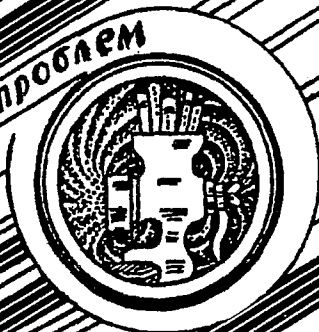


Трикладная Дифференциальная Динамика





Бифуркации
в динамических
системах различной природы



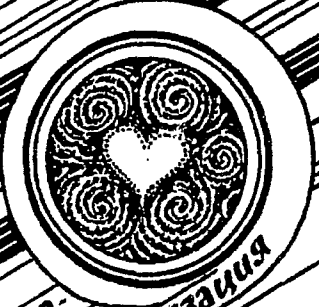
Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики



Конференции, семинары, симпозиумы



Детерминированный
хаос



Автоволны,
самоорганизация

Прикладные задачи
нелинейной
теории
колебаний
и волн



Нелинейная
динамика
в лицах



История персонаlio

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Калинин, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В.К. Юлпатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 9, № 4,5, 2001, Саратов

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

- Короновский А.А., Храмов А.Е.* Введение в непрерывный вейвлетный анализ для специалистов в области нелинейной динамики. Часть 1. Основные положения, численная реализация и модельные сигналы 3

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

- Лоскутов А.Ю., Акиншин Л.Г., Соболевский А.Н.* Динамика бильярдов с периодически зависящими от времени границами 50
- Владимиров С.Н., Негруль В.В.* Порядок и хаос в модифицированном логистическом отображении 64

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ

- Бархатов Н.А., Беллюстин Н.С., Емельянов Н.Н., Левитин А.Е.* Трансформация изолированных МГД-возмущений в планетарном магнитном резонаторе 78
- Галишиников А.А., Дудко Г.М., Филимонов Ю.А.* Влияние внешнего периодического воздействия на режим самомодуляции магнитостатических волн 95
- Дудко Г.М., Филимонов Ю.А.* Волновые пучки обратных объемных магнитостатических волн при одновременном развитии процессов самомодуляции и самофокусировки 107

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ДЕЙСТВИИ

- Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н., Раводин В.О.* Модель взаимодействия двух научных направлений, одно из которых или оба «затухающие», с учетом ограничения роста достижений и запаздывания 119

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

- Ряшко Л.Б.* Метод функции Ляпунова в исследовании устойчивости и стабилизации двумерного инвариантного тора 140

ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ

Материалы Второй международной конференции

«Фундаментальные проблемы физики», 9–14 октября 2000, Саратов, Россия

- Рыбаков Ю.П., Осчоа Jimenez R.* Топологические возбуждения негейзенберговских ферромагнетиков с биквадратичным спиновым обменным взаимодействием 155
- Гурбатов С.Н., Майнардн Ф., Мошков А.Ю., Тампиери Ф.* О динамике частиц в нестационарном течении 162
- Грязнова И.Ю., Гурбатов С.Н., Егорычев С.А., Курин В.В., Кустов Л.М., Прончатов-Рубцов Н.В.* Физическое моделирование эффектов нелинейного взаимодействия акустических волн 175

- АНОНС 190

DEPARTMENT OF EDUCATION OF RUSSIAN FEDERATION

Izvestiya VUZ

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

scientific-technical journal

published since 1993

Published 6 times a year

Vol.9, № 4,5, 2001, Saratov

CONTENTS

REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

An introduction to continuous wavelet analysis for specialists in field of nonlinear dynamics. *A.A. Koronovskii, A.E. Hramov* 3

DETERMINISTIC CHAOS

Dynamics of billiards with periodically time-dependent boundaries. *A.Yu. Loskutov, L.G. Akinshin, A.N. Sobolevskii* 50

Order and chaos in modified logistic map. *S.N. Vladimirov, V.V. Negrul'* 64

NONLINEAR WAVES. SOLITONS

Transformation of isolated MHD disturbances in planetary magnetic resonator. *N.A. Barkhatov, N.S. Belliustin, N.N. Emel'yanov, A.E. Levitin* 78

Magnetostatic waves self-modulation under the external periodic force. *A.A. Galishnikov, G.M. Dudko, Yu.A. Filimonov* 95

Beams of magnetostatic backward volume waves at simultaneous development of self-modulation and self-focusing processes. *G.M. Dudko, Yu.A. Filimonov* . 107

NONLINEAR DYNAMICS IN ACTION

Model of two scientific fields interaction (one or both are «damped») with restriction of achievements growth and delay. *I.V. Izmailov, B.N. Poizner, V.O. Ravodin* 119

METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

Lyapunov functions technique for stability analysis and stabilization of invariant 2-torus. *L.B. Ryashko* 140

JOURNAL IN JOURNAL

Materials of the Second International Conference

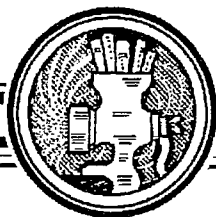
«Fundamental Problems of Physics», October 9–14, 2000, Saratov, Russia

Topological excitations in non-Heisenberg ferromagnetic with biquadratic spin exchange interaction. *Yu.P. Rybakov, R. Ochoa Jimenez* 155

Dynamics of impurities in unsteady flow. *S. Gurbatov, F. Mainardi, A. Moshkov, F. Tampieri* 162

Physical modeling of the effects of the nonlinear interaction of acoustic waves. *I.Yu. Gryaznova, S.N. Gurbatov, S.A. Egorychev, V.V. Kurin, L.M. Kustov, N.V. Pronchatov-Rubtsov* 175

ANNOUNCEMENT 190



ВВЕДЕНИЕ В НЕПРЕРЫВНЫЙ ВЕЙВЛЕТНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ СПЕЦИАЛИСТОВ В ОБЛАСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Часть 1. Основные положения, численная реализация и модельные сигналы

А.А. Короновский, А.Е. Храмов

Делается попытка, опираясь на хорошо известные физические представления и примеры, объяснить механизм работы непрерывного вейвлетного преобразования и возможности его применения для исследования сложных режимов, порожденных нелинейными динамическими системами (как конечномерных, так и распределенной природы). В первой части рассматривается введение в вейвлетный анализ, математический аппарат, методика численной реализации вейвлетного преобразования, его применение к модельным сигналам. На ряде простых примеров иллюстрируются особенности вейвлет-преобразования, его сходства (и отличия) с классическим спектральным анализом. Приводится достаточно большое число иллюстраций, которые делают наглядным знакомство с вейвлетным анализом.

Введение

Вейвлетный анализ, возникший сравнительно недавно, как оказалось, является мощным средством анализа динамики систем и привлекает в последнее время все большее внимание исследователей. Отражением этого факта служит большое число работ, ориентированных на начинающего исследователя, посвященных изложению основных понятий и сущности вейвлетного преобразования. Среди подобных работ читателю можно порекомендовать обзорные работы Н.М. Астафьевой [1, 2], статью, написанную Торренсом и Компо [3], вводные и обзорные курсы по вейвлетному анализу [4–11], а также многочисленные другие публикации по данной тематике (см. библиографию к приведенным работам). Тем не менее, мы не смогли удержаться, чтобы не пополнить этот ряд (приведенный выше в очень «усеченном» виде) еще одной работой. В своей работе мы старались, опираясь на хорошо известные физические представления и примеры, объяснить механизм работы вейвлетного преобразования и возможности его применения для анализа сложных режимов, порожденных нелинейными динамическими системами.

Следует сразу оговориться, что мы в полном соответствии с названием рассматриваем только непрерывный вейвлетный анализ. Наряду с непрерывным

вейвлетным анализом существует дискретное вейвлетное преобразование (см. работы [12–17]), на котором мы не останавливаемся.

Начнем наше рассмотрение с хорошо известного читателю спектрального анализа, отталкиваясь от него как от основы, являющейся, в какой-то мере, базой вейвлетного анализа. Первым вопросом, на котором следует остановиться, является основной вопрос: «А для чего нужен вейвлетный анализ?». Существует ведь хорошо себя зарекомендовавший эффективный и привычный аппарат спектрального анализа [19], использующий ряды и/или интегралы Фурье. В то же самое время, реализация вейвлетного анализа несколько более сложна, чем реализация преобразования Фурье. Тем не менее оказывается, что привычный спектральный анализ не всегда помогает понять, как устроен анализируемый сигнал.

Рассмотрим в качестве простого примера сигнал, являющийся суммой двух гармонических сигналов с разными частотами

$$f(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t). \quad (1)$$

В этом случае в фурье-спектре будут присутствовать два пика (рис. 1), на частотах ω_1 и ω_2 ¹. Когда обе частоты присутствуют в сигнале постоянно, спектральный подход четко выделяет существующие в сигнале частоты, предоставляя исследователю полную информацию об «устройстве» исследуемого сигнала. Если же частоты в сигнале появляются или исчезают с течением времени, спектральный анализ (см. рис. 2) не дает полной информации

$$f(t) = (1-H(t))\cos(\omega_1 t) + H(t)\cos(\omega_2 t), \quad (2)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда. Глядя на спектр сигнала, ничего нельзя сказать о том, какие частоты присутствовали в сигнале в тот или иной момент времени. Из вида спектра совершенно неясно, был ли исследуемый сигнал суммой двух гармонических сигналов, как в первом случае (см. рис. 1), или же в сигнале частоты существовали отдельно в разные моменты времени (рис. 2). Информацию об этом из вида спектрального представления сигнала получить невозможно.

Из рассмотренного простого примера следует, что спектральный анализ, позволяющий выделить присутствующие в сигнале гармоники, является эффективным средством анализа временных реализаций, частотный состав которых не

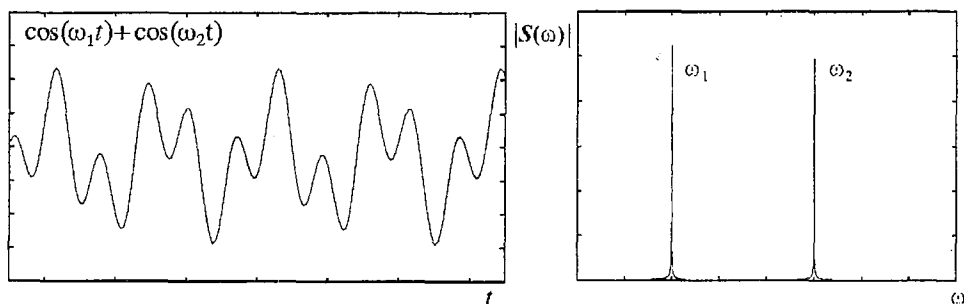


Рис. 1. Сигнал, представляющий собой суперпозицию двух гармонических сигналов с частотами $\omega_2 = 2.5\omega_1$, и его спектр. Шкала нелогарифмическая

¹ Следует оговорить, что в дальнейшем рассматривается диапазон положительных значений частот – отрицательный диапазон, по сути дела, является зеркальным отражением положительного и не несет никакой дополнительной смысловой нагрузки.

изменяется с течением времени. В тех же случаях, когда (как, например, в случае, описываемом соотношением (2)) в сигнале возникают (или исчезают) гармоники, или частота гармоник плавно изменяется с течением времени (рис. 3), необходим иной (хотя, может быть, в чем-то похожий на спектральный) метод анализа.

Невозможность отследить появление (исчезновение) или изменение частотных составляющих сигнала кроется в самом механизме спектрального анализа, а именно: при преобразовании Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

интегрирование проводится по всей длине временной реализации (от $-\infty$ до $+\infty$), и каждая гармоника, присутствующая во временной реализации в тот или иной интервал времени, накладывает свой «отпечаток» на общий вид спектра.

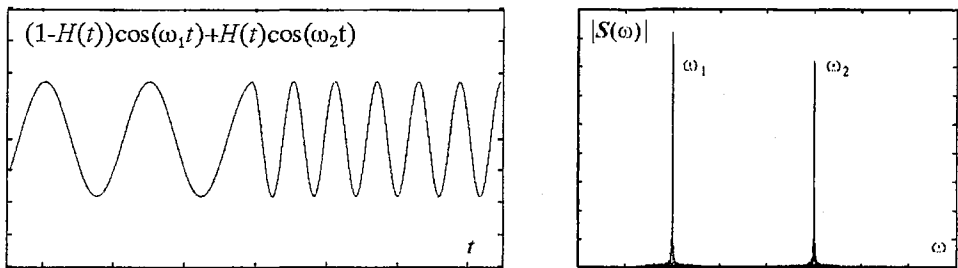


Рис. 2. Гармонический сигнал, у которого резко изменяется частота с величины ω_1 на $\omega_2=2.5\omega_1$ и его спектр. По виду спектра нельзя отличить данный случай от предыдущего, когда рассматриваемый сигнал представлял собой сумму двух гармонических сигналов (см. рис. 1.)

Следовательно, если возникает задача определять, как менялся частотный состав сигнала с течением времени, необходимо отказаться от интегрирования по всему временному интервалу $(-\infty, +\infty)$ и рассматривать некоторый диапазон длительностью $2T$ $[t_0-T; t_0+T]$, где t_0 – интересующий нас момент времени, в который мы хотим локально определить частотные составляющие, присутствующие в сигнале,

$$S(\omega, t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0+T} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4)$$

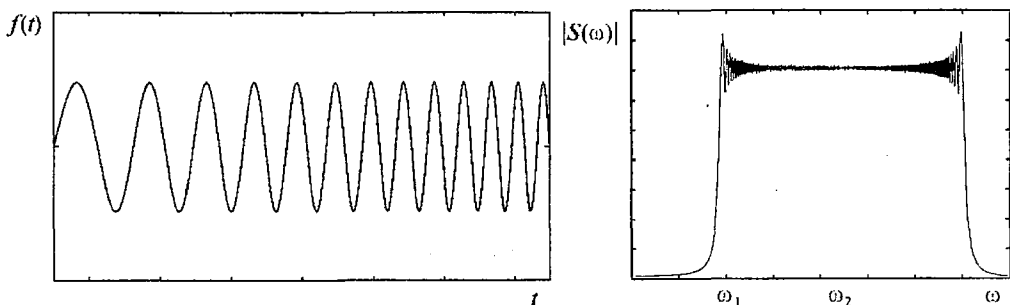


Рис. 3. Сигнал, частота которого линейно возрастает с течением времени: $\omega=\omega_1+a(\omega_2-\omega_1)t$ и его спектр. Глядя на сплошной спектр, можно предполагать, что в сигнале присутствуют все частоты, попадающие в диапазон $[\omega_1; 2\omega_2-\omega_1]$. Шкала нелогарифмическая

Для того, чтобы составить представление о всем сигнале, необходимо сдвигать «окно», длительностью $2T$, вдоль временной реализации. В этом случае, в зависимости от выбора t_0 получается «свой» спектр, изменяющийся по мере того, как «окно» фурье-преобразования перемещается вдоль реализации (рис. 4). Фактически t_0 является переменной величиной, и возникает необходимость рассматривать поверхность $S(\omega, t_0)$.

Однако подобный подход, называемый оконным преобразованием Фурье, тоже не очень хорош (см., например, [8]). Все дело в том, что при преобразовании Фурье гармонического сигнала спектр имеет вид δ -функции только в том случае, если этот сигнал постоянной частоты имеет бесконечную длительность (то есть начинается в момент времени $t=-\infty$ и заканчивается в $t=+\infty$), и интегрирование проводится по этому же бесконечному интервалу времени. В случае конечной длительности сигнала (или, что почти то же самое, интегрирования по конечному интервалу времени) его спектральный образ имеет конечную ширину, и чем

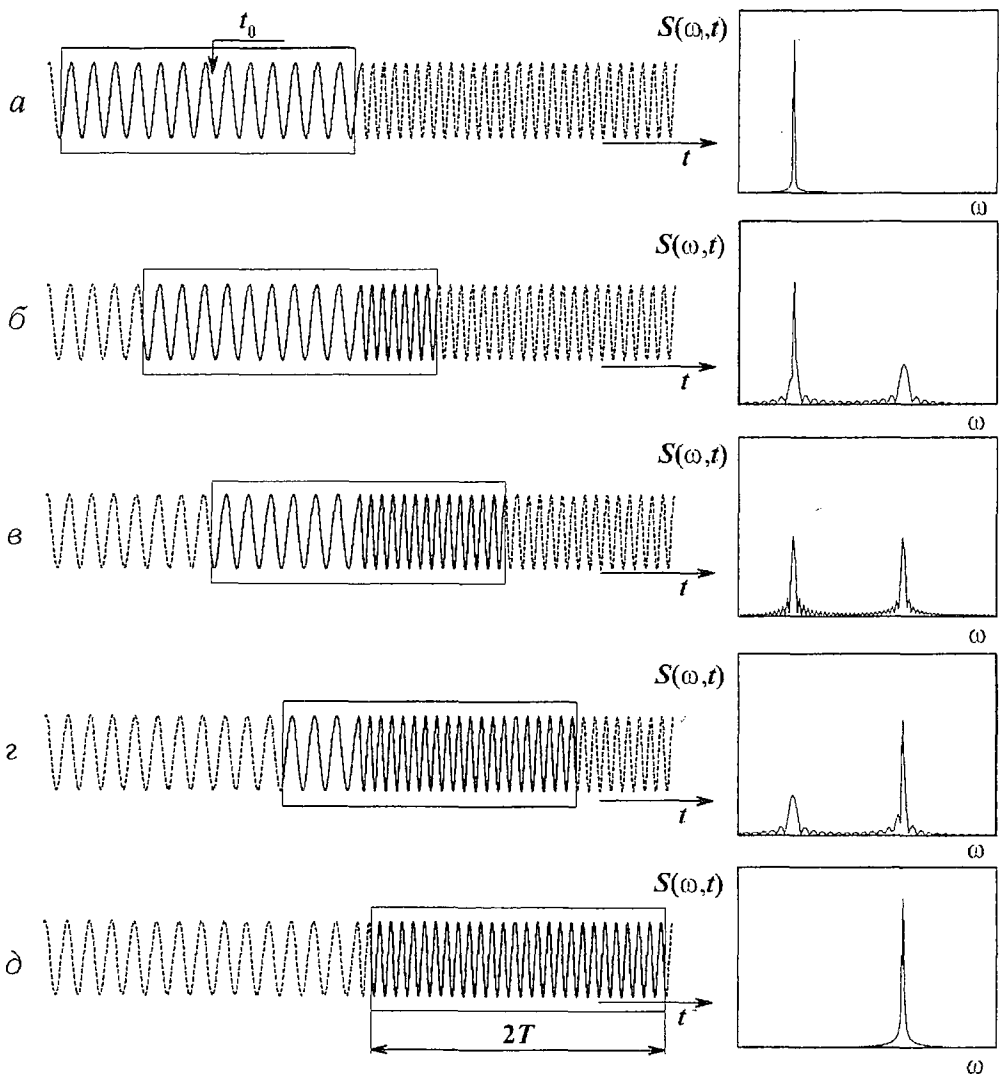


Рис. 4. Оконное преобразование Фурье временного сигнала (2), представляющего собой два последовательных участка гармонических сигналов с разными частотами ω_1 и ω_2 . Окно преобразования сдвигается вдоль временной реализации, что приводит к трансформации спектра (нижняя часть рисунка). Шкала нелогарифмическая

меньше длительность сигнала, тем большую ширину в пространстве частот имеет его фурье-образ. Таким образом, при применении оконного преобразования Фурье: с одной стороны, необходимо выбирать ширину окна $2T$ как можно меньше, чтобы четко выявить момент времени появления или исчезновения той или иной частотной составляющей сигнала; с другой стороны, при этом падает разрешение метода в частотном диапазоне. Иначе говоря, более или менее точно определяя момент появления какой-либо частоты, мы в то же самое время ничего не можем сказать о значении этой частотной компоненты: возникла ли эта частотная составляющая одна, или же одновременно возникло несколько составляющих, близких по частотам. Попытка же улучшить разрешение метода в частотном диапазоне приводит к ухудшению временного разрешения – идеальным случаем, с точки зрения выявления частот, является само преобразование Фурье (3), но, как мы уже видели, с точки зрения анализа временной динамики частотных составляющих, оно является малоэффективным.

Рис. 5 иллюстрирует сказанное. Анализируемый сигнал представляет из себя четыре синусоидальных сигнала с разными частотами, последовательно сменяющими друг друга. На рисунках *а*, *б* и *в* показана поверхность $S(\omega, t)$ для различной ширины окна $2T$. Отчетливо видно, что не удастся одновременно четко определить характер сигнала и в частотном, и во временном диапазонах. Следовательно, оконное преобразование Фурье, при всей его оригинальности,

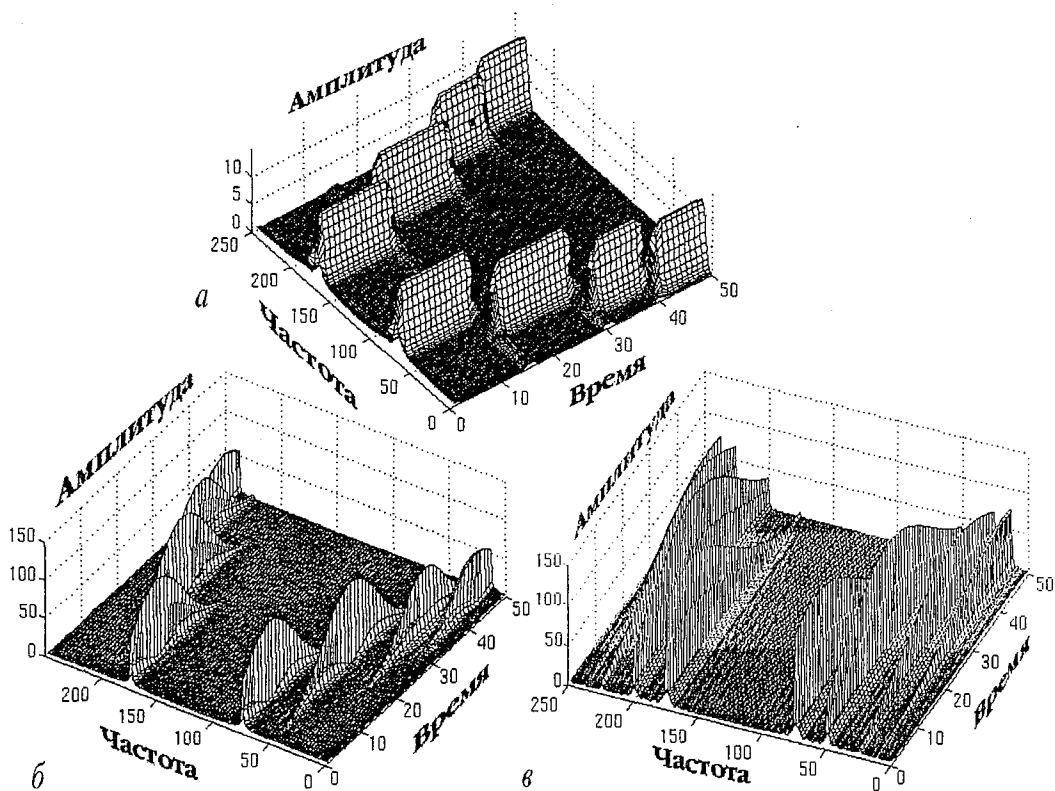


Рис. 5. Сигнал, представляющий из себя «набор» четырех синусоид, существовавших в различные интервалы времени (в интервал времени от 0 до 250 мс частота f синусоидального сигнала составляла 300 Гц, затем от 250 до 500 мс – 200 Гц, от 500 до 750 мс – 100 Гц и от 750 до 1000 мс – 50 Гц) был подвергнут оконному преобразованию Фурье. Рисунки соответствуют различной ширине окна. Отчетливо видно, что чем лучше локализована частота сигнала, тем менее четко удается выделить момент времени, когда эта частотная составляющая появилась в сигнале, и наоборот. Рисунок заимствован из работы [7]

является не слишком эффективным средством для анализа сигналов, частотные составляющие которых меняются с течением времени.

Таким образом, необходимо как-то модифицировать оконное преобразование Фурье (4), чтобы осталась возможность отслеживать изменения, происходящие во времени, но, по-возможности, уменьшить недостатки, связанные с неточностью определения частот. Безусловно, читатель понимает, что теперь, по логике вещей, авторы должны ввести определение вейвлетного преобразования и показать, что оно (преобразование) лучше справляется с поставленными задачами, нежели оконное преобразование Фурье. Тем не менее, мы позволим себе еще на некоторое время отодвинуть момент, когда появится формальное определение вейвлетного преобразования, и постараемся «плавно» подвести к нему читателя. Подумаем немного над тем, как можно было бы, используя оконное преобразование Фурье (4), получить более или менее полную информацию о динамике частотных составляющих в исследуемом сигнале. Обратим внимание на то, что хотя оконное преобразование Фурье, выполненное один раз, не дает полной информации о сигнале, совокупность подобных преобразований одного и того же сигнала, выполненных с различной шириной окна $2T$, оказывается гораздо более информативной (см. рис. 5, а – в). Можно использовать результаты оконного преобразования с малой шириной окна для определения моментов времени изменения спектрального состава сигнала, а преобразования с большой шириной окна – для выделения соответствующих спектральных компонент. Другое дело, что подобный подход неудобен. Фактически у нас возникает необходимость рассматривать функцию не двух переменных $S(\omega, t_0)$ (4), а трех – $S(\omega, t_0, T)$, которая требует представления в четырехмерном пространстве, что ведет к вполне понятным сложностям.

Для уменьшения числа переменных, можно «связать» каким-либо образом частоту ω с длительностью «окна» T , например, для каждого временного масштаба T положить $\omega = 2\pi n/T$ ($n \in \mathbb{R}$). Тогда преобразование Фурье (4) будет иметь вид

$$S(T, t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0+T} f(t) e^{-i2\pi n t/T} dt. \quad (5)$$

Фактически в трехмерном пространстве (ω, t_0, T) , на котором определена функция $S(\omega, t_0, T)$, выделяется некоторая поверхность σ , в точках которой и рассматривается вышеописанная функция. Понятно, что часть информации в этом случае теряется, но «оставшейся части» вполне достаточно, чтобы составить представление об особенностях рассматриваемой временной реализации $f(t)$, поскольку введенная в рассмотрение поверхность σ «охватывает» как весь частотный, так и временной диапазоны (рис. 6).

Более того, размер окна, которое должно «выделять» различные гармоники, оказывается «завязан» на соответствующий временной масштаб, а именно: для выявления низкочастотных гармоник необходимо проанализировать

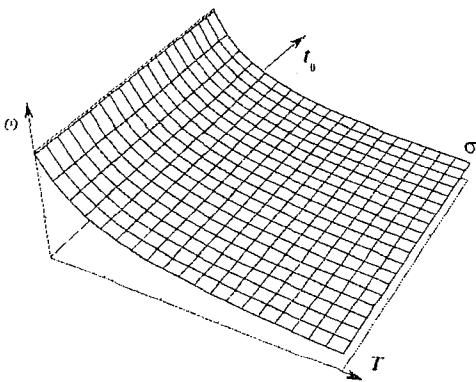


Рис. 6. Поверхность σ , определенная в трехмерном пространстве «частота – время – ширина окна»

большой отрезок временной реализации по сравнению с тем случаем, когда анализируются высокочастотные гармоники. Соотношение $\omega=2\pi n/T$ как раз и обеспечивает разумное соотношение анализируемой частоты ω и ширины анализирующего окна T .

Рассмотрим результат преобразования (5) для временной реализации $f(t)=\sin(\omega t)$. В этом случае несложные, но достаточно громоздкие выкладки дают

$$S(T, t_0) = 2T \sin(\omega T) / (\omega^2 T^2 - 4\pi^2 n^2) [\omega T \sin(\omega t_0) - i 2\pi n \cos(\omega t_0)] e^{-i 2\pi n t_0 / T}. \quad (6)$$

Точно также, как и при спектральном анализе, результат преобразования имеет как действительную, так и мнимую части. По аналогии с преобразованием Фурье имеет смысл рассматривать квадрат модуля величины S

$$|S(T, t_0)|^2 = 4T^2 \sin^2(\omega T) / (\omega^2 T^2 - 4\pi^2 n^2)^2 [\omega^2 T^2 \sin^2(\omega t_0) + 4\pi^2 n^2 \cos^2(\omega t_0)]. \quad (7)$$

Можно убедиться, что в рассматриваемом случае $|S(T, t_0)|^2$ принимает максимальное значение при $T \rightarrow 2\pi n / \omega$, равное n^2 / ω^2 (рис. 7). Таким образом, в рассматриваемом случае, аналогично фурье-анализу, происходит выделение временного масштаба T , соответствующего частоте сигнала. Следует обратить внимание на несколько важных моментов.

Во-первых, для одного и того же сигнала $f(t)=\sin(\omega t)$ при разных значениях параметра n (характеризующего число полных периодов анализирующей синусоиды, «укладывающихся» в окне шириной T) значение ширины окна, при котором величина $|S(T, t_0)|^2$ является максимальной, оказывается различной (см. рис. 7, а, б). Этот факт становится вполне понятным, если обратить внимание на то, что величина $|S(T, t_0)|^2$ является максимальной для такой ширины окна, при которой гармоническое заполнение этого окна имеет ту же самую частоту ω , что и анализируемый сигнал $f(t)$ (рис. 8). Иными словами, величина $|S(T, t_0)|^2$ максимальна, когда $T=2\pi n / \omega$, где ω – частота анализируемого сигнала $f(t)$. Фактически то же самое происходит и при спектральном анализе, однако значение переменной, при котором исследуемая функция имеет максимум, зависит от того, каким образом «устроено» анализирующее окно, и не всегда совпадает с соответствующим временным масштабом, присутствующим в сигнале. Следует также заметить, что чем большее число периодов укладывается в окне интегрирования (чем больше величина n), тем отчетливее выражено наличие данной гармоники в $|S(T, t_0)|^2$ (см. рис. 7, а). Однако, как следствие этого, ширина окна, при котором $|S(T, t_0)|^2$ принимает максимальное значение, также увеличивается (см., опять-таки, рис. 7), что, как было указано выше, ведет к

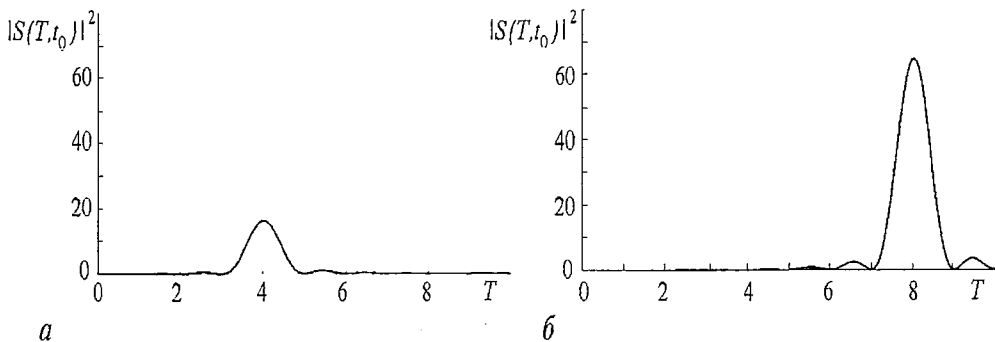


Рис. 7. Результат преобразования (5) для одной и той же временной реализации $f(t)=\sin(\omega t)$, $\omega=\pi$, $t_0=0$ для различных n : а – 2, б – 4

ухудшению разрешающих свойств преобразования во временном диапазоне (в то время как разрешение в частотном диапазоне улучшается).

Во-вторых, следует помнить, что получающаяся в результате преобразования (5) величина $S(T, t_0)$ является функцией двух переменных $-T$ и t_0 . Величина T определяет временной диапазон, по которому осуществляется интегрирование в (5), и одновременно частоту анализирующего заполнения. Таким образом, частота анализирующего заполнения оказывается жестко связана с шириной окна T . В то же время переменная t_0 определяет момент времени, в который осуществляется описываемое преобразование; фактически t_0 определяет сдвиг окна интегрирования вдоль оси времени. Но когда окно интегрирования сдвигается, анализирующее гармоническое заполнение «остаётся на месте» (см. рис. 8, з, д), иными словами, фаза заполнения все время непрерывно изменяется по мере сдвига окна вдоль оси времени. Оказывается удобным зафиксировать фазу заполнения

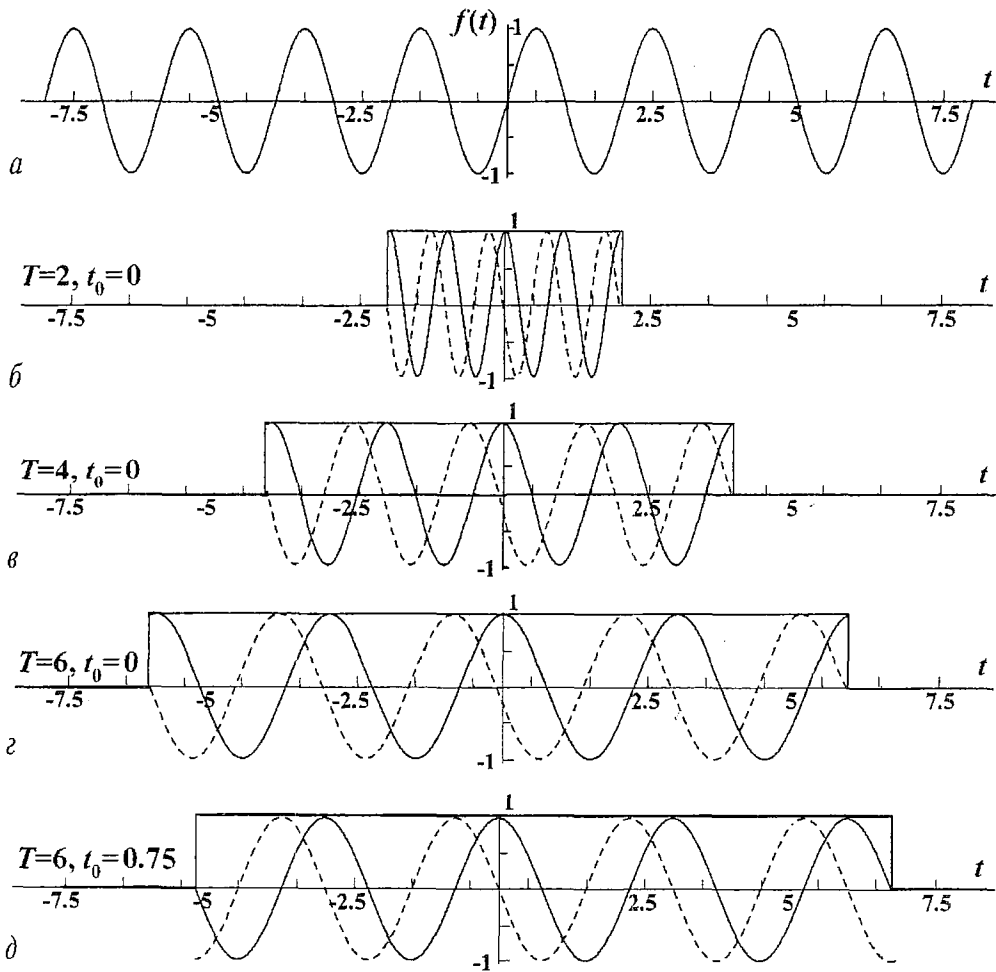


Рис. 8. а - временная реализация $f(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \pi$; б-д - несколько окон интегрирования различной ширины $2T$ с анализирующим заполнением $\exp(-i2\pi l t/T)$. Действительная часть заполнения показана сплошной линией, мнимая - пунктирной. Максимальное значение (ср. с рис. 7, а) $|S(T, t_0)|^2$ достигается при $T=4$ (в), когда частота заполнения $\exp(-i2\pi l t/T)$ совпадает с частотой сигнала $f(t)$. Рис. (з) и (д) иллюстрируют сдвиг окна интегрирования шириной $2T$ на величину, определяемую второй переменной t_0

относительно анализирующего окна, для чего следует модифицировать соотношение (5)

$$S(T, t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0+T} f(t) e^{-i2\pi n(t-t_0)T} dt. \quad (8)$$

Изменение фазы заполнения не оказывает влияния на величину $|S(T, t_0)|^2$, поскольку влияет только на аргумент комплексной функции $S(T, t_0)$. Для гармонического сигнала $f(t) = \sin(\omega t)$ соотношение (8) дает

$$S(T, t_0) = 2T \sin(\omega T) / (\omega^2 T^2 - 4\pi^2 n^2) [\omega T \sin(\omega t_0) - i2\pi n \cos(\omega t_0)]. \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что все различие между соотношениями (6) и (9) состоит лишь в множителе $\exp(-i2\pi n t_0/T)$.

В-третьих, необходимо обратить внимание на тот факт, что две гармоники исходного сигнала с различными частотами, но с одинаковой амплитудой, выделяются преобразованием (8) в виде двух максимумов различной высоты (рис. 9). Квадраты этих максимумов S_1 и S_2 соотносятся как

$$S_1^2/S_2^2 = (\omega_2/\omega_1)^2, \quad (10)$$

что следует из (7). Иными словами, чем больше частота гармоники, тем менее она заметна по сравнению с гармониками меньших частот. Из вышесказанного следует, что если в анализируемом сигнале присутствуют две гармоники с сильно различающимися частотами, то гармонику с большей частотой при анализе с помощью (8) можно просто не заметить, если не предпринять соответствующих мер.

Фактически преобразование (8) уже является вейвлетным преобразованием (с некоторыми поправками), к которому был осуществлен «плавный» переход от спектрального анализа. Заметим, что выражение (8) можно переписать в виде

$$S(T, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^*((t-t_0)/T) dt, \quad (11)$$

где $\psi(\xi)$ – анализирующая функция (рис. 10)

$$\psi(\xi) = [H(\xi+1) - H(\xi-1)] e^{i2\pi\xi}, \quad (12)$$

содержащая в себе все вышеописанные свойства (звездочка здесь и далее обозначает комплексное сопряжение).

Преобразование (11) осуществляется растяжением и сдвигом функции $\psi(\xi)$ так, как это было описано выше и показано на рис. 8. В этом случае величина T описывает растяжение, а t_0 – сдвиг анализирующей функции. Функция (12) является, с точностью до нормировочного коэффициента, «материнским вейвлетом» (mother wavelet), из которого получают все остальные вейвлеты других масштабов $\psi((t-t_0)/T)$ путем сдвига и расширения. Для удобства на материнский вейвлет накладывается условие единичной нормы в пространстве $L^2(\mathbb{R})$

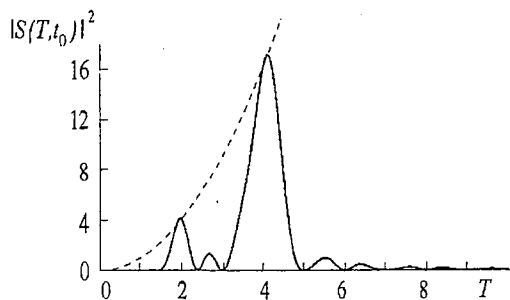


Рис. 9. Преобразование (8) для сигнала $f(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$, $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 = 2\pi$. Пунктирной линией нанесена парабола T^2 , характеризующая положение максимумов гармоник соответствующих частот и единичной амплитуды

$$\|\psi\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \psi^*(\xi) d\xi \right)^{1/2} = 1. \quad (13)$$

С учетом соотношения (13) рассматриваемый материнский вейвлет (будем обозначать его как ψ_0) имеет вид

$$\psi_0(\xi) = [H(\xi+1) - H(\xi-1)] e^{i2\pi\xi/2^{1/2}}. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что вейвлетные функции для других масштабов $\psi_0((t-t_0)/T)$, полученные «растяжением» и сдвигом материнского вейвлета ψ_0 , не удовлетворяют соотношению (13). Для того, чтобы оно выполнялось, необходимо на соответствующем временном масштабе T ввести корректирующий коэффициент, зависящий от этого масштаба. Тогда и в преобразовании (11) следует использовать не просто «растянутую» и «сдвинутую» функцию $\psi_0((t-t_0)/T)$, а с учетом масштабирующего коэффициента $T^{-1/2}$

$$\psi_{T,t_0}(t) = (1/T^{1/2}) \psi_0((t-t_0)/T). \quad (15)$$

Тогда преобразование (11) примет вид

$$S(T, t_0) = (1/T^{1/2}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^*((t-t_0)/T) dt. \quad (16)$$

Это соотношение и есть настоящее вейвлетное преобразование, как оно вводится в литературе (см., например, [4]). Единственное, что еще следует отметить, это обозначения. Поскольку изначальной отправной точкой было преобразование Фурье, то и вейвлетное преобразование, полученное с помощью плавного перехода и качественных рассуждений, также содержит те же самые обозначения. Но для вейвлетного преобразования традиционно принято обозначать временной масштаб через s (то есть $T \equiv s$), а само преобразование через $W(s, t_0)$ (хотя, справедливости ради, следует отметить, что встречаются и другие обозначения)

$$W(s, t_0) = (1/s^{1/2}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^*((t-t_0)/s) dt. \quad (17)$$

Таким образом, нам удалось осуществить плавный переход от преобразования Фурье к вейвлетному преобразованию так, чтобы была понятна суть и основная идея последнего. Фактически при вейвлетном преобразовании происходит разложение по другому функциональному базису, нежели функции \sin и \cos . В качестве базисных функций выступают вейвлеты ψ_{s,t_0} , получающиеся растяжением и сдвигом материнского вейвлета ψ_0 . Материнский вейвлет (14),

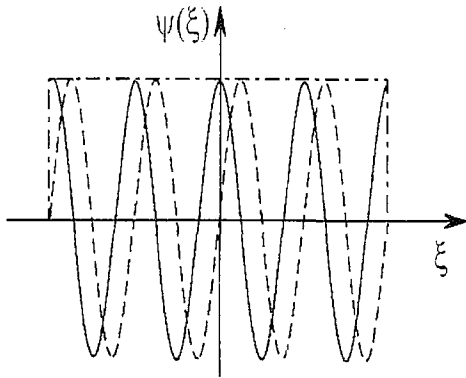


Рис. 10. Sin-вейвлет

полученный плавным переходом от фурье-преобразования, показан на рис. 10. Будем называть эту вейвлетную функцию Sin-вейвлетом. Этот вейвлет не имеет широкого применения на практике, и мы ввели его исключительно из методологических соображений. Однако важной отличительной чертой вейвлетного преобразования является тот факт, что в качестве материнского вейвлета может быть выбрана любая функция, удовлетворяющая определенным условиям, о которых речь пойдет ниже.

1.1. Базовые понятия и определения

Непрерывное вейвлетное преобразование осуществляется путем свертки

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{s, t_0}^*(t) dt \quad (1.1)$$

анализируемой функции $f(t)$ с двухпараметрической вейвлетной функцией $\psi_{s, t_0}(t)$, которая получается из материнского вейвлета $\psi_0(t)$,

$$\psi_{s, t_0}(t) = (1/s^{1/2})\psi_0((t-t_0)/s). \quad (1.2)$$

Параметр s , называемый масштабом вейвлетного преобразования ($s \in \mathbb{R}^+$), отвечает за ширину вейвлета, а $t_0 \in \mathbb{R}$ – параметр сдвига, определяющий положение вейвлета на оси t . Множитель $1/s^{1/2}$ в соотношении (1.2) введен для того, чтобы все вейвлетные функции ψ_{s, t_0} имели постоянную (единичную) норму в пространстве $L^2(\mathbb{R})$

$$\|\psi_{s, t_0}\|_{L^2} = \|\psi_0\|_{L^2} = 1, \quad (1.3)$$

где норма пространства $L^2(\mathbb{R})$ определяется как

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f^*(x) dx \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Отметим, что выполнение условия (1.3), в силу теоремы Парсеваля, приводит к

$$1/(2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\omega) \hat{\psi}^*(\omega) d\omega = 1, \quad (1.5)$$

где $\hat{\psi}(\omega)$ – фурье-образ вейвлетной функции.

Материнский вейвлет может быть выбран достаточно произвольно (например, так, как это было сделано во введении), однако при этом он должен удовлетворять ряду условий [1].

Условие локализации. Базисная вейвлетная функция (материнский вейвлет) ψ_0 должна быть локализована как во временном, так и в частотном представлении. Для этого необходимо, чтобы ψ_0 была задана на конечном интервале и обладала достаточной регулярностью.

Условие допустимости. Материнский вейвлет должен быть выбран таким образом, чтобы его фурье-образ $\hat{\psi}_0(\omega)$ удовлетворял условию

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [|\hat{\psi}_0(\omega)|^2 / |\omega|] d\omega < \infty. \quad (1.6)$$

Отметим, что для практического применения часто достаточно рассмотрения только положительных частот (следствие разумного условия $s > 0$), поэтому материнский вейвлет должен удовлетворять соотношению

$$C_\psi = 2 \cdot 2\pi \int_0^{+\infty} [|\hat{\psi}_0(\omega)|^2 / \omega] d\omega = 2 \cdot 2\pi \int_0^{+\infty} [|\hat{\psi}_0(-\omega)|^2 / \omega] d\omega < \infty. \quad (1.7)$$

Подчеркнем также, что для всех практических целей условие (1.6) эквивалентно требованию нулевого среднего

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(t) dt = 0 \quad (1.8)$$

или

$$\hat{\psi}_0(\omega) = 0, \quad (1.9)$$

что следует из соотношения (1.6).

Иногда бывает необходимым, чтобы не только нулевой момент (1.8) обращался в ноль, но и все первые m моментов были равны нулю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^m \psi_0(t) dt = 0. \quad (1.10)$$

Такие вейвлеты (вейвлеты m -го порядка) позволяют анализировать мелко-масштабные флуктуации и особенности высокого порядка, игнорируя при этом наиболее регулярные (полиномиальные) составляющие сигнала. В этом случае коэффициенты вейвлетного преобразования будут малы в областях, где функция имеет гладкость до порядка обращающихся в ноль моментов, и вейвлетное преобразование будет реагировать только на изменения функции высокого порядка. Действительно, раскладывая в вейвлетном преобразовании (17) функцию $f(t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки t_0 , получим

$$W(s, t_0) = 1/s^{1/2} [f(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^*((t-t_0)/s) dt + f'(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_0) \psi_0^*((t-t_0)/s) dt + \dots + f^{(n)}(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_0)^n \psi_0^*((t-t_0)/s) dt + \dots] \quad (1.11)$$

В этом случае первые m слагаемых соотношения (1.11) в силу (1.10) обращаются в ноль, и существенное влияние оказывают изменения высоких порядков. Заметим, что для практических целей иногда оказывается достаточным, чтобы условие (1.10) выполнялось приблизительно.

Наконец, следует упомянуть еще **условие ограниченности**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(t)|^2 dt < \infty. \quad (1.12)$$

В качестве оценки хорошей локализации и ограниченности могут служить соотношения $|\psi_0(t)| < 1/(1+|t|^n)$ или $|\hat{\psi}_0(\omega)| < 1/(1+|\omega-\omega_0|^n)$, где ω_0 – доминантная частота вейвлета, а величина параметра n должна быть как можно больше [1].

В том случае, если условие допустимости (1.6) выполняется, существует обратное вейвлетное преобразование

$$f(t) = (1/C_\psi) \int_0^{+\infty} (1/s^{5/2}) ds \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0((t-t_0)/s) W(s, t_0) dt_0. \quad (1.13)$$

Конкретный выбор анализирующего материнского вейвлета определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из сигнала. Каждая базовая вейвлетная функция характеризуется различными свойствами, что позволяет, используя разные вейвлетные функции, выявить все особенности анализируемого сигнала $f(t)$.

Одним из наиболее часто используемых комплексных материнских вейвлетов является морлет-вейвлет [20]

$$\psi_0(\eta) = \pi^{-1/4} \exp(j\omega_0 \eta) \exp(-\eta^2/2), \quad (1.14)$$

где ω_0 – параметр вейвлета. Обычно рассматривается морлет-вейвлет с параметром $\omega_0=6$. Он обладает базисом, хорошо локализованным в реальном пространстве и фурье-пространстве. Причем с увеличением ω_0 растет разрешение

в фурье–пространстве, но ухудшается локализация во времени. Морлет–вейвлет фактически является аналогом Sin–вейвлета, рассмотренного во введении. Морлет–вейвлет представляет собой синусоидальную функцию, модулированную функцией Гаусса, а Sin–вейвлет – прямоугольным импульсом.

Другим комплексным вейвлетом является вейвлет Паула [21]

$$\psi_0(\eta) = \{2^m j^m m! / [\pi(2m!)]^{1/2}\} (1-j\eta)^{-m+1}, \quad (1.15)$$

где m – порядок вейвлета. В данной работе мы будем часто обращаться к вейвлету Паула порядка $m=4$.

В качестве действительных базовых вейвлетных функций широко используется семейство DOG–вейвлетов [22], которые конструируются на базе производных функции Гаусса,

$$\psi_0(\eta) = (-1)^{m+1} / [\Gamma(m+1/2)]^{1/2} d^m/d\eta^m \exp(-\eta^2/2). \quad (1.16)$$

Материнский вейвлет, соответствующий $m=1$, называется WAVE–вейвлетом; $m=2$ – МНАТ–вейвлетом (Mexican Hat – «Мексиканская шляпа»).

Существуют и другие базовые вейвлетные функции, которые применяются для различных приложений. В работах [23–26] представлены другие примеры материнских вейвлетов, а также способы их конструирования.

По аналогии со спектром мощности Фурье преобразования $P(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$ можно ввести в рассмотрение мгновенное

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2 \quad (1.17)$$

и интегральное распределения энергии по масштабам вейвлетного преобразования

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0. \quad (1.18)$$

Интегральное распределение энергии по масштабам для вейвлетного преобразования связано с фурье–спектром мощности соотношением вида

$$\langle E(s) \rangle \sim s \int P(\omega) |\hat{\psi}_0(s\omega)|^2 d\omega. \quad (1.19)$$

Из соотношения (1.19) следует, что распределение энергии по масштабам $\langle E(s) \rangle$ представляет собой сглаженный спектр мощности фурье–преобразования, причем характер сглаживания определяется фурье–образом материнского вейвлета ψ_0 .

Как нами обсуждалось во введении, для получения точной информации о высокочастотных гармониках исследуемого сигнала с высокой разрешающей способностью во времени нам необходимо извлекать ее из коротких временных интервалов, а не из всего сигнала, в то время как, информацию о низкочастотной части спектра необходимо получать, анализируя достаточно длительные интервалы времени. На рис. 1.1 иллюстрируются возможности частотно–временной локализации различных преобразований. На рис. 1.1, а показана схема разбиения фазового пространства (t, ω) для выборки дискретных значений сигнала, где в качестве базисной функции служит δ –функция (преобразование Шеннона). В этом случае получаем, что сигнал оказывается хорошо локализован во времени и совершенно не разрешен по частоте. Из рис. 1.1, б, соответствующего преобразованию Фурье, видно, что мы имеем хорошее разрешение по частоте и не имеем локализации во времени. Рис. 1.1, в соответствует оконному преобразованию Фурье. Из рисунка понятно, что в данном случае временное

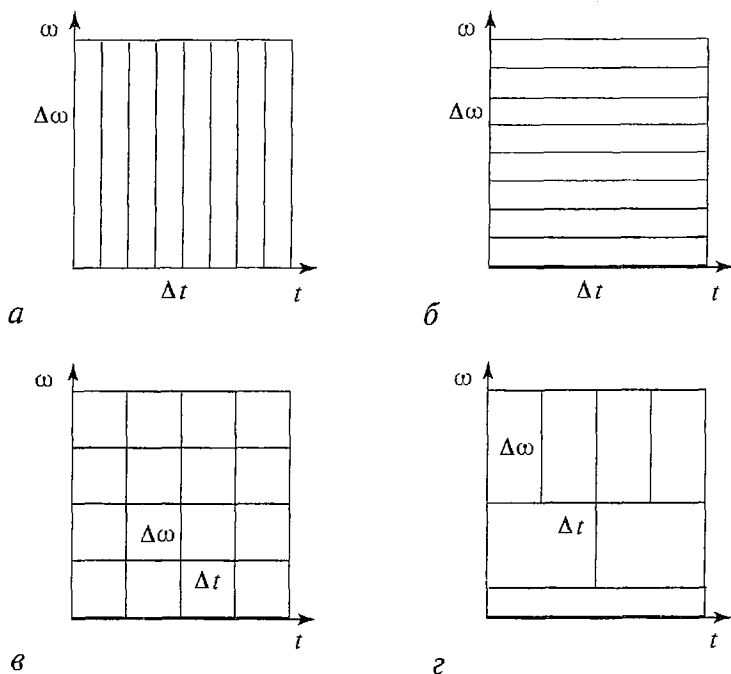


Рис. 1.1. Частотно–временная локализация в фазовом пространстве (t, ω) для различных преобразований: *a* – дискретная выборка (преобразование Шеннона), *б* – преобразование Фурье, *в* – оконное фурье–преобразование, *г* – вейвлетное преобразование

разрешение на больших и малых масштабах постоянно и определяется размером окна. В случае же вейвлетного преобразования базисные функции имеют уменьшающееся с увеличением масштаба s временное разрешение (определяемое шириной вейвлетной функции $\psi(t/s)$) и увеличивающееся с масштабом разрешение по частоте (определяемое шириной фурье–образа вейвлетной функции $\hat{\psi}(s\omega)$), что дает хорошую временную локализацию на малых масштабах и хорошее частотное разрешение при больших масштабах (рис. 1.1, г).

Основным свойством вейвлетного преобразования, принципиальным для анализа сложных нестационарных процессов, является способность сохранять локальность представления сигнала и, как следствие, локально реконструировать сигнал. Существует возможность выделить вклад определенного масштаба в тот или иной момент времени или реконструировать только часть сигнала. Фактически имеет место связь между локальным поведением сигнала и локальным поведением его вейвлет–коэффициентов. Под локальностью понимается то, что для реконструкции части сигнала необходимо рассматривать вейвлет–коэффициенты, относящиеся только к подобласти вейвлетного пространства (рис. 1.2, а), так называемого угла влияния. Заметим, что, в свою очередь, коэффициент $W(s, t_0)$ в точке (t'_0, s') зависит от значений ряда из определяемого тем же углом влияния временного диапазона около значения t'_0 (рис. 1.2, б). Диапазон этот тем больше, чем больше анализируемый масштаб s' , то есть высокочастотная (или, что то же самое, мелкомасштабная) информация вычисляется на основе малых по длительности отрезков сигнала, а низкочастотная – больших.

Например, если функция $f(x)$ локально гладкая, то соответствующие вейвлет–коэффициенты остаются малыми. Если же $f(x)$ содержит сингулярность, тогда в ее окрестности амплитуда вейвлет–коэффициентов существенно

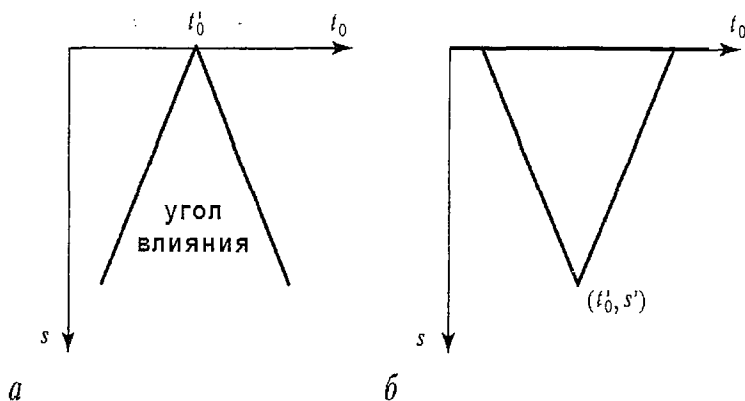


Рис. 1.2. Угол влияния вейвлетного преобразования

возрастает. Если вейвлет–коэффициенты подвержены случайным ошибкам, то они будут действовать на реконструируемый сигнал только локально вблизи возмущения, в то время как преобразование Фурье будет распространять ошибки по всему реконструируемому сигналу.

1.2. Численная реализация вейвлетного преобразования

Рассмотрим теперь численную реализацию процедуры вейвлетного преобразования какой-либо величины, ведущей себя нестационарным образом во времени. При численном анализе мы имеем дело с временной реализацией интересующей нас величины, заданной в дискретные моменты времени. Будем рассматривать случай, когда значения величины заданы через равные интервалы времени². Тогда для проведения вейвлетного анализа мы располагаем временным рядом величины $\{x\}$, где каждое из значений x_n задано с одинаковым временным интервалом Δt , $n=0, \dots, N-1$, N – число отсчетов в нашем ряду.

Непрерывное вейвлетное преобразование некоторой дискретной последовательности $\{x\}$ определяется как свертка этой последовательности $\{x\}$ и базисной вейвлетной функции $\psi(\eta)$ (1.1), которая соответствующим образом перенормируется с масштабом s и сдвигается по временной шкале на интервал $n\Delta t$,

$$W(n,s) = \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} \psi^*((n'-n)\Delta t/s). \quad (1.20)$$

Тогда, изменяя масштабный коэффициент s и величину сдвига во времени вейвлетной функции $n\Delta t$, можно восстановить и локализовать динамику любых особенностей процесса $\{x\}$ в пространстве масштабов s , то есть определить как мгновенную амплитуду колебаний на данном временном масштабе, так и особенности динамики каждого из масштабов с течением времени.

² Это наиболее типичный случай, встречающийся при анализе данных в приложениях теории колебаний и волн. Вместе с тем можно предположить ситуацию, когда данные могут задаваться в «случайные» моменты времени. Например, временная реализация, составленная из цен продажи акций на бирже с учетом не усредненных цен, а непосредственно стоимости каждой сделки, будет именно таким рядом, так как время совершения операции купли–продажи произвольно. Для таких рядов развитый здесь метод не может быть применен, и в этом случае необходимо пользоваться расчетом вейвлетного преобразования непосредственно, исходя из определения (см. формулу (1.1)).

Расчет вейвлетного преобразования с непосредственным использованием соотношения (1.20) не является оптимальным за исключением случая, упоминаемого в сноске 2. Процесс расчета может быть существенно ускорен (то есть может быть уменьшено число машинных операций, которые необходимо выполнить), если перейти от представления вейвлетного преобразования (1.20) к выражению его через фурье-образы исходного сигнала \hat{x}_k и вейвлетной функции $\hat{\psi}$ [3,18].

Для записи непрерывного вейвлетного преобразования в фурье-пространстве процедура (1.20) должна быть проделана N раз для каждого значения масштаба s , где N – число точек временной реализации. Если предположить, что $\{x\}$ – комплексная последовательность, а вейвлетная функция заранее вычислена во всем интересующем нас диапазоне значений³, то в этом случае требуется совершить $\mathcal{L} \cdot 8N^3 + O(N)$ арифметических операций, здесь \mathcal{L} – число масштабов s , на которых осуществляется расчет выражения (1.20). Действительно, в каждой точке дискретного пространства (n,s) , размерность которого $N \cdot \mathcal{L}$, требуется в соответствии с (1.20) совершить N комплексных умножений (по 6 арифметических операций) и $N-1$ комплексное сложение (2 арифметические операции).

Теорема о свертке позволяет нам при данном масштабе s одновременно найти все значения $W(n,s)$ в фурье-представлении ($0 < n < N-1$), используя дискретное преобразование Фурье. Для последовательности x_n дискретное преобразование Фурье выражается как

$$\hat{x}_k = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi jkn/N}, \quad (1.21)$$

где $k \cdot \Delta t^{-1} = (0, \dots, (N-1)\Delta t^{-1})$ образует последовательность частот исходного сигнала x_n , заданного последовательностью N значений с временным интервалом Δt . Очевидно, что в пределе при использовании непрерывного фурье-преобразования функция $\psi(t/s)$ будет иметь фурье-образ вида

$$\hat{\psi}(s\omega) = 1/(2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t/s) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.22)$$

то есть перенормировка вейвлетной функции в фурье-пространстве учитывается умножением частоты на масштабный множитель s . Аналогичное выражение можно записать, применяя дискретное фурье-преобразование

$$\hat{\psi}(ks) = (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} \psi(n/s) e^{-2\pi jkn/N}, \quad (1.23)$$

но в случае, когда фурье-образ вейвлетной функции может быть найден аналитически, более естественна запись в виде (1.22).

Тогда в фурье-пространстве вейвлетное преобразование записывается как простое умножение фурье-образа сигнала \hat{x} на комплексно сопряженный фурье-образ вейвлетной функции $\hat{\psi}^*$, а выражение для вейвлетного преобразования $W(n,s)$ может быть получено с помощью обратного фурье-преобразования

$$W(n,s) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \hat{\psi}^*(s\omega_k) e^{j\omega_k n \Delta t}, \quad (1.24)$$

³ Предварительное вычисление вейвлетной функции уменьшает время расчета, что является важным, учитывая сложный вид вейвлетной функции. Но это одновременно, во-первых, требует интерполяции значений функции ψ , что снижает точность вычислений и также требует затрат машинного времени, и во-вторых, увеличивает объем необходимой машинной памяти.

где частота ω_k дается выражением вида

$$\omega_k = \begin{cases} 2\pi k/(N\Delta t), & \text{при } k \leq N/2, \\ -2\pi k/(N\Delta t), & \text{при } k > N/2. \end{cases} \quad (1.25)$$

Тогда, учитывая выражение (1.24), можно одновременно для всех значений n найти непрерывное вейвлетное преобразование $W(n,s)$ при данном масштабе s , применяя для нахождения сумм в уравнениях (1.21), (1.24) процедуру быстрого преобразования Фурье (БПФ). Как хорошо известно [27], применение процедуры БПФ требует для расчета сумм вида (1.21) или (1.24) всего $M \log_2 N$ операций. Тогда для расчета вейвлетного преобразования $W(n,s)$ по всем рассматриваемым

масштабам s , если не учитывать затраты на нахождение фурье-образа сигнала \hat{x} (его, очевидно, достаточно найти только один раз), требуется только $\mathcal{L} \cdot M \log_2 N$ операций, что при больших N существенно меньше, чем при реализации вейвлетного преобразования непосредственно с использованием определения (1.20).

Вместе с тем, использование для вычисления вейвлетного преобразования представление сигнала и вейвлетной функции в фурье-пространстве, и, в частности, использование для ускорения расчетов процедуры БПФ, накладывает ряд требований на реализацию процедуры расчета. Рассмотрим эти требования более подробно.

1.2.1. Нормировка вейвлетной функции. Для корректного сравнения и анализа результатов вейвлетного преобразования временных реализаций различных сигналов и даже одного сигнала на различных масштабах s при использовании спектрального представления сигнала \hat{x} и базисной вейвлетной функции $\hat{\psi}$ требуется осуществление процедуры нормализации функции ψ на каждом из масштабов s . Данная процедура сводится к получению единичной энергии на каждом масштабе

$$\hat{\psi}(s\omega_k) = [2\pi s/\Delta t]^{1/2} \hat{\psi}_0(s\omega_k). \quad (1.26)$$

Представление различных базовых вейвлетных функций $\psi_0(\eta)$, их фурье-образы и ряд других характеристик приведены в табл. 1.1 и, соответственно, на рис. 1.3. Постоянный множитель каждой из базисных вейвлетных функций выбран так, чтобы обеспечить выполнение условия нормировки, то есть получения единичной энергии,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}_0(\omega)|^2 d\omega = 1. \quad (1.27)$$

Используя такую нормировку, на каждой шкале s , если учесть выражения (1.25) и (1.26), получаем

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{\psi}(s\omega_k)|^2 = N, \quad (1.28)$$

где N – число отсчетов временной организации. Отсюда видно, что вейвлетное преобразование определяется амплитудой фурье-гармоник \hat{x}_k , и не зависит от соответствующих фурье-коэффициентов базисной вейвлетной функции.

При использовании для вычисления вейвлетного преобразования непосредственно выражения (1.20), учитывая определение фурье-преобразования и сравнивая с (1.26), нормализация вейвлетной функции для различных масштабов запишется как

$$\psi((n'-n)\Delta t/s) = (\Delta t/s)^{1/2} \hat{\psi}_0((n'-n)\Delta t/s), \quad (1.29)$$

где $\psi_0(\eta)$ – вейвлетная функция, норма которой

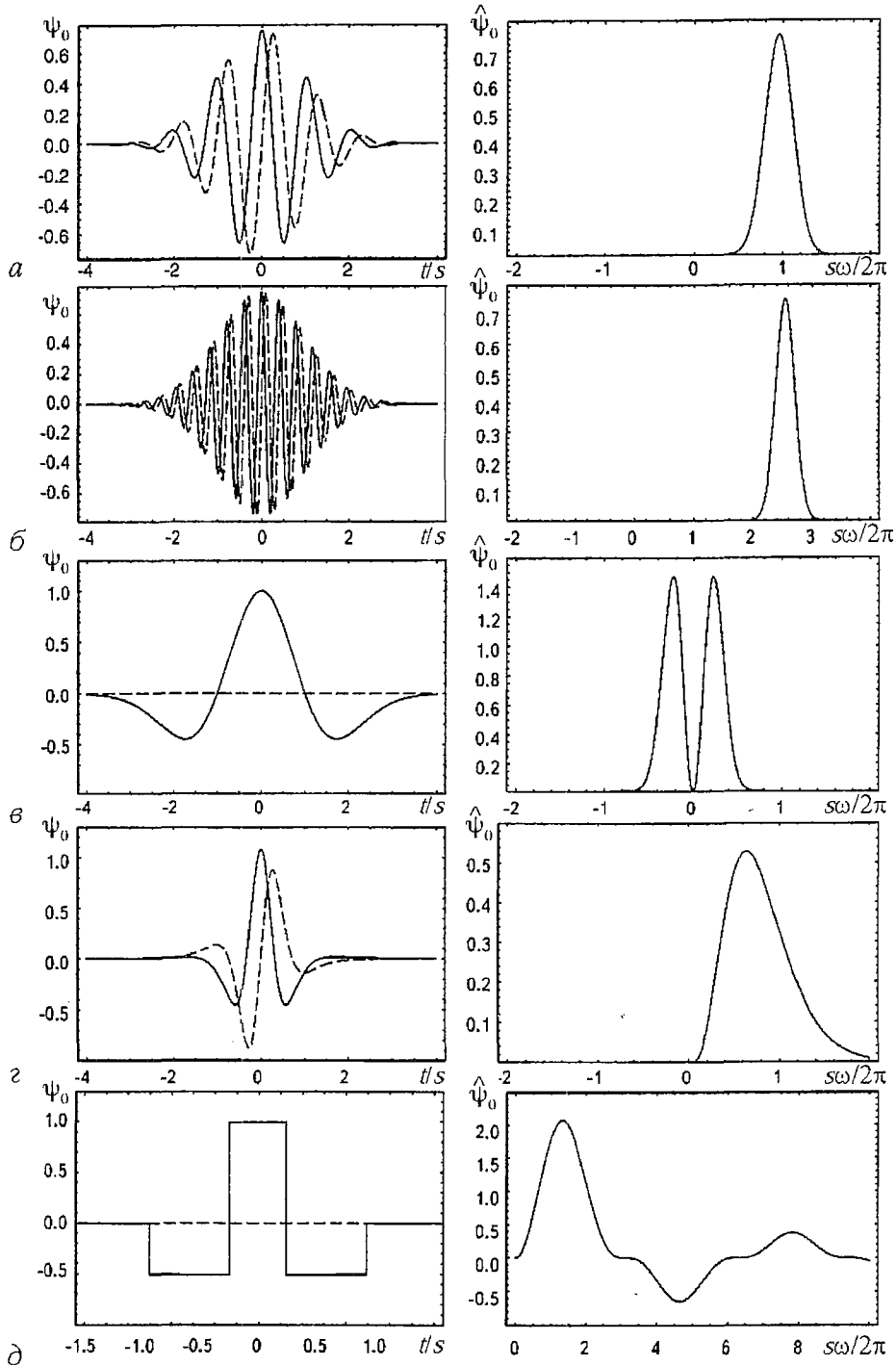


рис. 1.5. типы оазисных вейвлетных функции. на рисунке представлены действительные (сплошная линия) и мнимые (штриховая линия) части базисных вейвлетных функций (левый столбец) и их фурье-образы (правый столбец): а – морлет-вейвлет с $\omega_0=6$; б – морлет-вейвлет с $\omega_0=16$; в – МНАТ-вейвлет (DOG-вейвлет с $m=2$); г – вейвлет Паула с $m=4$; д – ФНАТ-вейвлет

Некоторые вейвлетные базисные функции и их свойства

Вейвлет	$\psi_0(\eta)$	$\hat{\psi}_0(s\omega)$	τ_s	Λ
Морлет	$\pi^{-1/4} e^{j\omega_0 \eta} e^{-\eta^2/2}$	$\pi^{-1/4} H(\omega) e^{(s\omega - \omega_0)^2/2}$	$2^{1/2} s$	$\frac{4\pi s}{\omega_0 + (2 + \omega_0^2)^{1/2}}$
DOG	$\frac{(-1)^{m+1}}{[\Gamma(m+1/2)]^{1/2}} \frac{d^m e^{-\eta^2/2}}{d\eta^m}$	$\frac{j^m}{[\Gamma(m+1/2)]^{1/2}} (s\omega)^m e^{-(s\omega)^2/2}$	$2^{1/2} s$	$\frac{2\pi s}{(m+1/2)^{1/2}}$
Паул	$\frac{2^m j^m m!}{[\pi(2m!)]^{1/2}} (1-j\eta)^{-(m+1)}$	$\frac{2^m}{[m(2m-1)]^{1/2}} H(\omega) (s\omega)^m e^{-s\omega}$	$2^{-1/2} s$	$\frac{4\pi s}{(2m+1)}$
ФАТ	$1, \quad \eta < 1/3,$ $1/2, \quad 1/3 < \eta \leq 1,$ $0, \quad \eta > 1,$	$3H(s\omega) \left[\frac{\sin s\omega}{s\omega} - \frac{\sin 3s\omega}{3s\omega} \right]$		$1.33s$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(\eta)|^2 d\eta = 1, \quad (1.30)$$

то есть вейвлетная функция ψ_0 имеет единичную энергию.

1.2.2. Выбор набора временных масштабов, по которому производится вейвлетное преобразование. Важным аспектом расчета вейвлетного преобразования является выбор набора временных масштабов $\{s\}$, используемого при расчете поверхности $W(n,s)$ (1.24).

При использовании в качестве базисной вейвлетной функции ортогонального вейвлета выбор множества масштабов $\{s\}$ ограничен фиксированным конечным дискретным набором шкал [3].

Для неортогональных вейвлетных базисных функций набор $\{s\}$ может быть выбран произвольно из соображений получения более полной информации для анализа поверхности $W(n,s)$. Наиболее удобным является запись набора масштабов s_l как степеней двойки

$$s_l = s_0 2^{l\Delta s}, \quad l = 0, \dots, L, \quad L = \log_2(N\Delta t/s_0)/\Delta s. \quad (1.31)$$

Здесь s_0 – минимальный разрешаемый при вейвлетном преобразовании временной масштаб; s_L – наибольший масштаб, на котором производится анализ; L – число масштабов, используемых при расчете вейвлетного спектра. Минимальный масштаб s_0 должен быть выбран таким, чтобы эквивалентный этому масштабу фурье–период был порядка $2\Delta t$ (см. ниже). Оптимальный выбор величины Δs определяется в первую очередь шириной $\hat{\Delta\psi}$ фурье–образа базисной вейвлетной функции $\hat{\psi}$. При выборе величины Δs большей, чем ширина $\hat{\psi}$ в фурье–пространстве мы получим плохое разрешение вейвлетного преобразования по масштабам: часть масштабов окажется исключенной из рассмотрения. И

наоборот, выбор величины $\Delta s \leq \hat{\psi}$, благодаря конечной ширине вейвлетной функции в фурье-пространстве, практически не повысит «разрешающей способности» вейвлетного преобразования, а лишь увеличит необходимое время счета.

Например, для уже обсуждаемого морлет-вейвлета с $\omega_0 = 6$ максимальное значение $(\Delta s)_{\max}$, которое обеспечивает приемлемое для практических целей разрешение, примерно равно 0.5. Для других базисных вейвлетных функций (например, паул-вейвлета) максимальное значение Δs может быть увеличено, $\Delta s \approx 1.0$. Очевидно, что выбор величин $\Delta s < (\Delta s)_{\max}$ будет приводить к улучшению разрешения по временным масштабам вейвлетного преобразования.

1.2.3. Длина временной реализации. Применение для расчета вейвлетного преобразования в соответствии с соотношениями (1.24) и (1.24) процедуры БПФ накладывает ограничения на длину N анализируемой временной реализации x_n . Величина N для удовлетворения условиям процедуры должна обязательно являться степенью 2, $N = 2^p$.

Обычно получить временную реализацию с числом отсчетов, удовлетворяющих этому требованию, не составляет особых сложностей. Однако возможны ситуации, когда число доступных отсчетов временной реализации фиксировано и не может быть легко увеличено (например, климатические или геологические данные). Если длина такой временной реализации порядка (но несколько меньше) 2^p , то свойства вейвлетного преобразования позволяют достаточно эффективно провести анализ такой реализации не по длине 2^{p-1} , а по длине 2^p путем формирования суррогатной временной реализации, в которой первые и последние $(2^p - N)/2$ отсчетов заполнены постоянными величинами,

например, средними значениями исходной временной реализации $\bar{x} = \sum x_n / N$ или нулями. В этом случае при вейвлетном анализе мы лишь получим соответствующее расширение области влияния краевых эффектов на вейвлетный спектр на плоскости (n, s) (см. следующий пункт).

1.2.4. Область влияния краевых условий. Осуществление вейвлетного преобразования конечной временной реализации приводит к тому, что вблизи границ вейвлет-спектра по оси абсцисс n ($n=0$ и $n=N-1$) появляются ошибки в расчетах функции $W(n, s)$, так как использование фурье-преобразования (1.24) предполагает, что данные (x) периодичны и имеют период длиной N . Качественно наличие области, в которой результаты расчета вейвлет-спектра неверны, может быть объяснено тем, что вейвлетная функция $\psi((n'-n)\Delta t/s)$ на данном конкретном масштабе s при приближении к границе начинает выходить за пределы рабочей области, и расчет значений $W(n, s)$ вблизи границ становится некорректным. Отсюда очевидно, что область влияния краевых эффектов должна сужаться с уменьшением временных масштабов s .

Одним из решений данной проблемы⁴ [3,18] является создание новой временной реализации x'_n длиной $2N$, в которой первые N отсчетов соответствуют исходному сигналу x_n , а следующие N позиций начиная с $n=N$ заполняются нулями. Вейвлетное преобразование (1.24) производится над новой суррогатной временной реализацией x'_n . Так как $N=2^p$, то при расчете получающихся в результате фурье-преобразования сумм можно опять воспользоваться процедурой БПФ, но теперь уже для работы с рядом длиной 2^{p+1} . Такая методика уменьшает влияние краевых

⁴ Существуют и другие методы понижения влияния краевых эффектов (см., например, [28]).

эффектов и одновременно является достаточно быстрой благодаря возможности использовать технику БПФ⁵.

Использование заполненной на половину нулями суррогатной временной реализации x'_n при вейвлетном анализе приводит к появлению сильной неоднородности на границах исходного временного ряда x_n . Однако благодаря тому, что суррогатный временной ряд наполовину заполнен постоянной во времени величиной (нулями), возмущения, вносимые этой неоднородностью, лежат в области очень больших временных масштабов, в то время как спектр исходной неоднородности (которая формально существенно меньше внесенной) лежал бы в области масштабов анализируемого сигнала. Так что внесение такой неоднородности приводит к уменьшению амплитуды W около границ исходного ряда. Очевидно, чем больше будет длина той части суррогатного ряда, которая заполнена нулями, тем меньше влияние краевых эффектов. Использование для анализа ряда, в котором длина последовательности нулей равна длине исходного сигнала, видимо, является оптимальной в смысле баланса скорости вычислений, затрат машинной памяти и точности осуществления вейвлетного преобразования вблизи границ исходного временного ряда.

Под областью влияния краевых условий будем понимать область вейвлет-спектра $W(n,s)$ на плоскости (n,s) , где краевые эффекты становятся важными и ими уже нельзя пренебречь. Следуя работе Christopher Torrence и Gilbert Compo [3], определим область влияния краевых эффектов через эффективную ширину τ_s автокорреляционной функции, рассчитанной по мощности вейвлетного преобразования, на каждом из временных масштабов s . Величина τ_s выбирается так, что она соответствует такому смещению относительно границы, что мощность вейвлетного преобразования ряда с краевой неоднородностью спадает в логарифмической шкале в 2 раза⁶. Такой выбор границы области влияния краевых эффектов гарантирует нам, что краевые эффекты пренебрежимо малы уже на временах $(N-n)dt > \tau_s$ и $ndt > \tau_s$ на соответствующих масштабах s .

Заметим также, что размер τ_s области влияния краевых эффектов оценивает характерное время влияния на форму вейвлетного спектра мощности единичного, большой амплитуды выброса (пика) на временной реализации процесса. Исследуя характерную ширину пика в спектре мощности вейвлетного преобразования, можно отличить «быстрый», большой амплитуды выброс на временной реализации (появление которого может быть связано, например, со случайными шумовыми процессами в исследуемой системе) от постоянной гармонической компоненты с эквивалентным фурье-периодом.

1.2.5. Соотношение между масштабами вейвлетного преобразования и частотами гармонического анализа. Из анализа рис. 1.3 видно, что максимум

фурье-образа базовой вейвлетной функции $\hat{\psi}(s\omega)$ не приходится на частоту $1/s$, то есть в общем случае не существует равенства между длинами волн Λ фурье-преобразования и масштабами s вейвлетного анализа, причем для каждой базисной вейвлетной функции вид зависимости $\Lambda(s)$ свой собственный (см. табл. 1.1). Используя приведенные данные можно проанализировать соотношение между фурье-периодом и масштабами вейвлетного преобразования различных типов вейвлетов. Так для морлет-вейвлета с частотой заполнения $\omega_0=6$ имеем $\Lambda=1.03s$

⁵ Если N длина исходной временной реализации, требуется всего $\mathcal{O}(2N(1+\log_2 N))$ арифметических операций для осуществления вейвлетного преобразования с использованием данной методики уменьшения влияния краевых эффектов.

⁶ Это соответствует уменьшению мощности в линейной шкале в e^2 раз.

или $s \cong \Lambda$, то есть в данном частном случае масштаб вейвлетного преобразования практически эквивалентен фурье–периоду.

Однако, уже для морлет–вейвлета с $\omega_0=16$ масштабы соотносятся с длиной волны Λ как $s=2.5527\Lambda$. Для МНАТ–вейвлета фурье–период примерно в 4 раза больше, чем масштаб вейвлетного преобразования ($s=0.2518\Lambda$), для вейвлета Паула с $m=4$, как несложно видеть, $s=0.7166\Lambda$. Очевидно, что вид этих соотношений не имеет глубокого физического смысла, но их надо обязательно учитывать при сравнении и анализе результатов фурье–преобразования и вейвлетного преобразования с различными базовыми вейвлетными функциями⁷.

Вид соотношений между величинами s и Λ может быть легко найден либо аналитически, путем подстановки в выражение (1.24) гармонической функции с известной частотой и вычислении соответствующего ей масштаба s , определяемого по максимуму спектра мощности вейвлетного преобразования, либо численно, с единственным отличием, что спектр мощности вейвлетного преобразования в этом случае рассчитывается по вышеизложенной методике.

Текст процедуры, осуществляющей вейвлетное преобразование, приведен в Приложении.

1.3. Применение вейвлетного преобразования к модельным сигналам

Вейвлетный спектр $W(t_0, s) = |W(t_0, s)| \exp(-j\phi_W(t_0, s))$ одномерного сигнала представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Способы визуализации и представления этой информации могут быть различными. Обычно вместо изображения поверхностей пользуются представлением их в виде проекций на плоскость (t_0, s) с изолиниями или изоуровнями, позволяющими проследить изменение интенсивности амплитуды $|W|$ и эволюцию фазы ϕ_W вейвлетного преобразования на разных масштабах и во времени. Также достаточно информативными оказывается рассмотрение распределения энергии по масштабам $E(s)$ (1.18).

На приведенных в работе иллюстрациях результатов применения вейвлетного преобразования интенсивность окраски на проекциях амплитуды вейвлетного преобразования пропорциональна абсолютной величине коэффициентов $|W(t_0, s)|$. На проекциях фазы вейвлетного преобразования интенсивность окраски строится так, что белый цвет соответствует фазе $\phi_W=0$, далее с ростом фазы окраска темнеет и достигает самого темного значения при $\phi_W=\pi$, а при дальнейшем увеличении фазы интенсивность окраски уменьшается и становится опять белой при $\phi_W=2\pi$. Такое построение интенсивности окраски в зависимости от величины ϕ_W связано с тем, что фаза есть 2π –периодическая функция, поэтому окраска точек (t_0, s) проекции, где фаза $\phi_W(t_0, s)$ равна ϕ_0+0 и $\phi_0+2\pi$ не должны различаться.

По вертикальной оси s (или $f_s=1/s$) выбирается, если не оговаривается особо, логарифмический масштаб, который позволяет представить результаты вейвлетного преобразования в достаточно широком диапазоне масштабов. U –образная кривая на проекциях вейвлетных поверхностей выделяет область влияния краевых условий.

Рассмотрим применение непрерывного вейвлетного преобразования к ряду модельных сигналов, которые имеют особенности, встречающиеся в сигналах, характеризующих реальные процессы в нелинейных динамических системах.

⁷ В первую очередь это касается спектров мощности, даваемых вейвлетными преобразованиями с различными видами базовой функции.

1.3.1. Гармонический сигнал. На рис. 1.4 показаны результаты применения вейвлетного преобразования с базовым морлет–вейвлетом с параметром $\omega_0=6$, с МНАТ–вейвлетом и с паул–вейвлетом к сигналу

$$f(t) = \sin(2\pi f_0 t), \quad t = n\Delta t, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.32)$$

Здесь частота $f_0=5.0$. Проекция поверхности амплитуды коэффициентов вейвлетного преобразования $|W(t_0, s)|$ гармонического сигнала, построенного с помощью морлет–вейвлета, представляет собой неизменяющуюся с параметром t_0 картину. Интегральное распределение энергии по масштабам $f_s=1/s$ в данном случае имеет один максимум, который соответствует частоте $f_s=f_0/1.03$. Ширина распределения энергии по масштабам больше, чем ширина фурье–спектра мощности, что связано с меньшим разрешением вейвлетного преобразования по масштабам. Из рисунка видно, что вейвлетное преобразование (для примера, с морлет–вейвлетом ($\omega_0=6$)) не сможет различить на масштабах $s \approx 0.2$ частоты, которые отличаются на величину $\Delta f_s \approx 1.5$. Данное значение Δf_s определяется по ширине зависимости $\langle E(f_s) \rangle$ на половинном уровне мощности (см. рис. 1.4, в). Одновременно фурье–анализ позволяет разрешить частоту с существенно меньшим Δf . При этом важным моментом является то, что при увеличении длительности анализируемой временной реализации сигнала разрешение по частоте фурье–анализа будет возрастать, в то время как разрешение вейвлетного преобразования по масштабам останется неизменным, оно не зависит от длительности анализируемого ряда (числа характерных периодов анализируемой гармоник, укладывающихся на длине исследуемого временного ряда). В то же время разрешение вейвлетного преобразования по масштабам уменьшается с ростом частоты. Одновременно амплитуда спектральных составляющих сигнала линейно уменьшается с ростом частоты f_s (ср. с рис. 9, аналитически построенным для Син–вейвлета).

Сравнивая результаты вейвлетного преобразования гармонического сигнала с различными базовыми вейвлетами можно увидеть основные особенности каждого из них. Результаты вейвлетного преобразования, как видно из сравнения соответствующих проекций распределения амплитуды $|W|$, отличаются для разных базисных функций. Это требует различной интерпретации результатов в случае различных базисных функций $\psi(\eta)$. Видно, что разрешение по масштабам вейвлетного преобразования с МНАТ–вейвлетом существенно меньше, чем с паул–вейвлетом, которое имеет более плохое разрешение, чем морлет–вейвлет. В свою очередь, рост параметра ω_0 у морлет–вейвлета способствует увеличению разрешения вейвлетного преобразования по масштабам. С другой стороны, МНАТ–вейвлет позволяет получить более высокое разрешение особенностей сигнала во времени t . Аналогично преобразование с базовым морлет–вейвлетом «улучшает» свое разрешение во времени с уменьшением параметра ω_0 . Следует также обратить внимание на то, что соотношение расположения максимумов в распределениях энергии по масштабам с соответствующей частотой гармонического анализа для различных базисных вейвлетов отличается друг от друга. Как несложно увидеть, они соответствуют вышеприведенным соотношениям, связывающим масштабы Λ фурье–преобразования и масштабы s вейвлетного преобразования (см. стр. 24).

Рассмотрим теперь, как ведет себя фаза вейвлетного преобразования $\varphi_W(t_0, s)$. На рис. 1.5 показаны проекции распределения фаз коэффициентов вейвлетного преобразования синусоидального сигнала (1.32), построенные с базовым морлет–вейвлетом ($\omega_0=6$) (рис. 1.5, а) и паул–вейвлетом (рис. 1.5, б). Из рисунка видно, что проекция поверхности фазы вейвлетного преобразования

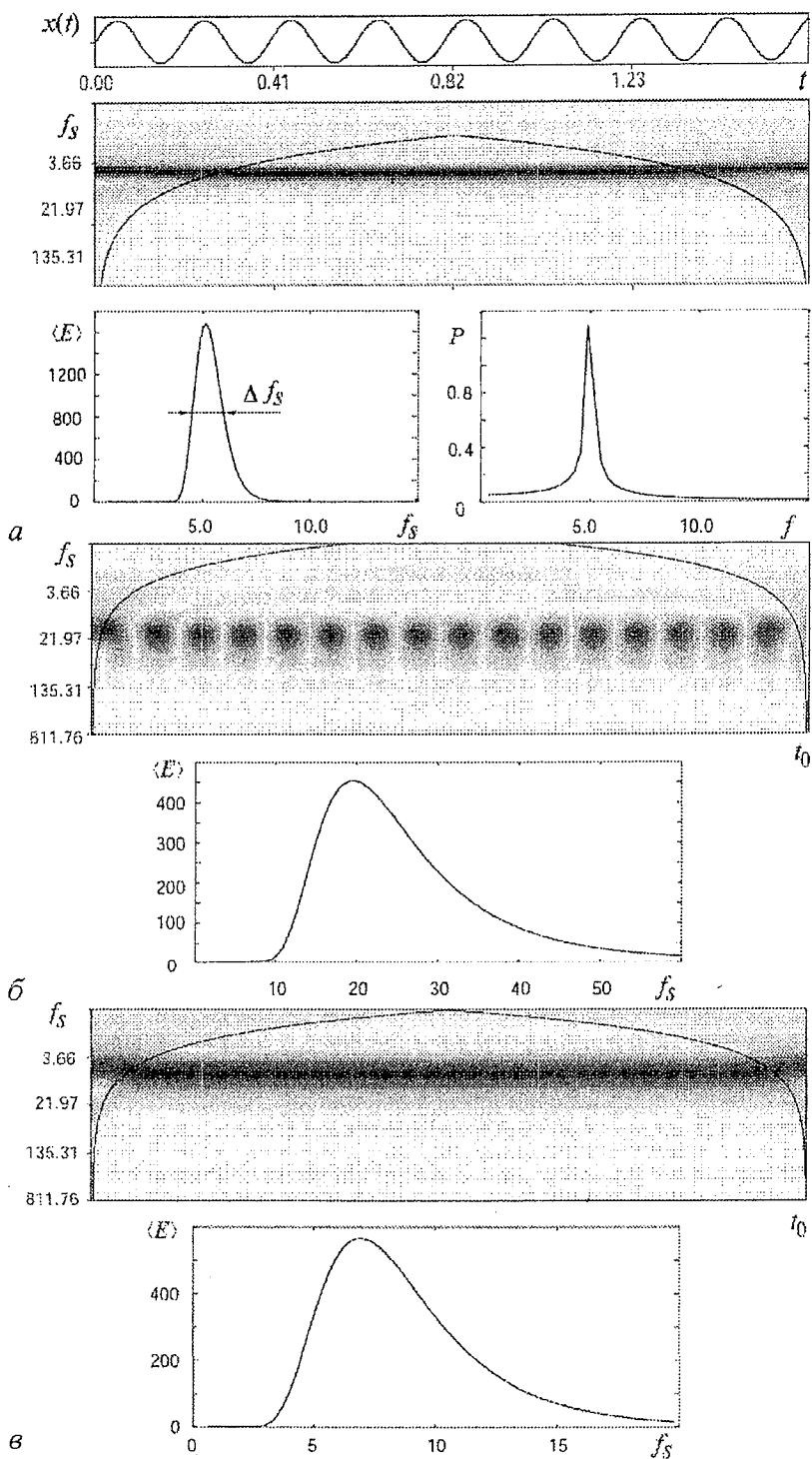


Рис. 1.4. *а* – временная реализация синусоидального сигнала, соответствующая проекция распределения амплитуды $|W(t_0, s)|$ вейвлетного преобразования, интегральное распределение энергии по масштабам $\langle E \rangle$, полученные с помощью базисного морлет-вейвлета ($\omega_0=6$), а также приведенный для сравнения фурье-спектр мощности сигнала $P(f)$; *б* – соответствующие характеристики вейвлетного преобразования с базисным МНАТ-вейвлетом; *в* – характеристики вейвлетного преобразования с базисным паул-вейвлетом. Длительность временной реализации $N=16384=2^{14}$ отсчетов, $\Delta t=0.0001$, частота сигнала $f=5.0$

$W(t_0, s)$ имеет в широком диапазоне масштабов, лежащих в окрестности частоты $f_s \sim f_0 = 5.0$ сигнала, «полосатый» вид: фаза периодически меняется от 0 до 2π с изменением временного сдвига t_0 и практически не зависит от масштаба f_s . Картина меняется лишь при $f_s < 0.6$ (область больших масштабов); что связано с влиянием краевых условий), и при $f_s > 17$ (область очень малых масштабов), где амплитуда коэффициентов $|W(t_0, f_s)|$ вейвлетного преобразования пренебрежимо мала по сравнению с амплитудой коэффициентов в области $f_s \approx f_0$.

Заметим, что соответствующие распределения фазы, полученные с морлет-

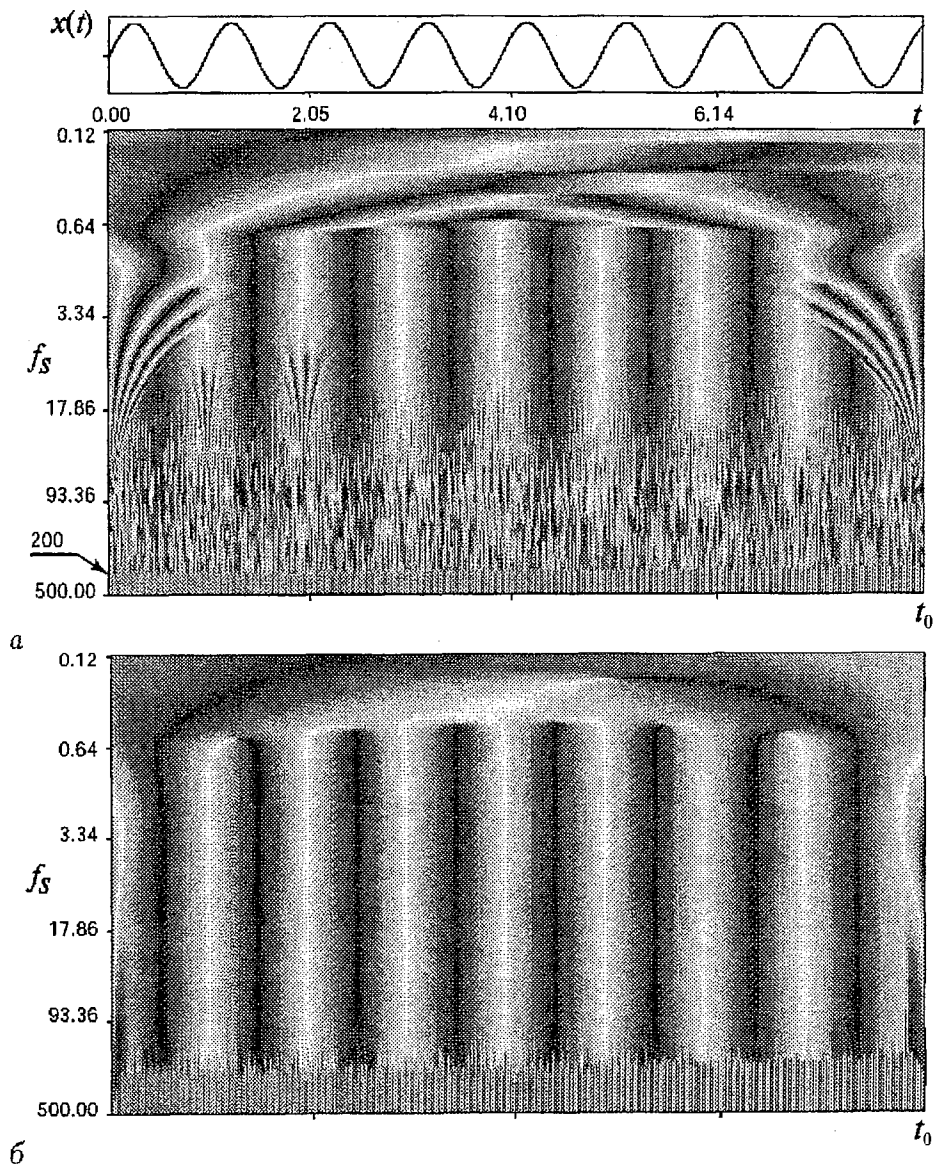


Рис. 1.5. Временная реализация синусоидального сигнала (1.32) и соответствующие проекции распределения фазы $\varphi_W(t_0, s)$ вейвлетного преобразования, полученные с помощью: *a* – базисного морлет-вейвлета ($\omega_0=6$); *б* – базисного паул-вейвлета; $N=8192=2^{13}$ отсчетов, $\Delta t=0.001$, частота сигнала $f=5.0$

и паул-вейвлетами⁸, качественно подобны: различия проявляются лишь в области малых масштабов.

Для анализа вышеприведенных данных обратимся к аналитическим результатам, полученным для вейвлетного преобразования функции вида (1.32) с базовым Sin-вейвлетом. Из формулы (9) следует, что фаза вейвлетного преобразования в этом случае дается соотношением

$$\varphi_W(t_0, s) = -\arctg[2\pi n/(\omega s)](1/(\omega t_0)). \quad (1.33)$$

На рис. 1.6 показана зависимость фазы от временного сдвига t_0 и масштаба s , построенная для частоты сигнала $\omega=1.5$ и параметра $n=5$. Видно, что фаза φ_W во всем диапазоне изменения масштаба s меняется почти периодически, причем длительность периода равна $2\pi/\omega$, что полностью совпадает с результатами расчета вейвлетного преобразования с базовыми морлет- и паул-вейвлетами (см. рис. 1.5)

Для сравнения приведем картину распределения амплитуды и фазы коэффициентов вейвлетного преобразования двухчастотного сигнала

$$f(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t), \quad (1.34)$$

где $f_1=10, f_2=100$ (рис. 1.7). Видно, что на поверхности фазы четко выделяются две области – область, где период изменения фазы вейвлетного преобразования равен величине $1/f_1$, и область, где период равен $1/f_2$, причем между этими областями существует достаточно четкая граница.

Рассмотрим теперь другие особенности в распределениях фазы коэффициентов вейвлетного преобразования, представленных на рис. 1.5.

Прежде всего обратим внимание на близкую к регулярной структуру

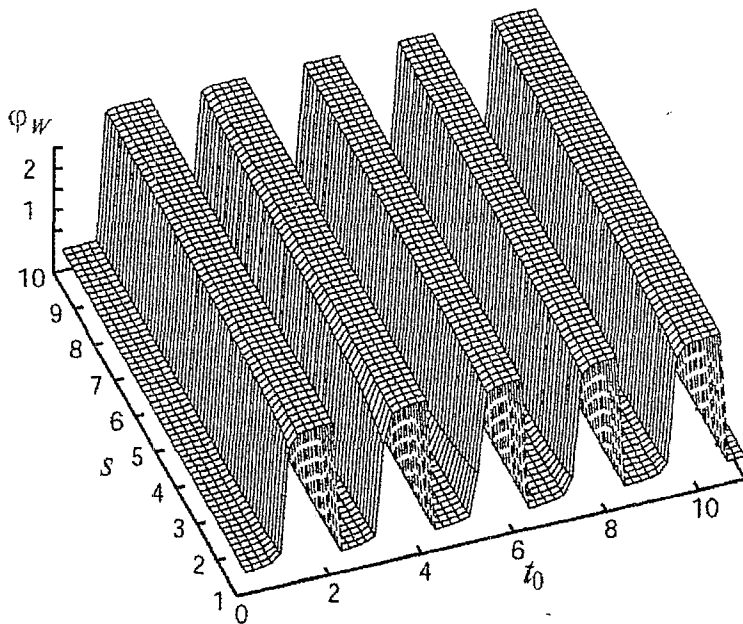


Рис. 1.6. Фаза вейвлетного преобразования синусоидального сигнала с базовым Sin-вейвлетом

⁸ Для вейвлетного преобразования с базовым МНАТ-вейвлетом фаза $\varphi_W=0$, так как мнимая часть данного вейвлета тождественно равна нулю.

проекция распределения фаз, полученных как с базовым морлет-вейвлетом, так и паул-вейвлетом в области самых малых разрешаемых (при данной длине временной реализации и числе отсчетов N) временных масштабов $f_s > 200$ ($s < 0.005$) (отмечено на рис. 1.5). Логично предположить, что такая структура поверхности связана с дискретизацией сигнала с шагом $\Delta t = 0.001$ (длительность временной реализации $t_{\max} = 8.192$, $N = 8192$). Для проверки этого предположения было рассчитано вейвлетное преобразование (с базовым морлет-вейвлетом) сигнала с такой же длительностью t_{\max} , но шагом дискретизации $\Delta t = 0.002$ в два раза большим и, следовательно, числом отсчетов $N = 4096$. Результаты расчета представлены на рис. 1.8. Видно, что данная характерная область проекции поверхности фазы сместилась в диапазон масштабов $f_s > 100$ ($s < 0.01$), то есть изменила свое положение ровно в два раза, что соответствует характеру изменения шага дискретизации. Полностью аналогичная картина наблюдается и в случае расчета с базовым вейвлетом Паула. Для экономии места соответствующая иллюстрация не приводится.

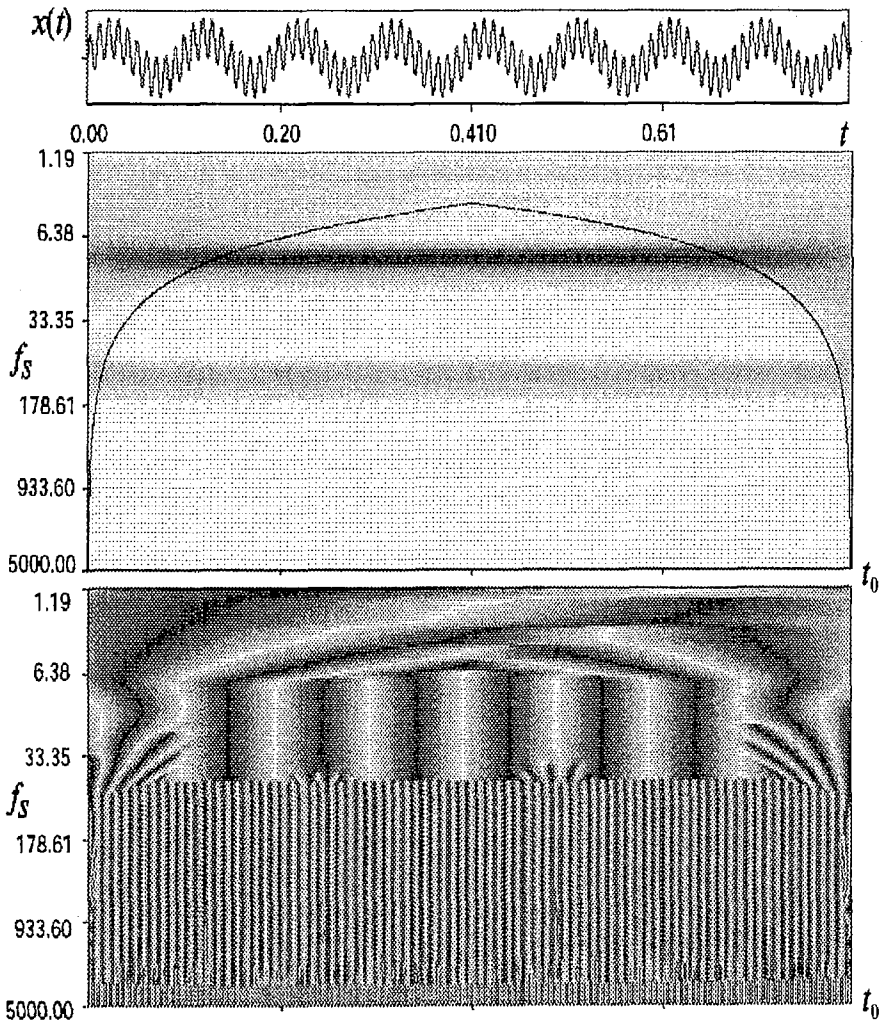


Рис. 1.7. Временная реализация сигнала (1.34) и соответствующие проекции распределения амплитуды $|W(t_0, s)|$ и фазы $\phi_W(t_0, s)$ коэффициентов вейвлетного преобразования с базисным морлет-вейвлетом ($\omega_0 = 6$); $N = 8192 = 2^{13}$, $\Delta t = 0.0001$

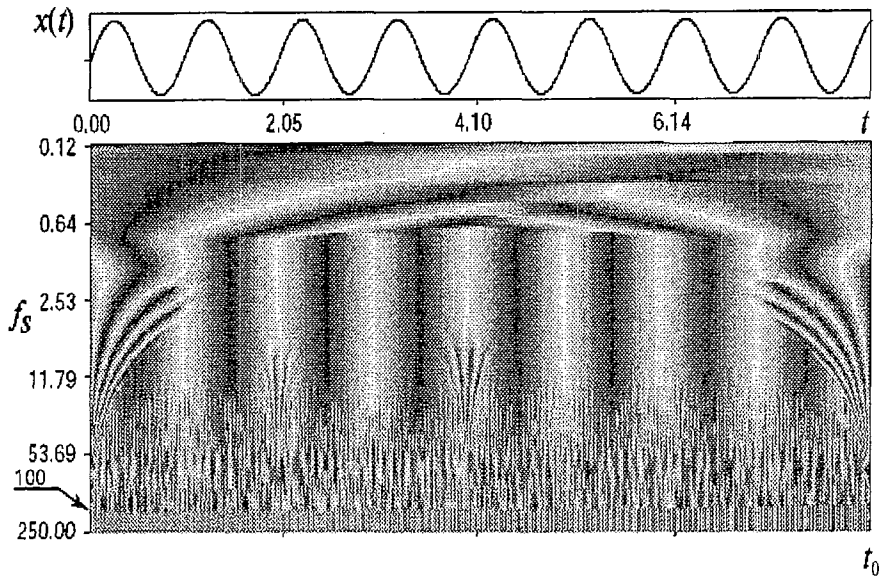


Рис. 1.8. Временная реализация синусоидального сигнала (1.32) и соответствующая проекция распределения фазы $\varphi_w(t_0, s)$ вейвлетного преобразования, полученная с помощью базисного морлет-вейвлета ($\omega_0=6$) с шагом дискретизации по времени в два раза большим, чем для сигнала, представленного на рис. 1.5; $N=4096=2^{12}$, $\Delta t=0.002$, частота сигнала $f=5.0$

Другой характерной особенностью вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом является наличие характерных «кустообразных» структур поверхности фаз φ_w , которые наблюдаются на рис. 1.5, а при $t_0=2.05$ и $t_0=4.10$. Фактически данные характерные структуры могут быть интерпретированы как некоторые возмущения регулярного изменения фазы коэффициентов вейвлетного преобразования с увеличением значения t_0 на самых различных масштабах f_s .

Что бы понять, с чем может быть связано появление такой структуры на поверхности, рассмотрим синусоидальный сигнал (1.32), в котором в какой-то момент времени введен скачок фазы $\Delta\phi$. Результаты вейвлетного преобразования такого тестового сигнала с различными базовыми вейвлетами приведены на рис. 1.9. Величина резкого изменения фазы $\Delta\phi=\pi/3$. В момент скачка фазы сигнала на проекции поверхности распределения фазы коэффициентов вейвлетного преобразования (см. рис. 1.9, а) появляется вышеописанная характерная «кустообразная» структура. Очевидно, что она связана с теми или иными вариациями фазы анализируемого сигнала. Видно, что размер особенности на поверхности вдоль оси t_0 увеличивается с рассмотрением все больших масштабов s . Это связано с тем, что базисная вейвлетная функция (в данном случае морлет-вейвлет ($\omega_0=6$) с сильно осциллирующими «хвостами») при рассмотрении все больших временных масштабов s масштабируется линейно с ростом s . Поэтому при приближении к моменту скачка фаз коэффициенты вейвлетного преобразования начинают тем раньше нести в себе информацию о сдвиге фаз на временной реализации сигнала, чем на большем масштабе осуществляется анализ исследуемого сигнала.

Этим же объясняется появление таких структур на границах исследуемого ряда (см. рис. 1.5): когда соответствующим образом масштабируемая и сдвигаемая во времени базовая вейвлетная функция начинает выходить за границу, то в коэффициентах вейвлетного преобразования появляется информация об этой неоднородности.

В случае вейвлетного преобразования с базовым вейвлетом Паула ситуация несколько другая (см. рис. 1.9, б). Это связано с тем, что паул-вейвлет неосцилли-

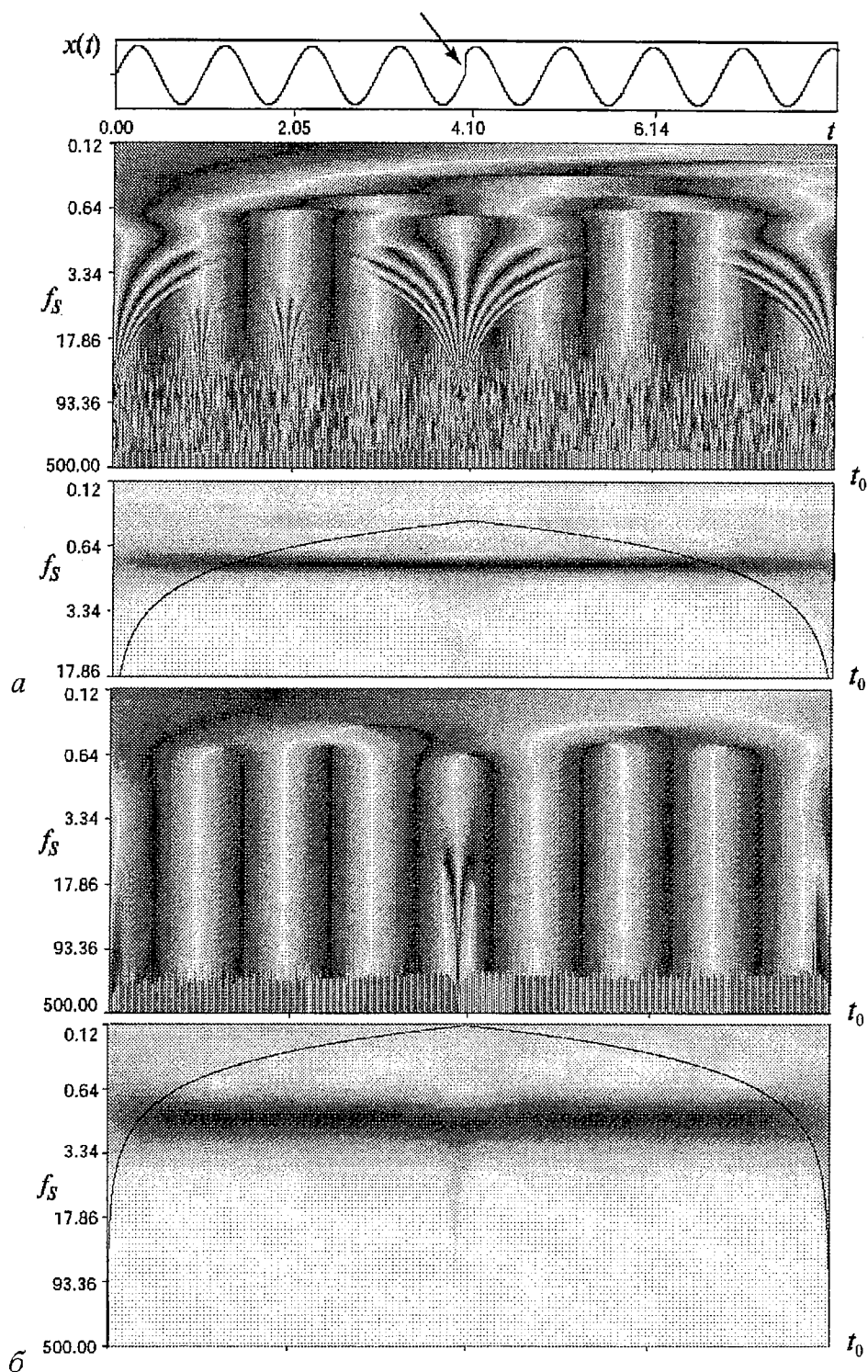


Рис. 1.9. Результаты вейвлетного преобразования синусоидального сигнала с мгновенным скачком фазы (отмечен стрелкой на временной реализации), полученные с помощью: *a* – базисного морлет-вейвлета ($\omega_0=6$); *б* – базисного паул-вейвлета. Сверху каждого из рисунков показана временная реализация сигнала, далее демонстрируется распределение фаз и внизу – распределение амплитуд вейвлетного преобразования; $N=8192=2^{13}$, $\Delta t=0.001$, частота сигнала $f=5.0$

рующая функция, поэтому информация о скачке фазы содержится только в коэффициентах вейвлетного преобразования, координата t_0 которых близка к моменту скачка (см. рис. 1.2). То есть, данная особенность на вейвлетной поверхности существенно более локализована во времени, чем в случае преобразования с базовым морлет-вейвлетом.

На рис. 1.10 демонстрируется проекция амплитуды коэффициентов $|W(t_0, s)|$, а на рис. 1.11 – мгновенные распределения энергии по масштабам $E(f_s)$ вейвлетного преобразования сигнала, в котором одна гармоника сменяет другую в некоторый момент времени (частота сигнала скачком увеличивается в три раза). Вейвлетное преобразование осуществлялось с базовым морлет-вейвлетом ($\omega_0=16$). Из рисунков видно, что модуль вейвлетного преобразования $|W(t_0, s)|$ позволяет определить как частоту (мгновенную) сигнала, так и момент времени, когда произошло изменение (ср. с рис. 4, на котором представлены результаты анализа аналогичного сигнала с помощью оконного фурье-преобразования). Таким образом, несмотря на то, что разрешение по частоте вейвлетного преобразования

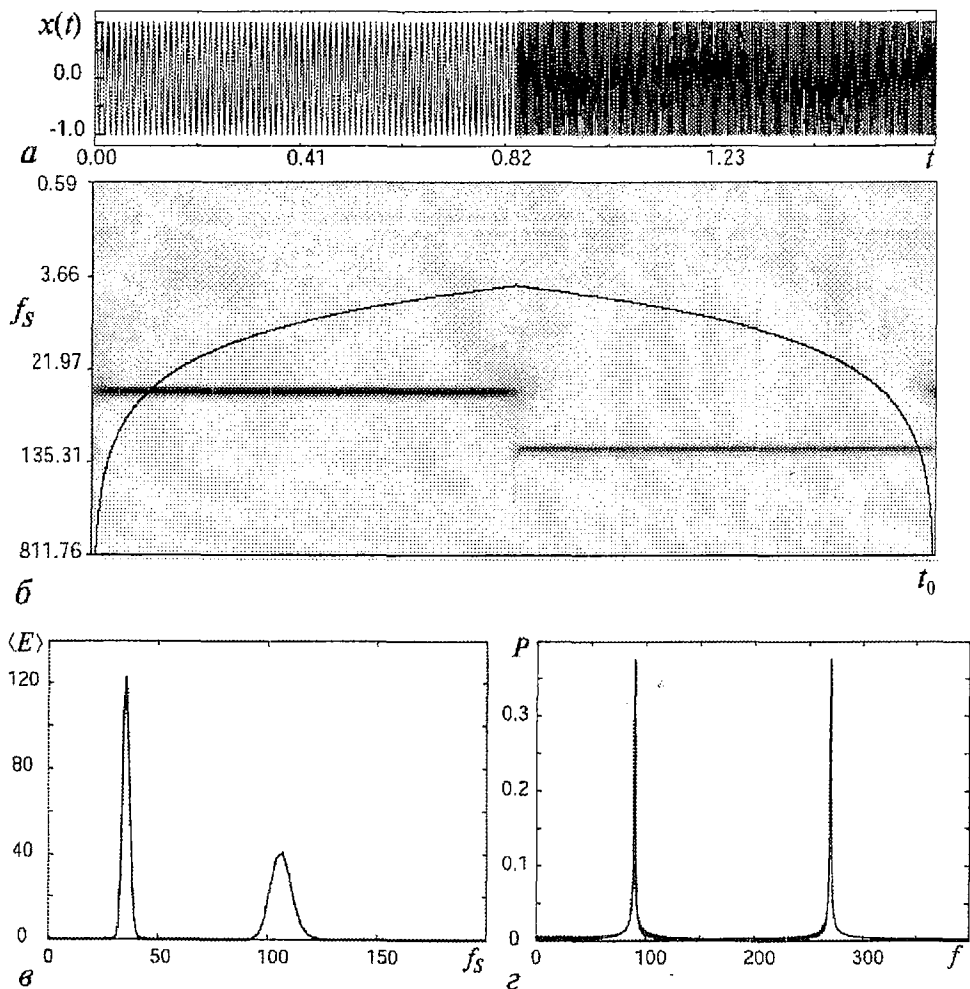


Рис. 1.10. а – временная реализация сигнала с изменяющейся скачком частотой; б – проекция распределения амплитуды $|W(t_0, s)|$ вейвлетного преобразования; в – распределение энергии по масштабам, полученные с помощью базисного морлет-вейвлета ($\omega_0=16$); г – фурье-спектр мощности данного сигнала (приведен для сравнения); $N=16384=2^{14}$, $\Delta t=0.0001$, частота сигнала изменяется скачком с величины $f_0=90.0$ до величины $3f_0$

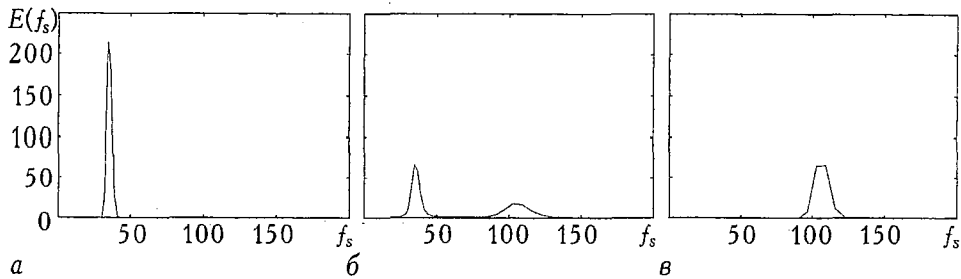


Рис. 1.11. Мгновенные распределения энергии вейвлетного преобразования для сигнала с изменяющейся скачком частотой (см. рис. 1.10) для моментов времени t : $a - 0.2$ (в сигнале присутствует только одна частота); $b - 0.41$ (момент времени, когда происходит скачок частоты); $c - 0.6$ (момент времени после скачка частоты)

существенно меньше, чем фурье-преобразования (ср. ширину пиков в распределении энергии по масштабам вейвлетного преобразования и в фурье-спектре мощности), вейвлетное преобразование может быть эффективно использовано для выделения временных интервалов существования тех или иных гармоник в сложных сигналах.

1.3.2. Последовательность прямоугольных импульсов. Рассмотрим результаты вейвлетного преобразования с базовыми вейвлетами Морлета и Паула сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов со скважностью 2 (рис. 1.12). Спектр мощности такого сигнала представлен на рис. 1.13. Из рассмотрения проекции распределения амплитуд коэффициентов $|W|$ (рис. 1.14) можно сделать вывод, что для обеих базисных вейвлетных функций вейвлетное преобразование «замечает» основной масштаб сигнала, соответствующий первой гармонике в спектре фурье-преобразования, а для морлет-вейвлета – еще и масштаб, численно равный периоду второй гармоники, что хорошо видно на рис. 1.14, a . Также в моменты времени, соответствующие скачкам амплитуды сигнала (началу/концу прямоугольного импульса) на поверхности, соответствующей анализу с материнским вейвлетом Паула, наблюдается всплеск амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования, имеющих высокие частоты f_s (см. рис. 1.12, b). Это связано с тем, что для разложения исследуемого сигнала в ряд по базовым вейвлетным функциям, локальным во времени, в точках, где имеет место сингулярность (разрыв производной сигнала), необходимо существенно больше гармоник для корректного описания исходной функции, чем в точках, где исследуемый сигнал ведет себя непрерывным образом.

Фаза коэффициентов вейвлетного преобразования ведет себя существенно более сложным образом, чем в предыдущем случае. Из проекций распределения фаз φ_w хорошо видно, что на такой проекции четко выделяется основная частота сигнала, а далее распределение становится достаточно сложным – оно представляет собой интерференционную картину, которая возникает как результат суммирования фаз большого числа локальных базисных функций на различных характерных масштабах сигнала. Более «бедная» картина распределения фаз вейвлетного преобразования с базовым паул-вейвлетом объясняется теми же причинами, что были названы при анализе сигнала с резким изменением фазы.

Заметим также, что именно на распределении фаз коэффициентов вейвлетного преобразования можно точно выделить местоположение в сигнале особенностей – в нашем конкретном случае, момента времени, когда производная сигнала $x(t)$ претерпевает разрыв.

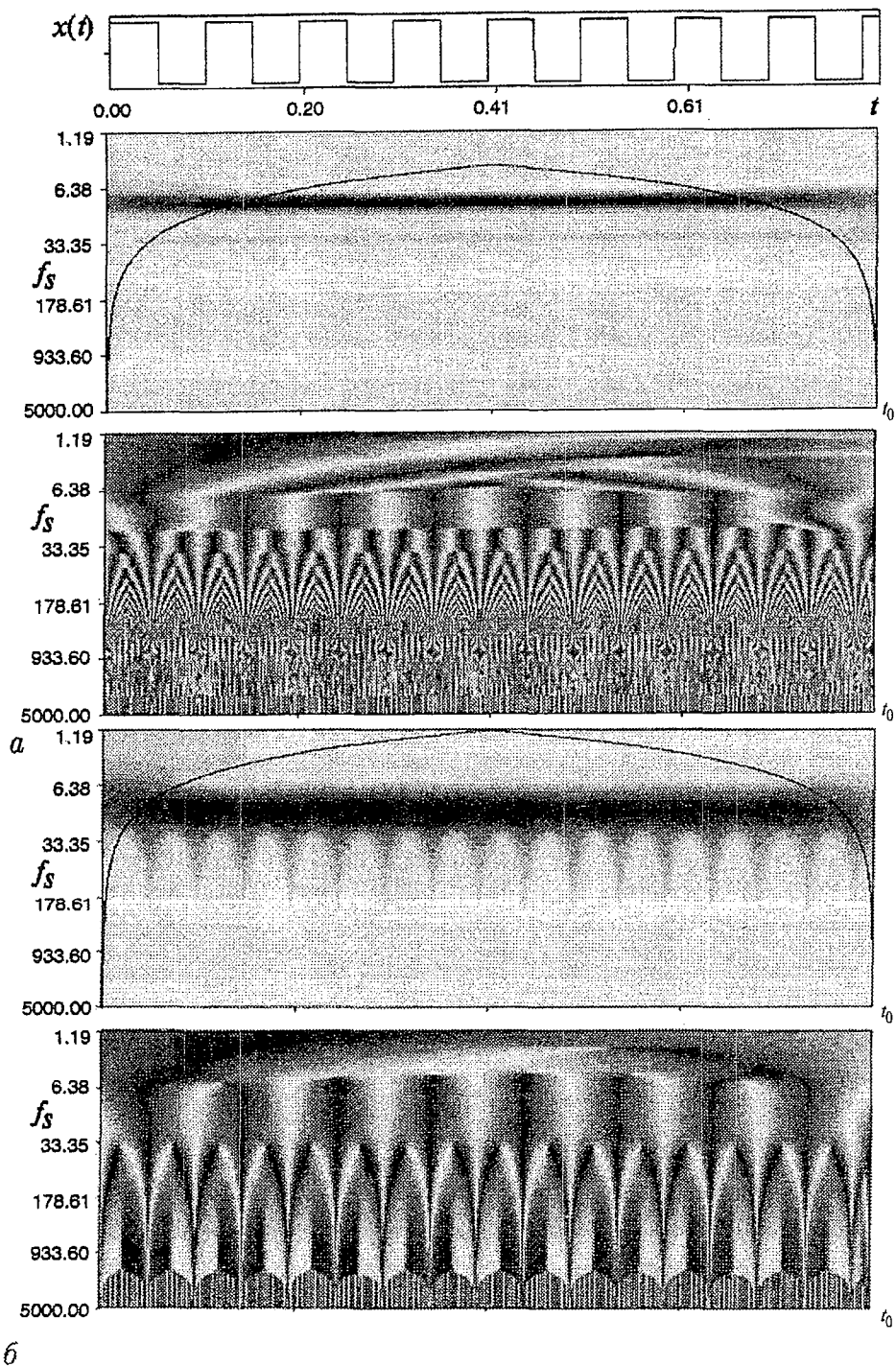


Рис. 1. 12. Вид временной реализации сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов; проекции распределения амплитуды и фазы коэффициентов вейвлетного преобразования с базовыми вейвлетами: *a* – Морлета и *б* – Паула; $N=12^{13}$, $\Delta t=0.0001$

1.3.3. Амплитудно-модулированный сигнал. На рис. 1.15 демонстрируются результаты применения вейвлетного преобразования к амплитудно-модулированному сигналу

$$f(t) = [1 + m \sin(2\pi f_m t)] \sin(2\pi f_0 t), \quad (1.35)$$

где $f_0=40$, $f_m=8$ и глубина модуляции $m=0.25$. Видно, что спектр вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом ($\omega_0=6$) может быть интерпретирован как сигнал с частотой $f_s=f_0$, который с периодом $1/f_m$ увеличивает (уменьшает) свою амплитуду. Мгновенные распределения энергии по масштабам, представленные на том же рисунке и соответствующие моментам, когда на вейвлетной поверхности вдоль линии $f_s=f_0$ достигается максимум (сплошная линия) и минимум (пунктир-

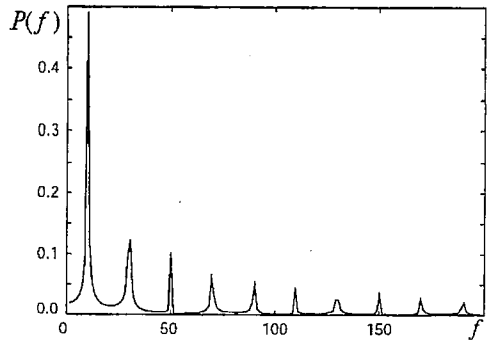


Рис. 1.13. Спектр мощности сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов (см. рис. 1.12)

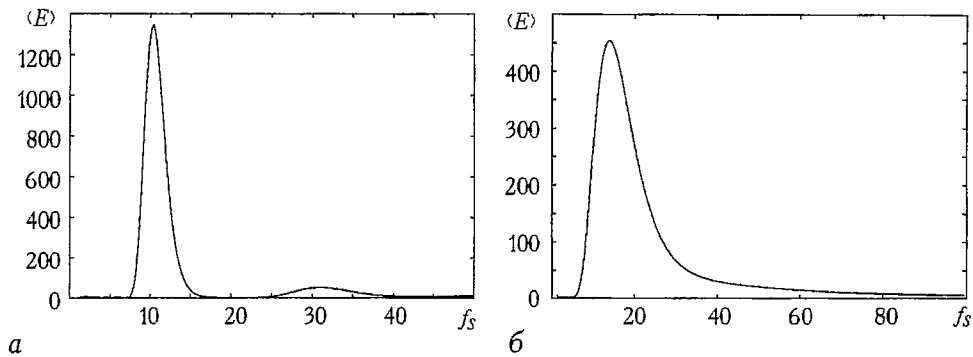


Рис. 1.14. Распределения энергии по масштабам сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов, полученные в результате вейвлетного преобразования с базовыми вейвлетами: а – Морлета и б – Паула

ная линия), показывают, что энергия сигнала содержится все время в одном масштабе $s=1/f_0$. Одновременно видно, что с периодом $1/f_m$ происходит изменение интенсивности данного масштаба, а также изменение ширины распределения $E(f_s)$. Классический фурье-спектр амплитудно-модулированного сигнала также приведен на рисунке: он содержит основную частоту f_0 и два сателлита, отстоящих от него на частоту f_m .

Однако с уменьшением отношения f_0/f_m и увеличением глубины модуляции m ситуация меняется. На рис. 1.16 показаны результаты вейвлетного преобразования сигнала (1.35) с параметрами $f_0=80$, $f_m=50$ и $m=2$. В данном случае вейвлетное преобразование просто показывает наличие в сигнале трех временных масштабов $1/(f_0 f_m)$, $1/f_0$ и $1/(f_0+f_m)$, динамика которых не изменяется с течением времени. Интегральное распределение энергии по масштабам также обнаруживает наличие трех временных масштабов. На рис. 1.16 оно представлено в нормированном виде $\langle E \rangle / s^2$. В фурье-спектре мощности присутствуют три гармоники с примерно одинаковыми амплитудами. В результате вейвлетного преобразования сигнала с гармониками различных частот, но одинаковых амплитуд выделяются масштабы, амплитуда которых, как было показано выше (см. соотношение (10)), обратно пропорциональна частоте сигнала. Поэтому для сравнения распределения энергии по масштабам вейвлетного преобразования с фурье-спектром имеет смысл рассматривать зависимость $\langle E(f_s) \rangle$ в нормированном виде. Тогда вейвлетный спектр, как и фурье-спектр, демонстрирует наличие в сигнале гармоник с одинаковой амплитудой (см. рис. 1.16).

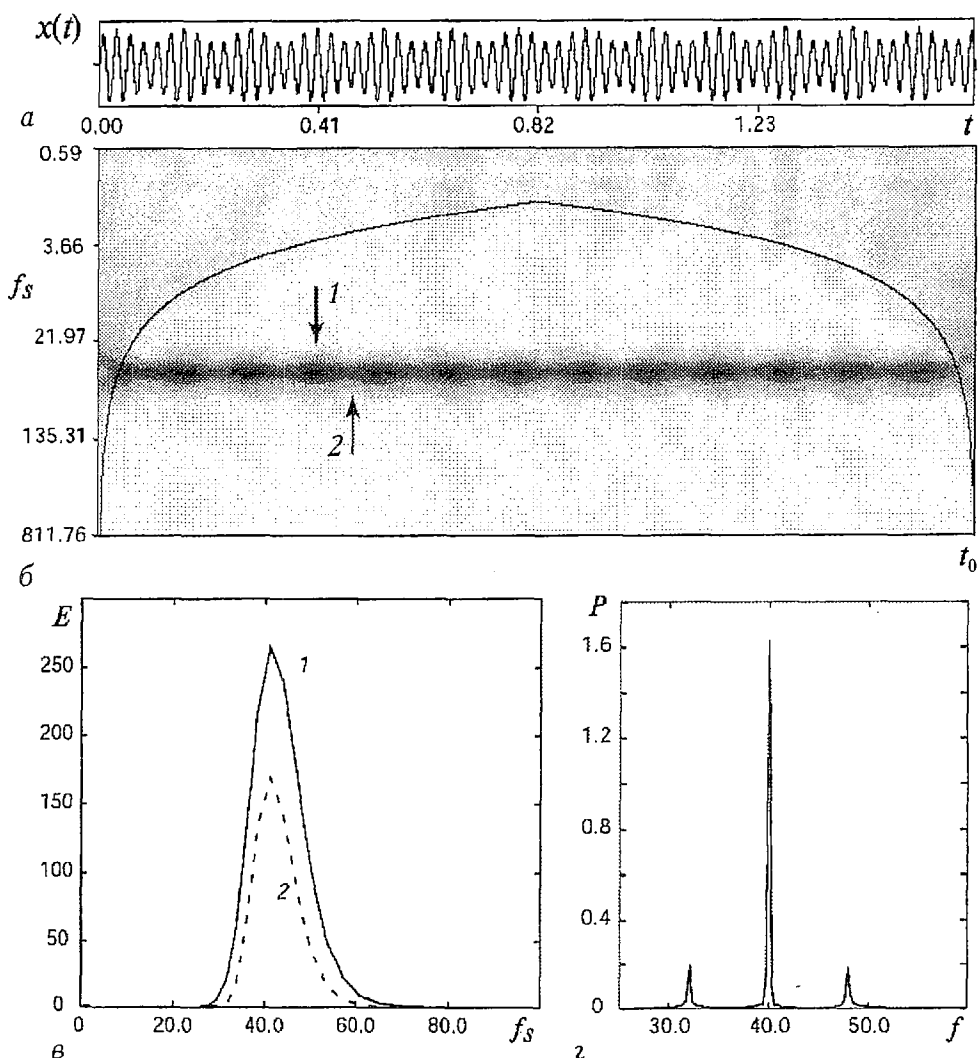


Рис. 1.15. *a* – временная реализация амплитудно-модулированного сигнала, *б* – вейвлетная поверхность, *в* – мгновенные распределения энергии по масштабам, полученные с помощью базисного морлет-вейвлета ($\omega_0=6$). Сплошная линия отвечает распределению $E(f_s)$ при значении t_0 , соответствующему максимуму вейвлетной поверхности (более темной области на проекции, отмеченной стрелкой 1 на рис. б), пунктирная – минимуму вейвлетной поверхности (более светлой области вдоль линии $f_s=f_0$, помечено стрелкой 2 на рис. б); $N=16384=2^{14}$, $\Delta t=0.0001$

1.3.4. Сигнал с изменяющейся частотой. Рассмотрим теперь, что может дать вейвлетное преобразование для сигналов у которого спектральный состав изменяется непрерывно во времени. И для примера проанализируем синусоидальный сигнал, у которого частота изменяется линейно с течением времени: $f(t)=\sin(2\pi f_0 t^2)$, где $f_0=50$. На рис. 1.17 приведены результаты вейвлетного преобразования такого сигнала с применением базового морлет-вейвлета ($\omega_0=16$). Из рассмотрения проекции вейвлетной поверхности вне области влияния граничных условий видно, что вейвлетное преобразование четко демонстрирует линейное изменение частоты сигнала: $f_{зфф}=f_0 t$. Отличие зависимости расположения максимума (темная область) на вейвлетной поверхности от линейной функции объясняется тем, что по оси f_s значения частот откладываются в логарифмическом масштабе. Интегральное распределение энергии по масштабам $\langle E \rangle$ (сплошная линия на рисунке) близко к соответствующему фурье-спектру мощности. В то же

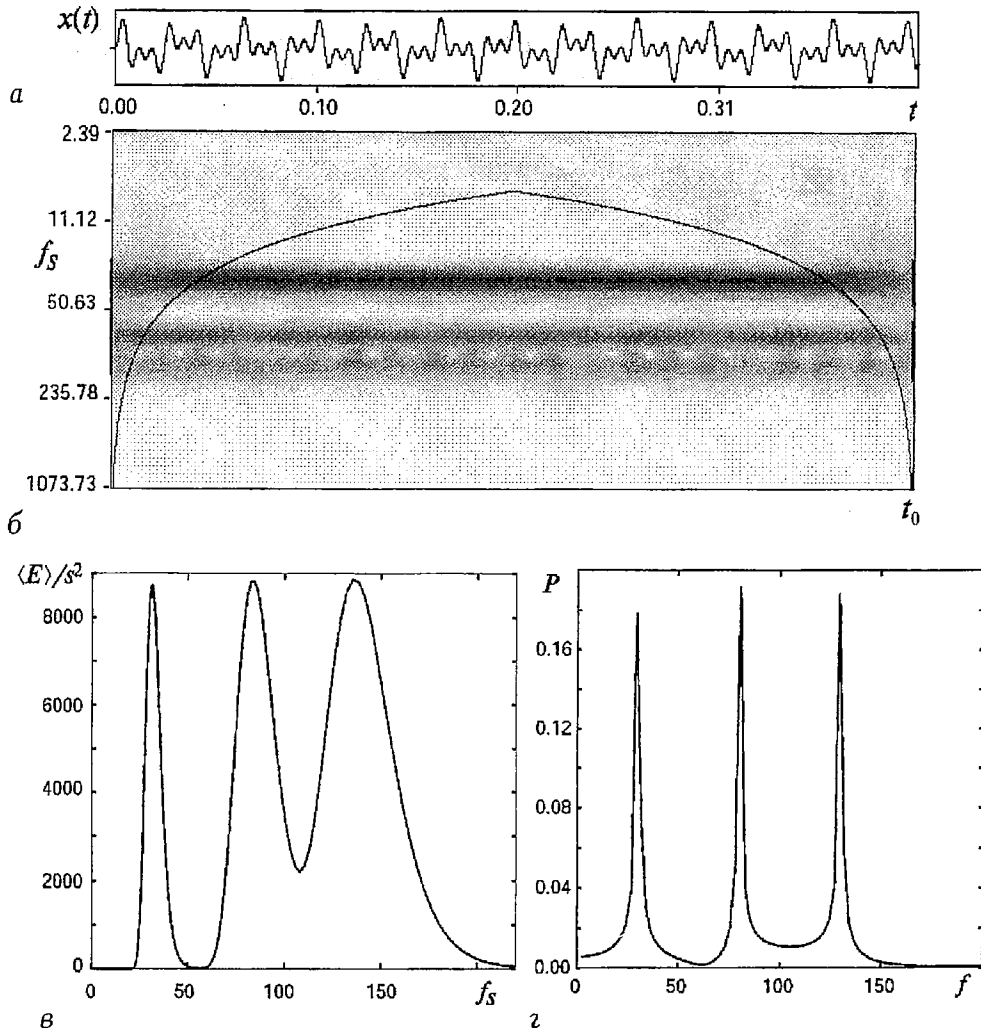


Рис. 1.16. Характеристики вейвлетного преобразования с базовым морлет–вейвлетом ($\omega_0=6$) амплитудно-модулированного сигнала с $f_0/f_m \sim 1$ и глубиной модуляции $m=2$: а – временная реализация сигнала; б – проекция поверхности амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования; в – распределение энергии по масштабам $\langle E(f_s) \rangle$, нормированное на величину масштаба s^2 ; г – фурье-спектр мощности сигнала; $N=12^{12}$ отсчетов, $\Delta t=0.0001$

самое время мгновенные распределения энергии по масштабам отчетливо фиксируют мгновенную частоту сигнала (см. штриховые линии, соответствующие моментам времени $t=0.79$ и $t=1.21$). Осцилляции в области больших временных масштабов на распределении по энергии (отмечены стрелкой на рисунке) соответствуют области влияния краевых условий, относятся к численным эффектам и поэтому не имеют физического смысла.

Отличие абсолютных величин по осям f_s и f для распределения по энергиям обуславливается вышеописанным (см. п. 1.2.5) соотношением между масштабами вейвлетного преобразования f_s и частотами гармонического анализа. Для морлет–вейвлета ($\omega_0=16$) имеем $f=2.5527f_s$.

1.3.5. Южное Колебание – Эль-Ниньо. Южное Колебание – крупномасштабный атмосферный процесс, развивающийся над акваторией Тихого океана [1]. Явление Эль-Ниньо – это потепление океанических вод вблизи тихоокеанского

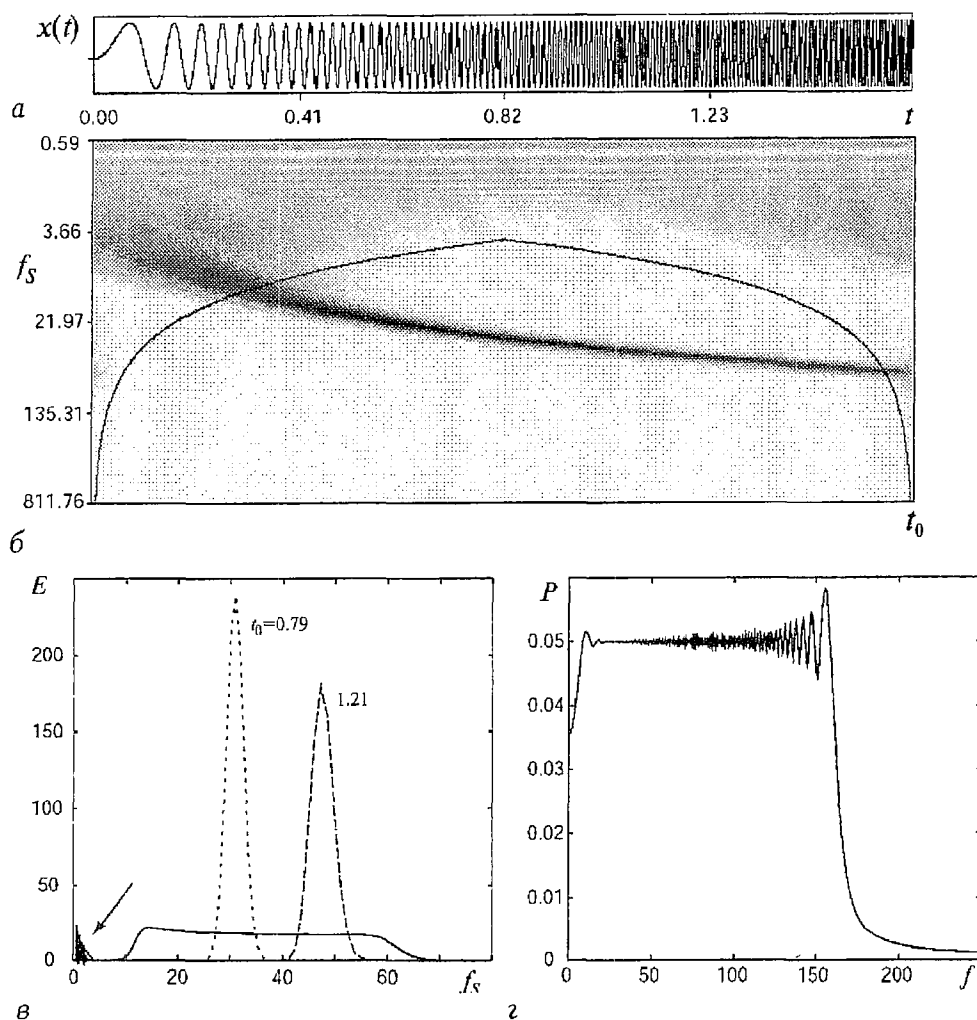


Рис. 1.17. Характеристики вейвлетного преобразования с базовым морлет–вейвлетом ($\omega_0=16$) для сигнала с линейным изменением частоты. Сплошная линия на распределении по масштабу $E(f_s)$ соответствует интегральному распределению, штриховые линии – мгновенным распределениям в моменты времени, указанные непосредственно на рисунке; $N=12^{14}$, $\Delta t=0.0001$

побережья Центральной Америки. Оно, как предполагается, во многом определяется Южным Колебанием. Особый интерес к этим явлениям связан с заметным влиянием их на динамику климата всей планеты. Исследование данного явления, в том числе и с помощью вейвлетного анализа, является достаточно традиционным и хорошо изученным (см., например, работы [1, 29]), поэтому мы рассматриваем здесь явление Эль–Ниньо как некоторый тестовый модельный сигнал.

Обычно при анализе Южного Колебания рассматривается динамика температуры поверхности воды в центре Тихого океана [3]. Исследуемая характеристика – Niño SST (*sea surface temperature*) – определяется как средняя сезонная температура поверхности Тихого океана в области, лежащей между 5° с.ш. – 5° ю.ш. и 90° – 150° з.д. Данные о динамике Niño SST за 1871–1996 года были взяты из источников [3, 30].

На рис. 1.18 приводятся результаты вейвлетного преобразования (проекции поверхности амплитуды и фазы коэффициентов вейвлетного преобразования) временного ряда Niño SST с базовым морлет–вейвлетом ($\omega_0=6$). Рис. 1.19 демон-

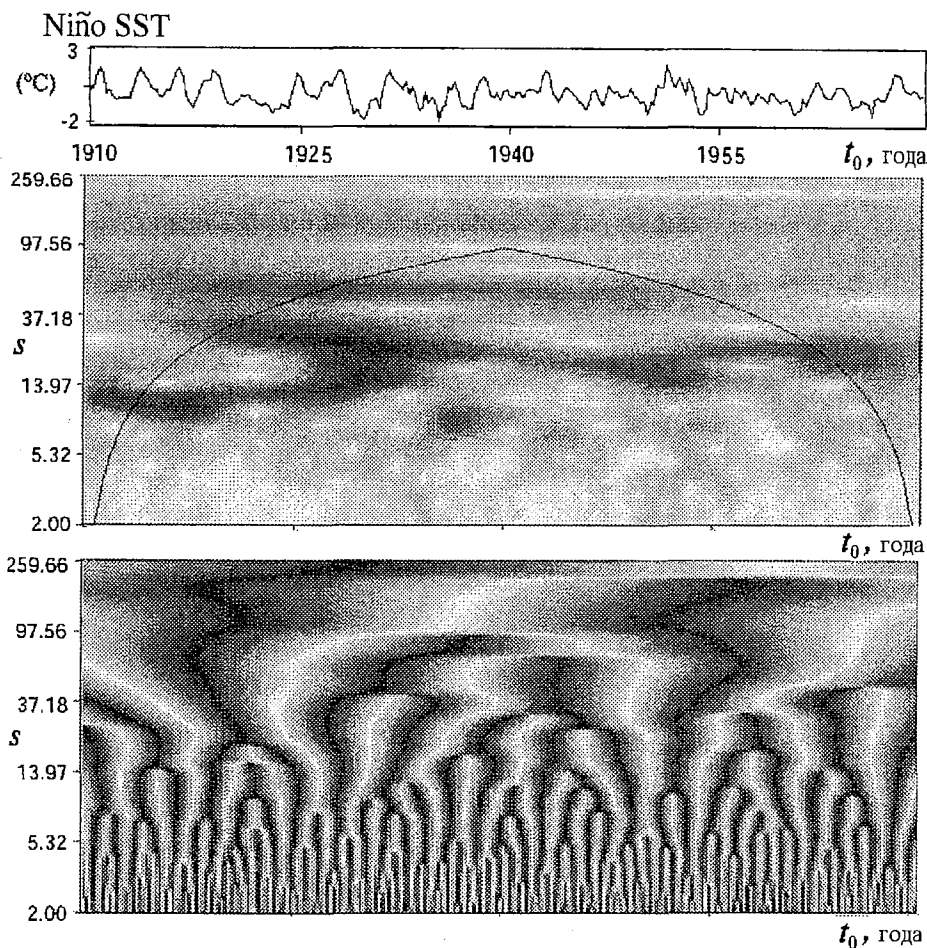


Рис. 1.18. Характеристики вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом ($\omega_0=6$) для явления Эль-Ниньо (Niño SST). Длительность временной реализации 52 года, $\Delta t=3$ месяца

стрирует соответствующее распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования.

Для сравнения результатов вейвлетного анализа и фурье-преобразования на рис. 1.20 приведены распределение энергии по масштабам $\langle E(f_s) \rangle$, полученное с базовым морлет-вейвлетом ($\omega_0=16$), и спектр мощности фурье-преобразования $P(f)$. Хорошо видно, что интегральное распределение энергии $\langle E \rangle$ демонстрирует аналогичную картину, что и фурье-преобразование. Последнее, однако, дает существенно лучшее разрешение по частоте. Это свидетельствует о том, что при необходимости анализа частотного состава временного ряда без рассмотрения динамики тех или иных гармоник во времени вейвлетный анализ существенно уступает традиционному преобразованию Фурье, хотя и дает похожие результаты.

Отметим также, что анализируя мгновенные распределения энергии по масштабам можно легко выделить временные масштабы, играющие основную роль в каждый из моментов времени. Для этого на рис. 1.21 представлены зависимости $E(s)$, соответствующие 1932 и 1943 году. Хорошо видно, что крупномасштабные тенденции с характерными временами $T \sim 10 \div 20$ лет играют примерно одинаковую роль в различные моменты процесса. Однако мелкомасштабная динамика ($T < 10$ лет) сильно отличается для различных лет. Поэтому именно применение вейвлетного преобразования позволяет проанализировать все

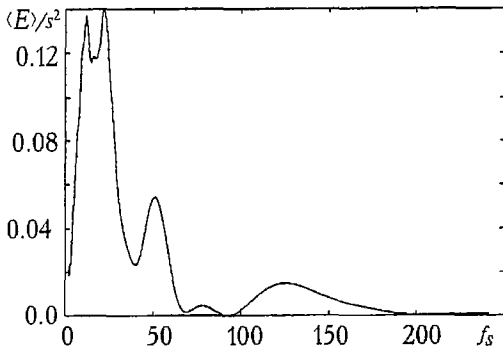


Рис. 1.19. Интегральное распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом ($\omega_0=6$) для явления Эль-Ниньо

особенности динамики рассматриваемого явления. Заметим, что для заинтересовавшимися проблемами анализа метеорологических данных и временных рядов методами вейвлетного анализа можно порекомендовать работы [1, 31–35], где эти вопросы освещены существенно более подробно.

В частности, работы [1, 36, 37] непосредственно касаются исследований Южного Колебания методами вейвлетного анализа.

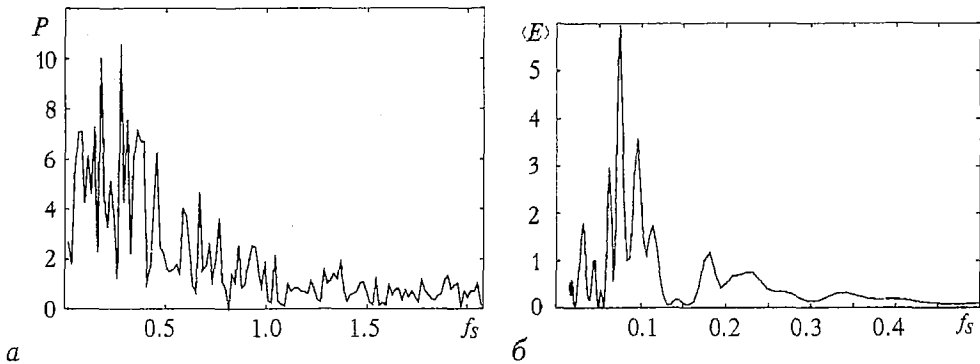


Рис. 1.20. а – фурье-спектр мощности $P(f)$ и б – интегральное распределение энергии по масштабам $\langle E(f) \rangle$ вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом ($\omega=16$), построенные по временному ряду Niño SST

1.3.6. Сигналы с особенностью. При анализе сигналов самой различной природы часто встречается ситуация, когда во временном ряду имеются локализованные особенности, например, импульс, резкий скачок, сбой фазы колебаний и т.д. Наиболее часто данные особенности возникают при экспериментальном определении тех или иных величин, однако, они могут иметь и динамическую природу. При фурье-анализе таких рядов невозможно локализовать особенность во времени. Более того, при анализе сигнала, регулярного всюду, кроме некоторых «особых» точек, информация об этой особенности содержится во всех коэффициентах фурье-преобразования, что искажает исследуемый сигнал.

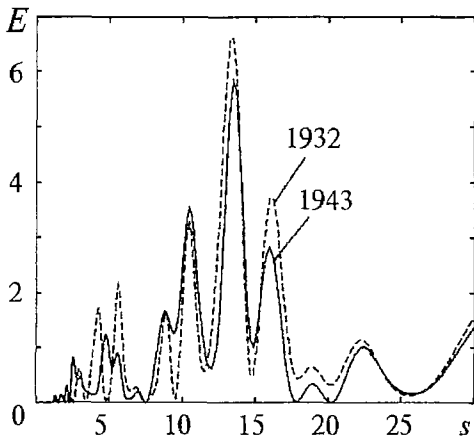


Рис. 1.21. Распределение энергии Niño SST по масштабам, построенное с базовым морлет-вейвлетом ($\omega=16$), для различных годов

Рассмотрим результаты применения вейвлетного преобразования к сигналам с особенностями. Выше мы уже рассматривали результаты анализа сигналов со скачком фазы (см. рис. 1.9), с

резким изменением частоты сигнала (см. рис. 1.10), поэтому на таких особенностях мы здесь не останавливаемся. На рис. 1.22 демонстрируются результаты вейвлетного преобразования с базовым вейвлетом Паула для сигнала с резким скачком амплитуды (рис. 1.22, *a*). Рис. 1.23 соответствует вейвлетному преобразованию сигнала, на временной реализации которого наблюдается «излом» (рис. 1.23, *a*). Вейвлетное преобразование сигнала с особенностью в виде δ -функции показано на рис. 1.24. На рис. 1.25 – вейвлетное преобразование синусоидального сигнала, у которого в какой-то момент времени наблюдается резкий очень короткий выброс амплитуды. Из рисунков видно, что в последнем случае выброс амплитуды оказывает влияние на распределение фазы коэффициентов вейвлетного преобразования (рис. 1.25, *z*) только в области малых масштабов, что позволяет эффективно выделять из временной реализации такие быстрые выбросы.

Из анализа рис. 1.22–1.25 следует, что все точечные особенности сопровождаются всплесками амплитуды коэффициентов вейвлетного преобразования $|W(t_0, s)|$. Однако существенно точнее данные особенности можно выделить из сигнала, анализируя распределение фазы ϕ_w . В момент времени, соответствующий особенности в сигнале, наблюдается быстрое изменение фазы, которое существенно легче локализовать во времени. Более того, проводя тот или иной анализ структуры поверхности фазы вейвлетного преобразования (в том числе и методами распознавания образов для автоматизации такого анализа [38]), можно легко выделить и локализовать во времени те или иные изолированные особенности во временном ряде.

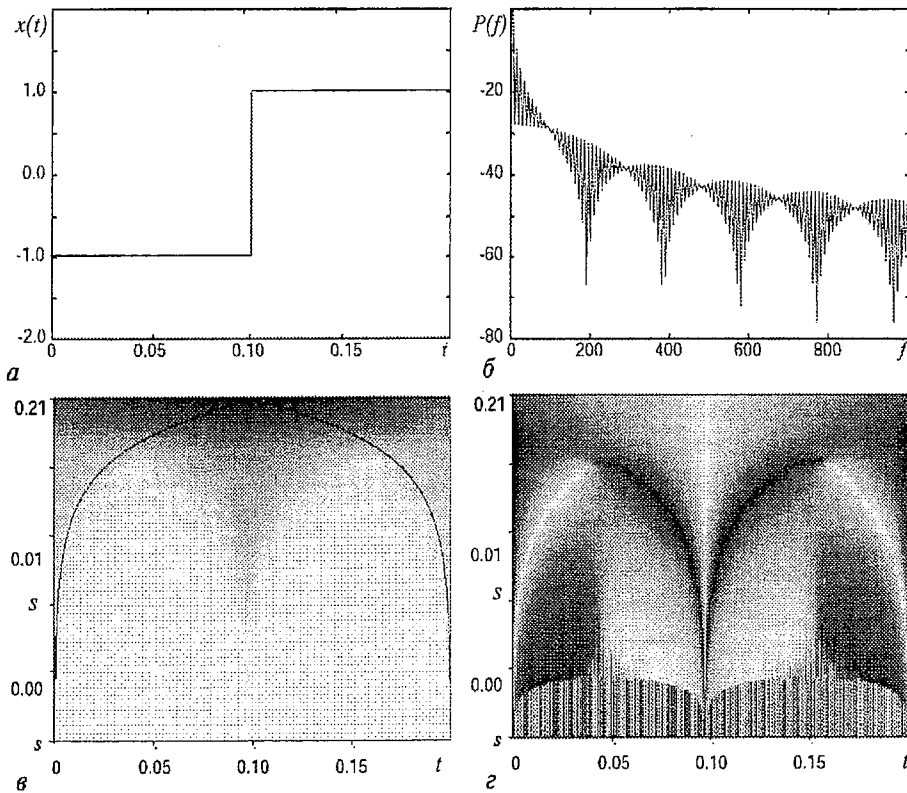


Рис. 1.22. Временная реализация сигнала с особенностью в виде скачка (*a*), его фурье-спектр мощности (*б*), амплитуда (*в*) и фаза (*z*) вейвлетного спектра с базовым паул-вейвлетом

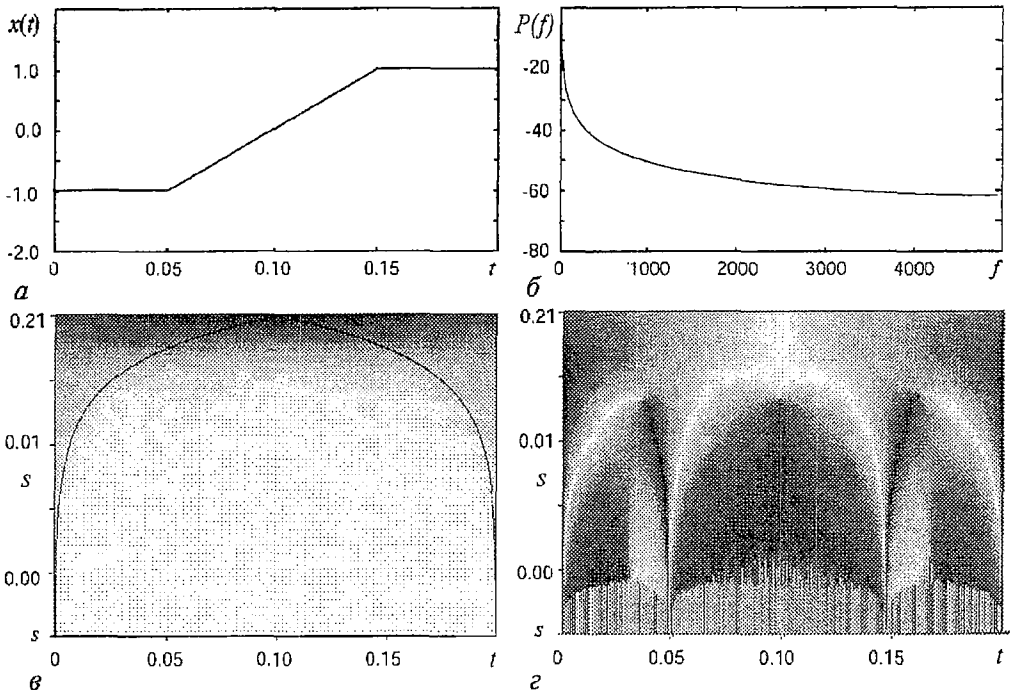


Рис. 1.23. Временная реализация сигнала с особенностью в виде излома (а), его фурье-спектр мощности (б), амплитуда (в) и фаза (z) вейвлетного спектра с базовым паул-вейвлетом

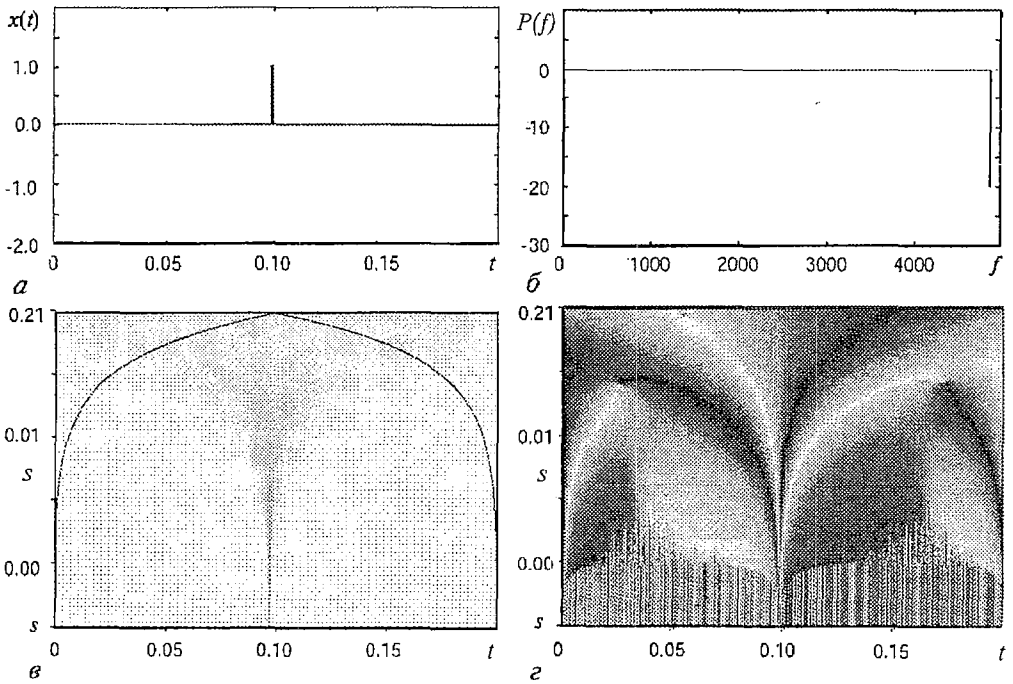


Рис. 1.24. δ -функция (а), ее фурье-спектр мощности (б), амплитуда (в) и фаза (z) вейвлетного спектра с базовым паул-вейвлетом

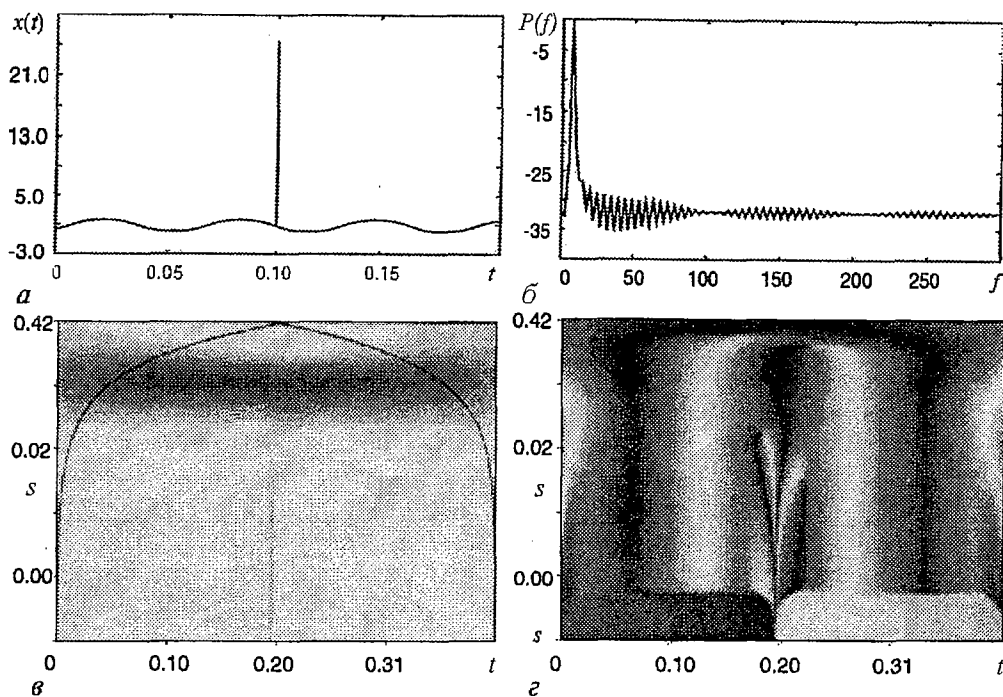


Рис. 1.25. Сигнал $x(t)=\sin(\omega t)$, у которого наблюдается резкий очень короткий скачок амплитуды (а), его фурье-спектр мощности (б) и вейвлетное преобразование с базовым паул-вейвлетом (в, г)

Заключение

В первой части статьи сделан переход от преобразования Фурье к непрерывному вейвлетному преобразованию. Даны основные понятия и рассмотрены некоторые особенности вейвлетного преобразования. Рассматривается эффективная методика численной реализации вейвлетного преобразования с помощью использования быстрого преобразования Фурье. В качестве иллюстрации применения вейвлетного анализа исследуются некоторые простейшие модельные сигналы.

Продолжение статьи будет опубликовано в последующих номерах журнала.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 01-02-17392 и 00-15-96673).

Приложение

Ниже приводится текст подпрограммы CWTRun, выполняющей вейвлетное преобразование на алгоритмическом языке С. Процедура CWTRun использует процедуру FFTRun, которая осуществляет вычисление прямого и обратного преобразования Фурье методом БПФ. Текст функции FFTRun не приводится. Для ознакомления с методикой БПФ можно порекомендовать монографию [27], а смысл ее формальных параметров обсуждается ниже.

Процедура CWTRun имеет следующие передаваемые ей формальные параметры:

xr	массив, задающий исследуемый сигнал;
n	число отсчетов исследуемого сигнала ($n \leq n_{\max}$);
dt	величина временного интервала между элементами ряда;

ds величина минимального временного масштаба, на котором производится вейвлетное преобразование;

MotherWavelet передаваемая процедуре CWTRun функция, задающая Фурье образ используемой базисной вейвлетной функции;

Wvlt возвращаемая процедурой CWTRun поверхность $|W(n,s)|$;

WvltPhase возвращаемая процедурой CWTRun поверхность $\varphi_W(n,s)$;

coi возвращаемая процедурой CWTRun граница ; области влияния краевых эффектов;

ls возвращаемое процедурой CWTRun число уровней $(ls+1)$ по шкале временных масштабов, используемых при расчете вейвлетного преобразования.

Остановимся кратко на структуре процедуры⁹ CWTRun. В начале процедуры описываются используемые локальные переменные. Массивы $fxr[nmax]$ и $fxi[nmax]$ используются для хранения фурье-образа исследуемого сигнала; $s[nmax]$ и $f[nmax]$ – массивы, содержащие соответственно наборы временных масштабов и частот, по которым производится вейвлетное преобразование; $fwvlts[nmax]$ – массив, содержащий фурье-образ базисной вейвлетной функции.

Далее осуществляется нахождение фурье-образа исследуемого сигнала, задаваемого своей действительной xr и мнимой xi частью, с помощью процедуры FFTRun, которой передаются следующие параметры:

type Здесь $type = -1$ – прямое и $type = 1$ – обратное фурье-преобразование;

nm длина ряда, по которому производится БПФ;

dt величина временного интервала между элементами ряда;

xr в случае прямого фурье-преобразования через данный параметр в процедуру передается действительная часть сигнала, а возвращается действительная часть фурье-образа сигнала, и наоборот в случае обратного преобразования;

xi аналогично предыдущему, но относительно мнимой части сигнала;

p $p = \log_2(nm)$.

Следующая часть тела процедуры CWTRun осуществляет непосредственно вейвлетное преобразование с базисной функцией MotherWavelet и находит границу области влияния краевых эффектов.

Фурье-образ базисной функции вейвлет преобразования находится с помощью функции MotherWavelet, которая передается в процедуру CWTRun как параметр. В ту или иную конкретную функцию нахождения фурье-образа базисной вейвлетной функции передаются параметры: $s1$: текущий временной масштаб s_j , nr : длительность временного ряда, по которому производится вейвлетное преобразование; dt : интервал между соседними отсчетами сигнала; f : массив частот, используемых при вейвлетном преобразовании; и, одновременно, функция возвращает фурье-образ вейвлетной функции на соответствующем временном масштабе $\hat{\psi}_0$: $fwvlts$ и время спадания автокорреляционной функции τ_c : $fvc oi$.

Ниже приводится непосредственно текст и объявления соответствующих процедур:

```
#include <math.h>
#define nmax 33554432 /* Размер рабочих массивов; минимальное
```

⁹ Текст процедуры снабжен подробными комментариями, что позволяет без труда разобраться с особенностями программирования численной реализации вейвлетного преобразования.

```

        значение равно числу отсчетов сигнала умноженному на 2,
        индекс 0 не используется */
#define smax 10000

/* Объявление типа указателя на функцию, осуществляющую
   процедуру нахождения Фурье-образа базового вейвлета */
typedef float (* WaveletType)
        (float s1, long np, float dt,
         float f[nmax], float fwlts[nmax],
         float fvcoi)

/* Процедура, выполняющая быстрое преобразование Фурье */
void FFTRun (int type, long nm, float dt, float xr[nmax],
             float xi[nmax], int p);
{
    . . . . .
}

/* Процедура расчета вейвлетного преобразования */
void CWTRun (float xr[nmax], long n; float dt, float ds,
             WaveletType MotherWavelet, float Wvlt[nmax][smax],
             float WvltPhase[nmax][smax], float coi[nmax]; long ls);
{
float xi[nmax], s[nmax], fxr[nmax], fxi[nmax], fwlts[nmax], f[nmax];

float f0, xmean, dt2, fvcoi; long i, j, p, np, nps, ls;

    dt2 = 2*dt;

/* Определение числа разбиений по шкале масштабов */
    ls = (long)(ln(n*dt/dt2)/ln(2.0))/ds; ls++;
/* Определение степени для процедуры БПФ */
    p = (long)(ln(n)/ln(2)); p++;
/* Определение длины ряда кратной степени 2 */
    np = (long)exp(p*ln(2.0));
    nps = (long)np/2 + 1;
/* Определение минимально разрешимой частоты */
    f0 = 2*p/(np*dt);
/* Определение набора частот, который используется для расчета
   вейвлетного преобразования */
    f(1) = 0;
    for (i=2; i<=nps; i++)
        f[i] = (i-1)*f0;
        f[np-i+2] = -f[i-1] ]

/* Усреднение данных анализируемого временного ряда */
    xmean=0;
    for (i=1; i<=n; i++)
        xmean += xr[i];
    xmean /= n;
    for (i=1; i<=n; i++)
        xr[i] -= xmean;
/* Добавление в ряд n нулевых значений */
    for (i=n+1; i<=np; i++)
        xr[i] = 0;
/* Присвоение нулевых значений мнимым частям членов ряда */
    for (i=1; i<=np; i++)
        xi[i] = 0;

```

```

/* Нахождение фурье-образа сигнала */
FFTRun(-1,np,dt,xr,xi,p);

for (i=1; i<=np; i++) [
  fxr[k] = xr[k];
  fxi[k] = xi[k] ]

/* Осуществление расчета вейвлет преобразования */
s[0] = 0;
for (j=1; j<=ls; j++){ /* Начало цикла по масштабам */
/* Определение текущего значения масштаба */
  s[j] = dt2*exp((j-1)*ds*ln(2));
/* Определение фурье-образа базисного вейвлета на s[j]
масштабе */
(*MotherWavelet)(s[j],np,dt,f,fwvlts,fvcoi);

/* Восстановление профиля поверхности W(n,s) на масштабе s(j),
осуществляемое с помощью процедуры обратного БПФ */
for (i=1; np; i++) [
  xr[i]:=fwvlts^[i]*fxr^[i];
  xi[i]:=fwvlts^[i]*fxi^[i] ]
FFTRun(1,np,dt,xr,xi,p);

/* Определение амплитуды и фазы вейвлетного преобразования */
for (i=1; i<=n; i++) [
  wvlt[j][i] = sqrt(xr[i]*xr[i]+xi[i]*xi[i]);
  wvltphase[j][i] = atan(xi[i]/xr[i]);
  if (xr[i]<0)
    wvltphase[j][i] = wvltphase[j][i] + M_PI ]
] /* Конец цикла по масштабам */

/* Расчет границы области влияния краевых эффектов */
for (i=1; i<=(long)(n+1)/2; i++) [
  coi[i] = fvcoi*dt*(i-1);
  coi[n-i+1] = coi[i]; ]
for (i=1; i<=n; i++){
  j = 0;
  do { j++
  } while ((j<ls) || (s[j]<coi[i]));
  if (j>ls) j = ls-1
  else j-;
  coi(i) = j+(coi[i]-s[j])/(s[j+1]-s[j]);
  if coi[i]>ls then
    coi[i] = ls;
  ]
}

```

Библиографический список

1. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: спектральный анализ локальных возмущений: (основы теории и примеры применения) // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 2. С. 3.
2. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и пример применения // УФН. 1996. Т. 39. С. 1085.

3. *Torrence Christopher and Compo Gilbert P.* A practical guide to wavelet analysis // Bulletin of the American Meteorological Society. 1998. Vol. 79. P. 61.
4. *Jacques Lewalle.* Tutorial on continuous wavelet analysis of experimental data. Electronic publication in the Internet: <http://www.ecs.syr.edu/faculty/lewallé/tutor/tutor.html>.
5. *Meyer Y.* Wavelets: algorithms and applications. Philadelphia: SIAM, 1993.
6. *Chui C.K.* Introduction to wavelets. San Diego: Academic Press, 1992.
7. *Polikar R.* The wavelet tutorial. Electronic publication in the Internet: <http://www.public.iastate.edu/~rpolikar/WAVELETS/WTtutorial.html>
8. *Kaiser G.* A friendly guide to wavelets. Birkhäuser, 1994. 300 p.
9. Wavelets in physics / Ed. J.C. Van den Berg. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
10. Wavelets in medicine and biology / Eds A. Aldroubi, M. Unser. Boca Raton: CRC Press, FL, 1994.
11. Wavelets: An elementary treatment of theory and applications / Ed. T. Koornwinder. Singapore: World Scientific, 1993.
12. *Heil C.E., Walnut D.F.* Continuous and discrete wavelet transforms // SIAM Rev. 1989. Vol. 31. P. 628.
13. Wavelets / Eds J.M. Combes, A. Grossman and P. Tchamitchian. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 386 p.
14. *Mallat S.* A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Trans. on Pattern Anal. Machine Intell. 1989. № 2. P. 7.
15. *Mallat S.* Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ // Trans. Am. Math. Soc. 1989. Vol. 315. P. 69.
16. *Захаров В.Г.* Разработка и применение методов вейвлет-анализа к нелинейным гидродинамическим системам. / Дисс. на соискание уч. ст. к.ф.-м.н. Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН. Пермь, 1997. 92 с.
17. *Dremin I.M., Ivanov O.V., Nechitailo V.A.* Wavelets and their use. Electronic preprint in Internet: <http://xxx.lanl.gov/hep-ph/0101182>, 16 January 2001.
18. *Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Вейвлетный анализ и его использование для анализа динамики нелинейных динамических систем различной природы // Изв. РАН, сер. физическая. 2000. Т. 64, № 12. С. 2383.
19. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1967. 778 с.
20. *Grossman A., Morlet J.* Decomposition of Hardy function into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. Vol. 15, № 4. P. 273.
21. *Paul T.* Function analytic on half-plane as quantum mechanical states // J. Math. Phys. 1984. Vol. 24, № 25. P. 136.
22. *Farge M.* Wavelet transform and their applications to turbulence // Annu. Rev. Fluid. Mech. 1992. Vol. 24, P. 395.
23. *Daubechies I.* The wavelet transform time-frequency localization and signal analysis // IEEE Trans. Inform. Theory. 1990. Vol. 36. P. 9614.
24. *Mallat S.G.* Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 315. P. 69.
25. *Lemarie P.G., Meyer Y.* Ondelettes et bases hilbertiennes // Rev. Math. Ibero-Americana. 1986. Vol. 2. P. 1.
26. *Battle G.* A block spin construction of ondelettes. Part 1 // Com. Math. Phys. 1987. Vol. 110. P. 607.
27. *Отнес Р., Эноксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир, 1982. 428с.
28. *Meyers S.D., Kelly B.G. and O'Brien J.J.* An introduction to wavelet analysis in oceanography and meteorology: With application to the dispersion of Yanai waves // Mon. Wea. Rev. 1993. Vol. 121. P. 2858.

29. Астафьева Н.М., Сонечкин Д.М. Мультимасштабный анализ индекса Южного Колебания // ДАН. 1995. Т. 344, № 4. С. 539.
30. Rayner N.A., Horton E.B., Parker D.E., Folland C.K., Hackett R.B. Version 2.2 of the global sea-ice and sea surface temperature data set, 1903-1994. / Tech. Rep., CRTN 74, Hadley Centre for Climate Prediction and Research. 1996.
31. Hudgins L., Friehe C.A., Mayer M.E. Wavelet transforms and atmospheric turbulence // Phys.Rev.Lett. 1993. Vol. 71. P. 3279.
32. Lau K.-M., Weng H.-Y. Climate signal detection using wavelet transform: How to make a time series sing // Bulletin of the American Meteorological Society. 1995. Vol. 76. P. 2391.
33. Liu P.-C. Wavelet spectrum analysis and ocean wind waves // Wavelets in Geophysics / Eds E. Foufoula-Georgiou and P. Kumar. Academic Press, 1994. P. 151.
34. Сонечкин Д.М., Даценко Н.М., Иващенко Н.Н. Новый способ экстраполяции хаотических временных рядов посредством вейвлетов с применением к динамике климата // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 4,5. С. 108.
35. Даценко Н.М., Сонечкин Д.М. Вейвлетный анализ временных рядов и динамика атмосферы // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1,2. С. 3.
36. Wang Y. Temporal structure of the Southern Oscillation as revealed by waveform and wavelet analysis // J. Climate. 1996. Vol. 9. P. 1586.
37. Weng H.-Y., Lau K.-M. Wavelets, period doubling, and time-frequency localization with application to organization of convection over the tropical western Pacific // J. Atmos. Sci. 1994. Vol. 51. P. 2523.
38. Фу К. Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин. М.: Наука, 1971.

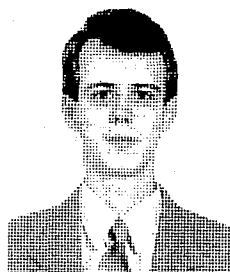
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 20.06.2001

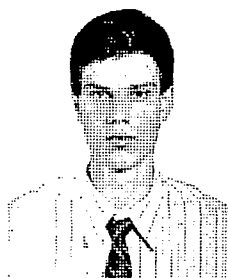
AN INTRODUCTION TO CONTINUOUS WAVELET ANALYSIS FOR SPECIALISTS IN FIELD OF NONLINEAR DYNAMICS

A.A. Koronovskii, A.E. Hramov

This paper attend to explain the mechanism of operation continuous wavelet analysis and possibility of its applications for investigation complex nonlinear oscillations. This work has been separated in several parts. In the first part base ideas of wavelet analysis and mathematical tools have been described. This works consists a lot of illustrations which allow obviously explain the main idea of wavelet analysis.



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой жизнедеятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Опубликовал в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым монографию «Нелинейная динамика в действии» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996). Автор ряда статей в центральной печати.



Храмов Александр Евгеньевич – окончил Саратовский госуниверситет (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика (1999). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, методы анализа и моделирования динамических систем, мощная СВЧ-электроника.

E-mail: ach@cas.ssu.runnet.ru



ДИНАМИКА БИЛЬЯРДОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ ГРАНИЦАМИ

А.Ю. Лоскутов, Л.Г. Акиншин, А.Н. Соболевский

Исследуются динамические системы, отвечающие бильярдам с периодически возмущаемыми границами. Предлагается общий подход, восходящий к теории Обри – Мезера. На основе исследования бильярдных отображений рассмотрены плоские бильярды с зависящими от времени границами в форме стадиона и в форме окружности, а также бильярд на двумерной сфере, граница которого образована круглым диском переменного радиуса.

Введение

Понятие бильярда в теоретической и математической физике возникло после того, как Д. Биркгоф [1] рассмотрел задачу о движении по инерции материальной точки в некоторой ограниченной области. Позже глубокие работы Н.С. Крылова [2], посвященные проблеме перемешивания в системе из упругих шаров, привели исследователей к необходимости рассмотрения задач бильярдного типа (см. [3–7] и приведенные там ссылки). Как известно, некоторые бильярды обладают хорошими статистическими свойствами и поэтому являются достаточно удобными моделями ряда систем статистической механики. Более того, многим динамическим задачам могут быть поставлены в соответствие отображения для траектории частицы в бильярдах заданной формы [5, 7–9].

Бильярдная динамическая система порождается свободным движением материальной точки (бильярдного шара) внутри области $Q \subset M$ с кусочно-гладкой границей ∂Q при условии гладкого отражения от ∂Q . Если $\dim M=2$, то закон движения шара определяется как «угол падения равен углу отражения». Как правило, граница каждого бильярда состоит из m компонент ∂Q_i , $i=1,2,\dots,m$, каждая из которых может быть рассеивающей, фокусирующей или нейтральной. Точки сшивки компонент ∂Q_i границы называются особыми. Остальные точки q – регулярными. Если для каждой компоненты ∂Q_i рассмотреть единичные нормали $\mathbf{n}(q)$ в каждой точке $q \in \partial Q_i$, направленные внутрь области Q , то они будут определять кривизну $k(q)$ кривой ∂Q , во всех регулярных точках q . Компонента ∂Q_i является *рассеивающей* и обозначается Γ^d , если $k(q) > 0$. Для $k(q) = 0$ и $k(q) < 0$ получим соответственно *нейтральную* Γ^0 и *фокусирующую* Γ^f границы бильярда. При попадании шара в особые точки границы его дальнейшее движение не определено.

Подавляющее большинство результатов получено для бильярдов с постоянной границей, заданных в евклидовом пространстве (см., например, [5, 7, 10–12] и приведенные там ссылки). В то же время работы, посвященные анализу динамических систем, отвечающих бильярдам с возмущаемыми границами, а также бильярдам, определенным в неевклидовых пространствах, немногочисленны [13–15]. Изучению некоторых свойств таких бильярдов и посвящена данная работа. Она является продолжением исследования бильярдов с изменяющимися границами (см. [16, 17]).

Задача о динамике частицы в бильярде, граница которого возмущается по некоторому закону, имеет прямое физическое приложение как модель неравновесной статистической механики. Рассмотрим область D в евклидовом пространстве \mathbf{R}^n , $n \geq 1$, ограниченную кусочно-гладкой границей ∂Q , и r непересекающихся n -мерных шаров $B_1, B_2, \dots, B_r \subset D$, называемых рассеивателями.

При условии, что B_i неподвижны, бильярд в области $Q = D \setminus \bigcup_{i=1}^r B_i$ называется *газом Лоренца* [18]. Для периодического расположения рассеивателей в области D было показано [5, 18], что в случае $n=2$ движение частицы является случайным и сводится к *броуновскому*. В реальной ситуации рассеиватели B_i всегда «дрожат» с небольшой амплитудой. Таким образом, обобщением газа Лоренца является бильярд с изменяющейся границей. Частный случай такого бильярда – рассеивающий бильярд с возмущаемой границей в форме круглого диска на торе Tor^2 с евклидовой метрикой. Очевидно, если граница бильярда изменяется по некоторому закону, то скорость бильярдного шара вследствие зависимости $\partial Q = \partial Q(t)$ может возрастать. Этот вопрос, восходящий к проблеме ускорения Ферми, ранее нами был изучен на примере газа Лоренца [16], а также бильярда типа стадион [17], и поэтому в данной работе не рассматривается.

Для неевклидовых пространств на поведение шара помимо свойств границы накладывається влияние кривизны пространства. В последней части работы рассматривается бильярд на сфере, образованный круглым диском переменного радиуса.

1. Общий подход

Согласно теории КАМ (Колмогорова – Арнольда – Мезера), периодические возмущения границы бильярда могут привести к хаотизации движения бильярдного шара, даже если невозмущенный бильярд был полностью интегрируемой системой. В то же время характер остаточных регулярных траекторий (меры нуль), сохраняющихся на месте разрушенных инвариантных кривых, рассматривается в так называемой теории Обри – Мезера [19–21]. В данном разделе обсудим возможность обобщения этой теории на случай бильярдов с изменяющейся границей.

Для формального описания бильярда с периодически зависящей от времени границей определим функцию $P(t, x): \mathbf{R} \times S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$, задающую движение его границы. Здесь $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ – единичная окружность, то есть отрезок $[0, 1]$ с отождествленными концами, x – циклическая координата на границе. Предполагается, что функция $P(t, x)$ периодически зависит от времени t , а ее образ при всех t есть простая замкнутая кривая, ограничивающая некоторую область.

В области, граница которой задана функцией $P(t, x)$, рассмотрим частицу единичной массы, движущуюся по инерции со скоростью v и кинетической энергией $E = v^2/2$. При столкновении частицы с границей бильярда ее скорость получает приращение Δv , а энергия – приращение ΔE , причем

$$\langle \vec{\tau}, \Delta \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \Delta E = \langle \mathbf{u}, \Delta \mathbf{v} \rangle, \quad (1)$$

где $\vec{\tau}$ - касательный вектор к границе бильярда, \mathbf{u} - скорость границы в точке, где происходит соударение.

Траектория частицы в бильярде однозначно задается последовательностью $\tilde{x} = \{(t_i, x_i)\}$, $t_i > t_{i-1}$, $i \in \mathbf{Z}$, где t_i - момент i -го столкновения частицы с границей, а x_i - значение координаты, соответствующее точке столкновения. Для данной траектории формально определим действие

$$L[\tilde{x}] = \sum_{-\infty}^{\infty} L(t_{i-1}, x_{i-1}; t_i, x_i), \quad (2)$$

где

$$L(s, x; t, y) = \inf_{\substack{\rho(s)=P(s, x) \\ \rho(t)=P(t, y)}} \int_s^t (\dot{\rho}^2(\tau)/2) d\tau = |P(t, y) - P(s, x)|^2 / (2(t-s)). \quad (3)$$

Здесь лагранжиан $v^2/2$ задается евклидовой метрикой на плоскости и может быть обобщен на произвольную риманову метрику. Если $t < s$ или точки $P(s, x)$ и $P(t, y)$ не могут быть связаны прямолинейным отрезком траектории, проходящей внутри области Q , положим $L(s, x; t, y) = +\infty$.

Ряд (2) расходится. Однако для траектории \tilde{x} можно поставить задачу о минимизации действия $L[\tilde{x}]$ в следующем смысле: траектория \tilde{x} называется *минимальной*, если для любой произвольной траектории \tilde{y} , отличающейся от \tilde{x} лишь при конечном числе значений индекса i , выполняется неравенство

$$L[\tilde{y}] - L[\tilde{x}] \geq 0.$$

Это требование корректно, поскольку речь идет о сумме конечного числа слагаемых.

Назовем траекторию *неособой*, если функция $L(t_{i-1}, x_{i-1}; t_i, x_i)$ дифференцируема по своим аргументам при всех $i \in \mathbf{Z}$. Легко понять, что неособые минимальные траектории удовлетворяют соотношениям (1). В самом деле, необходимыми условиями минимума действия (2) являются равенства

$$\frac{\partial L(t_{i-1}, x_{i-1}; t_i, x_i)}{\partial t_i} + \frac{\partial L(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1})}{\partial t_i} = 0,$$

$$\frac{\partial L(t_{i-1}, x_{i-1}; t_i, x_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial L(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1})}{\partial x_i} = 0.$$

Теперь, используя функцию (3) и замечая, что

$$\mathbf{v}_i = (P(t_i, x_i) - P(t_{i-1}, x_{i-1})) / (t_i - t_{i-1}), \quad \Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i,$$

$$\mathbf{u}_i = \partial P(t_i, x_i) / \partial t_i, \quad \vec{\tau}_i = (\partial P(t_i, x_i) / \partial x_i) / |\partial P(t_i, x_i) / \partial x_i|,$$

получаем $\mathbf{v}_{i+1}^2/2 - \mathbf{v}_i^2/2 = \langle \mathbf{u}_i, \Delta \mathbf{v}_i \rangle$, $\langle \vec{\tau}_i, \Delta \mathbf{v}_i \rangle = 0$.

Полное описание структуры множества минимальных траекторий бильярда с

неподвижной границей ($\mathbf{u}=0$) можно получить, обобщив результаты работ С. Обри и Дж. Мезера [19–21]. В этом случае траекторию достаточно задавать последовательностью $\{x_i\}$, $i \in \mathbf{Z}$ и вместо $L(s, x; t, y)$ рассматривать функцию $L(x, y) = |P(y) - P(x)|^2/2$. Согласно теории Обри – Мезера, каждой минимальной траектории соответствует число вращения $0 \leq \omega \leq 1$, причем для рационального значения ω минимальные траектории соответствуют циклам или сепаратрисным контурам, а для иррационального ω – инвариантным торам или кантороторам. Хаотические траектории, если они присутствуют в системе, не могут быть минимальными.

В одномерном случае на окружности S^1 (а также на N -мерном торе Tor^N) к построению минимальных конфигураций можно подойти следующим образом [22]. Удастся показать, что существует множество мощности континуум (параметризованное некоторой величиной $a \in \mathbf{R}^1$) непрерывных периодических функций, обладающих свойством

$$s(x) = \min_{\rho} (s(\rho) + L(\rho, x)) + \text{const.} \quad (4)$$

Здесь x – циклическая координата на окружности (или вектор циклических координат на торе), а функция $L(\rho, x)$ определяется аналогично (2) как действие, набираемое частицей вдоль траектории своего движения. Отличие случая, рассмотренного в [22], от задачи о бильярде заключается в том, что там частица предполагается не свободной, а движущейся в периодическом по времени потенциале, но зато отсутствуют стенки. Оказывается, что всякой функции $s(x)$, удовлетворяющей соотношению (4), соответствует некоторое множество минимальных конфигураций. Эти конфигурации строятся следующим образом. Если $\tilde{x} = \{x_i\}$, $i \in \mathbf{Z}$ такая конфигурация, то

$$x_{i-1} = \arg \min_{\rho} (s(\rho) + L(\rho, x_i)),$$

причем множество $\arg \min_{\rho} (s(\rho) + L(\rho, x_i))$ состоит из единственной точки. Для каждого числа вращения существует функция $s(x)$, удовлетворяющая (4) и порождающая по описанному правилу минимальную конфигурацию с данным числом вращения. Аналогичный подход может быть применен к бильярдной задаче. Основная трудность здесь состоит в том, что асимптотическое поведение функции $L(s, x; t, y)$ при $(t-s) \rightarrow \infty$, $|x-y| \rightarrow \infty$ хуже, чем поведение аналога этой функции в задаче о торе: $L(s, x; t, y)$ стремится к 0 при $(t-s) \rightarrow \infty$ и периодична, а следовательно, ограничена по переменным x и y . Поэтому нижняя грань в (4) может достигаться на некомпактном множестве и даже на бесконечности. Выход заключается в правильном обобщении функционального уравнения (4). При использовании такого подхода свойства минимальных конфигураций бильярдной задачи сводятся к свойствам решений обобщенного уравнения (4) аналогично тому, как это сделано в [22].

2. Динамика бильярда типа стадион

Рассмотрим бильярд с границей ∂Q в форме стадиона, состоящей из двух параллельных прямых Γ^0 длины l и двух малых дуг парабол Γ^1 (рис. 1). Такой бильярд исследован достаточно полно (см., например, [5, 7, 8, 11]). Опираясь на результаты этих работ, можно развить теорию бильярдов с изменяющейся границей. Пусть

$$l \gg a \gg b, \quad (5)$$

где a – расстояние между прямыми. Это условие несколько упрощает задачу и дает

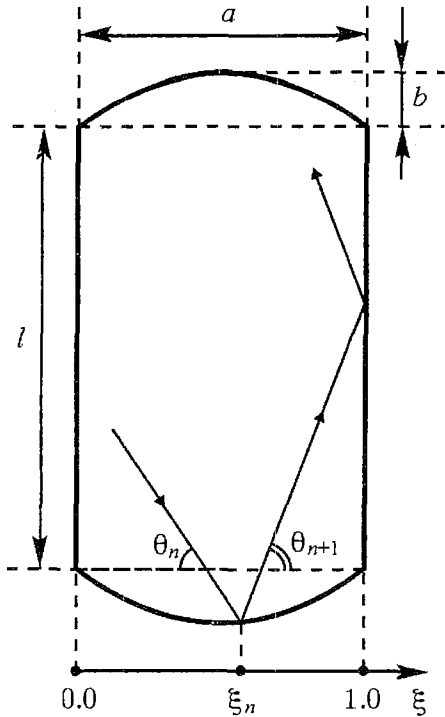


Рис. 1. Общий вид бильярда типа стадион

типа стадион изменяется так, что ее нейтральные компоненты Γ^0 меняют длину, $l=l(t)$. При этом полагаем, что амплитуда колебаний пренебрежимо мала по сравнению с величиной l . Для изучения такого бильярда и получения отображения рассмотрим сначала отражение частицы от движущейся со скоростью u наклонной стенки (рис. 3). Тогда для проекций скорости частицы легко получить следующее преобразование:

$$v_x' = v_x \cos 2\beta + (v_y - u) \sin 2\beta,$$

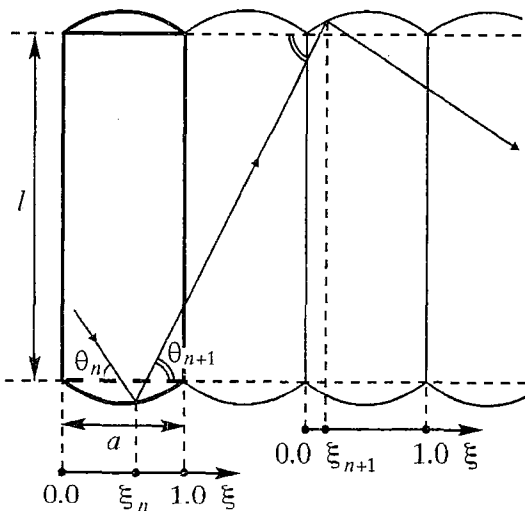


Рис. 2. Развертка поверхности бильярдного стола бильярда типа стадион и введенные координаты θ_n и ξ_n

возможность явного аналитического рассмотрения. Предположим, что $\chi(\xi) = 4b\xi(1-\xi)$ — функция, описывающая форму дуг Γ^f границы ∂Q , $\max(\chi) = b$.

Представим каждый участок траектории шара между двумя последовательными отражениями от вертикальных стенок на отдельном листе. Если затем склеить полученные листы, то получится бесконечная развертка поверхности бильярдного стола (рис. 2). Введем дискретные динамические переменные θ_n и ξ_n , как показано на рисунке. Тогда нетрудно получить следующее отображение:

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n, \xi_n) = \theta_n - \{(8b/a)(1-2\xi_n)\}, \quad (6)$$

$$\xi_{n+1} = g(\theta_n, \xi_n) = \{\xi_n + (l/a) \operatorname{ctg} \theta_{n+1}\},$$

где учтены условия (5) и фигурные скобки $\{\cdot\}$ означают взятие дробной части.

Допустим, что граница бильярда

Допустим, что граница бильярда

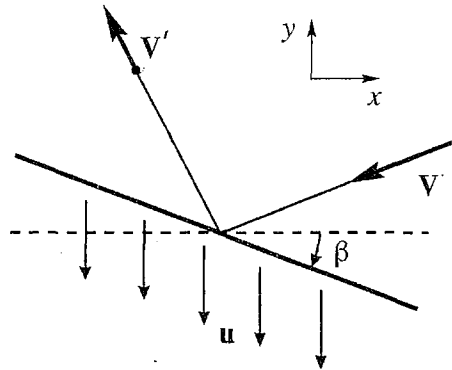


Рис. 3. Отражение точечной частицы от движущейся стенки. Скорость u стенки параллельна оси y и направлена противоположно ей. Угол наклона β стенки отсчитывается от оси x по часовой стрелке

$$v_y' = (v_y - u) \cos 2\beta - v_x \sin 2\beta - u,$$

где v_x , v_y и v_x' , v_y' - составляющие скорости частицы до и после отражения от стенки, соответственно. Теперь нетрудно записать отображение для проекций скорости шара в исследуемом бильярде

$$v_{x_{n+1}} = v_{x_n} \cos 2\beta_n + (v_{y_n} - u_n) \sin 2\beta_n,$$

$$v_{y_{n+1}} = (v_{y_n} - u_n) \cos 2\beta_n - v_{x_n} \sin 2\beta_n - u_n,$$

где u_n - скорость компоненты Γ^f в момент n -го отражения шара и

$$\beta_n = \arctg(4b(1-2\xi_n)/a). \quad (7)$$

Используя соотношение (5) и выражение, описывающее форму малой дуги параболы $\chi(\xi)=4b\xi(1-\xi)$, в приближении малых колебаний можно получить неявное отображение для переменной ξ

$$\xi_{n+1} = \{\xi_n + [(l + 4b\xi_n(\xi_n - 1) + 4b\xi_{n+1}(\xi_{n+1} - 1))/a]v_{x_{n+1}}/v_{y_{n+1}}\}. \quad (8)$$

Легко видеть, что оно разрешимо и позволяет выразить последующее значение ξ_{n+1} через предыдущее ξ_n

$$\xi_{n+1} = a/(8b)(v_{y_{n+1}}/v_{x_{n+1}})[1 + 4b/a - [(1 + (4b/a)(v_{x_{n+1}}/v_{y_{n+1}}))^2 - (16b/a)(v_{x_{n+1}}/v_{y_{n+1}})\xi_n]^{1/2}], \quad (9)$$

где

$$\xi_n = \{\xi_n + [(l + 4b\xi_n(\xi_n - 1))/a]v_{x_{n+1}}/v_{y_{n+1}}\}. \quad (10)$$

Как и прежде, выражение $\{\cdot\}$ в соотношениях (8) и (10) означает взятие дробной части. Поскольку $u_n = u(t_n)$, то для построения полного отображения необходимо дополнительно иметь преобразование для фазы колебания Γ^f в момент времени, в который происходит n -е отражение шара. Для случая малых колебаний это преобразование будет иметь вид

$$t_{n+1} = 1/v_{y_{n+1}}[l + 4b\xi_n(\xi_n - 1) + 4b\xi_{n+1}(\xi_{n+1} - 1)] + t_n.$$

Таким образом, преобразование для переменных v_{x_n} , v_{y_n} , ξ_n , t_n , задающих динамическую систему, отвечающую движению шара в бильярде типа стадион с малыми колебаниями фокусирующих компонент границы, можно записать как

$$\begin{aligned} v_{x_{n+1}} &= v_{x_n} \cos 2\beta_n + (v_{y_n} - u_n) \sin 2\beta_n, \\ v_{y_{n+1}} &= (v_{y_n} - u_n) \cos 2\beta_n - v_{x_n} \sin 2\beta_n - u_n, \\ \xi_{n+1} &= a/(8b)(v_{y_{n+1}}/v_{x_{n+1}})[1 + 4b/a - \\ &\quad - [(1 + (4b/a)(v_{x_{n+1}}/v_{y_{n+1}}))^2 - (16b/a)(v_{x_{n+1}}/v_{y_{n+1}})\xi_n]^{1/2}], \\ t_{n+1} &= 1/v_{y_{n+1}}[l + 4b\xi_n(\xi_n - 1) + 4b\xi_{n+1}(\xi_{n+1} - 1)] + t_n, \end{aligned} \quad (11)$$

где значения β_n и ξ_n определяются из соотношений (7) и (10), соответственно.

Использование условия (5) позволяет существенно упростить данное отображение

$$v_{x_{n+1}} = v_{x_n} \cos 2\beta_n + (v_{y_n} - u_n) \sin 2\beta_n,$$

$$\begin{aligned}
 v_{y_{n+1}} &= (v_{y_n} - u_n) \cos 2\beta_n - v_{x_n} \sin 2\beta_n - u_n, \\
 \xi_{n+1} &= \{\xi_n + (l/a)(v_{x_{n+1}}/v_{y_{n+1}})\}, \\
 t_{n+1} &= l/v_{y_{n+1}} + t_n.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Как известно (см., например, [7] и приведенные там ссылки), условием существования хаотического поведения в динамической системе, отвечающей бильярду, является выполнение неравенства $K_0' \geq 1$, где K_0' - коэффициент растяжения фаз. В рассматриваемом случае $K_0' = |(d\xi_{n+1}/d\xi_n) - 1|$, то есть

$$\begin{aligned}
 K_0' &= |16bl/(a^2 + 16b^2 - 64b^2\xi + 64b^2\xi^2) \times \\
 &\times [(u_n - v_{y_n}) \cos 2\beta + v_{x_n} \sin 2\beta] / [u_n + (v_{y_n} - u_n) \cos 2\beta + v_{x_n} \sin 2\beta] + \\
 &+ 16bl[v_{x_n} \cos 2\beta + (v_{y_n} - u_n) \sin 2\beta] / [u_n + (v_{y_n} - u_n) \cos 2\beta + \\
 &+ v_{x_n} \sin 2\beta]^2 \times (v_{x_n} \cos 2\beta + (u_n - v_{y_n}) \sin 2\beta) / (a^2 + 16b^2 - 64b^2\xi + 64b^2\xi^2)|,
 \end{aligned}
 \tag{13a}$$

где $\beta = \arctg(4b(1 - 2\xi)/a)$. Используя неравенства (5) и вводя обозначения $v_{x_n}/v_{y_n} = x$, $u_n/v_{y_n} = y$, $K = 16bl/a^2$, выражение (13a) можно существенно упростить

$$K_0' = K|(2y^2 - 3y + x^2 + 1)/(4y^2 - 4y + 1)|.
 \tag{13б}$$

Для соответствующего бильярда с *постоянной* границей, то есть при $u_n = \text{const}$ из (13б) найдем $K_0 = K/\sin^2\theta_{n+1}$, $K = 16bl/a^2$. При этом отображение (12) перейдет в отображение (6). Используя его матрицу преобразования

$$A \equiv \begin{pmatrix} \partial f / \partial \theta|_{\theta_n, \xi_n} & \partial f / \partial \xi|_{\theta_n, \xi_n} \\ \partial g / \partial \theta|_{\theta_n, \xi_n} & \partial g / \partial \xi|_{\theta_n, \xi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 16b/a \\ -l/(a \sin^2\theta_{n+1}) & 1 - 16lb/(a^2 \sin^2\theta_{n+1}) \end{pmatrix},$$

определим корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = (2 - K_0 \pm (K_0^2 - 4K_0)^{1/2})/2$. При $K_0 \leq 4$ получим $|\lambda_{1,2}| = 1$, что гарантирует существование в области

$$\arcsin(K^{1/2}/2) \leq \theta \leq \pi - \arcsin(K^{1/2}/2)$$

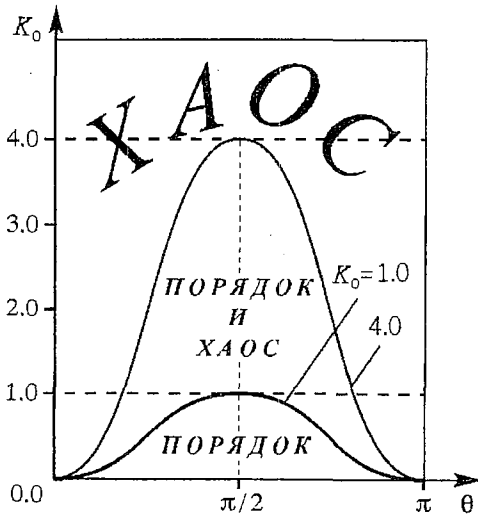


Рис. 4. Области в пространстве параметров и начальных условий с качественно различной динамикой для бильярда типа стадион. Области 1 и 2 разделены кривой $K = \sin^2\theta$, области 2 и 3 - кривой $K = 4\sin^2\theta$

неподвижных точек типа центр с семействами инвариантных кривых. Эта область углов уменьшается с увеличением K и исчезает при $K > 4$. Граница хаотического поведения определяется из условия $K \sim 1$. Значит, если $16bl/a^2 \geq 1$, то бильярд должен обладать хаотическими свойствами.

Таким образом, в пространстве параметров и начальных условий бильярда типа стадион с постоянной границей имеются три области с качественно различным движением (рис. 4).

Область 1 ($K_0 < 1$), где существует только регулярное (периодическое и квазипериодическое) движение.

Область 2 ($1 \leq K_0 \leq 4$), в которой сосуществуют регулярная и хаотическая динамика. Хаотические траектории

лежат в узких слоях между семействами инвариантных кривых, окружающих неподвижные точки и резонансы различных порядков.

Область 3 ($K_0 > 4$), где наблюдается только хаотическая динамика.

Вернемся к общему случаю бильярда типа стадион с $u_n \neq 0$. В пространстве параметров и начальных условий такого бильярда также можно выделить три области.

Область 1, где $K_0' < 1$.

Область 2, где $1 \leq K_0' \leq 4$.

Область 3, где $K_0' > 4$.

В области 3, как и в случае бильярда с постоянной границей, наблюдается только хаотическая динамика, а в области 2 - как хаотическое, так и регулярное движение. Однако в области 1 имеется *качественное отличие* от рассмотренного выше бильярда с $dQ = \text{const}$. Кроме регулярных, здесь присутствуют хаотические траектории. Поэтому по своим динамическим свойствам область 1 в исследуемом бильярде становится подобной области 2 в бильярде с невозмущенной границей.

Рассмотрим вопрос о *стабилизации* хаотического движения бильярдного шара, то есть подавлении хаоса в бильярде, описываемом отображением (12). Для этого из (13б) найдем такие соотношения между x и y , при выполнении которых система находится в области 1 или в области 2. Заметим, что смысл имеют только значения $y < 1/2$, поскольку в противном случае шар после отражения от границы будет двигаться вслед за ней, что не соответствует условию малости колебаний Γ^f . Далее, условие существования регулярных траекторий $K_0' \leq 4$ выполняется только при

$$\begin{cases} K < 8, \\ y < c, \end{cases} \quad (14a)$$

где

$$c = (-3/4K + 4 - (K^2/16 + 4Kx^2 - K^2x^2/2)^{1/2}) / (8 - K). \quad (14б)$$

При $K < 8$ величина c существует всегда. Стабилизация хаотического поведения бильярдного шара посредством возмущения границы бильярда означает, что выполняется $K_0' \leq 4$, если при этом $K > 4$ или $K_0 > 4$. Однако из соотношений (14а,б) нетрудно видеть, что совместное удовлетворение этих условий неизбежно приводит к неограниченному росту скорости шара. Действительно, поскольку

$$K_0 = K / (1 + x^2), \text{ при } \begin{cases} K_0' \leq 4 \\ K_0 > 4 \end{cases} \text{ всегда } c < 0. \text{ Это означает, что } y = u_n / v_{y_n} < 0 \text{ (см. (14а)), то}$$

есть имеют место *только встречные* столкновения бильярдного шара с границей. Таким образом, *подавление хаоса в исследуемом бильярде в указанном выше смысле возможно только при неограниченном возрастании скорости шара*. Если же рассматривать и сопутствующие столкновения, то условие существования регулярных траекторий нарушается.

3. Динамика бильярдov с границей в форме окружности на плоскости и на сфере

Данная часть работы посвящена исследованию некоторых свойств плоских и сферических бильярдov с границей в форме окружности при условии периодического изменения ее радиуса.

3.1. Плоский бильярд в форме окружности. Рассмотрим сначала простой случай бильярда с границей в форме окружности, $\partial Q = \Gamma^f$, $r_{\Gamma^f} \neq r_{\Gamma}(t)$, где Γ^f обозначает окружность, а r – ее радиус. Такой бильярд не обладает хаотическим поведением, и динамическая система, отвечающая ему, является полностью интегрируемой. Пусть граница бильярда возмущается таким образом, что ее радиус изменяется по некоторому закону $r=r(t)$. Опишем динамику такой системы переменными v_{r_n} , v_{τ_n} , t_n , φ_n , где v_{r_n} , v_{τ_n} – соответственно радиальная и тангенциальная составляющие скорости шара при n -м отражении от границы, происходящем в момент времени t_n в точке с угловой координатой φ_n . При условии, что $\dot{r}(t_n) \ll v_{r_n}$ для любого n , отображение, описывающее поведение шара в бильярде с подвижной границей в форме окружности, дается выражением

$$\begin{aligned} v_{r_{n+1}} &= v_{\tau_n} \sin(\varphi_{n+1} - \varphi_n) - (v_{r_n} - 2\dot{r}(t_n)) \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n), \\ v_{\tau_{n+1}} &= v_{\tau_n} \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n) - (v_{r_n} - 2\dot{r}(t_n)) \sin(\varphi_{n+1} - \varphi_n), \\ t_{n+1} &= (r(t_{n+1})/v_{\tau_n}) \sin(\varphi_{n+1} - \varphi_n) + t_n, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \pi - \arcsin(r(t_n)/r(t_{n+1}) - v_{\tau_n}/(v_{\tau_n}^2 + v_{r_n}^2)^{1/2}) - \\ &- \arcsin(v_{\tau_n}/(v_{\tau_n}^2 + (v_{r_n} - 2\dot{r}(t_n))^2)^{1/2}). \end{aligned} \quad (15)$$

Легко видеть, что данная система является трехмерной, поскольку переменную φ_n можно исключить. В случае малых колебаний, $r(t_n) = r(t_{n+1}) \equiv r = \text{const}$, $\dot{r}(t_n) \neq 0$, то есть, когда пренебрегают смещением границы, выполняется $v_{\tau_n} = v_{\tau_{n+1}} \equiv v_{\tau} = \text{const}$, и отображение (15) существенно упрощается

$$\begin{aligned} v_{r_{n+1}} &= v_{r_n} - 2\dot{r}(t_n), \\ t_{n+1} &= 2rv_{r_{n+1}}/(v_{r_{n+1}}^2 + v_{\tau}^2) + t_n. \end{aligned} \quad (16)$$

Нетрудно понять, что, хотя бильярд с постоянной границей в форме окружности является полностью интегрируемой системой и хаотическое поведение шара в таком бильярде невозможно, при гармоническом изменении границы, $r(t) = r + A \cos \omega t$, происходит хаотизация движения. Действительно, вследствие приближения $\dot{r}(t_n) \ll v_{r_n}$ отображение (16) можно рассматривать как возмущенное отображение вида

$$\begin{aligned} v_{r_{n+1}} &= v_{r_n} \equiv v_r = \text{const}, \\ t_{n+1} &= 2rv_r/(v_r^2 + v_{\tau}^2) + t_n \end{aligned} \quad (17)$$

для полностью интегрируемой системы – плоского бильярда с неподвижной границей в форме окружности. В этом случае переменная v_r будет играть роль переменной действия, а t – угла. Переход от (17) к (16) происходит посредством добавления к переменной действия v_r возмущения порядка $A\omega$.

Отметим, что аналогично можно рассмотреть эллиптический бильярд с возмущаемой границей. Как известно, бильярд с неподвижной границей в форме эллипса является полностью интегрируемой системой. Однако, если границу такого бильярда возмущать, то, как и в случае бильярда с границей в форме окружности, его динамика качественно изменится. При этом возмущение границы можно производить двумя различными способами: статически, когда граница в момент удара неподвижна, и динамически. Такой бильярд с нескольких точек зрения рассматривался в работе [14], где было показано, что в обоих случаях

наблюдается переход от полной интегрируемости системы к хаосу. Строгие результаты о симметричном аналитическом возмущении эллиптического бильярда, приводящем к расщеплению сепаратрис, описаны в работах [7,23].

3.2. Бильярд в форме окружности на сферической поверхности.

Рассмотрим область Q , имеющую границу ∂Q в форме окружности, расположенную на двумерной сфере S^2 радиуса R . Радиус r границы ∂Q отсчитывается по дуге большого круга (рис. 5). Тогда движение шара в таком бильярде в полярной системе координат, центр которой совпадает с центром окружности ∂Q , а плоскость – с плоскостью ∂Q , будет определяться единственной динамической переменной φ_n . Значения φ_n задают угловые координаты n -го отражения частицы от окружности

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - 2\arctg(\operatorname{tg}\theta/\cos(r/R)), \quad (18)$$

где θ – угол падения (отражения) шара, который определяется как угол между траекторией шара и окружностью *на сфере*, а не в проекции на плоскость окружности. Легко видеть, что динамика такого бильярда полностью регулярна. Заметим, что отображение (18) совпадает с точностью до знака с отображением для плоского ($R=\infty$) бильярда с неподвижной границей в форме окружности. Различие в знаке связано с рассмотрением бильярда, определенного «снаружи» окружности, то есть, формально, с условием $r < \pi R/2$ (рис. 6). Предположим, что радиус окружности растет, так что $r \rightarrow \pi R/2$. Тогда, как нетрудно понять, из «рассеивающего» бильярд постепенно превращается в «бильярд с нейтральными компонентами», и при дальнейшем изменении радиуса окружности он становится «фокусирующим». Геометрия задачи такова, что в зависимости от радиуса окружности получается «рассеивающий», «фокусирующий» или «нейтральный» бильярд на сфере. Во всех случаях динамика такого бильярда будет регулярна. Когда бильярд имеет границу, состоящую из фокусирующих и нейтральных компонент (например, типа стадион), то основной причиной, вызывающей хаотичность, является расфокусирование [5, 11]. Этот же механизм лежит в основе динамики таких бильярдов, расположенных на двумерной сфере S^2 [24–26].

Допустим теперь, что граница бильярда осциллирует так, что ее радиус

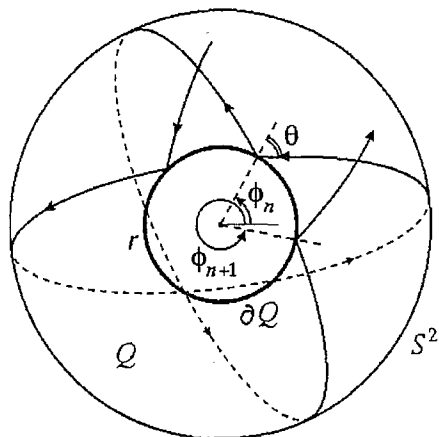


Рис. 5. Бильярд на сферической поверхности с границей в форме окружности радиуса r

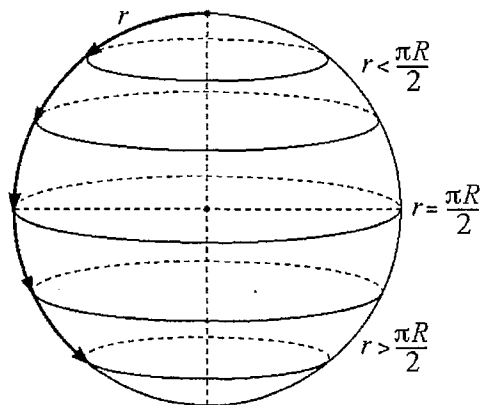


Рис. 6. Различные виды бильярдов на сферической поверхности с границей в форме окружности

меняется со временем по некоторому закону $r=r(t)$. Представим динамику такой системы в переменных $v_{r_n}, v_{\tau_n}, t_n, \varphi_n$, где v_{r_n}, v_{τ_n} имеют тот же смысл, что и в предыдущем пункте. Тогда в предположении $\dot{r}(t_n) \ll v_{r_n}$ динамическая система, отвечающая движению частицы в бильярде с изменяющейся границей на сфере, примет вид

$$\begin{aligned}
 v_{\tau_{n+1}} &= v_{\tau_n} \sin(r(t_n)/R) / \sin(r(t_{n+1})/R), \\
 v_{r_{n+1}} &= ((v_{r_n} - 2\dot{r}(t_n))^2 + v_{\tau_n}^2 [1 - \sin^2(r(t_n)/R) / \sin^2(r(t_{n+1})/R)])^{1/2}, \\
 t_{n+1} &= R / [(v_{r_n} - 2\dot{r}(t_n))^2 + v_{\tau_n}^2]^{-1/2} \times \\
 &\times \left[2\pi - \arcsin \left(\frac{\sin(r(t_n)/R)}{[1 + v_{\tau_n}^2 \cos^2(r(t_n)/R) / (v_{r_n} - 2\dot{r}(t_n))^2]^{1/2}} \right) - \right. \\
 &\left. - \arcsin \left(\frac{\sin(r(t_{n+1})/R)}{[1 + (v_{\tau_{n+1}}^2 / v_{r_{n+1}}^2) \cos^2(r(t_{n+1})/R)]^{1/2}} \right) \right] + t_n, \\
 \varphi_{n+1} &= \varphi_n - \operatorname{arctg} \left(\frac{v_{r_n} - 2\dot{r}(t_n)}{v_{\tau_n} \cos(r(t_n)/R)} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{v_{r_{n+1}}}{v_{\tau_{n+1}} \cos(r(t_{n+1})/R)} \right).
 \end{aligned} \tag{19}$$

В случае малых по амплитуде колебаний границы тангенциальная составляющая скорости частицы удовлетворяет условию $v_{\tau_{n+1}} \equiv v_{\tau_n} = \text{const}$ и поэтому может быть исключена. Следовательно, отображение (19) перепишется как

$$\begin{aligned}
 v_{r_{n+1}} &= v_{r_n} - 2\dot{r}(t_n), \\
 \varphi_{n+1} &= \varphi_n - 2\operatorname{arctg}(v_{r_n} / [v_{\tau_n} \cos(r/R)]), \\
 t_{n+1} &= 2R / (v_{r_{n+1}}^2 + v_{\tau_n}^2)^{1/2} [\pi - \arcsin(\sin(r/R)(1 + (v_{\tau_n}^2 / v_{r_{n+1}}^2) \cos^2(r/R))^{-1/2})] + t_n.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Хотя бильярд на сфере не является хаотической динамической системой, малые колебания его границы, как и для бильярда на плоскости, приводят к рождению хаоса. Действительно, обратимся к отображению (20). Вследствие приближений $\dot{r}(t_n) \ll v_{r_n}$ его можно рассматривать как возмущенное отображение вида

$$\begin{aligned}
 v_{r_{n+1}} &= v_{r_n} \equiv v_r = \text{const}, \\
 \varphi_{n+1} &= \varphi_n - 2\operatorname{arctg}(v_r / (v_{\tau_n} \cos(r/R))), \\
 t_{n+1} &= 2R / (v_r^2 + v_{\tau_n}^2)^{1/2} [\pi - \arcsin(\sin(r/R)(1 + (v_{\tau_n}^2 / v_r^2) \cos^2(r/R))^{-1/2})] + t_n,
 \end{aligned} \tag{21}$$

которое описывает динамику бильярда с неподвижной границей в форме окружности, заданного на сфере. Для этого отображения переменная v_r играет роль действия, а t_n — угла. Таким образом, переход от невозмущенного отображения (21) к возмущенному (20) осуществляется посредством наложения на переменную v_r малого возмущения, которое и приводит систему к неинтегрируемости.

Заключительные замечания

Многие хаотические явления целесообразно исследовать на примерах систем, в которых хаотические свойства наиболее ярко выражены, и которые имеют непосредственное отношение к естественным моделям. Такими системами являются бильярды. Хотя бильярды относятся к упрощенным задачам классической статистической механики, имеется естественная аналогия между рассеивающими бильярдами и геодезическими потоками на многообразиях всюду отрицательной кривизны. Роль отрицательной кривизны в случае бильярда играет его граница. Более того, для ряда бильярдных систем доказано, что они обладают хорошими статистическими свойствами. На этом основано доказательство эргодической гипотезы для системы из твердых шаров в ящике. Естественным обобщением такой системы является бильярд, граница которого не является неподвижной, а изменяется по какому-либо закону. Бильярды с зависящей от времени границей исследовать гораздо сложнее. Одним из наиболее перспективных подходов здесь может быть развитие многомерного обобщения теории Обри – Мезера (см. п. 1). Другой путь изучения свойств бильярдных систем с переменной границей – построение и анализ соответствующих динамических систем. Использование такого пути позволяет сделать вывод, что в бильярде типа стадион с определенным образом возмущаемой границей возможна стабилизация хаотической динамики в том смысле, что в таком бильярде присутствуют *регулярные* (периодические) траектории, которые не существовали в случае неподвижной границы. Напротив, если граница бильярда имеет форму окружности на плоскости или на сфере, малые возмущения приводят к хаотизации динамики шара.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Я.Г. Синаю, профессору В.И. Оселедцу и профессору Б.М. Гуревичу за плодотворные обсуждения.

Библиографический список

1. *Birkhoff G.D.* Dynamical Systems. N.Y., American Mathematical Society, 1927.
2. *Крылов Н.С.* Работы по обоснованию статистической физики. М.–Л.: АН СССР, 1950.
3. *Синай Я.Г.* К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 6. С. 1261.
4. *Sinai Ya. G.* Development of Krylov ideas // An addendum to the book N.S.Krylov «Works on the foundations of statistical physics». Princeton: Princeton Univ. Press, 1979. P. 239.
5. *Бунимович Л.А.* Системы гиперболического типа с особенностями // Динамические системы. М.: ВИНТИ, 1985. Т.2. С. 173.
6. *Tabachnikov A.* Billiards. France Mathematical Soc. Press, 1995.
7. *Tabanov M.B.* Separatrices splitting for Birkhoff's billiard in symmetric convex domain, closed to an ellipse // Chaos. 1994. Vol. 4, № 4. P. 595.
8. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
9. *Fundamental Problems in Statistical Mechanics. Vol. 3 / Ed. R.H. Cohen.* Amsterdam: Elsevier, 1975.
10. *Синай Я.Г.* Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдных систем // Успехи матем. наук. 1970. Т. 25, вып. 2. С. 141.

11. Bunimovich L.A. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards // Commun. Math. Phys. 1979. Vol. 65, № 3. P. 295.
12. Bunimovich L.A. Conditions of stochasticity for two-dimensional billiards // Chaos. 1991. Vol. 1, № 2. P. 187.
13. Lomili H.E. Perturbations of elliptic billiards // Physica D. 1996. Vol. 99, № 1. P. 59.
14. Koiller J., Markarian R., Kamphorst S.O., de Carvalho S.P. Static and time-dependent perturbations of the classical elliptical billiard // J. Stat. Phys. 1996. Vol. 83, № 1–2. P. 127.
15. Eleonsky V.M., Korolev V.G., Kulagin W.E. Dynamical systems with a Hamiltonian that is a function of momentum modul: pseudobilliards // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, № 6. P. 6604.
16. Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б., Акиншин Л.Г. Механизм ускорения Ферми в рассеивающих бильярдах с возмущаемыми границами // ЖЭТФ. 1999. Т. 116, вып. 5 (11). С. 1781.
17. Loskutov A., Ryabov A.B., Akinshin L.G. Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries // Physica A. 2000. Vol. 33, № 44. P. 7973.
18. Bunimovich L.A., Sinai Ya.G. Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatters // Commun. Math. Phys. 1981. Vol. 78, № 4. P. 479.
19. Aubrey S. The twist map, the extended Frenkel – Kontorova model and the devil's staircase // Physica D. 1983. Vol. 7, № 1–3. P. 240.
20. Mather J.F. Existence of quasiperiodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus // Topology. 1982. Vol. 21. P. 457.
21. Mather J., Forni G. Action Minimizing orbits in Hamiltonian system // Lecture Not. in Math. Springer, Berlin, 1994. Vol. 1589.
22. Соболевский А.Н. О периодических решениях уравнения Гамильтона – Якоби с периодической силой // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. С. 265.
23. Levallois P., Tabanov M.B. Separation des separatrices du billiard elliptique pour une perturbation algebrigue et symetrique de l'ellipse // C.R. Acad. Sci. Paris. 1993. Т. 316. Serie 1, № 6. P. 589.
24. Donnay V.J. Geodesic flow on the two-sphere. Part 1: Positive measure entropy // Ergodic Theory and Dyn. Syst. 1988. Vol. 8. P. 531.
25. Donnay V.J. Geodesic flow on the two-sphere. Part 2: Ergodicity// In: Dynamical Systems, Springer Lect. Notes in Math. 1988. Vol. 1342. P. 112.
26. Burns K., Gerber M. Real analytic Bernoulli geodesic flows on S^2 // Ergodic Theory and Dyn. Syst. 1989. Vol. 9. P. 27.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 25.04.01

DYNAMICS OF BILLIARDS WITH PERIODICALLY TIME-DEPENDENT BOUNDARIES

A.Yu. Loskutov, L.G.Akinshin, A.N.Sobolevskii

Dynamical systems corresponding to billiards with periodic perturbed boundaries are investigated. A general approach going back to the Aubrey – Mather theory is proposed. On the basis of investigations of the billiard maps, planar billiards with time-dependent boundaries in the form of stadium and circle, and billiards on two-dimensional sphere with the boundary formed by a disk of the varying radius are considered.



Лоскутов Александр Юрьевич – доктор физико–математических наук, профессор физического факультета МГУ. Область профессиональных интересов: теория динамических систем и ее приложения. Опубликовал более 100 научных работ, среди которых учебные пособия и монографии. Лауреат премии им. И.И. Шувалова по математике и физике (1998).

E-mail: loskutov@moldyn.phys.msu.su



Акиншин Леонид Геннадиевич – родился в Первоуральске Свердловской области (1971). Окончил физический факультет МГУ (1995). В настоящее время – аспирант кафедры полимеров и кристаллов физического факультета. Имеет 9 научных публикаций в отечественных и зарубежных журналах.



Соболевский Андрей Николаевич – родился в 1974 году, окончил физический факультет МГУ в (1996), защитил кандидатскую диссертацию (1999). В настоящее время – ассистент кафедры квантовой статистики и теории поля физического факультета. Область научных интересов: дифференциальные уравнения в частных производных, теория сплошных сред, теория оптимизации. Опубликовал 15 работ в ведущих научных журналах.



ПОРЯДОК И ХАОС В МОДИФИЦИРОВАННОМ ЛОГИСТИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ

С.Н. Владимиров, В.В. Негруль

В представленной работе рассматривается актуальная на современном этапе проблема создания робастных источников хаотических сигналов. Такие источники совершенно необходимы при разработке современных систем передачи, хранения и обработки информации. Очевидно, что они должны быть прецизионными, то есть обладать устойчивыми относительно вариаций параметров статистическими характеристиками, а также достаточно просто реализуемыми на практике устройствами. В этой связи ставится и решается задача исследования динамики модифицированного логистического отображения, а также задача сопоставления данного вида математической модели с реальной физической системой.

Определены границы и бассейн притяжения аттрактора временного ряда, порожденного отображением, найдены значения параметра порядка, разделяющие регулярные, хаотические и строго хаотические типы движений. Получены аналитические соотношения для вычисления энтропии Колмогорова – Синяя и информационной энтропии Шеннона. Показано, что при зарождении хаотического движения поведение параметра порядка соответствует фазовому переходу второго рода, установлена грубость возникающего аттрактора. Доказана связь исследуемого отображения с физической системой с запаздывающей обратной связью, имеющей бесконечную размерность фазового пространства. Полученные результаты указывают на перспективность использования модифицированного логистического отображения в качестве основы функционирования источников хаотических колебаний, реализованных в аналоговой и цифровой форме.

В настоящее время актуальной является задача создания прецизионных, легко тиражируемых генераторов хаоса. Такие генераторы могут найти применение в устройствах конфиденциальной передачи информации по радиоканалам и компьютерным коммуникационным сетям, устройствах радиопротиводействия, системах нетрадиционного воздействия на биологические объекты, при моделировании нейронных сетей и в ряде других приложений. Решение указанной задачи может быть достигнуто проектированием специализированных микросхем, созданием программируемых логических устройств и различного рода микропроцессорных систем. При этом весьма важным представляется построение математических моделей, позволяющих получить хаотические типы движений с точно прогнозируемыми и устойчивыми относительно вариаций параметров модели характеристиками. Так, одной из важнейших характеристик, определяющей степень хаотичности движений, является энтропия К Колмогорова – Синяя [1,2]. В качестве простейшей математической модели

может быть выбрано какое-либо одномерное отображение, поскольку оно может обеспечить наиболее быструю генерацию хаотической последовательности цифровыми автоматами и, следовательно, наивысшую скорость воспроизводства энтропии в единицу времени $f_T K/n$, где f_T – тактовая частота цифрового автомата, n – количество тактов, требуемых для выполнения им одной итерации отображения. Так, например, если отображение за одну итерацию обеспечивает $K=1$ бит, $f_T=10^7$ Гц и $n=10$, то можно синтезировать временную последовательность с метрической энтропией 10^6 бит/с.

Возьмем за основу детально изученное [3–7] одномерное логистическое отображение, динамика которого определяется следующим соотношением:

$$x_{k+1} = \alpha x_k (1 - x_k). \quad (1)$$

Единственным изменяемым параметром такого отображения является α . При вариациях этого параметра получаются регулярные и хаотические временные последовательности, поэтому α играет роль параметра порядка. Заменой переменных каскад (1) может быть сведен к следующему представлению:

$$x_{k+1} = 1 - \alpha x_k^2. \quad (2)$$

Набор операций, которые должен выполнить цифровой автомат для реализации одной итерации отображения (2), сравнительно невелик – две операции умножения, инверсия и сложение. Тем не менее, рассматриваемый алгоритм является малоприменимым для его реализации в «железе». Главным недостатком (2) является непредсказуемое чередование регулярных и хаотических движений при малейших вариациях параметра порядка. Даже при сохранении хаотичности статистические свойства последовательности $\{x_k\}$ сильно изменяются, о чем свидетельствует крайне сложная зависимость показателя Ляпунова от α . Причина этих недостатков объясняется тем, что логистическое отображение имеет в фазовом пространстве квазиаттрактор. Естественно, отображение с указанными особенностями не может быть положено в основу функционирования прецизионного генератора хаоса. Между тем, модификация отображения (2), рассмотренная в следующих разделах, позволяет радикальным образом улучшить ситуацию и обеспечить устойчивое воспроизводство хаотического временного ряда $\{x_k\}$ с точно известными характеристиками.

1. Неподвижные точки отображения, границы аттрактора и бассейн притяжения

Модификация логистического отображения (2) заключается в замене квадратичного члена x^2 на $|x|$

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) = 1 - \alpha |x_k|. \quad (3)$$

Впервые такая замена была проведена Лози [8] в двумерном отображении Хенона [9 – 10]. Позднее, в работах [11, 12] также рассматривались свойства отображений вида $x_{k+1} = 1 - \alpha |x_k|^z$, $z \geq 1$. Однако анализ, проведенный в этих работах, далеко не полон. Кроме того, некоторые положения выглядят спорными. В частности, утверждается, что при $z=1$, $\alpha \geq 1$ переход к хаосу происходит по сценарию бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода удовлетворяющей правилу $\alpha_\infty - \alpha_n \sim 1/2^n$, $n=1,2,3,\dots$, то есть отношения длин последовательных интервалов между бифуркационными значениями параметра порядка уменьша-

ются каждый раз вдвое. Но в рассматриваемом случае ляпуновский характеристический показатель может быть рассчитан аналитически (см. ниже) и его значение при $\alpha > 1$ строго положительно, что соответствует хаотическим режимам. Поэтому представляется необходимым проведение дополнительных исследований.

На рис. 1 представлены отображения (2) и (3). Наряду с определенным качественным сходством имеет место и существенное различие. Для логистического отображения (2) модуль его крутизны $|\partial\Phi(x)/\partial x| = 2\alpha x$ зависит от значения переменной x , а в случае каскада (3) является неизменной величиной $|\partial\Phi(x)/\partial x| = \alpha$. Именно это обстоятельство определяет радикальное различие свойств анализируемых математических моделей.

Численный эксперимент позволил установить, что при $\alpha > 2$ отображение (3) не имеет аттрактора, поскольку все траектории $\{x_k\}$ уходят в бесконечность независимо от стартовой точки x_0 . Поэтому область допустимых значений параметра порядка определяется неравенством вида $0 \leq \alpha \leq 2$.

Определим неподвижные точки отображения (3), решая уравнение $x = \Phi(x)$. Это уравнение имеет корень $x_{10} = 1/(1+\alpha)$ во всей области допустимых значений α . При $\alpha > 1$ появляется еще и вторая неподвижная точка $x_{20} = 1/(1-\alpha)$. Устойчивость этих точек определяется значением модуля $|\partial\Phi(x)/\partial x| = \alpha$. В случае $\alpha < 1$ первая из точек устойчива, а при $\alpha > 1$ обе точки теряют устойчивость.

Численно установлено, что границы аттрактора зависят от α . При $0 \leq \alpha < 1$ аттрактором является просто первая неподвижная точка x_{10} , а при $1 < \alpha \leq 2$ нижняя x_{\min} и верхняя x_{\max} границы аттрактора определены соотношением

$$x_{\min} = 1 - \alpha, \quad x_{\max} = 1, \quad (4)$$

вследствие чего аттрактор является несимметричным, несмотря на симметричность порождающего его отображения.

Бассейн притяжения аттрактора устроен следующим образом. При $0 \leq \alpha < 1$ любое начальное условие приводит к точке x_{10} , то есть бассейном притяжения является вся числовая ось $x \in (-\infty, \infty)$. При $1 < \alpha \leq 2$ область допустимых начальных значений заключена в открытом интервале $|x_0| < x_{20}$. Границы аттрактора и бассейна притяжения представлены на рис. 2. Точка x_{20} касается границы аттрактора лишь при значении $\alpha = 2$. Интересно отметить, что в этом случае точка $x_{20} = 1$ становится притягивающей, несмотря на выполнение условия $|\partial\Phi(x)/\partial x| = 2 > 1$. Установлено, что при любом начальном x_0 , принадлежащем бассейну притяжения, траектория $\{x_k\}$ после ряда итераций притянется точкой x_{20} и останется в ней навсегда. Указанное противоречие имеет логичное объяснение, связанное с особенностями представления чисел в компьютере. Пусть для определенности

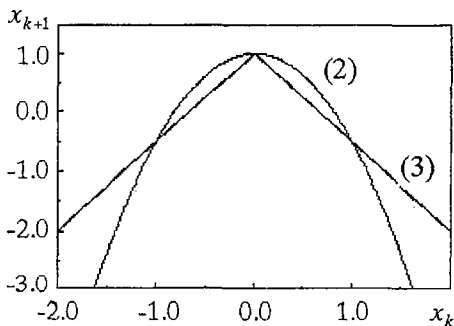


Рис. 1. Логистическое (2) и модифицированное логистическое (3) отображения при $\alpha = 1.5$

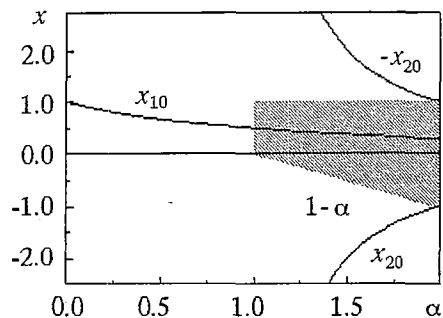


Рис. 2. Бассейн притяжения и границы аттрактора; x_{10}, x_{20} – неподвижные точки отображения

система (3) стартует из точки $x_0 \in (0,1)$. В оперативной памяти компьютера эта точка будет представлена (точно или приближенно) в двоичной форме

$$x_0 = \sum_{r=1}^Q b_r / 2^r, \quad b_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что при $\alpha=2$ ровно через Q итераций получим

$$x_Q = 2^0 + (-1)^Q b_Q + \sum_{r=1}^{Q-1} (-1)^r 2^{-r} + (-1)^Q 2^{Q-r} b_r.$$

Теперь x_Q точно представляется в памяти компьютера, а отображение (3) при $\alpha=2$ не вносит при итерациях какой-либо неопределенности. Нет неопределенности – нет хаоса.

Естественно, в реальной физической системе вследствие неустранимых внутренних флуктуаций такая ситуация нереализуема и цифровой автомат может генерировать хаотическую последовательность и при $\alpha=2$.

2. Бифуркационный и спектральный анализ временных рядов, порождаемых отображением

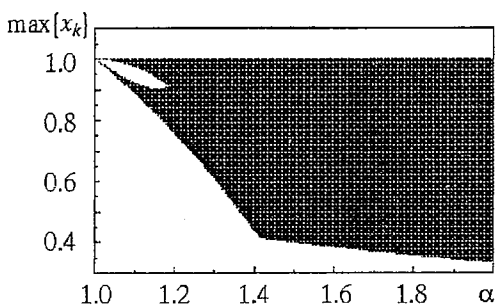


Рис. 3. Отображение (3). Бифуркационная диаграмма

Начнем исследование предлагаемого отображения с рассмотрения бифуркационной диаграммы (рис. 3), представляющей собой зависимость максимумов временного ряда $\{x_k\}$ от параметра порядка α .

Анализ бифуркационной диаграммы позволяет установить следующее. При превышении параметром порядка значения $\alpha > 1$ происходит бифуркация, подобная бифуркации удвоения периода Фейгенбаума. Однако в данном случае линии диаграммы уже размыты, максимумы временного ряда плотно покрывают некоторые интервалы значений. Фурье-спектр временного ряда, построенный при $\alpha=1.1$ (рис. 4, а), позволяет заключить,

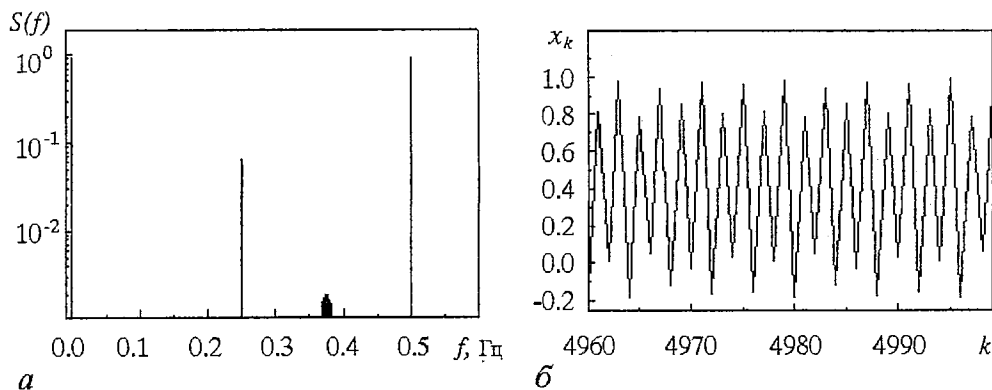


Рис. 4. Фурье-спектр $S(f)$ (а) и временной ряд $\{x_k\}$ (б), порожденные отображением (3) при $\alpha=1.1$

что наряду с постоянной составляющей и двумя гармоническими компонентами, частоты которых отличаются ровно вдвое, имеются и непрерывно распределенные спектральные составляющие, лежащие в окрестности частоты 0.375 Гц. Подобная ситуация может свидетельствовать как о возникновении хаотического аттрактора, так и о существовании странного нехаотического аттрактора [13].

Наряду со спектральным представляет интерес и временное представление траектории отображения (рис. 4, б). Характер процесса типичен для бифуркации удвоения периода с той разницей, что максимумы временной реализации при разных значениях номера итерации отображения принимают несколько различные значения.

Дальнейший анализ бифуркационной диаграммы показывает, что с ростом параметра порядка обе ветви диаграммы расширяются и при $\alpha \approx 1.18$ сливаются. В дальнейшем диаграмма остается однородной и не позволяет получить дополнительную информацию о процессах в системе.

Фурье-анализ позволил установить, что с дальнейшим ростом α амплитуды регулярных составляющих убывают, а континуальная часть спектра развивается. При значении $\alpha > 1.5$ гармонические составляющие в спектре становятся неразличимыми на фоне сплошного шумоподобного пьедестала. Данную ситуацию демонстрирует рис. 5, а. Из регулярных компонент наблюдается лишь постоянная составляющая, наличие которой однозначно обусловлено асимметрией аттрактора.

Фрагмент временной реализации, соответствующий рассмотренному фурье-спектру, представлен на рис. 5, б. Из ограниченности и неповторяемости временной реализации можно сделать предположение о ее хаотическом характере. Однако окончательные выводы можно будет получить только после установления существенной зависимости динамики отображения (3) от начальных условий, определения знака и значения ляпуновского характеристического показателя, доказательства транзитивности отображения и плотности его периодических точек [14]. Несмотря на то, что из транзитивности и плотности периодических точек отображения однозначно следует существенная зависимость его динамики от начальных условий [15], мы, преследуя методические цели, посчитали необходимым доказать зависимость динамики каскада (3) от начальных условий, исходя непосредственно из свойств модифицированного логистического отображения. Необходимый анализ проведен в следующем разделе.

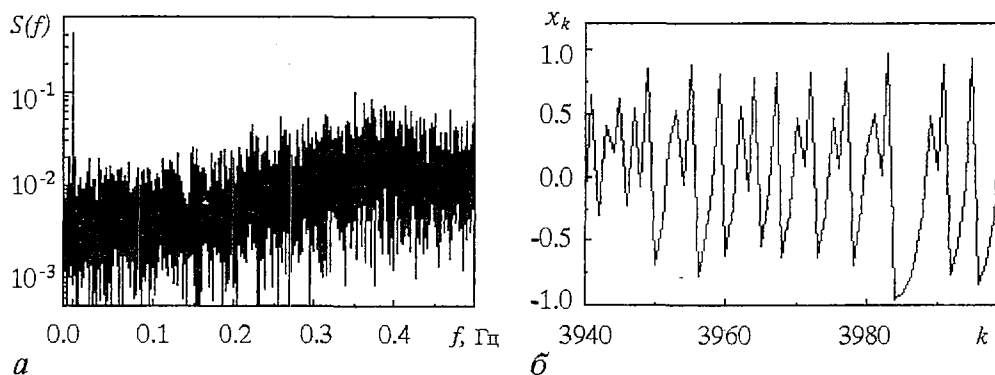


Рис. 5. Фурье-спектр $S(f)$ (а) и временной ряд $\{x_k\}$ (б), порожденные отображением (3) при $\alpha=1.75$

3. Хаос и строгий хаос в модифицированном квадратичном отображении

Пусть $I \subset (1-\alpha, 1)$ – интервал, в котором заключены все точки фазовой траектории $\{x_k\}$, принадлежащие аттрактору отображения (3). Пусть некоторое открытое множество U , содержащее точки x и y , принадлежит интервалу I . Для установления существенной зависимости от начальных условий необходимо доказать, что для некоторого $\delta > 0$ существует такое целое число $n > 0$, что $d(\Phi^n(x) - \Phi^n(y)) > \delta$, где символом d обозначено определенное подходящим образом расстояние между точками на аттракторе, а верхний индекс n – номер итерации отображения $\Phi(x)$.

Пусть множеству U принадлежат две первоначально близкие точки x_0 и $y_0 = x_0 + \varepsilon$. Расстояние между ними при $\alpha > 1$ после n итераций

$$\begin{aligned} d(y_{n+1} - x_{n+1}) &= |\Phi^n(x_0 + \varepsilon) - \Phi^n(x_0)| \approx \\ &\approx |\varepsilon d\Phi^n(x_0)/dx_0| = |\varepsilon \prod_{i=1}^n (d\Phi(x_i)/dx_i)| = |\varepsilon \alpha^n| > |\varepsilon \alpha|. \end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно, можно взять $n=2$, а $\delta = |\varepsilon \alpha|$, что и доказывает существенную зависимость от начальных условий.

Вычислим характеристический показатель Ляпунова. Примем во внимание, что локальный показатель Λ_k определяет связь между расстояниями d_{k+1} и d_k , разделяющими соседние точки фазовой траектории [3–7],

$$\Lambda_k = \log_2(d_{k+1}/d_k). \quad (6)$$

Выбор основания логарифма в (6) произволен и в данном случае определен предпочтениями авторов. Из соотношений (5) следует, что за одну итерацию отношение d_{k+1}/d_k возрастает в α раз и, следовательно, $\Lambda_k = \log_2 \alpha$.

Ляпуновский характеристический показатель получается усреднением всех локальных показателей, вычисленных вдоль траектории, то есть $\Lambda = \langle \Lambda_k \rangle_{k=1}^N$. Для анализируемого отображения все Λ_k совпадают, что окончательно дает значение

$$\Lambda = 1/N \sum_{k=1}^N \log_2 \alpha = \log_2 \alpha. \quad (7)$$

Обратим внимание, что в окрестности критической точки $\alpha=1$ ляпуновский показатель изменяется по степенному закону $\Lambda \approx \alpha - 1$, что для термодинамических систем соответствует фазовому переходу второго рода. При превышении параметром порядка критической точки зависимость $\Lambda(\alpha)$ представляет собой монотонную, положительно определенную функцию. Это однозначно указывает на то, что на аттракторе нет устойчивых неподвижных точек и, следовательно, отсутствуют окна устойчивости и периодичности. Поскольку все фазовые траектории на аттракторе неустойчивы, а вариации параметра порядка не приводят к возникновению регулярных движений, то аттрактор, порождаемый отображением (3), можно отнести к классу квазигиперболических [7].

Энтропия Колмогорова – Синяя для одномерного отображения, согласно теореме Песина [16], может быть определена следующим образом:

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \Lambda(x) dx.$$

Здесь $p(x)$ – плотность распределения фазовой переменной на аттракторе. Поскольку в нашем случае Λ есть постоянная величина, то с учетом условия нормировки

$$K = \Lambda = \log_2 \alpha. \quad (8)$$

В последнем соотношении, в силу выбранного основания логарифма, энтропия выражается в битах на итерацию.

Определим изменение информационной энтропии Шеннона, представляющей собой меру неопределенности знания о состоянии системы. Для этого допустим, что исходное состояние системы x_0 известно нам с точностью ϵ . Тогда энтропия Шеннона определится следующим образом:

$$H_0 = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log_2 p(x) dx = -\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} (1/\epsilon) \log_2 (1/\epsilon) dx = \log_2 \epsilon.$$

При записи последнего соотношения использовано предположение о равновероятном нахождении точки x_0 внутри малого интервала неопределенности ϵ . Через n итераций длина этого интервала (5) увеличится до значения $\alpha^n \epsilon$. Теперь

$$H_n = \int_{-\alpha^n \epsilon/2}^{\alpha^n \epsilon/2} 1/(\alpha^n \epsilon) \log_2 (1/(\alpha^n \epsilon)) dx = \log_2 \alpha^n \epsilon,$$

и изменение информационной энтропии за одну итерацию составит

$$\Delta H = (H_n - H_0)/n = \log_2 \alpha = K. \quad (9)$$

Поскольку энтропия Колмогорова – Синяя есть средняя скорость потери информации о состоянии системы с течением времени [1,2], то полученная связь между K и ΔH представляется вполне естественной. Соотношение (9) указывает на то, что отображение непрерывно воспроизводит информацию, в силу чего наше знание о состоянии процесса уменьшается [17].

Несмотря на то, что нами установлена существенная зависимость от начальных условий и положительность энтропии Колмогорова – Синяя, анализ хаотических свойств отображения (3) не может считаться законченным. Дело в том, что согласно существующей классификации хаос может быть простым и строгим [14,18]. Для существования строго хаотического режима необходимо наличие таких областей значений параметра порядка α , при которых (3) транзитивно, а его множество периодических точек плотно.

Доказать транзитивность исследуемой системы достаточно просто. Действительно, транзитивность означает, что для любой пары U и V открытых множеств, принадлежащих аттрактору, найдется такое n , что $\Phi^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Данное условие указывает на пересечение множеств после n -й итерации отображения, что означает перемешивание фазовых траекторий. Доказательство следует из установленного ранее растягивающего свойства отображения. В силу этого свойства любое сколь угодно малое множество U , после достаточного числа итераций покроет весь аттрактор I и, следовательно, пересечется с любым произвольно выбранным множеством V , также принадлежащим аттрактору I .

Доказательство плотности периодических точек на аттракторе существенно сложнее. Поскольку периодические точки отображения являются корнями уравнения

$$x = \Phi^n(x), \quad (10)$$

то с учетом существенной нелинейности отображения (3) не обойтись без привлечения вычислительной техники. Лишь в случае $\alpha \rightarrow 2$ нетрудно установить, что уравнение (10) имеет ровно 2^n корней. Поэтому с ростом n в любой, пусть бесконечно малой, окрестности произвольно выбранной точки на аттракторе $x \in I$ окажется одна из периодических точек. Следовательно, при $\alpha \rightarrow 2$ периодические точки отображения плотны на интервале I .

В общем же случае будем поступать следующим образом. Поскольку для нашего анализа важны не сами значения корней уравнения (10), а лишь их число,

то достаточно исследовать число перемен знака в уравнении $x - \Phi^n(x) = 0$ при изменении значений x внутри границ аттрактора, определенных соотношением (4). Компьютерный эксперимент позволил установить следующее. Существует второе критическое значение параметра порядка $\alpha_2 \approx 1.427$, разделяющее хаотическое и строго хаотическое состояния системы.

Обратимся к рис. 6, а, на котором представлена зависимость числа N периодических точек модифицированного логистического отображения от номера его итерации n . Эта зависимость построена для двух значений параметра порядка, меньших α_2 . Видно, что при четном числе итераций количество периодических точек растет с увеличением номера итерации по степенному закону. Но при любой нечетной итерации существует только одна периодическая точка отображения! Следовательно, условие плотности периодических точек нарушается, и хаос не является строгим.

Ситуация меняется при превышении параметром порядка второго критического значения. Так, из анализа рис. 6, б следует, что при $\alpha > \alpha_2$ число периодических точек растет с увеличением n по степенному закону. Поэтому с ростом n в любой, пусть бесконечно малой, окрестности произвольно выбранной точки на аттракторе $x \in I$ окажется одна из периодических точек. Следовательно, при $\alpha > \alpha_2$ периодические точки отображения плотны на интервале I . Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема. *Отображение $x_{k+1} = 1 - \alpha|x_k|$ хаотично на интервале $x \in (1-\alpha, 1)$ при $1 < \alpha < 2$, причем при $\alpha > \alpha_2 \approx 1.427$ — строго хаотично.*

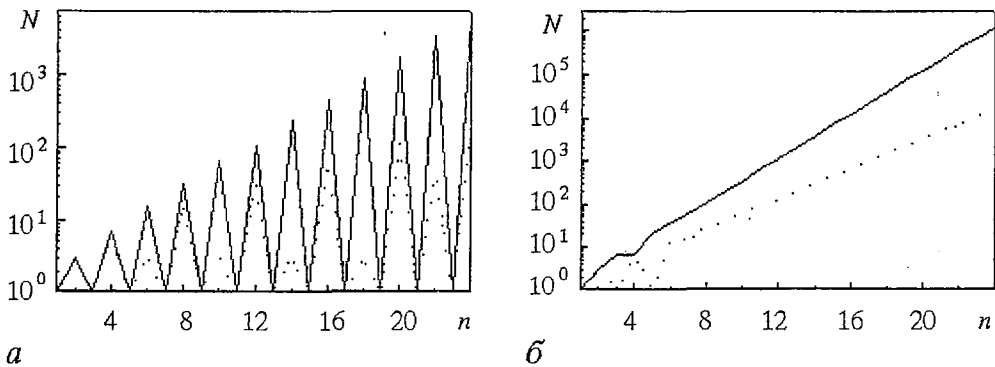


Рис. 6. Зависимость числа периодических точек отображения (3) от номера его итерации: а — для $\alpha < \alpha_2$, $\alpha = 1.2$ — пунктирная линия, 1.4 — сплошная; б — для $\alpha > \alpha_2$, $\alpha = 1.5$ — пунктирная линия, 1.8 — сплошная

4. Сопоставление отображения с реальной динамической системой

Известно, что в целом ряде случаев какому-либо отображению можно поставить в соответствие реальную физическую систему с непрерывным временем. Здесь под соответствием понимается полное или частичное совпадение основных характерных черт их динамики. Но исследование отображений всегда проще исследования потоков, поэтому к изучению свойств систем с дискретным временем проявляется значительный интерес.

Проверим соответствие изучаемому отображению (3) динамической системы с бесконечномерным фазовым пространством. Вначале рассмотрим идеализированную динамическую систему с запаздыванием представленную на рис. 7, а.

Идеализация заключается в пренебрежении селективными свойствами

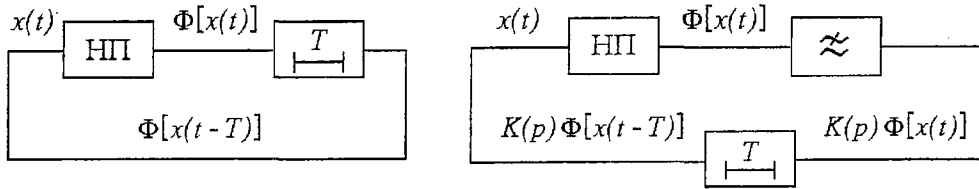


Рис. 7. Функциональные схемы автоколебательных систем с запаздыванием: НП – нелинейный преобразователь, T – время задержки сигнала $x(t)$ линией задержки, $K(p = d/dt)$ – линейный оператор, определяющий свойства селективного элемента

элементов, составляющих функциональную схему. Нетрудно установить, что движение в рассматриваемой структуре подчинено уравнению

$$x(t) = \Phi[x(t-T)]. \quad (11)$$

Обозначим $x_k = x(t-T)$, $x_{k+1} = x(t)$. Теперь из (11) сразу получаем разностное уравнение вида (3). Таким образом, отображение (3) определяет связь между выборками сигнала в динамической системе (11) в случае, когда эти выборки берутся с шагом $\Delta t = T$.

Заметим, что уравнение (11) описывает движение в системе с бесконечным числом степеней свободы, поскольку для его однозначного решения при $t > 0$ необходимо задать бесконечное число начальных значений функции $x(t)$, принадлежащих интервалу времени $t \in [-T, 0]$. Именно поэтому любое одномерное отображение и способно, естественно при определенных значениях параметров, продемонстрировать сложную хаотическую динамику.

Очевидно, что реализовать на практике динамическую систему, движение в которой подчинено уравнению (11), не представляется возможным, поскольку входящие в ее состав элементы должны быть всеполосными с не зависящими от частоты характеристиками. Поэтому в состав функциональной схемы необходимо ввести хотя бы один избирательный элемент, обладающий конечной полосой пропускания. При этом структура динамической системы должна быть изменена, как это сделано на рис. 7, б. Теперь движение в системе будет описываться уже дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом

$$x(t) = K(p)\Phi[x(t-T)]. \quad (12)$$

Например, если в качестве избирательного элемента выбрать фильтр нижних частот первого порядка с постоянной времени τ , то линейный дифференциальный оператор примет вид $K(p) = 1/(\tau p + 1)$ и уравнение (12) может быть записано в развернутой форме

$$\tau dx(t)/dt = \Phi[x(t-T)] - x(t), \quad (13)$$

которая при $\tau \rightarrow 0$ переходит в уравнение (11).

Весьма интересным и важным представляется получение ответа на вопрос о сопоставимости движений в системах (11) и (13) при $\tau \neq 0$. Если эти движения сходны в основных чертах, то это будет означать, что и отображение (3) несет на себе «отпечаток» динамики потока (13) или, в общем случае, потока (12).

Получение однозначного ответа на поставленный вопрос требует тщательных и развернутых численных и экспериментальных исследований динамики отображений и потоков с идентичными нелинейностями. В нашем случае в качестве первого шага был поставлен эксперимент с использованием лабораторного макета, принципиальная схема которого представлена на рис 8. Макет функционирует следующим образом. На операционных усилителях DA 1,

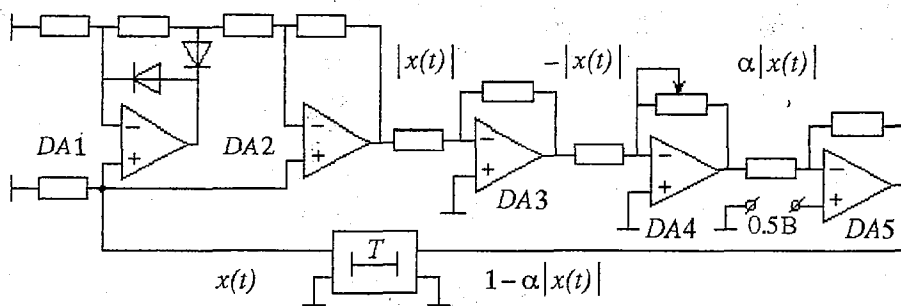


Рис. 8. Принципиальная схема лабораторного макета динамической системы с запаздыванием, в котором реализована нелинейность вида $\Phi(x) = 1 - \alpha|x|$

DA 2 реализован блок вычисления модуля непрерывного сигнала $x(t)$, далее в кольце обратной связи находятся инвертор DA 3 и усилитель DA 4. Сумматор DA 5 осуществляет вычитание сигнала $\alpha|x(t)|$ из единичного напряжения, после чего результат задерживается на время T линией задержки. Задержанный сигнал вновь поступает на вход блока вычисления модуля, замыкая тем самым кольцо обратной связи.

Эксперименты проводились с линиями задержки, обеспечивающими как фазовое запаздывание (многозвенные широкополосные LC фильтры), так и реальное временное (коаксиальный кабель). Величина запаздывания варьировалась в диапазоне от 0.1 мкс до 10 мкс. Кроме того, в кольцо обратной связи включались дополнительные фильтры с малой частотой среза, то есть с большой постоянной времени. Безусловно, все экспериментальные результаты различались в деталях. Но все их объединяло главное: общая закономерность бифуркационных явлений, приводившая от регулярных автоколебаний к хаотическим типам движений. Поэтому основные черты происходящих явлений достаточно продемонстрировать на примере какого-либо одного эксперимента.

На рис. 9 представлены экспериментальные результаты, полученные с использованием линии задержки, выполненной на основе 100-звенного LC фильтра нижних частот, имевшего частоту среза 500 кГц и время задержки 10 мкс. Дополнительные фильтры в кольцо обратной связи не включались.

Результаты представлены в виде матрицы фотографий, которая организована следующим образом. Каждая строка матрицы отражает динамику системы при фиксированном значении параметра порядка α . Строки матрицы сверху вниз получены при увеличении значения этого параметра. В первом столбце матрицы изображены осциллограммы сигнала $x(t)$, во втором – проекции на плоскость $x(t-T), x(t)$ фазовых портретов, в третьем – спектрограммы процесса $x(t)$. Проведем краткий анализ приведенных результатов. При достижении параметром порядка α некоторого значения (зависящего от вида амплитудно-частотной характеристики и определяемого условием баланса амплитуд) система переходит из состояния покоя в режим генерации периодических колебаний (первая строка матрицы). Частота генерации в каждом конкретном случае определяется условием баланса фаз. Если баланс фаз выполняется одновременно на нескольких частотах, что имеет место при достаточной величине задержки T , то, в силу энергетической конкуренции, генерируется та колебательная компонента, для которой энергетический баланс оптимален. Необходимо отметить, что подавление слабого сигнала сильным не является обязательным условием [19,20], а обусловлено конкретным видом нелинейных и частотных свойств генерирующей структуры. В описываемом эксперименте возбуждалась 26-я (от нулевой частоты) колебательная компонента на частоте примерно 1.3 МГц.

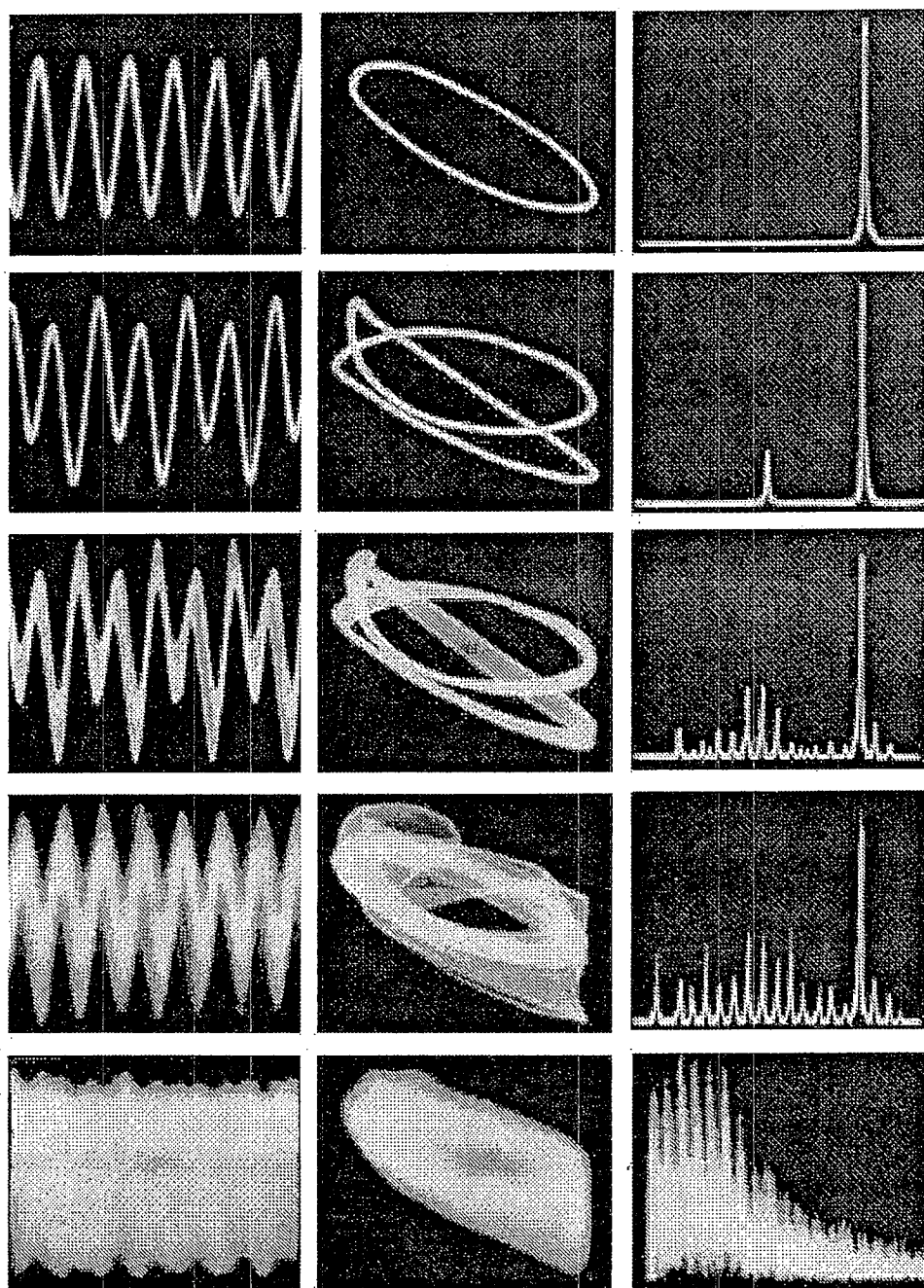


Рис. 9. Последовательность бифуркационных явлений, приводящих от регулярных движений к хаотическим (физический эксперимент), в автоколебательной системе с запаздыванием и нелинейностью вида $\Phi(x) = 1 - \alpha|x|$

В дальнейшем, по мере роста α возникает единственная бифуркация удвоения периода Фейгенбаума (вторая строка матрицы). Затем спектр процесса все более усложняется, обогащается неэквидистантными и хаотическими составляющими. При этом в структуре аттрактора еще можно различить регулярные компоненты (третья и четвертая строки матрицы). Бифуркационная последовательность заканчивается возникновением режима генерации сигнала со сплошным спектром, примыкающим к нулевой частоте; наблюдаемый аттрактор имеет близкую к однородной структуре (пятая строка матрицы). В этом режиме

существенные вариации параметров устройства не приводят к сколь-нибудь заметной трансформации аттрактора, что указывает на его грубость.

Как было отмечено ранее, итерации отображения (3) при $\alpha > 2$ уходят в бесконечность. В исследуемой физической системе это невозможно, поскольку сигнал ограничивается операционными усилителями. Поэтому возникает новый тип хаотического аттрактора, который в рамках настоящей работы не может быть рассмотрен.

Сравнение свойств отображения (3) и приведенных результатов экспериментального исследования реальной динамической системы указывает на их хорошее качественное совпадение.

Заключение

В представленной работе изучена динамика модифицированного логистического отображения. Определены границы аттрактора и его бассейн притяжения. Получены аналитические зависимости энтропии Шеннона и Колмогорова – Синая от параметра порядка. Найдены значения параметра порядка, разделяющие регулярные, хаотические и строго хаотические типы движений. Показано, что данное отображение может быть положено в основу функционирования цифровых автоматов, которые в принципе могут воспроизводить хаотические последовательности с точно известными статистическими свойствами. Проведена попытка сопоставления свойств отображения со свойствами динамической системы с бесконечномерным фазовым пространством. В результате численного моделирования и физического эксперимента установлено, что последовательность бифуркационных явлений в изучавшемся отображении весьма близка к бифуркационным процессам в динамической системе с запаздыванием в случае, когда их нелинейности идентичны.

Библиографический список

1. Колмогоров А.Н. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С.754.
2. Синай Я.Г. О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 768.
3. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
4. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988.
5. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. М.: Мир, 1990.
6. Берже П., Помо Н., Видадь К. Порядок в хаосе: О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.
7. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
8. Lozi R. Un attracteur etrange du type attracteur de Henon // J. de Physique. 1978. Vol. 39. (C5). P.9.
9. Henon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor // Comm. Math. Phys. 1976. Vol. 50. P. 69.
10. Хенон М. Двумерное отображение со странным аттрактором // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981.

11. *Hauser P.R., Tsallis C., Curado M.F.* Criticality of the routes to chaos of the map // *Phys.Rev.A.* 1984. Vol. 30, № 4. P. 2074.
12. *Hu B., Satiya I.I.* A spectrum of universality classes in period doubling and period tripling // *Phys.Lett. A.* 1983. Vol. 98, № 4. P. 143.
13. *Анищенко В.С.* Аттракторы динамических систем // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 1. С. 109.
14. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000.
15. *Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G., Stacey P.* On Devaney's definition of chaos // *American Math. Monthly.* 1992. Vol. 99, № 4. P. 332.
16. *Песин Я.Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // *УМН.* 1977. Т. 32, №4. С. 55.
17. *Дмитриев А.С., Старков С.О.* Передача сообщений с использованием хаоса и классическая теория информации // *Зарубежная радиоэлектроника.* 1998. №11. С. 4.
18. *Devaney R.L.* An introduction to chaotic dynamical systems / Sec. Ed. Addison – Wesley, Reading Mass., 1989.
19. *Владимиров С.Н., Майдановский А.С., Новиков С.С.* Нелинейные колебания многочастотных автоколебательных систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993.
20. *Владимиров С.Н.* Автопараметрический механизм хаотизации движения в автогенераторе с полосовым фильтром и запаздыванием // *Изв. вузов. Физика.* 1998. №4. С. 91.

*Томский государственный
университет*

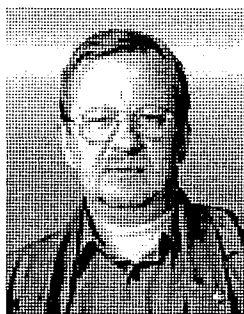
Поступила в редакцию 12.02.01

ORDER AND CHAOS IN MODIFIED LOGISTIC MAP

*S.N. Vladimirov, V.V. Negrul**

The topical problem of making the robust sources of chaotic signals is considered. Using of such sources is quite necessary at working out of modern systems of information transmission, store and processing. Obviously, it must be precise devices, i.e. devices with stable statistical properties regarding to variations of their parameters, and it must be realised sufficiently simply in practice. In this connection both problems of study of modified logistic map dynamics and of comparing given mathematical model with the real physical system are formulated and solved.

The borders and attraction basin of the time series attractor generated by the map were determined. The values of order parameters separating regular, chaotic and strictly chaotic types of motion were found. Analytical expressions for calculating the Kolmogorov entropy and Shannon information entropy were obtained. It was shown, that while generating chaotic motion the order parameter's behaviour corresponds with the second order phase transition. The roughness of the appearing attractor was discovered. Relation between the map being investigated and the physical system with delayed feedback and with infinite phase space dimension was proved. Obtained results make the prospect for application of the modified logistic map as a basis for operation of the chaotic oscillations sources which can be realised in an analogous and numerical form.



Владимиров Сергей Николаевич – родился в 1953 году, окончил радиофизический факультет Томского государственного университета (1980). Кандидат физико-математических наук (1987), доцент кафедры радиоэлектроники Томского госуниверситета. Область научных интересов – физика нелинейных, открытых, существенно неравновесных систем. Автор монографии «Нелинейные колебания многочастотных автоколебательных систем» (1993), многих публикаций, связанных с теорией и практикой функционирования генерирующих структур с запаздывающей обратной связью, генерации сверхмощных импульсов генераторами релятивистского типа, генерации и управления хаотическими типами колебаний.



Негруль Владимир Вячеславович – родился в 1976 году, окончил радиофизический факультет Томского государственного университета (1998). В настоящее время – аспирант кафедры радиоэлектроники Томского госуниверситета. Область научных интересов – теория динамического хаоса и его практическое приложение в системах передачи, хранения и обработки информации. Автор ряда научных публикаций, связанных с данными вопросами.



ТРАНСФОРМАЦИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ МГД–ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЛАНЕТАРНОМ МАГНИТНОМ РЕЗОНАТОРЕ

Н.А. Бархатов, Н.С. Беллюстин, Н.Н. Емельянов, А.Е. Левитин

Исследуются особенности эволюционной динамики сильного МГД–возмущения в магнитосфере. Рассмотрены эффекты трансформации альвеновской волны, канализруемой вдоль земного магнитного поля, в быструю и медленную магнитозвуковые при столкновении встречных импульсов. Изучена зависимость эффектов от угла наклона волнового вектора альвеновской волны к магнитному полю и от отношения скорости звука в плазме к альвеновской скорости. Рассмотрена также нелинейная трансформация альвеновских волн в магнитозвуковые при отражении альвеновской волны от стенок магнитосферного резонатора при различном значении угле наклона земного магнитного поля в точке отражения. Особое внимание уделено эффектам, роль которых возрастает с уменьшением температуры и скорости звука в плазме. Сделаны аналитические оценки, согласующиеся с рассматриваемыми эффектами в случае слабой нелинейности, и рассмотрены особенности предельного перехода к приближению холодной плазмы. Обсуждается роль приземного промежутка ионосфера – атмосфера в этих явлениях. Отмечено, что сильная альвеновская волна может вызывать заметное перераспределение концентрации плазмы в земной ионосфере. Исследована зависимость этого эффекта от отношения альвеновской скорости к звуковой.

Выявлено два типа вычислительных неустойчивостей, возникающих в нелинейных МГД–уравнениях, показана роль диссипативных параметров вязкости для обеспечения стабильного численного счета.

Введение

Наблюдения низкочастотных колебаний на спутниках дают основание утверждать, что источники многих типов геомагнитных возмущений располагаются в магнитосфере. Среди этих возмущений имеют место как стоячие, так и бегущие волны. Изменение внутримангнитосферных параметров сказывается на характере колебательных режимов. В связи с этим результаты регистрации геомагнитных возмущений являются диагностическим инструментом для анализа структуры и динамики магнитосферной плазмы [1,2]. Большое внимание уделяется здесь вопросам генерации колебаний: возбуждению магнитосферных резонансов и бегущих волн локальными источниками [3]. Однако даже при решенных проблемах генерации можно получить новые важные особенности волновых явлений и параметров околоземной плазмы, изучая распространение возмущений. Анализ эволюции низкочастотных волн при их распространении внутри магнитосферы

позволяет иногда предлагать альтернативное объяснение характерных особенностей регистрируемых геомагнитных возмущений.

Предпринятые в настоящей работе исследования магнитогидродинамических явлений в магнитосфере Земли вызваны стремлением внести вклад в объяснение периодического повторения структуры и изменения частоты магнитных возмущений. Важным представляется также выяснение природы регистрируемых резких колебаний плотности околоземной плазмы. Последнее относится как к плазме земной магнитосферы и солнечного ветра, так и к другим случаям, когда плазму можно принять «почти холодной», то есть когда скорость звуковых волн много меньше скоростей волн других типов. Известно, что в результате порыва солнечного ветра в магнитосферном резонаторе может возникнуть сильное магнитное возмущение. Кроме того, оно может появиться там и вследствие другой экзотической причины.

В данной работе изучаются закономерности распространения подобного заданного нелинейного магнитного импульса от локального магнитосферного источника. Рассмотрение проводится в одномерной модели магнитосферы, ограниченной сопряженными отражающими поверхностями. При распространении под углом α к геомагнитному полю B_0 поперечный магнитный импульс распадается на шесть возмущений, попарно бегущих в противоположных направлениях. Два возмущения – альвеновские, два – быстрые магнитозвуковые (БМЗ) и два – медленные магнитозвуковые (ММЗ) возмущения. Групповые скорости альвеновской, БМЗ и ММЗ–волн могут в рассматриваемой среде существенно различаться.

Естественно, принимаемое в нашем нелинейном исследовании разбиение волн на нормальные волны, как и в линейном подходе (в магнитной гидродинамике – на альвеновские, БМЗ и ММЗ–волны), становится достаточно условным. В случаях сильной нелинейности линейная терминология не является адекватной для описания динамики нелинейных волн. Сильно нелинейные режимы распространения МГД–волн плохо поддаются аналитическим методам анализа [4], поэтому целесообразно использовать современные средства компьютерного моделирования [5, 6], что и делалось в работе наравне с аналитическими оценками.

В работе при анализе пространственно–временной волновой динамики акцентируется внимание на исследовании:

- эффектов трансформации альвеновской волны, канализируемой вдоль земного магнитного поля, в быструю и медленную магнитозвуковые волны при столкновении встречных импульсов; эволюции альвеновских волн при многократном проходе вдоль магнитной силовой линии между сопряженными ионосферами;

- зависимости эффектов от угла наклона направления распространения альвеновской волны к магнитному полю и от отношения скорости звука в плазме к альвеновской скорости;

- нелинейной трансформации альвеновских волн в магнитозвуковые при отражении альвеновской волны от стенок магнитосферного резонатора при различном значении наклона земного магнитного поля в точке отражения (особое внимание уделено эффектам, роль которых возрастает с уменьшением температуры и, соответственно, скорости звука в плазме; сделаны аналитические оценки, согласующиеся с рассматриваемыми эффектами в случае слабой нелинейности, и рассмотрены особенности предельного перехода к приближению холодной плазмы);

- роли приземного промежутка ионосфера – атмосфера в этих явлениях (отмечено, что сильная альвеновская волна может вызывать существенное перераспределение концентрации плазмы в земной ионосфере; исследована зависимость этого эффекта от отношения альвеновской скорости к звуковой);

- выявления типов вычислительных неустойчивостей, возникающих в нелинейных МГД-уравнениях (показана роль диссипативных параметров вязкости для обеспечения стабильного численного счета).

Для решения поставленных задач была специально реализована компьютерная программа, позволяющая осуществлять исследования эволюции одномерных и двумерных нелинейных МГД-волн методами вычислительного эксперимента в диалоговом режиме. Созданная компьютерная программа анализирует выбранную модель и представляет результаты развития нелинейной динамики в виде мультфильмов. При этом параметры движущейся замагниченной плазмы, закладываемые в работу программы, предполагались соответствующими условиям, выполнимым в магнитосферной среде. В программе предусмотрена использованная нами возможность вырезания сформированного возмущения того или другого типа, перемещения его в среду с теми же начальными параметрами и граничными условиями и дальнейшее рассмотрение его эволюции как отдельного объекта.

1. Аналитические оценки в рамках уравнений одномерной магнитной гидродинамики

Из теории линейных волн известно, что, когда фазовые скорости волн значительно различаются, волны слабо взаимодействуют между собой при рассеянии на неоднородностях или отражениях от границ. Даже на резкой границе коэффициент трансформации по потоку энергии пропорционален отношению минимальной к максимальной из фазовых скоростей этих волн. В рамках линейного приближения этот вывод универсален и служит основой для качественных рассуждений. Не столь очевидно, что учет членов более высокого порядка должен качественно изменить ситуацию.

В вычислительных экспериментах по МГД-волнам в магнитосфере был обнаружен эффект существенного изменения плотности плазмы при отражении от жесткой проводящей границы магнитосферного резонатора, роль которой играет поверхность Земли [9]. Там же для случая продольного распространения была найдена аналитическая интерпретация эффекта и показано, что эффект является квадратичным по амплитуде падающей альвеновской волны. В этом случае учет обычно игнорируемых квадратичных членов обуславливает эффекты, превосходящие по своему значению эффекты линейного приближения. Было показано, что эффект может иметь практическое значение для волновых явлений в околоземной плазме.

Рассмотренный в [9] случай продольного распространения является, вообще говоря, вырожденным. В настоящем исследовании нас будет интересовать общий случай, включающий непродольное распространение МГД-волн. Поэтому имеет смысл сделать здесь аналитические оценки обнаруженного эффекта в более общем виде, чем в [9].

Нелинейная динамика эволюции сильного поперечного магнитного возмущения в одномерной модели магнитосферы, ограниченной сопряженными отражающими поверхностями, описывается системой МГД-уравнений

$$\begin{aligned}
 \partial B_x / \partial t &= -B_x \partial V_z / \partial z - V_z \partial B_x / \partial z + B_z \partial V_x / \partial z + V_x \partial B_z / \partial z - c^2 / (4\pi\sigma) (\partial^2 B_x / \partial z^2), \\
 \partial B_y / \partial t &= -B_y \partial V_z / \partial z - V_z \partial B_y / \partial z + B_z \partial V_y / \partial z + V_y \partial B_z / \partial z - c^2 / (4\pi\sigma) (\partial^2 B_y / \partial z^2), \\
 \partial V_x / \partial t &= -V_z \partial V_x / \partial z + 1 / (4\pi\rho) (B_z \partial B_x / \partial z) + \eta \partial^2 V_x / (\rho \partial z^2),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$\partial V_y / \partial t = -V_z \partial V_y / \partial z + 1 / (4\pi\rho) (B_z \partial B_y / \partial z) + \eta \partial^2 V_y / (\rho \partial z^2),$$

$$\partial V_z / \partial t = -V_z \partial V_z / \partial z - V_s^2 / \rho \partial \rho / \partial z - 1 / (4\pi\rho) [B_x \partial B_x / \partial z + B_y \partial B_y / \partial z] + (\xi + 4\eta/3) \partial^2 V_z / (\rho \partial z^2),$$

$$\partial \rho / \partial t + \rho \partial V_z / \partial z + V_z \partial \rho / \partial z = 0.$$

Система координат для одномерного приближения выбрана таким образом, что магнитное поле \mathbf{B} , скорость \mathbf{V} и плотность среды изменяются вдоль оси Z . Параметры среды, в том числе скорость звука V_s , выбираются соответствующими условиям в магнитосфере Земли. Используемая система МГД-уравнений применима, когда среда движется как целое либо за счет соударений между частицами ($v_\alpha \gg \omega$ – частота волны, $v_\alpha \gg \omega_{B_\alpha}$ – гирочастоты) для всех α -типов частиц, либо за счет «вмороженности» всех типов заряженных частиц ($\omega \ll \omega_{B_\alpha}$). По условиям внутримангнитосферной плазмы систему (1) можно применять при изучении низкочастотных волн ($\omega \sim 0.1$). В уравнениях (1) ξ , η – два гидродинамических коэффициента вязкости и $c^2 / (4\pi\sigma) = \mu$ – коэффициент электромагнитной вязкости. В соответствии с уравнением $\text{div} \mathbf{B} = 0$ компонента магнитного поля B_z в одномерном приближении является постоянной ($B_z = B_{0z} = \text{const}$).

Система МГД-уравнений была реализована в одномерном и двумерном приближениях в виде программы для компьютера и использовалась для численного моделирования динамики МГД-процессов. Моделирование проводилось для силовой линии, принадлежащей магнитной оболочке с параметром Мак-Илвейна L порядка 5; при этом средние значения плотности плазмы $\rho_0 = 4 \cdot 10^{-21}$ г·см⁻³ и магнитного поля $B_0 = 500$ нТл. Заметим, что, следуя традиционному выбору систем координат, в случае одномерного приближения ось Z и в случае двумерного приближения ось X направлены вдоль геомагнитной силовой линии.

Результаты расчетов представлены ниже в виде графических зависимостей. Чтобы не загромождать рисунки, на осях графиков масштабы непосредственно не приведены. Когда необходимо знать абсолютные величины рассчитанных возмущений, следует обратить внимание на соответствующие объяснения к конкретному вычислительному эксперименту. Однако чаще всего в этом нет необходимости, поскольку окончательные выводы сделаны на основе относительных изменений в рассматриваемой волновой динамике, вызванных сменой средних параметров среды. Именно работа в численном режиме позволила увидеть динамический процесс образования значительных возмущений плотности в виде ММЗ-волн, а потом была осознана потребность в формулировке адекватной аналитической оценки обнаруженных эффектов. В свою очередь, соответствие результатов численных расчетов аналитическим будет свидетельствовать о достоверности всей полученной ниже пространственно-временной динамики возмущений, заданных в магнитосфере.

Проведем последовательное разложение решения одномерной системы (1) по малому параметру $\varepsilon = b / B_{0z} \ll 1$, где b – амплитуда магнитного поля в волне. Нулевым приближением кроме постоянного магнитного поля B_{0z} считаем величину внешнего магнитного поля B_{0y} и плотность плазмы ρ_0 . В космической плазме солнечного ветра и земной магнитосферы значения вязкостей очень невелики, поэтому при выполнении аналитических расчетов вязкостью пренебрегаем.

Таким образом, решение системы (1) ищется в виде разложения

$$B_x = \varepsilon B_{1x} + \varepsilon^2 B_{2x} + \dots,$$

$$B_y = B_{0y} + \varepsilon B_{1y} + \varepsilon^2 B_{2y} + \dots,$$

$$\begin{aligned}
V_x &= \varepsilon V_{1x} + \varepsilon^2 V_{2x} + \dots, \\
V_y &= \varepsilon V_{1y} + \varepsilon^2 V_{2y} + \dots, \\
V_z &= \varepsilon V_{1z} + \varepsilon^2 V_{2z} + \dots, \\
\rho &= \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \dots
\end{aligned} \tag{2}$$

Приравнивая члены первого порядка, получим известную систему уравнений линейного приближения для трех независимых волн: альвеновской, БМЗ и ММЗ. Однако здесь нас будут интересовать лишь компоненты первого приближения B_{1x} и V_{1x} , относящиеся к альвеновской волне,

$$\begin{aligned}
\partial B_{1x} / \partial t &= B_{0z} \partial V_{1x} / \partial z, \\
\partial V_{1x} / \partial t &= B_{0z} / (4\pi\rho_0) \partial B_{1x} / \partial z,
\end{aligned} \tag{3}$$

которые при начальном возмущении

$$B_x = b \exp(-z^2/a^2) \tag{4}$$

дают симметричное разбегание двух альвеновских волн противоположных направлений

$$B_{1x}(z,t) = (b/2) \exp[-(z - V_A t)^2/a^2] + (b/2) \exp[-(z + V_A t)^2/a^2], \tag{5}$$

где $V_A = B_{0z} / (4\pi\rho_0)^{1/2}$ – альвеновская скорость; a – характерный масштаб возмущения. В уравнениях второго приближения эта альвеновская волна будет играть роль источника, создающего магнитозвуковые волны. Поэтому, приравнивая члены при второй степени ε , получим систему уравнений второго приближения:

$$\begin{aligned}
\partial V_{2z} / \partial t &= -V_s^2 / \rho_0 \partial \rho_2 / \partial z - B_{1x} / (4\pi\rho) \partial B_{1x} / \partial z - B_{0y} / (4\pi\rho) \partial B_{2y} / \partial z, \\
\partial \rho_2 / \partial t &= -\rho_0 \partial V_{2z} / \partial z, \\
\partial V_{2y} / \partial t &= B_{0z} / (4\pi\rho) \partial B_{2y} / \partial z \\
\partial B_{2y} / \partial t &= -B_{0y} \partial V_{2z} / \partial z + B_{0z} \partial V_{2y} / \partial z.
\end{aligned} \tag{6}$$

Полученная система линейных неоднородных уравнений для общего случая оказалась более громоздкой, чем соответствующие уравнения второго приближения в работе [9] для случая продольного распространения. Это определяется тем, что в рамках МГД-описания при продольном распространении свойства альвеновской и БМЗ-волны идентичны и при отражении альвеновской волны от границы отраженной БМЗ не возникает – появляется только отраженная ММЗ-волна. В случае наклонного падения альвеновской волны на границу возникают отраженные как ММЗ, так и БМЗ. Это несколько усложняет анализ, хотя решение линейной неоднородной системы (6) может быть найдено стандартными методами.

Достаточно громоздкий вид этого решения нет смысла приводить в статье, когда есть возможность проведения быстрого компьютерного расчета исходных нелинейных уравнений и представления результата на экране монитора. Важно, что аналитическая оценка возмущений плотности в отраженной ММЗ-волне остается при этом такой же, как и в случае продольного распространения

$$\rho / \rho_0 \sim (V_a / V_s)^2 (b / B_s)^2. \tag{7}$$

Оценка (7) может быть полезна как при рассмотрении отражения альвеновской

волны от границы, так и для описания эффектов перекачки энергии быстрой волны в энергию медленной на резких скачках плотности среды. Как и в случае продольного распространения относительные изменения плотности ρ/ρ_0 в ММЗ-волне пропорциональны квадрату относительного изменения магнитного поля $\varepsilon=(b/B_0)^2$. Они пропорциональны квадрату малого параметра ε и поэтому в линейном приближении не могут быть учтены. Существенным оказывается то, что они пропорциональны также параметру $(V_A/V_s)^2$, который не является параметром разложения, но в холодной космической плазме может быть очень велик. При этом отношение (7) может формально оказаться даже больше единицы – разложение (2) в этом случае теряет смысл и необходимо обратиться к исходным уравнениям.

Физический смысл рассматриваемого эффекта связан с выравниванием полного давления в плазме, состоящего из суммы обычного газового давления и магнитного

$$P = \rho V_s^2/2 + B^2/8\pi. \quad (8)$$

В области отражения альвеновской волны от границы магнитное поле существенно возрастает, и в рамках рассматриваемого изотермического приближения выравнивание давлений может быть достигнуто только за счет уменьшения плотности плазмы. При этом сильное магнитное поле выталкивает плазму, а возникшее уменьшение плотности вызывает отраженную медленную магнито-звуковую волну. Если амплитуда падающей альвеновской волны не слишком велика, так что отраженная ММЗ-волна остается линейной, то процесс может быть рассмотрен в рамках приближения второго порядка (6), квадратичного по амплитуде падающей альвеновской волны. Квадратичное приближение необходимо потому, что изменение газового давления пропорционально одной из волновых переменных – плотности ρ , а изменение магнитного давления пропорционально квадрату другой переменной – амплитуды b магнитного поля падающей альвеновской волны. Этим объясняется, почему в рамках линейного приближения эффект «выметания» плотности плазмы и генерации ММЗ-волны при отражении альвеновской волны от жесткой проводящей стенки не может быть обнаружен и рассмотрен. Однако этот эффект может быть рассмотрен в рамках более высокого приближения по амплитуде волны.

Существенно, что в холодной плазме ($V_s \ll V_A$) рассматриваемый эффект с ростом амплитуды падающей волны быстро становится сильно нелинейным, а затем вообще нестационарным. Последнее происходит, когда полное выметание плазмы из области сильного магнитного поля уже в принципе не может выравнивать давление (8) с окружающей средой. В этих условиях намного эффективнее использовать созданную нами компьютерную программу, непосредственно реализующую исходные нелинейные МГД-уравнения, вместо того, чтобы проводить громоздкий анализ приближенных уравнений (6), имеющих весьма ограниченную область применимости. В условиях быстрого получения результатов решения исходных нелинейных уравнений на компьютере анализ разложения (2) важен для понимания связи получаемых вычислительных результатов с широко использовавшимися ранее линейными методами описания волн. Он полезен и для формулирования физического смысла получаемых вычислительных результатов.

2. Вычислительный эксперимент по исследованию пространственно-временной волновой динамики в магнитосфере

В настоящем разделе представлены результаты численного анализа динамической эволюции альвеновского возмущения, образующегося из поперечного МГД-возмущения гауссовой формы, возникшего в окрестности

плоскости геомагнитного экватора вследствие внешней причины. Рассмотрения проведены для одномерного и двумерного приближений. Достоверность и надежность расчетов подтверждены тем, что при контрольном уменьшении временного и пространственного шагов интегрирования результат вычислений оставался стабильным. Тогда предполагалось, что он соответствует решению уравнений в непрерывных переменных. Устойчивость полученных решений по отношению к изменениям параметров уравнений проверялась на предмет отсутствия качественного изменения решений при малом изменении параметров.

Все полученные одномерные рисунки содержат компоненты возмущений, представленные функциями координаты z , все двумерные – функциями x , y . Расстояние между ионосферами вдоль рассматриваемой силовой линии, отвечающей магнитной оболочке $L=5$, равно $8 \cdot 10^9$ см. В одномерном приближении при расчетах пространственно–временной динамики возмущений вдоль всей силовой линии именно этому расстоянию соответствует приведенный на рисунках участок оси Z . В двумерном приближении рассмотрены процессы только вблизи модельной ионосферы, представляющей собой правую грань каждого двумерного рисунка.

Начальное поперечное возмущение (B_x – в одномерном случае и B_z – в двумерном) магнитного поля с характерным масштабом 10^9 см во всех рассматриваемых случаях направлено в плоскости, перпендикулярной к геомагнитной линии B_0 , то есть оно имеет квазиальвеновскую поляризацию. Таким образом, волновые векторы волн, образующихся в результате эволюции, направлены вдоль оси Z для одномерного случая и лежат в плоскости (X, Y) для двумерного.

Численный эксперимент по моделированию изучаемой волновой динамики предполагает использование соответствующих граничных условий, которые должны быть поставлены на концах геомагнитной силовой линии, то есть в магнитосопряженных точках. Принято, что магнитосопряженные точки находятся в областях зеркальных ионосфер с бесконечной проводимостью. Если пренебречь атмосферным зазором, то можно считать ионосферу также и «жесткой стенкой». В результате в численном эксперименте будут выполнены следующие граничные условия на двух крайних точках для одномерного приближения:

$$V_x = V_y = 0, \quad \partial\rho/\partial x = \partial\rho/\partial y = 0, \quad \partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0, \quad \partial B/\partial x = \partial B/\partial y = 0.$$

В случае двумерного приближения аналогичные граничные условия ставятся на двух крайних, правой и левой, гранях (см. рисунки), лежащих в областях зеркальных ионосфер. На двух других гранях рассматриваемого вычислительного пространства граничные условия – периодические

$$\rho(0) = \rho(L), \quad V_i(0) = V_i(L), \quad B_i(0) = B_i(L).$$

В работе рассмотрено также влияние атмосферного зазора – отсутствия плазмы в приземном участке. В этом случае распределение плазмы моделируется распределением, спадающим до нуля к основанию силовой линии.

Первый этап вычислительного эксперимента касался эволюции заданного поперечного нелинейного магнитного возмущения в магнитосфере Земли, распространяющегося под углом 45° к силовой линии геомагнитного поля. Он проводился для случая «жесткой» ионосферы и параметра нелинейности $\rho = B_x/B_0 = 1$. Начальное магнитное возмущение при своем распространении распалось на альвеновские, БМЗ и ММЗ–волны. У магнитозвуковых волн в отличие от альвеновских образовывались ударные структуры. Рисунки последовательно демонстрируют взаимодействие: БМЗ–волны с БМЗ (рис. 1); альвеновской волны с альвеновской (рис. 2); БМЗ с ММЗ (рис. 3, а, б); БМЗ с альвеновской (рис. 4);

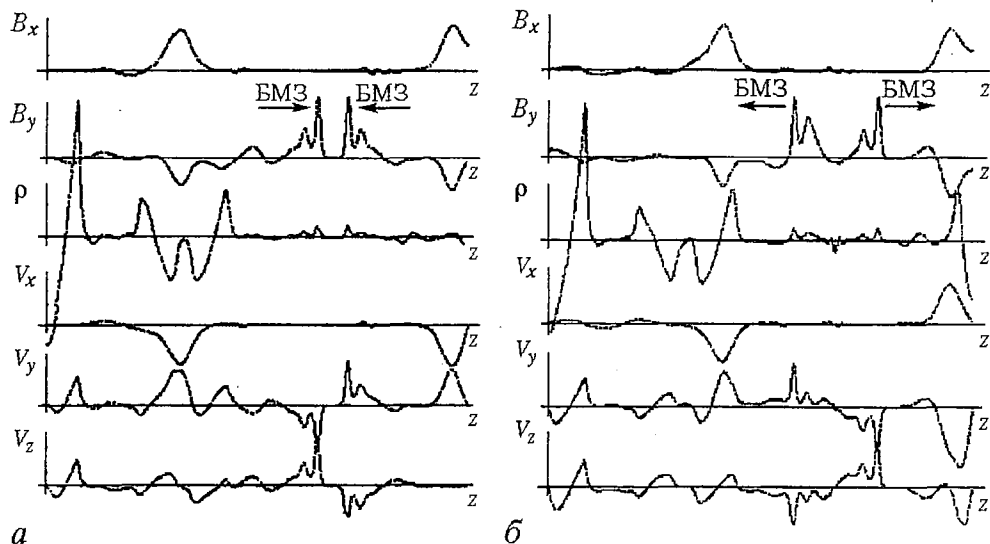


Рис. 1. Взаимодействие БМЗ-волны с БМЗ: *a* – до столкновения, $t=28000$, $t_{\max} = 66000$; *б* – после столкновения, $t=32000$, $t_{\max} = 66000$. Возмущения не взаимодействуют

альвеновской с ММЗ (рис. 3, б, в). На рис. 5 демонстрируются результаты расчетов в двумерном приближении отражения БМЗ-волны от стенки (*a*, б) и альвеновской волны от стенки (*в*, г). На всех рисунках стрелками показаны направления смещения изучаемых возмущений.

Анализ результатов эксперимента показал, что БМЗ-волна отражается без изменений от стенки и плохо взаимодействует с альвеновской, ММЗ и другой БМЗ-волной. Альвеновская волна при взаимодействии со стенкой и другой альвеновской волной образует ММЗ-волну. Можно сказать, что отражение от жесткой стенки происходит для альвеновской волны и БМЗ так же, как и столкновение между собой альвеновских волн или столкновение между собой БМЗ-волн. Многократный проход трансформирующихся при столкновениях

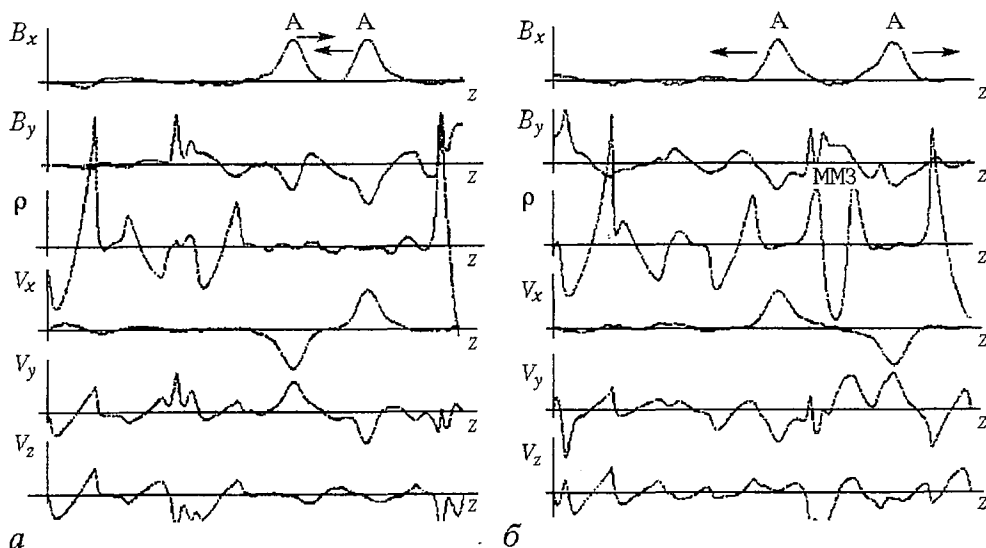


Рис. 2. Взаимодействие альвеновской волны с альвеновской: *a* – до столкновения, $t=40000$, $t_{\max} = 66000$; *б* – после столкновения, $t=50000$, $t_{\max} = 66000$. Образование мощного ММЗ-возмущения

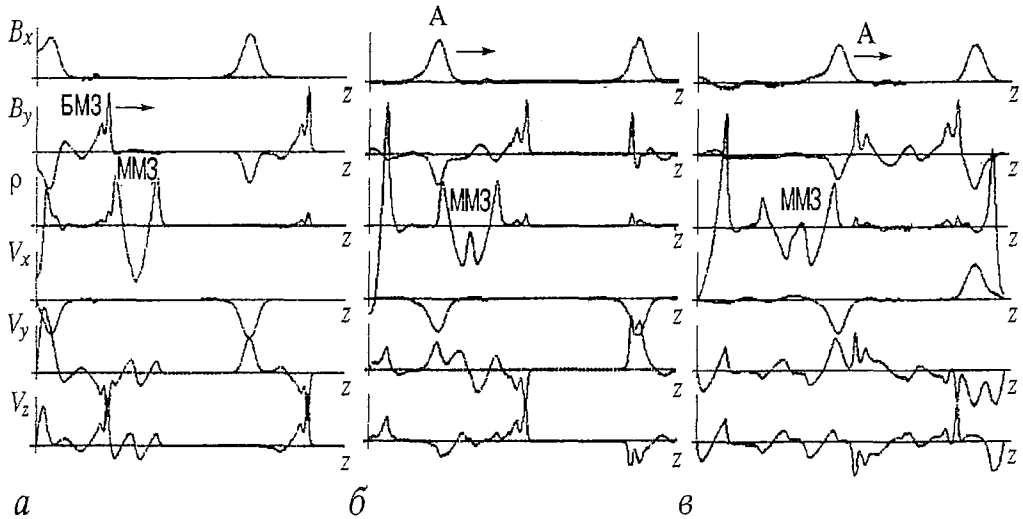


Рис. 3. Взаимодействие БМЗ с ММЗ: а – до столкновения, $t=16000$, $t_{\max}=66000$; б – после столкновения, $t=24000$, $t_{\max}=66000$ Взаимодействие альвеновской волны с ММЗ: в – до столкновения; г – после столкновения, $t=34000$, $t_{\max}=50000$

возмущений приводит, прежде всего, к образованию ММЗ–осцилляций в окрестностях оснований силовых линий и к значительным возмущениям плотности в самой магнитосфере, которые в силу невысокой скорости звука могут затем достаточно долго обуславливать здесь высокий уровень плазменной турбулентности.

Второй этап вычислительного эксперимента касается сопоставления результатов исследования трансформации альвеновского возмущения в ММЗ и БМЗ при его столкновении с «жесткой стенкой» и с атмосферным «зазором» для разных величин отношения альвеновской скорости к звуковой $g=V_A/V_s$.

На рис. 6 представлены последствия отражения альвеновских возмущений, сформировавшихся в результате распада заданного поперечного МГД–возмущения со степенью нелинейности $p=0.4$ и приближающихся под углом в 45° к основанию силовой линии, для случаев «стенки» и «зазора». Расчеты проведены для низкой скорости звука $g=30$. В процессе отражения этих возмущений происходит их частичная трансформация в БМЗ и ММЗ–возмущения – появляются возмущения

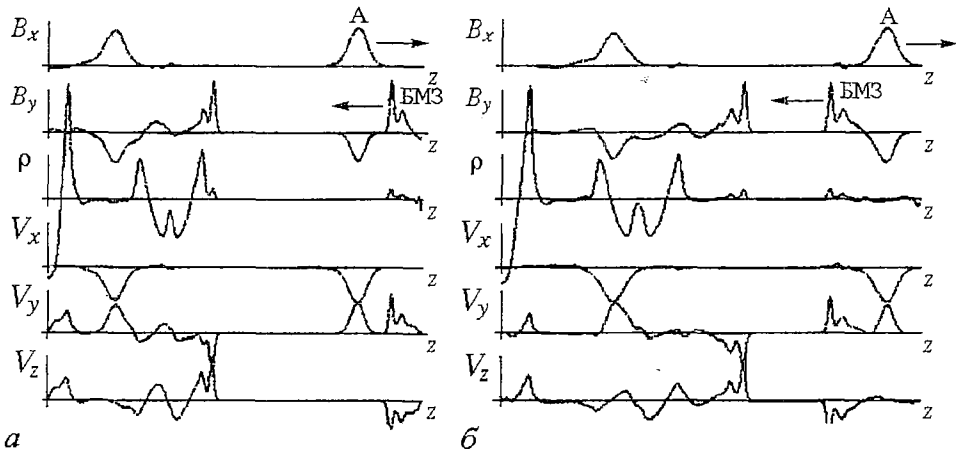


Рис. 4. Взаимодействие БМЗ с альвеновской волной: а – до столкновения, $t=22000$, $t_{\max}=66000$; б – после столкновения, $t=26000$, $t_{\max}=50000$

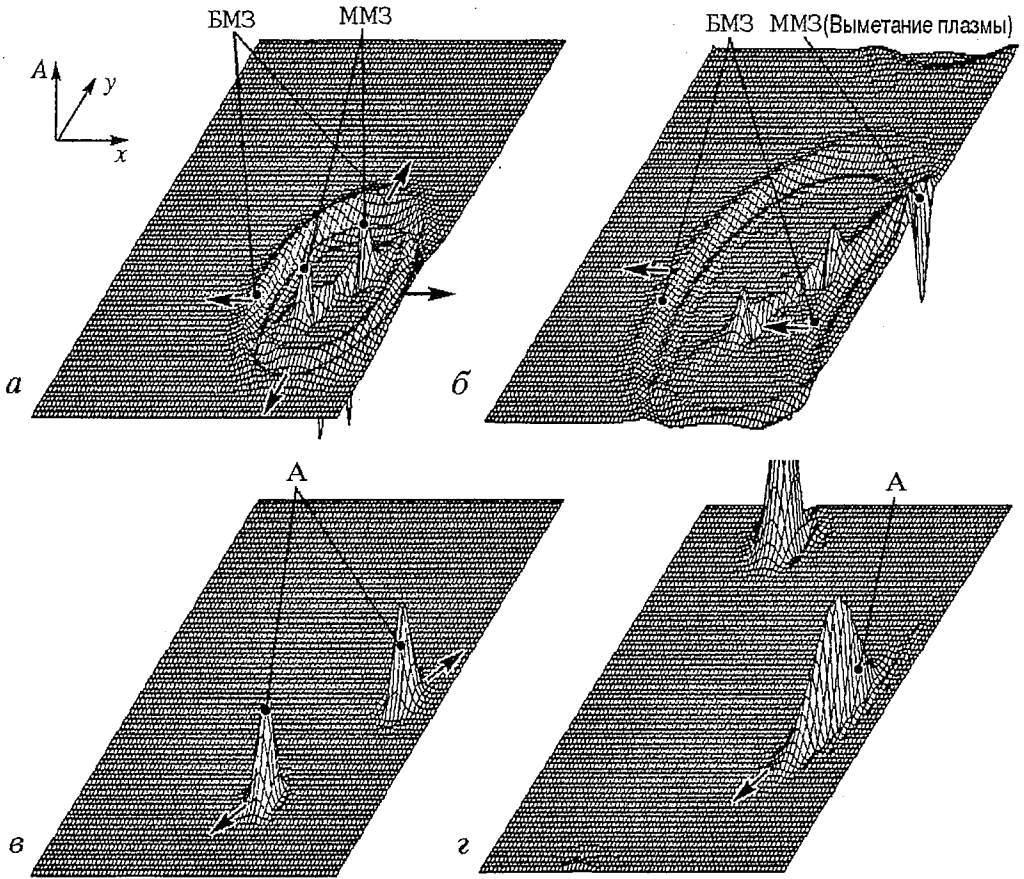


Рис. 5. Взаимодействие БМЗ и альвеновской волны со стенкой: а, в – до взаимодействия, б, г – после взаимодействия; $t_0=1800$ (а), 3000 (б), 1400 (в), 4600 (г); $t_{\max}=5800$

продольной компоненты скорости и плотности среды. Предварительно выделенная альвеновская волна в обоих случаях отражается от модельной ионосферы, создает вблизи нее выметание плазмы и уходит в сторону магнитосопреженной точки. Ее обгоняет более быстрая БМЗ-волна, скорость импульса которой не зависит от

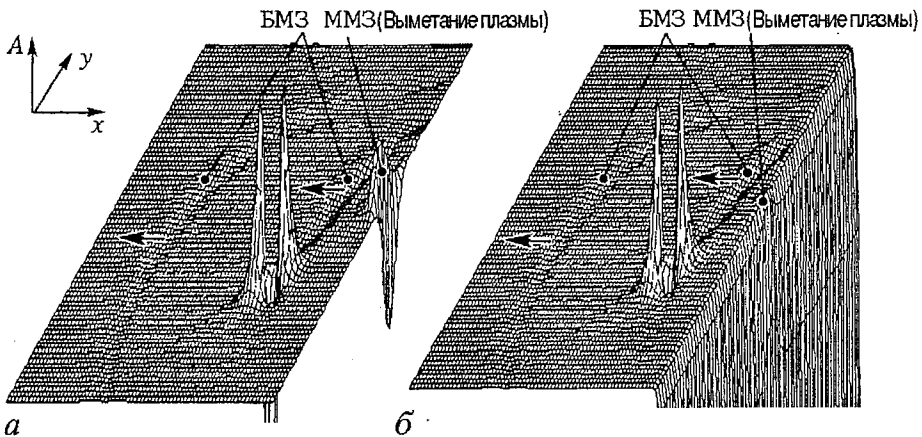


Рис. 6. Результат отражения альвеновской волны: а – от «жесткой стенки»; б – от «зазора»; $t_0=4000$, $t_{\max}=4000$. Выметание плазмы (ММЗ)

угла между направлением распространения и внешним магнитным полем и больше скорости альвеновской волны при непродольном распространении. ММЗ-волна, возникающая из-за уменьшения плотности плазмы в ионосферной приземной области, формирует импульс более сложной формы, который затем отойдет от отражающей границы и будет перемещаться со скоростью звука, образуя на переднем фронте ударную волну. Сопоставление характеристик образовавшихся возмущений свидетельствует о том, что в случае зазора амплитуды обоих магнитозвуковых возмущений меньше, чем для случая стенки без воздушного промежутка.

На примере результата, представленного на рис. 7, а, б, показана зависимость амплитуды ММЗ-волны, возникающей в окрестностях основания силовой линии у стенки, от величины скорости звука.

Сопоставление рис. 7, а и б свидетельствует о значительном росте амплитуд ММЗ-волны с уменьшением температуры магнитосферной плазмы. Полученный эффект, естественно, оказался не столь сильным, как следовало бы из простейших аналитических оценок (8). Неполное совпадение численных расчетов с аналити-

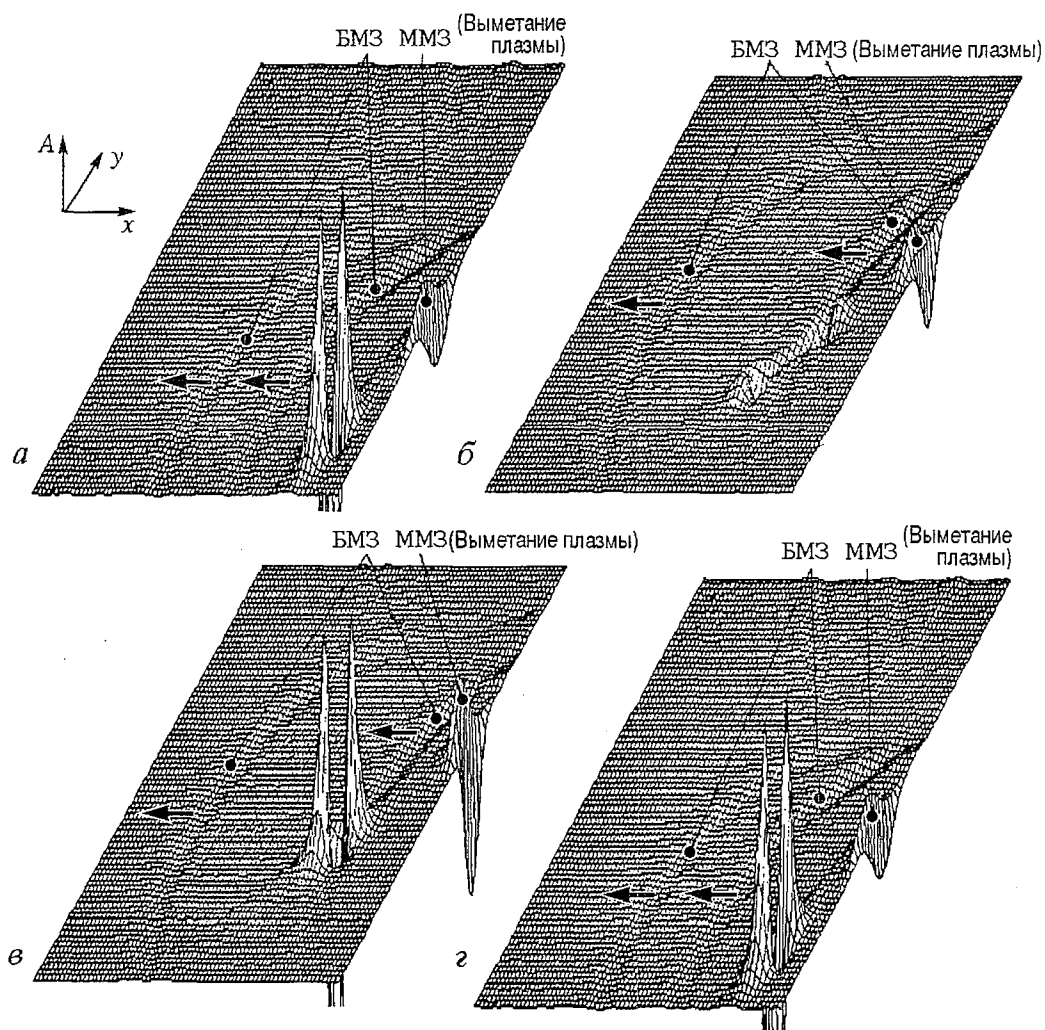


Рис. 7. Результат отражения альвеновской волны от «жесткой стенки»: для $g=30$ (а) и 15 (б); для $g=30$ и углов 45° (в) и 60° (г); $t_0=4000$; $t_{\max}=4000$ (а, б, в), 4200 (г)

ческими обусловлено наличием множителя, зависящего от конкретной (в данном случае гауссовой) формы заданного импульса.

Третья группа численных расчетов проведена для исследования зависимости нелинейной трансформации альвеновских волн в магнитозвуковые при отражении альвеновской волны от стенок магнитосферного резонатора при различном значении угла наклона земного магнитного поля в точке отражения. На рис. 7, *в*, *г* представлены результаты отражения альвеновской волны от «жесткой стенки» для $g=30$ и углов 45° и 60° , соответственно. С уменьшением угла амплитуда возникающей БМЗ-волны уменьшается, а амплитуда ММЗ-волны увеличивается.

Зависимость особенностей отражения альвеновской волны от угла наклона геомагнитного поля в точке отражения в условиях атмосферного зазора носит более сложный характер. На рис. 8, *а* и *б* представлены результаты отражения альвеновской волны от «зазора» в случае углов 45° и 60° , соответственно, для $g=30$. Видно, что соотношение амплитуд возникающей на краях зазора ММЗ-волны и их знак зависят от отношения толщины зазора и длины ММЗ-волны. Свой вклад вносит и характерный наклон распределения плотности в зазоре. В

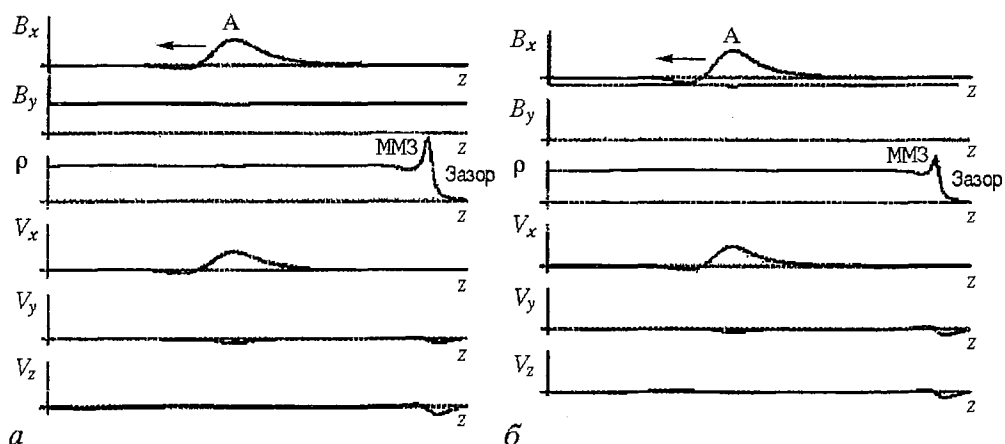


Рис. 8. Отражение альвеновской волны от «зазора» для $g=30$ в случае углов: 45° , $t=34000$, $t_{\max}=38000$ (*а*) и 60° , $t=34000$, $t_{\max}=34000$ (*б*); *в* – вариант отражения альвеновской волны от «зазора» для $g=15$ и угла 60° , $t=34000$, $t_{\max}=34000$. Наблюдается образование ММЗ-волны в результате амплитуда ММЗ-волны в пределах зазора определяется резонансными особенностями последнего.

Сопоставление рис. 8, *а* и *б* свидетельствует о том, что амплитуда ММЗ-волны в зазоре уменьшается с увеличением угла. Однако она увеличивается с уменьшением скорости звука. Это следует из сопоставления рис. 8, *б* с рис. 8, *в*, полученным при рассмотрении столкновения альвеновской волны с зазором для более высокой скорости звука $g=15$ и того же угла 60° .

3. Вопросы устойчивости и достоверности численных результатов

Одним из главных факторов, ограничивающих возможности численных методов является проблема достоверности полученных решений. В настоящее время общая теория на этот счет отсутствует. Надежды на ее создание сильно

уменьшились после осознания того, что даже несложные на вид точечные нелинейности обнаруживают хаотическое поведение. Теория возникающих в них динамических режимов все еще далека от завершенности и находится на стадии накопления и первичной классификации «вычислительно–экспериментальных» фактов [10].

При компьютерной реализации распределенных систем (даже одномерных) речь идет о большом числе связанных точечных элементов, которые могут впасть в состояние неустойчивого или хаотического поведения. Базовым соображением является гипотеза, что существует некоторое предельное решение уравнений с непрерывными переменными при уменьшении временного и пространственного шагов интегрирования, и что численные неустойчивости зависят от временной и пространственной дискретности модели. Таким образом, крайне полезными становятся полуэмпирические принципы и подходы. В качестве примера сделаем несколько замечаний о роли диссипативных членов с вязкостью в нелинейных уравнениях (1).

В МГД–уравнениях (1) присутствуют слагаемые с коэффициентами ξ , η и μ , которые определяют диссипативные процессы в плазме. ξ и η определяют переход механической энергии движения жидкости в тепло, μ – джоулевы потери в плазме. В космической плазме солнечного ветра и земной магнитосферы значения вязкостей невелики, поэтому возникает вопрос, нельзя ли приравнять их нулю для упрощения исследования. Однако оказывается, что в отсутствие диссипативных процессов и дисперсии нелинейная система уравнений (1) будет генерировать ударные волны с конечными разрывами. Стандартная схема компьютерной реализации этих уравнений, рассчитанная на плавное изменение переменных, окажется для такой ситуации неадекватной. При этом амплитуда численных биений переменных быстро неограниченно возрастет, но выбираемый алгоритм численного счета может ограничить осцилляции. Тогда характер поведения переменных в зоне ударной волны уже не будет связан со структурой исходных уравнений. Описанные эффекты являются, по существу, недостатком не столько методов решения уравнений (1), сколько самих нелинейных уравнений без дисперсии и диссипации для описания реальных физических процессов [11].

В вычислительных экспериментах выяснилось, что добавление слагаемых с вязкостью стабилизирует численный счет. Фактически это обусловлено тем, что диссипативные механизмы в нелинейных уравнениях без дисперсии стабилизируют само решение этих уравнений, делая его непрерывным. Это обстоятельство меняет отношение к вязким членам в уравнении (1). Даже если реальная вязкость в плазме очень невелика, эти слагаемые могут рассматриваться как необходимые для стабилизации решения уравнений и численного счета. При этом изменения значений вязкости в достаточно широком диапазоне не очень существенно влияют на результаты.

С другой стороны, необходимо отметить, что в численных экспериментах обнаружена и верхняя граница для значений коэффициентов вязкости, выше которой их увеличение приводит к быстро нарастающей численной неустойчивости. Суть проблемы легче всего понять на простейшем варианте линейного диффузионного уравнения

$$\partial \mathbf{V} / \partial t = -\mu (\partial^2 \mathbf{V} / \partial z^2), \quad (9)$$

которое в компьютерной реализации представляет собой итерационную процедуру

$$\mathbf{V}(t+\tau, x) = (1 - \mu\tau/2\lambda^2)\mathbf{V}(t, x) + (\mu\tau/4\lambda^2)\mathbf{V}(t, x-\lambda) + (\mu\tau/4\lambda^2)\mathbf{V}(t, x+\lambda). \quad (10)$$

Здесь τ – временной шаг счета, λ – пространственный интервал интегрирования. Из вида (10) можно предположить, что при условии

$$\mu > \tau/2\lambda^2 \quad (11)$$

должна возбуждаться двухтактовая неустойчивость с периодом 2τ и с пространственным периодом 2λ . Численный счет подтверждает это предположение. При этом возникает неустойчивость «вспыхивающего» характера – за очень небольшое число временных итераций возникает и нарастает до вычислительного предела низкопериодическая по пространству и времени структура. Такой тип неустойчивости численного решения качественно отличается от пространственно локализованной неустойчивости, возникающей из-за пространственных скачков переменных на ударной волне.

Таким образом, успех вычислительных экспериментов в значительной степени может зависеть от тонкой настройки параметров вязкости при вторых пространственных производных. Оказывается, что интервал их возможных значений, обеспечивающий достоверные результаты численных расчетов, ограничен с двух сторон.

Заключение

Аналитическим и численным методом изучена трансформация нелинейного поперечного магнитного возмущения гауссовой формы, распространяющегося в магнитосфере под углом к геомагнитному полю, в альвеновские, быстрые и медленные магнитозвуковые возмущения. Анализ полученных оценок и динамических картин непродольного переноса заданного возмущения в магнитосферной плазме между магнитосопряженными точками в случае граничных условий в виде жесткой стенки и в виде атмосферного зазора позволил сформулировать следующие результаты.

- Многократный проход трансформирующихся при столкновениях возмущений, обусловленных распадом заданного, приводит к образованию осцилляций ММЗ–волны в окрестностях оснований силовых линий. Это вызывает значительные возмущения плотности в самой магнитосфере, которые в силу невысокой скорости звука могут обеспечить высокий уровень плазменной турбулентности. В модельной магнитосфере БМЗ–волна отражается без изменений от стенки и плохо взаимодействует с альвеновской, ММЗ и другой БМЗ–волной. Альвеновская волна при взаимодействии со стенкой и другой альвеновской волной образует сильную ММЗ–волну с большой амплитудой плотности.

- Сильная альвеновская волна вызывает существенное выметание плазмы из окрестностей модельной ионосферы, которое может регистрироваться как ММЗ–волна. С ростом отношения альвеновской скорости к звуковой происходит усиление перераспределения концентрации плазмы в земной ионосфере. Результаты вычислительного эксперимента согласуются с соответствующими аналитическими оценками.

- Исследовано наличие зависимости рассматриваемых эффектов от угла наклона направления распространения альвеновской волны к магнитному полю в точке отражения. В случае жесткой стенки с уменьшением угла амплитуда возникающей БМЗ–волны уменьшается, а амплитуда ММЗ–волны увеличивается.

- Роль приземного зазора ионосфера – атмосфера с размытой верхней границей в явлениях отражения альвеновской волны сводится к уменьшению амплитуд возникающих магнитозвуковых волн по сравнению со случаем жесткой стенки.

• По результатам численных экспериментов выявлено два типа численных неустойчивостей, возникающих в результате решения нелинейных уравнений:

1) неустойчивости, связанные с резким изменением значений переменных в зоне ударной волны, которые обычно подавляются увеличением вязкости; кроме того, такие неустойчивости могут возникать и из-за чрезмерно большого значения временного шага интегрирования (в этом случае они подавляются уменьшением величины временного шага); 2) «вспыхивающие» неустойчивости, внезапно возникающие там, где нет резких перепадов переменных; чаще всего они обусловлены чрезмерно высокой величиной вязкости.

Зависимость особенностей отражения альвеновской волны от угла наклона геомагнитного поля в точке отражения в условиях атмосферного зазора носит более сложный характер и определяется его резонансными особенностями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 00-05-64689.

Библиографический список

1. Гульельми А.В. МГД-волны в околоземной плазме. М.: Наука, 1979. 139 с.
2. Пудовкин М.И., Распопов О.М., Клейменова Н.Г. Возмущения электромагнитного поля Земли. Ч.II. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. 270 с.
3. Ваньян Л.Л., Абрамов Л.А., Альперович Л.С. и др. Геомагнитные пульсации. М.: Наука, 1973. 93 с.
4. Cohen R.H., Kulsrud R.M. Nonlinear evolution of parallel-propagating hydro-magnetic waves // Phys. Fluids. 1974. Vol. 17, № 12. P. 2215.
5. Бархатов Н.А., Беллюстин Н.С. Нелинейная трансформация магнито-гидродинамических волн в движущейся плазме // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 34, № 5. С. 579.
6. Морозов А.И., Савельев В.В. Динамика сверхзвуковых плазменных потоков в магнитном поле // Физика плазмы. 1996. Т. 22. С. 318.
7. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 684 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
9. Бархатов Н.А., Беллюстин Н.С., Левитин А.Е., Сахаров С.Ю. О трансформации магнитосферных альвеновских возмущений в медленные магнито-звуковые при отражении от магнитосопреженных областей ионосферы // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, №4. С. 285.
10. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с.
11. Гурбатов С.Н. Нелинейное взаимодействие и рассеяние волн в недиспергирующих средах. Автореферат докторской диссертации, НИРФИ. Горький, 1985. 30 с.

*Научно-исследовательский
радиофизический институт,
Нижний Новгород*

*Нижегородский государственный
педагогический университет
Институт Земного магнетизма, ионосферы и
распространения радиоволн РАН*

Поступила в редакцию 13.10.01

TRANSFORMATION OF ISOLATED MHD DISTURBANCES IN PLANETARY MAGNETIC RESONATOR

Barkhatov N.A., Belliustin N.S., Emel'yanov N.N., Levitin A.E.

Peculiarities of the evolution dynamics of strong MHD disturbance in the magnetosphere are investigated. Transformation of the Alfvén wave into the fast and slow magnetosound waves at collision of contrary impulses, which is taking place along the Earth magnetic field, is considered. The dependence of effects on angle declination of the Alfvén wave to the magnetic field and on ratio of sound velocity to Alfvén velocity in plasma are analysed. Nonlinear transformation of the Alfvén waves in the magnetosounds ones at reflection of the Alfvén wave from the walls of magnetospheric resonator at various angles of the Earth magnetic field in a point of reflection is considered in this article as well. Special attention is paid to effects, which role increase with decrease of temperature and sound velocity in plasma. The analytical evaluations matched with considered effects in case of average nonlinearity are made, and peculiarities to approach of cold plasma are also studied. The role of the Earth ionosphere-atmosphere space in these phenomena is investigated. It is marked, that isolated strong Alfvén wave can induce the essential plasma concentration redistribution in the Earth ionosphere. The dependence of this effect on ratio of Alfvén velocity to sound one is considered.

Two kinds of nonstabilities, arising in the nonlinear MHD equations, are detected. The role of dissipative viscosity parameters for maintenance of the stable numerical account is shown.



Бархатов Николай Александрович – родился в Горьком (1948), окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1971), аспирантуру ИЗМИР АН (Троицк, Моск. обл.). Работает в НИРФИ (с 1978), в Нижегородском государственном педагогическом университете (с 1986), профессор кафедры теоретической физики (с 1998). Соросовский профессор. Тема кандидатской диссертация – «Ультранизкочастотные волны в солнечном ветре и магнитосфере Земли» (1981), докторской – «Распространение магнитогидродинамических возмущений в солнечном ветре и околоземном пространстве» (1997). Опубликовано свыше 100 научных и научно-методических работ по направлениям: изучение особенностей эволюции ультранизкочастотных волн в околоземном космическом пространстве и солнечном ветре; установление солнечно-земных связей и прогноз глобальных геомагнитных возмущений методом искусственных нейронных сетей. Руководитель проектов, поддержанных грантами (№№ 94–02–06106, 98–05–64380, 00–05–64689) Российского фонда фундаментальных исследований, проекта «Университеты России 2000» и проекта поддержанного грантом Международного Научного Фонда, руководитель проекта поддержанного грантом INTAS – CNES (№ 97–1450).

E-mail: nbarkhatov@mail.nnov.ru



Беллюстин Николай Сергеевич – родился в Горьком (1950 г.). Окончил с отличием радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1972). Работает в Научно-исследовательском радиофизическом институте. Кандидат физико-математических наук (1978), старший научный сотрудник (1991). Тема кандидатской диссертации – «Некоторые вопросы распространения и излучения электромагнитных волн в магнитоактивной плазме». В данное время работает в следующих направлениях: теория искусственных нейронных сетей и их применения для обработки визуальных изображений и для прогнозирования и моделирования сложных динамических систем, в том числе финансово-экономических процессов; изучение низкочастотных магнитогидродинамических процессов в плазме земной магнитосферы и солнечного ветра, моделирование и прогнозирование ударных процессов в космической плазме с использованием средств компьютерного моделирования и методов искусственных нейронных сетей. Работал в рамках грантов РФФИ, программы Университеты России, INTAS–CNES.



Емельянов Николай Николаевич – родился в Горьком (1978), студент 2-го курса магистратуры физического факультета Нижегородского государственного педагогического университета.



Левитин Анатолий Ефимович – родился в Ейске (1938). Окончил физический факультет Московского государственного университета (1967). Работает в ИЗМИР РАН, заведующий лабораторией геомагнитных вариаций, доктор физико-математических наук. Тема кандидатской диссертации – «Геомагнитный эффект ионосферных ядерных взрывов» (1971), докторской – «Крупномасштабные геомагнитные вариации, контролируемые параметрами солнечного ветра, и связанные с ними электрические поля и токи в высоких широтах». Опубликовано свыше 100 научных работ по направлениям: космические лучи, физика магнитосферы, физика ионосферы. Руководитель проекта, поддержанного грантом РФФИ (99-05-64296).



ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА РЕЖИМ САМОМОДУЛЯЦИИ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН

А.А. Галишиников, Г.М. Дудко, Ю.А. Филимонов

В численном эксперименте, основанном на решении одномерного нестационарного нелинейного уравнения Шредингера, исследованы особенности развития эффекта самомодуляции магнитостатических волн при возбуждении периодическим сигналом, обеспечивающим изменение амплитуды магнитостатических волн на входном преобразователе по закону $\varphi = \varphi_0(1 + M \sin \Omega t)$. Показано, что при превышении величиной φ_0 порога модуляционной неустойчивости динамика огибающей магнитостатических волн существенно определяется глубиной модуляции M и соотношением частот самомодуляции магнитостатических волн и внешнего воздействия. В результате могут наблюдаться эффекты вынужденной синхронизации регулярного и хаотического режимов самомодуляции, биения на частотах самомодуляции и внешнего воздействия, трансформация огибающей магнитостатических волн в следующие друг за другом с периодом внешнего воздействия наборы связанных солитонов. При фиксированных значениях частоты и глубины внешней модуляции характер динамики огибающей магнитостатических волн в точке «наблюдения» определяется удаленностью этой точки от входной антенны.

Процессы хаотизации регулярного движения либо упорядочивания хаотического поведения в неавтономном режиме активно исследуются на примере сосредоточенных автоколебательных систем и их математических моделей [1–3]. Интерес к таким исследованиям поддерживается существованием универсальных закономерностей в нелинейной динамике автостохастических систем самой различной природы. В ряде случаев можно провести качественные аналогии в поведении сосредоточенных и распределенных систем. Для магнитных пленок примером таких аналогий может служить наличие универсальных сценариев перехода к хаосу при развитии спин-волновой турбулентности в условиях параметрического возбуждения спиновых волн однородной накачкой [4,5] или при развитии модуляционной неустойчивости магнитостатических волн [6–8] в ферритовых пленках, проявление «стохастического резонанса» в процессах движения доменных границ [9] и возможность фрактализации кривых фазового равновесия магнитных систем, находящихся под действием пульсирующего поля подмагничивания [10]. Разумеется, полных совпадений в динамике сосредоточенных и распределенных систем не наблюдается, и поэтому исследование последних представляет самостоятельный интерес.

Цель данной работы – численное исследование развития модуляционной неустойчивости магнитостатических волн (МСВ), возбуждаемых в ферромагнитной пленке периодическим сигналом.

Ранее нелинейная динамика намагниченности под влиянием внешнего периодического воздействия рассматривалась в [11] применительно к задачам регуляризации хаотического поведения параметрических спиновых волн, возбуждаемых однородной СВЧ-накачкой в ферромагнитных образцах. Была продемонстрирована возможность управления хаосом путем внешнего нерезонансного воздействия на контрольный параметр системы с частотой, более чем в два раза превосходящей частоту автомодуляции вектора намагниченности образца, возникающей на пороге суловской неустойчивости первого рода. При этом эффективность подавления хаоса увеличивалась с ростом амплитуды внешнего воздействия.

В нашем случае можно ожидать, что введение внешней амплитудной модуляции на входной антенне изменит условия развития процессов самовоздействия МСВ. В частности, обеспечивая дополнительную накачку энергии в некоторые волны модуляции, оно способно разрушить их изначальную иерархию, что приведет к изменению модуляционного спектра и к перестройке динамики нелинейного взаимодействия модуляционных мод МСВ.

1. Постановка задачи

В качестве модели задачи использовалось одномерное нелинейное уравнение Шредингера (1) с граничным условием, отвечающим периодической внешней модуляции амплитуды МСВ на входной антенне (2)

$$i(\partial\varphi/\partial t + V_g \partial\varphi/\partial x) + 1/2 \beta \partial^2\varphi/\partial x^2 - \gamma|\varphi|^2\varphi + i\alpha\varphi = 0, \quad (1)$$

$$\varphi(0,t) = \varphi_0(1 + M\sin\Omega t). \quad (2)$$

Здесь t - время; x - координата; φ - комплексная амплитуда МСВ; V_g - групповая скорость МСВ; β - коэффициент, характеризующий дисперсионное расщепление волны; γ - коэффициент нелинейности; α - диссипативный коэффициент; Ω - частота внешней модуляции; M - глубина внешней модуляции ($0 \leq M \leq 1$).

Вычислительный эксперимент проводился при значениях коэффициентов, соответствующих параметрам волны, использованным при исследовании модуляционной неустойчивости МСВ в работе [8]. Отметим, что при выбранных параметрах и в отсутствие внешней модуляции ($M=0$) неустойчивость МСВ относительно процессов самовоздействия при распространении между входным и выходным преобразователями начинала проявляться при превышении амплитудой волны на входе φ_0 порогового значения $\varphi_0^1 \approx 0.031$. Развитие этой неустойчивости приводило к появлению амплитудной модуляции МСВ на частоте $F_0 \approx 5.3$ МГц, соответствующей частоте одной из волн модуляции с максимальным инкрементом. Ширина частотного диапазона $[F^{\min}, F^{\max}]$ волн модуляции, относительно которых может быть неустойчива МСВ с постоянной амплитудой, минимальна при $\varphi_0 = \varphi_0^1$ и расширяется за счет движения границы F^{\max} при увеличении φ_0 . Одновременно происходит увеличение частоты квазисинусоидальной самомодуляции F_0 (от $F_0 = 5.3$ МГц при $\varphi_0 = 0.031$ до $F_0 = 36$ МГц при $\varphi_0 = 0.070$). При значении амплитуды $\varphi_0 = \varphi_0^2 \approx 0.072$ реализуется смена характера самомодуляции волны и рождается вторая, несоизмеримая с первой, частота самомодуляции. В целом при выбранных параметрах нелинейного уравнения Шредингера развитие самомодуляции МСВ (при $M=0$) идет от одночастотной самомодуляции к хаотической (при $\varphi_0 = \varphi_0^3 \approx 0.090$) по сценарию Рюэля и Такенса через появление и разрушение двухчастотного квазипериодического движения [8].

Понятно, что введение внешней амплитудной модуляции МСВ на входной антенне изменит условия развития процессов самовоздействия волны. В частности, обеспечивая дополнительную накачку энергии в некоторые волны модуляции из указанного выше диапазона, оно способно нарушить изначальную иерархию инкрементов этих волн. В результате частота самомодуляции может изменяться в пределах разрешенного интервала $[F^{\min}, F^{\max}]$ и, соответственно, сдвигаться в сторону от значения F_0 .

В зависимости от соотношения частот внешней модуляции Ω и самомодуляции F , как и в случае сосредоточенных систем, можно ожидать появление различных режимов синхронизации либо режима биений в поведении огибающей МСВ.

Кроме того, следует учесть, что для распределенной системы характерно наличие не только временных, но и пространственных масштабов таких, например, как длина нелинейности L_{nl} , диссипативная длина L_{dis} , длина волны самомодуляции Λ [12]. Соотношение указанных масштабов с длиной волны вынужденной модуляции $\Lambda_{\Omega} = 2\pi V_g / \Omega$ неизбежно скажется на формировании типа поведения огибающей МСВ в точке расположения выходной антенны x_a .

Из сказанного ясно, что к основным параметрам, определяющим поведение огибающей МСВ в точке расположения выходной антенны, точке «наблюдения», следует отнести φ_0 , Ω , M и саму координату выходной антенны x_a .

Ниже обсуждается влияние внешней амплитудной модуляции на поведение огибающей МСВ в точке «наблюдения» с координатой $x_a = 0.15$ см при двух различных значениях входной амплитуды МСВ (см. вставку к рис. 1): $\varphi_0 = \varphi_0^1 = 0.031$ (режим одночастотной самомодуляции при $M=0$); $\varphi_0 = \varphi_0^3 = 0.090$ (режим хаотической самомодуляции при $M=0$).

Для иллюстрации зависимости характера самомодуляции МСВ от координаты выходной антенны мы сравним результаты, полученные при значениях $x_a = 0.15$ см и 0.5 см.

2. Влияние внешнего периодического воздействия на режим одночастотной самомодуляции

Характер влияния внешнего периодического воздействия на режим одночастотной модуляции в точке наблюдения $x_a = 0.15$ см при $\varphi_0 = 0.031$ показан на рис. 1, а; рис. 2 и 3.

На рис. 1, а в плоскости параметров «глубина модуляции M - частота модуляции Ω » изображены три области характерных движений огибающей МСВ на выходной антенне. На оси Ω отмечена точка $F_0 = 5.3$ МГц, соответствующая значению частоты самомодуляции при указанной амплитуде в отсутствие внешнего периодического воздействия. На рис. 2 и 3 приведены типичные для этих областей временные реализации $|\varphi(t, x_a)|^2$, спектры и проекции фазовых портретов*. Рис. 2, а иллюстрирует поведение огибающей МСВ при отсутствии внешней модуляции ($M=0$).

В области I наблюдаются различные по сложности периодические и квазипериодические движения огибающей МСВ во времени, образами которых в фазовом пространстве являются резонансные либо инвариантные торы. В частотном спектре этих движений всегда присутствуют составляющие на частоте самомодуляции F , частоте внешнего воздействия Ω , а также гармоники названных

* При построении проекций фазовых портретов по горизонтальной оси откладывались значения $|\varphi(t)|^2$ в точке x_a , а по вертикальной - значения этой величины в точке $x_a + dx$, где $dx = 0.07$ см.

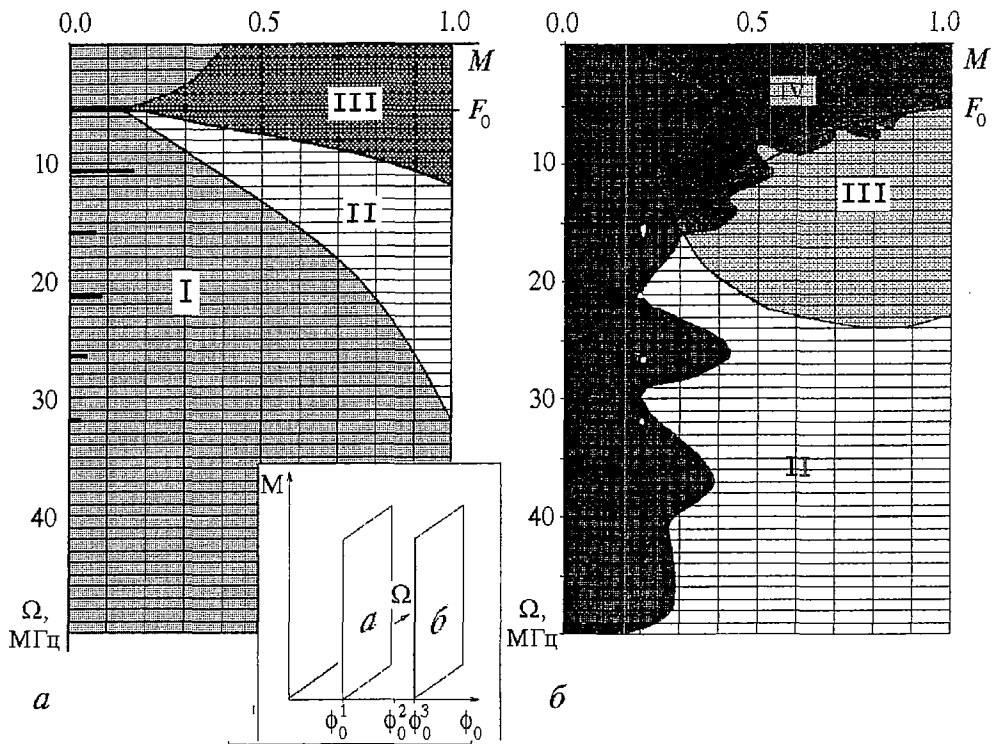


Рис. 1. Плоскость параметров «глубина модуляции - частота модуляции» с областями качественно различных режимов поведения огибающей МСВ с разными начальными амплитудами ϕ_0 : $a - 0.031$, $b - 0.090$ при наличии внешнего периодического воздействия

частот и составляющие на комбинационных частотах (рис. 2, в, 3, б - г). В редких случаях для $\Omega < F_0$ в области I возможно появление нерегулярного, близкого к хаотическому поведения огибающей МСВ (рис. 2, б).

На временных реализациях, принадлежащих области I, при малой глубине внешней модуляции (см. $M < 0.15$) всегда выделяется период самомодуляции $T_0 = 1/F_0$ (см. рис. 3, б). С увеличением M , по мере роста в спектре движения составляющей на частоте Ω , становится все более различимым период внешнего воздействия, а видимый период самомодуляции изменяется из-за сдвига частоты самомодуляции F от значения F_0 и постепенно исчезает (см. рис. 3, в, г). Кроме того, на всех реализациях, как правило, присутствует низкочастотная огибающая, период которой в каждом конкретном случае удается связать с одной из разностных частот $f = |\Omega - nF|$, где n - целое число. Ширина области I увеличивается с ростом частоты внешней модуляции Ω . Для $\Omega = nF_0$ при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ в области I имеют место узкие «подобласти» (на рис. 1 обозначены черными полосами) квазисинусоидальных движений на частоте F_0 с предельным циклом в фазовом пространстве (рис. 2, г).

Область II характеризуется наличием режима вынужденной синхронизации на частоте внешнего воздействия Ω (рис. 2, д, 3, д). В частотном спектре движений из этой области присутствует лишь составляющая на частоте внешнего воздействия Ω со своими гармониками. В фазовом пространстве наблюдается предельный цикл.

В качестве иллюстрации смены режимов самомодуляции при внешнем периодическом воздействии на рис. 3 показано поведение огибающей МСВ при переходе из области I в область II параллельно оси M для $\Omega = 27$ МГц. Справа от спектров в каждой строке указаны значения глубины модуляции M . Видно, что

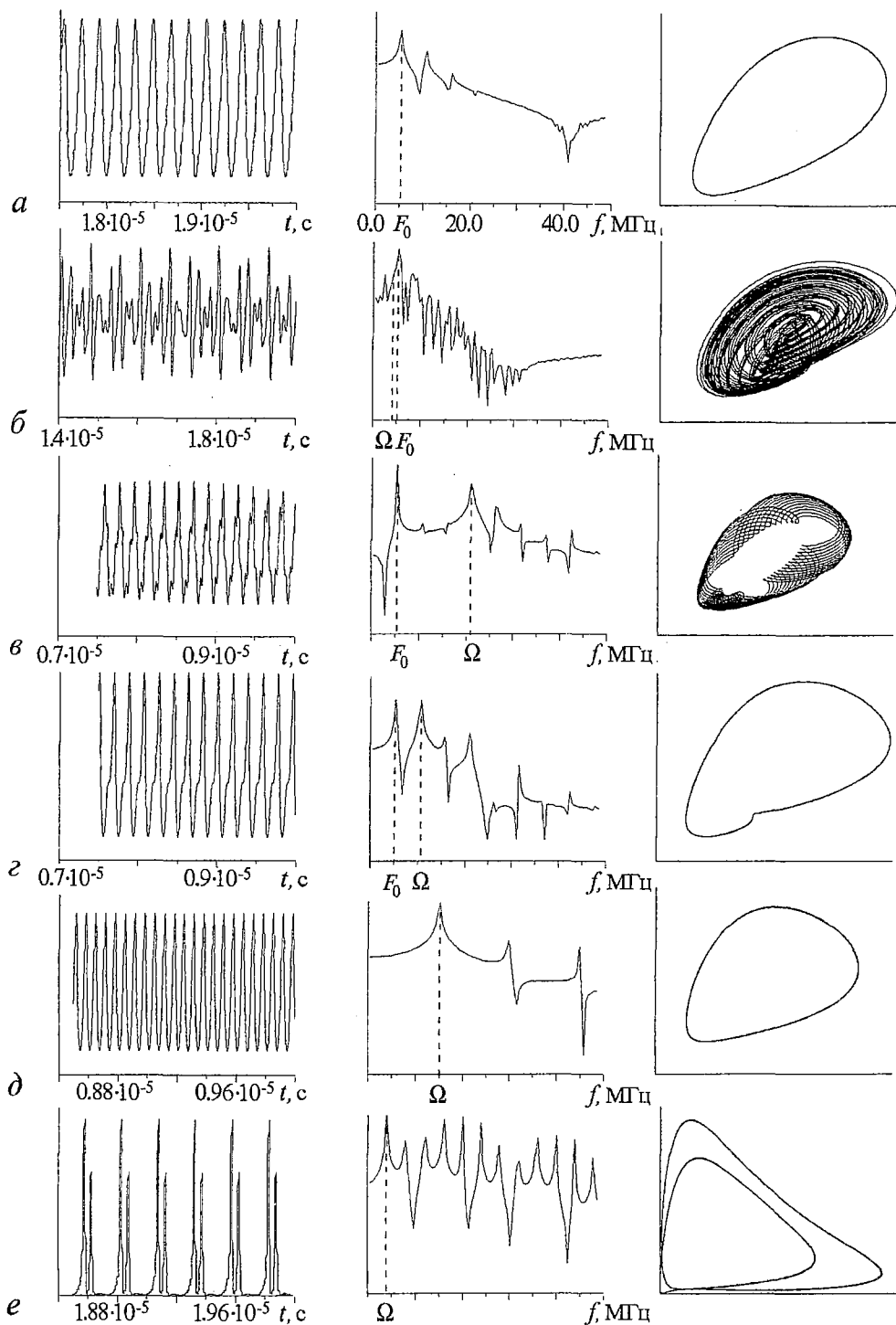


Рис. 2. Временные реализации, спектры и проекции фазовых портретов, иллюстрирующие влияние внешнего периодического воздействия на развитие одночастотной самомодуляции

переход I→II сопровождается сдвигом частоты самомодуляции от $F_0=5.3$ МГц к $F \sim 6.75$ МГц, что составляет $1/4\Omega$.

Область III мы назвали областью «солитонных» режимов с синхронизацией

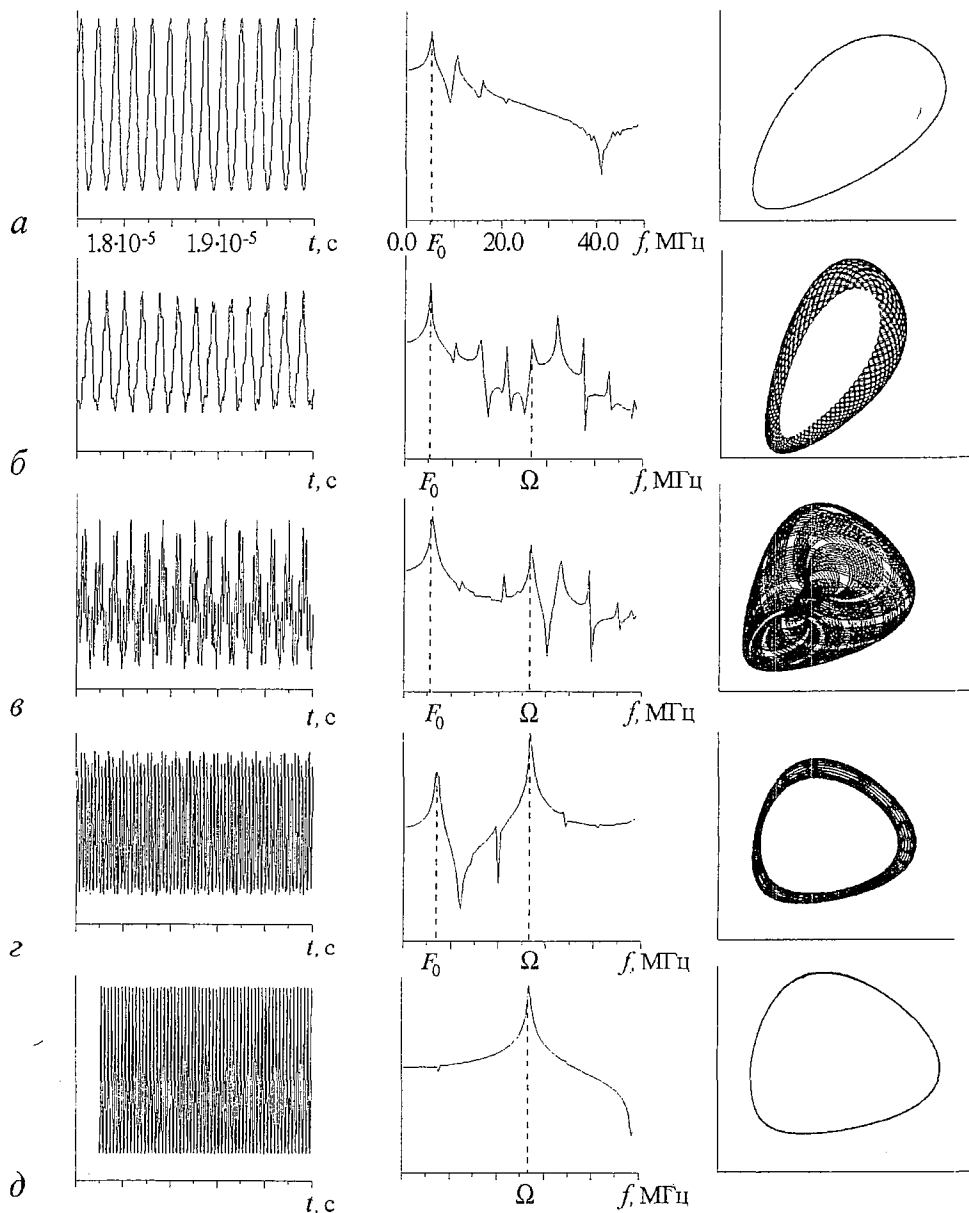


Рис. 3. Переход от режима биений к режиму вынужденной синхронизации огибающей МСВ; $\varphi_0=0.031$, $\Omega=27$ МГц

на частоте внешнего воздействия. Все временные реализации, характерные для этой области, представляют собой последовательность периодически повторяющихся наборов связанных солитонов. Период следования этих наборов, как правило, равен периоду внешнего воздействия (в некоторых случаях период следования наборов солитонов может равняться $2T_\Omega$). Количество солитонов в наборе может быть 1, 2, 3, ... в зависимости от соотношения параметров φ_0 , M и Ω . На рис. 2, *е* показано характерное для области III поведение огибающей МСВ. Формирование такого рода поведения имеет довольно простую и понятную физическую интерпретацию. Как было показано в работе [13], в случае подачи на вход исследуемой системы одиночного импульса последний может

трансформироваться в один или несколько солитонов в зависимости от амплитуды импульса в пике при фиксированной длительности импульса. Существует пороговая амплитуда φ_0^{th} , ниже которой формирование солитона огибающей МСВ невозможно [12–14].

При периодическом внешнем воздействии и фиксированном значении $\varphi_0 > \varphi_0^{\text{th}}$ (рис. 4) в случае достаточно больших M (таких, что, во-первых, $\varphi^{\text{min}} < \varphi_0^{\text{th}}$; во-вторых, период внешнего воздействия $T_\Omega = 1/\Omega$ больше «временного»

размера отдельного солитона, способного сформироваться при заданном уровне φ^{max} ; в-третьих, длина формирования солитонов значительно меньше диссипативной длины L_{dis} ; амплитудно-модулированный сигнал (2) в процессе входа в пленку воспринимается как последовательность «импульсов» продолжительностью T_i (на этих временных интервалах $\varphi(0,t) > \varphi_0^{\text{th}}$) и расстоянием между «импульсами» T_p (на этих временных интервалах $\varphi(0,t) < \varphi_0^{\text{th}}$). Период следования «импульсов» равен $T_\Omega = T_i + T_p$. По мере вхождения в пленку каждый отдельный «импульс» трансформируется в набор связанных солитонов в полном соответствии с изложенным в работе [13].

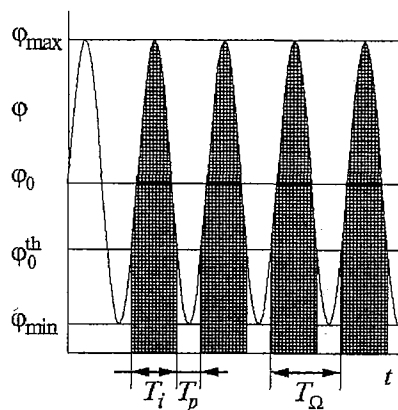


Рис. 4. Зависимость амплитуды МСВ от времени на входной антенне при наличии внешней периодической модуляции

3. Влияние внешнего периодического воздействия на режим стохастической самомодуляции

На рис. 1, б и рис. 5 представлены результаты вычислительного эксперимента (в точке наблюдения $x_a = 0.15$ см) по исследованию влияния внешнего периодического воздействия на режим стохастической самомодуляции, который для выбранных параметров нелинейного уравнения Шредингера и $M=0$ реализуется при $\varphi_0 = 0.090$ (рис. 5, а).

На плоскости параметров «глубина модуляции M – частота модуляции Ω » (см. рис. 1, б) можно выделить четыре области характерных движений огибающей МСВ.

В области I наблюдается хаотическое поведение сигнала (рис. 5, б). В пределах области структура хаоса меняется, что проявляется в большом разнообразии наблюдаемых реализаций, спектров и фазовых портретов. Граница области I, соприкасающаяся с другими областями, имеет ряд хорошо выраженных чередующихся «горбов» и «впадин», расстояние между которыми по оси Ω равно минимально возможной частоте самомодуляции $F_0 = 5.3$ МГц.

Области II, III, IV характеризуются наличием различных режимов синхронизации хаоса: от амплитудной модуляции «хаотической» огибающей – область IV (рис. 5, в), до полного подавления хаоса – области III и II (рис. 5, г-е), причем области II и III являются уже упоминавшимися выше, соответственно, областью вынужденной синхронизации и областью «солитонных» режимов с синхронизацией на частоте внешнего воздействия.

Из рис. 5, в видно, что в области IV поведение огибающей остается хаотическим, но в спектре сигнала в качестве доминирующей появляется составляющая

на частоте внешнего воздействия, а на временной реализации видны отдельные хаотические всплески, следующие друг за другом с периодом T_{Ω} .

Граница между областями IV и III довольно хорошо описывается выражением

$$M\Omega = F_0, \quad (3)$$

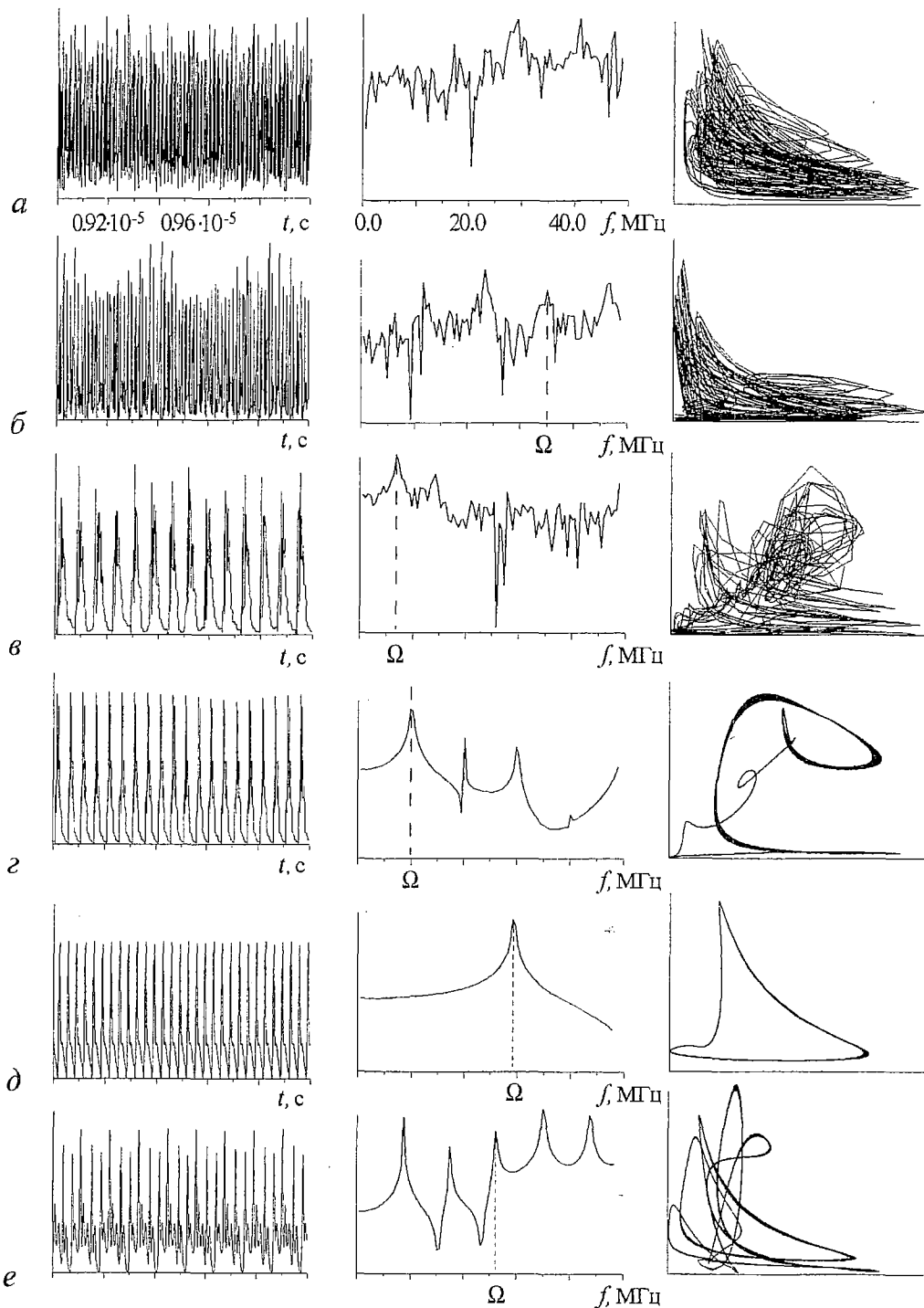


Рис. 5. Временные реализации, спектры и проекции фазовых портретов, иллюстрирующие влияние внешнего периодического воздействия на развитие стохастической самомодуляции

Легко показать, что величина $(M\Omega)$ определяет крутизну фронта амплитудно-модулированного сигнала (2) на входной антенне в моменты времени $t=nT_{\Omega}/2$, $n=0,1,2,\dots$. Таким образом, появление «солитонных» режимов поведения (см. рис. 5, з) огибающей МСВ в случае больших входных амплитуд ($\varphi_0=0.090$) становится возможным только при достижении пороговой крутизны фронта входного сигнала. Следует также обратить внимание на то, что поскольку область III является областью с регулярным типом поведения, выражение (3) описывает тот факт, что подавление хаоса в анализируемой системе осуществимо лишь при частотах внешнего воздействия Ω , больших минимально возможной частоты самомодуляции $F_0=5.3$ МГц, причем чем меньше глубина внешней модуляции, тем больше должна быть частота Ω . Для $\Omega>3F_0$ полное подавление хаоса может быть достигнуто при достаточно малых амплитудах внешнего воздействия, порядка 20% от φ_0 ($M=0.2$). Отметим, что аналогичная зависимость между частотой и амплитудой внешнего параметрического воздействия была получена ранее для задачи управляемой синхронизации хаоса системы из двух связанных идентичных нелинейных неавтономных осцилляторов методом периодической модуляции параметра связи (см. [2], с. 230–234).

Как уже говорилось, область II является областью вынужденной синхронизации. Для большей части этой области характерна квазисинусоидальная форма огибающей МСВ на выходной антенне с периодом колебаний T_{Ω} и сильно искаженным предельным циклом в фазовом пространстве (см. рис. 5, д). Вблизи границ с областями I и III форма колебаний изменяется, и наряду с одноктактными наблюдаются n -тактные предельные циклы. Окна периодических движений с подобным приграничному поведением имеют место внутри области хаотических движений I при $M=0.2$ и частотах внешнего воздействия Ω , равных (3...6). В качестве примера на рис. 5, е приведена иллюстрация поведения огибающей МСВ при $\Omega=5F_0$.

Интересно, что несмотря на довольно широкий при $\varphi_0=0.090$ интервал разрешенных частот самомодуляции F (5.3...36 МГц) [6], именно минимальная частота из этого интервала влияет на положение и форму границ областей характерных движений огибающей и на расположение упомянутых выше окон периодических движений внутри области I.

4. Зависимость характера самомодуляции МСВ от выбора точки «наблюдения»

Напомним, что до сих пор мы рассматривали динамику огибающей МСВ в точке «наблюдения» с координатой $x_a=0.15$ см. При удалении от входной антенны огибающая постоянно видоизменяется вследствие текущих в ходе распространения МСВ процессов дисперсионного расплывания, нелинейного сжатия и линейного затухания волны. Причем, если вблизи входной антенны (в случае $\varphi(0,t)>\varphi_0^1$) определяющую роль играют дисперсия и нелинейность, то на достаточном удалении от входной антенны нелинейные процессы замирают из-за действия диссипации. Введение внешней амплитудной модуляции усложняет динамику поведения огибающей МСВ вдоль координаты x . В данной работе мы ограничимся иллюстрацией качественных изменений в поведении волны вдоль направления распространения.

На рис. 6 представлены временные реализации и проекции фазового портрета огибающей МСВ в точках $x_a=0.15$ см и $x_a=0.5$ см при следующих значениях параметров модуляции: а – $\varphi_0=0.050$, $\Omega=10$ МГц, $M=0.5$; б – $\varphi_0=0.045$, $\Omega=10$ МГц, $M=0.5$; в – $\varphi_0=0.031$, $\Omega=40$ МГц, $M=0.5$.

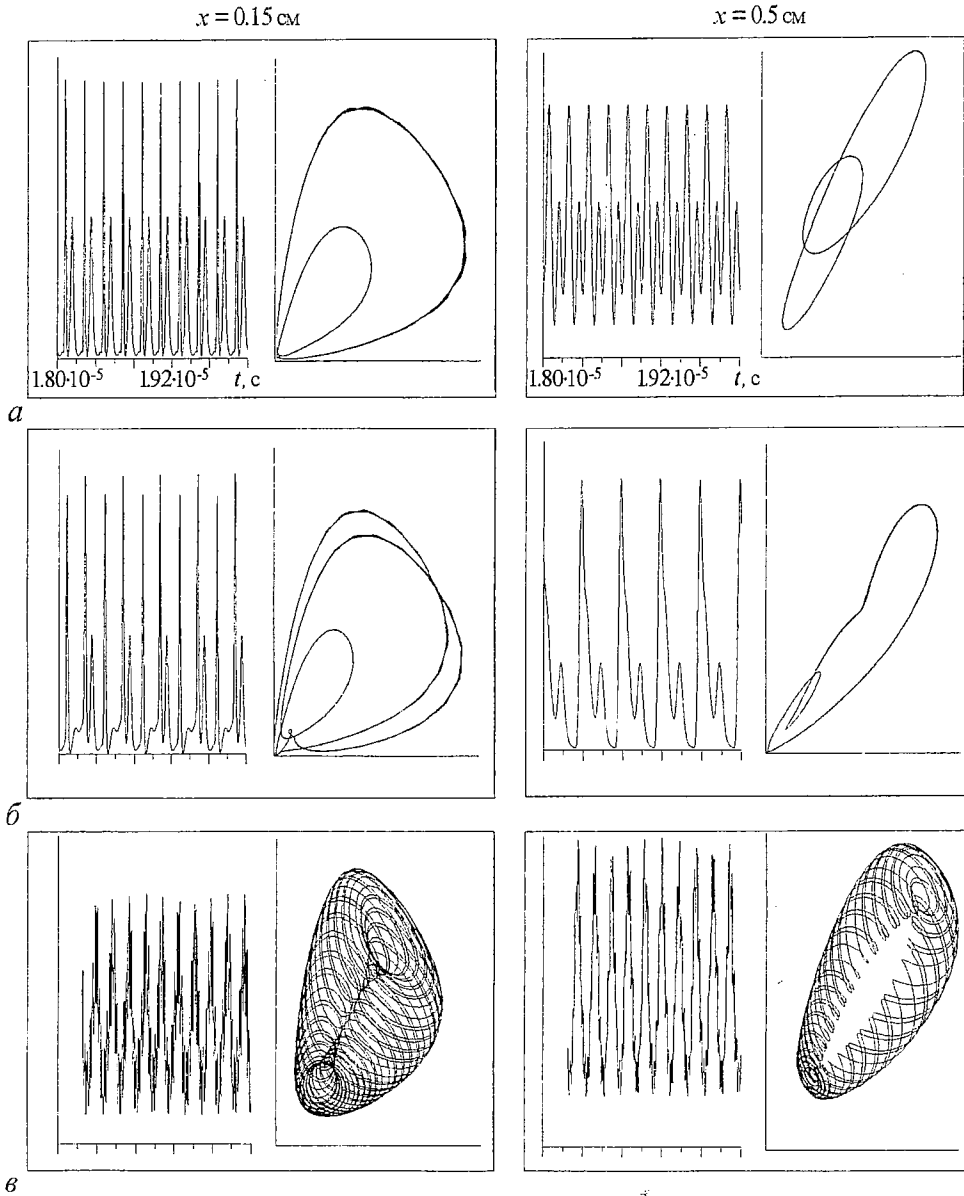


Рис. 6. Зависимость качественного поведения огибающей МСВ от координаты точки «наблюдения»

Видно, что в первом случае с увеличением координаты x имеет место уменьшение глубины модуляции принимаемого сигнала; во втором случае наблюдается трансформация трехтактного предельного цикла в двухтактный; в третьем происходит преобразование формы двумерного тора за счет изменения относительного вклада в движение частотных составляющих $f_1 = \Omega$ и $f_2 = F$. Интересно, что в последнем случае при удалении от входной антенны волна как бы «начинает забывать» о внешнем воздействии на частоте Ω .

Заключение

Таким образом, проанализировано влияние на процесс самомодуляции МСВ внешней периодической модуляции амплитуды волны на входе. Показано, что

- для амплитуд входного сигнала, соответствующих одночастотной само-модуляции, в зависимости от глубины M и частоты Ω внешней амплитудной модуляции могут наблюдаться следующие режимы: синхронизация на частоте внешнего воздействия, биения на частотах само-модуляции и внешнего воздействия, трансформация огибающей МСВ в следующие друг за другом с периодом внешнего воздействия наборы связанных солитонов;

- для амплитуд входного сигнала, соответствующих хаотической само-модуляции, возможны различные режимы синхронизации хаоса, в том числе и полное подавление последнего внешним периодическим сигналом малой амплитуды (порядка 0.2);

- отмечено наличие режимов, для которых в условиях внешнего периодического воздействия имеет место качественное изменение характера поведения огибающей МСВ в направлении распространения волны.

Работа поддержана грантами РФФИ № 99-02-17660, CRDF № REC-006 и Федеральной Программой «Интеграция», проект № 696.3.

Библиографический список

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
3. Кальянов Э.В. Конкуренция колебаний при хаотических режимах неавтономного генератора // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43, № 10. С. 1238.
4. Gibson G., Jeffries C. Observation of period doubling and chaos in spin-wave instabilities in yttrium iron garnet // Phys.Rev. A. 1984. Vol. 29. P. 811.
5. Rezende S.M., de Aguiar. Observation of subharmonic routes to chaos in parallel-ramped spin waves in yttrium iron garnet // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1070.
6. Дудко Г.М., Казаков Г.Т., Кожевников А.В., Филимонов Ю.А. Удвоение периода и хаос при четырехмагнотонном распаде магнитостатических волн в пленках железиттриевого граната // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. С. 736.
7. Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Развитие модуляционной неустойчивости магнитостатических волн (МСВ) в ферритовых пленках // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, вып.2. С. 55.
8. Дудко Г.М., Славин А.Н. Переход от модуляционной неустойчивости к хаосу в пленках железиттриевого граната // ЖТФ. 1989. Т. 31, вып.6. С. 114.
9. Dikshstein I.E., Neiman A.B. Spatio-temporal stochastic resonance of a kink motion in an inhomogeneous media // Bulletin of the American Physical Society. 1997. Vol. 42, № 1. P. 654.
10. Лисовский Ф.В., Поляков О.П. Фрактальная структура кривой фазового равновесия системы из двух осциллирующих магнитных моментов // Письма в ЖЭТФ. 1998. Т. 63, вып.8. С. 643.
11. Rödelberger F., Kivshar Y.S., and Benner H. Route out of chaos by HF parametric perturbations in spin-wave instabilities // J.Magn. and Mag.Mat. 1995. Vol. 140-144. P. 1953.
12. Bordman A.D., Nikitov S.A., Xie K., and Mehta H. Bright magnetostatic spin-wave envelope solitons in ferromagnetic films // J. Magn. and Mag. Mat. 1995. Vol. 145. P. 357.
13. Slavin A.N., Dudko G.M. Numerical modelling of spin wave soliton propagation in ferromagnetic film // J.Magn. Mag. Mat. 1990. Vol. 86. P. 15.
14. Звездин А.К., Попков А.Ф. К нелинейной теории магнитостатических спиновых волн // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, № 2. С. 606.

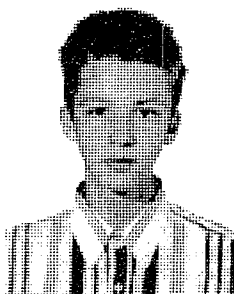
*Саратовское отделение
Института радиотехники
и электроники РАН*

Поступила в редакцию 4.04.01

MAGNETOSTATIC WAVES SELF-MODULATION UNDER THE EXTERNAL PERIODIC FORCE

A.A. Galishnikov, G.M. Dudko, Yu.A. Filimonov

In the framework of one-dimensional non-stationary nonlinear Schrödinger equation, linebreak magnetostatic wave self-modulation was numerically studied under excitation of periodic signal, producing magnetostatic waves amplitude at the input transducer in the form $\varphi = \varphi_0(1 + M \sin \Omega t)$. It was shown, that for φ_0 greater than the modulation instability threshold, the magnetostatic waves envelope dynamics strongly depends both on the modulation depth M and on the relation between self-modulation frequency F of magnetostatic waves and external force frequency W . As a result, one can find the effects of forced synchronization for regular and chaotic self-modulation regimes, of beating on the frequencies of self-modulation and external force, and of transformation of magnetostatic waves envelope to multiple-soliton trains with the period of external force. For fixed values of the frequency and depth of external modulation, the nature of magnetostatic waves envelope dynamics at the «observation» point depends on the distance of this point from the input antenna.



Галишников Александр Александрович - родился в 1980 году. Студент V курса факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов - волновые явления в магнитных пленках.



Дудко Галина Михайловна - родилась в 1961 году. Окончила физический факультет СГУ (1983). Работает в Саратовском отделении ИРЭ РАН. Область научных интересов - волновые явления в магнитных пленках.



Филимонов Юрий Александрович - родился в 1955 году. Окончил Московский физико-технический институт (1979). Работает в Саратовском отделении ИРЭ РАН. Область научных интересов - волновые явления в магнитных пленках.

E-mail: yuri.filimonov@psm.rm.cnr.it

**ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ ОБРАТНЫХ ОБЪЕМНЫХ
МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ
РАЗВИТИИ ПРОЦЕССОВ САМОМОДУЛЯЦИИ
И САМОФОКУСИРОВКИ**

Г.М. Дудко, Ю.А. Филимонов

В рамках подхода, основанного на численном решении нелинейного уравнения Шредингера, исследовано распространение волновых пучков обратных объемных магнитоэлектрических волн в случае одновременного проявления эффектов самоиндуцированной дифракции и самофокусировки. Определены условия, при которых оба процесса самовоздействия протекают либо бесконфликтно, либо взаимно подавляют друг друга.

Известно [1], что для обратных объемных магнитоэлектрических волн (ООВСВ), распространяющихся в касательно намагниченных пленках железо-иттриевого граната (ЖИГ), выполняются условия, необходимые для появления модуляционной неустойчивости относительно как продольных

$$\beta\gamma < 0, \tag{1}$$

так и поперечных возмущений

$$\beta\gamma < 0, \tag{2}$$

где $\beta_{i,i} = \partial^2\omega / \partial^2k_{i,i}$ характеризуют дисперсионное и дифракционное расщепление волны, ω – частота, $k_{i,i}$ – продольная и поперечная составляющие волнового вектора ООВСВ, $\gamma = \partial\omega / \partial|f|^2$ – коэффициент нелинейности, f – безразмерная комплексная амплитуда волны. При амплитуде волны f больше некоторого порогового значения f_{th} развитие этих неустойчивостей может приводить, соответственно, либо к самоиндуцированной дифракции и образованию солитонов огибающей ООВСВ [2,3], либо к самофокусировке волновых пучков ООВСВ [4–7].

До сих пор указанные эффекты самовоздействия ООВСВ как в численных, так и в лабораторных экспериментах наблюдались независимо друг от друга. В [2,3] возможность самофокусировки волны игнорировалась ввиду использования в качестве модели исследования одномерного нелинейного уравнения Шредингера, описывающего эволюцию огибающей МСВ только в направлении распространения волны. А в работах [4–7] неустойчивость волнового пучка ООВСВ проявлялась, напротив, лишь относительно процессов самофокусировки и самоканализации. Это было связано с тем, что в [4,7] рассматривалось распространение

в изолированных пленках ЖИГ чисто дипольных ООМСВ, для которых соотношение коэффициентов дисперсионного расплывания β_r и дифракции β_d имеет вид

$$\xi = \beta_r/\beta_d \ll 1.$$

Однако в двуслойных ферритовых структурах [8] или пленках с поверхностной анизотропией типа «легкая ось» [9] за счет взаимодействия ООМСВ с обменными модами структуры возможно формирование участков дисперсии, где по аналогии со случаями взаимодействия обменных мод с прямыми объемными [10] или поверхностными [11] магнитостатическими волнами коэффициент дисперсионного расплывания β_r может существенно возрасти, и величины ξ способны принимать значения

$$\xi \sim 1. \quad (3)$$

В этом случае пороговые значения амплитуды ООМСВ φ_{th}^l и φ_{th}^t , необходимые для появления модуляционной неустойчивости относительно, соответственно, продольных и поперечных возмущений с волновыми числами Q_l и Q_t ($Q_l \sim Q_t$), выравниваются ($\varphi_{th}^l \approx \varphi_{th}^t$), и логично ожидать появления параллельного развития эффектов самомодуляции и самофокусировки.

Цель данной работы – численно исследовать распространение волновых пучков ООМСВ в случае одновременного протекания процессов самомодуляции и самофокусировки.

Постановка задачи

В качестве модели использовалось нестационарное двумерное уравнение Шредингера

$$i(\partial\varphi/\partial t + V_g \partial\varphi/\partial x) + 1/2\beta_r \partial^2\varphi/\partial x^2 + 1/2\beta_t \partial^2\varphi/\partial y^2 - \gamma|\varphi|^2\varphi + i\alpha\varphi = 0 \quad (4)$$

с начальными

$$\varphi(x,y,0) = \begin{cases} \varphi^0\eta(y), & x = 0, & |y| \leq a/2 \\ 0, & x = 0, & a/2 < |y| \leq L_y/2 \\ 0, & 0 < x \leq L_x, & |y| \leq L_y/2 \end{cases} \quad (5)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} \varphi(0,y,t) &= \begin{cases} \varphi^0\eta(y), & |y| \leq a/2, & t > 0 \\ 0, & a/2 < |y| \leq L_y/2, & t > 0, \end{cases} \\ \varphi(L_x, y, t) &= 0, & |y| \leq L_y/2, & t > 0, \\ \varphi(x, -L_y/2, t) &= 0, & 0 < x < L_x, & t > 0, \\ \varphi(x, L_y/2, t) &= 0, & 0 < x < L_x, & t > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $V_g = \partial\omega/\partial k_l$ – групповая скорость волны; α – диссипативный коэффициент; L_x , L_y – длина и ширина, соответственно, ферромагнитной пленки; a – апертура возбуждающей антенны; $\eta(y)$ – функция начального распределения амплитуды волны в поперечном сечении пучка, которая при расчетах бралась в виде

$$\eta(y) = \begin{cases} \cos(\pi y/a), & |y| \leq a/2 \\ 0, & |y| > a/2. \end{cases} \quad (7)$$

Граничные условия (6) соответствуют режиму непрерывного возбуждения МСВ на входной антенне. Численное решение (4)-(6) проводилось при фиксированных значениях $V_g = 2.89 \cdot 10^6$ см·с⁻¹, $\beta_l = 4.99 \cdot 10^4$ см²·с⁻¹, $\gamma = -7.00 \cdot 10^9$ с⁻¹. Ранее в работах [6, 7] применительно к чисто дипольным ООМСВ исследовался характер решений (4)-(6) в зависимости от уровня входной амплитуды φ^0 при указанных выше значениях V_g , β_l , γ и при $\beta_l = 1.37 \cdot 10^3$ см²·с⁻¹. Было показано, что в этом случае имеют место лишь эффекты стационарной самофокусировки и самоканализации ООМСВ. Причем поведение волновых пучков с различными апертурными функциями $\eta(y)$ качественно подобно при одинаковых значениях усредненной по ширине антенны начальной амплитуды волновых пучков

$$\varphi_0^{\text{eff}} = 1/a \varphi^0 \int_{-a/2}^{a/2} \eta(y) dy. \quad (8)$$

С другой стороны, известно [10], что для параметров V_g и γ , близких к выбранным нами, самомодуляция магнитостатических волн может развиваться при значениях коэффициента дисперсионного расплывания $\beta_l \sim 10^5$ см²·с⁻¹. Поэтому для нахождения режима одновременного протекания процессов самофокусировки и самомодуляции изучалась зависимость решений задачи (4)-(6) от амплитуды φ_0 на входе при различных значениях коэффициента дисперсионного расплывания β_l , меняющихся в пределах от величины $\beta_l = 1.37 \cdot 10^3$ см²·с⁻¹, отвечающей случаю чисто дипольных ООМСВ, до $\beta_l = 6.00 \cdot 10^5$ см²·с⁻¹, соответствующей по порядку величины дисперсионному расплыванию в области «обменной щели».

Значения параметров β_l из заданного диапазона имеют место, например, при распространении ООМСВ в ферритовой структуре, состоящей из двух пленок ЖИГ с разными намагниченностями насыщения ($4\pi M_0^1 = 640$ Гс, $4\pi M_0^2 = 1750$ Гс), толщинами ($d_1 = 4$ мкм, $d_2 = 15$ мкм) и значениями констант обменной жесткости ($A_1 = 0.5 \cdot 10^{-6}$ эрг·см⁻³, $A_2 = 1.0 \cdot 10^{-6}$ эрг·см⁻³). Величина внешнего подмагничивающего поля должна быть $H_0 = 600$ Э, параметр межслойного обмена $A_{12} = 1.0 \cdot 10^{-4}$ эрг·см⁻², а параметры закрепления спинов на контактирующих поверхностях пленок $L_{1,2} \approx \approx 2 \cdot 10^5$ см⁻¹. В частности, величина коэффициента $\beta_l = 6 \cdot 10^5$ см²·с⁻¹ наблюдается в окрестности резонанса основной моды ООМСВ пленки с большим значением намагниченности и обменной моды с номером 15 пленки с меньшим значением намагниченности, который имеет место при $f = 3132$ МГц, $k = 237$ см⁻¹.

Численные исследования показали, что одновременное развитие самомодуляции и самофокусировки волнового пучка при выбранных значениях V_g , β_l , γ и при β_l из диапазона $[1.37 \cdot 10^3, 6.00 \cdot 10^5]$ происходит при условии

$$\xi > 0.8, \quad (9)$$

которому отвечают значения $\beta_l > 3.99 \cdot 10^4$ см²·с⁻¹. При $\xi < 0.8$ добиться появления эффекта самомодуляции наряду с самофокусировкой варьированием остальных параметров (a, α, φ_0) не удавалось.

Все множество решений (4)-(6) при $\xi > 0.8$ можно разделить на две основные группы с качественно различным поведением волнового пучка ООМСВ в пленке. Решения, относящиеся к первой группе, отвечают «бесконфликтному» протеканию процессов самофокусировки и самомодуляции. Во втором случае процессы самовоздействия взаимно подавляют друг друга.

Рассмотрим далее названные типы решений применительно к волновому пучку ООМСВ при апертуре антенны $a = 0.3$ см и при $\beta_l = 6.00 \cdot 10^5$ см²·с⁻¹ для случая

среды без потерь $\alpha=0$ и для случая, когда диссипативный параметр $\alpha=3.5 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, что соответствует пленкам ЖИГ с шириной линии ферромагнитного резонанса $\Delta H=0.2 \text{ Э}$.

Среда без диссипации

Для иллюстрации «бесконфликтного» протекания процессов самовоздействия обратимся к рис. 1, где при эффективной амплитуде волны на входной антенне $\varphi_0^{\text{eff}}=1.91 \cdot 10^{-2}$ изображены распределение нормированной мощности ООМСВ $(|\varphi|/\varphi_0)^2$ вдоль координат x и y в фиксированный момент времени (рис. 1, а), а также динамика во времени распределения $(|\varphi|/\varphi_0)^2$ вдоль оси y в сечениях пленки с координатами $x_1=0.3 \text{ см}$, $x_2=0.7 \text{ см}$, $x_3=1.5 \text{ см}$ и $x_4=2.5 \text{ см}$ (рис. 1, б-д, соответственно).

Как видно из рисунка, при $\varphi_0^{\text{eff}}=1.91 \cdot 10^{-2}$ вдоль всей протяженности пленки по сфокусированному волновому пучку распространяется волна модуляции. Можно заметить, что в направлении x происходит ее постоянная трансформация. Так, если в сечении $x_1=0.3 \text{ см}$ (см. рис. 1, б) амплитуда волнового пучка демонстрирует нерегулярные колебания во времени с едва намечающимся периодом, то при $x_2=0.7 \text{ см}$ (см. рис. 1, в) период модуляции становится ярко выраженным. С ростом x увеличивается глубина модуляции волнового пучка, в результате чего он приобретает вид последовательности двумерных (2D) «солитоноподобных» импульсов, бегущих вдоль пленки (см. рис. 1, з, д). Скорость V_M распространения участков с максимальной амплитудой φ_{max} таких 2D импульсов, можно оценить с помощью соотношения

$$V_M = \Lambda_M / T_M, \quad (10)$$

где Λ_M и T_M - длина и период волны модуляции, соответственно. Из рис. 1, а можно оценить длину волны модуляции $\Lambda_M \approx 1.4 \text{ см}$, а из рис. 1, б-д - период $T_M \approx 5.0 \cdot 10^{-7} \text{ с}$. В результате из (10) получим $V_M \approx 2.8 \cdot 10^6 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, что близко к значению групповой скорости V_g ООМСВ.

Описанный выше режим бесконфликтного сосуществования процессов самофокусировки и самомодуляции реализуется в тех редких случаях, когда параметры задачи β_r , β , и a подобраны так, чтобы усредненная амплитуда поперечного сечения пучка $|\varphi^{\text{eff}}|$ (8), проведенного через координату x в точке максимального значения амплитуды волны модуляции $|\varphi_{\text{max}}^{\text{eff}}|$, не превосходила порог неустойчивости волнового пучка относительно распада его на пару волноводных каналов [6,7]

$$|\varphi_{\text{max}}^{\text{eff}}| < 2\varphi_{\text{th}}', \quad (11)$$

где φ_{th}' - порог появления самофокусировки [7] волнового пучка

$$\varphi_{\text{th}}' = \pi / (2^{-1/2} a) (-\beta_r / \gamma)^{1/2}, \quad (12)$$

В рассматриваемом здесь случае условие (11) оказывается выполненным. При этом ситуация такова, что порог появления самофокусировки (12) несколько ниже порога самомодуляции φ_{th}' . При подаче на входную антенну сигнала с $\varphi_0^{\text{eff}}=1.91 \cdot 10^{-2} \approx \varphi_{\text{th}}'$ порог самомодуляции достигается лишь на завершающей стадии процесса самофокусировки и приблизительно равняется амплитуде сформированного волноводного канала (пространственного солитона). При этом ввиду малой надкритичности развивающаяся волна модуляции имеет квазигармонический характер. Амплитуда модулированного волнового пучка на гребне волны модуляции $|\varphi_{\text{max}}|$ даже при 100-процентной модуляции удовлетворяет

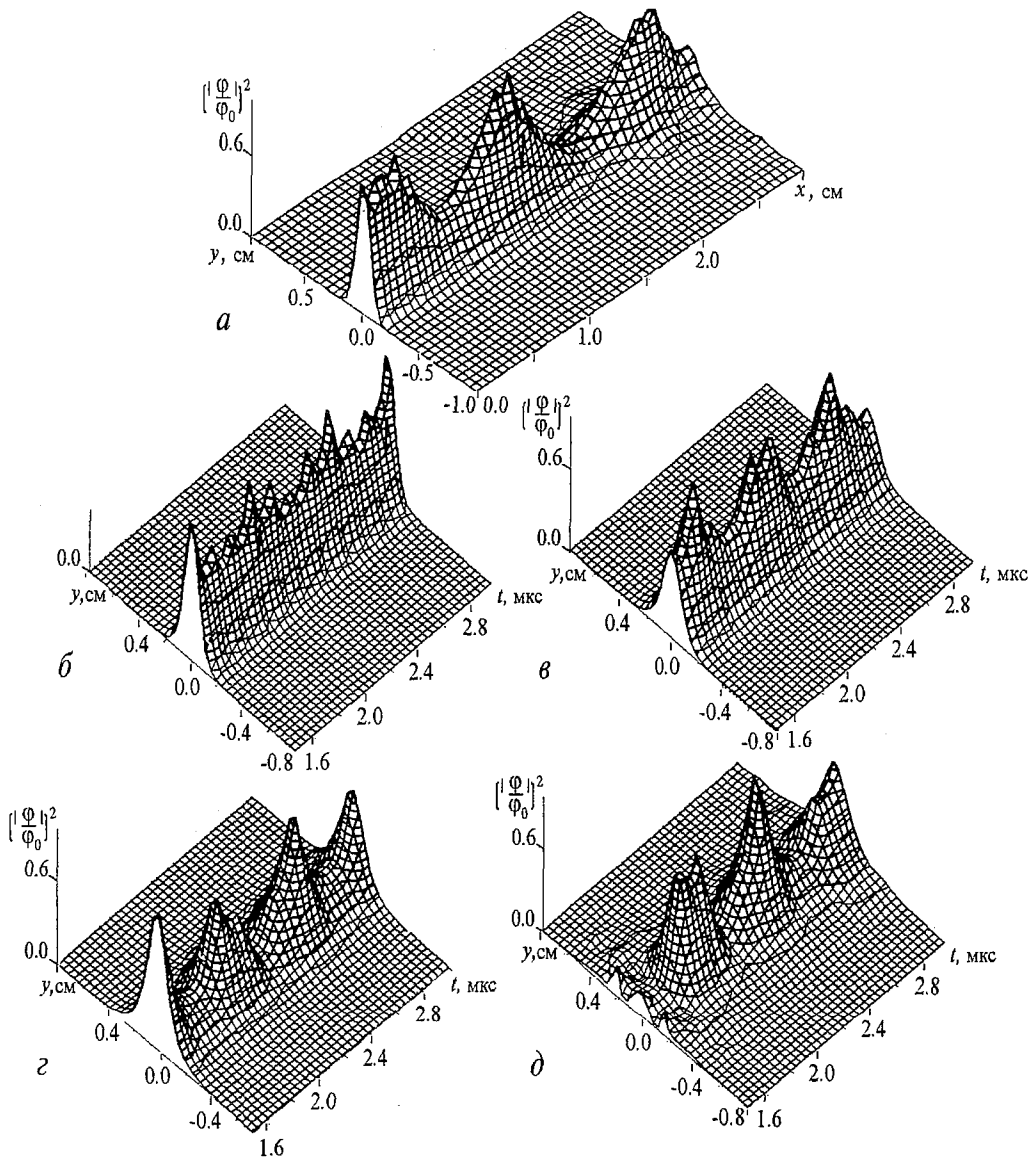


Рис. 1. «Бесконфликтный» режим сосуществования процессов самофокусировки и самомодуляции при $\varphi_0^{\text{eff}}=0.0191$ ($\varphi_0=0.030$) и отсутствии диссипации

условию (11), и волновой пучок распространяется как целое, не испытывая тенденции к распаду.

Однако режим бесконфликтного сосуществования самофокусировки и самомодуляции может реализоваться только в узком диапазоне значений входных амплитуд φ_0^{eff} вблизи φ_{th}^i . В представленном случае уже при амплитуде $\varphi_0^{\text{eff}}=2.04 \cdot 10^{-2}$ (рис. 2) параллельное развитие самофокусировки и самомодуляции сопровождается лавинообразным нарастанием процессов сжатия каждого «гребня» промодулированного волнового пучка в продольном и в поперечном направлениях. Самофокусировка пучка приводит к увеличению амплитуды φ_{max} , которая, в свою очередь, приводит к нелинейному искажению волны модуляции и трансформации ее в кноидальную (рис. 2, г). Усредненная амплитуда поперечного сечения пучка, проведенного через вершину волны модуляции, $|\varphi_{\text{max}}^{\text{eff}}|$ может в два и более раз

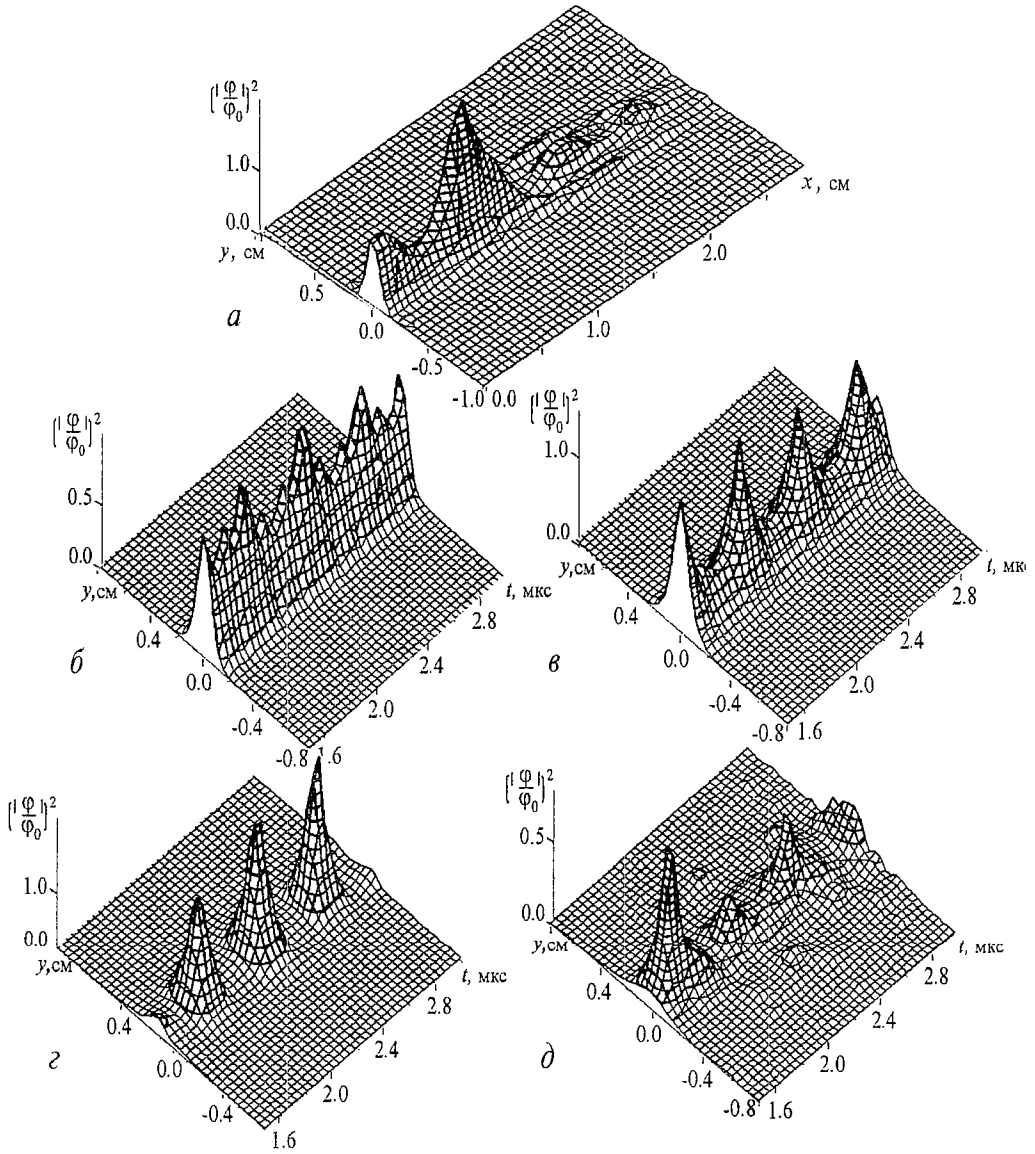


Рис. 2. «Взаиморазрушающий» режим сосуществования процессов самофокусировки и само-модуляции при $\varphi_0^{\text{eff}}=0.0204$ ($\varphi_0=0.032$) и отсутствии диссипации. Временные реализации построены в тех же точках x , что и на рис. 1

превзойти порог, характеризующий неустойчивость волнового пучка относительно распада его на систему нескольких волноводных каналов

$$|\varphi_{\text{max}}^{\text{eff}}| > 2\varphi_{\text{th}}'. \quad (13)$$

В результате происходит развал пучка. «Солитоноподобные» импульсы дробятся (рис. 2, д). Однако поскольку распад является вынужденным, спровоцированным пиковой амплитудой $|\varphi_{\text{max}}^{\text{eff}}|$, мощность, заключенная в каждом из вновь образовавшихся фрагментов, оказывается недостаточной для поддержания их формы.

Из рис. 2 видно, что для значения амплитуды входного сигнала $\varphi_0^{\text{eff}}=2.04 \cdot 10^{-2}$ поведение волнового пучка в сечениях с координатами $x \leq x_1$ отвечает режиму, близкому к стационарной самофокусировке (рис. 2, б). На участке пленки $x_1 < x < x_3$

реализуется режим распространения с хорошо развитой волной модуляции, бегущей по сфокусированному пучку. Можно видеть, что на расстоянии $x \geq X_s \approx x_4$ от входной антенны процесс самофокусировки нарушается и промодулированный во времени волновой пучок распадается, приводя к пространственно-временному хаосу в распределении амплитуды.

Дальнейшее увеличение амплитуды φ_0^{eff} волны на входе приводит к тому, что точка X_s все ближе смещается к возбуждающей антенне. В области $x_1 < x < X_s$ характер поведения огибающей ООМСВ во времени по мере роста входной амплитуды меняется (подобно тому, как это было в [10]) от периодического до хаотического (при $\varphi_0^{\text{eff}} > 2.5 \cdot 10^{-2}$). Для поперечных сечений пучка с координатами $x > X_s$ наблюдается сложное нерегулярное поведение величины $|\varphi|$ как во времени, так и вдоль координаты y , вне зависимости от характера движения огибающей в области $x_1 < x < X_s$.

Диссипативная среда

Как известно, для того, чтобы эффекты самовоздействия в диссипативных средах оказались возможными в принципе, необходимо выполнение между длинами «нелинейности» $L_{\text{nl}} = V_g / (\gamma \varphi_0^{\text{eff}})$ и «диссипации» $L_{\text{dis}} = V_g / \alpha$ [4] соотношения

$$L_{\text{dis}} > L_{\text{nl}}. \quad (14)$$

При значениях диссипативного параметра $\alpha = 3.50 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$ «диссипативная длина» L_{dis}

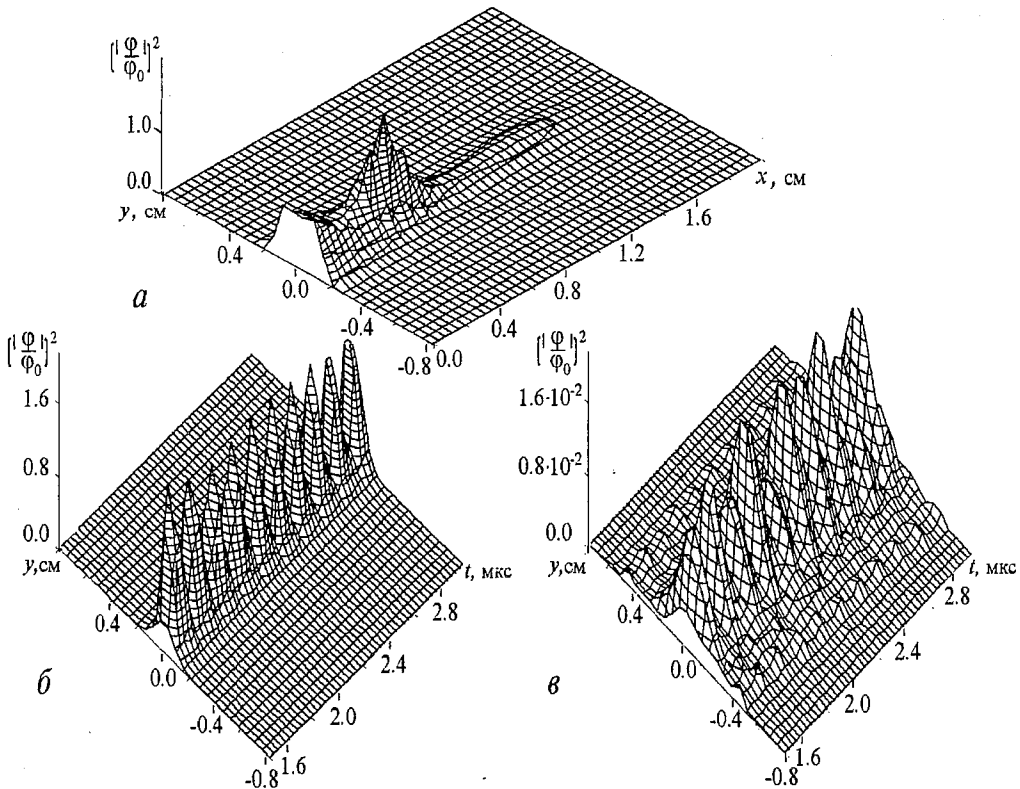


Рис. 3. «Бесконфликтный» режим сосуществования процессов самофокусировки и самомодуляции в диссипативной среде при $\varphi_0^{\text{eff}} = 0.0320$ ($\varphi_0 = 0.050$)

составляет примерно 0.8 см, а длина «нелинейности» L_{nl} для используемых нами параметров нестационарного двумерного уравнения Шредингера и при амплитуде сигнала порядка $3.2 \cdot 10^{-2}$ приблизительно равна 0.4 см. Следовательно, при таких уровнях входной амплитуды для выбранного параметра диссипации условие (14) выполняется и по аналогии с «бездиссипативной» средой можно ожидать появление одновременного развития самофокусировки и самомодуляции волнового пучка в плоскости пленки.

Обратимся к рис. 3, где для значения амплитуды входного сигнала $\varphi_0^{eff} = 3.2 \cdot 10^{-2}$ показано поведение амплитуды огибающей волнового пучка в условиях «бесконфликтного» режима сосуществования различных процессов самовоздействия. Изображено распределение нормированной мощности ООМСВ $(|\varphi|/\varphi_0)^2$ вдоль координат x и y в фиксированный момент времени $t = \text{const}$ (рис. 3, а) и зависимость от времени величины $(|\varphi(y)|/\varphi_0)^2$ в поперечных сечениях волнового пучка при $x_1 = 0.3$ см и $x_2 = 1.5$ см (рис. 3, б, в).

Наличие линейного затухания приводит к тому, что волновой пучок, начиная с некоторого значения продольной координаты, не может поддерживать свою форму и расплывается. Поэтому в «бесконфликтном» режиме сосуществования самомодуляции и самофокусировки волна модуляции распространяется лишь по частично сфокусированному пучку, сохраняющему, однако, свою целостность. Как видно из рис. 3, а самофокусировка пучка наблюдается на участке пленки с координатами $x \leq 1$ см. Совместное действие самомодуляции и самофокусировки волнового пучка приводит к формированию при $x = 0.3$ см последовательности «солитоноподобных» 2D-импульсов (рис. 3, б). Из-за действия диссипации при $x > 1$ см нелинейное сжатие не компенсирует дифракционное расплывание и ширина пучка заметно увеличивается (рис. 3, в), но регулярность в поведении волнового пучка как во времени, так и в пространстве не нарушается.

При «взаиморазрушающем» режиме (рис. 4) качественное поведение волнового пучка в диссипативной среде практически не отличается от его поведения в среде без потерь. Пучок на некотором расстоянии от входной антенны разрушается в результате развития неустойчивости относительно поперечных возмущений, вызванной критическими для процесса самофокусировки значениями амплитуды волны модуляции. Координата точки X_s в данном случае равна примерно 1.2 см (рис. 4, а).

Из рис. 4, б, в видно, что в поперечном сечении пучка с координатой $x_1 < X_s$, форма пучка сохранена, а в поперечном сечении с координатой $x_2 > X_s$ наблюдается нерегулярное поведение нормированной мощности пучка как во времени, так и вдоль координаты y .

Локальные характеристики самомодуляции ограниченных самоподдерживающихся волновых пучков

Везде выше при обсуждении возможных режимов взаимовлияния самомодуляции и самофокусировки мы оперировали амплитудой, усредненной по поперечному сечению волнового пучка φ^{eff} . Однако, поскольку в сечении волнового пучка уровень амплитуды $|\varphi(y)|$ меняется от точки к точке, понятно, что должны существовать отличия в поведении волны модуляции в центральной части волнового пучка и на его периферии. В связи с тем, что известные подходы к исследованию распространения ограниченных волновых пучков, основанные на методе бриллюэновского рассеяния света [4] или методе подвижного микрозонда [12], позволяют получать данные о локальных характеристиках волны;

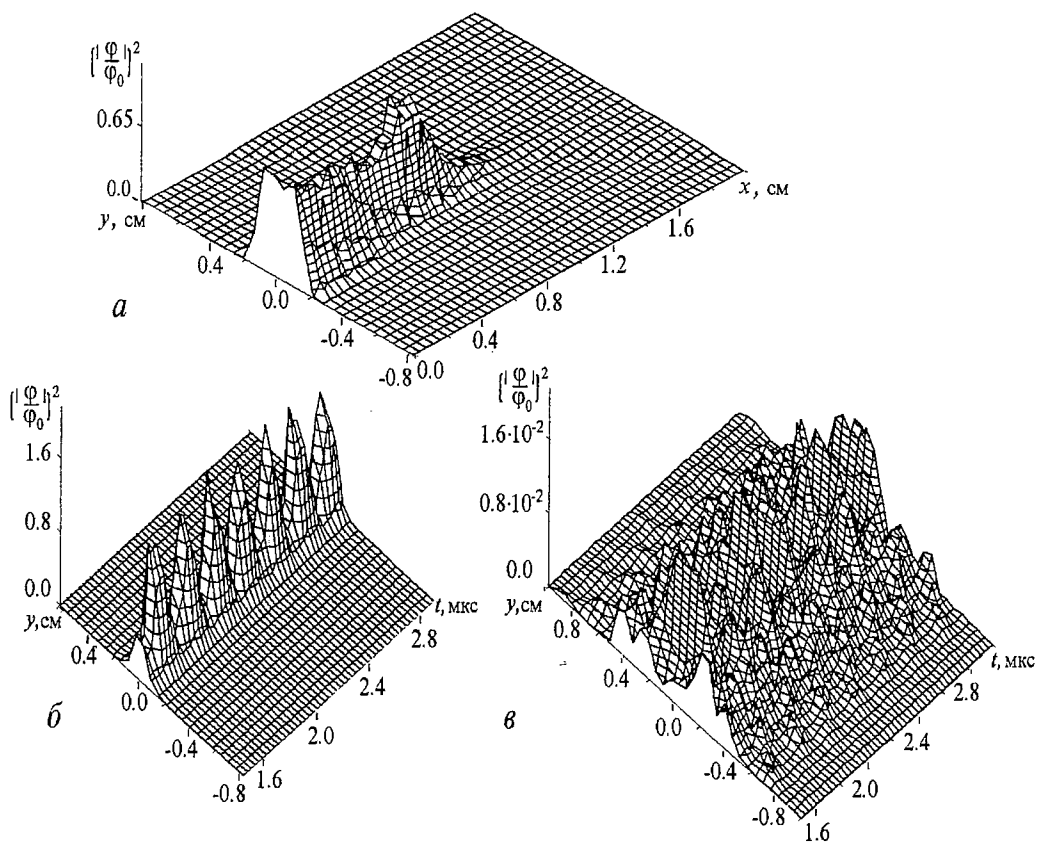


Рис. 4. «Взаиморазрушающий» режим сосуществования процессов самофокусировки и самомодуляции в диссипативной среде при $\varphi_0^{\text{eff}}=0.0350$ ($\varphi_0=0.055$). Временные реализации построены в тех же точках x , что и на рис. 3

представляет интерес выявление локальных особенностей поведения самомодулированного волнового пучка ООМСВ.

На рис. 5 показано поведение во времени нормированной мощности ООМСВ $(|\varphi|/\varphi_0)^2$ (временные реализации и проекции фазовых портретов*) в двух фиксированных точках пленки $A=(1, 0)$ и $B=(1, -0.15)$, положение которых внутри волнового пучка показано стрелками на вставке к рисунку. Координата $x_{A,B}=1$ см точек A и B выбрана из соображений $x_{A,B} < X_s$, то есть в области, где пучок при любом режиме сосуществования самомодуляции и самофокусировки поддерживает свою форму.

Сравнения проводились для случая диссипативной среды при трех различных значениях входной амплитуды ООМСВ φ_0 , равных $4.55 \cdot 10^{-2}$ (рис. 5, а), $5.00 \cdot 10^{-2}$ (рис. 5, б), $5.50 \cdot 10^{-2}$ (рис. 5, в), которым соответствуют следующие значения φ_0^{eff} : $2.9 \cdot 10^{-2}$, $3.2 \cdot 10^{-2}$, $3.5 \cdot 10^{-2}$. Как видно из рис. 5, а (1-4) самомодуляция при $\varphi_0=4.55 \cdot 10^{-2}$ имеет квазигармонический характер. Фазовая траектория постепенно скручивается к предельному циклу. Из сопоставления временных реализаций можно заметить, что колебания величины $(|\varphi|/\varphi_0)^2$, совершающиеся на частоте волны модуляции $F_M \sim 4$ МГц, сдвинуты в точках A и B относительно друг друга приблизительно на четверть периода ($\Delta t \approx 1/(4F_M)$, см. пунктирную линию на рис. 5, а) и незначительно различаются по форме. Так, в центре волнового пучка участки

*Наличие фазовых портретов позволяет более наглядно продемонстрировать качественные различия в поведении огибающей волнового пучка в его центральной части и на периферии.

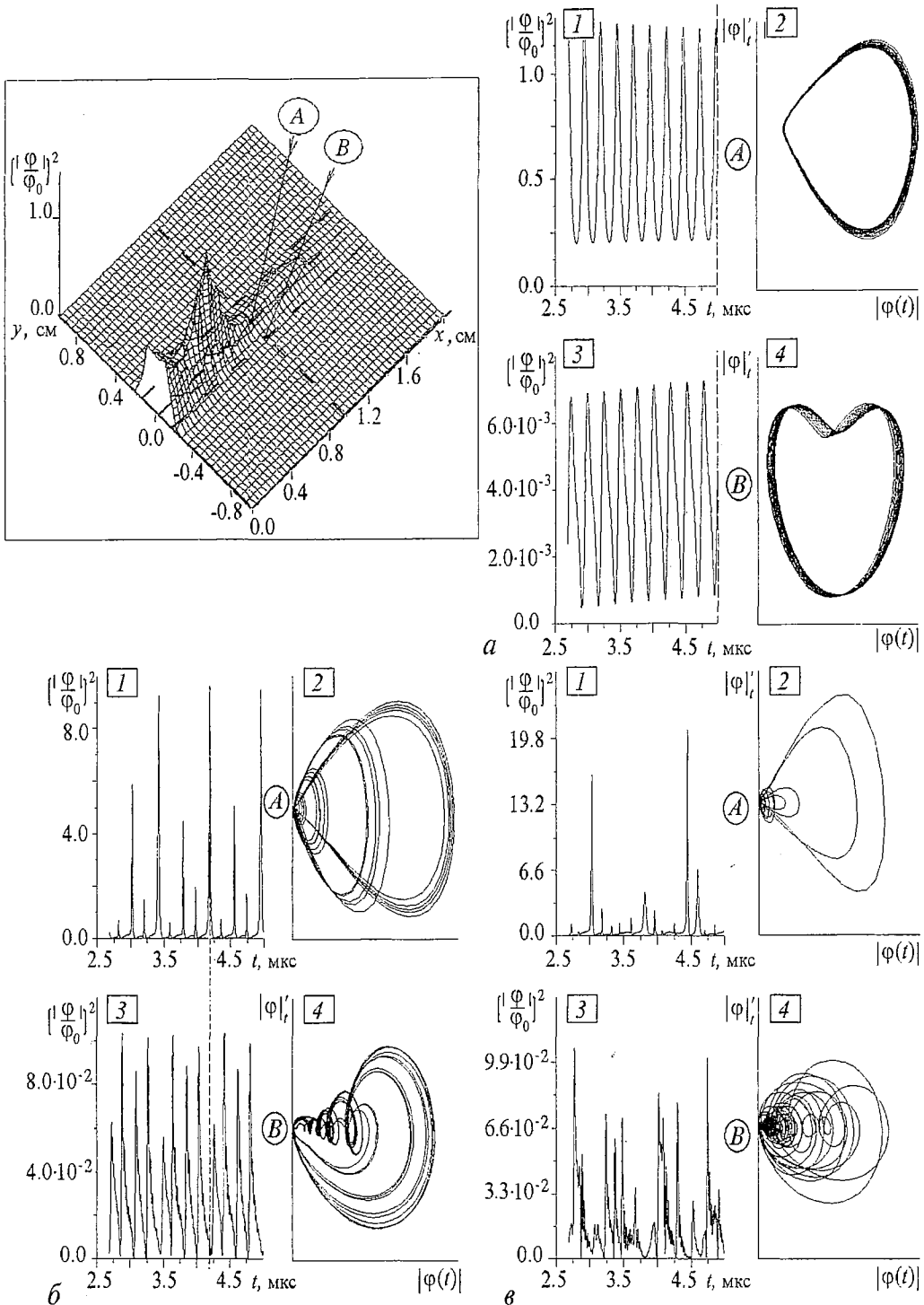


Рис. 5. Поведение во времени нормированной мощности волнового пучка в точках наблюдения A и B в зависимости от уровня входной амплитуды при одновременном развитии процессов само-модуляции и самофокусировки в среде с диссипацией

спадания и нарастания величины $(|\varphi|/\varphi_0)^2$ симметричны относительно друг друга, а на периферии спадающий участок имеет точку перегиба, что хорошо видно на фазовом портрете.

Качественные отличия и временной сдвиг Δt становятся все более существенными при увеличении φ_0 . При $\varphi_0=5.00 \cdot 10^{-2}$ (рис. 5, б, 1-4) временные реализации поведения огибающей ООМСВ становятся квазипериодическими. При этом в точке В, соответствующей периферии волнового пучка, на пологих спадающих участках зависимости $(|\varphi(t)|/\varphi_0)^2$ появляются мелкомасштабные осцилляции (рис. 5, б, 3), отсутствующие в центральной части пучка. Сдвиг Δt между колебаниями в точках А и В становится равным половине периода, соответствующего доминирующей частоте самомодуляции $F_1 \sim 5$ МГц (рис. 5, б, 1, 3).

По всей видимости, мелкомасштабные осцилляции на спадающем участке колебаний мощности ООМСВ в периферийной области пучка связаны с наложением на волну модуляции хвостов пространственного солитона, представляющих собой расплывающиеся бессолитонные части решения задачи, описываемой соотношениями (4)-(6).

Наличие временного сдвига между колебаниями величины $(|\varphi(t)|/\varphi_0)^2$ в точках А и В, а также увеличение этого сдвига с ростом φ_0 свидетельствуют об искривлении поверхности огибающей МСВ, связанном с зависимостью нелинейной групповой скорости волны от ее амплитуды.

При $\varphi_0=5.50 \cdot 10^{-2}$ движение огибающей ООМСВ приобретает нерегулярный характер (рис. 5, в, 1-4), хотя колебания величины $(|\varphi|^2(t)/\varphi_0)^2$ в центральной и периферийной областях пучка коррелируют друг с другом (всплески мощности в точках А и В никогда не происходят одновременно), что говорит об отсутствии при $x < X_s$ пространственного хаоса.

Заключение

Таким образом, в результате проведенных исследований показано, что

- для обратных объемных МСВ, возбуждаемых антенной с конечной апертурой, при наличии большой дисперсии $\beta \geq \beta_c$, возможно параллельное развитие двух различных процессов самовоздействия: самофокусировка волнового пучка и самомодуляция волны;

- как для диссипативной, так и для бездиссипативной среды одновременное сосуществование названных эффектов может быть «бесконфликтным», позволяющим наблюдать их проявление на всей заданной протяженности среды, либо «взаиморазрушающим», приводящим к развалу волнового пучка. В первом случае, начиная с некоторого значения продольной координаты x , имеет место хорошо выраженная волна модуляции, бегущая по сфокусированному пучку. Во втором случае вдоль пленки можно выделить три участка с различным поведением волны: участок с режимом, близким к режиму стационарной самофокусировки; участок с хорошо развитой волной модуляции; участок, где процесс самофокусировки нарушается, и промодулированный во времени волновой пучок распадается, приводя к пространственно-временному хаосу в распределении амплитуды.

Рассмотрены локальные характеристики самомодуляции самоподдерживающегося волнового пучка ООМСВ. Показано, в частности, что колебания мощности в различных точках поперечного сечения пучка происходят с временным сдвигом Δt , нарастающим при увеличении амплитуды волны на входе.

Работа поддержана грантами РФФИ № 99-02-17660, РАН № 28, CRDF № REC-006 и Федеральной программой «Интеграция», проект № 696.3.

Библиографический список

1. Звездин А.К., Попков А.Ф. К нелинейной теории магнитостатических спиновых волн // ЖЭТФ. 1983. Т.84, № 2. С. 606.
2. Chen M., Tsankov M.A., Nash J.M., Patton C.E. Backward volume wave solitons in a yttrium iron garnet film // Phys.Rev.B. 1994. Vol. 49. P. 12773.
3. Chen M., Nash J.M., Patton C.E. A numerical study of nonlinear Schrödinger equation solutions for microwave solitons in magnetic films//J. Appl. Phys. 1993. Vol. 73. P. 3906.
4. Boyle J.W., Nikitov S.A., Boardman A.D., Booth J.G. Self-channeling and nonlinear beam shapping of magnetostatic waves in ferromagnetic films// Phys.Rev.B. 1996. Vol. 53, № 18. P. 12173.
5. Bauer M., Mathieu C., Demokritov S.O., Hillebrands B., Kolodin P.A., Sure S., Dotsch H., Grimalski V., Rapoport Yu., Slavin A.N. Direct observation of two-dimensional self-focusing of spin waves in magnetic films // Phys. Rev. B. 1997. Vol. 56, № 14. P. 8483.
6. Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Самофокусировка ограниченных пучков обратных объемных магнитостатических волн в ферромагнитных пленках (Численный эксперимент) // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. № 6. С. 29.
7. Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Численное исследование явлений самовоздействия ограниченных пучков обратных объемных магнитостатических волн в ферромагнитных пленках // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т.7, № 2–3. С. 17.
8. Высоцкий С.Л., Казаков Г.Т., Маряхин А.В., Филимонов Ю.А. Объемные магнитостатические волны в обменно-связанных ферритовых пленках // ЖТФ, 1998. Т. 68, № 7. С. 97.
9. Веселов А.А., Никитов Д.С., Филимонов Ю.А. Поверхностные спиновые волны в ферромагнитных пленках // РЭ. 1997. Т. 42, № 9. С. 1097.
10. Дудко Г.М., Славин А.Н. Переход от модуляционной неустойчивости к хаосу в пленках железо-иттриевого граната // ФТТ. 1989. Т. 31, № 6. С. 114.
11. Kalinikos B.A., Kovshikov N.G., Kolodin P.A., Slavin A.N. Observation of dipole-exchange spin wave solitons in tangentially magnetised ferromagnetic films // Sol. St. Com. 1990. Vol. 74, № 9. P. 989.
12. Валяевский А.Б., Ваишковский А.В., Стальмахов А.В., Тюлюкин В.А. Анизотропные свойства волновых пучков безобменных спиновых волн // ЖТФ. 1989. Т. 59, № 6. С. 51.

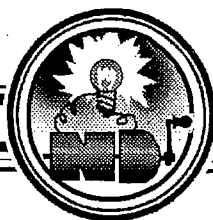
BEAMS OF MAGNETOSTATIC BACKWARD VOLUME WAVES AT SIMULTANEOUS DEVELOPMENT OF SELF-MODULATION AND SELF-FOCUSING PROCESSES

Dudko G.M., Filimonov Yu.A.

The propagation of magnetostatic backward volume wave beams was numerically investigated using the nonlinear Schrödinger equation for a case of simultaneous manifestation of self-modulation and self-focusing effects. The conditions of non-conflict or mutually damping development of both self-action processes were found.

*Саратовское отделение
Института радиотехники
и электроники РАН*

Поступила в редакцию 30.10.01



МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ НАУЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ, ОДНО ИЗ КОТОРЫХ ИЛИ ОБА «ЗАТУХАЮЩИЕ», С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЯ РОСТА ДОСТИЖЕНИЙ И ЗАПАЗДЫВАНИЯ

И.В. Измайлов, Б.Н. Поизнер, В.О. Раводин

Исследуется модель взаимодействия двух научных направлений с квадратичным ограничением роста достижений (аналогичная предложенной В.В. Качаком и Е.С. Мчедловой*), учитывающая инерционность восприятия сообществом «своих» и «чужих» научных достижений. Для выяснения совместного влияния запаздывания, начальных условий и типов взаимодействия направлений на динамику их продуктивности предложено дополнить фазовые портреты и временные реализации построением инициально-финальных отображений (термин авторов).

Обнаружены предельные циклы, в том числе резонанс на торе, а также хаотический режим - эргодический тор. С ростом запаздывания проявляются «окна периодичности»: эргодический тор чередуется с резонансом на торе. Показано, что инерционность восприятия способна усложнять процесс взаимодействия научных сообществ.

Данная статья продолжает цикл работ [1-4] (см. также библиографию в [4]), посвященных составлению математических моделей и выяснению закономерностей взаимодействия двух научных направлений. В предыдущей статье [4] авторы представили результаты моделирования, относящиеся к случаям I и II согласно классификации типов взаимодействия направлений в статье [2]. Ниже описаны данные вычислительных экспериментов, относящиеся к остальным случаям III, IV, V.

Для удобства сравнения результатов будем в дальнейшем использовать обозначения, принятые в [2]. Как и в [4], моделью взаимодействия научных направлений с ограничением развития ($b_1, b_2 \geq 0$) с инерционностью восприятия достижений (мерой которой является величина τ) служат уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= c_1 x(t-\tau)y(t-\tau) - c_2 x(t-\tau) - b_1 x(t-\tau)x(t-\tau), \\ dy(t)/dt &= c_3 y(t-\tau)x(t-\tau) - c_4 y(t-\tau) - b_2 y(t-\tau)y(t-\tau). \end{aligned} \quad (1)$$

* К сожалению, при подготовке данной статьи авторам не была известна работа: Мчедлова Е.С. Влияние временного запаздывания на динамику взаимодействующих научных направлений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 4. С. 113.

Для системы уравнений (1) можно показать: на плоскости (x, y) существуют прямые такие, что они сплошь покрыты принадлежащими им фазовыми траекториями (здесь полагается, что особые точки являются отдельными фазовыми траекториями, не принадлежащими никакой другой траектории). Причем эти прямые задаются уравнениями

$$y = x(c_3 + b_1)/(c_1 + b_2) \text{ при } c_2 = c_4,$$

$$y = -x c_4 b_1 / (c_2 b_2) - c_4 / b_2 \text{ при } c_4 b_1 / (c_2 b_2) = (c_3 + b_1) / (c_1 + b_2),$$

$$x = 0,$$

$$y = 0,$$

$$y = -c_4 / b_2 \text{ при } c_3 = 0.$$

Поскольку представляет интерес выяснить особенности поведения данной динамической системы в области макропеременных $x \geq 0, y \geq 0$ при $c_3 \neq 0, b_i > 0$, следует исключить тривиальные прямые $x=0, y=0$ и обратиться к прямым

$$y = x(c_3 + b_1)/(c_1 + b_2) \text{ при } c_2 = c_4, \quad (2)$$

$$y = -x c_4 b_1 / (c_2 b_2) - c_4 / b_2 \text{ при } c_4 b_1 / (c_2 b_2) = (c_3 + b_1) / (c_1 + b_2). \quad (3)$$

По мнению авторов, особенности прямолинейных фазовых траекторий, принадлежащих некоторым прямым, выражаются следующими тезисами:

- 1) фазовая траектория остается прямой при любых значениях запаздывания τ ;
- 2) если движение динамической системы происходит по прямолинейной траектории в направлении к предельной точке фазового пространства системы с $\tau=0$, то наличие запаздывания ($\tau > 0$) не влияет на монотонный характер изменения динамических переменных;
- 3) если движение динамической системы происходит в направлении к устойчивой особой точке, не являющейся предельной точкой множества точек, составляющего фазовое пространство системы с $\tau=0$, то существует значение $\tau > 0$, при котором имеют место затухающие колебания (вдоль прямой) вокруг этой особой точки.

Как и прежде, при возникновении в ходе вычислений значения $x < 0$ ($y < 0$) в расчетах полагались характеристики продуктивности $x=0$ ($y=0$).

Величина запаздывания изменялась с различным шагом, и в большинстве представленных здесь случаев он составлял 0.0005, а выбранный нами максимум его был 1.435.

В качестве системы тестовых задач использовались результаты, представленные в статьях [1, 2].

Случай III. Когда оба направления «затухающие», а взаимное влияние положительно ($c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$), условие существования прямой (2) выполняется, а прямой (3) – нет, поскольку предполагается, что параметры ограничения развития $b_i > 0$. Здесь имеют место следующие особенности.

Вариант 3.1. $b_1 = b_2 = 0.5, x_0 = 1.5, y_0 = 2.6$. Как и в случае $\tau = 0$ [2], сохраняется склонность научных направлений к падению продуктивности (см. рис. 6, а [2]). Но наличие запаздывания τ (формально нормированное к $1/c_2$) приводит к возникновению противофазных затухающих колебаний макропеременных x и y . Их амплитуды возрастают с увеличением запаздывания, становясь различимыми на графике при $\tau = 0.155$ (рис. 1, а). Благодаря колебательной динамике значения характеристик продуктивности x, y достигают нулевых значений не одновременно. Из-за роста амплитуд колебаний при увеличении τ (например, при $\tau = 0.535$ на

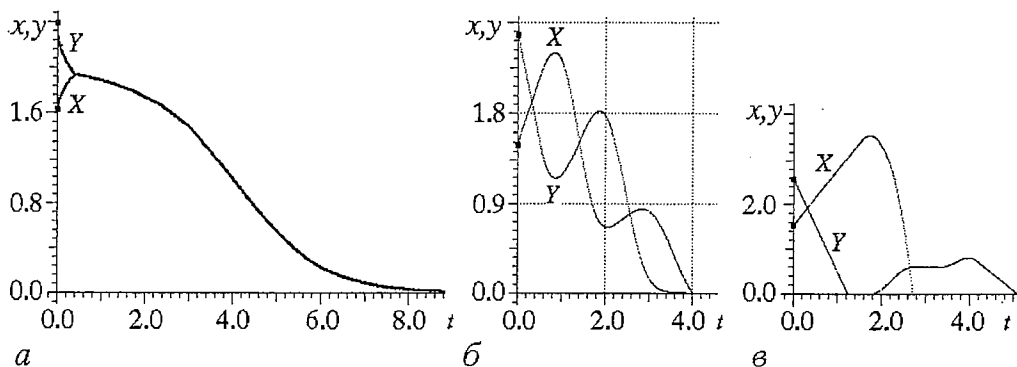


Рис. 1. Решение ситемы уравнений (1) для *варианта 3.1* при различных величинах времени запаздывания τ : *a* – 0.1550, *б* – 0.5350, *в* – 1.435

рис. 1, б) момент достижения нулевых значений, то есть касания графиком оси абсцисс в точке минимума продуктивности, наступает все раньше и раньше (рис. 1, в). А так как колебания противофазны, то первым достичь нуля продуктивности может любое из направлений вне зависимости от соотношения их стартовых условий развития. После достижения нулевого значения макропеременная способна вновь возрасти, однако в ходе дальнейшей эволюции величины x , y необратимо становятся равными нулю (рис. 1, в).

Вариант 3.2. $b_1=b_2=0.5$, $x_0=1.525$, $y_0=2.6$. Если время запаздывания не превышает 0.0085, то, как и в случае $\tau=0$ (см. рис. 6, б [2]), сохраняется склонность научных направлений к кооперативному увеличению продуктивности каждого из них. Но при достижении запаздыванием послебифуркационного значения $\tau=0.0105$ эта склонность меняется на противоположную. В этом случае эволюция макропеременных подобна изображенной на рис. 6, а в [2]. Рост запаздывания приводит к тем же эффектам, что и в *варианте 3.1*.

Вариант 3.3. $b_1=b_2=0.5$, $x_0=1.5$, $y_0=4.0$. В противоположность *варианту 3.2* с ростом запаздывания сначала возникают колебания макропеременных, когда $\tau=0.2205$ (рис. 2, а), а потом при $\tau=0.3405$ тенденция к развитию научных направлений сменяется тенденцией к их затуханию (рис. 2, б).

Вариант 3.4. $b_1=b_2=0.5$, $x_0=3.0$, $y_0=3.5$. В отличие от *варианта 3.3* колебания макропеременных обнаруживаются на графике при $\tau=0.1605$. Но при дальнейшем росте τ смены тенденций, присущей *варианту 3.3*, не наблюдается. Эволюция научных направлений подобна изображенной на рис. 2, а.

Анализ хода временных зависимостей макропеременных x , y целесообразно дополнить построением структуры разбиений проекции фазового пространства на траектории при разных запаздываниях. На фазовых портретах (рис. 3) траектории, начинающиеся в точках, лежащих над диагональю $x=y$, соответствуют *вариантам 3.1–3.4*.

На рис. 3 видно, что пока величина τ мала (*a*), фазовый портрет имеет тот же вид, что и структура разбиений фазовой плоскости на траектории на рис. 5, б в статье [2]. При $\tau=0.1$ (*б*) траектория, соответствующая *варианту 3.2*, становится нисходящей (угасание научных направлений). При $\tau=0.3$ (*в*) все траектории отражают колебательный характер эволюции X , Y . При $\tau=0.4$ (*г*) траектория, соответствующая *варианту 3.3*, становится нисходящей. Рост τ , вызывая увеличение амплитуд колебаний x , y , приводит к образованию фазовых траекторий в форме петель (*д*).

Обобщая содержание данных фазовых портретов, можно утверждать: при наличии запаздывания траектории, начинающиеся достаточно далеко от диагонали,

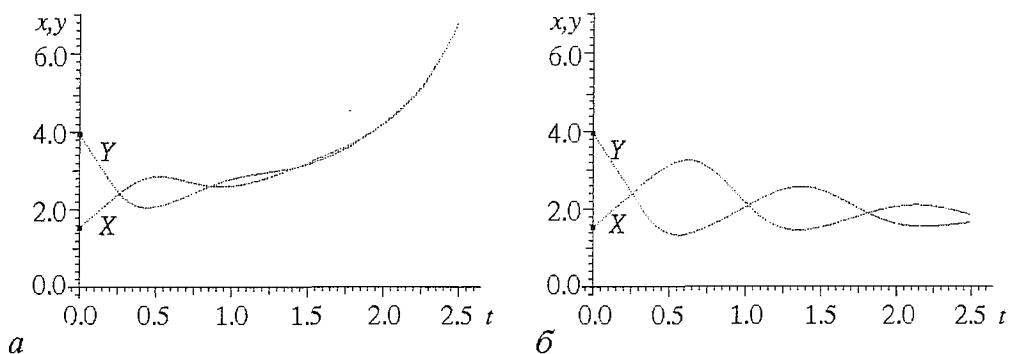


Рис. 2. Решение системы уравнений (1) для варианта 3.2 при различных величинах времени запаздывания τ : а - 0.2205, б - 0.3405

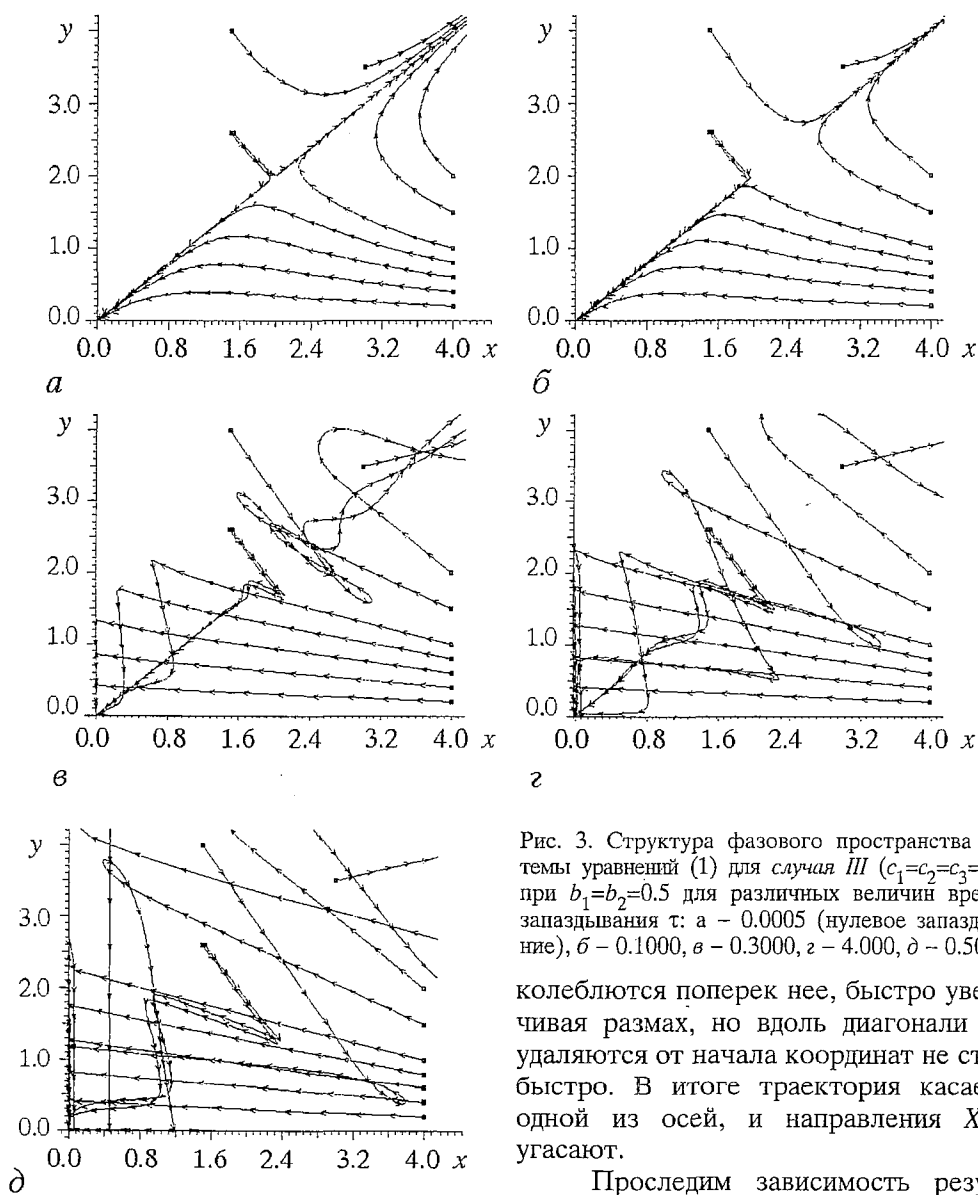


Рис. 3. Структура фазового пространства системы уравнений (1) для случая III ($c_1=c_2=c_3=c_4=1$) при $b_1=b_2=0.5$ для различных величин времени запаздывания τ : а - 0.0005 (нулевое запаздывание), б - 0.1000, в - 0.3000, г - 0.5000

колеблются поперек нее, быстро увеличивая размах, но вдоль диагонали они удаляются от начала координат не столь быстро. В итоге траектория касается одной из осей, и направления X, Y угасают.

Проследим зависимость резуль-

тата эволюции научных направлений (совместное кооперативное развитие или угасание) от начальных условий при различных значениях запаздывания. Для выяснения особенностей этих зависимостей в случаях III, IV, V построим таблицу, представив в ней возможные финалы эволюции макропеременных (и соответствующие им шесть критериев прекращения вычислений), а также способы изображения финалов на плоскости (x, y) . Тем самым последняя задает графически отображение (функцию) множества начальных условий x_0, y_0 во множество финалов эволюции. Чтобы подчеркнуть его методологическую значимость и физический смысл, назовем его инициально–финальным отображением (инициально–финальной функцией). По аналогии с содержанием рис. 3 в [5] инициально–финальное отображение можно назвать и «картой режимов на плоскости начальных условий».

Таблица

		Критерий прекращения вычислений					
		1	2	3	4	5	6
x		Любое	0	0	∞	const	$t > t_{\max}$
y		0	const	∞	∞	const	
		Способ отображения на плоскости (x, y)					
III		○ ₁	○	○	△ ₃	□ ₄	
IV		○	■ ₂	■	△	□	
V		○	■	■	△	□	

Символ ∞ в таблице соответствует случаю, когда значение макропеременной превышает 10^{500} ; символ $t > t_{\max} = 125$ – когда длительность эволюции макропеременных превосходит установленное предельное значение t_{\max} ; символ const – когда на отрезке времени длиной τ выполняются соотношения $|(dx/dt)/x| < 2 \cdot 10^{-6}$; $|(dy/dt)/y| < 2 \cdot 10^{-6}$, которые служат критерием установления статического режима; символ 0 – когда на отрезке времени длиной τ выполняется соотношение $x=0$ или $y=0$, которое служит критерием исчезновения того или иного научного направления.

Условное обозначение ○ (1, кружок) служит для отображения на плоскости (x, y) областей начальных условий, при которых в финале эволюции оба научных направления исчезают; обозначение ■ (2, заполненный квадратик) – когда исчезает X ; обозначение △ (3, треугольник) – когда происходит рост обеих макропеременных без видимого предела; обозначение □ (4, пустой квадратик) – когда устанавливается статический режим. Построение на плоскости (x, y) областей начальных значений x_0, y_0 , обуславливающих один из возможных финалов эволюции x, y , осуществлялось при варьировании x_0, y_0 с шагом 0.1 в пределах [0.1; 4.0]. Области в этих пределах, не заполненные какой–либо из четырех перечисленных выше фигур, соответствуют финалу, не отвечающему ни одному из условий таблицы.

Чтобы в деталях выяснить совместное влияние начальных условий и запаздывания на финал эволюции научных направлений, обратимся к серии

рисунков, на которых изображены инициально-финальные отображения при различных значениях τ .

Для варианта, когда $b_1=b_2=0.5$, из структуры фазового портрета (рис. 5, б [2]) вытекает, что при $\tau=0$ инициально-финальное отображение должно содержать две области. Первая должна быть – покрыта треугольниками (продуктивность обоих научных направлений растет без видимого предела). Вторая область, прилегающая к осям координат, должна быть покрыта кружками (научные направления деградируют). Однако по данным вычислительного эксперимента вторая область остается пустой, то есть финалы в ней не отвечают ни одному из четырех описанных ранее условий (рис. 4, а).

Чтобы объяснить это противоречие, примем во внимание, что научные направления X и Y угасают, приближаясь к 0 асимптотически ($x, y \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$). Следовательно, ни один из критериев 1–3 (см. табл.) исчезновения направлений не может выполняться за конечное время расчета. Поэтому вторую область отображения следует трактовать как соответствующую необратимому разрушению научных направлений.

С увеличением запаздывания в верхнем левом и нижнем правом углах квадрата образуются и расширяются области, соответствующие угасанию обоих научных направлений (рис. 4, б), а область, соответствующая неограниченному росту продуктивности обоих направлений, локализуется (рис. 4, в) вблизи асимптоты $x=y$ (частный случай прямой (2)), где $x > x_s, y > y_s, x_s, y_s$ – координаты седла, показанного на рис. 5, б [2]. Это обстоятельство согласуется с выдвинутым в начале статьи тезисом (см. стр. 120).

Сопоставляя характер эволюции макропеременных применительно к случаю III, можно сделать ряд выводов:

а) наличие запаздывания τ делает возможным колебательное изменение продуктивности научных направлений (отсутствующее, если $\tau=0$ [2]), причем размах колебаний возрастает с увеличением τ ;

б) рост запаздывания вызывает сокращение размеров областей начальных условий x_0, y_0 на плоскости макропеременных x, y , при которых возможно развитие научных направлений;

в) наличие запаздывания способно повлечь как обратимое (во времени t) снижение так и необратимое снижение до нуля макропеременных x, y ;

г) наличие запаздывания делает возможным пересечение проекций фазовых траекторий на плоскость (x, y) , $(x(t)=x(t'), y(t)=y(t'))$, где t' – некоторый момент времени не равный t), но не приводит к образованию предельных циклов;

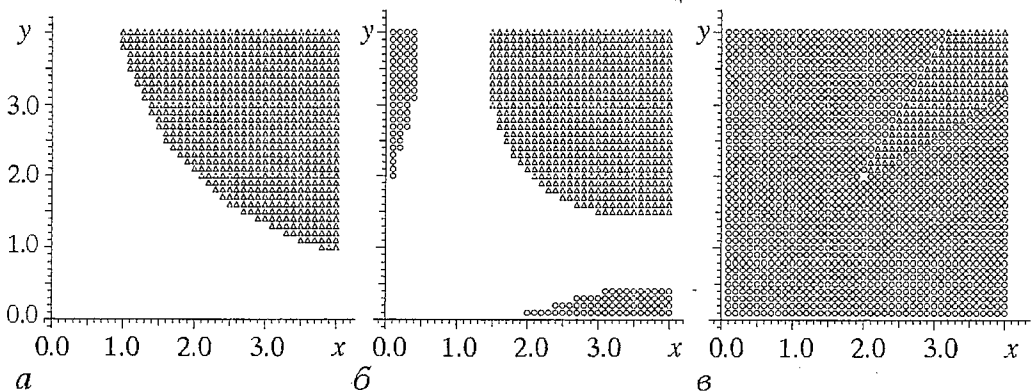


Рис. 4. Инициально-финальные отображения системы (1) для случая III ($c_1=c_2=c_3=c_4=1$) при $b_1=b_2=0.5$ для различных величин времени запаздывания τ : а – 0.0005 (нулевое запаздывание), б – 0.3000, в – 0.9000

д) анализ предложенных инициально-финальных отображений показывает, что рост запаздывания ведет к доминированию области, соответствующей угасанию обоих научных направлений, а область, соответствующая неограниченному росту их продуктивности, примыкает к асимптоте $x=y$ и в пределе вырождается в луч, лежащий на ней.

Случай IV. Когда научные направления противоположных типов кооперируются, то есть взаимодействуют по принципу положительной обратной связи ($c_1=c_2=c_3=1$, $c_4=-1$), условие существования прямой (2) не выполняется, а для прямой (3) это условие сводится к равенству $b_1=b_2$. Нелинейная динамика направлений отличается следующим.

Вариант 4.1. $b_1=b_2=0.8$, $x_0=y_0=0.1$. При наличии относительно малого запаздывания ($\tau=0.08050$) характер эволюции научных направлений подобен случаю, когда $\tau=0$ (рис. 8, а [2]), и их продуктивность неограниченно нарастает со временем.

Но с ростом запаздывания минимум продуктивности «затухающего» научного направления X снижается, достигая нуля при $\tau=0.4782497$ (используя метод Эйлера мы брали шаг расчета по времени равным 0.0005). Однако падение x до нуля является временным. По мере увеличения запаздывания продолжительность времени, в течение которого $x=0$, возрастает (рис. 5, а). При переходе от запаздывания $\tau=0.4782497$ к $\tau=0.4782498$ падение x до нуля становится необратимым. «Гибель» направления X влечет ограничение роста продуктивности направления Y (рис. 5, б). Приблизительно при этом же τ эволюция макропеременной u в направлении ее предельного значения приобретает колебательный характер. Размах колебаний возрастает с увеличением запаздывания (рис. 5, в).

Вариант 4.2. $b_1=b_2=0.8$, $x_0=2.5$, $y_0=0.05$. Общие закономерности в характере эволюции продуктивности научных направлений наступают при больших значениях запаздывания, чем в *варианте 4.1*. Макропеременная x достигает нуля при $\tau=0.2030$, причем необратимо, вызывая ограничение роста y . Начиная с $\tau=0.4905$, на графике становятся заметными колебания продуктивности и их размах возрастает с увеличением запаздывания.

Вариант 4.3. $b_1=1.5$, $b_2=0.8$, $x_0=y_0=0.1$. В отличие от *вариантов 4.1* и *4.2* уже при $\tau=0.458$ минимум продуктивности x достигает нуля, а динамика y становится колебательной. Чтобы выявить особенности динамики взаимодействия научных направлений, построим фазовые портреты.

Когда $b_1=b_2=0.8$, пока величина τ мала, фазовый портрет имеет тот же вид, что и структура разбиений фазовой плоскости на траектории на рис. 7, а в [2]. С ростом величины τ фазовые траектории становятся способны пересечь прямую (3), и тогда возникают их колебания около прямой (рис. 6, а). Дальнейшее увеличение запаздывания приводит к тому, что некоторые фазовые траектории практически сразу достигают одну из осей, а другие сначала описывают

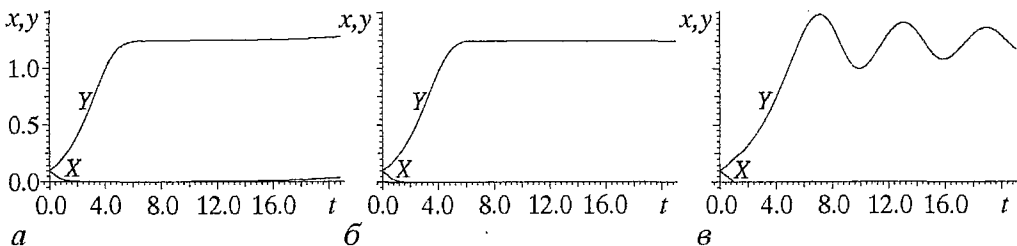


Рис. 5. Решение системы уравнений (1) для *варианта 4.1* при различных величинах времени запаздывания τ : а – 0.4205, б – 0.4805, в – 1.421

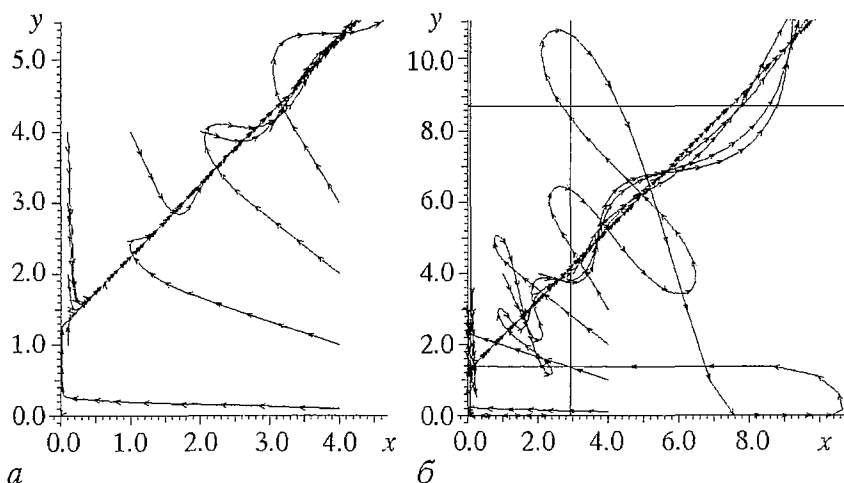


Рис. 6. Структура фазового пространства системы уравнений (1) для случая IV ($c_1=c_2=c_3=1$, $c_4=-1$) при $b_1=b_2=0.8$ для различных величин времени запаздывания τ : а – 0.1500, б – 0.3000

замысловатые фигуры, после чего растут в колебательном режиме (подобно случаю III), а затем касаются какой-либо из осей (рис. 6, б).

Когда $b_1=b_2=1.5$, при малых значениях τ фазовый портрет имеет тот же вид, что и структура разбиений фазовой плоскости на траектории на рис. 7, б в [2]. С увеличением τ фазовые траектории, как и в предыдущем варианте, начинают колебаться, пересекая прямую (3), но теперь они стремятся в область малых значений x, y (рис. 7). В отличие от предыдущего варианта с ростом запаздывания траектории, напоминающие ломаные линии, быстро достигают той или иной оси, не успевая приобрести сложную конфигурацию.

Когда $b_1=1.5, b_2=0.8$, фазовый портрет при $\tau=0$ изображен на рис. 8, а. Видимо, из-за технической ошибки рис. 7, в из статьи [2] повторяет рис. 7, б там же, что противоречит смыслу рис. 8, в [2]. С ростом величины τ (например, до значения 0.100) фазовые траектории пересекают прямую (3) и их колебания являются затухающими, как и в прежних вариантах. При больших τ некоторые из траекторий быстро достигают одной из осей (рис. 8, б). Примечательно, что для запаздывания, превышающего некоторое пороговое значение, существует особая

область начальных условий: если траектория начинается в ней, то имеет место незатухающий колебательный режим. Рассмотрим условия его реализации более подробно.

Проследим за трансформацией проекции фазовой траектории, начинающейся в точке $x_0=1, y_0=2$. Вычисления велись в течение модельного времени равного $15000c_1$ в предположении, что за это время все переходные процессы завершаются. Затем в течение модельного времени $7000c_1$ расчетные значения отображались на графике – фазовом портрете. Величина запаздывания варьировала с шагом $0.0005c_1$.

Оказалось, что в диапазоне зна-

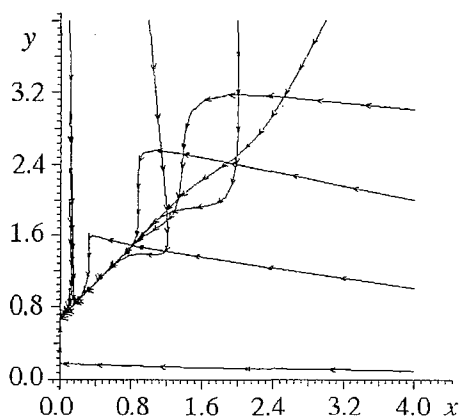


Рис. 7. Структура фазового пространства системы уравнений (1) для случая IV ($c_1=c_2=c_3=1, c_4=-1$) при $b_1=b_2=1.5$ и $\tau=0.1000$

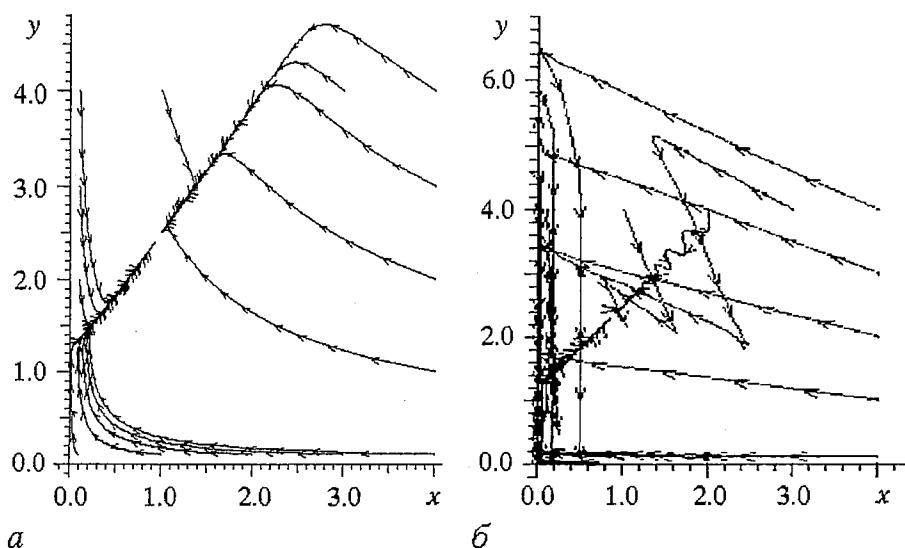


Рис. 8. Структура фазового пространства системы уравнений (1) для случая IV ($c_1=c_2=c_3=1$, $c_4=-1$) при $b_1=1.5$ и $b_2=0.8$ для различных величин времени запаздывания τ : а - 0.0005 (нулевое запаздывание), б - 0.3000

чений τ от 0.45 до 0.59 возникают незатухающие колебания (с периодом 2.00 при $\tau=0.50$ и периодом 2.39 при $\tau=0.5960$), предельный цикл для которых имеет характерный вид «восьмерки» (рис. 9, а). С увеличением запаздывания до $\tau=0.5985$ «восьмерка» испытывает равномерное утолщение, что свидетельствует о появлении модуляции среднего значения макропеременных. С ростом запаздывания очертания «восьмерки» расплываются (рис. 9, б), что служит симптомом хаотизации. Структуру хаотического движения иллюстрирует рис. 9, в, при построении которого интервал модельного времени был существенно меньше $7000c_1$. Форма последнего позволяет диагностировать динамику взаимодействия научных направлений как движение на эргодическом торе [6]. Увеличение запаздывания τ вызывает модуляцию формы поперечного сечения эргодического тора (рис. 9, г) (при построении этого рисунка время накопления было также существенно меньше $7000c_1$).

Рост τ влечет как увеличение, так и снижение степени сложности динамики: она минимальна в узких (с шириной не более $0.001c_1$) «окна периодичности», где имеет место резонанс на торе. Они наблюдались, например, при запаздывании $\tau=0.6065$ и 0.6110 (с периодом 26.77 и 29.46, соответственно). На рис. 9, д и е отчетливо видно наличие модуляции поперечных размеров тора. Рост запаздывания ($\tau=0.6070$, $\tau=0.6115$) вновь возвращает динамику к ситуации эргодического тора.

Когда $b_1=0.2$, $b_2=1.5$, при малых значениях τ фазовый портрет тот же, что и на рис. 7, г [2], причем в области, прилегающей к осям, его вид близок к портрету на рис. 7, б в [2], а в остальной части – к портрету на рис. 7, а в [2]. Такое сходство сохраняется в целом и при увеличении τ .

Как и прежде, обратимся к инициально-финальным отображениям.

Для варианта, когда $b_1=b_2=0.8$, из структуры фазового портрета (рис. 7, а [2]) вытекает, что при $\tau=0$ инициально-финальное отображение должно иметь вид квадрата, равномерно покрытого треугольниками (продуктивность обоих научных направлений неограниченно растет со временем). Такой вид отображения и был получен в расчетах. С увеличением запаздывания в верхнем правом углу квадрата образуется и расширяется область, соответствующая угасанию обоих научных

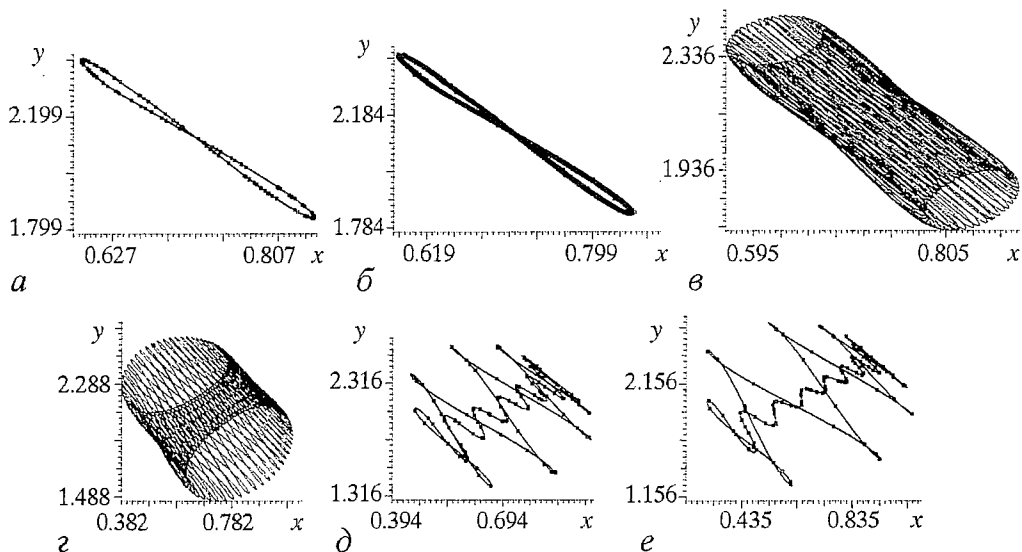


Рис. 9. Фазовая траектория системы (1) для случая IV ($c_1=c_2=c_3=1, c_4=-1$) при $b_1=1.5, b_2=0.8, x_0=1.0$ и $y_0=2.0$ для различных величин времени запаздывания τ : а - 0.596, б - 0.5985, в - 0.5995, з - 0.6045, д - 0.6065, е - 0.6110. Интервал модельного времени при построении рисунков в и з был много меньше $7000c_1$

направлений (рис. 10, а). Но далее в пределах этой области возникают и увеличиваются районы, где продуктивность научных направлений безгранично растет, и районы, где сохраняется только направление Y. Последний формируется также вдоль оси x в правой ее части (рис. 10, б). Напомним, что выявление областей, где продуктивность научных направлений безгранично растет, связано с выполнением критерия прекращения вычислений: $x > 10^{500}$ или $y > 10^{500}$. Заметим, что если выбрать иной критерий: $x > 10^{100}$ или $y > 10^{100}$ ($x > 10^{700}$ или $y > 10^{700}$), то строение инициально-финального отображения изменяется. Так, при увеличении параметра критерия размер области безграничного роста продуктивности уменьшается за счет расширения области исчезновения обоих направлений либо области исчезновения направления X (рис. 10, з, в). Следовательно, не все точки, принадлежащие области, обозначенной треугольниками, соответствуют случаю неограниченного роста продуктивности.

Дальнейший рост запаздывания изменяет структуру отображения в пользу области, где сохраняется лишь направление Y (рис. 10, д, е). А область угасания обоих направлений ориентируется вдоль фазовой траектории, принадлежащей прямой (3), чье уравнение в случае IV сводится к виду $y = (xb_1 + 1) / b_2$. Эта фазовая траектория изображена на рис. 7, а [2].

Но в силу тезиса 2 (см. стр. 120) траектории, принадлежащие этой прямой, должны стремиться к бесконечности. Другими словами, на инициально-финальных отображениях должна присутствовать прямая (3), обозначаемая треугольниками. Но поскольку начальные значения макропеременных x, y не попадают точно на прямую (3), то такая линия на представленных ранее отображениях не наблюдается. Если же соответствующим образом изменить алгоритм выбора начальных условий, то вне зависимости от величины запаздывания в структуре отображения появляется прямая (3), обозначаемая треугольниками.

Для варианта, когда $b_1=b_2=1.5$, из структуры фазового портрета (рис. 7, б [2]) вытекает, что при $\tau=0$ инициально-финальное отображение должно иметь вид квадрата, покрытого пустыми квадратиками (продуктивность обоих научных направлений стремится к стационарному значению) и/или покрытого заполнен-

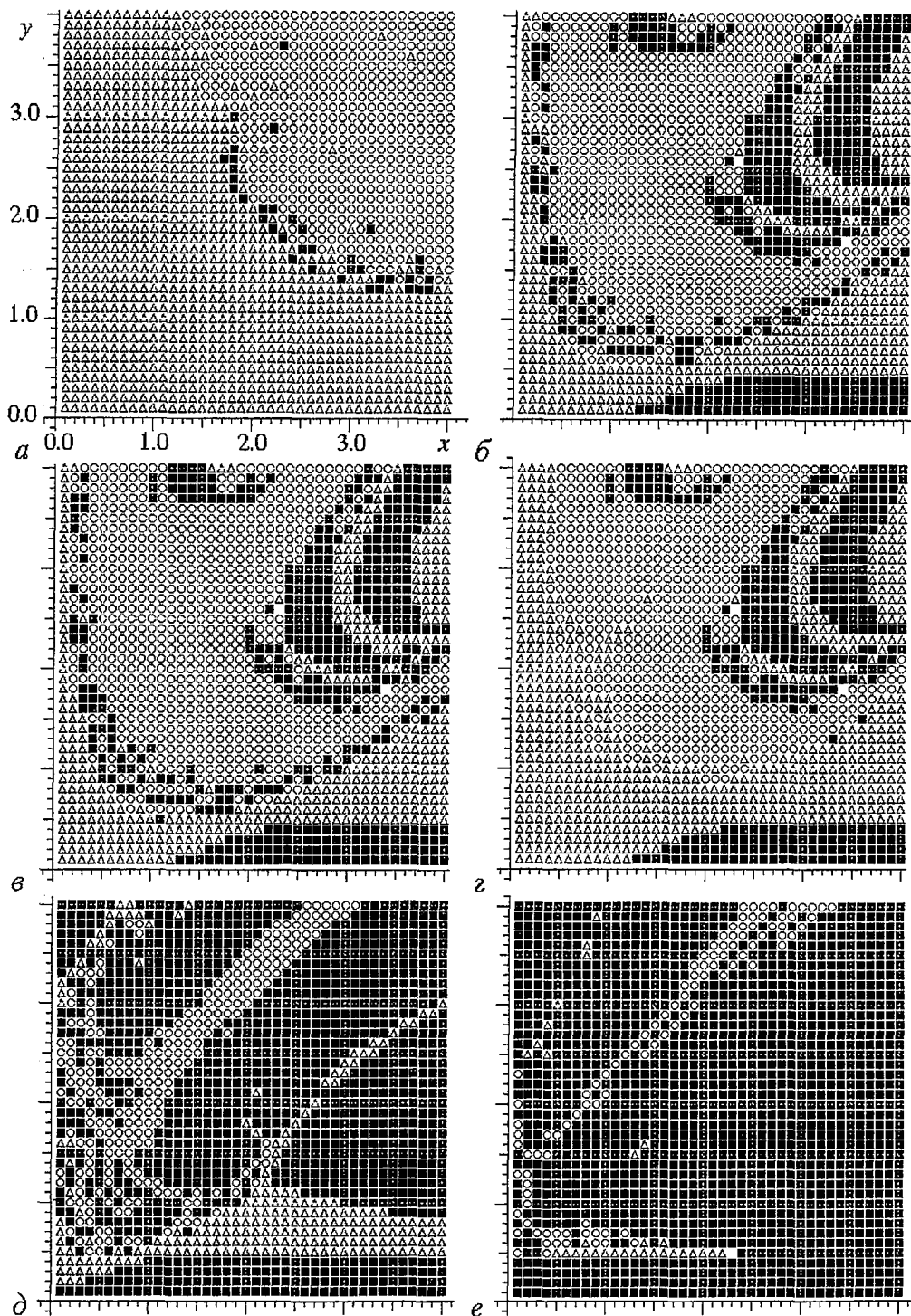


Рис. 10. Инициально-финальные отображения системы (1) для случая IV ($c_1=c_2=c_3=1, c_4=-1$) при $b_1=b_2=0.8$ для различных величин времени запаздывания t : а - 0.1000, б - 0.3000, в - 0.3000, г - 0.3000, д - 0.5000, е - 0.9000. При построении рисунков в и г использовались модифицированные критерии прекращения вычислений: в - $x > 10^{700}$ или $y > 10^{700}$, г - $x > 10^{100}$ или $y > 10^{100}$

ными квадратиками (научное направление X угасает). Однако в вычислительном эксперименте мы наблюдаем инициально-финальное отображение в виде ничем не

заполненного квадрата (т.е. выполняется критерий 6 прекращения счета: $t > t_{\max}$ – ничего нельзя сказать о финале эволюции научных направлений). Такое несовпадение вида полученного отображения с ожидаемым происходит по двум причинам.

1. Научное направление X угасает, приближаясь к 0 асимптотически ($x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$). Следовательно, критерий 2 (см. табл.) полного угасания X не может выполняться за конечное время расчета.

2. В критерии 5 стремления продуктивностей научных направлений к стационарному значению фигурируют неравенства: $|(dy/dt)/y| < 2 \cdot 10^{-6}$, $|(dx/dt)/x| < 2 \cdot 10^{-6}$. Но при $x \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$) $(dx/dt)/x \rightarrow c_1 y_{st} - c_2 \neq 0$, где стационарное значение макропеременной $y_{st} = 1/b_2$, согласно [2]. Следовательно, $(dx/dt)/x \rightarrow -1/3$ и последнее неравенство критерия 5 не выполняется.

С учетом сказанного отображение, действительно, должно иметь вид квадрата, покрытого заполненными квадратиками.

При наличии запаздывания для некоторых точек плоскости инициально-финального отображения (иначе говоря, плоскости (x, y)) начинает выполняться критерий 2, то есть угасание X . Причем с ростом τ число таких точек растет (рис. 11).

Для варианта, когда $b_1 = 1.5$, $b_2 = 0.8$, из структуры фазового портрета (рис. 12, а) вытекает, что при $\tau = 0$ инициально-финальное отображение должно иметь вид квадрата, покрытого пустыми квадратиками (продуктивность обоих научных направлений стремится к стационарному значению), что и наблюдалось в компьютерном эксперименте.

Рост запаздывания приводит к появлению области отображения, где сохраняется лишь направление Y , причем с ростом τ размер области растет (рис. 12, б, в). Причиной этого служит возникновение (при больших τ) траекторий, быстро достигающих одной из осей (ср. с рис. 8, б).

В то же время на плоскости отображения формируются области, для которых выполняется критерий 6 (рис. 12, г). Выполнение его в центральной части отображения вызвано наличием незатухающих колебаний макропеременных (рис. 9, а). Следовательно, при выборе начальных условий, соответствующих этой части отображения, направления X и Y сохраняются и испытывают незатухающие

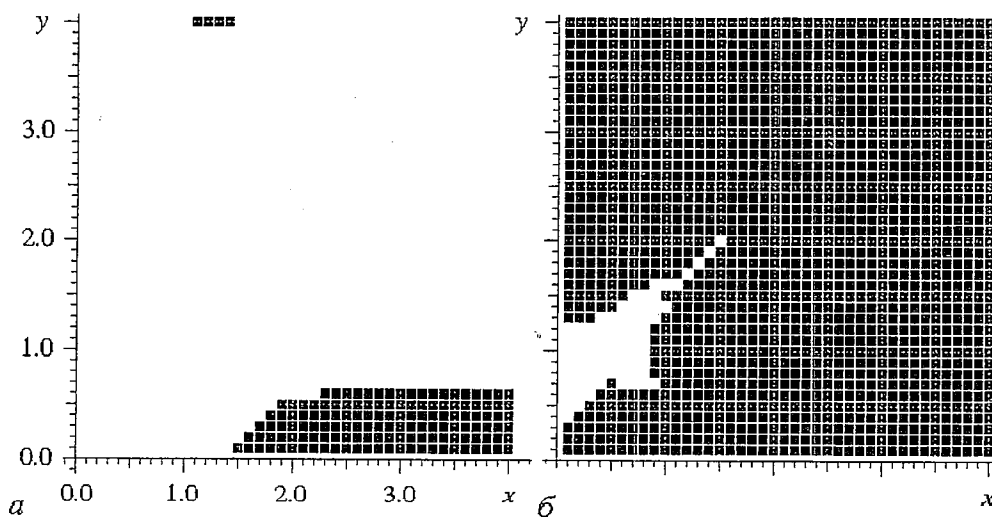


Рис. 11. Инициально-финальные отображения системы (1) для случая IV ($c_1 = c_2 = c_3 = 1$, $c_4 = -1$) при $b_1 = b_2 = 1.5$ для различных величин времени запаздывания τ : а – 0.2000, б – 0.7000

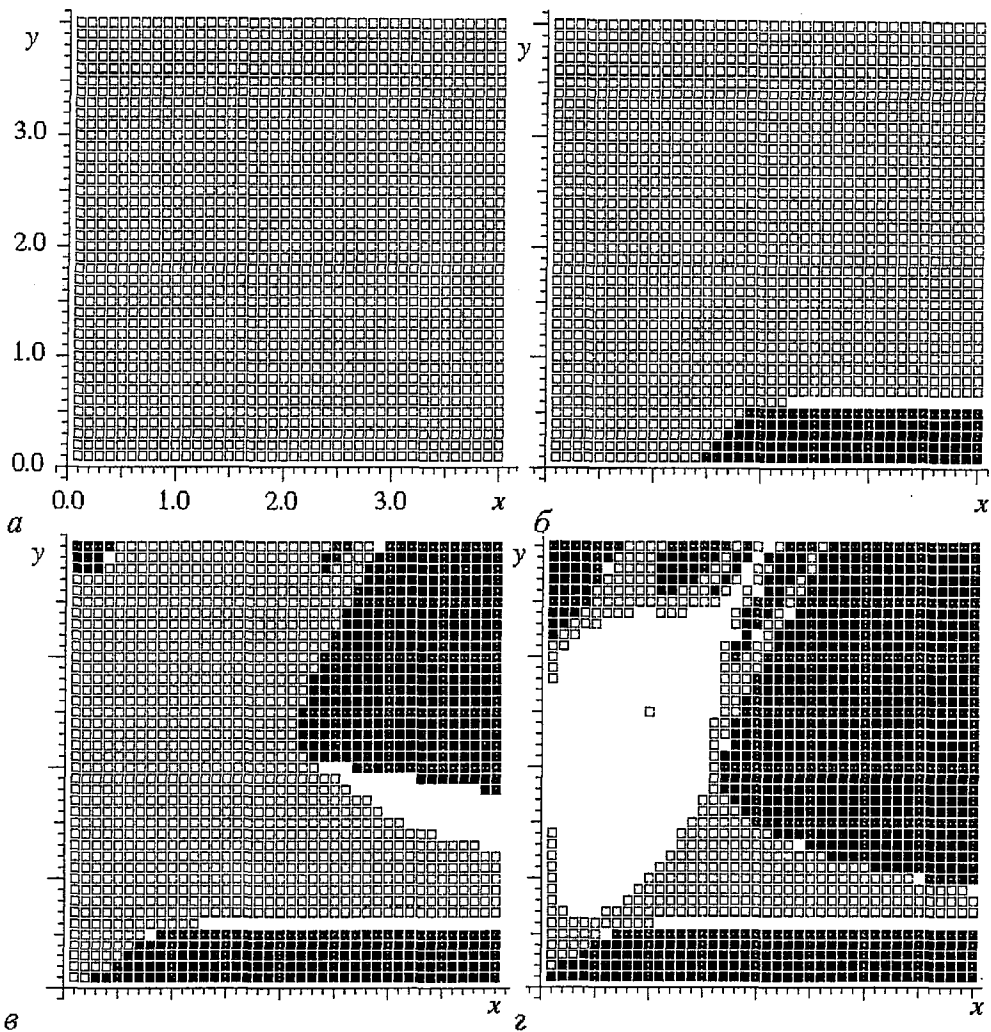
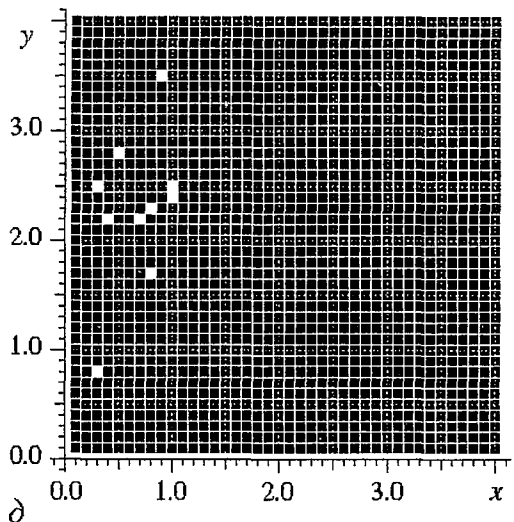


Рис. 12. Инициально-финальные отображения системы (1) для случая IV ($c_1=c_2=c_3=1$, $c_4=-1$) при $b_1=1.5$ и $b_2=0.8$ для различных величин времени запаздывания τ : а - 0.0005 (нулевое запаздывание), б - 0.2000, в - 0.4000, г - 0.5000, д - 0.9000

колебания продуктивности. Еще больший рост τ влечет доминирование области отображения, соответствующей необратимой деградации направления X (рис. 12, д).

Для варианта, когда $b_1=0.2$, $b_2=1.5$, из структуры фазового портрета (рис. 7, г [2]) следует, что при $\tau=0$ инициально-финальное отображение должно содержать две области. Первая - покрыта треугольниками (продуктивность обоих научных направлений



растет без видимого предела), вторая область, прилежащая к осям координат, как и для варианта, когда $b_1=b_2=1.5$, – покрыта пустыми (продуктивность обоих научных направлений стремится к стационарному значению) и/или заполненными (научное направление X угасает) квадратиками. Однако по данным вычислительного эксперимента вторая область остается пустой. Здесь справедливы замечания, сделанные для варианта, когда $b_1=b_2=1.5$.

При росте запаздывания τ трансформация первой (второй) области сходна с трансформацией всего инициально–финального отображения для варианта, когда $b_1=b_2=0.8$ ($b_1=b_2=1.5$). Заметим, что в первой области (в отличие от варианта, когда $b_1=b_2=0.8$) отчетливо виден район безграничного роста макропеременных, прилежащий к асимптоте (идущей вдоль диагонали $x=y$). Это наблюдается для всех построенных отображений при варьировании τ (рис. 13). Данное обстоятельство выглядит парадоксальным, поскольку не выполняются условия существования ни для прямой (2), ни для прямой (3). Можно объяснить парадокс тем, что эта асимптота имеет исключительно малую кривизну, представляя собой «квазипрямую». Поэтому тенденция неограниченного роста, возможно, исчезает лишь при очень высоких значениях τ .

Сопоставляя характер эволюции макропеременных x, y для случая IV, можно сделать ряд выводов.

- Сохраняет силу вывод «а» для случая III.
- Рост запаздывания вызывает сокращение размеров областей начальных условий x_0, y_0 на плоскости макропеременных x, y , при которых возможно развитие научного направления X .
- Наличие запаздывания способно повлечь как обратимое (во времени t) так и необратимое падение до нуля макропеременной x .
- Сохраняет силу вывод «г» для случая III.
- Когда $b_1=b_2=0.8$, при $\tau=0$ продуктивность обоих научных направлений неограниченно растет со временем. С увеличением запаздывания на инициально–финальном отображении появляется область угасания обоих научных направлений. В ней возникают и увеличиваются районы, где продуктивность научных направлений безгранично растет, и районы, где сохраняется только направление Y . Затем происходит расширение области исчезновения обоих направлений. При еще больших τ доминирует область, где сохраняется лишь направление Y , а область угасания обоих направлений ориентируется вдоль прямой (3) (безграничного роста X, Y), чье уравнение сводится к виду $y=(xb_1+1)/b_2$.

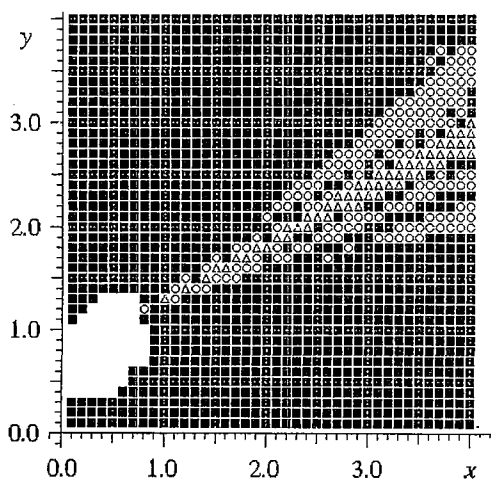


Рис. 13. Инициально–финальное отображение системы (1) для случая IV ($c_1=c_2=c_3=1, c_4=-1$) при $b_1=0.5, b_2=1.5$ и величине времени запаздывания $\tau=0.9000$

• Когда $b_1=b_2=1.5$, при $\tau=0$ инициально–финальное отображение должно иметь вид, соответствующий существованию лишь направления Y , но по данным вычислительного эксперимента ничего нельзя сказать о финале эволюции научных направлений. Несоответствие объясняется несовершенством системы критериев, используемых при построении отображений, и исчезает с увеличением τ .

• Когда $b_1=1.5, b_2=0.8$, при $\tau=0$ продуктивность обоих научных направлений стремится к стационарному значению. Рост запаздывания приводит к появлению области отображения, где

сохраняется лишь направление Y , увеличивая ее, а при этом в центральной части отображения формируются области, в которых продуктивность научных направлений испытывает незатухающие колебания. При еще больших τ доминирует область упадка направления X .

- Когда $b_1=0.2$, $b_2=1.5$, инициально-финальное отображение содержит две области. В первой выполняются закономерности, относящиеся к варианту, когда $b_1=b_2=0.8$; во второй области, прилежащей к осям координат, выполняются те же закономерности, что и для варианта, когда $b_1=b_2=1.5$. Обнаружено парадоксальное обстоятельство: по крайней мере, до $\tau=5$ в первой области присутствует район безграничного роста макропеременных, прилежащий к асимптоте (идущей вдоль диагонали $x=y$), хотя не выполняются условия существования нетривиальных прямолинейных фазовых траекторий. Парадокс предлагается объяснить тем, что эта асимптота имеет исключительно малую кривизну.

- Когда $b_1=1.5$, $b_2=0.8$, для запаздывания, превышающего некоторое пороговое значение, существует область начальных условий, при которых имеют место незатухающие колебания продуктивности научных направлений. Обнаружены предельные циклы с периодами 2.00, 2.39, 26.77, 29.46 (в том числе резонанс на торе), а также хаотический режим (эргодический тор). С ростом запаздывания проявляются «окна периодичности»: эргодический тор чередуется с резонансом на торе

Случай V. Когда «затухающее» направление X отрицательно воздействует на направление Y , развивающееся позитивно и положительно влияющее на X ($c_1=c_2=1$, $c_3=c_4=-1$), условие существования прямых (2) и (3) не выполняется. Выявлены следующие особенности.

Вариант 5.1. $b_1=b_2=0.2$, $x_0=y_0=0.2$. При малых значениях запаздывания изменение продуктивности обоих направлений носит характер затухающих колебаний; при этом средние значения продуктивностей x , y стремятся к своим стационарным значениям, как и при $\tau=0$ (см. рис. 10, а в [2]). С ростом τ полный размах колебаний x , y увеличивается, а при $\tau=0.2100$ затухание колебаний сменяется их нарастанием во времени (рис. 14, а). Авторы предлагают интерпретировать такую смену тенденций как бифуркацию, благодаря которой устойчивый фокус сменяется неустойчивым.

Из-за упомянутого увеличения размаха колебаний траектория на фазовом портрете рано или поздно достигает одной из осей. При этом наблюдается необратимое исчезновение направления X , а Y в зависимости от начальных значений x_0 и y_0 может как угаснуть совсем, так и прийти к стационарному значению (рис. 15).

При $\tau=0.2605$ макропеременная x во втором минимуме принимает нулевое значение, и это падение ее оказывается необратимым. Как видно из рис. 14, б, при таком запаздывании сохраняется лишь первый максимум каждой из макропеременных. Увеличение τ отодвигает момент наступления максимумов (рис. 14, в).

При $\tau=0.5965$ макропеременная x длительное время (сравнимое с 1) находится очень близко к нулю. Поэтому спустя время, равное τ , макропеременная y достигает значения, близкого к стационарному для случая, когда $x=0$. А возрастание x приводит к падению y . В итоге на графике $y(t)$ появляется плато (рис. 14, г).

При $\tau=0.5975$ продуктивность научного направления X монотонно убывает и достигает нуля раньше, чем Y . Поэтому продуктивность направления Y , не обращаясь в нуль, стремится к своему стационарному значению. Судя по рис. 14, д, это стремление имеет колебательный характер. Размах колебаний возрастает с увеличением запаздывания (рис. 14, е).

Вариант 5.2. $b_1=b_2=0.2$, $x_0=y_0=0.5$, демонстрирует те же закономерности, что и вариант 5.1. При $\tau=0.3605$ происходит необратимое падение макропеременной x (во втором минимуме) до нуля; продуктивность x монотонно убывает до нуля, а y , не обращаясь в нуль, стремится к своему стационарному значению ($\tau=1.1405$).

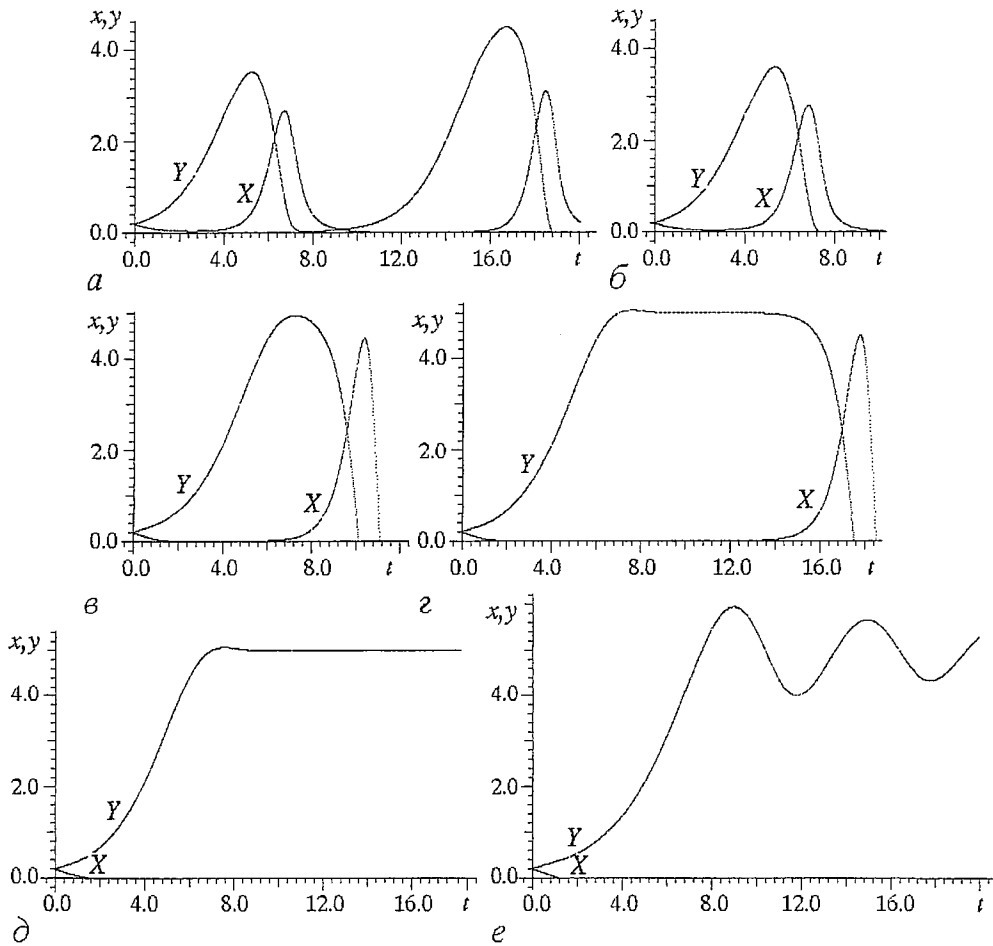


Рис. 14. Решение системы уравнений (1) для варианта 5.1 при различных величинах времени запаздывания τ : а - 0.2405, б - 0.2605, в - 0.5805, г - 0.5965, д - 0.6005, е - 1.421

Вариант 5.3. $b_1=b_2=0.2$, $x_0=y_0=1$, аналогичен вариантам 5.1 и 5.2. При $\tau=0.3590$ макропеременная x в третьем минимуме необратимо падает до нуля (рис. 16, а), а затем ($\tau=0.3605$) то же происходит и с y . При $\tau=0.4605$ макропеременная x испытывает необратимое падение во втором минимуме, а продуктивность направления Y , не обращаясь в нуль, стремится к своему стационарному значению (рис. 16, б). При запаздывании $\tau=0.5205$ повторяется ситуация, которой соответствует рис. 14, б. Но рис. 16, в ($\tau=1.3800$) отличается от рис. 14, г тем, что стремление макропеременной y к стационарному состоянию носит колебательный характер, поэтому на графике для y плато отсутствует. Ситуации при запаздывании $\tau=1.3900$ соответствует рис. 14, д.

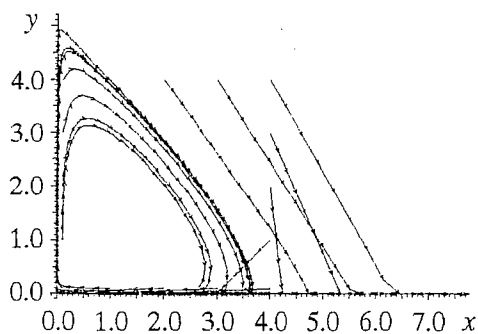


Рис. 15. Структура фазового пространства системы уравнений (1) для случая V ($c_1=c_2=1$, $c_3=c_4=-1$) при $b_1=b_2=0.1$ и величине времени запаздывания $\tau=0.3600$

Вариант 5.4. $b_1=b_2=0.2$, $x_0=y_0=2.5$. При $\tau=0.18980$ ни одна из макропеременных не достигает нуля (напомним, что вычисления велись методом Эйлера с шагом равным 0.0005). Примечательно,

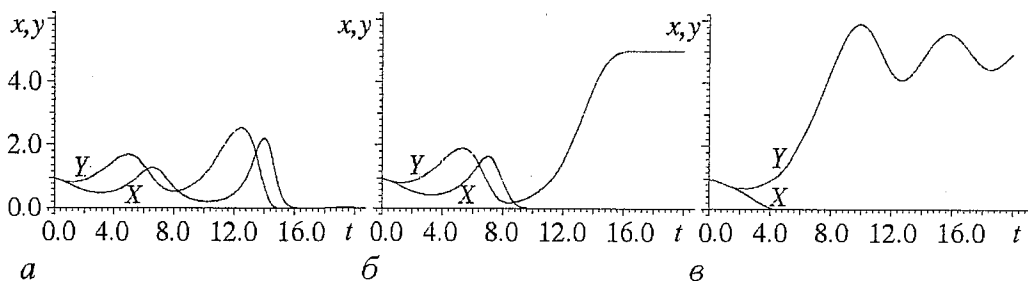


Рис. 16. Решение системы уравнений (1) для варианта 5.3 при различных величинах времени запаздывания τ : а – 0.3590, б – 0.4605, в – 1.380

что еще до того, как наступает бифуркация, благодаря которой устойчивый фокус сменяется неустойчивым, макропеременная y достигает нуля в первом минимуме. Это происходит обратимо при $\tau=0.18988$, поэтому на графике $y(t)$ возникает плато, хорошо различимое на рис. 17. Обратимое достижение нуля происходит, возможно, потому, что бифуркация еще не произошла и фазовая траектория стремится к устойчивому фокусу, то есть стремится удалиться от осей. Поскольку макропеременная x стремится к 0 асимптотически (оставаясь положительной), то при «возрождении» направления Y значение x резко возрастает, то есть направление X сохраняется. Необратимое падение y до нуля наблюдается при $\tau=0.18989$. Если $y=0$ необратимо, то x асимптотически стремится к 0.

(Многочисленные вычисления приводят к выводу о том, что при $\tau_1=0.1898885920532704$ зависимость $y(t)$ имеет участок с плато, но уже при $\tau_2=0.1898885920532705$ y необратимо становится равным 0.)

В силу того, что необратимое угасание направления Y происходит до указанной бифуркации, она не приводит к существенным изменениям динамики направлений X, Y . И дальнейшее увеличение запаздывания влечет лишь рост максимума x . Научное направление X сохраняется дольше, чем при меньших значениях τ , так что справедлива оценка: время жизни направления X больше τ .

Обратимся к инициально-финальным отображениям. Из структуры фазового портрета (рис. 9 в [2]) вытекает, что при $\tau=0$ инициально-финальное отображение должно иметь вид квадрата, равномерно покрытого пустыми квадратиками (продуктивность обоих научных направлений стремится к некоей константе). Именно такое отображение и было получено в вычислительном эксперименте. Но уже при $\tau=0.1$ в верхнем правом углу квадрата образуется малая область, соответствующая ситуации исчезновения обоих научных направлений. По мере увеличения запаздывания эта область расширяется (рис. 18, а, б), практически полностью заполняя исследуемую область начальных условий при $\tau=0.3$ (рис. 18, в). Рост величины τ приводит к возникновению спиралевидной области, соответствующей случаю, когда сохраняется лишь направление Y (рис. 18, г). Число витков (длина) спирали уменьшается, а ширина увеличивается (рис. 18, д). Сравнивая динамику макропеременных x, y для случая V, можно сделать ряд выводов.

- Сохраняют силу выводы «б», «в» для случая III.

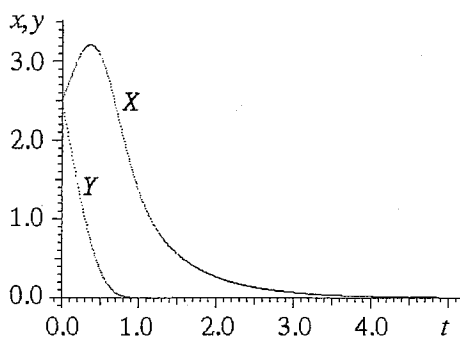


Рис. 17. Решение системы уравнений (1) для варианта 5.4 при величине времени запаздывания $\tau=0.18988859$

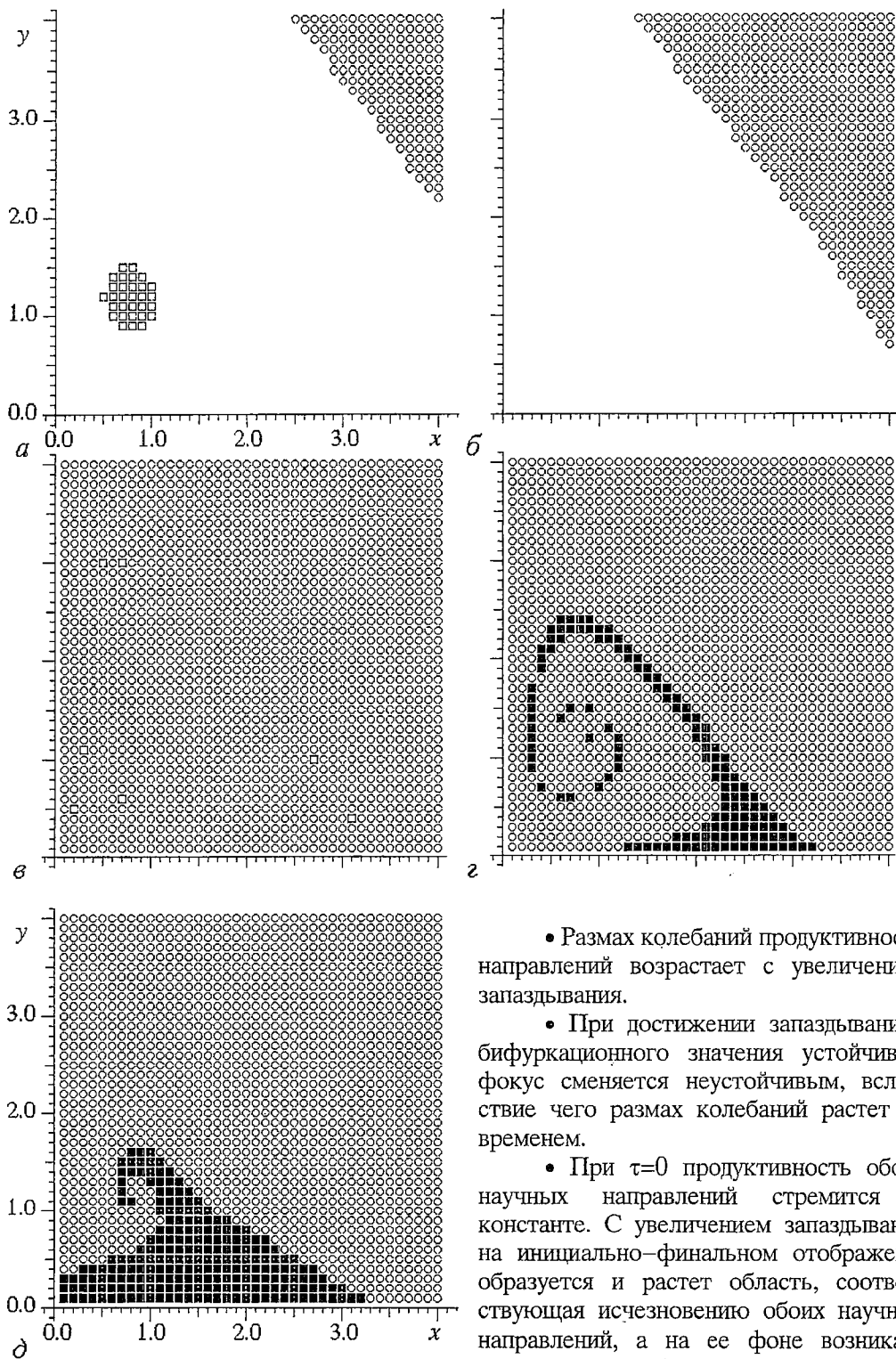


Рис. 18. Инициально-финальное отображение системы (1) для случая V ($c_1=c_2=1$, $c_3=c_4=-1$) при $b_1=b_2=0.2$ для различных величин времени запаздывания τ : $a - 0.1300$, $\beta - 0.1800$, $\text{в} - 0.3000$, $г - 0.4000$, $\delta - 2.000$

- Размах колебаний продуктивности направлений возрастает с увеличением запаздывания.

- При достижении запаздыванием бифуркационного значения устойчивый фокус сменяется неустойчивым, вследствие чего размах колебаний растет со временем.

- При $\tau=0$ продуктивность обоих научных направлений стремится к константе. С увеличением запаздывания на инициально-финальном отображении образуется и растет область, соответствующая исчезновению обоих научных направлений, а на ее фоне возникает спиралевидная область, соответствующая сохранению лишь направления Y .

Заключение

Предпринятое изучение модели взаимодействия двух научных направлений с квадратичным ограничением роста достижений [2], дополненной учетом инерционности восприятия сообществом «своих» и «чужих» научных достижений [4], приводит к результатам, которые можно обобщить в нескольких аспектах.

А. Ритмический аспект. Наличие инерционности восприятия научных достижений, превышающей некоторые пороговые значения, в зависимости от типа (и параметров) взаимодействия научных направлений X, Y вызывает:

- затухающие колебания их продуктивности x, y ;
- незатухающие колебания x, y (предельные циклы, в том числе резонанс на торе и эргодический тор);
- рост амплитуды затухающих колебаний;
- разрушение колебательных процессов;
- (не) обратимое во времени t снижение до нуля продуктивности.

Эта инерционность допускает время от времени повторение уровня показателей продуктивности, когда $x(t)=x(t')$, $y(t)=y(t')$. Но оно не гарантирует в будущем воспроизведение имевшей место эволюции научных направлений (не приводит к образованию предельных циклов).

Особенности прямолинейных фазовых траекторий таковы:

- фазовая траектория остается прямой при любых значениях запаздывания τ ;
- если движение системы происходит в направлении к (устойчивой особой) точке, (не) являющейся предельной точкой фазового пространства системы с $\tau=0$, то наличие запаздывания не влияет на монотонный характер изменения x, y (существует значение $\tau>0$, при котором имеют место затухающие колебания вокруг особой точки).

Б. Бифуркационный аспект. При достижении запаздыванием τ (инерционностью восприятия научных достижений) бифуркационного значения затухающие колебания продуктивности, характеризующей научные направления X, Y , сменяются:

- нарастающими колебаниями, в итоге чего деградируют либо оба направления, либо «затухающее» направление X ;
- предельными циклами.

С ростом запаздывания проявляются «окна периодичности»: эргодический тор чередуется с резонансом на торе.

В. Инициально-финальный аспект. Предложен конструкт – инициально-финальное отображение, задающее графически отображение (функцию) множества начальных условий x_0, y_0 во множество финалов эволюции x, y . Оно позволяет установить, как влияют начальные условия на заключительное состояние динамики научных направлений, а также – путем построения серий отображений – роль некоторого фактора (параметра модели) в формировании структуры отображения.

С помощью построенных серий инициально-финальных отображений на плоскости макропеременных x, y обнаружены области начальных условий, при которых имеют место незатухающие колебания продуктивности научных направлений.

Установлено, что рост запаздывания – в зависимости от типа (и параметров) взаимодействия научных направлений – вызывает многообразные трансформации областей начальных условий, при которых наступают те или иные финалы эволюции X, Y (оба научных направления угасают; исчезает только X ; неограниченный рост x, y ; статический режим), например:

- сокращение размеров областей начальных условий, при которых возможно развитие того или иного научного направления;
- доминирование области начальных условий, соответствующей угасанию обоих научных направлений;

• формирование области угасания обоих научных направлений, в которой возникают и увеличиваются районы, где продуктивность X , Y безгранично растет, и районы, где сохраняется только направление Y ;

• образование и рост области угасания X , Y , на фоне которой возникает спиралевидная область существования лишь направления Y .

Таким образом, совместный учет ограничения экспоненциального роста (в форме квадратичной нелинейности [2]) и инерционности восприятия научных достижений (введением запаздывающего аргумента у макропеременных) позволяет выявить в модели (1) многообразные виды поведения двух взаимодействующих научных направлений, одно или оба из которых «затухающие».

В работе использованы материалы, полученные при выполнении проекта № 990675 в рамках научной программы «Фундаментальные исследования высшей школы в области естественных и гуманитарных наук. Университеты России».

Библиографический список

1. Качак В. В., Мчедлова Е. С. Модель взаимодействия и эволюции двух научных направлений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 4. С. 110.

2. Качак В. В., Мчедлова Е. С. Модель взаимодействия двух научных направлений с учетом ограничения экспоненциального роста достижений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 2. С. 85.

3. Качак В. В., Усанов Д. А. К вопросу о взаимодействиях научных школ, или Об одном аргументе «за» интеграции образовательных структур // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 2. С. 95.

4. Измайлов И.В., Поизнер Б.Н., Раводин В.О. Модель взаимодействия двух развивающихся научных направлений с учетом ограничения роста достижений и запаздывания // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 1. С. 70.

5. Храмов А.Е. Сложная динамика когерентных структур в двухпоточковом вихре // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 2. С. 42. рис. 3.

6. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем / под ред. В.С. Анищенко. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с.

*Томский государственный
университет*

Поступила в редакцию 22.02.01

MODEL OF TWO SCIENTIFIC FIELDS INTERACTION (ONE OR BOTH ARE «DAMPED») WITH RESTRICTION OF ACHIEVEMENTS GROWTH AND DELAY

I.V. Izmailov, B.N. Poizner, V.O. Ravodin

Model of two scientific fields interaction with quadratic restriction of achievements growth (analogous of model suggested by V.V. Kachak, E.S. Mchedlova) taking into account inertia with which scientific fellowship perceives «own» and «strange» scientific achievements is investigated.

It is offered to supplement a construction of phase portraits and temporal realizations by a construction of initial-final maps (term of the authors) for clearing up of joint effect of delay, initial conditions and types of two scientific fields interaction on dynamics of its efficiency.

The limit cycles (including resonance on torus) and also chaotic regime (an ergodic torus) are discovered. «The windows of periodicity» are exhibited due to growth of delay: ergodic torus alternates a resonance on torus. It is showed that achievements perception inertia is capable to complicate process of scientific fields interaction.



Измайлов Игорь Валерьевич - родился в 1976 году в Алма-Ате. Поступил на радиофизический факультет Томского государственного университета (1993). Аспирант кафедры квантовой электроники и фотоники (1999). Область научных интересов: моделирование процессов в нелинейных системах различной природы, применение нелинейной динамики для обработки и скрытой передачи информации.



Поизнер Борис Николаевич - родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), доцент кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, физике, физике лазеров, принципам управления лазерным излучением, основам синергетики. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Имеет много статей по указанной тематике. Инициатор подготовки и редактор семи библиографических указателей (в том числе «Синергетика и сопредельные науки», «Университетское образование и его социальная роль», «Интеллигенция в российском обществе и университете», «Психика и интеллект обучаемого»). Действительный член Всероссийского общества библиофилов.



Раводин Владимир Олегович - родился в Томске (1976). Закончил радиофизический факультет Томского государственного университета (1999). В настоящее время аспирант кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Область научных интересов: компьютерное моделирование нелинейной динамики бинарных систем. Автор нескольких научных публикаций.

E-mail: deka@ic.tsu.ru



МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДВУМЕРНОГО ИНВАРИАНТНОГО ТОРА

Л.Б.Ряшко

На основе введенной конструкции – тороидально квадратичной функции Ляпунова – вопрос об экспоненциальной устойчивости инвариантного 2–тора нелинейной системы сводится к анализу разрешимости краевой задачи для соответствующего матричного дифференциального уравнения Ляпунова. В связи с некоторым проектором P вводится понятие P –устойчивости линейной системы. При этом P –устойчивость системы первого приближения является необходимым и достаточным условием устойчивости 2–тора. В трехмерном случае матричное дифференциальное уравнение Ляпунова вырождается в скалярное, а его решение сводится к решению некоторого линейного функционального уравнения. Анализ разрешимости этого функционального уравнения приводит к интегральному параметрическому критерию устойчивости. Полученные результаты используются для построения стабилизирующего регулятора.

Разнообразие в поведении нелинейных динамических систем, возникающее при переходе от порядка к хаосу, часто связано с цепью последовательных бифуркаций: стационарный режим (точка покоя) – периодический режим (цикл) – квазипериодический режим (тор) – хаотический режим (странный аттрактор). Каждый такой переход сопровождается потерей устойчивости простого аттрактора и рождением нового, более сложного. Анализ устойчивости соответствующих многообразий является здесь ключевым моментом в понимании механизма сложных явлений нелинейной динамики [1,2]. Если циклы и, тем более, точки покоя являются достаточно подробно исследованными объектами современной теории устойчивости [3,4], то соответствующий анализ тороидальных инвариантных многообразий по многим важным направлениям еще не завершен.

Одним из таких направлений является метод функций Ляпунова (МФЛ). В исследовании устойчивости точки покоя как детерминированных, так и стохастических систем в настоящее время этот метод представляет собой достаточно глубоко разработанную теорию.

Соответствующие аналоги – орбитальные ФЛ – использовались в анализе устойчивости предельных циклов (см. [5] и библиографию к ней). Конструкция орбитальных ФЛ применялась в [6] при построении асимптотического разложения квазипотенциала стохастического нелинейного осциллятора. Метод вращающихся ФЛ использовался в [7] для получения достаточных признаков существования

периодических решений внутри торов. Общий вариант МФЛ для получения достаточных условий устойчивости торов представлен в [8]. В данной статье разработка МФЛ позволила получить необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости двумерных тороидальных многообразий.

Рассмотрим систему

$$x = f(x), \quad (*)$$

где x — n -мерный вектор, f — достаточно гладкая вектор-функция. Предполагается, что система (*) имеет инвариантное двумерное тороидальное многообразие Γ .

Поведение фазовых траекторий на тороидальной поверхности в общем случае может быть весьма сложным. В данной работе предполагается следующее. На Γ нет точек покоя. Фазовые траектории системы (*) полностью покрывают тор Γ . При этом тороидальная поверхность может целиком состояться как из замкнутых фазовых траекторий-циклов и траекторий к ним сходящихся (периодическая обмотка), так и состоять из семейства незамкнутых траекторий, лежащих всюду плотно на Γ (квазипериодическая обмотка).

В формальных построениях будем исходить из возможности следующей параметризации 2-тора Γ . Пусть на Γ лежит некоторая замкнутая достаточно гладкая кривая α (экватор), задаваемая функцией $\alpha(s)$ на интервале $0 \leq s \leq 1$ с условием $\alpha(0) = \alpha(1)$ (рис.). Из каждой точки $\alpha(s)$ кривой α как начальной выходит решение $x(t, s)$ системы (*) с условием $x(0, s) = \alpha(s)$. Предполагается, что траектория $x(t, s)$, совершив оборот вокруг тора Γ , через некоторое время вновь пересечет кривую α . Пусть $T(s) = \min\{t > 0 | x(t, s) \in \alpha\}$ — момент первого возвращения траектории $x(t, s)$ на кривую α , при этом $x(T(s), s)$ есть точка возвращения. Пусть $\tau(s)$ такова, что $\alpha(\tau(s)) = x(T(s), s)$. Здесь $\tau(s)$ есть функция последования сечений Пуанкаре кривой α фазовыми траекториями системы (1). Естественная область изменения переменной s — окружность. При рассмотрении функции $\tau(s)$ на полуинтервале $[0, 1)$ неизбежно возникают разрывы. Для того, чтобы обеспечить непрерывность $\tau(s)$, принято считать областью изменения s всю числовую ось. При этом функции $\alpha(s)$ и $\tau(s)$ являются периодическими $\alpha(s) = \alpha(s+1)$, $\tau(s) = \tau(s+1)$. Равенства $x(t, s) = x(t, s+1)$, $x(T(s)+t, s) = x(t, \tau(s))$ позволяют распространить функцию $x(t, s)$ на всю плоскость $\Pi = \{(t, s) | -\infty < t < +\infty, -\infty < s < +\infty\}$.

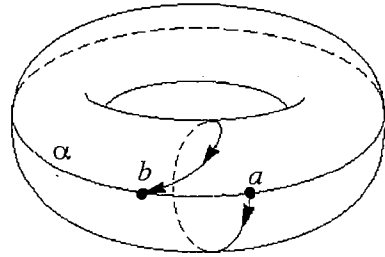


Рис. α — замкнутая кривая (экватор); $a = x(0, s) = \alpha(s)$ — начальная точка решения $x(t, s)$; $b = x(T(s), s) = \alpha(\tau(s))$ — точка первого возвращения решения $x(t, s)$ на кривую α

Функция $x(t, s)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками 2-тора Γ и точками множества $D = \{(t, s) | 0 \leq t < T(s), 0 \leq s < 1\}$. Вектор-функции $\frac{dx(t, s)}{dt}$, $\frac{dx(t, s)}{ds}$ — линейно независимы. При этом для каждой точки γ на торе Γ можно указать $t = t(\gamma)$, $s = s(\gamma)$ такие, что $x(t, s) = \gamma$.

В разделе 1 в связи с аппроксимацией функции Ляпунова в окрестности двумерного тороидального многообразия рассматривается конструкция тороидальной квадратичной формы. Данная форма задается некоторой матрицей, параметрически связанной с точками тороидальной поверхности. Вопрос об устойчивости 2-тора сводится (теорема 2) к анализу разрешимости некоторой краевой задачи для соответствующего матричного линейного дифференциального уравнения Ляпунова.

В разделе 2 вводится понятие P -устойчивости линейной системы для некоторого проектора P . При этом P -устойчивость системы первого приближения является (теорема 3) необходимым и достаточным условием разрешимости краевой задачи. Результаты разделов 1 и 2 позволяют придать критерию устойчивости 2-тора (теорема 4) традиционную форму теоремы об устойчивости по первому приближению.

Раздел 3 посвящен детальному анализу трехмерного случая. Здесь матричное дифференциальное уравнение Ляпунова вырождается в скалярное, а его решение сводится к решению некоторого функционального уравнения. Анализ разрешимости этого функционального уравнения приводит к интегральному параметрическому критерию, известному [9, 10] как достаточное условие устойчивости 2-тора. Техника, представленная в данной работе, позволила доказать его необходимость.

В разделе 4 для построения стабилизирующего регулятора используется метод тороидально квадратичных ФЛ, разработанный в разделах 1, 2 применительно к задаче анализа устойчивости.

В разделе 5 приводится иллюстрирующий пример.

1. Устойчивость. Тороидально-квадратичные функции Ляпунова

Рассмотрим в некоторой окрестности U тороидальной поверхности Γ функцию $\gamma(x)$, где $\gamma(x)$ – ближайшая к x точка 2-тора Γ . Функция $\gamma(x)$ в общем случае может быть многозначной. Однако вблизи достаточно гладкой поверхности $\Gamma(x)$ все обстоит просто. При рассмотрении вопросов устойчивости окрестность U можно считать достаточно малой. При этом вектор отклонения x от Γ , $\Delta(x) = x - \gamma(x)$, будет в U однозначной и гладкой функцией.

Определение 1. Тор Γ называется экспоненциально устойчивым (\mathcal{E} -устойчивым) в U , если при некоторых $K > 0$, $l > 0$ выполняется условие

$$\|\Delta(x(t))\| \leq K e^{-lt} \|\Delta(x_0)\|,$$

где $x(t)$ – решение системы (*) с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

\mathcal{E} -устойчивость тороидальных многообразий исследовалась в работах [8–12]. Рассмотрим в окрестности U функцию Ляпунова $v(x)$

$$v|_U \geq 0, \quad v|_\Gamma = 0, \quad v|_{U \setminus \Gamma} > 0. \quad (1.1)$$

При доказательстве теорем об устойчивости точки покоя в качестве функций Ляпунова берут квадратичные формы, в случае орбит используют орбитальные квадратичные формы [5]. Соответствующий аналог для тороидальных многообразий дается следующим определением.

Определение 2. Функция $v(x)$ называется тороидально квадратичной (Γ -квадратичной), если при некоторых $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ в U выполняются неравенства

$$K_1 \|\Delta(x)\|^2 \leq v(x) \leq K_2 \|\Delta(x)\|^2. \quad (1.2)$$

Справедлив следующий критерий, представляющий собой распространение на случай тора классических результатов [3].

Теорема 1. Для \mathcal{E} -устойчивости тора Γ системы (*) необходимо, чтобы для любой, и достаточно, чтобы для некоторой Γ -квадратичной функции Ляпунова $w(x)$ существовала Γ -квадратичная функция Ляпунова $v(x)$ такая, что в U справедливо равенство

$$Lv(x) = -w(x), \quad Lv(x) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, f(x) \right). \quad (1.3)$$

Для исследования разрешимости уравнения Ляпунова (1.3) необходимо связать локальное поведение функций $v(x)$, $Lv(x)$ и $w(x)$ вблизи 2-тора Γ .

Рассмотрим разложение $v(x)$ в ряд Тейлора в точке $\gamma \in \Gamma$

$$v(x) = v(\gamma) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(\gamma), x - \gamma \right) + \frac{1}{2} \left(x - \gamma, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma) (x - \gamma) \right) + O(|x - \gamma|^3).$$

В этом разложении, благодаря (1.1), первым отличным от нуля будет квадратичный член. Здесь для каждой фиксированной точки $x \in U$ естественно взять $\gamma = \gamma(x)$. В результате получим

$$v(x) = \varphi(x) + O(|\Delta(x)|^3), \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} \left(\Delta(x), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma(x)) \Delta(x) \right),$$

где $\varphi(x)$ есть первое приближение функции $v(x)$ в окрестности U тора Γ . Для фиксированного тора Γ функцию $\varphi(x)$ однозначно определяет заданная на Γ функция

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma),$$

значения которой при каждом $\gamma \in \Gamma$ есть симметрическая $n \times n$ -матрица. Функцию

$$\varphi(x) = (\Delta(x), \Phi(\gamma(x)) \Delta(x))$$

естественно назвать тороидальной квадратичной формой.

Проведем через точку γ поверхности Γ произвольную гладкую кривую β , задаваемую параметрически функцией $\beta(\tau)$. Дифференцируя очевидное тождество

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\beta(\tau)) \equiv 0 \text{ по } \tau, \text{ получим тождество } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\beta(\tau)) \frac{d\beta(\tau)}{d\tau} \equiv 0, \text{ означающее}$$

$$\Phi(\gamma)r(\gamma) \equiv 0, \quad (1.4)$$

где $r(\gamma)$ – произвольный вектор, касательный к тору Γ в точке γ .

Воспользовавшись параметризацией 2-тора, связанной с семейством решений $x(t, s)$, перейдем от функции $\Phi(\gamma)$, заданной на Γ , к функции

$$V(t, s) = \Phi(x(t, s)), \quad (1.5)$$

заданной на D . Равенства $x(t, s+1) = x(t, s)$, $x(T(s)+t, s) = x(t, \tau(s))$ позволяют распространить функцию $V(t, s)$ на всю плоскость $\Pi = \{(t, s) | -\infty < t < +\infty, -\infty < s < +\infty\}$. При этом должны выполняться условия

$$V(t, s+1) = V(t, s), \quad V(T(s)+t, s) = V(t, \tau(s)). \quad (1.6)$$

Равенство $\Phi(\gamma) = V(t(\gamma), s(\gamma))$ позволяет по функции $V(t, s)$ однозначно восстановить $\Phi(\gamma)$. При этом равенство (1.4), определяющее характер вырождения матриц $\Phi(\gamma)$, эквивалентно системе

$$V(t, s) \frac{\partial x(t, s)}{\partial t} \equiv 0, \quad V(t, s) \frac{\partial x(t, s)}{\partial s} \equiv 0,$$

которую, в свою очередь, можно записать в форме

$$V(t,s)y(t,s) = 0, \quad V(t,s)z(t,s) = 0, \quad (1.7)$$

где

$$y(t,s) = f(x(t,s)), \quad (1.8)$$

а $z(t,s)$ - решение системы

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F(t,s)z, \quad \text{где } F(t,s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t,s)) \quad (1.9)$$

с начальным условием $z(0,s) = \frac{d\alpha(s)}{ds}$. Установленное таким образом соответствие

функций $\Phi(\gamma)$ и $V(t,s)$ позволяет конструировать функции Ляпунова $v(x)$ с помощью функций $V(t,s)$ - элементов пространства Σ . Пространство Σ составляют функции $V(t,s)$, определенные и достаточно гладкие на плоскости Π со значениями - симметрическими $n \times n$ -матрицами, для которых справедливы условия (1.6), (1.7). Каждому элементу $V(t,s)$ пространства Σ может быть поставлена в соответствие функция

$$v(x) = (\Delta(x), V(t(\gamma(x)), s(\gamma(x)))\Delta(x)). \quad (1.10)$$

Положительная определенность (1.1) этой функции связана со следующим свойством P -положительной определенности элемента $V(t,s)$.

Рассмотрим матрицу $P_{y,z}$, задающую оператор проектирования на подпространство, ортогональное плоскости, натянутой на векторы y и z . Введем матрицу $P(t,s) = P_{y(t,s), z(t,s)}$, где $y(t,s)$ и $z(t,s)$ определены в (1.8), (1.9) и задают плоскость касательную к 2-тору Γ в точке $x(t,s)$.

Отметим, что

$$P_{y,z} = P_y - \frac{P_y z z^T P_y}{z^T P_y z}, \quad P_y = I - \frac{y y^T}{y^T y}, \quad r(P_{y,z}) = n - 2.$$

Определение 3. Матрицу $V(t,s)$ из Σ будем называть $P(t,s)$ -положительно определенной в точке (t,s) , если для любого вектора u такого, что $P(t,s)u \neq 0$, справедливо неравенство $(u, V(t,s)u) > 0$. Матрицу $V(t,s)$, являющуюся $P(t,s)$ -положительно определенной при любых $(t,s) \in \Pi$, будем называть P -положительно определенной.

В пространстве Σ рассмотрим конус матриц $\mathcal{K} = \{V \in \Sigma | V(t,s) \text{ - неотрицательно определенная при любых } (t,s) \in \Pi\}$ и множество $\mathcal{K}_p = \{V \in \Sigma | V \text{ - } P\text{-положительно определенная}\}$.

Отметим, что выбор $V(\cdot, \cdot)$ из \mathcal{K}_p гарантирует положительную определенность (1.1) для $v(x)$ из (1.10). Пусть $\lambda_1(t,s) \leq \lambda_2(t,s) \leq \dots \leq \lambda_n(t,s)$ - упорядоченный набор собственных значений матрицы $V(t,s)$. Условие $V \in \mathcal{K}_p$ означает, что $\lambda_1(t,s) = \lambda_2(t,s) = 0, \lambda_3(t,s) > 0$. При этом в качестве констант K_1 и K_2 неравенства (1.2) можно взять

$$K_1 = \min_D \lambda_3, \quad K_2 = \max_D \lambda_n.$$

Завершив анализ локального поведения функции Ляпунова $v(x)$ в окрестности тора Γ , перейдем к локальному описанию функции $Lv(x)$. Рассмотрим разложение функции $l(x) = Lv(x) = \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x}\right)^T f(x)$ в ряд Тейлора в точке $\gamma \in \Gamma$

$$l(x) = l(\gamma) + \left(\frac{\partial l}{\partial x}(\gamma), x - \gamma\right) + \frac{1}{2} \left(x - \gamma, \frac{\partial^2 l}{\partial x^2}(\gamma)(x - \gamma)\right) + O(|x - \gamma|^3). \quad (1.11)$$

Здесь

$$\left(\frac{\partial l}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^T f + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)^T f + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^T \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^T \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.13)$$

В разложении (1.11), благодаря тождествам $\frac{\partial v}{\partial x}(\gamma) \equiv 0$, $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma)\right)^T f(\gamma) \equiv 0$ (см. (1.1), (1.4), (1.12)), первым отличным от нуля будет квадратичный член. Положив в (1.11) $\Psi(\gamma) = 1/2 \frac{\partial^2 l}{\partial x^2}(\gamma)$, $\gamma = \gamma(x)$, получим

$$Lv(x) = \psi(x) + O(|\Delta(x)|^3), \quad (1.14)$$

где

$$\psi(x) = (\Delta(x), \Psi(\gamma(x))\Delta(x)). \quad (1.15)$$

Рассмотрим $Q(t,s) = \Psi(x(t,s))$. Для $Q(t,s)$ из (1.13) с учетом равенств

$$\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x(t,s))\right)^T f(x(t,s)) \equiv -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x(t,s))\right),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x(t,s)) = 2V(t,s), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x(t,s)) \equiv 0$$

следует представление

$$Q(t,s) = \frac{\partial V(t,s)}{\partial t} + F^T(t,s)V(t,s) + V(t,s)F(t,s). \quad (1.16)$$

Взяв в уравнении (1.3) наряду с разложением (1.14)-(1.16) функции $Lv(x)$ соответствующее разложение для функции $w(x)$

$$w(x) = 1/2 \left(\Delta(x), \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\gamma(x))\Delta(x) \right) + O(|\Delta(x)|^3), \quad W(t,s) = 1/2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x(t,s)),$$

получим соотношение

$$\frac{\partial V(t,s)}{\partial t} + F^T(t,s)V(t,s) + V(t,s)F(t,s) = -W(t,s). \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) устанавливает связь между матрицами V и W - основными локальными характеристиками функций $v(x)$ и $w(x)$ в окрестности тора Γ . При этом из *теоремы 1* вытекает следующий матричный критерий.

Теорема 2. Для Э-устойчивости тора Γ системы (*) необходимо, чтобы для любой, и достаточно, чтобы для некоторой матрицы $W(t,s) \in \mathcal{K}_p$ существовало решение $V(t,s) \in \mathcal{K}_p$ уравнения (1.17).

Доказательство необходимости по существу содержится в уже проведенных выкладках, приводящих от уравнения (1.3) к уравнению (1.17). Для доказательства

достаточности следует по матрице V - решению уравнения (1.17) - построить функцию $v(x)$ (см.(1.10)) и показать, что $v(x)$ и является ФЛ (удовлетворяет (1.3)) для системы (*) в малой окрестности U тора Γ .

2. Система первого приближения и ее P -устойчивость

Свяжем с семейством решений $x(t,s)$ уравнения (*) семейство систем первого приближения

$$\dot{u} = F(t,s)u, \quad F(t,s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t,s)). \quad (2.1)$$

Система (2.1) имеет решения

$$y(t,s) = \frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = f(x(t,s)) \quad \text{и} \quad z(t,s) = \frac{\partial x(t,s)}{\partial s},$$

являющиеся по t либо периодическими, либо квазипериодическими функциями. Поэтому точка покоя $u=0$ системы (2.1) не может быть экспоненциально устойчивой в традиционном смысле. Здесь рассматривается более слабый аналог такой устойчивости, определяемый с помощью проектора $P(t,s)$ (см. раздел 1), сопровождающего решения $y(t,s)$ и $z(t,s)$.

Определение 4. Тривиальное решение $u=0$ системы (2.1) будем называть экспоненциально P -устойчивым, если существуют такие $K>0$, $l>0$, что

$$\|P(t,s)u(t,s)\| \leq Ke^{-lt} \|P(0,s)u_0(s)\|$$

при любых $t>0$, $s \in [0,1]$ и любых начальных условиях $u(0,s)=u_0(s)$ решения $u(t,s)$ системы (2.1).

При этом для краткости систему (2.1) будем называть P -устойчивой. Понятие P -устойчивости было введено в [5] для периодического случая.

Оператор Ляпунова системы (2.1)

$$L_1 v(t,s,u) = \frac{\partial v}{\partial t}(t,s,u) + \left(\frac{\partial v}{\partial u}(t,s,u), F(t,s)u \right)$$

для $v(t,s,u)=u^T V(t,s)u$ (квадратичной формы, задаваемой матричной функцией $V(t,s)$) имеет вид

$$L_1(u^T V(t,s)u) = u^T \mathcal{L}[V]u, \quad (2.2)$$

где

$$\mathcal{L}[V] = \frac{\partial V}{\partial t} + F^T V + V F.$$

Отметим, что дифференциально-матричный оператор \mathcal{L} определял (см. (1.14)-(1.16)) аппроксимацию оператора Ляпунова L исходной системы (*).

Теорема 3. Пусть система (2.1) является P -устойчивой. Тогда:

(а) при любой матрице $W \in \mathcal{K}$ уравнение

$$\mathcal{L}[V] = -W \quad (2.3)$$

имеет в \mathcal{K} единственное решение - матрицу $V \in \mathcal{K}$;

(б) если $W \in \mathcal{K}_p$, то $V \in \mathcal{K}_p$.

Пусть для некоторой матрицы $W \in \mathcal{K}_p$ уравнение (2.3) имеет решение $V \in \mathcal{K}_p$. Тогда система (2.1) является P -устойчивой.

Доказательство. Необходимость. Для W – произвольного элемента \mathcal{K} – рассмотрим $V_\theta(\tau, s)$ – решение уравнения (2.3) на интервале $t \leq \tau \leq \theta$ с условием $V_\theta(\theta, s) = 0$.

Пусть $u(\tau, s)$ – решение уравнения (2.1) с условием $u(t, s) = u$. Из (2.2) и (2.3) следуют равенства

$$\frac{d}{d\tau} [u^T(\tau, s)V_\theta(\tau, s)u(\tau, s)] = u^T(\tau, s)\mathcal{L}[V_\theta(\tau, s)]u(\tau, s) = -u^T(\tau, s)W(\tau, s)u(\tau, s),$$

интегрируя которые по отрезку $[t, \theta]$, получим

$$u^T(\theta, s)V_\theta(\theta, s)u(\theta, s) - u^T(t, s)V_\theta(t, s)u(t, s) = \int_t^\theta u^T(\tau, s)W(\tau, s)u(\tau, s)d\tau.$$

Откуда, учитывая $u(t, s) = u$, $V_\theta(\theta, s) = 0$, имеем

$$u^T V_\theta(t, s) u = \int_t^\theta u^T(\tau, s) W(\tau, s) u(\tau, s) d\tau. \quad (2.4)$$

Интеграл в (2.4) монотонно возрастает по θ и, благодаря P -устойчивости (2.1), сходится. Это означает, что $V_\theta(t, s)$ по θ монотонно возрастает и имеет предел

$$V(t, s) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} V_\theta(t, s).$$

При этом из (2.4) следует

$$u^T V(t, s) u = \int_t^\infty u^T(\tau, s) W(\tau, s) u(\tau, s) d\tau. \quad (2.5)$$

Матрица $V(t, s)$ является решением уравнения (2.3). Докажем, что $V \in \Sigma$. Подставив в (2.5) поочередно $u(\tau, s) = y(\tau, s)$ и $u(\tau, s) = z(\tau, s)$, с учетом $W(\tau, s)y(\tau, s) = 0$ и $W(\tau, s)z(\tau, s) = 0$ сразу получим условия (1.7).

Пусть $u_1(\tau, s)$ – решение уравнения (2.1) на интервале $[t+T(s), \infty)$ с условием $u_1(t+T(s), s) = u$. Из (2.5) с последующей заменой $\tau = \xi + T(s)$, $W(\xi + T(s), s) = W(\xi, \tau(s))$, $u_1(\xi + T(s), s) = u(\xi, \tau(s))$ следует равенство

$$u^T V(t+T(s), s) u = \int_{t+T(s)}^\infty u_1^T(\tau, s) W(\tau, s) u_1(\tau, s) d\tau = u^T V(t, \tau(s)) u,$$

означающее, что $V(t+T(s), s) = V(t, \tau(s))$. Поскольку в (2.5) матрица W неотрицательно определенная, то и V будет также неотрицательно определенной матрицей. Таким образом, матрица $V \in \mathcal{K}$ и является решением (2.3).

Докажем его единственность. Пусть $V_1 \in \mathcal{K}$ и $V_2 \in \mathcal{K}$ – два решения уравнения (2.3). Разность $\Delta = V_1 - V_2$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}[\Delta] = 0$. Тогда из (2.2), (2.3) следует, что

$$u^T(\theta, s)\Delta(\theta, s)u(\theta, s) = u^T\Delta(t, s)u. \quad (2.6)$$

Левая часть (2.6), благодаря P -устойчивости (2.1), при $\theta \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Переходя в (2.6) к пределу, получим равенство $u^T\Delta(t, s)u = 0$, из которого следует $\Delta(t, s) = 0$. Доказательство утверждения (а) завершено.

Пусть $W \in \mathcal{K}_p$, тогда для любого u такого, что $P(t, s)u \neq 0$, выполняется неравенство $u^T W(t, s)u > 0$, откуда с учетом (2.5) следует неравенство $u^T V(t, s)u > 0$, означающее, что $V \in \mathcal{K}_p$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $V \in \mathcal{K}_p$ и $W \in \mathcal{K}_p$ связаны соотношением (2.3). Это означает, что для произвольного решения $u(t, s)$ уравнения (2.1) справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt} (u^T(t, s)V(t, s)u(t, s)) = -u^T(t, s)W(t, s)u(t, s). \quad (2.7)$$

Поскольку $V, W \in \mathcal{K}_p$, то найдутся такие $k_i > 0$ ($i=1,2,3$), что

$$k_1 V(t,s) \leq W(t,s), \quad (2.8)$$

$$k_2 P(t,s) \leq V(t,s) \leq k_3 P(t,s). \quad (2.9)$$

Из (2.7) и (2.8) следует неравенство

$$u^T(t,s)V(t,s)u(t,s) \leq e^{-k_1 t} u^T(0,s)W(0,s)u(0,s), \quad (2.10)$$

а из (2.9) и (2.10) - неравенство

$$\|P(t,s)u(t,s)\|^2 \leq (k_3/k_2)e^{-k_1 t} \|P(0,s)u(0,s)\|^2,$$

означающее P -устойчивость системы (2.1).

Из теорем 2 и 3 следует теорема об устойчивости по первому приближению.

Теорема 4. Для Э-устойчивости 2-тора Γ системы (*) необходима и достаточно P -устойчивость системы первого приближения (2.1).

3. Устойчивость 2-тора в трехмерном пространстве

Рассмотрим систему (*) при $n=3$. Матрица проектирования $P(t,s)$ имеет в этом случае ранг, равный единице, и может быть представлена в виде $P(t,s)=p(t,s)p^T(t,s)$, где $p(t,s)$ - вектор единичной длины, ортогональный векторам $y(t,s)$ и $z(t,s)$. При этом входящие в (2.3) матрицы $V, W \in \mathcal{K}_p$, также имея ранг, равный единице, могут быть выражены $V(t,s)=v(t,s)P(t,s)$, $W(t,s)=w(t,s)P(t,s)$ через скалярные функции $v(t,s)>0$ и $w(t,s)>0$ - собственные значения матриц $V(t,s)$ и $W(t,s)$.

В итоге, при $n=3$ решение матричного уравнения Ляпунова (2.3) на множестве \mathcal{K}_p сводится к решению скалярного уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,s) + a(t,s)v(t,s) = -w(t,s),$$

$$a(t,s) = p^T(t,s)[F^T(t,s) + F(t,s)]p(t,s) \quad (3.1)$$

с условиями

$$v(t,s+1) = v(t,s), \quad v(T(s)+t,s) = v(t,\tau(s)). \quad (3.2)$$

Общее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$v(t,s) = [c(s) - h(t,s)]/q(t,s), \quad (3.3)$$

где $q(t,s)$ и $h(t,s)$ - известные функции

$$q(t,s) = \exp\left(\int_0^t a(\tau,s)d\tau\right), \quad h(t,s) = \int_0^t q(\tau,s)w(\tau,s)d\tau, \quad (3.4)$$

а $c(s)$ - неизвестная функция, играющая для $v(t,s)$ роль начальной: $v(0,s)=c(s)$. Подставляя v из (3.3) в соотношения (3.2), получим для $c(s)$ функциональное уравнение

$$c(s)=q(T(s),s) \cdot c(\tau(s))+h(T(s),s) \quad (3.5)$$

с условием

$$c(s+1) = c(s). \quad (3.6)$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения (3.1) с краевыми

условиями (3.2) сведено к решению функционального уравнения (3.5) с условием (3.6).

Лемма. Для того, чтобы система (3.1), (3.2) имела решение $v(t,s) > 0$ при любой функции $w(t,s) > 0$, удовлетворяющей (3.2), необходимо и достаточно, чтобы при любом $s \in [0,1]$ выполнялось неравенство

$$\sigma(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T a(t,s) dt < 0. \quad (3.7)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть для $v > 0$ и $w > 0$ выполняется (3.1), (3.2). Разделив (3.1) на произведение $Tv(t,s)$ и проинтегрировав от 0 до T , получим

$$\frac{1}{T} \ln \frac{v(T,s)}{v(0,s)} + \frac{1}{T} \int_0^T a(t,s) dt = - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{w(t,s)}{v(t,s)} dt. \quad (3.8)$$

Из ограниченности $v(T,s)$ следует

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \frac{v(T,s)}{v(0,s)} = 0.$$

Поскольку функция $w(t,s)/v(t,s) > 0$ и является по t периодической или квазипериодической равномерно относительно $s \in [0,1]$, то

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{w(t,s)}{v(t,s)} dt > 0.$$

Переходя в (3.8) к пределу при $T \rightarrow \infty$, получим неравенство (3.7).

Достаточность. Рассмотрим пространство C непрерывных и периодических $(c(s+1)=c(s))$ на $(-\infty, +\infty)$ функций с нормой $\|c\| = \max_{[0,1]} |c(s)|$ и оператор A уравнения (3.5), переводящий C в C по правилу

$$Ac(s) = q(s)c(\tau(s)).$$

При этом уравнение (3.5) запишем в виде

$$c = Ac + h(s).$$

Здесь

$$q(s) = q(T(s), s), \quad h(s) = h(T(s), s).$$

Для A^m справедливо

$$A^m c = q_m(s)c(\tau^m(s)), \quad \|A^m\| = \|q_m\|,$$

где

$$q_m(s) = \prod_{k=0}^{m-1} q(\tau^k(s)), \quad \tau^k(s) = \tau[\tau^{k-1}(s)], \quad \tau^0(s) = s. \quad (3.9)$$

Выразим $q_m(s)$ через $a(t,s)$. Для этого рассмотрим последовательность функций

$$t_k(s) = T(\tau^{k-1}(s)), \quad T_k(s) = \sum_{i=1}^k t_i(s).$$

Здесь $t_k(s)$ – время, за которое траектория $x(t,s)$ совершает очередной k -й виток вокруг тора, а $T_k(s)$ – время, необходимое для прохождения по спирали, состоящей из k витков.

Из (3.9) и соотношений

$$q(\tau^k(s)) = \exp\left(\int_0^{t_{k+1}(s)} a(\tau, \tau^k(s)) d\tau\right) = \exp\left(\int_{T_k(s)}^{T_{k+1}(s)} a(\tau, s) d\tau\right)$$

следует, что

$$q_m(s) = \exp\left(\int_0^{T_m(s)} a(\tau, s) d\tau\right), \quad \|q_m(x)\|^{1/m} = e^{\lambda_m}, \quad \lambda_m = \max_{[0,1]} 1/m \int_0^{T_m(s)} a(\tau, s) d\tau.$$

Из соотношений $\rho(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A^m\|^{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|q_m(x)\|^{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{\lambda_m} = e^\lambda$ (где $\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m$) и условия (3.7) следует, что $\lambda < 0$ и $\rho(A) < 1$. Полученная оценка спектрального радиуса оператора A гарантирует существование единственного решения $c \in C$ системы (3.5), (3.6). При этом $c(s) = \lim_{m \rightarrow \infty} c_m(s) = \sum_{m=0}^{\infty} A^m h$, где последовательность функций $c_m(s)$ строится рекуррентно

$$c_{m+1}(s) = q(s)c_m(\tau(s)) + h(s), \quad c_0(s) \equiv 0. \quad (3.10)$$

Из положительности $q(s)$ и $h(s)$ следует, что предельная функция $c(s)$ удовлетворяет неравенству

$$c(s) > h(s). \quad (3.11)$$

Поскольку $h(t,s) \leq h(s)$ при $t \in [0, T(s)]$, то функция $v(t,s)$, связанная с найденной $c(x)$ равенством (3.3), является в D строго положительным решением системы (3.1), (3.2). Лемма доказана.

Из этой леммы и доказанных ранее теорем следует, что неравенство (3.7) представляет собою параметрический критерий, дающий необходимое и достаточное условие как Э-устойчивости 2-тора в трехмерном пространстве, так и P-устойчивости, соответствующей системы первого приближения.

Замечание. Можно показать, что

$$\sigma(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} 2/T \int_0^T \text{Tr} F(t,s) dt,$$

где Tr – след матрицы. При любом m справедливо

$$\sigma(s) = \sigma(\tau^m(s)). \quad (3.12)$$

Здесь удобно считать, что функция $\tau(s)$ отображает интервал $[0,1)$ в себя. В квазипериодическом случае [1] при любом s значения $\tau^m(s)$ ($m=1,2,\dots$) лежат всюду плотно на интервале $[0,1)$. При этом из (3.12) следует, что функция $\sigma(s)$ есть константа

$$\sigma(s) \equiv \sigma_0 = 2/S \int_{\Gamma} \text{div} f(x) dx,$$

где S – площадь тора Γ .

Неравенство $\sigma_0 < 0$ в качестве достаточного условия устойчивости 2-тора имеется в работах [9,10]. При этом в [10] случай $\sigma_0 = 0$ характеризуется как критический. Результаты данной работы, опирающиеся на МФЛ, позволяют заключить, что при $\sigma_0 = 0$ тор Э-устойчивым быть не может.

Если $x(t,s)$ есть цикл с периодом $T_N(s)$ (это означает, что $\tau^N(s) = s$, $\tau^{N+1}(s) = \tau(s), \dots$), то

$$\sigma(s) = 2/T_N(s) \int_0^{T_N(s)} \text{Tr} F(\tau,s) d\tau.$$

Для тора, целиком состоящего из циклов, функция $\sigma(s)$ может иметь непрерывный спектр значений (для каждого цикла – свое). Для тора, состоящего из конечного числа чередующихся устойчивых и неустойчивых циклов, $\sigma(s)$ – кусочно постоянна. При этом для s , соответствующего неустойчивому циклу, σ имеет изолированное значение, а на интервале величин s , отвечающих всем траекториям, сходящимся к одному циклу, является константой.

Критерий устойчивости тора $\max_{[0,1]} \sigma(s) < 0$ можно рассматривать, как обобщение известного интегрального признака Пуанкаре устойчивости цикла на плоскости [4].

4. Стабилизация

МФЛ является основным инструментом построения стабилизирующих управлений. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (4.1)$$

(где x - n -мерный вектор состояния, u - m -мерный вектор управления), имеющую при $u=0$ инвариантное тороидальное многообразие Γ , задаваемое однопараметрическим семейством решений $x(t, s)$. Требуется найти закон управления $u=u(x)$, при котором тор Γ , оставаясь инвариантным многообразием системы (4.1), является Э-устойчивым.

Будем предполагать, что данная задача разрешима, то есть тор Γ в системе (4.1) является стабилизируемым. В этом случае в качестве стабилизирующего регулятора можно взять обратную связь

$$u = H(t(\gamma(x)), s(\gamma(x)))\Delta(x),$$

где матрица коэффициентов обратной связи $H(t, s)$ находится из решения следующей задачи оптимальной стабилизации.

Рассмотрим для (4.1) в окрестности решения $x(t, s)$ систему первого приближения

$$\dot{z} = F_0(t, s)z + B(t, s)w, \quad (4.2)$$

$$F_0(t, s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, s), 0), \quad B(t, s) = \frac{\partial f}{\partial u}(x(t, s), 0)$$

с регулятором вида

$$w = H(t, s)z \quad (4.3)$$

и критерием

$$\int_0^{\infty} (z^T G z + w^T R w) dt \rightarrow \min. \quad (4.4)$$

Здесь $G \in \mathcal{K}_p$, $R(t, s)$ - симметрическая $m \times m$ -матрица, положительно определенная при всех $(t, s) \in \Pi$ и удовлетворяющая условию (1.6).

Систему (4.2) будем называть P -стабилизируемой, если при некоторой матрице $H(t, s)$ замкнутая система является P -устойчивой. Отметим, что P -стабилизируемость системы (4.2), благодаря *теореме 3*, эквивалентна стабилизируемости тора Γ в системе (4.1). Функция Ляпунова - Беллмана $v = z^T W(t, s)z$ задачи (4.2)-(4.4) определяется матрицей $W(t, s)$ - решением уравнения

$$\partial W / \partial t + F_0^T W + W F_0 - W B R^{-1} B^T W = -G.$$

При этом матрица H_0 оптимального регулятора имеет вид $H_0 = -R^{-1} B^T W$. Регулятор $w_0 = H_0(t, s)z$ стабилизирует систему (4.2). Одновременно регулятор $u_0 = H_0(t(\gamma(x)), s(\gamma(x)))\Delta(x)$ стабилизирует тор Γ . Можно показать, что регулятор u_0 в малой окрестности U тора Γ асимптотически эквивалентен регулятору, оптимизирующему критерий

$$\int_0^{\infty} [\Delta^T(x)G(t(\gamma(x)), s(\gamma(x)))\Delta(x) + u^T R(t(\gamma(x)), s(\gamma(x)))u] dt$$

для исходной нелинейной системы (4.1).

5. Пример

Рассмотрим в трехмерном пространстве переменных (x, y, z) 2-тор Γ , задаваемый уравнением

$$((x^2 + y^2)^{1/2} - 2)^2 + z^2 = r_0^2, \quad 0 < r_0 < 2.$$

В новых переменных r, φ, ψ , связанных со старыми соотношениями

$$x = (2 + r \cos \psi) \cos \varphi, \quad y = (2 + r \cos \psi) \sin \varphi, \quad z = r \sin \psi,$$

ториальная поверхность задается совсем просто

$$r = r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi.$$

Рассмотрим в новых переменных систему

$$\begin{aligned} \dot{r} &= f(r, \varphi, \psi), \\ \dot{\varphi} &= \alpha, \\ \dot{\psi} &= \beta, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где f – 2π -периодическая функция по переменным φ и ψ . Предполагается, что $f(r_0, \varphi, \psi) = 0$ при всех φ и ψ . Данные условия означают, что тор Γ является инвариантным многообразием для (5.1) и может быть параметризован семейством решений

$$r(t) \equiv r_0, \quad \varphi(t, s) = \alpha t + s, \quad \psi(t) = \beta t,$$

где роль одного из параметров играет время t , а другим является начальное состояние $\varphi(0, s) = s$.

Необходимым и достаточным условием Э-устойчивости тора Γ (см. (3.7)) будет неравенство

$$\max_s \gamma(s) < 0,$$

где

$$\gamma(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} 2/T \int_0^T \frac{\partial f}{\partial r}(r_0, s + \alpha t, \beta t) dt.$$

Пусть

$$f(r, \varphi, \psi) = (1/4)\mu(\varphi, \psi)r[(r/r_0)^2 - 1].$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r_0, \varphi, \psi) = 1/2\mu(\varphi, \psi)$$

и

$$\gamma(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T \mu(s + \alpha t, \beta t) dt.$$

Исследуем устойчивость тора для функции вида

$$\mu(\varphi, \psi) = \mu_0 + \mu_1 \sin(k\varphi) \sin(l\psi),$$

где k, l – натуральные числа. Здесь возможны два варианта:

- а) если $k\alpha \neq l\beta$, то $\gamma(s) = \mu_0$; б) если $k\alpha = l\beta$, то $\gamma(s) = \mu_0 - (\mu_1/2)\sin(ks)$.

При этом условия устойчивости имеют вид

$$\text{а) } \mu_0 < 0; \quad \text{б) } \mu_0 + |\mu_1|/2 < 0.$$

Как видим, рассматриваемая система наиболее устойчива при иррациональном значении числа вращения $\nu = \alpha/\beta$. В этом случае (имеем вариант «а» $\nu \neq l/k$) параметры μ_1 , k , l не влияют на устойчивость. При рациональном ν возможен резонансный случай (имеем вариант «б» $\nu = l/k$), для которого изменять μ_1 можно лишь в определенных пределах. В случаях резонанса свойство устойчивости перестает быть грубым. Сколь угодно малое изменение α и β разрушает резонанс, функция $\gamma(s)$ убывает скачком. При этом запас устойчивости системы резко возрастает.

В заключение автор выражает благодарность Э.Э. Шнолю за полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 00-01-00076).

Библиографический список

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.:Наука, 1978. 304с.
2. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир,1991. 368с.
3. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211с.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
5. Ряшко Л.Б. Об устойчивости стохастически возмущенных орбитальных движений // ПММ. 1996.Т.60, вып.4. С. 582.
6. Баширицева И.А., Исакова М.Г., Ряшко Л.Б. Асимптотическое разложение квазипотенциала для стохастически возмущенного нелинейного осциллятора // Дифференциальные уравнения. 1999. Т.35, № 12. С. 1.
7. Немыцкий В.В. О некоторых методах качественного исследования «в большом» многомерных автономных систем // Труды Московского математического общества. 1956. Т. 5. С. 455.
8. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М.: Наука, 1987. 304 с.
9. Неймарк Ю.И. Интегральные многообразия дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т.10, № 3. С. 321.
10. Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И. К вопросу об устойчивости квазипериодических движений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т.5, № 5. С. 824.
11. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф. Существование и устойчивость релаксационного тора // Успехи математических наук. 1989. Т.44, вып.3 (365). С. 161.
12. Колесов А.Ю. О существовании и устойчивости двумерного релаксационного тора // Математические заметки. 1994. Т. 56, вып. 6. С. 40.

Уральский государственный
университет

Поступила в редакцию 13.02.01
после доработки 15.05.01

LYAPUNOV FUNCTIONS TECHNIQUE FOR STABILITY ANALYSIS AND STABILIZATION OF INVARIANT 2-TORUS

L.B. Ryashko

Based on the introduced toroidally quadratic Lyapunov functions technique the exponential stability problem of an invariant 2-torus of nonlinear system is investigated. This problem is reduced to analysis of a boundary value decision problem for appropriate matrix differential Lyapunov equation. In connection with some projector P a concept of P -stability of linear system is introduced. Thus P -stability of the first approximation system is necessary and sufficient condition for 2-torus stability. In a three-dimensional case, the matrix differential Lyapunov equation degenerates into scalar one and its solution is reduced to the solution of some linear functional equation. From analysis of this functional equation the integral parametric stability criterion is deduced. The obtained results are used for construction of the stabilizing regulator.



Ряшко Лев Борисович - родился в 1953 году. Окончил Уральский госуниверситет (1975), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета, Соросовский доцент (1996, 1998). Область научных интересов - устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике.

E-mail: Lev.Ryashko@usu.ru



TOPOLOGICAL EXCITATIONS IN NON-HEISENBERG FERROMAGNETIC WITH BIQUADRATIC SPIN EXCHANGE INTERACTION*

Yu.P. Rybakov, R. Ochoa Jimenez

We consider one of the possible generalizations of the Heisenberg spin Hamiltonian suggested by Tyablikov, with biquadratic spin exchange interaction being included. We show that after averaging over spin coherent state the quasiclassical theory appears, with the energy functional containing some terms of the fourth order in derivatives, that implies the existence of the lower energy estimate through the Hopf topological index. Finally, we prove the existence of topological solitons for the model in question, the Kondrashov's imbedding theorem $W_2^2(\Omega) \Rightarrow C(\Omega)$ being used, with the restriction to axially-symmetric case.

Introduction

Many years ago L.D. Faddeev [1] suggested the S^2 nonlinear sigma-model with the aim to describe leptons as topological solitons endowed with the Hopf index. He constructed the Lagrangian of the model as the linear combination of the two possible invariants $\partial_\mu n^a \partial^\mu n^a$ and $f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$, where $f_{\mu\nu} = 2\varepsilon^{abc} \partial_\mu n^a \partial_\nu n^b n^c$, n^a being the 3D unit vector. The energy of the Faddeev's model is proved to be estimated from below through the Hopf index [2], that implies the existence of static 3D topological solitons interpreted as extended particles (leptons).

It seems attractive to find the microscopic model that gives the similar form of the Hamiltonian in quasiclassical approximation. We show that the afore-mentioned microscopic model could have the origin in the theory of magnetism, namely in the generalization of the Heisenberg theory suggested by Tyablikov [3]. We consider the Heisenberg – Tyablikov spin Hamiltonian in the quasiclassical limit and show the correspondent energy functional to include the Faddeev's term and also two other terms of the fourth order in derivatives. We study the structure of topological excitations in the model in question, with the restriction to static axially-symmetric solutions.

1. Generalized Heisenberg model in quasiclassical approximation

Let us consider the simple cubic lattice of atoms with spin S and spacing a . The most general spin exchange Hamiltonian of the system including the terms of even order in spin operators, we write the Hamiltonian of the isotropic magnetic with the account of the fourth order interaction in the form suggested by Tyablikov [3]:

* Статья написана по материалам доклада на Второй международной конференции «Фундаментальные проблемы физики», 9–14 октября 2000, Саратов, Россия.

$$\hat{H} = -1/2! \sum_{i,j} I_{ij}(\hat{S}_i, \hat{S}_j) - 1/4! \sum_{i,j,k,l} I_{ijkl}([\hat{S}_i, \hat{S}_j], [\hat{S}_k, \hat{S}_l]), \quad (1)$$

where \hat{S}_i stands for the spin operator of the i -th atom and I_{ij} , I_{ijkl} denote the exchange tensors of the second and fourth order respectively. Taking into account that the exchange interaction exponentially decreases in distance between atoms, we can simplify the expression (1) by summing over couples, triples and quadruples of nearest and next-to-nearest neighbors in the lattice.

With the restriction of the configurations depicted in the figure this implies the Hamiltonian of the following kind:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -1/2! \sum I_2(\hat{S}_k, \hat{S}_{k+1}) - 1/4! \sum I_4^{(1)}([\hat{S}_k, \hat{S}_{k+1}]^2 - \\ & - 1/4! \sum I_4^{(2)}([\hat{S}_{k-p}, \hat{S}_k], [\hat{S}_k, \hat{S}_{k+1}]) - 1/4! \sum I_4^{(3)}([\hat{S}_{k-p}, \hat{S}_k], [\hat{S}_{k+1}, \hat{S}_{k+2}])). \end{aligned} \quad (2)$$

Now we consider the quasiclassical approximation of the theory by averaging \hat{H} over spin coherent state $|\mathbf{n}\rangle$ parametrized by the unit magnetization vector \mathbf{n} . Using the well-known formulas [4]:

$$\langle \hat{S}_k \rangle = -S\mathbf{n}(\mathbf{r}_k), \quad \mathbf{n}_k = \mathbf{n}(t, \mathbf{r}_k), \quad (3)$$

$$\langle \hat{S}_i^\alpha \hat{S}_k^\beta \rangle = S^2 n_i^\alpha n_k^\beta, \text{ for } i \neq k, \quad (4)$$

$$\langle \hat{S}_k^\alpha \hat{S}_k^\beta \rangle = (1/2) S \delta^{\alpha\beta} + S(S^{-1/2}) n^\alpha n^\beta - i/2 \epsilon^{\alpha\beta\gamma} S n^\gamma, \quad (5)$$

where α, β, γ numerate the cartesian components of the spin and magnetization vectors, we find the excitation energy of the form:

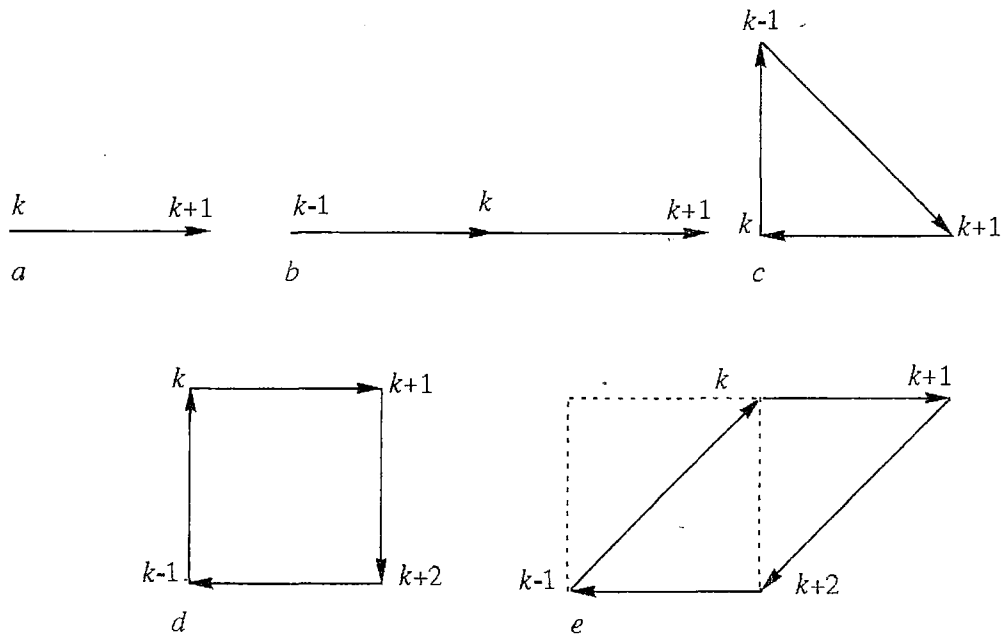


Fig. Considered configurations of atoms

$$E = -1/2! \sum \tilde{I}_2(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+1}) - 1/2! \sum \tilde{I}_4^{(1)}(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+1})^2 - \quad (6)$$

$$-1/4! \sum \tilde{I}_4^{(2)}([\mathbf{n}_{k-p}, \mathbf{n}_k], [\mathbf{n}_{k+1}, \mathbf{n}_k]) - 1/4! \sum \tilde{I}_4^{(3)}([\mathbf{n}_{k-p}, \mathbf{n}_k], [\mathbf{n}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+2}]).$$

In the forthcoming points we intend to consider the continuous limit of the theory. To this end we put

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r} \pm \mathbf{a},$$

$$\mathbf{r}_{k-1} = \mathbf{r} \pm \mathbf{a}', \quad \mathbf{r}_{k+2} = \mathbf{r} + \mathbf{a} + \mathbf{a}' \dots,$$

with the restrictions:

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}'| = a, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0. \quad (7)$$

Using the Taylor expansion up to the fourth order in a , we get

$$\mathbf{n}_{k+1} \approx (1 + d + (1/2)d^2 + (1/6)d^3 + (1/24)d^4)\mathbf{n}_k, \quad (8)$$

where $d=(\mathbf{a}, \nabla)$ symbolizes the displacement operator in \mathbf{a} -th direction. Similar expressions can be written down for $\mathbf{n}_{k-p}, \mathbf{n}_{k+2}, \dots$ with d being replaced by $d'=(\mathbf{a}', \nabla)$ or by $d+d'$. Now we consider two typical combinations arising in the energy:

$$A = \sum_k (\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+1}), \quad (9)$$

$$B = \sum_k ([\mathbf{n}_{k-p}, \mathbf{n}_k], [\mathbf{n}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+2}]). \quad (10)$$

Within the scope of the long-wave approximation, with the characteristic size of the localized excitations surpassing the spacing a , one can replace the sums in (9) and (10) by the corresponding integrals, thus yielding

$$A = 1/(2a^3) \int d^3x \{ - (d'\mathbf{n})^2 + 1/12 (d^2\mathbf{n})^2 \}, \quad (11)$$

$$B = 1/a^3 \int d^3x \{ - (d'\mathbf{n})^2 + 1/2 (d^2\mathbf{n}, d^2\mathbf{n}) + (1/12) (d^2\mathbf{n})^2 - \quad (12)$$

$$- (d'\mathbf{n}, d\mathbf{n})^2 + 1/2 (d\mathbf{n})^2 (d'\mathbf{n})^2 + 1/4 (d'\mathbf{n})^4 \},$$

where the integrations by parts have been performed and simple identities resulting from $\mathbf{n}^2=1$, have been taken into account:

$$(\mathbf{n}, d\mathbf{n}) = 0, \quad (d\mathbf{n})^2 = -(\mathbf{n}, d^2\mathbf{n}).$$

The final expression for the energy functional can be simplified, due to symmetry properties of the cubic lattice, through the use of averaging over directions \mathbf{a} and \mathbf{a}' , with the conditions (7) being imposed. The corresponding technique builds on the fact that the vectors \mathbf{a} and \mathbf{a}' under the conditions (7) give the natural parametrization of the $SO(3)$ group. This can be easily checked via introducing Euler angles θ, ϕ, ψ due to substitutions:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{a}'] &= a^2 (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta), \\ a_1/a &= \cos\psi \cos\phi + \sin\psi \sin\phi \cos\theta, \\ a_2/a &= \cos\psi \sin\phi - \sin\psi \sin\phi \cos\theta, \\ a_3/a &= \sin\psi \sin\theta, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mathbf{a}' = -\partial\mathbf{a}/\partial\psi.$$

Using (13) and the standard $SO(3)$ measure

$$d\mu = 1/(8\pi^2)\sin\theta d\theta d\psi d\phi,$$

one obtains the following useful $SO(3)$ averages denoted by the upper bar:

$$\begin{aligned}\overline{a_i a_j} &= (a^2/3)\delta_{ij}, \\ \overline{a_i a_j a_k a_l} &= (a^4/15)(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj}), \\ \overline{a_i a_j a'_k a'_l} &= (a^4/30)(4\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{kj}).\end{aligned}$$

Using the technique in question, one gets

$$\begin{aligned}\overline{(d\mathbf{n})^2} &= (a^2/3)(\partial_i \mathbf{n})^2, \\ \overline{(d\mathbf{n})^4} &= (a^4/15)[(\partial_i \mathbf{n})^4 + 2(\partial_i \mathbf{n} \partial_j \mathbf{n})^2], \\ \overline{(d\mathbf{n})^2 (d'\mathbf{n})^2} &= (a^4/15)[2(\partial_i \mathbf{n})^4 - (\partial_i \mathbf{n} \partial_j \mathbf{n})^2], \\ \overline{(d\mathbf{n}, d'\mathbf{n})^2} &= (a^4/30)[3(\partial_i \mathbf{n} \partial_j \mathbf{n})^2 - (\partial_i \mathbf{n})^4], \\ \overline{(d^2 \mathbf{n})^2} &= (a^4/15)[(\Delta \mathbf{n})^2 + 2(\partial_i \partial_j \mathbf{n})^2], \\ \overline{(d^2 \mathbf{n}, d'^2 \mathbf{n})} &= (a^4/15)[2(\Delta \mathbf{n})^2 - (\partial_i \partial_j \mathbf{n})^2].\end{aligned}\tag{14}$$

Inserting (14) into (11) and (12), one deduces the functionals corresponding to the contributions of the nearest neighbors:

$$A' = 1/(6a) \int d^3x \{ -(\partial_i \mathbf{n})^2 + (a^2/20)(\Delta \mathbf{n})^2 \},\tag{15}$$

$$B' = 1/(3a) \int d^3x \{ -(\partial_i \mathbf{n})^2 + (a^2/20)(3(\Delta \mathbf{n})^2 + (\partial_i \mathbf{n})^4 + 6[\partial_i \mathbf{n}, \partial_j \mathbf{n}]^2) \}.\tag{16}$$

The contributions A'' , B'' of the next – to – nearest neighbors are of the same structure but with the other numerical coefficients. In particular, the desired term A'' can be obtained by substitution $a \rightarrow 2^{1/2}a$, that corresponds to the length of the square diagonal, thus yielding

$$A'' = 1/(6 \cdot 2^{1/2}a) \int d^3x \{ -(\partial_i \mathbf{n})^2 + (a^2/10)(\Delta \mathbf{n})^2 \}.\tag{17}$$

If one takes into account that the sign of the second exchange integral can be alternative, depending on the distance between the atoms, it may happen that the resulting energy functional takes the form

$$E = \langle \hat{H} \rangle = (1/2)I \int d^3x \{ (\partial_i \mathbf{n})^2 + \mu[\mathbf{n}, \Delta \mathbf{n}]^2 + \nu(\partial_i \mathbf{n})^4 + \lambda[\partial_i \mathbf{n}, \partial_j \mathbf{n}]^2 \},\tag{18}$$

with μ , ν , λ being non-negative coefficients and I effective exchange constant.

2. Structure of 3D topological excitations in the Heisenberg - Tyablikov ferromagnetic

Now we intend to search for the 3D excitations in the model with the energy functional (18) supplemented by the interaction with an external magnetic field oriented along the z -axis. It means that we search for the \mathbf{n} -configurations satisfying the boundary condition

$$n^i(\infty) = \delta^{i3}. \quad (19)$$

Due to the condition (19) the \mathbf{n} -configurations can be endowed with the Hopf index Q_H generating the third homotopic group of the sphere $\pi_3(S^2)=\mathbb{Z}$. As can be seen from (18), the energy functional contains the Faddeev's term, the one with the coupling constant λ , which is estimated from below by $|Q_H|^{3/4}$ [2]. The models with the energy contribution from the terms $(\Delta\mathbf{n})^2$ and $(\partial_t\mathbf{n})^4$ were studied in [8-9]. The existence of axially-symmetric solitons with $Q_H \neq 0$ was proven for the Faddeev model by one of the authors [5]. The aim of the present work is to extend the existence theorem proven in [5] to the case $\mu > 0, \nu > 0$. We use polar representation of the \mathbf{n} -field:

$$n^1 + in^2 = \sin\beta e^{i\gamma}, \quad n^3 = \cos\beta,$$

and search for $O(2)$ -invariant configurations, i.e. axially-symmetric with reflection $z \rightarrow -z$ invariance. In cylindrical coordinates ρ, α, z the \mathbf{n} -field reads:

$$\beta = \beta(\rho, z), \gamma = m\alpha + v(\rho, z), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (20)$$

where $\beta(\rho, -z) = \beta(\rho, z), v(\rho, -z) = -v(\rho, z)$. Inserting (20) into energy functional, one gets

$$\begin{aligned} E[\beta, v] = & \pi I \int_0^\infty \rho d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} dz \{ (\nabla\beta)^2 + \sin^2\beta(m^2/\rho^2 + (\nabla v)^2) + \sigma(1 - \cos\beta) + \\ & + \mu((\Delta\beta - \sin\beta \cos\beta(m^2/\rho^2 + (\nabla v)^2))^2 + (2\cos\beta(\nabla\beta, \nabla v) + \sin\beta\Delta v)^2) + \\ & + \nu((\nabla\beta)^2 + \sin^2\beta(m^2/\rho^2 + (\nabla v)^2))^2 + 2\lambda\sin^2\beta((\nabla\beta)^2((\nabla v)^2 + m^2/\rho^2) - (\nabla\beta, \nabla v)^2) \}, \end{aligned} \quad (21)$$

with the constant σ being proportional to the strength of the external magnetic field. It is worth-while to remark that the surface $\beta=\text{const}$ is isomorphic to torus T^2 that implies the boundary conditions:

$$\beta(\rho=0) = \beta(\rho, \pm\infty) = \beta(\infty, z) = 0.$$

As for the angular function v , it has the simplest representation in toroidal coordinates $\xi \in [-\pi, \pi], \eta \in [0, \infty)$:

$$v = n\xi + u(\xi, \eta), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (22)$$

where u is odd periodic function of ξ and the coordinate transformation reads:

$$\rho = c\Delta\sinh\eta, \quad z = c\Delta\sin\xi, \quad \Delta = (\cosh\eta - \cos\xi)^{-1},$$

with c being scale parameter. The configuration (20), (22) is endowed with the Hopf index $Q_H = mn$.

Now we proceed to prove the existence of such configurations with nontrivial Q_H . To this end we use the direct variational method. First we pay our attention to the degeneracy of the functional (21) at the points where $\sin\beta=0$, that is for $\eta=0$, where $\beta=0$, and for $\eta=\infty$, where $\beta=\pi$. That is why to apply the variational method we ought to exclude the degeneracy domains $\Omega_i, i=1,2,3$, namely

$$\Omega_1 = \{\eta > T \rightarrow \infty\}, \quad \Omega_2 = \{\rho < \delta_1 \rightarrow 0\}, \quad \Omega_3 = \{r > R \rightarrow \infty\}. \quad (23)$$

Therefore we define new functional $E(\Omega)$, with the domain $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3)$, and construct the minimizing sequences $\beta_n, v_n \in W_2^2(\Omega)$ which weakly converge in the Sobolev space $W_2^2(\Omega)$. Now it should be noticed that the functional $E(\Omega)$ is lower weakly semicontinuous due to Kondrashov's compact imbedding theorem [6]: $W_2^2(\Omega) \rightharpoonup C(\bar{\Omega})$, $\nabla v_n, \nabla \beta_n \in W_2^1(\Omega) \rightharpoonup L_4(\Omega)$, which is valid for the axially-symmetric configurations with $\dim \Omega = 2$. Now to complete the proof we should extend the domain Ω to \mathbb{R}^3 and use the continuity of the functional $E(\Omega)$, which is evident in view of the exponential decreasing of β at infinity. Now we specify the behavior of the functions β and v in the degeneracy domains (23).

1. In the domain Ω_1 we suppose $\eta \rightarrow \infty, \pi - \beta \rightarrow 0, u \rightarrow 0, v \rightarrow n\xi$. In this domain we obtain the solutions

$$\pi - \beta = O(e^{-ln\eta}), \quad v = n\xi + O(\sin\xi e^{-\eta}),$$

thus implying the estimate of the energy

$$E(\Omega_1) = O\left(\int_T^\infty d\eta e^{-2ln\eta}\right) = O(e^{-2lnT}) = O(\delta^2), \quad (24)$$

with $\delta = e^{-lnT}$ being defined from the condition $\delta \geq \pi - \beta = O(e^{-ln\eta})$.

2. In the domain Ω_2 we have $\rho \rightarrow 0$ and $\beta \rightarrow 0$. In this case we introduce new functions

$$A = \beta \cos v, \quad B = \beta \sin v,$$

that permits to separate the variables and get the asymptotic behavior:

$$A = O(\rho^{lnl} e^{-\chi|z|}), \quad B = O(\rho^{lnl} e^{-\chi|z|}), \quad (25)$$

with

$$\chi = |\operatorname{Re}[(1 - (1 - 2\mu\sigma)^{1/2})/(2\mu)]^{1/2}|. \quad (26)$$

In virtue of (25) we obtain the energy estimate

$$E(\Omega_2) = O\left(\int_0^{\delta_1} \rho^{2lnl-1} d\rho\right) = O(\delta_1^{2lnl}) = O(\delta^2), \quad (27)$$

with $\delta = \delta_1^{lnl}$ being defined from the condition $\delta \geq \beta = O(\rho^{lnl})$.

3. In the domain Ω_3 we use polar coordinates r, θ by putting $\tilde{r} \rightarrow \infty, \xi = 2\cos\theta(a/r), \beta \rightarrow 0$. As well as in the previous case, we introduce the functions A and B and obtain the following asymptotic solutions:

$$A = O(\sin^m \theta e^{-\chi r/r}), \quad B = O(\sin^m \theta e^{-\chi r/r} \cos \theta), \quad (28)$$

with the same χ as in (26). From (28) we deduce the energy estimate

$$E(\Omega_3) = O\left(\int_R^\infty e^{-2\chi r} dr\right) = O(e^{-2\chi R}) = O(\delta^2), \quad (29)$$

with $e^{-\chi R} = \delta$, as $\delta \geq \beta = O(e^{-\chi r/r}) = O(e^{-\chi r})$ for $r \geq R$.

Summing the estimates (24), (27) and (29), we conclude that $E(\Omega) \rightarrow E$ as $\delta \rightarrow 0, \delta_1 \rightarrow 0, R \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty$. Thus we prove the existence of static 3D topological excitations in the Heisenberg - Tyablikov ferromagnetic and suggest the microscopic base for the Faddeev S^2 nonlinear sigma-model.

The work is financially supported by RFBR grant № 98-02-17471 and the grant № 01.01.31 of the program «Universities of Russia».

References

1. *Faddeev L.D.* //Proc. Acad. Sci. USSR. 1973. Vol. 210. P. 807.
2. *Vakulenko A.F., Kapitanski L.V.* // Proc. Acad. Sci. USSR. 1979. Vol. 246. P. 840.
3. *Tyablikov S.V.* Methods of quantum theory of magnetism. Moscow: Nauka, 1975. 528 p.
4. *Perelomov A.M.* Generalized coherent states and their applications. Moscow: Nauka, 1987. 272 p.
5. *Rybakov Y. P.* // Vestnik of Peoples' Friendship Univ., Math. 1995. №. 2(2). P. 35.
6. *Ladyjenskaya O. A.* Boundary value problems in mathematical physics. Moscow: Nauka, 1973. 408 p.
7. *Kosevich A.M., Ivanov B.A. and Kovalev A.S.* Nonlinear magnetization waves: dynamic and topological solitons. Kiev: Naukova dumka, 1983. 192 p.
8. *Bogolubsky I.L.* // Phys. Lett. A. 1998. Vol. 126. P. 511.
9. *Enz U.* // J. Math. Phys. 1977. Vol. 18. P. 347.

*Department of Theoretical Physics,
Peoples' Friendship University of Russia*

Поступила в редакцию 26.01.01

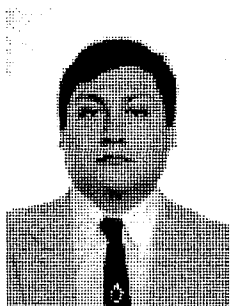
ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ НЕГЕЙЗЕНБЕРГОВСКИХ ФЕРРОМАГНЕТИКОВ С БИКВАДРАТИЧНЫМ СПИНОВЫМ ОБМЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Ю.П. Рыбаков, R. Ochoa Jimenez

Рассматривается одно из возможных обобщений спинового гамильтониана Гейзенберга, предложенное Тябликовым и включающее биквадратичное спиновое обменное взаимодействие. Показывается, что в результате усреднения по спиновому когерентному состоянию возникает квазиклассическая теория, в которой функционал энергии содержит члены четвертой степени по производным и оценивается снизу через топологический индекс Хопфа. С помощью теоремы вложения Кондрашова $W_2^2(\Omega) \ni C(\Omega)$ для данной модели доказывается существование аксиально-симметричных топологических солитонов.



Rybakov Yuri Petrovich was born in Moscow in 1939. He has graduated from Moscow State University in 1962 and obtained a degree of Doctor of Science (1995) from Joint Institute for Nuclear Research (Dubna). From 1996 he is a head of the Theoretical Physics Department of Peoples' Friendship University of Russia. The field of his scientific interests includes nonlinear field theory, stability of solitons, gravitational theory. E-mail: rybakov@sci.pfu.edu.ru



Ochoa Jimenez Rosendo was born in 1973 in Peru. He has graduated from the Peoples' Friendship University of Russia in 1997. From 1997 he is a Ph.D. student of the Theoretical Physics Department of the Peoples' Friendship University of Russia. The field of his interests includes nonlinear field theory, the theory of solitons. E-mail: rochoa@sci.pfu.edu.ru



О ДИНАМИКЕ ЧАСТИЦ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ*

С.Н. Гурбатов, Ф. Майнарди, А.Ю. Мошков, Ф. Тампиери

Рассматривается движение частиц в нестационарном течении, описываемом одномерным уравнением Бюргерса. Найдены точные решения для движения частиц в случае изначально линейного профиля течения. Эти решения позволяют описать динамику и распределение плотности частиц в пилообразном периодическом течении.

Движение пассивных частиц в турбулентном течении в настоящее время является предметом для множества физических и инженерных приложений в экологии, океанологии и физике атмосферы. Этот вопрос начал широко изучаться после известных работ Бассета [1, 2] и Батчелора [3].

Существенную роль в решении проблемы играет выбор модели течения. Как правило, при анализе используется модель несжимаемого течения с дельта-коррелированной во времени скоростью [4, 5]. Однако интерес представляет и случай сжимаемого течения, которое реализуется, например, при рассмотрении эволюции плавучей примеси [6]. Для таких течений характерным является эффект локализации примеси.

В данной статье обсуждается динамика частиц в нестационарном течении, поэтому использована модель течения, отражающая затухание поля, описываемая, в нашем случае, одномерным уравнением Бюргерса [7], учитывающим конкуренцию нелинейности и диссипации при эволюции начального поля. Рассматриваемая модель движения была представлена в работах [8, 9], где было получено уравнение, описывающее динамику частиц в нестационарном течении Бюргерса. При исследовании эффекта локализации частиц в таком течении возникают два конкурирующих механизма – затухание поля скорости и инерциальное движение частиц.

Нами изучена динамика одиночной частицы в нестационарном течении с линейным профилем скорости. Получены точные решения и исследованы их асимптотики при различных соотношениях данных эффектов. На основе полученных точных решений рассматривается движение частицы в периодическом поле. В качестве модели используется пилообразное начальное поле, поведение которого отражает основные свойства периодических гармонических полей на стадии развитой турбулентности. Рассмотрена происходящая локализация частиц в окрестности разрыва и получены параметры колебаний.

* Статья написана по материалам доклада на Второй международной конференции «Фундаментальные проблемы физики», 9–14 октября 2000, Саратов, Россия.

Изученная динамика одиночной частицы в данном поле позволяет найти распределение плотности частиц. Получено распределение плотности в окрестности разрыва в случае сильного трения. Показано, что, несмотря на затухание скорости течения, происходит локализация частиц у разрыва поля.

1. Базовые уравнения поля жидкости и движения частицы

Обсудим вначале эволюцию нестационарного турбулентного течения. Рассмотрим в качестве модели поля течение, описываемое одномерным уравнением Бюргера

$$\partial U/\partial t + U\partial U/\partial x = \nu\partial^2 U/\partial x^2. \quad (1.1)$$

Предположим, что начальное распределение $U(x,0)$ имеет характерную амплитуду σ_0 и пространственный масштаб l_0 . Тогда можно ввести характерные времена проявления нелинейных t_n и диссипативных t_d эффектов

$$t_n = l_0/\sigma_0, \quad t_d = l_0^2/\nu. \quad (1.2)$$

Отношение данных времен показывает соотношение нелинейной трансформации и затухания в процессе эволюции начального поля

$$R = t_d/t_n = l_0\sigma_0/\nu \quad (1.3)$$

и совпадает с числом Рейнольдса. В случае $\nu=0$ уравнение (1.1) переходит в уравнение, описывающее свободное движение частиц

$$dU/dt = \partial U/\partial t + U\partial U/\partial x = 0. \quad (1.4)$$

При $\nu \rightarrow 0$ решение уравнения Бюргера может быть также представлено в виде свободного движения слипающихся частиц. Исключив многозначность из решения (1.4), получим однозначное решение уравнения Бюргера с разрывами [7]. В случае больших чисел Рейнольдса диссипацию необходимо учитывать лишь в небольшой окрестности разрывов поля, в остальной же области поведение частиц в выражениях (1.1) и (1.4) одинаково, как и их решения.

При получении уравнения движения частицы будем учитывать влияние двух основных сил – инерции и трения. Сила инерции, действующая на частицу с характерным размером a и плотностью ρ , движущуюся в жидкости с плотностью ρ_f и полем скорости $U(x,t)$, выражается [10] как

$$F_e = M_f((1+C_M)dU(x,t)/dt - C_M dV(t)/dt), \quad (1.5)$$

где $M_f = (4/3)\pi a^3 \rho_f$, C_M – коэффициент присоединенной массы. Для того чтобы учесть пространственное изменение $U(x,t)$, необходимо сделать предположение о том, что радиус a частицы много меньше характерных пространственных масштабов изменения поля. Сила трения задается формулой Стокса

$$F_d = -\mu'[V(t) - U(x(t),t)], \quad (1.6)$$

где μ' – коэффициент трения, зависящий от кинематической вязкости ν .

После несложных преобразований уравнение движения частицы в поле жидкости $U(x,t)$ можно записать как [8, 9]

$$dV(t)/dt = \delta dU(x(t),t)/dt - \mu'[V(t) - U(x(t),t)], \quad (1.7)$$

где $x(t)$ – координата частицы, $V(t) = dx/dt$ – скорость частицы,

$$\mu = \mu' / [(\rho 4\pi a^3 / 3)(1 + C_M \rho_f / \rho)] - \quad (1.8)$$

эффективный коэффициент трения и

$$\delta = \rho_f (1 + C_M) / [\rho (1 + C_M \rho_f / \rho)] - \quad (1.9)$$

эффективный коэффициент присоединенной массы ($0 < \delta < 3$).

Далее, следуя Фунгу и Перкинсу [11], ограничимся случаем $\delta=0$, то есть пренебрежем влиянием инерциальных сил, считая частицы достаточно тяжелыми. Тогда можно ввести время релаксации

$$t_r = 1/\mu, \quad (1.10)$$

характеризуемое уменьшением начальной разности скоростей частицы и поля $V_0 - U(x,0)$ в e раз. В данной работе, главным образом, рассматривается случай с большим числом Рейнольдса ($R \gg 1$). Отношение времен релаксации и нелинейности

$$\xi = t_r / t_n = \sigma / (\mu l_0) \quad (1.11)$$

характеризует относительное влияние процесса нелинейного затухания поля скорости (1.1) и релаксации скорости частицы (1.7). При $\xi \gg 1$ мы имеем слабое трение, и поле скорости $U(x,t)$ меняется быстрее, чем скорость частицы релаксирует к скорости течения. Соответственно, при $\xi \ll 1$ происходит быстрое выравнивание скоростей течения и частицы.

2. Точные решения уравнения движения частиц

Известно, что заменой Хопфа – Коула нелинейное уравнение (1.1) может быть приведено к линейному уравнению диффузии, позволяющему найти точное решение (1.1). Тем не менее, использование такого решения в (1.7) приводит к очень сложному интегродифференциальному уравнению.

Получим частное решение уравнения Бюргерса. Легко показать, что при начальном условии

$$U(x,0) = (x - x_0)m, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1)$$

уравнение (1.1) имеет решение

$$U(x,t) = (x - x_0)m / (1 + mt). \quad (2.2)$$

Заметим, что это решение справедливо для любых v и не зависит от v . В случае $m > 0$ крутизна профиля уменьшается со временем, при $mt \gg 1$ производная U'_x не зависит от начальной крутизны поля и тогда $U(x,t) = (x - x_0)/t$. При $m < 0$ крутизна профиля растет со временем и при $t = 1/|m|$ становится бесконечной. При больших числах Рейнольдса можно использовать (2.2) для нахождения решения уравнения Бюргерса в окрестности траекторий частиц жидкости с лагранжевой координатой x_0 при произвольном начальном профиле $U(x,0)$. Тогда в окрестности этой точки начальные условия могут быть линеаризованы и представлены в виде (2.1). Пользуясь (2.2) и (2.3), можно ввести локальное время нелинейности

$$t_n = 1/|m| = 1/|U'_0(x_0)|. \quad (2.3)$$

Таким образом, решение (2.2) описывает локальную эволюцию изначально линейного поля Бюргерса. Подставив решение (2.2) в уравнение движения частиц (1.7), получим линейное уравнение для координаты частицы

$$d^2y/dt^2 + \mu'[dy/dt - my/(1+mt)] = 0, \quad (2.4)$$

где $y(t)=x(t)-x_0$. Считаем, что начальные условия к уравнению (2.4)

$$y|_{t=t_0} = y_0, \quad dy/dt|_{t=t_0} \equiv dx/dt|_{t=t_0} = V_0 \quad (2.5)$$

заданы при $t=t_0$. Используя (2.4) и (2.5), получим следующие выражения для ускорения $a(t)$, скорости $V(t)$ и координаты $y(t)$ частицы:

$$a(t, y_0) = \mu[my_0 - V_0(1+mt_0)]\exp(-\mu(t-t_0))/(1+mt), \quad (2.6)$$

$$V(t, y_0) = V_0 + (\mu/m)[my_0 - V_0(1+mt_0)]\exp(\mu t_0 + \mu/m) \times \\ \times [\text{Ei}(-(\mu/m)(1+mt)) - \text{Ei}(-(\mu/m)(1+mt_0))], \quad (2.7)$$

$$y(t, y_0) = [(my_0 - V_0(1+mt_0))/m]\exp(-\mu(t-t_0)) + V(t, y_0)(1+mt)/m. \quad (2.8)$$

Здесь $\text{Ei}(x)$ – функция Эйлера (экспоненциальный интеграл)

$$\text{Ei}(-x) = \int_{-\infty}^{-x} (\exp(t)/t) dt, \quad (2.9)$$

имеющая следующие асимптотики

$$\text{Ei}(-x) = C + \ln x \quad \text{при } x \ll 1, \quad (2.10)$$

$$\text{Ei}(-x) = (\exp(-x)/-x)(1 - 1/x) \quad \text{при } x \gg 1,$$

где C – постоянная Эйлера. Используя асимптотики (2.10), можно найти поведение частиц в случае сильного ($\xi = t/t_n = m/\mu \ll 1$) и слабого ($\xi \gg 1$) трения.

3. Динамика частиц в линейном профиле

Исследуем динамику частиц в нестационарном линейном профиле при разных соотношениях между характеристиками времен релаксации и затухания, считая, что в выражении (2.5) $t_0=0$.

Рассмотрим случай сильного трения. Используя асимптотики (2.10) в выражениях (2.7)–(2.8) при $\xi \ll 1$, получим выражения для скорости и координаты при $t \ll t_r$ в первом приближении по ξ

$$V(t, y_0) = V_0 - \xi(my_0 - V_0) + (my_0 - V_0)(1+\xi)\mu t, \quad (3.1)$$

$$y(t, y_0) = y_0 + V_0 t - \xi(my_0 - V_0)t + \frac{1}{2}(my_0 - V_0)(1+\xi)\mu t^2. \quad (3.2)$$

При малых временах частица движется с постоянным ускорением под действием силы, линейно пропорциональной начальной разности скоростей частицы и течения, что обусловлено сильным влиянием трения при слабом временном изменении поля. При больших временах ($t \gg t_r$) асимптотики (2.10) приводят к следующим выражениям:

$$V(t, y_0) = my_0 - \xi(my_0 - V_0), \quad (3.3)$$

$$y(t, y_0) = y_0 - \xi(y_0 - V_0/m) + (my_0 - \xi(my_0 - V_0))t. \quad (3.4)$$

Легко показать, что в данном случае движение частицы при $t \rightarrow \infty$ будет эквивалентно движению лагранжевой частицы потока, имеющей при $t=0$ координату

$y_1 = y_0 - \xi(y_0 - V_0/m)$, то есть происходит переход на стационарный режим движения с постоянной скоростью, равной скорости течения. Если частица изначально неподвижна, то есть $V_0 = 0$, то ее скорость в стационарном режиме движения несколько меньше (на величину $\xi m y_0$), чем скорость частицы течения, имеющей ту же начальную координату.

Рассмотрим ситуацию со слабым трением $\xi \gg 1$. Начальный этап движения (при $t \ll t_n$) в этом случае, как и в режиме сильного трения, является линейным, то есть движение происходит с постоянным ускорением

$$V(t, y_0) = V_0 + \exp(\xi^{-1})(m y_0 - V_0) \mu t \approx V_0 + (m y_0 - V_0) \mu t, \quad (3.5)$$

$$y(t, y_0) = y_0 + V_0 t + \frac{1}{2} (m y_0 - V_0) \mu t^2. \quad (3.6)$$

Однако данный линейный режим движения ограничен характерным временем t_n (в отличие от случая $\xi \ll 1$), зависящим от нестационарности течения. Затем начинает сказываться затухание течения и при $t_n < t < t_r$ движение происходит уже существенно нелинейным образом

$$V(t, y_0) = V_0 + \xi^{-1} \exp(\xi^{-1})(m y_0 - V_0) \ln(1 + \mu t), \quad (3.7)$$

$$y(t, y_0) = (y_0 - V_0/m) \exp(-\mu t) + (V_0/m)(1 + \mu t) + \xi^{-1} \exp(\xi^{-1})(y_0 - V_0/m) \ln(1 + \mu t). \quad (3.8)$$

При $t \gg t_r$ начинает происходить выравнивание влияния нелинейных и вязкостных эффектов и также, как и в случае с сильным трением, происходит выход на стационарный режим движения

$$V(t, y_0) = V_0 - [(m y_0 - V_0) \exp(-\mu t) / (1 + \mu t)] (1 - \xi / (1 + \mu t)) - \xi^{-1} \exp(\xi^{-1}) (C + \ln(\xi^{-1})) (m y_0 - V_0), \quad (3.9)$$

$$y(t, y_0) \approx V_0/m + V_0 t + \xi^{-1} (\ln(\xi) - C) (m y_0 - V_0). \quad (3.10)$$

Однако скорость частицы $V(t, y_0) \rightarrow V_0 + \xi^{-1} (\ln(\xi) - C) (m y_0 - V_0)$ слабо изменяется по сравнению с V_0 и существенно отличается от скорости потока. Так, если частица имеет нулевую начальную скорость, то при $t = t_r$ ее скорость меньше скорости течения в точке первоначального нахождения частицы в $\xi / \ln(\xi)$ раз, а при $t \gg t_r$ – в $\xi / (\ln(\xi) - C) \gg 1$.

На рис. 1 представлены результаты численного моделирования – временные зависимости скорости и координаты лагранжевой частицы потока и исследуемой частицы в случае слабого ($m=10, \mu=1$) и сильного трения ($m=10, \mu=100$).

Рассмотрим движение частицы в поле $U(x, t)$, имеющем при $t=0$ отрицательный градиент $U(x, 0) = -m(x - x_0), m > 0$. Градиент такого поля обращается в бесконечность за конечное время $t = t_n = 1/m$.

В случае сильного трения ($\xi \ll 1$) существуют два различных этапа движения. Сначала преобладают члены, отвечающие за выравнивание скоростей частицы и потока, поэтому при $t_r \ll t < t_n$ получим

$$V(t, y_0) = -m y_0 - \xi (m y_0 + V_0), \quad (3.11)$$

$$y(t, y_0) = y_0 + \xi (y_0 + V_0/m) - (m y_0 + \xi (m y_0 + V_0)) t, \quad (3.12)$$

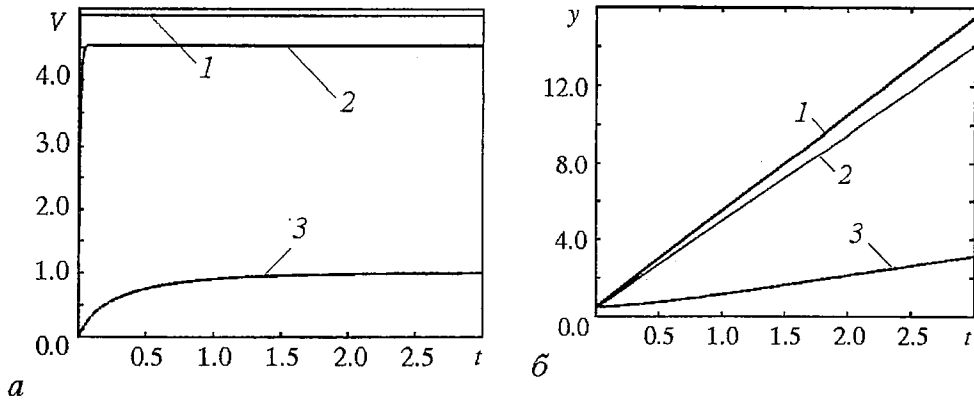


Рис. 1. Зависимость скорости (а) и координаты (б) частицы от времени при разных ξ : 1 – лагранжева частица; 2 – $\xi = 0.1$; 3 – $\xi = 10.0$

что совпадает с уже рассмотренным случаем выхода на стационарный режим движения с выравниванием скорости частицы и течения.

Затем, при временах, близких к образованию разрывов $t \rightarrow t_n$, имеем следующие выражения для скорости и координаты:

$$V(t, y_0)|_{t \rightarrow t_n} = -m y_0 - \xi(m y_0 + V_0) + \xi^{-1} \exp(-\xi^{-1})(m y_0 + \xi(m y_0 + V_0)) \ln(1 - mt), \quad (3.13)$$

$$y(t, y_0)|_{t \rightarrow t_n} = (y_0 + V_0/m) \exp(-\xi^{-1}) \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

Необходимо отметить, что неограниченное увеличение скорости в выражении (3.13), тем не менее, не приводит к неограниченному увеличению координаты. Координата частицы при $t \rightarrow t_n$ равна координате разрыва.

При слабом трении ($\xi \gg 1$) получим для движения частицы

$$V(t, y_0) = V_0 + \xi^{-1} \exp(-\xi^{-1})(m y_0 + V_0) \ln(1 - mt), \quad (3.15)$$

$$y(t, y_0) = (y_0 + V_0/m) \exp(-\mu t) + V_0(t - 1/m) - \xi^{-1} \exp(-\xi^{-1})(y_0 + V_0/m)(1 - mt) \ln(1 - mt). \quad (3.16)$$

В данном случае логарифмическая особенность в изменении скорости частицы также не приводит к неограниченному изменению координаты, как и в случае сильного трения. Одинаковая асимптотика при $t \rightarrow t_n$ в выражениях (3.13) и (3.15) позволяет говорить о преимущественном влиянии нелинейности в момент образования разрывов как в случае сильного, так и в случае слабого трения.

4. Движение частиц в поле с пилообразным начальным профилем

Рассмотрим движение частицы в течении с пилообразным начальным профилем

$$U(x, 0) = m(x - x_0), \quad (4.1)$$

где $x_0 = (2i+1)l$ при $2il < x < 2(i+1)l$, i – целое число. Временная эволюция такого течения представлена на рис. 2. Данное начальное условие выбрано потому, что именно к такому профилю стремится с течением времени произвольное периодическое начальное возмущение [7]. На стадии развитых разрывов для такого поля

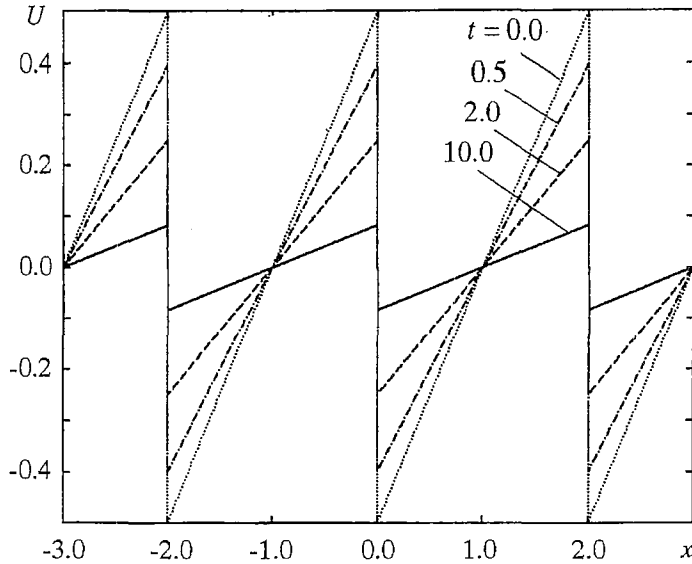


Рис. 2. Временная эволюция пилообразного поля с периодом $l=1$ и начальным градиентом $m=0.5$

характерны следующие свойства: поле имеет пилообразную форму с неподвижными нулями и разрывами, градиент поля между разрывами монотонно уменьшается как $1/t$.

Для описания динамики частицы удобно определять ее положение в системе координат y , связанной с нулем поля x_0 , и использовать формулы (2.6)–(2.8). Найдем движение частицы, первый раз попадающей в разрыв, и покажем происходящую локализацию ее колебаний в окрестности разрыва для дальнейших итераций. Пусть в начальный момент времени $t=0$ частица неподвижна и в этой системе координат имеет координату z_0 .

Сначала рассмотрим случай с сильным трением ($\xi \ll 1$). Частица достигает разрыва в момент времени

$$t_0 = (l - z_0)/(mz_0), \quad (4.2)$$

имея скорость $V_0 = mz_0$, равную скорости лагранжевой частицы потока. При $t > t_0$, учитывая (2.6)–(2.8), движение частицы можно описывать следующими формулами:

$$a(t) = -2m \exp(-\mu(t - t_0))/(1 + mt), \quad (4.3)$$

$$V(t) = -mz_0 + 2mz_0 \exp(-\mu(t - t_0)), \quad (4.4)$$

$$y(t) = -l + (m/\mu)z_0[-mt + 2(1 - \exp(-\mu t))]. \quad (4.5)$$

Пользуясь выражениями (4.3)–(4.5), найдем основные характеристики первого колебания частицы. Максимальное отклонение частицы от разрыва (пространственная амплитуда колебания) происходит при $t = \tau^* = (1/\mu) \ln 2$ и пропорционально ее начальной координате $\Delta y = (m/\mu)z_0(1 - \ln 2)$. Для определения времени возвращения частицы в разрыв τ получаем трансцендентное уравнение

$$-\mu\tau + 2(1 - \exp(-\mu\tau)) = 0. \quad (4.6)$$

Его численное решение $-\mu\tau = 1.5936$. Заметим, что τ не зависит от начальной координаты и одинаково для всех частиц. Скорость частицы в момент возвращения в разрыв

$$V|_{t=\tau} = -mz_0(1-2\exp(-\mu\tau)) \approx -0.5936mz_0. \quad (4.7)$$

Заметим, что абсолютное значение (4.7) существенно меньше, чем $V_0=mz_0$, то есть скорость колебаний частицы существенно уменьшается за итерацию.

Получить простые выражения для параметров следующих колебаний частицы не удастся, однако это можно сделать в приближении квазистатической модели поля (рис. 3), считая изменение амплитуды разрыва U_0 малым за период. Покажем, что это действительно так, оценив отношение амплитуд разрывов поля до и после первого прохождения частицей разрыва

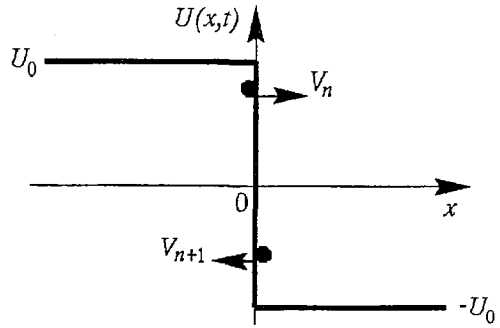


Рис. 3. Квазистатическая модель поля

$$U(0, t_n)/U(0, t_n+\tau) = (1+m(t_n+\tau))/(1+mt_n) = (2+\xi\mu\tau)/2 \rightarrow 1. \quad (4.8)$$

$\xi < 1$

В рамках квазистатической модели движение частицы описывается уравнением

$$d^2x/dt^2 + \mu(dx/dt + U_0 \operatorname{sgn}(x)) = 0, \quad \text{где } \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Пусть частица изначально попадает в разрыв со скоростью V_n и возвращается в него, имея скорость V_{n+1} (см. рис. 3). Для такой итерации в рамках используемой модели можно получить следующее уравнение связи скоростей частицы до и после разрыва

$$(V_{n+1} - V_n)/U_0 = \ln((V_{n+1} + U_0)/(V_n + U_0)). \quad (4.10)$$

Учитывая (4.7)–(4.8), можно считать, что приближение $|V_n|, |V_{n+1}| < U_0$ выполняется, начиная уже с первой итерации. При этом условии, разложив (4.10) в ряд, получаем

$$V_{n+1} = -V_n(1 - \frac{2}{3} V_n/U_0). \quad (4.11)$$

Тогда для времени и пространственной амплитуды n -ой итерации соответственно имеем

$$\tau_n = 2V_n/(\mu U_0), \quad (4.12)$$

$$\Delta x_n = V_n^2/(2\mu U_0). \quad (4.13)$$

На основе этих выражений можно найти зависимости абсолютного значения амплитуды скорости, пространственной амплитуды и времени от номера итерации (считая, что для нулевой итерации $V_n = U_0 = mz_0$)

$$|V_n(n)| = mz_0/(1 + \frac{2}{3}n), \quad (4.14)$$

$$\tau_n = 2/(\mu(1 + \frac{2}{3}n)), \quad (4.15)$$

$$|\Delta x_n| = \xi|z_0|/(2(1 + \frac{2}{3}n)^2). \quad (4.16)$$

Видно, что $\Delta x_n < \Delta x_{n+1}$, то есть действительно происходит локализация частицы в окрестности разрыва. Амплитуда колебаний спадает с увеличением номера итерации и определяется лишь начальной координатой частицы. Интерес

представляет временная зависимость данных характеристик. Используя зависимость амплитуды разрыва от времени (2.2) и полагая $dV/dt = (|V_{n+1}| - |V_n|)/\tau_n$, получим

$$|V| = m|z_0| \exp(-1/3 \mu t), \quad (4.17)$$

$$\tau = (4/\mu)(1+mt) \exp(-1/3 \mu t), \quad (4.18)$$

$$|\Delta x| = \xi|z_0|(1+mt) \exp(-2/3 \mu t). \quad (4.19)$$

Здесь V , τ , Δx – характерная скорость, период возврата и амплитуда колебаний в момент времени t . Таким образом, в случае с сильным трением происходит

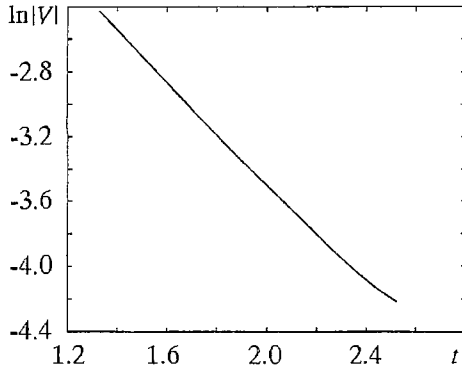


Рис. 4. Зависимость модуля скорости колебаний от времени

локализация движения частицы в окрестности разрыва, причем параметры данных колебаний экспоненциально затухают во времени. В подтверждение этому на рис. 4 приведена зависимость логарифма амплитуды скорости колебаний от времени при следующих параметрах: $m=0.1$, $\xi=0.02$. Как и ожидалось, она является линейной. Отметим, что данные оценки для параметров колебаний частицы (4.17)–(4.19) можно было получить и с использованием точных выражений (2.6)–(2.8) для движения частицы.

5. Распределение плотности частиц в пилообразном поле

Рассмотрим задачу об эволюции распределения плотности изначально неподвижной примеси, взвешенной в турбулентном поле с начальными условиями (4.1).

Считая начальное распределение плотности однородным, можно ввести плотность частиц по Лагранжу

$$\rho(t, y_0) = \rho_0 [dx(t, y_0)/dy_0]^{-1} \quad (5.1)$$

и Эйлера

$$\rho_E(t, x) = \rho[t, y_0(t, x)]. \quad (5.2)$$

Здесь $y_0(t, x)$ – лагранжева координата частиц, приходящих в точку x в момент времени t , являющаяся решением уравнения $x(t, y_0) = x$. Можно ввести функцию $J(t, y_0) = |dx(t, y_0)/dy_0|$, равную якобиану преобразования от лагранжевых к эйлеровым переменным и описывающую расходимость потока частиц. Пока $J(t, y_0) > 0$, траектории частиц не пересекаются и плотность находится точно.

Вначале обратимся к случаю сильного трения ($\xi \ll 1$). Пользуясь выражением (3.4), можно легко получить точное решение для плотности $\rho(t, y_0)$ в окрестности лагранжевой частицы до ее первого попадания в разрыв

$$\rho(t, y_0) = \rho_0 / (1 + mt). \quad (5.3)$$

Используя результаты, полученные в разделе 4 для первой итерации частицы, можно показать, что уже после первого попадания частицы в разрыв функция $J(t, y_0)$ при некотором t может равняться нулю для любого y_0 . Таким образом, движение частиц будет происходить с перемешиванием, и плотность необходимо определять по Эйлеру.

Рассматриваем распределение плотности в окрестности разрыва, поскольку ясно, что с течением времени там концентрируется все больше частиц. Предполагаем, что все частицы из интервала начальных координат $[y_0, y_0 + \Delta y_0]$ попадают в интервал Δx и равномерно распределены на нем. Пользуясь результатами раздела 4, оценим пространственную амплитуду колебания частицы как

$$\Delta x(t, y_0) = \begin{cases} \Delta x_0 y_0^2 / l^2 (1+mt) \exp(-2/3 \mu(t-t_0)), & t > t_0, \\ 0, & t < t_0, \end{cases} \quad (5.4)$$

где $\Delta x_0 = 1/2 \xi l$, t_0 – время, за которое частица достигает разрыва (см. формулу (4.2)). Тогда можно выделить два характерных масштаба колебаний

$$\Delta x_{\max}(t, y^* = l/(1+mt)) = \Delta x_0 / (1+mt) \quad (5.5)$$

и

$$\Delta x_{\min}(t, l) = \Delta x_0 (1+mt) \exp(-2/3 \mu t). \quad (5.6)$$

Масштаб Δx_{\max} соответствует колебанию частицы, первый раз попавшей в разрыв. Величина Δx_{\min} отвечает за колебания частицы с начальной координатой l , которая стартует непосредственно из разрыва. Здесь предполагается, что она набирает скорость, равную амплитуде разрыва, практически мгновенно. Таким образом, характерная пространственная ширина распределения плотности будет определяться частицами, совершающими первое колебание у разрыва, поскольку пространственная амплитуда уже попавших туда частиц затухает достаточно быстро. На рис. 5 показаны траектории частиц с различными начальными координатами, попадающими в разрыв ($x=0$) в разное время при следующих параметрах: $m=1$, $\xi=0.1$. Хорошо видно, что максимальной амплитудой колебания обладает именно частица, совершающая первое колебание.

Для определенности будем интегрироваться плотностью в окрестности разрыва с координатой $x=0$. Полагая распределение частиц равномерным на интервале Δx , определяем плотность в точке с координатой x , отстоящей от разрыва на Δx , следующим образом:

$$\rho(t, x) = \int_{y^*}^{y(t,x)} (\Delta x(t, y_0))^{-1} dy_0. \quad (5.7)$$

Подставив выражение (5.7) в (5.4) и сделав замену $z(t, x) = l/y_0(t, x)$, получим

$$\rho(t, x) = 3l/(1+mt) [\exp(2/3 \xi^{-1}(1+mt-z(t, x))) - 1], \quad (5.8)$$

где $z(t, x)$ – решение уравнения

$$x = \Delta x(t, z) = (\Delta x_{\min}/z^2) \exp(-2/3 \xi^{-1}(1-z)). \quad (5.9)$$

Нетрудно оценить и пределы изменения этой переменной $z \in [1, 1+mt]$.

Вначале рассчитаем плотность частиц в интервале $x < \Delta x_{\min}$. Поскольку данный масштаб колебаний является минимально возможным, необходимо учитывать все частицы, совершающие колебания, то есть положить $z=1$. В итоге имеем

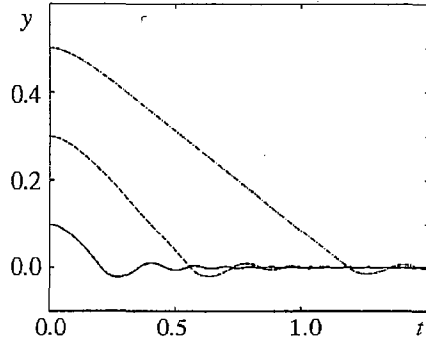


Рис. 5. Траектории частиц с различными начальными координатами

$$\rho_{\max}(t,x) = 3/(1+mt)\exp(2/3\mu t), \quad x < \Delta x_{\min}(t). \quad (5.10)$$

Можно найти общее число частиц в этом интервале окрестности разрыва, где плотность максимальна

$$M_t = \rho_{\max}(t,x)\Delta x_{\min} = 3/2 \xi l \ll l. \quad (5.11)$$

Данная величина является постоянной, то есть при постоянном уменьшении интервала Δx_{\min} (см. формулу (5.6)) число частиц в нем остается постоянным.

Далее рассмотрим распределение плотности в небольшой окрестности данного интервала. Для этого, полагая $z(t,x) \rightarrow 1$, найдем его из уравнения (5.9) и подставим в выражение (5.8)

$$\rho(t,x) = 3/2 \xi l/x, \quad \Delta x_{\min}(t) < x < \Delta x_{\max}(t). \quad (5.12)$$

Таким образом, получаем пространственное распределение плотности, не зависящее от времени. Поскольку ограничение Δx_{\min} уменьшается быстрее, чем Δx_{\max} , то область применения данного универсального распределения растет со временем. В итоге можно получить качественную картину пространственного распределения плотности (рис. 6).

Таким образом, в соответствии с полученными результатами происходит локализация примеси в окрестности разрывов и уменьшение характерного пространственного масштаба распределения плотности у разрыва. В случае, когда трение превышает начальные градиенты поля ($\xi < 1$), плотность в окрестности разрыва с течением времени возрастает плавно, что подтверждается приведенными выше фактами. Если же $\xi > 1$, то плотность примеси изменяется со временем в пространстве более сложно. Далее приведем результаты численного моделирования на начальной стадии, когда в окрестности разрыва присутствует не больше трех потоков. На рис. 7 показана эволюция функции $\rho(x,t)/\rho_0$ (распределения плотности) у разрыва с координатой $x=0$ в случае слабого трения ($\mu=0.1$, $m=1$) и $\rho_0=1$. Налицо существование нескольких пространственных масштабов на начальных этапах развития. Это связано с тем, что частицы, попадающие в разрыв в более поздние моменты времени, обладают большей пространственной амплитудой колебания. Поскольку при наибольшем отклонении от разрыва скорость частиц минимальна, то в этих точках частицы находятся большую часть периода по времени. Это объясняет пространственное увеличение и наличие боковых максимумов у распределения плотности. За центральный максимум отвечают частицы, первыми попавшие в разрыв с малыми пространственными амплитудами. По мере уменьшения градиентов поля затухание

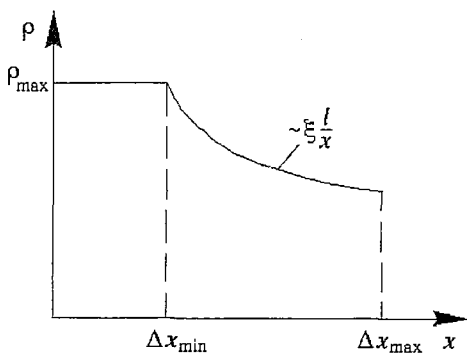


Рис. 6. Распределение плотности в окрестности разрыва

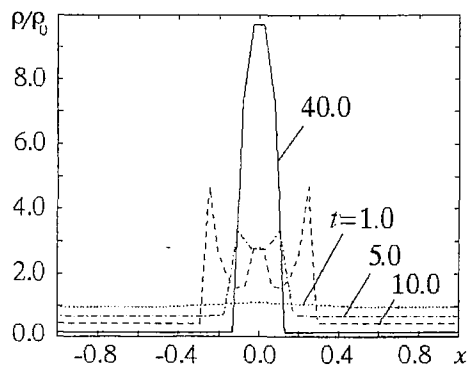


Рис. 7. Временная эволюция распределения плотности у разрыва

пространственных амплитуд колебаний частиц под влиянием трения становится все больше, и на больших временах в распределении остается один максимум.

Заключение

Таким образом, на основе полученных решений можно утверждать о происходящей локализации частиц в окрестности разрыва. Несмотря на нелинейное затухание поля, частицы группируются у разрыва, поскольку амплитуда их колебаний экспоненциально спадает. Найденные параметры колебаний частиц в случае сильного трения позволяют получить распределение плотности в окрестности разрыва.

Данная работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 99-02-18354, INTAS № 97-11134 и проекта «Университеты России».

Библиографический список

1. Basset A.B. A treatise on hydrodynamics. Vol. 2. Cambridge: Deighton Bell, 1888.
2. Basset A.B. On the descent of a sphere in a viscous liquid // Quart. J. Math. 1910. Vol. 41. P. 369.
3. Batchelor G.K. An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press, 1967.
4. Кляцкин В.И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975.
5. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
6. Жукова И.С., Саичев А.И. Локализация сгустков плавучих частиц на поверхности турбулентного потока // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 4. С. 624.
7. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990.
8. Angelucci G., Grella E., Mainardi F. and Tampieri F. On passive transport in a Burgers flow. Pre-print, Narosa Publ. House, New Delhi, India, 1993. 16 p.
9. Mainardi F., Pironi P. and Tampieri F. A numerical approach to the generalized Basset problem for a sphere accelerating in a viscous fluid, Proceedings of CFD 95. 1995. Vol. II. P. 105.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. М.: Наука, 1988, том VI.
11. Fung J.C.H. and Perkins R.J. Particle trajectories in turbulent flow generated by true-varying random Fourier modes // Advances in Turbulence 2. / Eds H.H. Fernholz and H.E. Friedler. Berlin: Springer Verlag, 1989. P. 322.

Нижегородский государственный
университет
Университет Болоньи, Италия
Институт Науки Атмосферы
и Океана Итальянского Национального
Исследовательского Совета

Поступила в редакцию 9.01.01

DYNAMICS OF IMPURITIES IN UNSTEADY FLOW

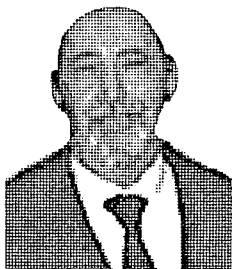
S. Gurbatov, F. Mainardi, A. Moshkov, F. Tampieri

We discuss the motion of an impurity advected by nonstationary flow provided by the Burgers equation. Exact analytical solutions for motion of particles in the linear profile of Burgers flow are found. These solutions permit to find the dynamics and density evolution of particles in periodic saw-toothed flow.



Гурбатов Сергей Николаевич – родился в 1950 году. Окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1972). После окончания аспирантуры в 1977 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, в 1985 году – диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Профессор кафедры акустики (1988). Лауреат Государственной премии (1997). С 1986 года заведует кафедрой акустики, с 1994 года – декан радиофизического факультета ННГУ. Область научных интересов: теория нелинейных волн, акустическая турбулентность, статистическая радиофизика. Имеет более 150 научных публикаций и 3 монографии.

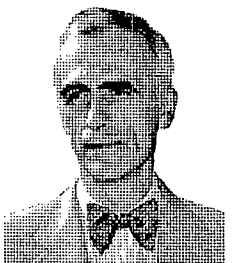
E-mail: gurb@rf.unn.runnet.ru



Майнард Франческо – родился в 1942 году. Профессор математической физики в Университете Болоньи. Область научных интересов: асимптотические методы в прикладной математике, интегральные преобразования, специальные функции и фрактальный анализ, математические аспекты распространения волн и диффузии, негауссовы стохастические процессы. Автор монографии «Wave Propagation in Viscoelastic Media» (London, 1982), соавтор книги «Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics» (Springer-Verlag, Wien, 1997). Имеет целый ряд публикаций по прикладной математике, фрактальному анализу, стохастическим процессам, распространению волн.



Мошков Александр Юрьевич – родился в 1978 году. Магистрант 2-го года обучения ННГУ, радиофизический факультет, кафедра акустики. Получил степень бакалавра радиофизики по направлению «Радиофизика» и диплом с отличием (1999). Стипендиат Американского акустического общества (1999). Область научных интересов: нелинейная акустика и турбулентность, движение в турбулентных полях. Имеет 3 научные публикации.



Тампиери Франческо – родился в 1949 году. Получил ученую степень по физике (1972) в Университете Болоньи. Опубликовал большое количество работ по различным вопросам физики атмосферы, турбулентности, гидродинамики, работая в институтах Итальянского Национального Исследовательского Совета (Institutes of the Italian National Research Council (CNR)). Область научных интересов: атмосферные граничные слои, взаимодействие и разделение волн, стохастические модели Лагранжа, динамика частиц в течениях различных моделей, вопросы устойчивости и дисперсии. Возглавляет Институт Науки Атмосферы и Океана Итальянского Национального Исследовательского Совета (Institute of Atmospheric and Oceanic Sciences of CNR).



ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН*

*И.Ю. Грязнова, С.Н. Гурбатов, С.А. Егорычев, В.В. Курин,
Л.М. Кустов, Н.В. Прончатов–Рубцов*

В работе описаны модельные физические эксперименты по исследованию акустических полей, генерируемых нелинейными излучателями звука, в мелководных волноводах Пекериса. С помощью фурье-анализа комплексной амплитуды акустического сигнала, принимаемого равномерно перемещающимся приемником, изучены некоторые особенности формирования модового состава низкочастотного поля волновода. Экспериментально продемонстрирована возможность селективного возбуждения мод путем изменения угла ориентации параметрического излучателя в вертикальной плоскости. Приведены результаты лабораторных исследований полей параметрического излучателя в гидроакустическом волноводе с переменной по трассе глубиной. Исследовано влияние неровных границ мелководных волнопроводов на процесс формирования угловых характеристик параметрических излучателей звука.

Введение

Задачи освоения и исследования Мирового Океана и внутренних водоемов решаются с широким использованием средств гидроакустики. Основным элементом исследовательской гидроакустической аппаратуры являются электроакустические преобразователи.

Использование нелинейного взаимодействия звуковых волн при их распространении в воде позволяет совместить, казалось бы, несовместимые вещи – обеспечить высоконаправленное низкочастотное излучение при относительно небольших размерах излучающей системы. Такие устройства, формирующие диаграмму направленности по низкой частоте, называются параметрическими антеннами [1].

В случае параметрических излучателей (ПИ) число длин Λ волны разностной частоты, укладывающихся на длине l_z области взаимодействия, очень велико, и угловая ширина диаграммы в реальных устройствах обычно не превышает нескольких градусов.

Уникальные возможности параметрических излучателей создавать высоконаправленное низкочастотное излучение при относительно небольших габаритах

* Статья написана по материалам доклада на Второй международной конференции «Фундаментальные проблемы физики», 9–14 октября 2000, Саратов, Россия.

излучающих систем позволяют эффективно применять их для дистанционной диагностики ограниченных и неоднородных сред [2], а также использовать их для исследования рассеяния звука дискретными неоднородностями, находящимися в воде, в весьма широкой полосе частот [3]. Применение ПИ расширяет экспериментальные возможности дистанционных исследований при сверхдальней низкочастотной акустической диагностике дискретных и плавных неоднородностей, располагающихся как в толще воды, так и в поверхностных слоях дна Мирового Океана, для определения статистических характеристик ветрового волнения [2] на поверхности, а также изучения параметров морских осадков с целью поиска полезных ископаемых [4].

Интерес к исследованиям физики параметрического возбуждения звука в волноводных условиях связан также с возможностью использования ПИ для формирования заданной модовой структуры поля в океанических волноводах [5, 6]. Экспериментальных работ по этой теме известно крайне мало и до настоящего времени все работы, связанные с изучением полей, возбуждаемых параметрическими излучателями звука, сводились к исследованию лишь только амплитудных зависимостей принимаемого сигнала [7, 8].

Ограничивающие поверхности в области взаимодействия первичных волн накачки ПИ существенно изменяют их характеристики. Известно, что при распространении волны разностной частоты в мелководных океанических волноводах существенно искажается угловое распределение низкочастотного излучения [6]. Вид этого углового распределения зависит не только от свойств отражающих границ [9], но и от модового состава поля на горизонте приема [10]. Усложнение угловых распределений волны разностной частоты (ВРЧ) в мелководных волноводах по сравнению с характеристиками излучения тех же самых излучателей в «безграничном» пространстве связано с фазовыми сбоями между первичными волнами накачки и низкочастотным излучением.

Весьма перспективным направлением является применение ПИ при изучении акустических полей в волноводах, моделирующих шельфовую зону Мирового Океана, когда параметры волноводов зависят не только от глубины, но и от горизонтальных координат [11]. Использование ПИ позволяет детально исследовать характер распространения звука в подобных неоднородных средах, а также определять параметры самого волноводного слоя [12].

В настоящее время, наряду с проведением масштабных натуральных исследований нелинейных звуковых полей [13], широко используется и метод физического моделирования [2]. Эксперименты, проводимые в лабораторных условиях, являются уникальными ввиду полной контролируемости условий их проведения, что позволяет корректно сопоставлять теоретические и экспериментальные результаты и отрабатывать методики для проведения дорогостоящих натуральных исследований.

На кафедре акустики Нижегородского государственного университета действует автоматизированный лабораторный экспериментальный комплекс по моделированию распространения, отражения и рассеяния волн, порождаемых как линейными, так и нелинейными источниками звука [14]. Лабораторные эксперименты выполняются в заглушенной ванне (500×80×80 см), снабженной трехкоординатными устройствами для автоматического перемещения приемо-излучающей системы. Внешний вид лабораторной ванны и часть обрабатываемой радиоэлектронной аппаратуры показаны на рис. 1. Кратко опишем работу лабораторной установки.

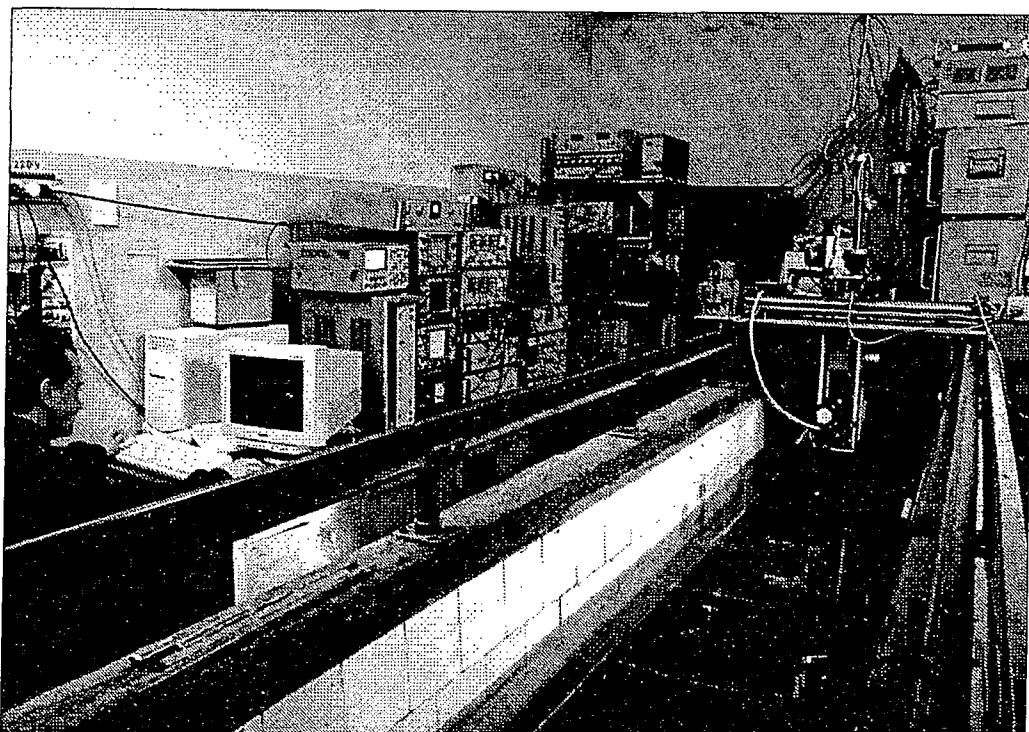


Рис. 1. Общий вид лабораторного экспериментального комплекса по физическому моделированию отражения и рассеяния акустических волн.

Лабораторная установка

Упрощенная блок-схема установки, работающая в параметрическом режиме, изображена на рис. 2. На этом же рисунке изображено взаимное расположение излучателя и приемника при проведении экспериментов.

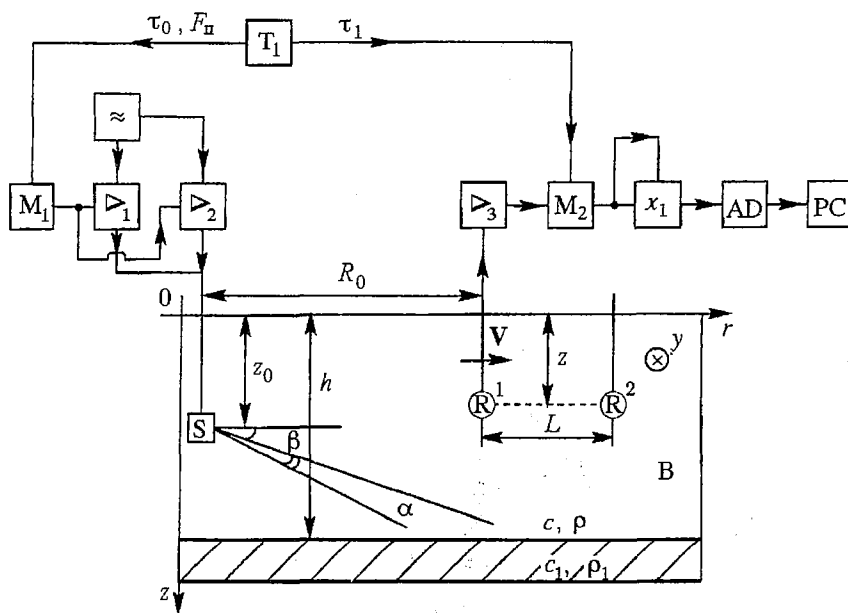


Рис. 2. Функциональная схема экспериментальной установки.

Центр апертуры пьезокерамического преобразователя накачки (S) располагается на глубине z_0 . Устройство штанги, на которой закреплен излучатель, позволяет не только позиционировать его по глубине (ошибка установки не более 1 мм), но и ориентировать ось излучения ПИ в вертикальной плоскости (угол β на рис. 2) с точностью не хуже 1° .

На излучатель подается бигармонический сигнал с частотами накачки $f_1=3.2$ МГц и $f_2=3.0$ МГц, где $f_i=\omega_i/2\pi$, $i=1,2$. Для определения режима преобразователя накачки были проведены предварительные эксперименты в неограниченном пространстве. Экспериментально определенная длина затухания составила $l_3=1.47$ м. Как известно, режим работы ПИ определяется параметром $\eta=(l_0/R_f)(\omega_0/\omega_1)$, где R_f — длина дифракционной расходимости излучателя по высокой частоте. Эффективная ширина диаграммы направленности ПИ α .

Для создания высокочастотных колебаний используются два мощных усилителя (\triangleright_1) и (\triangleright_2), на входы которых с блока опорных частот (\approx) подаются непрерывные синусоидальные сигналы частотой ω_1 и ω_2 . Внешний вид этих устройств, формирующих мощный бигармонический сигнал, показан на рис. 3. В нижней части фотографии хорошо виден лабораторный пьезоэлектрический преобразователь волн накачки. В целях уменьшения уровня реверберационных помех, связанных с ограниченностью исследуемого объема, в работе используется импульсный режим излучения. Причем длительность излучаемых импульсов τ_0 удовлетворяет условию $\omega_0\tau_0 \gg 2\pi$ и таким образом обеспечивается квазимонохроматический режим излучения.

В качестве генератора импульсов модуляции (T_1) используется генератор

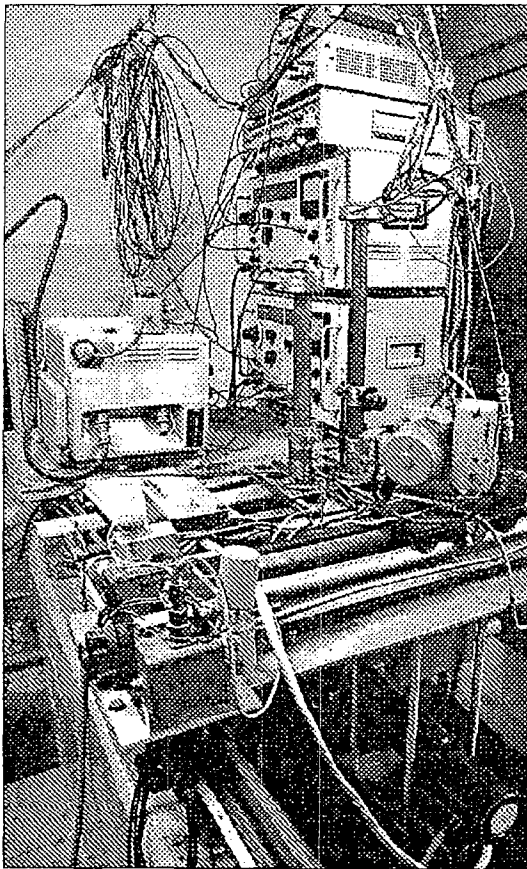


Рис. 3. Общий вид излучающей части лабораторного комплекса

видеоимпульсов прямоугольной формы с регулируемой длительностью τ_0 и частотой повторения $F_n=64$ Гц. Эти импульсы через модулятор M_1 поступают на модулирующие входы усилителей (\triangleright_1 и \triangleright_2), где происходит формирование и усиление радиоимпульсов. Сформированный таким образом сигнал поступает на акустический преобразователь волн накачки (S).

Для синхронизации работы всей установки используется синхроимпульс, вырабатываемый тем же генератором импульсов (T_1).

Пройдя через исследуемую среду, сигнал принимается ненаправленным пьезокерамическим приемником (R), который закреплен на штанге, способной равномерно перемещаться в горизонтальной плоскости лабораторной ванны (B) со скоростью V на фиксированной глубине z . После двухкаскадного усиления и фильтрации, осуществляемой в усилителе (\triangleright_3), принятый импульсный сигнал поступает на строб-блок (M_2), управляемый импульсным генератором строба (T_1). Вырабатываемые этим генератором импульсы длительностью τ_1 с регу-

лируемым временем задержки относительно начала излученного импульса позволяют, во-первых, подавить импульсные реверберационные помехи и, во-вторых, производить регистрацию амплитуды в любом месте принимаемого сигнала. Стробированный сигнал параллельно поступает на оба входа умножителя (x_1), что позволяет регистрировать интенсивность сигнала. В результате на выходе умножителя (x_1) формируются видеоимпульсы длительностью τ_1 , амплитуда которых зависит от амплитуды принятого сигнала. Преобразованный сигнал поступает на интегратор (на схеме не указан), который управляется импульсом генератора строба. Таким образом, на выходе интегратора формируется напряжение, амплитуда которого пропорциональна квадрату амплитуды импульсного сигнала на входе. Это напряжение, в свою очередь, преобразуется в цифровой код на аналого-цифровом преобразователе (АД) и записывается на магнитный диск ПЭВМ (РС) для дальнейшей обработки. Частота квантования при аналого-цифровом преобразовании во всех экспериментах составляет 50 Гц.

Ниже описаны результаты экспериментальных исследований звуковых полей ПИ, работающих в маломодовых океанических волноводах, проведенных на кафедре акустики за последние годы.

Селекция нормальных волн в волноводе Пекериса при его параметрическом возбуждении с учетом азимутальной структуры низкочастотных акустических полей [10]

Возможность применения ПИ в мелком море для селективного возбуждения нормальных волн заданных номеров представляет из себя уникальный инструмент, который можно широко использовать в модовой акустической томографии океана, а также для дистанционной диагностики параметров океанических грунтов. Напомним, что ПИ позволяет создавать чрезвычайно узкую диаграмму направленности на низкой частоте (волна разностной частоты – ВРЧ) при небольших габаритах излучающей системы. Если ось излучения ПИ сориентировать в вертикальной плоскости на угол близкий к углу Бриллюэна γ_m моды номера m , то акустическое поле в волноводе будет формироваться в основном модой данного номера и близких к ней номеров. Однако формирование низкочастотного поля в мелководных акустических волноводах при их параметрическом возбуждении имеет свои особенности, которые связаны с многократным взаимодействием волн накачки с границами волновода, а также переотражением ВРЧ. Это приводит к тому, что угловое распределение акустического поля в азимутальной плоскости на каждой из нормальных волн, формирующих поле, различно.

Известно, что особенности формирования низкочастотного поля в мелководных акустических волноводах при их параметрическом возбуждении приводят к различным угловым зависимостям полей в азимутальной плоскости для мод разных номеров [15]

$$\Theta_{n, \max} \cong \pm [2\pi\beta / (Kh - (\beta - \gamma_n)^2)]^{1/2},$$

где $\Theta_{n, \max}$ – угол в азимутальной плоскости, направленный на максимум излучения n -ой моды; β – угол ориентации оси диаграммы направленности излучателя в вертикальной плоскости; K – волновое число ВРЧ; h – глубина волновода; γ_n – угол Бриллюэна n -ой моды. В связи с этим возникает принципиальная возможность регистрировать моды заданных номеров по различным азимутальным направлениям, так как направление Θ_m на максимум излучения моды номера m существенным образом зависит от β – угла ориентации пучка высокочастотной накачки ПИ в вертикальной плоскости.

Нами проведены экспериментальные исследования угловых характеристик и модовой структуры поля ПИ в зависимости от ориентации оси излучения в вертикальной плоскости. Работа проводилась в модельном двухслойном плоском волноводе (однородный водный слой, лежащий на жидком поглощающем полупространстве). Этот волновод хорошо математически описывается в рамках модели Пекериса. В процессе проведения лабораторных экспериментов угол β последовательно устанавливался в соответствии с углами Бриллюэна первых трех распространяющихся мод исследуемого волновода. Выделение нормальных волн осуществлялось по доплеровским спектрам сигнала, принимаемого равномерно перемещающимся вдоль трассы распространения звука приемником [14]. При данной обработке амплитуды спектральных составляющих характеризуют средние амплитуды мод на глубине приема.

Глубина водного слоя $h=4.0$ см, приемник был расположен так, чтобы принимаемый спектр мод на данном горизонте был как можно богаче, длительность излучаемого импульса составляла 300 мкс. В экспериментах угол β выступал в качестве параметра и изменялся от измерения к измерению в соответствии с углами Бриллюэна первых трех распространяющихся мод исследуемого волновода. После того, как угол β фиксировался, ось излучения ПИ в плоскости азимутальных углов Θ ориентировалась таким образом, чтобы направление на максимум какой-либо моды при данной ориентации излучения в вертикальной плоскости находилось строго вдоль экспериментальной ванны. Такая методика была использована нами потому, что особенности механической части экспериментальной установки позволяли перемещать приемник только вдоль направляющих, уложенных по длине экспериментального бассейна. Направления на азимутальные углы для максимумов излучения мод конкретных номеров были подсчитаны теоретически с использованием формулы для Θ_{max} . Проведенные эксперименты были направлены на изучение трансформации амплитудных соотношений в получаемых модовых спектрах.

Так, на рис. 4 изображены нормированные на амплитуду первой нормальной волны модовые спектры сигнала, возбуждаемого ПИ, ось излучения которого ориентирована в волноводе под углом Бриллюэна первой моды ($\gamma_1=4.6^\circ$) в вертикальной плоскости. Вертикальные линии на графике соответствуют теоретически рассчитанным волновым числам всех распространяющихся мод

A (отн. ед.)

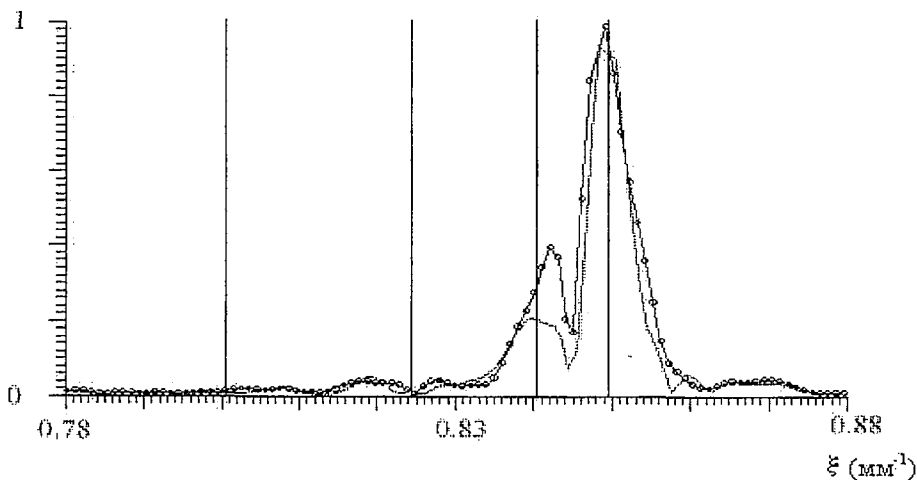


Рис. 4. Нормированные модовые спектры сигнала, возбуждаемого ПИ в мелководном волноводе Пекериса. Ось излучения ВРЧ $\gamma_1=4,6^\circ$

данного волновода. Амплитуды спектральных составляющих полученного модового спектра характеризуют средние амплитуды мод на данном горизонте приема. Углы Θ в азимутальной плоскости составляли: для первой моды – 7° , для второй – 5.13° . Сплошной линией показан спектр нормальных волн при угле $\Theta_1=7^\circ$, то есть при азимутальном направлении, ориентированном на максимум излучения первой моды; маркированной линией показан аналогичный модовый спектр, но при угле $\Theta_2=5.13^\circ$. Из рисунка видно, что относительный вклад в результирующее поле второй распространяющейся моды на заданном горизонте приема вдвое больше по направлению на угол Θ_2 .

На рис. 5 изображены аналогичные спектры нормальных волн, когда ось А (отн. ед.)

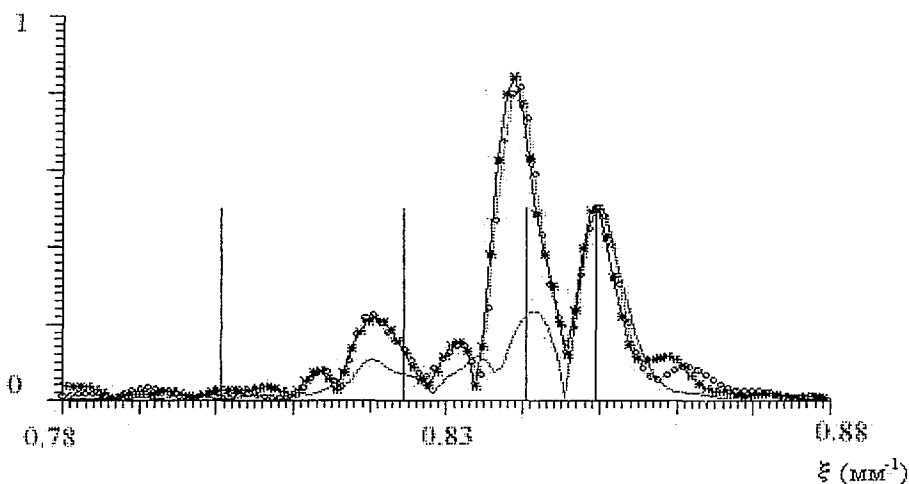


Рис. 5. Нормированные модовые спектры сигнала, возбуждаемого ПИ в мелководном волноводе Пекериса. Ось излучения ВРЧ $\gamma_3=14.4^\circ$

излучения ПИ ориентирована в вертикальной плоскости под углом Бриллюэна третьей моды (для данного волновода $\gamma_3=14.4^\circ$). Когда угол Θ в азимутальной плоскости соответствует углам, направленным на максимум излучения мод второго и третьего номера, поле в основном формируется этими нормальными волнами.

Таким образом, исследования модового состава поля в зависимости от азимутального угла Θ при фиксированном угле β в вертикальной плоскости показали, что соотношение амплитуд мод, формирующих акустическое поле на фиксированной глубине, различно по направлению. При анализе акустического поля на азимутальных углах Θ близких к углам Θ_m видно, что поле формируется в основном модой номера m , то есть оказывается возможным выделять те области волновода, где поле формируется наперед заданными нормальными волнами.

Трансформация модового состава поля параметрического излучателя в волноводах с переменной по трассе глубиной [12, 16]

Исследование распространения акустических волн в шельфовых зонах Мирового Океана представляет собой весьма сложную задачу, что связано с трудностями определения характеристик звуковых полей в условиях, когда параметры среды зависят не только от глубины, но и от горизонтальных координат. Теоретически задачи распространения звука в почти стратифицированных

средах, то есть в средах, свойства которых медленно меняются в горизонтальном направлении (а именно к таким относится и береговой клин) в настоящее время решаются в основном с помощью двух подходов. Один из них основан на известной теории горизонтальных лучей и вертикальных мод [11, 17] в предположении отсутствия взаимодействия между ними. Другой подход связан с лучевыми представлениями высокочастотных звуковых полей в средах, параметры которых зависят от трех координат [18]. Предсказываемая этими теориями горизонтальная рефракция звука в прибрежной зоне наблюдалась экспериментально. Следует однако отметить, что эта задача относится к разряду малоизученных в экспериментальном плане. С целью частичного восполнения этого пробела были проведены эксперименты по исследованию акустических полей в волноводах, моделирующих шельфовую зону Мирового Океана, в хорошо контролируемых лабораторных условиях.

Измерения проводились в лабораторной ванне, заполненной водой, в которой устанавливалось подвешенное дно. Волновод представлял собой однородный водный слой переменной глубины $h(r)$ (скорость звука $c=1468$ м/с и плотность $\rho=1$ г/см³), лежащий на наклонно установленной металлической подложке (скорость продольных волн $c_1=6260$ м/с и плотность $\rho_1=2.7$ г/см³). Проведенные экспериментальные исследования модовой структуры акустического поля в плоском волноводе с этой же моделью дна показали, что вертикальная структура поля отвечает волноводу с двумя акустическими мягкими границами [6]. Поэтому собственные моды волновода хорошо описываются в рамках простейшей модели Пекериса. Глубина волновода в точке расположения излучателя (S) составляла $h(r_0)=40.0$ мм, где r_0 – расстояние точки расположения излучателя от ребра клина. В качестве источника импульсного сигнала (S) в экспериментах использовался круглый поршневой параметрический излучатель диаметром $d=1.8$ см, формирующий слаборасходящийся акустический пучок на частоте $F=200$ кГц (частоты накачки $f_1=3.2$ МГц и $f_2=3.0$ МГц). Использование такого высоконаправленного излучения позволило исследовать угловую структуру рефрагированных полей в горизонтальной плоскости при перемещении приемника (R) на фиксированной глубине z и удалении от источника R_0 (рис. 6).

Ориентация оси излучения параметрического источника в вертикальной плоскости (угол β) обеспечивала наилучшее возбуждение первых трех распространяющихся мод. Регистрация распределения акустических полей данного волновода в зависимости от всех трех координат (r, y, z) осуществлялась пьезокерамическим приемником малых волновых размеров.

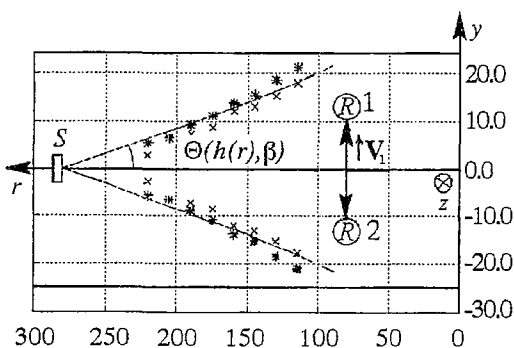


Рис. 6. Экспериментально определенные направления на максимум излучения волны разностной частоты в плоском волноводе и в волноводе с наклонным дном. Здесь V_1 – скорость перемещения приемника вдоль оси y .

Угловое распределение полей параметрических излучателей в горизонтальной плоскости ($z=\text{const}$), работающих в волноводах Пекериса, имеет, как правило, провал на оси, а направление на максимум излучения существенным образом зависит от глубины волновода и модового состава поля на данном расстоянии от излучателя. Если глубина волновода уменьшается вдоль трассы распространения звука, то следует ожидать уширения углового спектра излучаемых акустических полей, что было подтверждено экспериментально. Так, на рис. 6 приведены сравнительные экспериментальные ре-

зультаты исследованных угловых распределений максимума излучения поля волны разностной частоты параметрического излучателя, работающего в плоском волноводе глубиной $h=4.0$ см (на рис. 6 отмечены «x») и волноводе с линейно уменьшающейся глубиной $h(r)$ (на рис. 6 «*»). Угол раскрыва клина 0.81° , излучатель располагался на расстоянии $r_0=280$ см от ребра клина. При проведении экспериментов в волноводе переменной глубины заглубление приемника z изменялось таким образом, что отношение $z/h(r)$ оставалось постоянным. При этом относительный вклад отдельных нормальных волн, формирующих поле на фиксированной глубине и данном расстоянии от излучателя, не изменялся.

Кроме того, в работе определялся модовый состав полей волноводов с помощью фурье-анализа сигнала, принимаемого равномерно перемещающимся вдоль трассы приемником. Низкочастотные акустические поля генерировались как линейными, так и параметрическими излучателями в природных гидроакустических волноводах с различной геометрией и с двумя типами грунта. В качестве моделей грунтов в экспериментах использовались алюминиевые пластины толщиной 0.3 см, лежащие на резиновой подложке, и резиновая подложка толщиной 4.0 см. Метод обработки, основанный на возможности считывания комплексной амплитуды в различных частях принимаемого импульса, позволил детально проанализировать модовый состав сигнала [19], распространяющегося в водном слое.

Глубина водного плоского слоя $h=4.0$ см. Скорость звука в слое была постоянной и составляла 1462 м/с. Слабонеоднородный по трассе волновод представлял собой клинообразную область общей протяженностью 320 см, максимальной глубины $h_{\max} = 4.0$ см (в этом месте располагался излучатель). Угол раскрыва клина составил 0.54° . Несущая частота излучаемого импульсного сигнала $f_0=200$ кГц, его длительность $\tau_1=200$ мкс. Ось излучения ПИ ориентировалась таким образом, чтобы условия возбуждения второй волноводной моды были наилучшими. Спектральный анализ проводился по фиксированной апертуре $L=139$ см. В одно-родном волноводе на данном горизонте приема присутствуют первые две распространяющиеся моды, амплитуды которых примерно одинаковы. Изменение толщины водного слоя приводит к непрерывному изменению продольных волновых чисел соответствующих мод, что ухудшает условия их разрешения, кроме того, спектр смещается в низкочастотную область. Отметим также, что в принятом сигнале на расстояниях более 154 см от излучателя на данном горизонте приема отсутствует вторая мода. Это связано с изменением условий приема второй моды по мере продвижения вдоль волновода и значительным возрастанием ее затухания.

При возбуждении плоского волновода с металлическим дном горизонтально ориентированным параметрическим излучателем в спектре принятого сигнала наряду со спектральными составляющими, соответствующими волноводным модам (продольное волновое число $\xi_1=0.856$ мм⁻¹ и $\xi_2=0.846$ мм⁻¹), присутствует и состав-ляющая, характеризующая распространение волны разностной частоты в свободном пространстве $\xi_0=0.859$ мм⁻¹. В клине изменяются условия приема мод высших номеров, что приводит, в частности, к появлению в спектре сигнала составляющей, соответствующей третьей моде данного волновода $\xi_3=0.8295$ мм⁻¹. Кроме того, изменение глубины волновода вдоль трассы распространения звука приводит к исчезновению спектральной составляющей, соответствующей $\xi_0=0.859$ мм⁻¹.

Исследование структуры поля волны разностной частоты в волноводе со случайно-неоднородной границей [20]

Интерес к исследованию локальных неоднородностей океана с помощью параметрических источников звука возник еще в 80-х годах ушедшего века. На эти

годы приходится пик научных изысканий в этом направлении, отметим лишь монографию [2], сфокусировавшую основные теоретические подходы и обобщившую экспериментальные данные десятилетий использования параметрических антенн в целях гидролокации. В ней приводятся результаты экспериментов, доказывающие влияние плавно-шероховатой границы на процесс формирования поля ПИ. Однако распространение акустических волн в реальном океане чаще всего представляет собой волноводное распространение, физика параметрического возбуждения звука в волноводных условиях обсуждается, например, в работе [6]. Поэтому представляется разумным исследовать влияние неоднородных границ волновода на характеристики ВРЧ.

Была поставлена задача изучения низкочастотных полей ПИ в лабораторных условиях. При этом нижняя граница маломодового акустического волновода представляла собой случайно-неоднородную поверхность. Наряду с исследованием этой достаточно сложной и многопараметрической задачи, были проведены модельные эксперименты по рассеянию акустических волн ПИ на донных дискретных неоднородностях в глубокой воде, то есть при отсутствии влияния верхней границы волновода, а также для сравнения проанализированы поля линейного излучателя, работающего на частоте ВРЧ, создаваемой ПИ.

Эксперименты проводились на частотах накачки 3.2 МГц и 3.0 МГц, частота ВРЧ соответственно составляла 200 кГц. Глубина гидроакустического волновода была 3.6–3.7 см, его верхняя граница оставалась свободной, а нижняя представляла собой толстый слой резины плотностью $\rho_1 \approx 1.27$ г/см³, скорость распространения продольных звуковых волн в нем $c_1 \approx 1740$ м/с, тангенс угла потерь приблизительно равнялся 0.2 [21]. Данная модель дна имитировала жидкое полупространство с поглощением. Концентрация жестких дискретных неоднородностей на дне изменялась в ходе эксперимента, при этом относительная площадь дна, занятая неоднородностями, колебалась от 0 до 76%, оставаясь в среднем постоянной при получении каждой конкретной реализации принимаемого сигнала. Измерение амплитуды сигнала на разностной частоте производилось на расстоянии $R_0 = 75$ см от точки излучения. Приемник двигался на фиксированной глубине z , на которой производилась запись реализации поперечного разреза вторичного поля ПИ. Поскольку длина трассы распространения звука значительно меньше длины затухания высокочастотных составляющих поля, то формирование ВРЧ происходило в волноводе вплоть до точки приема. Импульс строба был настроен приблизительно на середину принимаемого импульса длительностью $\tau_1 = 200$ мкс. Местоположение импульса строба диктовалось необходимостью регистрации не только амплитуды прямого сигнала, но и рассеянных компонент акустического поля ВРЧ. Сами рассеиватели представляли собой стальные шарики одинакового диаметра 3.125 мм. Выбор неоднородностей такого размера был обусловлен тем, что для волн высокой частоты они являлись крупномасштабными препятствиями и рассеяние происходило по законам геометрической оптики, в то же время для низкочастотной ВРЧ параметр Ka был близок к единице (K – волновое число вторичного поля, a – радиус рассеивателя).

При возбуждении в волноводе мод низких номеров, что достигалось ориентацией оси излучения ПИ вдоль волновода, была проведена серия экспериментов по регистрации поперечных распределений поля ВРЧ в зависимости от концентрации неоднородностей, случайно расположенных на дне волновода (рис. 7).

Как видно из рисунка, по мере увеличения коэффициента упаковки неоднородностей относительной площади дна, занятой рассеивателями, наблюдается уменьшение средней амплитуды поля ВРЧ, в то время как ее дисперсия существенно возрастает, что обусловлено интерференцией низкочастотных сигналов, поскольку для высокочастотных компонент поля после первого зеркального отражения от неоднородностей нарушаются условия синхронизма. Кроме того, изменение амплитуды может быть связано с уменьшением эффективной глубины волновода,

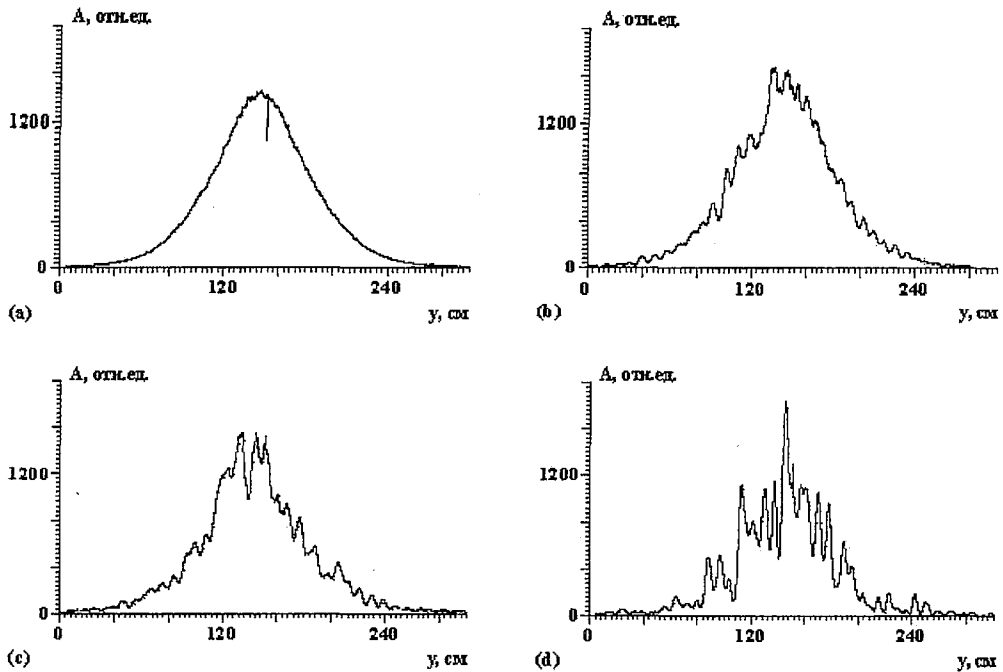


Рис. 7. Поперечные распределения низкочастотного поля ПИ (ось излучения ВРЧ $\gamma_1=0^\circ$) в зависимости от концентрации неоднородностей на дне волновода: *a* – гладкая граница, *b* – 200 г шариков на трассе распространения, *c* – 800 г, *d* – 3200 г

изменением локального коэффициента отражения и, как следствие этого, с изменением амплитуды эффективно принимаемых мод.

При ориентации излучателя под углом β в вертикальной плоскости, соответствующим углу Бриллюэна второй распространяющейся моды, сразу после отражения в диаграмме поперечного распределения формируется провал в результате противофазного сложения сигналов ВРЧ, отраженных от мягкой границы, и НЧ сигналов, образовавшихся после отражения волн накачки, на фоне которого наблюдается максимум, образованный ВРЧ, генерируемой после отражения волн накачки [9]. В результате зарегистрировано трехлепестковое угловое распределение амплитуды поля ВРЧ (рис. 8, *a*).

Присутствие на нижней границе волновода даже минимального количества

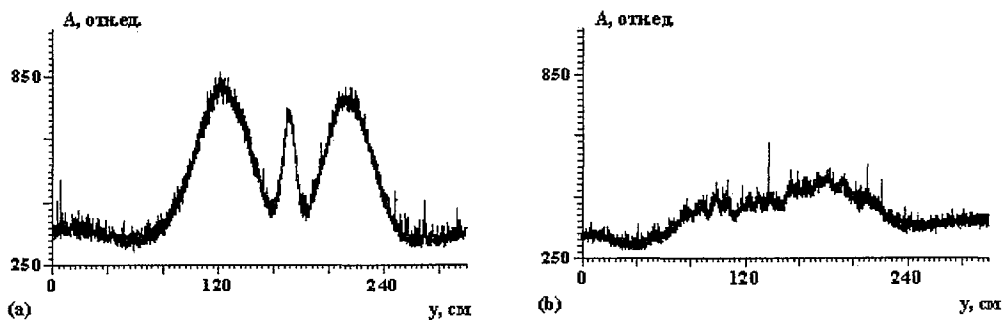


Рис. 8. Поперечные распределения низкочастотного поля ПИ (ось излучения ВРЧ $\gamma_2=8^\circ$) в зависимости от концентрации неоднородностей на дне волновода: *a* – гладкая граница, *b* – 200 г шариков на трассе распространения

дискретных рассеивателей нарушает когерентность волн накачки, что приводит к уменьшению эффективной длины антенны бегущей волны. Как следствие этого наблюдается однолепестковое угловое распределение НЧ поля малой интенсивности (рис. 8, б). Интересно, что при проведении аналогичного эксперимента в «полубезграничном» пространстве характерная поперечная структура НЧ поля также трансформировалась, хотя эти изменения были выражены слабее.

Серия экспериментов, проведенная в «полубезграничном» пространстве для угла $\beta=0^\circ$ при различных концентрациях неоднородностей также показала, что влияние шероховатого дна на структуру поперечного разреза поля ВРЧ заметно слабее, чем в случае волноводного распространения звука. Более сильный прямой сигнал, обусловленный отсутствием отражений от верхней границы, доминировал в интерференционной картине поперечного распределения принимаемого сигнала. Это свидетельствует о том, что случайным неоднородностям границы гораздо проще разрушить сложную структуру поля ПИ в мелководном волноводе, нежели повлиять на его диаграмму направленности в полупространстве.

Заключение

В работе обсуждены результаты лабораторных исследований акустических полей ВРЧ в условиях мелкого моря. С использованием метода, использующего спектральную обработку принятого низкочастотного сигнала, регистрируемого равномерно движущимся вдоль трассы распространения звука приемником, показано:

- модовый состав звукового поля в зависимости от азимутального угла θ при фиксированном угле β наклона оси диаграммы ПИ в вертикальной плоскости различен по направлению;
- происходит пространственная трансформация спектра принимаемого сигнала в волноводах с переменной по трассе глубиной, что ухудшает возможности применяемых методов селекции нормальных волн;
- неровные границы волновода приводят к уширению углового распределения ВРЧ, по сравнению с аналогичными характеристиками в «свободном» пространстве. Присутствие на дне волновода даже минимального количества рассеивателей нарушает когерентное взаимодействие первичных волн накачки и ВРЧ, что приводит к образованию однолепесткового углового распределения по низкой частоте.

Авторы выражают благодарность старшему научному сотруднику НИРФИ Д.А. Касьянову за создание целого семейства лабораторных параметрических излучателей звука, примененных в описанных экспериментах, а также фотографу Д.Н. Штырову за проведение фотосъемок.

Работа выполнена при поддержке грантов INTAS-97-11134, РФФИ № 99-02-18354 и гранта «Университеты России» 992831.

Библиографический список

1. Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981. 264 с.
2. Новиков Б.К., Тимошенко В.И. Параметрические антенны в гидролокации. Л.: Судостроение, 1990. 256 с.

3. *Chinnery P.A., Humphrey V.F., Zhang J.* Low-frequency acoustic scattering by a cube: Experimental measurements and theoretical predictions // *J. Acoust. Soc. Am.* 1997. Vol. 101, № 5. Pt. 1. P. 2571.
4. *Мюир Т.Дж.* Нелинейная акустика и ее роль в геофизике морских осадков // *Акустика морских осадков.* М.: Мир, 1977. С. 227.
5. *Карабутова Н. Е., Новиков Б. К.* Работа параметрического излучателя звука в плоском волноводе // *Акуст. журн.* 1986. Т. 32, № 1. С. 65.
6. *Зайцев В. Ю., Курин В. В., Сутин А. М.* Модельные исследования структуры поля параметрического излучателя в акустическом волноводе // *Акуст. журн.* 1989. Т. 35, № 2. С. 266.
7. *Винокурова Н. И., Посикун А. П.* Экспериментальные исследования параметрических антенн при наличии нескольких отражающих границ // *Прикладная акустика.* 1983. Т. 10. С. 104.
8. *Гаврилов А. М., Тарасов С. П., Пояркова В. А., Новиков Б. К.* Работа параметрической антенны в условиях мелкого моря // *Прикладная акустика.* 1985. Т. 11. С. 110.
9. *Гурбатов С. Н., Курин В. В., Локтев В. М., Павлов И. В., Прончатов-Рубцов Н. В.* Формирование характеристик параметрического излучателя вблизи неровной поверхности // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1995. Т. 38, № 1. С. 82.
10. *Егорычев С.А., Курин В.В., Кустов Л.М., Прончатов-Рубцов Н.В.* Экспериментальные исследования формирования модовой структуры поля параметрического излучателя звука в волноводе Пекериса // *Сборник трудов VI сессии РАО «Акустика на пороге XXI века», Москва, 1997.* С. 205.
11. *Барридж Р., Вейнберг Г.* Горизонтальные лучи и вертикальные моды // *Распространение волн и подводная акустика.* М.: Мир, 1980. 229 с.
12. *Gurbatov S.N., Gushchin M.V., Egorychev S.A., Kurin V.V., Kustov L.M., Pronchatov-Rubtsov N.V.* On the horizontal structure of a field in separate modes radiated by a parametric antenna in axially nonuniform acoustic waveguides // *Preprint Collection on the CD, Joint Meeting 137th regular meeting of the Acoustical Society of America, 2nd convention of the EAA: Forum Acusticum – integrating the 125th German Acoustics DAGA Conference, Berlin, Germany, 14–19 March, 1999.*
13. *Донской Д.М., Зайцев В.Ю., Наугольных К.А., Сутин А.М.* Экспериментальные исследования поля мощного параметрического излучателя в мелком море // *Акуст. журн.* 1993. Т. 39, № 2. С. 266.
14. *Гурбатов С.Н., Егорычев С.А., Курин В.В., Кустов Л.М., Прончатов-Рубцов Н.В.* Экспериментальное определение модового состава поля акустического параметрического излучателя в волноводе // *Акуст. журн.* 2000. Т.46, № 2. С. 192.
15. *Зайцев В. Ю., Островский Л. А., Сутин А. М.* Модовая структура поля параметрического излучателя в акустическом волноводе // *Акуст. журн.* 1987. Т. 33, № 1. С. 37.
16. *Virovlyansky A.L., Gurbatov S.N., Gushchin M.V., Egorychev S.A., Kalmykov S.V., Kurin V.V., Kustov L.M., Pronchatov-Rubtsov N.V.* Parametric array performance in hydroacoustic waveguide: tank experiment and numerical simulation // *Proceedings of the 5–th European Conference on Underwater Acoustics, Lyon, France, 10–13 July, 2000.* P. 1385.
17. *Pierce A. D.* Extension of the method of normal modes to sound propagation in an almost stratified medium // *J. Acoust. Soc. Am.* 1965. V. 37. P. 19.
18. *Комиссарова Н.Н.* Горизонтальные траектории лучей в прибрежной области с постоянной скоростью звука и произвольным профилем дна // *Акуст. журн.* 1995. Т.41, № 4. С. 617.
19. *Вировлянский А.Л., Егорычев С.А., Курин В.В., Прончатов-Рубцов Н.В.* Апробация модифицированного метода селекции нормальных волн в лабораторном гидроакустическом волноводе // *Сборник трудов VI сессии Российского акустического общества «Акустика на пороге XXI века», Москва, 1997.* С. 201.

20. Гурбатов С.Н., Грязнова И.Ю., Егорычев С.А., Курин В.В., Кустов Л.М. Экспериментальное исследование полей волны разностной частоты в мелководных гидроакустических волноводах с шероховатыми границами // Труды VII Всероссийской школы–семинара «Волновые явления в неоднородных средах». Т. 1. Москва, 2000. С. 9.

21. Грязнова И.Ю., Гурбатов С.Н. Использование эффектов обратного рассеяния волн для определения акустических параметров дна // Тезисы докладов Научной конференции по радиофизике. Н. Новгород, 1993. С.34.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию 20.12.2000

PHYSICAL MODELING OF THE EFFECTS OF THE NONLINEAR INTERACTION OF ACOUSTIC WAVES

*I.Yu. Gryaznova, S.N.Gurbatov, S.A.Egorychev, V.V.Kurin,
L.M.Kustov, N.V.Pronchatov–Rubtsov*

Model physical experiments of investigations of the acoustic fields generated by nonlinear sound sources in shallow water Pekeris waveguides are described. Some specific of the modes formation of the low–frequency waveguide field are investigated using Fourier analyses of the complex amplitude of acoustic signals received by the evenly moving receiver. The capability of selected modes excitation by changing of the angle of the parametric array in the vertical plane is observed experimentally. The results of the investigations of parametric array fields in hydroacoustic waveguides with linear depth variation along sound propagation are performed. The influences of the rough boundaries of the shallow water waveguides on the process of the formation of angle characteristics of the parametric array are investigated.



Грязнова Ирина Юрьевна – родилась в Горьком (1964). Окончила радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1987). После окончания аспирантуры защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук (1995). Область научных интересов: распространение волн в случайных средах, акустика океана, статистическая радиофизика. Имеет более 30 научных публикаций.



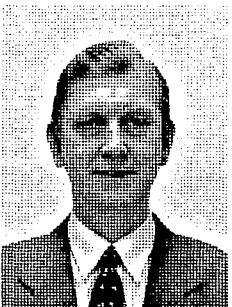
Егорычев Сергей Александрович – родился в Дзержинске Горьковской области (1974). Окончил Нижегородский государственный университет (1997). После окончания аспирантуры ННГУ с 2000 года работает на кафедре акустики. Область научных интересов: физическое моделирование процессов распространения акустических волн в океанических волноводах. Имеет свыше 30 научных публикаций.



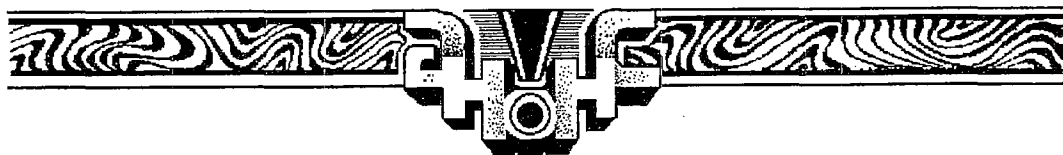
Курин Василий Викторович – родился в Горьком (1956). Окончил Горьковский государственный университет (1981). После окончания ГГУ работает на кафедре акустики радиофизического факультета Нижегородского государственного университета. Область научных интересов: физическое моделирование процессов нелинейного взаимодействия акустических волн, распространение звука в ограниченных и неоднородных средах. Имеет свыше 60 научных публикаций.



Кустов Леонид Михайлович – родился в г. Гагра (1948). Окончил Горьковский государственный университет в 1976 году. После окончания ГГУ работает на кафедре акустики радиофизического факультета Нижегородского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1991, ННГУ) в области нелинейного взаимодействия акустических волн. Имеет свыше 50 научных публикаций по указанному направлению. Имеет 3 авторских свидетельства.



Прончатов-Рубцов Николай Васильевич – родился в Горьком (1958). Окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1980). После окончания аспирантуры в 1987 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. С 1993 года – доцент кафедры акустики радиофизического факультета Нижегородского государственного университета. Область научных интересов: нелинейная акустика, акустика океана, статистическая радиофизика. Имеет более 70 научных публикаций. E-mail: nikvas@rf.unn.runnet.ru.



Издательство ГосУНЦ «Колледж» планирует в первом полугодии 2002 года выпустить монографию

Коровский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002. 208 с.: илл.

В монографии рассматривается современный метод анализа временных рядов – непрерывный вейвлетный анализ. Излагаются общие сведения и понятия вейвлетного преобразования, математический аппарат, методика численной реализации вейвлетного преобразования, способы применения вейвлетного преобразования к анализу нелинейных систем различной природы. Затрагиваются аспекты, связанные с исследованием с помощью вейвлетного анализа пространственно-распределенных систем и, соответственно, структур, возникающих как во времени, так и в пространстве.

Книга предназначена для научных работников, занимающихся цифровой обработкой данных и анализом динамических систем, а также для студентов и аспирантов, специализирующихся в нелинейной динамике.

Оглавление

Предисловие

Введение

I. Непрерывный вейвлетный анализ. 1.1 Базовые понятия и определения. 1.2 Численная реализация вейвлетного преобразования. 1.3 Адаптивные вейвлетные базисные функции

II. Применение вейвлетного преобразования к модельным сигналам. II.1 Гармонический сигнал. II.2 Последовательность прямоугольных импульсов. II.3 Амплитудно-модулированный сигнал. II.4 Сигнал с изменяющейся частотой. II.5 Южное Колебание – «Эль-Ниньо». II.6 Сигналы с особенностью. II.7 Применение адаптированного вейвлетного базиса к сигналам с особенностью.

III. Пути к хаосу с точки зрения вейвлетного анализа. III.1 Переход к хаосу через субгармонический каскад. III.2 Переход к хаосу через перемежаемость.

IV. Бикогерентное вейвлетное преобразование. IV.1 Основные понятия и определения бикогерентного вейвлетного преобразования. IV.2 Оценка погрешности расчета вейвлетной бикогерентности. IV.3 Применение бикогерентного вейвлетного анализа к модельным сигналам.

V. О некоторых применениях вейвлетного анализа. V. 1 Анализ динамики и взаимодействия разномасштабных временных возмущений в виркаторе с помощью вейвлетного анализа. V.2 Исследование процессов структурообразования в электронном пучке со сверхкритическим током с помощью вейвлетной бикогерентности. V.3 Некоторые другие приложения вейвлетного анализа.

Приложение

Литература





Издательство ГосУНЦ «Колледж» планирует в первом полугодии 2002 года выпустить учебное пособие

Короновский А.А., Трубецков Д.И. Нелинейная динамика в действии: Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002. 330 с.: ил.

Второе издание пособия существенно отличается от первого. Главы, посвященные применению аппарата нелинейной динамики к биологическим системам, значительно расширены; в них включены модели, представляющие интерес для широкого круга читателей. В то же время, часть материала первого издания исключена из текста.

Учебное пособие предназначено для студентов естественных факультетов, а также для студентов гуманитарных специальностей университетов и всех, кто интересуется применением методов нелинейной динамики в различных науках.

Содержание

Из предисловия к 1 изданию

Предисловие ко 2 изданию

Глава 1. Модели развития и взаимодействия в экологии. Модель Мальтуса и ее обобщение Ферхольстом. Модель рыболовства. Модель Лотки – Вольтерры. Модель конкуренции двух видов. Детерминированный хаос в экологических моделях. Модель «хищник – пища – жертва». Вместо заключения. Список литературы к 1 главе

Глава 2. Пространственная динамика популяций. Модель популяции, учитывающая пространственное распределение особей по ареалу проживания. Бегущая волна в модели пространственно распределенной популяции. Возможны ли стационарные волны в природе? Клеточные автоматы. Игра «Жизнь». Клеточные автоматы, уравнения Ферхольста и КПП. Список литературы ко 2 главе

Глава 3. Нелинейная динамика биологических объектов. Энергетическая модель сердца. Колебательная модель сердечной мышцы. Спиральные волны в сердце. Снова клеточные автоматы. В каком режиме работает сердце здорового человека? Кровь как нелинейная активная среда. Динамические болезни. О пользе дыхания Чейна–Стокса. Список литературы к 3 главе

Глава 4. Феномен логистического уравнения. Вездесущее логистическое уравнение. Модель сосуществования производителей и управленцев. Нелинейные модели Вайдлица и их применение к экономическим и социальным задачам. Что произойдет, если к двум уравнениям Вайдлица добавить третье? Список литературы к 4 главе

Глава 5. Нелинейность в человеческом сообществе. Нелинейная динамика боевых действий. Эпидемии в человеческом обществе. Пространственно–временная модель распространения эпидемии. Феноменологическая теория роста населения Земли. Список литературы к 5 главе

Глава 6. Нелинейная динамика эволюции. Откуда берутся данные? Данные о биологических видах. Модели эволюции. Искусственная жизнь? Список литературы к 6 главе

Глава 7. Экономика и нелинейная динамика. Экономический осциллятор. Модели Гудвина циклов экономики. Процессы установления цены. Взаимодействие продавцов и покупателей. Список литературы к 7 главе

Ответы к некоторым задачам

Алфавитный указатель



Зав. редакцией *Н.Н. Левина* -
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина, Ж.А. Иванова*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой,*
О.Н. Афанасьевой на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136
Банковские реквизиты
р/с № 40603810900000000378 в ЗАО АКБРИР «Экономбанк» г. Саратова,
БИК 046311722, кор.счет банка 30101810100000000722

Подписка на II-ое полугодие 2002 года
по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498,
стоимость подписки на II полугодие 120 руб.
Подписка на весь год (240 руб.) по заявочным письмам
непосредственно в редакции.

Зарубежная подписка в России оформляется в ЗАО «МК-Периодика»
по адресу: 129110, Россия, Москва, ул. Гиляровского, 39
ЗАО «МК-Периодика».
Тел.: (095) 281-93-45, 284-50-08; факс: (095) 281-37-98.
E-mail: info@periodicals.ru

Правила подписки за рубежом на сайте: <http://www.periodicals.ru>

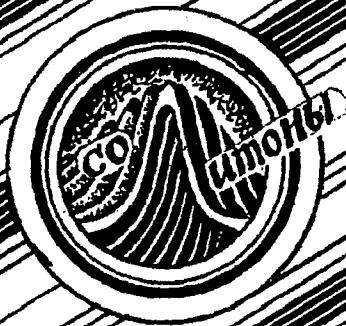
Сдано в набор 10.10.01. Подписано к печати 08.02.02. Формат 70x108/16
Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная. Гарнитура Латинская
Усл. печ. л. 16,8(12,0). Уч.-изд. л. 16,0. Тираж 200. Заказ 245

Издательство ГосУНЦ «Колледж». Лицензия ЛР №020773 от 15.05.98
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел. (845-2)523864, факс (845-2) 523864
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru
<http://cas.ssu.runnet.ru>

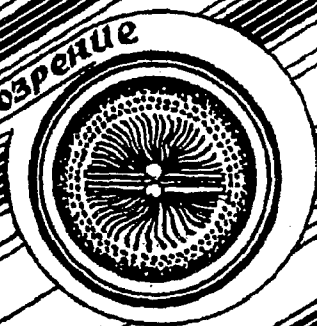
Отпечатано на ризографе GR 3750 издательства ГосУНЦ «Колледж»

© Издательство ГосУНЦ «Колледж» 

© Оформление художника Д.В. Соколова, 2001



Книжное обозрение



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



для в журнале -
студентов и преподавателей



Современной нелинейной динамики

Начиная своё путешествие, не теряй, о юнница!
драгоценного времени!

Королева Прыжков

