связи имеют тенденцию переходить к режимам lag- и полной синхронизации.

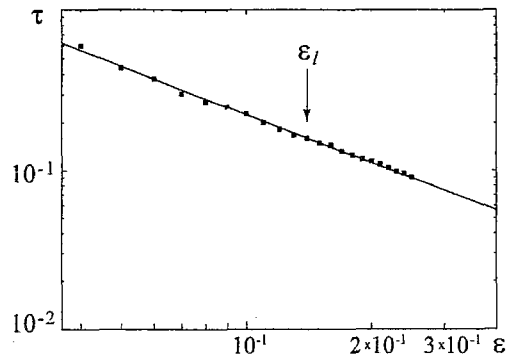


Рис. 12. Зависимость временного сдвига τ между основными компонентами фурье-спектров от параметра связи ε ; стрелкой на рисунке показано значение параметра связи $\varepsilon_l = 0.15$, при котором наступает режим lag-синхронизации

3. Синхронизация временных масштабов в однонаправленно связанных электронных системах с обратной волной и кубичной фазовой нелинейностью

Рассмотрим пример приложения данного метода к анализу хаотической синхронизации распределенной автоколебательной системы. В качестве исследуемой модели рассмотрим систему двух электронно-волновых сред со взаимодействующими встречными электронной и электромагнитной волнами и кубичной фазовой

нелинейностью (модель лампы обратной волны с поперечным полем). Подробно результаты исследования подобной связанной системы представлены в работах [60,61].

Процессы в системе связанных ЛОВ с поперечным полем описываются следующей системой уравнений (см. подробнее работы [62–64], в которых были получены уравнения модели ЛОВ с поперечным полем):

$$\frac{\partial F_{1,2}}{\partial \tau} - \frac{\partial F_{1,2}}{\partial \xi} = -A_{1,2}I_{1,2}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial I_{1,2}}{\partial \xi} + j|I_{1,2}|^2 I_{1,2} = -A_{1,2}F_{1,2}, \quad (37)$$

где индекс «1» соответствует ведущей, а индекс «2» – ведомой активным средам.

Здесь $F = |F| \exp[j\phi_F]$ и $I = |I| \exp[j\phi_I]$ – соответственно безразмерные медленно меняющиеся во времени и пространстве по сравнению с $\exp(j(\hat{\omega}t - \hat{k}\xi))$ амплитуды электромагнитной и электронной волн; τ и ξ – безразмерные время и координата; $\hat{\omega}$ и \hat{k} – частота и волновое число, соответствующие точке пересечения дисперсионных кривых невзаимодействующих электронной и электромагнитной волн; A – безразмерный управляющий параметр, который можно рассматривать как безразмерные длину системы или ток электронного пучка.

Однонаправленная связь между автоколебательными системами записывается в виде нестационарного граничного условия для медленно меняющейся амплитуды поля F_2 ведомой активной среды, при этом граничное условие для первой ведущей активной среды остается неизменным

$$I_1(\xi = 0, \tau) = 0, \quad F_1(\xi = 1.0, \tau) = 0, \quad (38)$$

$$I_2(\xi = 0, \tau) = 0, \quad F_2(\xi = 1.0, \tau) = \rho F_1(\xi = 0.0, \tau), \quad (39)$$

где $\rho = R \exp[j\theta]$ – комплексный коэффициент связи (R – амплитуда и θ – фаза коэффициента связи). Подобное введение связи, когда управляющий сигнал воздействует только на границе распределенной активной системы является естественным и физически просто реализуемым.

Для ведущей и ведомой систем значения управляющих параметров были зафиксированы равными $A_1 = 4.2$ и $A_2 = 4.9$, что соответствует режимам хаотической автомодуляции поля в активных средах. Величина фазы коэффициента связи θ не влияла на процессы в связанной системе и была выбрана постоянной $\theta = \pi$.

Колебания электрического поля ведущей системы характеризуются сплошным спектром, в котором присутствуют два основных временных масштаба s_b (близок к величине $2\pi/\hat{\omega}$, где $\hat{\omega}$ – частота синхронизма линейных невзаимодействующих электронной и электромагнитной волн в распределенной системе взаимодействующих встречных волн) и s_m (определяет характерную частоту низкочастотной модуляции амплитуды поля ведомой системы). С ростом бифуркационного параметра A колебания в системе усложняются и для ведомой системы ($A_2 = 4.9$) в спектре невозможно выделить какие-либо характерные частоты колебаний в активной среде.

С ростом параметра связи R (рост параметра R означает, что мощность внешнего сигнала увеличивается как R^2) спектр генерации неавтономной ведомой системы изменяется. При $R < 0.3$ в спектре ведомой системы на фоне развитого шумового пьедестала появляется слабо выраженная частота, соответствующая основной

частоте f_b в спектре ведущей системы. При больших значениях $R > 0.3$ в спектре ведомой системы возрастает энергия спектральных компонент, соответствующих базовым частотам в спектре мощности ведущей системы. На рис. 13 показаны границы s_1 и s_2 диапазонов синхронизированных временных масштабов на плоскости (R, s) .

Особенностью динамики системы двух связанных электронно-волновых сред является то, что синхронизация временных масштабов хаотических сигналов каждой из подсистем при сравнительно большой амплитуде коэффициента связи R наблюдается для двух диапазонов вблизи базовых временных масштабов $s_b = 1/f_b$ и $s_m = 1/f_m$, соответственно. На рис. 13 соответствующие диапазоны синхронных масштабов показаны для области вблизи базового масштаба s_b внизу, и масштаба s_m – сверху. При величинах амплитуды коэффициента связи $R \in (0, 0.29)$ в системе не наблюдается режим хаотической синхронизации. Последнее означает, что не существует ни одного временного масштаба s , для динамики фазы которого выполнялось бы условие синхронизма (15). С ростом параметра связи R возникает диапазон синхронных временных масштабов $\Delta s = s_2 - s_1$. В связанных активных средах устанавливается режим синхронизации временных масштабов.

Отметим, что с ростом связи R вначале происходит синхронизация временных масштабов вблизи базового масштаба s_b (на которые приходится большая часть энергии вейвлетного спектра) при $R = R_b$ (отмечен на рис. 13), и только с дальнейшим увеличением коэффициента связи при $R = R_m > R_b$ имеет место захват фаз временных масштабов в области базового масштаба s_m , соответствующего частоте модуляции амплитуды выходного поля ЛОВ.

Таким образом, синхронизация временных масштабов хаотических колебаний поля в связанных активных средах наблюдается в первую очередь для тех масштабов s , энергия которых в спектре мощности колебаний значительна. С увеличением связи диапазон временных масштабов, для которых выполняются условия (15) и (16), начинает расширяться. В синхронную динамику начинают вовлекаться масштабы, которые находятся вблизи наиболее интенсивных масштабов и энергия которых тоже значительна. Последнее иллюстрирует рис. 14, на котором показана

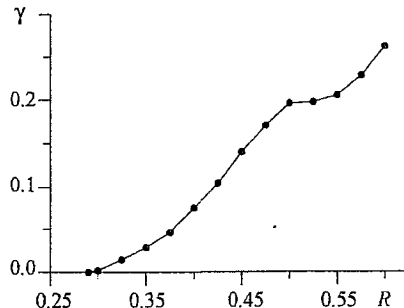
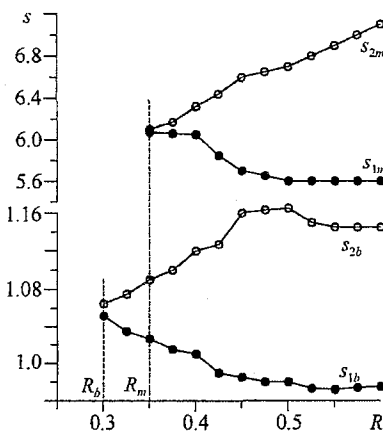


Рис. 13. Диапазоны синхронных временных масштабов $(s_{1b}; s_{2b})$ и $(s_{1m}; s_{2m})$ в зависимости от параметра связи R системы (36), (37)

Рис. 14. Относительная доля энергии γ , приходящаяся на синхронные временные масштабы для системы (36), (37)

интегральная доля энергии γ , приходящаяся на синхронные временные масштабы. Из рисунка видно, что мера синхронизации монотонно растет с ростом амплитуды коэффициента связи. Однако даже при больших величинах R , когда на ведомую активную среду воздействует сигнал ведущей системы весьма значительной мощности ($R^2 \sim 0.3 \div 0.4$), доля энергии, приходящаяся на синхронные масштабы, не превышает величины $\gamma \sim 0.3$.

Таким образом, при хаотической синхронизации двух однонаправленно связанных ЛОВ с поперечным полем при увеличении коэффициента связи R вначале наблюдается синхронизация временных масштабов колебаний вблизи наиболее интенсивного в вейвлетном спектре мощности временного масштаба s_b , близкого к частоте синхронизма электронной и электромагнитной волн. С ростом R происходит увеличение энергии синхронизованных масштабов в области базового масштаба s_b и, одновременно, возникает синхронизация временных масштабов Δs_m , описывающих низкочастотные модуляционные колебания амплитуды поля F в ЛОВ. С дальнейшим увеличением связи рост энергии колебательных процессов, приходящейся на синхронные временные масштабы, происходит только за счет увеличения диапазона синхронных масштабов Δs_m . Данное поведение двух связанных ЛОВ количественно описывает мера взаимной хаотической синхронизации $\gamma = \gamma(R)$.

4. Выводы

Из проведенного рассмотрения видно, что существует очень тесная взаимосвязь между всеми типами хаотической синхронизации. К сожалению, до конца не ясно, каким образом можно различить фазовую⁴ и обобщенную синхронизации, исходя из анализа только динамики временных масштабов, не прибегая к другим методам, а также каково именно соотношение между этими двумя типами хаотической синхронизации. По всей видимости, в ряде случаев оба этих типа эквивалентны, однако данный вопрос требует дальнейшего всестороннего изучения. Обсудим несколько важных аспектов синхронизации временных масштабов.

Во-первых, традиционный подход по выявлению режима фазовой синхронизации, основанный на введении мгновенной фазы $\phi(t)$ хаотического сигнала, является корректным для таких временных рядов, которые характеризуются фурье-спектром с ярко выраженной основной частотой f_0 . В этом случае фаза ϕ_{s_0} , введенная для временного масштаба s_0 , приближенно совпадает с фазой $\phi(t)$ хаотического сигнала, введенной традиционным способом (см. также [40]). Действительно, поскольку остальные частоты (или, можно сказать, остальные временные масштабы) не играют значительной роли в фурье-спектре, фаза $\phi(t)$ хаотического сигнала близка к фазе $\phi_{s_0}(t)$ основной частотной компоненты f_0 (и, соответственно, основного временного масштаба s_0). Очевидно, что в этом случае средние частоты $\bar{f} = \langle \dot{\phi}(t) \rangle / 2\pi$ и $\bar{f}_{s_0} = \langle \dot{\phi}_{s_0}(t) \rangle / 2\pi$ должны совпадать друг с другом и с основной частотой f_0 фурье-

⁴В данном случае под фазовой синхронизацией понимается ситуация, когда с помощью традиционных методов (4)–(7) могут быть корректно введены мгновенные фазы $\phi_{1,2}(t)$ хаотического сигнала, для которых будет выполняться условие захвата фаз (15).

спектра (см. также [37])

$$\bar{f} = \bar{f}_{s0} = f_0. \quad (40)$$

Если же хаотическая временная реализация характеризуется фурье-спектром, в котором отсутствует ярко выраженная основная спектральная компонента (как, например, спектр для системы Ресслера, приведенный на рис. 2), то традиционный подход (4)–(7) уже не работает и может давать некорректные результаты. Очевидно, что в этом случае необходимо рассматривать поведение системы на различных временных масштабах, что в принципе невозможно сделать, используя понятие мгновенной фазы $\phi(t)$ хаотического сигнала, определяемой соотношениями (4)–(7). Предложенный в [44] подход, основанный на введении в рассмотрение непрерывного множества фаз исследуемого сигнала, напротив, может быть использован для любого типа хаотического сигнала.

Во-вторых, предложенный подход может быть использован для анализа экспериментальных данных, поскольку он не требует каких-либо априорных знаний об изучаемой системе. Более того, в ряде случаев применение вейвлетного преобразования может уменьшить влияние шума (см. [49, 65, 66]). Представляется вполне вероятным, что описанная методика может быть полезной и эффективной для анализа временных рядов, порождаемых физическими, биологическими, геологическими и другими системами, такими как описанные в [11, 39, 40].

В-третьих, важно отметить, что анализ поведения системы на всех временных масштабах, основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании, позволяет рассматривать различные типы поведения связанных осцилляторов (полная синхронизация, lag-синхронизация, фазовая синхронизация, асинхронные колебания и т.д.) с единой точки зрения. Очевидно, что количество синхронизованных временных масштабов однозначно определяют тип поведения. Вышеизложенный подход с незначительными изменениями может быть применен для описания поведения динамических систем под внешним (например, гармоническим) воздействием.

В-четвертых, показано, что аналогичные подходы возможны при использовании не вейвлетного, а фурье-анализа при правильном выборе критерия наличия хаотической синхронизации спектральных компонент. Подобный подход позволил установить некоторые общие закономерности поведения связанных динамических систем, в частности, степенной закон изменения временного запаздывания между спектральными компонентами при изменении параметра связи между системами.

Итак, в настоящей работе предложен новый подход для описания явления синхронизации, основанный на рассмотрении динамики систем на различных временных масштабах. По всей видимости, можно говорить о некотором новом типе хаотической синхронизации – синхронизации временных масштабов динамических систем, который тесным образом связан с другими типами синхронизации. Введение в рассмотрение такого типа синхронизации хаотических систем позволяет взглянуть на явление синхронизации с единых позиций. Стоит отметить, что данный подход может быть применен к любым динамическим системам (в том числе и к динамическим системам с плохо определенной фазой) и экспериментальным временным рядам.

Новый подход был проиллюстрирован на примере связанных систем Рёсслера, Рёсслера и Лоренца, а также связанных распределенных сред электронно-волновой природы с обратной волной.

Авторы благодарны чл.-корр. РАН Трубецкову Д.И., профессору Безручко Б.П. и его научной группе за проявленный интерес к работе и плодотворные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05 - 02 - 16273 и 05 - 02 - 16286), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ - 1250.2003.02), а также Научно-образовательного центра «Нелинейная динамика и биофизика» при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)). Авторы благодарят также фонд некоммерческих программ «Династия» и Международный центр фундаментальной физики (Москва) за финансовую поддержку.

Библиографический список

1. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: ИПФ АН СССР, 1989.
2. Parlitz U., Junge L., Lauterborn W. Experimental observation of phase synchronization // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 54, № 2. P. 2115–2117.
3. Tang D.Y., Dykstra R., Hamilton M.W., Heckenberg N.R. // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 57, № 3. P. 3649–3651.
4. Allaria E., Arecchi F.T., Garbo A.D., Meucci R. Synchronization of homoclinic chaos // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86, № 5. P. 791–794.
5. Ticos C.M., Rosa E., Pardo W.B., Walkenstein J.A., Monti M. Experimental real-time phase synchronization of a paced chaotic plasma discharge // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, № 14. P. 2929.
6. Rosa E., Pardo W.B., Ticos C.M., Wakenstein J.A., Monti M. Phase synchronization of chaos in a plasma discharge tube // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 11. P. 2551–2563.
7. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. О синхронизации хаотических автоколебаний в распределённой системе «винтовой электронный поток – встречная электромагнитная волна» // *Радиотехника и электроника*. 2003. Vol. 48, № 1. P. 116–124.
8. Трубецков Д.И., Короновский А.А., Храмов А.Е. Синхронизация распределенных автоколебательных систем электронно-волновой природы с обратной волной // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2004. Vol. XLVII, № 5–6. P. 343–372.
9. Hramov A.E., Koronovskii A.A. Time scale synchronization of chaotic oscillators // *Physica D*. 2005. Vol. 207 (in press).
10. Anishchenko V.S., Balanov A.G., Janson N.B., Igoshcheva N.B., Bordyugov G.V. Entrainment between heart rate and weak nonlinear forcing // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2339–2348.
11. Elson R.C. et al. Synchronous Behavior of Two Coupled Biological Neurons // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81, № 25. P. 5692–5695.

12. *Rulkov N.F.* Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. P. 041922.
13. *Tass P.A. et al.* Synchronization Tomography: A Method for Three-Dimensional Localization of Phase Synchronized Neuronal Populations in the Human Brain using Magnetoencephalography // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90, № 8. P. 088101.
14. *Prokhorov M. et al.* Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular system // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68. P. 041913.
15. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001.
16. *Anshchenko V.S., Astakhov V., Neiman A., Vadivasova T., Schimansky-Geier L.* Non-linear Dynamics of chaotic and stochastic systems. Tutorial and Modern Developments. Springer-Verlag, Heidelberg, 2001.
17. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Phase synchronisation in regular and chaotic systems // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2000. Vol. 10, № 10. P. 2291–2305.
18. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E.* Synchronization of self-oscillations and noise-induced oscillations // *Journal of Communications Technology and Electronics.* 2002. Vol. 47, № 2. P. 117–148.
19. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, № 22. P. 4193–4196.
20. *Zheng Z., Hu G.* Generalized synchronization versus phase synchronization // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 6. P. 7882–7885.
21. *Taherion S., Lai Y.C.* Observability of lag synchronization of coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 59, № 6. P. R6247–R6250.
22. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronisation in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64, № 8. P. 821–824.
23. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Driving systems with chaotic signals // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 44, № 4. P. 2374–2383.
24. *Murali K., Lakshmanan M.* Drive-response scenario of chaos synchronization in identical nonlinear systems // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, № 6. P. 4882–4885.
25. *Murali K., Lakshmanan M.* Transmission of signals by synchronization in a chaotic Van der Pol-Duffing oscillator // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 48, № 3. P. R1624–R1626.
26. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51, № 2. P. 980–994.
27. *Kocarev L., Parlitz U.* Generalized Synchronization, Predictability, and Equivalence of Unidirectionally Coupled Dynamical Systems // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 11. P. 1816–1819.
28. *Pyragas K.* Weak and strong synchronization of chaos // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 5. P. R4508–R4511.
29. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 11. P. 1804–1807.
30. *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurth J.* Phase synchronization effect in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55, № 3. P. 2353–2361.
31. *Boccaletti S., Valladares D.L.* Characterization of intermittent lag synchronization // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 5. P. 7497–7500.

32. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // *Europhysics Letters*. 2005. Vol. 70, № 2. P. 169–175.
33. *Ланда П.С.* К вопросу о частичной синхронизации // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2004. Vol. 12, № 4. P. 48–59.
34. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 53, № 5. P. 4528–4535.
35. *Pecora L.M., Carroll T.L., Heagy J.F.* Statistics for mathematical properties of maps between time series embeddings // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 52, № 4. P. 3420–3439.
36. *Pyragas K.* Conditional Lyapunov exponents from time series // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 56, № 5. P. 5183–5188.
37. *Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Взаимосвязь частотных и фазовых характеристик хаоса. Два критерия синхронизации // *Радиотехника и электроника*. 2004. Vol. 49, № 1. P. 76–82.
38. *Pikovsky A., Rosenblum M., Osipov G., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // *Physica D*. 1997. Vol. 104, № 4. P. 219–238.
39. *Lachaux J.P. et al.* Studying single-trials of the phase synchronization activity in the brain // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2429–2439.
40. *Quiroga R.Q., Kraskov A., Kreuz T., Grassberger P.* Performance of different synchronization measures in real data: a case study on electroencephalographic signals // *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 65. P. 041903.
41. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators // *Europhysics Letters*. 1996. Vol. 34, № 3. P. 165–170.
42. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Locking-based frequency measurement and synchronization of chaotic oscillators with complex dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89, № 26. P. 264102.
43. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Анализ хаотической синхронизации динамических систем с помощью вейвлетного преобразования // *Письма в ЖЭТФ*. 2004. Vol. 79, № 7. P. 391–395.
44. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* An approach to chaotic synchronization // *Chaos*. 2004. Vol. 14, № 3. P. 603–610.
45. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Новый тип универсальности при хаотической синхронизации динамических систем // *Письма в ЖЭТФ*. 2004. Vol. 80, № 1. P. 25–28.
46. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Синхронизация спектральных компонент связанных хаотических осцилляторов // *Письма в ЖЭТФ*. 2004. Vol. 30, № 18. P. 56–64.
47. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I.* Synchronization of spectral components and its regularities in chaotic dynamical systems // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 71, № 5. P. 056204.
48. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Levin Yu.I.* Synchronization of chaotic oscillator time scales // *ЖЭТФ*. 2005. Vol. 127, № 4. P. 886–897.
49. *Koronovskii A.A., Hramov A.E.* Continuous wavelet analysis and its applications (In Russian). Moscow, Fizmatlit. 2003.

50. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. SIAM, 1992.
51. *Kaiser G.* A friendly guide to wavelets. Springer Verlag. 1994.
52. *Torresani B.* Continuous wavelet transform. Paris: Savoire. 1995.
53. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. Vol. 166, № 11. P. 1145.
54. *Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Вейвлетный анализ и его использование для анализа динамики нелинейных динамических систем различной природы // Известия РАН, Сер. физическая. 2000. Vol. 64, № 12. P. 2383–2390.
55. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Введение в непрерывный вейвлетный анализ для специалистов в области нелинейной динамики. Часть 1. Основные положения, численная реализация и модельные сигналы // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Vol. 9, № 4,5. P. 3–43.
56. *Grossman A. and Morlet J.* Decomposition of Hardy function into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. Vol. 15, № 4. P. 273.
57. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Анализ фазовой хаотической синхронизации с помощью непрерывного вейвлетного анализа // Письма в ЖТФ. 2004. Vol. 30, № 14. P. 29–36.
58. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* Synchronization of chaos // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2, № 3. P. 633–644.
59. *Sosnovtseva O. V., Balanov A. G., Vadivasova T. E., Astakhov V. V., Mosekilde E.* Loss of lag synchronization in coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1999 Vol. 60, № 6. P. 6560–6565.
60. *Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* Хаотическая синхронизация однонаправленно связанных электронных сред со встречной волной // ЖТФ. 2005. Vol. 75, № 4. P. 1–9.
61. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V., Rempen I.S.* Chaotic synchronization of coupled electron-wave systems with backward waves // Chaos. 2005. Vol. 15, № 1. P. 013705.
62. *Кузнецов С.П., Четвериков А.П.* К теории лампы обратной волны с поперечным полем // Радиотехника и электроника. 1978. Vol. 23, № 2. P. 385.
63. *Трубецков Д.И., Четвериков А.П.* Автоколебания в распределённых системах «электронный поток — встречная (обратная) электромагнитная волна» // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994 Vol. 2, № 5. P. 3.
64. *Четвериков А.П.* Нелинейная динамика системы взаимодействующих встречных электромагнитной волны и электронной волны с кубичной фазовой нелинейностью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Vol. 2, № 5. P. 46.
65. *Torrence C., Compo G.P.* A practical guide to wavelet analysis // Bulletin of the American Meteorological Society. 1998. Vol. 79, № 1. P. 61–78.
66. *Гусев В.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Применение адаптивных вейвлетных базисов к анализу нелинейных систем с хаотической динамикой // Письма в ЖТФ. 2003. Vol. 29, № 18. P. 61–69.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 15.12.2004

SOME APPROACHES FOR CHAOTIC SYNCHRONIZATION ANALYSIS IN COUPLED DYNAMICAL SYSTEMS

A.A. Koronovskii, O.I. Moskalenko, P.V. Popov, A.E. Hramov

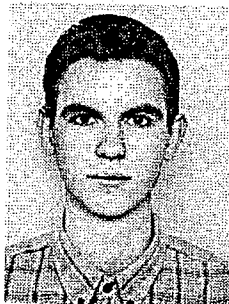
In this paper synchronization in coupled chaotic oscillators is investigated. New approaches proposed to the detection of synchronous behavior of oscillators are applied for the research of chaotic synchronization both in systems with a small number of freedom degrees as in spatially extended self-oscillated systems.



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), кандидат физико-математических наук (1997). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Соавтор монографий «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж». Автор ряда статей в центральной печати.



Москаленко Ольга Игоревна – родилась в 1984 году. Студентка 4 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Научные интересы – взаимосвязь различных типов хаотической синхронизации в сосредоточенных автоколебательных системах. Лауреат фонда некоммерческих программ «Династия» и Международного центра фундаментальной физики. Автор трех статей в отечественных и зарубежных журналах.



Попов Павел Вячеславович – родился в 1984 году. Студент 4 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Научные интересы – синхронизация в распределенных автоколебательных системах электронно-волновой природы. Лауреат Фонда некоммерческих программ «Династия» и Международного центра фундаментальной физики. Автор 3 статей в отечественных и зарубежных журналах.



Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук по специальности радиофизика (1999). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов - радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал в соавторстве с чл.-корр. РАН, профессором Д.И. Трубецковым книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004) и в соавторстве с доцентом А.А. Короновским монографии «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003) и «Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002). E-mail: aeh@cas.ssu.runnet.ru



Изв. вузов «ПНД», т. 12, № 6, 2004

VII Международная школа

**«ХАОТИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ
И ОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУР» – ХАОС-2004**

Саратов, Россия, 1–6 октября 2004

Организаторы

- Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 - Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН
- при поддержке
- Российского фонда фундаментальных исследований
 - Российской академии наук
 - Программы BRNE (грант REC-006 SR006-X1)

Организационный и программный комитет

Д.И. Трубецков, чл.-корр РАН, Саратовский госуниверситет, Саратов, председатель;
В.С. Анищенко, Саратовский госуниверситет, Саратов; В.В. Астахов, Саратовский
госуниверситет, Саратов; Б.П. Безручко, Саратовский госуниверситет, Саратов;
С.Н. Гурбатов, Нижегородский госуниверситет, Нижний Новгород; Г.Т. Гурия, Ге-
матологический научный центр РАМН, Москва; А.С. Дмитриев, Институт радио-
техники и электроники РАН, Москва; Н.А. Ирисова, Институт общей физики РАН,
Москва; А.П. Кузнецов, Саратовское отделение ИРЭ РАН, Саратов; С.П. Кузнецов,
Саратовское отделение ИРЭ РАН, Саратов; В.И. Некоркин, Институт прикладной фи-
зики РАН, Нижний Новгород; Г.-С. Пак, Сеульский национальный университет, Ко-
рея; А.М. Сергеев, чл.-корр. РАН, Институт прикладной физики РАН, Нижний Нов-
город; В.Д. Шалфеев, Нижегородский госуниверситет, Нижний Новгород; В. Эбе-
линг, Гумбольдтский университет, Берлин, Германия.

Из аннотированного отчета

Первая школа по хаотическим колебаниям и образованию структур была проведена в Саратове в 1985 году. Затем она повторялась с интервалом в 3 года и стала традиционной в системе обмена информацией и подготовки научной молодежи. Первоначально школа имела статус Всесоюзной, а в последние годы - переросла в Международную, так как в ней участвуют приглашенные зарубежные специалисты и молодежь. Тематика школы всегда была связана с проблемами нелинейной динамики, а акцент смещался в зависимости от направлений, признанных на момент организации важнейшими. Так, первые школы концентрировали внимание на чисто детерминированных системах, теории динамического хаоса, на простых объектах, моделях малой размерности, приложениях в области радиофизики и электроники. В программе 7-й школы уделено больше внимания распределенным системам и пространственным ансамблям, на объектах и моделях с шумами, что значительно ближе к реальным ситуациям. Усилено направление, связанное с поиском приложений результатов фундаментальных исследований, причём акцент был сделан на наиболее сложные объекты, включая человека: рассмотрены задачи использования методов нелинейной динамики в исследовательской практике, при этом не отбрасывались и традиционные для нелинейной динамики объекты и цели.

В работе школы приняли участие 124 человека из 23 научных организаций, половина участников молодые ученые до 35 лет, 2 чл.-корр. РАН, 20 профессорско-докторов наук, около 30 кандидатов наук. Кроме российских специалистов в работе школы участвовали представители Германии, Италии, Казахстана, Латвии. Прочитано 20 лекций и 20 устных докладов, экспонировано 72 стендовых доклада.

Наиболее представленными в докладах на школе оказались следующие тематики (перечисляются по мере убывания числа докладов):

- синхронизация хаотических систем;
- распределенные системы;
- влияние шумов на процессы в нелинейных системах;
- фундаментальные проблемы нелинейной динамики;
- приложения в нейродинамике;
- приложения в кардиологии;
- приложения в других областях биологии, в климатологии, механике, и т.д.;
- приложения в системах передачи информации, генерации сигналов и т.п.;
- педагогические проблемы.

Результаты обсуждений и дискуссий позволяют заключить, что российские ученые продолжают занимать ведущие позиции в решении перечисленных актуальных проблем нелинейной динамики. Решаемые задачи интересуют научную молодежь. Можно заметить некоторое географическое смещение центра тяжести работ в направлении школы в сторону провинции, что объясняется более интенсивным оттоком научных кадров (в том числе молодых) за границу и в ненаучную сферу деятельности из столицы.

Оценка обеспеченности данного научного направления научными кадрами и научным оборудованием не отличается от оценки положения фундаментальной науки в стране. Тематика докладов и их научный уровень позволяет говорить о хорошей степени соответствия тематики проектов, поддержанных РФФИ, и перечня выделенных актуальных проблем.

Оргкомитет

Рабочая программа

Пятница, 1 октября 2004

Лекции

- 9.00 Регистрация
14.00 Открытие
15.00 *Сергеев А.М. (ИПФ РАН, Нижний Новгород)* «Инжиниринг» электронных волновых пакетов и управление нелинейными свойствами атомов в сверхсильных полях
16.00 *Ланда П.С. (МГУ, Москва)* Турбулентность в струйных течениях: что это такое?

Суббота, 2 октября 2004

Лекции

- 9.00 *Анищенко В.С. (СГУ, Саратов)* Влияние флуктуаций на статистические свойства хаоса
9.55 *Сухоруков А.П. (МГУ, Москва)* Нелинейные волны в Бозе-Эйнштейновском конденсате
11.10 *Кузнецов С.П. (СО ИРЭ РАН, Саратов)* Новые явления между порядком и хаосом
12.05 *Макаренко Н.Г. (Институт математики, Алма-Ата, Казахстан)* Методы математической морфологии, вычислительной геометрии и топологии в анализе пространственно-временного хаоса
15.30 *Ланда П.С. (МГУ, Москва)* О частичной (в частности, фазовой) синхронизации

Стендовые доклады

Устные доклады

- 15.50 *Chechin G.M., Sakhnenko V.P. (Rostov State University, Rostov-on-Don)* Bushes of modes as new dynamical objects in nonlinear physical systems with discrete symmetry
16.10 *Постников Е.Б. (Курский ГУ), Рябов А.Б., Лоскутов А.Ю. (МГУ, Москва)* Использование дифференциальных уравнений в частных производных для изучения иррегулярных структур путем непрерывного вейвлет-преобразования
16.30 *Гурия Г.Т. (Гематологический научный центр РАМН, Москва)* Хаотические и регулярные соображения в педагогике
16.50 *Сейранян А.П., Майлыбаев А.А., Кириллов О.Н. (Институт механики МГУ, Москва)* Многопараметрическая теория устойчивости с приложениями в Механике
17.10 *Матросов В.В. (ННГУ, Нижний Новгород)* Хаотические колебания в генераторах с фазовым управлением
17.30 *Репин Б.Г., Дубинов А.Е. (Российский Федеральный Ядерный Центр - ВНИИ экспериментальной физики, г. Саров, Нижегородская обл.)* Исследование режимов фазировки трех виркаторов в рамках модели связанных осцилляторов Ван дер Поля
17.50 *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л. В. (СО ИРЭ РАН, Саратов)* Картина синхронизации короткими импульсами в системе с бифуркацией слияния и исчезновения устойчивого и неустойчивого циклов
20.00 Дискуссия

Воскресенье, 3 октября 2004

Лекции

- 9.00 *Дмитриев А.С. (ИРЭ РАН, Москва)* Информационные хаотические системы
9.55 *Шалфеев В.Д. (ННГУ, Нижний Новгород)* Нелинейная динамика фазовых систем
11.10 *Rosenblum M.G. (University of Potsdam, Germany)* Analysis of coupled systems from data
12.05 *Zaks M.A. (Humboldt University, Berlin, Germany)* Fractal Fourier spectra in nonlinear dynamics
14.00 Культурная программа

Понедельник, 4 октября 2004

Лекции

- 9.00 *Voccaletti S.* (INOA, Florence, Italy) Phase synchronization analysis of epileptic dynamics
- 9.55 *Кузнецова Г.Д.* (Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН, Москва) Проблемы анализа электрической активности мозга - взгляд нейрофизиолога
- 11.10 *Некоркин В.И.* (ИПФ РАН, Нижний Новгород) Колебания и волны в нейродинамике
- 12.05 *Постнов Д.Э.* (СГУ, Саратов) Когерентный резонанс: приложения в физике и биологии

Стендовые доклады

Устные доклады

- 15.30 *Волков Е.И.* (Физический институт РАН им. П.Н. Лебедева, Москва) Образование предельных циклов в цепочке одинаковых релаксационных осцилляторов, обменивающихся ингибитором, вблизи порога генерации автоколебаний
- 15.50 *Казанцев В.Б.* (ИПФ РАН, Нижний Новгород) Интегро-резонансные свойства нейронных сетей с подпороговыми колебаниями
- 16.10 *Клиньшиов В.В., Некоркин В.И.* (ИПФ РАН, Нижний Новгород) Динамика модели нейрона с последеполяризацией
- 16.30 *Габова А.В., Боснякова Д.Ю., Босняков М.С., Шацкова А.Б., Кузнецова Г.Д.* (Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН, Москва) Частотно-временная структура разрядов пик – волна генетической absence-эпилепсии
- 16.50 *Chavez M., Martinerie J., Voccaletti S.* (LENA-CNRS-UPR-640, Paris, France; INOA, Florence, Italy) On the intrinsic time scales involved in synchronization of epileptic brain activities
- 17.10 *Смирнов Д.А.* (СО ИРЭ РАН, Саратов), *Анджесак Р.Г.* (Исследовательский центр Юлих, Германия) Определение слабой направленной связи по временным рядам: моделирование фазовой динамики и анализ в пространстве состояний
- 17.30 *Нерода В.Я.* (Московский государственный институт электроники и математики) Анализ дефектообразования в информационно-управляющих системах методами синергетики
- 17.50 *Жанабаев З.Ж.* (Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алма-Ата, Казахстан) Информационные критерии степени самоорганизации открытых систем

Вторник, 5 октября 2004

Лекции

- 9.00 *Флейшман А.Н., Мочалов С.П., Клещенко С.А., Карпенко С.В.* (ГУ НИИ комплексных проблем гигиены и профессиональных заболеваний СО РАМН, Новокузнецк) Механизмы образования и прогностическая значимость предельных циклов variability ритма сердца
- 9.55 *Лоскутов А.Ю.* (МГУ, Москва) Подавление пространственно-временного хаоса: приложение к кардиологии
- 11.10 *Короновский А.А., Храмов А.Е.* (СГУ, Саратов) Новый подход к хаотической синхронизации: синхронизация временных масштабов
- 12.05 *Вадивасова Т.Е.* (СГУ, Саратов) Специфические проблемы фазовой динамики зашумленных и хаотических систем

Стендовые доклады

Устные доклады

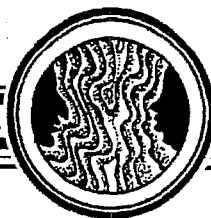
- 15.30 *Шараевский Ю.П., Малюгина М.А. (СГУ, Саратов)* Нелинейные волны в ферромагнитных плёнках
- 15.50 *Короновский А.А., Ремпен И.С., Храмов А.Е. (СГУ, Саратов)* Распределенные нелинейные активные системы: управление динамическими режимами
- 16.10 *Павлов А.Н. (СГУ, Саратов), Сосновцева О.В. (Датский технический университет, Лонгбю, Дания)* Эффекты модуляции в динамике нефронов
- 16.30 *Андреев Ю.В., Коротеев М.В. (ИРЭ РАН, Москва)* Динамические характеристики речевых сигналов
- 16.50 *Ковригин Д.А. (НФ ИМАШ РАН, Нижний Новгород), Можен Ж.А. (Институт Пьера и Марии Кюри, Париж, Франция), А.И. Потапов (НФ ИМАШ РАН, Нижний Новгород)* Об устойчивости «давыдовских» солитонов
- 17.10 *Асланов С.К. (Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина)* Теория образования регулярных структур в процессах горения и взрыва
- 17.30 *Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н., Шергин Д.А. (Томский государственный университет)* Пространственный детерминированный хаос как понятие и объект исследования

Среда, 6 октября 2004

Лекции

- 9.00 *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Рыскин Н.М. (СГУ, Саратов)* Теоретическое и экспериментальное исследование феноменов нелинейной динамики в электронных приборах СВЧ
- 9.55 *Безручко Б.П. (СГУ, Саратов)* Реконструкция модельных уравнений по временным рядам: проблемы, пути их решения, приложения

Заккрытие школы



Изв. вузов «ПНД», т. 12, № 6, 2004

УДК 537.86 (470.341-25) + 929 Миллер



Не жизни жаль с томительным дыханьем.
 Что жизнь и смерть? Лишь жаль того огня,
 Что просиял над целым мирозданьем,
 И вдаль идет и плачет, уходя.

Ф. Тютчев

В субботу 18 сентября 2004 года умер от сердечного приступа Михаил Адольфович Миллер. Ушел из жизни удивительный человек, много значивший для всего радиофизического и нелинейного сообщества. Он был Ученым, Учителем, Человеком для всех, кто знал его. Жизнь не баловала Михаила Адольфовича, периодически подвергая тяжелым испытаниям, но он продолжал светить людям своим отношением к науке, своими лекциями, своими книгами, согревать их своими выдумками и юмором, поддерживать в трудную минуту просто тем, что он был. Михаил Адольфович был замечательным другом, свидетельством чему два издания книги о М.Л. Левине. Такие, как Михаил Адольфович, определяли неумолимо уходящую эпоху интеллигенции.

Для пишущего эти строки смерть Михаила Адольфовича – личная потеря. Наши многолетние отношения трудно четко охарактеризовать, но главное – они были уважительными и добрыми. Михаил Адольфович был настоящим чудом, понять которое и написать о нем захотят, возможно, многие. Лучше всех мог бы сделать это (и отчасти сделал и хотел продолжить свое жизнеописание) он сам. Ниже приводятся небольшие отрывки из его книг и эссе, надписи на книгах, поздравления и выдержки из писем.

Д.И. Трубецков

Дорогому Диме! Эта странная лекция –
соединение выпадов, блажи и каких-то
загадочных намеков.

Миллер 21.09.1993

Миллер М. Волны, волны, волны...¹ «... Третий аргумент, демонстрирующий синусоидальную функцию как некоторую уникальную зависимость, может быть отнесен к категории антропных. Боюсь, что для большинства присутствующих эти доводы покажутся несколько неожиданными, а то и просто странными извлечениями из научной фантастики. Но я склонен рассматривать их вполне серьезно.

Современная концепция Происхождения Человеческого Интеллекта (наивысшего достижения Homo Sapiens?) допускает две «субконцепции»: прямую и обратную. (Кстати говоря, почти все задачи, с которыми нам приходится встречаться и в науке и в жизни, могут быть разделены на две такие же группы!)

Традиционно мыслящий научный люд считает Природу созданной либо Всевышним, либо Игрой Обстоятельств и изучает законы Природы, рассматривая их как «спущенные сверху директивы». Типичный пример типичной прямой задачи: задана Вселенная и необходимо найти объяснение Жизни в ней (в частности, Интеллекта).

Обратная задача противоположна. Единственное изначальное условие состоит в факте существования Интеллекта. И требуется подобрать подходящую Вселенную, которая управлялась бы подходящими (тоже подобранными) законами. Это и есть известный антропный принцип...

Мир, в котором нас поселили, обладает хорошим универсальным свойством: описание любого процесса, любого движения, любого явления допускает приближительную линеаризацию в малом (in Kleine!). Следовательно, в пределах такого приближения строго соблюдается Принцип Суперпозиции (Принцип Сложения движений!). И не просто соблюдается – он господствует! Вне этого утверждения мы не в состоянии представить себе ни арифметические, ни какие-нибудь обычные логические операции. Я считаю (и не я один), что «явление суперпозиции явлений» (!) является необходимым (!) условием (!) создания Интеллекта!

Конечно, это утверждение не относится ни к разряду Абсолютных Истин, ни даже к разряду Теорем. Один из моих товарищей по работе на вопрос «Что ты делаешь?» вдохновенно отвечал (вызывая веселую сумятицу в рядах своих друзей): «Что я делаю? Я – красив!». Так вот и мы можем выдать такой же ответ! Как можно оценить это правило? Что оно делает? Оно красиво, и всё!...

Я не знаю истинного автора выдающегося афоризма на эту тему. Сам я услышал его от одного научного работника, посещавшего мои еженедельные лекции. Он говаривал: «Все линейное от Бога, а нелинейное от Лукавого!»...

Дорогой Д.И.! Спасибо за отклик и за прощальные стихи В.К. (имеется в виду Валерий Канер. – *Д.И. Трубецков*). И, конечно, за статью о Hugh, кот[орую] я не видел (увы!), хотя в своей радио-лекции² написал о нем вполне в духе этой интересной заметки. Сейчас я мечтаю написать очерк об АД Сахарове, но всего и всех боюсь (включая себя). Мы уже практически подготовили второе издание «Памяти МЛ Левина», и, если не рухнет вся система книгопечатания, она выйдет в 99 году. А еще С.Н. Гурбатов и К^о затеяли книгу о документ[альной] истории Радио в Горьком типа той, что написал наш ректор А.Ф. Хохлов

¹Препринт № 332. Нижний Новгород, 1993

²Миллер М. Об изобретении радио... и не только. Лекция, прочитанная на открытии физмат-школы в Зеленом городе 4 августа 1997 года. Н.Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1997. 56 с.; Изв. вузов ПНД, 1999. Т. 7, № 1. С. 112; № 2, 3. С. 138.

«Трижды (!) рожденный университет» (не присылал ли он Вам ее?). М[ожет] б[ыть], аналогичные материалы по Саратову есть у Вас – можете при случае передать нам сведения о них. И еще – еще я увидел, что наша статья «Фарадей – Максвелл и т.д.» вышла в № 2 1996 года. Но почта не доставила нам экз[емпляр] этого журнала, м[ожет] б[ыть] Ваши и ваши малые помощники пришлют нам ксерокс оттиска. Простите за ? – забыл за что! На всякий случай!

С приветом,

Миллер. 5.09.1998

Миллер М. Об изобретении радио... и не только. Концовка. «Итак, я заканчиваю эту многоплановую лекцию, исполненную в манере джазового свинга. Теперь, на ее исходе вы можете оценить название «Об изобретении радио... и не только»...

Вот она, моя лекционная «ключевка». Манера свинга... Предыдущие «талалушки»... Различные тактики думания... Задачи на предсказания, на сходства, на свойства... Левоправость в природе и в мышлении... Лекторы-педанты и лекторы-безалаберники... Их меловые характеристики... Юбилеи по круглым датам... Десятичная система, высосанная из пальцев или законов сохранения? Привет инопланетянам. Величие и отличие 20-го века... Планета Земля стала излучателем радиоволн... Праздник нового тысячелетия – 1-го января нулевого года или 1-го января первого года? Гонка открытий в конце 19-го века: электрон, фотон, радио, рентген, радиоактивность... Акустические и оптические средства связи в Природе... Бритва Оккама... Великое максвелловское объединение... Experimentum crucis Герца... Проволочная телеграфия – тоже ведь с помощью волн... Юридические права на мысль... Ложные послылы и непреложные результаты... Кодексы изобретательства у нас и у них... Запреты на негуманные достижения... Человеческий фактор в законодательствах... Творцы и дельцы... Неудачное слово «Жигули» и удачное слово «радио»... Как трудно быть одиночно первым... И как нетрудно прозевать удачу... Гонка изобретателей радио... Герц, Юз, Бранли, Лодж, Крукс, Тесла, Попов, Маркони, Браун... Особенности национальной охоты... Россия – родина слонов... Науки военные и науки гражданские... Мытарства профессора Попова... Оценка удивлений числом мурашек!...»

Дарственные надписи на книгах «Михаил Львович Левин. Жизнь, воспоминания, творчество»³

Дорогой Дима! Примите в память и на память о моем учителе и друге, который вместе с нами жил по углам нашего «родного» треугольника.

Миллер 1.09.1995



Дорогому Дмитрию Ивановичу! На память и в память об удивительном и незабываемом!

Миллер. 04.1999

³Михаил Львович Левин: Жизнь, воспоминания, творчество/Сост. Н.М. Леонтович, М.А. Миллер. Н.Новгород: ИПФ РАН. 1-е изд. 1995, 464 с.; 2-е изд. 1998, 592 с.

*Отец М.Л. Левина в 1924 году окончил Саратовский медицинский институт и аспирантуру при кафедре общей патологии. В Саратове в 1921 году родился и Михаил Львович, откуда семья переехала в 1926 году в Москву. В Нижнем его короткое пребывание началось с 1945 года.

Дорогой Дмитрий Иванович! Давно не выдавал весточек о себе. Еще и учитывая Вашу занятость Делами Особой Важности! Сейчас же, пользуясь оказией, посылаю Вам свои приветы и второе издание книги памяти о М.Л. Левине. Все расширения оговорены в предисловии.

Из моих событий – главное – дожитие до 75-летнего возраста. Это, не увы и не ах, это – факт жизни. Так что считайте эту книгу моим Вам подарком к моему, так сказать, юбилею.

С приветом,

Миллер. 26.04.1999

Дорогой Дмитрий Иванович! Спешу поздравить Вас с серией пестрых праздников. Будем надеяться также, что Двухтысячник – завершитель 20-го века – оправдает свое изящное обозначение. Как любил говаривать мой друг Б. Биргер (художник) – в нашей северной стране главное уметь *перезимовывать* – в любых погодях и невзгодах!

Наилучшие пожелания всем *Вашим* от всех *наших*!

Миллер. 12.1999

Миллер М.А. Избранные очерки о зарождении и взрослении радиофизики в горьковско-нижегородских местах. ⁴ **Три кита радиофизики.** «В одной из первых статей, поясняющих выделенность Новой Науки (скромнее сказать, поднауки – subscience), кажется, опубликованной в газете «Горьковская коммуна» (сейчас она превратилась в «Горьковскую правду» – а еще говорят, что нет правды на Земле!), Виктор Иванович Гапонов... – тоже один из первых десантников – муж Марии Тихоновны Греховой, специалист по теоретической электронике, писал (цитата по памяти, может быть, в статье участвовал и А.А. Андронов): «Радиофизика держится на трех китах: теории колебаний, электродинамике и электронике». (Ох! Ох! Причины и следствия иногда любят поменяться ролями: чуть выше я выделил именно эти три раздела, связав их с интересами Главарей-Зачинателей, а не с «китами» – возможно, из-за боязни перегрузить добрых океанических млекопитающих еще одной тягостью)!»

Взрослое располневшее Существо. «Уже через два-три преемственных поколения (каждое примерно по семь-десять лет) РФ стала не просто «физикой для радио и радио для физики» (это образное определение принадлежит Сергею Михайловичу Рытову, наезжавшему в Нижний Новгород еще даже до второго десантного пришествия), а вымахала за пределы, отпущенные ей при рождении: она проникла в акустику, в гидро-, гео- и астрофизику, в газодинамику, в твердотель и, уж конечно, во все видимые и невидимые диапазоны частот электромагнетизма.

В 80-х годах А.В. Гапонову-Грехову и мне сподобилось написать в «Физический энциклопедический словарь» статью о Радиофизике, и мы опалели от ее неостановимого размаха – экспансии во все закутки физики, да и других смышленных наук!

Временами переставали понимать, а что же, собственно говоря, совсем-совсем не может к ней иметь никакого отношения, к этой самой Радиофизике! Сейчас РФ – очень взрослое располневшее Существо, даже слегка заматеревшее...»

Самозащищенность физики. «В.Л. Гинзбург, продолжавший тащить РФ из погрязания в провинциальную затхлость своими боевыми вылазками Москва – Горький – Москва, любил похваливать нашу физику еще и за то, что ею даже в самых гнусных условиях можно было заниматься честно, не двоедушничая; в науках, называемых *строгими* (несмотря на приближенность многих их уложений!.. строгих – скорее, в смысле, строго проверяемых), справедливость высказываний не зависит от авторитета высказывателя и имеет право быть испытанной на достоверность любым смертным.

⁴Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1997. 224 с., илл.

А вот в *расплывчатых* науках, опирающихся на придуманные законы или на совокупности прецедентов, многие уложения конъюнктурны до одури. Недаром кто-то сказал, что самое большое влияние на Историю оказали историки. В этот афоризм можно вставить и другие родственные занятия и профессии. . . »

Дорогой Дмитрий Иванович! Шлю Вам и всем Вашим близким приветы по случаю дожития до перевалки Веков и Тысячелетий! И да будет Вам удача в пределах достижимого, ибо «Perfect Solutions of our difficulties are not be looked for in an imperfect world»! Вся надежда на «хаосистов», умеющих из хаоса извлечь порядок по примеру Всевышнего!

Ваш Миллер. 12.2000

Болотовский Б.М., Левин М.Л., Миллер М.А., Суворов Е.В. Фарадей – Максвелл – Герц – Хэвисайд... О согласованности функциональных специализаций мозга.⁵
Послесловие. «Пока тянулась подготовка второй редакции этих заметок, на нас обрушилось горе: умер Михаил Львович Левин. И теперь этот препринт станет его первым посмертным деянием. Первым, но не последним. М.Л. Левин оставил после себя столько влияний на людей разных судеб, профессий, склонностей, что еще долго-долго его черты будут просвечивать в свершениях всех, соприкасавшихся с ним ранее, а теперь пребывающих по разные стороны бренности и вечности. . .

М.Л. Левин, будучи по своей специальности физиком-теоретиком, благодаря редкостному сочетанию логического и образного мышления, щедро расточаемого по неперечислимому множеству познаний и любопытств, претворил себя в человека-явление, в интеллектуальный феномен особого назначения – «связного» разнополюсных культур. Ибо его искрометный ум удачно соединился с общительным, расположительным, добронаправленным характером, не препятствующим, однако, обладанию незыблемыми нравственными принципами, определяющими пределы возможных взаимодействий с людьми, коим выпала судьба жить с ним в одном пространстве и времени.

Да будет он продлен в памяти нашей и наших делах!»

Дорогой Дмитрий Иванович! Рад возможности поздравить Вас с Новым Новым годом, обозначаемым симметрично расставленными числами: **2002**. И пожелать Вам прожить этот год, не снижая прыти и свойственного Вам (тоже очень редкостного) *чувства цели*.

Заодно шлю Вам *свое* поздравление *себе!*

Ах, Новый Год вот-вот грядет!
Придется снова притворяться,
Что ты, как разновидность старца,
Еще не полный идиот!!!

Не развалился до нуля,
Что теплится внутри мысля
Не про отрыжку, не про стул,
А про какой-нибудь загул!!!

2001 → 2002 *ММ*

А еще хотел бы послать e-mail Человечеству (!), но не знаю окончательного адреса. После событий «9-11» многих не сильно храбрых обуял страх за Него, а ведь оно, возможно, самое прекрасное достижение Мироздания, прекрасное и неповторимое.

Ваш Миллер. 12.2001

⁵Препринт № 327. Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН, 1992. 32 с.

Миллер М.А. Раздумья про раздумья. ⁶ **Лекция 2. Предслово.** «У всякой деятельности должны быть (вернее, – хорошо, если есть) *мотивы* (раз), *цели* (два) и *средства* свершения (три). Конечно, встречаются порой и немотивированные, бесцельные, «как попало выполненные» поступки, но к ним не относятся (не хочется, чтобы относились) мои сегодняшние намерения.

Я собираюсь поделиться приемами думанья, думанья физиков над физикой. Раздумьями про раздумья. Размышлениями про размышления. Главный мотив – «приглашенная потребность» просветительства. Цель – «понять самому и передать товарищам».

Труднее всего со средствами – за один лекционный срок – и не измелочиться, и не потерять магистральности. Поэтому я прибегну к тактике эпизодов, клипов-очерков, нанизанных на единую линию. Как в некоторых видеоклипах, где существуют два (и иногда и более) масштаба действия (физики любят говорить – два характерных времени): внутри малых промежутков проигрываются цельносюжетные ленты (в каждом своя доля логики), потом вдруг, скачком (с кажущейся непредсказуемостью) врывается другой эпизод и т.д. И все же, по завершении всего клипа (второе характерное время) остается впечатление единости, – не худшей и не лучшей, чем в эпизодах, (и даже не средней!), а просто иной. Как у Гамлета: «Though this be madness? There is method in it» (в безумстве этом есть своя система). Не могу удержаться от аналогии с теми произведениями живописи, которые я называю кусочно-мазковыми: в близорукой близости от картины различаются разрозненные ляпушки красок, и только на некотором отходе наступает осенение единением. Магия сознания, но и магия восприятия тоже!»

8. Как прекрасен этот мир. «... Пусть нам выпала счастливая доля удачи, и мы решились увековечить достигнутое, записав его способами, наилучше подходящими для каждого дела через разноязыкую словесность, матформульность, живописность, музыкальность... Ну, через все-все проникающее сквозь наши органы реагирования (включая загадочные рудиментарные). При этом я почему-то «вижу» не обычное ветвистое дерево, а огромную глыбину в многокоординатном пространстве, где чего только не отложено по осям: масштабы физических параметров (длин, времен, энергий и т.п.), химических, биологических, общественно-этических, исторических, политических параметров и показателей и прочее, прочее, прочее... У каждой искусности, у каждого научного и чувственного достижения есть в этом пространстве свои объемчики - пространственные «островки». А внутри каждого свои правила жизни, свое прошлое и настоящее, свои пути и методы. Сохраняя умеренную самостоятельность («суверенность»), они поддерживают как ближние (заметные), так и дальние (убывающие) связи с соседствующими областями. Восприятие каждого островка зависит от углубления (по одной из координат), от масштаба засекаемых подробностей, от наших разрешающих потребностей и способностей. «Вглядываясь» все пристальней и пристальней, мы начинаем различать все новые и новые миры. Примитивное предсказание «рассудочного порядка» должно было, наверное, наводить нас на матрешечно-подобное устройство этих миров: вскрываем одну матрешку, внутри обнаружим другую – *такую же* на вид, но меньшего размера и т.д. Но опыт проникновения в истинную природу вещей убеждает нас в отсутствии одноподобия: вскрываем крупную (макромасштабную) матрешку, а там какая-то другая гаджетная штукавина, вскрываем эту, а там совсем ни на что предыдущее не похожая кикиморная паперлапапина и т.д... вплоть до нулевого упора! А может упора и нет, и мир никогда не перестанет балагурить над нами? (Или мы над ним?) В этом рассуждении я держал в уме (в качестве контрольной модели) физическое устройство (вернее, наш взгляд на него), но и при пробегании («лучом познания») по другим информационным массивам, куль-

⁶Миллер М.А. Раздумья про раздумья. Препринт № 315. Н.Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1992. 46 с.; Изв. вузов ПНД, 1994. Т. 2, № 6. С. 67.

турам, наукам, искусствам тоже обнаруживается *не сплошность*, а чередование «сюжетов» с перескоками, связками, неожиданностями. . .

И непонятно, то ли *мир* «в самом деле» так устроен – обрывочно логично, но образно едино, то ли *мы* такие в нем и поэтому не умеем (не дано нам от Бога) иначе его понять, то ли и то и это *самосогласовано* (как в сверхполном толковом словаре), то есть и мир такой, и мы в нем сотворены «по его образу и подобию». . . »

Дорогой Дмитрий Иванович! Весьма тронут Вашим приветственным поздравлением с наступающим 2003 годом и особенно сопровождающим стихком, в ответ на который решаюсь послать Вам свои «критические замечания».

Астрологии Азы обещают год Козы!
А Коза ведь без Козла яловая Егоза!
Однако!!!
Год рогатого Козла не избавит Мир от Зла!
Однако!!!
Вся надежда на Овцу – ей Рога вполне к Лицу!
Однако!!!
Но иссохнут все от Срама, коль нагрнет год Барана!
Однако!!!
Звезды пусть хранят в наличье «М» и «Ж» – небезразличье!
Нако!!!

Поздравляю Вас и всех Ваших с наступлением 2003 года и желаю Вам распоряжаться своей *Энергией* и своим *Временем* не в ущерб самому себе.

Ваш М.М. 28.12.2002

Дорогой Дмитрий Иванович! Спасибо за дружеские поздравления и за анти- или про-дарвиновский стихок! Примите и мои наилучшие пожелания на 2004 год Вам и всем Вашим близким! А заодно мой стих – ответ, – так было положено промежду стихослагателями в давно минувшие времена.

Что поделаешь с людьми,
Кои будто бы все мы, –
Ведь отдельные изьяны
У любой есть обезьяны!
Впрочем, дарвинизм сник,
Знание уже не сила,
И научное творило, –
Ветвь, ведущая в тупик!
Но и дурошлеп – агностик,
Тайно веря в чудеса,
Поднимает НГ-тостик
В основном, конечно, за!

Ваш ММ 12.2003

Приложение к переводу максвелловского «Трактата об Электричестве и Магнетизме».⁷
Миллер М.А. Предисловие. «... Так уж устроен наш мыслительный аппарат, попросту говоря, – мозг человека, что его логическая «левополушарная продукция» недостижима (а некоторые считают, что и непостижима!?) без «правополушарной деятельности» – образной, художественной, иррациональной, с загадочными «инсайтными вмешательствами».

А это означает, что нельзя терять ни малейшей возможности изложения на языке своего родного думанья любых произведений, содержащих рассказы и жизни и творчестве людей науки, не говоря уже об их собственных повествованиях. Знакомство с переводами текстов самих классиков и текстов о классиках науки полезно, помимо всего прочего, еще и для межъязыковых сопоставлений методов поиска, разведки, звучаний «внутренних голосов». Да и вообще полезно – просто для самосовершенствования мыслительных умений.»

Последнее письмо. Дорогой Дмитрий Иванович! Простите, что я не сразу поблагодарил Вас за Ваше меня поздравление. Просто был отвлечен недостойными жизни обстоятельствами. И еще очень хотел избавиться от официальных и банкетных торжеств. Увы! Ничего не удалось! Однако есть и плюсы: «друзья и как бы близкие» почти насильственно уговорили меня написать книжку «как бы за науку и как бы за жизнь». Если ничего не произойдет противоположительного, она родится к осени. Но упреждая самого себя, я решил послать Вам в качестве вещественной благодарности ее начало и ее конец.

Может, это Вас позабавит!

ММ 28 Мая 2004

Входная Аннотация. «Сборник «Всякая и не всякая всячина» составлен из разножанровых текстов Михаила Адольфовича Миллера, главного научного сотрудника Института Прикладной Физики Российской Академии Наук. Некоторые из них публиковались ранее, но рассыпью – в журнальных статьях, брошюрах и книжках. Здесь же они расширены, дополнены, освежены и, главное, выстроены в некую сюжетную последовательность, характеризующую эволюцию научных, околонучных и вненаучных пристрастий автора. В известном приближении это «отчет о проделанной жизни», но за вычетом тех сутубо профессиональных проблем, проникновение в которые предполагало бы особую образовательную подготовку читателя. А этот сборник, как явствует отчасти из несколько фривольного его именованья, может быть притягательным для читателей с почти любой «специализацией любознательности». Об этом можно судить даже из перечня глав. Автобиография, Научные пристрастия (специализация человеческого мышления, история электромагнетизма, волны, волны, волны и т. п.), Рассказы о людях, оказавших определяющее влияние на научную часть судьбы автора (М.Т. Грехова, А.А. Андронов, Г.С. Горелик, М.Л. Левин, В.Л. Гинзбург, М.А. Леонтович и др.), Публицистические очерки (о физиках, математиках, художниках, юристах и т.п.), Юбилейные торжества и Пародии, а в конце даже Некоторые Стихотворные Опыты. В общем, есть разделы, изготовленные «На полный серьез», а есть и «Не на полный серьез». Кстати, они примерно так и называются. Сборник должен быть интересен не только друзьям автора, но многим другим читателям, которые, возможно, подружатся с ним после прочтения его отчета о себе. Хочется надеяться, что каждый раскрывший эту книжицу случайно или по наводке – сможет отыскать в ней что-нибудь его захватывающее.

Пусть даже совсем немногое!»

⁷ Приложение к переводу максвелловского «Трактата об Электричестве и Магнетизме». Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1998. 68 с.

Затем идет текст книги... и все кончается **Мольбой**...

Прошу прощения за старость, что мне в преклонности досталась,
За страх перед наружной дверью, за недоверье, за неверье,
За неумение быть счастливым в необходимых пустяках,
За все приливы и отливы, за убежать, за... утекать...
Прошу прощения за служенье властям, порочащим народ,
И за пассивное смирение с судьбой, которая вразброд!
А вот за то, что не бессмертен, ничем особым не отмечен,
За массу тела и объем, – я без прощения прощен!!!

1924 → 2004 →????

А потом – призывом к спасению...

Спасайся, кто может!



А кто не может,



тому и Бог не поможет!!!

А М И Н Ь

Заключение публикатора. Можно еще много добавить, но... На одну из замечательных книг есть запрет в надписи: «В знак дружеского расположения и с просьбой не распространять "тайну исповеди" за пределы окружения любви». Часть писем, содержание которых помню, так спрятаны, что я их не нашел и т.д. и т.п. Посмотрел еще раз «Входную аннотацию» из последнего письма и понял, что незаметно для себя отразил содержание предполагаемой книги в приведенных отрывках. Они не выстроены в хронологическую или какую-либо другую последовательность. И может быть это хорошо, поскольку эта хаотическая мозаичность лишней раз являет это чудо – чудо по имени Миллер.

В послесловии к известному эссе Л. Флашена «Книга» есть слова Флашена, которые легко вложить в уста Михаила Адольфовича:

«Человек в пути, вечный ученик жизни, для меня сегодня это – не тот, кто расширяет внешние границы своих интересов, избирает каждый раз новый род деятельности, неутомимо меняет профессию за профессией, но тот, кто может оставаться и быть собой независимо от этих перемен. Можно менять деятельность, а можно не менять. Важно делать то, что делаешь, вступая таким образом в диалог с собой и с миром, поверяя себя каждый раз собственным... предназначением. Но заранее никогда не известно, ни кто ты, ни каково твое предназначение; это будет проявляться, когда ты просто делаешь то, что должно быть сделано. Будет ли? Может быть, здесь важно не *выяснить*, но *выяснить*?.. Я человек, обреченный выстраивать фразы, объясняя что-то самому себе и другим, тем, кто в этом нуждается. Хочь подать знак: это я. А вы? Где вы?».

Саратов

ноябрь 2004 года
Д.И. Трубецков

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Обложка художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, Н.Н. Васевой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2005 год осуществляется
Саратовским государственным университетом
по заключению договора между Подписчиком
(юридическим и физическим лицом) и Издателем

Стоимость подписки на 2005 год 390 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64;
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 01.05.05. Подписано к печати 15.06.05. Формат 70x108/16
Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная. Гарнитура Латинская
Усл. печ. л. 17,85(12,75). Уч.-изд. л. 17,0. Тираж 200. Заказ 361

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД»
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2005



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Saratov University, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

A.S. Dmitriev, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow

S.P. Kuznetsov, Professor, Saratov University, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

P. S. Landa, Professor, Moscow University

G.G. Malinetskii, Professor, Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow

O.V. Rudenko, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Moscow University

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, PhD, Institute of Applied Physics of RAS, Nizhny Novgorod

V.G. Yakhno, Professor, Institute of Applied Physics of RAS, Nizhny Novgorod

Если у тебя
есть фонтан,
заткни его:
дай отдохнуть
и фонтану.

Козьма Прутков

