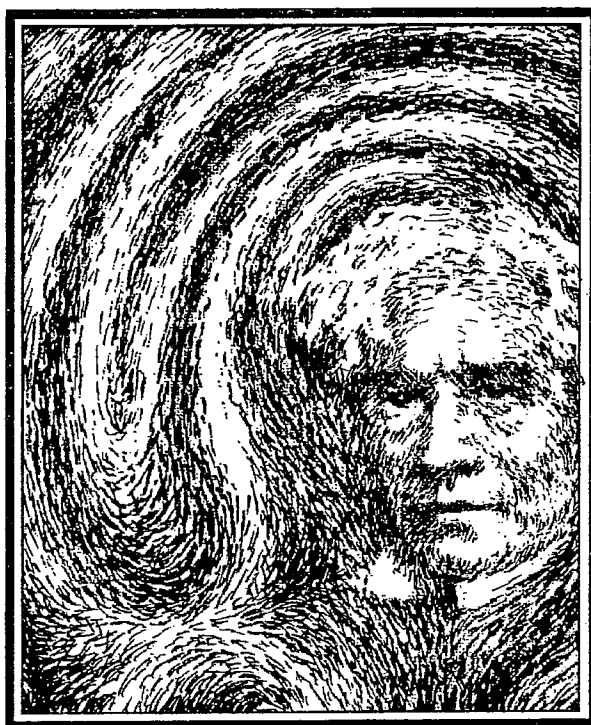


Прикладная Физика Динамика



С этого номера статей о Майкле Фарадее мы начинаем публикацию биографической серии Юлия Данилова "Портреты"



**Бифуркации
в динамических
системах различной природы**



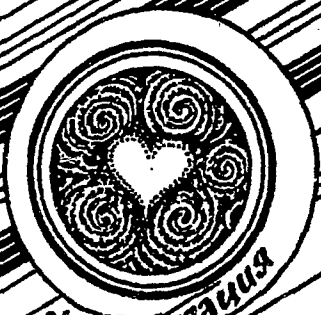
**Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики**



**Конферен-
ции, семинары, симпозиумы**



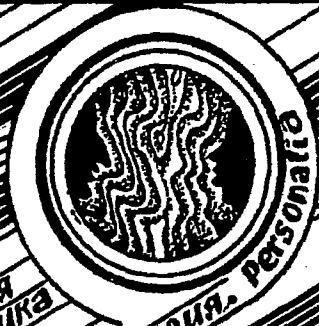
**Детерминированный
АОС**



**Авто-
волны,
самоорганизация**



**Прикладные задачи
нелинейной
теории
колебаний
и волн**



**Нелинейная
динамика
в
лицах.
История, персоналы**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Калинин, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В.К. Юлатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

СОДЕРЖАНИЕ

АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

Введенский Н. В., Гильденбург В. Б., Солодов А. А. Обостряющиеся авто-
модельные структуры в высокочастотном разряде низкого давления . . . 3

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Усанов Д. А., Скрипаль А. В., Калинин М. Ю. О причине размытия отдельных
участков фазового портрета автодинного сигнала полупроводникового
лазера при движении внешнего отражателя 15

Брюханов Ю. А., Мясников Е. А. Параметры предельных циклов рекурсив-
ной цифровой системы второго порядка с квантованием 21

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Аносов О. Л., Бутковский О. Я., Кравцов Ю. А. Восстановление динамичес-
ких систем по хаотическим временным рядам: краткий обзор 29

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

*Синицын Н. И., Гуляев Ю. В., Торгашов Г. В., Григорьев Ю. А., Жбанов А. И.,
Чернозатонский Л. А., Захарченко Ю. Ф., Мусатов А. Л., Глухова О. Е.,
Князев С. А., Торгашов И. Г.* Полевая эмиссия из углеродных нанотрубок . . 52

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

Неймарк Ю. И. Математическая модель общества, позволяющая ответить на
вопрос о принципах его функционирования, организации и управления . 64

Измайллов И. В., Пойзнер Б. Н., Раводин В. О. Модель взаимодействия двух
развивающихся научных направлений с учетом ограничения роста
достижений и запаздывания 70

Богданов Н. С., Кузнецов А. П. «Атлас» карт динамических режимов эталон-
ных моделей нелинейной динамики и радиофизических систем. 80

ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ

Моисеев Н. Н. Современное образование: проблема синтеза гуманитарного и
естественнонаучного знания 92

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA

Данилов Ю. А. Майкл Фарадей 95

КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА

Сборник программ курсов лекций 102

Uchaikin V. V., Zolotarev V. M. Chance and stability. Stable distributions and their
applications 105

CONTENTS

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

- Sharpening self-similar structures in the low-pressure high-frequency discharge.
N.V. Vvedenskii, V.B. Gildenburg, A.A. Solodov 3

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- The reason of blurring regions of phase pattern for autodine signal of semiconductor laser during movement of the external reflector. *D.A. Usanov, A.V. Skripal, M.Yu. Kalinkin* 15
- Parameters of limit cycle in recursive second order digital system with one quantizer. *Y.A. Bryuhanov, E.A. Myasnikov* 21

REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

- Reconstruction of dynamical systems from chaotic time series: short review.
O.L. Anosov, O.Ya. Butkovskii, Yu.A. Kravtsov 29

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Field emission from carbon nanotubes. *N.I. Sinitsyn, Yu.V. Gulyaev, G.V. Torgashov, Yu.A. Grigoriev, A.I. Zhanov, L.A. Chernozatonskii, Yu.F. Zakharchenko, A.L. Musatov, O.E. Glukhova, S.A. Knyazev, I.G. Torgashov* . . . 52

METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

- The mathematical model of society allowing to answer the question on principles of its functioning, organization and operating. *Ju.I. Neimark* 64
- Model of two scientific fields interaction with restriction of achievements growth and delay. *I.V. Izmailov, B.N. Poizner, V.O. Ravodin* 70
- Map «Atlas» of dynamic modes for standard models of nonlinear dynamics and of radiophysic systems. *N.S. Bogdanov, A.P. Kuznetsov* 80

FROM BOOKS AND JOURNALS

- Modern education: the problem of synthesis humanitarian and natural–scientific knowledge. *N.N. Moiseev* 92

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

- Michael Faraday. *Yu.A. Danilov* 95

STUDENT'S BOOKSHELF

- Chance and stability. Stable distributions and their applications. *V.V. Uchaikin and V. M. Zolotarev* 105



ОБОСТРЯЮЩИЕСЯ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ РАЗРЯДЕ НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ

Н. В. Введенский, В. Б. Гильденбург, А. А. Солодов

Исследована нелинейная динамика цилиндрически симметричного высокочастотного разряда, создаваемого вращающимся внешним электрическим полем. На базе численных расчетов проанализированы три основные стадии в развитии разряда: самоускоряющийся лавинообразный процесс вплоть до значений максимальной плотности плазмы, отвечающих «геометрическому» резонансу плазменного цилиндра; диффузионное распространение быстрой волны ионизации, содержащей на своем переднем фронте область плазменного резонанса; установление устойчивого стационарного состояния. Изучены режимы обострения профилей амплитуды поля и плотности при приближении к точке плазменного резонанса на оси симметрии. Показано, что возникающие при этом динамические структуры хорошо согласуются с найденными автомодельными решениями системы нелинейных уравнений для электрического поля и плотности плазмы.

Введение

В последние 20 лет ведутся активные исследования в области динамики и структуры неравновесных разрядов, создаваемых в газах мощными электромагнитными полями различных частотных диапазонов (радио, СВЧ, оптического). Неравновесным («холодным») называется разряд, характеризуемый низкими температурами всех степеней свободы молекул ($T_m \sim 300$ К) и высокими температурами электронов ($T_e > 10^4$ К). Неравновесная стадия является начальной в динамике любого высокочастотного разряда и существенным образом определяет его дальнейшую эволюцию, в частности, скорость, а также саму возможность перехода в режим термической ионизации. Изучение неравновесного режима представляет основной интерес при решении обсуждаемых в последнее время прикладных задач – таких, как повышение энергоемкости рабочей среды газовых лазеров и плазмохимических реакторов, разработка новых методов напыления пленочных покрытий и создание радиоотражающих или «озоновостанавливающих» областей искусственной ионизации в атмосфере Земли.

Ранее проведенные теоретические и экспериментальные исследования показали [1–7], что важную роль в динамике неравновесных разрядов может играть явление плазменного резонанса, выражающееся в сильном увеличении амплитуды поля при приближении плотности к критическому значению. Это явление приводит, в частности, к сильному возрастанию скорости распространения фронтов ионизации [6, 7] и к возникновению в разрядах (как микроволновых, так и оптических) так называемой плазменно-резонансной ионизационной неустойчи-

ности (ПРИН) [1–6], развивающейся в тех областях параметров, где частота соударений электронов мала по сравнению с частотой поля, а максимальная электронная плотность может превышать критическое значение. Эта неустойчивость, обусловленная взаимным усилением мелкомасштабных возмущений поля и плотности плазмы, приводит на нелинейной стадии к формированию мелкомасштабных структур, характеризующихся наличием резких пиков амплитуды поля в областях критической плотности [4–6]. В работе [6] рассматривалась простейшая одномерная модель разряда в продольном переменном электрическом поле – модель «плоского конденсатора» с фиксированным значением электрической индукции в плазме. На основании анализа квазилинейного параболического уравнения удалось найти класс автомодельных решений, хорошо описывающих одномерные обострения профилей плотности плазмы при приближении максимальной концентрации электронов к критическому значению и неограниченном росте величины поля. Однако ряд важных вопросов динамики разряда, касающихся нелинейной стадии ПРИН и вообще характера эволюции поля и плотности плазмы в условиях сильного плазменного резонанса, пока остается мало изученным. К числу таких вопросов можно отнести изучение явления плазменного резонанса и обусловленных им режимов обострения в неоднородных (не плоских) динамических разрядных структурах.

В данной работе исследуются двумерные (осесимметричные) динамические структуры, формируемые на нелинейной стадии ПРИН в высокочастотном разряде, создаваемом вращающимся электрическим полем; проведено компьютерное моделирование полной картины пространственно-временной эволюции разряда низкого давления (при частотах соударений электронов, малых по сравнению с частотой поля) и найдены автомодельные решения, описывающие процесс обострения профилей поля и плотности плазмы вблизи точки плазменного резонанса.

Исходные уравнения и приближения. Основные стадии развития разряда

Исследуем нелинейную динамику осесимметричного газового разряда, создаваемого в бесконечно длинной цилиндрической трубке высокочастотным вращающимся электрическим полем. Вектор напряженности квазимонохроматического электрического поля запишем в виде $\mathbf{E} = \text{Re}(E(x, y, t) \exp(-i\omega t))$, где $E(x, y, t)$ комплексная амплитуда (медленная огибающая), x, y – декартовы координаты в плоскости, перпендикулярной оси симметрии. Вектор напряженности внешнего электрического поля (поля вдали от области разряда), имеющий комплексную амплитуду $E_0 = -(2^{-1/2} E_0)(x_0 + iy_0)$ (x_0, y_0 – единичные орты на осях x и y , $E_0 = \text{const}$ – заданная величина, не зависящая от времени), вращается с постоянной угловой частотой ω в плоскости (x, y) . Задача решается в квазистатическом приближении, то есть размеры области, в которой происходит разряд, много меньше длины волны $\lambda \sim c/\omega$. В этом приближении электрическое поле можно считать потенциальным и описывать уравнениями вида

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \nabla(\epsilon\mathbf{E}) = 0. \quad (1)$$

Здесь φ – электрический потенциал; $\epsilon = 1 - (N/N_c)(1 - i\nu)$ – комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы; $N_c = m(\omega^2 + \nu^2)/(4\pi e^2)$ – критическая концентрация; e и m – заряд и масса электрона; $\nu = \nu/\omega$, где ν – частота соударений электронов. Концентрация электронов (плотность плазмы) $N(\mathbf{r}, t)$ является медленной (в масштабе периода $2\pi/\omega$) функцией и в широкой области параметров неравновесного разряда, зажигаемого в электроотрицательных газах (в том числе, в воздухе) [8], определяется уравнением баланса

$$\partial N/\partial t = D\Delta N + (v_i - v_a)N, \quad (2)$$

в котором частота прилипания электронов v_a и коэффициент амбиполярной диффузии D предполагаются постоянными; для частоты ионизирующих соударений v_i используется степенная аппроксимация

$$v_i = v_a(|E|/E_c)^\beta, \quad (3)$$

где E_c – критическое (пороговое) поле однородного пробоя, показатель β зависит от рода газа и диапазона изменения амплитуды поля; в частности, для воздуха $\beta \sim 5 \div 3$ при $|E|/E_c \sim 1 \div 6$ [8–10].

Введем в плоскости (x, y) полярную систему координат r, θ (где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ – расстояние до оси симметрии, θ – полярный угол, отсчитываемый от оси x) и будем рассматривать решения, в которых $N = N(r, t)$. Переходя к безразмерным переменным $n = N/N_c$, $E' = E/E_c$, $t' = v_a t$, $x' = x/L_a$, $y' = y/L_a$ ($L_a = (D/v_a)^{1/2}$ – диффузионная длина прилипания электронов) и, опуская далее штрихи в обозначениях переменных x, y, t, E , запишем уравнения (2), (3) для радиально-симметричных распределений плотности $n = n(r, t)$

$$\partial n/\partial t = \partial^2 n/\partial r^2 + (1/r)\partial n/\partial r + (|E|^\beta - 1)n. \quad (4)$$

Зададим граничные условия для функции n . Будем считать, что на стенках трубки выполняется условие полного поглощения электронов, то есть $n(R, t) = 0$, где R – радиус цилиндрической трубки. Второе граничное условие – $\partial n/\partial r(0, t) = 0$; оно вытекает непосредственно из (4) при условии конечности скорости ионизации.

Запишем уравнения и граничные условия, описывающие распределения электрического поля в пространстве. Представим скалярный потенциал ϕ в виде

$$\phi(x, y, t) = \psi(r, t) \exp(i\theta), \quad (5)$$

где ψ является комплексной функцией переменных r и t . Уравнения (1), записанные с помощью функции ψ , будут иметь следующий вид:

$$E = -\nabla\phi = -(\partial\psi/\partial r e_r + i\psi/r e_\theta) \exp(i\theta), \quad (6)$$

$$\partial^2 \psi/\partial r^2 + (1/\epsilon \partial \epsilon/\partial r + 1/r)\partial \psi/\partial r - \psi/r^2 = 0. \quad (7)$$

Здесь e_r и e_θ – единичные векторы в направлении радиуса и азимута. Очевидно, что на оси симметрии скалярный потенциал ϕ в любой момент времени не должен зависеть от азимутального угла θ , поэтому, согласно выражению (5), $\psi(0, t) = 0$. Заметим также, что из уравнения (7) (фактически – из дифференцируемости функции $\psi(r)$) следует равенство $\lim_{r \rightarrow 0} (\psi/r) = \partial \psi/\partial r(0, t)$, означающее, согласно (6), что поле на оси имеет круговую поляризацию; во всех остальных точках пространства $0 < r < \infty$ в общем случае поляризация эллиптическая. По известной функции $\psi(r, t)$ находится модуль амплитуды неоднородного электрического поля в любой момент времени в каждой точке пространства

$$|E| = E = \begin{cases} (|\partial \psi/\partial r|^2 + |\psi/r|^2)^{1/2}, & r > 0, \\ 2^{1/2} |\partial \psi/\partial r|, & r = 0. \end{cases} \quad (8)$$

В области $r > R$ плотность плазмы $n = 0$, диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 1$, и решение уравнения (7) для функции ψ , отвечающее при $r \rightarrow \infty$ переходу к невозмущенному внешнему полю, запишется следующим образом:

$$\psi(r,t) = 2^{-1/2}E_0 r + C(t)/r. \quad (9)$$

Второе слагаемое в формуле (9) описывает порождаемое разрядом поле вращающегося двумерного диполя. В силу непрерывности тангенциальной и нормальной (поскольку $\varepsilon(R,t)=1$) компонент электрического поля на стенках трубки, легко получить еще одно граничное условие для функции ψ : $(\psi/r + \partial\psi/\partial r)(R,t) = 2^{1/2}E_0$.

Таким образом, запишем полную систему уравнений и граничные условия для плотности плазмы $n(r,t)$ и функции $\psi(r,t)$ внутри плазменного цилиндра

$$\partial n/\partial t = \partial^2 n/\partial r^2 + 1/r \partial n/\partial r + [(\partial\psi/\partial r)^2 + (\psi/r)^2]^{1/2} - 1]n, \quad (10)$$

$$\partial^2 \psi/\partial r^2 + (1/\varepsilon \partial\varepsilon/\partial r + 1/r)\partial\psi/\partial r - \psi/r^2 = 0, \quad \varepsilon = 1 - n(1 - i\bar{\nu}); \quad (11)$$

$$\partial n/\partial r(0,t) = 0; \quad \psi(0,t) = 0; \quad n(R,t) = 0; \quad (\psi/r + \partial\psi/\partial r)(R,t) = E_0 2^{1/2}. \quad (12)$$

В качестве начального условия выберем гауссово распределение для функции $n(r,0)$

$$n(r,0) = n_0 [\exp(-r^2/l^2) - \exp(-R^2/l^2)]. \quad (13)$$

Задача (10)–(13) решалась численно с помощью компьютера на промежутке $r \leq R$ при значениях параметров $\beta=4$, $n_0=0.4$, $E_0=1.2$, $\bar{\nu}=0.2$, $R=10$, $l=2$. Выбор этих значений определялся, с одной стороны, их соответствием типичным условиям лабораторного эксперимента по пробоем газа низкого давления [2, 3], а с другой – возможностью демонстрации (в условиях неизбежной ограниченности вычислительных ресурсов) интересующих нас эффектов на основных стадиях процесса. Численное решение задачи (10)–(13) проводилось с использованием неявной разностной схемы Крэнка – Николсона и метода прогонки с размерами шагов по временной ($\delta t=10^{-7}$) и пространственной ($\delta r=10^{-3}$) координатам, обеспечивающими устойчивость численной схемы и достаточно высокое разрешение резонансных пиков исследуемых зависимостей. Эволюция полученных пространственных распределений плотности плазмы и модуля амплитуды электрического поля, найденного из выражения (8), показана на рис. 1. На первой стадии процесса рост максимальной плотности, достигающей в точке $r=0$ ($n_{\max}=n(0,t)$), происходит с увеличивающейся скоростью до значения $n_{\max} \approx 1.94$ (кривые 3). Далее скорость роста n_{\max} снижается, и процесс приобретает характер стационарной волны пробоя [7], содержащей на своем переднем фронте точку плазменного резонанса и распространяющейся от центра к границам трубки (кривые 5–8). На завершающей стадии процесса образуется устойчивое стационарное состояние (кривые 10), изученное в работе [11].

Заметим, что условие $v \ll \omega$ накладывает, вообще говоря, ограничения на максимальную величину безразмерной переменной r (радиальная координата, отнесенная к диффузионной длине L_a), допустимую в рамках используемого квазистатического приближения ($\omega r/(cL_a) \ll 1$). В частности, для разряда в воздухе, согласно известным справочным данным [8–10], равенство $\omega r/(cL_a)=1$ при использованном в расчетах значении $v/\omega=0.2$ отвечает максимальному значению $r \approx 2$. Распространение разряда в области $r > 2$ может описываться представленными на рис. 1 кривыми лишь для некоторого гипотетического газа, характеризуемого меньшими значениями диффузионной длины при той же частоте соударений электронов. Фактически результаты для области $r > 2$ должны рассматриваться лишь как иллюстрирующие динамику диффузионной волны ионизации в рамках простейшей квазистатической модели.

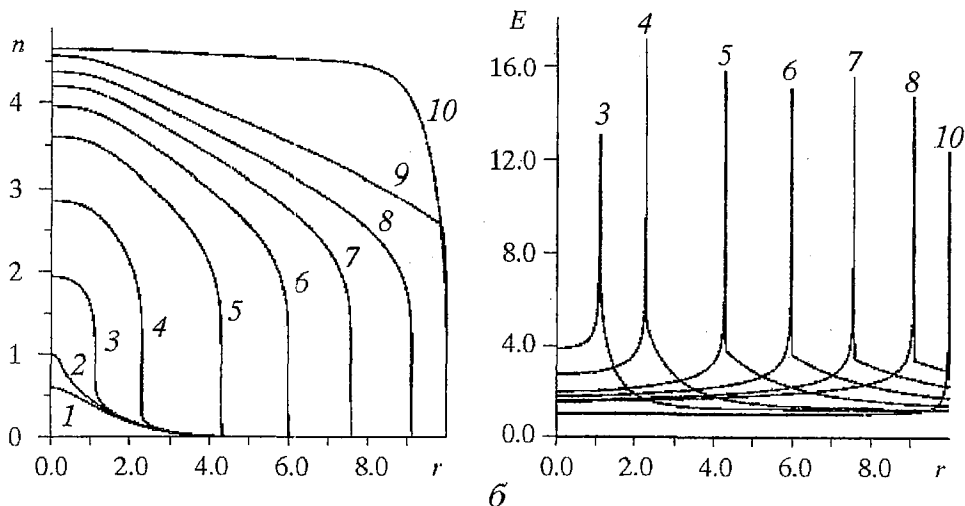


Рис. 1. Пространственные распределения плотности плазмы $n(r)$ и модуля амплитуды электрического поля $E(r)$ в различные моменты времени t при значениях параметров $n_0=0.4$, $E_0=1.2$, $\bar{\nu}=0.2$, $\beta=4$, $R=10$, $l=2$. Кривые 1-4 соответствуют значениям $t=0.0856$, 0.1187 , 0.1285 , 0.1319 ; кривые 4-9 построены через равные промежутки времени $\Delta t=0.0088$; кривым 10 соответствует момент времени $t=0.9$

Автомоделные режимы с обострением в приосевой области

При приближении значения плотности плазмы на оси цилиндра к критическому (в условиях сильного плазменного резонанса, то есть при малых значениях $\bar{\nu}/\omega$) взрывной рост амплитуды поля и концентрации может происходить в режиме обострения. Процесс обострения и динамические структуры профилей поля и плотности плазмы при приближении к точке плазменного резонанса (в области $\bar{\nu} \ll 1$, $0 < \epsilon = 1 - n < 1$, $|E| \gg 1$) можно описать приближенно на основании некоторых упрощенных уравнений, полученных из (10), (11),

$$\partial \epsilon / \partial t = \partial^2 \epsilon / \partial r^2 + 1/r \partial \epsilon / \partial r - [(\partial \psi / \partial r)^2 + (\psi / r)^2]^{3/2}, \quad (14)$$

$$\partial^2 \psi / \partial r^2 + (1/r + 1/\epsilon \partial \epsilon / \partial r) \partial \psi / \partial r - \psi / r^2 = 0. \quad (15)$$

Будем искать автомоделные решения системы уравнений (14), (15) при $t < t_0$ (t_0 – момент достижения особенности в точке $r=0$) в виде

$$\epsilon(r, t) = (t_0 - t)^p f(\xi), \quad \psi(r, t) = (t_0 - t)^q g(\xi), \quad (16)$$

где $\xi = r / (t_0 - t)^{1/2}$ – автомоделная переменная. По известной функции $g(\xi)$ находим значения модуля амплитуды электрического поля

$$|E| = E = (t_0 - t)^{q-1/2} \times \begin{cases} [(g')^2 + (g/\xi)^2]^{1/2}, & \xi > 0, \\ g'(0)2^{1/2}, & \xi = 0. \end{cases}$$

Подставляя выражения (16) в уравнение (14) и приравнивая значения показателей степени при временных множителях, находим связь между показателями p и q

$$p = (q - 1/2)\beta + 1. \quad (17)$$

Автомоделные функции $f(\xi)$ и $g(\xi)$ удовлетворяют системе уравнений в полных производных

$$f'' + (1/\xi - 1/2\xi)f' + pf - [(g')^2 + (g/\xi)^2]^{\beta/2} = 0, \quad (18)$$

$$g'' + (1/\xi + f'/f)g' - g/\xi^2 = 0. \quad (19)$$

Интересующие нас решения системы (18), (19) должны отвечать следующим условиям: $0 < \varepsilon(r, t) < \infty$ при $0 < r < \infty$, $t \leq t_0$; $\varepsilon(0, t_0) = 0$, $\partial \psi / \partial r(0, t_0) = \infty$; $f'(0) = g(0) = 0$. Автономные функции, удовлетворяющие вышеперечисленным условиям, должны выходить при $\xi \rightarrow \infty$ на степенные асимптотики $f_{as}(\xi) \sim \xi^{2p}$, $g_{as}(\xi) \sim \xi^{2q}$, позволяющие найти вид функций $\varepsilon(r, t_0) = 1 - n(r, t_0) \sim r^{2p}$ и $E(r, t_0) \sim r^{2q-1}$. Требуя, чтобы уравнения (18), (19) действительно имели такие асимптотики, с учетом связи (17) находим показатели q, p ; в области значений $q < 1/2$ и $p > 0$, отвечающей второму из приведенных выше условий, имеем

$$q = [\beta - 2 + (\beta^2 + 8)^{1/2}] / [4(\beta + 1)], \quad p = [-\beta^2 + \beta(\beta^2 + 8)^{1/2} + 4] / [4(\beta + 1)]. \quad (20)$$

Зависимости (20) изображены на рис. 2. Интересно отметить, что при значениях $\beta < \beta_c = (5^{1/2} + 3) / 2 \approx 2.618$ соответствующие значения $p > 1/2$. При этом автономные решения $\varepsilon(r, t)$ сохраняют колоколообразную форму с нулевой производной в точке $r=0$ также и в момент возникновения особенности $t=t_0$. При $\beta > \beta_c$ профиль $\varepsilon(r)$ при $t=t_0$ имеет заострение ($\partial \varepsilon / \partial r = \infty$) в точке $r=0$.

Для того, чтобы построить решения системы уравнений (18), (19), необходимо задание четырех начальных значений в точке $\xi=0$: $f(0)$, $f'(0)$, $g(0)$, $g'(0)$. Два значения для интересующих решений нам известны: $f'(0) = g(0) = 0$, так как $\partial \varepsilon / \partial r(0, t) = \psi(0, t) = 0$. Представим автономные функции $f(\xi)$ и $g(\xi)$ в виде

$$f(\xi) = f(0)f_1(\xi), \quad g(\xi) = g'(0)g_1(\xi).$$

Из системы уравнений (18), (19) находим систему уравнений для нормированных функций f_1 и g_1

$$f''_1 + (1/\xi - 1/2\xi)f'_1 + pf_1 - K[(g'_1)^2 + (g_1/\xi)^2]^{\beta/2} = 0, \quad (21)$$

$$g''_1 + (1/\xi + f'_1/f_1)g'_1 - g_1/\xi^2 = 0, \quad (22)$$

где $K = g'(0)/f(0)$, $g_1(0) = f'_1(0) = 0$, $g'_1(0) = f_1(0) = 1$. При фиксированном значении показателя β выход решений системы уравнений (21), (22) при $\xi \rightarrow \infty$ на нужные нам степенные асимптотики $f_{1as} = C_{f1}\xi^{2p}$, $g_{1as} = C_{g1}\xi^{2q}$ обеспечивается выбором

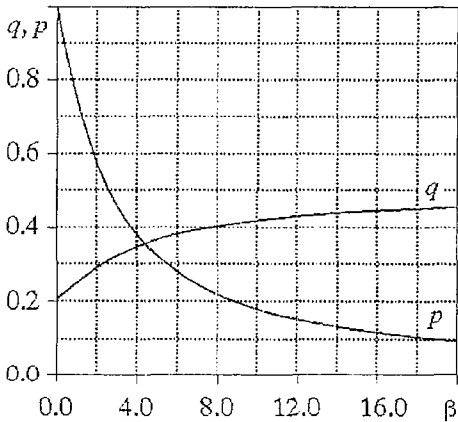


Рис. 2

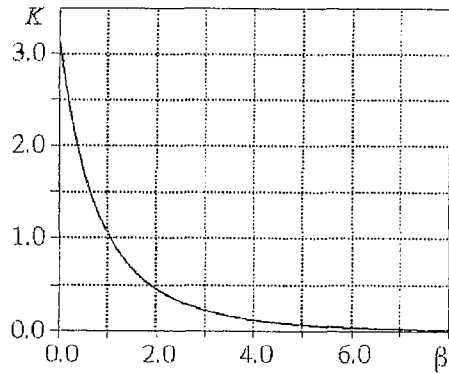


Рис. 3

соответствующего значения параметра $K(\beta)$. Зависимости $K(\beta)$ и коэффициентов $C_{f1}(\beta)$, $C_{g1}(\beta)$ в степенных асимптотиках функций $f_{1as}(\xi)$, $g_{1as}(\xi)$, найденные нами численными методами, изображены на рис. 3, 4. Заметим, что, как следует из результатов численных расчетов, функция $C_{g1}(\beta)$ имеет максимум при значении $\beta = \beta_c \approx 2.618$, которому соответствует линейный профиль $\varepsilon(r, t_0)$ ($p=1/2$). Нормированные автомодельные функции $f_1(\xi)$, $g_1(\xi)$ и их асимптотики для значения параметра $\beta=4$ изображены на рис. 5.

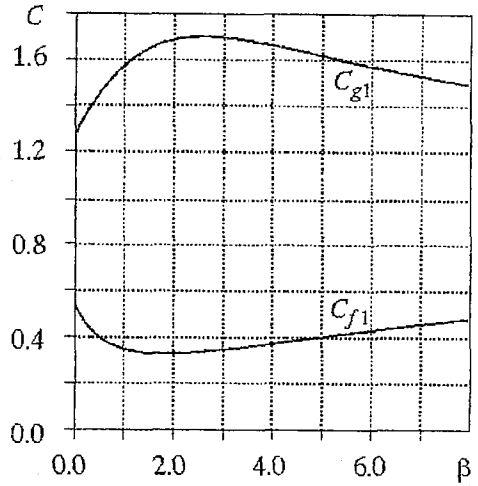


Рис. 4

Знание параметра $K(\beta)$ позволяет выразить одно из двух оставшихся неизвестными начальных значений $f(0)$ и $g'(0)$ через другое: $f(0) = g'(0)/K(\beta)$, чем устанавливается существование однопараметрического (с параметром $g'(0)$) семейства автомодельных решений, обладающих требуемыми степенными асимптотиками на бесконечности: $f_{as} = C_f \xi^{2p}$, $g_{as} = C_g \xi^{2q}$ (C_f и C_g – константы, зависящие от β и $g'(0)$). Какое из автомодельных решений этого класса реализуется на стадии обострения в исходной полной задаче (10)–(12) при $\bar{v}=0$, может зависеть, в принципе, от начального распределения плотности плазмы $n(r, 0)$ и модуля амплитуды внешнего поля E_0 . Для установления этой связи было проведено численное моделирование эволюции процесса пробоя на базе уравнений (10)–(12) при $\bar{v}=0$ для широкого класса начальных распределений типа «колокол на пьедестале» (рис. 6). Было найдено, что в малой окрестности точки $r=0$ в области значений параметров $\beta=4$, $n_0 \leq 0.9$, $n_0 - n_1 \geq 0.2$, $1.5 < R \leq 100$, $1 \leq R/r_1 \leq 200$, $1.2 \leq E_0 \leq 3$ динамические структуры, формируемые на стадии обострения, хорошо совпадают с автомодельными решениями уравнений (14), (15), отвечающими

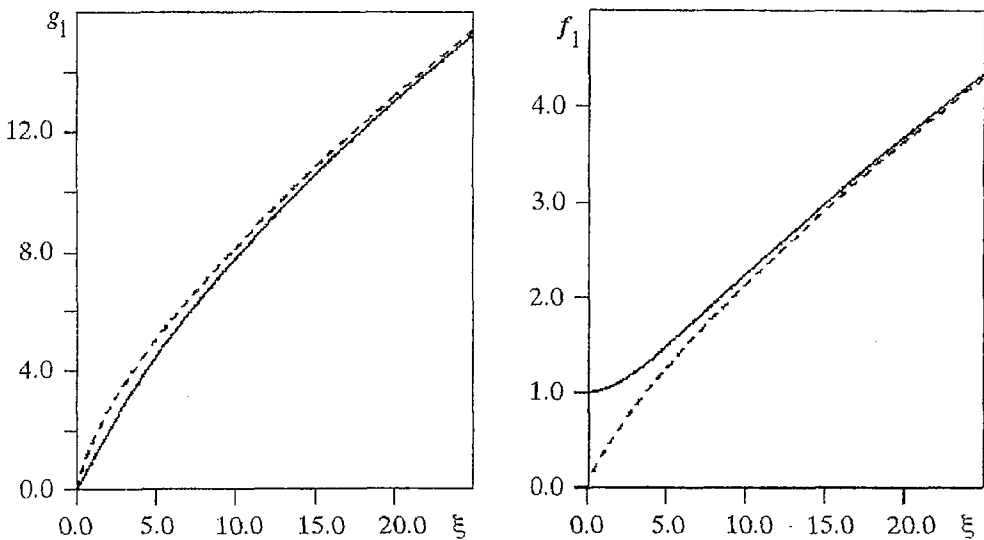


Рис. 5. Нормированные автомодельные функции – решения уравнений (21), (22) (сплошные кривые) и их степенные асимптотики (пунктир) при $\beta=4$

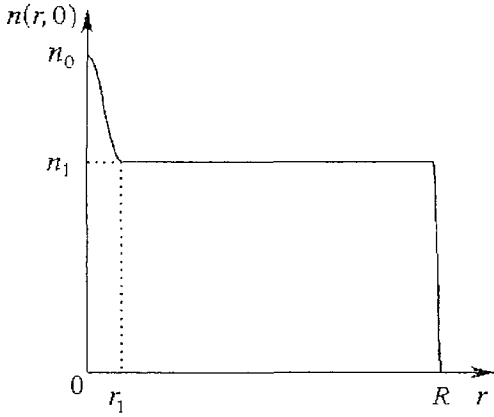


Рис. 6. Начальное распределение плотности плазмы типа «колокол на пьедестале»

параметру $g'(0)$, зависящему только от величины модуля амплитуды внешнего поля E_0 . Значения параметра $g'(0)$ определялись из численного решения задачи (10)–(12).

На основании анализа зависимости $g'(0)$ от E_0 был сформулирован приближенный рецепт выбора автомодельного решения, отвечающего заданному значению E_0 . В соответствии с этим рецептом (см. формулу (27)) связь $g'(0)$ с внешним полем E_0 принимается такой же, как в задаче, где распределение $\varepsilon(r)=1-n(r)$ совпадает с автомодельной асимптотикой $\varepsilon_{as}(r)=C_f r^{2p}$ вплоть до

значения $\varepsilon=1$. В качестве обоснования приближенной применимости этого рецепта для рассмотренного нами достаточно широкого класса начальных распределений плотности можно привести следующие соображения.

Пусть в момент времени $t \approx t_0$ задано распределение рис. 6 с $n_0 \approx 1$; на промежутке $r \leq r_1$ распределения $\varepsilon=1-n$ и ψ совпадают со своими автомодельными решениями, причем $\xi_1=r_1/(t_0-t)^{1/2} \gg 1$. Тогда при $r=r_1$ можно считать $\varepsilon_1=C_f r_1^{2p}$, $\psi_1=\psi(r_1)=C_g r_1^{2q}$. Отсюда для распределения рис. 6 при известном значении модуля амплитуды невозмущенного внешнего поля определяется коэффициент C_g

$$C_g = 2^{3/2} E_0 r_1^{1-2q} / [(1+\varepsilon_1)(1+2q) + (r_1^2/R^2)(1-\varepsilon_1)(1-2q)]. \quad (23)$$

Найдем коэффициент $C_g=C_g^*$ для распределения без пьедестала, положив в формуле (23) $\varepsilon_1=1$, $r_1=R^*=C_f^{-1/(2p)}$

$$C_g^* = 2^{1/2} E_0 (R^*)^{1-2q} / (2q+1). \quad (24)$$

Отношение коэффициента C_g , найденного по формуле (23), к коэффициенту C_g^* (24), равное отношению локальных значений величины поля при $r \leq r_1$ в распределениях с пьедесталом и без пьедестала, с учетом равенства $r_1/R^*=\varepsilon_1^{1/(2p)}$ имеет вид

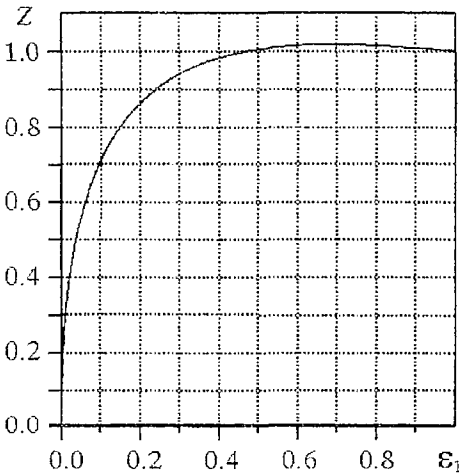


Рис. 7

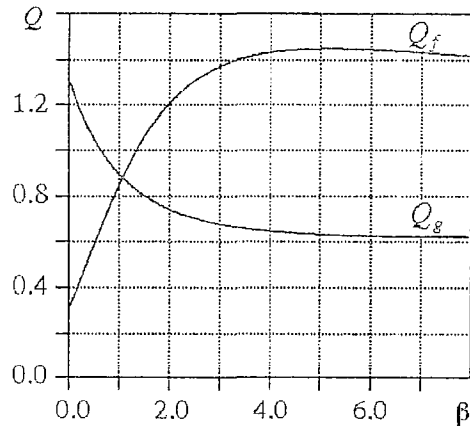


Рис. 8

$$Z = C_g/C_g^* = 2\varepsilon_1^{(1-2q)/(2p)} / [1 + \varepsilon_1 + (r_1^2/R^2)(1-\varepsilon_1)(1-2q)/(1+2q)]. \quad (25)$$

При $(1-\varepsilon_1)r_1^2/R^2 \ll 1$ (что всегда имело место в проведенных численных расчетах) третьим слагаемым в знаменателе выражения (25) при любом значении $\beta \geq 0$ можно пренебречь по сравнению с единицей, при этом функцию Z можно считать не зависящей от отношения r_1/R (фактически, от ширины пьедестала)

$$Z(\beta, \varepsilon_1) = 2\varepsilon_1^{(1-2q)/(2p)} / (1 + \varepsilon_1). \quad (26)$$

Следует отметить, что показатель степени в формулах (25), (26) является медленной функцией β и принимает значения от 0.3 до 0.5 при изменении β от 0 до ∞ . В частности, при $\beta=4$ функция Z имеет следующий вид: $Z(\varepsilon_1) = 2\varepsilon_1^{0.408} / (1 + \varepsilon_1)$. При $\varepsilon_1 \geq 0.3$ функция $Z(\varepsilon_1)$ (рис. 7) почти постоянна: ее значения лежат в пределах от 0.94 до 1.02, поэтому величину поля на автомодельном участке распределений поля и плотности плазмы с высокой точностью можно считать локальной функцией ε , не зависящей от высоты и ширины пьедестала. На основании вышесказанного воспользуемся формулой (24) для определения связи параметров $g'(0)$ и E_0 .

Подставляя в формулу (24) $R^* = C_f^{-1/(2p)}$, $C_g^* = C_g = C_{g1}(\beta)g'(0)$, $C_f = C_{f1}(\beta)f(0)$ (C_{g1} , C_{f1} – коэффициенты при степенных асимптотиках нормированных функций g_1 и f_1), получаем искомые выражения для нахождения $g'(0)$ и $f(0)$

$$g'(0) = Q_g(\beta)E_0^p, \quad f(0) = g'^{\beta}(0)/K = Q_f(\beta)E_0^{p\beta}, \quad (27)$$

где зависимости

$$Q_g(\beta) = \{2^{1/2}/[(2q+1)C_{g1}]\}^p (K/C_{f1})^{0.5-q}, \quad Q_f(\beta) = \{2^{1/2}/[(2q+1)C_{g1}]\}^{p\beta} (1/C_{f1})(C_{f1}/K)^p$$

изображены на рис. 8. Когда $\beta=4$, то $q \approx 0.345$, $p \approx 0.38$, $K \approx 0.123$, $C_{f1} \approx 0.374$, $C_{g1} \approx 1.67$, $Q_g \approx 0.65$, $Q_f \approx 1.43$, и выражения (27) запишутся следующим образом:

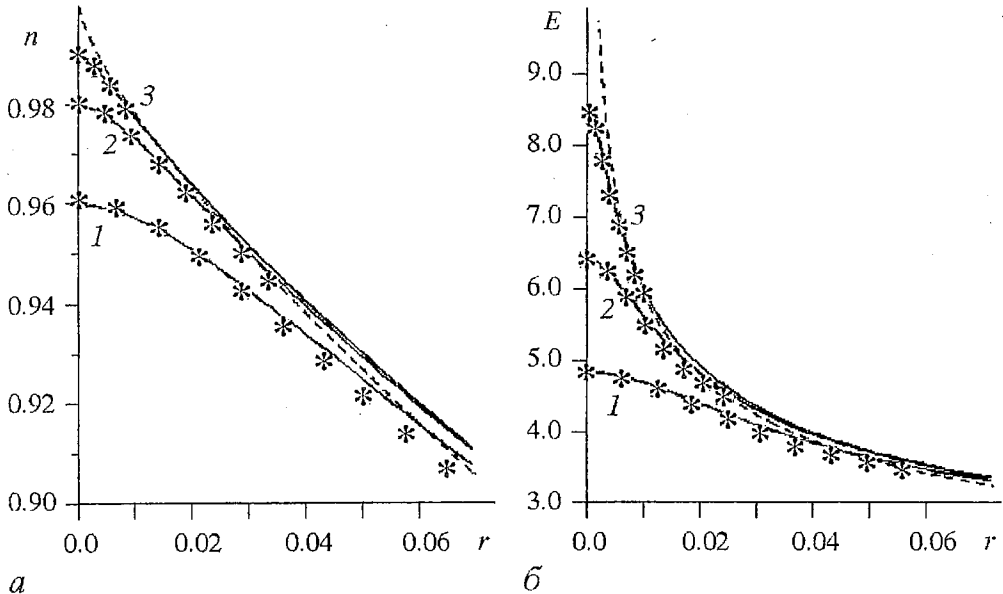


Рис. 9. Выход решений с «физическими» начальными условиями на автомодельные вблизи момента достижения особенности ($t \approx t_0 \approx 0.108$). Сплошные кривые – решения задачи (8), (10)–(13) с теми же начальными и граничными условиями, что и кривые рис. 1 при $\bar{v}=0$, $\beta=4$, $E_0=1.2$; звездочки – автомодельные решения уравнений (14), (15); пунктир – асимптотики автомодельных решений $n_{as}=n(r, t_0)$, $E_{as}=E(r, t_0)$. Кривые 1–3 на каждом из графиков соответствуют значениям разности $(t_0 - t) \times 10^5 = 3.61, 0.572, 0.0918$

$$g'(0) \approx 0.65E_0^{0.38}, \quad f(0) \approx 1.43E_0^{1.52}. \quad (28)$$

При $E_0=1.2$ формулы (28) дают значения $g'(0) \approx 0.7$, $f(0) \approx 1.9$.

Процесс выхода решений $\epsilon(r,t)$ и $E(r,t)$ на автомодельные в области малых положительных $\epsilon(r,t)$ иллюстрируется результатами численных расчетов, представленными на рис. 9 для тех же значений параметров ($\beta=4$, $E_0=1.2$) и тех же начальных и граничных условий, что и кривые рис. 1. Как видим, при значениях t , достаточно близких к t_0 ($t_0-t < 3.6 \cdot 10^{-5}$), решения задачи (10)–(13) с $\bar{v}=0$ (сплошные кривые) вблизи точки плазменного резонанса (при $1-n(0,t) < 6 \cdot 10^{-2}$, $E(0,t) > 4$) близки к автомодельным, изображенным звездочками на рис. 9 для тех же значений разности (t_0-t). Пунктиром на рис. 9 показаны асимптотики автомодельных решений

$$n_{as}(r) = n(r, t_0) = 1 - 0.71r^{0.76},$$

$$E_{as}(r) = E(r, t_0) = 1.17(1+4q^2)^{1/2} r^{2q-1} = 1.42r^{-0.31}.$$

Заключение

Решенная выше задача о нелинейной динамике осесимметричного разряда во вращающемся внешнем поле имеет ряд принципиальных отличий от одномерной задачи, рассмотренной в работе [6].

Во-первых, спецификой двумерной системы служит то, что в цилиндрическом разряде помимо неограниченного роста поля в точке $\epsilon=0$, при малых частотах столкновений электронов (в области $\nu \ll \omega$) есть эффект возрастания поля вследствие «геометрического» резонанса в системе. В случае однородного плазменного цилиндра, согласно выражению для внутреннего поля $E=2E_0/(\epsilon+1)$, этот резонанс возникает при $\epsilon=-1$. В нашем случае плазма не является однородной, однако, как видно из результатов численных расчетов (см. рис. 1), усиление поля во всей области разряда за счет «геометрического» резонанса оказывается весьма существенным.

Во-вторых, интересно отметить, что в данной работе удалось построить автомодельные решения, соответствующие исходной физической задаче, при постоянном коэффициенте амбиполярной диффузии $D=\text{const}$, что невозможно было сделать в одномерной задаче, рассмотренной в работе [6], где автомодельное решение существовало только при степенной зависимости коэффициента диффузии от амплитуды электрического поля (ситуация там оказалось схожей с описанной в книге [12]). Однако, в отличие от одномерного случая, где автомодельное решение, отвечающее заданному значению внешнего поля E_0 , находится однозначно и автоматически, в рассмотренном цилиндрически симметричном разряде выбор нужного автомодельного решения из найденного однопараметрического семейства представляет собой в общем случае предмет дополнительного исследования.

В-третьих, в одномерной задаче модуль амплитуды поля $E \sim 1/\epsilon$. В двумерной задаче характер особенности в условиях сильного плазменного резонанса, то есть при $\epsilon \ll 1$, можно описать аналитически только с помощью найденных автомодельных решений. Так, в процессе обострения профилей амплитуды поля и плотности плазмы $E \sim \epsilon^{-(1-2q)/(2p)} \approx 1/\epsilon^{0.408}$ при $\beta=4$, то есть особенность носит более «слабый» характер, чем в одномерной задаче. Данный факт можно объяснить частичным «обтеканием» силовыми линиями поля области режима обострения.

Авторы признательны В. Е. Семенову за полезные дискуссии и замечания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 99-02-16238).

Библиографический список

1. Гильденбург В.Б., Ким А.В. Ионизационные неустойчивости электромагнитной волны // ЖЭТФ. 1978. Т. 74, вып. 1. С. 141.
2. Вихарев А.Л., Гильденбург В. Б., Иванов О.А., Степанов А.Н. СВЧ-разряд в пересекающихся пучках электромагнитных волн // Физика плазмы. 1984. Т. 10, вып. 1. С. 165.
3. Вихарев А.Л., Гильденбург В.Б., Голубев С.В. и др. Нелинейная динамика свободно локализованного СВЧ-разряда в пучке электромагнитных волн // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, вып. 4. С. 136.
4. Гильденбург В.Б., Солодов А.А. Нелинейная стадия ионизационно-полевой неустойчивости в высокочастотном разряде // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 62, вып. 7. С. 535.
5. Gil'denburg V.B., Litvak A.G., Zharova N.A. Microfilamentation in optical-field-induced ionization process // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, № 15. P. 2968.
6. Введенский Н.В., Вдовичева Н.К., Гильденбург В.Б. и др. Мелкомасштабные динамические структуры в микроволновых разрядах низкого давления // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 8. С. 991.
7. Гильденбург В.Б., Залезский А.А., Семёнов В.Е. Волна ионизации в продольном высокочастотном поле // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 10. С. 991.
8. Мак-Доналд А. Сверхвысокочастотный пробой в газах. М.: Мир, 1969.
9. Mayhan J.T., Fante R.L., O'Keef R. et al. Comparison of various microwave breakdown prediction models // J. Appl. Phys. 1971. Vol. 42, № 13. P. 5362.
10. Гуревич А.В., Шварцбург А.Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М.: Наука, 1973.
11. Гильденбург В.Б., Семенов В.Е. Стационарные структуры неравновесного высокочастотного разряда в квазистатических полях // Физика плазмы. 1980. Т. 6, вып. 2. С. 445.
12. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

Институт прикладной физики РАН
Нижний Новгород

Поступила в редакцию
после доработки

7.09.99
8.12.99

SHARPENING SELF-SIMILAR STRUCTURES IN THE LAW-PRESSURE HIGH-FREQUENCY DISCHARGE

N.V. Vvedenskii, V.B. Gildenburg, A.A. Solodov

The nonlinear dynamics of the cylindrically symmetric high-frequency discharge produced by a circular polarized electric field is considered. Three main stages of discharge evolution are analyzed by computer simulation. These stages are the following: (i) self-accelerating avalanche-like process which develops up to plasma density maximum corresponding to «geometric» resonance of the plasma cylinder; (ii) diffusion propagation of the fast ionization wave which contains the plasma resonance region at its leading edge; (iii) transition to the steady-state. The sharpening regimes for the field amplitude and plasma density profiles in the vicinity of the plasma resonance point at the axes are analyzed. The arising dynamic structures are found to be in a good agreement with the self-similar solution defined for the electric field and plasma density nonlinear equation set.



Введенский Николай Владимирович – родился в Горьком (1976), окончил Нижегородский государственный университет, факультет – Высшая школа общей и прикладной физики (1999). После окончания ННГУ работает в Институте прикладной физики РАН и учится в аспирантуре ИПФ РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика микроволновых и оптических разрядов.



Гильденбург Владимир Борисович – родился в Бобруйске, Белоруссия (1936), окончил радиофизический факультет Горьковского (ныне Нижегородского) государственного университета (1959). После окончания университета работает на кафедре электродинамики ГГУ, а также в Институте прикладной физики РАН. Защитил кандидатскую диссертацию (1965) в ГГУ и докторскую (1983) в Научно-исследовательском радиофизическом институте. Область научных интересов – электродинамика плазмы, физика высокочастотных разрядов. Автор более 150 научных работ. Лауреат Государственной премии СССР (1987) и премии Нижнего Новгорода в области высшей школы (1993). E-mail: gil@appl.sci-nnov.ru



Солодов Андрей Аркадьевич – родился в Горьком (1973), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (1996) и аспирантуру Института прикладной физики РАН (1999). В настоящее время работает в ИПФ РАН. Область научных интересов – взаимодействие сильного электромагнитного излучения с плазмой.



О ПРИЧИНЕ РАЗМЫТИЯ ОТДЕЛЬНЫХ УЧАСТКОВ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА АВТОДИННОГО СИГНАЛА ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ЛАЗЕРА ПРИ ДВИЖЕНИИ ВНЕШНЕГО ОТРАЖАТЕЛЯ

Д.А. Усанов, А.В. Скрипаль, М.Ю. Калинин

На основе численного решения системы дифференциальных уравнений для полупроводникового лазера с вибрирующим внешним отражателем проведено моделирование экспериментально наблюдающегося размытия фазовых траекторий на отдельных участках. Установлена связь размытия траекторий с генерацией релаксационных колебаний на этих участках. Показано, что в режиме генерации релаксационных колебаний полупроводниковый лазер обладает высокой чувствительностью к флуктуациям параметров внешней оптической обратной связи и неустойчивости источника питания.

Введение

Как следует из результатов эксперимента, описанного в работе [1], на фазовом портрете автодинного сигнала при движении внешнего отражателя наблюдалось появление размытия фазовой траектории на отдельных ее участках. Причина этого явления объяснена не была.

Теоретический анализ

Излучательные характеристики полупроводникового лазера при наличии внешней оптической обратной связи, как известно [1,2], зависят от режима его работы, амплитуды и фазы возвращающегося в лазер собственного излучения, длины внешнего резонатора. Такая зависимость наглядно проявляется при построении фазовых портретов автодинного сигнала, полученного при движении внешнего отражателя. В основу теоретических исследований была положена модель Лэнга и Кобаяши [3], в которой лазерный диод описывается системой дифференциальных уравнений для амплитуды $E(t)$ и фазы $\Phi(t)$ поля $E(t)\cos(\omega_0 t + \Phi(t))$ и концентрации носителей заряда $N(t)$ [4]

$$dE(t)/dt = 1/2 G_N \Delta N E(t) + z E(t-\tau) \cos \Delta(t), \quad (1)$$

$$d\Phi(t)/dt = 1/2 \alpha G_N \Delta N - z E(t-\tau) \sin \Delta(t) / E(t), \quad (2)$$

$$dN(t)/dt = J - N(t)/\tau_s - G(N)(E(t))^2. \quad (3)$$

Здесь ω_0 – оптическая частота излучения уединенного лазера на пороге генерации; усиление $G(N)=G_N(N-N_0)$ задается дифференциальным усилением G_N и концентрацией N_0 при нулевом усилении; $\Delta N=N-N_{th}$, N_{th} – пороговая концентрация носителей для уединенного лазера; J – ток инжекции; τ_s – время жизни носителей заряда в активной области; α – коэффициент уширения линии генерации [12]; $\Delta(t)=\varphi_0+\Phi(t)-\Phi(t-\tau)$ – набег фазы волны для лазера с обратной связью за время обхода внешнего резонатора τ , $\varphi_0=\omega_0\tau$ – стационарный набег фазы для уединенного лазера; степень связи внешнего резонатора с внутренним $z=(1-R^2)r/(R\tau_{in})$ определяется амплитудными коэффициентами отражения лазерной грани R и внешнего отражателя r , соответственно, а также временем обхода излучением диодного резонатора τ_{in} .

Численное моделирование системы (1–3) проводилось методом Рунге – Кутты четвертого порядка. В качестве начальных значений амплитуды $E=E(t)$ и фазы $\Phi=\Phi(t)$ для времени $[-\tau,0]$ использовались стационарные решения системы дифференциальных уравнений (1)–(3) $E(t)=E^*$, $\Phi(t)=(\omega-\omega_0)t$, $N(t)=N^*$ (E^* , ω , N^* – не зависят от времени), которые в случае превышения током инжекции J своего порогового значения $J_{th}=N_{th}/\tau_s$ имеют вид

$$\varphi_0 = \varphi + C\sin(\varphi+\psi), \quad (4)$$

$$G_N\Delta N^* = -2z\cos\varphi, \quad (5)$$

$$E^{*2} = (J - N^*/\tau_s)/G(N^*), \quad (6)$$

где $\varphi=\omega\tau$ – стационарный набег фазы волны во внешнем резонаторе для лазера с обратной связью; $C=(1+\alpha^2)^{1/2}\tau z$ – параметр внешней оптической обратной связи; $\psi=\arctg\alpha$.

Для получения решения системы дифференциальных уравнений (1)–(3) с запаздывающими слагаемыми в момент времени t требуется знание функций $E=E(t)$ и $\Phi=\Phi(t)$ в промежутке $[t-\tau,t]$. Хранение информации о вычисленных значениях функций $E(t)$ и $\Phi(t)$ в течение времени задержки τ осуществлялось с помощью двух постоянно обновляемых массивов размерностями 2000 элементов. Значения заданных при расчете параметров приведены в таблице.

Таблица

Параметр	Обозначение	Численное значение
Дифференциальное усиление	G_N	$1.1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$
Концентрация при нулевом усилении	N_0	$1.1 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$
Время жизни носителей заряда	τ_s	2 нс
Пороговая концентрация	N_{th}	$1.55 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$
Время обхода диодного резонатора	τ_{in}	8 пс
Коэффициент уширения	α	5

Результаты численного моделирования

Компьютерное моделирование проводилось в два этапа. На первом этапе определялось поведение системы (1)–(3) вблизи стационарного решения (4)–(6) на наличие сходимости. На фазовой плоскости $(P(t)-P^*, \dot{P}(t))$, где $P(t)=(E(t))^2$ – мгновенное значение световой мощности при автоколебаниях, $P^*=(E^*)^2$ – стационарное значение мощности, приведено решение с предельным значением в виде точки (рис. 1, а) для значений $\varphi_0=0.5$, $C=0.4$. В случае, если решение системы уравнений (4)–(6) являлось неустойчивым, проводился второй этап решения, в ходе которого вычислялось предельное решение в виде цикла. Его вид приведен на рис. 1, б для $\varphi_0=1$, $C=0.4$ и характеризует появление автоколебаний в системе, описываемой уравнениями (1)–(3). Здесь же показана динамика поиска решений с предельной траекторией в виде замкнутого цикла при выборе начальной точки внутри (кривая 2) или снаружи (кривая 3) цикла. Пунктирные линии показывают, что кривые 2 и 3 после прохождения бесконечного числа оборотов сходятся к предельному циклу 1 изнутри и снаружи, соответственно.

На рис. 2 приведена зависимость интервала значений фазового набега, на котором происходит генерация релаксационных колебаний $\Delta\varphi_0$, от параметра обратной связи C . Как видно из этого рисунка, существует пороговое значение уровня обратной связи, при котором возникает область значений $\Delta\varphi_0$, характеризующаяся появлением релаксационных автоколебаний в такой системе.

Для моделирования сигнала фотодетектора при механических гармонических колебаниях внешнего отражателя функция стационарного набега фазы $\varphi_0(t)$ задавалась в виде

$$\varphi_0(t) = \varphi_{0F} + \varphi_{0A} \cos(\Omega t), \quad (7)$$

где φ_{0F} – значение стационарного набега фазы при фиксированном расстоянии до отражателя; φ_{0A} – амплитуда изменения фазового набега; Ω – частота механических колебаний отражателя. При этом для каждого момента времени t производилось численное моделирование по методике, описанной выше.

Поскольку при измерениях низкочастотной составляющей автодинного сигнала происходит его интегрирование за счет инерционных свойств фотоприемника, усилителя и аналого–цифрового преобразователя, производилось усреднение мгновенного значения мощности за период предельного цикла T_R

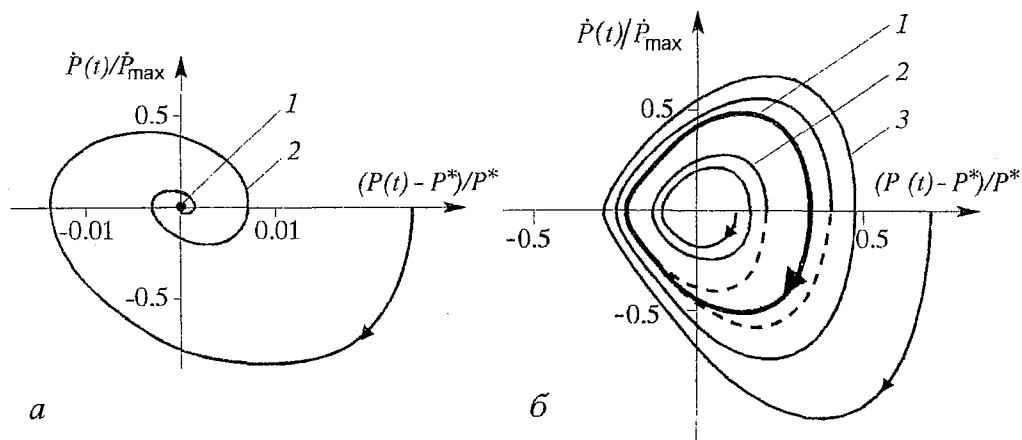


Рис. 1. Фазовые портреты затухающих (а) и незатухающих (б) релаксационных автоколебаний.

1 – предельные решения, 2, 3 – динамические решения; $C=0.4$; $\varphi_0=0.5$ (а); $\varphi_0=1$ (б). Здесь \dot{P}_{\max} – максимальное расчетное значение производной мощности P , P^* – стационарное значение мощности

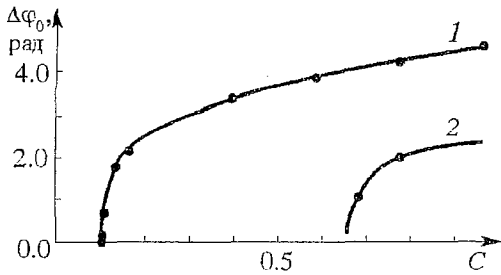


Рис. 2. Зависимость интервала значений фазового набега $\Delta\varphi_0$, соответствующего генерации релаксационных колебаний, от параметра обратной связи C при двух положениях внешнего отражателя L : 1 – 1.5 см; 2 – 0.3 см

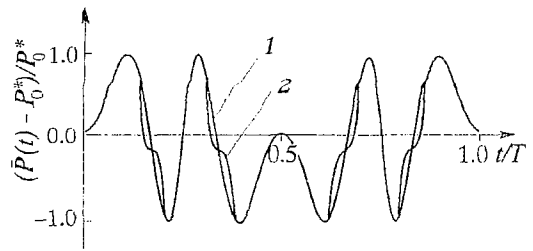


Рис. 3. Зависимости усредненной мощности $(\bar{P}(t) - P^*_0)/P^*_0$ от времени t , нормированного на период колебаний внешнего отражателя T , с параметрами $\varphi_{0F} = \pi/2$, $\varphi_{0A} = 2\pi$, $L = 1.5$ см, $J/J_{th} = 1.3$ для двух значений уровня обратной связи C : 1 – 0.09; 2 – 0.2

$$\bar{P}(t) = 1/T_R \int_{t-T_R}^t P(t_0) dt_0 \quad (8)$$

для различных значений уровня обратной связи.

На рис. 3 приведены зависимости нормированной усредненной мощности $(\bar{P}(t) - P^*_0)/P^*_0$ от времени t , нормированного на период колебаний внешнего отражателя T , где $P^*_0 = (P^*_{min} + P^*_{max})/2$ – среднее арифметическое минимального и максимального значений стационарной мощности при изменении фазового набега φ_0 на длине интервала 2π . Приведенные зависимости характеризуют движение внешнего отражателя с частотой механических колебаний $\Omega = 1$ Гц и амплитудой $\xi = 0.5$ мкм для лазера с длиной волны $\lambda = 1$ мкм, где указанные параметры связаны с амплитудой изменения фазового набега соотношением

$$\varphi_{0A} = 4\pi\xi/\lambda. \quad (9)$$

Как видно из рис. 3, с ростом уровня обратной связи C отклонение от первоначальной формы автодинного сигнала оказывается различным на различных участках зависимости $\bar{P}(t)$. При этом можно выделить участки с резкими изменениями угла наклона автодинного сигнала, которые, как показали расчеты, соответствуют возникновению режима незатухающих релаксационных колебаний.

На рис. 4 приведена зависимость усредненной мощности от времени, рассчитанная при возможной на практике флуктуации тока питания. Как следует из результатов, приведенных на рисунке, флуктуации тока питания приводят к значительному искажению траектории зависимости мощности автодинного сигнала от времени на тех же участках, где происходит генерация релаксационных колебаний. Такое поведение автодинного сигнала можно трактовать как существование участков высокой чувствительности автодинной системы к флуктуациям ее параметров при генерации релаксационных колебаний в полупроводниковом лазере. Экспериментально это выражается в появлении участков размытия на фазовом портрете. Аналогичные участки со значительными искажениями траектории зависимости мощности автодинного сигнала от времени были теоретически обнаружены и при задании реальных на практике флуктуаций параметров внешней оптической обратной связи.

Изложенное выше подтверждается полученными расчетным путем фазовыми портретами для усредненного за период предельного цикла значения квадрата амплитуды поля при колебаниях внешнего отражателя для двух значений тока инжекции ($J_1/J_{th} = 1.01$; $J_2/J_{th} = 1.02$; $\varphi_{0A} = 1.5$; $\varphi_{0F} = 0.75$; $C = 0.9$), приведенными на рис. 5. Как видно из этого рисунка, при флуктуациях тока инжекции в пределах от

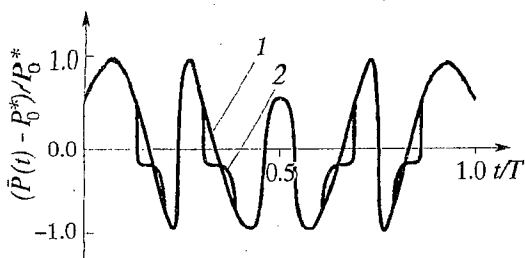


Рис. 4. Зависимости усредненной мощности $(\bar{P}(t) - P_0^*)/P_0^*$ от времени t , нормированного на период колебаний внешнего отражателя T , с параметрами $\varphi_{0F} = \pi/2$, $\varphi_{0A} = 2\pi$, $L = 1.5$ см, $C = 0.9$ для двух нормированных значений тока инжекции J/J_{th} : 1 – 1.01; 2 – 1.03

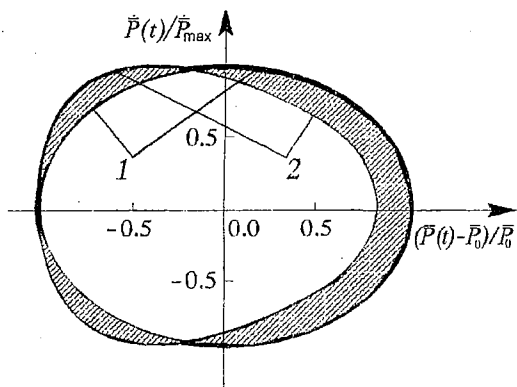


Рис. 5. Фазовые портреты мощности излучения, усредненные за период предельного цикла, при колебаниях внешнего отражателя с параметрами $\varphi_{0F} = 1.5$, $\varphi_{0A} = 0.75$, $L = 1.5$ см, $C = 0.9$ для двух нормированных значений тока инжекции J/J_{th} : 1 – 1.01; 2 – 1.02

$J/J_{th} = 1.01$ до $J/J_{th} = 1.02$ фазовые траектории автодинного сигнала будут находиться в заштрихованной области. На практике это означает, что небольшие флуктуации, например, тока питания, характерные для стандартных источников питания, должны приводить к размытию отдельных участков фазовых траекторий, которые наблюдались нами экспериментально [1].

Выводы

На основе численного решения системы дифференциальных уравнений для полупроводникового лазера с внешним отражателем показано, что в режиме релаксационных колебаний автодинная система характеризуется повышенной чувствительностью к флуктуациям ее параметров. Появление размытия фазовой траектории на отдельных ее участках объясняется высокой чувствительностью автодинной системы на этих участках к неустойчивости источника питания и флуктуациям параметров внешней оптической обратной связи.

Библиографический список

1. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Калинин М.Ю. Формирование автодинного сигнала в полупроводниковом лазере при движении внешнего отражателя // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 1. С. 3.
2. Скрипаль А.В., Усанов Д.А., Вагарин В.А., Калинин М.Ю. Автодинное детектирование в полупроводниковом лазере при движении внешнего отражателя // ЖТФ. 1999. Т. 69, вып.1. С. 72.
3. Lang R., Kobayashi K. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // IEEE J. Quant. Electron. 1980. Vol. QE-16. P. 347.
4. Tromborg B., Osmundsen J.H., Olesen H. Stability analysis for a semiconductor lasers in an external cavity // IEEE J. Quantum Electron. 1984. Vol. QE-20. P. 1023.
5. Osinski M., Buus J. Linewidth broadening factor in semiconductor lasers (an overview) // IEEE J. Quant. Electron. 1987. Vol. QE-23, № 1. P. 9.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 18.10.99
после доработки 1.12.99

THE REASON OF BLURRING REGIONS OF PHASE PATTERN FOR AUTODINE SIGNAL OF SEMICONDUCTOR LASER DURING MOVEMENT OF THE EXTERNAL REFLECTOR

D.A.Usanov, A.V.Skripal, M.Yu.Kalinkin

The computer simulation of the experimentally observed blurring of phase trajectories on the certain parts has been made with the help of numerical calculations of the system of differential equations for semiconductor laser with vibrating external reflector. The relation of the blurring of trajectories with generation of relaxation oscillations on these parts has been found. It has been shown that semiconductor laser in the generation regime of relaxation oscillations has the high sensitivity to the fluctuations of parameters of external optical feedback and to the non-stability of power supply.



Usanov Дмитрий Александрович родился в 1943 году в Менделеевске (Татария). Окончил Саратовский госуниверситет (1965). Кандидат физико-математических наук (1972), доктор физико-математических наук (с 1989), с 1990 – профессор кафедры физики твердого тела, с 1985 по настоящее время – заведующий кафедрой физики твердого тела, с 1989 – проректор по НИР СГУ. Автор большого числа статей и изобретений по твердотельной электронике и радиофизике, заслуженный деятель науки РФ. Член IEEE, академик МАН ВШ.



Скрипаль Анатолий Владимирович – родился в Саратове (1960). Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1982), защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук по специальности «Оптика» (1991). С 1982 года научный сотрудник кафедры физики твердого тела Саратовского госуниверситета. Автор более 70 научных трудов в области когерентной оптики, вибродиагностики и квантовой электроники.



Калинкин Михаил Юрьевич – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1995). В настоящее время аспирант кафедры физики твердого тела. Область научных интересов – физика полупроводников, твердотельная электроника и радиофизика.



ПАРАМЕТРЫ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ РЕКУРСИВНОЙ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КВАНТОВАНИЕМ

Ю.А. Брюханов, Е.А. Мясников

Исследованы параметры предельных циклов, возникающих в системе второго порядка с нелинейным сумматором. Рассматриваются квантования двух типов: округление и усечение по величине. Предложены новые методы (аналитический и численный) исследования зависимостей параметров предельных циклов от коэффициентов системы. При помощи первого из них получены ограничения в виде рациональных функций от коэффициентов системы на амплитуды предельных циклов. Эти ограничения подтверждены при помощи второго метода.

Введение

Рассматриваются свободные колебания в цифровой рекурсивной системе второго порядка прямой формы реализации [1]. Система содержит сумматор, два элемента задержки z^{-1} и два умножителя $-a$ и b (рис. 1). Практически реализуемая цифровая система имеет конечную разрядность машинного слова, вследствие чего обладает конечным числом состояний, а ее выходной сигнал квантован по уровню. Исследуются два метода квантования результатов суммирования: усечение по величине и округление. Оба метода реализуются при построении системы, использующей двоичный дополнительный код [2]. Ниже полагаем, что параметры системы выбираются внутри треугольника устойчивости [3]

$$\Delta = \{(a,b) : |b| < 1 \cap b + |a| < 1\}.$$

Квантование выходного сигнала приводит к возникновению нежелательных автоколебаний – предельных циклов. В известных работах даются либо отрывочные, либо приближенные сведения о влиянии эффектов квантования на динамику цифровых фильтров. Так, в работах [2,4–6] описаны аналитические методы исследования динамики конкретных структур рекурсивных цифровых фильтров второго порядка с фиксированными нелиней-

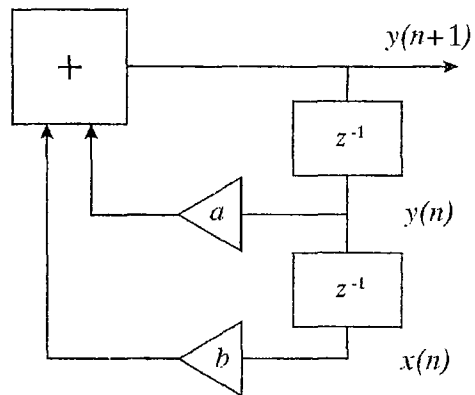


Рис. 1. Структурная схема рекурсивной цифровой системы

ностями квантования, а также приводятся результаты моделирования узкого класса таких структур. При этом авторы ограничиваются рассмотрением небольших интервалов значений параметров систем, малых длин периодов (до 4-х) и не предлагают более универсальных методов исследования параметров предельных циклов. Это обуславливает необходимость создания более общих и более точных методик исследования таких проблем.

Для достижения поставленной задачи предлагаем новые методы (аналитический и численный) исследования зависимостей параметров предельных циклов от коэффициентов системы.

1. Аналитическое исследование

Определим параметры предельных циклов. Без потери общности положим шаг квантования равным единице. При этом свободные колебания цифровой системы второго порядка с одним квантователем после сложения описываются разностным уравнением

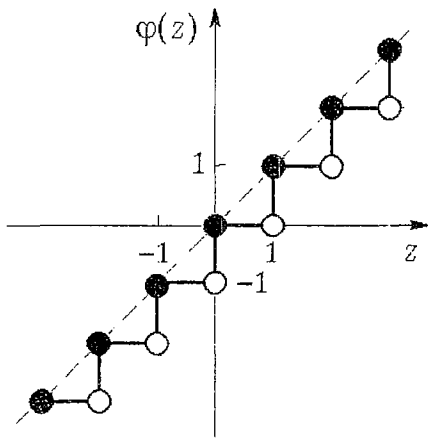


Рис. 2. Характеристика квантователя

$$x_{n+2} = \varphi(ax_{n+1} + bx_n - c), \quad (1)$$

где при усечении по величине $c=0$, при округлении $c=-1/2$, а функция $\varphi(z)$ определена следующим образом:

$$\varphi(z) = L, \text{ если } L \leq z < L + 1, \quad (2)$$

где L – целое число. Вид функции (2) показан на рис. 2. Все движения системы вследствие характерного ступенчатого вида функции $\varphi(z)$ суперустойчивы.

Условием существования предельного цикла периода N является разрешимость системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x_0 = \varphi(ax_{N-1} + bx_{N-2} - c), \\ x_1 = \varphi(ax_0 + bx_{N-1} - c), \\ x_2 = \varphi(ax_1 + bx_0 - c), \\ \dots \\ x_{N-1} = \varphi(ax_{N-2} + bx_{N-3} - c), \end{cases} \quad (3)$$

где x_i – целые числа, а $i \in [0, N-1]$. Ступенчатый характер функции $\varphi(z)$ позволяет преобразовать эти условия в систему линейных неравенств

$$\begin{cases} C_1 \leq ax_{N-1} + bx_{N-2} - x_0 < C_2, \\ C_1 \leq ax_0 + bx_{N-1} - x_1 < C_2, \\ C_1 \leq ax_1 + bx_0 - x_2 < C_2, \\ \dots \\ C_1 \leq ax_{N-2} + bx_{N-3} - x_{N-1} < C_2. \end{cases} \quad (4)$$

Запишем эту систему в векторном виде

$$C_1 \leq Cx < C_2, \quad (5)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & a \\ a & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ b & a & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{N-3} \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Все компоненты векторов C_1 и C_2 равны c и $1+c$, соответственно, а компоненты вектора x являются отсчетами некоторого периода длины N . Размерности всех векторов равны N , а матрицы C — $N \times N$. Система неравенств (5) определяет N -мерный многогранник, образованный пересечением пространственных слоев, заключенных между параллельными плоскостями (4). Пространство векторов x есть пространство всевозможных периодов длины N , а многогранник (5) ограничивает в этом пространстве множество допустимых периодов этой длины при заданных коэффициентах (a, b) и фиксированном методе квантования.

Рассмотрим семейство векторов $\{V^j\}$, $j \in [0, J-1]$, определяющих координаты вершин этого многогранника (J — количество вершин). Заметим, что компоненты V^j этих векторов являются рациональными функциями коэффициентов (a, b) , где порядок полиномов в знаменателе равен N , а в числителе не превышает $N-1$. Получим функции V^j решением (например, методом Крамера) набора линейных уравнений

$$CV^j = Z^j, \quad (7)$$

где $Z^j \in Z$. Множество Z строится следующим образом. Образует семейство всевозможных векторов размерности N , компоненты которых принимают значения, равные c или $1+c$. Из этого семейства исключим все векторы Z^k , для которых найдется такая пара Z^l , что

$$Z^k = -Z^l$$

или

$$Z^k = \sigma^{(r)}[Z^l],$$

где r — целое число, отличное от нуля; преобразование σ имеет вид

$$\sigma[z] = \sigma[(z_0, z_1, z_2, \dots, z_{N-1})^T] = (z_{N-1}, z_0, z_1, \dots, z_{N-2})^T,$$

а символ T обозначает операцию транспонирования. Из полученного множества исключим векторы, компоненты которых образуют периодическую на интервале $[0, N-1]$ последовательность. Итоговое семейство векторов составит множество Z .

Функции V^j , полученные при фиксированном векторе $Z^j \in Z$, определяют оценку амплитуд

$$A(Z^j, a, b) = \max_{i \in [0, N-1]} \{|V_i^j(a, b)|\}$$

предельных циклов периода N , подобных такому вектору-шаблону. При этом верхняя оценка амплитуды допустимых предельных циклов равна

$$A_{\max}(a, b) = \max_Z \{A(Z^j, a, b)\}.$$

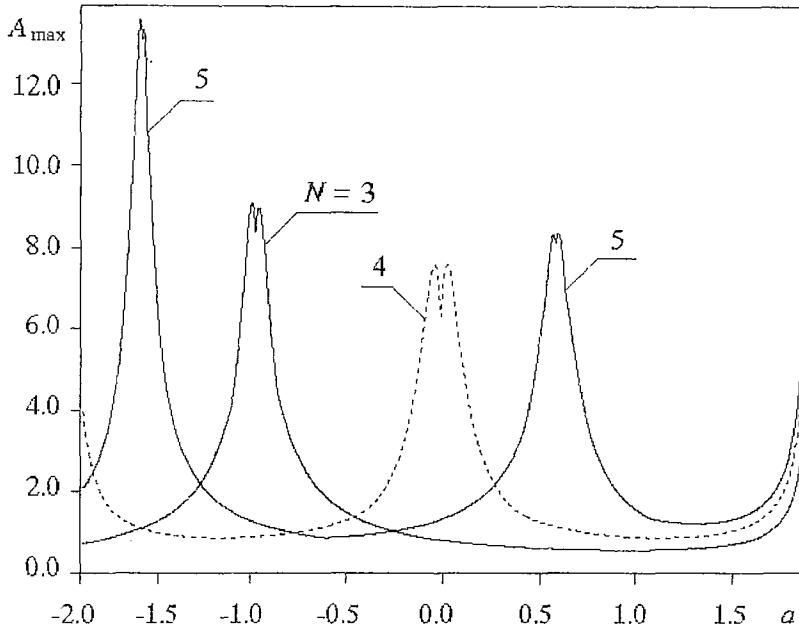


Рис. 3. Распределение амплитуд предельных циклов для $N \in \{3;4;5\}$

Таким образом, сущность предлагаемого аналитического метода заключается в следующем. Зафиксируем длину периода N , выберем интересующий тип квантования. Построим множество Z по описанным выше правилам. Для векторов данного множества вычислим их компоненты (функции $V_i(a,b)$) при помощи уравнения (7). Огибающая модулей этих функций есть оценка амплитуд предельных циклов периода N . Полную картину зависимости амплитуд предельных циклов от коэффициентов (a,b) получим, рассмотрев другие значения N . Следует отметить, что для систем прямой формы реализации этот метод легко распространяется на более высокие (без ограничений) порядки.

Рассмотрим применение данного метода к системе (1). Положим $N=3$, а в качестве метода квантования выберем округление. При этом определитель матрицы C равен

$$\det C(a,b) = -1 + 3ab + a^3 + b^3.$$

Для вектора $Z=(1/2, -1/2, 1/2)^T$, которым исчерпывается множество Z при заданных условиях, получим три функции следующего вида:

$$V_0(a,b) = (1+a-b-ab-a^2+b^2)/(2\det C(a,b)),$$

$$V_1(a,b) = (-1+a+b+ab+a^2+b^2)/(2\det C(a,b)),$$

$$V_2(a,b) = (1-a+b-ab+a^2-b^2)/(2\det C(a,b)).$$

График огибающей модулей этих функций (при фиксированном $b=-0.92$) показан на рис. 3. На этом же рисунке показаны огибающие для периодов $N=\{4,5\}$.

2. Численный метод поиска предельных циклов

Описанный выше аналитический метод применим только к системам прямой формы реализации. Недостатком прямой формы является высокая чувствительность к эффектам квантования при высоких порядках. Это обуславливает

использование на практике других (неканонических) форм реализаций цифровых фильтров [1]. Следовательно, существует необходимость исследования цифровых фильтров произвольной формы реализации. В связи со значительными сложностями аналитического описания процессов, предлагается численное решение этой задачи. К сожалению, применение известной процедуры вычисления амплитуд циклов при заданных (a, b) крайне ограничено, поскольку рассматриваемые сугубо нелинейные системы весьма чувствительны к начальным условиям и требуют большого количества вычислений. В общем случае при L уровнях квантования требуется $L^2 N$ вычислений, где N – длительность реализации динамического процесса.

Для повышения эффективности вычислительного процесса предлагается новый метод. Заметим, что исследуемая система имеет бесконечное число дискретных состояний. Однако амплитуды предельных циклов ограничены, и для анализа периодических движений достаточно рассмотреть конечное число состояний. В целях повышения эффективности алгоритма введем в исследуемую систему нелинейность, ограничивающую число необходимых состояний. В качестве такой нелинейности можно выбрать, например, нелинейность насыщения

$$S(z) = \begin{cases} S_{\min}, & z < S_{\min}, \\ S_{\max}, & z > S_{\max}, \\ z, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При этом функция $f(z)$, описывающая нелинейность сумматора, принимает вид

$$f(z) = S(\varphi(z-c)),$$

а количество уровней квантования вычисляется по формуле

$$L = S_{\max} - S_{\min} + 1.$$

В данном случае поведение системы удобно описать при помощи двумерного двухпараметрического отображения

$$\mathcal{F}: \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ f(bx_0 + ay_0) \end{pmatrix},$$

где $x_0, y_0, x_1, y_1 \in \{S_{\min}, S_{\min}+1, \dots, S_{\max}-1, S_{\max}\}$ – состояния системы на фазовой плоскости (x, y) .

Вследствие дискретности состояний и ограниченности функции $S(z)$ система имеет конечное количество состояний. Графически эти состояния могут быть представлены как узлы конечной квадратной решетки с шагом 1 по обеим координатам и равным количеством строк и столбцов. Нижний левый узел решетки имеет координаты (S_{\min}, S_{\min}) , а верхний правый – (S_{\max}, S_{\max}) . Это позволяет перейти от отображения \mathcal{F} к алгебраической перестановке [7]. При построении перестановки производится последовательная нумерация состояний по следующему принципу. Узлу нижнего левого угла присваивается номер «0», следующему узлу, выше на одну строку, присваивается номер «1» и т.д. до последней строки первого столбца. По достижении последней строки первого столбца осуществляется переход к первой строке второго столбца с продолжением последовательной нумерации. В результате получаем следующую перестановку:

$$\pi: i \rightarrow \pi(i), \quad i \in [0, L^2-1], \quad (8)$$

где

$$\begin{cases} i = (y_0 - S_{\min}) + L(x_0 - S_{\min}), \\ \pi(i) = (y_1 - S_{\min}) + L(x_1 - S_{\min}). \end{cases}$$

Полученная перестановка представляет собой одномерную целочисленную запись движений системы. Для восстановления реальных движений на фазовой плоскости необходим обратный переход к отображению \mathcal{F} . Возможность такого перехода обусловлена тем, что в перестановке (8) сохранено взаимно однозначное соответствие номеров состояний i и их координат (x_0, y_0) . Для его осуществления необходимо определить по номеру состояния содержащие его строку и столбец n , сместив их номера на значения S_{\min} , получить соответствующие координаты состояния на плоскости

$$\begin{cases} x_0 = \varphi(i/L) + S_{\min} \\ y_0 = i - L\varphi(i/L) + S_{\min} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = \varphi(i/L) + S_{\min} \\ y_1 = \pi(i) - L\varphi(\pi(i)/L) + S_{\min} \end{cases} \quad (9)$$

Для анализа перестановки (8) предлагаем следующий алгоритм.

1. Сформируем множество $U = \{m: m \neq \pi(n) \ m, n \in [0, L^2 - 1]\}$. Исключим из перестановки (8) все переходы с номерами $i \in U$.

2. Если множество U пусто – работа алгоритма завершена. В противном случае повторим шаг 1.

Полученная в результате операций 1 и 2 перестановка Π содержит информацию обо всех предельных циклах. При помощи формул (9) определим максимальную амплитуду предельного цикла

$$A_{\max} = \max_{j \in \Pi} \{|x_0(j)|\}.$$

Величина A_{\max} может использоваться как количественный критерий динамических свойств различных структур рекурсивных цифровых фильтров. Таким образом, предлагаемый метод сводится к пошаговому поиску инвариантных траекторий (предельных циклов) вместо используемого в известной процедуре анализа L^2 реализаций динамического процесса.

Результаты применения вышеописанного алгоритма при использовании округления и усечения по модулю приводятся на рис. 4 в виде ступенчатых функций. На рис. 4, *a* в виде плавной кривой показан график аналитической оценки максимальной амплитуды предельных циклов периода 3. Рисунок подтверждает высокую точность полученных первым методом аналитических оценок.

Предлагаемый численный метод применим к любым структурам цифровых фильтров с конечной длиной машинного слова. Выбранная в качестве примера нелинейность насыщения может быть заменена любой другой ограниченной функцией.

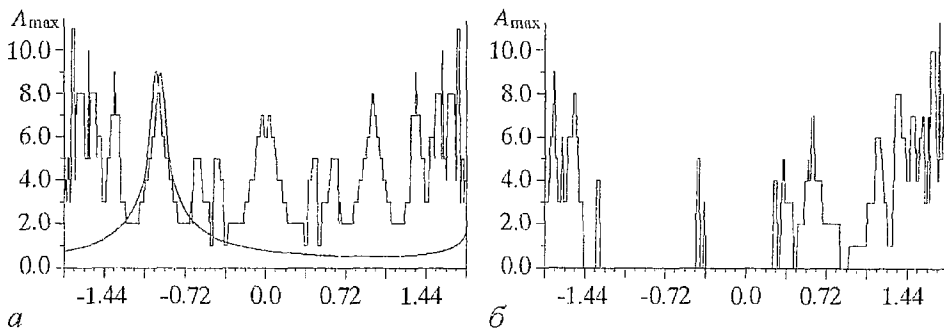


Рис. 4. Распределение амплитуд предельных циклов: *a* – квантование округлением, *б* – квантование с усечением по величине

Заклучение

Исследованы параметры предельных циклов, возникающих в системе второго порядка с нелинейным сумматором. Рассмотрены квантования двух типов: округление и усечение по величине. Предложены новые методы (аналитический и численный) исследования зависимостей параметров предельных циклов от коэффициентов системы. При помощи первого метода получены ограничения (в виде рациональных функций от коэффициентов системы) на амплитуды предельных циклов. Эти ограничения подтверждены при помощи второго метода.

Результаты работы могут использоваться при анализе устойчивости нелинейных цифровых фильтров второго порядка и синтезе систем цифровой обработки информации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-17939).

Библиографический список

1. Коча В.М., Торяник Н.Н. К вопросу о структурах цифровых фильтров// Зарубежная радиоэлектроника. 1985. № 11. С.16.
2. Bose T., Chen Mei-Qin. Stability of digital filters implemented with two's complement truncation quantization// IEEE Trans. Signal Processing. 1992. Vol. 40, № 1. P. 24.
3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1988.
4. Sandberg I.W., Kaiser J.F. A bound on limit cycles in fixed-point implementations of digital filters// IEEE Trans. Audio and Electroacoustics. 1972. Vol. AU-20, № 2. P. 110.
5. Munson D.C., Strickland J.H., Walker T.P. Maximum amplitude zero-input limit cycles in digital filters// IEEE Trans. Circuits and Systems. 1984. Vol. CAS-31, № 3. P. 266.
6. Djebbari A., Belbachir M.F., Rouvaen J.M. A fast exhaustive search algorithm for checking limit cycles in fixed-point digital filters// Signal Processing. 1999. Vol. 69. P. 199.
7. Б.Л. ван дер Варден. Алгебра. М.: Наука, 1976.

Ярославский государственный
университет

Поступила в редакцию
после доработки

13.07.1999
26.01.2000

PARAMETERS OF LIMIT CYCLE IN RECURSIVE SECOND-ORDER DIGITAL SYSTEM WITH ONE QUANTIZER

Y.A. Bryuhanov, E.A. Myasnikov

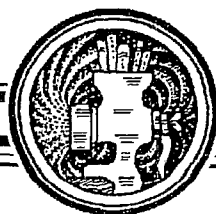
Parameters of limit cycles in second-order digital system with non-linear adder are investigated. Two kinds of quantization way are considered: rounding and value truncation. New analytical and computer aimed methods are proposed for investigation of limit cycles parameters dependencies upon the system coefficients. Upper bounds of limit cycles amplitudes are obtained by the first method. These bounds are rational functions of system coefficients and are verified by the second method.



Брюханов Юрий Александрович – родился в Красноярске (1941), окончил Красноярский политехнический институт (1967) и аспирантуру Воронежского государственного университета (1970). С 1971 года работает в Ярославском государственном университете, в настоящее время заведует кафедрой динамики электронных систем. Защитил кандидатскую диссертацию (1971) и докторскую диссертацию (1989) в области применения теории колебаний в задачах радиофизики и электроники. Область научных интересов – нелинейная динамика электронных систем дискретного времени. Автор монографии «Управление динамическим режимом колебательных систем» и более 180 статей. Заслуженный деятель науки РФ.



Мясников Евгений Анатольевич – родился в Ярославле (1974), окончил Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова (1996), аспирант кафедры динамики электронных систем. Область научных интересов – нелинейная динамика цифровых систем, влияние эффектов квантования на динамику цифровых фильтров. Имеет 4 публикации в отечественных и зарубежных изданиях.



ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ХАОТИЧЕСКИМ ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ краткий обзор

О.Л. Аносов, О.Я. Бутковский, Ю.А. Кравцов

Дан краткий обзор проблем, возникающих при восстановлении динамических уравнений из хаотических временных рядов. Описаны наиболее употребительные процедуры восстановления, включающие в себя оценку размерности системы, выбор типа уравнений, определение параметров нелинейных функций путем подгонки дифференциальных уравнений к временным рядам, селекцию ненадежных коэффициентов, испытание восстановленной системы на глобальную устойчивость. Приведены примеры восстановления динамических уравнений.

Предложен эффективный критерий различения динамических и случайных процессов, опирающийся на понятие степени предсказуемости. Указаны принципиальные ограничения, налагаемые влиянием шумов, в частности, ограничения на время предсказуемости (наличие «горизонта предсказуемости»), на длину анализируемой выборки, на количество определяемых коэффициентов и др. Изложен «дискриминантный» (двухоконный) подход, позволяющий выявлять нестационарности в динамической системе. Наконец, указана важная роль малоразмерных моделей для выявления нестационарностей в системах высокой размерности. В заключение перечислены перспективные области применения процедур восстановления.

Введение

Проблема восстановления динамических уравнений процессов из временных рядов возникла в теории динамических систем около 40–50 лет тому назад и связана с именами А.Н. Колмогорова и Дж. Габора. Основной подход к решению этой проблемы, которая известна также как обратная задача нелинейной динамики, состоит в «подгонке» дифференциального уравнения определенного класса к экспериментальным данным. Состояние вопроса о восстановлении дифференциальных уравнений в «дохаотическую» эпоху отражено в монографиях [1–4].

Особенность хаотических систем, которые стали предметом всеобщего интереса в 80–90-х годах, состоит в их исключительно высокой чувствительности к малым возмущениям, в том числе к шумовым воздействиям, присутствующим в любых физических системах. Малые возмущения в хаотических системах нарастают по экспоненциальному закону и довольно быстро достигают размеров аттрактора. Эта особенность хаотических систем получила название локальной неустойчивости. Несмотря на свойство локальной неустойчивости, хаотические системы все же допускают восстановление динамических уравнений на основе

стратегии подгонки, разработанной ранее для нехаотических динамических систем. Разумеется, свойство локальной неустойчивости не может не отразиться на качестве восстановления дифференциального уравнения: время предсказуемости, то есть интервал времени, на котором восстановленное уравнение обеспечивает удовлетворительное предсказание поведения наблюдаемой системы, для хаотических систем оказывается заметно более коротким, чем для нехаотических систем.

Данная статья написана по материалам доклада, сделанного авторами на саратовской школе ХАОС'98 [5], и представляет собой попытку кратко изложить основные проблемы восстановления дифференциальных уравнений, описывающих хаотическую систему.

Ранние попытки восстановить динамические уравнения системы из хаотических временных рядов в отсутствие шумов были предприняты Кремерсом и Хублером [6], Кратчфильдом и МакНамарой [7], Бриденом и Хублером [8], Гусбэ [9], Брашем и Кадтке [10]. В последующих работах, в частности, в публикациях [11–13], реконструкция уравнений производилась с учетом шумов. Различные подходы к проблеме восстановления уравнений из зашумленных экспериментальных данных и некоторые частные результаты освещены в работах [14–16], а также в отдельных статьях монографического сборника [17], посвященного предсказуемости сложных динамических систем. Общая характеристика методов восстановления дана также в представительном обзоре Павлова и Янсон [18], посвященном задачам восстановления динамики из электрокардиограмм. Одни из первых примеров восстановления уравнений для ряда медико-биологических объектов (сердце человека и др.) содержатся в работах Анищенко и Смирновой [19], Янсон и Анищенко [20,21].

Основные алгоритмы восстановления динамики описаны в разделе 1. Иллюстративные примеры приведены в разделе 2. Принципиально важный вопрос о критериях различения случайного и детерминированного, от решения которого зависит стратегия восстановления динамики, обсужден в разделе 3. В качестве основного критерия выявления динамических закономерностей предлагается выбрать время предсказуемости наблюдаемого процесса на основе принятой нелинейной модели. В разделе 4 анализируется новый вопрос о влиянии шумов на число восстанавливаемых коэффициентов и сделан вывод о существовании оптимальной длины выборки. Кроме того, в разделе 5 затронут вопрос о возможности выявления нестационарности в хаосе при помощи дискриминантного (двухоконного) подхода, а в разделе 6 – проблема скрытой передачи информации с использованием процедур восстановления динамических уравнений. Полезность низкоразмерных динамических моделей для выявления нестационарности в процессах высокой размерности отмечена в разделе 7. Наконец, в разделе 8 мы перечислим перспективные области применения методов восстановления динамических уравнений.

1. Процедуры восстановления динамических уравнений из временных рядов

1.1. Выбор вектора состояния. Пусть датчик регистрирует значения наблюдаемой величины $y(t)$, которая может характеризовать процессы произвольной физической природы (механические, электрические, химические, биологические и др.). Величина $y(t)$ называется наблюдаемой или реализацией процесса.

При выявлении динамических закономерностей в экспериментальных временных рядах опираются либо на дискретные модели, описываемые разностными уравнениями (отображениями), либо на непрерывные модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. В первом случае экспериментальные данные изначально представлены дискретными отсчетами y_j , $j=1,2,\dots,n$. Во втором случае для компьютерной обработки данных производится дискретизация экспериментальной непрерывной реализации $y(t)$ с

некоторым (обычно постоянным) шагом по времени Δ , то есть вместо непрерывного процесса $y(t)$ записываются дискретные значения y_j

$$y_j \equiv y[t^0 + (j-1)\Delta], \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где j – номер отсчета, t^0 – момент начала измерений; величина Δ обычно называется шагом дискретизации, а набор значений y_j – временным рядом.

Предположим, что наблюдаемая величина y порождается некоторой динамической системой и является либо одной из ее переменных состояний, либо скалярной функцией от них. Набор переменных, характеризующих состояние динамической системы в данный момент времени, называется *вектором состояния*.

Задача состоит в том, чтобы по одномерному временному ряду

(а) восстановить фазовый портрет (аттрактор) изучаемой системы,

(б) восстановить динамические уравнения, в каком-то приближении описывающие поведение исходной системы.

Для решения задачи (а) в работе [22] был предложен метод задержки, согласно которому вектор состояния восстанавливался по формуле

$$\mathbf{Y}(t) = \{y(t), y(t+\Delta'), y(t+2\Delta'), \dots, y(t+(N-1)\Delta')\}, \quad (2)$$

где N – размерность вложения, Δ' – задержка вложения. Для дискретного векторного ряда задержка вложения выражается через целое число k шагов дискретизации $\Delta' = k\Delta$, а вектор состояния записывается следующим образом:

$$\mathbf{Y}_j = \{y_j, y_{j+k}, y_{j+2k}, \dots, y_{j+(N-1)k}\}.$$

Такенс [23] углубил этот результат, показав, что в отсутствие шумов и при размерности вложения $N \geq 2d+1$, где d – фрактальная размерность исследуемой хаотической системы, множество (2) топологически эквивалентно аттрактору системы (см. также [24]). Теорема Такенса подготовила почву для построения алгоритмов предсказания хаотических процессов с использованием сведений о динамической природе наблюдаемого временного ряда [25–28].

Вектор состояния (2), составленный из дискретных отсчетов (1), взятых с задержкой Δ' , имеет преимущества при построении конечно-разностных уравнений, описывающих исследуемую систему. Для большинства физических систем, которые описываются не разностными, а дифференциальными уравнениями, в качестве вектора состояния вместо (2) удобнее брать совокупность производных исследуемого процесса

$$\mathbf{Y}' = \{y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(N)}\}, \quad (3)$$

где $y^{(n)}$ означает производную n -го порядка

$$y^{(n)}(t) = d^n y(t) / dt^n,$$

а под производной нулевого порядка понимается сама наблюдаемая функция $y(t)$. Метод последовательного дифференцирования, использующий вектор состояния (3), довольно часто используется в литературе (см., например, [7, 8, 11–14, 29]).

Фактически производные $y^{(n)}$ наблюдаемого процесса $y(t)$ вычисляются через конечные разности, скажем

$$y^{(n+1)}(t) = [y^{(n)}(t+\Delta) - y^{(n)}(t)] / \Delta. \quad (4)$$

Очевидно, точность вычисления производных тем хуже, чем больше уровень шумов и больше интервал дискретизации Δ . Поэтому алгоритм (4) является самым ненадежным элементом во всей процедуре восстановления динамических уравнений.

Кроме упомянутых, имеются и другие возможности введения вектора

состояния. Так, наряду с эквидистантными отсчетами (1) в принципе можно использовать также неэквидистантные измерения [30]. В работе [31] (см. также [20]) в число компонент вектора состояния предложено ввести еще интеграл от наблюдаемой переменной $y(t)$, что способствует стабилизации численных процедур.

Относительно оптимального выбора интервала дискретизации Δ единого мнения в литературе не существует. Так, при работе с вектором задержанных переменных рекомендуется выбирать интервал Δ из условия минимизации функции взаимной информации [32, 33] или же логарифма корреляционного интеграла [34]. В обоих случаях мы имеем дело с интервалами порядка времени корреляции $\tau_{\text{корр}}$. В руководствах по методам идентификации динамических систем (см., например, [1]) интервал Δ рекомендуется выбирать равным $(0.2-0.3)\tau_{\text{корр}}$. Такой выбор согласуется с требованием теоремы Котельникова, согласно которой интервал дискретизации Δ не должен превышать величину $1/(2f)$, где $2f$ – эффективная ширина спектра сигнала: $\Delta < 1/(2f)$. Для сигналов со сплошным спектром, в частности, для хаотических сигналов, ширина спектра $2f$ сравнима с обратным временем корреляции $\tau_{\text{корр}} \sim 1/(2f)$, так что неравенство $\Delta < 1/(2f)$ эквивалентно требованию $\Delta < \tau_{\text{корр}}$. В противном случае, то есть при слишком редких отсчетах ($\Delta \geq \tau_{\text{корр}}$) мы рискуем потерять существенную информацию о системе. В то же время слишком частые отсчеты с $\Delta \ll \tau_{\text{корр}}$ нежелательны из-за резкого увеличения массива данных, не сопровождаемого соразмерным ростом получаемой информации. Эта особенность подчеркивается во множестве публикаций, в частности, в недавно вышедшей книге [80]. Оценка $\Delta \sim (0.2-0.3)\tau_{\text{корр}}$ является компромиссной. В конкретных расчетах имеет смысл оптимизировать выбор интервала дискретизации Δ на фактически имеющемся массиве данных, руководствуясь критерием (18), о котором речь пойдет ниже (см. разд. 3).

Независимо от метода восстановления модели (при помощи вектора состояния (2), восстановленного методом задержки, или же при помощи вектора (3), составленного из производных исследуемого процесса) речь идет о восстановлении динамических уравнений (разностных или дифференциальных) во всем фазовом пространстве, то есть о восстановлении *глобальной* модели.

1.2. Оценка размерности хаотического процесса. Важным элементом восстановления динамических уравнений по экспериментальным данным является оценка размерности исследуемого процесса, то есть оценка эффективного числа степеней свободы, вовлеченных в динамический процесс.

Как известно, хаотические аттракторы характеризуются фрактальной размерностью d [35,36]. Вычислению фрактальной размерности d непосредственно из экспериментальных данных посвящена обширная литература, представление о которой дают работы [37–43]. Располагая фрактальной размерностью d , можно оценить размерность N (ее называют размерностью вложения) по формуле Такенса $N \geq 2d+1$, хотя эта оценка часто оказывается завышенной [43]. В этих условиях часто прибегают к упрощенным оценкам размерности вложения, используя, например, корреляционную размерность [18,32,34,44–47].

Эффективный способ оценки размерности опирается на вычисление ковариационной матрицы, которая составляется из отсчетов $y_j^k \equiv y[t^k + (j-1)\Delta]$, сделанных в моменты времени t_j^k . Ковариационная матрица

$$C_{kj} = \sum_{j=1}^n y_j^k y_j^j \quad (5)$$

имеет размерность $n \times n$. Удобные алгоритмы оценки размерности по матрице были предложены Грассбергером и Прокаччиа [48], Брумхэдом и Кингом [49], Ланда и Розенбломом [46]. Простой и не требующий больших массивов алгоритм Ланда и Розенблума опирается на вычисление собственных значений λ_i ковариационной матрицы (5).

Численным моделированием было установлено, что зависимость логарифм–

ма нормированных собственных чисел $\delta_i = \lambda_i / \sum \lambda_i$ от размерности i испытывает излом наклона при некотором значении N (рис. 1), которое и рекомендуется принять за размерность системы (размерность вложения). Считается, что при переходе от малых значений i , для которых характерен большой наклон кривой $\ln \delta_i$, к большим значениям $i > N$, где наклон кривой $\ln \delta_i$ меньше, происходит уменьшение удельного веса «новых» переменных y^k с $i > N$ по сравнению с «базовыми» переменными y^k , отвечающими $i < N$.

Имеются и другие способы оценки размерности, например, с использованием «старых» приемов, развитых в математической статистике [50]. Во всех случаях оценка размерности выступает как экспериментальная величина. В расчетах, проведенных с участием авторов данной работы [11–14], использовались оценки размерности как по методу Брумхэда и Кинга [49], так и методом, описанным в [46].

1.3. Модельное уравнение порядка N с полиномиальной нелинейностью.

Оценив размерность системы, можно приступить к подгонке модельного уравнения к временным рядам. При такой подгонке нелинейные слагаемые в дифференциальных уравнениях чаще всего аппроксимируются полиномами, хотя возможны и иные аппроксимации нелинейных функций, например, кусочно-линейными или кусочно-непрерывными функциями. Выбор аппроксимирующих функций диктуется, прежде всего, априорными сведениями о системе.

Если априорные данные о структуре системы отсутствуют, то полиномиальная аппроксимация выступает как разумное начальное приближение, которое может быть уточнено (или даже заменено иным, лучшим, приближением) по мере накопления данных о системе в процессе подгонки. Конечным результатом подгонки является определение коэффициентов при нелинейных слагаемых в уравнениях определенного класса. Таким образом, решение обратной задачи нелинейной динамики сводится, в сущности, к параметризации модельного уравнения заданного класса путем наилучшего (в том или ином смысле) согласования модели с экспериментальными данными.

Ниже мы будем говорить преимущественно о восстановлении дифференциальных уравнений системы. Отметим, однако, что приемы восстановления разностных уравнений во многом подобны приемам реконструкции дифференциальных уравнений [18].

Весьма общее модельное уравнение системы может быть представлено в форме полинома от компонент модельного вектора состояния

$$\mathbf{Z} = (z_0, z_1, \dots, z_N),$$

где под z_n понимается n -я производная модельного процесса $z(t)$

$$z_n \equiv z^{(n)} = d^n z / dt^n,$$

а под z_0 — сама переменная $z(t)$: $z_0(t) = z(t)$. Компактная запись модельного дифференциального уравнения имеет вид

$$F(\mathbf{z}, \mathbf{A}) = \sum_m A_m G_m(\mathbf{z}) = 0. \quad (6)$$

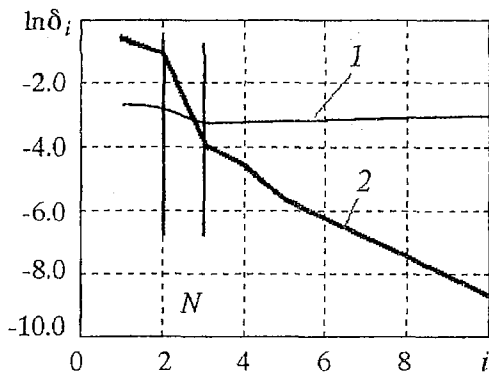


Рис. 1. К оценке размерности системы N при помощи собственных чисел корреляционной матрицы. Кривая 1 — зависимость логарифма собственных чисел от размерности i для случайного процесса. Кривая 2 — зависимость собственных чисел для x -компоненты системы Ресслера в хаотическом режиме. Вертикальные линии показывают границы излома, по которому оценивается размерность вложения N .

Здесь G_m – мономы (одночлены), составленные из степеней z_0, z_1, \dots, z_N ; $\mathbf{A}=(A_1, \dots, A_M)$ – M -компонентный вектор коэффициентов, подлежащих определению.

В силу однородности уравнения (6) относительно A_m один из коэффициентов A_m может быть выбран произвольно. Чаще всего полагают равным единице коэффициент при старшей производной $z_N(t)$. Остальные коэффициенты находятся из уравнения (6), если в качестве модельных значений вектора $\mathbf{z}(t)$ подставить в (6) экспериментальные данные $y(t)=(y, y^{(1)}, \dots, y^{(N)})$, соответствующие моментам времени t_j^k ,

$$\sum_m A_m G_m(\mathbf{z})|_{z(t_j^k)=y(t_j^k)} = 0. \quad (7)$$

Число M неизвестных коэффициентов A_m быстро растет с увеличением порядка дифференциального уравнения N и степени нелинейности s . Например, полное (с учетом всех возможных комбинаций) уравнение третьего порядка ($N=3$) с кубичной нелинейностью ($s=3$) имеет вид

$$\begin{aligned} F(\mathbf{z}, \mathbf{A}) = & A^0 + (A_0 z_0 + A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3) + \\ & + (A_{00} z_0^2 + A_{01} z_0 z_1 + \dots + A_{33} z_3^2) + \\ & + (A_{000} z_0^3 + A_{001} z_0^2 z_1 + \dots + A_{333} z_3^3) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Это уравнение содержит 35 коэффициентов, а если положить $A_3=1$, чтобы третья производная $z_3 \equiv d^3 z / dt^3$ вошла в уравнение (8) с единичным коэффициентом, то число неопределенных коэффициентов составит 34. Таким образом, число отсчетов в данном случае не может быть менее $M=34$.

По мере увеличения N и s число коэффициентов M , подлежащих определению, катастрофически (факториально) возрастает: оно оценивается как $M=(N+s+1)!/[(s+1)!N!]$. При переходе от $N=s=3$ к $N=s=4$ оно увеличивается от 35 до 126, при $N=s=5$ достигает 462, а при $N=s=6$ переваливает за тысячу $M=1716$. Столь стремительный рост числа неопределенных коэффициентов приводит не только к значительным техническим трудностям при их вычислении (фактически речь идет об обращении матриц высокой размерности), но и к принципиальным затруднениям познавательного характера. Если бы технические трудности удалось преодолеть, то есть если бы имелась возможность быстро и надежно вычислить огромное число коэффициентов, то польза от такой громоздкой модели была бы сомнительной, поскольку сама модель становится чрезвычайно сложным объектом для изучения. Такая модель имела бы плохо обозримое пространство параметров, которым, к тому же, весьма трудно придать определенный физический смысл. Сказанное заставляет ограничиваться малоразмерными модельными уравнениями и максимально использовать всю доступную априорную информацию об исследуемой системе, чтобы предельно упростить модельное уравнение и уменьшить число коэффициентов, подлежащих определению.

В идеале число временных отсчетов n должно соответствовать числу M неопределенных коэффициентов. Если учесть необходимость определения производных до N -го порядка, то к M следовало бы добавить еще $2N$ отсчетов (по N дополнительных отсчетов в начале и конце выборки), так что минимальная длительность выборки должна составить

$$n_{\min} = M + 2N. \quad (9)$$

В действительности из-за присутствия шумов длительность выборки приходится увеличивать по сравнению с (9), поскольку восстанавливаемые коэффициенты A_m могут испытывать существенные флуктуации. В этих условиях для оценки неизвестных коэффициентов A_m приходится либо усреднять значения A_m по нескольким соседним выборкам длиной $M+2N$ [11–13], либо брать избыточное (по сравнению с

М) число отсчетов n и оценивать затем A_m по методу наименьших квадратов, как это было предложено еще в ранних работах [6,7], а также в работе [18].

1.4. Модельная система N уравнений первого порядка. Кроме описанного подхода, использующего одно модельное уравнение N -го порядка (6), возможен и несколько иной подход к выбору модельных уравнений, опирающийся на теорему Такенса [23]. Согласно этой теореме, решение $\mathbf{X}(t)$ динамической системы весьма общего вида

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{X}),$$

допускающей существование аттрактора размерности d , может быть плавным образом отображено на решение $\mathbf{x}(t)$ более простой системы

$$dx_1/dt = x_2, \quad dx_2/dt = x_3, \quad \dots \quad dx_N/dt = f(\mathbf{x}) \quad (10)$$

размерности $N \geq 2d+1$. Поэтому система уравнений (10) тоже может служить удовлетворительной моделью для многих динамических систем.

Указанный подход можно реализовать, например, следующим образом [11,12,16]. Пусть \mathbf{S}_j – собственные векторы ковариационной матрицы (5). Тогда произвольный вектор состояния \mathbf{Y} можно разложить по собственным векторам корреляционной матрицы \mathbf{S}_j («оптимальный» базис) и ограничиться в этом разложении членами, соответствующими размерности системы N ,

$$\mathbf{Y} \cong \eta_1 \mathbf{S}_1 + \eta_2 \mathbf{S}_2 + \dots + \eta_N \mathbf{S}_N. \quad (11)$$

Коэффициенты этого разложения η_k , найденные из временного ряда y_j^k , могут служить новыми переменными вместо y_j . Поведение коэффициентов η_k можно тогда моделировать при помощи переменных ζ_k , подчиняющихся системе уравнений первого порядка вида (10)

$$d\zeta_1/dt = \zeta_2,$$

$$d\zeta_2/dt = \zeta_3,$$

...

$$d\zeta_N/dt = \Phi(\zeta, \mathbf{B})/g(\zeta, \mathbf{C}). \quad (12)$$

Нелинейность системы описывается здесь дробно-рациональной функцией $\Phi(\zeta, \mathbf{B})/g(\zeta, \mathbf{C})$, где Φ и g представляют собой полиномы от компонент вектора $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ с неопределенными коэффициентами B_k и C_k , объединенными в векторы \mathbf{B} и \mathbf{C} . Для полинома $g(\zeta, \mathbf{C})$ можно ограничиться невысокой (скажем, второй) степенью нелинейности. Общее число коэффициентов B_k и C_k , подлежащих определению, может оказаться даже меньше, чем число коэффициентов A_m в уравнении (6).

При численном решении системы уравнений (12) приходится преодолевать технические трудности, связанные с наличием полюсов у функции Φ/g . Специальные процедуры, необходимые для преодоления этих трудностей, описаны, например, в работе [28]. На практике дробно-рациональные функции в уравнении (12) целесообразно использовать только при наличии априорной информации, да и в этом случае дробно-рациональную функцию часто можно успешно аппроксимировать полиномом.

1.5. Другие подходы. Указанными двумя подходами (уравнение порядка N вида (6) и система N уравнений первого порядка вида (12)), использующими полиномиальные аппроксимации нелинейных функций, не исчерпывается все разнообразие приемов, предложенных к настоящему времени. Упомянем еще метод краевых задач, облегчающий подгонку дифференциальных уравнений к экспериментальным данным [51], использование критерия минимальной длины

описания для выбора оптимальной модели [15,52–56], метод *радиальных функций* [15], использование ортогональных полиномов для аппроксимации нелинейностей [6], критерий минимума энтропии модели [7], процедуру синхронизации модели экспериментальными данными [57].

Кроме полиномиальных моделей иногда применяются также кусочно-линейные функции, но их использование, как правило, обусловлено наличием априорной информации [58,59,80].

В ряде случаев, когда измеряется не одна, а несколько компонент исследуемого процесса (скажем, скорость и температура, или ток и напряжение), модельную систему уравнений следует видоизменить таким образом, чтобы появилась возможность согласовать систему уравнений с несколькими временными рядами [60]. Разумеется, наличие дополнительного информационного канала способствует улучшению качества восстановления.

В случае неавтономных систем задача восстановления уравнений существенно усложняется. В настоящее время нам известно только о двух удавшихся попытках восстановления неавтономной системы [61,62].

1.6. Дополнительные процедуры. Кроме перечисленных, иногда применяют и другие процедуры. Прежде всего, упомянем предварительную фильтрацию экспериментальных данных, применяемую иногда для снижения влияния высокочастотных шумов [49,63,64,11–14].

При анализе зашумленных данных или же при использовании малоразмерных моделей в анализе заведомо высокоразмерных процессов восстановленные коэффициенты A_m часто проявляют сильные флуктуации. В этих условиях кроме усреднения коэффициентов A_m по нескольким выборкам, целесообразно применять также процедуру исключения «ненадежных» коэффициентов, флуктуации которых ΔA_m заметно превышают среднее значение \bar{A}_m [11–14]. Практический опыт показывает, что исключение (то есть, фактически, зануление) ненадежных коэффициентов часто уменьшает вариации других, более надежных, коэффициентов.

Наконец, в тех случаях, когда целесообразно проверять восстановленные уравнения на глобальную устойчивость [11–14,16].

2. Примеры

В качестве первого примера рассмотрим аттрактор Рёсслера, находящийся под внешним шумовым воздействием [60,65],

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z + f_1, \\ \dot{y} &= x + ay + f_2, \\ \dot{z} &= b - cz + xz + f_3,\end{aligned}\tag{13}$$

где $f_{1,2,3}$ – шумовые компоненты. Для получения исходной реализации интегрировалась система уравнений (13) с учетом шумовых компонент $f_{1,2,3}$ на каждом шаге интегрирования.

Уравнение третьего порядка, эквивалентное системе трех уравнений (13), описывающих аттрактор Рёсслера, в отсутствие шумов имеет вид

$$(-\ddot{z} + \ddot{a}z - \dot{z})(z - c - a) + (c + a)(\dot{a}z - \ddot{z} - z - b) - b(z - c - a)^2 + (z - c - a)(z - c)(\dot{a}z - \ddot{z} - z - b) = 0.\tag{14}$$

Ниже приведены результаты применения процедуры, подробно описанной в [66], к восстановлению зашумленной системы Рёсслера (13), характеризуемой

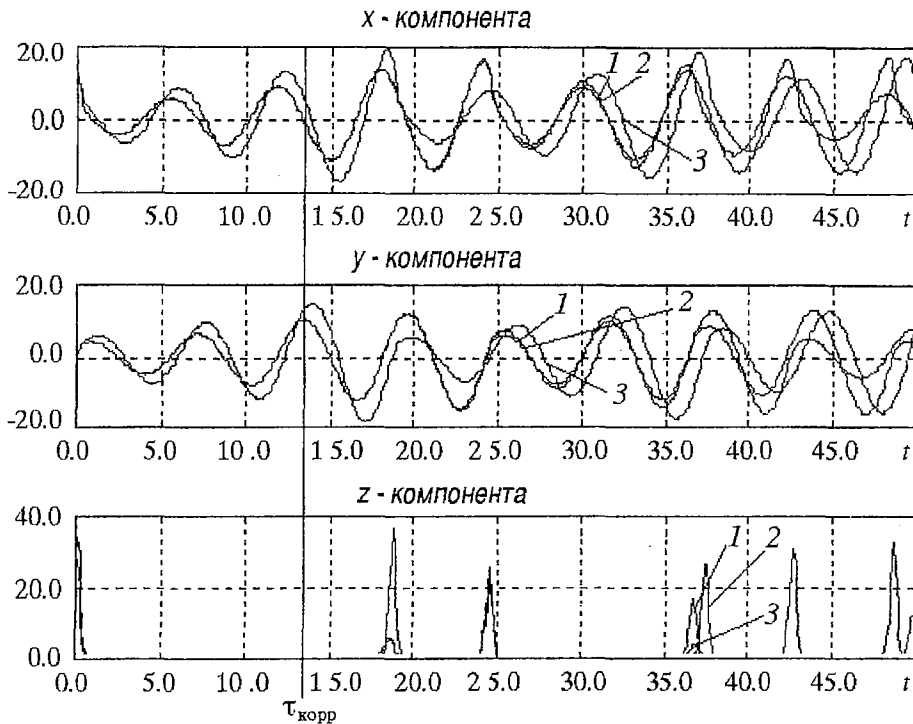


Рис. 2. Исходная незашумленная (1) и восстановленная (2) компоненты аттрактора Рёсслера при $a=0.15$, $b=0.2$, $c=10.0$ и уровне шумов 10^{-2} . Система восстанавливалась по зашумленной компоненте (3)

параметрами $a=0.15$, $b=0.2$, $c=10.0$, при среднеквадратичном уровне шума 10^{-2} по реализации $\{z_i\}$. В результате параметризации первоначальной модели, содержащей производные до третьего порядка и все нелинейные комбинации до третьей степени включительно, фактически было получено уравнение (14). Остальные коэффициенты в полном уравнении (8) оказались близкими к нулю и были отброшены в силу их статистической незначимости. Затем, преобразованием данного уравнения в систему дифференциальных уравнений первого порядка получаем систему (13) со значениями $a=0.149$, $b=0.229$ и $c=9.904$. Время предсказуемости рёсслеровского аттрактора на основе восстановленных уравнений по наблюдаемой x -компоненте оказалось достаточно большим: оно в 3.5 раза превышало интервал корреляции $\tau_{\text{корр}}$, который составлял примерно 12 единиц безразмерного времени.

Приведенный выше пример восстановления всех трех компонент рёсслеровского процесса $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ показан на рис. 2. Восстановленные компоненты, обозначенные на рисунке цифрой 2, неплохо описывают реально наблюдаемые осцилляции исходных незашумленных реализаций процесса примерно до 35-го отсчета безразмерного времени.

Восстановленные значения процесса $z(t) \equiv z_0(t)$ и его производных $z_1 \equiv dz_0/dt$ и $z_2 \equiv dz_1/dt$ позволяют реконструировать трехмерный фазовый портрет аттрактора Рёсслера. Восстановленный портрет (рис. 3, а) качественно совпадает с исходным портретом (рис. 3, б).

Разнообразные иные примеры восстановления приведены в публикациях [6–17]. В частности, пример восстановления аттрактора Лоренца на основе «оптимального» базиса описан в работе [11], а также в работах [28,57].

В большинстве публикаций описано восстановление процессов, которые генерировались компьютером в присутствии шумов. В этих условиях «наблюдаемый» процесс $y(t)$ описывался уравнениями заведомо невысокого порядка, что и гарантировало успех восстановления.

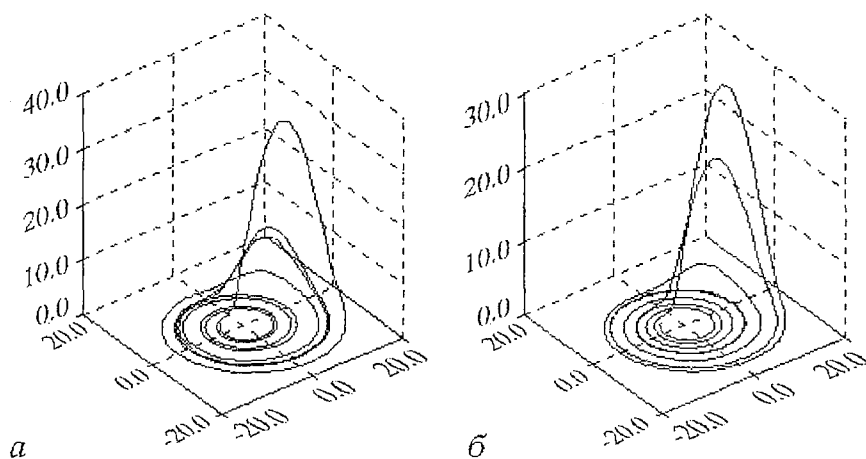


Рис. 3. Исходный (а) и восстановленный (б) фазовый портрет аттрактора Рёсслера при $a=0.15$, $b=0.2$, $c=10.0$ и уровне шумов 10^{-2}

Гораздо более трудную проблему представляет восстановление уравнений для реальных процессов, в первую очередь, для медико–биологических объектов. Попытки такого рода были предприняты, в частности, сотрудниками кафедры радиофизики Саратовского государственного университета [19–21,29,67] под руководством профессора В.С.Анищенко. Анализ полученных результатов, проведенный в обзорной работе [18], показал, что процедуры восстановления в состоянии выявить «основную», «устойчивую» часть математической модели, тогда как многие детали остаются не раскрытыми. В конечном итоге главная трудность состоит в том, что исследуемые медико–биологические процессы, как правило, имеют более сложную природу, чем это заложено в моделях: более высокая размерность, нестационарность, неавтономность и др. Разумеется, эти препятствия не должны порождать у исследователя чувство обиды: в конце концов, выявление сложной природы процессов и составляет предмет науки.

Поучительные примеры и аспекты восстановления динамики имеются также в работах [67–71,80].

3. Динамические критерии различения случайных и динамических процессов

Один из главных вопросов, которые возникают при выявлении динамики непосредственно из временных рядов, состоит в выработке критериев различения случайных и детерминированных (динамических) процессов. Новый подход к решению этой проблемы, предложенный в работах [72,73], предполагает введение понятия степени предсказуемости наблюдаемого процесса $y(t)$ на основе модели $z(t)$. Степень предсказуемости определяется как нормированная корреляционная функция наблюдения $y(t)$ и прогноза $z(t)$

$$D(\tau) = \langle y(t)z(t) \rangle / [\langle y^2(t) \rangle \langle z^2(t) \rangle]^{1/2}. \quad (15)$$

Здесь $\tau=t-t^0$ представляет собой время, протекшее после начала наблюдения t^0 . Статистическое усреднение в (15) производится по совокупности начальных моментов t_j^0 , которые «открывают» выборки из временного ряда $y(t)$. Начальные значения модельного процесса $z(t^0)$ «подгоняются» к $y(t^0)$ в начале каждой такой выборки, так что в результате усреднения в (15) сохраняется только зависимость от разности $\tau=t-t^0$.

При $\tau=0$ (в (15) это соответствует моменту времени $t=t^0$) степень предсказуемости обращается в единицу в силу принятого условия $z(t^0)=y(t^0)$. Напротив, при достаточно больших интервалах τ степень предсказуемости падает до малых значений в силу рассогласования временного хода прогноза $z(t)$ и наблюдения $y(t)$. Общий характер зависимости $D(\tau)$ показан на рис. 4. Характерное время, отвечающее уменьшению $D(\tau)$ до уровня 0.5, может служить удобной оценкой времени предсказуемости процесса $y(t)$ на основе модели $z(t)$. Для хаотической системы время предсказуемости оценивается как [72,73]

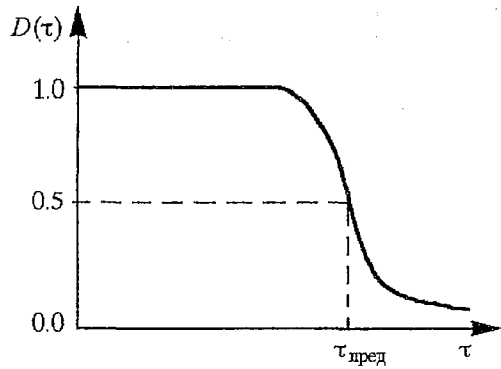


Рис. 4. Зависимость степени предсказуемости D от времени $\tau=t-t^0$, прошедшего после начала испытания. Время предсказуемости $\tau_{\text{пред}}$ отвечает спаданию D до уровня 0.5

$$\tau_{\text{пред}} = [1/(2\lambda_+)] \ln[A^2/(\sigma_r^2 + \sigma_v^2 + \sigma_{\text{мод}}^2)], \quad (16)$$

где A – размер аттрактора, σ_r^2 – уровень шумов в самой физической системе, σ_v^2 – вклад шумов измерительного прибора, а $\sigma_{\text{мод}}^2$ характеризует неточность выбранной модели (это слагаемое иногда называют «шумом незнания»). Важно, что время предсказуемости $\tau_{\text{пред}}$ может превышать время корреляции $\tau_{\text{корр}}$ и тем больше, чем меньше уровни шумов σ_v^2 , σ_r^2 и неточность модели $\sigma_{\text{мод}}^2$.

Очевидно, чем больше время предсказуемости, тем лучше предсказательная сила модели. Исходя из этого, мы предлагаем принять отношение

$$\gamma = \tau_{\text{пред}}/\tau_{\text{корр}} \quad (17)$$

в качестве *меры эффективности* восстановления динамических уравнений. Если для восстановленной модели отношение $\gamma = \tau_{\text{пред}}/\tau_{\text{корр}}$ не превышает единицы, $\gamma \leq 1$, то попытку восстановления динамических уравнений следует признать неудачной. В этом случае динамический прогноз обеспечивает такое же время предсказания, как и простейший «консервативный» прогноз по правилу $z(t^0+\tau)=y(t^0)$, то есть по правилу «завтра, как сегодня». Такой прогноз, очевидно, никоим образом не учитывает динамические свойства прогнозируемого процесса.

Существует убеждение, что некоторое улучшение прогноза по сравнению с консервативной моделью могут дать авторегрессионные модели, но, как показано в работе [74], такие модели принципиально не могут преодолеть барьер $\tau_{\text{пред}} \sim \tau_{\text{корр}}$. Таким образом, при $\gamma \leq 1$ динамические связи в наблюдаемом процессе $y(t)$, даже если они и существуют, не вскрываются, а сам процесс квалифицируется как случайный. Разумеется, утверждение о случайности наблюдаемого процесса $y(t)$ при $\gamma \leq 1$ справедливо, строго говоря, по отношению только к тем классам моделей, которые подвергались испытаниям. Здесь мы сталкиваемся с типичной для естествознания ситуацией, когда неудачные попытки вскрыть динамические закономерности в наблюдаемом явлении при помощи данной модели вовсе не исключают возможности успеха при помощи иных моделей, скажем, неполиномиальных, неавтономных и др. Грубо говоря, речь идет о подборе «интеллектуальных отмычек» к исследуемому процессу, что эквивалентно выявлению кода, при помощи которого зашифрованы данные.

Очевидно, чем сложнее исследуемый процесс, тем труднее его дешифровка, и тем ценнее представляется положительный результат дешифровки, характеризуемый неравенством $\gamma > 1$, когда время предсказуемости $\tau_{\text{пред}}$ хотя бы

ненамного превышает время корреляции. В этом случае уже можно говорить о выявлении следов динамической природы исследуемого процесса. Наконец, при $\gamma \gg 1$ динамическую природу процесса несомненно следует считать выявленной.

В отличие от времени корреляции $\tau_{\text{корр}}$, которое всегда можно измерить по стандартной процедуре, время предсказуемости $\tau_{\text{пред}}$ заранее не известно. Оно определяется в процессе подгонки дифференциального уравнения к временному ряду и существенно зависит как от уровня шумов, так и от вида модели. Скажем, в случае системы с «негладкой» нелинейностью типа $|x|$ модельное уравнение с полиномиальной нелинейностью имеет меньше шансов на успех, чем уравнение с кусочно-линейной аппроксимацией нелинейных функций. Оценивая время предсказуемости для различных испытываемых моделей, мы можем приблизиться к оптимальной модели, руководствуясь указанным выше критерием максимизации времени предсказуемости

$$\tau_{\text{пред}} = \max. \quad (18)$$

Если разные модели обеспечивают одно и то же время предсказуемости, то их следует признать эквивалентными, как бы сильно ни отличались они по внешнему виду. Сама по себе задача восстановления динамического уравнения не имеет однозначного решения: в пределах заданной погрешности к одному и тому же временному ряду можно подогнать много (и даже бесконечно много) уравнений. Однако при наличии нескольких эквивалентных (в указанном выше смысле) моделей допустимо говорить о полном решении задачи восстановления, поскольку различные эквивалентные модели обеспечивают одинаковое качество предсказания. Дальнейшая селекция моделей возможна лишь при привлечении «физической» информации о наблюдаемом процессе.

4. Оптимальная длина выборки и ограничения на количество восстанавливаемых коэффициентов

Как известно, точность определения параметров обычных (то есть нехаотических) сигналов повышается при увеличении длины выборки n . В случае же сигналов хаотической природы эта закономерность нарушается: увеличение длины выборки сверх определенного оптимального значения $n_{\text{опт}}$ не только не улучшает, но даже ухудшает точность восстановления параметров. Объясняется это свойством локальной неустойчивости хаотических систем: малые флуктуации, которые всегда присутствуют в реальных физических системах, при $\Delta t > \tau_{\text{пред}}$ нарастают до размеров аттрактора и тем самым существенно искажают сигнал $y(t)$. Очевидно, коэффициенты A_m , «извлекаемые» из искаженной реализации процесса $y(t)$, также будут подвергаться искажениям, что нежелательно.

Оптимальную длину выборки можно оценивать как отношение времени предсказуемости $\tau_{\text{пред}}$ к длительности интервала дискретизации Δ

$$n_{\text{опт}} = \tau_{\text{пред}} / \Delta. \quad (19)$$

Как более короткие, так и более длинные по сравнению с $n_{\text{опт}}$ выборки лишь увеличивают погрешность определения коэффициентов.

Оценка (19) важна потому, что она ограничивает число коэффициентов M , которые можно надежно найти при подгонке модельного уравнения к временному ряду. Согласно (9) $M \sim n_{\text{опт}} - 2N$.

Поскольку интервал между отсчетами Δ выбирается равным $(0.2 \div 0.3)\tau_{\text{корр}}$, оптимальная длина выборки в $3 \div 5$ раз превышает отношение $\gamma = \tau_{\text{пред}} / \tau_{\text{корр}}$, то есть

$$n_{\text{опт}} \sim (3 \div 5)\gamma.$$

При $\gamma=(5\div 7)$, что отвечает относительному уровню погрешностей 10^{-3} , для $n_{\text{опт}}$ получаем оценку: $n_{\text{опт}} \leq (15\div 35)$. Таким образом, даже при оптимальной длительности выборки можно рассчитывать на определение не более чем двух или трех десятков коэффициентов A_m . Это требование налагает принципиальные ограничения на сложность моделей, используемых для подгонки к временным рядам. Насколько известно авторам, ограничения вида (19) до сих пор не принимались во внимание.

5. Дискриминантная процедура

Дискриминантная процедура, разработанная в статистическом анализе, направлена на выявление нестационарности в наблюдаемом случайном процессе путем сравнения (дискриминации) статистических характеристик процесса в двух смежных временных окнах $[t-T, t]$ и $[t, t+T]$, каждое из которых имеет длительность T . Модификация минимаксной процедуры, предложенная в работах [60, 75–77], заключается в использовании компонент модельного уравнения наблюдаемого процесса в качестве признаков дискриминантной функции $d(t)$. Важно, чтобы дискриминантная функция была линейна относительно входящих в модельное уравнение коэффициентов. Например, при восстановлении системы Рёсслера или выявлении изменений управляющего параметра в качестве $d(t)$ выступало расширенное уравнение типа (14)

$$d(t) = A_1 \ddot{z} + \dots + A_l z^2 \dot{z} + \dots + A_n = 0.$$

Входящие сюда коэффициенты A_m определялись из минимаксного условия: разность средних значений дискриминантных функций в двух временных окнах $d(t)$ и $d(t+T)$ должна быть максимальной, а сумма квадратов дисперсий минимальна. Минимаксный критерий сводит задачу нахождения коэффициентов A_m к задаче на собственные значения взаимно-ковариационной матрицы дискриминантных функций и позволяет создать алгоритм для решения задач восстановления, работающий в реальном времени. Кроме того, данный критерий, вычисляемый на обновляющейся последовательности, оказался наиболее чувствительным при обнаружении нестационарностей [60].

Таким образом, в результате применения дискриминантной процедуры удается не только восстанавливать разностные или дифференциальные уравнения системы, но и выявлять изменения коэффициентов A_m во времени.

В качестве примера на рис. 5, а представлена реализация последовательности, подчиняющейся логистическому отображению

$$y_{n+1} = r_n y_n (1 - y_n) \quad (20)$$

с переменным управляющим параметром r_n . В данном случае параметр r_n (рис. 5, б) скачком меняет свою величину от значения 3.80 до значения 3.82, а затем возвращается к первоначальному значению 3.80. Такие изменения не удается выявить ни визуально, ни путем анализа последовательности y_n при помощи статистического критерия Фишера

$$H = (M_1 - M_2)^2 / (S_1^2 + S_2^2), \quad (21)$$

где M_1 и M_2 – средние значения y_n в первом и втором окнах, а S_1^2 и S_2^2 – дисперсии y_n в этих окнах. Иными словами, методы, разработанные в статистическом анализе, не позволили вскрыть изменения в динамике хаотической последовательности y_n .

Между тем, если в качестве дискриминантной функции взять не саму последовательность y_n , а функцию $d_n = y_{n+1} - r_n y_n (1 - y_n)$, которая в отсутствие шумов в силу (20) обращается в нуль, то критерий Фишера (21) продемонстрирует легко

обнаружимые всплески в моменты скачкообразного увеличения или уменьшения управляющего параметра r_n (ср. рис. 5, в и г). Увеличение интенсивности шума с 0.1% до 1% уменьшает величину всплеска примерно до единицы (рис. 5, д), что в данном случае не воспрепятствовало дискриминации скачков управляющего параметра r_n .

Другие примеры эффективности дискриминантной процедуры имеются в работах [76] (синусоидальное изменение управляющего параметра в логистическом отображении) и [66,77] (система Рёслера с переменным параметром).

6. Передача сигналов с использованием процедур восстановления динамических уравнений

Если структура динамической системы известна, а неизвестными являются переменные во времени величины нескольких коэффициентов, то алгоритмы восстановления динамики в состоянии выявить модуляцию параметров системы и тем самым реализовать канал связи с использованием хаотических процессов. Выявление модуляции параметров можно осуществить двумя способами: при помощи дискриминантной процедуры, как это показано на рис. 5 (см. также работы [60,75–77]), так и путем прямого восстановления динамических уравнений, как это было реализовано в недавних работах Анищенко и Павлова [78] и Анищенко, Павлова и Янсон [59]. В последних работах, а также в монографии [80] описанный выше принцип передачи сигналов был эффектно продемонстрирован на примере системы, преобразующей изображение в последовательность чисел на передающем конце и восстанавливающей изображение на приемном конце на основе решения обратной задачи нелинейной динамики. Такая система скрытой связи допускает как одноканальную передачу информации (модуляции и

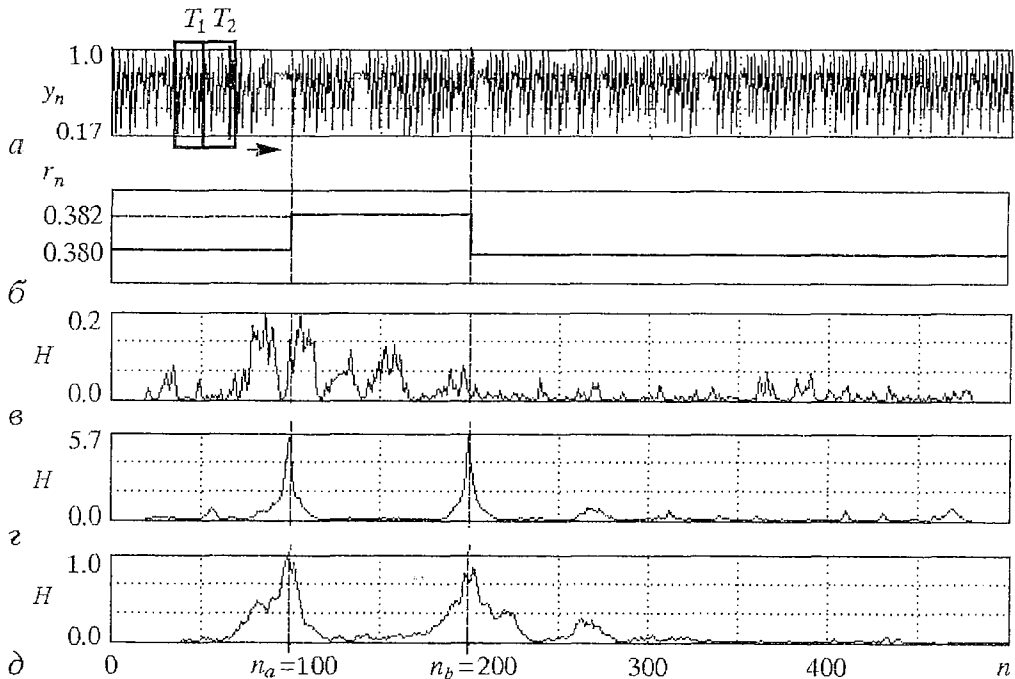


Рис. 5. Выявление нестационарностей при помощи дискриминантной (двухоконной) процедуры на примере логистического отображения: а – реализация логистического отображения (19) с управляющим параметром r_n , закон изменения которого представлен на рис. б; в – изменение средней невязки для авторегрессионной модели; г и д – изменение критерия Фишера (20) при уровне шумов соответственно 0.1% и 1%

демодуляции подвергается только один параметр), так и многоканальную передачу (путем модуляции и демодуляции нескольких параметров).

Стоит отметить, что потенциальные характеристики каналов связи с использованием хаотических сигналов (помехоустойчивость, предельная пропускная способность, уровень межканальных помех и т.д.) нуждаются в систематическом изучении

7. Использование малоразмерных моделей для анализа систем высокой размерности

Малоразмерные модели, обладающие сами по себе свойством локальной неустойчивости, могут демонстрировать высокую чувствительность к различным возмущениям в высокоразмерных системах. Эта особенность малоразмерных моделей делает перспективным их применение для анализа изменений в сложных реальных системах. В работах [77,79] было продемонстрировано, что коэффициенты низкоразмерной модели сердечных ритмов, восстановленной на основе временных рядов для так называемых RR-интервалов (интервалов между соседними пиками на электрокардиограмме), зависят от нагрузки на сердечную мышцу (реализуемой велоэргометром) и позволяют выявлять аэробно-анаэробный переход непосредственно из анализа RR-интервала, не прибегая к сложной процедуре газового анализа, как это принято в настоящее время.

Другим перспективным направлением применения малоразмерных моделей в соединении с дискриминантной процедурой может явиться анализ климатических изменений на основе временных рядов для среднегодовой температуры. Хотя размерность N временного температурного ряда очень высока (оценки дают для N значения до $20 \div 30$), малоразмерные модели могут претендовать на выявление трендов в климатической системе на уровне динамического описания. Авторы данной работы были бы заинтересованы в установлении делового партнерства с научными группами, работающими в области климатических изменений, с целью совместного анализа проблемы с привлечением малоразмерных моделей.

8. Области применения процедур восстановления динамических уравнений

Описанные выше методы восстановления динамических уравнений из хаотических временных рядов могут оказаться полезными для решения широкого круга задач, в том числе:

- для идентификации хаотических систем;
- для предсказания поведения хаотических систем;
- для выявления нестационарностей в хаотических системах при помощи дискриминантной процедуры, в том числе с использованием малоразмерных динамических моделей;
- для облегчения решения задач управления хаосом при помощи подходящего внешнего воздействия;
- для скрытой передачи сигналов с использованием хаотической несущей;
- для подавления шумоподобного сигнала динамической природы (путем восстановления модели и последующего вычитания такого «шума» из сигнала);
- для выявления потенциальных бифуркаций в модели исследуемой системы путем анализа восстановленных динамических уравнений.

В заключение авторы выражают признательность участникам школы ХАОС' 98 за плодотворные обсуждения проблемы, а также рецензентам данной статьи за взыскательную критику.

Работа поддержана программами ИНТАС (грант 96-0305), РФФИ (грант 99-02-16625) и ФЦП «Интеграция» (грант А-0030).

Библиографический список

1. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя / Пер.с англ. под ред. Я.З. Цыпкина. М.: Наука, 1991. 432 с.
2. *Ивахненко А.Г.* Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. М.: Техника. 1995. 312 с.
3. *Современные методы идентификации систем / Под ред. П.Эйкхоффа.* М.: Мир, 1983.
4. *Балакришнан А.В.* Теория фильтрации Калмана. М.: Мир, 1988.
5. *Аносов О.Л., Бутковский О.Я. и Кравцов Ю.А.* Восстановление хаотических систем из временных рядов: достижения и ограничения // V Международная школа «Хаотические автоколебания и образование структур (ХАОС' 98)», Саратов, Россия, 6–10 октября 1998. Тезисы докладов. Саратов, 1998. С. 16.
6. *Cremers J., Hubler A.* Construction of differential equations from experimental data // *Z.Naturforschung.* 1987. Vol. 42 (A), № 4. P. 897.
7. *Gruichfield J.P., McNamara B.S.* Equations of motion from a data series// *Complex Systems.* 1987. Vol. 1, № 2. P. 417.
8. *Breedon J., Hubler A.* Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables// *Phys.Rev.A.* 1990. Vol. 42, № 10. P. 5817.
9. *Gouesbet G.* Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series // *Phys.Rev.A.* 1991. Vol. 43, № 10. P. 5321.
10. *Brush J.S., Kadtke J.B.* Nonlinear signal processing using empirical global dynamical equations // *Proc. ICASSP-92.* San-Francisco, 1992. P. 321.
11. *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А., Кузнецов Ю.И., Ржанов А.Г.* Восстановление структуры динамической системы из временных рядов // *РЭ.* 1994. Т. 39, № 2. С. 241.
12. *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А., Кузнецов Ю.И., Ржанов А.Г.* Восстановление дифференциальных уравнений автостохастических систем по временной реализации одной динамической переменной процесса//*ЖТФ.* 1994. Т. 64, № 3. С. 1.
13. *Gribkov D.A., Gribkova V.V., Kravtsov Yu.A., Kuznetsov Yu.I., Rzhanov A.G., Anosov O.L., Butkovskii O.Ya.* Dynamic equation reconstruction from the observed one dimensional time series// *Dynamical Systems and Chaos (Proc.Internat.Conf. Tokyo, May 23–27, 1994).* Singapore: World Scientific, 1995. Vol. 2. P. 378.
14. *Anosov O.L., Butkovskii O.Ya., Kravtsov Yu.A., Surovyatkina E.D.* Predictable nonlinear dynamics: advances and limitations // *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing/ Ed. R.A.Katz. AIP Conf.Proc. N.Y.: AIP Press, 1995. Vol. 375. P. 71.*
15. *Mees A.I., Judd K.* Parsimony in dynamical modelling // *Predictability of Complex Dynamical Systems/ Eds Yu.A.Kravtsov, J.B.Kadtke.* Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1996. P. 123.
16. *Anosov O.L., Butkovskii O.Ya., Kravtsov Yu.A.* Strategy and algorithms for dynamical forecasting// *Predictability of Complex Dynamical Systems/ Eds Yu.A.Kravtsov, J.B.Kadtke.* Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1996. P. 105.
17. *Predictability of Complex Dynamical Systems/ Eds Yu.A.Kravtsov, J.B.Kadtke.* Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1996.
18. *Павлов А.Н., Янсон Н.Б.* Применение метода восстановления математической модели к анализу электрокардиограмм// *Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 1.С. 93.
19. *Anishchenko V.S., Smirnova N.B.* Analysis and synthesis of dynamical systems from experimental data // *SPIE.* 1993. Vol. 2098. P. 137.
20. *Janson N.B., Anishchenko V.S.* Modelling the dynamical systems on experimental data // *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing/ Ed. R.A.Katz. AIP Conf. Proc. N.Y.: AIP Press, 1995. Vol. 375. P. 688.*
21. *Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* Моделирование динамических систем по

- экспериментальным рядам // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С. 112.
22. *Packard N.M., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S.* Geometry from a time series//Phys.Rev.Lett. 1980. Vol. 45. P. 712.
 23. *Takens F.* Detecting strange attractor in turbulence // Warwick, 1980. Vol. 898 of Lecture Notes in Mathematics/Eds Rang, L.S.Young. Berlin: Springer, 1981. P. 366.
 24. *Noakes L.* The Takens embedding theorem // Int.J.Bifurc.Chaos. 1991. Vol. 1, № 1. P. 867.
 25. *Casdagli M.* Nonlinear prediction of chaotic time series // Physica D. 1989. Vol. 35. P. 335.
 26. *Farmer J.D., Sidorowich J.J.* Predicting chaotic time series // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59. P. 845.
 27. *Breeden J.L., Packard N.H.* A learning algorithm for optimal representation of experimental data // Int. J. Bifurc. Chaos. 1994. Vol. 4, № 2. P. 311.
 28. *Gousbet G., Letellier C.* Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 4955.
 29. *Янсон Н.Б., Павлов А.Н., Баланов А.Г., Анищенко В.С.* Задача реконструкции математической модели применительно к электрокардиограмме// Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 16. С. 57.
 30. *Breeden J.L., Packard N.H.* Nonlinear analysis of data sampled nonuniformly in time//Physica D. 1992. Vol. 58. P. 273.
 31. *Анищенко В.С., Янсон Н.Б., Павлов А.Н.* Об одном методе восстановления неоднородных аттракторов//Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 7. С. 1.
 32. *Frazer A.M., Swinney H.L.* Independent coordinates from mutual information// Phys. Rev.A. 1986. Vol. 33. P. 1134.
 33. *Bransater A., Swinney H.L.* Strange attractor in weakly turbulent Couette-Taylor flow // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35. P. 2207.
 34. *Liebert W., Shuster H.G.* Proper choice of the time delay for the analysis of chaotic time series//Phys. Rev. A. 1989. Vol. 42. P. 107.
 35. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: введение / Пер с англ. М.: Мир, 1988. 240 с.
 36. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 311 с.
 37. *Farmer J.D., Ott E., Yorke J.A.* Dimension of chaotic attractors//Physica D. 1983. Vol. 7. P. 153.
 38. *Frederickson P., Kaplan J., Yorke J.* The Lyapunov dimension of strange attractors//J. Diff. Eqs. 1983. Vol. 49. P. 185.
 39. *Wolf A., Swift J.* Progress in computing Lyapunov exponents from experimental data//Statistical physics and chaos in fusion plasmas/ Eds C.W.Horton Jr., L.E.Reichl. NY.: Wiley, 1984. P. 111.
 40. *Pawelski K., Shuster H.G.* Generalized dimensions and entropies from a measured time series//Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35, № 1. P. 48.
 41. *Havstad J.W., Ehlers C.L.* Attractor dimension of nonstationary dynamical systems from small data sets//Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39. P. 845.
 42. *Theiler J.* Estimating fractal dimension//J. Opt. Soc. Am. A. 1990. Vol. 7, № 6. P. 105.
 43. *Sauer T., Yorke J.A., Casdagli M.* Embedology//J. Stat. Phys. 1991. Vol. 65, № 3,4. P. 579.
 44. *Mane R.* On the dimension of the compact invariant set of certain nonlinear maps//Warwick. 1980. Vol. 898 of Lecture Notes in Mathematics/ Eds D.A. Rang, L.S.Young. Berlin: Springer, 1981. P. 230.
 45. *Theiler J.* Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time series data//Phys.Rev.A. 1986. Vol. 34. P. 2427.
 46. *Ланда П.С., Розенблюм М.Г.* Об одном методе оценки размерности вложения аттрактора по результатам эксперимента//ЖТФ. 1989. Т. 59, № 1. С. 13.
 47. *Nerenberg M.A.H., Essex C.* Correlation dimension and systematic geometric effects//Phys. Rev. A. 1990. Vol. 43. P. 7065.

48. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors//Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50, № 5. P. 346.
49. *Broomhead D.S., King G.P.* Extracting qualitative dynamics from experimental data//Physica D. 1986. Vol. 20, № 2. P. 217.
50. *Schwarz G.* Estimating the dimension of a model // Annals of Statistics. 1978. Vol. 6. P. 461.
51. *Baake E., Baake M., Bock H.G., Briggs K.M.* Fitting ordinary differential equations to chaotic data // Phys.Rev. 1992. Vol. 45, № 8. P. 5524.
52. *Mees A.I.* Modelling complex systems // Dynamics of Complex Interconnected Biological Systems/ Eds A.I.Mees, T.Vincent, L.S.Jennings. Boston: Birkhauser, 1990.
53. *Mees A.I.* Dynamical systems and tessellation: detecting determinism in data // Int. J.Bifurc. Chaos. 1991. Vol. 1. P. 777.
54. *Mees A.I.* Parsimonious dynamical reconstruction // Int. J. Bifurc. Chaos. 1993. Vol. 3. P. 669.
55. *Mees A.I.* Nonlinear dynamical systems from data // Probability, Statistics and Optimization / Ed. F.P.Kelly. Chichester (UK): Wiley, 1994. P. 225.
56. *Mees A.I.* Reconstructing chaotic systems in the presence of noise // Towards the Harnessing of Chaos / Ed. M.Yamaguti. Tolyo: Elsevier, 1994. P. 305.
57. *Brown R., Rulkov N.F., Tracy E.R.* Modelling and synchronizing chaotic systems from time-series data//Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49, № 5. P. 3784.
58. *Glover J., Mees A.I.* Reconstructing the dynamics of Chua's circuit // J.Circuits, Systems and Computers. 1992. Vol. 3, № 2. P. 201.
59. *Anishchenko V.S., Pavlov A.N., Janson N.B.* Global reconstruction in the presence of apriory information//Chaos, Solitons&Fractals. 1998. Vol. 8, № 8. P. 1267.
60. *Аносов О.Л., Бутковский О.Я., Исакевич В.В., Крацов Ю.А.* Выявление нестационарностей из случайно-подобных сигналов динамической природы // РЭ. 1995. Т. 40, № 2. С. 255.
61. *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кузнецов Ю.И.* Восстановление внешнего воздействия по реализации одной переменной автостохастической системы // Вестник МГУ. Сер. Физ. Астрон. 1995. Т. 36, № 1. С. 76.
62. *Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Д.А.* Реконструкция уравнений неавтономного нелинейного осциллятора по временному ряду: модели, эксперимент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 1. С. 49.
63. *Stark J., Broomhead D.S., Davies M.E., Huke J.* Nonlinear Analysis, Theory, Methods&Applications. 1997. Vol. 30, № 8. P. 5303 (Proc. 2nd Congress of Nonlinear Analysis).
64. *Teodorescu D.* Time series decomposition and forecasting // Int.J.Control. 1989.Vol. 50, № 5. P. 1577.
65. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
66. *Аносов О.Л., Бутковский О.Я., Крацов Ю.А.* Минимальная процедура идентификации хаотических систем по наблюдаемой временной последовательности // РЭ. 1997. Т. 42, № 3. С. 1.
67. *Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* Применение статистических методов при решении задачи глобальной реконструкции // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, № 8.С. 1.
68. *Arbanel H.D.I., Brown R., Kadtke J.B.* Predicting in chaotic nonlinear systems: methods for time series with broadband Fourier spectra // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 41. P. 1782.
69. *Smith L.A.* Identification and prediction of low-dimensional dynamics // Physica D. 1992. Vol. 58, № 1. P. 50.
70. *Kadtke J., Kremliovsky M.* Signal classification using global dynamical models // Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing. Mystic, CT, USA. July 1995/Ed. R.A.Katz. AIP Conf. Proc. N.Y.: AIP Press, 1996. Vol. 375. P. 189.
71. *Brush J.S.* Classifying transient signals with nonlinear dynamic filter banks // Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing. Mystic, CT, USA, July 1995 // Ed. R.A.Katz. AIP Conf. Proc. N.Y.: AIP Press, 1996. Vol. 375. P. 189.
72. *Крацов Ю.А.* Случайность, детерминированность, предсказуемость // УФН. 1989. Т. 158, № 1. С.93.

73. Кравцов Ю.А. Фундаментальные и практические пределы предсказуемости // Пределы предсказуемости/ Под ред. Ю.А.Кравцова. М.: Центроком, 1997. С. 170.

74. Аносов О.Л., Бутковский О.Я., Кравцов Ю.А. Пределы предсказуемости для линейных авторегрессионных моделей // РЭ. 1995. Т. 40, № 12. С. 1866.

75. Anosov O.L., Butkovskii O.Ya., Gribkov D.A., Gribkova V.V., Kravtsov Yu.A., Kuznetsov Yu.I., Rzhanov A.G. Discriminant analysis as applied to revealing of non-stationarity in chaotic systems // Dynamical Systems and Chaos (Proc.Internat.Conf., Tokyo, May 23–27, 1994). Singapore: World Scientific, 1995. Vol. 2. P. 370.

76. Anosov O.L., Butkovskii O.Ya. A discriminant procedure for the solution of inverse problem for nonstationary systems // Predictability of Complex Dynamical Systems/ Eds Yu.A.Kravtsov, J.B.Kadtke. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1996. P. 67.

77. Anosov O.L., Butkovskii O.Ya., Kravtsov Yu.A. Nonlinear chaotic systems identification from observed time series // Math.Models and Methods in Appl.Sciences. 1997. Vol. 7, № 1. P. 49.

78. Anishchenko V.S., Pavlov A.N. Global reconstruction in application to multi-channel communication // Phys.Rev E. 1998. Vol. 57, № 2. P. 2455.

79. Anosov O.L., Butkovskii O.Ya., Kadtke J.B., Kravtsov Yu.A., Protopopescu V.V. Low dimensional model of heart rhythm dynamics as a tool for diagnosing the anaerobic threshold // Int. Conf. on Applied Nonlinear Dynamics near the Millenium (ANDM'97), San Diego, CA, USA (July 7–11, 1997).

80. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1999. 368 с.

Владимировский областной кардиоцентр
Владимировский государственный
университет

Поступила в редакцию 21.12.98
после переработки 30.11.99

Институт космических исследований РАН
Center Badan' Kozmicznych Polskiej Akad. Nauk

RECONSTRUCTION OF DYNAMICAL SYSTEMS FROM CHAOTIC TIME SERIES: SHORT REVIEW

O.L. Anosov, O.Ya. Butkovskii, Yu.A. Kravtsov

The brief survey of problems accompanying the reconstruction of dynamical equations from chaotic time series is presented. The most frequently used procedures of reconstruction are described, including estimate for the dimension of a system, choice of the equation type, determination of parameters of nonlinear functions by means of differential equation fitting to time series, deleting of unreliable coefficients, testing of global stability of the reconstructed system. Several examples of reconstruction are presented.

New effective criterium for distinguishing dynamical and random processes is suggested, based on the notion of degree of predictability. Principal limitations are pointed out imposed by the properties of instability in presence of noise on time-interval of predictable behaviour («horizon of predictability»), on the length of a sample, on amount of coefficient to be determined. So named «discriminant» (two window) approach is outlined, which allows to reveal nonstationarity in dynamical system, and important role of low dimensional models for retrieval of nonstationarities in systems of higher dimension is discussed. In conclusion prospective areas of applicability of reconstruction procedures are pointed out.



Аносов Олег Львович – родился в Вязниках Владимирской области (1957). Окончил Владимирский политехнический институт (1980). После окончания ВПИ работал на Баксанской нейтринной обсерватории Института ядерных исследований РАН (RAGE-experiment). С 1993 года работает во Владимирском областном кардиоцентре. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Московском педагогическом государственном университете (1995) по радиофизике. Сфера интересов – обратные задачи нелинейной динамики, нелинейные явления в медико-биологических системах. Автор и соавтор более 30 научных работ. Стипендиат фонда Александра Гумбольдта (1997–1999).



Бутковский Олег Ярославович – родился в Магнитогорске (1949). Окончил Магнитогорский педагогический институт (1973). После окончания работал в лаборатории физико-химических исследований МПИ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Московском педагогическом государственном университете по радиофизике в области теории колебаний и волн (1987). С 1987 года работает во Владимирском государственном университете. Область научных интересов – нелинейная динамика, нелинейная акустика, моделирование нелинейных явлений в медико-биологических системах. Опубликовал более 40 научных статей. E-mail: oleg@vpti.vladimir.ru



Кравцов Юрий Александрович – родился в Москве (1937). Окончил Московский энергетический институт (1960). После окончания института работал в РТИ АН СССР (до 1972), в Московском государственном педагогическом институте (до 1979), в Институте общей физики АН (до 1993). В настоящее время заведует отделом Института космических исследований РАН и является консультантом Центра космических исследований Польской Академии Наук. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГПИ (1963) и доктора физико-математических наук в области асимптотических методов волновой теории (1968). Автор и соавтор монографий «Введение в статистическую радиофизику», «Параметрические генераторы и делители частоты», «Геометрическая оптика неоднородных сред», «Caustics, catastrophes and wave fields», «Пределы предсказуемости», «Predictability of complex dynamical systems». Опубликовал свыше 300 научных статей в области волновой теории, статистической радиофизики и нелинейной динамики. Лауреат Государственной премии СССР. Член редколлегии журналов «Известия вузов. Радиофизика», «Акустический журнал», «Космическая радиофизика». E-mail: kravtsov@asp.iki.rssi.ru

Статья О.Л. Аносова, О.Я. Бутковского, Ю.А. Кравцова «Восстановление динамических систем по хаотическим временным рядам» содержит ряд спорных положений, которые, в силу отсутствия строгих теоретических результатов, требуют, по мнению редакции, наших комментариев. В связи с этим мы публикуем мнение экспертов по одному из конкретных спорных положений работы, которое, как нам представляется, будет интересно специалистам, читателям нашего журнала.

Редакционная коллегия

Комментарий редакционной коллегии
к статье О.Л. Аносова, О.Я. Бутковского, Ю.А. Кравцова
«Восстановление динамических систем по хаотическим временным рядам»

В разделе 4 (абзац 4) данной работы утверждается, что интервал дискретизации экспериментальных данных Δ обычно выбирается исходя из соотношения

$$\Delta = (0.2 \div 0.3) \tau_{\text{корр}}, \quad (1^*)$$

где $\tau_{\text{корр}}$ – время корреляции сигнала. На базе этого соотношения устанавливается связь между оптимальной длиной выборки $n_{\text{опт}}$ и временем корреляции. Нам трудно согласиться с формулой (1*), поскольку известно, что при дискретизации экспериментальных реализаций экспериментаторы традиционно основываются на теореме Котельникова (Найквиста) [1,2], следствие из которой состоит в том, что шаг дискретизации должен быть не больше единицы, деленной на удвоенную максимальную значащую частоту в спектре. Несмотря на то, что свойства спектра мощности процесса и свойства его автокорреляционной функции связаны через теорему Винера – Хинчина, вопрос о соотношении частоты выборки и времени корреляции не имеет однозначного ответа. Рассмотрим два примера. На рис. 1

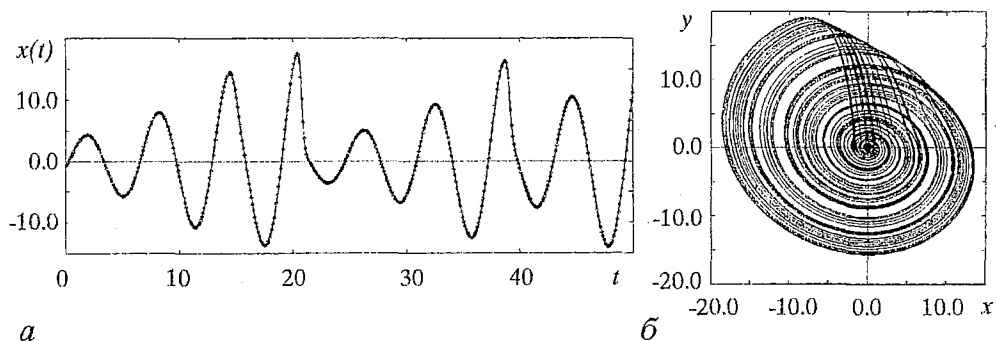


Рис. 1. Отрезок реализации $x(t)$ (а) и фазовый портрет (б) системы Рёсслера при значениях параметров $a=0.2$, $b=0.2$, $c=10$. Точки соответствуют моментам выборки координаты $x(t)$ с шагом, определяемым теоремой Котельникова (Найквиста)

показаны реализация координаты $x(t)$ и проекция фазового портрета системы Рёсслера, которая была использована авторами обзора для иллюстрации работы алгоритма реконструкции, при значениях управляющих параметров $a=0.2$, $b=0.2$, $c=10$. На рис. 2 показан спектр мощности, рассчитанный по реализации $x(t)$. Из него видно, что максимальной значащей частотой спектра можно считать $f_N=5$. По теореме Котельникова (Найквиста) максимально допустимый шаг выборки равен $\Delta=0.1$. На рис. 1, а точки соответствуют моментам выборки координаты $x(t)$ с шагом, определяемым теоремой.

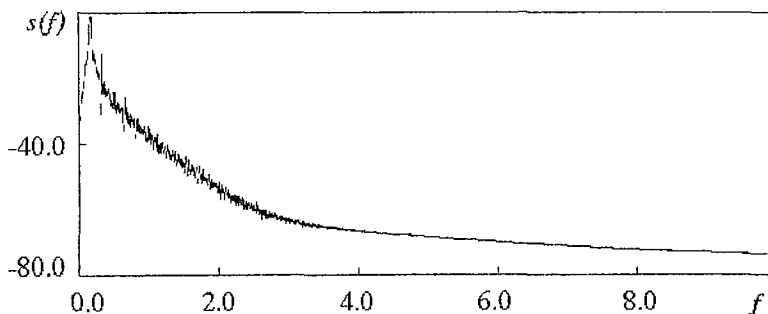


Рис. 2. Спектр мощности, рассчитанный по реализации $x(t)$ системы Рёсслера при значениях параметров $a=0.2$, $b=0.2$, $c=10$

На рис. 3 показан модуль автокорреляционной функции (АКФ), рассчитанной по той же реализации. Время корреляции можно определять разными способами, например, как время спадающей огибающей АКФ в 2 раза, в $e \approx 2.718$ раз, в 10 раз; наконец, как

$$\tau_{\text{корр}} = 1/2 \int_0^{\infty} |\rho(\tau)| d\tau, \quad (2^*)$$

где $\rho(\tau)$ есть огибающая АКФ, нормированной на дисперсию [3]. Воспользуемся наиболее распространенным, на наш взгляд, определением, согласно которому время корреляции – это время, за которое огибающая АКФ спадает в e раз. На рис. 3 прямая линия соответствует значению $1/e$. Таким образом, время корреляции

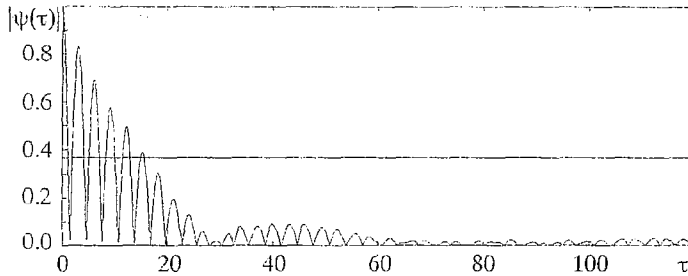


Рис. 3. Модуль автокорреляционной функции $\psi(\tau)$, рассчитанной по реализации $x(t)$ системы Рёсслера при значениях параметров $a=0.2, b=0.2, c=10$

можно считать приблизительно равным 16. Используем соотношение (1*) для определения шага дискретизации: $\Delta = 0.2 \tau_{\text{корр}} = 0.2 \cdot 16 = 3.2$. На рис. 4, *a* показана прежняя реализация $x(t)$, на которую наложены точки, соответствующие шагу дискретизации 3.2. На рис. 4, *б* показан фазовый портрет, восстановленный методом задержки по данной реализации при значении задержки, совпадающем со значением шага выборки. Очевидно, что структура фазового портрета оказалась неразрешенной. Таким образом, этот шаг нельзя считать достаточным для анализа данного сигнала. Кроме того, возникает вопрос, как можно такие данные дифференцировать.

Приведем также модуль АКФ, рассчитанной по реализации $x(t)$ системы Рёсслера при значениях параметров, используемых авторами работы (рис. 5). Заметим, что огибающая данной АКФ не спадает даже в два раза на приведенном участке времени наблюдения, а это означает, что время корреляции заведомо превышает 120, независимо от используемого определения. Очевидно, что выбор шага дискретизации в соответствии с (1*) в данном случае привел бы к абсурдному результату.

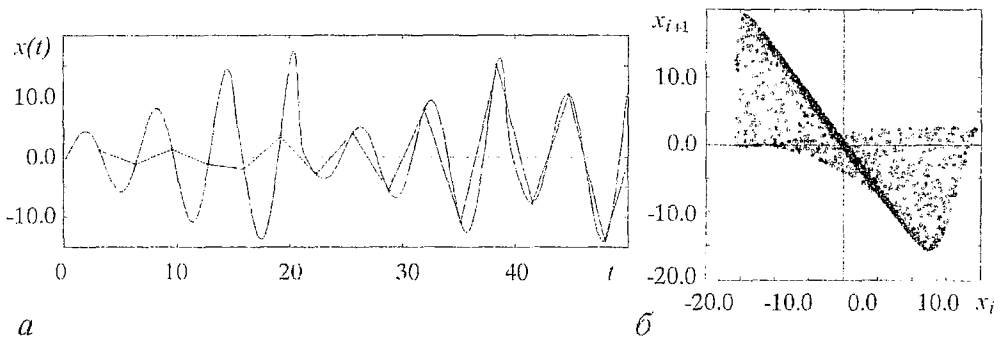


Рис. 4. *a* – отрезок реализации $x(t)$ системы Рёсслера при значениях параметров $a=0.2, b=0.2, c=10$. Точки соответствуют моментам выборки координаты $x(t)$ с шагом, определяемым соотношением (1*); *б* – фазовый портрет, восстановленный методом задержки по реализации, показанной на рис. 4, *a*. Значение задержки $\Delta' = \Delta$. Точки фазового портрета не соединены линиями, так как каждые две последующие точки лежат в противоположных концах полученного множества

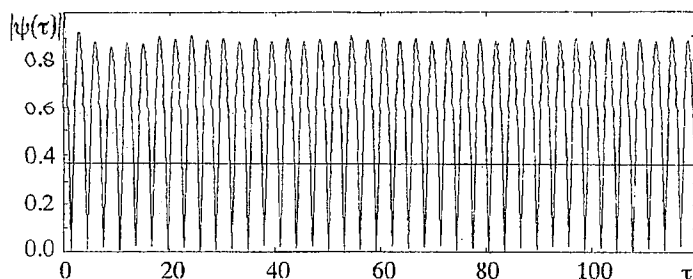


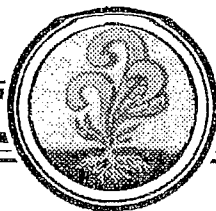
Рис. 5. Модуль автокорреляционной функции, рассчитанной по реализации $x(t)$ системы Рёсслера при значениях параметров $a=0.15$, $b=0.2$, $c=10$ (параметры, выбранные в обзоре)

Таким образом, мы считаем, что формула, следующая сразу за (19) в разделе 4, как следствие соотношения (1*), не является обоснованной.

1. Применение цифровой обработки сигналов / Под. ред. Э. Опенгейма. М.: Мир, 1980. 552 с.

2. Отнес Р., Энноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы. М.: Мир, 1983.

3. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. 608 с. (с.76).

**ПОЛЕВАЯ ЭМИССИЯ ИЗ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБ ***

*Н.И. Синицын, Ю.В. Гуляев, Г.В. Торгашов, Ю.А. Григорьев, А.И. Жбанов,
Л.А. Чернотанский, Ю.Ф. Захарченко, А.Л. Мусатов, О.Е. Глухова,
С.А. Князев, И.Г. Торгашов*

Обсуждаются результаты исследования полевой эмиссии электронов из нанотрубных углеродных структур, являющихся новым материалом эмиссионной электроники. Выполненные в виде тонких пленок, они характеризуются низкой работой выхода электронов и обеспечивают высокую и устойчивую полевую эмиссию электронов в условиях технического вакуума, а также значительную термоэлектронную эмиссию уже при низких температурах. Рассматриваются некоторые пути увеличения полевой эмиссии из углеродных нанотрубок.

Введение

Открытие углеродных нанотрубок, также часто называемых в литературе тубеленами, можно отнести к наиболее значительным достижениям науки наших дней. Занимая до некоторой степени промежуточное положение между графитом и фуллеренами, эта форма углерода по многим свойствам полностью отличается и от графита, и от фуллеренов, и может рассматриваться как новый материал, обладающий уникальными физико-химическими характеристиками [1,2]. Этот материал представляет большой интерес для самых разных направлений современной науки и техники, в том числе и для электроники. Что касается вакуумной микроэлектроники, то в ней интерес, проявляемый к углеродным нанотрубкам (тубеленам), связан прежде всего с возможностью получения с них значительной и стабильной полевой эмиссии электронов. Это связано с тем, что именно углеродные нанотрубки, сохраняя многие уникальные и важные для практики свойства углеродных структур, имеют чрезвычайно удачную геометрию для создания на их основе эффективных полевых эмиттеров электронов.

Возможность получения полевой эмиссии электронов из нанотрубных углеродных структур впервые была предсказана и экспериментально обнаружена нами в конце 1993 года. Результаты были доложены на VII Международной конференции по вакуумной микроэлектронике в Гренобле (Франция) в июле 1994 года [3]. Уже тогда стало ясно, что тубелены можно рассматривать как перспективный материал для создания полевых эмиттеров. Действительно, к настоящему времени в данном направлении получены интересные и перспективные результаты (см., например, [4–7]).

* Статья написана по материалам лекции, прочитанной на XI Международной школе по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов, 2–6 марта, 1999 г.

Мы остановимся на результатах исследования полевой эмиссии электронов из тонких углеродных пленок, содержащих нанотрубные структуры. Они характеризуются низкой работой выхода, обеспечивают достаточно высокую и устойчивую полевую эмиссию электронов в условиях технического вакуума и к тому же позволяют уже при низких температурах получить значительную термоэлектронную эмиссию. Исследования особенностей работы созданных структур позволят определить некоторые пути улучшения их характеристик.

1. Тонкие углеродные нанотрубные пленки

Углеродная нанотрубка, или тубелен, представляет полую вытянутую цилиндрическую гипермолекулу углерода. Некоторые тубелены можно описать формулой $C_{m+18(или\ 12)n}$, где $n=1,2,\dots$. Диаметр таких молекул составляет порядка 1 нм, они начинаются и заканчиваются половинками сфероидных молекул C_m , где $m \geq 36$ [8, 9]. Однако на практике, когда для получения полевой эмиссии с таких углеродных нанотрубок их необходимо располагать на несущей подложке, подобных идеальных молекул получить не удастся и картина выглядит обычно много сложнее. В большинстве случаев нанотрубки бывают двух типов. Одни состоят из полых одиночных нанотрубок, которые называются однослойными нанотрубками. Другие состоят из нескольких графитовых слоев, вложенных один в другой или навитых на общую ось. Такие нанотрубки получили название многослойных нанотрубок. Выращенные, например, на одной подложке однослойные и многослойные нанотрубки различной геометрии и в различных сочетаниях могут примыкать одна к другой. Поэтому и форма вершин однослойных и многослойных нанотрубных структур может быть достаточно разнообразной.

В выполненных нами экспериментальных исследованиях углеродные нанотрубные структуры создавались в виде тонких пленок на поверхности подложки, и вершины нанотрубных структур ориентировались нерегулярно к поверхности подложки. Исследования поверхности созданных тонких углеродных тубеленовых пленок показали, что тубелены могут собираться в волокна диаметром $3 \div 5$ нм, волокна, в свою очередь, могут образовывать кабели диаметром от $10 \div 30$ нм и более.

Нами, в основном, исследовались два типа тубеленов [3, 8–14]. Один из них, как было сказано выше, представляет собой однослойные трубки диаметром $0.6 \div 1.1$ нм, которые, в свою очередь, могут быть скручены в жгуты диаметром около 10 нм. Другой представляет собой многослойные трубки диаметром до 10 нм, закрытые сверху шапочкой, которые, в свою очередь, могут быть скручены в жгуты диаметром $30 \div 100$ нм. Условно назовем их тубеленами А и В-типа, соответственно. В пленках В-типа наблюдалось небольшое количество полиэдрических многослойных частиц «опионов», в пленках А-типа – небольшое количество нанокристаллов из C_{60} фуллеренов размерами до 100 нм [14]. Последние, по нашему предположению, образуются при начальной стадии роста пленок и могут служить основой для эпитаксиального роста пучка нанотрубок диаметром около 1 нм. Толщина пленок, несущих на своей поверхности нормально ориентированные к подложке углеродные нанотрубки, изменялась от 0.1 до 0.5 мкм.

К настоящему времени известно достаточно много способов получения тубеленовых пленок. Однако в проведенных экспериментах исследовались и использовались в основном два разработанных нами и, на наш взгляд, наиболее удачных способа [12]. Первый состоял в испарении графита в вакууме электронным пучком и последующем осаждении атомов углерода на подложке. Второй включал формирование требуемых фаз углерода в зонах ионной рекомбинации низкотемпературной газоразрядной плазмы. Основное достоинство развитого метода состоит в том, что сформированные плазменные потоки инертных газов, распыляя мишень, участвуют и в образовании совершенно новых по свойствам структур и пленок, когда эффект ионной рекомбинации используется

как дополнительный активизирующий фактор. Оба использованных способа позволяли создавать углеродные нанотрубчатые пленки с нанотрубками, ориентированные перпендикулярно к подложке.

Исследования проводимости таких пленок, содержащих текстуру с преимущественным направлением нанотрубок по нормали к подложке, показали ее прыжковый механизм. По-видимому, он связан с туннельным перескоком электронов с одной проводящей трубы на другую. Эти свойства позволили осуществить эксперименты как на проводящих, так и на диэлектрических подложках [14]. Проводимость вдоль тубелена выше поперечной и составляет 100 сименс/см [15], микротвердость выращенной пленки приближается к алмазу, составляя 4000 кг/мм² [16]. В качестве подложек исследовались различные материалы, в том числе кварц, стекло, кремний, молибден, никель. Замечено, что тип тубелена в определенной степени определяется структурой подложки, на которой он растет. Так, к примеру, тубелены А-типа легче создаются на кварцевой подложке, а тубелены В-типа – на кремниевой.

На рис. 1 представлены рельефы поверхности пленок, обеспечивающих высокую полевую эмиссию с тубеленами А и В-типа, полученные с помощью

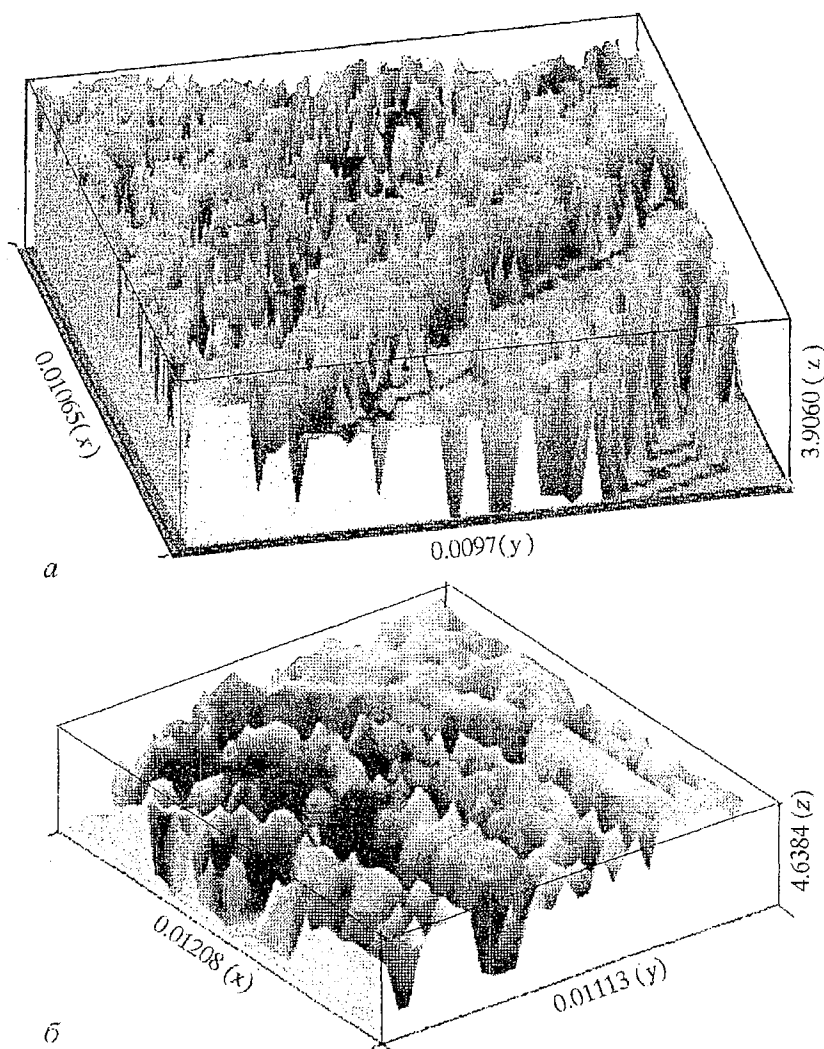


Рис. 1. Изображения поверхности тубеленовой пленки, полученные с помощью сканирующего туннельного микроскопа: *а* – поверхность пленки с тубеленами А-типа диаметром 0.6 ± 1.2 нм; *б* – поверхность пленки с тубеленами В-типа диаметром 3 ± 15 нм. Размеры по осям *x* и *y* даны в мкм, по оси *z* – в нм

сканирующего туннельного микроскопа. В пленке с тубеленами А-типа (рис. 1, а) диаметр тубеленов составлял 0.6 ± 1.2 нм, в пленке В-типа (рис. 1, б) диаметр тубеленов достигал 3 ± 15 нм. Развита нами технология позволяла предотвращать сворачивание нанотруб в жгуты. Как видно из рис. 1, диаметр многих нанотруб не превышал 10 \AA при их высоте $30 \pm 50 \text{ \AA}$, что соответствовало плотности упаковки более 10^{14} штук на квадратный сантиметр. В этом случае нагрузка на эмитирующие центры существенно снижается в сравнении с традиционными типами острых катодов [17].

2. Полевая эмиссия электронов из нанотрубных углеродных пленок

Заметная полевая эмиссия электронов с пленок А-типа начинается при напряженности поля $E=15 \text{ В/мкм}$ с плотностью тока 0.03 А/см^2 . Полевая эмиссия с пленок В-типа достигает тех же значений плотности тока при более высоких напряжениях, что связано в первую очередь с большим диаметром тубеленов В-типа.

Сравнительные характеристики Фаулера – Нордгейма для пленок А и В-типов, острых кремниевых катодов [17] и алмазоподобных пленок [18] приведены на рис. 2. Представленные характеристики показывают, что электронный ток J с тубеленовых пленок имеет автоэмиссионный характер. Причем по своим автоэмиссионным характеристикам пленки из углеродных нанотруб ближе к алмазоподобным, а эффективная работа выхода электронов с пленки А-типа, судя по наклону прямой Фаулера – Нордгейма, наиболее низкая. Плотность автоэмиссионного тока с созданных тубеленовых пленок достигала 10 А/см^2 , а с отдельных участков поверхности пленки с однослойными нанотрубными структурами она превышала эти значения.

Анализ вольт-амперных характеристик (ВАХ) пленок из углеродных нанотруб в режиме автоэмиссии с использованием классической формулы Фаулера – Нордгейма без учета рельефа поверхности позволяет оценить эффективную работу выхода электронов. Полученная величина работы выхода находилась вблизи уровня в 1 эВ [12–16]. Столь низкая величина работы выхода является неожиданным результатом. В этой связи следует подчеркнуть, что вопрос определения работы выхода из нанотрубных углеродных структур продолжает в настоящее время оставаться сложным и представляет самостоятельную задачу [14].

В связи с изложенным чрезвычайно интересен вопрос, связанный с возможностью увеличения плотности автоэмиссионного тока с пленочных нанотрубных структур или на первом этапе исследований, по крайней мере, с оценкой такой возможности.

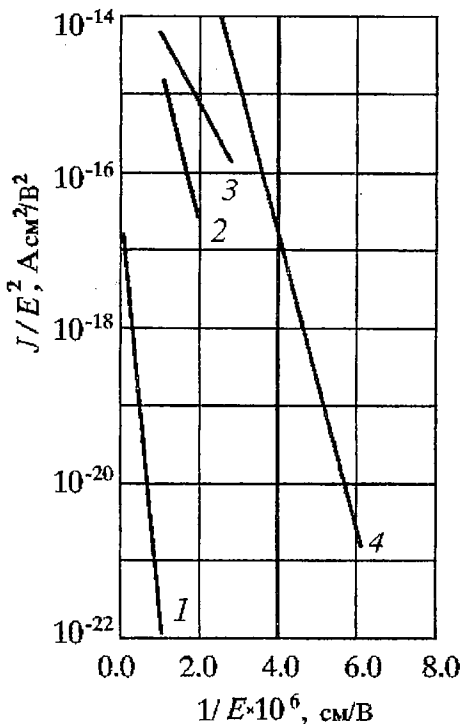


Рис. 2. Характеристики Фаулера – Нордгейма для: 1 – кремниевого острого катода, 2 – пленки с тубеленами В-типа, 3 – пленки с тубеленами А-типа, 4 – алмазоподобной пленки

3. Эмиссия стеклоглеродной полевой матрицы

Малая работа выхода углеродных нанотруб позволяет улучшить характеристики монокристаллических острийных углеродных матриц [19], понизить их рабочие характеристики. Такие матрицы, выполненные из стеклоглерода и имеющие высоту конических острий 12 мкм, диаметр основания 12 мкм, радиус закругления острия порядка 0.5 мкм и шаг решетки 20 мкм, позволяют в условиях технического вакуума обеспечить среднюю плотность тока по матрице 10 А/см². Например, с подобной острийной стеклоглеродной полевой матрицы площадью 1 мм² в диодном режиме получен ток более 100 мА.

На рис. 3 (кривая 1) представлена ВАХ такой решетки. После покрытия данной матрицы пленкой толщиной 0.2 мкм из углеродных нанотруб ее ВАХ (кривая 2) смещается в сторону малых напряжений V . Это свидетельствует о том, что полевая эмиссия решетки становится более низковольтной. Таким образом, параметры решетки улучшаются. При этом решетка по-прежнему обеспечивает плотности тока до 10 А/см². Но, наряду с данным важным результатом, мы получаем возможность оценить нагрузку, приходящуюся на эмиссионные центры рассмотренной углеродной матрицы и эмиссионные центры пленки, покрывающей матрицу и состоящей из углеродных нанотруб.

С помощью формулы Фаулера – Нордгейма по экспериментальной ВАХ структур были проведены численные оценки эффективной площади эмитирующих центров. Очевидно, что количество эмиссионных центров n_c для монокристаллической решетки катодов может быть представлено формулой

$$n_c = N_m S_m N_{cf} S_c,$$

где N_m – плотность упаковки монокристаллической катодной решетки; S_m – площадь монокристаллического катода; N_{cf} – плотность упаковки острий углеродных нанотруб на вершинах микроострий монокристаллического катода и на углеродной трубчатой пленке; S_c – эффективная площадь эмиссии по формуле Фаулера – Нордгейма на одно микроострие. Аналогично количество эмиссионных центров n_f для трубчатой пленки можно определить по формуле

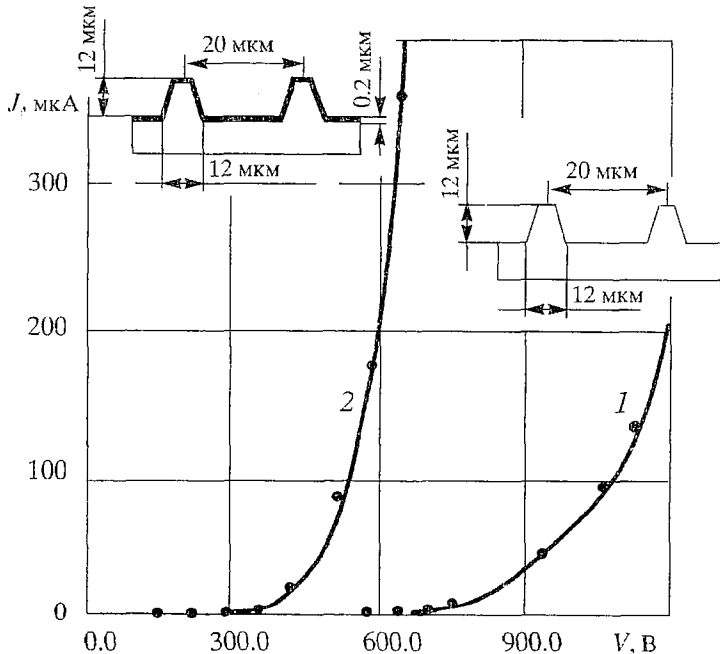


Рис. 3. Вольт–амперные характеристики для углеродного матричного автоэмиссионного катода: 1 – до и 2 – после нанесения углеродной нанотрубчатой пленки

$$n_f = N_{if} S_f,$$

где S_f – эффективная площадь по формуле Фаулера – Нордгейма всей эмитирующей поверхности пленки.

В проведенных экспериментах для круглого катода из тубеленовой пленки диаметром 0.8 мм, как следует из формулы Фаулера – Нордгейма, величина $S_f = 6 \cdot 10^{-10}$ см² при токе катода 7 мА, средняя упаковка $N_{if} = 10^{14}$ см⁻². Поэтому соответственно количество эмиссионных центров $n_f = 6 \cdot 10^4$ штук, а плотность тока в них достигала $1.1 \cdot 10^7$ А/см². Для монолитного острейного катода с вершинами острий, покрытых тубеленовыми пленками, при токе 60 мА и плотности упаковки $N_{in} = 2.5 \cdot 10^5$ см⁻², $N_{if} = 10^{14}$ см⁻², площади катода $S_m = 7 \cdot 10^{-2}$ см², как следует из формулы Фаулера – Нордгейма, $S_c = 2.3 \cdot 10^{-10}$ см², и поэтому количество эмиссионных центров составляет $1.75 \cdot 10^4$ штук. В результате плотность тока в эмиссионных центрах монолитной острейной матрицы составляет $1.5 \cdot 10^8$ А/см². Это значительно выше, чем для пленочного катода из углеродных нанотрубок. Таким образом, создание полевых эмиттеров из углеродных нанотрубных пленок оказывается предпочтительнее, чем применение монолитных матричных острийных углеродных катодов, поскольку на пути повышения плотности эмиссии из пленочных углеродных нанотрубных структур имеются большие возможности. И поэтому дальнейшее улучшение технологии их изготовления может позволить подойти к созданию нового класса полевых эмиттерных решеток с плотностью тока $10 \div 10^2$ А/см².

В связи со сказанным отметим следующий момент. В данной работе, в основном, обсуждаются возможности получения больших плотностей токов, достигающих $10 \div 10^2$ А/см² и выше. Условия работы катодов в таких режимах являются экстремальными. В то же время, использование электронных пучков с плотностями тока $1 \div 10$ мА/см² (например, для создания полноцветных плоских панельных дисплеев), позволяет надеяться, что срок жизни таких эмиттеров может оказаться достаточно большим и превышать десять тысяч часов. К тому же, развитая технология принципиально позволяет создавать однородные эмиттерные решетки на больших рабочих площадях.

4. Квантово–механические модели углеродных нанокластеров

В настоящее время не представляется возможным дать однозначное объяснение наблюдаемой в эксперименте низкой работы выхода электронов из тубеленовой пленки. Одной из причин могут быть дефекты в нанокластерных углеродных структурах, связанные с: потерей атомов углерода, в каркасе структуры, приобретением структурой атомов других элементов, взаимным влиянием элементов наноструктуры и особенностями геометрии образованных нанокластеров. Для подтверждения трех первых предположений были исследованы квантово–механические модели отдельных и связанных между собой фуллеренов и тубеленов с помощью полуэмпирической модели сильной связи Харрисона в модификации Гудвина [20]. Оценка работы выхода $\phi = (I+M)/2$ проводилась по потенциалу ионизации I . При этом предполагалось, что для углеродных кластеров сродство к электрону $M = I/2$. Рассмотрение таких упрощенных структур, как фуллерены и тубелены, которые значительно отличаются от экспериментально выращенных тубеленовых пленок, показало, что они обладают более низкой работой выхода, чем графит, однако не настолько, чтобы наблюдалось соответствие между найденной для них работой выхода и экспериментом. Так, на рис. 4 в качестве примера приведены рассчитанные потенциалы ионизации I для тубеленов C_{72} , структуры которых с внесенными в них дефектами изображены в верхней правой части диаграмм. На рис. 4, а удаленные атомы углерода отмечены кружочками с нумерацией последовательного отрыва атомов. На рис. 4, б атомы

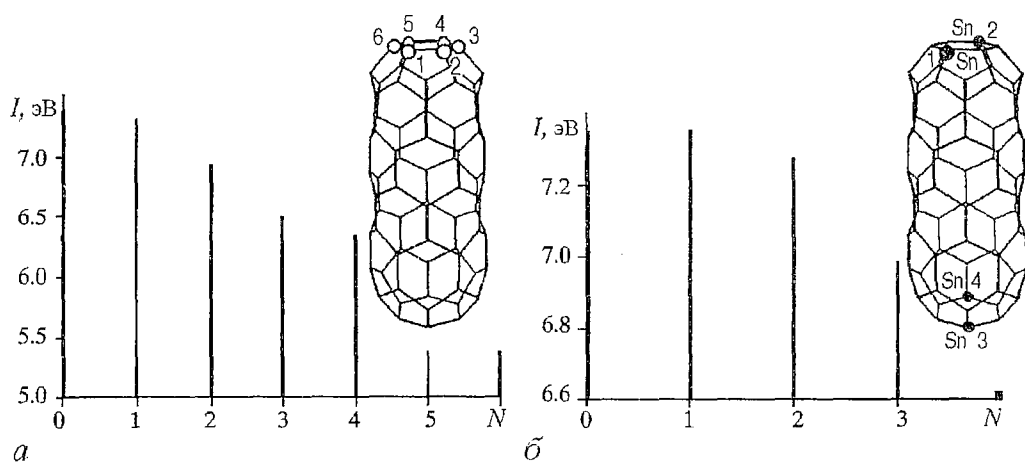


Рис. 4. Потенциалы ионизации тубуленов C_{72-n} , $C_{72-n}Sn_n$, как функция от числа и места: *a* – удаленных атомов, *б* – замещенных атомов

углерода, замещенные атомами олова, показаны темными кружочками. Цифры на осях абсцисс соответствуют числу удаленных (рис. 4, *a*) и замещенных (рис. 4, *б*) атомов.

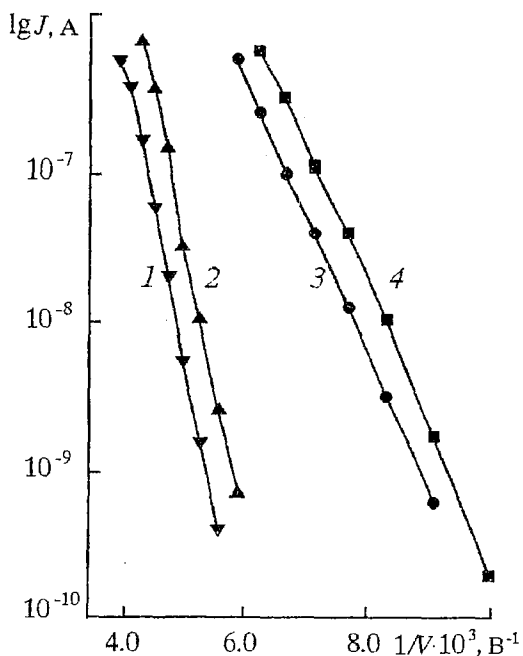
5. Допирование пленок

Выполненные нами предварительные теоретические и экспериментальные исследования показали, что на количество и подвижность носителей оказывает влияние внедрение в структуру нанотруб атомов других элементов или допирование ими поверхности пленки. Наилучшие результаты при введении в структуру нанотруб атомов других элементов получены для элементов четвертой группы (Si, Ge, Sn), а при допировании межмолекулярного пространства пленки – для элементов первой группы (Li, Na, K, Cs). Кратко остановимся на следующих результатах предварительных экспериментов.

Известно, что тонкие слои щелочных металлов, абсорбированные на твердой поверхности подложки, заметно снижают работу выхода ϕ . Так, покрытые цезием образцы меди уменьшают ϕ с 4.4 до 1.64 эВ [21]. Для уменьшения работы выхода пленок из углеродных нанотруб нами в первых экспериментах использовалось осаждение цезия на вершинах нанотруб при выращивании слоев нанотруб на никелевой подложке полиэтилен–пиролизом [22]. Как уже отмечалось выше, эта технология не совсем удачна, хотя и отличается простотой. Исследования, проведенные с использованием сканирующего электронного микроскопа, показали, что в этом случае поверхность углеродного слоя включала переплетенные нанотрубные образования диаметром 20÷60 нм, частично направленные перпендикулярно поверхности подложки (приблизительно 10^6 острий на $см^2$). Слой цезия толщиной порядка 10 Å осаждался на нанотрубном образце, предварительно отоженном в вакууме при температуре порядка 400° С. Измерения ВАХ проводились в вакууме при 10^{-9} Торр с использованием шарика из золота диаметром 1 мм в качестве анода. Он располагался на расстоянии 30÷40 мкм от плоской структуры. На рис. 5 показаны ВАХ образцов в координатах Фаулера – Нордгейма: $\lg J, 1/V$. Из рисунка видно, что присутствие цезия на нанотрубном материале снижает рабочие напряжения. Так, для плотности тока эмиссии 4 мА/см² напряжение снижается с 250 В (для чистых образцов) до 160 В (для тех же самых образцов, покрытых цезием) [23].

Интересны проведенные нами предварительные эксперименты по допированию пленок из углеродных нанотруб атомами олова. Выполненные нами теоретические расчеты показывают, что при допировании нанотрубки атомами

Рис. 5. Вольт-амперные характеристики автоэлектронной эмиссии с тубеленовой пленки в координатах Фаулера - Нордгейма для двух типов образцов при различном расстоянии анода от поверхности плоской структуры: 1 - чистый образец, 35 мкм; 2 - чистый образец, 40 мкм; 3 - образец с осажденным цезием, 35 мкм; 4 - образец с осажденным цезием, 40 мкм



олова может происходить значительная деформация ее структуры. В результате потенциал ионизации нанотрубки понижается на 2 эВ. Действительно, представленная на рис. 6 ВАХ пленки из углеродных нанотрубок, допированной оловом в процессе распыления углерода в низкотемпературной плазме инертного газа, смещается в область низких напряжений [23]. Это свидетельствует о снижении работы выхода из такой пленки. Плотность тока полевой эмиссии с подобных пленок достигает нескольких ампер с квадратного сантиметра и характеризуется высокой стабильностью.

В настоящее время проводятся исследования возможности допирования нанотрубных углеродных пленок атомами других химических элементов (бария, свинца, цинка и пр.), которые уже дали ряд интересных результатов. Так, из рис. 6 видно, что допирование пленок свинцом еще более снижает работу выхода электронов из них [24]. При этом в режиме получения значительных плотностей тока эмиссии стабильность таких пленок несколько снижается.

Следует особо отметить еще одно важное и положительное свойство тубеленовых пленок - их автоэмиссионная способность сохраняется в условиях технического вакуума. Измерения проводились при изменении давления в широких пределах - от 10^{-7} до 10^{-2} Торр. Деградации автоэмиссионного тока не наблюдалось при улучшении вакуума до $5 \cdot 10^{-5}$ Торр. Плотность тока полевой эмиссии восстанавливалась с уменьшением давления до начальной величины. Эмиссионные характеристики сильно зависят от чистоты эмитирующей поверхности.

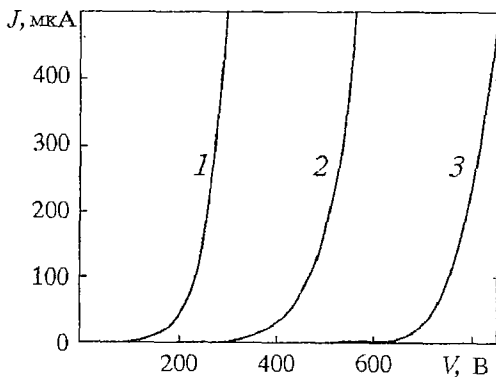


Рис. 6. Вольт-амперные характеристики автоэлектронной эмиссии с пленок из углеродных нанотрубок, допированных атомами химических элементов: 1 - Pb, 2 - Sn, 3 - чистая углеродная пленка

6. Термоэлектронная эмиссия из нанотрубных углеродных структур

При исследовании термоэлектронной эмиссии из нанотрубных углеродных структур получены чрезвычайно интересные и важные как в научном, так и в практическом плане результаты. Оказалось, что термоэлектронная эмиссия из таких структур может достигать значительных величин уже при низких температурах. Эмиссионные свойства нанотрубных углеродных пленочных структур с тубеленами А и В-типов проводились в температурном интервале от

20 °С до 472 °С при вакууме 10^{-8} Торр. Если при комнатной температуре наблюдался только автоэмиссионный ток, то уже с повышением температуры до 200 °С начиналась термоэлектронная эмиссия, которая при температуре 450 °С достигала значительных величин [12–14]. Максимальная температура ограничивалась 472 °С и выбиралась с учетом разности коэффициентов теплового расширения нанотрубной пленки и исследуемых подложек.

Заключение

Нанотрубные углеродные структуры представляют новый перспективный материал эмиссионной электроники. Они характеризуются низкой работой выхода, устойчивой автоэлектронной эмиссией в условиях технического вакуума и могут использоваться для создания низковольтных полевых эмиттеров низкотемпературных термокатодов.

Имеются значительные возможности повышения полевых эмиссионных характеристик углеродных нанотроек, для чего необходимо дальнейшее изучение физико-химических свойств пленок и улучшение развиваемых технологий их изготовления.

Авторы хотят выразить свою признательность профессорам Я. Нанничи и Р.З. Бахтизину, доктору Г.Ф. Грею, профессорам П. Катлеру, Н. Мисковскому и доктору Р. Баптисту за их внимание к этим работам и поддержку.

Работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований по гранту № 98-02-17970 и Российской программой «Фуллерены и атомные кластеры» по гранту № 96143.

Библиографический список

1. Dresselhaus M.S. Science of fullerene and carbon nanotubes // London: Academic Press, 1996. 965 p.
2. Ebessen T.W. Carbon nanotubes // Physics Today. 1996. (June). P. 26.
3. Gulyaev Yu.V., Chernozatonskii L.A., Kosakovskaya Z.Ya., Sinitsyn N.I., Torgashov G.V. and Zakharchenko Yu.F. Field emitter arrays on nanofilament carbon structure films // Techn. Digest 7th IVMC, Mars-Avril, 1994, Grenoble, France. P. 322.
4. Hongjie Dai, Hafner J.H., Rinzler A.G., Colbert D.T., Smalley R.E. Nanotubes as nanoprobe in scanning probe microscopy // Nature. 1996. Vol. 384. P. 147.
5. De Heer W.A., Chatelain A., and Ugarte D. A carbon nanotube field emission electron source // Science. 1995. Vol. 270. (November). P. 1179.
6. Smalley R.E. Field emission from an atomic wire // Documentation IVESC Conf., July 1–4, 1996, Eindhoven, The Netherlands. P. C1.
7. De Heer W., Stockli T., Chatelain A., Ugarte V., Forro L. Transport and field emission properties of aligned carbon nanotube films // Documentation IVESC Conf., July 1–4, 1996, Eindhoven, The Netherlands. P. C2.
8. Chernozatonskii L.A., Fedorov E.A., Kosakovskaya Z.Ya., Panov V.I., Savinov S.V. STM evidence of smallest rod presence in nanofilament carbon structure // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 57, вып. 1. С. 35.
9. Chernozatonskii L.A., Kosakovskaya Z.Ya., Kiselev A.N., Kiselev N.A. // Chem. Phys. Lett. 1994. Vol. 228. P. 94.
10. Chernozatonskii L.A., Gulyaev Yu.V., Kosakovskaya Z.Ya., Sinitsyn N.I., Torgashov G.V., Zakharchenko Yu.F., Fedorov E.A., Val'chuk V.P. Electron field emission from nanofilament carbon films // Chem. Phys. Lett. 1995. Vol. 233. P. 63.
11. Gulyaev Yu.V., Chernozatonskii L.A., Kosakovskaya Z.Ya., Sinitsyn N.I., Torgashov G.V., Zakharchenko Yu. F. Field emitter arrays on nanofilament carbon structure films // J. Vac. Sci. Technol. 1995. B 13(2).
12. Chernozatonskii L.A., Kosakovskaya Z.Ya., Gulyaev Yu.V., Sinistyn N.I., Torgashov G.V., Zakharchenko Yu.F. The influence of external factors on electron emission

from thin film nanofilament carbon structures // Techn. Digest 8th IVMC, July 30 – August 3, 1995, Portland, USA. P. 363.

13. Chernozatonskii L.A., Kosakovskaya Z.Ya., Gulyaev Yu.V., Sinitsyn N.I., Zakharchenko Yu.F., Torgashov G.V. The influence of external factors on electron field emission from nanofilament carbon structures // J. Vac. Sci. Technol. 1996. B 14(3). P. 20802.

14. Sinitsyn N.I., Gulyaev Yu.V., Torgashov G.V., Chernozatonskii L.A., Kosakovskaya Z.Ya., Zakharchenko Yu.F., Kiselev N.A., Musatov A.L., Zhanov A.I., Mevlyut Sh.T., Glukhova O.E. Thin films consisting of carbon nanotubes as a new material for emission electronics // J. Appl. Surf. Sci. 1997. Vol. 111. P. 145.

15. Omell'yanovskii O.E., Tserbo V.I., Lebedev O.I., Kiselev A.N., Bondarenko V.I., Kiselev N.A., Kosakovskaya Z.Ya., Chernozatonskii L.A. Temperature dependence of resistivity and structure of carbon nanotube films containing various kinds of tubules // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 62, вып. 6. С. 483.

16. Косаковская З.Я., Чернозатонский Л.А., Федоров Е.А. Нановолоконная углеродная структура // Письма в ЖЭТФ. 1992. Т. 56, вып. 1. С. 26.

17. Spindt C.A., Brodie I., Humphrey L. Physical properties of film field emission cathodes // J. Appl. Phys. 1976. Vol. 47. P. 5248.

18. Xie C., Kimar N., Collins C.B., Lee T.J., Schmidt H., Wagal S. Electron field emission from amorphous diamond thin films // Techn. Digest 6th IVMC, July 12–15, 1993, Newport, USA. P. 162.

19. Gulyaev Yu.V., Sinitsyn N.I., Torgashov G.V., Grigoriev Yu.A., Shestyorkin V.I., Veselov A.G., Shvetsov Yu.V., Semyonov V.C. Emission of low-voltage multi-tip carbon matrices coated by carbon clusters // Techn. Digest 9th IVMC, July 7–12, 1996, St. Petersburg, Russia. P. 519.

20. Gulyaev Yu.V., Sinitsyn N.I., Glukhova O.E., Mevlyut Sh.T., Torgashov G.V., Torgashov I.G., Zhanov A.I. The Influence of carbon nanocluster defects on film field emission // Techn. Digest 10th IVMC, August 17–21, 1997, Kyongju, Korea. P. 523.

21. Физические величины: Справочник / А.П. Бабищев, Н.А. Бабушкина, А.М. Братковский и др.; Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

22. Kikoveskii E.F., Chernozatonskii L.A., L'vov S.G., Mel'nik N.N. // Chem. Phys. Lett., 1997. Vol. 266.

23. Sinitsyn N.I., Gulyaev Yu.V., Torgashov G.V., Grigoriev Yu.A., Zhanov A.I., Chernozatonskii L.A., Zakharchenko Yu.F. Field emission from carbon nanotubes // Extended Abstract, IVESC, July 7–10, 1998, Tsukuba, Japan. P. 7.

24. Sinitsyn N.I., Torgashov G.V., Gulyaev Yu.V., Knyazev S.A., Buyanova Z.I., Zhanov A.I., Glukhova O.E., Torgashov I.G. Electron field emission from nanocluster carbon-metal films // Technical Digest, 12th IVMC'99, July 6–9, 1999, Darmstadt, Germany. P. 254.

Саратовское отделение
Института радиотехники
и электроники РАН,
Институт радиотехники и
электроники РАН, Москва
Саратовский государственный
университет
Институт физической
химии РАН, Москва

Поступила в редакцию 26.08.99
после доработки 15.01.2000

FIELD EMISSION FROM CARBON NANOTUBES

*N.I. Sinitsyn, Yu.V. Gulyaev, G.V. Torgashov, Yu.A. Grigoriev, A.I. Zhbanov,
L.A. Chernozatonskii, Yu.F. Zakharchenko, A.L. Musatov, O.E. Glukhova,
S.A. Knyazev, I.G. Torgashov*

Investigation results are discussed for the field emission of electron from nanotube carbon structures that are a new material for emission electronics. Made in the form of thin films, they are characterized by a low work function of electrons and ensure a high stable electron field emission under the conditions of normal operating vacuum, as well as a considerable thermal electron emission even at low temperatures. Some ways to enhance the field emission from carbon nanotubes are considered.



Синицын Николай Иванович – доктор физико–математических наук, профессор, заместитель директора по научной работе Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, академик РАЕН. Область научных интересов: вакуумная микроэлектроника, акустоэлектроника СВЧ и твердотельная СВЧ–электроника, взаимодействие электромагнитных волн миллиметрового диапазона с биологическими и физическими объектами. E–mail: sinitsyn@ire.san.ru



Гуляев Юрий Васильевич – академик РАН, член Президиума РАН, доктор физико–математических наук, профессор, Президент ЦП РНТОРЭС им. А.С. Попова, директор Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов: физические методы ранней медицинской диагностики, акустоэлектроника, акустооптика, спин–волновая электроника, магнитооптика, интегральная оптика, радиофизика.



Торгашов Геннадий Васильевич – кандидат физико–математических наук, старший научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов: электроника СВЧ, вакуумная микроэлектроника.



Жбанов Александр Игоревич – кандидат физико–математических наук, доцент кафедры прикладной физики Саратовского государственного университета. Область научных интересов: вычислительная физика, численно моделирование физических процессов.

Григорьев Юрий Алексеевич – доктор физико–математических наук, старший научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов: электроника СВЧ, вакуумная микроэлектроника.

Чернозатонский Леонид Александрович – доктор физико–математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института физической химии РАН (Москва). Область научных интересов: конструирование возможных форм нанокластеров, теоретическое исследование их электрофизических свойств, акустоэлектроника.

Захарченко Юрий Федорович – кандидат физико–математических наук, старший научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов: электроника СВЧ, вакуумная микроэлектроника.

Мусатов Алексей Леонидович – доктор физико–математических наук, профессор, заведующий лабораторией Института радиотехники и электроники РАН (Москва). Область научных интересов: фотоэлектронная эмиссия, авто– и термоэлектронная эмиссия с нанокластерных пленок.



Глухова Ольга Евгеньевна – кандидат физико–математических наук, ведущий инженер кафедры прикладной физики СГУ. Область научных интересов: спектроскопия, квантовая химия, вакуумная микроэлектроника, математическое моделирование физических процессов.



Князев Сергей Александрович – главный специалист по оборудованию Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов: технология напыления тонких пленок.



Торгашов Илья Геннадьевич – аспирант кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ. Область научных интересов: туннельная микроскопия, вычислительная физика.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЩЕСТВА, ПОЗВОЛЯЮЩАЯ ОТВЕТИТЬ НА ВОПРОС О ПРИНЦИПАХ ЕГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ, ОРГАНИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ

Ю.И. Неймарк

На основе игровой математической модели общества выявлены принципы его функционирования, организации и управления.

1. Введение и основные посылки

Как следует из заголовка, целью настоящей работы является построение математической модели современного общества, позволяющей обнаружить принципы его функционирования, организации и управления. Для этого составляемая математическая модель должна включать в себя свойства общества, позволяющие ответить на эти вопросы. Самый, казалось бы, простой путь осуществления этого требования – это построение модели, достаточно адекватной и полно отражающей реальное общество. Но этот путь заведомо невозможен, так как общество очень сложно и состоит из огромного числа активно и непредсказуемо действующих людей. Необходимо пойти по другому пути, строя математическую модель на основе общего описания общества как целого, заложив в него лишь некоторые самые важные его черты, но достаточные для того, чтобы ответить на поставленные вопросы. Для этого описание общества должно содержать общие характеристики взаимоотношения людей и описание стимулов и целей его функционирования. Стимулы определяются людьми, составляющими общество, цели же привносятся в некотором смысле извне. Это то, что хотелось бы от общества, то, чего хотелось бы достичь путем соответствующей его организации и управления. В определении цели можно опереться на требования соответствия с природой и потребностями людей. Общественная жизнь людей допускает игровое описание и люди осознанно или неосознанно вовлечены в нее. Игровое восприятие жизни соответствует природе человека и может быть желанным и весьма, если не наиболее, продуктивным [1]. В истории человечества, мягко выражаясь, не всегда это реализовывалось и естественной целью может быть изменение этого положения.

Примем, что движущей силой (стимулами) и основой функционирования общества являются:

1.1 стремления людей действовать так, чтобы потреблять возможно больше в соответствии со своими индивидуальностями. Действия каждого человека и его потребности можно понимать весьма широко. Бездействие и

манипуляции с собой тоже действия. Потребление возможно внешнее (деньги, материальный продукт и ценности, товар, информация, всевозможные услуги, включая удовольствия и духовные ценности) и внутреннее, когда мы что-то получаем от себя или от других, что не может быть выражено в денежном эквиваленте;

1.2 объединение людей, несмотря на естественную конкуренцию, для возможно большего производства продукта с целью максимального потребления и удовлетворения своих потребностей. Здесь продуктом названо все то, что могут и хотят потреблять люди согласно 1.1.

Эти высказывания едва ли вызывают возражения, они бесспорны, но могут казаться весьма не полно описывающими общество. Конечно, они не полны, но, как будет видно из дальнейшего, достаточны для того, чтобы одновременно с последующей формулировкой цели ответить на вопросы об основных принципах функционирования, организации и управления обществом.

Предварительная, уточняемая впоследствии формулировка цели может быть представлена в следующем виде:

2.1 стремления отдельных людей к максимальному потреблению, в конечном счете, должны способствовать удовлетворению потребностей всех членов общества, так что успех каждого – одновременно и успех всех.

Эта общая формулировка требует ряда уточнений: что означает «способствовать» и что такое «успех». Ниже это будет уточнено. Конечно, можно хотеть от общества не только согласованной успешности в добыче потребляемого продукта, но и многого другого. В свете сегодняшних воззрений это обеспечение прав человека, интересной и полноценной жизни, открытости и доступности информации, отсутствия излишних ограничений в действиях (свобода) и другое. Эти пожелания могут противоречить организации и методам управления обществом, могут быть с ними несовместимыми, как это имеет место для тоталитарного общества с командной системой управления. Но возможен и другой случай, когда напротив, они с ними совместимы, им не противоречат и могут быть осуществлены, если общество этого хочет. Более того, возможен случай, когда организация и управление обществом таковы, что в той или иной мере влекут выполнение этих дополнительных требований. Как будет видно из дальнейшего, условия пунктов 1.1, 1.2 и цель 2.1 именно этого последнего типа.

2. Игровая модель общества

Такая модель была предложена в докладе [1]. Она основывается на посылках 1.1 и 1.2 и состоит в следующем. Каждый человек I_i , для того, чтобы удовлетворить свои потребности, совершает какие-то действия, представимые как выбор игры O^k из некоторого допустимого множества игр O и участие в этой выбранной игре. Участие в игре можно описать последовательностью дискретных выборов действий x_s^k из некоторого множества Ω_s^k , в результате каждого из которых игрок получит выигрыш f_s^k , зависящий как от его хода x_s^k , так, вообще, и от ходов остальных игроков. Цель каждого игрока I_i состоит в максимизации своего выигрыша как за счет выбора игры, так и за счет последовательности ходов в ней. Смена выбора игры происходит значительно реже, чем последовательные ходы, так что выбор игры и выбор ходов можно считать происходящими в разных масштабах времени. Стремление к максимальному потреблению 2.1 влечет требование успешности в целом этой игры. При этом задача общества состоит в способствовании правильности выбора игр и успешности в выбранной игре. Правильности выбора игры и подготовленности к ней требуют информированности о ситуации в обществе и самореализации личности, в частности, свободы выбора своих действий и соответствия с личными стремлениями и возможностями. Успешности в выбранной игре способствует информированность, прежде всего, о функции выигрыша f_s^k , допустимых действиях

Ω_s^k и действиях других участников игры и возможно большая широта допустимых действий Ω_s^k .

3. Принципы управления

Участие в игре предполагает конкуренцию. При этом кто-то проигрывает, кто-то выигрывает много, но в конечном счете именно конкуренция способствует эффективности игры в целом, как организационной формы производства материальных и духовных ценностей, продукта, товаров, торговли и услуг. Вместе с тем, в этой игре конкурентное противостояние, способствующее прогрессу технологий и способов действий, должно, согласно 2.1, в конечном счете способствовать всем: и тем, кто удачно играет и выигрывает, и тем, кто играет неудачно и проигрывает. Это накладывает определенные требования на функции выигрыша f_s^k и множества допустимых действий Ω_s^k . Реализация и совершенствование этих требований составляет основную цель социального управления обществом. Речь идет о реализации привлекательности, приемлемости и желанности игры и одновременно ее эффективности с точки зрения удовлетворения потребностей людей. Таким образом, общим требованием является реализация привлекательности и эффективности игры как образа жизни людей. Только из одной игровой организации следует, что для эффективности игры необходимо соблюдение ряда условий, назовем их принципами управления. Ранее в [1] уже приводились аргументы за естественность стремления людей к игре и за ее восприятие человеком как наиболее продуктивной и желанной формы жизни. Не во все периоды своей истории человек мог реализовать эти свои стремления, но сегодня это возможно, и происходит в развитых странах все в большей и большей мере, как осуществление свобод и прав человека. С точки зрения игровой модели общества этот процесс можно трактовать как реализацию эффективности и продуктивности игры. К этому выводу приводит анализ условий максимизации выигрышей. Этот максимум тем выше, чем шире множество Ω_s^k , что можно сформулировать как принцип минимальности принуждения. Реализации максимального выигрыша способствует открытость общества и информации о нем и его функционировании. Наконец, игра может быть привлекательной и активизирующей деятельность людей, если в ней соблюдаются правила игры и нет шулеров и жуликов, то есть соблюдаются права человека и есть защита от их нарушений. Итак, основные принципы:

3.1 наименьшее принуждение;

3.2 открытость общества и информации;

3.3 поддержка привлекательности и эффективности игры путем соблюдения прав человека.

Подчеркнем, что эти общие принципы управления – прямое следствие игрового характера жизни людей и требований привлекательности и эффективности игры.

Игра тем эффективнее, чем шире возможности действий, чем шире множество Ω_s^k , то есть чем меньше принуждение. Открытость общества и информации непосредственно способствуют оптимизации игровых действий. Кроме того, открытость препятствует нарушениям правил игры, появлению мошенников и шулеров, которые могут полностью лишить игру привлекательности и обесценить ее. Права человека с точки зрения игровой интерпретации деятельности людей не более чем правила игры, обеспечивающие ее приемлемость, желанность и эффективность.

4. О привносимой цели общества

Выше были получены непосредственные общие следствия из игровой модели общества и основных стимулов деятельности людей, описываемых

пунктами 1.1, 1.2 и 2.1. Теперь уточним и рассмотрим возможности и пути реализации цели, состоящей в том, что успех каждого способствует успеху всех. По существу, здесь два разных требования: первое, что выигрыш каждого – это одновременно и выигрыш всех остальных, и второе, что максимальный личный выигрыш каждого – это одновременно и максимум общего выигрыша.

Выше понятие выигрыша могло пониматься очень широко: и как выигрыш, допускающий денежный эквивалент, и как, например, личное удовольствие, доставляемое самому себе. Теперь понятие выигрыша следует сузить до того, что дает общество в силу деятельности субъекта I_s в рамках его правил игры и измеряется в деньгах. Эту часть выигрыша f_s^k обозначим \bar{f}_s^k . Кроме того, введем еще фактический денежный выигрыш φ_s^k . Общий денежный выигрыш общества F при этом равен

$$F = \sum \bar{f}_s^k = \sum \varphi_s^k. \quad (1)$$

Выигрыш каждого будет способствовать выигрышу всех остальных и общему выигрышу, если принять, что

$$\bar{f}_s^k = \alpha_s^k F, \quad (\alpha_s^k > 0). \quad (2)$$

Однако такая распределительная система общего выигрыша неприемлема, поскольку она не только лишает игроков заинтересованности в успешной игре, но и оставляет неясным, когда и в какой мере они играют эффективно, и это лишает игру не только привлекательности, но и эффективности в увеличении и достижении максимального выигрыша. Основной стимул каждого игрока – стремление к максимальному потреблению (выигрышу) – оказывается неостребованным и не допускающим реализации. Этого можно было бы избежать, приняв, что

$$\bar{f}_s^k = \beta_s^k \varphi_s^k, \quad (\beta_s^k > 0). \quad (3)$$

При этом выигрыш непосредственно отражает фактический вклад игрока, но его выигрыш не способствует выигрышу остальных. Оба требования будут выполнены, если принять, что

$$\bar{f}_s^k = \alpha_s^k F + \beta_s^k \varphi_s^k, \quad (4)$$

где $\alpha_s^k F$ – то, что дает общество своим членам из общего дохода F в виде общественного обустройства, воспитания и образования, здравоохранения, культурного, социального и правоохранительного обеспечения, а $\beta_s^k \varphi_s^k$ – то, что они получают из своих личных выигрышей. Функция выигрыша вида (4) имеет место в любом обществе, а коэффициенты α_s^k и β_s^k характеризуют распределение в обществе общего выигрыша между его членами. Коэффициенты α_s^k и β_s^k не произвольны. Суммируя (4) по всем s , находим, что

$$\sum (\alpha_s^k + \beta_s^k \varphi_s^k / \sum \varphi_s^k) = 1,$$

из чего следует, что все β_s^k не могут быть больше единицы, а все α_s^k больше $1/N$, где N – общее число игроков.

При $\alpha_s^k = 1/N$ и $\beta_s^k = 0$ имеет место уравнительное распределение, при $\alpha_s^k = 0$ и $\beta_s^k = 1$ каждый получает то, что добыл сам. При α_s^k и β_s^k положительных в той или иной мере одновременно выполняются первое требование – о том, что выигрыш каждого φ_s^k способствует выигрышу всех остальных, и требование роста выигрыша \bar{f}_s^k с увеличением успешности игры (ростом φ_s^k), так что при β_s^k не слишком маленьких сохраняются заинтересованность в успешной игре и возможность оптимизации фактического личного выигрыша.

Общий выигрыш F зависит от действий x_s^k всех субъектов. Второе требование означает, что максимум общего выигрыша F достигается при значениях переменных x_s^k , дающих максимум каждой из функций индивидуального выигрыша \bar{f}_s^k по переменной x_s^k . Это идеальное требование. Фактически достаточно, чтобы при максимизации личных выигрышей f_s^k по личным действиям x_s^k значение общего выигрыша было достаточно близким к оптимальному по всем переменным. Можно заметить, что это требование полностью соблюдается, если каждая из функций \bar{f}_s^k зависит только от x_s^k . Поэтому можно считать, что примерное соблюдение второго требования будет иметь место в том случае, когда в большинстве функций выигрыша \bar{f}_s^k ведущей переменной является именно x_s^k , то есть когда личный выигрыш φ_s^k зависит в первую очередь от личных действий x_s^k , а член $\beta_s^k \varphi_s^k$ превалирует или не слишком мал по сравнению с членом $\alpha_s^k F$ выигрыша $\alpha_s^k F + \beta_s^k \varphi_s^k$, получаемого игроком I_s . Эти правдоподобные соображения, конечно, требуют более детального и конкретного анализа. Сейчас только отметим, что из сказанного следует необходимость организации игрового участия таким образом, чтобы личный выигрыш игрока I_s в значительной мере определялся именно его действиями.

В общем плане рассматриваемый вопрос состоит в том, как нужно назначить функции индивидуального выигрыша \bar{f}_s^k , чтобы их личная поисковая оптимизация в игровом взаимодействии была в той или иной мере осуществимой и способствовала оптимизации общего выигрыша F , а общий выигрыш F способствовал всем индивидуальным выигрышам \bar{f}_s^k . Такова, помимо привлекательности и вовлеченности в игру, одна из основных проблем, стоящих перед организацией и управлением обществом.

Сформулируем ее как проблему назначения всем членам общества выигрышей \bar{f}_s^k и множеств допустимых действий Ω_s^k , при которых выполняются следующие требования:

4.1 каждый из игроков лично заинтересован в игре и выигрыше, располагает достаточной информацией и имеет возможность оптимизировать свою функцию выигрыша \bar{f}_s^k ;

4.2 оптимизация индивидуальных выигрышей \bar{f}_s^k в достаточной мере означает одновременно и оптимизацию общего выигрыша F ;

4.3 общий выигрыш F способствует всем индивидуальным выигрышам.

5. О допустимых играх и действиях

Стремление людей к совершенствованию потребления может осуществляться не только за счет более целесообразных действий в играх, но в более широком плане и за счет создания новых игр и новых действий. Новые игры и новые допустимые действия – это новые орудия труда, типы и способы производства, добычи и обработки, новые технологии, производственные, сельскохозяйственные и другие процессы, новые условия жизни и труда, способствующие более полному удовлетворению потребностей человека. Эти новшества в целом могут вести к большей привлекательности совместной игровой жизни, способствовать общему прогрессу.

Основой этих нововведений является познавательная, исследовательская и поисковая деятельность людей на основе преемственности знаний и умений, обеспечиваемых воспитанием и образованием. Инстинкты и природа человека способствуют этим видам его деятельности, но не во все времена они пользовались

поддержкой общества и включались в денежный выигрыш. Общество в этом вопросе проявляло явно недостаточное понимание своей выгоды, что лишь отчасти компенсировалось меценатской и благотворительной деятельностью. У этого недопонимания есть веское основание: отсутствие денежной оценки таких действий, отдаленность их эффекта и заинтересованность в них общества в целом, а не конкретных людей. Это привело к тому, что одним из важнейших факторов стимуляции научных и технических исследований стали вооруженное противостояние и конфликты. Неприемлемость этой ситуации очевидна, но исправить ее очень не просто. Агрессивность и стремление к главенствованию тоже в природе человека. Еще недавно они являлись, как представляется, основными механизмами эволюции жизни на Земле. Вооруженные конфликты – тоже игры, в историческом плане великие, но едва ли приемлемые в настоящем и будущем. С точки зрения рассматриваемой игровой модели общества они противоречат его цели, а включение игр с познавательными действиями (наука, техника, культура, обучение и др.) естественно, поскольку расширяет привлекательность игр, соответствует врожденным устремлениям и склонностям многих людей и существенно, если не решающе, расширяет эффективность игр всех людей и общества в целом.

Библиография

1. *Неймарк Ю.И.* Теория управления как наука, которая может и должна помочь человеку в решении социально-экономических и экологических проблем // Сборник пленарных докладов Международной конференции по проблемам управления (29.06 – 2.07. 1999г.). М., 1999. С.131.

*Нижегородский государственный
университет*

Поступила в редакцию 27.10.99

THE MATHEMATICAL MODEL OF SOCIETY ALLOWING TO ANSWER THE QUESTION ON PRINCIPLES OF ITS FUNCTIONING, ORGANIZATION AND OPERATING

Ju.I. Neimark

On the basis of the game mathematical model of society, principles of its functioning, organization and operating are revealed.



Неймарк Юрий Исаакович – доктор технических наук, профессор ННГУ, академик РАЕН, Соросовский профессор, член национального комитета по теоретической и прикладной механике, лауреат премий А.А. Андропова и Н. Винера. Автор 8 монографий и более 400 работ по теории колебаний, теоретической механике, теории управления и др.



МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ РАЗВИВАЮЩИХСЯ НАУЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЯ РОСТА ДОСТИЖЕНИЙ И ЗАПАЗДЫВАНИЯ

И. В. Измайлов, Б. Н. Пойзнер, В. О. Раводин

Исследуется модель взаимодействия двух научных направлений с квадратичным ограничением роста достижений, учитывающая инерционность восприятия сообществом «своих» и «чужих» научных достижений. Построены серии фазовых портретов для двух случаев развивающихся направлений, позволяющие выяснить влияние инерционности на характер динамики. В частности, показано, что инерционность способна разрушать одно из научных направлений, вновь вызывая его к жизни, усложняя процесс взаимодействия.

Введение

Фундаментальные математические модели динамики тех или иных характеристик научной деятельности обсуждались в ряде работ отечественных науковедов еще в 1980-е годы, например, в книгах Яблонского и Хайтупа [1,2]. Однако исследование поведения этих моделей разворачивается лишь в последние годы. В частности, обращают на себя внимание статьи Качака и Мчедловой [3,4]. В них и в кратком сообщении [5] раскрыты социологические аспекты моделей и актуальность предпринятых исследований. В [3,4] на примере изучения взаимодействия пары научных направлений отражены универсальные процессы отношений между двумя подсистемами одной замкнутой системы. В модели, рассмотренной в статье [4] (в отличие от предшествующей ей статьи [3]), сделан учет ограничения экспоненциального роста обобщенных макропеременных x , y , имеющих смысл состояния проблем в областях научного знания X , Y . Выбор ограничения в форме квадратичной нелинейности [4], показал, что такое ограничение делает данную модель приближением более высокого порядка по сравнению со случаем, представленным в [3], демонстрируя рост разнообразия динамики развития научных направлений.

Подобная диверсификация поведения системы, рассмотренной в [3], имеет место и при учете инерционности реакции на научные достижения в каждом из взаимодействующих направлений. Мы не обсуждаем здесь причины инерционности, но предполагаем, что они могут иметь мировоззренческую, социокультурную, методологическую, социально-психологическую, коммуникативную и другую природу. В относительно простом виде эта инерционность может формально описываться введением разновеликих запаздывающих аргументов у обобщенных макропеременных x , y , стоящих в правых частях уравнений модели, предложенной

в статье [3]. Как показали вычислительные эксперименты [6–8], даже если величина запаздывания одинакова для всех слагаемых в уравнениях, наблюдается расширение разнообразия эволюции подсистем, что позволяет говорить о повышении правдоподобия модели.

По существу тот же вывод сделан в докладах [9,10], предложивших учитывать еще и инерционность ограничения экспоненциального роста наряду с инерционностью взаимодействия научных направлений.

Следует напомнить, что эредитарные системы (от др. – греч. $\chi\rho\omega\sigma\tau\eta\varsigma$ – родственники, наследующие имущество), то есть системы с последствием, или запаздыванием, впервые были рассмотрены именно в контексте классического труда В. Вольтерры «Математическая теория борьбы за выживание» [11]. В четвертой главе «Сравнение явлений последствия в биологии и механике» Вольтерра предложил математическое толкование последствия. Изучение математических моделей систем с последствием (в силу их распространенности в природе, технике и социокультурной сфере) составляет сегодня отдельное направление в теории устойчивости динамических систем [12].

Судя по публикациям, сложились три направления совершенствования модели взаимодействия в науке, выражаемые последовательностями работ [3,4], [3,6–8] и [4,9,10], соответственно. В свете сказанного представляет интерес провести вычислительные эксперименты, учитывая как ограничение экспоненциального роста в форме квадратичной нелинейности, так и инерционность восприятия сообществами ученых «своих» и «чужих» научных достижений. В данной работе представлены результаты моделирования, относящиеся к случаям I и II, рассмотренным в статье [4].

Описание модели

Для удобства сравнения результатов будем в дальнейшем использовать обозначения, принятые в статье [4]. Как и в работе [7], будем исходить из того, что существуют научные результаты, воспринимаемые сообществом с различным запаздыванием, то есть воспринимаемые из различных временных пластов. Следовательно, возможно дробление каждого члена уравнений модели на серии подобных же членов, но с различной величиной запаздывающего аргумента ($t-\tau_i$). Отсюда возникают соответствующие суммы – вплоть до интегральных функций вида

$$\int_0^{\infty} f_x(t-\tau)x(t-\tau)d\tau,$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_{xy}(t-\tau_x, t-\tau_y)x(t-\tau_x)y(t-\tau_y)d\tau_x d\tau_y$$

при бесконечном дроблении. Если «функции памяти» f являются дельта-функциями от $(t-\tau_i)$, то получаются известные модели, восходящие к работам В. Вольтерры (например, выражение (37) в [11, с. 267]) или подобные им.

В соответствии с изложенным выше рассмотрим модель взаимодействия научных направлений с ограничением развития ($b_1, b_2 \geq 0$) и инерционностью восприятия достижений в форме уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\begin{cases} dx(t)/dt = c_1x(t-\tau_1)y(t-\tau_2) - c_2x(t-\tau_3) - b_1x(t-\tau_7)x(t-\tau_8), \\ dy(t)/dt = c_3y(t-\tau_4)x(t-\tau_5) - c_4y(t-\tau_6) - b_2y(t-\tau_9)y(t-\tau_{10}). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь τ_1 и τ_3 – задержки в восприятии первым сообществом собственных результатов: соответственно в контексте результатов второго сообщества (усваиваемых с опозданием на τ_2) и вне контекста; τ_7 и τ_8 – задержки в восприятии

научной продукции, влекущей ограничение экспоненциального роста достижений первого сообщества. Само это ограничение может быть не только следствием устаревания (опровержения) научно-технической информации [4], но и проявлением опередивших «свое время» результатов, сужающих поле возможных новаций сегодня. Времена $\tau_4, \tau_6, \tau_5, \tau_9$ и τ_{10} имеют аналогичный смысл для второго сообщества. По смыслу введенных времен запаздывания в типичном случае $\tau_3 \leq \tau_1 \leq \tau_2$. Заметим, что соотношения между временами τ_i зависят от многих факторов, называвшихся выше. В отличие от модели, предложенной в докладе [9] Е.С. Мчедловой, времена τ_3, τ_7 (и симметричные им τ_6, τ_9) не равны нулю.

Рассмотрим простейший случай равенства всех τ . В качестве начальных условий возьмем $x(t)=x_0, y(t)=y_0, -\tau < t < 0$. Тогда можно аналитически найти функции x, y на любом из отрезков $n\tau < t < (n+1)\tau$ ($n \geq 0$, целое). Причем $x(t), y(t)$ порогово усложняются с ростом n и являются полиномами. На отрезках $n\tau < t < (n+1)\tau$ для максимального порядка этих полиномов справедливо следующее рекуррентное соотношение: $m_n = 2m_{n-1} + 1$, где $m_{-1} = 0$. Если устремить τ к нулю, то уже при $t \rightarrow 0$ порядок полиномов $m \rightarrow \infty$.

При возникновении $x < 0$ ($y < 0$) в расчетах полагались характеристики продуктивности $x=0$ ($y=0$). Величина запаздывания изменялась с различным значением шага варьирования, и выбранный нами максимум ее был не менее 2.3. В качестве системы тестовых задач использовались результаты статей [3, 4].

Результаты моделирования

I. Для случая, когда оба направления развиваются, причем X отрицательно влияет на Y , Y положительно влияет на X ($c_1=1, c_2=c_3=c_4=-1$), имеют место следующие особенности.

Вариант 1.1: $b_1=b_2=0.5, x_0=0.1, y_0=1$. Пока время запаздывания (формально нормированное к $1/|c_2|$) не превышает значения 1.56, имеет место стационарное устойчивое состояние: $x=2, y=0$. Начиная с $\tau=1.6$, становятся заметными колебания x (в пределах $1.7046 \div 2.2502$), но по-прежнему $y=0$. С ростом τ амплитуда растет и усугубляется ангармонизм колебаний. При $\tau=2.4$ минимальное значение x становится равным 0, период следования максимумов близок к 12.8, что составляет приблизительно 5.3 τ . Близость x к 0 в момент t влечет медленность изменения x в момент $t+\tau$, которая проявляется на графике $x(t)$ как горизонтальный участок.

Вариант 1.2: $b_1=5, b_2=0.5, x_0=0.4285, y_0=1.1528$. При малых запаздываниях ($\tau < 0.91$) имеет место стационарное устойчивое состояние, в котором y не обращается в ноль: $x=0.4285, y=1.1428$. Начиная с $\tau > 0.91$, становятся заметными колебания. Поскольку на фазовом портрете локальные максимумы (как и минимумы) макропеременных x, y совпадают, эти колебания можно интерпретировать как синфазные. С увеличением τ растет их амплитуда, а также возникший сдвиг фаз между ними (надежно опознаваемый при $\tau=1.07$), причем фазовые портреты напоминают по форме «восьмерку» до тех пор, пока $\tau \leq 1.07$. Ее нижняя петля сокращается при увеличении τ .

При увеличении τ от 1.07 до 1.08 значение x достигает нуля (рис. 1, а), нижняя петля «восьмерки» утрачивается, и форма предельного цикла становится существенно менее вытянутой.

Удвоение периода наступает в интервале $1.1 \leq \tau \leq 1.105$, бифуркация, восстанавливающая прежний режим, происходит, когда $1.26 \leq \tau \leq 1.27$. Очередные удвоения периода имеют место соответственно, если $1.31 \leq \tau \leq 1.32$ и $1.34 \leq \tau \leq 1.35$, а

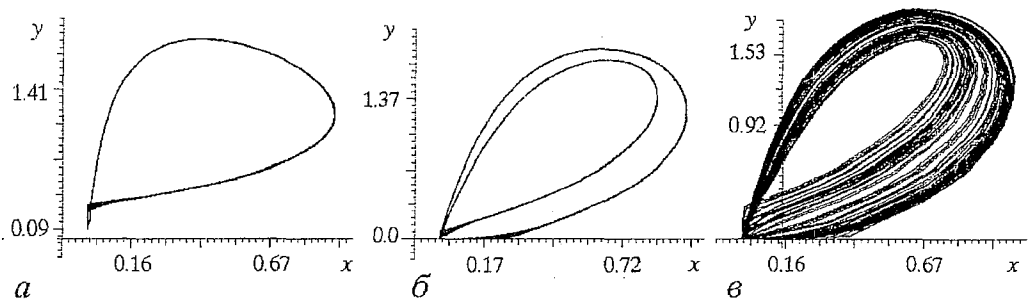


Рис. 1. Фазовые траектории системы (1) для варианта 1.2 при различных величинах времени запаздывания τ : а - 1.080, б - 1.64, в - 1.68001

при $\tau=1.36$ восстанавливается предельный цикл. По мере приближения τ к величине 1.57 минимальные значения макропеременных сливаются в точку (0,0).

Многократное наступление режима, когда y остается равным нулю, а x колеблется, вызывается значениями τ в следующих интервалах и точках: [1.58; 1.6], 1.62, 1.63, 1.67, 1.68, [1.69; 2.5]. В промежутках между этими интервалами и точками (при $\tau=1.61$; 1.64) на фазовых портретах наблюдается возникновение пары вложенных петель предельного цикла с тенденцией к расширению фазовых траекторий (рис. 1, б). Значительно сильнее эта тенденция проявляется, когда $\tau=1.66$, а при $\tau=1.68001$ она приводит к хаотическому движению (рис. 1, в). Причем оно непосредственно соседствует с тривиальным движением, когда $y=0$ при $\tau=1.68$.

Вариант 1.3: $b_1=5$, $b_2=0.5$, $x_0=0.4285$, $y_0=0.1528$. Чтобы оценить роль начальных условий, в рассмотренном варианте 1.2 начальное значение y уменьшено на 1.0.

То же самое стационарное устойчивое состояние имеет место при $\tau < 0.805$. Но уже при $\tau=0.806$ значение x достигает нуля, поэтому форма предельного цикла подобна изображенной на рис. 2.

Как и в варианте 1.2, удвоение периода наступает в интервале $1.1 \leq \tau \leq 1.105$, а бифуркация, восстанавливающая прежний режим, происходит, когда $1.26 \leq \tau \leq 1.27$. Очередные удвоения периода имеют место соответственно, если $1.31 \leq \tau \leq 1.32$ и $1.34 \leq \tau \leq 1.35$,

В отличие от варианта 1.2, предельный цикл восстанавливается при $\tau=1.37$, а в интервале значений τ (1.35; 1.37) наблюдается более сложная динамика. Но и здесь по мере приближения τ к величине 1.57 минимальные значения макропеременных сливаются в точку (0,0). Зато режим, когда y остается равным нулю, а x колеблется, наступает единожды и сохраняется в широком диапазоне τ [1.58; 2.3].

Вариант 1.4: $b_1=10$, $b_2=0.5$, $x_0=0.28$, $y_0=1.5$. Подобно варианту 1.2 при малых запаздываниях ($\tau \leq 0.6$) имеет место стационарное устойчивое состояние, в котором y не обращается в ноль: $x=0.25$, $y=1.5$, а с ростом запаздывания ($\tau=0.7$) становятся заметными синфазные колебания макропеременных. С увеличением τ растет амплитуда этих колебаний, возникает и плавно нарастает сдвиг фаз (заметный уже при

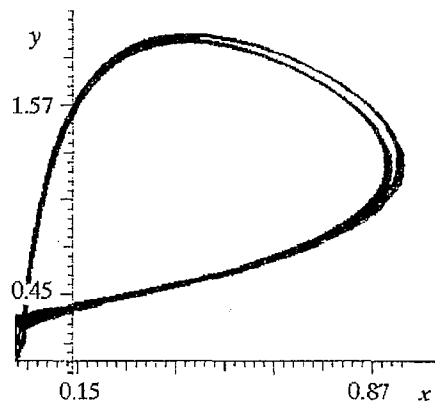


Рис. 2. Фазовая траектория системы (1) для варианта 1.3 при $\tau=1.080$

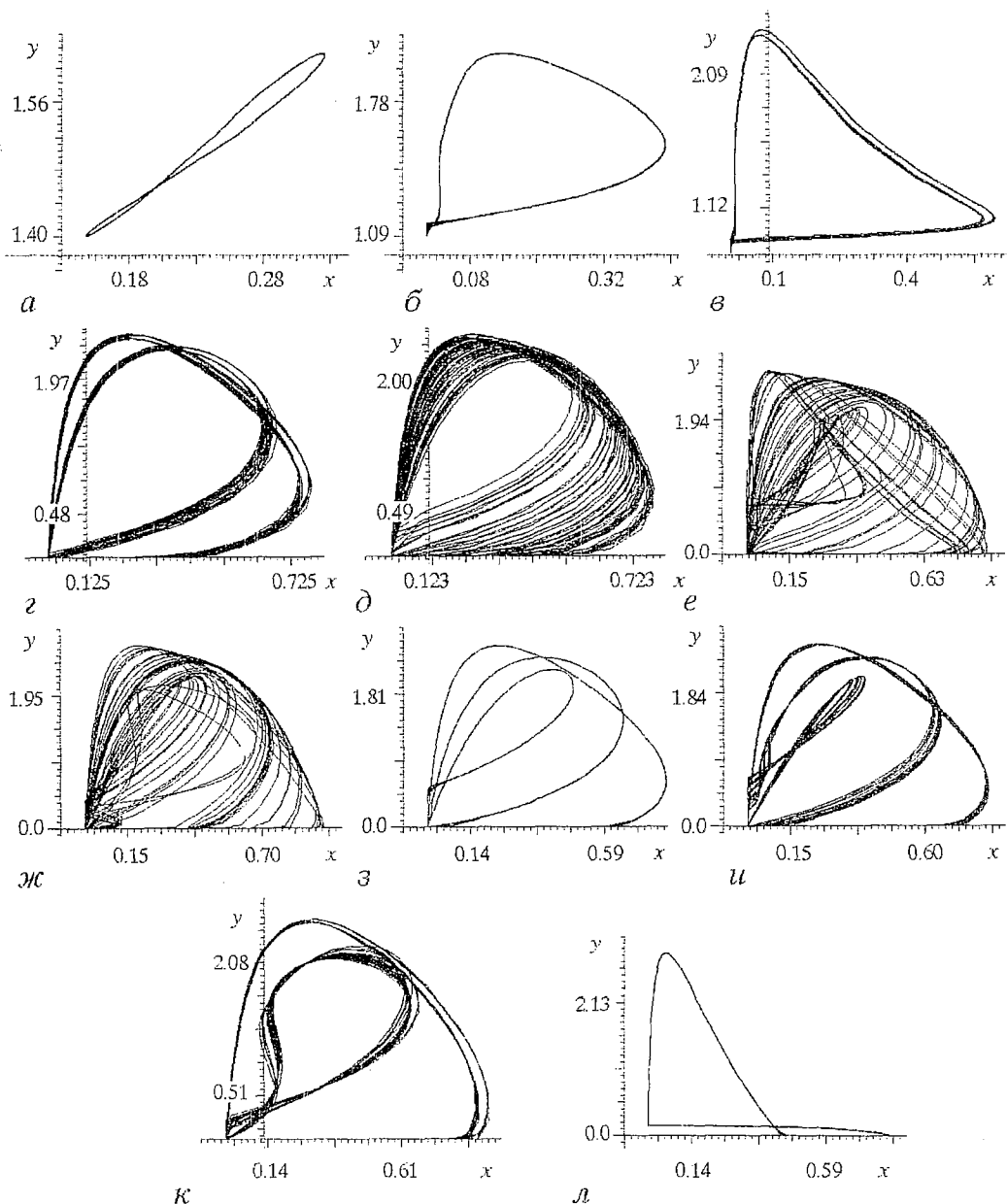


Рис. 3. Фазовые траектории системы (1) для варианта 1.4 при различных величинах времени запаздывания τ : а - 0.800, б - 0.870, в - 1.500, з - 1.840, д - 1.890, е - 2.060, ж - 2.310, з - 1.930, и - 2.000, к - 2.210, л - 2.570

$\tau=0.8$). Фазовые портреты имеют форму «восьмерки» в диапазоне $0.7 \leq \tau \leq 0.86$ (например, рис. 3, а для $\tau=0.8$). Ее нижняя петля сокращается при увеличении τ . При увеличении τ от 0.86 до 0.87 значение x достигает нуля (рис. 3, б), нижняя петля «восьмерки» утрачивается, и форма предельного цикла становится существенно менее вытянутой. При $\tau=1.5$ конфигурация цикла напоминает треугольник (рис. 3, в). А с переходом τ от 1.5 к 1.6 значение y достигает нуля. Одновременно предельный цикл становится близким по виду к изображенному на рис. 3, б.

Признаки удвоения периода, различимые на фазовом портрете, появляются в интервале $1.76 \leq \tau \leq 1.77$. По мере увеличения τ на портретах наблюдается заметное

расширение фазовых траекторий (рис. 3, з), возможно, обусловленное последующими актами удвоения. В пользу такого предположения говорит вид портретов для больших значений τ , типичный для хаотической динамики (рис. 3, д). Характерно, что, начиная с того момента, когда макропеременная y приближается к нулю ($\tau=1.6$), соответствующая область значений x расширяется с увеличением запаздывания (рис. 3, д).

Общую картину динамики макропеременных при $\tau > 1.92$ отличает явление «чередования сложности движения», характерное в менее яркой форме и для вариантов 1.2, 1.3. Поясняя содержание этого понятия, введем четыре (условных) градации сложности динамики: тривиальная (когда $y=0$), простая, относительно простая и относительно сложная. Упомянутое чередование сложности движения по мере роста τ проявляется в четырех типах двусторонних переходов:

- относительно сложное \leftrightarrow относительно простое,
- относительно сложное \leftrightarrow простое,
- простое \leftrightarrow относительно простое,
- простое \leftrightarrow тривиальное.

Относительно сложная динамика наблюдается в следующих интервалах величины запаздывания τ и при ее значениях: 1.92, [1.94; 1.99], [2.01; 2.15], [2.25; 2.31], 2.35, 2.49. Типичными фазовыми портретами могут служить рис. 3, д, е, ж, когда $\tau=1.89, 2.06, 2.31$, соответственно. Заметим, что в структуре рис. 3, е просматриваются элементы нескольких простых аттракторов.

Относительно простая динамика вызывается значениями τ в нескольких интервалах и точках: 1.93, 2.0, [2.2; 2.24], 2.4. Примерами фазовых портретов здесь служат рис. 3, з, и, к, когда $\tau=1.93, 2.00, 2.21$, соответственно.

Главные черты простой динамики передает фазовый портрет на рис. 3, л ($\tau=2.57$). Подобные ему имеют место при величинах τ , принадлежащих следующим интервалам и точкам: [2.32; 2.34], [2.36; 2.39], [2.41; 2.48], 2.52; 2.53, 2.57, 2.59, 2.7.

Тривиальная динамика ($y=0$) наблюдается при наличии таких величин τ : [2.54; 2.56], 2.58, [2.6; 2.69], [2.71; 2.85].

Сопоставляя серии фазовых портретов, относящихся к вариантам 1.1, 1.2, 1.3 случая I, можно сделать ряд выводов.

- Наличие запаздывания вызывает утрату устойчивости стационарного состояния, что позволяет возникнуть колебательному процессу (например, с периодом T), не имеющему места, если $\tau=0$ [4], а также влечет как каскады удвоения периода колебаний ($T \rightarrow 2T$), так и переход $2T \rightarrow T$.

- Наличие запаздывания способно повлечь как обратимое (во времени t) падение до нуля обеих макропеременных x, y , так и необратимое падение y .

- Взаимодействие макропеременных x, y при варьировании запаздывания демонстрирует большее разнообразие типов динамики, чем в случае, когда $y=0$.

- Варианты 1.2–1.4 при изменении запаздывания в некоторых пределах допускают явление «чередования сложности движения», при этом возможна хаотическая динамика или напоминающая ее.

- Увеличение параметра b_1 , то есть усиление ограничивающего фактора для макропеременной x , отрицательно влияющей на y , повышает устойчивость y по отношению к росту запаздывания, обеспечивая большее разнообразие типов движения.

- Варьирование начального условия для макропеременной y отражается как на бифуркационных значениях времени запаздывания, так и на структуре фазовых портретов для отдельных (но не всех) интервалов величин τ .

II. Случай, когда развивающиеся направления X и Y конкурируют ($c_1=c_2=c_3=c_4=-1$).

Вариант 2.1: $b_1=b_2=0.5$, $x_0=1.9$, $y_0=2.1$. При наличии запаздывания ($\tau \neq 0$), как и в случае его отсутствия ($\tau=0$), необратимо превращается в 0 макропеременная с меньшими начальными условиями. Поскольку при $x=0$ уравнение для y в (1) идентично уравнению для x варианта 1.1 при $y=0$, то при варьировании запаздывания динамика установившегося движения макропеременной y полностью повторяет поведение x варианта 1.1.

Вариант 2.2: $b_1=1.5$, $b_2=1.9$, $x_0=0.1$, $y_0=2.0$. Пока запаздывание относительно мало, имеет место стационарное устойчивое состояние: $x=0.486$, $y=0.27$. Как и в варианте 1.2, начиная с некоторого значения запаздывания ($\tau=1.56$), становятся различимы синфазные колебания макропеременных x , y , амплитуда которых растет с увеличением τ .

С ростом τ от 1.93 до 1.94 происходит бифуркация удвоения периода. Дальнейший рост запаздывания разводит совпадавшие ранее максимумы макропеременных, то есть нарушает синфазность колебаний. Форма фазового портрета при $\tau=2.06$ напоминает контур бабочки (рис. 4, а). Когда $\tau=2.07$, снова наступает бифуркация удвоения периода (рис. 4, б). Как и в вариантах 1.2, 1.3, наблюдается бифуркация, восстанавливающая прежний режим (при $2.15 < \tau < 2.16$). Трансформации фазового портрета по мере роста τ состоят также и в том, что при $\tau=2.15$ возникают промежутки эволюции макропеременных, в которых $y=0$, а при $\tau=2.85$ $x=0$ (рис. 4, в). Очередная бифуркация удвоения периода наступает в интервале $2.85 < \tau < 2.90$, а парная ей бифуркация, возвращающая к прежнему режиму, наступает при $3.6 < \tau < 3.7$. Заметим, что с увеличением τ промежутки эволюции, где x либо y равны 0, расширяются, что видно из сравнения рис. 4, в с рис. 4, з ($\tau=3.7$) и рис. 4, д ($\tau=3.9$).

Вариант 2.3: $b_1=b_2=1.5$, $x_0=0.1$, $y_0=2.0$. Чтобы оценить роль отличия в параметрах ограничивающей нелинейности, в рассмотренном варианте 2.2 эти параметры взяты одинаковыми, а начальные условия – теми же.

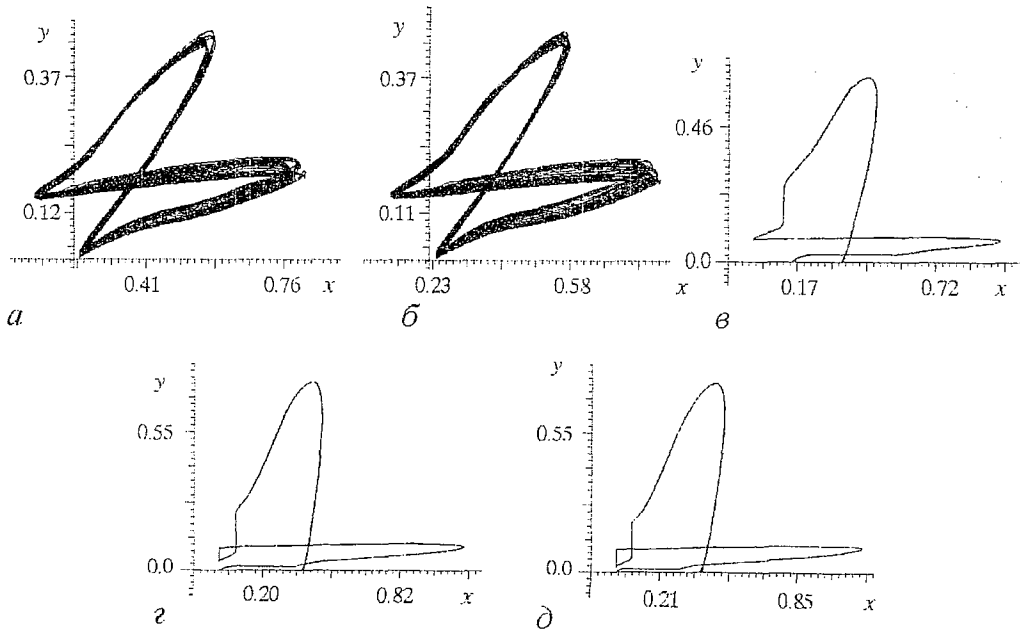


Рис. 4. Фазовые траектории системы (1) для варианта 2.2 при различных величинах времени запаздывания τ : а – 2.060, б – 2.070, в – 2.850, з – 3.700, д – 3.900

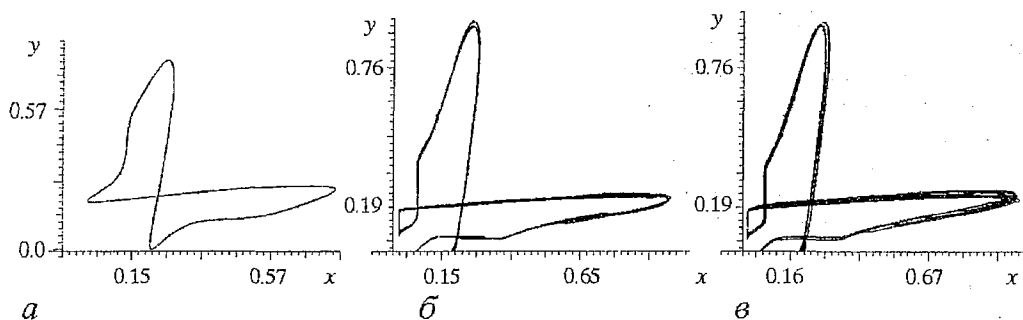


Рис. 5. Фазовые траектории системы (1) для варианта 2.3 при различных величинах времени запаздывания τ : а – 2.190, б – 3.250, в – 3.297

Стационарные значения макропеременных составляют $x=y=0.4$. Режим синфазных колебаний надежно идентифицируется при $\tau=1.57$. Первая бифуркация удвоения периода имеет место, когда $2.00 < \tau < 2.01$, то есть при большем, по сравнению с вариантом 2.2, запаздыванием. Из-за того, что $b_1=b_2$, участки фазовой траектории, где $x=0$ или $y=0$, формируются почти одновременно (рис. 5, а) при $\tau=2.19$ (в отличие от варианта 2.2, при $\tau=2.15$). Рост запаздывания вызывает появление петель (при $2.55 < \tau < 2.65$) и увеличение их размера (рис. 5, б для $\tau=3.25$) вблизи удлиняющихся участков, где $x=0$ или $y=0$. Эти петли смыкаются, когда $\tau=3.297$ (рис. 5, в), и этот фазовый портрет типичен вплоть до $\tau=6.6$.

Сопоставляя серии фазовых портретов, относящихся к вариантам 2.1, 2.2, 2.3, можно сделать ряд выводов.

- Первый вывод для случая I справедлив и для случая II.
- Наличие запаздывания способно повлечь обратимое (во времени t) падение до нуля обеих макропеременных x, y .
- Взаимодействие макропеременных x, y при варьировании запаздывания демонстрирует большее разнообразие типов динамики, чем в случае, когда $x=0$.
- Вариант 2.2 при изменении запаздывания в некоторых пределах допускает явление «чередования сложности движения».
- Увеличение параметра b_2 и создание неравенства $b_1 \neq b_2$ обеспечивает большее разнообразие бифуркационного поведения.

Следует иметь в виду, что вид фазовых портретов существенно чувствителен к изменению величины запаздывания τ , указанной в подписях к рисункам.

Заключение

Выполненный цикл вычислительных экспериментов по изучению модели взаимодействия двух развивающихся научных направлений позволяет сделать ряд выводов.

Наличие инерционности восприятия научных достижений, превышающей некоторый порог, вызывает колебания показателей, характеризующих области научного знания X, Y . Рост инерционности влияет на величину периода циклических процессов взаимодействия X, Y и на характер динамики внутри цикла: темп (в том числе нулевой) и число актов развития или деградации (вплоть до исчезновения) направлений, диапазон вариаций показателей, характеризующих X, Y , синфазность – в смысле совпадения локальных максимумов (как и минимумов) этих показателей.

Кроме того, инерционность (в зависимости от ее степени) способна: разрушать одно из научных направлений, вновь вызывать его к жизни, хаотизировать процесс взаимодействия X, Y .

Если при отсутствии инерционности возможно сосуществование направлений X , Y , то по мере роста инерционности смена режимов взаимодействия X , Y носит маятниковый характер, что позволяет говорить о «чередовании сложности движения».

Усиление ограничивающего фактора для направления X , отрицательно влияющего на Y (которое положительно влияет на X), повышает устойчивость направления Y относительно роста инерционности, обеспечивая большее разнообразие режимов взаимодействия.

Варьирование начального условия для направления Y способно отражаться как на бифуркационных значениях инерционности, так и на сложности динамики взаимодействия.

Таким образом, совместный учет ограничения экспоненциального роста (в форме квадратичной нелинейности [4]) и инерционности восприятия научных достижений (введением запаздывающего аргумента у макропеременных) существенно расширяет диапазон режимов взаимодействия двух научных направлений в модели (1): от стационарного устойчивого состояния до хаотической динамики.

Заметим, что в несколько иной модели [9], где лишь $\tau_8 \neq 0$, $\tau_{10} \neq 0$, констатируется переход от периодических колебаний к хаосу через каскад удвоения периода.

Библиографический список

1. Яблонский А.И. Математические модели в исследовании науки. М.: Наука, 1986. 352 с.
2. Хайтун С.Д. Проблемы количественного анализа науки. М.: Наука, 1989. 280 с.
3. Качак В.В., Мчедлова Е.С. Модель взаимодействия и эволюции двух научных направлений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 4. С. 110.
4. Качак В.В., Мчедлова Е.С. Модель взаимодействия двух научных направлений с учетом ограничения экспоненциального роста достижений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 2. С. 85.
5. Качак В.В., Усанов Д.А. К вопросу о взаимодействиях научных школ, или Об одном аргументе «за» интеграции образовательных структур // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 2. С. 95.
6. Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н., Раводин В.О. Моделирование самоорганизации двух научных направлений с учетом инерционности их взаимодействия // Матер. второго науч. семинара «Самоорганизация устойчивых целостностей в природе и обществе», Томск, 13–15 августа 1998. Томск, 1998. С. 124.
7. Измайлов И.В., Раводин В.О. Особенности самоорганизации при запаздывающем взаимодействии двух научных направлений // Матер. второй междунар. конфер. «Самоорганизация природных, техногенных и социальных систем: междисциплинарный синтез фундаментальных и прикладных исследований», Алма-Ата, 1–4 сент., 1998. Алма-Ата, 1998. С.139.
8. Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н., Раводин В.О. Моделирование влияния запаздывания на взаимодействие двух научных направлений // Тез. докл. V Междунар. школы «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, 6–10 октября 1998. Саратов, 1998. С. 91.
9. Mchedlova E.S. The model of two time-delayed systems: from periodicity to chaos // Тез. докл. V Междунар. школы «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, 6–10 октября 1998. Саратов, 1998. С. 109.
10. Качак В.В., Мчедлова Е.С. Нелинейная система с запаздывающим аргументом применительно к моделированию взаимодействий в науке // Тез. докл. V Междунар. школы «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, 6–10 октября 1998. Саратов, 1998. С. 111.

11. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 286 с.
12. *Разумихин Б.С.* Устойчивость эрeditaryных систем. М.: Наука, 1988. 108 с.

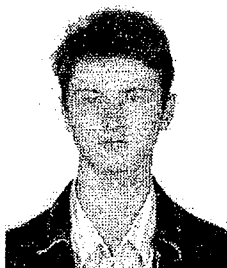
Томский государственный
университет

Поступила в редакцию 21.12.99

MODEL OF TWO SCIENTIFIC FIELDS INTERACTION WITH RESTRICTION OF ACHIEVEMENTS GROWTH AND DELAY

I.V. Izmailov, B.N. Poizner, V.O. Ravodin

Model of two scientific fields interaction with quadratic restriction of achievements growth taking into account inertia with which scientific fellowship perceives «own» and «strange» scientific achievements is investigated. Series of phase patterns for two cases of developing scientific fields are constructed. Effect of achievements perception inertia on dynamics of the fields interaction is revealed. In particular it is shown that the inertia is able to suppress one of scientific fields, and to revive it again, to become complicated process of the fields interaction.



Измайлов Игорь Валерьевич – родился в 1976 году в Алма-Ате. Поступил на радиофизический факультет Томского государственного университета (1993). Аспирант кафедры квантовой электроники и фотоники (1999). Область научных интересов: моделирование процессов в нелинейных системах различной природы, применение нелинейной динамики для обработки и скрытой передачи информации.



Пойзнер Борис Николаевич – родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), доцент кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, физике, физике лазеров, принципам управления лазерным излучением, основам синергетики. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Имеет много статей по указанной тематике. Инициатор подготовки и редактор семи библиографических указателей (в том числе «Синергетика и сопредельные науки», «Университетское образование и его социальная роль», «Интеллигенция в российском обществе и университете», «Психика и интеллект обучаемого»). Действительный член Всероссийского общества библиофилов.



Раводин Владимир Олегович – родился в Томске (1976). Закончил радиофизический факультет Томского государственного университета (1999). В настоящее время аспирант кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Область научных интересов: компьютерное моделирование нелинейной динамики бинарных систем. Автор нескольких научных публикаций.



**«АТЛАС» КАРТ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ
ЭТАЛОННЫХ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ
И РАДИОФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Н.С. Богданов, А.П. Кузнецов

Одним из наиболее эффективных компьютерных методов исследования нелинейных систем является построение карт динамических режимов, на которых оттенками серого цвета обозначены различные режимы. В работе представлена коллекция карт для ряда отображений и дифференциальных систем с небольшими комментариями, которая может быть полезна при разработке компьютерных практикумов, лекционных курсов и в научной работе молодых исследователей в области нелинейной динамики.

В предлагаемой методической заметке мы представим несколько характерных карт популярных систем нелинейной динамики и радиофизики. Построение таких карт является очень удобным и весьма информативным методом. В его рамках на плоскости параметров определенным цветом или оттенками серого обозначают циклы различных периодов и области хаоса. Метод не требует больших затрат по времени. С другой стороны, исследователь оперативно получает глобальную картину бифуркаций и локализации областей периодических, квазипериодических и нерегулярных режимов. Любой фрагмент карты может быть увеличен, так что можно быстро просмотреть интересные фрагменты. Это очень важно при двухпараметрическом анализе, поскольку на плоскости параметров могут наблюдаться характеризующиеся тонкой и сложной организацией области накопления бифуркаций, так называемые критические линии и точки [1–4]. Традиционный бифуркационный анализ в подобных случаях не всегда выходит на первый план, поскольку вскрыть эту тонкую структуру с его помощью весьма непросто. То же самое можно сказать и о тонких деталях внутреннего устройства языков синхронизации.

Недостаток метода построения карт динамических режимов состоит в том, что мы «видим» только одну «сторону» сложной многолистной поверхности – плоскости параметров исследуемой системы. Используя различные способы сканирования плоскости параметров, однако, можно просмотреть и другие листы карты.

Конечно, в небольшом сообщении мы имели возможность представить лишь небольшую часть всех интересных и важных систем. Однако сам их отбор с позиций реализации характерных и типичных феноменов нелинейной динамики оказался методически интересной работой, результаты которой можно использовать при постановке компьютерных практикумов по нелинейной

динамике и в научной работе молодых исследователей. По этой причине мы включаем в представленный «список» основные классы динамических систем: одномерные отображения, двумерные отображения, потоки. Формальные модели мы дополняем и конкретными системами, причем предпочтение отдано радиофизическим системам. Для удобства читателя, который захочет воспользоваться нашей подборкой (или отдельными результатами) в учебных целях, мы даем небольшие комментарии по поводу каждой системы.

Кубическое отображение. Если в соотношении $X_{n+1}=f(X_n)$, задающем произвольное одномерное отображение, разложить в ряд Тейлора функцию $f(X_n)$ и ограничиться квадратичными членами, то после замен переменных и параметров получается знаменитое логистическое отображение $X_{n+1}=1-\lambda X_n^2$. Как известно, оно является эталонной моделью нелинейной динамики, описывающей удвоения периода и возникающие на их основе хаос и сложные режимы. Если же теперь сохранить еще один член ряда, то после замен переменных и параметров мы приходим к кубическому отображению

$$X_{n+1} = 1 - aX_n + bX_n^3. \quad (1)$$

Это рассуждение говорит о фундаментальной роли кубического отображения по сравнению с логистическим; в отличие от последнего здесь два управляющих параметра, поэтому возможны бифуркации и их композиции, имеющие коразмерность два. Так, на полученной с помощью компьютера карте динамических режимов кубического отображения (рис. 1) область устойчивости 2-цикла имеет характерный вид с уходящими вверх пересекающимися «отростками». Такая конфигурация характерна для двухпараметрических систем; Мира с соавторами назвали ее *crossroad area* [1,2]. Она включает ряд бифуркационных линий разных типов и точку сборки; подробнее о бифуркационном портрете см. [1,2]. Карта насыщена подобными объектами на базе циклов всевозможных периодов, расположенными не только в области регулярной динамики, но и в области хаоса. Отметим, что исследование двухпараметрических бимодальных (то есть с двумя экстремумами) отображений позволило Мак-Кею и Ван-Зейтцу установить существенные свойства границы хаоса на плоскости параметров, используя изящную процедуру построения дерева сверхустойчивых орбит [3,4].

Возможен и **другой вариант кубического отображения**, отличающийся перед кубическим членом. Это отображение может иметь положительную производную Шварца, играющую важную роль в теории одномерных отображений [5]. В этом случае реализуется вторая характерная двухпараметрическая композиция бифуркаций, известная как *spring area*; соответствующую карту и обсуждение ее устройства можно найти в [6].

Квартичное отображение.

Если продолжить процедуру наращивания разложения Тейлора в соотношении $X_{n+1}=f(X_n)$, то следующим объектом становится трехпараметрическое отображение вида

$$X_{n+1} = 1 - cX_n - aX_n^2 + bX_n^4, \quad (2)$$

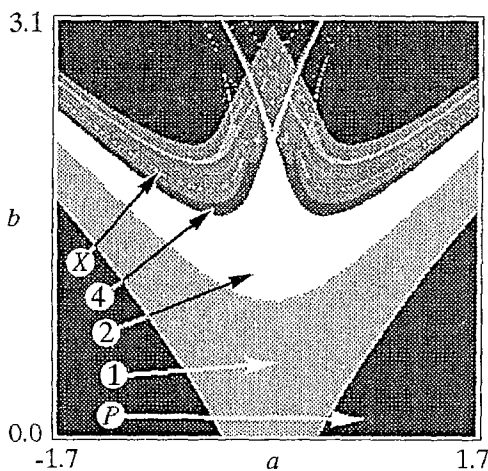


Рис. 1. Карта динамических режимов кубического отображения. Оттенками серого обозначены циклы, период которых указан цифрами. Черный цвет отвечает убеганию траекторий на бесконечность (P). Область хаоса (X) также показана оттенком серого. Точка сборки 2-цикла имеет координаты $a=0$, $b=2$

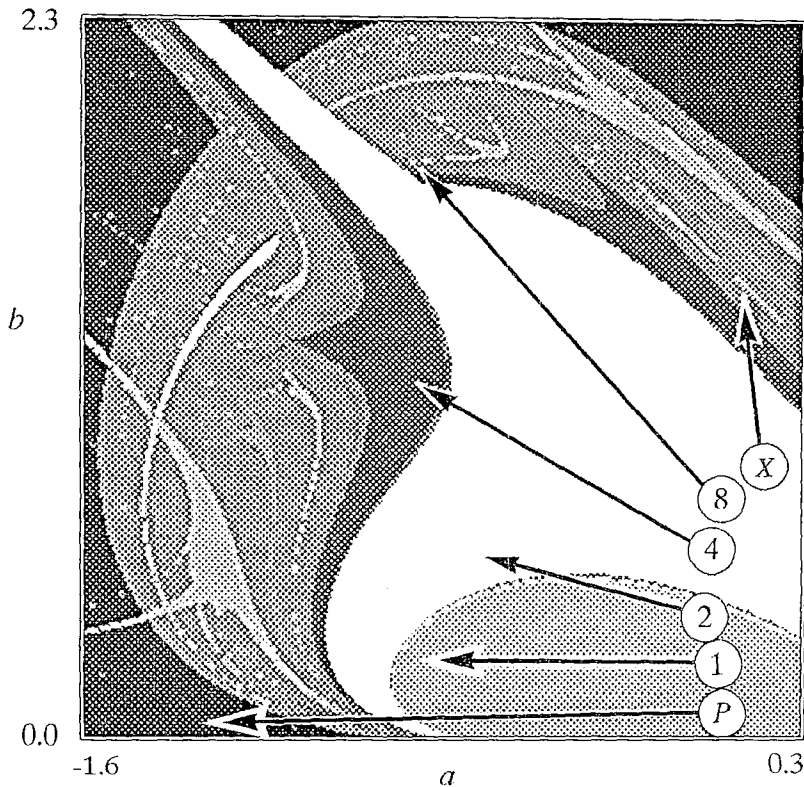


Рис. 2. Карта динамических режимов квартичного отображения

которое можно привлечь для исследования бифуркаций [7] и сценариев перехода к хаосу [8,9] коразмерности три.

В «симметричном» случае ($c=0$) отображение (2) известно как «квартичное». В нелинейной динамике его роль состояла в том, что именно при его исследовании Чанг, Вортис и Райт обнаружили, что фейгенбаумовские линии перехода к хаосу на плоскости параметров могут обрываться в некоторых изолированных точках, названных ими трикритическими [10]. Одна из трикритических точек имеет координаты $a=-0.9704$, $b=1.3767$ и расположена в центре рис. 2. В ее окрестности структура плоскости параметров имеет очень тонкую самоподобную организацию, которую можно изучать, выделяя все более мелкие фрагменты. Подробности можно найти в [2,10].

Отображение Эно (Хенон). Это отображение было предложено французским астрофизиком Мишелем Эно (в другой транскрипции – Хенон) в 1976 году. После знакомства с работой Лоренца он решил придумать простой пример системы, демонстрирующей фрактальную структуру аттрактора, поскольку система Лоренца в этом смысле не наглядна из-за очень сильного сжатия фазового пространства. Опираясь на идеи Пуанкаре (сечение Пуанкаре) и Смейла (подкова Смейла), Эно сконструировал простое отображение, демонстрирующее сжимаемость и складывание

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 1 - aX_n^2 - bY_n, \\ Y_{n+1} &= X_n. \end{aligned} \quad (3)$$

В своей работе Эно указывает, что его отображение может быть получено путем замен переменных и параметров из двумерного квадратичного отображения общего вида при условии постоянства якобиана [11]. Отображение Эно стало

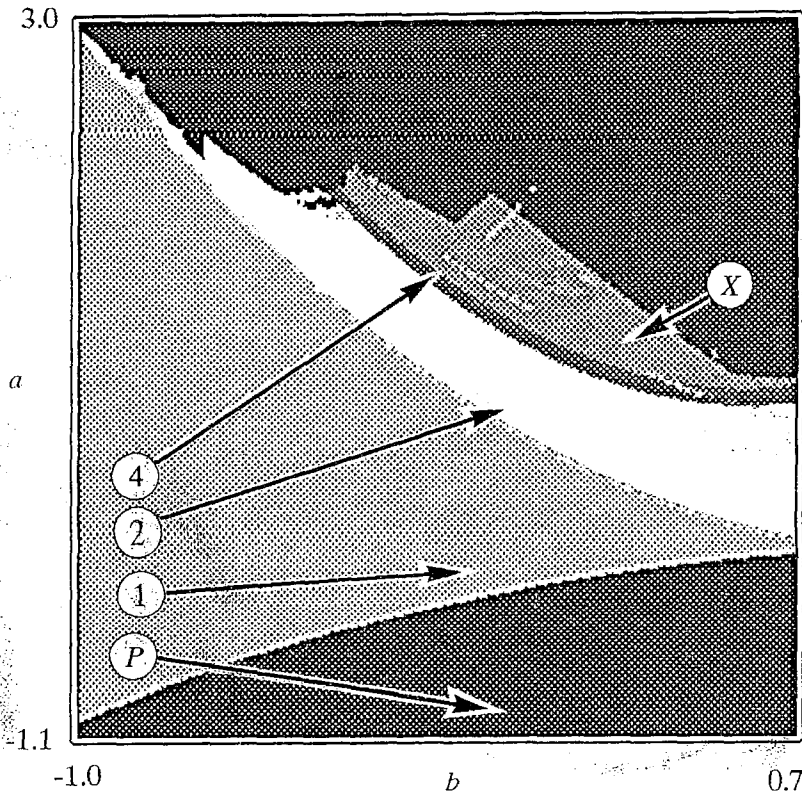


Рис. 3. Карта динамических режимов отображения Эно

канонической моделью нелинейной динамики – все монографии по хаосу уделяют ему определенное внимание. Его можно рассматривать как пример двумерного обратимого отображения, демонстрирующего удвоения периода. В области хаоса на его карте имеются также характерные конфигурации crossroad area (рис. 3.). Наибольший размер имеет такая структура, относящаяся к циклу периода 7. Отображение Эно диссипативно при $|b| < 1$ и консервативно при $|b| = 1$. Поэтому оно популярно и в теории консервативного хаоса, в частности, демонстрирует консервативный вариант удвоений периода [5,12], а также является интересным объектом для изучения превращения диссипативных систем в консервативные. Отображение Эно можно мыслить как двумерное обобщение логистического отображения. Поэтому можно построить семейство отображений типа Эно с использованием кубического отображения, кватерничного и т.д. [13,14]. В рамках такого подхода можно исследовать проблему «выживания» различных феноменов нелинейной динамики (бифуркации, сценарии перехода к хаосу) при переходе от одномерных необратимых к двумерным обратимым отображениям [9,13].

Универсальное двумерное отображение. Отображение Эно имеет постоянный якобиан и, как следствие, не демонстрирует целый ряд важных бифуркаций. Этого недостатка лишено представленное здесь оригинальное двумерное отображение.

$$X_{n+1} = SX_n - Y_n - (Y_n^2 + X_n^2), \quad Y_{n+1} = JX_n - 1/5(Y_n^2 + X_n^2). \quad (4)$$

Мотивация его построения состоит в следующем: Томсон и Стюарт в своей монографии [15] обратили внимание на то, что линейную устойчивость двумерных отображений удобно исследовать на плоскости: след S – якобиан J его линеаризованной матрицы. Ими были указано, что область устойчивости на плоскости (S, J) образует характерный треугольник и изучены все возможные «сценарии» линейной потери устойчивости вблизи его сторон и вершин. Предлагаемое отображение содержит линейную часть

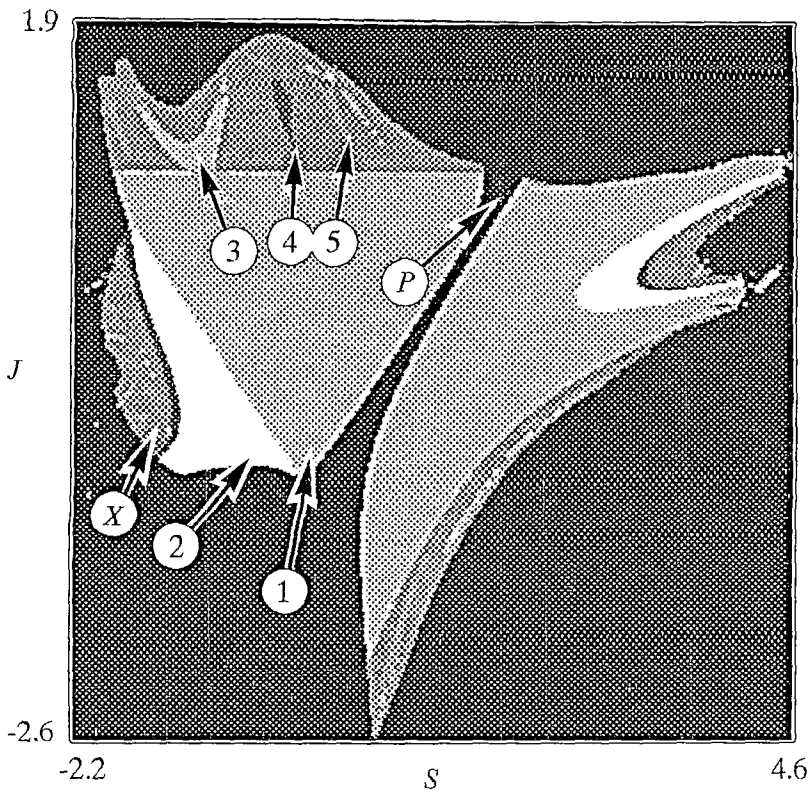


Рис. 4. Карта динамических режимов универсального модельного отображения

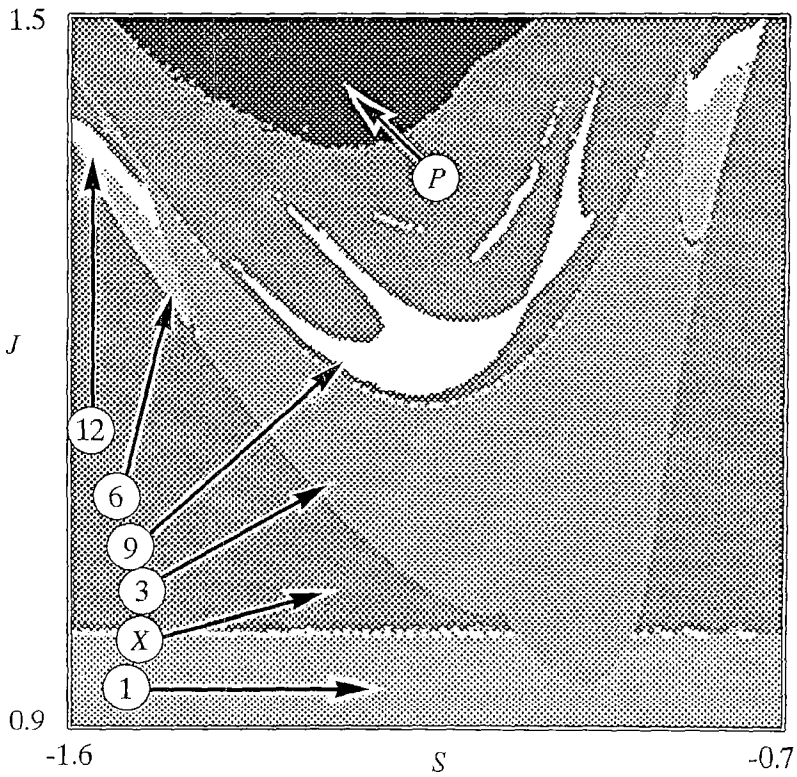


Рис. 5. Увеличенный фрагмент карты динамических режимов универсального модельного отображения

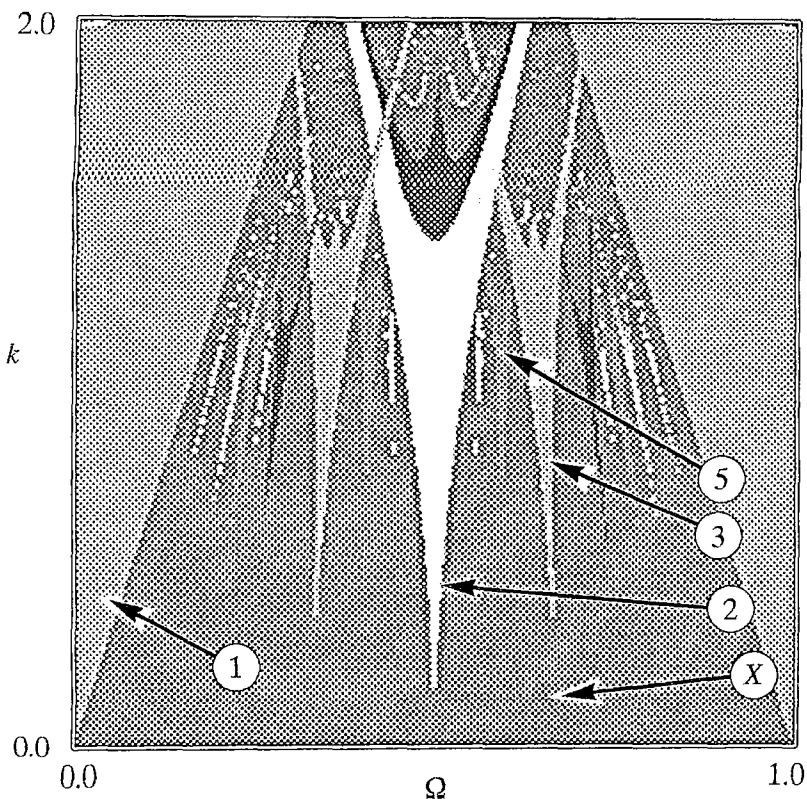


Рис. 6. Карта динамических режимов отображения окружности

$$X_{n+1} = SX_n - Y_n, \quad Y_{n+1} = JX_n, \quad (5)$$

которая сконструирована так, что два параметра S и J являются следом и якобианом отображения, а также квадратичную нелинейную добавку. На карте (рис. 4.) можно видеть область «треугольника устойчивости» Томпсона и Стюарта. Переход через его левую сторону связан с бифуркацией удвоения (мультипликатор -1), через правую — с касательной бифуркацией (мультипликатор $+1$), а через верхнюю — с бифуркацией Неймарка рождения инвариантной кривой или, по другой терминологии, бифуркацией рождения тора (модуль мультипликаторов 1). Видна характерная структура языков синхронизации, примыкающая к верхней границе треугольника. Вершины треугольника отвечают точкам, в которых пара мультипликаторов обращается, соответственно, в $(-1, +1)$, $(-1, -1)$ и $(+1, +1)$. Таким образом, предлагаемое отображение демонстрирует основные бифуркации, не имеющие аналога в одномерном случае, и является в этом смысле универсальным. На рис. 5. показан в увеличенном виде язык синхронизации с числом вращения $1/3$, отвечающий «сильному» резонансу по терминологии Арнольда. Можно видеть, что он характеризуется нестандартным внутренним устройством (сравните с рис. 6).

Отображение окружности. Отображение окружности

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + \Omega - k \sin(2\pi\Theta_n)/(2\pi), \quad (\Theta_n, \text{mod } 1) \quad (6)$$

было изучено выдающимся российским математиком В.И.Арнольдом еще в его дипломной работе. Эта работа не была своевременно опубликована, и затем ряд результатов был переосмыслен Леоном Глассом [16] и другими исследователями. Сейчас это каноническая модель нелинейной динамики, вошедшая во все монографии. На карте (см. рис. 6.) можно видеть характерную для отображения окружности структуру языков синхронизации. Известно, что линия $k=1$ играет

особую роль. Как показали Иенсен, Бак, Бор [17], на этой линии чертова лестница чисел вращения полна или, иными словами, языки синхронизации смыкаются своими краями. Поэтому отображение окружности – один из основных объектов исследования феноменов, связанных с исчезновением квазипериодических режимов на пороге хаоса. Отметим, что внутри языков синхронизации (см. рис. 6.) наблюдаются все характерные для двухпараметрических мультимодальных отображений явления – ситуации crossroad area, трикритические точки и др. – на что указали, в частности, Шелл, Фразер и Капрал [18]. Отображение окружности служит также базовым объектом для изучения ситуации воздействия шума и сигнала с несоизмеримой частотой на системы с квазипериодическими режимами [19].

Отображение кольца. Особенность отображения окружности – его одномерность. Поэтому оно не демонстрирует как таковую инвариантную кривую, а описывает лишь динамику угловой координаты вдоль нее. Отображение кольца

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + \Omega - k \sin(2\pi\Theta_n) / (2\pi) + b r_n, \quad r_{n+1} = b r_n - k \sin(2\pi\Theta_n) / (2\pi), \quad (\Theta_n, \text{mod } 1) \quad (7)$$

можно рассматривать как двумерное обобщение отображения окружности. (Отметим, что к отображению кольца с помощью замен переменных приводится и известное отображение Заславского, которое в консервативном случае ($b=1$) служит популярной моделью теории стохастических явлений [20].) В определенной мере отображения окружности и кольца находятся в таком же методологическом соотношении, как логистическое отображение и отображение Эно. Для отображения кольца уже можно в полной мере говорить о сценарии разрушения инвариантной кривой – второго, после последовательности бифуркаций удвоения периода, базового сценария возникновения хаоса в нелинейных системах. Форма языков синхронизации искажается по мере роста параметра b (рис. 7) по сравнению со стандартной. Внутреннее устройство языков, однако, испытывает

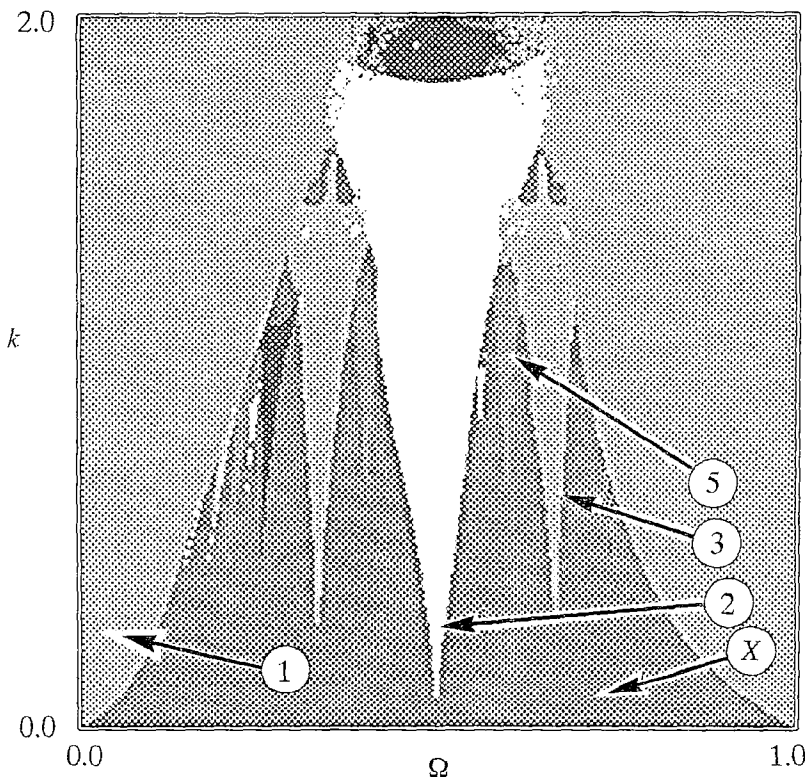


Рис. 7. Карта динамических режимов отображения кольца при значении параметра $b=0.8$

модификацию лишь на ГЛУБОКИХ уровнях структуры, а «на глаз» не меняется, в отличие от РАССМОТРЕННОГО выше универсального отображения. В нелинейной динамике исследованы и исследуются различные ситуации, связанные с отображением кольца, например, рождение странного аттрактора под квазипериодическим воздействием [21], разрушение консервативных торов в соответствии с теорией Колмогорова – Арнольда – Мозера и др.

Система Ресслера. В 1976–1980 годах Ресслер с различными соавторами предложил множество систем с хаотической динамикой [22]. Большинство из них наследуют форму уравнений химической кинетики. Они сконструированы по аналогии с законом действующих масс, согласно которому скорость химической реакции пропорциональна степени концентрации, равной коэффициенту, с которым это вещество входит в химическую формулу. В нелинейной динамике «сохранился» один вариант системы Ресслера [23]

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -Y - Z, \\ \dot{Y} &= X + aY, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\dot{Z} = b + Z(X - c),$$

который стал весьма популярным. Система Ресслера содержит три существенных параметра. На рис. 8 представлена карта на плоскости (b, c) при значении параметра $a=0.223$. Эта система является дифференциальной, поэтому для построения карты было предварительно получено сечение Пуанкаре с помощью метода Эно [24]. Отличительная черта системы Ресслера – сильное сжатие фазового объема, так что в сечениях Пуанкаре оно очень хорошо описывается

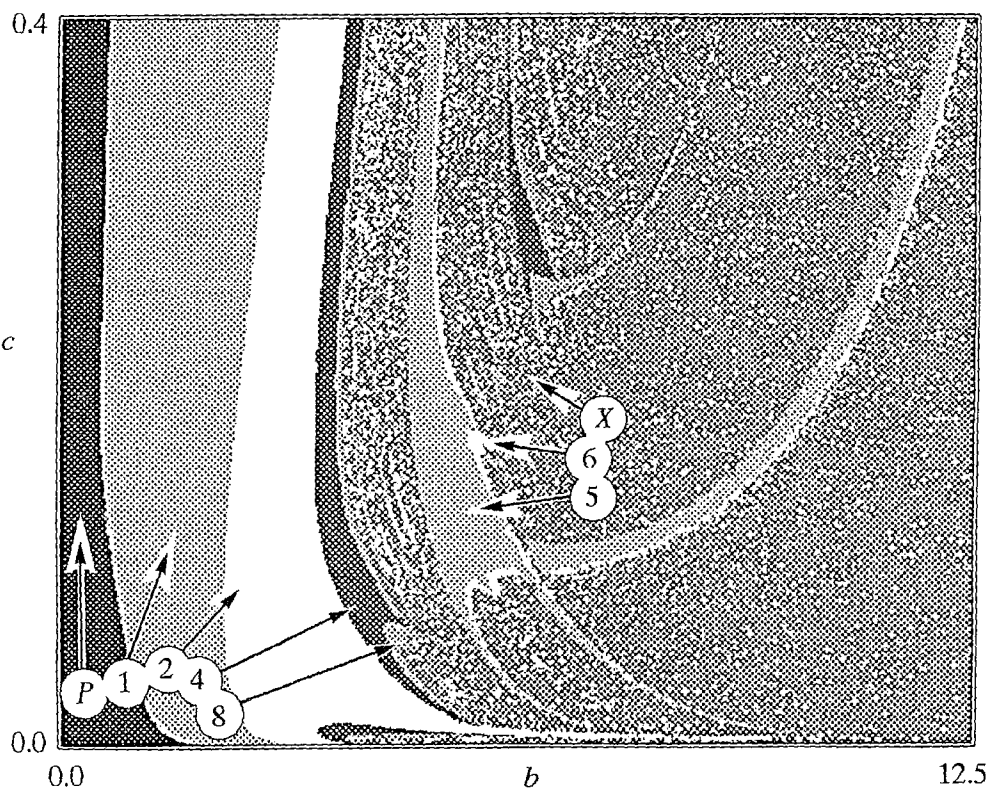


Рис. 8. Сечение пространства параметров системы Ресслера при значении параметра $a=0.223$

одномерным отображением. Благодаря своим свойствам, система Ресслера используется как эталонный объект при апробации множества новых идей и технологий в нелинейной динамике. Так изучались и изучаются связанные системы Ресслера [25], странные нехаотические аттракторы в неавтономной системе, проблема аппроксимации аттракторов циклами и т.д.

Генератор с инерционной нелинейностью. Генератор с инерционной нелинейностью предложен В.С. Анищенко и В.В. Астаховым и представляет в определенной мере модификацию классического варианта генератора Теодорчика. Отличие состоит во введении специальной цепи обратной связи с усилителем и инерционным элементом [24]. В результате получается система, описываемая

тремя дифференциальными уравнениями и демонстрирующая множество интересных феноменов нелинейной динамики [24].

$$\dot{X} = MX + Y - XZ,$$

$$\dot{Y} = -X,$$

$$\dot{Z} = g(-Z + \Phi(X)),$$

$$\text{где } \Phi(x) = \begin{cases} 0, & X \leq 0, \\ X, & X > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Генератор с инерционной нелинейностью допускает не только теоретическое, но и детальное экспериментальное исследование. Система характеризуется двумя параметрами, так что карта динамических режимов (рис. 9) дает достаточно полную информацию о динамике автономного генератора. Эта система послужила «базой» для целого ряда интересных обобщений и радиофизических экспериментов.

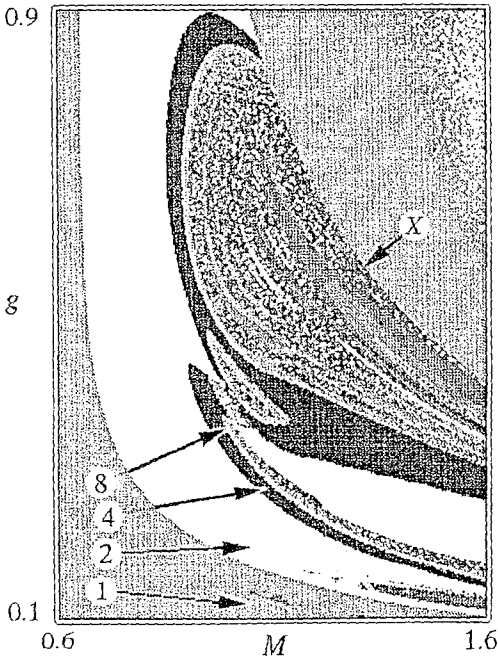


Рис. 9. Карта динамических режимов генератора с инерционной нелинейностью

Генератор Кислова – Дмитриева. Эта система представляет собой замкнутую в кольцо цепочку из нелинейного усилителя, RLC-фильтра и инерционного звена первого порядка. При определенных предположениях о свойствах усилителя она описывается в безразмерном виде системой трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{X} = (F(Z) - X)/T,$$

$$\dot{Y} = X - Z, \quad (10)$$

$$\dot{Z} = Y - Z/Q,$$

где $F(Z) = MZ \exp(-Z^2)$. Такой генератор также допускает теоретическое и экспериментальное исследование. Его динамические свойства (и свойства систем, представляющих его развитие) описаны в монографии [26]. Мы представляем здесь карту динамических режимов генератора на плоскости безразмерных параметров: время задержки T – коэффициент усиления M (рис. 10), полученную с использованием сечений Пуанкаре и метода Эно. Добротность контура $Q=10$. На карте можно видеть удвоения периода и множество областей хаотической и регулярной динамики.



Рис. 10. Карта динамических режимов генератора Кислова – Дмитриева при значении параметра $Q=10$

Авторы выражают благодарность С.П. Кузнецову и И.Р. Сатаеву за полезное обсуждение.

Работа поддержана грантами РФФИ № 97-02-16414 и Министерства общего и профессионального образования РФ № 97-0-8.3-88.

Библиографический список

1. Carcasses J., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J.C. Crossroad area – spring area transition (1) Parameter plane representation // *Int. J. Bifurc. Chaos*. 1991. Vol. 1. P. 183.
2. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Критическая динамика одномерных отображений. Часть 2. Двухпараметрический переход к хаосу // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1993. № 3–4. С. 17.
3. MacKay R.S., Van Zeijts J.B. Period doubling for bimodal maps: A horseshoe for a renormalization operator // *Nonlinearity*. 1988. Vol. 1. P. 253.
4. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Коразмерность и типичность в контексте проблемы описания перехода к хаосу // *Регулярная и хаотическая динамика*. 1997. Т. 2, № 3/4. С. 90.
5. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
6. Кузнецов А.П. Через экран компьютера – в мир нелинейной динамики // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1998. Т. 6, № 5. С. 89.
7. Mira C., Carcasses J. On the crossroad area – saddle area and spring area transition // *Int. J. Bifurc. Chaos*. 1991. Vol. 1, № 3. P. 641.
8. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Three-parameter scaling for one-dimensional maps // *Phys.Lett*. 1994. A 189. P. 367.
9. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica D*. 1997. Vol. D 109. P. 91.
10. Chang S.J., Wortis M., Wright J.A. Iterative properties of a one-dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behavior // *Phys. Rev*. 1981. Vol. A24, № 5. P. 2669.

11. Хенон М. Двумерное отображение со странным аттрактором // Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 152.
12. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
13. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. From bimodal one-dimensional maps to Henon-like two-dimensional maps: does quantitative universality survive? // Phys.Lett. 1994. Vol. A164. P.413.
14. Holmes P.J. A nonlinear oscillator with a strange attractor // Philos. Trans. R. Soc. London. 1979. Vol. A292. P. 419.
15. Thompson J.M.T., Stewart H.B. Nonlinear dynamics and chaos. John Wiley and Sons, 1986. 376 p.
16. Glass L., Peres R. Fine structure of phase locking // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. P. 1772.
17. Jensen M.H., Bak P., Bohr T. Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. I. Circle maps // Physical Review A. 1984. Vol. 30, № 4. P 1960.
18. Schell M., Fraser S., Kapral R. Subharmonic bifurcations in the sine map: an infinite of bifurcations // Phys. Rev. 1983. Vol. A28, № 1. P. 373.
19. Feigenbaum M.J., Hasslacher B. // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49. P. 605.
20. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.
21. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Сосновцева О.В. Механизм рождения странного хаотического аттрактора в отображении кольца с квазипериодическим воздействием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С. 34.
22. Гарел Д., Гарел О. Колебательные химические реакции. М.: Мир, 1986. 148 с.
23. Rösler O. An equation for continuous chaos // Phys. Lett. 1976. Vol. 57A. P. 397.
24. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
25. Mozekilde E. Topics in nonlinear dynamic. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1996. 380 p.
26. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
27. Hu B. A simple derivation of the stochastic eigenvalue equation in the transition from quasiperiodicity to chaos // Phys. Lett. 1983. Vol. 98A, № 10. P.79.
28. Feudel U., Grebogi G., Ott E. Phase-locking in quasiperiodically forced systems // Phys. Reports. 1997. Vol. 290. P. 11.

Саратовский государственный
университет
СО ИРЭ РАН

Поступила в редакцию 7.09.99
после доработки 28.12.99

MAP «ATLAS» OF DYNAMIC MODES FOR STANDARD MODELS OF NONLINEAR DYNAMICS AND OF RADIOPHYSIC SYSTEMS

Bogdanov N.S., Kuznetsov A.P.

One of the most effective computer methods of two-parametrical research of nonlinear systems is the construction of maps of dynamic modes. On maps the certain colours designate cycles of the various periods and areas of chaotic dynamics. The variety of nonlinear model and radiophysical systems has required to create some kind of «atlas» of maps for most known of them. Most of basic classes of dynamic systems are submitted: one-dimensional irreversible maps, two-dimensional convertible maps, flows and nonautonomous systems.

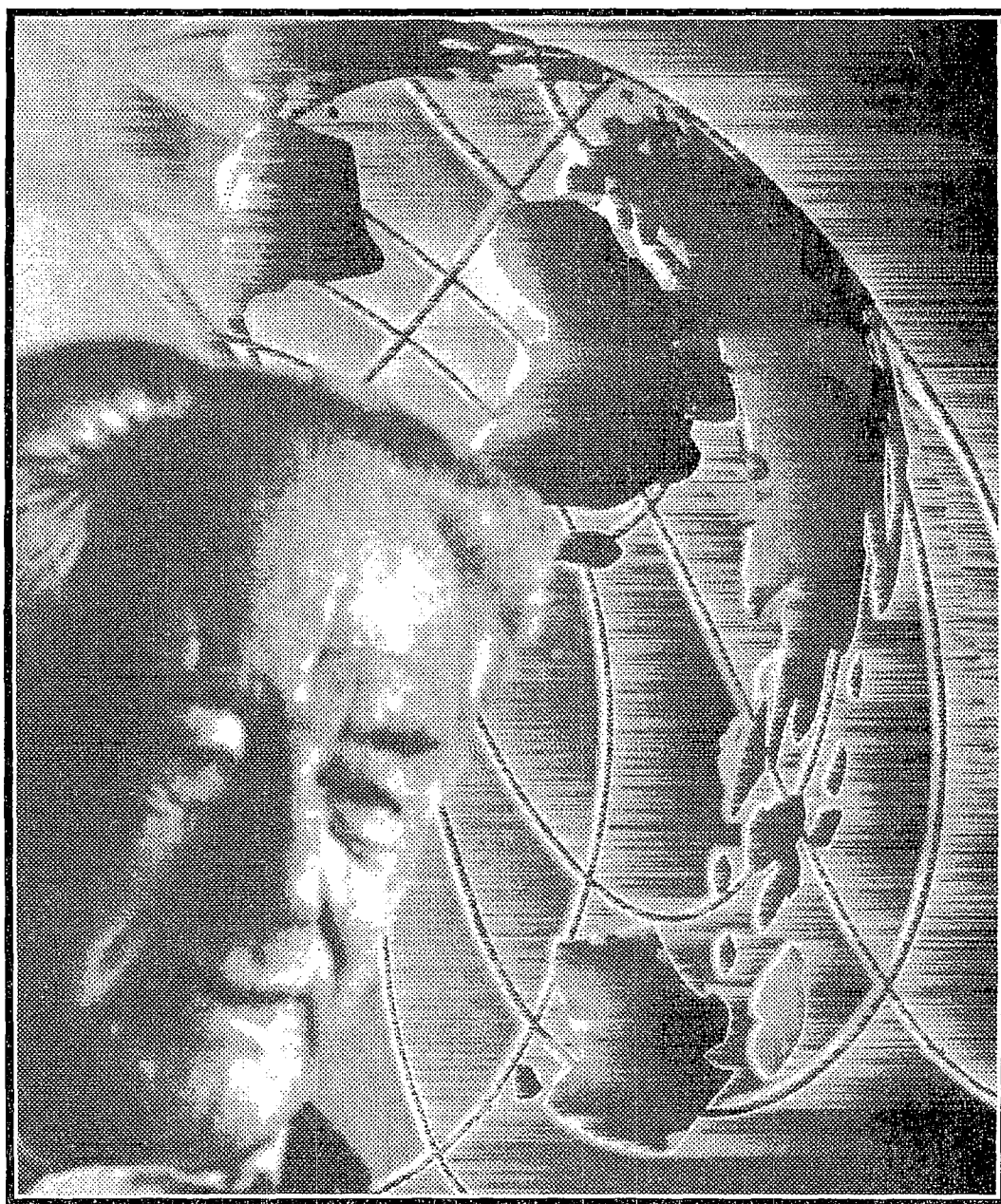


Богданов Николай Сергеевич – родился в 1977 году в Саратове. В 1995 году окончил техникум им. Яблочкова по специальности радиоаппаратостроение. С 1994 года учится в СГУ в Колледже Прикладных Наук. Под руководством А.П. Кузнецова занимается исследованием нелинейных динамических систем (в основном, компьютерное моделирование). Участвовал в нескольких научных конференциях. E-mail: BogdanovNS@info.sgu.ru



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Опубликовал более 50 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соросовский доцент (1998), научный руководитель молодежного научного центра «Нелинейная динамика и сложные структуры» СО ИРЭ РАН и студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» СГУ и

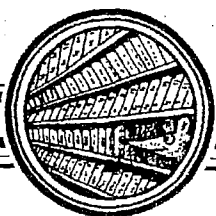
СО ИРЭ РАН. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для Высшего колледжа прикладных наук СГУ и двух популярных книг. E-mail: kuz@spkuz.saratov.su



3 марта 2000 года скончался известный Ученый, Учитель, действительный член Российской Академии наук Моисеев Никита Николаевич.

Он родился 23 августа 1917 года в Москве. В 1941 году окончил механико–математический факультет МГУ по специальности функциональный анализ. Кандидат технических наук. Доктор физико–математических наук. С 1964 года член–корреспондент, с 1984 года – действительный член Академии наук СССР.

Основные направления исследовательской деятельности: прикладная математика и ее использование для решения методов траекторных расчетов космических систем; общие вопросы теории и методы расчета систем управления космическими объектами; методы оптимизации природопользования; математические модели динамики биосферы; методологические вопросы взаимоотношения биосферы и общества; модели стабильности биосферы в условиях антропогенных воздействий. С 1958 по 1986 год был заместителем директора Вычислительного центра Академии наук СССР. Президентом Международного независимого эколого–политологического университета (МНЭПУ), президентом Российского экологического движения «Зеленый крест», президентом Российского национального комитета содействия Программе ООН по охране окружающей среды, главный редактор журнала «Экология и жизнь»*.



СОВРЕМЕННОЕ ОБРАЗОВАНИЕ: проблема синтеза гуманитарного и естественнонаучного знания**

Образование в России, в отличие от других европейских государств, уже со времен Петра Великого почиталось первейшей обязанностью государства.

Для доказательства позволю себе начать эту статью цитатой из рескрипта императора Николая Первого тогдашнему министру просвещения: «Почитая народное воспитание одним из главнейших оснований благосостояния державы, от Бога мне врученной, я желаю, чтобы для оного были поставлены правила, вполне соответствующие истинным потребностям и положению государства. Для сего необходимо, чтобы повсюду предметы учения и сами способы преподавания были по возможности соображены с будущим предназначением обучающихся, чтобы каждый вместе со здоровыми, для всех общими понятиями о вере, законах и нравственности приобретал познания, наиболее для него нужные, могущие служить к улучшению его участи». (Цитировано по статье Н.В. Карлова. Вопросы философии. 1998, № 11. С. 3).

Заметим, что этот рескрипт был написан 170 лет тому назад. Можно ли удивляться, что при таком отношении правительства к проблемам образования и при таком понимании его значения для страны, Россия до самого последнего времени располагала одной из лучших образовательных систем мира! Но время предъявляет новые требования. И с некоторыми традициями приходится расставаться. Точнее – их дополнять.

Уже в начале 70-х годов, в особенности после выхода на Запад работы «Пределы роста», мировая общественность стала понимать, что неконтролируемое взаимодействие общества и биосферы, то есть дальнейшее развитие того процесса самоорганизации, который определял развитие общества в последние три века, может иметь катастрофические последствия для человечества в целом.

После появления работ Вычислительного центра Академии наук по компьютерной имитации процессов взаимодействия общества и биосферы, стала реальной потенциальная возможность естественных наук определить необходимые условия для обеспечения будущности общества, то есть обозначить, во всяком случае – контуры той запретной черты, которую человечество не имеет право переступать ни при каких обстоятельствах. Так, было показано, что крупномасштабная ядерная война приведет к такой перестройке всей биосферы, что дальнейшее существование человечества перестанет быть возможным.

Но реализовать определенную систему запретов, необходимых для развития цивилизации, создать для них правовую базу, внедрить в сознание людей понимание

* Печ. по книге Моисеева Н.Н. Быть или не быть... человечеству. М., 1999. 288 с.

** © Вузовские вести. 1999, январь, № 2. С. 5.

абсолютной необходимости этих правил взаимоотношения Природы и общества — это задача, которую способны решать только люди высокой гуманитарной культуры. Так возникает объективная необходимость в подготовке определенного количества специалистов—естественников, получивших достаточно широкое гуманитарное образование, и гуманитариев, обладающих достаточным набором знаний в области естественных наук.

Эту проблему мы начали обсуждать с Н.Ф. Реймерсом еще в 80-х годах и даже встречались с тогдашним министром Г.А. Ягодиным. Наша идея встретила благожелательное отношение, но найти нужные организационные формы для ее реализации мы тогда не смогли. Позднее в 91-ом году С.А. Степанов предложил организовать небольшой негосударственный гуманитарный университет экологической направленности. Так возник МНЭПУ.

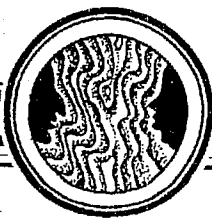
Это была блестящая идея. Действительно, организовать подготовку подобных специалистов в рамках стандартных государственных структур практически невозможно. И не только в силу инерционности государственной образовательной системы. Существует множество неотработанных методических, организационных и правовых проблем. Это объект долгой, кропотливой работы, не свойственной функциям государственного аппарата.

Другими словами, государство нуждается в «экспериментальных площадках». И МНЭПУ, по нашему замыслу, должен стать одной из них. Во всяком случае, в этом я и ведущие профессора МНЭПУ видят главную задачу нового университета.

Сейчас очень важно найти такие формы взаимоотношения государственных вузов с МНЭПУ, которые позволили бы использовать наш опыт для государственной системы в целом. Здесь появятся определенные правовые проблемы интеграции в государственную систему с сохранением юридической самостоятельности, абсолютно необходимой для эффективной научной и преподавательской деятельности, понадобится изменение отношения к сложившимся образовательным стандартам и многое другое и, конечно, определенная материальная помощь, главным образом, в аренде помещений или передачи учебных помещений в наше пользование.

Это все трудные вопросы, но они разрешимы, если министерство образования отдаст себе отчет в том, что в современных условиях стремительного развития общества любая образовательная система без «экспериментальных площадок» обречена на стагнацию.

*Никита Моисеев,
действительный член
Российской Академии Наук*



МАЙКЛ ФАРАДЕЙ

Ю. А. Данилов

Ученое сообщество скупое на похвалы, и в оценке достижений своих собратьев склонно скорее приуменьшать, чем преувеличивать их заслуги. Редко кто из ученых удостоивается титула «великий» по гамбургскому счету без скидок на регалии и заслуги в организации науки: великий Эйлер, великий Ньютон, великий Резерфорд... Среди немногих избранных – Майкл Фарадей, великий экспериментатор, вписавший свое имя в историю науки не одним, а целой вереницей крупных открытий, человек, которому мы обязаны понятием поля, совершивший в науке и ради науки так много, что любая попытка даже бегло перечислить все его заслуги заведомо обречена на неудачу.

Для портрета Майкла Фарадея маслом, выполненного в реалистической манере, потребовалась обширная монография. Публикуемая ниже статья – набросок к портрету.

Детские годы

Когда в семье кузнеца Джеймса Фарадея 21 сентября 1791 года появилось прибавление, даже самый отъявленный фантазер не взялся бы предсказать, что со временем мальчик станет великим ученым и обогатит химическую и в особенности физическую науку многими важными открытиями. Рожденному на низшей ступени социальной лестницы Майклу Фарадею (так нарекли малыша) была уготована печальная судьба: тяжелое детство, тяжелый утомительный труд с раннего возраста, скудная духовная пища, жизнь, в основном посвященная заботам о пропитании. И столь мрачный прогноз, казалось, начал оправдываться: недельный рацион девятилетнего Майкла состоял из одного каравая хлеба. О своем образовании и немудреном досуге сам Фарадей вспоминал впоследствии так: «Мое образование было самым заурядным и включало в себя начальные навыки чтения, письма и арифметики, полученные в обычной дневной школе. Свободное время я проводил дома и на улице».

Важную роль в формировании характера Майкла Фарадея сыграло его религиозное воспитание. Его родители принадлежали к немногочисленной секте сэндеманианцев, исповедовавшей простые и суровые принципы раннего христианства. Роберт Сэндемен, зять и единомышленник Джона Глэса (1695–1773), основал независимую группу пресвитерианцев после отлучения от официальной церкви в Шотландии за распространение кощунственных идей: Глэс и Сэндемен утверждали, что национальные, или государственные, церкви неизбежно обречены на вхождение в конфликт с основными принципами христианства. «Библия, и только Библия, без каких-либо добавлений или изъятий, произведенных рукой человека, – единственная и достаточная путеводная нить для каждого во все времена и при любых обстоятельствах».

Верность сэндемонианству Фарадей пронес через всю жизнь. Его вера была тем стержнем, который многое объясняет в его характере, отношении к своим обязанностям и людям. Как-то раз в преклонном возрасте Фарадей был представлен высокому сановнику англиканской церкви, и тот не без яда и, по-видимому, довольно высокомерно осведомился у Фарадея, не думает ли Фарадей, будто сэндемонианцы обладают монополией на религиозную истину. Мило улыбнувшись, Фарадей ответил, что совсем так не считает, но полагает, что и сэндемонианская вера, как и другие, способна привести человека на небеса.

Беззаботное детство (таким ли беззаботным оно было?) Майкла Фарадея закончилось, когда ему было двенадцать лет: он поступил на свою первую в жизни работу.

Книжная лавка Джорджа Рибо

Двенадцатилетний Фарадей стал рассыльным в книжной лавке мистера Джорджа Рибо. В его обязанности входило доставлять газеты клиентам хозяина книжной лавки. Став постарше, Фарадей стал подмастерьем переплетчика и получил возможность с разрешения мистера Рибо читать те книги, которые переплетал.

Знаменательное событие в жизни подмастерья Майкла Фарадея (этот статус разрешал ему заниматься переплетным делом «на вторых ролях», не давая права открыть собственную мастерскую): один из постоянных посетителей книжной лавки, мистер Дэнс, подарил Фарадею билеты на цикл лекций, которые читал в Королевском институте знаменитый химик сэр Хэмфри Дэви.

Граф Румфорд и Королевский институт

В статье «Мотивы научного исследования» Альберт Эйнштейн писал: «Храм науки – строение многосложное. Различны пребывающие в нем люди и приведшие их туда духовные силы. Некоторые занимаются наукой с гордым чувством своего интеллектуального превосходства; для них наука является тем подходящим спортом, который должен им дать полноту жизни и удовлетворение честолюбия. Можно найти в храме и других: плоды своих мыслей они приносят здесь в жертву только в утилитарных целях».

Ярким представителем такого рода обитателей храма науки был Бенджамин Томсон. Родился он в 1753 году в Уоберне, штат Массачусетс. В 1776 году он переехал в Англию, в 1779 был избран членом Лондонского королевского общества. Служил в английских войсках в Америке, дослужился до звания полковника, позднее был возведен в дворянское достоинство и получил право именоваться сэром Бенджаменом Томсоном. В 1784 году отправился в Баварию и за заслуги перед баварской короной стал графом Священной Римской империи, выбрав себе титул графа Румфорда – по названию города Румфорда в Нью-Хемпшире (впоследствии Румфорд был переименован в Конкорд).

Среди многообразной деятельности графа Румфорда в баварский период особое значение имели его опыты в Мюнхенском арсенале по измерению тепла, выделяющегося при выстреливании пушечных стволов. Позднее Румфорд выступил против популярной теории флогистона и привел убедительные аргументы в пользу того, что тепло представляет собой хаотическое движение мельчайших частиц, из которых состоит вещество.

По возвращении в Англию в 1798 году Румфорд стал работать в Обществе улучшения жизненных условий и повышения благосостояния бедных (не будучи при этом филантропом и не питая по свидетельству его биографа Сэнборна Брауна ни малейшего интереса к людям и к волнующим их проблемам) и предложил «создать по подписке в столице Британской империи общественный институт для распространения знаний, облегчения повсеместного внедрения полезных

механических усовершенствований, а также для обучения (с помощью курсов лекций и демонстраций экспериментов) приложению науки к решению повседневных жизненных проблем».

Организационное собрание Королевского института состоялось 7 марта 1779 года под председательством сэра Джозефа Бэнкса, бывшего тогда президентом Лондонского королевского общества.

По приглашению графа Румфорда сотрудником Королевского института стал Хэмфри Дэви – в 1801 году он занял пост лектора–ассистента по химии и директора лаборатории, затем был произведен в самостоятельные лекторы, а с 1802 года стал профессором Королевского института. Новоиспеченному профессору исполнилось тогда двадцать три года. Помимо руководства химическими исследованиями в обязанности Дэви входило чтение лекций. На цикл таких лекций и получил пригласительные билеты безмерно счастливый (в этом сомнений нет) Майкл Фарадей.

Королевский институт существует и поныне. Продолжается и чтение лекций. Отвечая на вопрос о том, в чем состоит значение и каковы достижения Королевского института, его генеральный секретарь (с 1921 по 1950 годы) Т. Мартин сказал: «Простой, но тем не менее очень важный для многих людей ответ состоит в том, что Институт – то место, где жил и работал Фарадей. «Развитие науки» может иметь большее или меньшее значение, к тому же имеются и другие организации, преследующие аналогичные цели, но Майкл Фарадей существовал только один».

Фарадей на лекциях Дэви

«Когда я был подмастерьем, мне посчастливилось прослушать последние лекции сэра Х. Дэви... Я сделал краткие записи этих лекций, а затем переписал их целиком, снабдив такими рисунками, какие сумел сделать. Желание заниматься научной работой, хотя бы и самой примитивной, побудило меня, новичка, незнакомого со светскими правилами, написать в душевной простоте сэру Джозефу Бэнксу, в то время президенту Лондонского королевского общества. Вполне естественно было затем узнать от привратника, что моя просьба оставлена без ответа.»

К счастью для Фарадея (и науки) сэр Хэмфри Дэви не обладал спесью сэра Джозефа Бэнкса и счел возможным ознакомиться с «души доверчивой признаньем».

Слово Фарадею: «Воодушевляемый мистером Дэнсом, который был членом Королевского института и достал мне билеты на лекции Дэви, я написал сэру Хэмфри Дэви, послав в качестве доказательства серьезности моих намерений сделанные записи его последних четырех лекций. Ответ пришел незамедлительно, доброжелательный и благоприятный».

На службе в Королевском институте

После бесед с автором послания, трогательного в своей наивности и преисполненного любви к науке и желания послужить ей, сэр Хэмфри Дэви пригласил Майкла Фарадея, которому тогда шел двадцать первый год, стать ассистентом.

Из протокола Королевского института от 1 марта 1813 года: «Сэр Хэмфри Дэви имеет честь сообщить директорам о том, что нашел человека, которого желательно назначить на должность ассистента... Его имя – Майкл Фарадей... Сведения о нем представляются хорошими, его характер деятельный и бодрый, а образ действий разумный».

Перед Фарадеем распахнулись врата рая.

В октябре 1813 года сэр и леди Хэмфри Дэви отправляются в поездку по

континентальной Европе с намерением посетить ведущие научные центры. Их сопровождает ассистент Майкл Фарадей.

Европа в ту пору была охвачена огнем наполеоновских войн, но у сэра Хэмфри Дэви была своя точка зрения на взаимоотношения правительства и ученых: «Если две страны или два правительства воюют между собой, то люди науки не участвуют в войне... Иначе это была бы гражданская война наихудшего сорта».

Перед Майклом Фарадеем предстала научная Европа во всем ее блеске и великолепии: Франция, Италия, Германия, Бельгия. Встречи Дэви с Ампером, Гей-Люссаком, Гумбольдтом. Совместные эксперименты с европейскими учеными. Открытие нового элемента – йода, опыты с электрическим скатом, сожжение алмаза во Флоренции. И после всего этого великолепия – досрочное возвращение в Англию в апреле 1815 года по банальной причине: леди Хэмфри Дэви почему-то решила, что статус супруги профессора Дэви позволяет ей помыкать ассистентом Майклом Фарадеем, против чего тот, естественно, возражал. Из письма Фарадея приятно из Рима: «Леди Дэви любит показать свою власть, и я с самого начала обнаружил с ее стороны серьезные намерения подавить меня. Случайные ссоры между нами, в каждой из которых я оказывался победителем, происходили так часто, что я перестал обращать на них внимание. Ес авторитет ослабевал, и после каждой ссоры она вела себя мягче».

Член Королевского общества

На старости лет Фарадей отклонил предложение о возведении его в рыцарское достоинство и дважды отказался от чести стать президентом Королевского общества. Своему преемнику в Королевском институте Фарадей заявил: «Тиндаль, я хочу до конца оставаться просто Майклом Фарадеем».

Но было одно-единственное почетное звание, носить которое Майкл Фарадей считал для себя честью и официальным признанием своих научных заслуг: «Одного звания, а именно F.R.S. (Fellow of Royal Society – член Королевского общества), я добивался и в определенном смысле платил за него; появление всех остальных связано с проявлением инициативы, любезности и доброй воли соответствующих обществ».

В письме Генри Уорбертону от 29 апреля 1823 года, написанному Фарадеем незадолго до избрания, говорилось: «Я тешу себя надеждой быть удостоенным членства в Обществе и от души благодарю за обещание поддержать меня на выборах, поскольку знаю, что Вы не дали бы такого обещания, если бы искренне не считали меня подходящей кандидатурой».

Остаюсь, сэр, Вашим
благодарным и покорным
слугой. М. Фарадей»

Основанное в 1660 году Лондонское королевское общество усовершенствования естествознания (таково его полное название) – одно из наиболее авторитетных учреждений мира. Его девиз – «Nullius in Verba» (в вольном переводе с латыни – «Не принимай ничьи слова на веру»). Среди его членов были Исаак Ньютон, Роберт Гук, Кристофер Рен. Каждый год его новыми членами становятся двадцать пять подданных Британии и граждан Ирландской республики, выполнивших выдающиеся работы в области физики, математики, биологии, техники. Иностранцами членами избираются ученые с мировыми именами.

Став в 1824 году членом Королевского общества, Фарадей сразу же ощутил перемену в отношении к себе даже со стороны Хэмфри Дэви: «После того, как я был избран членом Королевского общества, у меня сложились совершенно другие, чем прежде, отношения в смысле научного сотрудничества с сэром Хэмфри Дэви».

Официальное выдвижение состоялось 1 мая 1823 года. Сухие строки документа гласят:

«Мистер Майкл Фарадей, джентльмен, замечательно сведущий в химических

науках и автор ряда статей, опубликованных в Transactions of Royal Society, выражает желание стать членом Общества; мы, нижеподписавшиеся, на основании личного знакомства рекомендуем его как человека, в высшей степени заслуживающего этой чести, человека, который, вероятно, станет полезным и ценным членом Общества».

Среди подписавшихся значится имя вице-президента Королевского общества Волластона, с которым у Фарадея в 1821 году возникло недоразумение. Октябрь и ноябрь 1821 года ушли на выяснение отношений. Фарадею пришлось посетить Волластона и принести ему извинения. Подпись Волластона под выдвижением Фарадея означала, что инцидент полностью улажен.

Но на пути к избранию Фарадея возникает серьезное препятствие: против его приема в члены Королевского общества возражает не кто иной, как сам президент Королевского общества сэр Хэмфри Дэви, обидевшийся на своего бывшего ассистента за то, что тот опубликовал две-три статьи о сжижении хлора и других газов, тогда как сам Хэмфри Дэви успел опубликовать всего лишь одну статью.

Майкл Фарадей был в отчаянии: «Мне несправедливо причинена неприязнь, тем большая, что случилось это в то время, когда я стал известен Королевскому обществу как кандидат в его члены. Я не верю, что кто-либо по своей охоте создал такое положение вещей, но все, казалось, были в смущении и, вообще говоря, настроены не в мою пользу».

Долгожданное событие – избрание в члены Королевского общества – состоялось в январе 1824 года, а в протоколе Королевского института от 7 февраля 1825 года появилась следующая запись: сэр Х. Дэви утверждает, что «он полностью разобрался в способностях и служебных успехах мистера Фарадея, ассистента Лаборатории, с одобрением отмеченных директорами, причем подобное мнение встретило сердечную поддержку собравшихся: решено назначить мистера Фарадея директором Лаборатории, подчиненным профессору химии».

Так Фарадей занял тот пост, который некогда занимал сэр Хэмфри Дэви.

Хроника жизни и открытий Майкла Фарадея

1820–1830 Химия и, параллельно, изучение электромагнитных явлений.

1821 Подготавливая обзор известных к тому времени электромагнитных явлений, Фарадей решает повторить все эксперименты своих предшественников. В ходе экспериментов обнаруживает, что вокруг проводника с током на магнитный полюс действует сила, заставляющая полюс двигаться по окружности вокруг проводника.

1825 Получение бензола.

1831 Начало «Экспериментальных исследований электричества» (продолжавшихся по 1855 год).

1831 Открытие закона электромагнитной индукции.

1833–1834 Электролиз (I и II законы Фарадея).

В 1833 году Фарадея назначают профессором химии Королевского института.

1835 Достижение температуры -110°C с помощью углекислоты и эфира.

1837–1839 Поляризация диэлектриков.

1838 Разряд в разреженном воздухе.

1845 Диамagnetики и парамагнетики.

1845 Вращение плоскости поляризации линейно поляризованного света, распространяющегося вдоль магнитного поля (эффeкт Фарадея).

Таков внушительный, но далеко не полный перечень открытий.

В 1821 году, когда Фарадею было двадцать девять лет, он женился на Саре Бернар, которая, как и он сам, принадлежала к сэндемонианской общине. Их брак был счастливым, но бездетным. Для Майкла Фарадея миссис Фарадей, по его собственному признанию, была «опорой, прибежищем души и приносящей счастье женой».

Поле

Занимаясь изучением электромагнитной индукции, Фарадей выработал свои особые, «правополушарные», то есть зримые, представления об электромагнитном поле, которые Максвелл впоследствии облек в привычную математическую форму. Для Фарадея поле было пространством, которое пронизывают электрические и магнитные силовые линии. Их он реально видел своим мысленным взором, обдумывая свои эксперименты. Великолешно оперируя наглядными представлениями о силовых линиях, Фарадей вместе с тем лучше, чем кто-либо другой, ощущал недостаточность своих рудиментарных познаний в математике, о чем красноречиво свидетельствует его письмо Максвеллу: «Мне очень хотелось бы задать Вам один вопрос. Предположим, математик занимается исследованием физического явления и приходит, наконец, к каким-то определенным выводам. Нельзя ли выразить их в общедоступной форме не менее полно, ясно и конкретно, чем с помощью математических формул? Если можно, то для таких, как я, было бы великим благом получить их переведенными с языка иероглифов так, чтобы мы могли оперировать ими в процессе эксперимента. Я думаю, что это можно сделать, поскольку идея Ваших выводов мне совершенно ясна, хотя я не всегда могу проследить в деталях за ходом Ваших рассуждений. Результаты, полученные на основании Ваших формул, неизменно лежат не выше и не ниже истинных, и смысл их вполне очевиден, так что я могу работать с ними. Если это так, то математики могли бы сослужить нам хорошую службу, представляя свои результаты не только в удобной форме, но и в более популярном рабочем виде».

Лекции в Королевском институте

Возможно, в память о том, какую замечательную роль сыграли в его жизни лекции сэра Хэмфри Дэви, а может, следуя неукоснительному исполнению долга, присущему сэндеманианцам, Майкл Фарадей еще в молодости глубоко продумал многие вопросы лекторского искусства и воплотил их в живой практике, когда сам стал читать лекции. В письме своему приятелю, некоему Эбботту, Фарадей, которому тогда исполнился двадцать один год, сообщает: «Мой лектор никоим образом не должен быть «приклеенным» к столу или «привинченным» к полу... Он должен быть непринужденным и собранным, бесстрашным и беззаботным, а его мысли и сознание должны быть ясными и свободными, когда он размышляет о предмете и излагает его... Все его поведение должно внушать аудитории уважение, и он никогда не должен забывать о присутствии этой аудитории... Я не одобряю [лектора] диктующего, за исключением случаев, когда он приводит цитату или выдержку. Лектор обязан излагать предмет легко и свободно, обращаясь к книге только тогда, когда ему надо уточнить свои заметки, он не должен ограничивать свою речь избранным раз и навсегда направлением, но может отклоняться от него, если того требуют обстоятельства или позволяют возникающие условия... По той же причине [чтобы не утомлять слушателей] я не одобряю длинных лекций; один час достаточен для любого лектора, никому нельзя позволять превосходить это время».

Тема лекций глубоко волновала тогда еще совсем молодого Фарадея и не раз возникала в его переписке с Эбботтом. В другом письме он пишет: «Лектор глубоко принижает свое достоинство, если нисходит до того, что охотится за аплодисментами и жаждет похвалы...»

Последнюю лекцию Фарадей прочитал в Королевском институте в пятницу 20 июня 1862 года, когда ему было семьдесят лет. Дочитать ее до конца не хватило сил. Прервав лекцию, он осведомился у слушателей, не слишком ли долго он занимает их внимание, и вернулся к кафедре. Слушатели стоя проводили его овацией.

Мы, живущие в другую эпоху, можем судить об искусстве Фарадея-лектора

по его замечательной книге «История свечи», давно и с любовью переведенной на русский язык и переиздававшейся. Она написана по материалам лекций, прочитанных им в Королевском институте.

Фарадей умер 25 августа 1867 года и похоронен в Лондоне на Хайгейтском кладбище.

Всю жизнь он следовал завету, высказанному как-то раз в молодости: «[Ученого] не должно быть излюбленной гипотезы, он обязан быть вне школ, для него не должно существовать авторитетов. Он должен почтительно относиться не к личностям, а к предметам. Истина должна быть главной целью его исследований. Если к этим качествам еще добавится трудолюбие, то он может надеяться поднять завесу в храме природы».

РНИЦ «Курчатовский институт»
Москва

Поступила в редакцию 21.02.00

MICHAEL FARADAY

Yu.A. Danilov

Short account of life and work of the great experimentalist in physics.



Данилов Юлий Александрович – родился в 1936 году в Москве. Окончил физический факультет МГУ (1963). Старший научный сотрудник РНИЦ «Курчатовский институт». Область интересов – симметрия в физике, нелинейная динамика. Имеет более 50 научных публикаций по этим направлениям. Много лет занимается переводами трудов А. Эйнштейна, Г. Кирхгофа, А. Пуанкаре, В. Паули, И. Пригожина, которые выходят в свет в серии «Классики науки».



**СБОРНИК ПРОГРАММ КУРСОВ ЛЕКЦИЙ,
разработанных и читаемых преподавателями факультета
нелинейных процессов на физическом факультете, факультете
нелинейных процессов и факультете гуманитарных и социальных
наук Саратовского государственного университета**

Под общей редакцией чл.–корр. РАН, профессора Д.И. Трубецкова

В настоящий сборник вошли программы курсов, читаемых на факультете нелинейных процессов и кафедре электроники, колебаний и волн физического факультета Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Включены как программы обязательных курсов для специальностей 07.15.00 «радиофизика и электроника» и 01.04.00 «физика», так и специальные курсы, читаемые сотрудниками данных подразделений Саратовского университета.

Сборник предназначен для сотрудников и студентов Саратовского государственного университета.

© Изд–во ГосУНЦ «Колледж», 2000

Саратов: Изд–во ГосУНЦ «Колледж», 2000. 104с.

Предисловие

Программа, ж., греч. – краткий очерк, начертанье, перечень, изложение, содержание сочинения, предложенного издания, книги, журнала, преподавания чего-либо; план праздника, торжества, зрелища, представленья; задача, пояснительная записка на заданную по выбору работу.

В.И. Даль. Толковый словарь живого великорусского языка. – М.: Русский язык, 1998, с. 478.

Наверное, все кто сдавал экзамены по гуманитарным дисциплинам помнят, что даже самые грозные преподаватели разрешали пользоваться программой курса, в которой многое можно было почерпнуть, даже при скудном знании предмета (см. эпиграф). С той далекой экзаменационной поры я с уважением и даже некоторой нежностью отношусь к программам.

В настоящем сборнике собраны рабочие программы учебных курсов, читаемых студентам физического факультета и факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

Факультет нелинейных процессов – один из самых молодых факультетов Саратовского госуниверситета (и, насколько известно, единственный в мире): в

1999 году состоялся первый выпуск молодых специалистов, обучавшихся в его стенах. Характерная особенность этого факультета – тесная связь между научными исследованиями, проводимыми его сотрудниками, и образовательным процессом. Факультет является динамично развивающейся структурой с увеличивающимся числом студентов – в текущем 2000 году план приема на первый курс составит 70 человек. Часть этих студентов поступит на факультет из Лицея Колледжа Прикладных Наук, ориентированного непосредственно на факультет нелинейных процессов (ЛКПН – структурное подразделение Государственного учебно-научного центра «Колледж»), остальные – из различных учебных заведений не только города Саратова и области, но и со всей страны.

В настоящее время на факультете нелинейных процессов успешно работает кафедра нелинейной физики, а также базовые кафедры биофизики (ИБФРМ РАН) и нелинейных динамических систем (Саратовское отделение ИРЭ РАН). С марта месяца 2000 года в состав факультета войдет кафедра электроники, колебаний и волн и ее филиал в ГНПП «Алмаз», сотрудники и выпускники которой стояли у истоков формирования новой университетской структуры. Для студентов факультета нелинейных процессов читается ряд оригинальных современных курсов, учитывающих современное состояние науки. Основное научное и образовательное направление факультета: нелинейная динамика – новое научное мировоззрение нашего времени. Следует отметить, что студенты факультета демонстрируют очень хорошую подготовку – многие из них получают президентскую или губернаторскую стипендии, удостоены звания «Соросовского студента», награждены медалями за лучшую студенческую научную работу. В 1999 году около четверти выпускников факультета поступили в аспирантуру университета, где и продолжают обучение. Все это, разумеется, было бы невозможно без сильного профессорско-преподавательского состава, активно ведущего научные исследования.

Настоящий Сборник рабочих программ будет полезен не только студентам, но, вполне возможно, и абитуриентам, выбирающим место будущей учебы.

15 февраля 2000 года

Чл.-корр. РАН, профессор,
д.ф.-м.н. Д.И. Трубецков

Содержание

Предисловие	5
<i>Безручко Б.П., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.</i>	
Синергетика (для экономистов)	7
<i>Рожнев А.Г.</i> Линейная теория колебаний	11
<i>Трубецков Д.И., Лёвин Ю.И.</i> Физика волн. Часть 1. Линейные волны	14
<i>Трубецков Д.И., Рыскин Н.М.</i> Физика волн. Часть 2. Нелинейные волны	18
<i>Анфиногентов В.Г.</i> Вычислительные методы в физике	22
<i>Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.</i> Нелинейные колебания	25
<i>Мчедлова Е.С.</i> Теоретическая механика	29
<i>Безручко Б.П.</i> Теория колебаний и волн (раздел «Теория волн»)	33
<i>Короновский А.А.</i> Введение в нелинейную теорию колебаний	35
<i>Подин С.В.</i> Информационные сети и системы	38
<i>Подин С.В.</i> Современное Software в научных исследованиях	40
<i>Красичков Л.В.</i> Численные методы в нелинейной динамике	43

<i>Кипчатов А.А.</i> Электронные приборы	45
<i>Гамаюнов Ю.Г.</i> Физическая электроника	49
<i>Трубецков Д.И.</i> Самоорганизация в открытых системах	53
<i>Трубецков Д.И., Храмов А.Е.</i> Электроника сверхвысоких частот	56
<i>Безручко Б.П.</i> Математическое моделирование	62
<i>Цикин Б.Г., Перченко М.И.</i> Квантовая радиофизика	66
<i>Трубецков Д.И., Четвериков А.П.</i> Теория волновых процессов	71
<i>Жарков Ю.Д.</i> Электронные и ионные потоки в физике и технике	73
<i>Кипчатов А.А.</i> Основы цифровой обработки сигналов	76
<i>Шараевский Ю.П.</i> Колебания и волны в нелинейных активных средах	79
<i>Амиров Р.Ш.</i> Физическая электроника	84
<i>Григорьев М.А.</i> Твердотельные приборы СВЧ	88
<i>Четвериков А.П.</i> Взаимодействие колебаний и волн	91
<i>Анфиногентов В.Г., Безручко Б.П., Короновский А.А.</i> Современные проблемы электроники и науки о колебаниях и волнах	94
<i>Красичков Л.В.</i> Новые информационные технологии в учебном процессе	98
<i>Трубецков Д.И., Безручко Б.П., Короновский А.А., Храмов А.Е.</i> Синергетика (для философов)	101

В следующем номере журнала будут опубликованы программы

Б.П. Безручко, А.А. Короновский, Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов

СИНЕРГЕТИКА (для экономистов)

Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов

ЭЛЕКТРОНИКА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

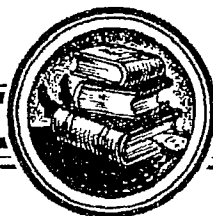
Заинтересованный читатель может заказать сборник программ

по электронной почте: E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru

по телефону: (845–2) 52–38–64

по почте: 410026, Саратов, Астраханская, 83, СГУ,
редакция журнала «ПНД»

Стоимость наложенного платежа 30 руб.



CHANCE AND STABILITY
Stable distributions and their applications

Vladimir V. Uchaikin and Vladimir M. Zolotarev

VSP, Utrecht, The Netherlands, Tokyo, Japan, 1999, 570 p., 506 ref.
<http://www.vspub.com>

Монография посвящена теории устойчивых распределений, наиболее известным из которых является нормальное распределение – единственное устойчивое распределение, имеющее конечную дисперсию и их приложениям.

Часть I содержит теоретические положения и состоит из девяти глав, две из которых представляют элементарное введение в теорию устойчивых законов, а семь остальных посвящены более подробному описанию одномерных и многомерных устойчивых распределений с использованием аппарата характеристических функций, интегральных преобразований, уравнений в дробных производных, специальных функций. Описываются также алгоритмы моделирования случайных величин (векторов) с устойчивыми плотностями распределения и методы статистического оценивания их параметров.

Часть II также состоит из девяти глав, посвященных различным областям применений устойчивых распределений в физике, радиофизике, астрофизике и космологии, биологии, генетике, физиологии, экологии, геологии, экономике, рассматриваются стохастические алгоритмы. Отдельные главы посвящены коррелированным системам и фракталам, аномальной диффузии и хаосу.

В конце монографии приведены таблицы устойчивых распределений и другой справочный материал, предметный указатель и библиография из 506 наименований.

Монография является первой книгой, в которой, наряду с достаточно полным изложением теории показана широкая сфера применения устойчивых распределений в конкретных задачах. Она написана доступным языком, хорошо иллюстрирована и ориентирована, в первую очередь, на студентов старших курсов, аспирантов и молодых исследователей, не являющихся профессионалами-математиками, но использующих теорию вероятностей в своей научной работе.

CONTENTS

Foreword

Introduction

I Theory. 1 Probability. 1.1 Probability space. 1.2 Random variables. 1.3 Functions $X(\lambda)$. 1.4 Random vectors and processes. 1.5 Independence. 1.6 Mean and variance. 1.7 Bernoulli theorem. 1.8 The Moivre – Laplace theorem. 1.9 The law of large numbers. 1.10 Strong law of large numbers. 1.11 Ergodicity and stationarity. 1.12 The central limit theorem.

2 Elementary introduction to the theory of stable laws. 2.1 Convolutions of distributions. 2.2 The Gauss distribution and the stability property. 2.3 The Cauchy and Levy distributions. 2.4 Summation of strictly stable random variables. 2.5 The stable laws as limiting distributions. 2.6 Summary.

3 Characteristic functions. 3.1 Characteristic functions. 3.2 The characteristic functions of symmetric stable distributions. 3.3 Skew stable distributions with $\alpha < 1$. 3.4 The general form of stable characteristic functions. 3.5 Stable laws as infinitely divisible laws. 3.6 Various forms of stable characteristic functions. 3.7 Some properties of stable random variables. 3.8 Conclusion.

4 Probability densities. 4.1 Symmetric distributions. 4.2 Convergent series for asymmetric distributions. 4.3 Long tails. 4.4 Integral representation of stable densities. 4.5 Integral representation of stable distribution functions. 4.6 Duality law. 4.7 Short tails. 4.8 Stable distributions with a close to extreme values. 4.9 Summary.

5 Integral transformations. 5.1 Laplace transformation. 5.2 Inversion of the Laplace transformation. 5.3 Tauberian theorems. 5.4 One-sided stable distributions. 5.5 Laplace transformation of two-sided distributions. 5.6 The Mellin transformation. 5.7 The characteristic transformation. 5.8 The logarithmic moments. 5.9 Multiplication and division theorems.

6 Special functions and equations. 6.1 Integro-differential equations. 6.2 The Laplace equation. 6.3 Fractional integro-differential equations. 6.4 Splitting of the differential equations. 6.5 Some special cases. 6.6 The Whittaker functions. 6.7 Generalized incomplete hypergeometrical function. 6.8 The Meijer and Fox functions. 6.9 Stable densities as a class of special functions. 6.10 Trans-stable functions. 6.11 Concluding remarks.

7 Multivariate stable laws. 7.1 Bivariate stable distributions. 7.2 Trivariate stable distributions. 7.3 Multivariate stable distributions. 7.4 Spherically symmetric multivariate distributions. 7.5 Spherically symmetric stable distributions.

8 Simulation. 8.1 The inverse function method. 8.2 The general formula. 8.3 Approximate algorithm for one-dimensional symmetric stable variables. 8.4 Simulation of three-dimensional spherically symmetric stable vectors.

9 Estimation. 9.1 Sample fractile technique. 9.2 Method of characteristic functions. 9.3 Method of characteristic transforms: estimators of ν , θ and τ . 9.4 Invariant estimation of α . 9.5 Estimators of parameter γ . 9.6 Maximum likelihood estimators. 9.7 Fisher's information for α close to 2. 9.8 Concluding remarks.

II Applications

10 Some probabilistic models. 10.1 Generating functions. 10.2 Stable laws in games. 10.3 Random walks and diffusion. 10.4 Stable processes. 10.5 Branching processes. 10.6 Point sources: two-dimensional case. 10.7 Point sources: multi-dimensional case. 10.8 A class of sources generating stable distributions.

11 Correlated systems and fractals. 11.1 Random point distributions and generating

functionals. 11.2 Markov point distributions. 11.3 Average density of random distribution. 11.4 Correlation functions. 11.5 Inverse power type correlations and stable distributions. 11.6 Mandelbrot's stochastic fractals. 11.7 Numerical results. 11.8 Fractal sets with a turnover to homogeneity.

12 Anomalous diffusion and chaos. 12.1 Introduction. 12.2 Two examples of anomalous diffusion. 12.3 Super-diffusion. 12.4 Sub-diffusion. 12.5 CTRW equations. 12.6 Some special cases. 12.7 Asymptotic solution of the Montroll-Weiss problem. 12.8 Two-state model. 12.9 Stable laws in chaos.

13 Physics. 13.1 Lorentz dispersion profile. 13.2 Stark effect in an electrical field of randomly distributed ions. 13.3 Dipoles and quadrupoles. 13.4 Landau distribution. 13.5 Multiple scattering of charged particles. 13.6 Fractal turbulence. 13.7 Stresses in crystalline lattices. 13.8 Scale-invariant patterns in acicular martensites. 13.9 Relaxation in glassy materials. 13.10 Quantum decay theory. 13.11 Localized vibrational states (fractons). 13.12 Anomalous transit-time in some solids. 13.13 Lattice percolation. 13.14 Waves in medium with memory. 13.15 The mesoscopic effect. 13.16 Multiparticle production. 13.17 Tsallis distributions. 13.18 Stable distributions and renormalization group.

14 Radiophysics. 14.1 Transmission line. 14.2 Distortion of information phase. 14.3 Signal and noise in a multi-channel system. 14.4 Wave scattering in turbulent medium. 14.5 Chaotic phase screen.

15 Astrophysics and cosmology. 15.1 Light of a distant star. 15.2 Cosmic rays. 15.3 Stellar dynamics. 15.4 Cosmological monopole and dipole. 15.5 The Universe as a rippled water. 15.6 The power spectrum analysis. 15.7 Cell-count distribution for the fractal Universe. 15.8 Global mass density for the fractal Universe.

16 Stochastic algorithms. 16.1 Monte-Carlo estimators with infinite variance. 16.2 Flux at a point. 16.3 Examples. 16.4 Estimation of a linear functional of a solution of integral equation. 16.5 Random matrices. 16.6 Random symmetric polynomials.

17 Financial applications. 17.1 Introduction. 17.2 More on stable processes. 17.3 Multivariate stable processes. 17.4 Stable portfolio theory. 17.5 Log-stable option pricing. 17.6 Low probability and short-lived options. 17.7 Parameter estimation and empirical issues.

18 Miscellany. 18.1 Biology. 18.2 Genetics. 18.3 Physiology. 18.4 Ecology. 18.5 Geology.

Appendix

A.1 One-dimensional densities $q^A(x; \alpha, \beta)$. A.2 One-sided distribution functions $G^B(x; \alpha, 1)$ multiplied by 10^4 . A.3 One-sided distributions represented by function $F(y; \alpha) = 10^4 G^B(y^{-1/\alpha}, 1)$ ($F(y; 0) \equiv 10^4 e^{-y}$). A.4 The function $\alpha^{1/\alpha} q(\alpha^{1/\alpha}; \alpha)$, where $q(x; \alpha)$ is the one-dimensional symmetric stable density. A.5 Radial functions $p_2(r; \alpha)$ of two-dimensional axially symmetric densities. A.6 Radial functions $p_3(r; \alpha)$ of three-dimensional spherically symmetric densities. A.7 Strictly stable densities expressed via elementary functions, special functions and quadratures. A.8 Fractional integro-differential operators. A.9 Approximation of inverse distribution function $r(x) = F^{-1}(x)$ for simulation of three-dimensional random vectors with density $q_3(r; \alpha)$. A.10 Some statistical terms. A.11 Some auxiliary formulae for statistical estimators. A.12 Functional derivatives.

Conclusion

Bibliography

Index

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, М.В. Попова, Н.Н. Лёвина*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой*
на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136
Банковские реквизиты
р/с №40603810900000000378 ЗАО АКБРИР «Экономбанк» г. Саратова,
БИК 046311722, кор. счет банка 30101810100000000722

Подписка на I-ое полугодие 2000 года

по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498
и по заявочным письмам непосредственно в редакции
Стоимость подписки на I полугодие 90 рублей

Зарубежная подписка оформляется через фирмы-партнеры ЗАО «Международная книга – Периодика» или непосредственно в ЗАО «МК-Периодика» по адресу: 117049, Москва, ул. Б. Якиманка, 39, ЗАО «МК-Периодика» тел.: (095) 238-14-85, 238-49-67; факс: 238-46-34
E-mail: info@mkniga.msk.su; Internet: http://www.mkniga.ru

To effect subscription it is necessary to address one of the partners of JSC «Mezhdunarodnaya Kniga-Periodica» in Your country or necessary to address JSC «МК-Periodica» directly
Address: Russia, Moscow, 117049, ul. B. Yakimanka, 39, «МК-Periodica»
Tel.: (095) 238-14-85, 238-49-67; Fax: 238-46-34
E-mail: info@mkniga.msk.su; Internet: http://www.mkniga.ru

Сдано в набор 1.02.00. Подписано к печати 15.04.00. Формат 70x108/16
Бумага финская. Печать плоская. Гарнитура Латинская
Усл. печ.л. 9,45 (6,75). Уч.-изд. л. 9,2. Тираж 200 экз. Заказ 169

Издательство ГосУНЦ «Колледж». Лицензия ЛР №020773 от 15.04.98

410026, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел. (845-2)523864, факс (845-2) 523864
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru

Отпечатано на ризографе RA 4200 издательства ГосУНЦ «Колледж»

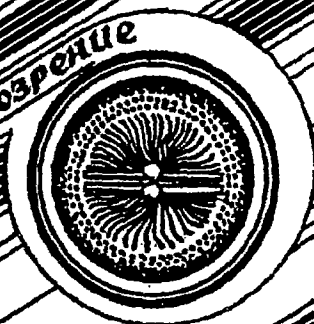
© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 2000



Книжное обозрение



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

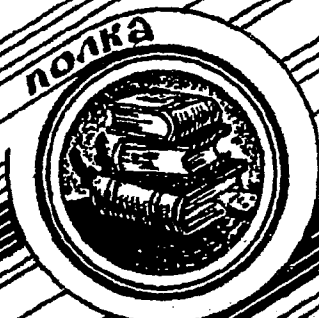
V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



в журнале

студентов и преподавателей



Книжная полка студента



Современной нелинейной динамики

**ЧИСТОЙ ДОРОГОЙ
ХОДИТЕ, ТОВАРИЩИ!**

