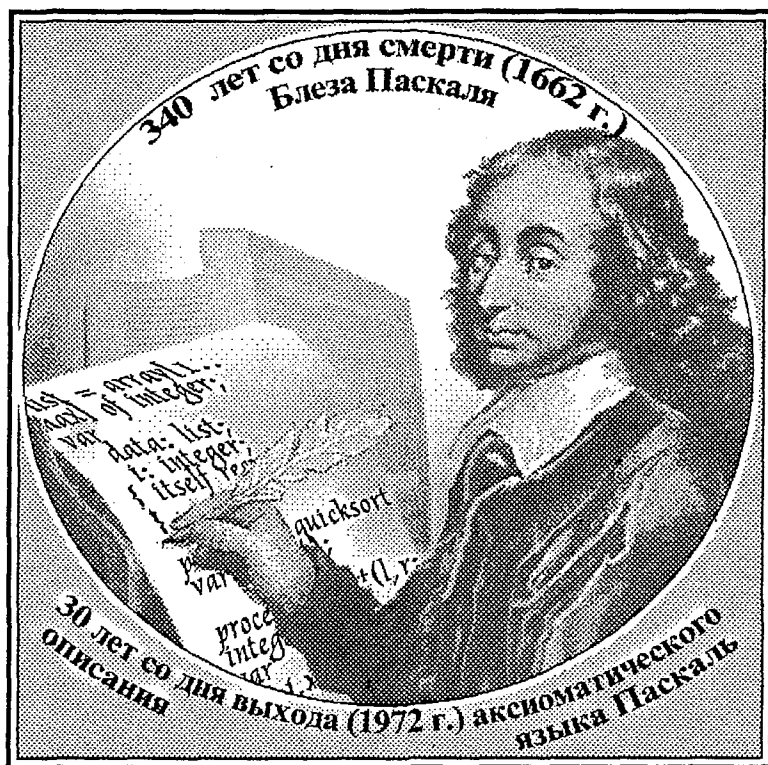


Трикладная Делнейная Динамика

6
2001





**Бифуркации
в динамических
системах различной природы**



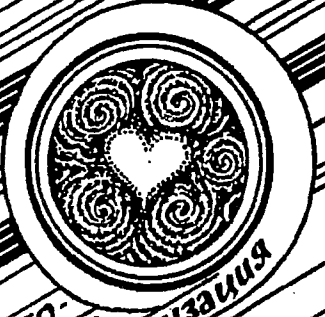
**Обзоры актуальных проблем
нелинейной
динамики**



Конференции, семинары, симпозиумы,



детерминированный хаос



**Авто-
волны,
самоорганизация**



**Прикладные задачи
нелинейной
теории
колебаний
и волн**



**Нелинейная
динамика
в лицах.
История. Personae**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Д.И. Трубецков, член-корреспондент РАН, Саратовский государственный университет

Д.А. Усанов, академик МАНВШ, Саратовский государственный университет

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Б.П. Безручко, профессор, Саратовский государственный университет, ведущий научный сотрудник, СФ ИРЭ РАН

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В.С. Анищенко, профессор, Саратовский государственный университет

Ю.А. Данилов, старший научный сотрудник, Курчатовский научный центр, Москва

Б.А. Калинин, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В.И. Кринский, профессор, Институт экспериментальной и теоретической биофизики, Пущино

С.П. Кузнецов, профессор, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

П.С. Ланда, профессор, Московский государственный университет

Ю.М. Романовский, профессор, Московский государственный университет

Л.А. Островский, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Э.Е. Сон, профессор, Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В.В. Тучин, профессор, Саратовский государственный университет

В.Д. Шалфеев, член-корреспондент Академии инженерных наук РФ, Нижегородский государственный университет

В.К. Юлпатов, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 9, № 6, 2001, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Потапов А.Б., Али М.К. Нелинейная динамика обработки информации в нейронных сетях 3

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Некоркин В.И., Артюхин Д.В. Регулярные и хаотические колебания в системе двух взаимосвязанных, динамически различных элементов ФитцХью - Нагумо 45

Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Осциллятор Ван дер Поля с импульсным воздействием: от дифференциального уравнения к отображению 69

Купцов П.В. О возможности исследования перехода от конвективной к абсолютной неустойчивости в потоковой системе реакция - диффузия с использованием конической геометрии реактора 83

Киселева Н.В. Исследование периодических движений параметрически возбуждаемого ротора 95

БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

Башкирцева И.А., Рязико Л.Б. Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным воздействиям 104

АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

Журавлев В.М. Модели автоволновых процессов в средах с диффузией и уравнения типа Лиувилля 115

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

Исаева О.Б. О возможности реализации феноменов комплексной аналитической динамики в физических системах, построенных из связанных элементов, демонстрирующих удвоения периода 129

ДЕБЮТ

Бодров М.Б. Сложная динамика генератора на диоде с N -образной характеристикой 147

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ДЕЙСТВИИ

Короновский А.А., Стриханов М.Н., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Цуканова И.В. Применение клеточных автоматов для моделирования динамики профессорско-преподавательского состава высшей школы Российской Федерации 154

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

Пойзнер Б.Н. О синергетическом измерении искусства 168

Неймарк Ю.И. Идеальная игра людей в обществе 190

КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ

Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. Т. III. 196

Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Schiman-sky-Geier L. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Developments 201

DEPARTMENT OF EDUCATION OF RUSSIAN FEDERATION

Izvestiya VUZ

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

scientific-technical journal

published since 1993

Published 6 times a year

Vol.9, № 6, 2001, Saratov

C O N T E N T S

REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

Nonlinear dynamics of information processing in neural networks. *A.B. Potapov, M.K. Ali* 3

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Regular and chaotic oscillations in a system composed of two coupled, drastically different FitzHugh - Nagumo elements. *V.I. Nekorkin, D.V. Artyuhin* 45

Kicked Van der Pol oscillator: from differential equation to maps. *A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina* 69

Investigation of the transition from convective instability to absolute instability in a reaction - diffusion system with flow using a conical reaction. *P.V. Kuptsov* . 83

Study of a parametrically excited rotor with periodic motions. *N.V. Kiseleva* 95

BIFFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

Quasipotential method in local stability analysis of the stochastically forces limit cycles. *I.A. Bashkirtseva, L.B. Ryashko* 104

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

Models of auto-wave processes in nonlinear media with diffusion and Liouville equations. *V.M. Zhuravlev* 115

DETERMINISTIC CHAOS

On possibility of realization of the phenomena of complex analytical dynamics for the physical systems, built up of coupled elements, which demonstrate period-doublings. *O.B. Isaeva* 129

DEBUT

The complicated dynamics of the diode oscillator with the *N*-shaped characteristic. *M.B. Bodrov* 147

NONLINEAR DYNAMICS IN ACTION

Application of cellular automata for modelling of the teaching staff dynamics in higher school of Russian Federation. *A.A. Koronovskii, M.N. Strikhanov, D.I. Trubetskov, A.E. Hramov, I.V. Tsukanova* 154

NONLINEAR DYNAMICS AND THE HUMANITIES

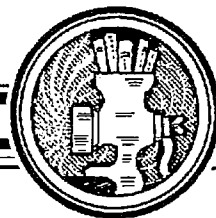
On the synergetical dimension of art. *B.N. Poizner* 168

The ideal game of people in the society. *Yu.I. Neimark* 190

BOOK REVIEW

Statistical Theory of Open Systems. Volume III. *Yu.L. Klimontovich* 196

Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Developments. *V. S. Anishchenko, V. V. Astakhov, A. B. Neiman, T.E. Vadivasova, L. Schimansky-Geier* 201



НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ

А.Б. Потапов, М.К. Али

Рассматривается возможная роль сложной динамики и хаоса в работе нейронных сетей, обрабатывающих информацию. Дан обзор принципов работы некоторых наиболее известных типов нейронных сетей, обсуждается ряд попыток использования хаоса в нейронных сетях. Основная цель работы - представить новый взгляд на проблему хаоса в задачах обработки информации. Показано, что хаос естественно возникает в задачах управления, где нейронная сеть является управляющей подсистемой более сложной системы. Показано, что такая сеть может использовать хаос в своей работе для освоения новых действий в методе обучения, называемом обучением поощрением. Обсуждаются также гамильтоновы нейронные сети.

Введение

Искусственные нейронные сети широко используются для решения как инженерных, так и научных задач [17, 18, 45, 46, 59, 58, 79, 95, 97]. Поскольку они оказались весьма эффективным инструментом обработки информации, постоянно делаются попытки расширить область их приложения или найти новые принципы их построения или работы. Около десяти лет назад предпринимались усилия с целью улучшения работы нейросетей при помощи динамического хаоса; обзор большинства таких попыток можно найти, например, в [93, 34], см. также [4, 5].

Несмотря на множество интересных деталей, главный вопрос так и остался невыясненным: полезен или нет хаос для целей обработки информации? Аргументы существуют как за, так и против. С одной стороны, активность мозга весьма сложна и, по некоторым данным, хаотична. Быть может, эта хаотичность дает какие-либо преимущества в борьбе за существование? С другой стороны, никто не делает хаотическими, скажем, процессоры для того, чтобы повысить их надежность или производительность. В таком случае, почему хаос будет полезен в нейронных сетях, которые также занимаются обработкой информации?

Цель данной статьи - рассмотреть принципы работы основных типов нейронных сетей с точки зрения нелинейной динамики, обсудить ряд попыток сделать динамику сети хаотической, а также представить альтернативный взгляд на роль хаоса в нейросетях. Если рассмотреть нейронную сеть как управляющий элемент некоторой большей системы, взаимодействующей с окружающим миром,

то хаос может возникнуть уже в очень простых моделях. Несколько таких моделей известны, например, в исследованиях по искусственному интеллекту. Более того, системам, взаимодействующим со своим окружением, необходим источник «инициативы» для того, чтобы исследовать мир и учиться на собственном опыте. И динамический хаос вполне может служить источником такой инициативы. Кроме того, в настоящей работе мы обсудим гамильтоновы нейронные сети, которые практически не исследовались до настоящего времени. Такие сети могут оказаться классическими аналогами квантовых нейронных сетей.

Структура статьи следующая. В разделе 1 обсуждаются определение и различные взгляды на нейронные сети. В разделе 2 рассмотрены принципы работы некоторых существующих нейронных сетей для того, чтобы показать, почему, с точки зрения их пользователей и разработчиков, сложная динамика и хаос не являются необходимостью. В разделе 3 даны пояснения, почему хаос *может быть* полезным. В разделах 4, 5 и 6 рассмотрен альтернативный подход к проблеме.

1. Что такое искусственная нейронная сеть?

Несмотря на огромное число публикаций, в настоящее время нет общепринятого определения искусственной нейронной сети (ИНС). Причина, скорее всего, в том, что различных типов сетей существует очень много. Поэтому иногда используется более общий термин, «коннекционизм», означающий методологию создания сложной системы как комбинации похожих или идентичных элементов [27]. Для ИНС базовые нелинейные элементы называются формальными нейронами.

Как правило, формальный нейрон получает несколько входных сигналов x_i , суммирует их, выполняет нелинейное преобразование над этой суммой $y=f(\sum x_i)$, после чего посылает y в качестве своего выходного сигнала другим нейронам или устройствам. Функцию f называют функцией активации. Очень часто f является «сигмоидной» функцией вида $f(x)=1/(1+\exp(-ax))$ или $f(x)=\tanh ax$. В предельном случае, $a \rightarrow \infty$, f становится пороговой функцией.

Связи между нейронами характеризуются весами w_{ij} . Нейроны могут также получать внешние сигналы x_i с весами w_{ik} . Таким образом, типичная операция, выполняемая нейроном в сети - это преобразование вида $f(\sum_j w_{ij} x_j + \sum_k w_{ik} x_k)$. Выходом нейросети служат состояния нейронов (всех или некоторых) по окончании всех промежуточных расчетов. Таким образом, основные черты нейронной сети следующие.

- Это устройство для обработки информации, получающее на входе сигнал X (как правило, вектор) и вырабатывающее выходной сигнал $Y=F(X)$ (Y также может быть вектором).

- Сеть состоит из элементов - нейронов, которые работают параллельно, подобно нейронам мозга.

- Сеть способна обучаться. Обычно под обучением понимается процесс подбора весов w_{ij} для того, чтобы добиться желаемых свойств отображения F .

Искусственные нейронные сети (ИНС) исследуются с нескольких точек зрения, из которых наиболее важными нам представляются следующие четыре.

1.1. Нейросети в статистике и численных методах

На практике очень часто возникает задача аппроксимации неизвестной функции по экспериментальным точкам: задан набор пар точек $\{X_i, Y_i = \Phi(X_i)\}$,

необходимо построить аппроксимацию $F(X)$ для $\Phi(X)$. Помимо обычной аппроксимации кривых и поверхностей, к этому виду можно привести поразительно большое количество задач распознавания образов, классификации, прогноза и управления. Например, в качестве X_i могут выступать показания датчиков, характеризующих обстановку вокруг автомобиля, а в качестве Y_i - действия опытного водителя в данной ситуации. Хорошая аппроксимация $F(X)$ позволяет создать систему, способную управлять автомобилем.

Классическая теория аппроксимации, как правило, имеет дело с функциями одной переменной. При необходимости построить аппроксимацию, скажем, функции 10 переменных классические методы, такие как аппроксимация полиномом, не слишком эффективны. Аппроксимации комбинациями сигмоидных функций часто оказываются существенно лучше.

Общая задача аппроксимации нейронной сетью выглядит следующим образом. Выбирается некоторый общий вид аппроксимирующей функции $F(X, w)$ («архитектура сети»), а затем подбираются коэффициенты w , с тем чтобы минимизировать погрешность $\sum |Y_i - F(X, w)|^2$. Процесс минимизации называется обучением нейросети. Он существенно зависит от выбранного типа сети.

На первый взгляд все выглядит исключительно просто. Но если начать строить реальную сеть, немедленно возникают вопросы: сколько нейронов взять, как их соединять, какие методы минимизации использовать и т.п. Современная теория нейронных сетей способна на некоторые из них давать строгие ответы, а на другие отвечать на основе богатого опыта. Строгие результаты основаны на (i) теореме Колмогорова об аппроксимации функций сигмоидами, (ii) ряде теорем, показывающих, что многослойные персептроны являются универсальными аппроксиматорами (см. ниже), и (iii) методах математической статистики. Очень хорошее описание статистического взгляда на нейронные сети можно найти в работах [16, 25, 81].

1.2. Нейросети в computer science

Это направление связано, главным образом, с логикой и вычислительными возможностями нейронных сетей. Отображение $X \rightarrow Y$, порождаемое нейросетью, можно рассматривать как способ организации вычислений. В этом плане основное отличие нейронных сетей от обычных компьютеров в том, что (i) они могут работать с очень высокой степенью параллелизма, (ii) вместо программирования они обучаются на примерах, (iii) они способны распознавать образы только по какой-либо их части.

В то же время, между нейросетями и компьютерами нет жесткой границы. Начало истории искусственных нейронных сетей часто связывают со знаменитой работой МакКаллока и Питтса, опубликованной в 1943 году [63]. В ней показано, что простые сети пороговых элементов, иногда называемых нейронами МакКаллока - Питтса, могут работать как логические элементы, а значит, из них можно составить большую сеть, которая будет работать как универсальный компьютер. С другой стороны, нейронные сети обычно реализуются как программы для классических компьютеров.

Другим интересным аспектом, связанным, главным образом, с исследованиями в области искусственного интеллекта, является особый вид обучения. При обработке данных обычно известно значение выходного сигнала, которое должно соответствовать входным данным. Разницу между заданным и получающимся значением на выходе можно использовать для необходимой коррекции весов - это так называемое обучение с учителем. В задачах искусственного интеллекта, таких как управление перемещением робота,

необходимо научиться правильным действиям в заданном «состоянии» (при данной комбинации показаний сенсоров), когда правильный ответ заранее неизвестен, известен только нужный окончательный результат и отклонение от него всей ситуации в целом, сложившейся в результате множества действий. Правильные действия в каждой конкретной ситуации можно найти только в процессе множества проб и ошибок. Такой путь обучения называется «обучение поощрением» (reinforcement learning) или «обучение с критиком». Оно основано на сигналах поощрения в случае успеха или наказания при его отсутствии. Первая попытка построения искусственной нейронной сети с поощрительным обучением была предпринята М. Минским еще в 1954 году, однако существенный прогресс в развитии методов обучения поощрением был достигнут лишь в 1980-1990 годах [83]. Важной чертой этого метода является интеграция нейросети в большую систему, при этом обучение протекает как взаимодействие обучающегося «агента» со своим окружением. Мы рассмотрим эти вопросы подробнее в разделах 4 и 5.

Хорошее изложение основ нейронных сетей с позиции computer science можно найти, например, в [7].

1.3. Искусственные нейронные сети и биология

Вопросы, связанные с вычислительными возможностями и историей нейронных сетей, приводят к началам теории нейронных сетей, к биологическим аналогиям, вопросам теории восприятия (cognitive science) и теориям работы мозга (см., например, [78]). Другими словами, мы приходим к биологическому взгляду на искусственные нейронные сети. Прекрасное описание этой точки зрения можно найти, к примеру, в обзорах Фримана [34, 33].

Исследования свойств мозга в физиологии и психологии имеют значительно более давнюю историю, чем нейронные сети. Для биологии методы теории нейронных сетей - только один из многих возможных подходов. Его основная задача - моделирование и объяснение результатов физиологических экспериментов или углубление наших представлений о возможных принципах работы мозга. Подобное моделирование позволяет проверять биологические гипотезы, которые не поддаются проверке иными способами [34].

Вообще говоря, вся теория нейронных сетей обязана своим появлением открытиям в нейронауке. В 50-е годы возникли большие надежды на то, что вскорости удастся смоделировать основные функции мозга. Они возникли благодаря недооценке сложности мозга: первые оценки числа нейронов в мозге давали значения порядка 10^3 [34]. Позднее было установлено, что мозг содержит около 10^9 нейронов, каждый из которых имеет большое число связей, до 10^5 . Задача моделирования функций всего мозга в этой связи отодвинулась на неопределенный срок.

Работы по моделированию биологических структур мозга начались с воспроизведения свойств единственного нейрона или его частей. Надо заметить, что биологический нейрон значительно сложнее формальных нейронов ИНС. Например, модель распространения электрического сигнала вдоль аксона (проводника выходного сигнала нейрона) включает два уравнения в частных производных, а сравнительно простое описание динамики нейрона требует дифференциальных уравнений с запаздыванием (см., например, ссылки в [34]). Следующий уровень описания - модели групп нейронов или небольших структур мозга [34]. В этом случае основная задача состоит в построении сети, которая воспроизводила бы особенности, наблюдаемые в реальных физиологических экспериментах. Подобные модели могут быть абсолютно непохожи на те, что

используются в аппроксимирующих нейросетях. Кроме того, в случае решения аналогичных задач, биологические сети оказываются гораздо сложнее.

Важным аспектом математической биологии нейронных сетей является классификация моделей, поиск наиболее общих форм и принципов их построения. Существенный прогресс на этом пути был достигнут с использованием методов теории бифуркаций [53].

Многочисленные физиологические наблюдения демонстрируют сложность поведения мозга. Вполне вероятно, что оно является хаотическим [34, 8, 9, 38, 41]. Но почему? Какие преимущества в обработке информации может давать хаос? Необходима ли системам, обрабатывающим информацию, своя собственная внутренняя динамика и каковы в таком случае должны быть принципы их работы? Эти вопросы относятся уже к области нелинейной динамики.

1.4. Взгляд нелинейной динамики

С точки зрения нелинейной динамики, наиболее интересны общие принципы динамики исследуемой системы. Это может быть не слишком существенно для многих конкретных деталей, но зато дает основу для общего взгляда на различные типы нейронных сетей.

Мы можем сразу разделить все типы нейронных сетей на две большие категории - «функции» и «динамические системы». Вторая категория для нас более интересна, хотя про первую мы скажем в дальнейшем несколько слов. Динамические системы могут быть *консервативными* или *диссипативными*. Все известные нам динамические сети являются диссипативными. Диссипация играет важную роль в распознавании образов. Она исключает шум или несущественные детали входных данных и превращает искаженный образ в «правильный». Процедура распознавания образов, таким образом, рассматривается как процесс стремления к аттрактору динамической системы. У консервативных систем аттракторов нет, а потому они не могут работать по этой схеме. Тем не менее, в разделе 6 рассмотрен пример консервативной гамильтоновой системы, реализующей алгоритм распознавания образов. Подобные системы могут представлять интерес с точки зрения квантовой обработки информации.

Аттракторы динамической системы представляют собой выход Y нейронной сети. Входной сигнал X можно подавать двумя основными способами: как начальные данные либо как параметры динамической системы. Комбинирование этих путей в принципе возможно, но ни одна подобная сеть нам не известна. Таким образом, нелинейная динамика позволяет предложить следующую классификацию нейронных сетей соответственно способу организации отображения $X \rightarrow Y$.

1. Сети-функции: выходной сигнал получается в результате ряда явно заданных преобразований входного. Основные этапы преобразования представляют собой нейроны и веса. Подобные нейронные сети являются чаще всего обычными функциями нескольких переменных, зависящими от параметров, $Y = F(X, w)$, причем вид функции F известен (явные сети). Но, вообще говоря, определение функции может включать рекурсивные «петли». Некоторые из выходных или промежуточных сигналов могут снова подаваться на вход, так что результатом может быть неявная функция, например, $Y = F(X, Y, w)$ (рекуррентные сети). Хорошо известными примерами сетей-функций могут служить (i) многослойные персептроны и (ii) сети с радиальными базисными функциями [16, 45].

2. Динамические сети первого типа: X =начальные данные, Y =конечное состояние (аттрактор). Динамика сети может описываться (i) обыкновенными

дифференциальными уравнениями, (ii) отображениями, либо (iii) клеточными автоматами. Заметим, что в области притяжения аттрактора конечное состояние системы Y в отображении $Y=F(X)$ не зависит от X - все притягивается к одному и тому же аттрактору. Таким образом, данный тип сетей представляет интерес только когда аттракторов несколько. Поэтому мы будем называть их *многоаттракторными сетями*. Для того чтобы отображение F было задано правильно, то есть чтобы правильно обучить сеть, необходимо разместить аттракторы системы в нужных местах и обеспечить отсутствие «ложных» аттракторов. Наиболее известными сетями данного типа являются сети Хопфилда, BSB (brain state in a box), синергетический компьютер Хакена [49, 45, 27, 42].

3. Динамические сети второго типа: X —параметры динамической системы, Y —аттрактор. Как и в предыдущем случае динамические системы могут быть различного типа, но для каждого набора входных данных аттрактор должен быть единственным. Наличие нескольких аттракторов может испортить работу системы. Роль входных данных заключается в манипулировании этим единственным аттрактором, с тем чтобы в результате получалось необходимое отображение. Поэтому мы будем использовать термин *сети с управляемым аттрактором*. Хорошо известными примерами таких сетей могут служить сети Гроссберга с адаптивным резонансом, сеть Хопфилда - Танка для задач комбинаторной оптимизации и модель Фримана обонятельной луковицы [18, 99, 51].

4. Гамильтоновы нейронные сети. Сети этого типа в контексте обработки информации практически не рассматривались в литературе.

С точки зрения нелинейной динамики, наиболее интересны такие свойства искусственных нейронных сетей как сложность динамики, устойчивость и предсказуемость. В частности, представляет интерес вопрос, способен ли динамический хаос улучшать работу нейронной сети, и способен ли он играть какую-либо существенную роль в обработке информации. Основная цель данной статьи как раз и состоит в обсуждении этого вопроса. Но сначала рассмотрим более детально принципы работы некоторых важнейших типов нейронных сетей.

2. Основные типы искусственных нейронных сетей

В этом разделе кратко рассмотрим несколько основных типов нейронных сетей с позиций нелинейной динамики. Мы не ставили своей задачей сделать всеобъемлющий обзор, подобный, например, [45]. Хотим лишь отметить некоторые черты каждого типа сетей, важные с динамической точки зрения.

2.1. Сети-функции

Рассмотрим простой пример аппроксимации функции $Y=f(X)$ сигмоидной функцией $\tanh(x)$ по значениям $Y_i=F(X_i)$ в нескольких точках $X_i \in [X_{01}, X_{02}]$. Поскольку область значений гиперболического тангенса - это отрезок $[-1, 1]$, прежде всего необходимо сделать так, чтобы значения $F(X_i)$ на $[X_{01}, X_{02}]$ ему принадлежали. Этого несложно добиться линейным преобразованием (предобработкой) Y_i , которую предполагаем выполненной $Y_i \in [-1, 1]$. Затем необходимо выбрать вид аппроксимирующей функции $Y=F(X, \mathbf{w})$, где \mathbf{w} - набор параметров. Например, если зависимость близка к линейной, можно использовать функцию $Y=\tanh(w_1X+w_2)$. Затем необходимо «обучить» эту аппроксимацию на примерах, то есть найти наилучшие значения \mathbf{w} по известным парам X_i, Y_i . Подбор параметров можно осуществлять путем минимизации функционала ошибки $E(\mathbf{w})=\sum_i(Y_i - F(X_i, \mathbf{w}))^2$.

Как все это связано с динамикой? Расчет результата вообще не содержит никакой динамики. Процесс минимизации может принимать форму динамической системы, скажем, $\dot{w} = -\nabla E(w)$, но любое усложнение этой динамики воспринимается как серьезный недостаток. Тем не менее, динамика немедленно возникает при попытке рассмотрения *неявных* функций, например, $Y = \tanh(w_1 X + w_2 Y + w_3)$. Подобные неявные представления обычно более гибки, но они требуют специальной процедуры для поиска Y . Зачастую это делается путем преобразования обычного уравнения в динамическую систему, например, $\dot{Y} = -Y + \tanh(w_1 X + w_2 Y + w_3)$. Разумеется, в данном простом уравнении никакой сложной динамики быть не может, однако в его многомерных аналогах она вполне возможна и по-прежнему рассматривается как серьезный недостаток, поскольку основная задача - получить единственное нужное значение Y - остается невыполненной.

Многослойные перцептроны являются обобщением этого примера. Они включают несколько «сигмоидных» нейронов, состояния которых мы обозначим через x_i . Нейрон i получает сигналы от других нейронов через соединения с весами w_{ij} , а также внешний входной сигнал X_i . Сеть в целом выполняет преобразования вида

$$x_i = f\left(\sum_{j=1}^N w_{ij} x_j + \theta_i\right) + X_i \quad (1)$$

Здесь f часто называют функцией активации, и обычно это сигмоидная функция.

Обобщением явных функций $Y = F(X, w)$ является класс явных сетей с прямым распространением сигнала (feed-forward networks), для которых $w_{ij} = 0$ при $j \geq i$, так что сигнал распространяется только от нейронов с меньшими номерами к нейронам с большими. Первый нейрон получает только сигнал извне, второй - извне и, возможно, от первого и т.д. Для обучения таких сетей применяется метод, называемый обратным распространением ошибки. Чтобы корректировать веса при обучении, необходимо сначала найти вспомогательную «погрешность» e_i для каждого нейрона. Можно показать, что e_i удовлетворяют системе линейных уравнений с верхней треугольной матрицей (в то время как w - нижняя треугольная). Поэтому x_i рассчитывают поочередно с 1 до N , а затем e_i от N до 1, после чего рассчитывают поправки весов Δw_{ij} .

Обобщением неявных функций $Y = F(X, Y, w)$ являются рекуррентные нейронные сети, со связями в обоих направлениях. Для них ограничений на структуру матрицы w_{ij} нет. При решении системы (1) приходится использовать какие-либо итерационные схемы, то есть превращать систему нелинейных уравнений в динамическую систему. Например, вместо $x = f(wx) + X$ рассматривают

систему $x' = -x + f(wx) + X$, неподвижные точки которой дают решения исходных уравнений. Метод обратного распространения ошибки, связанный с вычислением вспомогательных погрешностей e_i , был обобщен и на рекуррентные сети [74, 45], однако уравнения для e_i более не имеют столь простого вида.

Использование рекуррентных перцептронов может сталкиваться с трудностями, поскольку (i) решение может не существовать, (ii) может быть неединственным, либо (iii) итерационная схема может приводить к нетривиальному временному поведению вместо сходимости к неподвижной точке.

Другим широко известным типом сетей-функций являются сети с **радиальными базисными функциями**. Для них выбирается скалярная базовая функция $\phi(r)$ одной переменной, а также набор узлов X_{0k} , $k=1, \dots, M$. Аппроксимация ищется в виде $F(X) = \sum_{k=1}^M A_k \phi(\|X - X_{0k}\|)$. Значения A_k можно найти, миними-

зируя функционал ошибки $E(A)=\sum(Y_i-F(X_i))^2$. Решение существует в широком классе базисных функций. Динамика, как легко заметить, отсутствует. Тем не менее, описанные типы нейронных сетей тесно связаны с нелинейной динамикой. Они используются для аппроксимации неизвестных уравнений движения динамических систем по временным рядам. Временной ряд поставляет пары X_k (текущее состояние динамической системы) и Y_k (следующее состояние), а задача заключается в аппроксимации зависимости $Y=F(X)$. Затем построенная аппроксимация может быть использована для предсказания временного ряда [96] (существует также особый тип персептронов, ориентированный на обработку временных рядов, и версия методики обучения, называемая «backpropagation through time») [45].

2.2. Многоаттракторные сети

2.2.1. Простейший пример. Рассмотрим простейший пример градиентной системы, потенциал которой имеет две ямы,

$$\dot{x} = x - x^3, \quad x(0)=X.$$

Если в качестве выходного значения взять $Y=x(\infty)$, то при $X<0$ мы получим $Y=-1$, а при $X>0$ - $Y=1$, то есть $Y=\text{sign}(X)$. Эта динамическая система распознает знак входных данных и разбивает их на два класса. Или же мы можем сказать, что в систему заложены два «образа» (+1 и -1, один бит), а начальные данные представляют собой «зашумленный» или «искаженный» образ. Система же распознает входные данные как один из двух запомненных образов.

Все прочие многоаттракторные сети функционируют аналогично: (i) запомненные образы соответствуют аттракторам динамической системы; (ii) классификация или распознавание выполняется в соответствии с тем, в области притяжения какого аттрактора окажутся начальные данные; (iii) процесс сходимости к аттрактору рассматривается как распознавание образа. Эта интерпретация подразумевает, что аттракторов должно быть больше одного.

2.2.2. Сети Хопфилда. Этот тип многоаттракторных сетей известен наиболее широко. В них каждый нейрон связан с каждым, а уравнения движения имеют вид

$$\dot{\hat{x}}_i = f(\sum_j w_{ij} x_j + \theta_i), \quad (2)$$

где \hat{x}_i - значение переменной x_i на следующем временном шаге. Важной особенностью сетей Хопфилда [49,50] (в отличие от некоторых очень близких аналогов) является асинхронность эволюции: на каждом шаге по времени изменяется состояние только одного нейрона. Заметим, что иногда термин «сеть Хопфилда» используется по отношению и к более широкому классу моделей с синхронной эволюцией или когда часть связей отсутствует.

В простейшем варианте сети нейроны являются «двоичными», то есть x_i принимает только два значения, ± 1 , а f - это «ступенька», $f(u) = \text{sign}(u)$, $\theta_i = 0$.

Обучение сети осуществляется путем запоминания двоичных образов $\xi^{(k)}$, $\xi_i^{(k)} = \pm 1$, в соответствии с «правилом Хебба»,

$$w_{ij} = 1/N \sum_{k=1}^M \xi_i^{(k)} \xi_j^{(k)}, \quad i \neq j, \quad w_{ii} = 0, \quad (3)$$

$i, j = 1, \dots, N$. Это означает, что w_{ij} увеличивается, если $\xi_i^{(k)} = \xi_j^{(k)}$, и уменьшается в противоположном случае.

Интересной особенностью сетей этого типа является существование функционала энергии или функции Ляпунова

$$E = -\sum_{i,j=1}^N w_{ij} x_i x_j.$$

Нетрудно показать, что на каждом шаге по времени E не возрастает: если не меняется x_i , остается неизменным и E . Если x_i меняется ($\hat{x}_i = -x_i$), то $\Delta E < 0$. Поскольку E ограничено снизу, эволюция должна закончиться в точке равновесия, где энергия достигает минимума.

Основным недостатком сетей этого типа является небольшой объем памяти. Если образы не выбраны особым способом, так чтобы они были практически ортогональны, как правило, сеть может верно распознавать около $0.14N$ образов. Если попытаться запомнить большее количество, возникающие аттракторы перестают соответствовать запоминаемым образам. Было предложено несколько способов борьбы с ложными образами [45, 37, 72, 66] (немонотонность f , введение в правило обучения обратной корреляционной матрицы образов, специальная десимметризация матрицы весов; лучший достигнутый результат - методика Э. Гарднера [37], дающая запоминание примерно до $2N$ образов, правда, не вполне произвольных). Мы еще вернемся к этой проблеме, когда будем обсуждать возможные роли хаоса в нейронных сетях.

Заметим, что в модели Хопфилда используется симметричная матрица весов. В случае несимметричной матрицы в синхронной модели возможно колебательное поведение, но в настоящее время оно практически не использовалось в целях распознавания образов.

2.2.3. «Мозг в ящике» («brain state in a box», BSB). Несмотря на столь претенциозное название, эти сети не сложнее предыдущей. Для них (см., например, [43, 45]) уравнения движения имеют вид

$$\dot{x}_i = f(x_i + \beta \sum_{j=1}^N W_{ij} x_j),$$

где функция $f(x) = x$ при $x \in [-1, 1]$ и $f(x) = \text{sign}(x) = \pm 1$ если $x \notin [-1, 1]$; матрица W должна быть положительно определенной. Как следует из уравнений, состояние системы всегда заключено в N -мерный куб $[-1, 1]^N$. Этот факт весьма существен для работы модели. Несложно показать, что вершины куба $|x_i| = 1$ будут устойчивыми притягивающими состояниями при условии $W_{ii} \geq \sum_{j \neq i} |W_{ij}|$ [45]. Это условие гарантирует устойчивость вершин и заодно является достаточным для положительной определенности W . Однако для матриц, возникающих на практике, лишь некоторые из вершин устойчивы. По этой причине модель BSB успешно использовалась в задачах классификации, когда каждому кластеру соответствовала одна из устойчивых вершин куба.

Матрицу W можно построить адаптивным образом по некоторой учебной выборке $x^{(k)}$ при помощи итерационного алгоритма

$$W_{k+1} = W_k + \varepsilon (x^{(k)} - W_k x^{(k)}) x^{(k)T} = W_k (1 - \varepsilon P_{x_k}) + \varepsilon P_{x_k},$$

где $P_x = x x^T$ - проектор на направление вектора x . Если эту процедуру повторять бесконечно долго для одного и того же вектора x , она сойдется к матрице W_∞ , для которой x будет собственным вектором с собственным значением $\lambda=1$, $W_\infty x = x$. Если для векторов обучающей выборки можно выделить несколько наиболее важных направлений, эта процедура способна их найти, подобно анализу главных компонент. После получения матрицы W модель BSB делает результаты

классификации видимыми: устойчивые вершины отвечают кластерам для обучающей выборки и позволяют проводить классификацию последующих данных.

2.2.4. Самоорганизующиеся сети Кохонена (self-organizing maps, SOM). Сети этого типа могут быть построены несколькими способами: как многоаттракторные сети, как сети с управляемым аттрактором, а если «разрешить» использование несколько необычной функции $\arg \max \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ (возвращающей не сам наибольший элемент x_k , а только его номер k), то и как сети-функции вообще без динамики. Из динамических реализаций проще оказывается многоаттракторный вариант, который мы и рассмотрим. Основное отличие этой сети от прочих динамических сетей состоит в том, что ее обучение никак не влияет на ее динамику. Обучение связано лишь с предобработкой входных данных.

Сеть состоит из N нейронов с конкурентной динамикой: каждый активный нейрон пытается подавлять активность прочих нейронов, так что в конце концов только один нейрон, тот, у которого значение $x(0)$ было наибольшим, остается активным, $x_k(\infty)=1$, а все прочие $x_i(\infty)=0$. Аттрактор состоит из вектора, включающего $(N-1)$ ноль и единственную единицу. Номер k победившего нейрона служит индикатором распознанного образа или кластера входных векторов. Конкретная форма уравнений движения не очень важна. Например, уравнения

могут иметь вид $\dot{x}_i = ax_i(1 - \sum_{j=1}^N x_j^2)$. Динамика работает только как «проявитель» того, у которого из нейронов входной сигнал больше. В прикладных задачах динамику часто вообще опускают и заменяют выражением $k = \arg \max_j x_j(0)$. Пример описанной выше сети с подробным анализом динамики можно найти, к примеру, в работе [10].

Все свойства к распознаванию и классификации у сетей данного типа коренятся в способе получения $x_i(0)$ из входного сигнала X . Связи между нейронами не зависят от набора образов, которые должны распознаваться. Но кроме внутренних связей каждый нейрон x_i обладает n входными связями w_{ij} , $j=1, \dots, n$, $n = \dim X$, которые и используются при получении $x_i(0)$. Так, например, $x_i(0) = R - \sum_j (X_j - w_{ij})^2$. Здесь удобно обозначить i -й столбец матрицы w_{ij} как вектор w_i , тогда $x_i(0) = R - \|X - w_i\|^2$. Очевидно, что в таком случае победителем окажется нейрон, у которого w_i ближе всего к X . Если все векторы w_i нормированы, $\|w_i\|=1$, то $x_i(0) = R - X^2 - \|w_i\|^2 + 2(X \cdot w_i)$. Поскольку лишь последний член зависит от i , то можно просто положить $x_i(0) = (X \cdot w_i)$ с тем же самым результатом распознавания. Последняя форма записи более «нейронна»: нейрон получает сигналы X_j через связи с весом w_{ij} .

Если сеть должна распознавать до N известных образов $X^{(i)}$, можно просто положить $w_i = X^{(i)} / \|X^{(i)}\|$. Сеть будет проверять, какой из известных образов ближе всего к входному сигналу и «включать» соответствующий нейрон, устанавливая соответствующий x в 1. Если требуется не просто индикатор структуры, а еще и сама структура, можно сгенерировать и n -мерный выходной сигнал. Для этого необходимо каждый из нейронов снабдить выходными связями w_i^{out} и генерировать выходной сигнал сети $Y = \sum_{i=1}^N x_i w_i^{\text{out}}$. Так как только один из x_i отличен от нуля, скажем, $x_k=1$, то выход всей сети окажется равным w_k^{out} . Если требуется воспроизвести запомненный образ, как это было в сетях Хопфилда, следует просто положить $w_i^{\text{out}} = w_i = X^{(i)}$. Однако в данном случае свободы больше и можно положить выход равным произвольному вектору $w_i^{\text{out}} = Y^{(i)}$. Такая сеть будет осуществлять отображение $X \rightarrow Y^{(k)}$ если $k = \arg \min_i \|X - X^{(i)}\|$. Области притяжения для переменных x_i отвечают областям в пространстве входных сигналов X . Эти

области иногда называют ячейками Вороного или Дирихле: если X принадлежит k -й ячейке, то ближайшим из $X^{(i)}$ к нему будет $X^{(k)}$ [59].

Самоорганизующиеся сети - это, фактически, способ обучения подобной архитектуры разбивать входные данные на «самоорганизующиеся кластеры», то есть способ создания ячеек Дирихле с учетом структуры входных данных. Допустим, что у нас есть M образов $X^{(i)}$, которые необходимо разбить не более чем на N кластеров. Очевидно, что входные веса w_i необходимо выбирать в соответствии с данными. Делается это при помощи следующей итерационной процедуры. Векторы $X^{(i)}$ поочередно предъявляются сети. После определения

нейрона-победителя x_k его входные связи w_k корректируются: $\hat{w}_k = w_k + \varepsilon(X^{(i)} - w_k)$. То есть w_k чуть-чуть сдвигается к $X^{(i)}$. После того, как данная процедура повторяется примерно 10^4 раз, веса w_k обычно дают хороший набор кластеров для классификации входных образов [59, 45].

В такой простой версии алгоритма, соседние нейроны не обязательно соответствуют близким кластерам. Поэтому Кохонен предложил несложную процедуру для большего соответствия положений кластеров положениям нейронов. Все нейроны располагаются в узлах одно- или двумерной решетки, так что у каждого нейрона появляется естественная окрестность. Далее, при обучении, веса корректируются не только у победившего нейрона, но и у его нескольких ближайших соседей, так что у соседних нейронов веса оказываются более близкими друг к другу. С течением времени размер окрестности (то есть число соседних нейронов, у которых изменяются веса) сокращается, так что в конце обучения изменения затрагивают только один нейрон-победитель. В результате близким нейронам обычно соответствуют близкие кластеры. Зачастую, когда входные векторы X двумерны, результаты обучения изображают как распределение векторов w_i на плоскости со связями, отражающими структуру нейронов. Интересно, что если нейроны располагаются в виде одномерной решетки, а распределение кластеров входных данных имеет большую размерность, то одномерная структура векторов w пытается заполнять область более высокой размерности подобно первым шагам построения фрактальной кривой Пеано. Благодаря этому свойству сети Кохонена часто называют «топологическими сетями».

Технику организации кластеров в пространстве векторов иногда называют «векторным квантованием» (vector quantizing). Ее приложения весьма многочисленны [59]. Наиболее впечатляющим среди них, видимо, является созданная Т. Кохоненом в середине 80-х годов печатающая машинка с автоматическим распознаванием устной речи: сеть была обучена соответствию между звуками речи и буквами, которые следует печатать в ответ на эти звуки [60, 59].

Идея сетей Кохонена, дающих самоорганизующееся отображение вида вектор \rightarrow номер кластера, была обобщена Р. Хехт-Нильсеном на самоорганизующиеся отображения вида вектор \rightarrow вектор [47]. Сеть получила название «counterpropagation network». В ней, фактически, проводится кластеризация векторов, состоящих одновременно из образцов как входных, так и выходных сигналов, то есть известных пар $X^{(i)}$, $Y^{(i)}$. Получающееся отображение $X \rightarrow Y$ кусочно-постоянно внутри каждой из ячеек Вороного - Дирихле, и для всех X внутри данной ячейки Y равно значению в центре соответствующей ячейки в Y -пространстве.

2.2.5. Синергетический компьютер и динамические системы с многими потенциальными ямами. Синергетический компьютер был предложен Г. Хакеном [42]. Он напоминает непрерывную версию сетей Хопфилда [50], однако с

некоторыми изменениями. Для запоминания образов также используется матрица, сформированная по правилу Хебба. Однако вместо сигмоидной функции, обеспечивающей ограниченность правых частей уравнений движения, для стабилизации образов используются полиномиальные члены высших порядков.

Другим способом построения динамической системы с неподвижными точками в нужных местах послужил специальный выбор потенциала градиентной системы вида $U(\mathbf{x}) = \sum A_i V(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$. Подбирая параметры, можно решить проблему взаимной интерференции аттракторов. Этот способ был предложен в начале 90-х, однако распространения не получил. Видимо, с одной стороны, в нем совсем уже нет никаких нейронных аналогий, а, с другой стороны, он лишен мистического очарования сетей Хопфилда, где формирование аттракторов - процесс далеко не очевидный.

Мы описали лишь некоторые, как нам казалось, наиболее важные типы многоаттракторных сетей. Хотя для их «классических» версий сложная динамика совершенно несущественна, ниже мы рассмотрим несколько попыток преодолеть с ее помощью некоторые недостатки сетей, например, ложную память в сетях Хопфилда.

2.3. Сети с управляемым аттрактором

2.3.1. Простой пример. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = -x + X.$$

Это градиентная система с потенциалом $U(x) = x^2 - Xx$. Входные данные этот потенциал изменяют. Для любых начальных данных $x(0)$ конечное состояние $x(\infty) = X$. Следовательно, система осуществляет тождественное преобразование $Y = X$.

Разумеется, тем же путем можно реализовать и другие функции. Скажем,

система $\dot{x} = -x + \tanh(X)$ порождает сигмоидный выходной сигнал. Другой (и, возможно, более интересный) результат может быть достигнут при помощи системы

$$\dot{x} = - [ax/(1 - x^2)] + X.$$

Она порождает отображение

$$Y = 2X/[a + (a^2 + 4X^2)^{1/2}],$$

то есть тоже почти сигмоидную функцию. Заметим, что при малых a эта функция близка к ступеньке $Y = \text{sign}(X)$ и может быть использована для целей классификации или распознавания, подобно случаю многоаттракторных сетей.

Следует, однако, заметить, что интерпретация $x(\infty)$ как значения функции $F(X)$ возможна только при условии, что при каждом X динамическая система имеет единственный аттрактор, который должен быть неподвижной точкой. В противном случае у F может оказаться несколько значений при одном и том же X , или же предельное значение $x(\infty)$ может не существовать. Обычно разработчики нейронных сетей стараются избегать подобных ситуаций и используют теоремы, гарантирующие существование устойчивой неподвижной точки, например, известную теорему Коэна - Гроссберга [39]. Как правило, существование функции Ляпунова для уравнений динамики сети и отсутствие сложной временной динамики считается большим достоинством.

Некоторые сети можно построить обоими путями, и как многоаттракторную сеть, и как сеть с изменяемым аттрактором, например, сети Кохонена, рассмотренные в предыдущем разделе. В последнем случае входной сигнал X должен постоянно подаваться на вход сети и служить в качестве параметров в

уравнениях движения. Другими известными примерами сетей с изменяемым аттрактором являются сети Гроссберга с адаптивным резонансом и модель обонятельной луковицы, предложенная В. Фриманом. Последняя демонстрирует сложную временную динамику и мы обсудим ее в разделе 3.

2.3.2. Сети с адаптивным резонансом (*adaptive resonance theory, ART*).

Подобно сетям Кохонена, базовая ART-сеть получает на входе X и выдает на выходе индикатор соответствующего кластера. Некоторые обобщения приведены в работе [18]. Согласно этой работе, правильное функционирование сети ART требует довольно тщательной настройки. Поэтому приводимое обсуждение - это только краткий обзор некоторых идей, лежащих в основе ART, а не рекомендация по построению таких сетей.

Нейроны в сети располагаются тремя слоями: входной слой, на котором сигнал X фиксирован, преобразованный входной слой F_1 (состояния его нейронов будем обозначать x_i) и выходной слой F_2 (с элементами y_j). Поскольку, как и в случае SOM, выход сети обозначает номер кластера, только одно из y_j в конце концов должно остаться ненулевым. Обработка информации в сети протекает по следующей схеме: $X \rightarrow F_1 \leftrightarrow F_2 \rightarrow \text{выход}$.

В наиболее компактном и удобном виде уравнения движения приведены в [80]. Мы рассмотрим только вариант ART1, разработанный для классификации двоичных входных данных, когда компоненты X могут принимать только значения 0 или 1. Динамика на слое F_1 описывается уравнениями

$$dx_i/dt = -x_i + (1 - A_{11} x_i)(X_i + \sum_j T_{ij} f(y_j)) - (A_{12} + A_{13} x_i) \sum_j f(y_j).$$

Первый член в правой части гарантирует, что в отсутствие входного сигнала $x \rightarrow 0$. Второй член обеспечивает ограниченность x при наличии входного сигнала. Сумма $X_i + \sum_j T_{ij} f(y_j)$ приводит к тому, что x может существенно вырасти, только если входной сигнал X соответствует образу, запомненному в матрице обратных ($F_2 \rightarrow F_1$) связей T - так называемый «ожидаемый вход», отвечающий текущему состоянию слоя F_2 . Третий член позволяет подавить существующее состояние x , когда отсутствует соответствие между входом и ожиданием. Функция f - это сигмоида: $f(x) = 0$ при $x \leq 0$, а при $x > 0$ она растет и стремится к 1.

Уравнения для слоя F_2 выглядят аналогично,

$$dy_j/dt = -y_j + (1 - A_{21} y_j)(f(y_j) + \sum_i B_{ij} f(x_i)) - (A_{22} + A_{23} y_j)(\sum_{k \neq j} f(y_k) + r_j).$$

Второй член в правой части, как и в сети Кохонена, возбуждает нейроны верхнего слоя в соответствии в матрицей прямых связей B_{ij} плюс некоторое самовозбуждение, а третий член ограничивает активность нейронов и включает особый член сброса, о котором мы скажем ниже.

Динамика обучения для матриц B и T довольно проста и напоминает случай сетей Кохонена

$$\tau dT_{ij}/dt = f(y_j)(f(x_i) - T_{ij}), \quad \tau dB_{ij}/dt = f(y_j)[f(x_i)/(1 + |F_1|) - B_{ij}],$$

где $|F_1|$ - активность слоя F_1 (количество активных нейронов в слое). Согласно этим уравнениям, обучение происходит только для тех связей, которые идут к активному нейрону y_j , а запоминается образ, возникающий в слое F_1 . Уравнения выражают хорошо известное правило Хебба.

Рассмотрим теперь, как работает сеть. Входной образ X активизирует слой F_1 , а тот, в свою очередь, через матрицу связей B порождает некоторую структуру в слое F_2 , где один из y_j оказывается активирован. Образ, запомненный в матрице T , отвечающий $y_j = 1$, порождает сигнал обратной связи для слоя F_1 . Если эти два

сигнала соответствуют друг другу, сеть остается в этом состоянии и подстраивает к нему матрицы B и T . Если же входной и обратный (ожидаемый) образы недостаточно близки, запускается механизм поиска. Прежде всего, активируются переменные сброса r ,

$$\tau_r (dr/dt) = f(y_j)(Df(v|X|-|F_1|) - r_j).$$

Здесь v - так называемый «параметр бдительности», который характеризует близость двух образов, а $|X|$ и $|F_1|$ обозначают количество активных нейронов в слоях X и F_1 . После активации r_j подавляет нейрон y_j в слое F_2 (для лучшей работы сети он должен оставаться в этом состоянии до конца поиска). Тогда влияние обратной связи временно исчезает, структура слоя F_1 восстанавливается и сеть начинает активировать другой нейрон в F_2 . Если его ожидаемый образ, записанный в T , также не соответствует, он подавляется, и поиск продолжается до тех пор, пока подходящий нейрон не будет найден. Это может оказаться и новый нейрон, для которого ожидаемый образ еще не сформировался, тогда начнется формирование нового кластера. Или же все нейроны в слое F_2 могут быть исчерпаны, тогда сеть неспособна классифицировать входной сигнал.

Соответствие образов в слоях F_1 и F_2 С. Гроссберг назвал адаптивным резонансом. Мы описали его механизм лишь в самых общих чертах. Существует несколько вариантов таких сетей: ART1 для двоичных образов, ART2 для «аналоговых» сигналов, ART3 - где слои F_1 и F_2 симметричны. Кроме того, каждый вариант включает несколько версий. Заметим, что правильное функционирование сети требует весьма тонкой настройки всех параметров, детальное описание можно найти в работах [19, 20, 21, 39, 18, 80].

Интересной особенностью сетей ART1 и ART2 является то, что их можно активировать с обеих сторон, то есть слой F_2 , в принципе, можно сделать входным. Тогда два модуля ART2 можно объединить, так что первый получает входной сигнал и классифицирует его, а второй получает номер класса на свой слой F_2 и генерирует аналоговый выходной сигнал на своем F_1 . Такая комбинированная сеть получила название ARTMAP [22]. Подобно counterpropagation сети Хехт-Нильсена, такая конструкция дает кусочно-постоянную аппроксимацию неизвестной векторной функции многих переменных.

2.3.3. Оптимизирующая сеть Хопфилда - Танка. Эта сеть была предложена в работе [51]. Уравнения движения сети совпадают с уравнениями непрерывной версии сети Хопфилда [50]

$$dx_i/dt = (-1/\tau)x_i + \sum_{j=1}^N w_{ij} f(x_j) + I_i, \quad (4)$$

где f - сигмоидная функция, w - матрица связей, а I_i - порог срабатывания нейрона i .

Уравнения (4) описывают динамику скорейшего спуска $\dot{x} = -\nabla E$ для некоторого функционала энергии $E(f, w, I)$, а потому конечное состояние должно быть неподвижной точкой, отвечающей минимуму E . Обучение сети заключается в построении матрицы w и сдвигов I специальным образом, чтобы поместить точку минимума в нужное место фазового пространства. Слабость метода состоит в том, что трудно гарантировать отсутствие ложных аттракторов. Ниже, в разделе 3 мы увидим, как хаос позволяет избегать ложных минимумов.

Для задачи коммивояжера Хопфилд и Танк предложили специальный вид функционала энергии, зависящего от расстояний между городами d_{xy} , которые следует посетить. Следовательно, мы приходим к общему виду задачи об управляемом аттракторе с параметрами d_{xy} . Из-за ложных аттракторов решения,

найденные сетью, могут не быть оптимальными, но, согласно [51], достаточно близки к ним.

2.3.4. Прочие сети. Существуют и другие сети с управляемым аттрактором. Например, в эту категорию попадает хорошо известная машина Больцмана, поскольку во время обучения часть ее нейронов фиксируется и играет роль параметров, а не динамических переменных. Сюда же относится и модель обонятельной луковицы Фримана [35]. Некоторые сети этого типа мы рассмотрим в следующем разделе.

3. Сложная динамика как средство улучшения нейронных сетей

Искусственные нейронные сети зарекомендовали себя как универсальный инструмент в задачах аппроксимации, распознавания образов и т.п. Тем не менее, зачастую их применение связано с рядом трудностей. Скажем, для сетей-функций проблемы возникают при попытке аппроксимации слишком сложных функциональных зависимостей: слишком простая сеть неспособна дать правильную аппроксимацию, а слишком сложная начинает усиливать шум (с этой проблемой в ее простейшем виде хорошо знаком каждый, кто сталкивался с задачей выбора степени полинома при полиномиальной аппроксимации одномерной зашумленной функции). Этот эффект был назван «overfitting» («переаппроксимация»). При этом решение обычно ищется с помощью введения иерархических структур сети, получивших название модульных сетей и ансамблей сетей [82].

Для обычных динамических сетей, рассмотренных выше, типичными проблемами являются (i) ложная память, (ii) слишком медленная сходимость к аттрактору и (iii) неспособность воспроизводить реальную активность мозга.

Динамика, в самом деле, имеет определенный потенциал в области обработки информации. Например, очень интересная идея была предложена А.С. Дмитриевым: изображение запоминается в виде длинного цикла динамической системы, а каждый шаг цикла отвечает одному пикселу изображения.

Другой тип сетей со сложной динамикой возник из аналогии между нейроном или небольшой группой нейронов и осциллятором. Такая сеть представляет собой решетку связанных осцилляторов. Запись и обработка информации может осуществляться с использованием фазы осцилляторов. Такие сети осцилляторов могут использовать принципы работы сетей Хопфилда [52] или иных типов сетей (см., например, [69, 48]).

Идея того, что нейронная сеть может работать в хаотическом режиме, также высказывалась в ряде работ. Хороший обзор основных направлений в этой области на начало 90-х годов приведен в [34, 93], и мы не будем повторять то, что уже было сказано. Кратко скажем о некоторых моделях, отражающих основные направления в данной области. Потенциальная польза от хаоса вытекает из следующих его свойств [28, 40].

1. *Локальная неустойчивость.* Она может быть полезна для устранения ложной памяти и избегания траекторий, ведущих в нежелательные области фазового пространства. Однако эти свойства хаоса могут быть полезны лишь в течение переходного периода, пока траектория не сойдется к «истинному образу». После этого динамика снова должна стать устойчивой.

2. *Порождение информации.* Это свойство хаоса выглядит наиболее привлекательно. Тот факт, что хаотическая система ведет себя неожиданным

образом, может быть использован для поиска новых способов решения проблем. Иными словами, хаос может помочь в *освоении новых возможностей*. Однако современные нейронные сети неспособны использовать это свойство, поскольку их желаемое поведение должно быть полностью предсказуемым: они всегда должны давать один и тот же отклик на данный входной сигнал. Были попытки использовать хаос в алгоритмах случайного поиска минимума при обучении многослойных персептронов, однако детерминированные алгоритмы оказались лучше. Нейронные сети, способные осваивать возможности при обучении, еще только предстоит создать.

3. *Блуждание по аттрактору*. Это свойство тесно связано с неустойчивостью. Делались попытки использовать его как средство поиска нужного образа на хаотическом аттракторе. Траектория блуждает между различными образами, и идея состояла в том, чтобы использовать это свойство для сравнения входных данных с запомненными образами. Были получены кое-какие предварительные результаты, однако соответствующий алгоритм распознавания образов так и не был создан.

4. *Сходство со сложной динамикой мозга*. Ряд попыток был предпринят, главным образом, Фриманом и его сотрудниками [34, 31, 32, 99] для создания нейронной сети со структурой, напоминающей строение части мозга - обонятельной луковицы. Активность мозга сильно изменяется со временем, то же бывает справедливо и для хаотических систем. Оказалось, что поведение полученных моделей напоминает экспериментальные сигналы, снятые с реального мозга.

5. Наконец, хаос может не играть никакой особой роли: можно создать многоаттракторную систему с периодическим или хаотическим аттрактором вместо неподвижной точки [10]. Тип или номер аттрактора может рассматриваться как результат распознавания, хотя при этом может потребоваться специальная декодирующая система, преобразующая хаотический сигнал в информативный отклик сети.

Ниже мы рассмотрим несколько примеров хаотических нейросетей.

3.1. Переходный хаос как средство от ложной памяти

3.1.1. Хаотизация сети Хопфилда - Танка. Одним из недостатков модели Хопфилда - Танка было наличие множества локальных минимумов энергии. Для преодоления этой трудности некоторые исследователи [87, 62] использовали переходный хаос и шум. Недавно Kwok и Smith [62] развили обобщенный подход для сетей такого типа. Мы, однако, ограничимся только одним примером для пояснения общей идеи.

Chen и Aihara [24] применили переходный хаос в сети, описываемой уравнениями

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= kx_i(t) + \alpha(\sum_{j=1, j \neq i}^N w_{ij}f(x_j(t)) + I_i) - z(t)(f(x_i(t)) - I_0), \\ z(t+1) &= (1-\beta)z(t), \end{aligned} \tag{5}$$

где $z(t) \geq 0$ - член самовозбуждения, а $0 \leq \beta \leq 1$ - коэффициент затухания. Эти уравнения можно получить из уравнений, аналогичных (4), введением дискретизации по времени. Благодаря последнему члену, содержащему $z(t)$, система может демонстрировать хаотическое поведение. Эволюция начинается с больших значений $z(t)$, чтобы обеспечить существование хаоса, а затем $z(t)$

уменьшается в соответствии с (5) и система получает возможность сойтись к нужному аттрактору. Таким образом, хаос помогает бороться с ложной памятью.

Другой пример сети с переходным хаосом для задач оптимизации предлагался в [23]. Сеть снова является отображением, но на этот раз с запаздыванием

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^N w_{ij} f(x_j(t)) + I_i + g(x_i(t) - x_i(t-1)), \quad (6)$$

где f , как обычно, сигмоидная функция, а $g(x) = ax \exp(-b|x|)$. В стационарном состоянии последний член пропадает, поэтому неподвижные точки (6) те же, что и в модели Хопфилда - Танка (4).

Член g усложняет уравнения и приводит к хаотическому блужданию. Благодаря ему ложные устойчивые состояния модели Хопфилда - Танка при численном моделировании становятся неустойчивыми, хотя траектории задерживаются на некоторое время вблизи них. Для того чтобы обеспечить сходимость к глобальному минимуму, авторы [23] предложили специальную схему изменения параметров a и b . Как показали эксперименты, сеть успешно справилась с задачей коммивояжера.

Модификация модели Хопфилда - Танка с аддитивным хаосом или шумом рассматривалась также в [44].

3.1.2. Сети хопфилдовского типа с переходным хаосом. Эта сеть была предложена в работе [55]. Идея заключалась в том, чтобы заменить простой пороговый хопфилдовский нейрон одномерной динамической системой $x_{t+1} = f(x_t, \mu)$ - нейроном со своей собственной внутренней динамикой.

Получающаяся сеть отображений управляется энергией системы E через параметр μ . Если энергия большая, динамика системы хаотическая, а когда энергия понижается, траектория отображения стремится к одной из неподвижных точек, близких к ± 1 . Следовательно, во время переходного периода динамика системы хаотическая, а вблизи энергетического минимума она становится регулярной. Уравнения движения каждого «нейрона» имеют вид

$$x_i(t+1) = f(x_i(t), E_i), \quad (7)$$

где

$$F(x, E) = [K(E)(x + |E|)] \bmod 2 - 1, \quad K(E) = 2(1 + |E|)^{-1} \quad (8)$$

(хаотическое поведение при $|E| < 1$ и регулярное в противном случае). Параметр E можно назвать локальной энергией системы

$$E_i(t) = \lambda \sum_{j=1}^N w_{ij} x_j(t).$$

Матрица w , как и в исходной модели Хопфилда, строится по правилу Хебба (3). Определение локальной энергии E_i включает параметр λ , который описывает взаимодействие нейронов: при $\lambda = 0$ сеть распадается на N независимых отображений, а при $\lambda = \infty$ получается обычная модель Хопфилда.

Численные эксперименты показывают, что при больших значениях λ система действительно ведет себя как модель Хопфилда, но при меньших значениях (в примере, рассмотренном в [55], $\lambda \leq 5$) возникает существенная разница: почти все ложные образы становятся неустойчивыми, и система либо остается в хаотическом состоянии в течение длительного времени, либо сходится к одному из запомненных образов. В данном случае хаос позволяет избавиться от ложных образов.

3.1.3. Решетка связанных отображений с нестационарными синхронными кластерами. Сети данного типа описаны в [54]. Они основаны на решетке связанных отображений с уравнениями движения

$$x_i(t+1) = (1 - \varepsilon_i) f_i(x_i(t)) + (\varepsilon_i / N) \sum_{j=1}^N f_j(x_j(t)), \quad (9)$$

$$f_i(x) = \alpha_i x^3 - \alpha_i x + x, \quad 2 \leq \alpha_i \leq 4. \quad (10)$$

Существуют две версии системы: α -версия, когда $\varepsilon_i = \varepsilon$, α_i различны, и ε -версия, когда $\alpha_i = \alpha$, ε_i различны. Бифуркационная диаграмма для одного отображения (10) напоминает случай логистического отображения. Кодирование информации в сети очень простое, положительные значения $x > 0$ кодируют +1, а отрицательные -1.

Идея распознавания образов при помощи решеток связанных отображений основана на том, что в решетке (9) при $\alpha_i = \alpha$ и $\varepsilon_i = \varepsilon$ существует область параметров (α, ε) , где она распадается на синхронизованные кластеры, отвечающие периодическому поведению. При этих параметрах система обладает довольно высокой степенью «сохранности информации», то есть поведение сильно зависит от начальных данных, и существует большая корреляция между $x(t)$ и $x(0)$. При больших значениях α или меньших ε в хаотическом состоянии это свойство теряется.

Идея методики состоит в том, чтобы определить локальный функционал энергии $E_i = -x_i \sum w_{ij} x_j$ и использовать хаос в качестве отжига, чтобы разрушить нежелательные корреляции. Матрица связей w формируется согласно правилу Хебба из образов $\xi^{(k)}$, которые надлежит запомнить, $w_{ij} = \sum_k \xi_i^{(k)} \xi_j^{(k)}$. Тогда в α -версии динамика x дополняется динамикой α

$$\alpha_i(t+1) = \begin{cases} \alpha_i(t) + (\alpha_i(t) - \alpha_{\min}) \tanh(\beta E_i) & \text{каждые 16 шагов,} \\ \alpha_i(t) & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Значение α_{\min} отвечает фазе кластеров. Уменьшение α согласно этому соотношению вызывает переход к упорядоченной фазе, когда локальная энергия становится достаточно малой.

Численные эксперименты показали, что эта система работает как ассоциативная память и ее емкость составляет примерно $0.18N$. Похожие характеристики получены и для ε -версии алгоритма.

Другая версия алгоритма распознавания с переходом хаос \rightarrow порядок была предложена в работе [67].

Отметим, что описанная сеть не использует хаос для распознавания. Она использует его только в течение небольшого переходного периода, хотя поведение системы всегда остается нестационарным.

3.1.4. А что если переходный период - это навсегда (фильтр новизны). Всегда существует возможность, что при какой-либо комбинации входных параметров вместо кратковременного переходного хаоса может возникнуть хаотический аттрактор или длительность переходного периода будет так велика, что конца его можно не дожидаться. Скарда и Фриман [85] предположили, что такое состояние может означать ответ «я не знаю», то есть нейронная сеть столкнулась с чем-то таким, чему она не была обучена (см. также [55]). Подобное состояние, также как и несоответствие прямого и обратного образов в сетях ART, в принципе можно использовать как фильтр новизны, то есть инициировать фазу обучения. Однако, насколько нам известно, примеры таких сетей в публикациях не появлялись.

3.2. Хаос и поиск образов

Когда траектория движется по хаотическому аттрактору, она посещает его части одну за другой. Если связать различные части аттрактора с разными образами, траектория будет блуждать между ними. Вообще говоря, это блуждание могло бы быть использовано для организации ассоциаций: если траектория проводит длительное время вблизи лишь одного образа, а остальные посещает гораздо реже, то наиболее часто посещаемый образ можно считать «распознаваемым», а если есть некоторая цепочка образов, которые посещает траектория, их можно рассматривать как «связанные» друг с другом. Заметим, что цепочку образов можно записать и в сеть типа Хопфилда. Быть может, однако, хаос способен менять эти комбинации, что давало бы возможность добавлять новые образы, либо использовать один и тот же образ в нескольких цепочках. Подобные идеи так и не были полностью реализованы, но некоторые предварительные результаты получить удавалось.

Для исследования возможностей ассоциирования образов друг с другом Tsuda [93] предложил модель, которая в главных чертах напоминает сеть типа Хопфилда. Изначально образы запоминаются по правилу Хебба, но затем матрица связей динамически изменяется. Было показано, что ассоциирование образов друг с другом действительно имеет место, однако контролировать этот процесс в достаточной степени не удается.

Другой пример модели с ассоциативной хаотической динамикой был предложен в работе [1] и цитированной в ней литературе. Уравнения движения этой сети имели вид

$$\begin{aligned}x_i(t+1) &= k_f x_i(t) + \sum_{j=1}^N w_{ij} f(x_j(t) + y_j(t)), \\ y_i(t+1) &= k_y y_i(t) - \alpha f(x_i(t) + y_i(t)) + a_i,\end{aligned}$$

где $0 \leq x, y \leq 1$, $f(x) = 1 / (1 + \exp(-x/\epsilon))$, а образы запоминаются в соответствии с правилом Хебба, $w_{ij} = \sum_k (2\xi_j^{(k)} - 1)(2\xi_i^{(k)} - 1)$.

Результаты численного моделирования показывают, что траектории системы посещают окрестности запомненных образов. После округления (округления x до 0 или 1) некоторые состояния системы совпадают с запомненными образами. Однако сеть неспособна выделить только один образ, который можно было бы интерпретировать как выходной сигнал. Приведенные в упомянутой работе результаты демонстрируют некоторую зависимость поведения системы от начальных данных, однако не вполне ясно, соответствует ли эта разница (i) различным аттракторам, (ii) переходным процессам или же (iii) недостаточной длине траектории чтобы набрать хорошую статистику.

Хаотическое блуждание среди запомненных образов изучалось также в [26] и было названо «хаотическим сканированием памяти».

Другая попытка использования хаоса в задачах распознавания была предпринята в [86, 87, 88, 89]. Было замечено, что образы можно распознавать при помощи наименьшего времени синхронизации, требуемого для полной или фазовой синхронизации входного образа с уже известными. Достоинство подхода в том, что данная процедура является достаточно общей и может быть использована как в хаотических, так и в нехаотических сетях. Кроме того, конечное состояние не обязано быть устойчивой неподвижной точкой. Недостаток метода в том, что одновременно должны работать по крайней мере две копии динамической системы - для входного и для запомненного образа. Другой результат, который может быть

полезен, состоит в том, что неустойчивые неподвижные точки можно превращать в устойчивые при помощи методик поиска корней уравнений. В принципе таким образом можно увеличивать емкость сети, используя для хранения образов неустойчивые периодические орбиты. Однако для этого необходим способ отображения образов на эти орбиты и назад.

3.3. Хаос вместо неподвижной точки

Как уже говорилось в начале раздела 3, можно организовать многоаттракторные сети и сети с управляемым аттрактором не только при помощи аттракторов типа неподвижной точки, но также и с другими типами аттракторов. Один из простейших рецептов создания такой многоаттракторной сети описан в [10] - много идентичных маломодовых систем с периодическим или странным аттрактором объединяются в сеть типа Кохонена со взаимной конкуренцией, в которой «выживает» только одна из них; выжившая система с ненулевой амплитудой служит индикатором распознанного образа. Для сетей с управляемым аттрактором такого простого и наглядного примера построено не было. Возможно, причина тому - сложная структура бифуркаций хаотических аттракторов, а также то, что различить аттракторы, отвечающие разным значениям параметров, и интерпретировать их как разные отклики сети зачастую исключительно сложно. Тем не менее, одна из наиболее знаменитых хаотических сетей принадлежит именно к классу сетей с управляемым аттрактором. Это модель обонятельной луковицы, предложенная Фриманом.

В течение нескольких десятилетий исследования обонятельной системы были одной из основных целей У. Фримана и его коллег [99, 31, 32, 30, 85] и ссылки в этих работах. После многих лет изучения строения обонятельной луковицы они пришли к выводу, что исследования только нейронов и структуры их связей недостаточно для того, чтобы понять механизмы, ответственные за распознавание запахов. По этой причине они построили несколько математических моделей обработки информации обонятельной луковицей. Оказалось, что поведение моделей качественно согласуется с экспериментально полученными энцефалограммами, а динамика моделей хаотическая.

Модели весьма сложны. В наиболее известной из них каждая ячейка памяти описывается восемью дифференциальными уравнениями второго порядка, которые соответствуют группам нейронов различной специализации в пределах

каждой ячейки. Все уравнения имеют один и тот же общий вид $\ddot{x}_i + A\dot{x}_i + Bx_i = G_i$, а члены в правой части отличаются для нейронов разных типов [99]. Некоторые из G_i включают входные данные X , у других есть члены с запаздыванием (зависящие от прошлых значений x). Есть нейроны, ответственные за связь с другими ячейками памяти, и для них G_i включает член вида $\sum K[i,j]Q(x[j])$, где Q - функция типа сигмоиды, а $x[j]$ соответствует такому же «связному» нейрону из j -й ячейки.

Информация в этой сети хранится в связях $K[i,j]$. Они могут принимать только два значения, K_{\min} и K_{\max} . Изначально все связи устанавливаются в K_{\min} , а чтобы записать образ, в котором ячейки i и j активны, соответствующая связь $K[i,j]=K[j,i]$ устанавливается в K_{\max} (правило Хебба).

Сеть работает следующим образом. В отсутствие внешних сигналов наблюдаются хаотические колебания на аттракторе системы. Когда предъявляется некоторый входной образ, система стабилизируется в каких-то областях бывшего аттрактора. Для пояснения основной идеи можно рассмотреть аттрактор с несколькими «крыльями», вроде аттрактора Лоренца. В состоянии базовой

активности траектория посещает все части аттрактора, а внешний сигнал, «знакомый» системе, запирает траекторию на одном из крыльев (то есть новый аттрактор для данных значений параметров X съезживается до размеров одного крыла). Динамика остается хаотической, но только в новой меньшей области. То, что траектория не уходит с «крыла», можно декодировать в отклик сети, например, при помощи вычисления временных средних.

Существуют и другие хаотические модели обонятельной луковицы (см., например, [6]), однако они не настолько хорошо согласуются с биологическими данными.

3.4. Рекуррентные сети как генераторы хаотических сигналов

Существует ряд работ, в которых нейронные сети рассматриваются вне контекста обработки информации, просто как модели некоторой биологической системы или как удобное представление уравнений движения динамической системы. При этом не изучаются вопросы вычислений, аппроксимации, ассоциативной памяти и т.п. (см., например, [34, 2, 3, 61, 70]). Мы не будем рассматривать этот тип сетей. В самом деле, совсем несложно сконструировать нейронную сеть в виде рекуррентного персептрона (раздел 2), обладающую хаотическим поведением. Подобные сети не отвечают на вопрос о роли хаоса в обработке информации. Однако, если такая роль *существует*, подобные нейронные сети могут оказаться удобными генераторами хаоса [75].

3.5. Что же не так с хаотическими нейронными сетями?

Мы упомянули лишь некоторые из работ, связанные с хаотическими нейронными сетями, чтобы проиллюстрировать основные направления исследований в этой области. Однако общим для *всех* таких сетей, насколько нам известно, является то, что они не используются в практических приложениях. Единственное исключение - эксперимент, описанный в [100]. Многослойные персептроны, сети Кохонена или Гроссберга используются весьма широко, в то время как хаотические сети уже лет 15 остаются только объектом теоретических изысканий. Как гласит один из законов Мерфи, «если этим никто не пользуется, должна быть причина». В чем же причина? С нашей точки зрения, она в том, *как* используются нейронные сети. Существующий способ их использования можно назвать «изолированными вычислениями». Задача сети сводится лишь к тому, чтобы генерировать вполне определенный и всегда один и тот же отклик на заданный входной сигнал. Хаотическая динамика, которая неустойчива по определению, может лишь сделать подобные вычисления ненадежными. Поэтому в такой схеме нет никакой естественной ниши для динамического хаоса.

В противоположность сетям такого типа мозг всегда действует как часть тела. Он постоянно обрабатывает информацию, приходящую извне, и управляет телом, с тем чтобы действовать и менять свое окружение. Иными словами, мозг функционирует как часть кольцевой связки: мозг - действие - окружающий мир - ощущение - мозг. Возможно, что именно встроенность мозга в тело позволит объяснить преимущества его работы в хаотическом режиме. Кроме того, хаос может просто возникнуть как результат положительных обратных связей в этом кольце.

Заметим, что проблема «встроенности интеллекта» широко обсуждалась в исследованиях по искусственному интеллекту в последние 15 лет, неплохой обзор

приведен в [73]. Соответствующий подход, получивший название «behavior based robotics» или «embodied cognitive science», привел к возникновению ряда эффективных практических решений и новых теоретических концепций. Более того, на примере небольшого робота, управляемого сравнительно несложной нейронной сетью, было показано, что замыкание связей через окружающий мир способно приводить к сложному, возможно, хаотическому поведению робота [73] (правда, насколько нам известно, никто не пытался количественно оценивать сложность такого поведения).

Другим естественным источником сложного временного поведения могут быть особые реализации нейронных сетей: использование ансамблей связанных осцилляторов для организации вычислений, например, [52, 48, 69]. В разделе 6 мы обсудим это более детально.

4. Замыкание связей в кольцо: хаос при комбинировании управляющей нейронной сети и управляемой системы

Как уже говорилось в разделах 2, 3, один из простейших способов получить хаос - это взять сеть-функцию, скажем, многослойный нерекуррентный перцептрон, аппроксимирующий уравнения движения хаотической системы, и подать его выход обратно на вход. Получится хаотическая динамическая система. Однако она не занимается никакой полезной обработкой информации. Но если мы поместим между выходом и входом сети некоторую систему, которой необходимо управлять, то обратная связь останется, а сеть будет решать задачу обработки информации. В данном разделе мы приведем довольно простые примеры того, как хаос может возникать в паре управляющая сеть - управляемая система. Хаотический сигнал может регистрироваться в любой части такой комбинированной системы. Этот эффект, кстати, может оказаться одним из источников хаотической активности мозга.

Сейчас мы рассмотрим только хаос, возникающий в задачах обработки информации. В следующем разделе мы рассмотрим роль хаоса в процессе обучения подобной системы контроллер - объект.

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = \lambda x + f, \quad \lambda > 0. \quad (11)$$

При $f=0$ у нее есть неустойчивая точка равновесия $x=0$. Предположим, что мы можем управлять этой системой, прикладывая «силу» f в дискретные моменты времени $t_k = \tau k$. После этого сила остается постоянной до следующего момента переключения t_{k+1} . Абсолютная величина силы $|f|=f_0$ остается постоянной, можно менять лишь ее направление. Цель состоит в том, чтобы удерживать траекторию вблизи точки $x=0$. Таким образом, в каждый из моментов t_k мы знаем $x(t_k)$, и нам следует принять решение относительно направления, в котором следует направить силу.

Эта задача очень проста. Обозначим $x_k = x(t_k)$. Поскольку $f_k = f(x_k)$ остается неизменной вплоть до t_{k+1} , из (11) следует, что $x_{k+1} = \exp(\lambda\tau)x_k + [\exp(\lambda\tau) - 1]f_k/\lambda$. Легко проверить, что выбор $f_k = -f_0 \text{sign}(x_k)$ решает поставленную задачу, и в результате поведение системы описывается следующим одномерным отображением:

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad g(x) = \begin{cases} \exp(\lambda\tau)x - A, & x \geq 0, \\ \exp(\lambda\tau)x + A, & x < 0, \end{cases} \quad A = [\exp(\lambda\tau) - 1]f_0/\lambda. \quad (12)$$

График $g(x)$ приведен на рис. 1. Легко видеть, что траектория остается вблизи неустойчивой точки при условии $|x(0)| < f_0/\lambda$. Так как $dg(x)/dx = \exp(\lambda t) > 1$, возникает хаотический аттрактор с ляпуновским показателем, равным λ .

Управление системой может осуществлять «сеть» из одного порогового нейрона, который получает на входе x_k и генерирует сигнал ± 1 , показывающий направление силы. Поскольку аттрактор хаотический, последовательность сигналов нейрона будет выглядеть случайной. Источником этой случайности является дискретное управление неустойчивым состоянием равновесия.

Этот пример поясняет основную идею, но имеет два недостатка: (i) в нем нет обучения и (ii) нет настоящей нужды в использовании нейронной сети. Поэтому рассмотрим более сложные примеры дискретного управления. Множество таких примеров можно найти, например, в литературе по искусственному интеллекту [65].

Простейшим обобщением рассмотренного примера является перевернутый маятник, который необходимо удерживать в окрестности верхней точки. Можно, однако, показать, что эта проблема сводится к рассмотренному выше примеру, поскольку неустойчивое многообразие в задаче о перевернутом маятнике одномерно.

Более интересна задача о балансировании стержня на тележке, одна из хорошо известных тестовых задач в области «машинного обучения» [64, 12, 46]. Дана тележка, которая способна двигаться вдоль прямой от $-x_{\max}$ до x_{\max} . К ней одним концом прикреплен стержень таким образом, что он может вращаться в вертикальной плоскости, параллельной траектории тележки. Если стержень поставить вертикально, падая, он заставит двигаться тележку. Если же толкнуть тележку, можно тем самым влиять на динамику стержня. Состояние системы тележка - стержень характеризуется координатами x (положение тележки), \dot{x} (ее скорость), θ (угол отклонения стержня от вертикали) и $\dot{\theta}$ (его угловая скорость) (рис. 2). Задача управления состоит в следующем. Через каждый промежуток времени длительностью τ контроллер получает

значения переменных x , \dot{x} , θ , $\dot{\theta}$. Он может прикладывать к тележке силу $\pm f$ (например, запускать мотор), которая будет действовать в течение следующего τ - промежутка. Цель состоит в том, чтобы поддерживать величину угла θ в пределах $[-\theta_{\max}, \theta_{\max}]$, а положение тележки x в пределах $[-x_{\max}, x_{\max}]$.

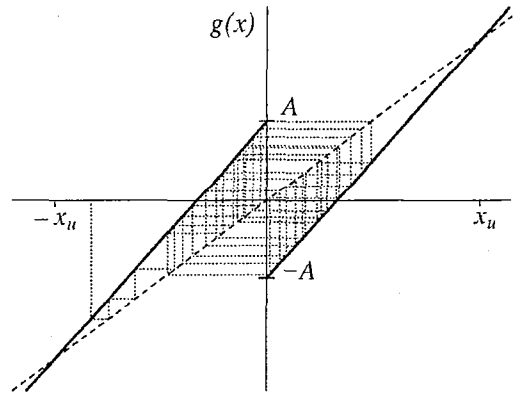


Рис. 1. Отображение, возникающее в результате дискретного управления для неустойчивой неподвижной точки, и пример траектории

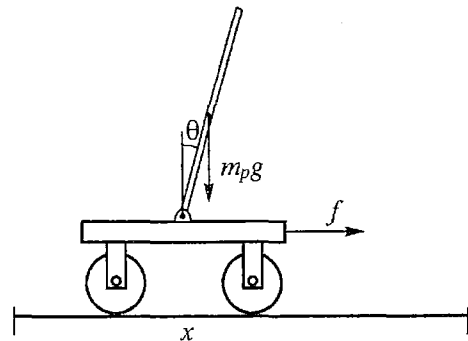


Рис. 2. Задача о балансировании стержня на тележке. Система управления должна после каждого интервала τ выбрать правильное направление f , так чтобы угол отклонения стержня θ оставался в пределах $[-\theta_{\max}, \theta_{\max}]$, а тележка не уходила бы за границы дорожки, $-x_{\max} < x < x_{\max}$. В начальный момент тележка устанавливается в середину дорожки $x=0$, а стержень - под некоторым углом θ_0 в допустимых пределах

На первый взгляд, проблема эквивалентна управлению перевернутым маятником. Однако, если применить тот же самый алгоритм управления, окажется, что тележка довольно скоро уедет за допустимые пределы (Р. Хехт-Нильсен очень интересно описывает эксперименты с тележкой, которые проводились в его фирме [46]. Задача кажется простой, но при небольших размерах тележки требует характерного времени реакции около 0.1 с, что превышает возможности человека; все с энтузиазмом берутся за дело, считая, что уж у него-то получится, но...). А дело в том, что в этой задаче к одномерному неустойчивому многообразию стержня добавляется двумерное центральное многообразие тележки, так что траектория может свободно перемещаться уже в трехмерном пространстве. Но в трехмерном пространстве интуитивно угадать правильную стратегию уже не получается, нужно учиться. (Следует заметить, что, с точки зрения теории управления, эта задача довольно элементарная, но мы хотим, чтобы управляла тележкой обучающаяся нейросеть, которая теорию управления не изучала, а может действовать только путем проб и ошибок.) Детали возможного процесса обучения мы рассмотрим в следующем разделе. Здесь мы только отметим, что нейросетевой контроллер можно построить и обучить [77], а управление протекает в хаотическом режиме с одним положительным ляпуновским показателем. Мы записали активность нескольких нейронов

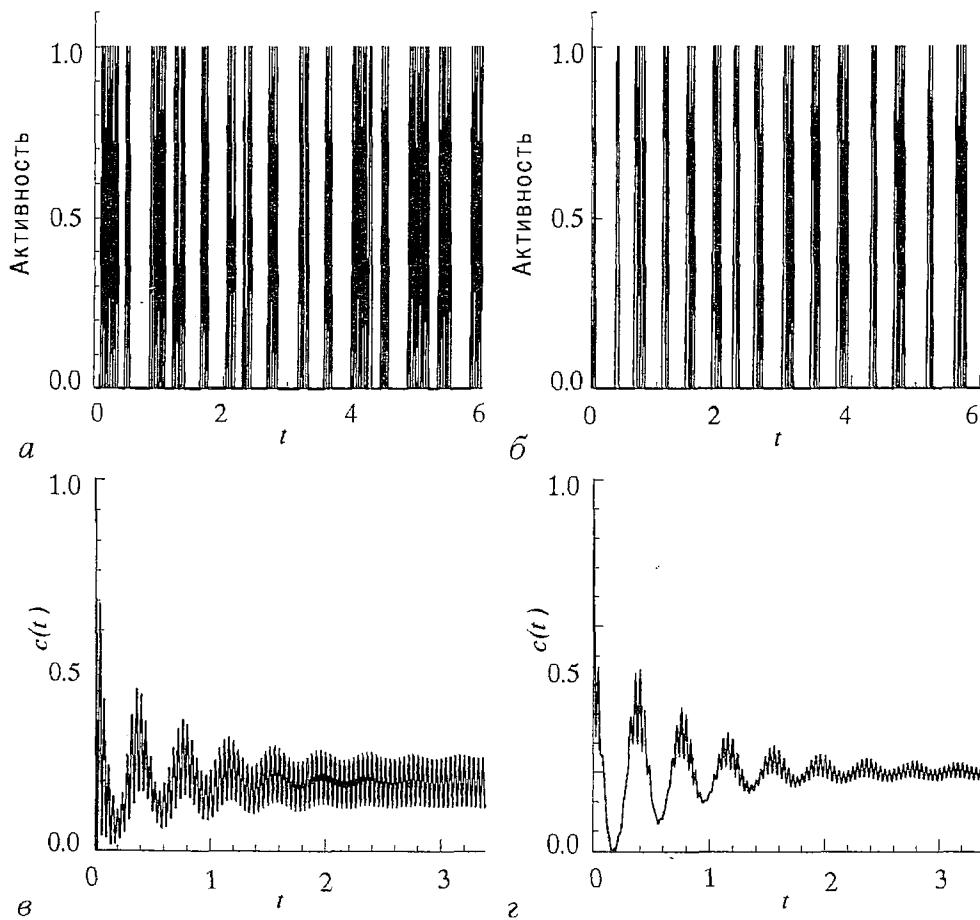


Рис. 3. «Энцефалограмма» для нейронной сети, управляющей тележкой со стержнем. Графики (а) и (б) демонстрируют временную активность двух нейронов (1 когда нейрон активен и 0 в противном случае). На графиках (в) и (г) показана соответствующая автокорреляционная функция. Видны следы как детерминизма, так и хаотичности.

управляющей сети и построили для них автокорреляционную функцию (рис. 3). Их вид характерен для хаотических систем, хотя собственно архитектура использованной нейросети типа Кохонена никакой собственной хаотической динамики не допускает. Похожие результаты были получены и для другой модельной задачи - стабилизации неустойчивой химической реакции [77].

Таким образом, хаос может возникать в сложных петлях обратных связей, где нейронная сеть играет роль обучающейся системы управления. Можно, однако, спросить, а может ли хаос быть полезен для обработки информации или для обучения? Как показывают наши результаты, ответ утвердительный, но прежде чем его объяснить, необходимо описать основные идеи поощряемого обучения.

5. Хаос и обучение поощрением (reinforcement learning, RL)

5.1. Что такое обучение поощрением?

В большинстве книг по нейронным сетям рассматривается два типа обучения, «учителем» (supervised) и «без учителя» (unsupervised). Если для каждого обучающего входного сигнала X известен правильный ответ Y , и этот ответ используется для подстройки связей сети, то говорят, что обучение идет с учителем. Оно типично для большинства нейронных сетей. Если же обучение идет совсем без корректирующего сигнала, то говорят, что обучение идет без учителя. Примерами могут служить рассмотренные сети Кохонена и Гроссберга (ART), когда для входных сигналов заранее неизвестно, какому кластеру они должны принадлежать. Однако возможна и промежуточная ситуация, когда правильный отклик неизвестен, однако некоторая оценка работы сети может быть дана. Такая оценка обычно имеет вид скалярного «поощряющего» сигнала r : в случае успеха $r > 0$, при неудаче $r < 0$, а в нейтральных случаях $r = 0$. Соответствующий тип обучения был назван «обучение поощрением» или «обучение с критиком». В традиционных нейронных сетях он практически не используется. Однако он оказывается весьма полезен в ситуациях, где известна конечная цель, но неизвестен правильный способ ее достижения (можно поощрять приближение к цели или наказывать за удаление от нее, или за медлительность - как, цель еще не достигнута?!). Примером может служить задача о стержне на тележке, когда трудно сказать, в какую сторону сейчас надо было толкать тележку, в то время как заметить выход параметров за допустимые пределы несложно. В этой связи следует заметить, что поощрение может быть запаздывающим. Примером может служить партия в шахматы: поощрение в виде выигрыша, проигрыша или ничьей получается лишь в результате большого числа ходов, и сказать, какой из них был правильным, а какой - нет, зачастую очень сложно. Проблема определения ответственности каждого действия за конечный результат широко обсуждалась еще в начале 60-х годов и получила название «credit assignment problem».

Весьма вероятно, что высокоорганизованные живые организмы используют какой-либо тип обучения поощрением. У них есть довольно сложный источник поощряющего сигнала, такой как чувство боли или удовлетворения. Видимо, существование этой системы дает этим организмам преимущество. Похожие источники поощряющего сигнала использовались и для мобильных роботов [73], они были названы «оценочной подсистемой» (value system).

Ввиду бурного развития систем искусственного интеллекта и автономных роботов, следует ожидать и все возрастающего использования методов обучения

поощрением. Проблема, однако, заключается в том, что в настоящее время нет достаточно общей теории таких методов. Сама концепция обучения поощрением недостаточно конкретна и может относиться к слишком разным системам и ситуациям. Однако весьма большой прогресс был достигнут в одном из классов задач, известных как марковский процесс принятия решений (Markov decision process, MDP) или динамическое программирование (dynamical programming, DP).

Формальное описание MDP включает: (i) *окружение* (environment), характеризуемое состоянием s , (например, система, которой необходимо управлять, для тележки со стержнем $s = \{x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}\}$), и (ii) *агент* (управляющая система), который может выполнять действие a (в примере с тележкой действием было приложение силы $\pm f$). Для простоты будем считать, что s и a могут принимать только дискретные значения. Агент получает информацию о состоянии s , в момент t и предпринимает действие a , которое влияет на состояние окружения. После каждого действия окружение меняет свое состояние, и агент получает информацию о следующем состоянии s_{t+1} и скалярный поощряющий сигнал r_{t+1} . Правило $\pi(s, a)$, по которому агент выбирает свои действия, называется *политикой* (policy). Обычно $\pi(s, a)$ - это вероятность выбора действия a в состоянии s . Детерминированный выбор означает, что только для одного из действий вероятность ненулевая.

Задача агента состоит в том, чтобы выбрать *оптимальную политику*, которая дает максимальное интегральное поощрение за большое или бесконечное число действий. В последнем случае сумма $\sum_{k=1}^{\infty} r_k$ может оказаться бесконечной, поэтому используют взвешенное (discounted) интегральное поощрение $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} r_k$, $0 < \gamma < 1$ (обычно величина $|r_k|$ ограничена).

Вплоть до настоящего момента ситуация выглядела весьма общей. Ограничивающим предположением, сильно облегчающим теоретическое исследование, является то, что динамика окружения предполагается марковской. Обозначим через $P = P(a, s, s')$ вероятность перехода окружения из s в s' после действия a , а соответствующее поощрение - $R = R(a, s, s')$ (r_k всегда равно одному из R с соответствующими аргументами). Предполагается, что вероятности P и поощрения R не зависят от времени, от предыдущих состояний окружения и предшествующих действий агента. Следовательно, динамику окружения можно описать в терминах управляемой цепи Маркова. Далее будем полагать ее эргодической.

Если все P и R известны, можно вычислить среднее взвешенное поощрение для состояния s , действия a и избранной политики π путем усреднения по всем возможным будущим траекториям вдоль марковской цепи,

$$Q^\pi(s, a) = \sum_{s'} P(a, s, s') (R(a, s, s') + \gamma \sum_a \pi(s', a) \sum_{s''} P(a', s', s'') (R(a', s', s'') + \dots)).$$

Величины $Q^\pi(s, a)$ были названы *ценность действия* (action values). Поскольку мы предположили, что π , P и R не зависят от времени, в правой части возникают те же ценности действий Q^π , поэтому

$$Q^\pi(s, a) = \sum_{s'} P(a, s, s') (R(a, s, s') + \gamma \sum_a \pi(s', a) Q^\pi(a', s')). \quad (13)$$

Это линейная система уравнений для Q^π , которую можно решить стандартными методами.

Почему ценности действий Q^π так важны? Дело в том, что с их помощью можно улучшать существующую политику до тех пор, пока не будет найдена оптимальная политика, приносящая максимальный выигрыш. После того как все Q^π найдены, естественно изменить текущую политику π так, чтобы в каждом

состоянии выбрать наиболее ценное действие $a = \operatorname{argmax}_a Q^n(s, a)$. В результате получается новая политика π_1 . Как показал более 40 лет назад Р. Беллман [14], для новой политики $Q^{\pi_1}(s, a) \geq Q^{\pi}(s, a)$. Затем можно проделать то же самое с новыми ценностями действий $Q^{\pi_1}(s, a)$ и получить следующую политику π_2 и так далее. Этот процесс итерирования политики сходится к оптимальной политике π_* , которой соответствуют $Q^*(s, a)$. Оптимальных политик может быть и несколько, но ценности действий у всех одни и те же. Существует весьма эффективный численный алгоритм для итерирования политики [14, 83].

Существующие методы обучения поощрением или методы RL [83, 57] развиты для случая, когда все предположения динамического программирования справедливы, но переходные вероятности P и поощрения R *неизвестны*. Это означает, что нет возможности найти оптимальную политику при помощи уравнений (13). Проблема напоминает управление тележкой со стержнем, можно действовать только методом проб и ошибок. Как же нам научиться удерживать стержень?

Идея методов обучения поощрением состоит в том, чтобы оценить те же самые ценности действий Q , но путем усреднения по времени, а не по ансамблю (13), поэтому нам нужна эргодичность. Когда агент в момент t выбирает действие a_t в состоянии s_t и на следующем шаге получает поощрение r_{t+1} , последнее может быть использовано для коррекции оценки $Q(s_t, a_t)$. Если сделать достаточно много попыток, оценки могут стать достаточно точными и быть использованы для улучшения политики. Хотя, как правило, улучшение текущей политики не требует точного знания всех Q , необходимо только знать, для какого действия a величина $Q(s, a)$ является наибольшей. А эта информация часто может быть получена за разумное время.

Существующие методы обучения поощрением обычно подразделяют на два больших класса [83, 57]: методы *Монте-Карло*, когда Q оценивают путем непосредственного усреднения поощрений, полученных после данной комбинации состояние - действие, и методы *временных разностей* (temporal differences, TD), когда оценки получают при помощи итерационных схем. Методы Монте-Карло требуют очень много повторений и сходятся медленно. Мы не будем их здесь рассматривать. Согласно [83, 57], TD-методы более популярны и обычно сходятся гораздо быстрее.

TD-методы основаны на следующем несложном соотношении: когда мы пытаемся оценивать Q экспериментально, оценки связаны как $Q(s_t, a_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} = r_{t+1} + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1})$, а потому $\Delta_t = r_{t+1} + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q(s_t, a_t) = 0$. Если $\Delta_t \neq 0$, это означает, что текущая оценка нуждается в коррекции. Методика выглядит следующим образом. Используются оценки ценностей действия, зависящие от времени, $Q(s, a, t)$. Начальные значения $Q(s, a, 0)$ можно выбирать достаточно произвольно. Затем следует выбрать некоторую политику π и после каждого шага итерационно корректировать уценности действий

$$Q(s, a, t+1) = Q(s, a, t) + \alpha_t e(s, a, t) \Delta_t \quad (14)$$

Это соотношение содержит два дополнительных фактора - скорость обучения α_t и так называемые *коэффициенты пластичности* (eligibility traces) $e(s, a, t)$, о которых мы поговорим чуть позже. Для расчета корректирующего члена Δ чаще всего используют две основные методики.

а. «Sarsa» (в качестве имени используется последовательность $s_t, a_t, r_{t+1}, s_{t+1}, a_{t+1}$, применяемая для расчета Δ)

$$\Delta_t = r_{t+1} + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1}, t) - Q(s_t, a_t, t).$$

Метод дает оценки Q для текущей политики. Тем не менее, если текущие значения Q , в свою очередь, используются для формирования политики, например, каждый раз выбирается действие с наибольшей $Q(s, a, t)$ (обычно выбор сложнее, но об этом тоже чуть позже), то оказывается, что методика допускает одновременно и улучшение политики.

b. «Q-learning»

$$\Delta_t = r_{t+1} + \gamma \max_a Q(s_{t+1}, a, t) - Q(s_t, a_t, t).$$

Метод сходится к значениям Q^* для оптимальной политики π^* почти независимо от текущей политики π . Зная Q^* , нетрудно получить и саму оптимальную политику π^* .

В отношении выбора скорости обучения α серьезных теоретических ограничений нет. Доказательство сходимости методов RL [83, 57] требует, чтобы α_t убывали со временем так, чтобы $\sum_t \alpha_t = \infty$, $\sum_t \alpha_t^2 < \infty$ (требования методов стохастической аппроксимации), например, $\alpha_t = \alpha_0/t$. Иногда описанные методы хорошо работают и для неубывающих α_t , которые к тому же могут даже не быть очень маленькими. Для некоторых задач известно, что наилучший выбор $\alpha=1$ [57].

Теперь обратимся к коэффициентам пластичности. Изначально они появились в моделях обучения нейронов для того, чтобы воспроизвести эффекты, сходные с условными рефлексам [84]. Такие рефлексы связывают два события, «нейтральное» и «существенное», разделенные временным промежутком. Идея состояла в том, что нейроны и связи, ответственные за обработку нейтральных событий, в течение некоторого времени после них способны изменяться (пластичны), поскольку сохраняют память о недавнем событии. Если в течение этого промежутка произойдет существенное событие, оно может изменить связи, сохранившие пластичность. В результате после нескольких повторений нейтральное событие получает способность вызывать такой же эффект, как и существенное. Соответствующая математическая модель нейронов, помимо обычных связей w_{ij} между ними, включала также коэффициенты пластичности e_{ij} . Правило изменения весов имело вид $\Delta w_{ij} \sim e_{ij} g_i$, где g_i - сигнал, порожденный существенным событием. Первоначально все $e_{ij0} = 0$. Когда происходит нейтральное событие и связи обретают пластичность, соответствующий коэффициент e становится равным 1 (или увеличивается на 1). Затем он экспоненциально затухает, $e_{t+1} = \lambda e_t$, $\lambda < 1$. Таким образом, в течение некоторого времени после установки e соответствующая связь может меняться, однако в дальнейшем эта способность пропадает до новой установки.

В обучении поощрением эта идея была использована как попытка решить упоминавшуюся проблему credit assignment. Когда корректирующий член Δ вычислен, было бы желательно скорректировать Q не только для последнего состояния s_t , но и для предшествующих состояний, поскольку последний сигнал поощрения частично характеризует и предыдущие действия. Чтобы это сделать, следует присвоить этим состояниям коэффициент ответственности. Рецепта, как этого добиться, в общем случае нет, но для эргодических цепей Маркова эффект каждого действия или пребывания в некотором состоянии должен экспоненциально убывать. Следовательно, по крайней мере для некоторых задач, экспоненциально убывающие коэффициенты пластичности могли бы частично решить проблему credit assignment. Соответствующий класс алгоритмов RL был назван TD(λ), где λ обозначает скорость затухания коэффициентов пластичности. Для каждой пары состояние - действие вводится переменная $e(s, a, t)$, $e(s, a, 0) = 0$. Как только окружение оказывается в состоянии s_t и выбирается действие a_t , соответствующая $Q(s, a_t)$ получает способность меняться и мы присваиваем $e(s_t, a_t, t) = 1$ (в некоторых версиях $e(s_t, a_t, t) = e(s_t, a_t, t) + 1$). Для всех прочих пар

состояние - действие коэффициенты e экспоненциально затухают, так что окончательно

$$e(s,a,t) = \begin{cases} 1, & (s,a)=(s_t,a_t), \\ \lambda e(s,a,t-1), & (s,a) \neq (s_t,a_t). \end{cases}$$

Обучение может быть разбито на эпизоды. Например, для стержня на тележке после падения стержня или ухода тележки за допустимые пределы тележка возвращается в центр дорожки, а стержень снова устанавливается почти вертикально. В таких случаях коэффициенты пластичности также следует установить в ноль.

Согласно [83,57], коэффициенты пластичности могут существенно ускорить сходимость алгоритмов RL, особенно в ситуациях с запаздывающим поощрением, когда ненулевое r появляется лишь в результате многих действий. В отношении скорости затухания λ , так же как и весового множителя γ , единственным теоретическим ограничением является $0 \leq \lambda < 1$, $0 < \gamma \leq 1$. Некоторые практические рекомендации по выбору α , λ и γ можно найти в статье Дж. Тесауро [90] (автора получившей известность программы TD-gammon, играющей в нарды - backgammon - на уровне мировых мастеров; в основе программы лежат методы обучения поощрением, а для аппроксимации ценности состояний применяется трехслойный персептрон с несколькими десятками скрытых нейронов). Однако качество работы методов RL может существенно зависеть от значений параметров, поэтому в каждом конкретном случае может оказаться необходимым проведение специальных тестов. Приложения обучения поощрением в настоящее время довольно многочисленны, помимо упомянутой игры в нарды, это управление сложными механическими системами, роботами, лифтами в многоэтажных зданиях, контроль хаоса и др. (см., например, [83, 57, 92, 36, 97]).

Какое отношение все вышеизложенное имеет к нейросетям? Связи с нейросетями многочисленны. Во-первых, методы обучения поощрением используют функции, аппроксимация которых необходима в некоторых вариантах методов [57, 83]: $\pi: s \rightarrow a$, $Q: s \times a \rightarrow R^1$, $R, P: s \times s \times a \rightarrow R^1$, иногда и некоторые другие. Подобные аппроксимации могут быть получены с помощью какой-либо из аппроксимирующих сетей, например, многослойного персептрона. Во-вторых, состояние s часто изменяется непрерывно. Версии динамического программирования и обучения поощрением для непрерывного случая также существуют, но они гораздо сложнее, чем в дискретном случае. Поэтому часто пространство возможных состояний разбивается на множество областей, каждая из которых рассматривается как одно дискретное состояние. Эту процедуру квантования состояний естественно поручить нейросети для векторного квантования, такой как сеть Кохонена или ART [18, 59]. Например, нейросетевой контроллер может иметь вид двухступенчатой сети Кохонена. В качестве входного сигнала сеть получает s , причем каждый нейрон отвечает одному дискретному состоянию. После выбора победителя нейрон, отвечающий текущему состоянию, включается и посылает сигнал следующей сети через ряд выходных связей с весами, равными Q . Во второй конкурентной сети каждый нейрон соответствует одному действию. После соревнования выбирается действие с наибольшим Q . Таким образом, нейронные сети - удобный инструмент методов RL, иногда даже используется термин «нейродинамическое программирование» [15] (не путать с нейролингвистическим программированием из области психологии).

Существует и связь со сложной динамикой и хаосом. Во-первых, как говорилось выше, нейросетевой контроллер с поощрительным обучением,

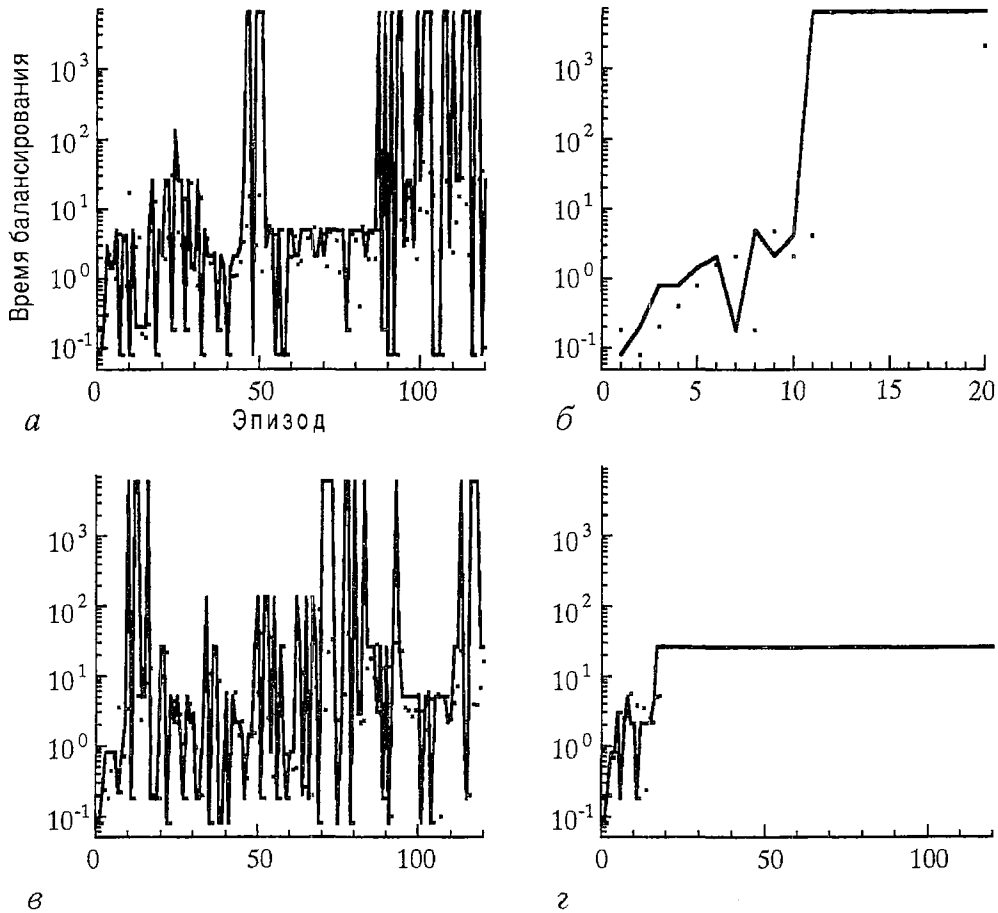


Рис. 4. Примеры обучения поощрением (Q-learning) для тележки со стержнем. Обучение разбивается на эпизоды, эпизод заканчивается, когда x или θ выходят за допустимые пределы (контроллер в этом случае получает отрицательный поощряющий сигнал) или управление успешно протекает вплоть до момента $T=6000$. Последнее означает, что контроллер способен удерживать стержень очень долго, скорее всего, бесконечно долго. Продолжительность каждого эпизода показана точками. Иногда использовалась « ϵ -жадная» политика (а) и (в), и стержень иногда падал только из-за случайного действия. После каждого эпизода тестировалась получающаяся «жадная» политика, продолжительность удержания стержня для которой показана сплошной линией. Графики соответствуют различным параметрам Q-learning. При хорошем выборе (б) обучение весьма эффективно. Из графиков (а) и (б) видно, что при некоторых параметрах возможны колебания между различными политиками: контроллер находит хорошую политику, потом забывает, потом находит снова

объединенный с неустойчивой динамической системой, может научиться поддерживать ее в хаотическом состоянии. На рис. 4 показан пример такого обучения для системы тележка - стержень. Во-вторых, хаос может быть необходим контроллеру для получения хорошей политики при помощи методов RL с освоением новых действий (exploration). Рассмотрим этот вопрос более детально.

5.2. Обучение поощрением, освоение действий и хаос

Обсудим теперь вопросы формирования политики, то есть согласно каким же критериям следует выбирать действия в каждом заданном состоянии. В задачах динамического программирования, когда информация о свойствах окружения полна, ценности действия Q^* для оптимальной политики могут быть рассчитаны,

оптимальным является способ выбора действий с наибольшим Q^* . Однако при обучении методом проб и ошибок такая политика часто оказывается далеко не лучшей, поскольку известны не точные значения Q^* , а лишь их оценки. Даже если часть значений Q известна точно, всегда есть вероятность того, что лучшее действие еще не было испробовано. Это, в свою очередь, значит, что истинные Q^* еще не известны. Если агент использует только наилучшие из известных действий, он может никогда не найти оптимальную политику. Следовательно, иногда необходимо пробовать неоптимальные действия. Агент должен осваивать новые возможности путем проб и ошибок. С другой стороны, если агент предпринимает слишком много плохих действий, его эффективность снижается. Поэтому возникает *дилемма освоения и эксплуатации* [83, 91]. Когда мы рассказывали про метод Q-learning, то говорили, что он дает значения Q^* для оптимальной политики почти независимо от текущей политики π : текущая политика должна давать возможность осваивать лучшие действия.

Если агент всегда выбирает действие с максимальной оценкой Q , такая политика называется «жадной» (greedy). Было показано, что следование чисто жадной политике без освоения может привести в результате к неоптимальной политике [83]. С другой стороны, иногда следование жадной политике вполне оправдано. Необходимый элемент освоения часто может возникнуть сам собой благодаря блужданию в пространстве политик во время сходимости оценок Q . Можно дополнительно стимулировать освоение, устанавливая высокие начальные приближения для Q («оптимистичные» начальные данные) и побуждая агента попробовать большинство действий во время обучения.

Для того чтобы гарантировать освоение новых действий, часто используют политику, называемую «ε-жадной». Допустим, что в состоянии s есть n возможных действий. Тогда мы выбираем лучшее действие с вероятностью $(1-\epsilon)$, а любое иное действие - с вероятностью $\epsilon/(n-1)$. Когда оценки Q почти сойдутся, освоение уже будет только портить результаты из-за не лучших действий. Поэтому рекомендуется постепенно уменьшать ϵ с течением времени [83].

Предположим теперь, что окружение нестационарно, хотя изменения редки или невелики, так что модель марковской цепи по-прежнему можно использовать на временах, достаточных для сходимости Q . Благодаря нестационарности оптимальная политика со временем может измениться. В этом случае жадная политика может оказаться опасной: освоение благодаря переходным процессам и начальным данным теперь отсутствует, и новую оптимальную политику можно никогда не найти. В таких обстоятельствах важность могут приобретать специальные меры по освоению новых действий, например, в виде ε-жадной политики. Это можно продемонстрировать на примере движения на решетке - типичной тестовой задаче методов обучения поощрением [57, 83].

В задаче навигации на решетке окружение состоит из клеток, а агент может двигаться из данной клетки в одну из соседних с ней (рис. 5, а). Возможные направления - вверх, вниз, влево и вправо. Если в выбранном направлении нет клетки или она заблокирована (заштрихованные клетки на рисунке), то агент остается на прежнем месте. Движение начинается из клетки, отмеченной «S», агент получает наказание (отрицательное поощрение) $r=-1$ после каждого действия, пока он не достигнет своей цели - клетки «G». Когда цель достигнута, агент получает поощрение $r=1$ и мгновенно отправляется снова на стартовую клетку. Таким образом, задача агента - найти кратчайший путь из «S» в «G», с тем чтобы минимизировать наказание. Количество состояний s в этой задаче равно числу пустых клеток минус 1 («G»), и в каждом состоянии возможны 4 действия.

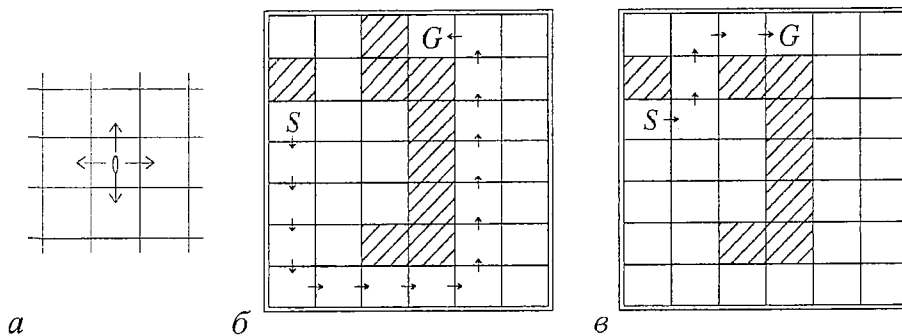


Рис. 5. Тестовая задача для хаотической политики - движение по решетке. *а* - В каждом состоянии агент может выполнять 4 действия: вверх, вниз, вправо, влево; если в выбранном направлении нет пустой клетки, агент остается на месте. *б* - Начальное окружение, агент стартует с клетки «S» и должен достичь цели «G». Заштрихованные клетки агенту недоступны и кратчайший путь занимает 15 шагов. На каждом шаге агент получает поощрение $r = -1$, пока не достигнет цели; тогда он получает поощрение $r = +1$ и возвращается на стартовую клетку. *в* - В момент $t = 2010$ одна из заблокированных клеток открывается, и появляется короткий путь из 5 шагов. Чтобы открыть этот новый путь, агент должен использовать политику с освоением действий

События, происходящие в течение одного путешествия от «S» до «G» образуют *эпизод*. Продолжительность текущего эпизода T можно рассматривать как меру качества текущей политики. Будем характеризовать текущую ϵ -жадную политику усредненным отношением минимально возможной продолжительности T_{\min} к T , $q = (T_{\min} / T)$. Осреднение делалось по 100 различным прогонам для одного и того же ϵ . При выборе действий мы присваивали им номера и, как оказалось, иногда результаты зависели от порядка нумерации. Поэтому на графиках результаты будут приведены для всех 24 возможных способов перенумерации 4-х действий.

Если в этой задаче окружение остается неизменным, специальных способов освоения действий не требуется, оба метода, sarsa и Q-learning с жадной политикой находят оптимальную или почти оптимальную политику. Дополнительное освоение может лишь испортить результаты (рис. 6, *а*), поэтому мы использовали нестационарное окружение [76]. После 2010-го шага, окружение меняется: самая верхняя из заблокированных клеток (рис. 5, *б*) открывается (рис. 5, *в*) и в новом окружении кратчайший путь требует уже только 5 шагов вместо 15. Без специального освоения приспособиться к новому окружению невозможно. Теперь уже существует оптимальная степень освоения, графики на рис. 6, *б* имеют четкий максимум.

Освоение требует случайности в алгоритме, то есть обучающаяся система должна иметь источник случайного сигнала. И здесь мы подходим к вопросу о *естественном месте динамического хаоса в процессе обучения*. Хаос может служить источником псевдослучайных решений при использовании политики с освоением действий. Для проверки этой гипотезы мы повторили предшествующий эксперимент со случайной, регулярной и хаотической политиками. При выборе действий ϵ -жадной политики мы использовали последовательность псевдослучайных чисел, а также числа, порожденные нехаотической и хаотической динамическими системами (рис. 6, *в*, *г*). Для хаотической последовательности, где не наблюдаются существенные корреляции (используется каждое k -е число или данные от k независимых систем) результаты практически такие же, как и для случайных данных.

Среди хаотических систем наилучшие результаты были получены для нейрона с «надежным хаосом» (robust chaos), то есть отображения $x_{t+1} = |\tanh s(x_t - c)|$ [11, 75]. Следовательно, нейронные сети могут как использоваться для реализации

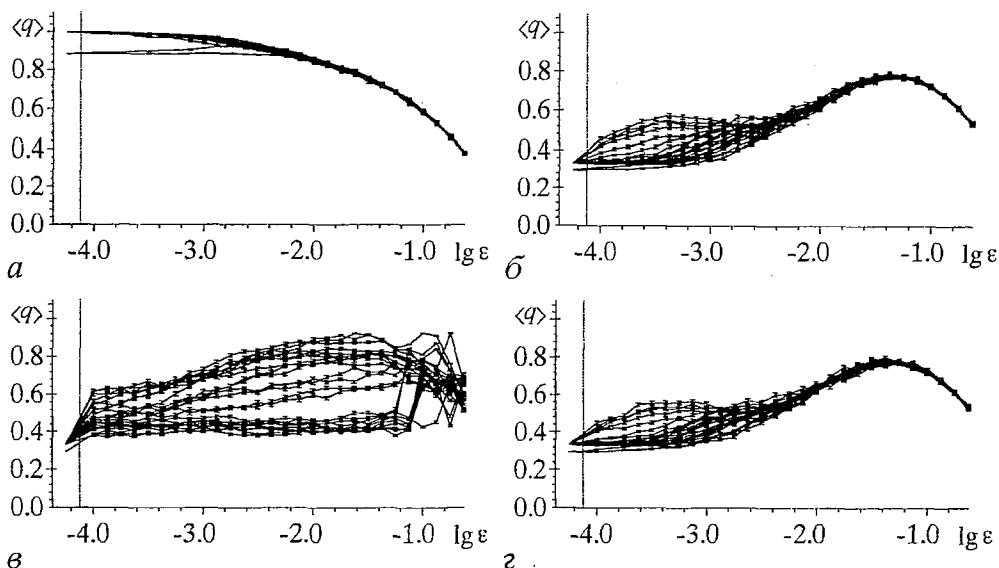


Рис. 6. Результаты для тестовой задачи (см. рис. 5). Разные кривые на графике соответствуют разным нумерациям действий. Риски отмечают оценку погрешности после усреднения по 1000 запускам. Самая левая точка, отделенная вертикальным пунктиром, соответствует $\varepsilon=0$. а - Для стационарного окружения освоение только портит эффективность: чем больше ε , тем меньше q ; $t=2000$. б - После изменения окружения освоение может повысить эффективность: существует оптимальный уровень шума, для которого эффективность наибольшая; $t=10000$. в - Нехаотическое освоение, в ожидании выбора действий используется траектория логистического отображения при a_∞ , регулярность ведет к сильной зависимости результата от нумерации действий; $t=10000$. г - Хаотическое освоение, каждая 8-я точка для нейрона с надежным (robust) хаосом; $t=10000$. Результаты практически те же, что и для случайного освоения; следовательно, хаос можно использовать, чтобы учиться новым действиям

методов обучения с поощрением, так и служить источником инициативы для освоения действий.

6. Гамильтоновы нейронные сети: распознавание образов без диссипации

В последние годы активно развиваются методы квантовых вычислений и квантовой обработки информации (см., например, обзоры [56, 68, 98, 94]). Возможно, что мозг также использует в своей работе квантовые механизмы [71]. В настоящее время трудно сказать, какие именно квантовые устройства появятся в будущем. Однако одно остается бесспорным, квантовые компьютеры были и будут гамильтоновыми системами. Важность соответствий между квантовыми и классическими системами была осознана еще в первые годы развития квантовой механики. Хотя построение подобных соответствий часто сталкивается с большими трудностями, борьба за лучшее понимание таких соответствий будет оставаться необходимой. В этой связи следует отметить, что ни одна из описанных выше нейронных сетей не может иметь квантовых аналогов по той простой причине, что они не являются гамильтоновыми системами. Это заставило нас обратиться к гамильтоновым нейронным сетям.

Гамильтоновы нейросети (ГНС) могут быть линейными или нелинейными, хаотическими или регулярными, автономными или неавтономными. Возможностей много. Простейшая - это линейная автономная гамильтонова система. Надо

заметить, что эта система будет консервативной, в отличие от всех ранее рассмотренных нейронных сетей, которые являются диссипативными. В традиционных нейронных сетях диссипация играет очень важную роль. Она служит фильтром для удаления ненужной (шумовой) информации из входных данных при решении задачи распознавания образов. Само существование аттракторов также основано на диссипации. Следовательно, для распознавания образов при помощи ГНС необходимы методики, отличные от традиционных.

В данном разделе мы хотим изложить некоторые идеи, которые могли бы быть использованы при построении гамильтоновых нейронных сетей. Мы приведем описание метода проекций на подпространство и конкурентную архитектуру. Совместное их использование позволяет построить гамильтонову нейросеть, способную распознавать образы.

Линейную гамильтонову динамическую систему можно записать в виде $\dot{z}=(U+iW)z$, где U антисимметричная, а W - симметричная действительные матрицы. Здесь $z=x+ip$ - N -мерный комплексный вектор. Положим для простоты $U=0$. Тогда эта система эквивалентна N осцилляторам с частотами ω_k - собственными значениями W . Каждой колебательной моде отвечает собственный вектор e_k матрицы W . Эти моды называют нормальными. Когда мы вводим начальные данные, они раскладываются по этому набору мод, $z(t)=\sum_k(z_0, e_k)\exp(i\omega_k t)$, причем амплитуда каждой моды пропорциональна проекции входного образа на e_k .

Если бы мы могли построить матрицу W так, чтобы e_k были запомненными образами, то амплитуды мод отвечали бы степени близости входных данных к каждому из запомненных образов. Следовательно, мода с наибольшей амплитудой (наиболее близкая) может рассматриваться как распознанный образ.

Отбор мод может быть выполнен с использованием эффекта резонанса для осцилляторов с возбуждением. Возьмем N осцилляторов с частотами ω_k , равными частотам нормальных мод, и будем возбуждать их сигналом от гамильтоновой системы. Поскольку все осцилляторы находятся в резонансе, их амплитуда будет расти, и наибольшая скорость роста будет у осциллятора, соответствующего наиболее возбужденной моде. Следовательно, необходимо определить, для какого осциллятора амплитуда первой преодолет некоторый порог. Это событие отмечает нужный осциллятор и потому способно породить сигнал распознавания. Заметим, что удобным видом осциллятора могла бы быть система, у которой потенциал имеет две ямы. Начальные данные для осциллятора соответствуют дну одной из ям, а ее присутствие во второй яме генерирует сигнал распознавания (рис.7).

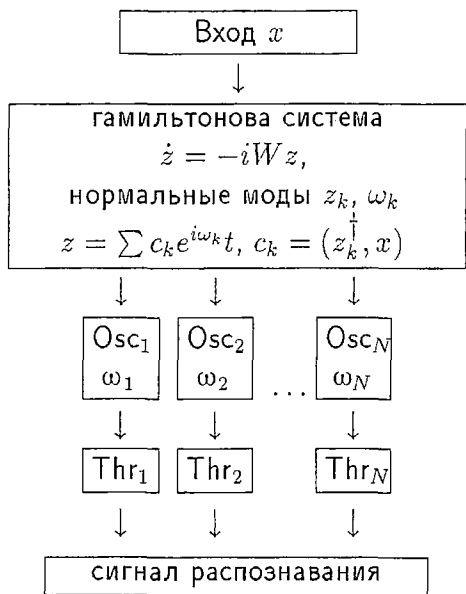


Рис. 7. Общая схема гамильтоновой нейросети. Вход сети x используется как начальные данные для линейной гамильтоновой системы. Последняя раскладывает их по нормальным модам z_k . Моды возбуждают осцилляторы Osc с частотами ω_k , равными частотам мод. Благодаря резонансу амплитуда осциллятора растет пропорционально амплитуде соответствующей моды. Пороговый детектор Thr определяет, для какого осциллятора амплитуда первой превысила порог, и формирует сигнал распознавания. Обучение системы заключается в формировании матрицы W

Единственная проблема - это найти способ записать набор, вообще говоря, неортогональных образов в ортогональные нормальные моды, не искажая их формы. Эту проблему можно решить при помощи скрытых размерностей.

Предположим, что векторы $\xi_1, \dots, \xi_M \in R^{n_1}$, представляющие образы, которые необходимо запомнить, не ортогональны, а только линейно независимы. Мы хотим сделать их ортогональными не меняя самих образов. Покажем, как этого можно добиться, добавляя $L \geq M$ новых размерностей. Новые компоненты расширенных векторов будем обозначать v_k . Удобно рассматривать их как элементы пространства R^L . Задача состоит в том, чтобы создать ортогональные векторы $\zeta_k = \{\xi_k, v_k\} \in R^n$, $n = n_1 + L$. Компоненты v_k должны удовлетворять соотношению

$$(\xi_k \cdot \xi_j)_{n_1} + (v_k \cdot v_j)_L = A_k \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, M. \quad (15)$$

Здесь $(\cdot)_{n_1}$ и $(\cdot)_L$ - скалярные произведения соответственно в подпространствах ξ и v . Покажем, что для достаточно больших A_k решение задачи существует.

Удобно рассматривать векторы v_k как столбцы матрицы V размером $L \times M$. Пусть матрица имеет вид

$$V = \begin{pmatrix} d & v_{12} & v_{13} & v_{14} & \dots & v_{1M} \\ & d & v_{23} & v_{24} & \dots & v_{2M} \\ & & d & v_{34} & \dots & \cdot \\ & & & d & \dots & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & v_{M-1,M} \\ & & & & & d \end{pmatrix}$$

Тогда условия (15) при $k=1$ будут иметь вид

$$(\xi_1 \cdot \xi_j) + d \cdot v_{1j} = A_1 \delta_{1j},$$

откуда

$$v_{1j} = -(\xi_1 \cdot \xi_j)/d, \quad j = 2, \dots, M,$$

$A_1 = |\xi_1|^2 + d^2$. Таким образом, мы построили первый столбец и первую строку V и нашли вектор $\zeta_1 = \{\xi_1, v_1\}$, ортогональный ко всем другим ζ_k , независимо от выбора других компонент v_k . Затем делаем остальные векторы ортогональными к ζ_2

$$(\xi_2 \cdot \xi_j) + v_{12} v_{1j} + d \cdot v_{2j} = A_2 \delta_{2j}$$

и

$$v_{2j} = -[(\xi_2 \cdot \xi_j) + v_{12} v_{1j}]/d, \quad j = 2, \dots, M,$$

$A_2 = |\xi_2|^2 + v_{12}^2 + d^2$. После повторения этой процедуры $M-1$ раз мы получим все компоненты v_k . Это доказывает ортогональность расширенных векторов ζ_k .

Тестовые расчеты подтвердили работоспособность этой схемы распознавания, а также то, что она позволяет запомнить вплоть до N линейно независимых образов и правильно распознать их. Полученный метод распознавания можно рассматривать как способ реализации метода подпространственной классификации образов [59].

Заключение: выводы и перспективы

Мы описали некоторые динамические нейронные сети, производящие обработку информации. У них есть входной сигнал X и выходной $Y=\varphi'(X)$, где φ - решение дифференциальных или разностных уравнений динамики сети. За исключением задачи моделирования временных рядов [45], обычно интересуются инвариантными множествами φ , аттракторами. Один и тот же результат можно получать разными способами, но обычно ищут наиболее эффективный, хотя эффективность часто относительна и зависит от доступного инструментария. Тем не менее, схема: начальные данные \rightarrow аттрактор (или параметры \rightarrow аттрактор) не универсальна, так как данные могут поступать постепенно. Английская поговорка гласит, «if it quacks like a duck (временная эволюция), walks like a duck (временная эволюция), and has web feet (инвариантное свойство), then it is the duck». Иногда подобные задачи можно решать, преобразуя их в обычные, записывая временные процессы, которые затем можно представить как векторы большой размерности. Однако в настоящее время их обычно решают методами искусственного интеллекта, а не с помощью нейронных сетей. Можно задать вопрос, как можно было бы расширить область применимости нейронных сетей и сделать динамический хаос полезным для их работы?

Мы рассмотрели ряд успешных применений и интересных подходов в области возможных будущих применений динамического хаоса в нейронных сетях в разделе 3. Однако они не расширяют области применимости существующих нейронных сетей. Если от сети требуется вполне определенный ответ (не зависящая от времени величина Y), какова может быть роль хаоса, дающего непредсказуемые результаты? С точки зрения определенного конечного результата, изолированная хаотическая сеть не слишком полезна, за исключением случаев, когда надо избавиться от сходимости к ложным аттракторам.

Однако, если нейронная сеть - это часть глобальной системы, польза может оказаться существенной. Назовем нейронную сеть «встроенной сетью», если она образует управляющую часть сложной автономной системы. Встроенная нейронная сеть должна решать новый тип задач, нехарактерный для изолированных сетей: она должна учиться, взаимодействуя с окружающим «миром». Примером может служить обучение поощрением, рассмотренное в разделе 5. В таких задачах иногда неважно, является ли выходной сигнал сети предсказуемым или нет. Зачастую автономный агент не имеет хорошо поставленной задачи; у него есть только некоторые критерии успеха. Как мы показали в этой статье, в интерактивном обучении у хаоса есть минимум одна ниша. Может быть, есть и другие.

Можно сделать вывод, что встроенные нейронные сети - это новый интересный объект исследований с точки зрения нелинейной динамики. Единственная проблема заключается в том, что для изучения встроенной сети необходима управляемая система. В современной хаотической динамике многие ключевые концепции были сформулированы при помощи простейших хаотических систем, таких как логистическое отображение, системы Хенона и Лоренца. Мы надеемся, что в будущем появятся и «стандартные» системы, и задачи управления для исследования встроенных сетей. Вероятнее всего, такие задачи будут связаны с робототехникой и направлением, получившем название «artificial life» - искусственная жизнь (см., например, обзорную работу [73]). Небольшие автономные роботы или «твари», управляемые простыми нейронными сетями, строятся уже в течение ряда лет. Как правило, до сих пор искусственные автономные создания были лишены способности обучаться. Необходимая конфигурация нейронной сети возникает в результате использования генетических

или эволюционных алгоритмов. Поведение таких созданий иногда выглядит хаотическим, однако, насколько нам известно, детально оно не исследовалось. Теперь возникает задача построения искусственных созданий, которые могли бы как эволюционировать, так и обучаться. И вполне вероятно, что динамический хаос будет типичным состоянием для управляющих ими нейронных сетей [13], или же такие сети будут располагать хаотическими подсистемами. По-видимому, встроенные нейронные сети и искусственная жизнь - это естественная ниша для нелинейной динамики и хаоса.

Динамические системы описывают огромную область природных явлений, в то время как нейронные сети покрывают лишь их небольшую часть. Есть микроскопические, мезоскопические, макроскопические системы. Концепция обработки информации в нейронных сетях несомненно будет расширять область своей применимости в сравнении с сегодняшним состоянием. Ближайшей перспективой представляется ее расширение на область квантовых вычислений, основанных на гамильтоновых нейросетях. В настоящей работе мы привели простейший пример классической гамильтоновой нейронной сети. Сейчас о подобных сетях известно очень немного. Как нам кажется, следует ожидать расширения работ в этом направлении.

Работа поддержана грантом М.К.А. от Defence Research Establishment Suffield, контракт № W7702-8-R745/001/EDM, с использованием вычислительных мощностей, предоставленных Multimedia Advanced Computational Infrastructure (MACI).

Библиографический список

1. *Adachi M., Aihara K.* Associative dynamics in a chaotic neural network. *Neural Networks* **10** (1997) 83-98.
2. *Aihara K., Takabe T., Toyoda M.* Chaotic neural networks. *Phys. Lett. A* **144** (1990) 333-340.
3. *Albers D.J., Sprott J.C., Dechert W.D.* Routes to chaos in neural networks with random weight. *Int. J. Bifurc. Chaos* **8** (1998) 1463-1478.
4. *Andreyev Yu.V., Dmitriev A.S., Chua L.O., Wu C.W.* Associative and random access memory using one-dimensional maps. *Int. J. Bifurc. Chaos* **2** (1992) 483-504.
5. *Andreyev Yu.V., Dmitriev A.S., Starkov S.O.* Information processing in 1-D systems with chaos. *IEEE Trans. on Circuits and Systems* **44** (1997) 21-28.
6. *Aradi I., Barna G., Érdi P., Gröbner T.* Chaos and learning in the olfactory bulb. *Int. J. Intelligent Systems* **10** (1995) 89-117.
7. *Arbib M.A.* *Brains, machines, and mathematics.* New York: Springer-Verlag, 1987, xvi+202 p.
8. *Babloyantz A., Destexhe A.* Low-dimensional chaos in an instance of epilepsy. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **83** (1986) 3513.
9. *Baird B.* Nonlinear dynamics of pattern formation and pattern recognition in the rabbit olfactory bulb. *Physica D* **22** (1986) 150.
10. *Baird B., Eeckman F.* A normal form projection algorithm for associative memory. In: [41, p. 135-166].
11. *Banerjee S., Yorke J.A., Grebogi C.* Robust chaos. *Phys. Rev. Lett* **80** (1998) 3049-3052.
12. *Barto A.G., Sutton R.S., Anderson C.W.* Neuronlike adaptive elements that can solve difficult control problems. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics* **SMC-13** (1983) 834-846.

13. *Barton S.A.* Two-dimensional movement controlled by a chaotic neural network *Automatica* **31** (1995) 1149-1155.
14. *Bellman R.* *Dynamic Programming*. Princeton: Princeton University Press, 1957.
15. *Bertsekas D.P., Tsitsiklis J.N.* *Neuro-Dynamic Programming*. Belmont: Athena Scientific, 1995.
16. *Bishop C.M.* *Neural networks for pattern recognition*. Oxford: Clarendon Press, 1995, xvii+482pp.
17. *Carpenter G.A.* Neural network models for pattern recognition and associative memory. *Neural Networks* **2** (1989) 243-257; опубликовано также в [18], 2-33.
18. *Carpenter G.A., Grossberg S.* (eds) *Pattern recognition by self-organizing neural networks*. MIT Press: Cambridge, MA, 1991, 691p.
19. *Carpenter G.A., Grossberg S.* A massively parallel architecture for a self-organizing neural pattern recognition machine. *Computer Visions, Graphics and Image Processing* **37** (1987) 54-115; опубликовано также в [18], 316-382.
20. *Carpenter G.A., Grossberg S.* ART2: self-organization of stable category recognition codes for analog input patterns. *Applied Optics* **26** (1987) 4919-4930; опубликовано также в [18], 398-423.
21. *Carpenter G.A., Grossberg S.* ART3: hierarchical search using chemical transmitters in self-organizing pattern recognition architectures. *Neural Networks* **3** (1990) 129-152; опубликовано также в [18], 453-499.
22. *Carpenter G.A., Grossberg S., Reynolds J.* ARTMAP: supervised real-time learning and classification of nonstationary data by a self-organizing neural network. *Neural Networks* **4** (1991) 565-588; опубликовано также в [18], 503-544.
23. *Chang-song Z., Tian-lin C., Wu-qun H.* Chaotic neural network with nonlinear self-feedback and application in optimization. *Neurocomputing* **14** (1997) 209-222.
24. *Chen L., Aihara K.* Chaotic simulated annealing by a neural network model with transient chaos. *Neural Networks* **8** (1995) 915-930.
25. *Cherkassky V., Mulier F.* *Learning from data. Concepts, theory and methods*. NY etc: Wiley, 1998.
26. *Dmitriev A.S., Kuminov D.A.* Chaotic scanning and recognition of images in neuron-like systems with learning. *J. of Communications Technology and Electronics* **39** (1994) 118-127.
27. *Domany E., van Hemmel J.L., Schulten K.* (eds) *Models of neural networks I*. Berlin: Springer, 1995.
28. *Eckmann J.-P., Ruelle D.* Ergodic theory of chaos and strange attractors *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985) 617-656.
29. *Farmer D.J.* A rosetta stone for connectionism. *Physica D* **42** (1990) 153-187.
30. *Freeman W.J.* Qualitative overview of population neurodynamics. In: *Neural Modeling and Neural Networks* (Pergamon Studies in Neuroscience, № 11) F. Ventriglia (ed.) Pergamon, 1993, 185-215.
31. *Freeman W.J.* Role of chaotic dynamics in neural plasticity. In: J. van Pelt, M.A. Corner, H.B.M. Uylings, F.H. Lopes da Silva (eds), *Progress in Brain Research* **102** Springer, 1994.
32. *Freeman W.J.* Simulation of Chaotic EEG patterns with a dynamic model of the olfactory system. *Biol. Cybern.* **56** (1987) 139-150.
33. *Freeman W.J.* The physiology of perception *Scientific American* **264/2** (1991) 78-85.
34. *Freeman W.J.* Tutorial on neurobiology: from single neurons to brain chaos. *Int. J. Bifurc. Chaos* **2** (1992) 451-482.
35. *Freeman W. J., Yao Y., Burke B.* Central pattern generating and recognizing in olfactory bulb: a correlation learning rule. *Neural Networks* **1** (1988) 277.

36. *Gadaleta S., Dangelmayr G.* Optimal chaos control through reinforcement learning. *Chaos* **9** (1999) 775-788.
37. *Gardner E.* The space of interactions in neural network models. *J.Phys. A* **21** (1988) 257-270.
38. *Glanz J.* Sharpening the senses with neural «noise». *Science* **277** (1997) 1758.
39. *Grossberg S.* Nonlinear neural networks: principles, mechanisms, and architectures. *Neural Networks* **1** (1988) 17-61; опубликовано также в [18], 36-109.
40. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. NY: Springer, 1983.
41. *Guevara M.R., Glass L., Mackey M.C., Shrier A.* Chaos in neurobiology, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics* **SMC-13** (1983) 790-798.
42. *Haken H.* Information and self-organization. Berlin:Springer-Verlag, 1988.
43. *Hassoun M.H. (ed.)* Associative Neural Memories. NY, Oxford: OUP, 1993, 350p.
44. *Hayakawa Y., Marumoto A., Sawada Y.* Effects of the chaotic noise on the performance of a neural network model for optimization problems. *Phys. Rev. E* **51** (4) (1995) R2693-R2696.
45. *Haykin S.* Neural networks: a comprehensive foundation. NY. etc: Macmillan, 1994.
46. *Hecht-Nielsen R.* Neurocomputing. Reading, MA etc.: Addison-Wesley, 1990, xiii+433pp.
47. *Hecht-Nielsen R.* Counterpropagation networks. *Applied optics* **26** (1987) 4979-4984; опубликовано также в [18], 264-276.
48. *Ho C.Y., Kurokawa H.* A learning algorithm for oscillatory cellular neural networks. *Neural Networks* **12** (1999) 825-836.
49. *Hopfield J.J.* Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **79** (1982) 2554-2558.
50. *Hopfield J.J.* Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **81** (1984) 3088-3092.
51. *Hopfield J.J., Tank D.W.* «Neural» computation of decisions in optimization problems. *Biol. Cybern.* **52** (1985) 141-152.
52. *Hoppensteadt F.C., Izhikevich E.M.* Oscillatory neurocomputers with dynamic connectivity. *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 2983-2986.
53. *Hoppensteadt F. C., Izhkevich E. M.* Weakly Connected Neural Networks. NY: Springer-Verlag, 1997.
54. *Ishii S., Fukumizu K., Watanabe S.* A network of chaotic elements for information processing. *Neural Networks* **9** (1996) 25-40.
55. *Izhikevich E.M., Malinetskii G.G.* A possible role of chaos in neurosystems. *Sov. Phys.-Dokl. (USA)* **37** (1992) 492-495.
56. *Jibu M., Yassue K.* in: Rethinking Neural Networks, K. H. Pribram (ed.), Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers, Hillsdale New Jersey, USA, 1993.
57. *Kaelbling L.P., Littman M.L., Moore A.W.* Reinforcement learning: A survey *J. Artificial Intelligence Research* **4** (1996) 237-285.
58. *Kosko B.* Neural networks and fuzzy systems. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1992, xxvii+449pp.
59. *Kohonen T.* Self-organizing maps. Berlin:Springer, 1997, 448p.
60. *Kohonen T.* The «neural» phonetic typewriter. *Computer* **21** (1988) 11-22; опубликовано также в [18], 239-259.
61. *Kürten K.E., Clark J.W.* Chaos in neural systems. *Phys. Lett. A* **114** (1986) 413-418.
62. *Kwok T., Smith K.A.* A unified framework for chaotic neural-network

approach to combinatorial optimization. IEEE Trans. Neural Networks **10** (1999) 978-981 (and references therein).

63. McCulloch W.S., Pitts W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. Bull. Math. Biophys. **5** (1943) 115-133.

64. Michie D., Chambers R.A. Boxes: an experiment in adaptive control. In: E. Dale, D. Michie (eds). Machine Learning **2** (American Elsevier, N.Y., 1968) 137-152.

65. Miller W.T., Sutton R.S., Werbos P.J. (eds). Neural Networks for Control. London: MIT Press, Cambridge, 1990.

66. Morita M. Associative memory with nonmonotone dynamics. Neural Networks **6** (1993) 115-126.

67. Nakagawa M. A chaos associative model with a sinusoidal activation function. Chaos, Solitons and Fractals **10** (1999) 1437-1452.

68. Nielsen M.A., Chuang I.L. Quantum Computing and Quantum Information. London: Cambridge University Press, 2000.

69. Nishii J. A learning model for oscillatory networks. Neural Networks **11** (1998) 249-257.

70. Pasemann F. A simple chaotic neuron. Physica D **104** (1997) 205-211.

71. Penrose R. Shadows of the mind. Vintage, 1995.

72. Personnaz L., Guyon I., Dreyfus G. J. de Physique Lettres **46** (1985) L359-L365.

73. Pfeifer R., Scheier C. Understanding Intelligence. The MIT Press, Cambridge MA, 1999.

74. Pineda F.J. Generalization of backpropagation to recurrent neural networks. Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 2229-2232.

75. Potapov A., Ali M.K. Robust chaos in neural networks. Phys. Lett. A **277** (2000) 310-322.

76. Potapov A.B., Ali M.K. Learning, Exploration and Chaotic Policies. Int. J. Modern Physics C **11** (2000) 1455-1464.

77. Potapov A.B., Ali M.K. Chaotic neural control. Phys. Rev. E **63** (2001) April.

78. Pribram K.H.. Brain and perception. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1991, xxix+388p.

79. Rumelhart D.E., McClelland J.L. (eds) Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition (vol. 1, 2). The MIT Press, 1986.

80. Ryan T.W., Winter C.L. Variations on adaptive resonance. IEEE First International Conference on Neural Networks. M. Caudill and C. Butler (eds). San Diego: IEEE, 1987, 767-775; опубликовано также в [18], 385-396.

81. Sarle, W.S. (ed.) Neural Network FAQ. URL: <ftp://ftp.sas.com/pub/neural/FAQ.html>.

82. Sharkey A.J.C. (ed.) Combining artificial neural nets. Ensemble and modular multi-net systems. NY:Springer, 1999, 304p.

83. Sutton R.S., Barto A.G. Reinforcement learning. Cambridge and London: A Bradford Book and MIT Press, 1998, xviii+322pp. Многие материалы книги доступны в Интернете, <http://envy.cs.umass.edu/simrich/book/the-book.html>.

84. Sutton R.S., Barto A.G. Toward a modern theory of adaptive networks: expectation and prediction Psychological review **88** (1981) 135-170.

85. Skarda C. A., Freeman W. J. How brains make chaos in order to make sense of the world. Behav. Brain Sci. **10** (1987) 161.

86. Tan Z., Ali M.K. Pattern recognition in a neural network with chaos. Phys. Rev. E **58** (1998) 3649.

87. Tan Z., Ali M.K. Associative memory using synchronization in a chaotic neural network. Int. J. Modern Physics C **12** (2001).

88. *Tan Z., Ali M.K.* Pattern recognition with stochastic resonance in a generic neural network. *Int. J. Modern Physics C* **12** (2001).
89. *Tan Z., Hepburn B.S., Tucker C., Ali M.K.* Pattern recognition using chaotic neural networks. *Discrete Dynamics in Nature and Society* **2** (1998) 243-247.
90. *Tesauro G.* Practical issues in temporal difference learning. *Machine Learning* **8** (1992) 257-277.
91. *Thrun S.B.* The role of exploration in learning control. In: D.A. White, D.A. Sofge (eds). *Handbook of Intelligent Control. Neural, Fuzzy, and Adaptive Approaches* NY: Van Nostrand Reinhold, 1992.
92. *Touzet C.* Neural reinforcement learning for behaviour synthesis. *Robotics and Autonomous Systems* **22** (1987) 251-281.
93. *Tsuda I.* Dynamic link of memory - chaotic memory map in nonequilibrium neural networks. *Neural Networks* **5** (1992) 313.
94. *Ventura D., Martinez T.* Quantum Associative Memory. xxx.lanl.gov, quant-ph/9807053 (1998).
95. *Wang X.-J., Rinzler J.* *Handbook of Brain and Neural Networks.* M. Arbib (ed.), MIT Press, Cambridge, 1995.
96. *Weigend A.S., Gershenfeld N.A.* (eds) *Time series prediction: forecasting the future and understanding the past.* Addison-Wesley, 1994.
97. *White D.A., Sofge D.A.* (eds) *Handbook of Intelligent Control. Neural, Fuzzy and Adaptive Approaches.* NY: Van Nostrand Reinhold, 1992.
98. *Williams C.P., Clearwater S.H.* *Exploration in Quantum Computing.* NY: Springer-Verlag, 1998.
99. *Yao Y., Freeman W.J.* Model of biological pattern recognition with spatially chaotic dynamics. *Neural Networks* **3** (1990) 153-170.
100. *Yao Y., Freeman W.J., Burke B., Yang Q.* Pattern recognition by a distributed neural network: an industrial application. *Neural Networks* **4** (1991) 103.

University of Lethbridge, Canada

Поступила в редакцию 28.05.2001

NONLINEAR DYNAMICS OF INFORMATION PROCESSING IN NEURAL NETWORKS

A.B. Potapov, M.K. Ali

We consider a number of possible roles of complex dynamics and chaos in information processing by neural networks. First, we review the principles of operation for some well-known neural networks, and then discuss the approaches to using chaos in neural networks. Our main goal is to present a novel view of the problem of chaos in information processing. We demonstrate that chaos emerges naturally when a neural network forms a controlling part of a more complex system. We show that such neural networks can enhance efficiency by using chaos for explorations in a method known as Reinforcement Learning. A discussion on Hamiltonian neural networks is also presented.



Potapov Alexei Borisovich was born in 1960. He graduated from the Physical Department of the Moscow State University in 1983. Now he is a Senior Science Fellow of the Institute of Applied Mathematics RAS. The main fields of scientific activity - nonlinear dynamics, time series processing, quantitative characteristics of chaos, modelling of complex systems.

E-mail: copal@spp.keldysh.ru



M. Keramat Ali has a B.Sc. (honours) and an M.Sc. from Peshawar University with gold medals for First Class First positions. He then went to Memorial University on a Colombo Plan scholarship and was awarded another M.Sc. degree. His Ph.D. is from the University of Western Ontario. From 1981 he is Professor of Physics at the Department of Physics, University of Lethbridge, Canada. Keramat is a theoretical physicist with a background in spectroscopy, atomic and molecular bound state and scattering phenomena, surface scattering, classical and quantum chaos, fractals, quasicrystals, solitons, integrability and semiclassical methods. One of his current research interests includes application of dynamics to information processing and intelligent systems.



РЕГУЛЯРНЫЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ ДВУХ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ, ДИНАМИЧЕСКИ РАЗЛИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ФИТЦХЬЮ - НАГУМО

В.И. Некоркин, Д.В. Артюхин

Предложена модель, описывающая динамику нейрона нижних олив, демонстрирующего периодическую релаксационную активность ниже порога возбуждения. Модель представляет собой систему двух взаимосвязанных различных элементов ФитцХью - Нагумо. При отсутствии связи один из элементов находится в возбужденном режиме, а второй - в автоколебательном. Показано, что динамика модели - четырехмерной автономной системы - может быть описана одномерным разрывным точечным отображением Пуанкаре. Проведено исследование этого отображения и установлено, что динамика системы является как регулярной, так и хаотической. Обнаружено, что основные динамические режимы модели находятся в достаточно хорошем качественном соответствии с экспериментальными данными поведения «живых» нейронов нижних олив.

Введение

Исследование принципов контроля и координации движений, осуществляемых нервной системой человека и животных, является одной из актуальных задач нейрофизиологии. В соответствии с современными представлениями [1-3] в этом процессе управления значительную роль играет так называемая оливо-церебелларная (*olivocerebellar*) система, состоящая из нейронов нижних олив (*inferior olive*) и мозжечка (*cerebellum*). Нейроны нижних олив - это группы нейронов, расположенные в стволе головного мозга. Оливо-церебелларная система характеризуется ритмической активностью на частоте примерно 10 Гц - универсальным ритмом, на основе которого происходит любое мышечное сокращение. Эта ритмическая активность приводит к сложной временной спайковой активности в мозжечке [4]. В работах [1,5,6] установлено, что ритмическая активность происходит на фоне так называемых подпороговых (ниже порога возбуждения) самопроизвольных колебаний мембранного потенциала нейронов нижних олив. Подпороговые колебания нейрона нижних олив вызывают ритмическое изменение вероятности возникновения потенциала действия (*action potential*), то есть возбуждения нейрона.

Таким образом, важнейшим элементом оливо-церебелларной системы являются нейроны нижних олив, поведение которых в значительной степени

определяет процесс координации движений, осуществляемых нервной системой. Поэтому построение математических моделей, описывающих динамику нейронов нижних олив, представляется важнейшей задачей нейродинамики в области управления движениями. В литературе описаны два пути решения этой задачи.

Один из них (см., например, [7]) предполагает детальное исследование физико-химических процессов, происходящих в мембране нейрона и развивает подход, восходящий к известным исследованиям Ходжкина - Хаксли. В основу другого направления положен «феноменологический» подход. В этом подходе к модели предъявляют требования правильного качественного описания наблюдаемых в реальных нейрофизиологических экспериментах явлений. Например, в [8,9] рассмотрена четырехмерная система, которая достаточно хорошо описывает результаты экспериментов Ллинаса с реальными нейронами нижних олив, демонстрирующих квазигармонические подпороговые колебания. Эта динамическая система представляет собой нелинейно связанные системы ФитцХью - Нагумо (ФХН) и Ван дер Поля.

Оба эти направления имеют свои как положительные, так и отрицательные стороны. Например, модель из [7] является достаточно сложной и плохо подходит для моделирования ансамблей нейронов, хотя дает достаточно полное представление о процессах в мембране. И наоборот, модель из [8,9] представляется перспективной с точки зрения использования ее при исследовании ансамблей нейронов нижних олив или в качестве элемента полной оливо-церебеллярной системы. В то же время, эта модель не раскрывает полностью физико-химических процессов, происходящих в мембране нейрона.

В данной статье развивается «феноменологический» подход и предлагается модель нейрона нижних олив, которая достаточно хорошо описывает нейрофизиологические эксперименты Бенардо и Фостера [6]. В этих экспериментах было обнаружено, что в некоторых случаях (нейроны нижних олив морских свинок) подпороговая ритмическая активность имеет релаксационный характер (рис. 1). Как и в [8, 9], модель имеет «блочную» структуру, но в отличие от модели из [8, 9], блоки связаны линейно. Каждый из блоков представляет собой систему ФХН. При отсутствии связи между блоками одна из систем ФХН находится в возбужденном состоянии (при превышении некоторого порога в системе наблюдается переходный процесс в виде импульса возбуждения), а другая - в режиме периодических релаксационных колебаний.

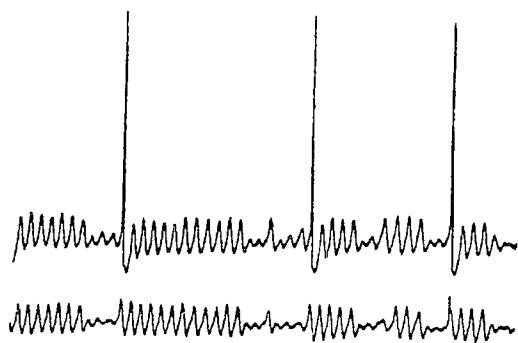


Рис. 1. Спайковая активность и подпороговые колебания нейронов нижних олив морских свинок, полученные в нейрофизиологических экспериментах Бенардо и Фостера [6]

Статья организована следующим образом. В разделе 1 вводится исследуемая модель, а в разделе 2 изучаются основные свойства разбиения фазового пространства модели на траектории. В разделе 3 проводится построение точечного отображения. В разделе 4 исследуются аттракторы модели, изучаются характеристики и строится бифуркационная диаграмма. В заключении дается краткое обсуждение полученных результатов.

1. Модель

Как и в [8, 9], построим модель в виде двух «блоков», но в отличие от этих работ свяжем их линейно. Каждый из блоков представляет собой систему ФХН. В результате получим следующую модель:

$$\begin{cases} \mu \dot{x}_1 = f(x_1) - y_1 + d(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 = x_1, \\ \mu \dot{x}_2 = f(x_2) - y_2 + d(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = x_2 - a, \end{cases} \quad (1)$$

где μ - малый параметр ($0 < \mu \ll 1$); a - параметр, контролирующий выбор динамических режимов в блоках ($a > 0$); d - параметр, характеризующий величину связи между блоками ($d > 0$); $f(x)$ - функция кубической формы. Будем рассматривать систему (1) с кусочно-линейной функцией следующего вида:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq m_1, \\ A(x - a), & \text{если } m_1 \leq x \leq m_2, \\ -x + 1, & \text{если } x \geq m_2, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$0 < m_1 < a < m_2 < 1, \quad A \equiv m_1 / (a - m_1) < 1, \quad m_2 = 1 - m_1(1 - a)/a. \quad (3)$$

Такой выбор функции $f(x)$ позволяет правильно передать основные свойства кубической нелинейности, общепринятой [10, 11] для системы ФХН, и обойти «технические» трудности при исследовании системы (1), не имеющие принципиального значения.

При выполнении условий (3) и отсутствии связи между блоками ($d=0$) первая (переменные x_1, y_1) из систем-блоков находится в возбужденном режиме, а вторая (переменные x_2, y_2) - в режиме периодических релаксационных колебаний. На рис. 2, а представлено типичное поведение системы ФХН в возбужденном режиме

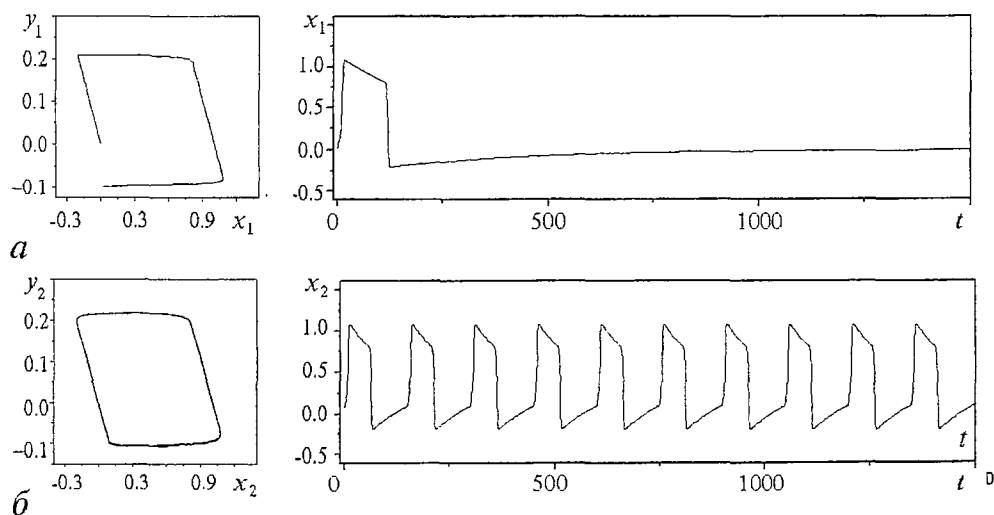


Рис. 2. Типичное поведение системы ФХН. а - в возбужденном режиме; б - в режиме периодических релаксационных колебаний

- при превышении некоторого порога в системе наблюдается переходный процесс в виде импульса возбуждения. Режим периодических релаксационных колебаний иллюстрирует рис. 2, б. При наличии связи ($d \neq 0$) считаем, что переменная x_1 описывает изменение мембранного потенциала нейрона нижних олив, y_1 ассоциируется с его рефракторными свойствами, а переменные x_2, y_2 «отвечают» за ритмическую активность нейрона.

2. Фазовое пространство и аттракторы системы (1)

Система (1), (2) имеет два малых параметра при производных, поэтому для ее фазового пространства характерно наличие [12-14] так называемых быстрых и медленных движений, имеющих разные временные масштабы. Медленные движения происходят на многообразии медленных движений и в его малой окрестности. Это многообразие может быть как устойчивым, так и неустойчивым по отношению к остальной части траекторий, то есть по отношению к быстрым движениям. Если во всем фазовом пространстве траектории быстрых движений при $t \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются (приближение происходит за очень короткое время и носит характер «скачка» по быстрым переменным) к многообразию медленных движений, то множество неблуждающих траекторий системы целиком принадлежит этому многообразию. В этом случае влияние малых параметров на динамику системы является несущественным. Если же многообразие медленных движений состоит как из устойчивых, так и из неустойчивых компонент, то возможно существование неблуждающих траекторий, имеющих медленные (движения в окрестности многообразия медленных движений) и быстрые (движения «вдоль» быстрых траекторий) участки. Это так называемые релаксационные (разрывные) колебания и при их исследовании необходимо учитывать малые параметры. В этой работе основное внимание уделим исследованию релаксационных колебаний системы (1), (2), являющихся образами колебаний реальных нижних олив нейронов [6].

Для удобства исследования системы (1), (2) введем новые переменные

$$v_1 = 1/2 (y_1 + y_2), \quad v_2 = 1/2 (y_2 - y_1). \quad (4)$$

Тогда система (1) запишется в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{cases} \mu \dot{x}_1 = f(x_1) - v_1 + v_2 + d(x_2 - x_1), \\ \dot{v}_1 = 1/2 (x_1 + x_2 - a), \\ \mu \dot{x}_2 = f(x_2) - v_1 - v_2 + d(x_1 - x_2), \\ \dot{v}_2 = 1/2 (x_2 - x_1 - a). \end{cases} \quad (5)$$

Система (5), (2) (далее просто система (5)) имеет две быстрые переменные x_1, x_2 , две медленные переменные v_1, v_2 и единственное состояние равновесия $O(x_1=0; x_2=a; v_1=0; v_2=-ad)$. Можно показать, что при $d > A/(1-A)$ состояние O - является устойчивым фокусом, а при $d < A/(1-A)$ - либо седлом, либо седло-фокусом. Устойчивое и неустойчивое многообразия седла и седло-фокуса имеют размерность два. При $d=A/(1-A)$ происходит бифуркация Андронова - Хопфа: «мягко» рождается устойчивый предельный цикл при уменьшении параметра d . Заметим, что в силу кусочно-линейности системы (5) переменные на этом цикле ведут себя скачкообразно в момент рождения (так называемое рождение от

«склейки»). Следуя теории релаксационных колебаний, проведем разбиение фазового пространства R^4 на траектории в рамках кусочно-разрывного приближения ($\mu \rightarrow 0$). В этом приближении многообразие медленных движений и движения на нем не учитывают малых параметров, а движения по быстрым траекториям происходят с бесконечно большой скоростью. С одной стороны, такой приближенный подход позволяет выяснить основные динамические свойства исходной системы (5), а с другой - служит основой для численного исследования этой системы.

2.1. Быстрые движения системы. Из (5) следует, что система быстрых движений имеет вид

$$\begin{cases} \mu \dot{x}_1 = f(x_1) - v_1 - v_2 + d(x_2 - x_1), \\ \mu \dot{x}_2 = f(x_2) - v_1 + v_2 + d(x_1 - x_2), \\ v_1 = v_1^0, \quad v_2 = v_2^0, \end{cases} \quad (6)$$

где $v_i^0 = \text{const}$ ($i=1,2$). Система (6) - кусочно-линейная система на фазовой плоскости. Прямые $x_i = m_1, m_2$ ($i=1,2$) делят фазовую плоскость (x_1, x_2) на девять областей, в каждой из которых определена линейная система. Перепишем систему (6) в следующем виде:

$$\begin{cases} \mu \dot{x}_1 = -\partial U / \partial x_1, \\ \mu \dot{x}_2 = -\partial U / \partial x_2, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$U = d(x_2 - x_1)^2/2 - \int_0^{x_1} [f(\xi) - v_1^0 - v_2^0] d\xi - \int_0^{x_2} [f(\xi) - v_1^0 + v_2^0] d\xi.$$

Представление (7) означает, что система (6) является градиентной. Следовательно, разбиение фазовой плоскости (x_1, x_2) на траектории определяет лишь состояния равновесия. Число этих состояний равновесия зависит от v_i^0 ($i=1,2$), которые в системе (7) играют роль параметров. Очевидно, что максимальное число состояний равновесия системы (7) - девять. Бифуркации состояний равновесия происходят при значениях v_i^0 , соответствующих «попаданию» на прямые $x_i = m_1, m_2$ ($i=1,2$). Мы не будем детально описывать бифуркационное множество системы (7), поскольку это не требуется для проводимого ниже исследования. Отметим лишь, что типичной (корузмерности 1) бифуркацией системы (7) является седло-узловая, которая и определяет переходы между различными устойчивыми компонентами многообразий медленных движений (см. ниже, раздел 3). Пусть сначала параметр связи d удовлетворяет условию $d < A/2$. Для этого случая результаты исследования состояний равновесия системы (7) представлены в Приложении (табл. 1, где $c \equiv A(1+d) - d$, $\alpha \equiv 1/(1+2d)$, $r \equiv (A-2d)/A$).

2.2. Медленные движения системы. При $d < A/2$ система (6) имеет четыре устойчивых состояния равновесия - O_1, O_3, O_7, O_9 . Следовательно [12-14], в фазовом пространстве R^4 системы (5) существует четыре устойчивых компоненты многообразия медленных движений. Ниже будем изучать аттракторы системы (5), формируемые движениями между компонентами, соответствующими состояниям равновесия O_1, O_3 и O_7 . Обозначим эти компоненты через W_1^s, W_2^s и W_3^s , соответственно. Принимая во внимание результаты исследования, представленные в табл. 1, получаем

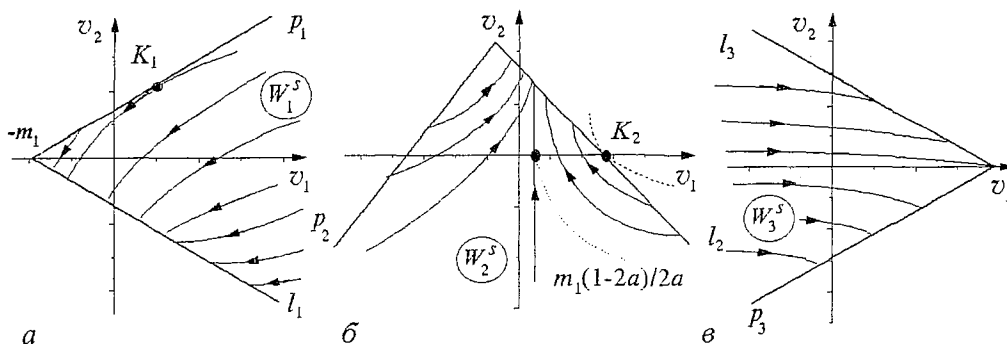


Рис. 3. Качественное представление многообразий W_1^s, W_2^s, W_3^s и траекторий на них

$$W_1^s = \{x_1 = -v_1 + \alpha v_2, \quad x_2 = -v_1 - \alpha v_2, \quad x_1 \leq m_1, \quad x_2 \leq m_1\};$$

$$W_2^s = \{x_1 = -v_1 + \alpha v_2 + d\alpha, \quad x_2 = -v_1 - \alpha v_2 + \alpha(1+d), \quad x_1 \leq m_1, \quad x_2 \geq m_2\};$$

$$W_3^s = \{x_1 = -v_1 + \alpha v_2 + 1, \quad x_2 = -v_1 - \alpha v_2 + 1, \quad x_1 \geq m_2, \quad x_2 \geq m_2\}.$$

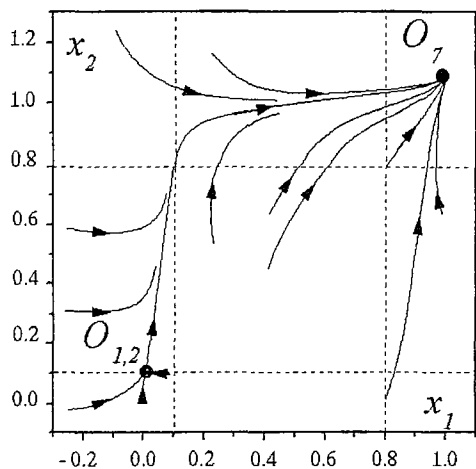
Свойства траекторий этих многообразий представлены в табл. 2 Приложения и на рис. 3. Движения на W_i^s ($i=1,2,3$) определяются двумерными линейными системами, которые не имеют состояний равновесия и, следовательно, любая траектория покидает эти многообразия. Граница каждого многообразия W_i^s состоит из двух компонент - прямых l_i и p_i . На многообразиях W_1^s и W_2^s в точках K_1 и K_2 траектории касаются соответствующих границ и разделяют потоки траекторий, входящих и выходящих на эти многообразия. На многообразии W_3^s точка касания отсутствует, и на всей границе векторное поле ориентировано во внешнюю область.

3. Отображение Пуанкаре

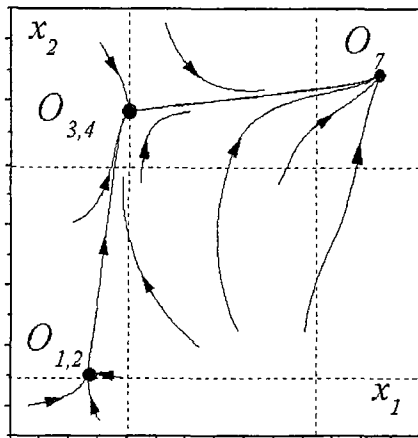
В этом разделе построим и исследуем точечные отображения, порождаемые траекториями системы (5). Для каждого из отображений сначала получим его параметрическое представление в рамках кусочно-разрывного приближения ($\mu \rightarrow 0$), а затем, опираясь на этот результат, построим отображение численно для случая $0 < \mu < 1$. Будем изучать аттракторы системы (5), в формировании которых принимают участие траектории из окрестности многообразия W_1^s . Поскольку любая траектория, принадлежащая W_1^s , покидает это многообразие, то траектории исследуемых аттракторов при $\mu \rightarrow 0$ обязательно пересекают границу W_1^s в той части, на которой векторное поле (5) ориентировано во внешнюю область (см. рис.3). Рассмотрим, как одна из границ многообразия W_1^s - полупрямая l_1 - отображается траекториями системы (5). В соответствии с теорией релаксационных колебаний движение любой траектории, «стартующей» с l_1 , определяется системой быстрых движений (6), в которой параметры v_1^0 и v_2^0 связаны между собой через уравнение этой полупрямой, то есть

$$v_2^0 = -(v_1^0 + m_1)/\alpha, \quad v_1^0 \geq -m_1. \tag{8}$$

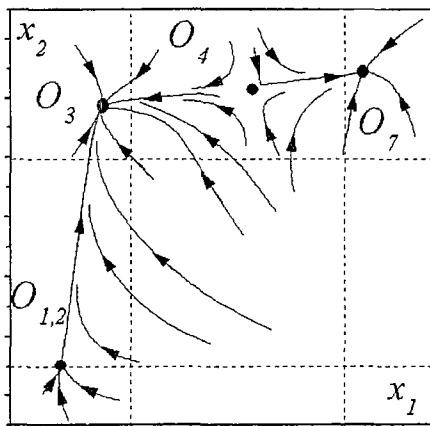
Подставляя (8) в систему (6), получим систему быстрых движений, в которой v_1^0 будем рассматривать в качестве управляющего параметра. Принимая во внимание (8), из табл. 1 получаем, что система (6),(8) имеет состояние равновесия $O_{1,2}$ ($x_1 = -2v_1^0 - m_1, x_2 = m_1$). Это состояние равновесия является седло-узлом с устойчивой узловой областью и неустойчивой сепаратрисой. Поведение сепаратрисы и



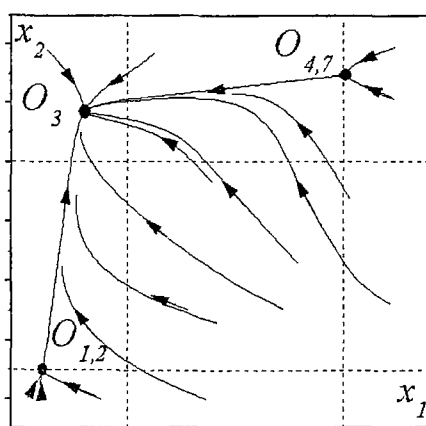
а



б



в



г

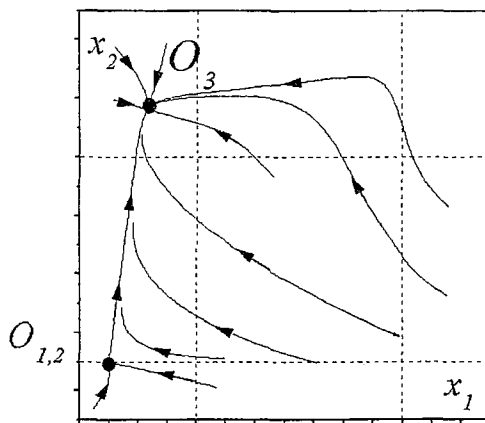
существование других состояний равновесия зависит следующим образом от параметра v_1^0 .

- При $-m_1 \leq v_1^0 < n$, где $n = -m_1 + \alpha d / 2$, кроме $O_{1,2}$ на фазовой плоскости (x_1, x_2) существует еще одно состояние равновесия O_7 , которое является устойчивым узлом. Фазовый портрет системы (6), (8) в этом случае представлен на рис. 4, а.

- Значение $v_1^0 = n$ является бифуркационным и соответствует появлению на фазовой плоскости седло-узла $O_{3,4}$ (рис. 4, б).

- При $n < v_1^0 < m_1(1-2a)/(2a)$, кроме $O_{1,2}$ и O_7 на фазовой плоскости существует также устойчивый узел O_3 и седло O_4 . В этом случае сепаратриса седло-узла $O_{1,2}$ стремится в состояние равновесия O_3 (рис. 4, в).

- При $v_1^0 = m_1(1-2a)/(2a)$ седло O_4



д

Рис. 4. Фазовые портреты системы (6), (8) для различных значений управляющего параметра v_1^0 . Пунктирными линиями изображены прямые $x_i = m_1, m_2$, ($i=1,2$)

и узел O_7 сливаются, и на фазовой плоскости (x_1, x_2) образуется седло-узел $O_{4,7}$, сепаратриса которого стремится в устойчивый узел O_3 (рис. 4, з).

• При $v_1^0 > m_1(1-2a)/(2a)$ на фазовой плоскости (x_1, x_2) существует только два состояния равновесия - седло-узел $O_{1,2}$ и устойчивый узел O_3 , к которому стремится сепаратриса состояния равновесия $O_{1,2}$ (рис. 4, д).

Таким образом, сепаратриса седло-узла $O_{1,2}$ стремится либо в состояние равновесия O_7 , если v_1^0 удовлетворяет условиям

$$-m_1 \leq v_1^0 \leq n, \quad (9)$$

либо в состояние равновесия O_3 , если v_1^0 удовлетворяет неравенству

$$v_1^0 > n. \quad (10)$$

Это означает, что полупрямая l_1 состоит из двух частей - l_1^- и l_1^+ , по-разному отображаемых системой (5), где

$$l_1^- = \begin{cases} x_1 = -2s_1 - m_1, & x_2 = m_1, \\ v_1 = s_1, & v_2 \alpha = -s_1 - m_1, \end{cases} \quad -m_1 \leq s_1 \leq n,$$

$$l_1^+ = \begin{cases} x_1 = -2s_1 - m_1, & x_2 = m_1, \\ v_1 = s_1, & v_2 \alpha = -s_1 - m_1, \end{cases} \quad s_1 > n.$$

Траектории системы (5), стартующие с l_1^+ , в R^4 асимптотически стремятся к многообразию W_2^s , соответствующему состоянию равновесия O_3 , а с l_1^- - к многообразию W_3^s , соответствующему O_7 .

Покажем, что траектории системы (5) при $\mu \rightarrow 0$ порождают точечное отображение полупрямой l_1^+ в l_1 .

3.1. Отображение S_1 . Как установлено выше, быстрые траектории системы (5) переводят l_1^+ в окрестность многообразия W_2^s , и далее его преобразование производится траекториями из этой окрестности. Как известно [12-14], при $\mu \rightarrow 0$ поведение траекторий в окрестности устойчивого многообразия W_2^s можно достаточно точно описать системой, определенной на самом многообразии. Поскольку «вдоль» быстрых траекторий переменные v_1 и v_2 не меняются (при $\mu \rightarrow 0$), то движения на W_2^s будут начинаться (рис. 5, а) с полупрямой

$$v_2 \alpha = -v_1 - m_1, \quad v_1 > -m_1 + \alpha d/2. \quad (11)$$

Траектории многообразия W_2^s переводят полупрямую (11) в отрезок $l_2^+ \subset l_2$ (см. рис. 5, а и табл. 2 Приложения). Следовательно, траектории системы (5) при $\mu \rightarrow 0$ порождают одномерное точечное отображение точек полупрямой l_1^+ в l_2^+

$$L_{1,2}: s_1 \rightarrow s_2.$$

Интегрируя линейную систему на W_2^s , обычным образом получаем параметрическое представление отображения $L_{1,2}$

$$\begin{cases} s_1(\theta) \equiv [2(1-a)(a-m_1) - a(1-a)e^{-\theta} - 2a(m_1 + B\alpha)e^{-\alpha\theta}] / [2a(e^{-\alpha\theta} - e^{-\theta})], \\ s_2(\theta) \equiv [(1-a)(a-m_1)e^{-\theta} - a(m_1 + \alpha B + (1-a)/2)e^{-(1+\alpha)\theta}] / [a(e^{-\alpha\theta} - e^{-\theta})] + (1-a)/2. \end{cases} \quad (12)$$

В (12) $B \equiv 1/2 - a/(2\alpha)$, $\theta_1 \leq \theta \leq +\infty$, где θ_1 - корень уравнения

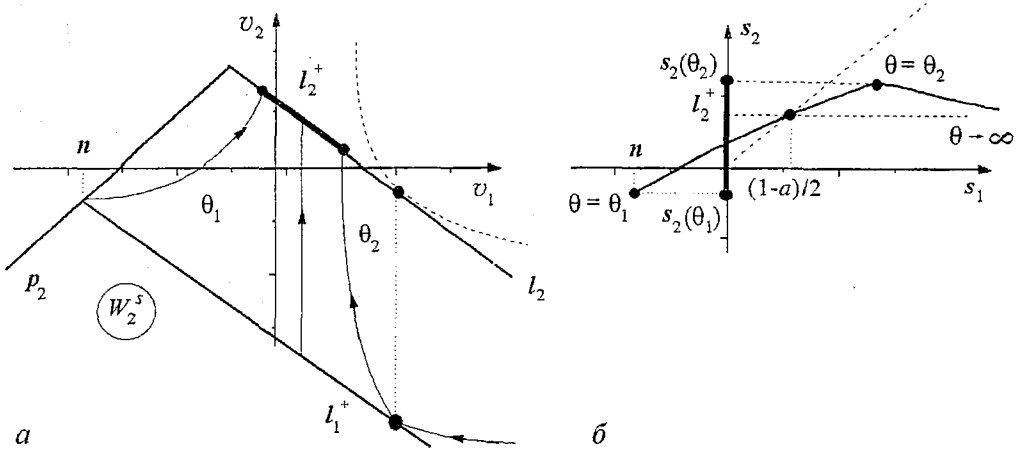


Рис. 5. Качественное представление отображения $L_{1,2}$: a - поведение траекторий на W_2^s ; b - функция соответствия

$$[1 + d - a/\alpha] e^{-\alpha\theta} + [1 + d - (a - 2m_1)/\alpha] e^{-\theta} = 2(1 - a)(a - m_1)/(\alpha a).$$

Отрезок $l_2^+ = L_{1,2}(l_1^+)$ задается следующим образом:

$$l_2^+ = \begin{cases} x_1 = -2s_2 - m_2 + 1, & x_2 = m_2, \\ v_1 = s_2, & v_2 \alpha = -s_2 - m_2 + \alpha(1 + d), \end{cases} \quad s_2(\theta_1) \leq s_2 \leq s_2(\theta_2),$$

где θ_2 - корень уравнения

$$a[m_1 - a + \alpha(1 + d)](e^{-\alpha\theta} - \alpha e^{-\theta}) = (1 - a)(a - m_1)(1 - \alpha).$$

Качественный вид функции соответствия отображения $L_{1,2}$ представлен на рис. 5, б.

Рассмотрим теперь отображение отрезка l_2^+ . Сначала преобразование l_2^+ осуществляется системой быстрых движений (5), в которой параметры v_1^0 и v_2^0 удовлетворяют условию

$$\alpha v_2^0 = -v_1^0 - m_2 + \alpha(1 + d), \quad v_1^0 \geq m_1(1 - 2a)/(2a). \quad (13)$$

Анализируя состояния равновесия системы (6), (13) при использовании результатов, приведенных в табл. 1, устанавливаем следующее. При всех значениях управляющего параметра v_1^0 система (6), (13) имеет седло-узел $O_{2,3}(x_1 = -2v_1^0 - m_2 + 1, x_2 = m_2)$ с устойчивой узловой областью и неустойчивой сепаратрисой. Разбиение фазовой плоскости (x_1, x_2) на траектории системы (6), (13) представлено на рис. 6 для различных значений управляющего параметра v_1^0 (см. Приложение, табл. 3). Перестройка фазовых портретов на рис. 6 происходит через седло-узловые бифуркации, отвечающие состояниям равновесия $O_{6,9}$, $O_{5,8}$, $O_{7,4}$, соответственно, при

$$\begin{aligned} v_1^0 &= m_1(1 - a)/a - \alpha d, \\ v_1^0 &= m_1(1 - a)/a - m_1 d / \{2[m_1 - d(a - 2m_1)]\}, \\ v_1^0 &= m_1(1 - a)/a - \alpha d/2. \end{aligned} \quad (14)$$

Из проведенного исследования системы (6), (13) следует, что при всех значениях управляющего параметра v_1^0 сепаратриса седло-узла $O_{2,3}$ стремится в устойчивый узел O_1 . Следовательно, все траектории, «стартующие» с l_2^+ , асимптотически приближаются к многообразию W_1^s , соответствующему состоянию равновесия O_1 .

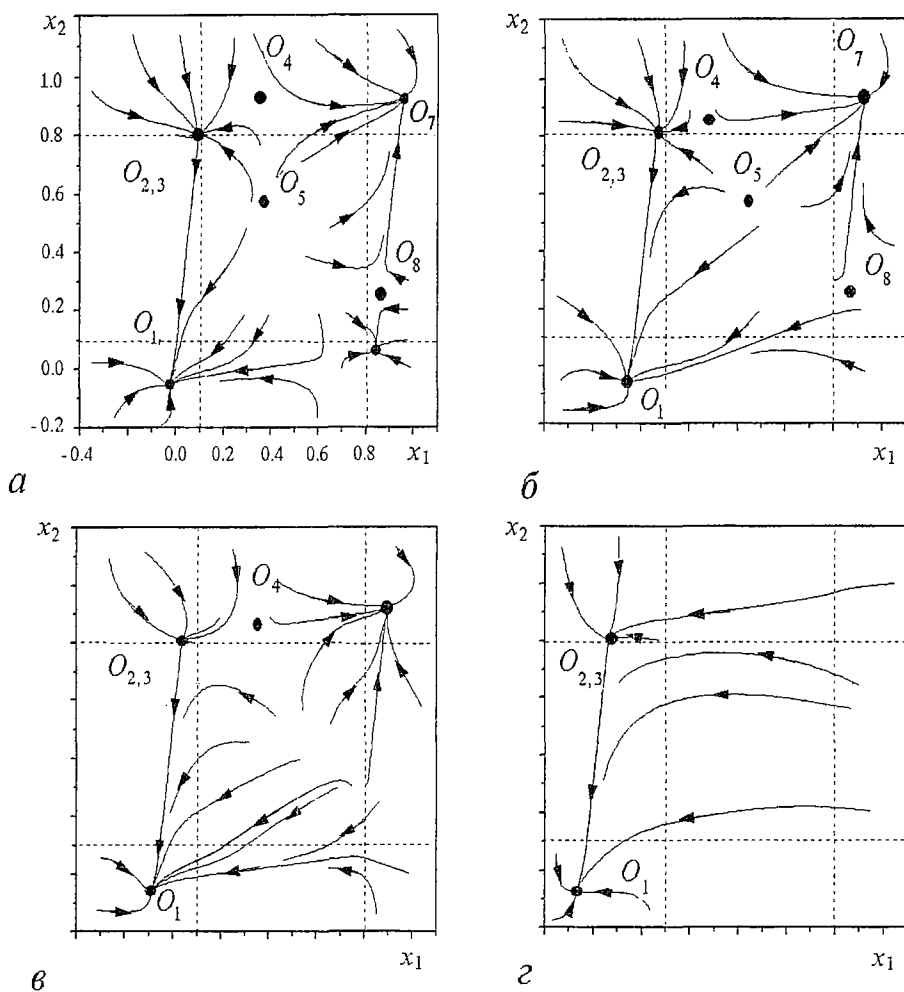


Рис. 6. Фазовые портреты системы (6), (13) для различных значений управляющего параметра v_1^0 . Пунктирными линиями изображены прямые $x_i = m_1, m_2, (i=1,2)$

Как и выше, движения в окрестности W_1^s будем аппроксимировать движениями системы медленных движений на этом многообразии. Причем на W_1^s траектории начинают движение с отрезка l_2^+ , принадлежащего прямой, задаваемой соотношениями (13), в котором константы v_i^0 формально заменены на переменные v_i . Поведение этих траекторий на W_1^s существенно зависит от взаимного расположения l_2^+ и траектории, проходящей через точку касания K_1 (рис. 7, а). Далее будем рассматривать систему (5) в области параметров, для которой эта траектория и l_2^+ не имеют общих точек (см. рис. 7, а, на котором представлен именно такой случай). Например, это выполняется, если $m_1 < a^2$. В этом случае траектории многообразия W_1^s переводят l_2^+ на l_1 и порождают точечное отображение

$$L_{2,1}: s_2 \rightarrow \bar{s}_1,$$

где \bar{s}_1 отождествляется с s_1 . Интегрируя систему на W_1^s , получаем параметрическое уравнение для функции соответствия этого отображения

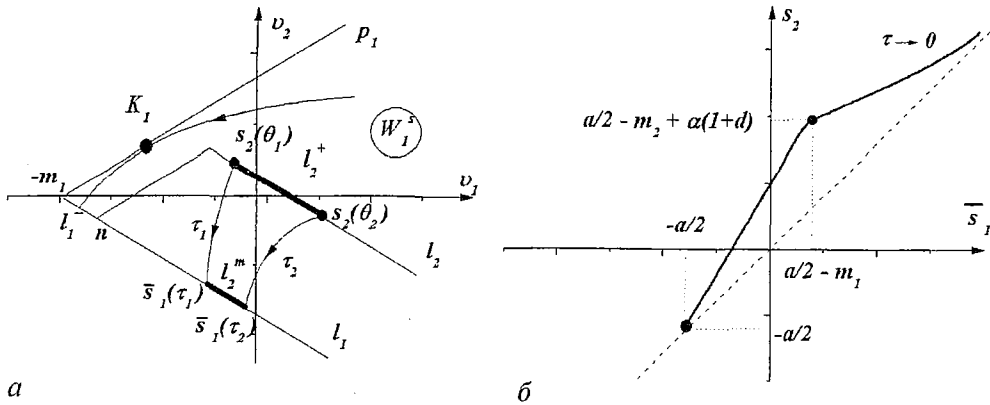


Рис. 7. Качественное представление отображения $L_{2,1}$: а - поведение траекторий на W_1^s ; б - функция соответствия

$$\begin{cases} s_2(\tau) \equiv \{[a/2 - m_2 + \alpha(1+d)]e^{-\alpha\tau} + ae^{-\tau}/2 - a + m_1\}/(e^{-\alpha\tau} - e^{-\tau}), \\ \bar{s}_1(\tau) \equiv \{[a - m_2 + \alpha(1+d)]e^{-(\alpha+1)\tau} - (a - m_1)e^{-\tau}\}/(e^{-\alpha\tau} - e^{-\tau}) - a/2, \end{cases} \quad (15)$$

где $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$, а τ_1 и τ_2 - корни уравнений

$$[a/2 - m_2 + \alpha(1+d) - s_2(\theta_i)]e^{-\alpha\tau} + [a/2 + s_2(\theta_i)]e^{-\tau} = a - m_1, \quad i=1,2.$$

Качественный вид отображения $L_{2,1}$ представлен на рис. 7, б. Предположим (ниже мы укажем параметры, для которых это справедливо), что выполнено следующее условие:

$$\bar{s}_1(\tau_1) > n. \quad (16)$$

В этом случае образ l_2^+ , полученный в результате действия отображения $L_{2,1}$, а именно, $l_2^m = L_{2,1}(l_2^+)$, целиком принадлежит полупрямой l_1^+ и траектории системы (5) (при $\mu \rightarrow 0$) порождают точечное отображение

$$S_1 = L_{1,2} \circ L_{2,1}. \quad (17)$$

Принимая во внимание вид отображений $L_{1,2}$, $L_{2,1}$ (см. рис. 5, б и рис. 7, б), устанавливаем, что при выполнении (16) отображение S_1 имеет устойчивую неподвижную точку (рис. 8, а), которой соответствует устойчивый релаксационный предельный цикл системы (5).

Таким образом, мы установили существование устойчивого предельного цикла системы (5) в кусочно-разрывном приближении ($\mu \rightarrow 0$). Сравним теперь эти результаты с результатами численного моделирования системы (5) при $\mu = 0.009$. На рис. 8, б пунктирной линией показан вид отображения S_1 , построенный по формулам (12), (16), а сплошной - вид S_1 , полученный численно. Этот рисунок показывает, что кусочно-разрывное приближение позволяет достаточно хорошо аппроксимировать движения исходной системы. На рис. 8, в представлены полученные численно временные реализации переменной x_1 , соответствующие предельному циклу, и отвечающая ему фазовая траектория в плоскости (x_1, x_2) .

3.2. Отображение S_2 . Рассмотрим отображение отрезка l_1^- . Исследование этого отображения производится аналогично предыдущему случаю. Поэтому дадим лишь краткие пояснения. Как установлено выше, траектории системы быстрых движений (б) при условии

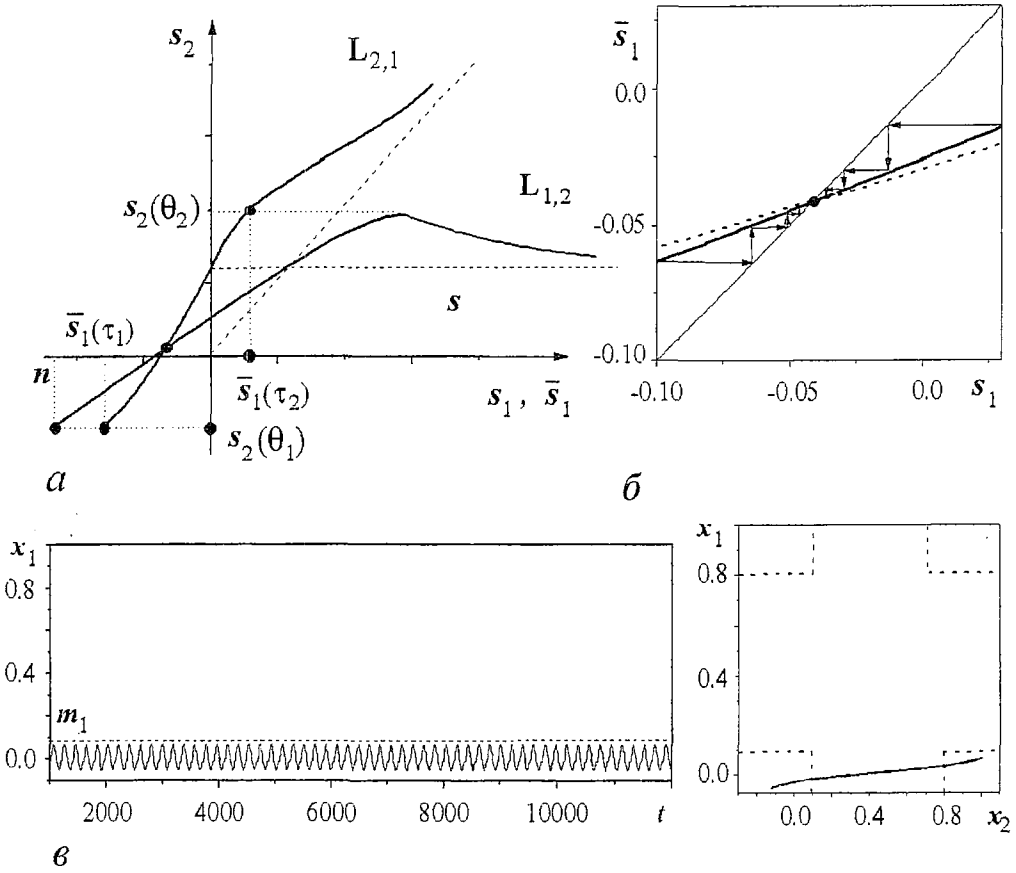


Рис. 8. а - качественный вид отображений $L_{1,2}$ и $L_{2,1}$; б - отображение S_1 , построенное по формулам (12),(16) (пунктирная линия) и полученное с помощью численного моделирования исходной системы (сплошная линия); в - реализация $x_1(t)$ и вид фазовых траекторий в плоскости $\{x_1, x_2\}$. Параметры: $a=0.33, \mu=0.009, m_1=0.096, m_2=0.805, d=0.15$

$$v_2^0 \alpha = -v_1^0 - m_1, \quad -m_1 \leq v_1^0 \leq n \quad (18)$$

переводит l_1^- в окрестность многообразия W_3^s соответствующего состояния равновесия O_7 (см. рис. 4, а, б). Аппроксимируя движения в окрестности многообразия W_3^s движениями по W_3^s (рис. 9, а), устанавливаем существование отображения $M_{1,3}$ отрезка l_1^- на полупрямую p_3 (см. табл. 2), то есть

$$M_{1,3}: s_1 \rightarrow q_3.$$

Параметрическое уравнение отображения $M_{1,3}$ имеет вид

$$\begin{cases} s_1(\xi) \equiv [(a/2 - m_1)e^{-\alpha\xi} + (1 - a/2)e^{-\xi} - m_2]/(e^{-\alpha\xi} + e^{-\xi}), \\ q_3(\xi) \equiv [(a - m_1 - 1)e^{-(1+\alpha)\xi} + (1 - a/2 - m_2)e^{-\xi} + (1 - a/2)e^{-\alpha\xi}]/(e^{-\alpha\xi} + e^{-\xi}), \end{cases} \quad (19)$$

где $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$, а ξ_1 и ξ_2 - соответственно корни уравнений

$$\begin{aligned} (1 - a/2 + m_1)e^{-\xi} + a e^{-\alpha\xi}/2 &= m_2, \\ (a/2 - \alpha d/2)e^{-\alpha\xi} + (1 - a/2 + m_1 - \alpha d/2)e^{-\xi} &= m_2. \end{aligned}$$

Из (19) вытекает, что функция соответствия отображения $M_{1,3}$ имеет вид, представленный на рис. 9, б. Отрезок $l_2^- = M_{1,3}(l_1^-)$ задается следующим образом:

$$l_2^- = \begin{cases} x_1 = m_2, & x_2 = -2q_3 + 2 - m_2, \\ v_1 = q_3, & v_2 \alpha = q_3 - 1 + m_2, \end{cases}$$

$$q_3(\xi_2) \leq q_3 \leq q_3(\xi_1).$$

Рассмотрим дальнейшее преобразование отрезка l_2^- . Сначала оно осуществляется системой быстрых движений (6), в которой параметры v_1^0, v_2^0 удовлетворяют условию

$$\alpha v_2^0 = -v_1^0 + 1 - m_2, \quad v_1^0 \leq 1 - m_2. \quad (20)$$

Принимая во внимание данные табл. 1, устанавливаем, что при выполнении условий

$$m_1(1-a)/a - \alpha d/2 \leq v_1^0 \leq m_1(1-a)/a \quad (21)$$

система (6), (20) имеет фазовые портреты, изображенные на рис. 10. Потребуем, чтобы для всех точек отрезка l_2^- выполнялись условия (21). Нетрудно видеть (см. рис. 9, а) что это требование будет выполнено, если

$$q_3(\xi_2) \geq m_1(1-2a)/a - \alpha d/2. \quad (22)$$

Поскольку в этом случае сепаратриса седло-узла $O_{4,7}$ стремится к устойчивому узлу O_1 (см. рис. 10), отрезок l_2^- траекториями системы (6), (20) переводится в окрестность многообразия W_1^s . Далее преобразование l_2^- осуществляется траек-

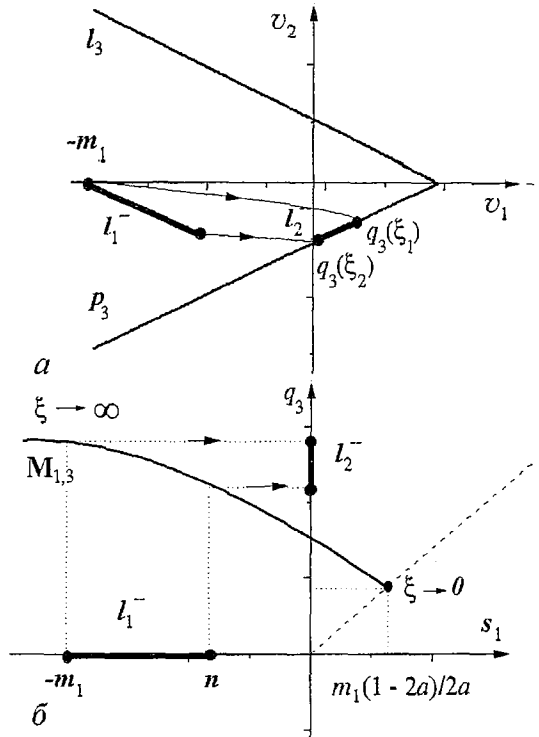
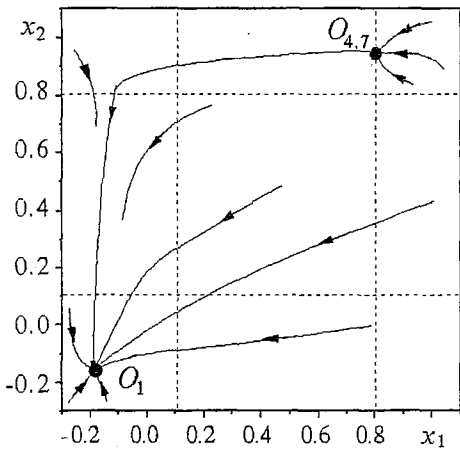
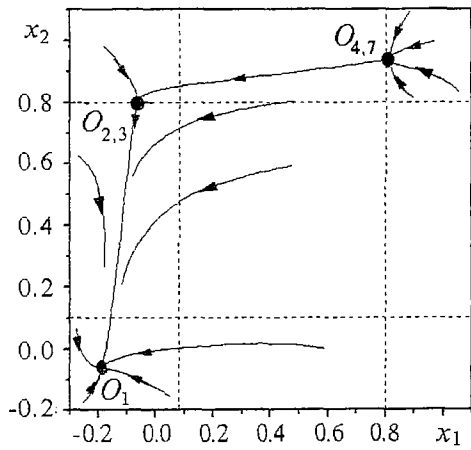


Рис. 9. Качественное представление отображения $M_{1,3}$: а - поведение траекторий на W_3^s ; б - функция соответствия



а



б

Рис. 10. Фазовые портреты системы (6), (20) для различных значений управляющего параметра v_1^0 . Пунктирными линиями изображены прямые $x_i = m_j$ ($i=1,2, j=1,2$)

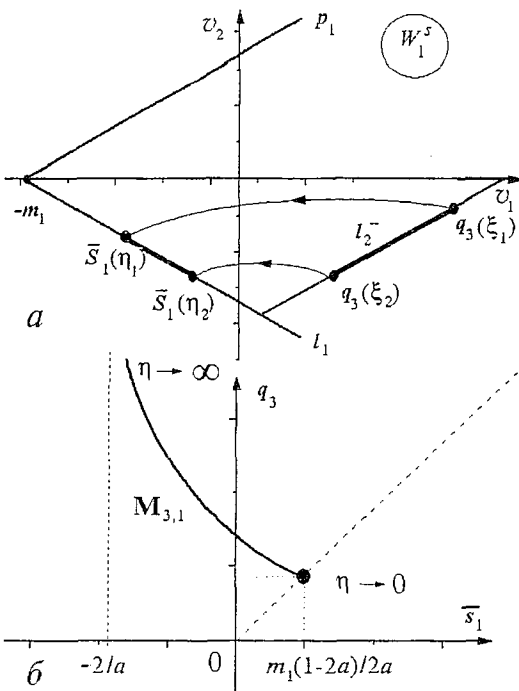


Рис. 11. Качественное представление отображения $M_{3,1}$: а - поведение траекторий на W_1^s ; б - функция соответствия

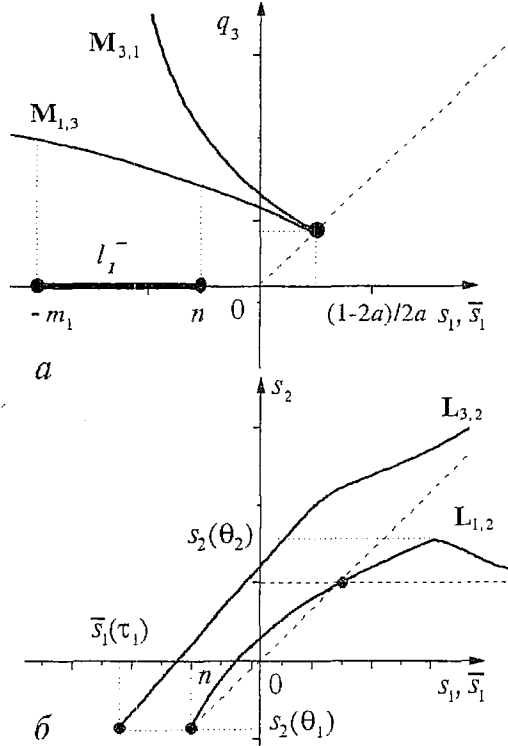


Рис. 12. Качественное представление отображений $M_{1,3} \circ M_{3,1}$ (а); $L_{1,2} \circ L_{2,1}$ (б)

ториями многообразия W_1^s , которые переводят l_2^- на полупрямую l_1 (рис. 11, а). Следовательно, существует точечное отображение

$$M_{3,1}: q_3 \rightarrow \bar{s}_1,$$

где \bar{s}_1 отождествляется с s_1 . Интегрируя систему на W_1^s , устанавливаем, что параметрическое уравнение для функции соответствия отображения $M_{3,1}$ имеет вид

$$\begin{aligned} q_3(\eta) &\equiv [a - m_1 + (1 - m_2 - a/2)e^{-\alpha\eta} - ae^{-\eta}/2]/(e^{\alpha\eta} + e^{-\eta}), \\ \bar{s}_1(\eta) &\equiv [(a/2 - m_1)e^{-\eta} + (1 - m_2)e^{-(1+\alpha)\eta} - ae^{-\alpha\eta}/2]/(e^{-\alpha\eta} + e^{-\eta}), \end{aligned} \quad \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2, \quad (23)$$

где η_i ($i=1,2$) - корни уравнений

$$(a - m_1) + [1 - m_2 - a/2 - q_3(\xi_i)]e^{\alpha\eta} - [a/2 + q_3(\xi_i)]e^{-\eta} = 0.$$

Качественный вид функции соответствия, определяемой уравнениями (23), представлен на рис. 11, б.

Таким образом, траектории системы (5) порождают точечное отображение $S_2: M_{1,3} \circ M_{3,1}$. Рассмотрим свойства отображения S_2 при $m_1 < a^2$ (заметим, что в этой области параметров траектории системы (5) порождают также отображение S_1). Принимая во внимание вид функции соответствия отображений $M_{1,3}$ и $M_{3,1}$, устанавливаем, что в этом случае S_2 имеет вид, качественно представленный на рис. 12, а. Отображение S_2 не имеет неблуждающих траекторий и все траектории являются транзитивными, покидающими l_1^- и направляющимися на полупрямую l_1^+ .

3.3. *Отображение S.* Введем в рассмотрение отображение

$$S: \begin{cases} S_1, & \text{если } s_1 \in l_1^+, \\ S_2, & \text{если } s_1 \in l_1^-. \end{cases} \quad (24)$$

Отображение S преобразует полупрямую l_1 в себя и является разрывным. Этот разрыв связан с тем, что в формировании отображений S_1 и S_2 участвуют траектории из окрестности различных многообразий медленных движений - соответственно W_2^s и W_3^s , имеющих различное положение в фазовом пространстве.

В простейшем случае отображение S имеет единственную устойчивую неподвижную точку на l_1^+ , которая притягивает все остальные траектории. В этом случае фрагмент отображения S - отображение S_1 - представлен на рис. 8, б, а отвечающие неподвижной точке предельный цикл и его временная реализация - на рис. 8, в. Отображение S может демонстрировать и более сложную динамику. Действительно, если неравенство (16) не выполняется, то есть если $\bar{s}_1(\tau_1) < n$, то отображение S_2 не имеет неподвижные точки (рис. 12, б) и отрезок l_2^m либо частично, либо полностью принадлежит l_1^- . Следовательно, в этом случае происходит «обмен» траекториями между отображениями S_1 и S_2 . Такой обмен может привести к образованию нетривиальных аттракторов.

4. Динамика разрывного отображения S и аттракторы системы (5)

Изложенные выше результаты исследования системы (5) относятся к случаю $d < A/2$. Исследование системы (5) при $d \geq A/2$ проводится аналогично. Для этой области параметров мы не будем подробно описывать построение отображения S , а представим лишь конечные результаты исследования S в виде бифуркационной диаграммы и основных видов аттракторов системы (5).

Выберем в качестве управляющего параметр d , а остальные параметры зафиксируем следующим образом:

$$a = 0.33, \quad m_1 = 0.096, \quad m_2 = 0.805, \quad \mu = 0.009.$$

Для идентификации хаотических аттракторов мы находили старший ляпуновский показатель λ_{\max} траектории аттрактора и топологическую энтропию h_{top} отображения S [15, 16]. Топологическая энтропия характеризует неустойчивость траекторий и сложность разбиения аттрактора на траектории. Аттрактор является хаотическим, если $h_{\text{top}}(S) > 0$ и $\lambda_{\max} > 0$. Мы вычисляли топологическую энтропию с помощью итерационной схемы, предложенной в [17].

На рис. 13, а представлена бифуркационная диаграмма системы (5). Она показывает существование трех различных сценариев рождения и исчезновения хаотических аттракторов системы. Первый из этих сценариев характеризуется свойствами, представленными на рис. 13, б. Мы установили, что в этом случае хаотический аттрактор появляется и исчезает в соответствии с классическим сценарием удвоения периода Фейгенбаума. На рис. 14а и 14б дан вид этого аттрактора и его основные характеристики для двух различных значений управляющего параметра d . В формировании аттрактора (см. рис. 14а) участвуют, в основном, движения из окрестностей многообразий W_1^s и W_2^s и неустойчивого многообразия системы (5). Ему соответствуют хаотические колебания, не превосходящие величины $x_1 = a$. Эти колебания можно трактовать как подпороговые релаксационные колебания нейрона нижних олив (см. рис. 1). Аттрактор, представленный на рис. 14б, формируется за счет «обмена» траекто-

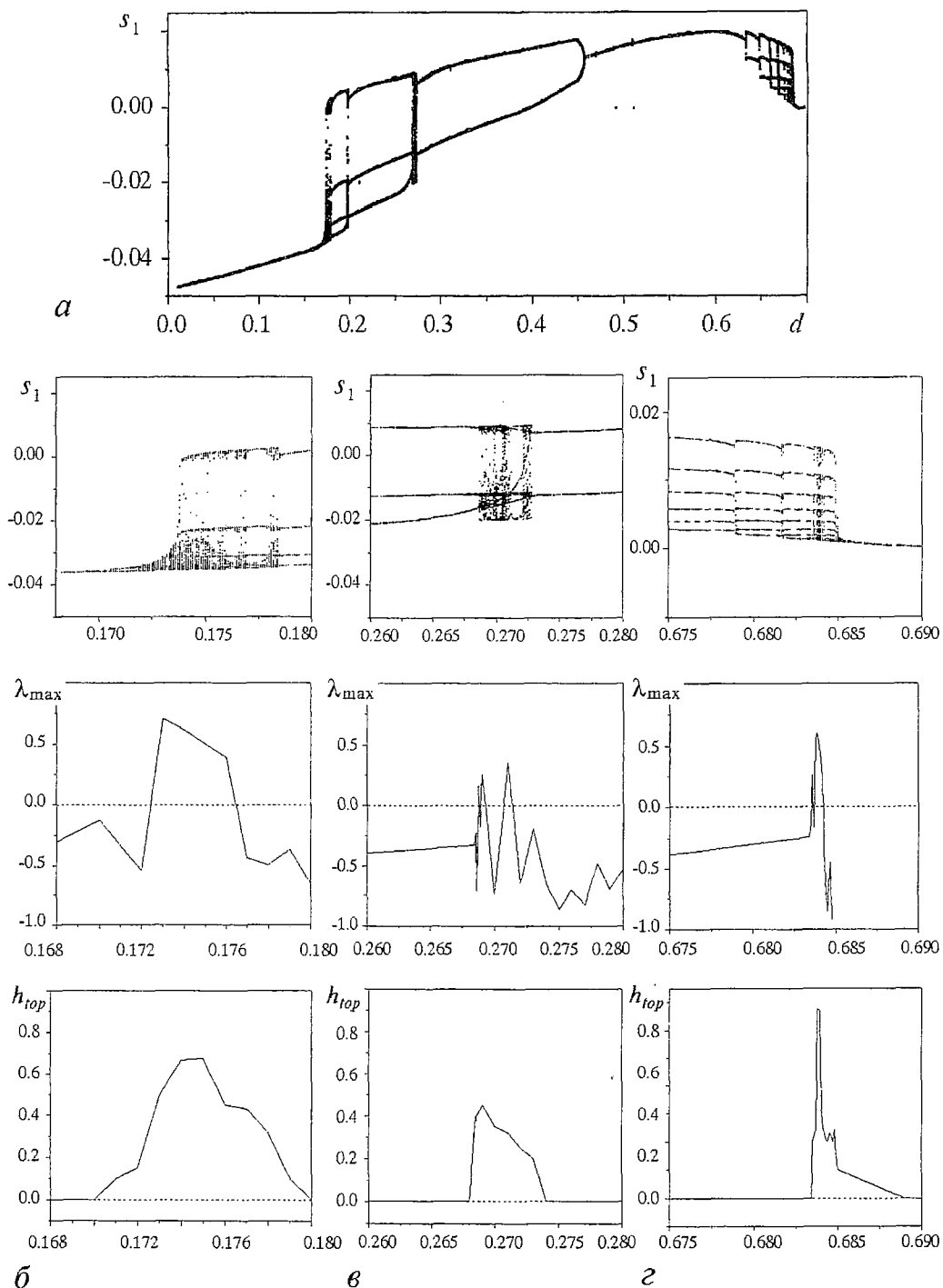


Рис. 13. Бифуркационная диаграмма (а) и зависимость λ_{\max} и h_{top} от параметра связи d . Параметры: $a=0.33$, $\mu=0.009$, $m_1=0.096$, $m_2=0.805$

риями из окрестностей многообразий W_1^s, W_2^s и W_3^s . В этом случае временная реализация переменной x_1 на фоне периодических колебаний содержит достаточно редкие «мощные» выбросы, которые происходят хаотически. Такой режим можно рассматривать как режим хаотической спайковой активности нейрона нижних олив (см. рис. 1).

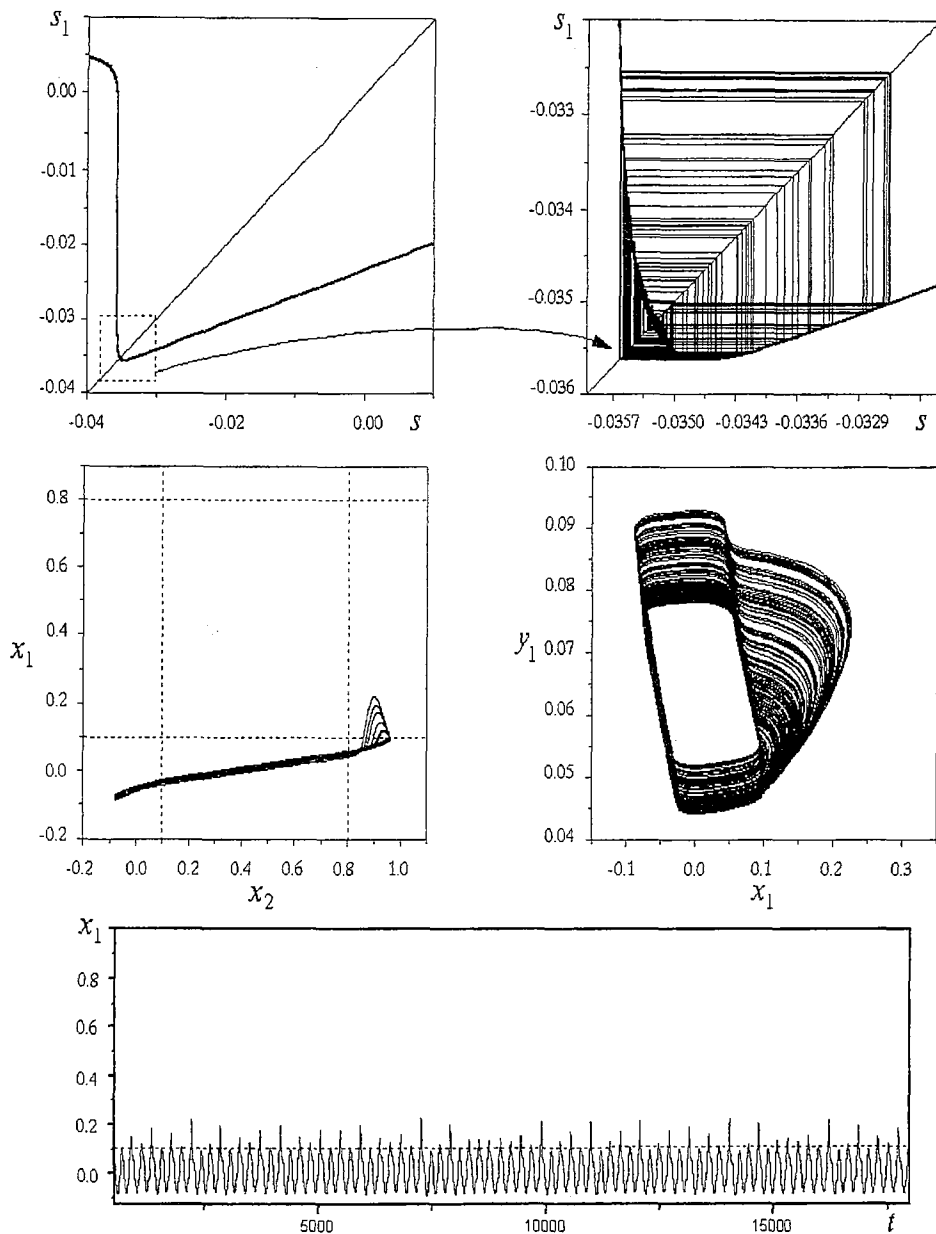


Рис. 14а. Виды хаотических аттракторов системы (5) и их характеристики при $d=0.173$ и значениях параметров $a=0.33, \mu=0.009, m_1=0.096, m_2=0.805$

Типичный вид хаотического аттрактора для второго интервала значений параметра d (рис. 13, в) изображен на рис. 14а. Динамика этого аттрактора также связана с каскадом бифуркаций удвоения периода. Здесь, в отличие от предыдущего случая, спайковые выбросы происходят чаще, а колебательная активность превышает порог.

Наконец, для третьего интервала значений параметра d (рис. 13, г) рождение хаотического аттрактора происходит следующим образом. Сначала при увеличении d происходит усложнение формы предельного цикла путем увеличения числа «витков» на его профиле (рис. 15). По мере увеличения числа витков траектория соответствующего точечного отображения S все больше

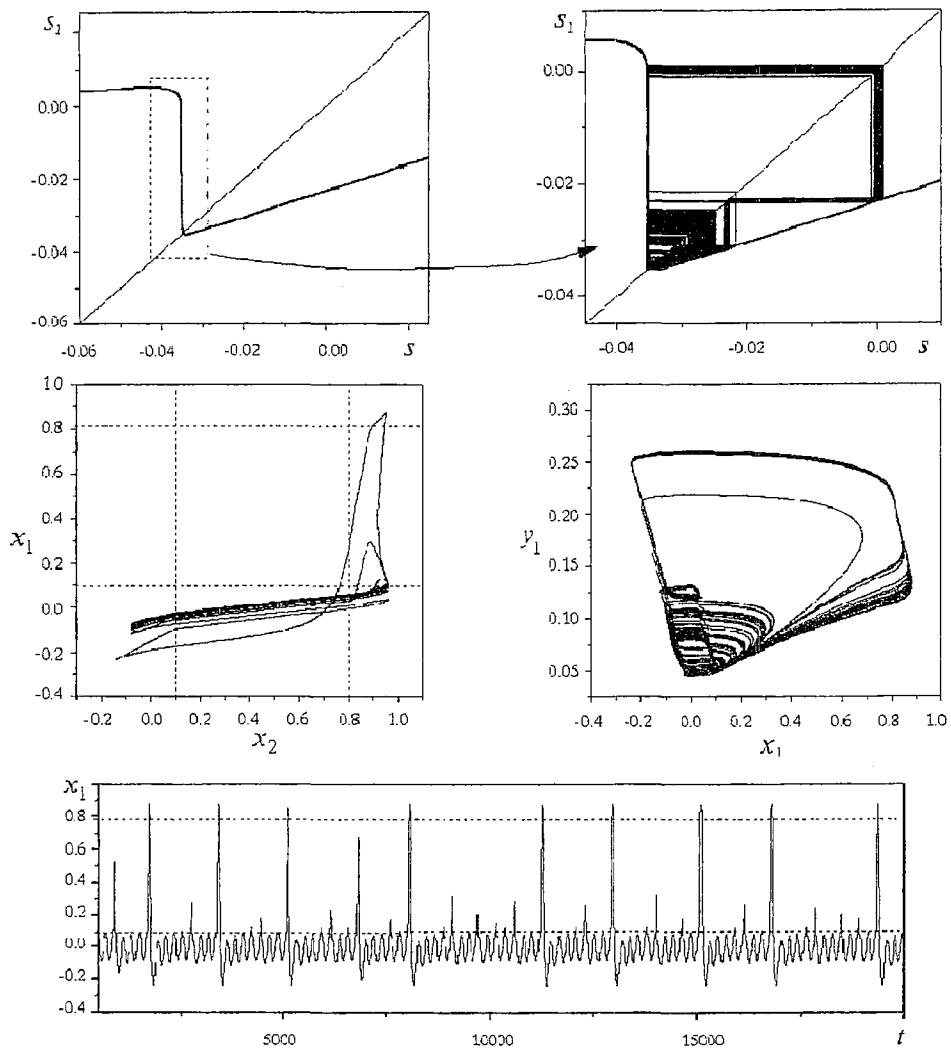


Рис. 14б. Виды хаотических аттракторов системы (5) и их характеристики при $d=0.175$ и значениях параметров $a=0.33, \mu=0.009, m_1=0.096, m_2=0.805$

приближается к «вертикальному» участку функции соответствия. Этот процесс заканчивается появлением у предельного цикла мультипликатора, равного (-1) . Дальнейшее увеличение d приводит к каскаду бифуркаций удвоения периода и появлению хаотического аттрактора, представленного на рис. 16.

Заключение

В работе предложена модель, описывающая динамику нейрона нижних олив. Модель представляет собой две линейно взаимосвязанные системы ФХН, демонстрирующие в отсутствие связи принципиально различные свойства - возбудимый и автоколебательные режимы. Мы показали, что динамика такой

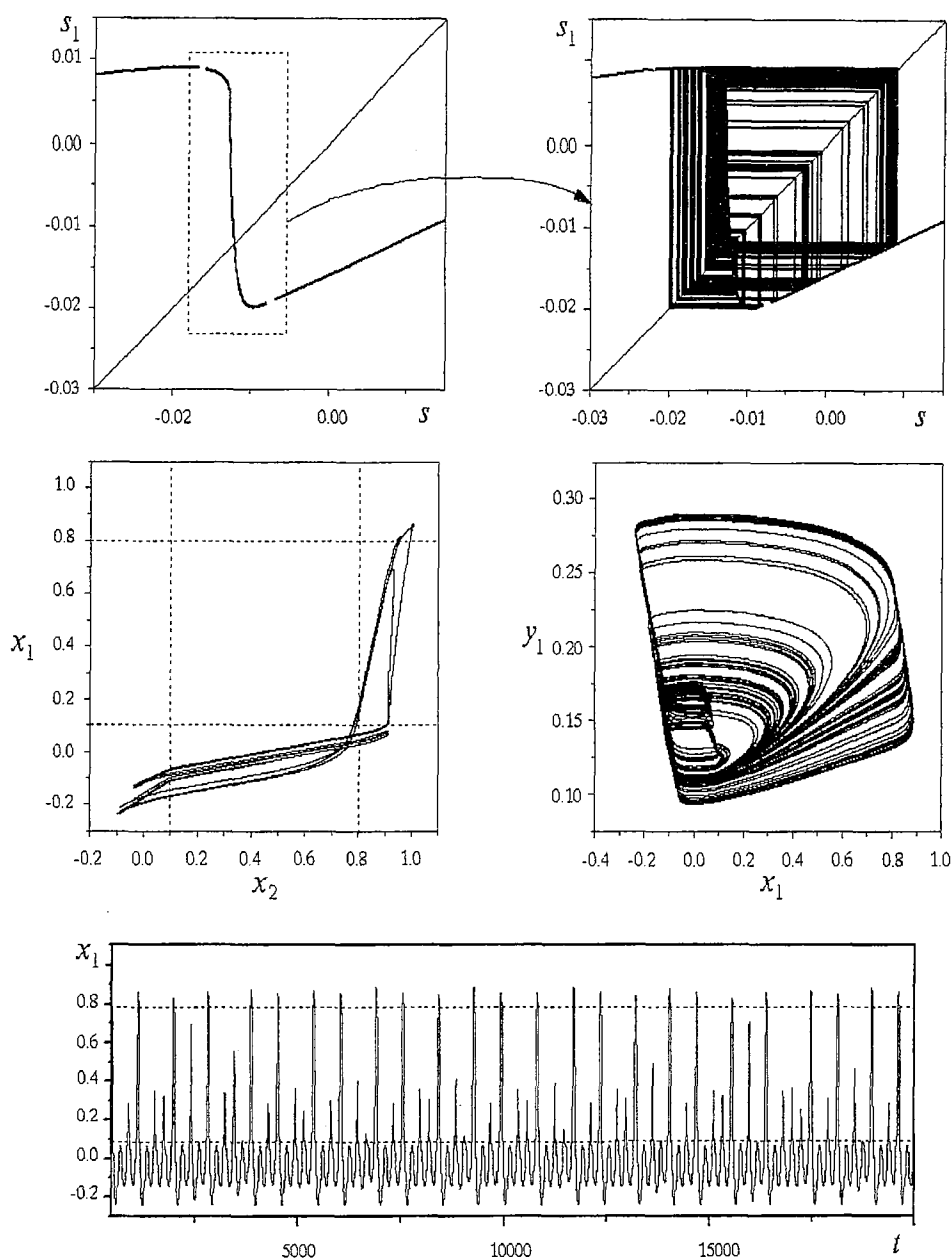


Рис. 14а. Виды хаотических аттракторов системы (5) и их характеристики при $d=0.271$ и значениях параметров $a=0.33, \mu=0.009, m_1=0.096, m_2=0.805$

четырёхмерной нелинейной системы может быть описана с помощью одномерного разрывного отображения Пуанкаре. Проведенное исследование этого отображения показало, что в зависимости от величины коэффициента связи между системами ФХН динамика модели может быть как регулярной, так и хаотической. При этом существует несколько зон хаотической динамики, разделенных областями регулярной динамики системы. Основное внимание в работе уделено исследованию режимов, имеющих прототипы в реальных нейрофизиологических экспериментах. Мы установили, что такие режимы в модели существуют. Например, режимы, представленные на рис. 14а и 14б, имеют хорошее качествен-

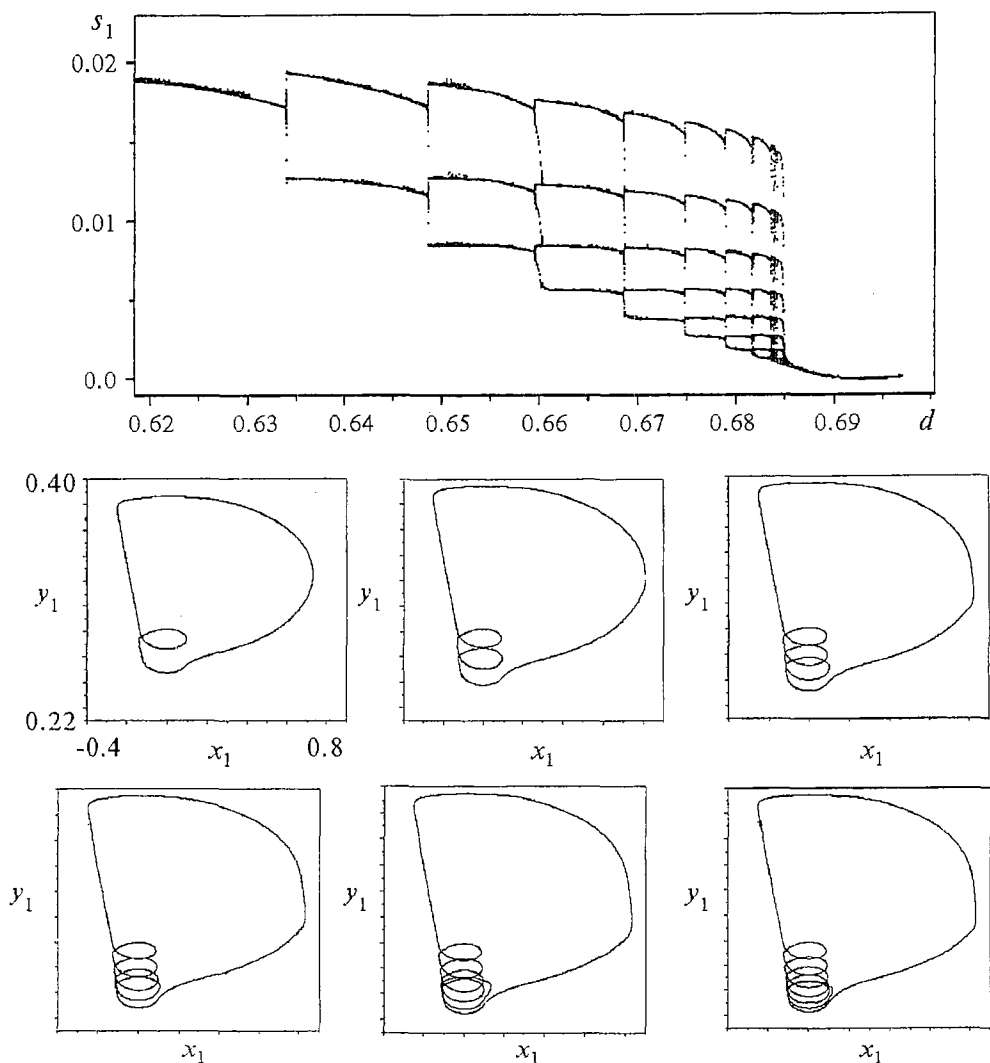


Рис. 15. Фрагмент бифуркационной диаграммы и усложнение формы предельного цикла
 ное совпадение с данными исследования «живых» нейронов нижних олив, приведенными на рис. 1. Режим, изображенный на рис. 14а, описывает подпороговые хаотические колебания, а на рис. 14б показан режим слайковой хаотической активности нейрона нижних олив.

Авторы выражают благодарность В.Б. Казанцеву за ценные замечания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 00-02-16400 и № 01-02-06355.

Библиографический список

1. *Llinas R.* Rebound excitation as the physiological basis for tremor: a biophysical study of the oscillatory properties of mammalian central neurons in vitro // *Movements Disorders: Tremor* / Eds L.J. Findley and R. Capildeo. London: Macmillan, 1984. P. 135.
2. *Llinas R., Welsh J.P.* On the cerebellum and motor learning // *Curr. Opin. Neurobiol.* 1993. Vol. 3. P. 958.

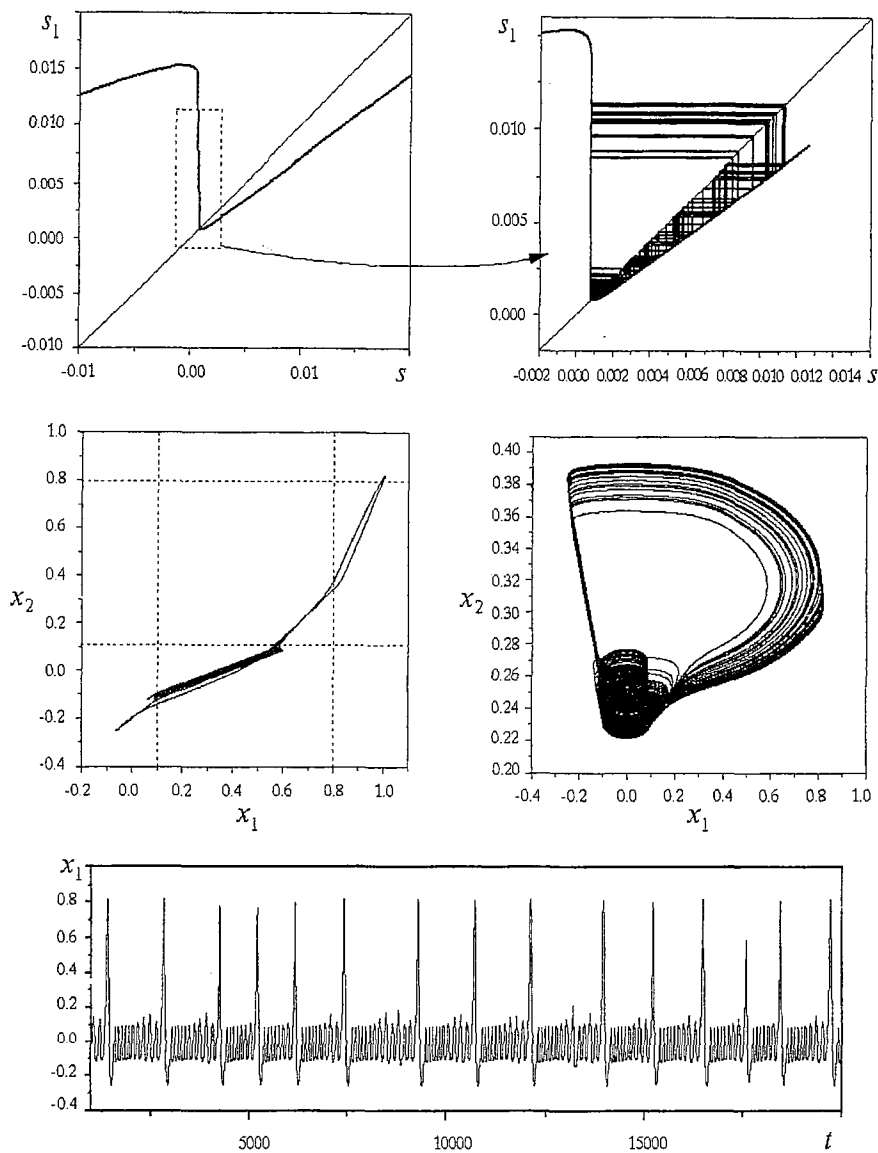


Рис. 16. Хаотический аттрактор системы (5) и его характеристики для значений параметров: $a=0.33, \mu=0.009, m_1=0.096, m_2=0.805, d=0.6839$

3. *Welsh J.P., Llinas R.* Some organizing principles for the control of movement based on olivocerebellar physiology / Eds C.I. de Zeeuw, P. Strata and Voodg// Progress in Brain Research. 1997. Vol. 114.

4. *Llinas R., Sasaki K.* The functional organization of the olivo-cerebellar system as examined by multiple Purkinje cell recordings // Eur. J. Neurosci. 1989. Vol. 1. P. 587.

5. *Llinas R., Yarom Y.* Oscillatory properties of guinea-pig inferior olivary neurons and their pharmacology modulation: An in vitro study // J. Physiol., Lond. 1986. Vol. 376. P. 163.

6. *Benardo L.S., Foster R.P.* Oscillatory behavior in inferior olive neurons: mechanism, modulation, cell aggregates // Brain Res. Bull. 1986. Vol. 17. P. 773.

7. *Manor Y., Rinzel J., Segev I., Yarom Y.* Low-amplitude oscillations in the inferior olive: a model based on electrical coupling of neurons with heterogeneous channel densities // The American Physiological Society. 1997. P. 2736.

8. *Казанцев В.Б., Некоркин В.И., Велардэ М.Г.* Модель нейрона с осцилляторной активностью ниже порога возбуждения // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. XLI, № 12. С. 1623.

9. *Nekorkin V.I., Kazantsev V.B., Velarde M.G.* Spike-burst and other oscillations in a system composed of two coupled, drastically different elements // Eur. Phys. J. B. 2000. Vol. 16. P. 147.

10. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in model of nerve membrane // Biophys. J. 1961. Vol. 1. P. 445.

11. *Nagumo J.S., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. of IRF. 1962. Vol. 50. P. 2061.

12. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.

13. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.

14. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильященко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНТИ АН СССР. М., 1986. № 5. С. 165.

15. *Bowen R.* Entropy of group diffeomorphism and homogeneous space // Trans. Amer. Mat. Soc. 1971. Vol. 153. P. 401.

16. *Афраймович В.С., Рейман А.М.* Размерность и энтропия в многомерных системах // Нелинейные волны: Динамика и эволюция / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова, М.И. Рабиновича. М.: Наука, 1989. С. 238.

17. *Malkin M.I., Zheleznyak A.L., Zheleznyak I.L.* Computing aspect of the entropic theory of one-dimensional dynamical systems // Nonlinearity. 1993. Vol. 4. P. 27.

*Нижегородский государственный
университет*

*Поступила в редакцию
после доработки*

*4.06.01
8.11.01*

REGULAR AND CHAOTIC OSCILLATIONS IN A SYSTEM COMPOSED OF TWO COUPLED, DRASTICALLY DIFFERENT FITZHUGH - NAGUMO ELEMENTS

V.I. Nekorkin, D.V. Artyuhin

A dynamic model of inferior olive neurons possessing periodic relaxation oscillations below the excitation threshold is proposed. The model is a system of two linearly coupled, drastically different FitzHugh - Nagumo elements. In the absence of coupling one element is in excitable mode and the other one exhibits periodic relaxation oscillations. We have shown that dynamics of the system can be described with one-dimensional Poincare map. We were interested in regimes which have the prototypes in real electrophysiological experiments. We have established, that model shows a good qualitative agreement with experimental data obtained in inferior olive neurons.



Владимир Исаакович Некоркин - родился на Украине (1948), окончил радиофизический факультет ННГУ (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1981, ННГУ) и доктора физико-математических наук (1992, СГУ). С 1971 года работал в Нижегородском институте прикладной математики, с 1983 по 1986 - в Нижегородском политехническом институте, с 1986 года по настоящее время работает на радиофизическом факультете ННГУ, профессор. Область научных интересов - теория колебаний и волн, структурообразование и нелинейные волны в непрерывных и дискретных средах, синхронизация и пространственно-временной хаос. Имеет более 100 научных публикаций в указанных направлениях, соавтор двух монографий. В

качестве приглашенного профессора читал лекции в Мадридском и Стэнфордском университетах. Работал в Калифорнийском университете.



Артюхин Дмитрий Владимирович родился в Нижнем Новгороде (1975). Окончил Нижегородский государственный университет по специальности радиопизика. С 1998 года является аспирантом кафедры теории колебаний и автоматического регулирования. Область научных интересов - нелинейные колебания, структурообразование, волны, хаос. Автор нескольких статей.

Приложение

Таблица 1

Результаты исследования состояний равновесия системы (7)
для случая $d < A/2$ ($c \equiv A(1+d)-d$, $\alpha \equiv 1/(1+2d)$, $r \equiv (A-2d)/A$)

Область существования состояний равновесия на плоскости (x_1, x_2)	Координаты состояний равновесия	Область параметров (v_1^0, v_2^0)	Тип
I $x_1 < m_1$ $x_2 < m_1$	O_1 $x_1 = -v_1^0 + \alpha v_2^0$ $x_2 = -v_1^0 - \alpha v_2^0$	$v_2^0 < (v_1^0 + m_1)/\alpha$ $v_2^0 > -(v_1^0 + m_1)/\alpha$	Уст. узел
II $x_1 < m_1$ $m_1 < x_2 < m_2$	O_2 $x_1 = A(ad - rv_1^0 + v_2^0)/c$ $x_2 = [(1+d)aA + v_1^0/\alpha + v_2^0]/c$	$v_2^0 < r(v_1^0 + m_1)$ $v_2^0 < -(v_1^0 + m_1)/\alpha + 1 + d$ $v_2^0 > -(v_1^0 + m_1)/\alpha$	Седло
III $x_1 < m_1$ $x_2 > m_2$	O_3 $x_1 = -v_1^0 + \alpha v_2^0 + d\alpha$ $x_2 = -v_1^0 - \alpha v_2^0 + \alpha(1+d)$	$v_2^0 < (v_1^0 + m_1)/\alpha - d$ $v_2^0 > -(v_1^0 + m_2)/\alpha + 1 + d$	Уст. узел
IV $m_1 < x_1 < m_2$ $x_2 > m_2$	O_4 $x_1 = [v_1^0/\alpha - v_2^0 + aA(1+d) - d]/c$ $x_2 = [-rAv_1^0 - Av_2^0 + A - d + aAd]/c$	$v_2^0 > (v_1^0 - 1 + m_2)/\alpha$ $v_2^0 < (v_1^0 + m_1)/\alpha - d$ $v_2^0 > -r(v_1^0 - 1 + m_2)$	Седло
V $m_1 < x_1 < m_2$ $m_1 < x_2 < m_2$	O_5 $x_1 = A(rv_1^0 - v_2^0 + aAr)/c$ $x_2 = A(rv_1^0 + v_2^0 + aAr)/c$	$v_2^0 > r(v_1^0 - 1 + m_2)$ $v_2^0 < r(v_1^0 + m_1)$ $v_2^0 > -r(v_1^0 + m_1)$ $v_2^0 < -r(v_1^0 - 1 + m_2)$	Неуст. узел
VI $m_1 < x_1 < m_2$ $x_2 < m_1$	O_6 $x_1 = [v_1^0/\alpha - v_2^0 + aA(1+d)]/c$ $x_2 = A(-rv_1^0 - v_2^0 + ad)/c$	$v_2^0 < (v_1^0 + m_1)/\alpha$ $v_2^0 > (v_1^0 + m_2)/\alpha - (1+d)$ $v_2^0 > -r(v_1^0 + m_1)$	Седло
VII $x_1 > m_2$ $x_2 > m_2$	O_7 $x_1 = -(v_1^0 - 1) + \alpha v_2^0$ $x_2 = -(v_1^0 - 1) - \alpha v_2^0$	$v_2^0 < -(v_1^0 - 1 + m_2)/\alpha$ $v_2^0 > (v_1^0 - 1 + m_2)/\alpha$	Уст. узел
VIII $x_1 > m_2$ $m_1 < x_2 < m_2$	O_8 $x_1 = (-Arv_1^0 + Av_2^0 + A - d + aAd)/c$ $x_2 = [v_1^0/\alpha + v_2^0 + aA(1+d) - d]/c$	$v_2^0 > r(v_1^0 - 1 + m_2)$ $v_2^0 < -(v_1^0 - 1 + m_2)/\alpha$ $v_2^0 > -(v_1^0 + m_1)/\alpha + d$	Седло
IX $x_1 > m_2$ $x_2 < m_1$	O_9 $x_1 = -v_1^0 + \alpha v_2^0 + \alpha(1+d)$ $x_2 = -v_1^0 - \alpha v_2^0 + d\alpha$	$v_2^0 > -(v_1^0 + m_1)/\alpha + d$ $v_2^0 > (v_1^0 + m_2)/\alpha - (1+d)$	Уст. узел

Таблица 2

Мно-гообразие	Система на многообразии	Уравнение границ	Точка касания границы векторным полем системы
W_1^s	$\dot{v}_1 = -v_1 - a/2$ $\dot{v}_2 = -\alpha v_2 - a/2$	$p_1 = \begin{cases} x_1 = m_1, & x_2 = -2q_1 - m_1, \\ v_1 = q_1, & \alpha v_2 = q_1 + m_1, \end{cases}$ $q_1 \geq -m_1$ $l_1 = \begin{cases} x_1 = -2s_1 - m_1, & x_2 = m_1, \\ v_1 = s_1, & \alpha v_2 = -s_1 - m_1, \end{cases}$ $s_1 \geq -m_1$	$v_1(K_1) = (m_1 - ad)/(2d)$ $v_2(K_1) = (m_1 - ad\alpha)/(2d\alpha^2)$
W_2^s	$\dot{v}_1 = -v_1 + (1-a)/2$ $\dot{v}_2 = -\alpha v_2 + (\alpha-a)/2$	$p_2 = \begin{cases} x_1 = m_1, & x_2 = -2q_2 - m_1 + d\alpha, \\ v_1 = q_2, & v_2 = (q_2 + m_1)/\alpha - d, \end{cases}$ $q_2 \leq m_1(1-2a)/(2a)$ $l_2 = \begin{cases} x_1 = -2s_2 - m_2 + 1, & x_2 = m_2 \\ v_1 = s_2, & \alpha v_2 = -s_2 - m_2 + (1+d)\alpha \end{cases}$ $s_2 \geq m_1(1-2a)/(2a)$	$v_1(K_2) = (1-a)/2 + (m_2 - a)/(2d)$ $v_2(K_2) = \{\alpha[a-d(1-a)] - m_2\}/(2d\alpha^2) + 1 + d$
W_3^s	$\dot{v}_1 = -v_1 + 1 - a/2$ $\dot{v}_2 = -\alpha v_2 - a/2$	$p_3 = \begin{cases} x_1 = m_1, & x_2 = -2q_3 + 2 - m_2, \\ v_1 = q_3, & \alpha v_2 = q_3 - 1 + m_2, \end{cases}$ $q_3 \leq 1 - m_2$ $l_3 = \begin{cases} x_1 = -2s_3 + 2 - m_2, & x_2 = m_2, \\ v_1 = s_3, & \alpha v_2 = -s_3 + 1 - m_2, \end{cases}$ $s_3 \leq 1 - m_2$	не существует

Таблица 3

Значения управляющего параметра v_1^0	Фазовый портрет системы (6), (13)
$m_1(1-2a)/(2a) < v_1^0 < m_1(1-a)/a - \alpha d$	Рис. 6, а
$m_1(1-a)/a - \alpha d < v_1^0 < m_1(1-a)/a - m_1 d / \{2[m_1 - d(a-2m_1)]\}$	Рис. 6, б
$m_1(1-a)/a - m_1 d / \{2[m_1 - d(a-2m_1)]\} < v_1^0 < m_1(1-a)/a - \alpha d/2$	Рис. 6, в
$v_1^0 > m_1(1-a)/a - \alpha d/2$	Рис. 6, г



ОСЦИЛЛЯТОР ВАН ДЕР ПОЛЯ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ: ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ К ОТОБРАЖЕНИЮ

А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина

В работе рассматривается система Ван дер Поля под периодическим импульсным воздействием. Получены приближенные двумерное и одномерное отображения. Проведен сравнительный анализ эффективности этих аппроксимирующих отображений с помощью построения карт режимов, бифуркационных диаграмм и портретов аттракторов. Обсуждаются особенности картины синхронизации в системе по сравнению с традиционным синус-отображением окружности.

Введение

Ситуации, когда система с предельным циклом подвержена внешнему периодическому воздействию, широко распространены в электронике, биологии, химии и других областях естествознания [1-5]. С точки зрения теории динамических систем это задачи о возникновении квазипериодических движений и явлении синхронизации [1, 2, 4, 5]. Среди них выделяется класс задач, когда внешнее воздействие носит характер коротких по величине, но значительных по амплитуде импульсов. В таких случаях внешнее воздействие можно рассматривать как периодическую последовательность δ -функций. Ясно, что подобные задачи привлекательны не только с точки зрения приложений, но и существенны для нелинейной динамики с позиций возможной специфики картины синхронизации. Они были рассмотрены в ряде работ [6-11] в рамках простейшей модели, представляющей собой укороченное уравнение с предельным циклом, подверженное периодической последовательности δ -импульсов. Было обнаружено, что синхронизация для такой модели обладает рядом особенностей, причем авторы предполагали, что они присущи всем системам, характеризующимся в автономном режиме предельным циклом (например, для брюсселятора, системы Ван дер Поля и др.)

Особенность задач с импульсным воздействием состоит также в том, что в промежутках между импульсами динамика дифференциальной системы вблизи предельного цикла может быть проанализирована, хотя бы приближенно, аналитическим образом. Это означает, что можно получить в явном виде соответствующее сечению Пуанкаре двумерное отображение, а в случае достаточно сильной диссипации перейти и к одномерному отображению для фазы.

Последнее является некоторым вариантом отображения окружности. Таким образом, может быть изучена проблема соответствия описания системы в терминах дифференциальных уравнений и отображений. Такая проблема применительно к нелинейному осциллятору под действием периодической последовательности δ -импульсов обсуждалась в работах [12-14]. Что касается дифференциальных систем с предельным циклом, то она ранее практически не обсуждалась, за исключением некоторых моментов в работе [15]. В настоящей работе мы и рассмотрим эту проблему на примере осциллятора Ван дер Поля под внешним периодическим импульсным воздействием. Параллельно мы в виде аналитического обзора кратко представим результаты упоминавшихся выше работ, поскольку они методически важны и уже послужили толчком для дальнейших исследований, например, для изучения синхронизации возбуждаемых ударами двух связанных систем с предельными циклами [16].

1. Вывод двумерного и одномерного отображений для системы Ван дер Поля с импульсным воздействием

Рассмотрим систему Ван дер Поля с импульсным воздействием

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = B \sum \delta(t - nT), \quad (1)$$

где x - динамическая переменная, λ - параметр диссипации, T - период следования внешних импульсов, B - их амплитуда.

Получим сначала аппроксимирующее двумерное отображение. В промежутке между импульсами правая часть уравнения (1) обращается в ноль. В этом случае его можно решить приближенно методом медленно меняющихся амплитуд. Для этого представим x в виде

$$x = ae^{it}/2 + a^* e^{-it}/2, \quad (2)$$

где $a(t)$ и $a^*(t)$ комплексная и комплексно-сопряженная медленно меняющиеся амплитуды. Подставив соотношение (2) в (1) и учитывая традиционное дополнительное условие

$$\dot{a}e^{it} + \dot{a}^* e^{-it} = 0, \quad (3)$$

после преобразований получим укороченное уравнение для $a(t)$

$$\dot{a} - \lambda a/2 + |a|^2 a/8 = 0. \quad (4)$$

Положим теперь

$$a(t) = R(t)e^{i\varphi(t)}, \quad (5)$$

где $R(t)$ и $\varphi(t)$ - действительные амплитуда и фаза. Подставив выражение (5) в уравнение (4), приходим к следующей системе уравнений для $R(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\dot{\varphi} = 0, \quad \dot{R} = \lambda R/2 - R^3/8. \quad (6)$$

Решив ее, находим зависимость амплитуды и фазы от времени в промежутке между импульсами

$$\varphi(t) = \varphi_n, \quad R(t) = R_n e^{\lambda t/2} / [1 + R_n^{-2}(e^{\lambda t} - 1)/(4\lambda)]^{1/2}, \quad (7)$$

где R_n и φ_n - амплитуда и фаза сразу после n -го импульса. Учитывая, что к

моменту начала $(n+1)$ -го импульса проходит время, равное периоду внешнего воздействия T , и что внешнее воздействие носит дельта-образный характер (то

есть величина x не изменится, а величина $v = \dot{x}$ получит добавку, равную амплитуде внешнего воздействия B), для переменных x и v сразу после $(n+1)$ -го импульса из соотношений (2), (3), (7) получим

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= R_n e^{\lambda T/2} \cos(T + \varphi_n) / [1 + R_n^2 (e^{\lambda T} - 1) / (4\lambda)]^{1/2}, \\ v_{n+1} &= -R_n e^{\lambda T/2} \sin(T + \varphi_n) / [1 + R_n^2 (e^{\lambda T} - 1) / (4\lambda)]^{1/2} + B. \end{aligned} \quad (8)$$

Последние формулы удобнее переписать, введя комплексную величину

$$z = x + iv. \quad (9)$$

Тогда для комплексной переменной z получаем искомое двумерное отображение

$$z_{n+1} = z_n e^{\lambda T/2 - iT} / [1 + |z_n|^2 (e^{\lambda T} - 1) / (4\lambda)]^{1/2} + iB. \quad (10)$$

Получим теперь для двумерного отображения (10) аппроксимирующее одномерное. Пусть в системе реализуется сильная диссипация, и $\lambda T \gg 1$. Тогда учитывая, что $e^{-\lambda T} \rightarrow 0$, из (8) находим

$$x_{n+1} = 2\lambda^{1/2} \cos(T + \varphi_n), \quad v_{n+1} = -2\lambda^{1/2} \sin(T + \varphi_n) + B. \quad (11)$$

Для комплексной переменной z очевидно

$$\operatorname{tg} \varphi_{n+1} = -v_{n+1} / x_{n+1} = [\sin(T + \varphi_n) - C] / \cos(T + \varphi_n), \quad (12)$$

где

$$C = B / (2\lambda^{1/2}). \quad (13)$$

Сделав теперь замену $\theta_n = -\varphi_n - T$ (фаза φ отсчитывается по часовой стрелке, а θ - против), получаем искомое одномерное отображение

$$\theta_{n+1} = \operatorname{arctg}((\sin \theta_n + C) / \cos \theta) - T. \quad (14)$$

Заметим, что отображение (14) можно получить не только предельным переходом из (10), но и непосредственно из следующих простых физических соображений. Как вытекает из соотношения (6), при $\dot{R} = 0$ отвечающий установившемуся движению системы предельный цикл представляет собой окружность радиуса $R = 2\lambda^{1/2}$. В случае сильной диссипации фазовые траектории достаточно быстро выходят на этот предельный цикл. Пусть изображающая точка непосредственно перед n -м внешним импульсом находится на предельном цикле в точке N и характеризуется фазой θ_n (рис. 1). В результате действия импульса координата системы не меняется, а скорость системы скачком возрастает на величину, равную амплитуде толчка B . На рисунке это отвечает тому, что изображающая

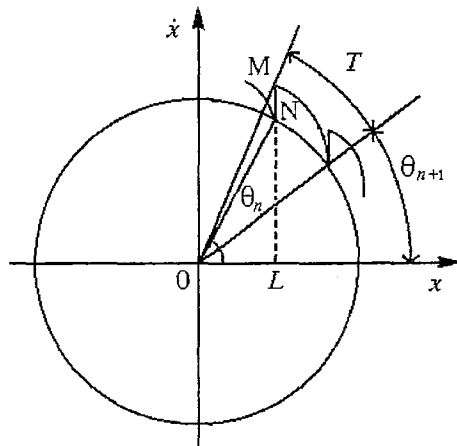


Рис. 1. Фазовая траектория в случае больших значений параметра λT . В промежутке между импульсами траектория успевает вернуться на предельный цикл, представляющий собой окружность радиуса $2\lambda^{1/2}$

точка на фазовой плоскости «поднимается» вверх на величину B и попадает в M . Затем наступает период автономной эволюции в течение времени T , равного периоду внешнего воздействия. За это время фазовый угол меняется на T и, как мы предполагаем, изображающая точка успевает вернуться на предельный цикл. Теперь она характеризуется фазовым углом θ_{n+1} . Далее наступает $(n+1)$ -й импульс и т.д. Дальнейшие рассуждения носят простой «геометрический» характер. Из треугольника OML (см. рис. 1) получаем

$$\operatorname{tg}(\theta_{n+1} + T) = (MN + NL)/(OL). \quad (15)$$

В свою очередь $OL=2\lambda^{1/2}\cos\theta_n$, $NL=2\lambda^{1/2}\sin\theta_n$, $MN=B$. Поэтому

$$\operatorname{tg}(\theta_{n+1} + T) = (B + 2\lambda^{1/2}\sin\theta_n)/(2\lambda^{1/2}\cos\theta_n), \quad (16)$$

и мы приходим к отображению (14).

В работах [8-10] решалась отчасти аналогичная задача. Авторы рассматривали более абстрактную модель, в рамках которой система с предельным циклом

$$\dot{r} = sr(1 - r^2), \quad (17)$$

$$\dot{\varphi} = 1$$

подвергалась импульсному воздействию вдоль оси x , так что

$$\dot{x} = sx(1 - x^2 - y^2) + c\Sigma\delta(t - nT), \quad (18)$$

$$\dot{y} = x + sy(1 - x^2 - y^2).$$

Решая уравнение (17) в промежутке между импульсами, получим

$$r(T) = r_n e^{sT} / [1 + r_n^2 (e^{2sT} - 1)]^{1/2}, \quad (19)$$

$$\varphi(T) = \varphi_n + T.$$

Поскольку затем следует толчок вдоль оси x , из (18) - (19) находим

$$x_{n+1} = r_n e^{sT} \cos(\varphi_n + T) / [1 + r_n^2 (e^{2sT} - 1)]^{1/2} + c, \quad (20)$$

$$y_{n+1} = r_n e^{sT} \sin(\varphi_n + T) / [1 + r_n^2 (e^{2sT} - 1)]^{1/2}.$$

Это, с точностью до перенормировки $r=R/(2\lambda^{1/2})$, $s=\lambda/2$ и поворота осей координат на угол $\pi/2$, уравнение (8). Соответственно, при сильном затухании можно прийти к отображению (14).

Заметим, однако, что если исходить сразу из укороченных уравнений (17), (18), то исчезает проблема соотношения дифференциальных уравнений и отображений. Действительно, в рамках такой постановки задачи отображение (10) является точным. Если же исходить из дифференциального уравнения, то оно становится приближенным настолько, насколько эффективен метод медленно меняющихся амплитуд. При этом, вообще говоря, делаются противоположные по характеру приближения. При использовании метода медленно меняющихся амплитуд мы полагаем диссипацию малой ($\lambda < 1$), а при переходе к одномерному отображению - сильной ($\lambda T \gg 1$). Вопрос о правомерности одновременной эффективности обоих условий требует дополнительного обсуждения. Мы полагаем, что весьма часто эти модели не совместимы. С другой стороны, двумерное (10) и одномерное (14) отображения представляют самостоятельный

интерес и приводят к новой, по сравнению со стандартным синус-отображением окружности, картине синхронизации.

2. Одномерное отображение

Рассмотрим сначала динамику одномерного отображения (14). Это отображение характеризуется следующими особенностями (рис. 2). При $C < 1$ оно является монотонно возрастающим и поэтому обратимым. (Разрыв на рис. 2 является фиктивным и связан с 2π -периодическими свойствами отображения.) При $C = 1$ отображение становится кусочно-линейным и испытывает настоящий разрыв. Наконец, при $C > 1$ оно становится необратимым бимодальным, причем величина «размаха» отображения с ростом амплитуды воздействия C уменьшается.

Эти особенности отображения можно понять из следующего рассуждения, если привлечь рисунки типа рис.

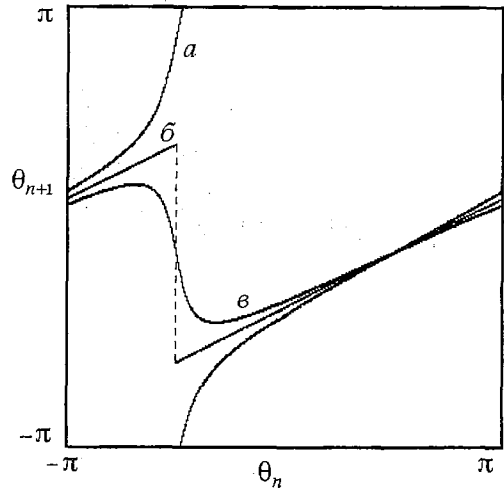


Рис. 2. Вид одномерного отображения (14) при различных C : а - 0.8, б - 1.0, в - 1.2

1. Как мы отмечали при выводе двумерного отображения, предельный цикл является окружностью радиуса $2\lambda^{1/2}$. Представим теперь каждую точку этого цикла смещенной на фазовой плоскости вверх в результате импульсного толчка на амплитуду внешнего воздействия B . Поскольку $C = B/(2\lambda^{1/2})$, то при $C < 1$ смещенный предельный цикл охватывает начало координат, при $C = 1$ проходит точно через него, а при $C > 1$ начало координат лежит вне этого цикла. Фаза же, являющаяся переменной одномерного отображения, отсчитывается с помощью радиус-вектора, соединяющего начало координат с точками предельного цикла. Тогда становится понятным появление разрыва в отображении и его необратимый и бимодальный характер при $C > 1$. Заметим, что представления о «смещенном» предельном цикле могут быть обобщены и на случай его произвольной формы, и с помощью развитых в [17] представлений об изохронах (линиях, отвечающих на фазовой плоскости одному и тому же значению фазы выхода на предельный цикл) позволяют делать важные выводы о свойствах одномерных отображений.

На рис. 3 а показана карта динамических режимов одномерного отображения (14) на плоскости (нормированная амплитуда внешнего воздействия C - частота $W = 2\pi/T$). На рис. 3 б представлен увеличенный фрагмент этой карты. На картах оттенками серого цвета отмечены области существования циклов различных периодов, черный цвет отвечает хаосу и квазипериодическим режимам. На карте можно видеть систему языков синхронизации с числами вращения $\omega = 1, 1/2, 1/3$ и т.д. В соответствии со свойствами одномерного отображения карта распадается на две характерные области, $C < 1$ и $C > 1$.

При $C > 1$ языки сложно устроены: внутри каждого из них у его краев располагаются области удвоенного периода с последующим переходом к хаосу (см. рис. 3, б). Отметим существенное отличие от традиционного синус-отображения окружности: удвоения периода наблюдаются не при увеличении, а при уменьшении амплитуды воздействия, поскольку именно при этом растет «крутизна» экстремумов отображения (см. рис. 2). Соответственно, области удвоенного

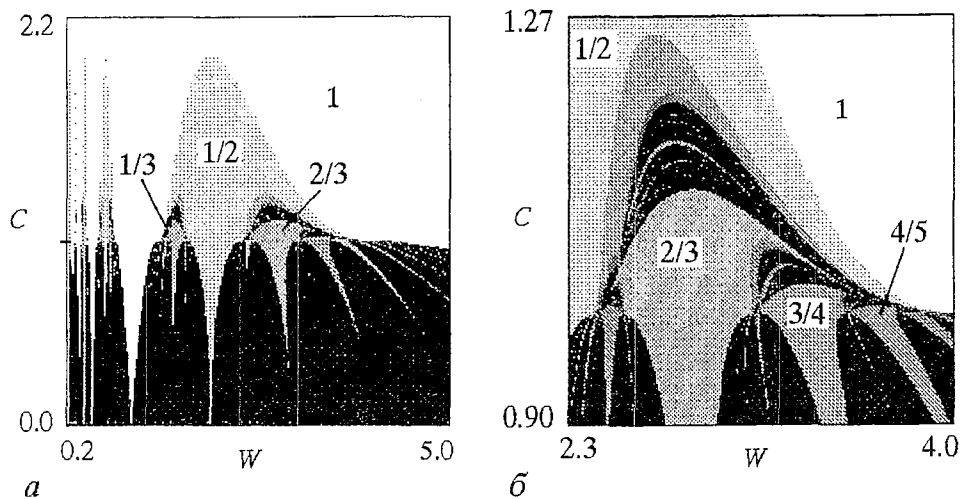


Рис. 3. Карта динамических режимов и ее увеличенный фрагмент для одномерного отображения (14). Цифрами обозначены числа вращения ω

периода выглядят на карте как «перевернутые»: удвоения периода наблюдаются при движении по карте сверху вниз. На линии $C=1$ эта картина сопряжена с расширяющимися от линии $C=0$ соответствующими языками синхронизации. При этом окно периода 3 при $C>1$, традиционное для каскада удвоений, оказывается одновременно и языком синхронизации с числом вращения $\omega=2/3$ (см. рис. 3, б). Такие же особенности характерны и для других окон и языков.

Так же хорошо эти особенности отображения видны на бифуркационном дереве, построенном для одномерного отображения (14) для значения частоты воздействия $W=3.2$ (рис. 4). Из рисунков видно, что при уменьшения параметра C система сначала демонстрирует удвоения периода с переходом к хаосу на базе цикла периода 1. Затем переход в окно цикла периода 3, на базе которого также наблюдаются удвоения периода, и т. д. После прохода языка синхронизации с числом вращения $3/4$ попадаем в область квазипериодики.

На линии $C=1$ отображение теряет обратимость и, соответственно, она

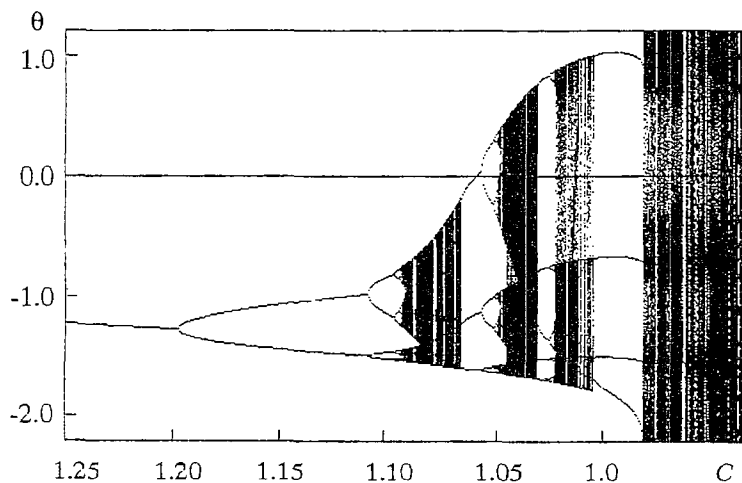


Рис. 4. Бифуркационное дерево для одномерного отображения (14) при уменьшении амплитуды C . Частота воздействия $W=3.2$

является линией начала перекрытия языков синхронизации, а чертова лестница чисел вращения на ней оказывается полной [6, 9].

На рис. 5 представлена картина языков синхронизации на плоскости (амплитуда воздействия C , частота W) в области $C \leq 1$. На первый взгляд эта картина напоминает структуру языков для стандартного синус-отображения, так что можно, казалось, ожидать соответствующей известной универсальности [2]. Однако это не так, в чем можно убедиться, обратившись к виду одномерного отображения (14) вблизи значения $C=1$ (см. рис. 2). Видно, что при $C=1$ отображение имеет не кубическую точку перегиба, а является кусочно-линейным и испытывает разрыв. В результате его свойства оказываются иными по сравнению со стандартным синус-отображением. Они достаточно подробно обсуждены в работах [6, 9]. Здесь лишь отметим, что на линии $C=1$, отвечающей появлению перекрытия языков синхронизации, ширина языков с рациональными числами вращения $\omega=p/q$, разлагаемыми в цепную дробь, дается соотношением $\Delta T=1/[2(2^q-1)]$ и не зависит от p [6, 9]. Если теперь взять два языка, соответствующие аппроксимации золотого сечения с помощью чисел Фибоначчи $w_n=F_{n-1}/F_n$, $w_{n+1}=F_n/F_{n+1}$, то получаем

$$\Delta T_n = 1/[2(2^{F_n} - 1)], \quad \Delta T_{n+1} = 1/[2(2^{F_{n+1}} - 1)]. \quad (21)$$

Соответственно, имеем

$$\Delta T_{n+1}/\Delta T_n \approx 1/2^{F_{n+1}-F_n} = 1/2^{F_n-1}. \quad (22)$$

А значит,

$$\Delta T_{n+1}/\Delta T_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Таким образом, известные соотношения скейлинга для традиционного синус-отображения окружности, когда отношение $\Delta T_{n+1}/\Delta T_n$ стремится к универсальной константе $\delta=-2.83362$ [2], не выполняются.

3. Двумерное отображение

Теперь рассмотрим динамику двумерного отображения (10). Построим для него карты динамических режимов для разных значений параметра диссипации λ на плоскости параметров (B, W) , где $W=2\pi/T$ - частота внешнего воздействия, а B - амплитуда внешнего воздействия (рис. 6). Исходный рисунок (рис. 6, а), отвечающий значению параметра $\lambda=0.2$, дает картину, существенно отличающуюся от случая одномерного отображения в области, где располагаются основные языки синхронизации с числами вращения $\omega=1$ и $1/2$.

Из рис. 6, б, в видно, что с ростом параметра λ языки становятся более широкими и их внутреннее устройство усложняется: появляются области существования циклов удвоенного периода, вначале внутри языка с числом

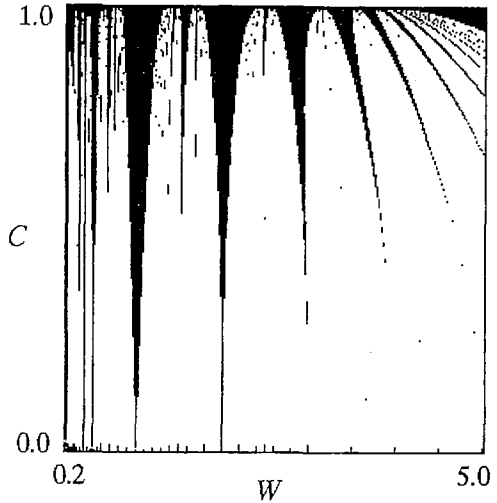


Рис. 5. Картина языков синхронизации для одномерного отображения (14) на плоскости амплитуда воздействия C , частота W в области C_1

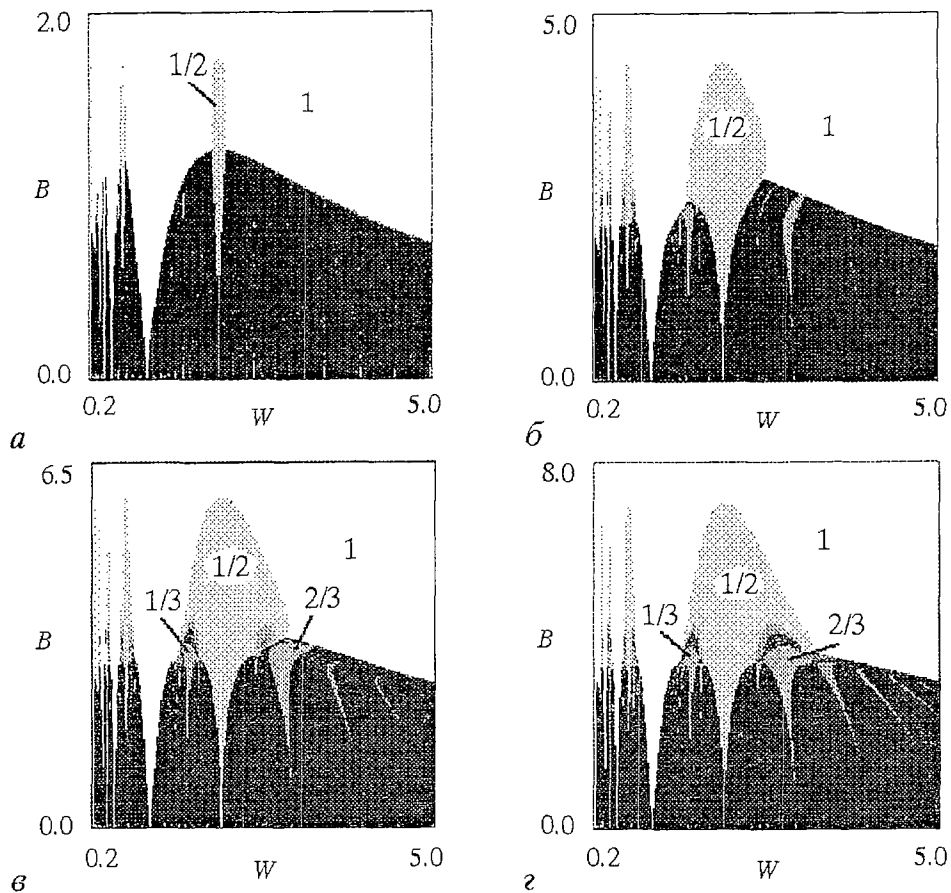


Рис. 6. Эволюция карт динамических режимов двумерного отображения (10) при увеличении параметра диссипации λ : 0.2 (а); 1.2 (б); 2.2 (в); 3.2 (г)

вращения $1/2$, затем внутри языка - $1/3$ и т. д. При дальнейшем увеличении λ появляются области хаоса. При $\lambda=3.2$ карта (рис. 6 г) визуально идентична карте одномерного отображения.

Эволюция карт более детально представлена на увеличенных фрагментах (рис. 7). При $\lambda=0.2$ можно видеть края языков с числами вращения λ и $1/2$ (рис. 7, а). Остальные языки очень узкие, и на карте, фактически, различим лишь один из них. При $\lambda=1.2$ система языков становится очень хорошо выраженной (рис. 7, б). Вершины целой системы языков, в частности, с числами вращения $1/4$, $1/3$, заканчиваются остриями, упирающимися в границу основного языка периода 1. Система языков, вершины которых прилегают к языку с числом вращения $\omega=1/2$, устроены иначе. Они не сужаются к вершине, а расширяются. Внутри них можно видеть характерную для традиционного отображения окружности область удвоенного периода в виде «crossroad area». Особенно хорошо эти особенности видны для языка периода 5. Однако при $\lambda=2.2$ (рис. 7, в) эти различия двух систем языков пропадают, и картина языков начинает модифицироваться к виду, характерному для одномерного отображения (14). Некоторые особенности еще можно наблюдать лишь в верхней части языка периода 5, которые при $\lambda=3.2$ исчезают.

Как мы говорили, критерием эффективности одномерного отображения (14) являются большие значения параметра λT . Это означает, в частности, что язык синхронизации с числом вращения $\omega=1/3$ должен в большей степени

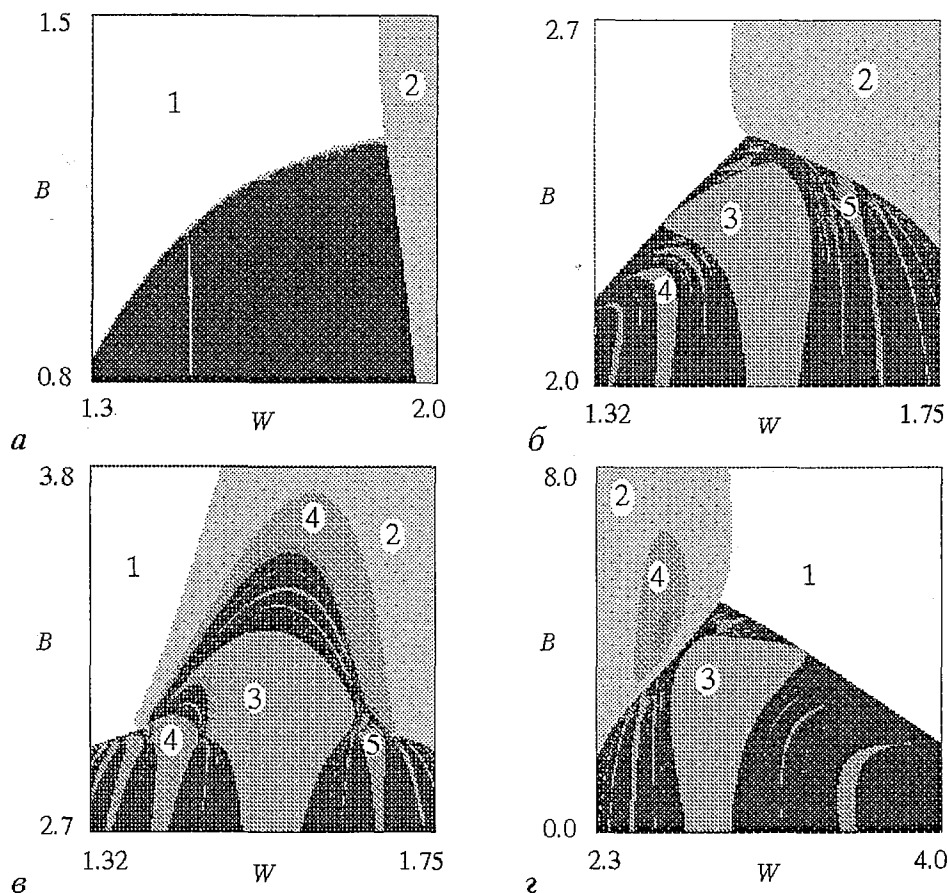


Рис. 7. Увеличенные фрагменты карт динамических режимов двумерного отображения, представленных на рис. 6. Цифры обозначают период цикла. Значения λ : 0.2 (а); 1.2 (б); 2.2 (в, г)

соответствовать одномерному случаю, нежели язык с $\omega=2/3$. (Последнему отвечает меньшее значение периода воздействия T .) Действительно, если обратиться к рис. 3, а, то можно видеть, что для одномерного отображения окрестности этих языков устроены одинаково. Для двумерного же при $\lambda=2.2$ первый из них (см. рис. 7, в) уже похож на случай одномерного отображения (см. рис. 3, б), а второй и его окрестность устроены иначе (рис. 7, г). Так, на рис. 7, г можно видеть отсутствующую на рис. 7, в картину «вложенных» друг в друга островов удвоенного периода 4 и 8, аналога которой нет на рис. 7, в.

Как модифицируется динамика двумерного отображения с ростом λ , можно усмотреть из вида бифуркационных деревьев, показанных на рис. 8. При $\lambda=0.2$ из области периода 1 сразу попадаем в область квазипериодики (рис. 8, а). Затем картина усложняется, и при $\lambda=1.2$ появляются окна других периодических режимов. Наконец, при $\lambda=2.2$ можно видеть и каскад бифуркаций удвоения периода (рис. 8, в). Графики бифуркационных деревьев также позволяют судить об эффективности одномерной аппроксимации. Для этого на рис. 8, г показано дерево для одномерного отображения (14), но в качестве переменной выбрана не входящая в него величина θ , а связанная с ней соотношением $x=2\lambda^{1/2}\cos\theta$ переменная двумерного отображения; так же перенормирована амплитуда $V=2/\lambda^{1.2}C$. Хорошо видно, что для случая $\lambda=2.2$ аппроксимация одномерным отображением для данного значения частоты выполняется очень хорошо. Случаи $\lambda=0.2$ и 1.2 демонстрируют существенные отличия.

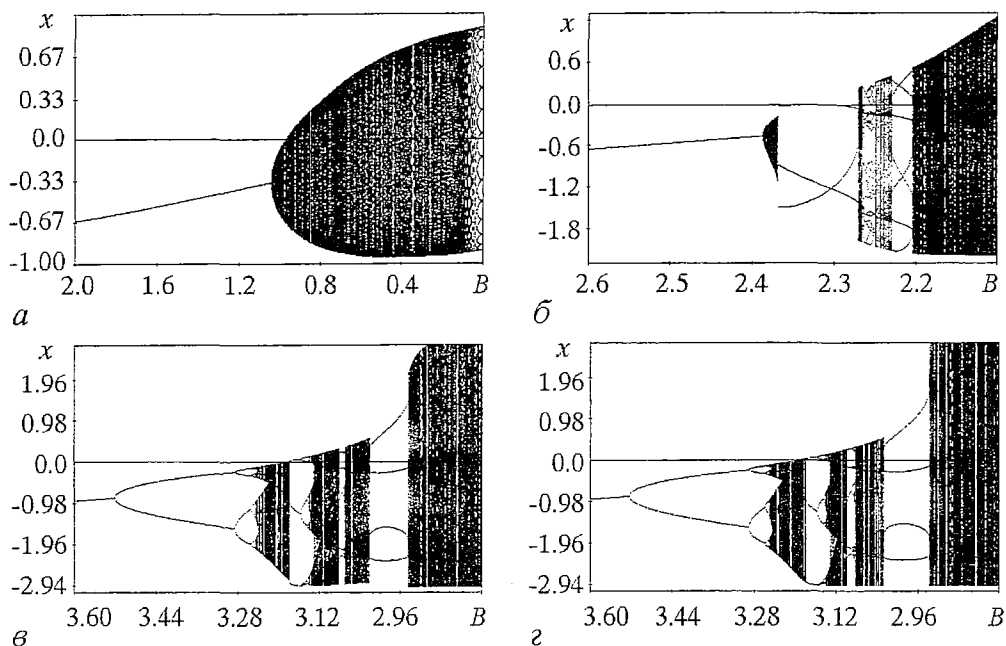


Рис. 8. Бифуркационные деревья двумерного отображения при $W=1.45$ и $\lambda=0.2$ (а), 1.2 (б), 2.2 (в) и одномерного отображения $W=1.45$, $\lambda=2.2$ (г)

Как мы уже отмечали, эффективность одномерной аппроксимации управляется параметром λT , и если мы уменьшим частоту в два раза, то одномерная аппроксимация будет работать хорошо и при уменьшенном в два раза параметре λ . Рис. 9, на котором показаны бифуркационные деревья одномерного и

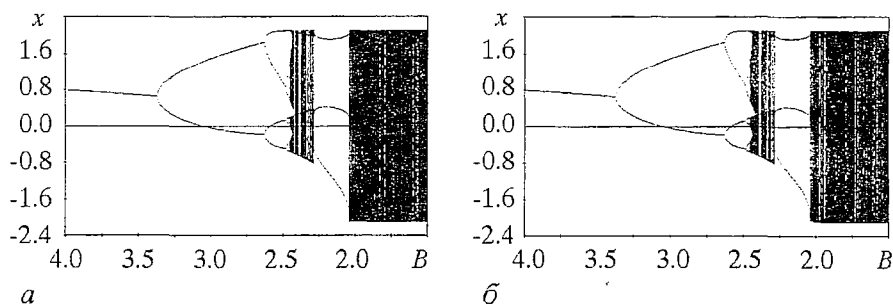


Рис. 9. Бифуркационные деревья одномерного отображения (а) и двумерного (б) при частоте воздействия $W=0.725$ и параметре $\lambda=1.1$. Используются переменные, характерные для двумерного отображения

двумерного отображений с уменьшенными по сравнению с рис. 8, в в два раза значениями частоты и параметра λ , убеждает, что это действительно так. В этом случае одномерная аппроксимация эффективна и при $\lambda=1.1$.

4. Генератор Ван дер Поля

Теперь рассмотрим динамику дифференциальной системы - генератора Ван дер Поля с импульсным воздействием (1). Вначале построим для него карты динамических режимов на плоскости параметров (B, W) , где W - частота внешних импульсов, а B - их амплитуда (рис. 10). На картах использованы те же масштабы,

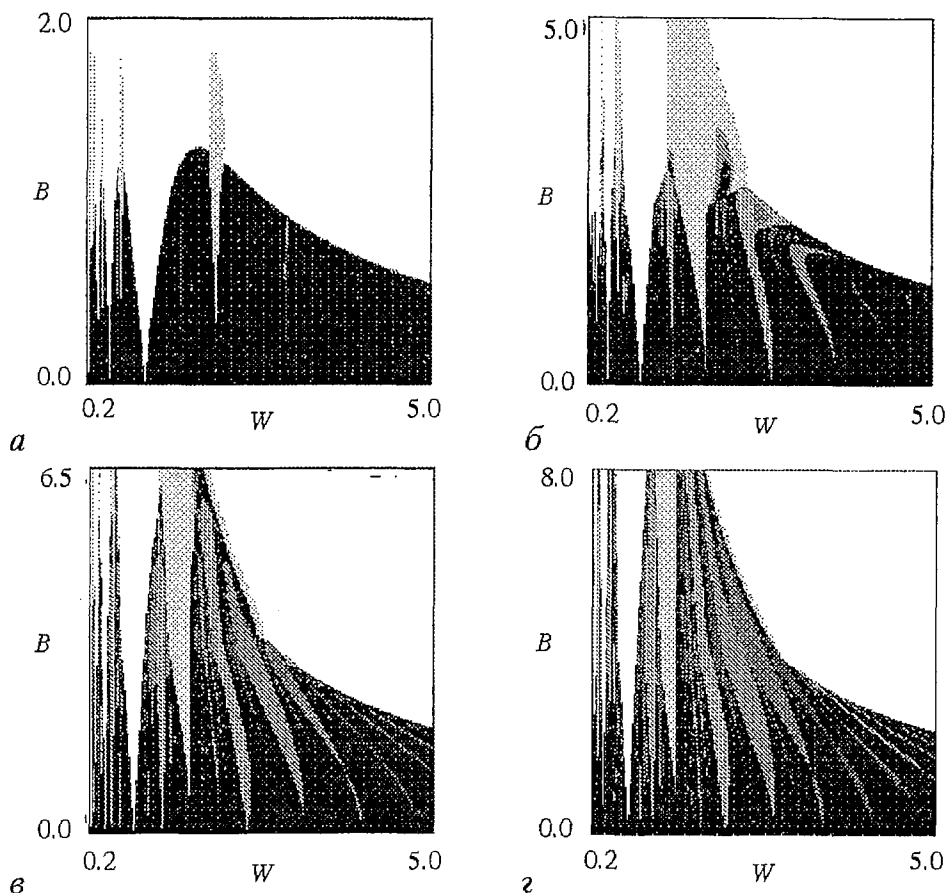


Рис. 10. Эволюция карт динамических режимов для генератора Ван дер Поля с импульсным воздействием при изменении параметра диссипации λ : а - 0.2; б - 1.2; в - 2.2; г - 3.2

что и на рис. 5, отвечающем двумерному отображению. Это позволяет их попарно сравнить.

Можно видеть, что при $\lambda=0.2$ карты практически идентичны. При $\lambda=1.2$ появляются довольно существенные различия. Для дифференциальной системы языки более узкие, появляются островки удвоенного периода. Карты же дифференциальной системы и двумерного отображения, отвечающие значениям $\lambda=2.2$ и 3.2 , практически не похожи.

Мы можем дать и другие иллюстрации, позволяющие судить о соответствии дифференциальной системы и двумерного отображения. Так, на рис. 11 и 12 показаны сечения Пуанкаре и портреты аттракторов для разных значений λ . Хорошо видно, что соответствие наблюдается лишь для $\lambda=0.2$. При $\lambda=1.2$ нижние рисунки демонстрируют режимы, совершенно отличные друг от друга. Система Ван дер Поля демонстрирует развитый хаос, а двумерное отображение - 2-цикл. То же самое можно усмотреть из графика бифуркационного дерева при $\lambda=1.2$ для дифференциальной системы (рис. 13, а) и двумерного отображения (рис. 13, б).

Итак, двумерное отображение эффективно при малых $\lambda \leq 0.5$, что и следует из исходных предположений метода медленно меняющихся амплитуд. Если теперь в качестве критерия работоспособности одномерной аппроксимации использовать оценку $\lambda T \geq 2$, то получим, что оба приближения работают при значениях периода воздействия $T \geq 4$ или для значений частоты $W \leq 1.5$. Эта оценка хорошо согласуется с численным исследованием: практически на всех картах, отвечающих дифференциальной системе и двумерному и одномерному отображениям (см. рис. 2, 6, 10),

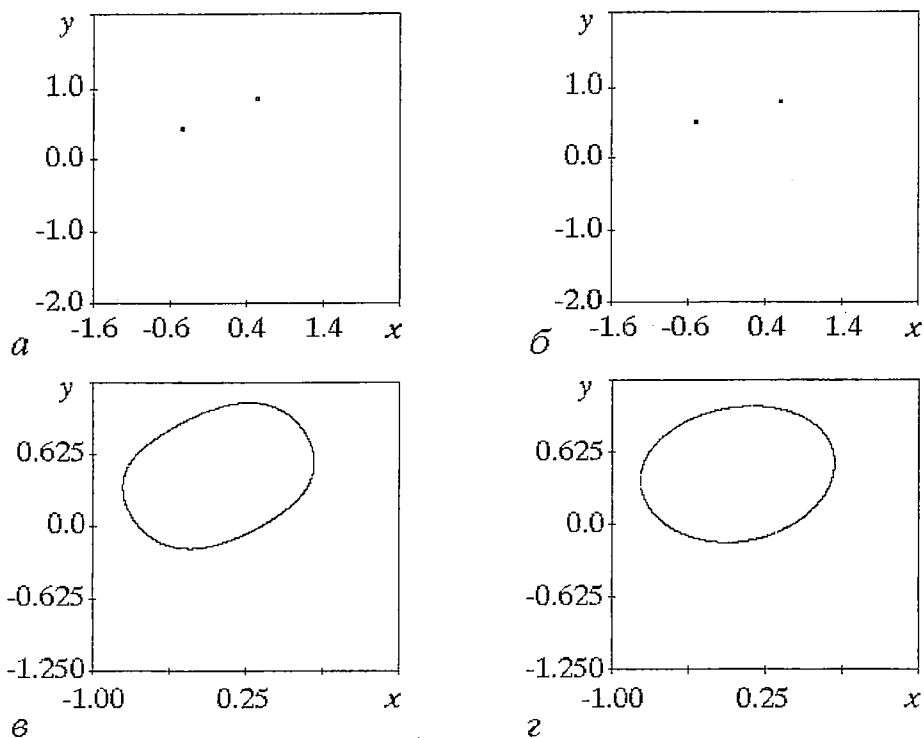


Рис. 11. Сечения Пуанкаре для генератора Ван дер Поля (a , $в$) и портреты аттракторов двумерного отображения (15) ($б$, $г$) при $W=2.05$; $B=1.3$ (a , $б$); $B=0.8$ ($в$, $г$). Значение параметра диссипации $\lambda=0.2$

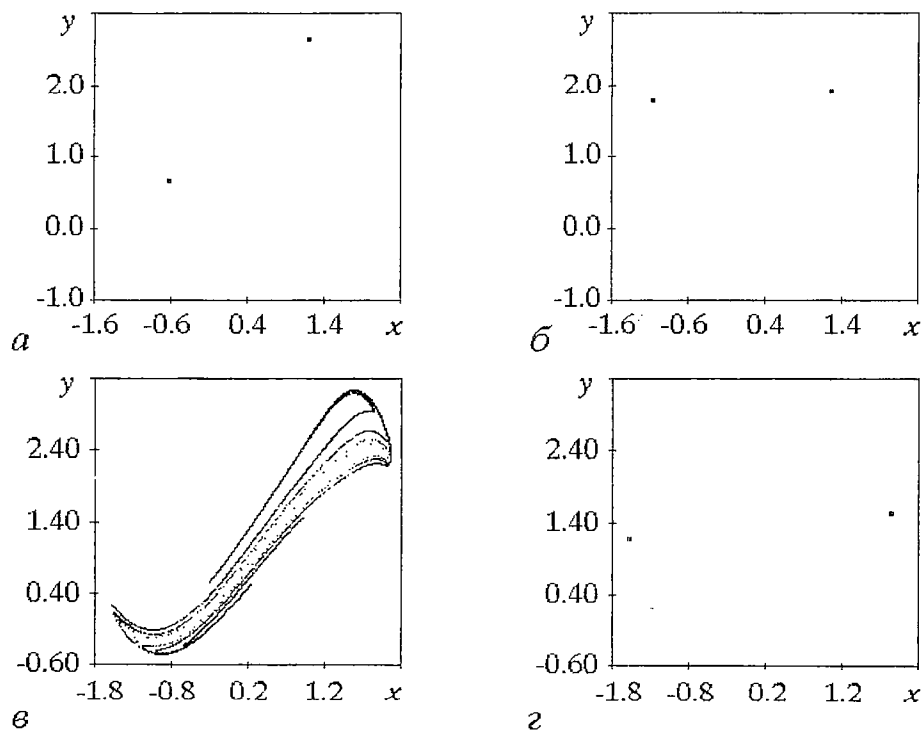


Рис. 12. Сечения Пуанкаре для генератора Ван дер Поля (a , $в$) и портреты аттракторов двумерного отображения (15) ($б$, $г$) при $W=2.05$; $B=3.7$ (a , $б$); $B=2.7$ ($в$, $г$). Значение параметра диссипации $\lambda=1.2$

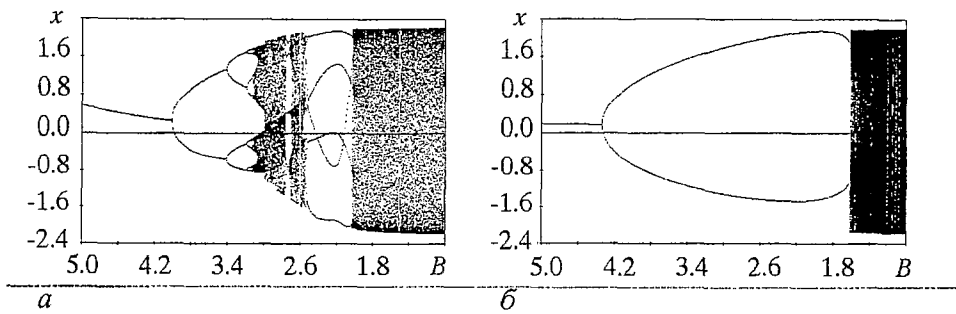


Рис. 13. Бифуркационное дерево для генератора Ван дер Поля под периодическим импульсным воздействием (а) и двумерного отображения (б) при $W=2.1$ и $\lambda=1.2$

область $W \leq 1.5$, в которую попадает и основной язык синхронизации, устроена одинаково.

В то же время двумерную, а тем более одномерную аппроксимацию в задаче о системе Ван дер Поля с импульсным воздействием следует применять с большой осмотрительностью, поскольку многие существенные элементы картины не описываются тем или иным приближением. Это, в свою очередь, означает, что использование модели (18) [8-10], основанной на идее импульсного воздействия на простейший предельный цикл в виде окружности, для реальных дифференциальных систем также требует осторожности.

Системы с импульсным воздействием, как мы видели, в одномерном случае приводят к отображениям с разрывами, а в рамках модели (14) - к кусочно-линейному отображению с разрывом. Казалось бы, можно ожидать, по аналогии с традиционным синус-отображением, что в этом случае реализуется новый тип универсальности, простейшие свойства которого установлены в [6, 9]. Насколько общими являются результаты работ [6, 9]? Этот вопрос в свете представленного здесь исследования следует признать открытым.

Работа выполнена при поддержке программы CRDF REG-006 (грант REC-006), грантов РФФИ (№ 00-02-17509 и № 01-02-06391) и Фонда содействия отечественной науке.

Библиографический список

1. Помо П., Берже И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 386 с.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1990, 240 с.
3. Winfree A. T. The geometry of biological time. Berlin: Springer, 1980.
4. Ott E. Chaos in dynamical systems. Cambridge university press. 1993. 386 p.
5. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 382 с.
6. Ding E.J. and Hemmer P.C. Exact treatment of mode locking for a piecewise linear map // Journal of Stat. Phys. 1987. Vol. 46, № 1,2. P. 99.
7. Ullmann K. and Caldas I.L. Transitions in the parameter space of a periodically forced dissipative system // Chaos, Solitons & Fractals. 1996. Vol. 7, № 11. P. 1913.
8. Glass L. and Sun J. Periodic forcing of a limit-cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // Phys. Rev. 1994. Vol. 50, № 6. P. 5077.
9. Ding E.J. Analytic treatment of a driven oscillator with a limit cycle // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35, № 6. P. 2669.
10. Ding E. Analytic treatment of periodic orbit systematics for a nonlinear driven oscillator // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 34, № 4. P. 3547.
11. Ding E.J. Structure of parameter space for a prototype nonlinear oscillator // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 36, № 3. P.1488.

12. Kuznetsov A.P., Turukina L.V. and Mosekilde E. Dynamical systems of different classes as models of the kicked nonlinear oscillator // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2001. Vol. 11. № 4.

13. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Динамические системы разных классов как модели нелинейного осциллятора с импульсным воздействием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 2. С. 31.

14. Gonzalez D.L. and Piro O. Chaos in a nonlinear driven oscillator with exact solution // Phys. Rev. Lett.. 1983. Vol. 50, № 12. P. 870.

15. Ding E.J. Structure of the parameter space for the van der Pol oscillator // Physica Scripta. 1988. Vol. 38. P. 9.

16. Viana R.L. and Batista A.M. Synchronization of coupled kicked limit cycle systems// Chaos, Solitons & Fractals. 1998. Vol. 9, № 12. P. 1931.

17. Campbell A. et. al. Isochrones and the dynamics of kicked oscillators // Physica A. 1989. № 155. P. 565.

Саратовское отделение Института
радиотехники и электроники РАН
Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 11.06.01

KICKED VAN DER POL OSCILLATOR: FROM DIFFERENTIAL EQUATION TO MAPS

A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina

Dynamics of a kicked Van der Pol system is considered. Approximate 2D and 1D maps are derived. Comparative analysis of efficiency of these maps is undertaken with the help of dynamical regimes charts, bifurcation diagrams and phase portraits technique. Peculiarities of the synchronization effects the kicked oscillator are discussed in comparison with traditional circle map.



Кузнецов Александр Петрович - родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Опубликовал более 100 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» СГУ и СО ИРЭ РАН. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ, пяти научно-популярных книг и учебных пособий.



Тюрюкина Людмила Владимировна - родилась в 1977 году. В 2000 году окончила факультет нелинейных процессов СГУ. В настоящее время - аспирант кафедры динамических систем СГУ, младший научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сравнительный анализ описания динамических систем с помощью математических моделей разных классов. Автор четырех научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Принимала участие в 10 международных научных конференциях. В 1999, 2000, 2001 годах стажировалась в Датском техническом университете, в 2001 году - в Потсдамском университете. Соросовский студент (1998, 1999, 2000), соросовский аспирант (2001). Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов (1999-2000, 2001-2002). E-mail: Turukina@info.sgu.ru



О ВОЗМОЖНОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДА ОТ КОНВЕКТИВНОЙ К АБСОЛЮТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОТОКОВОЙ СИСТЕМЕ РЕАКЦИЯ - ДИФФУЗИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ РЕАКТОРА

П.В. Куццов

В нелинейных распределенных системах с открытым постоянным потоком неустойчивость может носить конвективный и абсолютный характер. В статье обсуждается, какую трансформацию претерпевает неустойчивость в системе, где скорость потока изменяется в пространстве. Предлагается простая модель - одномерный брасселятор с потоком в реакторе конической формы. Так как скорость в такой системе монотонно убывает в пространстве, то образуются пространственные области ограниченной конвективной и абсолютной неустойчивости, разделенные неподвижным волновым фронтом. В статье обсуждаются возникающие в такой системе пространственно-временные структуры, а также возможность использования системы для исследования перехода от конвективной к абсолютной неустойчивости.

В распределенных жидкостных системах с открытым потоком движение вещества осуществляется таким образом, что каждая его порция проходит мимо неподвижного наблюдателя только один раз, как показано на рис. 1, *а*. Предполагается, что вещество непрерывно поступает во входное отверстие реактора, движется в нем с постоянной скоростью c и удаляется при достижении точки выхода.

Если одномерная система с открытым постоянным потоком находится в состоянии неустойчивого равновесия и в ней возникает локализованное в пространстве возмущение, то в зависимости от скорости потока развитие неустойчивости может происходить по двум различным сценариям [1-7]. Когда

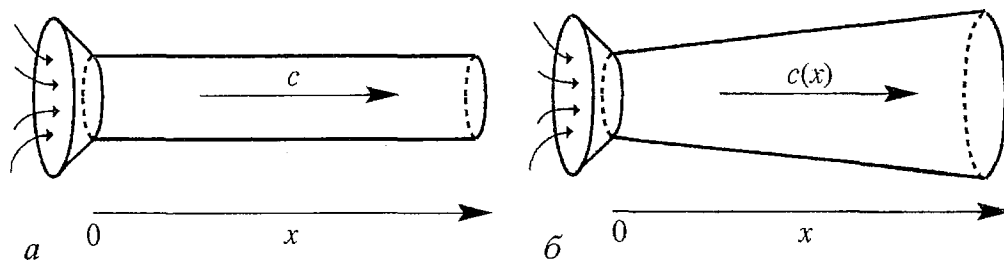


Рис. 1. Реактор с параллельными стенками (*а*), где скорость потока жидкости постоянна, и конический реактор (*б*), где скорость есть монотонно убывающая функция координаты

скорость достаточно велика, поток уносит развивающееся возмущение и неподвижный наблюдатель в каждой фиксированной точке системы регистрирует затухание колебаний. Такая неустойчивость называется конвективной (рис. 2, а). При малой скорости возмущение с течением времени занимает все пространство вне зависимости от размеров реактора, поэтому такая ситуация носит название абсолютной неустойчивости (рис. 2, б). При скорости c_{ca} происходит переход от одного типа неустойчивости к другому.

Важную роль в динамике нелинейных распределенных систем играют дефекты - локализованные структуры, которые возникают на границах или внутри идеальных пространственных образований, периодических и однородных. В одномерном случае выделяют локализованные импульсы, границы доменов и фронты [8, 9]. Последние напрямую связаны с концепцией абсолютной и конвективной неустойчивости. В системе без потока левый и правый фронты возмущения убегают со скоростью, равной по величине c_{ca} . Поэтому, если присутствует поток и его скорость больше c_{ca} , то оба фронта бегут вниз по течению - неустойчивость является конвективной. В противном случае, когда поток медленный, один из фронтов поднимается вверх по течению и развивается абсолютная неустойчивость [10-13].

Иная картина возникает, когда скорость потока изменяется в пространстве. Если в некоторой, достаточно протяженной области системы скорость оказывается больше c_{ca} , то поток увлекает за собой возмущение и в конечном итоге колебания внутри области затухают. Можно сказать, что имеет место ограниченная конвективная неустойчивость. Соответственно, ограниченной абсолютной неустойчивостью можно называть ситуацию, когда в некоторой области скорость меньше c_{ca} и протяженность области достаточна для установления в ней колебаний. Очевидно, что при соответствующем законе изменения скорости возможны другие, более сложные ситуации.

Между областями конвективной и абсолютной неустойчивости формируются локализованные граничные структуры - неподвижные волновые фронты. Их можно интерпретировать как еще один, специфический тип дефектов, которые возникают в нелинейных распределенных системах при наличии неоднородного потока.

Рассмотрим простой случай, когда поток монотонно замедляется в пространстве. Его можно реализовать, если поместить систему в реактор конической формы, изображенный на рис. 1, б. Когда скорость, с которой жидкость поступает в реактор, достаточно велика, вблизи входного отверстия существует область ограниченной конвективной неустойчивости. Она простирается примерно до точки x_{ca} , где скорость достигает критического (для системы с постоянным потоком) значения c_{ca} . Вблизи этой точки существует неподвижный волновой фронт. Ниже

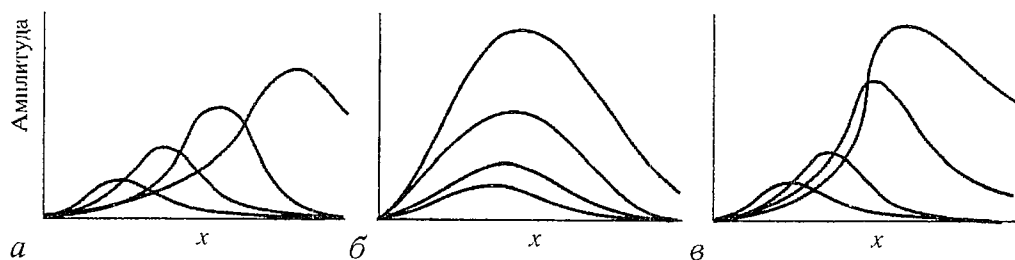


Рис. 2. Развитие локализованного возмущения в системе с постоянным (а, б) и с монотонно замедляющимся (в) потоком: а - конвективная неустойчивость, б - абсолютная неустойчивость, в - остановка волнового фронта

по течению поток оказывается недостаточно быстрым, чтобы увлекать за собой возмущение, вследствие чего развивается ограниченная абсолютная неустойчивость (рис. 2, в).

Система с коническим реактором может быть использована для экспериментального изучения перехода от конвективной к абсолютной неустойчивости. Если придать реактору системы с постоянным потоком коническую форму, а затем каким-либо образом найти точку x_{ca} , то критическую скорость можно будет вычислить, зная закон изменения скорости в пространстве. Основная трудность состоит, очевидно, в определении местоположения точки критической скорости x_{ca} . С одной стороны, как обсуждалось выше, есть основания полагать, что она находится вблизи неподвижного волнового фронта, местоположение которого можно определить из непосредственных наблюдений. Однако с другой стороны, на их взаимное расположение каким-то образом должны влиять параметры системы и свойства потока.

Рассмотрим одномерный брасселятор [14], который является системой реакция - диффузия и в присутствии постоянного потока описывается следующими уравнениями [7]:

$$\begin{aligned} \partial U/\partial t + c\partial U/\partial x &= A - (B + 1)U + U^2V + \sigma\partial^2 U/\partial x^2, \\ \partial V/\partial t + c\partial V/\partial x &= BU - U^2V + \partial^2 V/\partial x^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь U и V обозначают изменяющиеся в пространстве и во времени концентрации химических веществ и выступают в роли динамических переменных; A и B - это постоянные концентрации веществ, присутствующих в избытке, они рассматриваются как управляющие параметры; $0 < \sigma < 1$ - отношение коэффициентов диффузии компонент U и V ; $c > 0$ - скорость потока. Предполагается, что поток движется в реакторе слева направо, как это изображено на рис. 1, а.

Система (1) допускает решение в виде однородного состояния равновесия

$$U_0 = A, V_0 = B/A, \quad (2)$$

которому отвечает обращение в ноль производных. При малых B это состояние оказывается устойчивым, а при больших теряет устойчивость в результате одной из двух возможных бифуркаций, Хопфа или Тьюринга [14, 7]. Соответствующие пороговые значения B имеют вид

$$B_H = 1 + A^2, \quad B_T = (1 + A\sigma^{1/2})^2, \quad (3)$$

где индексы Н и Т обозначают бифуркации Хопфа и Тьюринга, соответственно. В результате бифуркации Хопфа в системе возникают колебания, однородные в пространстве, а при бифуркации Тьюринга пространственно-временная структура имеет ненулевое волновое число и частоту, пропорциональную скорости потока.

В зависимости от скорости потока неустойчивости Хопфа и Тьюринга могут носить абсолютный и конвективный характер [7]. Смена характера неустойчивости происходит при скорости c_{ca} , которую можно найти по методу запирающего контура (pinch-point analysis) [2-7]. В его основе лежит анализ структуры решения линеаризованных динамических уравнений, найденных с использованием преобразования Лапласа, а результатом является система уравнений, из которой можно получить c_{ca} [7]*.

$$D(s, q) = 0, \quad \text{Re } s(q) = 0, \quad (\partial D/\partial q)/(\partial D/\partial s) = 0. \quad (4)$$

* Отметим, что существует другой метод нахождения c_{ca} , обсуждаемый в работах [10, 11], который приводит к тому же результату.

Здесь $D(s,q)=0$ - дисперсионное уравнение системы (1), линеаризованной около состояния равновесия (2); s и q - комплексные переменные, задающие частоты и инкременты элементарных линейных мод вида $\exp(st+qx)$. Так как в системе (1) возможны два разных типа бифуркаций, то в соответствии с этим уравнения (4) имеют два решения. Для выяснения, какое решение действительно соответствует критической ситуации, можно использовать численный эксперимент [7].

Пусть теперь смесь химических веществ поступает в реактор конической формы, схема которого изображена на рис. 1, б. Для вывода уравнений брасселятора в таком реакторе предположим, что U и V зависят от трех пространственных координат x, y, z , и в уравнении (1) сделаем замену дифференциальных операторов

$$c\partial/\partial x \rightarrow c\nabla, \partial^2/\partial x^2 \rightarrow \nabla^2, \quad (5)$$

где c - вектор скорости. Далее, перейдем к сферическим координатам, которые связаны с декартовыми соотношениями

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

где ось r направлена вдоль оси реактора. Чтобы вновь получить одномерную систему, будем считать, что U и V зависят только от r и вместо вектора скорости c возьмем его составляющую вдоль r .

В коническом реакторе скорость зависит от r . Найдем эту зависимость, считая жидкость несжимаемой. Разделив реактор вдоль r на тонкие сферические слои одинакового объема, каждый из которых жидкость проходит за одно и то же время, из условия равенства объемов получим

$$c(x) = c_0/(1+\varphi x)^2. \quad (6)$$

Здесь c_0 - скорость на входе; $\varphi=1/r_0$ - угловая характеристика конуса (при $\varphi=0$ стенки реактора параллельны); r_0 - координата входного отверстия, $x=r-r_0$.

Таким образом, на основании проведенных рассуждений можно записать уравнения одномерного брасселятора в коническом реакторе

$$\partial U/\partial t + [c_0/(1+\varphi x)^2 - 2\sigma\varphi/(1+\varphi x)]\partial U/\partial x = A - (B+1)U + U^2V + \sigma(\partial^2 U/\partial x^2), \quad (7)$$

$$\partial V/\partial t + [c_0/(1+\varphi x)^2 - 2\varphi/(1+\varphi x)]\partial V/\partial x = BU - U^2V + \partial^2 V/\partial x^2.$$

Система (7), также как (1), имеет однородное состояние равновесия вида (2), которое теряет устойчивость в критической точке Хопфа или Тьюринга (3). Возникающие в закритической области неустойчивости устроены более сложно, чем классические хопфовские или тьюринговские, обсуждавшиеся выше. Тем не менее, так как при $\varphi \rightarrow 0$ коническая система превращается в систему с постоянным потоком, то удобно по-прежнему называть неустойчивости, возникающие в конической системе, «хопфовскими» и «тьюринговскими».

Далее будем численно изучать динамику системы (7), используя метод конечных разностей второго порядка по x и по t [15, 16]. Зададим шаг разностной сетки в пространстве и во времени порядка 0.1.

На входе поддерживаем постоянные равновесные концентрации реагентов (2)

$$U_{|x=0} = U_0, \quad V_{|x=0} = V_0. \quad (8)$$

Выбор граничного условия у выходного отверстия реактора для достаточно протяженной системы не имеет принципиального значения. Проверяя в численном эксперименте различные варианты постановки такого условия, несложно

убедиться, что в худшем случае вблизи правой границы возникает локализованное возмущение, которое не распространяется вверх по потоку и поэтому не оказывает существенного влияния на формирующиеся в системе структуры. Мы используем граничное условие

$$\partial U / \partial x_{|x=L} = 0, \quad \partial V / \partial x_{|x=L} = 0, \quad (8)$$

где L - длина реактора. Такое же граничное условие используется в работах [7, 17], где рассматривается динамика одномерного брасселятора с потоком.

В работе [7] для системы с постоянным потоком (1) построены плоскости параметров (c, B) , которые воспроизведены на рис. 3, а и 4, а. Здесь выделены домены, отвечающие различным типам поведения системы, найденные в линейном приближении по методу записывания контура.

При переходе к конической геометрии вместо определенного значения скорости c возникает диапазон ее изменения. На плоскости параметров (c, B) это соответствует переходу от рассмотрения отдельных точек, представляющих систему с постоянным потоком, к горизонтальным направленным отрезкам. Начало такого отрезка соответствует входному отверстию конического реактора, а конец - точке выхода. Очевидный интерес представляют пересечения отрезками границ доменов. Можно предположить, что вблизи некоторых из пересечений происходит перестройка характера поведения конической системы, тогда как другие система игнорирует.

На рис. 3, б, в и 4, б, в построены пространственно-временные диаграммы системы с коническим реактором (7), а на плоскостях параметров рис. 3, а и 4, а проведены соответствующие этим диаграммам направленные отрезки. В зависимости от расположения отрезков можно выделить три различные ситуации.

1. Когда отрезок переходит из домена конвективной в домен абсолютной неустойчивости, на пространственно-временных диаграммах возникают неподвиж-

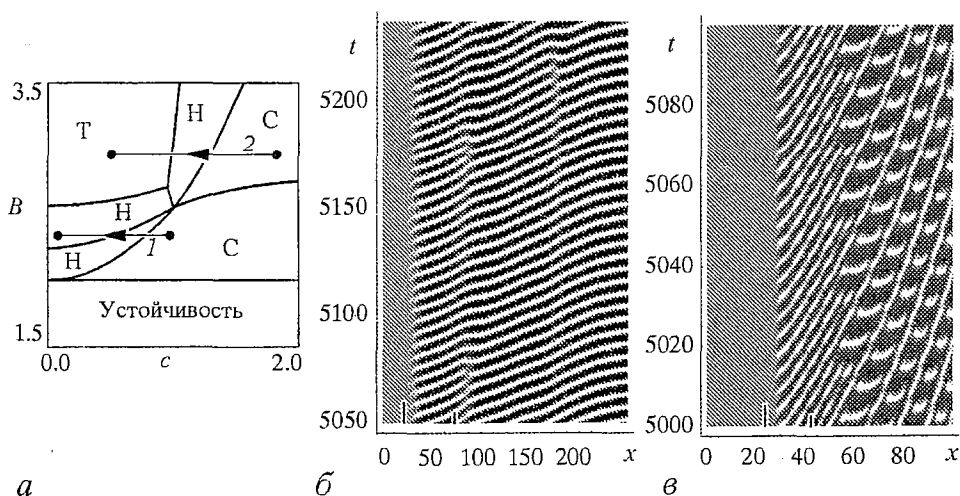


Рис. 3. Представление системы с конической геометрией реактора на плоскости параметров системы с постоянным потоком при помощи ориентированных отрезков. а - плоскость параметров системы (1), полученная в линейном приближении по методу записывания контура (из [7]). Буквами Н и Т обозначены домены хопфовой и тьюринговской неустойчивости, соответственно, С - конвективная неустойчивость. б, в - пространственно-временные диаграммы системы (7), соответствуют отрезкам 1 и 2. Оттенками серого выведены значения концентрации U . Большим значениям U отвечают светлые области. Штрихи на горизонтальных осях соответствуют пересечениям на плоскости параметров (а) отрезков с границами доменов. Более высокий штрих показывает точку критической скорости x_{ca} . Все рисунки построены при $A=1.0$, $\sigma=0.25$ и $\varphi=0.01$. Для пространственно-временных диаграмм: б) $B=2.3, c_0=1.0$ (в) $B=3.0, c_0=2.0$

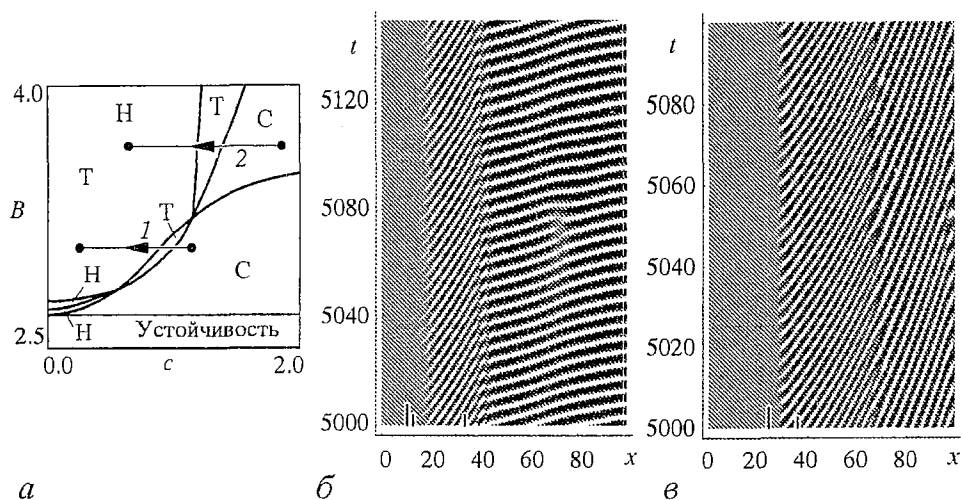


Рис. 4. Плоскость параметров системы (1) и пространственно-временные диаграммы системы (7), аналогичные изображенным на рис. 3, но построенные при $A=1.3$ и при тех же значениях σ и φ . Другие параметры: $B=3.1$, $c_0=1.2$ (б); $B=3.7$, $c_0=2.0$ (в). Третий, дополнительный штрих на диаграмме б (при $x=35$) показывает точку, где скорость достигает величины $c_{ca} \approx 0.67$. В системе с постоянным потоком приблизительно при этой скорости происходит изменение структуры пространственно-временных колебаний, не связанное с переходом между доменами на плоскости параметров a (см. рис. 5)

ные волновые фронты. Заметим, что точки критической скорости (на диаграммах они обозначены высокими штрихами) и неподвижные фронты расположены достаточно близко друг от друга.

2. Если при изменении скорости, соответствующем движению вдоль отрезка, в системе с постоянным потоком происходит бифуркационное изменение характера динамики, то в пространстве конической системы имеются соответствующие этому изменению области с различной структурой. При этом граница между областями находится вблизи точки, где скорость достигает порогового (для системы с постоянным потоком) значения. Коническая система здесь выступает в роли своеобразного сканирующего устройства, позволяющего выявлять различные динамические режимы соответствующей системы с постоянным потоком.

Это иллюстрируют рис. 3, в и 4, б. На рис. 3, в правее неподвижного волнового фронта существуют две области с различной пространственно-временной структурой, что соответствует переходу отрезка из хопфовского домена в тьюринговский. Заметим, что характер наблюдаемых в этих областях колебаний не соответствует названиям доменов. Однако это не связано с конической геометрией реактора, а объясняется тем, что домены характеризуют динамику в линейном приближении, то есть только при малых отклонениях от равновесия [7] (такое же несоответствие имеет место и для системы с постоянным потоком).

На рис. 4, б справа от неподвижного волнового фронта также выделяются две пространственные области с различными структурами. Однако граница между ними не соответствует границе между доменами плоскости параметров, а попадает внутрь одного из доменов. Из этого можно заключить, что в соответствующей системе с постоянным потоком при изменении скорости происходит бифуркационная перестройка пространственно-временной структуры, не наблюдаемая в линейном приближении и вследствие этого не отмеченная на плоскости параметров рис. 4, а. Этот вывод можно проверить непосредственно, при помощи численного эксперимента над системой (1). Действительно, как видно

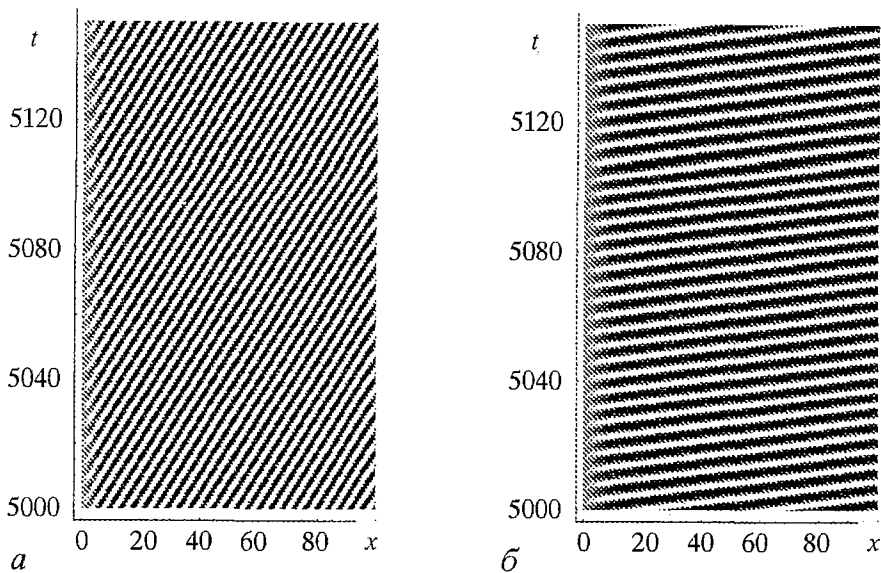


Рис. 5. Пространственно-временные диаграммы системы с постоянным потоком (1) при тех же A , B и σ , что и на рис. 4, б. Значения скорости $c=0.68$ (а) и 0.66 (б) взяты вблизи найденного эмпирически критического значения $c_{ca} \approx 0.67$, где происходит перестройка пространственно-временной структуры системы, не связанная с переходом между доменами на плоскости параметров на рис. 4, а. Отметим соответствие изображенных на этих рисунках структур и различных областей на рис. 4, б

из рис. 5, при скорости $c \approx c_{ca}$ в системе с постоянным потоком происходит качественное изменение характера поведения. Пороговому значению скорости c_{ca} соответствует штрих на горизонтальной оси на рис. 4, б. Заметим, что штрих находится вблизи границы между областями с различной пространственно-временной структурой.

3. Еще одна интересная ситуация возникает, если в точках плоскости параметров, через которые проходит отрезок, система с постоянным потоком демонстрирует периодические пространственно-временные колебания и при этом в зависимости от скорости частота колебаний меняется гладко. В конической системе в такой ситуации конкурируют две тенденции: с одной стороны, из-за изменения скорости частоты колебаний в разных точках пространства должны быть различными, но с другой стороны, взаимодействие между колебаниями в близлежащих точках приводит к их синхронизации. Это вызывает эффект кластерной синхронизации, проявляющийся также в динамике цепочки локально связанных автогенераторов с монотонно меняющимися вдоль цепочки собственными частотами [18]. В пространстве конической системы возникают кластеры синхронных колебаний, то есть ограниченные области, внутри которых колебания имеют одну и ту же частоту. На границах между кластерами частота меняется практически скачкообразно. Иллюстрацией этого эффекта могут служить рис. 3, б (границы между кластерами находятся в точках $x_{cl} \approx 60$ и $x_{cl} \approx 140$), рис. 4, б ($x_{cl} \approx 70$) и рис. 4, в ($x_{cl} \approx 70$).

Обсудим свойства неподвижного волнового фронта в конической системе, в частности, его расположение относительно точки критической скорости x_{ca} при различных значениях параметров.

Точку критической скорости можно найти из формулы (6), разрешив ее относительно x_{ca}

$$x_{ca} = (c_0^{1/2} - c_{ca}^{1/2}) / (\varphi c_0^{1/2}), \quad (10)$$

где c_{ca} определяется из уравнений (4).

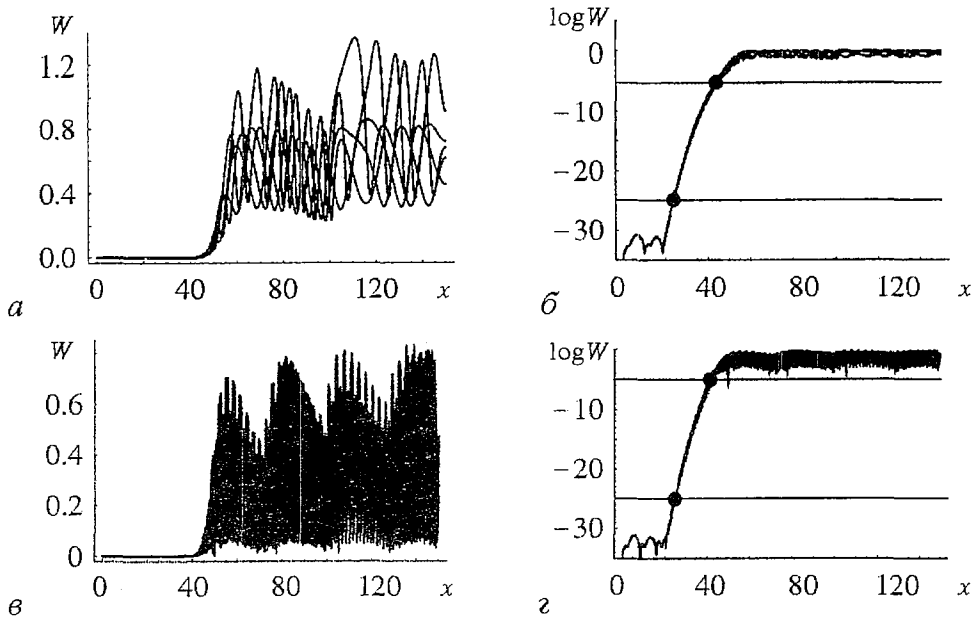


Рис. 6. Пространственные распределения амплитуды в различные моменты времени t : 1000, 1010, 1020, 1030 и 1040, построенные в одной и той же системе координат при $\varphi=0.01$, $c_0=1.5$, $B-B_{H,T}=0.3$, $\sigma=0.25$. Рис. а и б построены при $A=1$ ($B_H=2.0$, критическая точка Хопфа), а рис. в и г при $A=1.5$ ($B_H=3.06$, критическая точка Тьюринга). Рис. а и б, также как в и г, представляют одни и те же кривые с различным масштабом по оси ординат. Горизонтальные линии на рис. б и г проведены при $W=W_{1f}$ и $W=W_{2f}$, см. (12). Заметим, что в области между W_{1f} и W_{2f} кривые практически совпадают

Для того чтобы найти расположение неподвижного фронта, рассмотрим амплитуду, определенную следующим образом:

$$W(x,t) = [(U(x,t) - U_0)^2 + (V(x,t) - V_0)^2]^{1/2}, \quad (11)$$

где U_0 и V_0 - равновесные значения (2). Величина $W(x,t)$ в асимптотике $t \rightarrow \infty$ не стремится к предельному распределению $W^*(x)$, что иллюстрирует рис. 6. Однако, как видно из рисунка, если вдали от входного отверстия W осциллирует, то в области интересующего нас неподвижного волнового фронта кривые $W(x)$ в различные моменты времени практически совпадают друг с другом. Таким образом, неподвижный волновой фронт - это вполне определенная область пространства конической системы, и ее можно найти как при численном моделировании, так и в эксперименте, анализируя мгновенное состояние системы.

Предполагаем, что неподвижный волновой фронт расположен между точками, где амплитуда принимает значения

$$W_{1f} = e^{-2.5} \text{ и } W_{2f} = e^{-5}. \quad (12)$$

Как видно из рис. 6, это определение вполне отвечает интуитивным представлениям. Заметим, что, выбрав в качестве граничных другие значения амплитуды, мы получим зависимости, качественно не отличающиеся от обсуждаемых ниже.

На рис. 7 представлены пространственные распределения амплитуды при различных значениях входной скорости c_0 . На кривых отмечено положение точки критической скорости x_{ca} . Видно, что при изменении c_0 кривые транслируются в пространстве практически без изменений, так что взаимное расположение

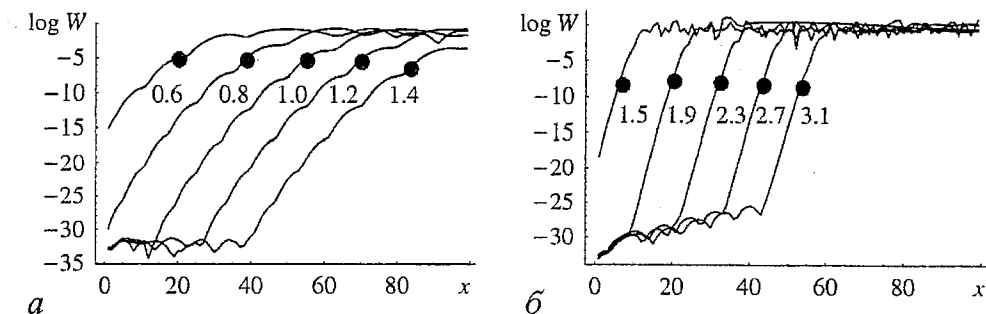


Рис. 7. Амплитуда колебаний (11) в коническом реакторе при различных значениях входной скорости c_0 (записаны рядом с кривыми). На кривых отмечены точки критической скорости. Значения параметров: $B-B_{H, \Gamma}=0.1, c_{ca}=0.415$ (а); $B-B_{H, \Gamma}=1.0, c_{ca}=1.308$ (б); $A=1.0, \sigma=0.25$ и $\varphi=0.01$

неподвижного фронта и точки критической скорости сохраняется. В области неподвижного фронта амплитуда растет экспоненциально, причем показатель экспоненты увеличивается с ростом надкритичности.

Рис. 8 иллюстрирует расположение границ неподвижного фронта x_{lf} и x_{rf} и точки критической скорости x_{ca} в зависимости от различных параметров. По представленным на этом рисунке графикам можно записать следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned} x_{lf}, x_{rf}, x_{ca} &\sim \varphi^{-\gamma}, \\ x_{lf}, x_{rf}, x_{ca} &\sim c_0, \\ x_{lf}, x_{rf}, x_{ca} &\sim \exp(-p(B - B_{H, \Gamma})), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\gamma > 0$ и $p > 0$ - некоторые величины, зависящие от параметров системы. На каждом из графиков три кривые демонстрируют сходное поведение. В большей степени это относится к правой границе фронта и к точке критической скорости,

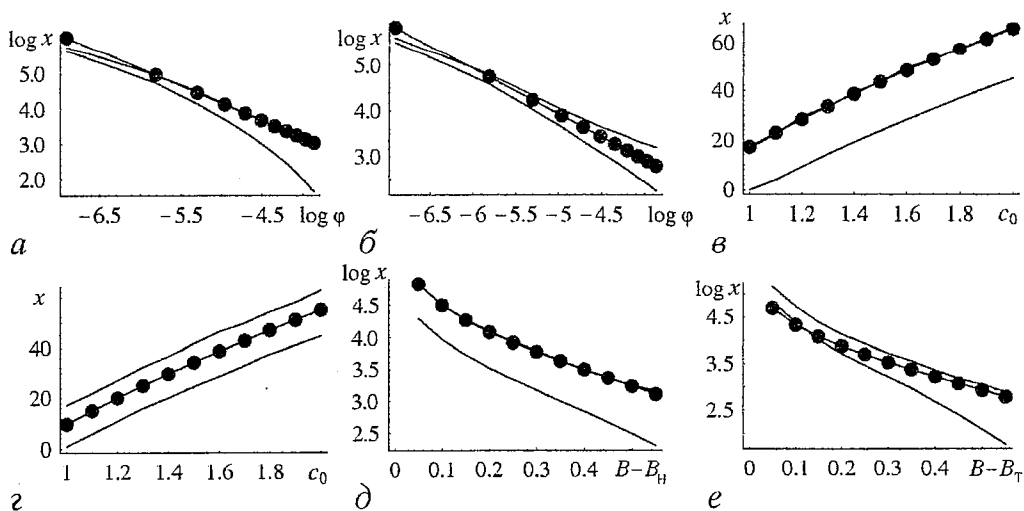


Рис. 8. Границы неподвижного волнового фронта (сплошные линии) и точка критической скорости в зависимости от различных параметров. Графики а, в и д построены при $A=1.0$, что соответствует неустойчивости Хопфа, а графики б, г и е - при $A=1.5$, неустойчивость Тьюринга. Для всех графиков, кроме а и б, $\varphi=0.01$. Входная скорость $c_0=1.5$ везде, кроме графиков (в) и (г). Надкритичность $B-B_{H, \Gamma}$ на всех графиках, кроме д и е, взята равной 0.3. Отметим, что границы волнового фронта и точка критической скорости демонстрируют похожее поведение и, следовательно, их взаимное расположение изменяется незначительно

тогда как кривая, отвечающая левой границе, может отклоняться от двух других довольно значительно, как это видно, например, из графиков (а) и (е). В случае неустойчивости Тьюринга (б, г, е) несоответствие между кривыми проявляется в большей степени, чем при неустойчивости Хопфа (а, в, д). Наблюдаемое поведение точек x_{lf} , x_{rf} и x_{ca} может быть использовано при проведении экспериментального исследования перехода от конвективной к абсолютной неустойчивости в системе с постоянным потоком. Перейдя к системе с конической геометрией и оценив положение точки критической скорости, например, как $x_{ca} \approx x_{rf}$, можно, изучая поведение границ неподвижного фронта, найти критическую скорость c_{ca} и получить информацию о ее зависимости от различных параметров.

Мы обсудили качественно и при помощи численного анализа поведение одномерного брасселятора с потоком в реакторе конической формы. Скорость потока в такой системе является монотонно убывающей функцией координаты. Для выявления различных типов поведения системы использованы плоскости параметров, полученные в работе [7] для брасселятора с постоянным потоком. На этих плоскостях систему с конической геометрией представляют направленные отрезки. Начало такого отрезка соответствует скорости потока у входного отверстия реактора, а конец - скорости потока на выходе.

Выявлены три различные ситуации. Когда скорость на входе конического реактора отвечает конвективной неустойчивости системы с постоянным потоком, а на выходе - абсолютной, то в пространстве конической системы возникает неподвижный волновой фронт, разделяющий область без колебаний и область, где колебания существуют. Показано, что по положению неподвижного волнового фронта можно оценить значение критической скорости в системе с постоянным потоком. Это может быть использовано при экспериментальных исследованиях абсолютной и конвективной неустойчивости.

Когда входная и выходная скорости в коническом реакторе отвечают различным динамическим режимам системы с постоянным потоком, то система с конической геометрией может служить в роли своеобразного сканирующего устройства, позволяющего выявить эти режимы. В ее пространстве возникают области с различным пространственно-временным поведением, граница между которыми находится вблизи точки, где скорость достигает бифуркационного для системы с постоянным потоком значения.

И, наконец, если при изменении скорости, соответствующем движению вдоль конического реактора, в системе с постоянным потоком существуют периодические временные колебания и их частота есть гладкая функция скорости, то возникает эффект кластерной синхронизации, проявляющийся также в динамике локально связанных автогенераторов с различными собственными частотами [18]. В пространстве конической системы формируются области колебаний с одинаковой частотой (кластеры синхронных колебаний), при этом частота убывает от кластера к кластеру практически скачкообразно.

Автор выражает признательность С.П. Кузнецову за полезное обсуждение работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Исследовательского и образовательного центра Саратовского государственного университета, CRDF, грант № Res-006 и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-02-17509.

Библиографический список

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Briggs R.J. Electron stream interaction with plasma. Cambridge: MIT, 1964.
3. Bers A. Handbook of plasma physics / Eds A.A. Galeev, R.N. Sudan. Amsterdam: North-Holland, 1983. P. 451.
4. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977.
5. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
6. Федорченко А.М., Коцаренко Н.Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука, 1981.
7. Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Dewel G., Borckmans P. Absolute and convective instabilities in a one-dimensional brusselator flow model // J. Chem. Phys. Vol. 106. 1997. P. 7609.
8. Hohenberg P.C., van Saarloos W. Fronts, pulses, sources and sinks in generalized complex Ginzburg - Landau equations // Physica D. 1992. Vol. 56. P. 303.
9. Cross M.C., Hohenberg P.C. Pattern formation outside of equilibrium // Rev. Mod. Phys. 1993. Vol. 65. P. 852.
10. Van Saarloos W. Front propagation into unstable states: Marginal stability as a dynamical mechanism for velocity selection // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 37. P. 211.
11. Van Saarloos W. Front propagation into unstable states: II. Linear versus nonlinear marginal stability and rate of convergence // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39. P. 6367.
12. Chomaz J.M. Absolute and convective instabilities in nonlinear systems // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 69. P. 1931.
13. Couairon A., Chomaz J.M. Absolute and convective instabilities, front velocities and global modes in nonlinear systems // Physica D. 1997. Vol. 108. P. 236.
14. Николис Г., Пригожин И.Р. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
15. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
16. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical recipes in C. Cambridge: University Press, 1992.
17. Andresén P., Bache M., Dewel G., Borckmans P., Mosekilde E. Stationary space periodic structures with equal diffusion coefficients // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 297.
18. Osipov G.V., Sushchik M.M. Synchronized clusters and multistability in arrays of oscillators with different natural frequencies // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 7198.

Институт радиотехники
и электроники РАН
Саратовское отделение

Поступила в редакцию 24.04.01
после доработки 7.10.01

INVESTIGATION OF THE TRANSITION FROM CONVECTIVE INSTABILITY TO ABSOLUTE INSTABILITY IN A REACTION - DIFFUSION SYSTEM WITH FLOW USING A CONICAL REACTOR

P.V. Kuptsov

Instability in a reaction - diffusion system with open constant flow may be absolute or convective. In this paper we study these instabilities in the case when the flow

decelerates in space. As a model system we consider the one-dimensional Brusselator with flow in the conical reactor. Due to decreasing of the flow rate along the spatial coordinate, the instability is convective near the reactor inlet and absolute at the downstream end. In the sustained regime the instabilities are separated by the stationary wave front. Provided in the paper numerical investigation shows that the front is located near the critical rate point, the point where the flow rate corresponds to transition from convective to absolute instability in the respective spatially uniform system.



Павел Владимирович Купцов - родился в Саратове (1972), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1994), защитил кандидатскую диссертацию по специальности радифизика (1998). В настоящее время - доцент кафедры информатики Саратовской государственной академии права, а также сотрудник научной группы теоретической нелинейной динамики в Саратовском отделении Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - сложные колебания в распределенных системах, теория критических явлений, динамика систем под внешним воздействием с различной структурой. Автор нескольких работ по этим темам.



ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОГО РОТОРА

Н.В. Киселева

Изучаются периодические движения ротора с параметрическим и силовым воздействием, описываемые нелинейным неавтономным дифференциальным уравнением маятникового типа, зависящим от четырех параметров.

Для малых значений параметров с помощью метода Чезари получены уравнения бифуркационных поверхностей, ограничивающих области существования ряда периодических движений колебательного и вращательного типа. В конечной области пространства параметров численными методами построены их бифуркационные диаграммы, содержащие области существования и устойчивости. Выявлены бифуркации, приводящие к возникновению периодических движений и смене характера их устойчивости.

Введение

В работе рассматривается нелинейное неавтономное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + h\dot{x} = b - (a + v\sin t)\sin x, \quad (1)$$

описывающее движения ротора с гармонически колеблющейся осью вращения [1]. Здесь x - угол отклонения ротора от вертикали, параметры b , a , h , v характеризуют постоянный вращающий момент, момент силы тяжести, коэффициент линейного вязкого трения, амплитуду колебаний оси вращения. Уравнение (1) представляет интерес не только для теории механических вибросистем. Оно моделирует движение заряженной частицы в электромагнитном поле, движение солитона в поле стоячей волны в неизотермической плазме [2, 3].

При изучении математической модели (1) прежде всего возникает задача отыскания и исследования периодических движений ротора, синхронных с колебаниями его оси. Им соответствуют решения $\Gamma_{p,q}$: $x=x(t)$, удовлетворяющие условию $x(t+2\pi p)=x(t)+2\pi q$, $p=1,2,\dots$; $q=0,\pm 1,\pm 2,\dots$. При $q=0$ решение $\Gamma_{p,q}$ отвечает $2\pi p$ -периодическому колебанию ротора, при $q \neq 0$ - периодическому вращению: за период $2\pi p$ происходит $|q|$ оборотов ротора в положительном ($q>0$) или отрицательном ($q<0$) направлении.

В случае $b=0$ бифуркационные диаграммы периодических решений уравнения (1) достаточно полно изучены в [4]. Влияние вращающего момента на динамику движения ротора при $a=0$ (ротор с вертикальной осью вращения)

рассмотрено в [5]. В настоящей работе выясняется влияние вращающего момента на бифуркационные диаграммы периодических решений в случае $a > 0$.

В первой части работы аналитическим методом Чезари [6] проведено исследование решений $\Gamma_{p,q}$ при малых значениях параметров. Учет различных порядков малости параметров b, a, h, v позволил получить формулы для границ области существования периодических решений $\Gamma_{1,0}, \Gamma_{1,1}$ и $\Gamma_{1,-1}$, установить число синхронизмов каждого типа и выяснить бифуркации, приводящие к их возникновению. Вторая часть работы посвящена продолжению этих решений в конечную область пространства параметров численными методами [7], основанными на методе точечных отображений [8]. Построены бифуркационные диаграммы периодических решений, содержащие области существования и устойчивости. Выяснены бифуркации, приводящие к их возникновению и смене характера устойчивости.

1. Изучение периодических решений $\Gamma_{p,q}$ при малых значениях параметров

Уравнение (1) при $b=h=v=0$ имеет бесконечное множество решений

$$x(t) = (q/p)t + \alpha, \quad |\alpha| < 2\pi, \quad (2)$$

которые находятся в соответствии с простой дробью q/p из интервала $(-\infty, \infty)$. Выделим среди них решения, порождающие периодические решения $\Gamma_{p,q}$ при малых значениях параметров. Для этого с помощью метода Чезари [6] найдем значения α , соответствующие порождающим решениям.

Предполагаем, что величины b, a, h, v являются малыми разного порядка малости. Положим

$$b = L_m v^m + o(v^{m+1}), \quad h = N_l v^l + o(v^{l+1}), \quad a = M_n v^n + o(v^{n+1}), \quad (3)$$

где m, l, n - целые положительные числа, L_m, N_l, M_n - постоянные. Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$\ddot{x} + (N_l v^l + o(v^{l+1}))\dot{x} = L_m v^m + o(v^{m+1}) - (M_n v^n + o(v^{n+1}) + v \sin t) \sin x.$$

Сделаем замену $u = x - (q/p)t$, получим уравнение

$$\ddot{u} + N_l v^l + o(v^{l+1})(\dot{u} + q/p) = L_m v^m + o(v^{m+1}) - (M_n v^n + o(v^{n+1}) + v \sin t) \sin((q/p)t + u). \quad (4)$$

В соответствии с [6] рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{cases} \ddot{u} = -N_l v^l + o(v^{l+1})(\dot{u} + q/p) + L_m v^m + o(v^{m+1}) - \\ - (M_n v^n + o(v^{n+1}) + v \sin t) \sin((q/p)t + u) - V(\alpha, v), \\ 1/(2\pi p) \int_0^{2\pi p} u dt = 0, \end{cases} \quad (5)$$

решением которой являются функции $u = u(t, \alpha, v)$, $V = V(\alpha, v)$, удовлетворяющие условию $u(t, \alpha, 0) = \alpha$, $V(\alpha, 0) = 0$. Это решение представимо рядами

$$\begin{cases} u(t, \alpha, v) = \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t, \alpha) v^k, \\ V(\alpha, v) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(\alpha) v^k, \end{cases} \quad (6)$$

где $u_k(t, \alpha)$ - $2\pi p$ -периодические функции переменного t .

Необходимым и достаточным условием существования единственного $2\pi p$ -периодического решения $u=u(t, \nu)$ уравнения (4), переходящего при $\nu \rightarrow 0$ в порождающее решение $u(t, 0)=\alpha$, является существование простого корня $\alpha(\nu)$ бифуркационного уравнения $V(\alpha, \nu)=0$.

Если в (6) $V_1(\alpha)=V_2(\alpha)=\dots=V_{k-1}(\alpha)\equiv 0$, $V_k(\alpha)\neq 0$ и существует такое значение α_0 , что $V_k(\alpha_0)=0$, $dV_k(\alpha_0)/d\alpha\neq 0$, то бифуркационное уравнение $V(\alpha, \nu)=0$ имеет простой аналитический корень $\alpha(\nu)\rightarrow\alpha_0$ при $\nu\rightarrow 0$. Поэтому для отыскания корней бифуркационного уравнения при $\nu\rightarrow 0$ достаточно найти первый коэффициент $V_k(\alpha)\neq 0$ и исследовать корни уравнения $V_k(\alpha)=0$. Тем самым определяются значения α в (2), соответствующие порождающим решениям.

Решение $\Gamma_{p,q}$, согласно [6], будет устойчивым, если для соответствующего ему корня α , выполняется соотношение

$$dV_k(\alpha_i)/d\alpha < 0. \quad (7)$$

Применяя описанный метод исследования периодических решений, подставим (6) в систему (5) и разложим синус в ряд Тейлора. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ν , получим систему с бесконечным числом уравнений для определения $u_k(t, \alpha)$ и $V_k(\alpha)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}_1 = -N_l \dot{u}_{1-l} - (q/p)N_l \delta_{1l} + L_m \delta_{1m} - (\sin t + M_n \delta_{1n}) \sin((q/p)t + \alpha) - V_1, \\ \ddot{u}_2 = -N_l \dot{u}_{2-l} - (q/p)N_l \delta_{2l} + L_m \delta_{2m} - \\ \quad - [(\sin t + M_n \delta_{1n}) \cos((q/p)t + \alpha)]u_1 - M_n \delta_{2n} \sin((q/p)t + \alpha) - V_2, \\ \dots \\ \int_0^{2\pi p} u_k(t, \alpha) dt = 0 \quad (k=1, 2, \dots), \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\int_0^{2\pi p} u_k(t, \alpha) dt = 0 \quad (k=1, 2, \dots), \quad (9)$$

где $\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если } k=l \\ 0, & \text{если } k\neq l \end{cases}$ и $\dot{u}_{k-1}(t, \alpha) \equiv 0$ при $l \geq k$.

Найдем решение $u_1(t, \alpha)$. Для этого проинтегрируем первое уравнение системы (8). Получим

$$u_1 = [L_m \delta_{1m} - (q/p)N_l \delta_{1l}] t^2/2 + M_n \delta_{1n} \sin((q/p)t + \alpha)/(q^2/p^2) +$$

$$+ 1/2 \{ \cos(\alpha - (1-q/p)t)/(1-q/p)^2 - \cos(\alpha + (1+q/p)t)/(1+q/p)^2 \} - V_1 t^2/2,$$

если $q \neq 0$, $q/p \neq \pm 1$;

$$u_1 = [L_m \delta_{1m} \mp N_l \delta_{1l} \mp 1/2 \cos \alpha] t^2/2 + M_n \delta_{1n} \sin(\alpha \pm t) \mp 1/8 \cos(\alpha \pm 2t) - V_1 t^2/2,$$

если $q/p = \pm 1$;

$$u_1 = [L_m \delta_{1m} - M_n \delta_{1n} \sin \alpha] t^2/2 + \sin \alpha \sin t - V_1 t^2/2,$$

если $q=0$.

Используя условие (9), определим коэффициент

$$V_1(\alpha) = L_m \delta_{1m} - (q/p)N_l \delta_{1l}, \quad \text{если } q/p \neq 0, \pm 1;$$

$$V_1(\alpha) = L_m \delta_{1m} \mp N_l \delta_{1l} \mp 1/2 \cos \alpha, \quad \text{если } q/p = \pm 1;$$

$$V_1(\alpha) = L_m \delta_{1m} - M_n \delta_{1n} \sin \alpha, \quad \text{если } q/p = 0.$$

Отсюда следует, что для $p=1, q=1$ при

$$|L_m \delta_{1m} - N_l \delta_{1l}| < 1/2 \quad (10)$$

уравнение $V_1(\alpha)=0$ имеет два простых корня

$$\alpha_1 = \arccos [2(L_m \delta_{1m} - N_l \delta_{1l})], \quad \alpha_2 = 2\pi - \alpha_1,$$

которые соответствуют двум решениям $x_i(t)=t+\alpha_i$ ($i=1,2$), порождающим периодические решения $\Gamma_{1,1}^i$. Значения

$$L_m \delta_{1m} - N_l \delta_{1l} = 1/2 \quad (L_m \delta_{1m} - N_l \delta_{1l} = -1/2) \quad (11)$$

отвечают слиянию корней α_1 и α_2 в точке $\alpha^\pm=0$ ($\alpha^-=\pi$). При $|L_m \delta_{1m} - N_l \delta_{1l}| > 1/2$ корни не существуют.

Таким образом, при малых значениях b, a, h, v уравнение (1) имеет два периодических решения $\Gamma_{1,1}$ в области $D_{1,1}$, определяемой соотношениями (3) и (10), которые можно переписать в виде одного неравенства

$$|b - h| < v/2 + o(v^2).$$

Выясним характер устойчивости этих решений. Проверяя условие (7), находим, что решение $\Gamma_{1,1}^1$, соответствующее корню α_1 , имеет седловой тип, а решение $\Gamma_{1,1}^2$, отвечающее корню α_2 , является устойчивым в первом приближении.

Соотношения (3), (11) определяют поверхности

$$L_{1,1}^\pm: \pm(b-h)=v/2+o(v^2), \quad (12)$$

ограничивающие область $D_{1,1}$ и соответствующие существованию периодического решения, отвечающего корню α^\pm уравнения $V_1(\alpha)=0$. Величина $dV_1(\alpha^\pm)/d\alpha=0$, а $d^2V_1(\alpha^\pm)/d\alpha^2 \neq 0$, следовательно, это негрубое периодическое решение типа седло-узел, если $h>0$, и сложное негрубое периодическое решение, если $h=0$.

Получаем, что поверхности $L_{1,1}^+$ и $L_{1,1}^-$ являются бифуркационными, соответствующими слиянию решений $\Gamma_{1,1}^1$ и $\Gamma_{1,1}^2$ в негрубое периодическое решение $\Gamma_{1,1}$.

Для $p=1, q=-1$ при $|L_m \delta_{1m} - N_l \delta_{1l}| < 1/2$ уравнение $V_1(\alpha)=0$ имеет два простых корня

$$\alpha_1 = \arccos [2(L_m \delta_{1m} - N_l \delta_{1l})], \quad \alpha_2 = 2\pi - \alpha_1,$$

соответствующие двум решениям $x_i(t)=-t+\alpha_i$ ($i=1,2$). Решение $x_1(t)$ порождает устойчивое периодическое решение $\Gamma_{1,-1}^1$, решение $x_2(t)$ - седловое периодическое решение $\Gamma_{1,-1}^2$. При $L_m \delta_{1m} + N_l \delta_{1l} = 1/2$ ($L_m \delta_{1m} + N_l \delta_{1l} = -1/2$) происходит слияние корней α_1 и α_2 в точке $\alpha=\pi$ ($\alpha=0$).

Итак, при малых значениях параметров уравнение (1) в области $D_{1,-1}$: $|b+h| < v/2 + o(v^2)$ имеет два периодических решения $\Gamma_{1,-1}$ (устойчивое и седловое). Рождение (исчезновение) этих решений происходит на бифуркационных поверхностях

$$L_{1,-1}^\pm: \pm(b+h)=v/2+o(v^2), \quad (13)$$

соответствующих негрубому периодическому решению $\Gamma_{1,-1}$.

Для $q=0$ случай $M_n=0$ исследован в [5], поэтому в дальнейшем предполагаем, что $M_n \neq 0$. Пусть $q=0, m=1, n=1$, тогда при условии

$$|L_1| < |M_1| \quad (14)$$

уравнение $V_1(\alpha)=0$ имеет два простых корня

$$\alpha_i = (-1)^{\omega_i} \arcsin(L_1/M_1) + \pi\omega_i,$$

$$\omega_i = \begin{cases} i-1, & \text{если } L_1/M_1 \geq 0, \\ i, & \text{если } L_1/M_1 < 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Корни α_i соответствуют двум решениям $x_i(t)=\alpha_i$, порождающим периодические решения $\Gamma_{1,0}^i$ колебательного типа.

Величина $dV_1(\alpha_i)/d\alpha$ в случае $L_1/M_1 \geq 0$ отрицательна для α_1 и положительна для α_2 . При $L_1/M_1 < 0$, наоборот, $dV_1(\alpha_1)/d\alpha > 0$, а $dV_1(\alpha_2)/d\alpha < 0$. Значение $L_1/M_1 = 1$ ($L_1/M_1 = -1$) отвечает слиянию корней α_1 и α_2 в точке $\alpha = \pi/2$ ($\alpha = 3\pi/2$).

Таким образом, при малых значениях параметров в области $|b| < |a| + o(v^2)$ существуют два решения $\Gamma_{1,0}$, одно из них - устойчивое, а второе - седловое. Бифуркационные поверхности

$$L_{1,0}^{\pm} : \pm |b| = |a| + o(v^2) \quad (15)$$

соответствуют негрубому периодическому решению $\Gamma_{1,0}$.

В случае $q=0$, $m \neq 1$, $n \neq 1$ коэффициент $V_1(\alpha) \neq 0$, поэтому переходим ко второму уравнению системы (8). Подставляя в него выражение для $u_1(t, \alpha)$ и интегрируя, получаем решение

$$u_2(t, \alpha) = [L_m \delta_{2m} - M_n \delta_{2n} \sin \alpha - 1/2 \sin \alpha \cos \alpha] t^2/2 + \\ + N_l \delta_{1l} \sin \alpha \cos t - 1/8 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2t - V_2 t^2/2.$$

Проверяя условие (9), находим коэффициент

$$V_2(\alpha) = L_m \delta_{2m} - M_n \delta_{2n} \sin \alpha - 1/2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Рассмотрим уравнение $V_2(\alpha)=0$. Его решение нельзя записать аналитически, поэтому для отыскания бифуркационных поверхностей поступим следующим образом. Уравнение $V_2(\alpha)=0$ имеет кратные корни при выполнении условий

$$\begin{cases} V_2(\alpha) = L_m \delta_{2m} - M_n \delta_{2n} \sin \alpha - 1/2 \sin \alpha \cos \alpha = 0; \\ dV_2(\alpha)/d\alpha = -M_n \delta_{2n} \cos \alpha - 1/2 \cos^2 \alpha + 1/2 \sin^2 \alpha = 0. \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение в виде

$$\cos^2 \alpha + M_n \delta_{2n} \cos \alpha - 1/2 = 0.$$

Это уравнение имеет корни $\alpha_1 = \arccos([-M_n \delta_{2n} \pm (M_n^2 \delta_{2n}^2 + 2)^{1/2}]/2)$, $\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1$, соответствующие порождающим решениям, при условии $|-M_n \delta_{2n} \pm (M_n^2 \delta_{2n}^2 + 2)^{1/2}| \leq 2$. Подставив α_i в уравнение $V_2(\alpha)=0$, получим в окрестности начала координат

пространства параметров бифуркационные поверхности $L_{1,0}^{\pm}$, при переходе через которые возникает пара периодических решений типа седло-узел. Они определяются соотношениями

$$\begin{cases} 8bv^2 - [3a \pm (a^2 + 2v^4)^{1/2}] \{2[v^4 - a^2 \pm a(a^2 + 2v^4)^{1/2}]\}^{1/2} + o(v^3) = 0, \\ a \leq v^2/2 + o(v^3). \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом, область $D_{1,0}$ существования периодических решений $\Gamma_{1,0}$ колебательного типа ограничена бифуркационными поверхностями $L_{1,0}^{\pm}$ и $\overline{L_{1,0}^{\pm}}$ вида (15) и (16), соответственно. В случае $a=0$ поверхности $L_{1,0}^{\pm}$ не существуют, а для поверхности $\overline{L_{1,0}^{\pm}}$ получаем соотношение $\pm|b| = \frac{1}{4}v^2 + o(v^3)$, что совпадает с результатами работы [5].

2. Бифуркационные диаграммы периодических решений $\Gamma_{p,q}$

Продолжение решений $\Gamma_{p,q}$ в область конечных значений параметров $\{0 < b \leq 0.5, 0 < a \leq 2, 0 < h \leq 0.1, 0 < v \leq 3\}$ проводилось на основе метода точечных отображений [8] с помощью комплекса алгоритмов и программ [7]. Для каждого

решения определялись координаты начальной точки $(x(0), \dot{x}(0))$ и вычислялись его мультипликаторы ρ_1 и ρ_2 , характеризующие устойчивость. В качестве первого приближения начальной точки при малых значениях параметров использовались значения $x(0) = \alpha, \dot{x}(0) = q/p$ для порождающих решений, найденных в разделе 1.

На рис. 1 представлена бифуркационная диаграмма периодических решений $\Gamma_{1,0}$ в плоскости параметров a, v . Область существования двух периодических решений $\Gamma_{1,0}^1$ и $\Gamma_{1,0}^2$ лежит выше кривой $l_{1,0}^1$. Вблизи этой кривой одно решение $\Gamma_{1,0}^1$ устойчиво, второе решение $\Gamma_{1,0}^2$ имеет седловой тип. Кривая $l_{1,0}^1$ отвечает слиянию их в сложное периодическое решение типа седло-узел.

Решение $\Gamma_{1,0}^2$ сохраняет седловой тип во всей области существования. На кривых l^1, l^2 и l^3 мультипликатор устойчивого решения $\Gamma_{1,0}^1$ становится равным (-1). При переходе через кривые l^1 и l^3 в область R_1 решение $\Gamma_{1,0}^1$ становится седловым, при этом возникает устойчивое периодическое решение $\Gamma_{2,0}$ удвоенного периода 4π . Выход из области R_1 через кривую l^2 сопровождается возникновением периодического колебания $\Gamma_{2,0}$ седлового типа.

В точке W один из мультипликаторов периодического решения $\Gamma_{1,0}^1$ обращается в +1. Происходит ветвление решения $\Gamma_{1,0}^1$: оно распадается на два устойчивых $\Gamma_{1,0}^{11}, \Gamma_{1,0}^{12}$ и одно седловое $\Gamma_{1,0}^{13}$. Область R_2 их существования ограничена кривыми g^1 и g^2 , выходящими из точки W .

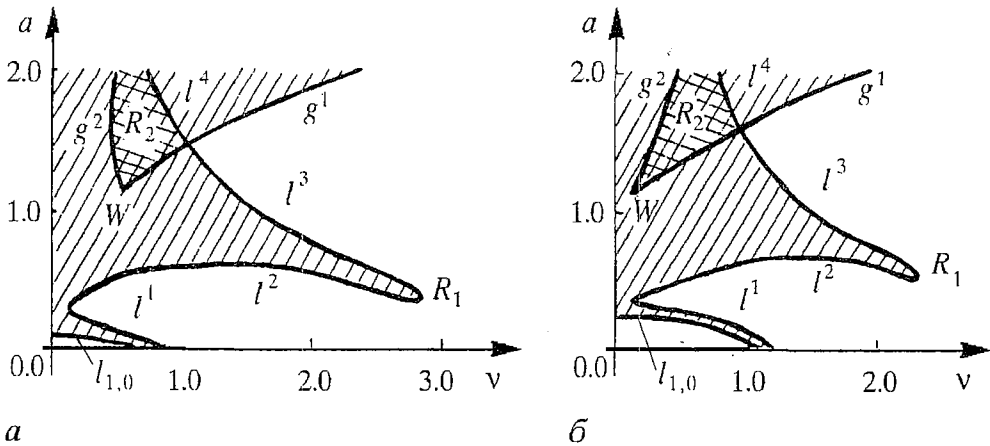


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма периодических решений $\Gamma_{1,0}$ при $h=0.05$ и фиксированных значениях b : а - 0.1; б - 0.25

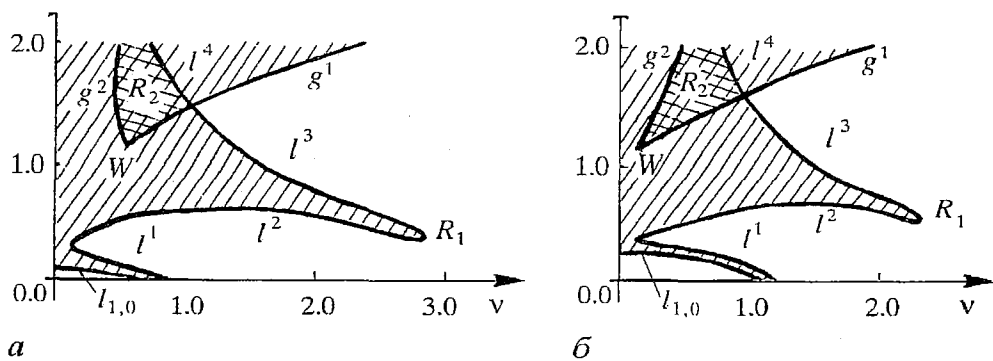


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма периодических вращений $\Gamma_{1,1}$ при $h=0.05$ и фиксированных значениях b : а - 0.1; б - 0.25

Решения $\Gamma_{1,0}^{11}$ и $\Gamma_{1,0}^{13}$ не меняют свой тип в рассматриваемой области изменения параметров. Решение $\Gamma_{1,0}^{12}$ становится седловым при переходе через кривую l^4 . При этом один из его мультипликаторов обращается в (-1) . Граница g^1 соответствует слиянию в сложное периодическое решение типа седло-узел и последующему исчезновению решений $\Gamma_{1,0}^{11}$ и $\Gamma_{1,0}^{13}$, граница g^2 - решений $\Gamma_{1,0}^{12}$ и $\Gamma_{1,0}^{13}$.

Область устойчивости периодических колебаний ротора на рис. 1 заштрихована. В области, имеющей двойную штриховку, одновременно существуют два разных колебательных периодических движения ротора периода 2π . Каждое из них имеет свою область притяжения. Движение реализуется в зависимости от начальных условий. Сравнение приведенных на рис. 1 бифуркационных диаграмм показывает, что вращающий момент уменьшает область устойчивости периодических колебаний.

Перейдем к рассмотрению бифуркационной диаграммы периодических вращений $\Gamma_{1,1}$ (рис. 2). Они существуют в области правее кривой $l_{1,1}$. В части этой области, расположенной между кривыми $l_{1,1}$ и g^1 , существуют два решения $\Gamma_{1,1}^1$ и $\Gamma_{1,1}^2$. Одно из них, $\Gamma_{1,1}^2$, имеет седловой тип, второе, $\Gamma_{1,1}^1$, вблизи кривой $l_{1,1}$ устойчиво. На кривой $l_{1,1}$ эти решения сливаются в сложное решение $\Gamma_{1,1}$ типа седло-узел. Кривая g^1 соответствует возникновению еще одного сложного периодического решения $\Gamma_{1,1}$ типа седло-узел, которое при переходе через нее с ростом ν распадается на устойчивое $\Gamma_{1,1}^3$ и седловое $\Gamma_{1,1}^4$. Таким образом, в области

правее кривой g^1 существуют четыре периодических решения $\Gamma_{1,1}^i$ ($i=1,4$), причем два из них, $\Gamma_{1,1}^2$ и $\Gamma_{1,1}^4$, являются седловыми. Смена устойчивости решения $\Gamma_{1,1}^1$ происходит на кривых l^1 , l^2 и l^3 . Переход через l^1 и l^3 сопровождается возникновением устойчивого периодического решения $\Gamma_{2,2}$ удвоенного периода, переход через кривую l^2 - возникновением седлового решения $\Gamma_{2,2}$. Решение $\Gamma_{1,1}^3$ становится седловым при переходе через кривую g^2 , при этом одновременно возникает устойчивое периодическое решение $\Gamma_{2,2}$. При нарастании вращающего момента область существования синхронизмов $\Gamma_{1,1}$ смещается вправо, область устойчивости (на рис. 2 она заштрихована) значительно уменьшается.

Аналогичный вид имеет бифуркационная диаграмма периодических решений $\Gamma_{1,-1}$ (рис. 3). В области между линиями $l_{1,-1}$ и g^1 существуют два решения $\Gamma_{1,-1}^1$ и $\Gamma_{1,-1}^2$ правее кривой g^1 - четыре решения $\Gamma_{1,-1}^i$ ($i=1,4$). Синхронизмы $\Gamma_{1,-1}^2$ и $\Gamma_{1,-1}^4$ всюду в области существования имеют седловой тип. Область устойчивости

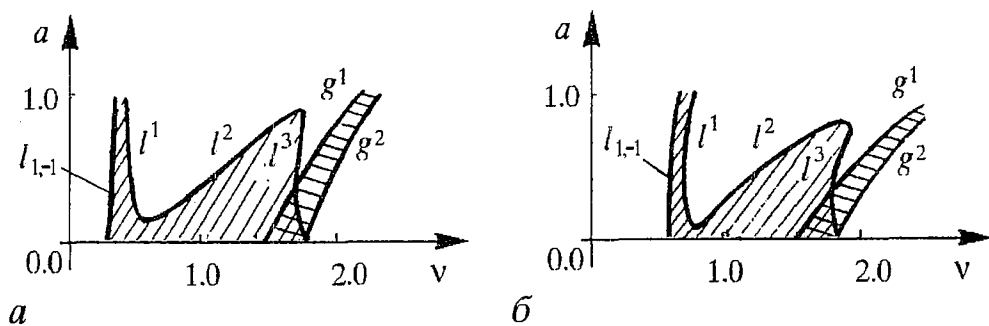


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма периодических решений $\Gamma_{1,-1}$ при $h=0.05$ и фиксированных значениях b : а - 0.1; б - 0.25

решений $\Gamma_{1,-1}^1$ и $\Gamma_{1,-1}^3$ заштрихована. Смена их типа сопровождается возникновением решений $\Gamma_{2,-2}$ удвоенного периода.

Проведенное исследование показало, что бифуркационные поверхности, ограничивающие область существования периодических решений $\Gamma_{p,q}$ при малых значениях параметров b, a, h, v , уравнения которых получены в 1 разделе, продолжают существовать в область конечных значений параметров. При этом полученные уравнения пригодны и для не малых значений $\{0 < b \leq 0.5, 0 < a \leq 1, 0 < h \leq 0.1, 0 < v \leq 1\}$. Так, для кривой $l_{1,1}^1$ на рис. 2, а ($b=0.1, h=0.05$) из уравнения (12) поверхности $L_{1,1}^+$ получаем уравнение $v=0.1$. Для кривой $l_{1,1}^2$ на рис. 2, б ($b=0.25, h=0.05$) имеем уравнение $v=0.4$. Для кривой $l_{1,-1}^1$ на рис. 3 из уравнения (13) поверхности $L_{1,-1}^+$ легко получаются уравнения $v=0.3$ ($b=0.1, h=0.05$) и $v=0.6$ ($b=0.25, h=0.05$). Для кривой $l_{1,0}$ на рис. 1, а ($b=0.1, h=0.05$) из (15) при $v=0$ получаем $a=0.1$, при $a=0$ из (16) находим $v=(0.4)^{1/2} \approx 0.63$. Для той же кривой на рис. 1, б ($b=0.25, h=0.05$) имеем точки $(v=0, a=0.25)$ и $(v=1, a=0)$.

Библиографический список

1. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
2. Власова О.Ф., Заславский Г.М. Влияние диссипации на образование хаоса при перекрытии двух резонансов // Препринт СО АН СССР № 245Ф. Красноярск, 1983.
3. Арансон И.С., Горшков К.А., Рабинович М.И. Возникновение стохастичности при взаимодействии солитона модуляции с низкочастотными волнами // ЖЭТФ. 1984. Т. 86, вып. 3. С. 929.
4. Баталова З.С., Белякова Г.В. Области существования и устойчивости стационарных и периодических движений параметрически возбуждаемого маятника // Динамика систем: Динамика и управление. Межвуз. сб. научн. тр. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1987. С. 63.
5. Баталова З.С., Бухалова Н.В. Исследование периодических решений дифференциального уравнения маятникового типа // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 3. С. 516.
6. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Об одном методе исследования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Препринт ИПМ РАН № 105. М., 1976.
7. Неймарк Ю.И., Баталова З.С., Белякова Г.В. и др. Алгоритмы и программы численного исследования динамических систем. Горький: ГГУ, 1983.
8. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.

STUDY OF A PARAMETRICALLY EXCITED ROTOR WITH PERIODIC MOTIONS

N.V. Kiseleva

The periodic motions of a rotor described by nonlinear nonautonomous differential equation with four parameters are studied. For small values of parameters equations of bifurcation surfaces limiting existence regions of oscillatory and rotatory periodic motions are obtained. In the bounded region of the parameter space their bifurcation diagrams containing regions of existence and stability are constructed. Bifurcations leading to excitation of periodic motions and to change of stability type are found.



Киселева (Бухалова) Наталья Владимировна - окончила Нижегородский государственный университет. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Дифференциальные уравнения и математическая физика». Доцент кафедры теории управления и динамики машин ННГУ. Область интересов - качественная теория дифференциальных уравнений, фазовый портрет, бифуркации и хаос в нелинейных неавтономных динамических системах. Имеет более 30 печатных работ.

E-mail: KIS@tudm.unn.ac.ru



МЕТОД КВАЗИПОТЕНЦИАЛА В ИССЛЕДОВАНИИ ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ К СЛУЧАЙНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ

И.А. Баикирцева, Л.Б. Ряшко

На основе метода квазипотенциала исследуется устойчивость предельных циклов нелинейных систем к малым случайным возмущениям. Для аппроксимации квазипотенциала используется орбитальная квадратичная форма, задаваемая некоторой определенной на цикле матричной функцией. Эта функция (функция чувствительности) характеризует реакцию рассматриваемой системы на случайные возмущения: позволяет описать разброс случайных траекторий вблизи цикла, указать участки цикла, наиболее и наименее чувствительные к помехам. Построение функции чувствительности сводится к решению некоторой краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова. Для решения этой краевой задачи строится итерационный метод, обсуждаются условия и скорость его сходимости. Результаты иллюстрируются на примере анализа стохастически возмущенного цикла модели Лоренца.

Многие процессы в механических и биологических системах, электронных генераторах и химических реакциях носят автоколебательный характер. Исходной математической моделью для них, как правило, служит нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где x - n -мерный вектор, $f(x)$ - достаточно гладкая вектор-функция.

Возможность периодических автоколебаний связана с существованием у системы (1) T -периодического решения $x = \xi(t)$, фазовая траектория которого (цикл Γ) является экспоненциально устойчивой. Последнее означает, что в малой окрестности D цикла Γ при некоторых $K > 0$, $l > 0$ для всякого решения $x(t)$ системы (1) выполняется неравенство

$$\|\Delta(x(t))\| \leq K e^{-lt} \|\Delta(x_0)\|.$$

Здесь $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ - отклонение точки x от цикла Γ , $\gamma(x)$ - ближайшая к x точка цикла Γ .

В ходе функционирования реальные системы испытывают внешние воздействия самой различной природы. Исследование автоколебаний нелинейных систем в присутствии случайных возмущений было начато в [1] и продолжено в большом числе работ (см., например, [2-7]). Обзор некоторых последних результатов можно найти в [8].

Для систем со случайными возмущениями стандартной моделью является стохастическая система (с формализмом Ито или Стратоновича)

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \sigma(x) \dot{w}, \quad (2)$$

где $w(t)$ - n -мерный винеровский процесс; $\sigma(x)$ - достаточно гладкая $n \times n$ -функция, определяющая зависимость помех от состояния системы; ε - параметр интенсивности возмущений. Предполагается, что $\det \sigma(x)|_{\Gamma} \neq 0$ - шумы на орбите Γ являются невырожденными. В результате действия возмущений случайные траектории системы (2) формируют вокруг предельного цикла Γ некоторый пучок.

Исчерпывающее описание (плотность распределения $\rho(t, x, \varepsilon)$) этого пучка для модели Ито дается уравнением Фоккера - Планка - Колмогорова (ФПК)

$$\partial \rho / \partial t = L \rho, \quad L \rho = \varepsilon^2 / 2 \sum_{i,j=1}^n \partial^2 (a_{ij} \rho) / \partial x_i \partial x_j - \sum_{i=1}^n \partial (f_i \rho) / \partial x_i, \quad a_{ij} = [\sigma \sigma^T]_{ij},$$

где T - знак транспонирования.

Если характер переходного процесса является несущественным, а основной интерес представляет установившийся в (2) режим стохастических автоколебаний, то можно ограничиться исследованием стационарной плотности распределения $\rho(x, \varepsilon)$, задаваемой стационарным уравнением ФПК

$$L \rho = 0.$$

Аналитическое исследование уравнения ФПК даже в простейшем случае цикла на плоскости ($n=2$) представляет весьма сложную задачу. При малых шумах здесь возникают известные трудности, связанные с малыми коэффициентами при старших производных.

Соответствующая асимптотика стационарной плотности распределения $\rho(x, \varepsilon)$ в случае малых шумов для моделей Ито и Стратоновича совпадает и задается квазипотенциалом

$$v(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \rho(x, \varepsilon),$$

где

$$\rho(x, \varepsilon) \approx N \exp[-v(x)/\varepsilon^2].$$

Квазипотенциал был введен в работах А.Д.Вентцеля и М.И.Фрейдлина [9] в связи с решением известной задачи Колмогорова о выходе случайной траектории из области, содержащей устойчивую точку покоя, и рассматривался далее в [10, 11]. Отметим, что метод квазипотенциала широко использовался в [12, 13] для решения задач статистической неравновесной термодинамики.

Квазипотенциал связан с некоторой вариационной задачей минимизации функционала действия и удовлетворяет уравнению Гамильтона - Якоби

$$(f(x), \partial v / \partial x) + 1/2 (\partial v / \partial x, \sigma(x) \sigma^T(x) \partial v / \partial x) = 0 \quad (3)$$

с условиями

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad v|_{D \setminus \Gamma} > 0. \quad (4)$$

Здесь $(f, g) = \sum_{i=1}^n f_i g_i$ - скалярное произведение векторов f и g . Квазипотенциал $v(x)$ в окрестности D является функцией Ляпунова для системы (1) и позволяет показать асимптотическую устойчивость цикла Γ . Действительно, функция $v(x)$ в точках

цикла Γ обращается в нуль, а вне цикла - положительна; производная $v(x)$ функции $v(x)$ в силу системы (1) благодаря (3) имеет вид

$$\dot{v} = (f(x), \partial v / \partial x) = -1/2 \partial v / \partial x, \sigma(x) \sigma^T(x) \partial v / \partial x \leq 0$$

и обращается в нуль только в точках цикла Γ . Функция v строго убывает и стремится к нулю на всяком решении системы (1), выходящем из начальной точки, расположенной около цикла.

Уравнение Гамильтона - Якоби (3) выглядит проще, нежели исходное уравнение ФПК, однако и его точное решение является по-прежнему весьма сложной задачей. Здесь возможен конструктивный подход [14], связанный с введением еще одной асимптотики - малой окрестности исследуемого цикла.

В первом разделе настоящей работы дается локальное описание квазипотенциала вблизи предельного цикла. Аппроксимацией квазипотенциала служит орбитальная квадратичная форма

$$\varphi(x) = 1/2 (\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x)) \Delta(x)),$$

задаваемая определенной на Γ симметрической $n \times n$ -матрицей $\Phi(\gamma)^*$. В результате асимптотика стационарной плотности распределения для рассматриваемого в работе случая, когда малы как шумы, так и отклонения от цикла, может быть записана в форме нормального распределения с ковариационной матрицей $\varepsilon^2 \Phi(\gamma)$, дающей простое описание отклика рассматриваемой нелинейной системы на малые случайные возмущения. Функцию $\Phi(\gamma)$ можно рассматривать как функцию чувствительности цикла, позволяющую сравнивать реакцию различных его частей на вносимые помехи, предсказывая достаточно тонкие эффекты случайных воздействий. Возможности такого анализа для случая цикла на плоскости ($n=2$) рассмотрены в [15, 16] на примере осциллятора Ван дер Поля. В [17] для брюсселятора с помощью функции чувствительности удалось найти зону параметров, при которых очень малые (по сути, фоновые) помехи переводят систему в хаотический режим. В данной работе рассматривается метод построения функции чувствительности в общем n -мерном случае.

Во втором разделе построение функции чувствительности сводится к решению некоторой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова. Дается вероятностная интерпретация, связывающая искомое решение с некоторым установившимся режимом в линейной стохастической системе с периодическими коэффициентами.

В третьем разделе излагается итерационный метод построения решения данной краевой задачи, обсуждаются условия и скорость его сходимости.

В четвертом разделе результаты работы иллюстрируются примером анализа чувствительности стохастически возмущенного цикла модели Лоренца.

1. Аппроксимация квазипотенциала. Функция чувствительности

Квазипотенциал $v(x)$ вместе со своими частными производными первого порядка благодаря условиям (4) во всех точках предельного цикла Γ равен нулю. Поэтому в малой окрестности цикла Γ первым приближением функции $v(x)$ является орбитальная квадратичная форма (подробности см. в [14, 18])

$$\varphi(x) = 1/2 (\Delta(x), \Psi(\gamma(x)) \Delta(x)), \quad v(x) = \varphi(x) + O(\|\Delta(x)\|^3),$$

задаваемая определенной на Γ функцией $\Psi(\gamma) = \partial^2 v(\gamma) / \partial x^2$. В каждой точке γ цикла Γ значение функции $\Psi(\gamma)$ - симметрическая неотрицательно определенная $n \times n$ -матрица. Из равенства $\partial v(\gamma) / \partial x = 0$ непосредственно следует $\partial^2 v(\gamma) / \partial x^2 f(\gamma) = 0$.

* Индекс «+» означает псевдообращение (см. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц. М.: Наука, 1967).

Последнее означает, что $\Psi(\gamma)f(\gamma)=0$ - матрица $\Psi(\gamma)$ является вырожденной. При невырожденных шумах $\det(\gamma)\neq 0$ матрица $\Psi(\gamma)$ имеет ранг, равный $n-1$.

Введем матричную функцию $\Phi(\gamma)=\Psi^+(\gamma)$. Тогда для стационарной плотности распределения $\rho(x,\varepsilon)$ может быть получено приближение $\rho_*(x,\varepsilon)$ - асимптотика в форме нормального распределения

$$\rho(x,\varepsilon) \approx \rho_*(x,\varepsilon) = N \exp[-(\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x))\Delta(x))/(2\varepsilon^2)].$$

Здесь $\varepsilon^2\Phi(\gamma)$ - ковариационная матрица распределения $\rho_*(x,\varepsilon)$. Она характеризует разброс точек пересечения случайных траекторий системы (2) с гиперплоскостью, ортогональной циклу Γ в точке γ .

Пусть $\lambda_1(\gamma) \geq \lambda_2(\gamma) \geq \dots \geq \lambda_n(\gamma)$ - собственные числа, а $h_1(\gamma), h_2(\gamma), \dots, h_n(\gamma)$ - ортонормированный базис собственных векторов матрицы $\Phi(\gamma)$. Поскольку при каждом $\gamma \in \Gamma$ матрица $\Phi(\gamma)$ вырождена (распределение сосредоточено в нормальной гиперплоскости), то $\lambda_n(\gamma) = 0$ и соответствующий собственный вектор $h_n(\gamma) = f(\gamma)/\|f(\gamma)\|$ направлен по касательной к циклу. Остальные собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ при невырождающихся на орбите Γ шумах системы (2) строго положительны и задают при каждом γ разброс случайных траекторий вокруг цикла в направлении векторов h_1, \dots, h_{n-1} (базиса нормальной гиперплоскости).

Матрица $\Phi(\gamma)$ характеризует реакцию системы (2) вблизи цикла на случайные входные воздействия. Если систему (2) рассматривать как некоторый преобразователь стохастического входа (стационарный винеровский процесс $w(t)$) в стохастический выход (стационарное распределение пучка случайных траекторий вокруг цикла), то ее собственные значения задают коэффициенты усиления ($\lambda_i > 1$) и ослабления ($\lambda_i < 1$) этого преобразователя. Функция $\Phi(\gamma)$ - функция чувствительности цикла - позволяет описать неравномерность ширины пучка вдоль цикла по всем направлениям, указать участки цикла, наиболее и наименее чувствительные к помехам.

2. Периодическое решение матричного уравнения Ляпунова и его вероятностный смысл

Значения функции $\Phi(\gamma)$ в точках цикла удобно искать в параметрической форме. Решение $\xi(t)$, связывая точки цикла Γ с точками интервала $[0, T)$, задает естественную параметризацию: $\Phi(\xi(t)) = W(t)$. Матрица $W(t)$ для экспоненциально устойчивого цикла Γ является единственным решением уравнения Ляпунова [14]

$$\dot{W} = F(t)W + WF^T(t) + P(t)S(t)P(t) \quad (5)$$

с условиями

$$W(0) = W(T), \quad (6)$$

$$W(t)r(t) = 0. \quad (7)$$

Здесь

$$F(t) = \partial f(\xi(t))/\partial x, \quad S(t) = \sigma(\xi(t))\sigma^T(\xi(t)), \quad r(t) = f(\xi(t)), \quad P(t) = P_{r(t)},$$

где $P_r = I - rr^T/(r^T r)$ - матрица проектирования на подпространство, ортогональное вектору $r \neq 0$. Рассмотрим Σ - пространство T -периодических симметрических $n \times n$ -матриц $W(t)$, определенных и достаточно гладких для $t \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяющих условию (7).

Решению $W(t)$ матричного дифференциального уравнения (5) в пространстве Σ можно дать простую вероятностную интерпретацию. Для этого рассмотрим две линейные системы:

детерминированную

$$\dot{z} = F(t)z \quad (8)$$

и стохастическую

$$\dot{z} = F(t)z + P(t)\dot{\eta}, \quad (9)$$

где z - n -мерный вектор, $\eta(t)$ - n -мерный винеровский процесс с матрицей вторых моментов $E(d\eta d\eta^T) = S(t)dt$ (E - знак математического ожидания). Благодаря экспоненциальной устойчивости цикла Γ нелинейной системы (1), система (8) является P -устойчивой [18]. Последнее означает, что при некоторых $K > 0$, $l > 0$ для всякого решения $z(t)$ системы (8) с начальным условием $z(0) = z_0$ выполняется неравенство

$$\|P(t)z(t)\| \leq Ke^{-lt}\|P(0)z_0\|.$$

Ковариационная матрица $V(t) = \text{cov}(z(t), z(t))$ произвольного решения $z(t)$ стохастической системы (9) удовлетворяет уравнению

$$\dot{V} = F(t)V + VF^T(t) + P(t)S(t)P(t). \quad (10)$$

Пусть $z^*(t)$ - решение (9) со случайным вектором начальных данных $z^*(0) = z_0$, удовлетворяющим условию $E(z_0) = 0$, $\text{cov}(z_0, z_0) = W(0)$. Тогда $V(t) \equiv W(t)$ на $[0, T]$. При этом решение $V(t)$ уравнения (10) на всем интервале $[0, \infty)$ является T -периодической функцией.

Таким образом, в стохастической системе (9) существует некоторый периодический режим, связанный с решением $z^*(t)$. Ковариационной матрицей периодического случайного процесса $z^*(t)$ и является искомого решение $W(t)$ системы (5)-(7). Рассмотрим теперь произвольное решение $z(t)$ системы (9) и его проекцию $z_p(t) = P(t)z(t)$. Обозначим $V_p(t) = \text{cov}(z_p(t), z_p(t))$.

Утверждение 1. Пусть детерминированная система (8) является P -устойчивой. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (V_p(t) - W(t)) = 0, \quad (11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \|z_p(t) - z^*(t)\|^2 = 0. \quad (12)$$

Доказательство. Из соотношений $V_p(t) = P(t)V(t)P(t)$ и $W(t) = P(t)W(t)P(t)$, где $V(t) = \text{cov}(z(t), z(t))$ удовлетворяет (10), следует равенство $V_p(t) - W(t) = P(t)\Delta(t)P(t)$. Здесь $\Delta(t) = V(t) - W(t)$ - решение однородного уравнения

$$\dot{\Delta} = F\Delta + \Delta F^T.$$

Оно представимо в виде $\Delta(t) = Z(t)\Delta(0)Z^T(t)$, где $Z(t)$ - фундаментальная матрица системы (8). P -устойчивость (8) означает, что $P(t)Z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и как следствие влечет соотношение (11).

Утверждение (12) следует из (11) и соотношений

$$E \|z_p(t) - z^*(t)\|^2 \leq 2E \|z_p(t) - P(t)z^*(t)\|^2 + 2E \|P(t)z^*(t) - z^*(t)\|^2,$$

$$E \|z_p(t) - P(t)z^*(t)\|^2 = \text{Tr}(P(t)\Delta(t)P(t)),$$

$$E \|P(t)z^*(t) - z^*(t)\|^2 = \text{Tr}((P(t) - I)W(t)(P(t) - I)) = 0.$$

Как видим, P -устойчивость детерминированной системы (8) означает, что в

стохастической системе (9) проекция $z_p(t)=P(t)z(t)$ любого решения $z(t)$ сходится в среднем квадратичном к периодическому решению $\bar{z}(t)$. При этом (см. (11)) проекция $V_p(t)=P(t)V(t)P(t)$ любого решения $V(t)$ системы (10) сходится к периодическому решению $W(t)$ системы (5)-(7).

Замечание 1. Равенство $\varepsilon^2 W(t)=\varepsilon^2 \Phi(\xi(t))$ означает, что ковариационная матрица $\text{cov}(\bar{z}^\varepsilon(t), \bar{z}^\varepsilon(t))=\varepsilon^2 W(t)$ периодического решения $\bar{z}^\varepsilon(t)$ линейной стохастической системы

$$\dot{z} = F(t)z + \varepsilon P(t)\dot{\eta}$$

в момент t является одновременно и ковариационной матрицей нормального распределения, аппроксимирующего стационарную плотность нелинейной системы (2) в точке $\gamma=\xi(t)$ орбиты Γ .

3. Итерационный метод построения периодического решения матричного уравнения Ляпунова

Решение $W(t)$ задачи Коши для матричного уравнения Ляпунова (5) с начальным условием $W(0)=W_0$ можно записать в виде

$$W(t) = Z(t)[W_0 + \int_0^t Z(-\tau)P(\tau)S(\tau)P(\tau)Z^T(-\tau)d\tau] Z^T(t),$$

где $Z(t)$ - фундаментальная матрица решений системы (8). Последовательные значения $W_m = W(mT)$ этого решения связаны рекуррентной формулой

$$W_{m+1} = \mathcal{L}[W_m] + Q.$$

Здесь оператор \mathcal{L} имеет вид $\mathcal{L}[W]=Z(T)WZ^T(T)$, а

$$Q = \int_0^T Z(T-\tau)P(\tau)S(\tau)P(\tau)Z^T(T-\tau) d\tau = \hat{W}(T),$$

где $\hat{W}(t)$ - решение уравнения (5) с условием $\hat{W}(0)=0$.

Пусть Σ_0 - подпространство симметрических $n \times n$ -матриц V с условием $Vf(\xi(0))=0$.

Условие (6) приводит к задаче отыскания матрицы \bar{W} , являющейся решением уравнения

$$W = \mathcal{L}[W] + Q. \quad (13)$$

Для системы (8) матрица монодромии $B=Z(T)$ имеет собственный вектор $r=f(\xi(0))$ с собственным значением $\lambda_1=1$: $Br=r$. Остальные точки $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ спектра $\sigma(B)$ в силу P -устойчивости (8) лежат внутри единичного круга

$$q = \max_{2 \leq i \leq n} |\lambda_i| < 1.$$

У оператора \mathcal{L} все собственные значения имеют вид $\lambda_{i,j}(\mathcal{L})=\lambda_i \lambda_j$, $i, j = 1, \dots, n$. Отметим, что $\lambda_{1,1}=\lambda_1^2=1$ отвечает собственному вектору rr^T . При этом остальная часть спектра \mathcal{L} принадлежит кругу $|\lambda| \leq q$.

Спектральный радиус $\rho(\mathcal{L})$ оператора \mathcal{L} равен единице, поэтому система (13) является вырожденной. Наряду с решением \bar{W} она имеет бесконечное множество решений вида $W=\bar{W} + Crr^T$, где C - любое число. Условие (7) выделяет из всех решений (13) единственное - матрицу $\bar{W} \in \Sigma_0$. Здесь для \bar{W} может быть получена невырожденная система.

Рассмотрим наряду с (13) уравнение

$$W = \mathcal{L}_P[W] + PQP \quad (14)$$

с оператором $\mathcal{L}_P[W] = PBWB^T P$, где $P = P(0)$. Используя разложение Шура [19], легко доказать, что $\sigma(PB) = \{0, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ и, следовательно, $\rho(\mathcal{L}_P) = q^2$.

Всякое решение $W \in \Sigma_0$ уравнения (13) является решением уравнения (14). Неравенство $\rho(\mathcal{L}_P) < 1$, гарантируя существование и единственность решения \bar{W} уравнения (14), обеспечивает сходимость итерационного процесса

$$W_{m+1} = \mathcal{L}_P(W_m) + PQP, \quad W_0 = 0. \quad (15)$$

При этом

$$\bar{W} = \lim_{m \rightarrow \infty} W_m = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_P^k[PQP] = \sum_{k=0}^{\infty} B^k Q_1 (B_1^T)^k, \quad (16)$$

$$B_1 = PB, \quad Q_1 = PQP.$$

Ряд (16) сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q^2 < 1$. Искомое решение $W(t)$ системы (5) - (7) может быть найдено по формуле

$$W(t) = P(t)Z(t)\bar{W} Z^T(t)P(t) + \hat{W}(t). \quad (17)$$

В результате для построения решения $W(t)$ системы (5)-(7) может быть предложен следующий алгоритм.

1. Найти на интервале $[0, T]$ матрицу $\hat{W}(t)$ - решение уравнения (5) с начальным условием $\hat{W}(0) = 0$.
2. Найти на $[0, T]$ $Z(t)$ - фундаментальную матрицу решений системы (8).
3. Подсчитав $r = f(\xi(0))$, $P = I - rr^T (r^T r)$, $Q_1 = P \hat{W}(T) P$, $B_1 = PZ(T)$, найти с требуемой точностью матрицу \bar{W} - сумму ряда (16).
4. Используя данные, полученные в 1, 2, 3, найти решение $W(t)$ по формуле (17).

Замечание 2. Эффективность данного итерационного алгоритма зависит от скорости сходимости ряда (16). Если цикл Γ хорошо устойчив (q мало), то ряд (16) сходится быстро. Для слабо устойчивого цикла (q близко к единице), когда ряд сходится медленно, можно привлечь прямые методы [19], использующие ортогональные преобразования.

Замечание 3. Представленный здесь итерационный метод (15) можно трактовать как некоторый метод установления для отыскания решения $W(t)$ системы (5)-(7). Действительно, рассмотрим последовательность матричных функций $W_m(t)$, определенных на $[0, T]$ следующим образом: каждая функция $W_m(t)$ ($m=0, 1, 2, \dots$) есть решение уравнения (5) с начальным условием $W_m(0) = P W_{m-1}(T) P$, при этом $W_0(0) = 0$. Функции $W_0(t), W_1(t), \dots$ можно рассматривать как последовательные звенья единого решения системы (5), определенного на $[0, +\infty)$ и имеющего разрывы, задаваемые оператором проектирования, в моменты времени, кратные периоду T . Последовательность функций $W_m(t)$ связана с последовательностью матриц W_m из (15) соотношениями $W_m(0) = W_m$. Сходимость последовательности W_m к \bar{W} означает сходимость функций $W_m(t)$ к периодическому решению $W(t)$, при этом $W(0) = W(T) = \bar{W}$.

4. Пример: модель Лоренца со случайными возмущениями

Рассмотрим стохастическую систему

$$\dot{x} = \sigma(-x + y) + \varepsilon \dot{w}_1,$$

$$\dot{y} = rx - y - xz + \varepsilon \dot{w}_2,$$

$$\dot{z} = -bz + xy + \varepsilon \dot{w}_3,$$

полученную добавлением малых аддитивных случайных возмущений в классическую модель Лоренца [20]. Здесь $w_i(t)$ ($i=1,2,3$) - независимые стандартные винеровские процессы. При $\sigma=10$, $b=8/3$, $r=300$ у детерминированной

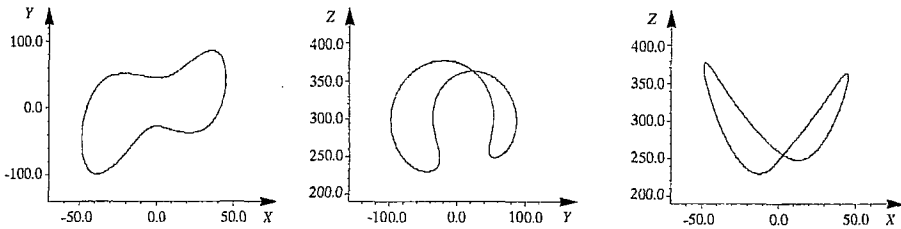


Рис. 1. Проекция пучка детерминированной модели Лоренца $\sigma=10$, $b=8/3$, $r=300$, $\varepsilon=0$

системы ($\varepsilon=0$) существует устойчивый предельный цикл Γ , задаваемый T -периодическим решением $\xi(t)$, $T=0.4199$. На рис. 1 изображены проекции цикла Γ на координатные плоскости.

В результате действия случайных возмущений траектории системы сходят с детерминированного цикла и формируют вокруг него некоторый пучок, проекции которого изображены на рис. 2. Случайная траектория этого пучка была получена прямым численным моделированием (метод Рунге - Кутты четвертого порядка с шагом $h=0.0001$) стохастической системы Лоренца, возбуждаемой случайной помехой интенсивности $\varepsilon=0.5$.

В каждой точке γ цикла Γ разброс пучка случайных траекторий характеризуется некоторой ковариационной матрицей. Ее эмпирическое значение $D(\gamma)$ можно вычислить по выборке, составленной из точек пересечения случайной траектории с плоскостью, ортогональной циклу в точке γ . Матрица $U(\gamma)=D(\gamma)/\varepsilon^2$ является эмпирической функцией чувствительности цикла Γ в точке γ к воздействующим помехам интенсивности ε . Ее положительные собственные

значения $\bar{\lambda}_1(\gamma) \geq \bar{\lambda}_2(\gamma) > 0$ служат эмпирическими скалярными характеристиками этой чувствительности. В силу вырожденности матрицы $U(\gamma)$ третье собственное

значение $\bar{\lambda}_3(\gamma) \equiv 0$.

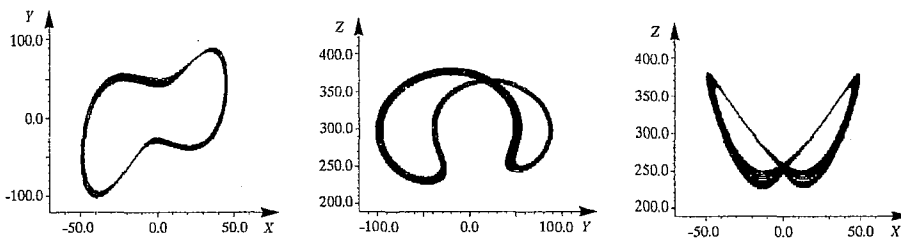


Рис. 2. Проекция пучка стохастической модели Лоренца $\sigma=10$, $b=8/3$, $r=300$, $\varepsilon=0.5$

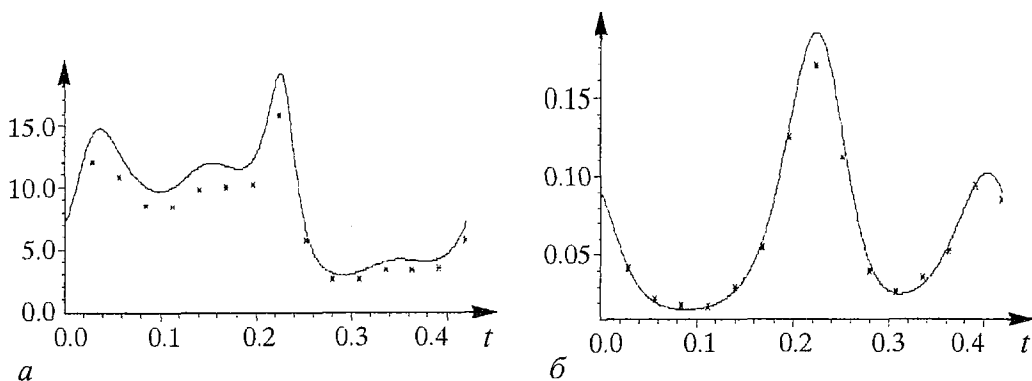


Рис. 3. Характеристики стохастической чувствительности цикла: а - график λ_1 и значения $\bar{\lambda}_1$, б - график λ_2 и значения $\bar{\lambda}_2$

Развиваемый в данной работе метод аппроксимации квазипотенциала позволяет найти матрицу $\Phi(\gamma)$ - теоретическую функцию чувствительности. Собственные значения $\lambda_1(\gamma) \geq \lambda_2(\gamma) > 0$ матрицы $\Phi(\gamma)$ играют роль теоретических характеристик чувствительности.

Приведем результаты расчета значений $\bar{\lambda}_1(\gamma)$, $\bar{\lambda}_2(\gamma)$ и $\lambda_1(\gamma), \lambda_2(\gamma)$ для рассмотренного выше стохастически возмущенного цикла модели Лоренца. Для получения теоретических характеристик чувствительности использовался итерационный метод, описанный в третьем разделе.

Представленные на рис. 3 отдельные значения $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ (звездочки) для эмпирической функции и графики λ_1 , λ_2 (сплошная линия) для теоретической функции чувствительности связаны с помощью функции $\xi(t)$ с интервалом $[0, T]$. Как видно из рисунков, теоретическая функция чувствительности, задающая грубую асимптотику стационарной плотности распределения при малых шумах в малой окрестности цикла Γ , хорошо согласуется с экспериментальными данными. Теоретическая функция чувствительности достаточно точно передает важные качественные особенности в поведении пучка: неравномерность ширины пучка вдоль цикла, значительный перепад величины разброса пучка по нормали к циклу.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№ 00-01-00076).

Библиографический список

1. Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А. О статистическом рассмотрении динамических систем// ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С. 165.
2. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
3. Рытов С.М. Введение в стохастическую радиофизику. М.: Наука, 1976.
4. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979.
5. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980.
6. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
7. Soong T.T., Grigoriu M. Random vibration of mechanical and structural systems. RTR Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1993.
8. Smelyanskiy V.N., Dykman M.I., Maier R.S. Topological features of large fluctuations to the interior of a limit cycle// Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, № 3. P. 2369.

9. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
10. *Naeh T., Klosek M.M., Matkowsky B.J., Schuss Z.* A direct approach to the exit problem// SIAM J. Appl. Math. 1990. Vol. 50, № 2. P.595.
11. *Day M.V.* Regularity of boundary quasi-potentials for planar systems// Applied mathematics and optimization. 1994. Vol. 30. P.79.
12. *Graham R., Tel T.* Nonequilibrium potential for coexisting attractors// Phys. Rev. 1986. Vol. 33. P. 13227.
13. *Graham R., Tel T.* Steady state ensemble for the complex Ginzburg - Landau equation with weak noise// Phys. Rev. A. 1990. Vol. 42. P. 46617.
14. *Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б.* Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями// Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 1. С. 51.
15. *Bashkirtseva I.A., Isakova M.G., Ryashko L.B.* Quasipotential in stochastic stability analysis of the nonlinear oscillator orbits// J. Neural, Parallel & Scientific Computations. 1999. Vol. 7(3). P. 299.
16. *Баширцева И.А., Исакова М.Г., Ряшко Л.Б.* Асимптотическое разложение квазипотенциала для стохастически возмущенного нелинейного осциллятора// Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 10. С. 1319.
17. *Баширцева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в анализе чувствительности автоколебаний к стохастическим возмущениям// Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т.6, № 5. С. 19.
18. *Ряшко Л.Б.* Об устойчивости стохастически возмущенных орбитальных движений// Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 4. С. 582.
19. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984.
20. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flows// J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 12(20). P. 139.

Уральский государственный
университет

Поступила в редакцию 7.06.01
после доработки 8.09.01

QUASIPOTENTIAL METHOD IN LOCAL STABILITY ANALYSIS OF THE STOCHASTICALLY FORCED LIMIT CYCLES

I.A. Bashkirtseva, L.B. Ryashko

The stability of nonlinear systems limit cycles with respect to small random disturbances is investigated on the basis of quasipotential method. For quasipotential approximation the orbital quadratic form given by some matrix function defined on a cycle is used. This function (sensitivity function) characterizes the considered system response to random disturbances and allows to describe the random trajectories dispersion near to cycle and to point out sensitive and nonsensitive regions of cycle. The construction of a sensitivity function is reduced to the solution of some boundary value problem for Lyapunov matrix equation. For the solution of this boundary value problem the iterative method is created. The conditions and degree of its convergence are discussed. The results are illustrated on an example of the sensitivity analysis of stochastically perturbed Lorenz model cycle.



Башкирцева Ирина Адольфовна - родилась в 1965 году, окончила Уральский госуниверситет (1987), кандидат физико-математических наук (1997), доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов - асимптотический анализ и численное моделирование нелинейных динамических систем. Автор ряда работ по данной тематике.



Ряшко Лев Борисович - родился в 1953 году. Окончил Уральский госуниверситет (1975), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета, Соросовский доцент (1996, 1998). Область научных интересов - устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике. E-mail: Lev.Ryashko@usu.ru



МОДЕЛИ АВТОВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СРЕДАХ С ДИФФУЗИЕЙ И УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ

В.М. Журавлев

Рассматривается задача построения и изучения точных решений моделей автоволновых процессов в средах с диффузией в двумерном и четырехмерном координатных пространствах для некоторых типов нелинейных источников, имеющих тесную связь с уравнением Лиувилля. Показана особая роль уравнения Лиувилля в теории двумерных нелинейных процессов с диффузией. Найдены новые классы точных решений в задачах автоволны в двумерной среде, в том числе, в четырехмерном координатном пространстве.

Введение

Одной из наиболее типичных задач теории автоволновых процессов в активных средах с диффузией является задача о распространении волн горения [1, 2]. В общем случае эта задача моделируется нелинейным уравнением теплопроводности вида [1,2]

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla(k(T) \nabla T) = J(T). \quad (1)$$

Здесь $k(T)$ - коэффициент теплопроводности, а $C(T)$ - коэффициент теплоемкости среды, зависящие от ее температуры $T=T(x,y,t)$; $J(T)$ - нелинейный источник тепла, также зависящий от температуры. В более общем случае, например, в случае автоволновых химических реакций [3], динамика модели описывается системой нелинейных уравнений аналогичного вида

$$C_i(\mathbf{u}) \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nabla(D_i(\mathbf{u}) \nabla u_i) = J_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где $\mathbf{u}=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ - вектор параметров состояния среды. Наиболее часто встречающейся формой нелинейности коэффициентов диффузии и источников в таких моделях являются степенные законы

$$k(T) \sim d_0 T^k, \quad C(T) \sim c_0 T^l, \quad J(T) = j_0 T^s,$$

где d_0, c_0, j_0, k, l и s - некоторые вещественные постоянные.

Один из наиболее эффективных аналитических методов исследования решения уравнений для таких моделей реализуется с помощью автомоделных решений [1, 2]. Обычной формой автомоделных решений являются стационарные решения со степенной зависимостью от координат и времени, которые описывают одиночные локализованные образования, например, ударные волны или процессы с обострением [2, 4]. Однако волновые процессы, состоящие из совокупности локализованных возбуждений, или процессы, близкие к периодическим, например, волны типа ведущий центр, такие методы исследовать не позволяют.

Для специального класса нелинейных моделей типа (2), так называемых диффузионных цепочек Тоды, в работах [5, 6, 7] был найден способ построения достаточно широкого класса точных решений, описывающих волновые состояния активной среды с различными свойствами локализации возбуждений и динамикой, близкой к периодической. Основой этого подхода служили решения уравнения Лиувилля и цепочек Тоды в виде квадратичных форм, первоначально найденные в работах [8], и в несколько иной форме в работе [9]. В дальнейшем этот метод был обобщен и распространен на случай многомерных уравнений Лиувилля и цепочек Тоды [10].

В настоящей работе расширяется класс моделей типа диффузионные цепочки Тоды, найденный и исследованный в [5, 6]. В том числе, рассмотрены диффузионные модели в четырехмерном координатном пространстве и построены их точные решения. Исследованы некоторые общие свойства этих моделей, связанные со свойствами уравнения Лиувилля, в частности, с трансформационными свойствами этого уравнения по отношению к точечным источникам в правой части.

1. Свойства уравнения Лиувилля и его точных решений

Согласно [9, 5, 6], решения уравнения Лиувилля

$$\Delta\Phi = \Omega e^{-2\Phi}, \quad (3)$$

где Δ - оператор Лапласа в двумерном координатном пространстве, а Ω - вещественная постоянная, могут быть представлены в виде $\Phi = \ln\Psi$, где Ψ - квадратичная форма

$$\Psi(z, \bar{z}) = a|\psi_1|^2 + b|\psi_2|^2 + c\psi_1\psi_2^* + c^*\psi_1^*\psi_2 \quad (4)$$

относительно аналитических функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ комплексного аргумента $z=x+iy$. Коэффициентами этой квадратичной формы являются вещественные постоянные a и b и комплексная постоянная c , связанные с Ω соотношением $\Omega=ab-|c|^2$. Функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ могут быть представлены в виде

$$\psi_1(z) = \phi_1(z)[W(z)]^{-1/2}, \quad \psi_2(z) = \phi_2(z)[W(z)]^{-1/2}, \quad (5)$$

$$W(z) = \phi_1(z) \frac{d}{dz} \phi_2(z) - \phi_2(z) \frac{d}{dz} \phi_1(z),$$

где $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$ - две произвольные линейно независимые аналитические функции.

Обратим внимание дополнительно на то, что для уравнения Лиувилля существует преобразование, отображающее множество его решений на себя.

Пусть $\Phi(z, \bar{z})$ - решение уравнения Лиувилля, тогда функция

$$\Phi \rightarrow \tilde{\Phi}(z, \bar{z}) = \Phi(\zeta(z), \zeta^*(\bar{z})) + f(z) + f^*(\bar{z}) \quad (6)$$

при произвольной аналитической функции $f(z)$ и условии

$$d\zeta/dz = e^{-2f(z)}$$

вновь является решением уравнения Лиувилля.

Еще одним важным, но малоизвестным свойством уравнения Лиувилля является существование преобразования, связывающего решения этого уравнения без источников с решениями этого уравнения с совокупностью точечных источников. Рассмотрим неоднородное уравнение Лиувилля следующего вида:

$$\Delta\Phi = \Omega e^{-2\Phi} + J(x, y), \quad (7)$$

где в простейшем случае $J(x, y) = k\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$, k - вещественная постоянная, $\delta(x)$ - δ -функция Дирака. Решение $u(z, \bar{z})$ в комплексных координатах неоднородного уравнения Лапласа с точечным источником

$$\Delta u_0 = k\delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \quad (8)$$

может быть представлено следующим образом (см. [11, с. 333]):

$$u_0(z, \bar{z}) = -(k/2) \ln|z - z_0|^2 = -(k/2) [\ln(z - z_0) + \ln(\bar{z} - \bar{z}_0)],$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$. Используя это соотношение для уравнения (7), рассмотрим вспомогательную функцию

$$U = \Phi - u_0.$$

В силу (8) функция U удовлетворяет уравнению

$$\Delta U = \Omega(z - z_0)^k (\bar{z} - \bar{z}_0)^k e^{-2U}.$$

Сделаем замену переменных

$$\zeta(z) = (z - z_0)^{1-k} / (1-k), \quad \zeta^*(\bar{z}) = (\bar{z} - \bar{z}_0)^{1-k} / (1-k), \quad k \neq 1, \quad (9)$$

$$\zeta(z) = \ln(z - z_0), \quad \zeta^*(\bar{z}) = \ln(\bar{z} - \bar{z}_0), \quad k = 1. \quad (10)$$

В результате функция U как функция новых переменных ζ и ζ^* удовлетворяет однородному уравнению Лиувилля (3). Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Существование точечного источника в правой части уравнения Лиувилля эквивалентно точечной неаналитичности функций $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ либо в точке, где сосредоточен источник (при $k \geq 1$), либо на бесконечности (при $k < 1$). Этот результат обобщается на случай произвольного конечного числа точечных источников в правой части уравнения Лиувилля (7)

$$J(x, y) = \sum_{\alpha=0}^N k(\alpha)\delta(x - x_\alpha)\delta(y - y_\alpha).$$

В этом случае рассмотрим функцию u_N , удовлетворяющую неоднородному уравнению Лапласа

$$\Delta u_N = \sum_{\alpha=0}^N k(\alpha)\delta(x - x_\alpha)\delta(y - y_\alpha) \quad (11)$$

и имеющую вид

$$u_N = -\sum_{\alpha=0}^N (k(\alpha)/2) \ln|z - z_\alpha|^2 = -\sum_{\alpha=0}^N (k(\alpha)/2) [\ln(z - z_\alpha) + \ln(\bar{z} - \bar{z}_\alpha)],$$

где $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$. Тогда функция

$$U = \Phi - u_N$$

как функция координат

$$\zeta(z) = \int \prod_{\alpha=1}^N (z - z_\alpha)^{-k(\alpha)} dz, \quad \zeta^*(\bar{z}) = \int \prod_{\alpha=1}^N (\bar{z} - \bar{z}_\alpha)^{-k(\alpha)} d\bar{z}$$

удовлетворяет однородному уравнению Лиувилля.

2. Модели с двухмодовым возбуждением и простым условием автономности

Рассмотрим диффузионные уравнения общего вида

$$C_i(u_i) \frac{\partial u_i}{\partial t} - D_i \Delta \ln u_i = J_i(\mathbf{u}), \quad i=1, \dots, N, \quad (12)$$

среди которых выделим два основных класса

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - D_i \Delta u_i = F_i(\mathbf{u}), \quad i=1, \dots, N, \quad (13)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - D_i \Delta \ln v_i = G_i(\mathbf{v}), \quad i=1, \dots, N. \quad (14)$$

Все эти уравнения могут рассматриваться как уравнения многокомпонентной среды с диффузией, состояние которой в каждой точке пространства и времени определяется векторами $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ и $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, соответственно. Первый класс уравнений будем называть уравнениями с линейной диффузией, а второй - с нелинейной диффузией. Для первого класса систем коэффициент диффузии постоянен для каждого элемента состояния среды, а для второго - является функцией данного элемента среды: $D_i v_i^{-1}$. Основная идея использования представления решений уравнений Лиувилля в форме (4) в задачах, связанных с автоволнами в двумерных средах с диффузией, сводится к следующему.

Рассмотрим набор из N квадратичных форм Ψ_i вида (4), у которых координатные функции ψ_1, ψ_2 и коэффициенты a_i, b_i, c_i являются функциями времени. Для уравнений первого класса введем функции $u_i = \ln \Psi_i$ и рассмотрим действие оператора линейной диффузии на эти функции. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} - D_i \Delta u_i &= (1/\Psi_i^2) [\Psi_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} - D_i (a_i b_i - |c_i|^2)] = \\ &= e^{-2u_i} [e^{u_i} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} - D_i (a_i b_i - |c_i|^2)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Одно из основных требований, которое накладывается на нелинейный источник в теории автоволн, это его автономность, то есть источник должен зависеть только от элементов состояния самой среды. Отсюда следует, что если найти условия автономности правой части последнего тождества, то это тождество можно рассматривать как уравнение автоволн с полученным источником в правой части. Нетрудно заметить, что условие автономности (15) эквивалентно двум условиям

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^N M_{ij} \Psi_j, \quad i = 1, \dots, N, \quad (16)$$

$$D_i [a_i(t)b_i(t) - |c_i(t)|^2] = l_i = \text{const} \quad (17)$$

при дополнительном требовании, что коэффициенты матрицы $\mathbf{M} = \{M_{ij}\}$ - постоянные. При выполнении этих условий уравнения автоволн в многокомпонентной среде примут вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - D_i \Delta u_i = e^{-2u_i} \left[e^{u_i} \sum_{j=1}^N M_{ij} e^{u_j} - l_i \right], \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (18)$$

Чтобы получить модели с уравнениями второго класса (14), функции v_i выберем в виде $v_i = \Psi_i^n$, где n - некоторое вещественное число; Ψ_i - квадратичные формы вида (4), коэффициенты которых a_i, b_i, c_i являются функциями времени. Тогда имеем следующее тождество:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} - D_i \Delta \ln v_i &= \frac{\partial \Psi_i^n}{\partial t} - D_i n \Delta \ln \Psi_i = \\ &= n \Psi_i^{n-1} \left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} - D_i (a_i b_i - |c_i|^2) \Psi_i^{-n-1} \right] = \\ &= n v_i^{(n-1)/n} \left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} - D_i (a_i b_i - |c_i|^2) v_i^{-(n+1)/n} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, условия автономности правой части этого тождества эквивалентны условиям (16), (17). Если они выполнены, то уравнения модели будут выглядеть так:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - D_i \Delta \ln v_i = n v_i^{(n-1)/n} \left[\sum_{j=1}^N M_{ij} v_j^{1/n} - l_i v_i^{-(n+1)/n} \right], \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (20)$$

Примеры моделей типа (20) для некоторых значений n приведены ниже.

$$\mathbf{n = 1:} \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} - D_i \Delta \ln v_i = \left[\sum_{j=1}^N M_{ij} v_j - l_i v_i^{-2} \right],$$

$$\mathbf{n = -1:} \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} - D_i \Delta \ln v_i = -v_i^{-2} \left[\sum_{j=1}^N M_{ij} v_j^{-1} - l_i \right],$$

$$\mathbf{n = -1/2:} \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} - D_i \Delta \ln v_i = -1/2 v_i^3 \left[\sum_{j=1}^N M_{ij} v_j^{-2} - l_i v_i \right],$$

$$\mathbf{n = 1/2:} \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} - D_i \Delta \ln v_i = 1/2 v_i^{-1} \left[\sum_{j=1}^N M_{ij} v_j^2 - l_i v_i^{-3} \right].$$

Пользуясь тем, что при любом n тождества (19) относятся к одной и той же квадратичной форме Ψ_i , можно получить более общий тип модели, чем (20). Действительно, складывая почленно тождества (19), предварительно умножив их на постоянные $a_n = V^{(n)}(0)/n!$, где $V(x)$ - некоторая аналитическая в нуле функция, приходим к следующему тождеству:

$$\frac{\partial V(\Psi_i)}{\partial t} - D_i V'(1) \Delta \ln \Psi_i = V'(\Psi_i) \sum_{j=1}^N M_{ij} \Psi_j - l_i V'(1) \Psi_i^{-2}, \quad (21)$$

где l_i и \mathbf{M} - те же, что и в (16) и (17), а $V'(1)=[dV(x)/dx]_{x=1}$. Совокупность тождеств (21), рассматриваемых как уравнения относительно Ψ , представляет наиболее общий класс моделей с «простыми» условиями автономности (16) и (17).

Пространственная структура решений всех рассмотренных в разделе уравнений указывает на их тесную связь с уравнением Лиувилля. Как и в случае уравнения Лиувилля пространственная структура решений описывается двумя произвольными аналитическими функциями ϕ_1 и ϕ_2 , входящими в определение квадратичной формы Ψ . Это позволяет рассматривать задачи с начальными условиями достаточно общего вида. Кроме того, уравнения этих моделей инвариантны относительно преобразований (6). В свою очередь, это определяет возможность преобразования неоднородной системы уравнений со статическими δ -образными источниками в однородную систему уравнений, что имеет место и в случае уравнения Лиувилля.

Как видно, центральное место в построении точных решений рассмотренных уравнений, с точки зрения их зависимости от времени, занимают условия (16), (17), а пространственная структура этих решений целиком определяется структурой решений уравнения Лиувилля. Разрешимость системы (16), (17) при $N=2$ была исследована в [5], а в [6] были рассмотрены общие принципы построения решений для случая $N>2$, там же был приведен конкретный пример построения решений для $N=3$. Заметим, что в случае $N=1$ условия (16), (17) приводят лишь к тривиальным решениям. Общее решение системы (16), (17) сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{w}_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} w_j.$$

Пусть $\mathbf{m}_a = \{m_a^i\}$ - собственные векторы матрицы \mathbf{M} , соответствующие собственным числам μ_a (индекс a - номер вектора, верхний индекс i - номер компоненты вектора). Тогда решения (17) для векторов коэффициентов a_i , b_i , c_i форм Ψ_i можно записать в виде

$$a_i(t) = \sum_{a=1}^N m_a^i A_a e^{\mu_a t}, \quad b_i(t) = \sum_{a=1}^N m_a^i B_a e^{\mu_a t}, \quad c_i(t) = \sum_{a=1}^N m_a^i C_a e^{\mu_a t},$$

где A_a , B_a , C_a - постоянные. Постоянные и структура матрицы \mathbf{M} должны подбираться таким образом, чтобы выполнялись условия (17). При этом требуется, чтобы a_i и b_i были вещественными. Эти условия сводятся к решению системы алгебраических уравнений относительно совокупности постоянных A_a , B_a , C_a и элементов собственных векторов m_a^i матрицы \mathbf{M} , которые, как известно, образуют унитарную матрицу. Возможность разрешить эту систему в значительной степени определяется кратностью собственных чисел матрицы \mathbf{M} . При большей кратности решить эту систему проще.

Существует другой подход к построению решений условий автономности (16), (17). В рамках этого подхода полагаем коэффициенты a_i , b_i , c_i форм не зависящими от времени, а зависимость от времени вводим в координатные функции форм Ψ_i , причем

$$\dot{\psi}_\alpha = \sum_{\beta=1}^2 \lambda_{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad \alpha = 1, 2, \quad (22)$$

где $\Lambda = \{\lambda_{\alpha\beta}\}$ - некоторая постоянная матрица. Тогда условие (17) выполняется автоматически, а условие (16) сводится к решению системы алгебраических матричных уравнений

$$\Lambda^* \mathbf{h}_i + \mathbf{h}_j \Lambda = \sum_{j=1}^N M_{ij} \mathbf{h}_j, \quad i, j = 1 \dots, N. \quad (23)$$

Здесь $\mathbf{h}=\{h_{\alpha\beta}\}$ - матрица коэффициентов квадратичной формы (4): $a_i=h_{11,i}$, $b=h_{22,i}$,
 $c=h_{12,i}=h_{21,i}^*$

3. Модели со сложными условиями автономности

Заметим, что в [6] обобщенные модели с двухмодовым возбуждением типа (2) не рассматривались. Однако в этой работе рассматривались двухмодовые модели с иными условиями автономности и трехмодовые модели. Вкратце опишем эти модели.

Рассмотрим вместо квадратичной формы (4) форму аналогичного вида, но с функциями $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, которые определяются не соотношением (5), а соотношением следующего вида:

$$W(z) = \psi_1(z) \frac{d\psi_2(z)}{dz} - \psi_2(z) \frac{d\psi_1(z)}{dz} = A\psi_1(z) + B\psi_2(z), \quad (24)$$

где A и B - некоторые комплексные постоянные. Тогда, пользуясь тождеством

$$\Delta\Psi = (ab - |c|^2)|W|^2/\Psi^2 = (ab - |c|^2)|A\psi_1 + B\psi_2|^2/\Psi^2, \quad (25)$$

выполняющимся для любой формы вида (4), при условии (24) приходим к новому тождеству

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta \ln u = \left[-\frac{\partial \Psi}{\partial t} + D(ab - |c|^2)|A\psi_1 + B\psi_2|^2/\Psi^2 \right], \quad (26)$$

где $u=\Psi^{-1}$. Предполагая, что от t зависят только коэффициенты a, b, c формы Ψ , приходим к условиям автономности правой части тождества (26) в форме следующих уравнений:

$$-\dot{a} + D(ab - |c|^2)|A|^2 = \lambda a, \quad -\dot{b} + D(ab - |c|^2)|B|^2 = \lambda b, \quad (27)$$

$$-\dot{c} + D(ab - |c|^2)AB^* = \lambda c, \quad -\dot{c}^* + D(ab - |c|^2)A^*B = \lambda c^*,$$

где λ - некоторая вещественная постоянная. Эти уравнения определяют общую динамику модели. Уравнение (24) имеет решение

$$\psi_2(z) = \psi_1(z)(C \exp\{B\theta(z)\} - A/B) = \psi_1(z)C\eta(z), \quad (28)$$

где $\theta(z) = \int dz/\psi_1(z)$,

$$\eta(z) = \exp\{B\theta(z)\} - A/(CB), \quad (29)$$

C - постоянная интегрирования. Такие многокомпонентные модели были более подробно рассмотрены в [6], а однокомпонентная модель - в [7].

4. Замечания о многомерных моделях

Частично рассмотренный подход к конструированию точно решаемых моделей нелинейных волн в средах с диффузией, основанный на использовании свойств уравнения Лиувилля, может быть перенесен и на многомерный случай. В работе [10] был применен метод n -форм к построению точных решений уравнения Лиувилля в многомерных пространствах. В основе этого метода лежит так называемое внедиагональное представление операторов Лапласа и Д'Аламбера.

Внедиагональное представление соответствует такому выбору системы координат, в которой операторы Лапласа и Д'Аламбера содержат в своей координатной записи только смешанные производные [10]. Например, в размерности $d=3$ оператор Лапласа при выборе комплексных координат

$$z_1 = z + ix, \quad z_2 = z + iy, \quad z_3 = z - ix \quad (30)$$

будет иметь внедиагональный вид

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = 4 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_3} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_1} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_3 \partial z_2}. \quad (31)$$

В размерности $d=4$ оператор Лапласа будет иметь более симметричную внедиагональную форму

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_1^*} + 4 \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_2^*} \quad (32)$$

при выборе координат $z_1 = x + iy$, $z_2 = z + iu$, $z_1^* = x - iy$, $z_2^* = z - iu$. Сравнение (31) и (32) показывает, что в размерности $d=3$ координаты, в которых оператор Лапласа внедиагонален, не образуют сопряженные пары, в то время как в случае $d=4$ - образуют. Заметим, что внедиагональная запись в отличие от стандартной диагональной формы оператора Лапласа неоднозначна, однако указанное свойство сопряженности ($d=4$) и несопряженности ($d=3$) систем координат оказывается универсальным по отношению к любым четным и нечетным размерностям. Анализ этого факта приводит к выводу, что строить диффузионные модели в случае нечетномерных пространств по изложенной выше схеме невозможно в силу того, что n -формы, представляющие решение, оказываются комплексными. В четномерных пространствах эти же формы могут быть действительными. Фактически это отражает известный факт, что в трехмерном пространстве диффузионные процессы протекают существенно иначе, чем в двумерном. Например, автоволновые структуры в двумерных системах более многообразны, химические волны, как правило, возникают в тонких слоях растворов и т.д. [3]. Поэтому в качестве примера многомерных моделей диффузии, строящихся на базе уравнения Лиувилля, рассмотрим модели в размерности $d=4$.

5. Уравнение Лиувилля в пространстве размерности $d=4$

Вначале рассмотрим решения уравнения Лиувилля (3) с оператором (32). Здесь по аналогии с [5, 6] будут рассмотрены решения, для которых Ψ - квадратичная форма следующего вида:

$$\Psi(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) = a|\psi_1(\mathbf{Z})|^2 + b|\psi_2(\mathbf{Z})|^2 + c\psi_1(\mathbf{Z})\psi_2^*(\mathbf{Z}^*) + c^*\psi_2(\mathbf{Z})\psi_1^*(\mathbf{Z}^*), \quad (33)$$

где $\psi_1(\mathbf{Z}) = \psi_1(z_1, z_2)$, $\psi_2(\mathbf{Z}) = \psi_2(z_1, z_2)$, $\mathbf{Z} = \{z_1, z_2\}$, $\mathbf{Z}^* = \{z_1^*, z_2^*\}$. Заметим, что в трехмерном случае такое представление невозможно.

Для решений в форме (33) основное тождество (см. [6, 10]) в случае оператора (32) будет выглядеть следующим образом:

$$\Delta \ln \Psi = (ab - |c|^2) \Psi^2 (|W_1|^2 + |W_2|^2). \quad (34)$$

Здесь

$$W_i = \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial z_i} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z_i}, \quad i = 1, 2.$$

Для превращения тождества (34) в уравнение Лиувилля (3) достаточно, чтобы имело место равенство

$$|W_1|^2 + |W_2|^2 = \lambda \Psi = \lambda (a|\psi_1|^2 + b|\psi_2|^2 + c\psi_1\psi_2^* + c^*\psi_2\psi_1^*) \quad (35)$$

для некоторой постоянной λ и $\Omega = \lambda(ab - |c|^2)$.

Для выполнения (35) достаточно совместного выполнения двух уравнений

$$W_i = \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial z_i} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z_i} = (1/w)(p_i\psi_1 + q_i\psi_2), \quad i = 1, 2 \quad (36)$$

и трех алгебраических условий

$$P = \sum_{i=1}^2 |p_i|^2 = \lambda a, \quad Q = \sum_{i=1}^2 |q_i|^2 = \lambda b, \quad R = \sum_{i=1}^2 p_i q_i^* = \lambda c. \quad (37)$$

Уравнения (36) перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \ln G = (p_i/\psi_2 + q_i/\psi_1), \quad i = 1, 2,$$

где $G(\mathbf{Z}) = \psi_2/\psi_1$. Условия совместности этих двух уравнений в предположении неколлинеарности векторов $\mathbf{p} = \{p_1, p_2\}$ и $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}$ в двумерном комплексном пространстве приводят к требованию

$$G(\mathbf{Z}) = G(\xi, \eta), \quad \xi = p_1 z_1 + p_2 z_2, \quad \eta = q_1 z_1 + q_2 z_2.$$

При этом следствием (36) являются два уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \ln G = 1/\psi_2, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \ln G = 1/\psi_1. \quad (38)$$

Отсюда получаем, что функция G должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = G \frac{\partial G}{\partial \xi}. \quad (39)$$

Это уравнение в действительных координатах (в данном случае ξ и η - комплексные) носит название уравнения Хопфа и возникает в ряде задач математической физики, например, в задачах формирования ударных волн в недиспергирующей идеальной среде. Однако в комплексных координатах это уравнение эквивалентно системе двух вещественных уравнений гидродинамического типа и имеет существенно иные свойства, чем действительное уравнение Хопфа.

Общее решение этого уравнения может быть представлено в неявном виде

$$\Theta(G, \eta G + \xi) = \Theta_0 = \text{const}, \quad (40)$$

где $\Theta(u, v)$ - дифференцируемая функция двух комплексных аргументов ($u = G$, $v = \eta G + \xi$), а Θ_0 - комплексная постоянная, которые определяются из начальных условий. Действительно, дифференцируя (40) по η и ξ , получаем два уравнения

$$\Theta_u \frac{\partial G}{\partial \eta} + \Theta_v \left(G + \eta \frac{\partial G}{\partial \eta} \right) = 0,$$

$$\Theta_u \frac{\partial G}{\partial \xi} + \Theta_v \left(1 + \eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Условием совместности этих двух уравнений является (39).

Если решение для G найдено, то функции ψ_1 и ψ_2 вычисляются по формулам

$$\psi_1 = \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \ln G \right]^{-1}, \quad \psi_2 = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \ln G \right]^{-1}. \quad (41)$$

Сравнивая полученные решения с решениями, найденными в [6, 10], можно обнаружить принципиально иной характер решений (41). Почти все нетривиальные решения уравнения (39) являются во вспомогательных комплексных координатах многозначными. Многозначность может приводить к существенному усложнению топологической структуры решений. Решения такого типа являются новым классом объектов, возникающих в многомерных волновых системах. В двумерных задачах такие структуры в решениях уравнений для аналогичных по форме нелинейности моделей не обнаруживаются (см. [6]). В связи с этим существенным является анализ решений после их редукции к действительным координатам. Особо отметим, что редукция к действительным координатам не приводит к вырождению решений в том смысле, что они будут зависеть только от двух действительных координатных переменных (вместо четырех x, y, z, u) или их комбинаций. Кроме этого, сама по себе многозначность функции G еще не означает многозначности действительных решений (33) с функциями (41) для уравнения Лиувилля (3), удовлетворяющих заданным граничным условиям. Последнее было бы неизбежным, если бы функция G описывалась уравнением Хопфа в действительных координатах. Вместе с тем неоднозначность G требует дополнительного анализа устойчивости полученных решений. Можно предположить, что вблизи точек ветвления функции G многолистные решения легко теряют устойчивость и соответствующие автоволновые возмущения, рассматриваемые ниже, разрушаются или резко меняют свою пространственную структуру. Обратим внимание на то, что уравнение (39) принадлежит к уравнениям гидродинамического типа. Специфические решения уравнений Лиувилля, строящиеся с помощью вспомогательной системы уравнений гидродинамического типа, но не сводящейся к (39), были недавно получены в работах [12]. Комплексные уравнения типа (39) встречаются также в нелинейной электродинамике и алгебродинамике [13]. Это указывает на то, что системы гидродинамического типа, аналогичные (39), являются достаточно универсальным явлением в структуре решений различного рода многомерных нелинейных физических задач и играют в них важную роль. В связи с этим найденные многолистные решения также следует рассматривать как достаточно общее явление при переходе к многомерным волновым процессам.

В качестве простого примера из класса полученных решений приведем одно из них, соответствующее следующему выбору функции Θ :

$$gG^2 + h(\eta G + \xi)^2 = \Theta_0,$$

где g, h, Θ_0 - произвольные комплексные постоянные. Приводя последнее соотношение к виду

$$(g + h\eta^2)G^2 + 2h\eta\xi G + h\xi^2 - \Theta_0 = 0,$$

находим двухлистное решение

$$G_{\pm}(\xi, \eta) = - \frac{h\eta\xi \pm (\Theta_0(g + h\eta^2) - h\xi^2)^{1/2}}{g + h\eta^2}.$$

Это простейшее решение для G после подстановки в (41) и затем в (33) приводит к достаточно громоздким выражениям для Φ , детальное исследование которых представляет собой отдельную проблему, поэтому здесь такой анализ проводится

не будет. Отметим лишь, что листы пересекаются вдоль многообразия, задаваемого двумя действительными уравнениями

$$\operatorname{Re}\{h(\xi^2 - \Theta_0\eta^2) - \Theta_0g\} = 0, \quad \operatorname{Im}\{h(\xi^2 - \Theta_0\eta^2) - \Theta_0g\} = 0.$$

Поскольку ξ и η - линейные функции координат x, y, z, u , то последние два уравнения представляют собой уравнения квадратичных поверхностей в трехмерном действительном пространстве. Эти уравнения определяют положение особенностей в структуре решений, которые в случае сингулярного характера этих особенностей в решении должны порождаться дополнительными сингулярными источниками в правой части (3).

6. Диффузионные модели

Применим полученный результат к моделям типа диффузионные цепочки Тоды. Рассмотрим два основных класса моделей (см. [6]), описываемых общей системой уравнений

$$\frac{\partial N_i^{(\alpha)}}{\partial t} = D_i \Delta \Phi_i + F_i^{(\alpha)}(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N), \quad i = 1, \dots, N,$$

где для моделей первого класса (нелинейная диффузия), соответствующих $\alpha=1$,

$$N_i^{(1)} = \Psi_i^{-1}, \quad \Phi_i = \ln \Psi_i,$$

а для моделей второго класса (линейная диффузия), соответствующих $\alpha=2$,

$$N_i^{(2)} = \Phi_i = \ln \Psi_i.$$

В обеих моделях решения Ψ_i по аналогии с [5, 6] являются квадратичными формами вида (33) с зависящими от времени коэффициентами $a_i(t), b_i(t), c_i(t)$

$$\begin{aligned} \Psi_i(t, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) &= a_i(t)|\psi_1(\mathbf{Z})|^2 + b_i(t)|\psi_2(\mathbf{Z})|^2 + \\ &+ c_i(t)\psi_1(\mathbf{Z})\psi_2^*(\mathbf{Z}^*) + c_i^*(t)\psi_2(\mathbf{Z})\psi_1^*(\mathbf{Z}^*), \end{aligned} \quad (42)$$

где $\psi_1(\mathbf{Z}) = \psi_1(z_1, z_2)$, $\psi_2(\mathbf{Z}) = \psi_2(z_1, z_2)$ по-прежнему от времени не зависят.

Для моделей первого класса, используя тождества (34) и условия (36), получаем следующую систему уравнений для коэффициентов квадратичной формы, как функций времени:

$$\dot{a}_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} a_j + (a_i b_i - |c_i|^2) P, \quad \dot{b}_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} b_j + (a_i b_i - |c_i|^2) Q,$$

$$\dot{c}_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} c_j + (a_i b_i - |c_i|^2) R, \quad \dot{c}_i^* = \sum_{j=1}^N M_{ij} c_j^* + (a_i b_i - |c_i|^2) R^*.$$

Здесь постоянные P, Q, R определены соотношениями (37). В этом случае сами уравнения диффузионных цепочек Тоды можно привести к следующему виду:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -D_i \Delta \ln u_i + u_i^2 \sum_{j=1}^N M_{ij} u_j^{-1}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (43)$$

где $u_i = \Phi_i^{-1}$; M_{ij} - элементы вещественной квадратичной матрицы размерности $N \times N$. В такой форме система (43) представляет собой уравнения моделей типа реакция - диффузия с нелинейными коэффициентами диффузии $K_i = -D_i u_i^{-1}$.

Для моделей второго класса система уравнений относительно коэффициентов квадратичной формы имеет вид

$$a_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} a_j, \quad b_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} b_j, \quad c_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} c_j, \quad i = 1, \dots, N.$$

Эти уравнения необходимо дополнить N условиями

$$a_i b_i - |c_i|^2 = l_i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, N \quad (44)$$

и условием, что матрица M_{ij} должна иметь хотя бы одно нулевое собственное значение, то есть должен существовать вектор w с компонентами w_j такой, что

$$\sum_{j=1}^N w_j M_{ji} = 0.$$

Уравнения диффузионных цепочек Готды для этого типа моделей

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = D_i \Delta \Phi_i + \sum_{j=1}^N M_{ij} e^{\Phi_j - 2\Phi_i} + \lambda_i e^{-\Phi_i}, \quad i = 0, \dots, N$$

представляют собой систему уравнений моделей реакция - диффузия с линейным коэффициентом диффузии. Здесь λ_i - некоторые вещественные постоянные, связанные с l_i и M_{ij} .

Динамика моделей второго класса описывается линейными уравнениями с дополнительной нелинейной связью. Решения этой системы были рассмотрены в [5, 6]. Динамика же моделей первого класса существенно иная по сравнению с двумерным случаем, рассмотренным в [6]. Введем следующие вспомогательные функции

$$\delta_i(t) = (1/Q)b_i(t) - (1/P)a_i(t), \quad \theta_i(t) = (1/R)c_i(t) - (1/P)a_i(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (45)$$

Эти функции удовлетворяют линейным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \sum_{j=1}^N M_{ij} \delta_j, \quad \frac{d\theta_i}{dt} = \sum_{j=1}^N M_{ij} \theta_j, \quad (46)$$

построить решение которых не составляет труда, поэтому из уравнений для a_i можно исключить b_i и c_i . В результате получаем

$$\dot{a}_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} a_j - [PQ\delta_i - |R|^2(\theta_i + \theta_i^*)]a_i + \frac{QP - |R|^2}{P} a_i^2 - |R|^2 P |\theta_i|^2, \quad i = 1, \dots, N. \quad (47)$$

В качестве простого примера можно рассмотреть случай однокомпонентной системы типа (43). Уравнение этого типа встречается в ряде задач нелинейной гидродинамики (см., например, [14]). В этом случае уравнение (47) линеаризуется подстановкой

$$a = a_1 = \alpha \frac{d}{dt} \ln v(t), \quad \alpha = P/(QP - |R|^2). \quad (48)$$

Имеем

$$\ddot{v} - [m + PQ\delta(t) - |R|^2(\theta(t) + \theta^*(t))] \dot{v} - |R|^2 (QP - |R|^2) |\theta(t)|^2 v = 0.$$

Здесь, в соответствии с (46), $\theta(t) = \theta_1(t) = l e^{mt}$, $\delta(t) = \delta_1(t) = k e^{mt}$, где $m = M_{11}$, l - комплексная, а k - действительная постоянная. Если ввести теперь новую переменную $\tau = e^{mt}$, то последнее уравнение сведется к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2V}{dt^2} - A \frac{dV}{dt} - \frac{B}{m}V = 0,$$

где

$$A = \frac{PQk - |R|^2 (l + l^*)}{m}, \quad B = \frac{|R|^2 (QP - |R|^2) |l|^2}{m}.$$

Последнее уравнение интегрируется без труда. В совокупности соотношения (45) и (48) дают полное решение задачи о динамике решений уравнения (43) в случае $N=1$. В случае $N>1$ (произвольной размерности модели) уравнения (47) не линеаризуются, что указывает на существенное усложнение динамики таких систем уже в случае $N=2$.

Заключение

Таким образом, в работе построены новые классы многокомпонентных моделей типа автоволновых процессов в двумерном и трехмерном координатном пространстве, допускающие точные нестационарные решения волнового типа. Найденные в явном виде классы таких точных решений уравнений Лиувилля и моделей типа диффузионных цепочек Тоды содержат топологические особенности, или дефекты. Эти особенности, по-видимому, являются важным отличительным признаком трехмерных и, вообще, многомерных волновых структур и автоволн. Опираясь на полученные здесь и в [10] результаты, можно также утверждать, что предложенный подход без существенных изменений может быть перенесен на задачи с координатной размерностью выше, чем $3+1$. Решения с топологическими дефектами будут при этом возникать и в моделях с высшими размерностями.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00260).

Библиографический список

1. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы / Под ред. Д.С.Чернавского. М.:Наука. 1987.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука, 1997. С. 318.
3. Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974.
4. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
5. Журавлев В.М. Об одном классе моделей автоволн в активных средах с диффузией, допускающих точные решения // Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 65, вып. 3. С.285.
6. Журавлев В.М. Диффузионные цепочки Тоды в моделях нелинейных волн в активных средах // ЖЭТФ. 1998. Т. 114, вып. 6.
7. Журавлев В.М. Точные решения уравнения нелинейной диффузии $u_t = \Delta \ln u + \lambda u$ в двумерном координатном пространстве // ТМФ. 2000. Т. 124, №. 2. С. 265.
8. Leznov A., Savel'ev M. // Physica 3D, 1981, p. 6272; Лезнов А.Н., Савельев М.В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985.

9. Журавлев В.М. О новом представлении двумерных уравнений динамики несжимаемой жидкости // ПММ. 1994. Т. 58, № 6. С. 61.

10. Журавлев В.М. Точные решения уравнения Лиувилля в многомерных пространствах // ТМФ. 1999. Т. 120, №. 1. С. 3.

11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

12. Leznov A.N., math-ph/9908012, math-ph/9908013; Fairle D.B., Leznov A.N., solv-int/9909011-9909014.

13. Кассандров В.В. Алгебраическая структура пространства - времени и алгебродинамика. М.: Изд-во РУДН, 1992.

14. Аристов С.Н. Периодические и локализованные точные решения уравнения $h_t = \Delta \ln h$ // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 1. С. 22; Пухначев В.В. ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 23.

Ульяновский государственный
университет

Поступила в редакцию 20.12.2000
после доработки 10.07.2001

MODELS OF AUTO-WAVE PROCESSES IN NONLINEAR MEDIA WITH DIFFUSION AND LIOUVILLE EQUATIONS

V.M.Zhuravlev

The models of auto-wave processes in media with diffusion in two-dimensional and four-dimensional spaces with some types of nonlinear sources connected with the Liouville equations are considered. The special role of the Liouville equation in the theory of two-dimensional nonlinear processes with diffusion is shown. The new classes of the exact solutions in the auto-waves problem in two-dimensional and four-dimensional spaces are found.



Журавлев Виктор Михайлович - родился в Алма-Ате (1953). Окончил физический факультет Московского государственного университета (1976). После окончания МГУ работал в Морском гидрофизическом институте АН УССР. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГИ АН УССР (1987) в области физики взаимодействия атмосферы и океана. С 1992 года - преподаватель Ульяновского государственного университета. В настоящее время - декан физико-технического факультета этого университета. Опубликовал более 80 научных статей по направлениям: физика взаимодействия атмосферы и океана, обработка данных, теория нелинейных волновых процессов, теория гравитации и космология.

E-mail: zhuravl@sv.uven.ru



О ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ФЕНОМЕНОВ КОМПЛЕКСНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ПОСТРОЕННЫХ ИЗ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ДЕМОНИСТРИРУЮЩИХ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА

О.Б. Исаева

Исследуется возможность наблюдения феноменов комплексной аналитической динамики в физических системах и их реалистичных моделях. Для этого предлагается подход, основанный на использовании связанных систем, причем парциальные системы должны демонстрировать переход к хаосу через последовательность удвоений периода. Продемонстрировано присутствие объектов, аналогичных множествам Мандельброта и Жюлиа, соответственно, в пространстве параметров и фазовом пространстве дискретных отображений и потоковых систем. В качестве парциальных систем рассматриваются: отображение Эно, неавтономный квадратичный осциллятор и автономный осциллятор Ресслера. Обсуждается связь феноменов комплексной аналитической динамики с проблемой синхронизации

Введение

Как известно [1, 2], комплексная аналитическая динамика, изучающая поведение комплексных отображений, включает целый ряд интересных феноменов, таких, например, как присутствие в пространстве параметров и фазовом пространстве фрактальных множеств Мандельброта и Жюлиа.

Рассмотрим квадратичное отображение

$$z' \rightarrow \lambda - z^2, \quad (1)$$

где λ - комплексный параметр, z - комплексная переменная. Множеством Мандельброта (рис. 1, а) называется множество точек на плоскости комплексного параметра λ , для которых траектория экстремума отображения $z=0$ в процессе итерирования не убегает на бесконечность. Множество Мандельброта содержит так называемый «кактус Мандельброта» (обозначен на рисунке серым цветом) - это множество точек на плоскости параметра λ , для которых траектория экстремума отображения сходится к периодическому аттрактору.

«Кактус Мандельброта» состоит из большой кардиоиды, соответствующей существованию устойчивой неподвижной точки, а также бесконечного количества «лепестков», соответствующих существованию устойчивых циклов всевозможных

периодов. Например, вдоль действительной оси располагаются лепестки удваивающегося периода. Возможны и другие последовательности бифуркаций. В частности, в работах Гольберга, Синая и Ханина [3], Цвигановича и Мирхейма [4, 5] подробно изучена точка накопления бифуркаций утробения периода.

Бифуркация, отвечающая возникновению «лепестка», соответствует потере устойчивости «родительского» цикла с единичным по модулю комплексным мультипликатором при рациональном (в единицах 2π) аргументе. Если аргумент мультипликатора в момент потери устойчивости иррационален, то в фазовом пространстве наблюдаются области с фрактальными границами, заполненные замкнутыми инвариантными кривыми - так называемые диски Зигеля [6-8].

Обозначенный на рис. 1, *a* черным цветом фрактальный узор, окружающий «кактус Мандельброта», отвечает существованию ограниченной в фазовом пространстве хаотической динамики.

На рис. 1, *b*-и показаны множества Жюлиа, построенные при различных значениях комплексного параметра λ . Множество Жюлиа представляет собой границу между бассейнами притяжения аттрактора на бесконечности (белый цвет) и периодического движения (серый цвет) на плоскости комплексной переменной z . Различают несколько типов множеств Жюлиа:

- для значений λ , принадлежащих «кактусу Мандельброта», множество Жюлиа является связным наполненным, то есть имеющим внутреннюю область множеством (рис. 1, *b*, *в*, *e*-и);
- для значений λ , при которых реализуется хаотическая динамика, множество Жюлиа является связным ненаполненным множеством (рис. 1, *з*);
- для значений λ , не принадлежащих множеству Мандельброта, множество Жюлиа является несвязным множеством (рис. 1, *д*).

Одномерное аналитическое комплексное отображение может быть представлено эквивалентным образом как двумерное действительное отображение

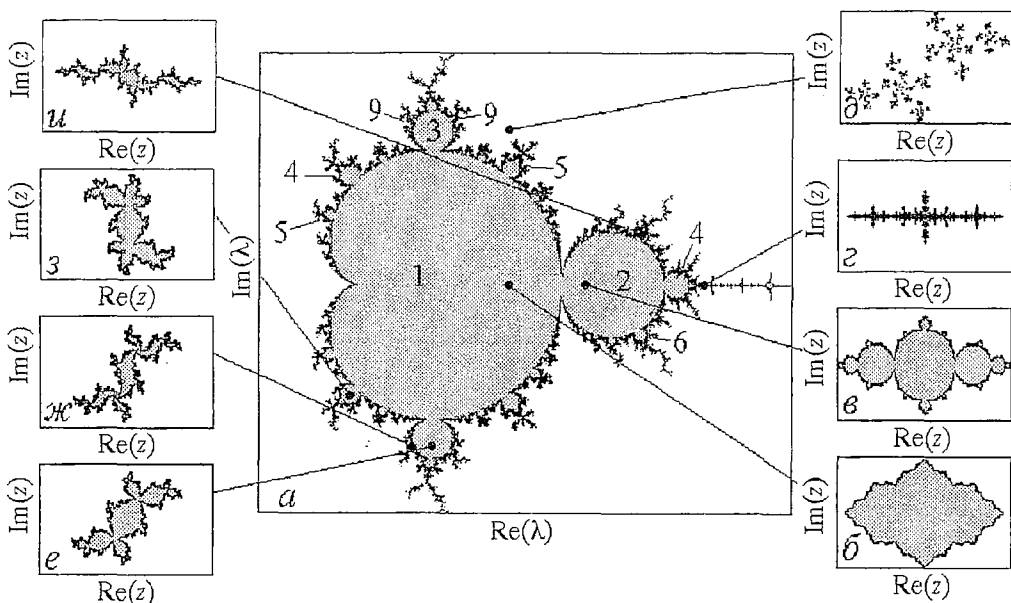


Рис. 1. Множество Мандельброта (*a*) и множества Жюлиа для квадратичного комплексного отображения при различных значениях параметра λ : 0.5 (*б*), 0.8 (*в*), 1.42 (*з*), $0.5+0.7i$ (*д*), $0.123-0.745i$ (*е*), $0.0315-0.7908i$ (*ж*), $-0.282+0.530i$ (*з*), $1.16+0.25i$ (*u*). Серым цветом на рисунках обозначены области, которым соответствует существование периодической динамики (периоды указаны цифрами); черным цветом обозначены точки, в которых реализуется ограниченная в фазовом пространстве хаотическая динамика; белый цвет означает убегание траекторий на бесконечность

(для этого следует просто отделить действительную и мнимую части в уравнении). Однако феномены комплексной аналитической динамики характерны только для очень специального класса действительных двумерных отображений, а именно, для отображений аналитических, то есть удовлетворяющих условиям Коши - Римана. Нарушение условия аналитичности приводит к значительным изменениям динамики отображения [9-11]. В связи с этим возникает вопрос: можно ли указать реальные физические системы, демонстрирующие феномены комплексной аналитической динамики? В последнее время этот вопрос привлекает заметное внимание. Известны физические приложения комплексной динамики для таких задач, как ренормгрупповой подход в теории фазовых переходов и теории перколяции [12, 13]. В работе Бека [14] обосновывается возможность возникновения множества Мандельброта при анализе движения заряженной частицы в двугорбой потенциальной яме и в зависящем от времени магнитном поле.

В настоящей работе предлагается более простой и универсальный метод получения множества Мандельброта и других феноменов комплексной аналитической динамики в реалистичных физических системах, а также в эксперименте [15]. Он основан на использовании связанных систем, способных демонстрировать переход к хаосу через удвоения периода. Как известно, такое поведение характерно для очень широкого класса нелинейных диссипативных систем различной физической природы.

Надо заметить, что исследование явления потери синхронизации в связанных системах, демонстрирующих переход к хаосу через удвоения периода, является одной из важных задач нелинейной динамики и имеет большое фундаментальное и прикладное значение в различных областях науки и техники. Полученные в данной статье результаты показывают, что область частичной синхронизации определенным образом связанных систем на плоскости параметров представляет собой множество Мандельброта, а в фазовом пространстве подобной системы присутствуют объекты, соответствующие множествам Жюлиа.

1. Система связанных логистических отображений

Начнем с довольно очевидного замечания, что система двух связанных квадратичных отображений при определенном способе введения связи эквивалентна одномерному комплексному квадратичному отображению.

Отделим в комплексном уравнении (1) действительную и мнимую части

$$z'_{re} \rightarrow \lambda_{re} - z_{re}^2 + z_{im}^2, \quad z'_{im} \rightarrow \lambda_{im} - 2z_{re} z_{im}. \quad (2)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} x_1 &= z_{re} + \beta z_{im}, & x_2 &= z_{re} - \beta z_{im}, \\ \lambda_1 &= \lambda_{re} + \beta \lambda_{im}, & \lambda_2 &= \lambda_{re} - \beta \lambda_{im}. \end{aligned} \quad (3)$$

Получаем систему двух связанных логистических отображений

$$\begin{cases} x'_1 \rightarrow \lambda_1 - x_1^2 + \varepsilon(x_2 - x_1)^2, \\ x'_2 \rightarrow \lambda_2 - x_2^2 + \varepsilon(x_1 - x_2)^2, \end{cases} \quad (4)$$

где $\varepsilon = (1 + \beta^2) / (4\beta^2)$ - параметр связи. Следует отметить специальный характер связи в этих уравнениях. Она может интерпретироваться как одинаковый одновременный сдвиг управляющих параметров в обеих парциальных системах на каждом шаге дискретного времени, пропорциональный квадрату разности динамических переменных. Очевидно, что значение коэффициента ε для любых β больше $1/4$. Тем не менее, формально мы вправе исследовать систему (4) при произвольных ε .

На рис. 2 представлены диаграммы на плоскости параметров (λ_1, λ_2) для связанных логистических отображений при различных значениях параметра ϵ . При $\epsilon=0.5$ можно видеть обычное множество Мандельброта, повернутое на угол 45° . Для $0.25 < \epsilon < +\infty$ на плоскости параметров существует деформированное множество Мандельброта, лепестки «кактуса» которого отвечают периодическим режимам различного периода. При $\epsilon=0.25$ множество, отвечающее тому, что стартующая из начала координат точка не убегает на бесконечность, на плоскости параметров имеет вид системы полос (где реализуются циклы удваивающегося периода). При $\epsilon < 0.25$ она трансформируется в ромбовидную структуру, в частности, при $\epsilon=0$ это квадрат.

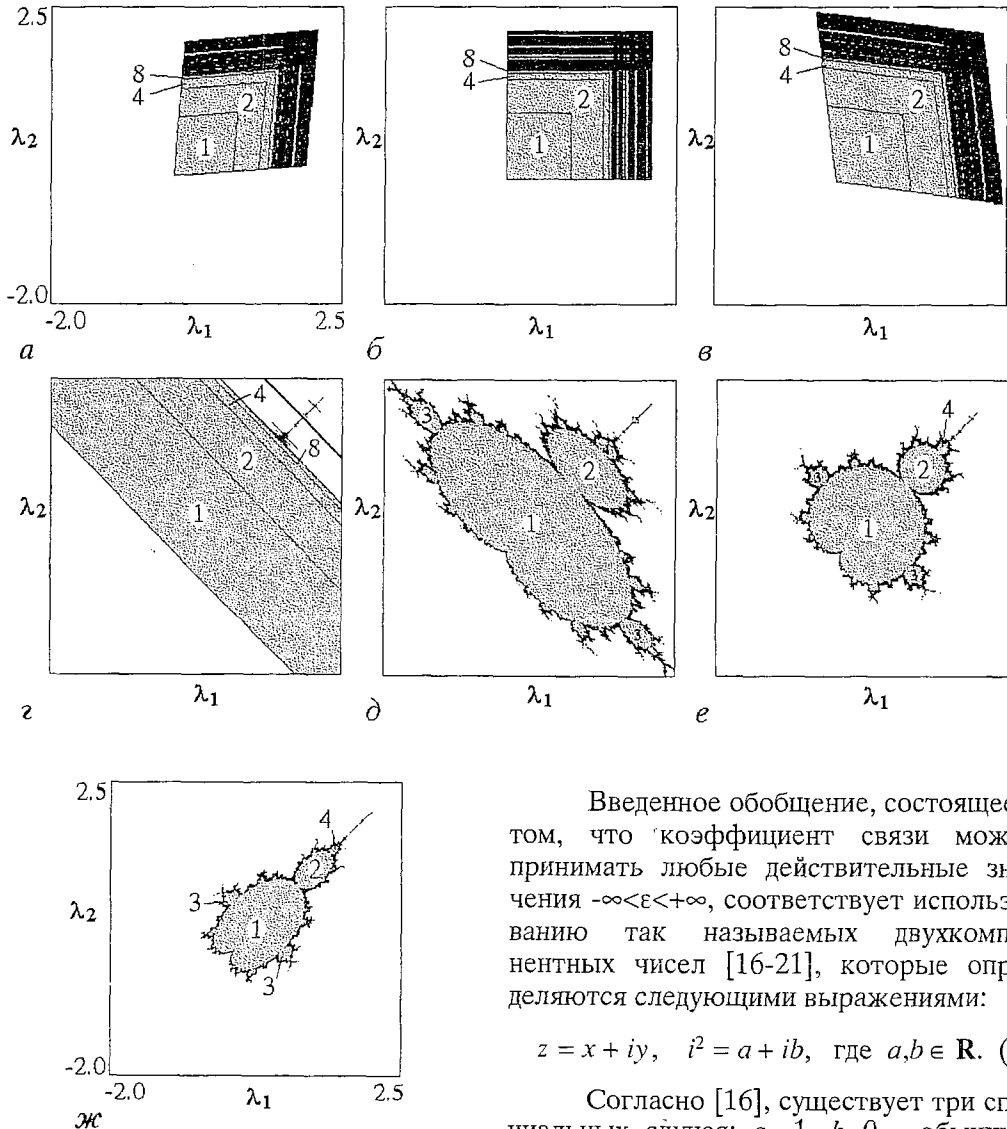


Рис. 2. Плоскости параметров (λ_1, λ_2) для связанных логистических отображений (4) при различных значениях параметра связи ϵ : -0.1 (а), 0.0 (б), 0.1 (в), 0.25 (г), 0.3 (д), 0.5 (е), 1.0 (ж). Рисунки (а-в) соответствуют гиперболическим числам, (г) - параболическим, а (д-ж) - эллиптическим числам

Введенное обобщение, состоящее в том, что коэффициент связи может принимать любые действительные значения $-\infty < \epsilon < +\infty$, соответствует использованию так называемых двухкомпонентных чисел [16-21], которые определяются следующими выражениями:

$$z = x + iy, \quad i^2 = a + ib, \quad \text{где } a, b \in \mathbf{R}. \quad (5)$$

Согласно [16], существует три специальных случая: $a=-1, b=0$ - обычные комплексные числа; $a=+1, b=0$ - двойные числа; $a=b=0$ - двойственные числа. Все другие системы чисел изоморфны комплексным, двойным или двойственным числам в зависимости от того, является ли величина $(a+b^2)/(4b^2)$ положительной,

отрицательной или равной нулю, и называются, соответственно, эллиптическими, гиперболическими или параболическими. Для значений параметра ϵ эти условия выглядят следующим образом:

- $\epsilon > 0.25$ соответствует эллиптическим числам, которые изоморфны комплексным, реализующимся при $\epsilon = 0.5$;
- $\epsilon < 0.25$ соответствует гиперболическим числам, которые изоморфны двойным, реализующимся при $\epsilon = 0$;
- $\epsilon = 0.25$ соответствует параболическим или двойственным числам.

Таким образом, существование на плоскости параметров (λ_1, λ_2) трех топологически разных структур, а именно, фрактальной структуры, подобной множеству Мандельброта, ромбовидной структуры и системы полос, объясняется существованием трех алгебраических систем чисел - эллиптической, гиперболической и параболической, соответственно.

Заметим, что совокупность областей периодической динамики, соответствующих лепесткам «кактуса Мандельброта», может рассматриваться как область обобщенной частичной синхронизации. Под обобщенной частичной синхронизацией мы здесь понимаем динамическое состояние системы, при котором величина $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ ограничена и изменяется периодически. Это означает, что траектории одной из связанных подсистем не убегают далеко от траекторий другой подсистемы. На рис. 3 приведены фазовые плоскости для

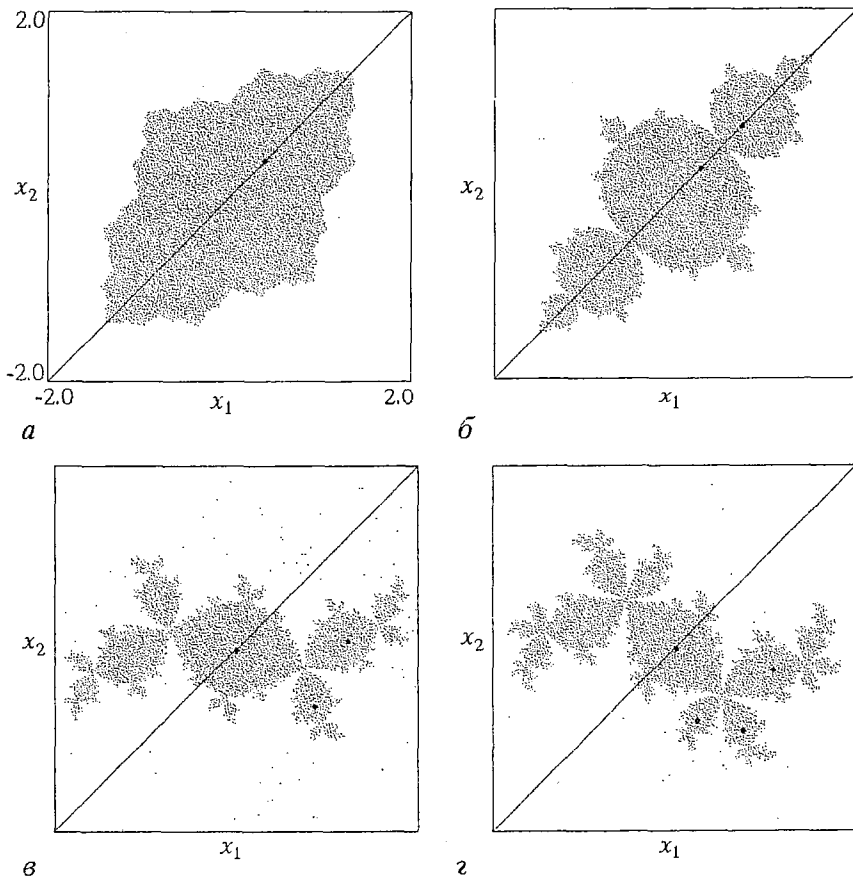


Рис. 3. Фазовые плоскости (x_1, x_2) для связанных логистических отображений при значении параметра связи $\epsilon = 0.5$ для следующих значений параметров λ_1 и λ_2 : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$ (а); $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.8$ (б); $\lambda_1 = 0.868, \lambda_2 = 0.622$ (в); $\lambda_1 = 0.248, \lambda_2 = 0.812$ (г). Точками обозначены аттракторы, а серым цветом - их бассейны притяжения. Приведены рисунки для неподвижной точки (а) и циклов периода 2 (б), 3 (в), 4 (г)

связанных логистических отображений при различных значениях λ_1 и λ_2 . На них точками указаны реализующиеся периодические аттракторы, а серым цветом обозначены бассейны притяжения этих аттракторов. Нетрудно видеть, что в случае $\lambda_1 = \lambda_2$ в системе имеет место полная синхронизация (аттрактор располагается на диагонали). В случае, когда параметры подсистем λ_1 и λ_2 не равны, но принадлежат «кактусу Мандельброта», имеет место обобщенная синхронизация (периодический аттрактор располагается в окрестности диагонали).

2. Связанные отображения Эно

Более реалистичной моделью, чем логистическое отображение, является отображение Эно [22, 23]

$$\begin{cases} x' \rightarrow \lambda - x^2 - d \cdot y, \\ y' \rightarrow x, \end{cases} \quad (6)$$

которое является двумерным обратимым отображением и, следовательно, может служить сечением Пуанкаре для некоторой потоковой системы с размерностью фазового пространства 3 - минимальной размерностью, обеспечивающей возможность сложной динамики и хаоса.

Покажем, что комплексную аналитическую динамику можно реализовать в системе двух связанных отображений Эно. Для этого проведем следующие рассуждения, отправной точкой которых является комплексификация индивидуального отображения (6).

Будем считать динамические переменные x и y и управляющий параметр λ , отвечающий за переход к хаосу через удвоения периода, комплексными, то есть $x = x_{re} + i x_{im}$, $y = y_{re} + i y_{im}$, $\lambda = \lambda_{re} + i \lambda_{im}$. Параметр d оставим действительным. Отделяя действительные и мнимые части, получим

$$\begin{cases} x'_{re} \rightarrow \lambda_{re} - x_{re}^2 + x_{im}^2 - d \cdot y_{re}, \\ x'_{im} \rightarrow \lambda_{im} - 2x_{re} x_{im} - d \cdot y_{im}, \\ y'_{re} \rightarrow x_{re}, \\ y'_{im} \rightarrow x_{im}. \end{cases} \quad (7)$$

Введем новые переменные и параметры

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= x_{re} \pm \beta x_{im}, & y_{1,2} &= y_{re} \pm \beta y_{im}, \\ \lambda_{1,2} &= \lambda_{re} \pm \beta \lambda_{im}, \\ \varepsilon &= (1 + \beta^2)/(4\beta^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда комплексифицированное отображение Эно, записанное в форме связанных отображений, будет выглядеть как

$$\begin{cases} x'_1 \rightarrow \lambda_1 - x_1^2 - d \cdot y_1 + \varepsilon (x_1 - x_2)^2, \\ y'_1 \rightarrow x_1, \\ x'_2 \rightarrow \lambda_2 - x_2^2 - d \cdot y_2 + \varepsilon (x_2 - x_1)^2, \\ y'_2 \rightarrow x_2. \end{cases} \quad (9)$$

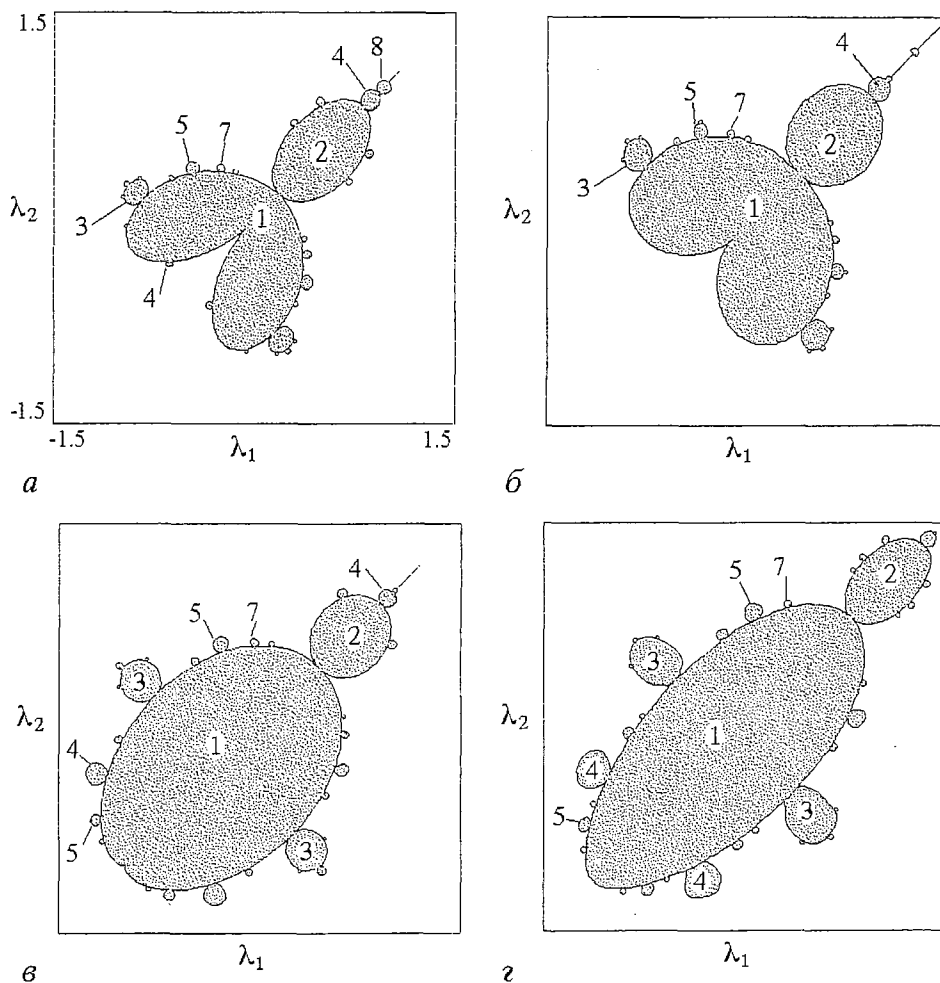


Рис. 4. Множества Мандельброта для связанных отображений Эно (9) при следующих значениях параметра d : -0.5 (а); -0.3 (б); 0.3 (в); 0.5 (г). Параметр связи $\epsilon=0.5$

На рис. 4 показан вид плоскости параметров (λ_1, λ_2) для различных значений параметра d . Как можно видеть, на них присутствуют образования, аналогичные по виду множеству Мандельброта, деформирующиеся с увеличением $|d|$.

На рис. 5 представлены множества Жюлиа для системы (9). Они также имеют очевидное сходство с обычными множествами Жюлиа. Показаны бассейны притяжения неподвижной точки (а), циклов периода 2 (б) и 3 (в) и хаотического аттрактора (г). Здесь и далее представлены рисунки для значения параметра связи $\epsilon=0.5$.

3. Система связанных нелинейных осцилляторов

Одной из наиболее универсальных моделей, пригодных для описания многих реальных физических систем, служит нелинейный осциллятор. Рассмотрим квадратичный осциллятор с затуханием и гармоническим внешним воздействием

$$\dot{x} + x + \gamma x' + x^2 = F \cos \omega t, \quad (10)$$

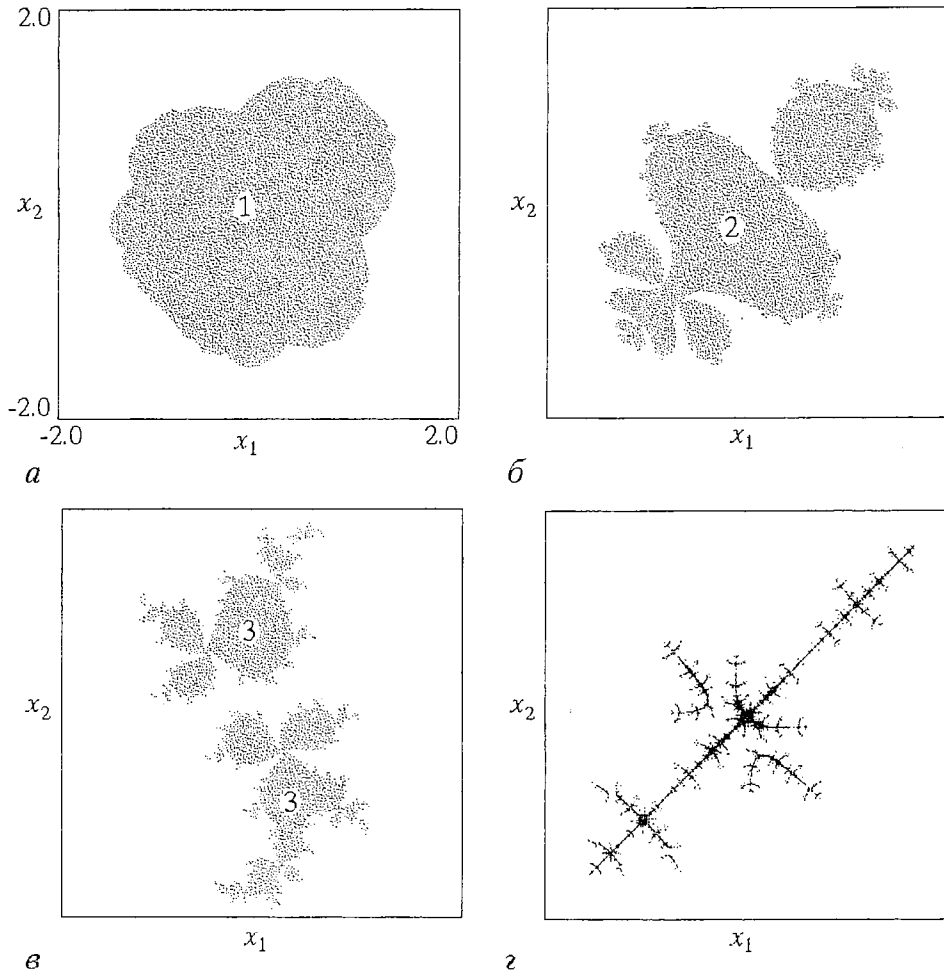


Рис. 5. Множества Жюлиа для связанных отображений Эно при $d=-0.3$ для следующих значений параметров λ_1 и λ_2 : $\lambda_1=\lambda_2=0.1$ (а); $\lambda_1=\lambda_2=0.5$ (б); $\lambda_1=-0.8, \lambda_2=0.5$ (в); $\lambda_1=\lambda_2=1.05$ (г)

где x - динамическая переменная, γ - параметр затухания, F и ω - амплитуда и частота внешнего воздействия. Известно, что в подобной системе существует возможность перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, например, путем изменения параметра F при фиксированных ω и γ [24, 25].

Сконструируем систему двух связанных осцилляторов, демонстрирующую феномены комплексной аналитической динамики, используя ту же схему, по которой мы действовали в предыдущем разделе. Сначала комплексифицируем уравнение для квадратичного осциллятора, чтобы управляющий параметр F и переменная x были комплексными, а затем сделаем замены

$$x_{1,2} = x_{re} \pm \beta x_{im}, \quad F_{1,2} = F_{re} \pm \beta F_{im}, \quad (11)$$

$$\varepsilon = (1+\beta^2)/(4\beta^2).$$

В результате получим систему связанных осцилляторов

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + \gamma \dot{x}_1 + x_1^2 - \varepsilon(x_1 - x_2)^2 = F_1 \cos \omega t, \\ \ddot{x}_2 + x_2 + \gamma \dot{x}_2 + x_2^2 - \varepsilon(x_2 - x_1)^2 = F_2 \cos \omega t. \end{cases} \quad (12)$$

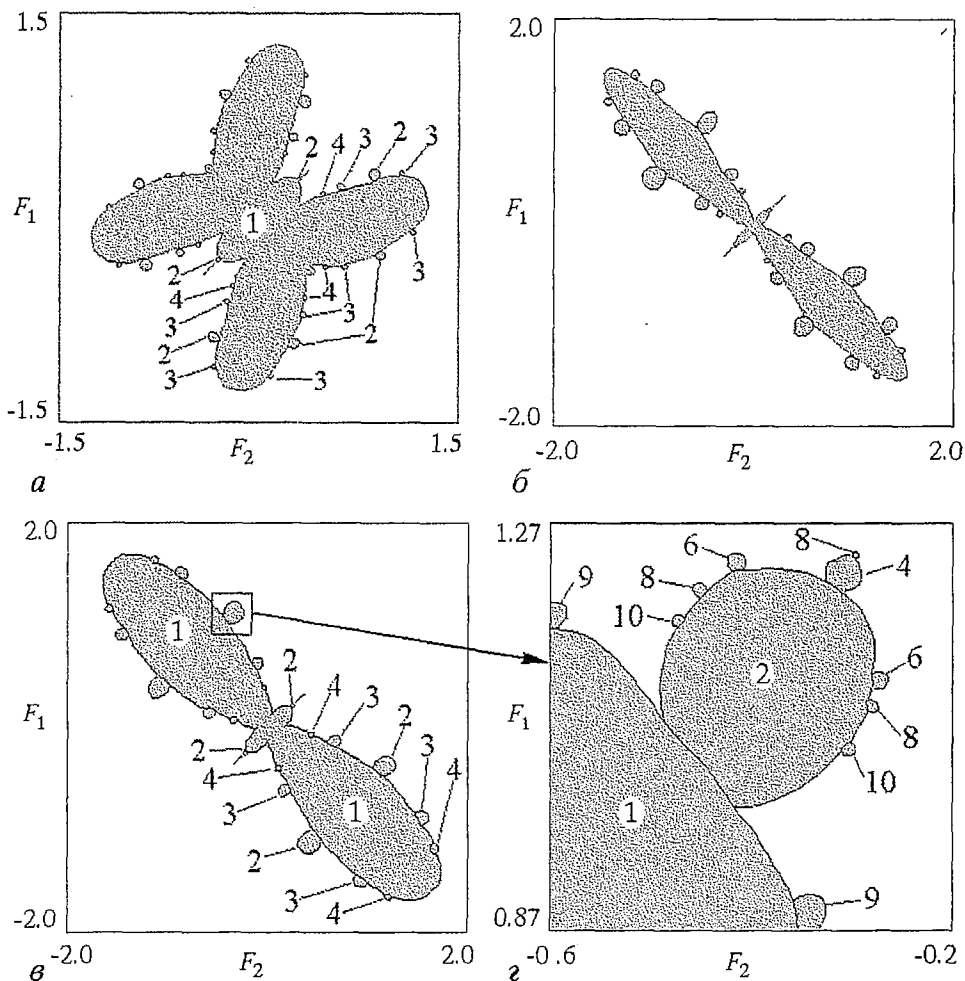


Рис. 6. Карты динамических режимов на плоскости параметров (F_1, F_2) для системы связанных осцилляторов (12) для значений параметров $\gamma=0.2, \omega=1/2, \epsilon=0.5$ (а); $\gamma=0.1, \omega=1, \epsilon=0.5$ (б); и $\gamma=0.2, \omega=1, \epsilon=0.5$ (в, г). На рис. (г) представлен увеличенный фрагмент, демонстрирующий фрактальную структуру полученного множества

На рис. 6 представлены диаграммы на плоскости параметров (F_1, F_2) . Хотя возникающие образования отличаются по виду от множества Мандельброта для квадратичного комплексного отображения или для связанных логистических отображений, но они сохраняют такие его основные свойства, как наличие лепестков всевозможных периодов и их самоподобный характер. Также очевидна аналогия между бассейнами притяжения периодических аттракторов для связанных осцилляторов, представленных на рис. 7, и множествами Жюлиа. Следует заметить, что на фазовой плоскости (x_1, x_2) для неавтономных связанных осцилляторов могут присутствовать несколько бассейнов притяжения различных периодических и хаотических аттракторов. При этом с множеством Жюлиа ассоциируется лишь один из них, расположенный в центральной части рисунков. На рис. 7 продемонстрированы бассейны притяжения неподвижной точки (а) и цикла периода 2 (б), соответствующие наполненным множествам Жюлиа, а также бассейны притяжения хаотических траекторий, соответствующие связному (в) и несвязному (г) множествам Жюлиа.

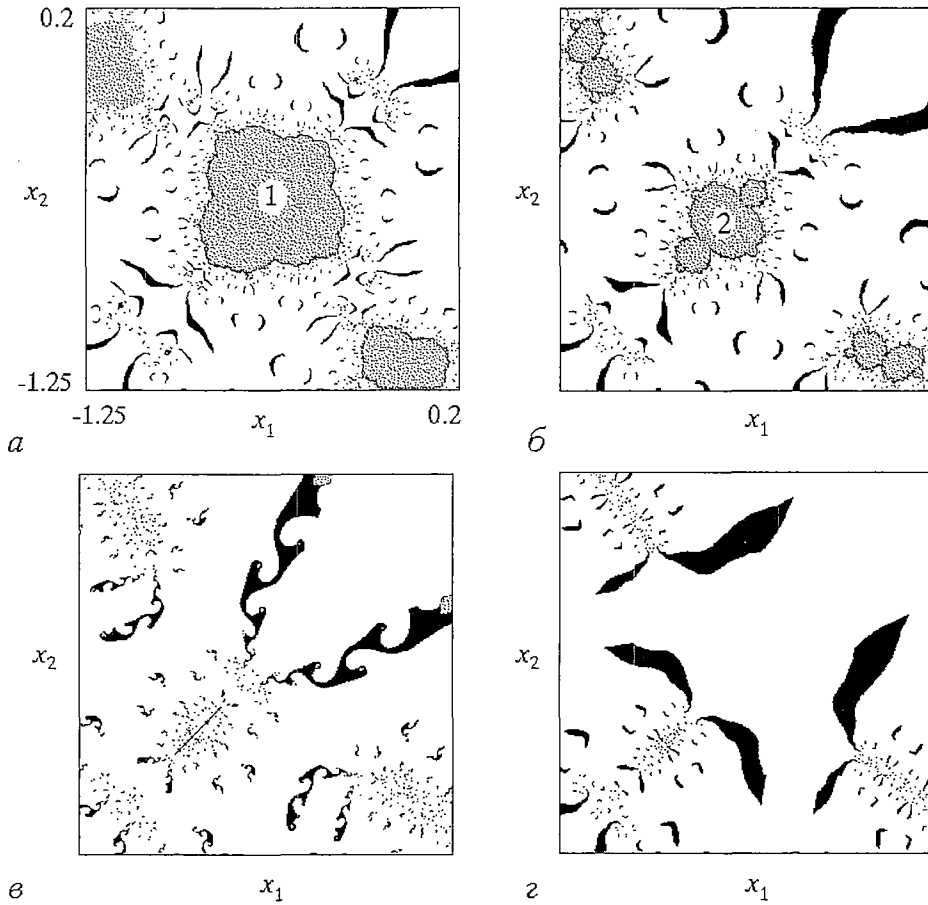


Рис. 7. Бассейны притяжения для связанных квадратичных осцилляторов на плоскости (x_1, x_2) при следующих значениях $F_1=F_2$: 0.205 (а), 0.216 (б), 0.2375 (в), 0.25 (г); при этом $\gamma=0.2$, $\omega=1$, $\varepsilon=0.5$

4. Связанные системы Ресслера

Рассмотрим автономный осциллятор Ресслера

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c), \end{cases} \quad (13)$$

где x, y, z - динамические переменные; a, b, c - параметры. Известно, что в системе возможен переход к хаосу через удвоения периода [26]. Удвоения наблюдаются, например, при изменении параметра c и фиксированных a и b . Построим связанные системы Ресслера. Для получения функции связи воспользуемся процедурой, описанной в разделе 1. Комплексификация системы Ресслера и введение замены переменных и параметров (3) приводит к связанным системам следующего вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1), \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1, \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c_1) - \varepsilon(z_1 - z_2)[(x_1 - x_2) - (c_1 - c_2)], \\ \dot{x}_2 = -(y_2 + z_2), \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2, \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_2 - c_2) - \varepsilon(z_2 - z_1)[(x_2 - x_1) - (c_2 - c_1)]. \end{array} \right. \quad (14)$$

Исследование плоскости параметров (c_1, c_2) не дало удовлетворительных результатов - область обобщенной синхронизации оказалась не похожей на множество Мандельброта. Очевидно, причиной этого служит существование расстройки фаз у связанных подсистем. Поэтому для исследования режимов синхронизации связанных систем Ресслера удобно использовать цилиндрическую систему координат [27], в которой совокупность переменных (x, y, z) заменяется переменными (A, φ, z) , где $\varphi = \arctan(y/x)$ - фаза, $A = (x^2 + y^2)^{1/2}$ - амплитуда. Система (13) в таких цилиндрических координатах запишется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{A} = aA \sin^2 \varphi - z \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} = 1 + \sin \varphi \cos \varphi + (z/A) \sin \varphi, \\ \dot{z} = b - cz + Az \cos \varphi. \end{array} \right. \quad (15)$$

Упростим эту систему, пренебрегая вторым и третьим слагаемыми в

уравнении для фазы. В этом случае $\dot{\varphi} = 1$, то есть фаза линейным образом зависит от времени. Тогда исходная система преобразуется к виду, подобному нелинейной системе с внешним гармоническим воздействием. Комплексификация и замена переменных приводит к следующей системе связанных осцилляторов:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{A}_1 = aA_1 \sin^2 \varphi - z_1 \cos \varphi, & \dot{A}_2 = aA_2 \sin^2 \varphi - z_2 \cos \varphi, \\ \dot{z}_1 = b + z_1(A_1 \cos \varphi - c_1) - & \dot{z}_2 = b + z_2(A_2 \cos \varphi - c_2) - \\ - \varepsilon(z_1 - z_2)((A_1 - A_2) \cos \varphi - (c_1 - c_2)), & - \varepsilon(z_2 - z_1)((A_2 - A_1) \cos \varphi - (c_2 - c_1)), \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\dot{\varphi} = 1.$$

Будем называть ее усеченной системой связанных осцилляторов Ресслера. Как было показано в предыдущем разделе, для подобной системы могут реализоваться феномены комплексной аналитической динамики. И, действительно, расчеты показали, что на плоскости параметров (c_1, c_2) (рис. 8) наблюдается структура, подобная множеству Мандельброта, а на плоскостях (x_1, x_2) (рис. 9) - структуры, подобные множествам Жюлиа. Данный факт подтверждает предположение о необходимости синхронизации фаз связанных подсистем.

Рассмотрим теперь систему связанных осцилляторов Ресслера с общим уравнением для фазы

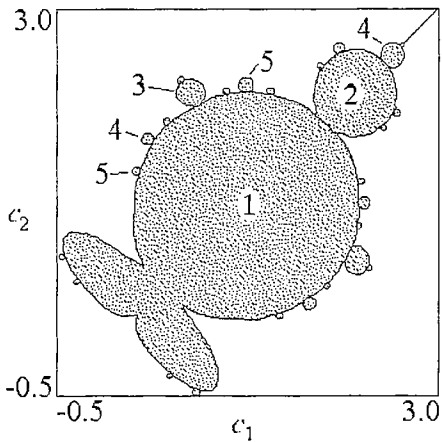


Рис. 8. Плоскость параметров (c_1, c_2) для связанных усеченных осцилляторов Ресслера (16) при $\varepsilon = 0.5, a=0.2, b=0.2$

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= aA_1 \sin^2 \varphi - z_1 \cos \varphi, \\ \dot{A}_2 &= aA_2 \sin^2 \varphi - z_2 \cos \varphi, \\ \dot{z}_1 &= b + z_1(A_1 \cos \varphi - c_1) - \\ &\quad - \varepsilon (z_1 - z_2)((A_1 - A_2) \cos \varphi - (c_1 - c_2)), \\ \dot{z}_2 &= b + z_2(A_2 \cos \varphi - c_2) - \\ &\quad - \varepsilon (z_2 - z_1)((A_2 - A_1) \cos \varphi - (c_2 - c_1)), \\ \dot{\varphi} &= 1 + \sin \varphi \cos \varphi + z_1 \sin \varphi / A_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Схожие системы, состоящие из двух связанных подсистем и уравнений, общих для этих подсистем, исследовались в работах Пекоры и Кэрролла [28-30].

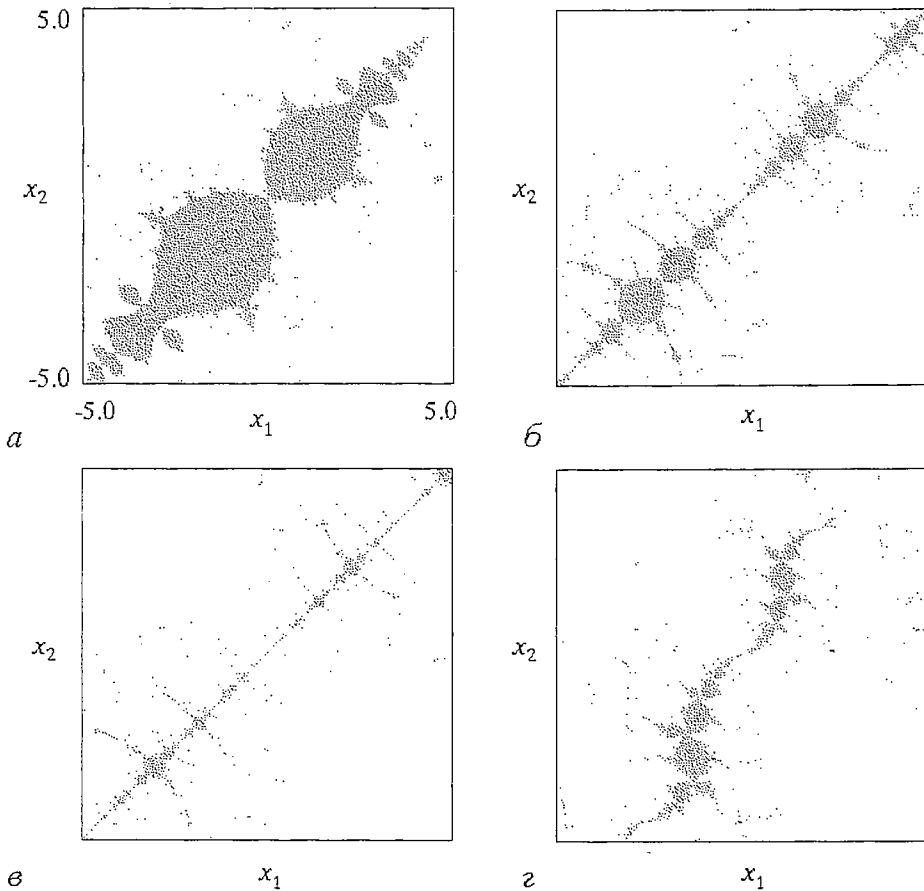


Рис. 9. Бассейны притяжения на фазовой плоскости $(x_1 = A_1 \cos \varphi, x_2 = A_2 \cos \varphi)$ для связанных усеченных осцилляторов Ресслера (16) при $\varepsilon=0.5, a=0.2, b=0.2$ для различных значений параметров c_1 и c_2 , отвечающих существованию в сечении Пуанкаре устойчивой неподвижной точки при $c_1=c_2=1.0$ (а), цикла периода 2 при $c_1=c_2=2.25$ (б), цикла периода 4 при $c_1=c_2=2.58$ (в) и цикла периода 3 при $c_1=0.75, c_2=2.25$ (г)

В данных работах N -мерная динамическая система $\dot{u}=f(u)$ разделяется на две подсистемы $\{u\}=\{v,w\}$, одна из которых дублируется следующим образом:

$\dot{v}=g(v,w)$, $\dot{w}=h(v,w)$, $\dot{w}'=h(v,w')$. Тогда $\{w\}'$ можно рассматривать как систему, управляемую сигналом от $\{v,w\}$. Большой интерес представляет изучение синхронизации этой системы с управляющим сигналом [28, 30].

Как показал численный эксперимент, область обобщенной синхронизации для системы (17) обладает некоторыми элементами, характерными для комплексной аналитической динамики. Например, на плоскости параметров наблюдается лепесток периода 3 (рис. 10). На рис. 11 представлены бассейны

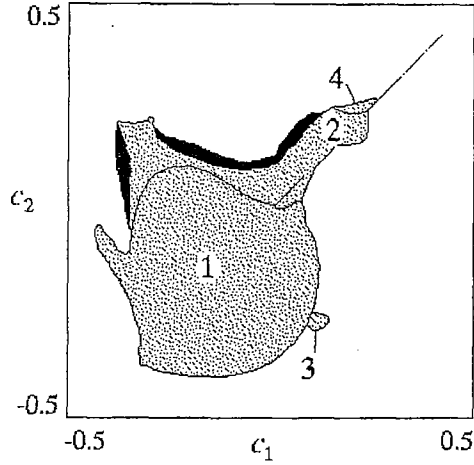


Рис. 10. Плоскость параметров (c_1, c_2) для связанных осцилляторов Ресслера (17) при $\epsilon=0.5$, $a=0.2$, $b=0.2$

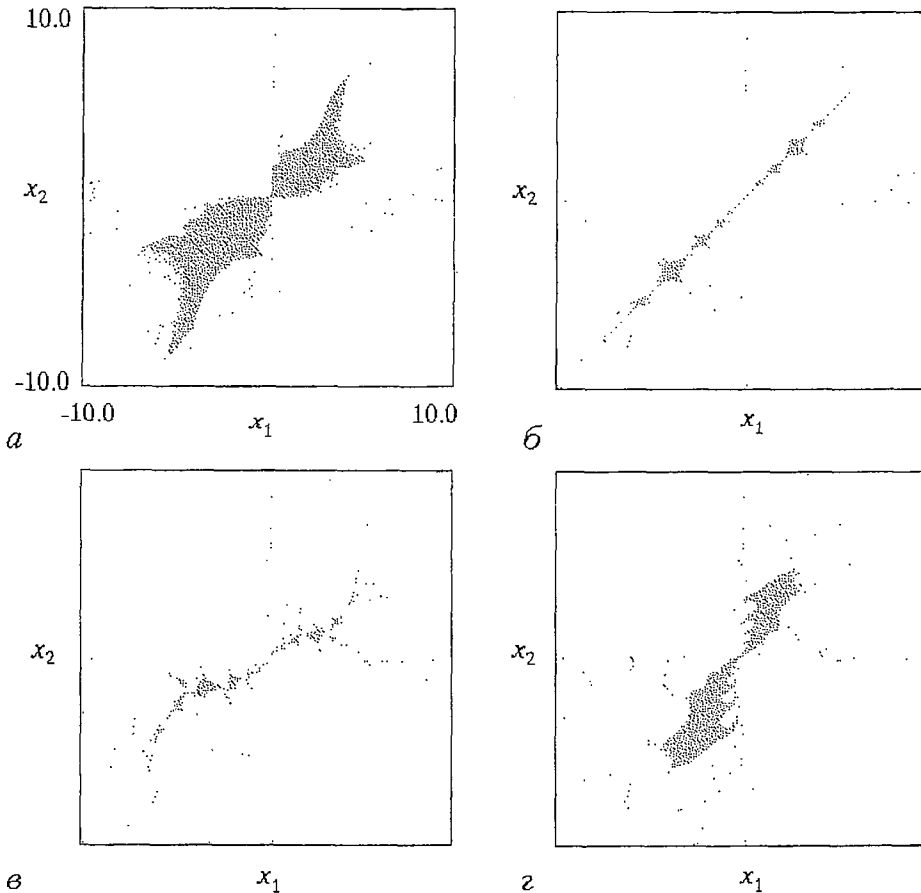


Рис. 11. Бассейны притяжения на фазовой плоскости $(x_1=A_1 \cos \varphi, x_2=A_2 \cos \varphi)$ для системы (17) при $\epsilon=0.5$, $a=0.2$, $b=0.2$ и различных значениях параметров c_1 и c_2 , отвечающих существованию в сечении Пуанкаре устойчивой неподвижной точки при $c_1=c_2=1.5$ (а), цикла периода 2 при $c_1=c_2=3.42$ (б), цикла периода 3 при $c_1=2.92$, $c_2=0.83$ (в) и цикла периода 2 в симметричной относительно диагонали точке $c_1=0.83$, $c_2=2.92$ (г)

притяжения на секущей плоскости ($x_1=A_1 \cos \varphi$, $x_2=A_2 \cos \varphi$) в фазовом пространстве системы. Отсутствие симметрии области обобщенной синхронизации на рис. 10 и бассейнов притяжения на рис. 11, *а, б* объясняется однонаправленностью связи между управляющей и управляемой подсистемами. С точки зрения экспериментальных физических приложений динамика системы (17) требует дополнительного изучения.

Далее введем в рассматриваемую систему две различные фазы по одной для каждой из парциальных систем. При этом добавим дополнительную связь с параметром δ , которая обеспечит фазовую синхронизацию подсистем Ресслера и при этом не влияет на амплитуду.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{A}_1 = aA_1 \sin^2 \varphi_1 - z_1 \cos \varphi_1, \\ \dot{z}_1 = b + z_1(A_1 \cos \varphi_1 - c_1) - \varepsilon(z_1 - z_2)[(A_1 - A_2) \cos \varphi_1 - (c_1 - c_2)], \\ \dot{\varphi}_1 = 1 + a \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + (z_1/A_1) \sin \varphi_1 + \delta \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \dot{A}_2 = aA_2 \sin^2 \varphi_2 - z_2 \cos \varphi_2, \\ \dot{z}_2 = b + z_2(A_2 \cos \varphi_2 - c_2) - \varepsilon(z_2 - z_1)[(A_2 - A_1) \cos \varphi_2 - (c_2 - c_1)], \\ \dot{\varphi}_2 = 1 + a \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + (z_2/A_2) \sin \varphi_2 + \delta \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \end{array} \right. \quad (18)$$

В обычной прямоугольной системе координат ($x=A \cos \varphi$, $y=A \sin \varphi$, z) уравнения (18) будут выглядеть как

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) - \delta y_1(x_1 y_2 - x_2 y_1)/[(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}(x_2^2 + y_2^2)^{1/2}], \\ \dot{y}_1 = x_1 + a y_1 + \delta x_1(x_1 y_2 - x_2 y_1)/[(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}(x_2^2 + y_2^2)^{1/2}], \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c_1) - \varepsilon(z_1 - z_2)[(x_1 - x_2) - (c_1 - c_2)], \\ \dot{x}_2 = -(y_2 + z_2) - \delta y_2(x_2 y_1 - x_1 y_2)/[(x_2^2 + y_2^2)^{1/2}(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}], \\ \dot{y}_2 = x_2 + a y_2 + \delta x_2(x_2 y_1 - x_1 y_2)/[(x_2^2 + y_2^2)^{1/2}(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}], \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_2 - c_2) - \varepsilon(z_2 - z_1)[(x_2 - x_1) - (c_2 - c_1)]. \end{array} \right. \quad (19)$$

Расчеты показывают, что на плоскости (c_1, c_2) для системы (19) возможна реализация фрактального множества, подобного множеству Мандельброта (рис. 12). Тем не менее, можно заметить значительные искажения, присутствующие в его конфигурации. Объяснением этого может служить нарушение аналитичности при введении дополнительной связи. На рис. 13 представлены бассейны притяжения, аналогичные множествам Жюлиа. На рис. 14 продемонстрированы аттракторы периода 1 (*а*), 2 (*б*), 4 (*в*) и 6 (*г, д*). Заметим, что при равных значениях параметров c_1 и c_2 (см. рис. *а-в*) значения переменных в парциальных системах совпадают, что соответствует полной синхронизации. В случае $c_1 \neq c_2$ (рис. *г, д*) значения динамических переменных парциальных систем не совпадают, что соответствует существованию обобщенной частичной синхронизации. Таким образом, в случае, когда точка (c_1, c_2) принадлежит области обобщенной частичной синхронизации, могут реализоваться феномены комплексной аналитической динамики такие, например, как утроения периода.

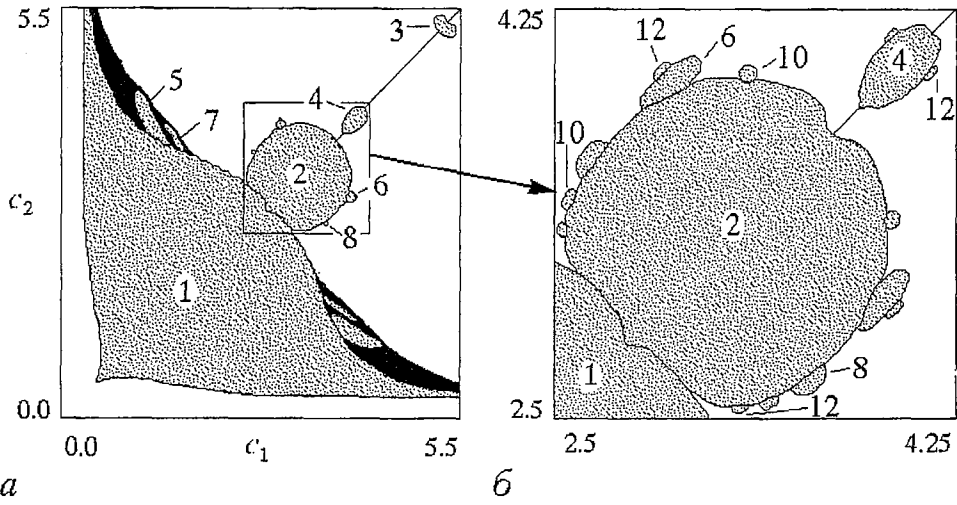


Рис. 12. Плоскость параметров (c_1, c_2) и увеличенный фрагмент, демонстрирующий самоподобие, для связанных осцилляторов Ресслера (19) при $\epsilon=0.5, a=0.2, b=0.2, \delta=1.0$

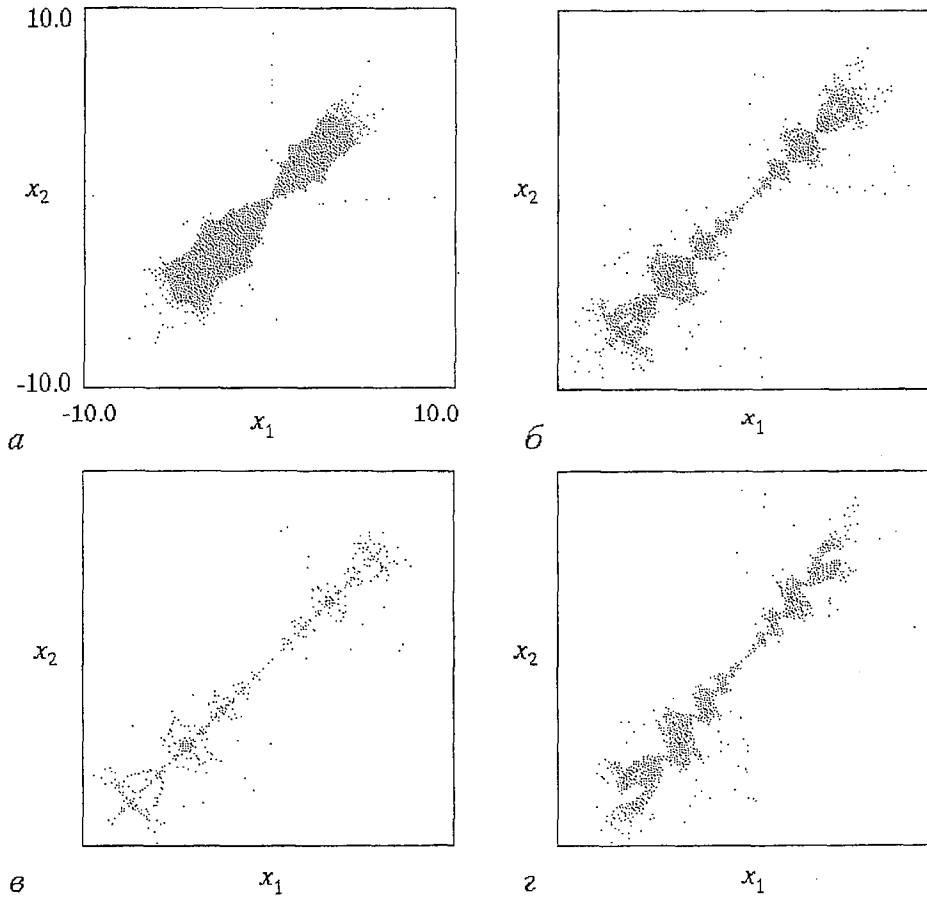


Рис. 13. Бассейны притяжения на фазовой плоскости (x_1, x_2) для связанных осцилляторов Ресслера (19) при $\epsilon=0.5, a=0.2, b=0.2, \delta=1.0$ для различных значений параметров c_1 и c_2 , отвечающих существованию в сечении Пуанкаре устойчивой неподвижной точки при $c_1=c_2=2.0$ (а), цикла периода 2 при $c_1=c_2=3.5$ (б), цикла периода 4 при $c_1=c_2=4.0$ (в) и цикла периода 6 при $c_1=2.98, c_2=3.9$ (z)

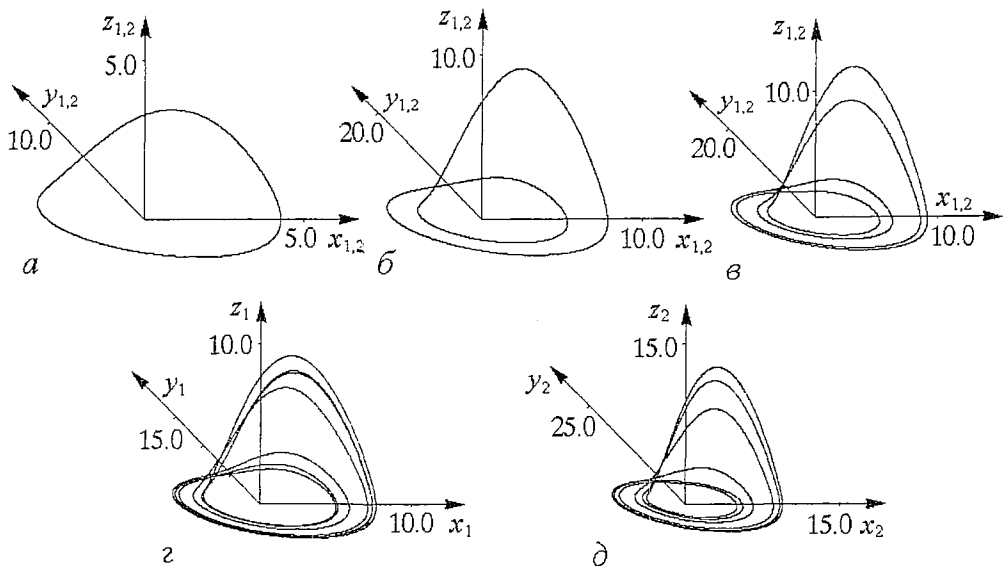


Рис. 14. Фазовые портреты для связанных осцилляторов Ресслера (19) при тех же значениях параметров, что и на рис. 13. Представлены аттракторы периода 1 (а), 2 (б), 4 (в) и 6 (г, д). Заметим, что при равных значениях параметров c_1 и c_2 , значения переменных в парциальных системах совпадают (а-в). В случае $c_1 \neq c_2$ (г, д), когда могут реализоваться феномены комплексной аналитической динамики такие, например, как утроения периода, значения динамических переменных парциальных систем не совпадают

Заключение

Основная задача работы заключалась в попытке наблюдения феноменов комплексной аналитической динамики в реалистичных моделях, таких как связанные отображения Эно, связанные неавтономные нелинейные осцилляторы и связанные автономные осцилляторы Ресслера. Таким образом, рассмотрены как дискретные отображения, так и системы с непрерывным временем.

Исследовалась возможность реализации множества Мандельброта в пространстве параметров данного класса систем. Если для отображений это довольно простая задача (достаточно использовать прием комплексификации), то для потоковых систем иногда требуется обеспечить дополнительные условия (такие, например, как фазовая синхронизация для систем Ресслера).

В работе показано, что комплексифицированная система может быть представлена в виде двух связанных действительных систем. Подобное представление полезно по ряду причин. Во-первых, при этом упрощаются уравнения и появляется возможность конструирования реальной экспериментальной модели. Во-вторых, можно ожидать, что введение выбранной определенным образом связи между двумя идентичными элементами любой природы, демонстрирующими удвоения периода, позволит наблюдать феномены комплексной аналитической динамики. Кроме того, следует отметить связь рассмотренного круга вопросов с проблемой синхронизации. Показано, что область обобщенной частичной синхронизации связанных систем может соответствовать множеству Мандельброта. Тем самым, установлена возможность новых нетривиальных особенностей динамического поведения при синхронизации систем со сложной динамикой.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук,

профессору СГУ С.П. Кузнецову и доктору, профессору Потсдамского университета А.С. Пиковскому за полезные обсуждения и консультации при выполнении настоящей работы. Автор благодарен также Американскому фонду гражданских исследований и развития (грант REC-006) и Потсдамскому университету за поддержку визита и стажировку в научной группе статистической физики и теории хаоса (Потсдам, Германия).

Работа поддержана грантами РФФИ 00-02-17509 и РФФИ 01-02-06385.

Библиографический список

1. *Peitgen H.O., Richter P.H.* The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems. Springer-Verlag. 1986.
2. *Devaney R.L.* An introduction to chaotic dynamical systems. Addison-Wesley studies in Nonlinearity. 1989.
3. *Гольберг А.И., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальные свойства для последовательностей бифуркаций утроения периода // УМН. 1983. Vol. 38, №1. P. 159.
4. *Cvitanovic P., Myrheim J.* Universality for period n -tuplings in complex mappings // Phys. Lett. A. 1983. Vol. 94. P. 329.
5. *Cvitanovic P., Myrheim J.* Complex universality // Commun. Math. Phys. 1989. Vol. 121. P. 225.
6. *Widom M.* Renormalization group analysis of quasi-periodicity in analytic maps // Comm. Math. Phys. 1993. Vol. 92. P. 121.
7. *Manton N.S., Nauenberg M.* Universal scaling behavior for iterated maps in the complex plane // Comm. Math. Phys. 1983. Vol. 89. P. 557.
8. *MacKay R.S., Percival I.C.* // Physica D. 1987. Vol. 26. P. 193.
9. *Peinke J., Parisi J., Rohricht B., Rossler O.E.* Instability of the Mandelbrot set // Zeitsch. Naturforsch. A. 1987. Vol. 42. P. 263.
10. *Klein M.* Mandelbrot set in a non-analytic map // Zeitsch. Naturforsch. A. 1988. Vol. 43. P. 819.
11. *Peckham B.B.* Real perturbation of complex analytic families: points to regions // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 8. P. 73.
12. *Hu B., Lin B.* Yang-Lee zeros, Julia sets, and their singularity spectra // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39. P. 4789.
13. *Энтин М.В., Энтин Г.М.* Масштабная инвариантность в теории перколяции и фракталы // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 64. С. 427.
14. *Beck C.* Physical meaning for Mandelbrot and Julia sets // Physica D. 1999. Vol. 125. P. 171.
15. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Ponomarenko V.I.* Mandelbrot set in coupled logistic maps and in an electronic experiment // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. 055201(R).
16. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.
17. *Senn P.* The Mandelbrot set for binary numbers // Am. J. Phys. 1990. Vol. 58. P. 1018.
18. *Fjelstad I.P.* Extending relativity via the perplex numbers // Am. J. Phys. 1986. Vol. 54. P. 416.
19. *Ronveaux A.* About «perplex numbers» // Am. J. Phys. 1987. Vol. 55. P. 392.
20. *Majernic V.* The perplex numbers are in fact binary numbers // Am. J. Phys. 1988. Vol. 56. P. 763.
21. *Band W.* Comments on «Extending relativity via the perplex numbers» // Am. J. Phys. 1988. Vol. 56. P. 469.

22. Hénon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor // Commun. Math. Phys. 1976. Vol.50, P. 69.

23. Hénon M. On the numerical computation of Poincaré maps // Physica D. 1982. Vol. 5. P. 412.

24. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.

25. Кузнецов А.П., Потапова А.Ю. Особенности сложной динамики нелинейных осцилляторов с катастрофами Тома. // Изв. вузов. ПНД. 2000. Т. 8, № 6. С. 91.

26. Rossler O. An equation for continuous chaos // Phys. Lett. A. 1976. Vol. 57. P. 397.

27. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 4193.

28. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.

29. Pecora L.M., Carroll T.L. Driving systems with chaotic signals // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44. P. 2374.

30. Carroll T.L. Amplitude-independent chaotic synchronisation and communication // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 3117.

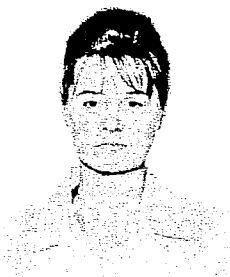
Саратовский государственный
университет
Саратовское отделение ИРЭ РАН

Поступила в редакцию 26.07.2001
после доработки 22.10.2001

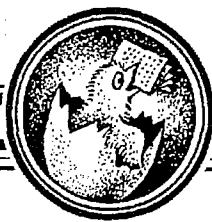
ON POSSIBILITY OF REALIZATION OF THE PHENOMENA OF COMPLEX ANALYTICAL DYNAMICS FOR THE PHYSICAL SYSTEMS, BUILT UP OF COUPLED ELEMENTS, WHICH DEMONSTRATE PERIOD-DOUBLINGS

O. B. Isaeva

The possibility of realization of the phenomena of complex analytical dynamics for the realistic physical systems is investigated. Observation of the Mandelbrot and Julia sets in the parameter and phase spaces both for the discrete mappings and continuous systems is carried out. For these purposes, in present work the method is suggested, based on consideration of coupled systems, where the subsystems demonstrate period-doublings cathcad. So, Henon mapping, quadratic oscillator with harmonic driving force and autonomous Rossler oscillator are considered as subsystems. The relations between phenomena of complex analytical dynamics and problems of synchronization loss are discussed.



Исаева Ольга Борисовна - родилась в 1977 году. В 1999 году с отличием окончила Высший Колледж прикладных наук СГУ (в настоящее время факультет нелинейных процессов). Аспирант кафедры динамических систем СГУ, младший научный сотрудник СО ИРЭ РАН и инженер кафедры нелинейной физики ФНП СГУ. Область научных интересов - комплексная аналитическая динамика и ее приложения к реалистичным физическим системам, теория фракталов. Имеет около 15 научных публикаций по этой тематике.



СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА ГЕНЕРАТОРА НА ДИОДЕ С N -ОБРАЗНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

М.Б. Бодров

Приведены результаты исследования сложного и хаотического поведения кусочно-линейной модели генератора на диоде с N -образной характеристикой. Построена детальная картина бифуркационных множеств в пространстве управляющих параметров. Метод автоматического определения периодических режимов с подстройкой шага интегрирования, примененный в работе, позволил выявить тонкую структуру фрагментов карты режимов.

Введение

Генератор на диоде с N -образной характеристикой, демонстрирующий хаотическое поведение, был впервые исследован в 1976 году С.В.Кияшко, А.С. Пиковским и М.И. Рабиновичем [1, 2]. В экспериментах авторы показали существование сложных колебаний, а также символическими методами доказали возможность рождения в подобных системах хаотических режимов [2]. Более подробно этот генератор был исследован в начале 90-х: экспериментальная карта режимов и сценарии хаотизации подробно описаны в работе [3]. В данной работе был использован туннельный диод (рис. 1, а). Отвлекаясь от специфики процессов в туннельных диодах, в частности, существенного влияния на вольт-амперную характеристику (ВАХ) уровня СВЧ-мощности [4], удается качественно изучить динамику такого генератора на модели, отражающей лишь N -образную форму ВАХ (рис. 1, б) и наличие емкостной составляющей импеданса диода.

Модель в безразмерном виде описывается системой дифференциальных уравнений [3]

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\delta x + y - gz, \\ \dot{y} = -x - y/(2\lambda), \\ \varepsilon \dot{z} = x - f(z), \end{cases} \quad (1)$$

где x , y , z - соответственно безразмерные ток I , напряжения U и V на емкости C и на диоде, соответственно (см. рис. 1, а). Параметр $g = (V_m / I_m)(C/L)^{1/2}$ определяет степень влияния туннельного диода на процессы в контуре; $\varepsilon = gC_1/C$ - малый

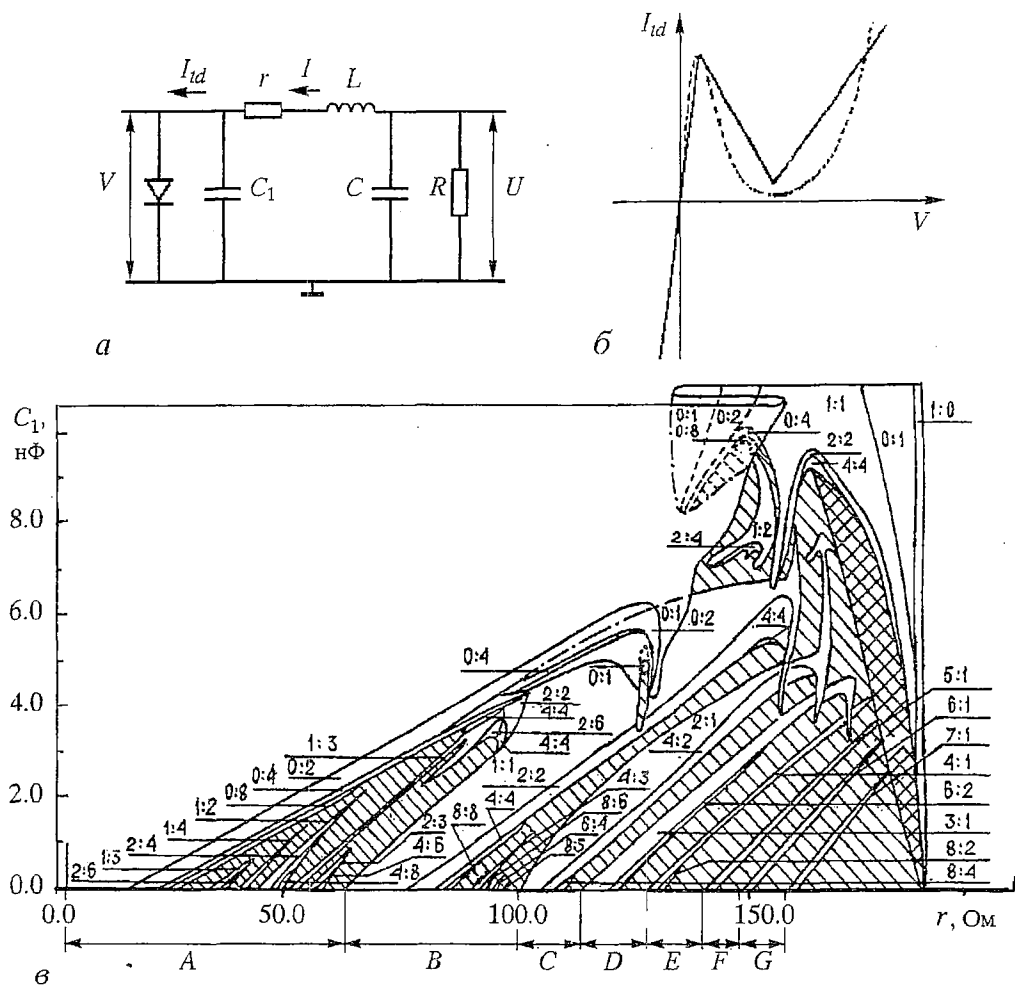


Рис. 1. а - электрическая схема генератора на туннельном диоде [1], б - ВАХ туннельного диода (пунктирная линия) и его кусочно-линейной модели (сплошная линия), в - экспериментально полученная двухпараметрическая карта режимов генератора с кусочно-линейной ВАХ диода [3]

параметр, пропорциональный емкостной составляющей импеданса туннельного диода C_1 ; $\delta = -1/2 r(C/L)^{1/2}$ и $\lambda = -1/2 R(C/L)^{1/2}$ определяют инкремент нарастания колебаний в отсутствие диода. Функция $f(z)$ - отражает ВАХ туннельного диода.

В работе [5] с помощью блоков на операционных усилителях была реализована кусочно-линейная ВАХ (рис. 1, б) с функцией $f(z)$ вида

$$\begin{cases} 11.765z, & z \leq 0.085, \\ 1 - 2.108(z - 0.085), & 0.085 < z < 0.5, \\ 0.125 + 1.75(z - 0.5), & z \geq 0.5 \end{cases} \quad (2)$$

и экспериментально получена карта динамических режимов на плоскости параметров (r, C_1) , представленная на рис. 1, в. (Эта же структура, но в измененном масштабе, может быть представлена на плоскости (δ, ϵ) .) Карта разделена на характеристические зоны колебаний А, В, ..., G. Каждая зона содержит области периодического поведения и области хаотического поведения, показанные штриховкой. Переход из зоны в зону слева направо сопровождается увеличением базового периода на 1.

При малых C_1 (меньше 3 нФ) переход от периодических к хаотическим колебаниям внутри зон происходит через каскад бифуркаций удвоения периода. Увеличение параметра C_1 приводит к постепенному сближению зон колебаний и смещению их в сторону больших значений инкремента затухания. При этом на плоскости параметров образуются складки, затрудняющие понимание динамики системы. Приведенные в [3, 5] карты режимов построены в результате трудоемких процедур «ручного» сканирования пространства управляющих параметров, а поэтому не дают хорошего разрешения. В настоящей работе полученные ранее результаты уточнены путем автоматического компьютерного построения карт режимов с использованием методики, приведенной ниже. Впервые подробно представлены тонкие режимы для области большого ϵ .

Методы автоматического построения карт потоковых систем

Большой объем вычислений, который необходим для построения карт автономных потоковых систем, ограничивает возможности точного определения линий смены режимов и прорисовки тонкой структуры карты, связанной с колебаниями больших периодов. В настоящей работе применен метод адаптивной подстройки шага интегрирования [6], основанный на анализе отклика перестраиваемого нерекурсивного цифрового фильтра. С его помощью еще до окончания переходного процесса с заданной точностью удается подстроить шаг интегрирования в алгоритме Рунге - Кутты 4-го порядка, которому будет кратен истинный период. Это позволяет определить характерный период колебаний T (соответствующий максимальному пику в спектре колебаний) и на его основе найти полный период nT [6]. Сама процедура определения периода использует свойство нулевого отклика цифрового фильтра верхних частот вида $z_n = x_n - x_{n-k}$ при точном совпадении периода колебаний с временным сдвигом k . Поэтому предварительно требуется кратность шага интегрирования периоду колебаний.

Ограниченность компьютерных ресурсов позволяет определить лишь небольшие периоды, более высокопериодические колебания не удается уверенно отличить от хаотических. Данная карта была построена с глубиной 8 периодов, чего нельзя было добиться с помощью других известных нам автоматизированных методов построения карт.

Результаты численного моделирования

Согласно системе обыкновенных дифференциальных уравнений (1) с кусочно-линейной функцией $f(z)$ вида (2) была рассчитана карта динамических режимов на плоскости тех же управляющих параметров. Интегрирование уравнений осуществлялось методом Рунге - Кутты 4-го порядка при фиксированных $g=0.8535$, $\lambda=-1.0677$.

Результат расчета периодических режимов по описанной выше методике представлен на рис. 2 в координатах (значение диссипации r - значение емкостной составляющей импеданса туннельного диода C_1), что удобно для сравнения с экспериментальной картой (см. рис. 1, в). Видно, что экспериментальная и расчетная карты топологически сходны. Но данные расчета более детальные и существенно дополняют картину. Остановимся на этом подробнее.

• Область малых емкостей туннельного диода ($C_1 \leq 8$ нФ) демонстрирует сценарий перехода к хаосу через бифуркации удвоения. При этом происходит удвоение одновременно двух характерных величин аттрактора n и m [5] (n - число

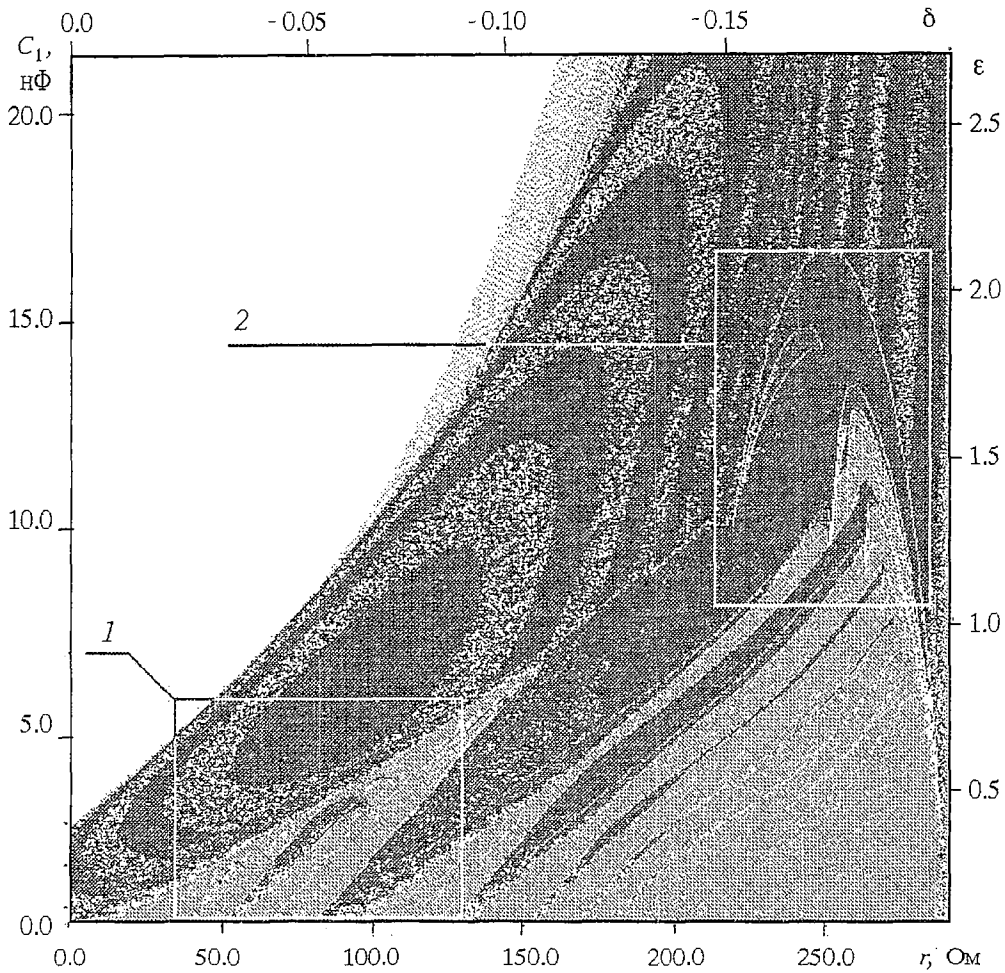


Рис. 2. Двухпараметрическая карта режимов генератора с кусочно-линейной ВАХ диода, полученная при компьютерном моделировании

оборотов траектории аттрактора, оставшихся в плоскости - колебания на участке ВАХ до пика; m - число оборотов траектории аттрактора, выходящих в пространство из-за переключения диода на третью ветвь ВАХ).

- На рис. 3 приведена область, являющаяся аналогом зоны А в [5]. Численное моделирование при малых значениях емкостной составляющей импеданса дает схожий с экспериментальным исследованием результат. Было также подтверждено наличие множества периодов, найденных ранее в [5]. Каждое периодическое окно при возрастании параметра C_1 сужается в «клюв», что говорит о переходах режимов на другие складки. При увеличении диссипации r каждое окно заканчивается хаосом.

- Наибольший интерес представляет собой область больших емкостей туннельного диода ($C_1 \geq 8$ нФ), фрагмент которой приведен на рис. 4. В ней проявляется сильная неоднозначность в поведении системы. Увеличение параметра ϵ приводит к постепенному сближению зон и смещению их в сторону больших значений инкремента затухания. Каждое периодическое окно в силу свойства подобия заканчивается неким клювом, что соответствует переходу на другие складки. Наибольшее сосредоточение таких клювов наблюдается в области больших ϵ .

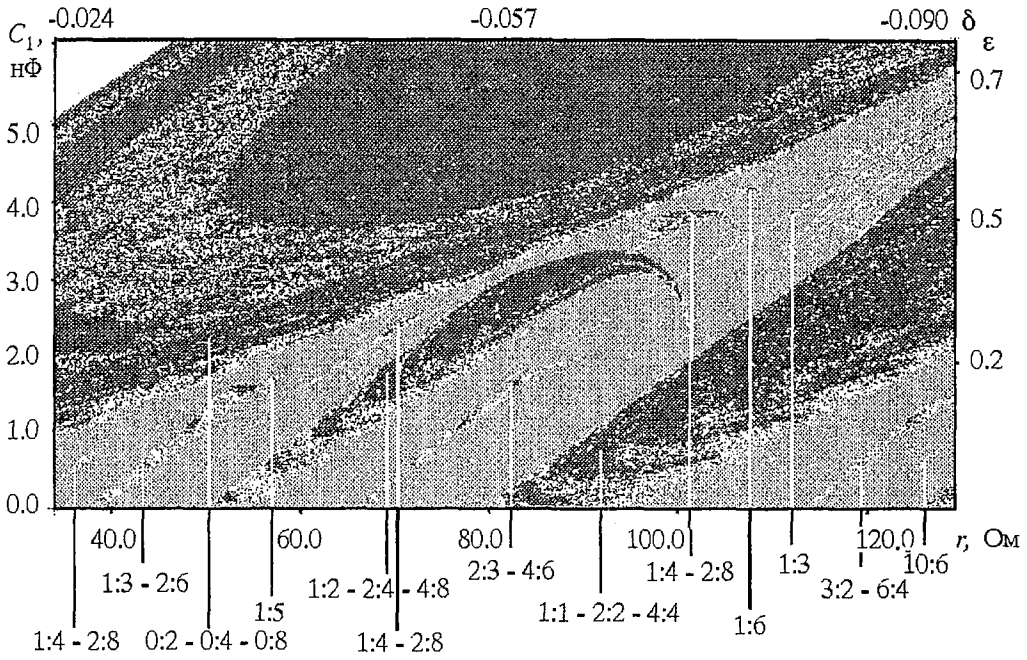


Рис. 3. Область 1 (см. рис. 2), перестроенная при меньшем шаге по управляющим параметрам (C_1 и r) и с глубиной 8 периодов

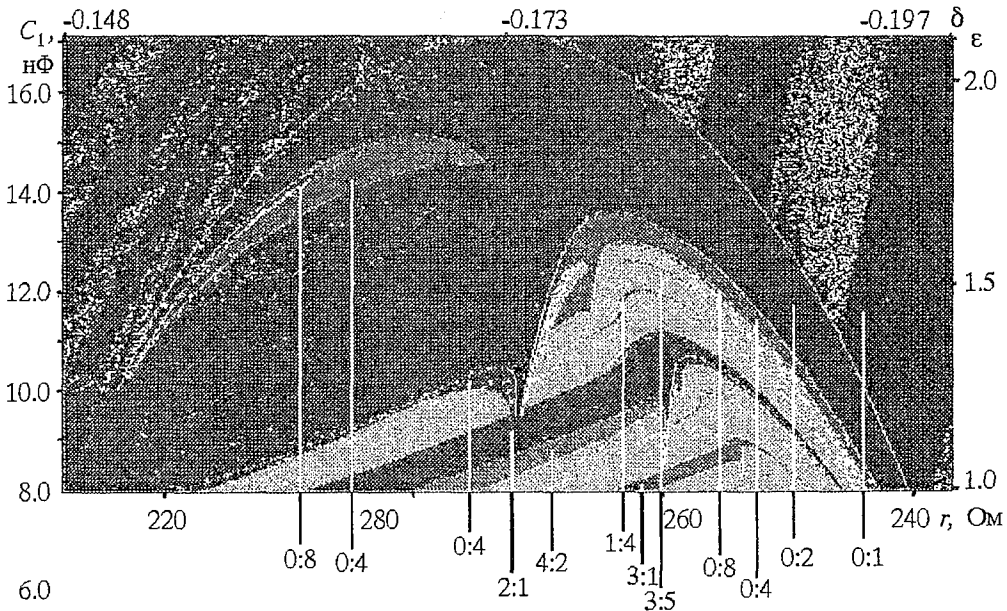


Рис. 4. Область 2 (см. рис. 2), перестроенная при меньшем шаге по управляющим параметрам (C_1 и r) и с глубиной 16 периодов

Выводы

Автоматизация построения карт режимов в отличие от экспериментального исследования позволяет выявить более тонкие режимы.

Оказывается, что в области больших C_1 (область 2 на рис. 2), демонстриру-

ются последовательности режимов, аналогичных наблюдаемым в пространстве параметров неавтономного нелинейного контура [7] и других систем с вырожденной двухчастотной динамикой. Это позволяет говорить о типичности структуры (конфигурации карты). При этом сохраняются характерные черты рождения хаоса внутри ключевых синхронизации генераторов с двухчастотной динамикой: появление парных режимов сдвинутых по фазе на каждом удвоении периода; возникновение «рукавов», которые проходят «сквозь» другие режимы с возникновением мультистабильностей; вид окон периодичности в хаотических режимах и т.п. Можно предположить, что все колебательные системы с двумя характерными временными масштабами, демонстрирующие как периодическое, так и сложное хаотическое поведение, будут вести себя подобным образом.

Автор благодарен А.А.Кипчатову за руководство исследованиями и обсуждение результатов. Также выражает глубокую благодарность Б.П. Безручко за замечания и советы.

Работа выполнена при поддержке НОЦ нелинейной динамики и биофизики (грант REC-006).

Библиографический список

1. Пиковский А.С., Рабинович М.И. Простой автогенератор со стохастическим поведением // ДАН СССР 1978. Т. 239, № 2. С. 301.
2. Кияшко С.В., Пиковский А.С., Рабинович М.И. Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25. С. 336.
3. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А. Хаос и периодичность в генераторе на туннельном диоде // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 4. С. 431.
4. Усанов Д.А., Скрипаль А.В. Физика работы полупроводниковых приборов в схемах СВЧ: Изд-во Сарат. ун-та, Саратов. 1999.
5. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А. Путь к хаосу в кусочно-линейной модели генератора на туннельном диоде // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1, 2. С. 93.
6. Кипчатов А.А., Подин С.В. Применение методики адаптивной фильтрации для определения периода колебаний потоковых систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5. № 2,3. С. 72.
7. Кипчатов А.А. Особенности сложной динамики неавтономного нелинейного контура // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 2. С. 182.
8. Пиковский А.С. О статистических свойствах простейшей модели стохастических автоколебаний // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 7. С. 883.

*Саратовский государственный
университет*

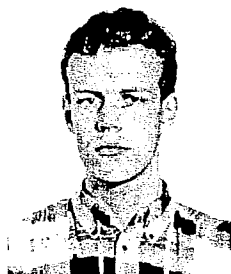
*Поступила в редакцию 10.05.2001
после доработки 24.09.2001*

THE COMPLICATED DYNAMICS OF THE DIODE OSCILLATOR WITH THE N-SHAPED CHARACTERISTIC

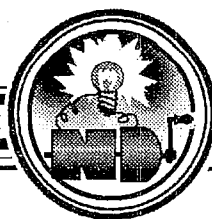
M.B. Bodrov

The research data of complicated and chaotic behavior of the piecewise-linear model of the diode oscillator with the N -shaped current-voltage diagram are presented.

Detailed view of bifurcation manifold on the control parameter plane is shown. The method of periodic regime automatic scan with the integration step enrollment applied in the article allowed us to discover the thin structure of some parts of the regimes map.



Бодров Максим Борисович - родился в Саратове (1981). Студент 4-го курса факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика, численное моделирование сложных систем.



ПРИМЕНЕНИЕ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

*А.А. Короновский, М.Н. Стриханов, Д.И. Трубецков,
А.Е. Храмов, И.В. Цуканова*

В работе делается попытка моделирования динамики численности профессорско-преподавательского состава высшей школы Российской Федерации. На основании анализа статистических данных разработана модель класса клеточных автоматов с дискретным временем. Представлены некоторые результаты анализа динамики возрастного состава высшей школы с помощью предложенной модели.

Введение

Анализ и прогноз поведения различных социально-экономических систем в настоящее время становится весьма актуальной задачей. Решение ее невозможно без построения моделей для описания процессов, происходящих в таких системах. Однако построение моделей социальных процессов наталкивается на значительные трудности, связанные, в первую очередь, с неразвитостью соответствующей методологии научного исследования и со сложностью исследуемых социальных систем. В естественных науках, и в первую очередь в физике и нелинейной динамике, соответствующая методология уже развита и дает хорошие результаты. Поэтому, очевидно, имеет смысл применять подходы, выработанные в естественных науках, к количественному анализу процессов в социальных системах с учетом всех особенностей, присущих объекту исследования. Следуя вышесказанному, любое моделирование социально-экономических систем следует начинать с простых моделей, которые тем не менее адекватно описывали бы анализируемую систему и находились бы в разумном соответствии с реальными (статистическими, экспериментальными и др.) данными. Построение модели позволяет выделить наиболее существенные факторы, влияющие на динамику процесса, и одновременно отсеять все малосущественное в данной ситуации. Вполне возможно, при этом потребуются дальнейшая корректировка и уточнение модели, что может привести к разумному усложнению модели. С другой стороны, опираясь на анализ полученной модели, можно выделить те данные и тот уровень их детализации, которые наиболее полно характеризовали бы исследуемую систему и механизмы ее развития. Именно такой

предварительный анализ позволяет уточнить структуру данных, необходимых для дальнейшего, более детального исследования. Последнее позволяет сэкономить средства и усилия на сбор ненужных (а иногда и вредных!) для исследования данных, а необходимые данные собирать и хранить в оптимальном для каждого конкретного случая виде.

В данной работе с помощью предложенной простой математической модели проводится анализ состояния профессорско-преподавательского состава (ППС) высшей школы (ВШ) Российской Федерации и на основе проведенных исследований делаются некоторые прогнозы дальнейшего состояния кадрового состава высшей школы. Большое внимание в представленном исследовании уделяется проблеме подготовки кадров высшей квалификации через аспирантуры и докторантуры, действующие в высших учебных заведениях. Данные исследования позволяют оценить научный потенциал вузов России, а также дать прогноз его динамики в ближайшие несколько лет.

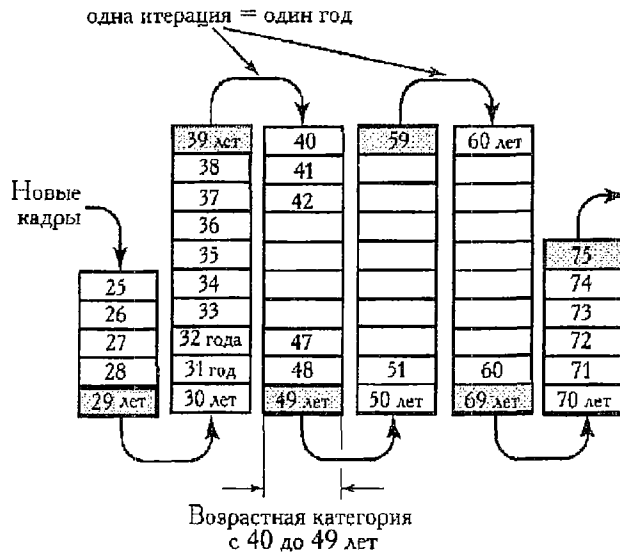
Для моделирования изменения численности ППС ВШ Российской Федерации был проведен анализ статистических данных за 1997-1999 годы, предоставленных Северо-Западным научным методическим центром [2]. Детальный анализ данных показал, что динамика численности и стратификация по возрастным группам кадрового состава высшей школы во многом совпадают по всем регионам России. На основании анализа статистических данных была разработана модель класса клеточных автоматов с дискретным временем, призванная смоделировать динамику развития кадрового состава высшей школы и дать прогноз на будущее.

1. Формулировка математической модели

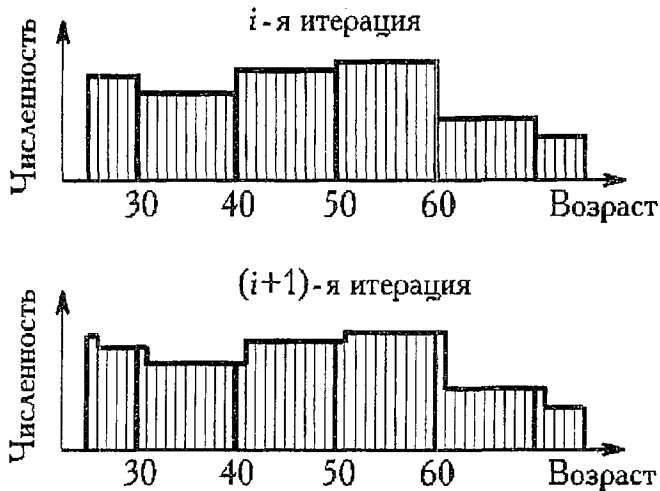
Модели типа клеточных автоматов в последнее время становятся все более востребованными в плане моделирования сложных систем, состоящих из большого числа элементов, какими являются социальные и социально-экономические системы [3-5]. В то же время, применение клеточных автоматов возможно и для моделирования динамики физических систем (см., например, [6-8]). Таким образом, клеточные автоматы являются мощным, гибким и эффективным инструментом для моделирования динамики сложных систем и прогнозирования развития ситуации.

В рамках предложенной модели каждая однородная возрастная категория ППС ВШ моделировалась одним элементом клеточного автомата, характеризующимся численностью этой категории. Эволюция элемента определяла изменение численности данной возрастной группы. Поскольку статистические данные, на основе которых проводился анализ кадрового состава высшей школы, строилась модель и делался прогноз динамики системы, были представлены для возрастных групп с интервалом в 10 лет (до 29 лет, от 30 до 39, от 40 до 49, от 50 до 59, от 60 до 65 и старше 65 лет для 1997 и 1998 годов; от 60 до 69 и старше 70 лет для 1999 года), модельные данные приводились к такой же структуре, для того чтобы можно было провести сопоставление результатов.

На рис. 1 представлено схематическое изображение модели. Каждый из «столбиков» на рис. 1, а представляет собой возрастную категорию длиной 10 лет. Каждая категория делится на «10 подкатегорий» (элементов клеточного автомата), соответствующих группе с одним возрастом: 35 лет, 36 лет, 44 года и т.п. Переход из одной возрастной подкатегории в другую происходит за один шаг дискретного времени, соответствующий временному интервалу $\Delta t=1$ год. Этому переходу соответствует сдвиг каждого элемента вдоль пространства клеточного



а



б

Рис. 1. Схематическое изображение модели типа «клеточный автомат», описывающей динамику численности профессорско-преподавательского состава высшей школы

автомата (см. рис. 1, б, который иллюстрирует одну итерацию во времени). Элемент, «возраст» которого соответствует границе группы (29, 39, 49, 59, 69 лет), переходит в следующую возрастную группу. При построении модели учитывались следующие факторы:

- старение каждого преподавателя с течением времени (за один интервал дискретного времени осуществлялся переход в следующую возрастную категорию каждого элемента модели);

- уход на пенсию преподавателей, достигших предельного возраста;
- уход активных сотрудников высшей школы в другие отрасли;
- появление новых молодых сотрудников из числа выпускников высших учебных заведений;

- защита кандидатских и докторских диссертаций с соответствующим переходом преподавателей в новую категорию (кандидаты наук или доктора наук).

Формализуем вышеперечисленные факторы, сформулировав правила клеточного автомата. Рассмотрим одномерное дискретное пространство с числом

элементов $j=1,2,\dots,N$, где $N=50$ (то есть $N=75 - 25$) лет. Здесь номер элемента соответствует категории возраста: $j=1$ соответствует возрасту 25 лет, $j=2$ - возрасту 26 лет и т.д.

В одномерном пространстве в начальный момент дискретного времени i задается множество клеток $\{x\}_j^{i=0}$. Каждая из клеток характеризуется своим значением X_j - численность данной возрастной категории, дискретная величина, определяющая число сотрудников с одинаковым возрастом. Положение клетки в пространстве (координата j) соответствует возрасту $(j+25)$ лет. В начальный момент времени $i=0$ распределение величин X_j задается на основании имеющихся статистических данных. Учитывая, что степень агрегации данных мала (возрастные группы приводятся с интервалом 10 лет), для получения интересующей нас численности групп с интервалом в 1 год используется предположение о равномерном распределении по возрастам сотрудников ВШ в начальный момент времени внутри одной группы с интервалом в 10 лет.

Динамика клетки («старение») на один год группы сотрудников с одинаковым возрастом) на каждом шаге во времени заключается в следующей процедуре:

$$X_j^{i+1} = X_{j-1}^i, \quad j = 2, \dots, N-1, \quad (1)$$

причем на границе пространства клеточного автомата $j=0$ используется граничное условие

$$X_0^{i+1} = X_0^i, \quad (2)$$

где величина X_0^i характеризует число молодых сотрудников (с возрастом 25 лет), пополняющих преподавательский состав каждый год. Величина X_0^i может быть функцией дискретного времени i . Учет ухода сотрудников высшей школы в другие сферы деятельности описывается процедурой

$$X_j^{i+1} = X_{j-1}^i - G(i,j), \quad j = 2, \dots, N-1. \quad (3)$$

В простейшем случае функция G имеет вид $G(i,j) = kX_j^{i+1}$, где коэффициент $k < 1$.

Соответствующие параметры модели определялись на основе статистических данных. К сожалению, следует отметить, что, несмотря на большой объем имеющихся в нашем распоряжении данных, для эффективного построения адекватной модели их оказалось явно недостаточно. Во-первых, следует отметить короткий интервал времени, охватываемый данными - всего три года, вследствие чего невозможно оценить адекватность модели на больших временах; вполне возможна ситуация, когда процессы, характеризующиеся большими временными масштабами, попросту «выпали» из поля зрения модели. Во-вторых, предоставленные для анализа данные имеют все-таки большую степень агрегации, чем это необходимо для построения модели и анализа ситуации - одна возрастная категория, фактически, представляет собой интегральную характеристику за 10 лет. В-третьих, границы возрастных категорий меняются от года к году: так, в 1998 году границы старших возрастных категорий были «60-65 лет» и «более 65 лет», а в 1999 году уже «60-69 лет» и «более 70 лет». Все это заставляет с осторожностью относиться к долгосрочным прогнозам, полученным в рамках анализа построенной модели: на наш взгляд, достоверным может быть прогноз, составленный на интервал в 2-3 года. Прогнозируемые на более длительный срок данные должны корректироваться с течением времени. Следует также отметить, что прогнозируемая динамика ППС ВШ получена в рамках предположения о том, что никаких кардинальных изменений экономико-политической ситуации в Российской Федерации, политики развития высшей школы не произойдет, то есть «все остается как есть в данный момент».

2. Анализ численности и стратификации по возрастам профессорско-преподавательского состава

Для анализа достоверности предложенной модели было предпринято прогнозирование сегодняшней ситуации, исходя из данных, относящихся к прошедшему времени: так, основываясь на статистических данных 1997 года по количественному и качественному составу преподавателей высшей школы, был сделан прогноз на 1998 и 1999 годы, а затем полученные результаты были сопоставлены с уже имеющимися статистическими данными (рис. 2 и 3).

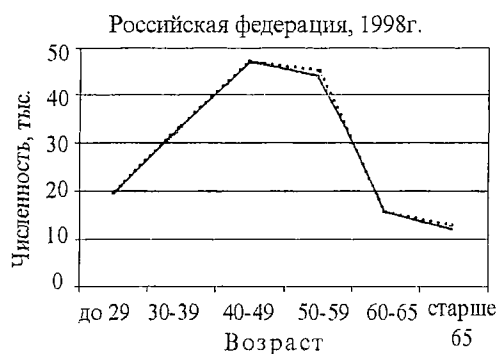


Рис. 2. Общая численность ППС ВШ РФ в 1998 году. Реальные статистические данные (сплошная линия) и прогноз, даваемый моделью (пунктирная линия) на основе данных 1997 года

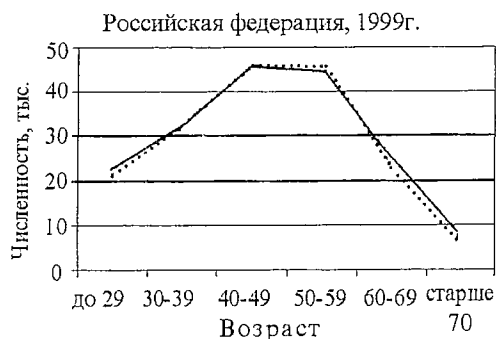


Рис. 3. Общая численность ППС ВШ РФ в 1999 году. Реальные статистические данные (сплошная линия) и прогноз, даваемый моделью (пунктирная линия) на основе данных 1997 года

Сопоставление реальных статистических данных по общей численности профессорско-преподавательского состава Российской Федерации с результатами моделирования позволяет сделать заключение о том, что предлагаемая модель способна обеспечить краткосрочный прогноз (на 2-3 года вперед) развития ситуации в высшей школе РФ с хорошей степенью точности. Аналогичный прогноз «настоящего из прошлого» был проведен и для ряда регионов России (рис. 4-7). Видно, что общая тенденция изменений кадрового состава высшей школы адекватно отражается предложенной моделью и является сравнительно одинаковой для всех регионов и страны в целом. Существующие отличия статистических данных от прогнозируемых (см. например, рис. 7, 8), по всей видимости, обуславливаются региональными особенностями, но не носят принципиального характера.

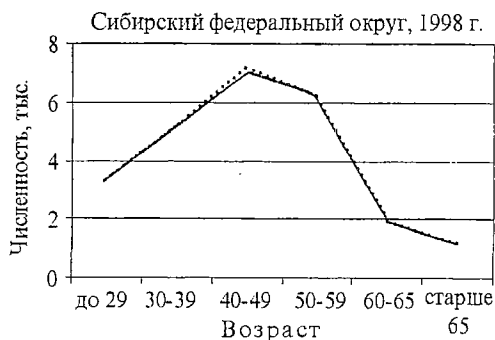


Рис. 4. Численность ППС ВШ по Сибирскому федеральному округу в 1998 году. Реальные статистические данные (сплошная линия) и прогноз (пунктирная линия), даваемый моделью на основе данных за 1997 год

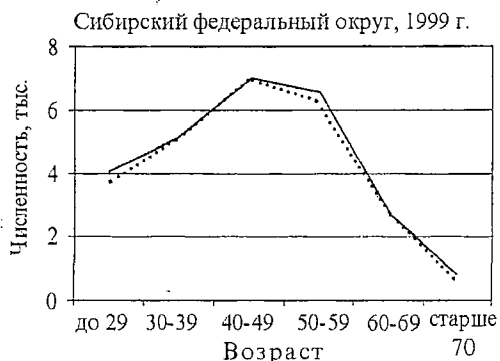


Рис. 5. Численность ППС ВШ по Сибирскому федеральному округу в 1999 году. Реальные статистические данные (сплошная линия) и прогноз (пунктирная линия), даваемый моделью на основе данных за 1997 год

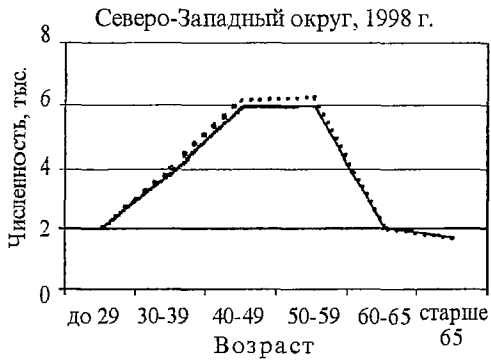


Рис. 6. Численность ППС ВШ по Северо-Западному федеральному округу в 1998 году. Реальные статистические данные (сплошная линия) и прогноз (пунктирная линия), даваемый моделью на основе данных за 1997 год

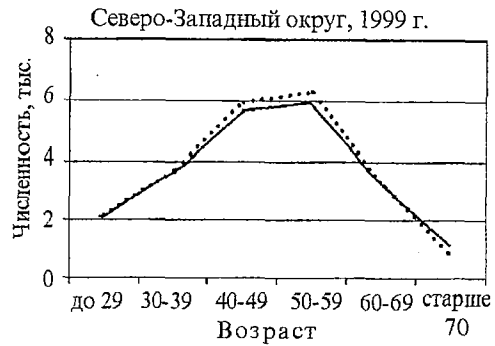


Рис. 7. Численность ППС ВШ по Северо-Западному федеральному округу в 1999 году. Реальные статистические данные (сплошная линия) и прогноз (пунктирная линия), даваемый моделью на основе данных за 1997 год

На основе предложенной модели было проведено прогнозирование дальнейшей динамики численности профессорско-преподавательского состава высшей школы Российской Федерации (рис. 8, табл. 1). В качестве исходных были взяты самые последние доступные нам данные по 1999 году.

Из диаграммы и таблицы видно, что по прогнозу с течением времени будет происходить возрастание доли ППС возрастных категорий от 60 до 69 лет и более 70 лет. Иными словами, число преподавателей высшей школы, возраст которых превышает пенсионный, увеличивается. Так, по результатам моделирования к концу 2003 года число сотрудников, возраст которых превышает 70 лет, возрастет по сравнению с концом 1999 года в 1.6 раза, а число преподавателей возрастной категории от 60 до 69 лет - в 1.3 раза. В то же время,

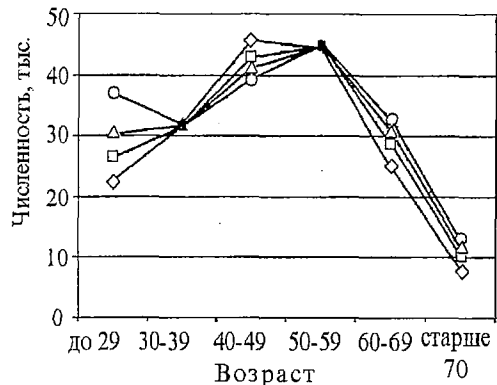


Рис. 8. Прогноз изменения численности ППС ВШ России по возрастным категориям на конец 2001 года (□), конец 2002 года (△) и конец 2003 года (○) на основе реальных статистических данных 1999 года (◇)

Таблица 1

Данные (1999 г.) и прогноз численности профессорско-преподавательского состава ВШ РФ

Возрастная категория	Численность профессорско-преподавательского состава (чел.)			
	1999	2001	2002	2003
до 29	22570	26238	30540	37047
от 30 до 39	32216	31622	31567	31653
от 40 до 49	45911	43011	41327	39498
от 50 до 59	44623	44881	45009	45138
от 60 до 69	25069	28980	30935	32891
старше 70	7966	10324	11504	12683

остаётся самой большой (и, практически, без изменений) доля возрастной категории от 50 до 59 лет. С другой стороны, доля возрастной категории от 40 до 49 лет к концу 2003 года уменьшится почти на шесть с половиной тысяч человек по сравнению с 1999 годом.

Результаты моделирования предсказывают увеличение числа молодых сотрудников высшей школы, возраст которых оказывается менее 29 лет. На наш взгляд, к этому прогнозу следует относиться с некоторой степенью осторожности, ибо он был получен в предположении, что общая ситуация не претерпит серьёзных изменений. В то же время, в связи со сложной демографической ситуацией следует прогнозировать уменьшение числа выпускников общеобразовательных школ, а следовательно, и уменьшение числа абитуриентов и студентов, что должно повлечь за собой сокращение численности ППС ВШ. Одновременно имеет место тенденция сокращения численности ППС, связанная с приведением соотношения «преподаватель/студент» к величинам 1:10, 1:12. Подобные сокращения в первую очередь приводят к ликвидации вакантных мест и, как следствие, к тому, что сокращается прием на работу новых (прежде всего, молодых) сотрудников. Таким образом, если вышеизложенные тенденции будут иметь развитие, то численность возрастной категории «до 29 лет» профессорско-преподавательского состава высшей школы Российской Федерации может быть меньше, чем предсказывает модель.

Таким образом, общая тенденция выглядит следующим образом: увеличение доли старших возрастных категорий, уменьшение доли активной возрастной категории «от 40 до 49 лет» и некоторое увеличение доли молодых сотрудников. Ещё раз следует подчеркнуть, что результаты получены в предположении, что общая ситуация в стране и высшей школе не претерпевает существенных изменений.

3. Результаты моделирования динамики численности и возрастного состава докторов наук

С помощью предложенной модели клеточного автомата было проведено рассмотрение качественного состава преподавателей высшей школы на примере анализа численности и возрастного состава сотрудников, имеющих ученую степень доктора наук.

На рис. 9 представлены зависимости доли докторов наук (в процентах) в общей численности профессорско-преподавательского состава для различных возрастных категорий для 1997, 1998 и 1999 года. Из анализа данных, представленных на рисунке, можно видеть, что число докторов наук в возрастной

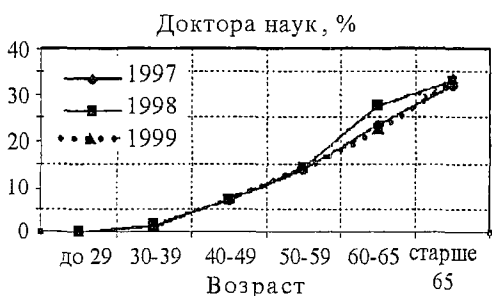


Рис. 9. Процентное содержание числа докторов наук среди всего профессорско-преподавательского состава высшей школы РФ для различных возрастов в 1997, 1998 и 1999 годах (данные взяты из [2])

группе «до 29 лет» крайне незначительно (меньше 1%). Число докторов наук в возрастных группах «30-60 лет» и «свыше 60 лет» зависит от возраста линейно, но с различными коэффициентами пропорциональности для каждой из групп. Вид графика слабо зависит от года, для которого он построен. Это позволяет определить число докторов наук D_j в различных возрастных категориях j по результатам моделирования общей численности ППС следующим образом:

$$D_j^i = d(j)X_j^i, \quad (4)$$

где функция $d(j)$ вводится феноменологически и имеет вид

$$d(j) = \begin{cases} 0, & j \leq 8, \\ 0.69(j - 33.5), & 8 < j \leq 35, \\ 0.013(j - 15.7), & j > 35. \end{cases} \quad (5)$$

Как и в предыдущем случае, чтобы определить параметры модели и убедиться в достоверности полученных результатов, был проведен прогноз числа докторов наук на 1998 и 1999 годы по данным 1997 года и результаты были сопоставлены с реальными статистическими данными (рис. 10 и 11). Соответствие результатов моделирования и реальных статистических данных позволяет

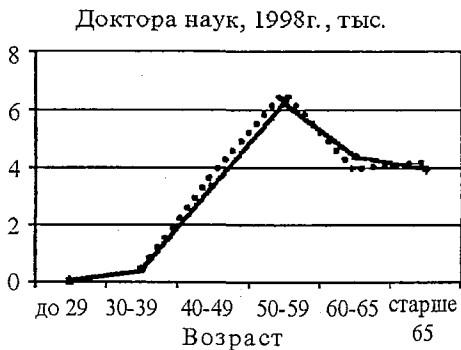


Рис. 10. Общая численность докторов наук среди ППС ВШ РФ в 1998 году. Реальные статистические данные (сплошная линия) и прогноз, даваемый моделью (пунктирная линия) на основе данных 1997 года



Рис. 11. Общая численность докторов наук среди ППС ВШ РФ в 1999 году. Реальные статистические данные (сплошная линия) и прогноз, даваемый моделью (пунктирная линия) на основе данных 1997 года

говорить о том, что модель достаточно адекватно описывает и данный аспект динамики ППС ВШ.

Исходя из предложенной модели, был сделан прогноз динамики численности докторов наук среди профессорско-преподавательского состава высшей школы. Вновь в качестве исходных были взяты статистические данные 1999 года. Результаты моделирования приведены на рис. 12 и в табл. 2.

Из приведенных данных видно, что, как и в случае общей численности ППС (см. табл. 1), среди докторов наук увеличивается доля возрастных категорий «от 60 до 69 лет» и «старше 70 лет». Так, по прогнозу, получаемому на основе анализа моделирования системы, к концу 2003 года число докторов наук в возрасте старше 70 лет возрастет почти в два раза (точнее говоря, в 1.8 раза) по сравнению с концом 1999 года. Точно также увеличится и число докторов наук

адекватно описывает и данный аспект динамики ППС ВШ.

Исходя из предложенной модели, был сделан прогноз динамики численности докторов наук среди профессорско-преподавательского состава высшей школы. Вновь в качестве исходных были взяты статистические данные 1999 года. Результаты моделирования приведены на рис. 12 и в табл. 2.

Из приведенных данных видно, что, как и в случае общей численности ППС (см. табл. 1), среди докторов наук увеличивается доля возрастных категорий «от 60 до 69 лет» и «старше 70 лет». Так, по прогнозу, получаемому на основе анализа моделирования системы, к концу 2003 года число докторов наук в возрасте старше 70 лет возрастет почти в два раза (точнее говоря, в 1.8 раза) по сравнению с концом 1999 года. Точно также увеличится и число докторов наук

Исходя из приведенных данных видно, что, как и в случае общей численности ППС (см. табл. 1), среди докторов наук увеличивается доля возрастных категорий «от 60 до 69 лет» и «старше 70 лет». Так, по прогнозу, получаемому на основе анализа моделирования системы, к концу 2003 года число докторов наук в возрасте старше 70 лет возрастет почти в два раза (точнее говоря, в 1.8 раза) по сравнению с концом 1999 года. Точно также увеличится и число докторов наук

Рис. 12. Прогноз изменения численности докторов наук среди профессорско-преподавательского состава России по возрастным категориям. На диаграмме приведены исходные реальные статистические данные по 1999 году и прогнозируемая численность докторов наук среди преподавательского состава на конец 2001 года, конец 2002 года и конец 2003

Таблица 2

Возрастная категория	Численность докторов наук среди профессорско-преподавательского состава			
	1999	2001	2002	2003
от 30 до 39 лет	483	361	343	326
от 40 до 49 лет	3445	3345	3250	3136
от 50 до 59 лет	6483	6496	6513	6530
от 60 до 69 лет	5687	7571	8060	8549
старше 70	2670	3923	4371	4820

в возрасте от 60 до 69 лет. В то же время доля докторов наук, принадлежащих к возрастным категориям от 30 до 39 и от 40 до 49 лет уменьшается, хотя и незначительно.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что процесс старения профессорско-преподавательского состава высшей школы Российской Федерации продолжается и становится все более острым. Так, по прогнозу, в 2003 году средний возраст доктора наук достигнет 60 лет и, соответственно, среднестатистический доктор наук станет пенсионером.

4. Результаты моделирования некоторых возможных ситуаций развития высшей школы

Рассмотрим с помощью разработанной модели некоторые возможные ситуации дальнейшей эволюции численности и возрастного состава профессорско-преподавательского состава высшей школы.

Одной из современных тенденций эволюции высшей школы является ограничение роста и даже сокращение численности профессорско-преподавательского состава вузов. Число преподавателей в вузе жестко «привязывается» к численности студентов в соотношении «преподаватель/студент» 1:10 или даже 1:12. Обеспечение такого соотношения неизбежно приводит к сокращению численности сотрудников высшей школы, которое в первую очередь затрагивает возрастную категорию «до 29 лет»: происходит вынужденное уменьшение притока молодых кадров из числа закончивших аспирантуру, или прямо со студенческой скамьи.

Такую ситуацию уменьшения числа молодых сотрудников, приходящих в высшую школу, возможно феноменологически моделировать путем задания начального условия в виде

$$X_0^{i+1} = \gamma X_1^i, \quad (6)$$

где коэффициент $\gamma < 1$.

Рассмотрим результаты моделирования динамики профессорско-преподавательского состава с учетом граничного условия (6) с коэффициентом $\gamma=0.95$. Все остальные условия, влияющие на динамику кадрового состава, оставались неизменными. В качестве начальных условий были взяты данные по распределению числа сотрудников ВШ по возрастам за 1999 год. На рис. 13 показаны рассчитанные зависимости общей численности (а), среднего возраста (б) и числа молодых сотрудников (с возрастом до 35 лет) (в) профессорско-преподавательского состава на период с 1999 по 2013 года. Расчеты проводились



Рис. 13. Прогноз изменения численности ППС в случае уменьшения притока молодых специалистов в высшую школу

без учета рекомендуемого соотношения «преподаватель/студент», равного 1:10. Учтем эти данные. Предположим, что численность контингента студентов не изменяется и остается на уровне 1999 года. В 1999 году общая численность студентов очной и вечерней формы обучения по всем вузам России составляла 1766281 человек, что дает возможную численность профессорско-преподавательского состава на уровне 176600 человек. Если учитывать студентов только очной формы обучения, то их число в 1999 году составляло 1578210 человек. При этом общая численность преподавателей не может превысить 157800 человек.

С учетом этого численность профессорско-преподавательского состава в предыдущем расчете достигает необходимого уровня (176600 человек) только в 2010 году (см. рис. 13, а). Поэтому необходим иной, более жесткий сценарий развития кадрового состава высшей школы.

Рассмотрим вначале «идеальный» сценарий: в каждом году находится отклонение от числа сотрудников, определяемых отношением «преподаватель/студент», и в соответствии с ним рассчитывается доля сотрудников s (в относительных единицах), которая должна быть уволена, причем из каждой возрастной группы увольняется одинаковое относительное число сотрудников, равное sX_j . На рис. 14 представлены результаты расчетов, соответствующие таким правилам эволюции высшей школы.

Как видно из рис. 14, а, на котором показан средний возраст преподавателей за период с 1999 по 2013 год, - это сценарий медленного старения ППС ВШ. Однако на ближайшие два-три года такой сценарий развития обеспечивает некоторую стабилизацию ситуации и даже позволяет несколько увеличить число молодых сотрудников, приходящих в высшую школу. Поэтому такую динамику ППС ВШ можно рассматривать как не самый плохой сценарий переходного периода (назовем его «мягким» сценарием). Если соотношение «преподаватель/



Рис. 14. Прогноз изменения численности ППС в случае стабилизации числа сотрудников высшей школы в соответствии с отношением «преподаватель/студент», равным 1:10, по «мягкому» сценарию развития



Рис. 15. Прогноз изменения численности ППС в случае стабилизации числа сотрудников ВШ в соответствии с отношением «преподаватель/студент», равном 1:10, по «жесткому» сценарию развития

студент» будет установлено на уровне 1:12, динамика ППС качественно подобна предыдущему случаю, однако «старение» среднестатистического преподавателя происходит значительно быстрее. Также существенно возрастает доля преподавателей пенсионного возраста с одновременным уменьшением скорости роста числа молодых специалистов.

Более реалистичным в плане практической реализации в вузах требуемого соотношения «преподаватель/студент» представляется сценарий, при котором уменьшение численности ППС достигается путем частичного увольнения лиц пенсионного возраста (особенно, не имеющих ученых степеней) и резкого ограничения числа приема на работу молодых сотрудников (то есть ситуация, аналогичная первой из рассмотренных в данном разделе статьи, но с более жестким контролем за числом преподавателей - «жесткий» сценарий развития).

В этом случае модель предсказывает (рис. 15) существенно более быстрый рост числа сотрудников пенсионного возраста, чем в предыдущем случае, и быстрое (можно даже сказать, катастрофическое) уменьшение притока молодых кадров, в отличие от предыдущего случая, где наблюдался хоть и небольшой, но все же рост этого показателя (ср. рис. 15, в и 14, б).

Так, за 10 лет число молодых сотрудников уменьшается более чем в 2 раза (см. рис. 15, в). Одновременно средний возраст сотрудника высшей школы стремится к шестидесяти годам (см. рис. 15, а), то есть в отличие от предыдущего раздела, в котором получено, что среднестатистический доктор наук через несколько лет будет иметь пенсионный возраст, при «жестком» варианте развития через 15-20 лет среднестатистический преподаватель высшей школы станет пенсионером.

Заметим, что к описанным возможным сценариям прогноза следует относиться осторожно, так как они предполагают неизменными социально-политические условия в стране в течение прогнозируемого периода. Тем не менее, из полученных результатов можно делать те или иные качественные выводы, а также судить о последствиях выбора той или иной кадровой политики в высшей школе. Можно лишь сделать неутешительный вывод, что любое сокращение ППС приведет к ухудшению и так достаточно непростой ситуации, сложившейся с кадровым составом высшей школы РФ.

Заключение

В представленной работе предложена модель класса клеточных автоматов, описывающая динамику численности и распределения по возрастам профессорско-преподавательского состава высшей школы. Параметры модели выбирались из

анализа реальных статистических данных [2]. Сравнение результатов моделирования с уже имеющимися данными показало высокую достоверность предсказываемых с помощью модели результатов. Так, например, для 1999 года погрешность прогноза составила всего 3.2%.

Проведенное исследование показало, что для эффективного анализа состояния профессорско-преподавательского состава высшей школы Российской Федерации и качественного прогноза на будущее (а следовательно, и прогноза динамики научного потенциала высшей школы России), необходимы статистические данные с более высоким уровнем детализации, например, число преподавателей в определенном возрасте с точностью до года. Также очень важно научиться измерять величины, которые характеризуют качество деятельности профессорско-преподавательского состава. Поэтому важным направлением дальнейших исследований является сбор и анализ статистических данных по динамике профессорско-преподавательского состава хотя бы в одном вузе, например, Саратовском госуниверситете. Это позволит уточнить и апробировать предложенную математическую модель на существенно более полных и менее агрегированных данных (см. Введение).

Работа поддержана программой Минобразования РФ «Государственная поддержка региональной научно-технической политики высшей школы и развитие ее научного потенциала» (подпрограмма 2, раздел 4, проект 148).

Библиографический список

1. Дежина И.Г. Наука в российских вузах: что делается сегодня для ее поддержания и развития? // Науковедение. 1999. № 4.
2. Научный потенциал вузов и научных организаций Минобразования России. Статистический сборник. М., 1998; М., 1999.
3. Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е. Некоторые модели класса решеточных газов, связанные с описанием численности популяций // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 4. С. 74.
4. Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Динамика численности населения как процесс, подчиняющийся уравнению диффузии // Докл. РАН. 2000. Т. 372, № 3. С. 397.
5. Короновский А.А., Храмов А.Е. Самоорганизованная критичность в иерархических структурах управления // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8. № 6. С. 27.
6. Frish U., d'Humieres D., Hasslacher B., Lallemand P., Pomeau Y., Rivet J.-P. Lattice gas hydrodynamics in two and three dimensions // Complex Systems. 1987. Vol. 1. P. 469.
7. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of $1/f$ noise // Phys. Rev. Lett. Vol. 59. 1987. P. 381.
8. Короновский А.А., Храмов А.Е., Анфиногентов В.Г. Феноменологическая модель электронного потока с виртуальным катодом // Изв. РАН. Сер. Физическая. 1999. Т. 63, № 12. С. 2355.

Саратовский государственный
университет
Министерство Образования РФ,
Управление развития и планирования
научных исследований, Москва

Поступила в редакцию 15.10.01

APPLICATION OF CELLULAR AUTOMATA FOR MODELLING OF THE TEACHING STAFF DYNAMICS IN HIGHER SCHOOL OF RUSSIAN FEDERATION

A.A. Koronovskii, M.N. Strikhanov, D.I. Trubeckov,
A.E. Hramov, I.V. Tsukanova

The attempt was made of modelling of the teaching staff dynamics in Higher School of Russia. On the base of statistical data analysis the cellular automata class model with discrete time was constructed. Some results of the age-structure dynamics analysis by this model are presented.



Короновский Алексей Александрович - родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Кандидат физико-математических наук (1997). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Опубликовал в соавторстве с Д.И. Трубецковым монографию «Нелинейная динамика в действии» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996). Автор ряда статей в центральной печати.



Стриханов Михаил Николаевич - родился в Краснодаре (1952). Окончил Московский инженерно-физический институт (1974). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МИФИ (1978) и доктора физико-математических наук в МИФИ (1992) в области ядерной физики. Профессор Московского инженерно-физического института, начальник управления развития и планирования научных исследований Министерства Образования РФ.

E-mail: strikhanov@ministry.ru



Трубецков Дмитрий Иванович родился в Саратове в июне 1938 года. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Ректор СГУ, заведующий кафедрой электроники и волновых процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской Академии наук, заслуженный деятель науки РФ. В Саратовском государственном университете в разное время подготовил и прочитал общие курсы лекций «Основы электроники сверхвысоких частот», «Квантовая электроника», «Методы математической оптимизации», «Теория волновых процессов», а также специальные курсы «Введение в специальность (радиофизика и электроника)», «Теория СВЧ электронных приборов О и М-типа», «Вакуумная микроэлектроника», «Высокочастотная релятивистская

электроника», «Хаос и структуры», «Линейные волны», «Нелинейные волны». Некоторые из спецкурсов читал в Санкт-Петербургском государственном техническом университете и Ростовском государственном университете. Научный руководитель Лицея прикладных наук СГУ. Соросовский профессор (1994, 1995). Автор учебных пособий «Введение в теорию колебаний и волн» (М.: Наука, 1984; The Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1989; М.:Наука, 1992; совместно с М.И. Рабиновичем); «Нелинейная динамика в действии» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1995; совместно с А.А. Короновским) «Колебания, волны, электроны» и «Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996; совместно с А.Г. Рожневым и Д.В. Соколовым).



Храмов Александр Евгеньевич - окончил Саратовский госуниверситет (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика (1999). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика распределенных систем, методы анализа и моделирования динамических систем, мощная СВЧ-электроника.

E-mail: aeh@cas.ssu.runnet.ru



Цуканова Ирина Владимировна - студентка второго курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.



О СИНЕРГЕТИЧЕСКОМ ИЗМЕРЕНИИ ИСКУССТВА

Б.Н. Пойзнер

Обсуждается книга И.А. Евина «Что такое искусство с точки зрения физики?» (2000). Рассматриваются идеи, которые можно интерпретировать как истоки синергетического и физического подходов к искусству. Предлагаются линии возможного продолжения книги.

N.N. - с благодарностью

Глаз, видящий другой глаз и вбирающий в себя лучшее в нем - то, как именно он видит, - может таким образом узреть себя самого.

Сократ в «Первом Алкивиаде» Платона

Все искусство основано на «понимании», а не на творчестве.

Творческий акт - это умение управлять своим бессознательным, призывать его. ...

Произведение искусства начинает существовать с того мгновения, когда оно впервые понято. ...

Искусство живет пониманием и творится пониманием. ...

Большинство людей обыкновенно видит в мире ту красоту, которая ими познана уже раньше в искусстве.

Максимилиан Волошин. 1907-1909

У хаоса есть три дочери,
от каждого из пересекающих его планов -
это Хаонды: искусство, наука и философия
как формы мысли или творчества.

Стыком (но не единством) этих трех планов является мозг.

Жиль Делез, Феликс Гваттари. 1995

В европейской культуре эстетические ценности занимали и занимают весьма высокое место на аксиологической шкале. Так, в схеме Макса Шелера лишь ценности религиозной веры располагаются выше эстетических. Поэтому вторжение физической мысли в сферу искусствознания нередко воспринимается его хранителями (да и многими поклонниками прекрасного) как вульгаризация,

разнузданный сциентизм или даже кощунственная бестактность. Якоб Буркхардт метко назвал естествознание *великим упрощителем*, указывая на неизлечимую ограниченность его метода.

Недавно к вопросу о принципиальной допустимости в науках о человеке и обществе *«количественного (в более общем случае - точного) исследования, приводящего к выявлению четких закономерностей»*, вновь обратился Вяч. Вс. Иванов. Он напомнил, что возражения против этого подхода приходилось слышать с самых разных сторон, в том числе от Н. Винера, одного из основателей кибернетики. Ему казалось, что даже при описании таких явлений, как язык, отсутствует регулярная повторяемость, на которую опираются выводы в естественных науках. Согласно Иванову, *«эти соображения неверны, во всяком случае по отношению к строго организованным системам знаков»* [1, с. 90]. Свое утверждение Иванов аргументирует сюжетами из лингвистики, теории ритуала, исторической семасиологии, стиховедения, семиотики культуры.

Искусствоведение, в частности, искусствометрия, нейроэстетика и алгоритмическая эстетика в этом ряду примеров не упомянуты. Тем не менее накоплен многообразный материал, свидетельствующий о развитии нескольких вариантов естественнонаучного подхода к искусству. Каковы его истоки, состояние и перспективы? Ответы на этот вопрос в литературе даются преимущественно в дискуссионных тонах, поскольку границы применимости такого подхода еще не определили. Но бесспорно, что категории и методы нелинейной динамики окажутся плодотворными как при разработке естественнонаучного подхода к искусству, так и при оценке его пределов. Аргументом здесь видится выход в свет монографии Игоря Алексеевича Евина *«Что такое искусство с точки зрения физики?»* [2]. Стремление откликнуться на нее вылилось в попытку наметить линии возможного продолжения этой содержательной книги.

Первая версия труда Евина (*«Синергетика искусства»*, 1993) широко цитируется, как и опубликованные в начале 1980-х годов статьи, излагавшие оригинальные идеи автора. Его выступления на конференциях в Суздале не теряются на фоне докладов, отмеченных знаком продуктивного методологического авангардизма. Кстати говоря, И.А. Евин предвидит возражения против физического и синергетического подходов к тонкой материи искусства, а то и возможные обвинения в варварском физикализме. Поэтому в предисловии он приводит философскую сентенцию из естественнонаучного фольклора: *упрощать - сложно, усложнять - просто.*

Digest. Монография Евина состоит из двух глав. В первой излагаются - местами слишком лаконично - основные принципы теории самоорганизации и теории искусственных нейронных сетей. Интерпретируется функционирование мозга. Основой его описания служат введенные ранее представления, модели ассоциативной памяти и распознавания зрительных образов, в том числе неоднозначных форм (*ambiguous patterns*) [2, с. 35-53]. Этот материал позволяет во второй главе объяснять структуру и функцию произведений искусства, исходя из закономерностей работы мозга.

Демонстрируя проявления самоорганизации в художественных произведениях, И.А. Евин на многих примерах из мирового искусства показывает присутствие в них ситуации неустойчивости, особенно так называемых бимодальных состояний. Они существенны для создания эффекта комического, для актерского мастерства, для феномена игры. Согласно наблюдениям автора книги, практически для всех жанров типичны бифуркация и *«фазовый переход»* в развитии сюжета. Они известны под различными названиями: катастрофа басни,

надевание/срывание маски, вторжение роли (*character invasion*), скачок в пафосной композиции и др. [2, с. 55-83, 93-107].

И.А. Евин обобщил новейший материал, посвященный фрактальной (самоподобной) структуре ряда музыкальных произведений. Он разъясняет, почему строению музыкального лада можно поставить в соответствие нейронно-сетевую модель ассоциативной памяти Хопфилда. А попутно комментирует основания ладо-тональных предпочтений человека. Так, в ритмической организации первого экосеза Бетховена и других пьес присутствует бинарная фрактальная структура [2, с. 107-119]. Позднее И.А. Евин выдвинул гипотезу о том, что музыка есть способ управления динамическим хаосом (*controlling chaos*) мозга [3, с. 103]. В 1980-х годах установлено, что активность здорового мозга отличается хаотической динамикой (см. эпиграф из Ж. Делеза и Ф. Гваттари).

Собранная в книге коллекция примеров иллюстрирует положение о том, что структурная организация многих произведений художественной литературы, живописи, музыки, драматургии подчиняется распределению Ципфа [2, с. 29-32]. Напротив, для случайных явлений в неживой природе и технике типично распределение Гаусса. «Ципфовость» свидетельствует о наличии пространственной или временной фрактальности строения артефактов [2, с. 119-136]. Подчеркнем, что частотный спектр «фликкер-шума», характерного для хаотических процессов в различных системах (в полупроводниковых и вакуумных электронных приборах, в недрах Земли и на поверхности Солнца *etc.*), для явлений так называемой самоорганизованной критичности (возникновение техногенных и природных катастроф, формирование природных ландшафтов и т.п.) тоже удовлетворяет распределению Ципфа.

Тем самым Игорь Алексеевич осуществляет давний замысел жившего в изгнании русского философа, композитора, богослова Владимира Ильина: «Превратить хаос в новое орудие исследования ситуаций» (цит. по [4, с. 33]). В целом же монография [2] показывает широту компетенции нелинейной динамики. Согласно ей, всевозможные формы порядка и хаоса в неорганическом мире, в биосфере, в продуктах творческой деятельности людей регулируются некоторыми универсальными законами и выражаются общими моделями.

Есть ли у И.А. Евина предтечи среди теоретиков искусства? Он ссылается на концепции С. Эйзенштейна, Л. Выготского, Э. Гомбриха. Всего же в списке литературы 121 название. Это свидетельствует о завидной эрудиции автора и его таланте систематизатора, придает книге безусловную ценность. В ней следует видеть ядро полидисциплинарного учебного пособия для студентов-гуманитариев.

Опыт реконструкции родословной подхода. Думается, генеалогию физико-искусствоведческого подхода следует дополнить и тем самым подчеркнуть фундаментальность проблемы, решаемой И.А. Евиным. Если ограничиться русской культурой, то окажется, что его подход имеет несколько латентных и явных истоков.

1. Учение о всеединстве. Категорию «всеединство» (*die Allinheit*) использовал Фридрих Шеллинг, ссылаясь на философию Б. Спинозы, но одновременно отмежевываясь от него: «Истинный пантеизм тоже, конечно, учит о всеединстве, но это разорванное учение» [5, с. 281, 319]. Концепцию всеединства, понимаемого как «абсолютный организм», «вселенский организм», развивал Владимир Соловьев в конце 1870-х годов. Он трактовал органическую целостность бытия как универсума в форме взаимодействия и раздельности составляющих его частей. По словам философа, «истинное единство сохраняет и усиливает свои элементы», «человек... имеет ту же внутреннюю сущность жизни - всеединство», «человеческое сознание... является как чистая потенция идеального

всеединства» [6, с. 146, 144, 150, 152]. При этом «природный или материальный элемент... становится... всеединным». Становящееся всеединство именно «в человеке впервые получает собственную внутреннюю действительность, находит себя, сознает себя. <...> В человеке же всеединство получает действительную, хотя еще идеальную форму, - в сознании» [7, с. 317, 319]. Влияние идеи всеединства заметно в сочинениях П. Флоренского, Л. Карсавина, С. Франка, С. Трубецкого, Н. Лосского, С. Булгакова, Вл. Ильина.

С середины 1990-х годов физик-теоретик и философ С.С. Хоружий дополняет концепцию всеединства учением о том, что бытие-действие человека включает в себя момент онтологической альтернативы и потому должно быть определено как *бытие-бифуркация* [8, с. 341]. В связи с этим он предсказывает «появление «виртуалистского мировосприятия» и человека, ориентированного на виртуальность - ориентированного на всех уровнях своей организации, начиная с телесного. В сфере компьютерных технологий и массовой культуры, культуры рока и клипа, моментально-дискретных, вспыхивающих и сменяющихся эстетических блоков, перцептивный аппарат человека весь перестраивается на виртуальность, входит в особый виртуальный режим». Хоружий полагает, что антропологические процессы сегодня «отражают нарастающую тенденцию к восприятию реальности человеком - как многомирной, реальности сценарной и вариантной, реальности, где все большее место принадлежит модельной и игровой, подвижной, пластичной и проблематичной стихии» [8, с. 349]. В свете этих философских построений очевидна своевременность работы Евина.

2. «Философия общего дела», ориентирующая человечество на совместную деятельность по воскрешению «родителей» - всех живших ранее людей. К разработке этой доктрины, отводящей исключительное место человеческому творчеству как высшей стадии эволюции, Николай Федоров приступил в конце 1870-х годов. «Способность жить во вселенной, дав возможность роду человеческому населить все миры, дает нам и силу объединить все миры вселенной в художественное целое, в художественное произведение, многоединым художником которого, в подобие Троицеодному творцу, будет весь род человеческий в совокупности воскресших и воссозданных поколений, - был уверен Федоров... При этом объединенные наука и искусство станут этикой и эстетикой, сделаются естественной, мировой техникой этого художественного произведения, космоса...» [9, с. 401]. Заметим, что близким синонимом для выражения 'общее дело' могло бы служить древнегреческое слово 'синергия', а современный проект сближения науки и искусства разрабатывается в рамках синергетической парадигмы.

3. Концепция жизнотворчества. Русский символизм в искусстве охватывал несколько культурно-исторических эпох: с 1890-х до 1920-х (согласно периодизации А. Пайман, - с 1892 года до конца 1930-х [10, с. 24, 318]). Напомним, что определение понятия «символизм» Э. Золя привел в 1874 году в московском журнале «Вестник Европы» [11, с. 19, 71]. Ранние символисты (1890-е - начало 1900-х) в своем убеждении, что эстетическое начало составляет сущность бытия, видели во Вл. Соловьеве духовного предтечу [12, с. 365]. В их среде «существовало представление о символическом как о праединстве, как о гармонии части и целого, синтезе или соединении противоположностей и, соответственно, реализации этого единства в мышлении, языке и жизни». Согласно этой концепции, в «тексте жизни» символистского жизнотворчества реализуется «текст искусства». Причем жизнеисполнение становится «комментарием» к «жизне-искусству», «свернутому», «запрограммированному» в поэтическом творчестве [11, с. 16, 57].

Можно ли усмотреть у символистов какие-либо предпосылки синергетического подхода? Рискнем ответить утвердительно. Прежде всего обратим внимание на то, что символизм, тяготея к синтезу, придал культуре «серебряного

века» в России черты универсализма и целостности. Особенно это относится к театральной культуре - вышедшая в 2000 году монография А.В. Висловой выразительно озаглавлена: «“Серебряный век” как театр». Опорными точками символизма оказались учения космистов и сторонников идеи всеединства. Отсюда естественным образом возникла тяга к искусству и принципам жизни Китая, Индии, Японии [13, с. 25-26]. Видимо, крайним выражением такого интереса было признание композитора Александра Скрябина: «Я убежден, что мы, европейцы, больше знаем и чувствуем Восток, чем те, кто на востоке» (цит. по [14, с. 343]). Как известно, философская традиция Китая вполне согласуется с концепцией синергетики, являясь в некотором роде ее предшественницей.

Ранние символисты, например В. Брюсов, видели смысл деятельности художника в открытии новых приемов и обновлении выразительных средств, способных суггестивно воздействовать на восприятие современников. Примечательно, что для характеристики художественного стиля поэтов-символистов А. Ханзен-Леве использует понятие «диаволического символизма» [11, с. 40, 57]. Здесь полезно обратиться к этимологии обоих слов: древнегреческое *διαβαλλειν* означает раздвоение, разделение, ссору, обман, обольщение (отсюда *διαβολος* - обманщик, клеветник, а в Новом Завете - дьявол, то есть злой дух, сатана). Напротив, *συμβαλλειν* - соединение, слияние, сделка, ссуда (отсюда *συμβολαιον*=*συμβολον* - знак, примета, признак; условный знак, служивший доказательством союза гостеприимства, заключенного между двумя семействами; опознавательный знак мистерий, пароль, сигнал; знамение, символ, предзнаменование). По наблюдениям Ханзена-Леве, в творческой позиции ранних символистов «символическое» диаволизируется, утрачивая свою соединяющую силу: начинает преобладать *διαβαλλειν* как деструктивное, раздробляющее, болезненное начало, противоположное *συμβαλλειν* - мифологически-религиозному символу. Поэт должен сначала создать «диаволический» дискурс (то есть правила организации речевой деятельности, стиль), надеясь когда-нибудь достичь «символического» дискурса [11, с. 57-58, 71]. В такой модели творческой эволюции художника (от разобщенности - к целостности) можно видеть прообраз классической схемы самоорганизации: от хаоса - к порядку.

Идея жизнестроительной функции искусства, экспансии его в жизнь задавала образец почти всех эстетических утопий «серебряного века» в России [15, с. 21]. Неоромантическое представление о человеке искусства как пророке и теурге, определяющем образ будущего и путь в него, характерно для сознания просвещенных слоев российского общества 1900-1920-х годов. «Тень символизма широко нависла над русским авангардом, - констатирует его авторитетный знаток Джон Боулт, - Филонов, Кандинский, Иван Кляун, Аристарх Лентулов, Малевич, Родченко и Шевченко - все они воздавали должное символистской эстетике и ее общеизвестной концепции искусства как некоей мессианской, преображающей силы, расширительно трактуя символистскую философию искусства как средства психотерапии и связи с божеством» [16, с. 14].

Мифологему эту классически выразил родоначальник абстракционизма и теоретик искусства Василий Кандинский в книге «Ступени» (1918): «Каждое произведение возникает и технически так, как возник космос - оно проходит путем катастроф, подобных хаотическому реву оркестра, выливающемуся в конце концов в симфонию, имя которой - музыка сфер. Создание произведения есть мироздание» [17, с. 285].

В трактате «О духовном в искусстве» (1912) В. Кандинский поместил схемы, раскрывающие закономерности восприятия геометрических форм, их хроматизма и метаморфоз [17, с. 112-138]. По-видимому, И.А. Евин мог бы дополнить вторую главу своей работы схемами Кандинского. На наш взгляд, некоторые из его схем

соответствуют особым точкам дифференциального уравнения, упоминаемым в книге [2, с. 16-19].

А. Скрябин, развивавший эстетику символизма, незадолго до смерти (1915) начал работу над светомузыкально-танцевальным произведением «Мистерия» и «Предварительным действием» к ней. «...У меня там будет очень сложная система движений, будут восходящие и нисходящие шествия - они символизируют инволюцию и эволюцию, падение духа в материю и обратное воссоединение», - делился своим замыслом композитор (цит. по [14, с. 333]). «В его технике усматривается подобие музыкального кубизма», - считает Вяч. Вс. Иванов. Ощутить атмосферу символистского жизнетворчества помогает глобальный масштаб скрябинского проекта: исполнение всего сочинения, намеченное на 1917 год в Индии, должно было, по убеждению Скрябина, завершить историю! Завершить - в том смысле, что материальное начало погибнет и восторжествует дух. Участником «Мистерии» композитор видел все человечество [18, с. 10-11; 19, с. 263], предполагая духовную синергию исполнителей и зрителей.

Думается, описанные И.А. Евиным принципы анализа неоднозначных (бимодальных) образов в искусстве [2, с. 74-83] стоило бы развить, чтобы применить к образу самого искусства начала XX века, к его мифу о себе. Несомненно, в восприятии публики, критики и артистической среды той поры искусство являлось *ambiguous pattern* (как и постмодернистское искусство - для наших современников). Менее очевидно, как именно взаимодействовала эта неоднозначность восприятия миссии искусства, его предсказательных, фантазийных, миметических и иных возможностей с обстановкой социокультурной бифуркации в России тех лет (и наших).

4. Есть еще тенденция в искусстве модерна, для исследования которой пригодны модели, используемые И.А. Евиным. Это «принцип экономии творчества», провозглашенный в 1916-1917 годах. Он служил основой творческой методологии для «заумной» поэзии А. Крученых и для «супрематического» искусства К. Малевича, по-своему интерпретировавших концепцию всеединства Вл. Соловьева. Здесь примечательно, что ради выражения «идеи концентрации чистой формы как основы универсальности нового художественного языка» [20, с. 272, 267] авангардисты фактически обращаются к вариационному принципу, столь важному в физике.

Тенденция эта и даже предпосылки ее появления вызывали тревогу в среде искусствоведов и творческих деятелей, сознававших приход машинной цивилизации и эпохи «восстания масс». Например, Максимилиан Волошин в 1907-1909 годах писал: «...Искусство будущего, о котором так беспокоятся, будет создано всецело фабрикой, а не уединенной аристократией художников... Пластическое искусство будущего возникнет из глубины нового варварства, которое уже правит нашей жизнью и, надо думать, возьмет ее всецело в свои руки в виде социализма. <...> Оно [искусство] начнет принимать свой настоящий стиль по мере того, как будет становиться строго утилитарным». Волошин предвидел скорую смену художественной элиты (явно подразумевая круг «Мира искусства»). Но смену «не в силу беспокойного времени и неудобства жизни, не благоприятствующих мирным занятиям ремеслом, ... а в силу самого демократического духа времени, несущего в себе дикость, утилитарность и скудость форм». Зато «в том оргическом напряжении, которое несет в себе варварство, как напряженную грозу», поэты «найдут для себя родную и вещь атмосферу огня» [21, с. 113-114, 116]. Предсказание Волошина корректно в свете представлений социальной информатики и синергетики о конкуренции целеустремленных систем, если считать таковыми отдельные течения в искусстве.

5. Инженерно-физический и даже производственно-рыночный подход к

художественному творчеству. Так, Казимир Малевич в программном тексте «Поэзия» (1918) рассуждал почти как маркетолог: «Пушкин мастер, может быть, и кроме него много мастеров других, но ему почет, как старейшей фирме» [22, с. 130]. По-видимому, здесь проявилась не только авангардистская склонность к эпатажу публики. Экстремальная ситуация в годы гражданской войны вынуждала художников искать новые социокультурные функции и роли. Например, - в тихой провинции, еще не пресыщенной новизной впечатлений и темпом их смены. Отсюда - феномен Витебска 1917-1922 годов, где содружество искусств и других видов духовной деятельности соперничало со столичным.

Именно в Витебске Малевич, Эль-Лисицкий и их ученики открыли новые возможности «супрематического» искусства, двинувшись к «утилитарному миру вещей» (слова Эль-Лисицкого) [23, с. 56-64], то есть к художественному дизайну и целостному оформлению предметной среды. Пафос этого творчества передают слова Алексея Крученых из его «Декларации № 6 о сегодняшних искусствах» (октябрь, 1925): «Дело искусства - изобрести и применить (установка, синтез) нужный прием, а материал всегда в изобилии дается всей окружающей жизнью» (цит. по [24, с. 31]). Приведем еще тезис (1929) писателя и драматурга Сергея Третьякова, входившего в объединение ЛЕФ (Левый фронт искусств, 1922-1929). Он выражает «примат литературы факта»: «Итак, не человек-одиночка, идущий сквозь строй вещей, а вещь, проходящая сквозь строй людей, - вот методологический литературный прием, представляющийся нам более прогрессивным, чем приемы классической беллетристики» [25, с. 72]. Другим продолжением (и финалом [26, с. 11]) первого авангарда стало творчество литераторов-абсурдистов, составивших группу «ОБЭРИУ» (Объединение реального искусства, 1926-1930) [27, с. 12-13].

В этой связи нельзя не коснуться отношения Павла Флоренского (1924) к идее пересоздания жизни по законам прекрасного. Согласно Флоренскому, еще в художественном натурализме неизбежно возникает «переход к *технике*. Художник хочет дать не изображение вещи, ... а самую вещь с ее действием. ...Он хочет непосредственного выхода своему произведению в практическую жизнь» [28, с. 155]. И потому создает вещи, «которых *нет* в природе: таковы машины». В этом художник может «удачно или неудачно соперничать с инженером, но в обоих случаях он трудится в качестве инженера, а не художника и не открывает никакой новой области *художества*».

Другой вариант, когда «создание направлено на вещи не физического порядка». Это некая машина «магического воздействия на действительность». Скажем, «уже рекламный и агитационный плакат имеют назначением принудить к известным действиям всех на них смотрящих и даже *заставить* смотреть на них. <...> Такие плакаты суть машины для внушения». Следовательно, «супрематисты и другие того же направления, сами того не понимая, делают попытки в области магии...». И их деятельность следует считать «магической техникой, а не искусством» [28, с. 156-157].

Нынче конвейерное производство «машин для внушения» с коммерческими или идеологическими целями основано на электронных технологиях, возможностях сети INTERNET и пр. Поэтому новой задачей искусствознания и социологии искусства видится разработка стратегии, принципов и приемов противодействия «магической технике», стократно усиленной интервенцией СМИ. А от искусствоведов ожидается скорая гуманитарная помощь: укрепление фильтрационных (в смысле М.Н. Эпштейна [29]) способностей нашего эстетического чувства и вкуса, развитие самоуправляемой **невосприимчивости**. Грубо говоря, требуется надежный рецептивный контрацептив, как, наверное, скаламбурил бы Виктор Шкловский. Если актуальность такой задачи будет

признана искусствоведческим сообществом, то для ее решения ему, скорей всего, придется прибегнуть к лизингу методологий (термин предложен Э.А. Сосниным [30]), то есть к системной аренде методологического оборудования у других областей знания, в частности, у социальной информатики и синергетики. И книга Игоря Алексеевича способна пополнить эвристический ресурс исследователей.

6. «Органическое» направление в русском авангарде, самобытно выразившее идею всеединства. Оно зародилось в начале 1910-х годов усилиями поэтессы и художницы Е. Гуро и художника, композитора, теоретика искусства М. Матюшина. К «органическому» движению принадлежали художники П. Мансуров, П. Митурич, в определенной мере - поэт В. Хлебников, а также ученики Матюшина - студенты Академии художеств и ГИНХУКа (Государственного института художественной культуры, 1923-1926) в Петрограде [31]. В 1912 году П. Филонов выдвинул метод «органического роста» («как растет дерево»), воплотив его в своей живописи. Но позднее, согласно Н. Мислер, в силу впечатлений, полученных на войне, в его картинах атрибутом органического часто был распад, разложение [31, с. 61].

Позицию и творчество участников «органического» направления отличало «восприятие этого мира как некоего органического целого, как мира без хаоса в динамике, как саморазвивающейся системы явлений, все разнообразные части которой - в силу определенных законов - составляют целостное единство» [32, с. 11]. По выражению искусствоведа А.В. Повелихиной, непроизвольно цитирующей название знаменитой монографии (B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, 1982), их работы - «это новая, живая, фрактальная геометрия природы, прибавочный элемент которой - кривая» [31, с. 44].

Существенно, что Матюшин и его единомышленники видели в произведениях изобразительного искусства не только эстетические феномены, но и объекты *физического* экспериментального исследования. Структурные, колористические, акустические, фактурные, оптические характеристики специально созданных артефактов измерялись, систематизировались, сравнивались. Например, по мнению Дж. Боулта, «Мансуров, кажется изобрел живописную метафору психофизиологической формулы, которую его научные коллеги и знакомые Владимир Бехтерев и Иван Павлов расшифровали в 1910-х и 1920-х годах» [31, с. 69]. С отделом фонологии при ГИНХУКе (возглавляемом Малевичем) сотрудничали поэты-«обэриуты»: вместе с художниками они стремились установить соответствия между текстами и их живописным воплощением [27, с. 6].

Не удивительно, что в произведениях представителей «органического» направления искусствовед улавливает тонкую передачу явлений волновой оптики и вынужден пользоваться терминами из лексикона физики. Для иллюстрации снова процитируем А.В. Повелихину. «Интерференция, дифракция света и возникающие цветовые «сцепления» объекта со средой при прохождении света, замеченные на натуре: радуга, кристалл и другие - имеют свое воплощение в произведениях Матюшина, Эндеров, Стерлигова. <...> «Краска - это волна света в руках художника», - говорил Петр Митурич. <...> Работы художников «органического» направления строятся на характерной и свойственной природе органической криволинейной Геометрии» [31, с. 44]. Кстати, синонимом слова «сцепление» является понятие «когерентность» (от лат. *cohaerentia* - сцепление, связь), вполне уместное в подобном контексте.

Знакомство с творческими достижениями и исследовательской программой этого художественного объединения дает нам основания заявить, что большинству его участников была открыта «загадочная красота физики». Здесь использовано выражение В.Н. Ильина 1950-х годов (цит. по [4, с. 33]). Его «морфологическая

панлогика» предполагает осмысление физико-геометрического образа «света во тьме» или «световой первоточки» в двух контекстах: «внешнего света (*resp.* тени), мира экзоформ, и внутреннего света (*resp.* тени), мира эндоформ». Контексты эти связаны, соответственно, с содержанием исследований, проводимых релятивистской физикой и квантовой механикой [33, с. 130]. Добавим, что продолжением последней во второй половине 1960-х годов стала теория квантовых излучательных процессов в лазере, послужившая физике Г. Хакену прототипом его версии синергетики.

Судя по материалам, собранным в работах [16, 23, 31, 32], разновидность физико-искусствоведческого подхода, разработанного в мастерских «органического» движения, была первым шагом к нейросемиотике и нейроэстетике, объяснительными схемами которых оперирует И.А. Евин. А парадоксальное совмещение двух начал: биокосмической стихии и упорядоченных форм, рожденных человеческой рациональностью, фактически осуществило методологию дополнительности и принцип плюрализма мышления, на полвека опередив синергетическое мировоззрение.

7. Системная интеграция изучения изящных искусств, художественной практики и естествознания, предпринятая деятелями РАХНа (Российской Академии художественных наук, 1921-1930) в Москве. Среди них были: автор «Тектологии, или Всеобщей организационной науки» философ и врач А. Богданов (Малиновский); историк искусства и теоретик архитектуры А. Габричевский; художник В. Кандинский; физик П. Лазарев; психолог и философ-логик Г. Челпанов; работавший в области эстетики, лингвистики и психологии философ-феноменолог Г. Шпет; филолог Б.И. Ярхо [34]. «Внутренняя форма» деятельности РАХНа также удовлетворяла принципу дополнительности методов гуманитарных и естественных наук [35].

«Искусствознание есть знание о фактах, эмпирическое, и методы установления понятий искусствознания должны быть также эмпирическими», - убеждал своих коллег Шпет, вице-президент РАХНа, в статье 1926 года [36, с. 138-139], задающей методологические ориентиры. «Естественнонаучный подход к изучению искусства с целью, главным образом, психофизических объяснений участвующих в искусстве творческих, индивидуальных и социальных процессов, должен опираться на соответствующую общую научную, в основе своей экспериментальную, работу, - прежде всего, следовательно, в области психофизиологии», - полагал он [36, с. 143]. Знакомство с идеями Шпета относительно развития исторического метода позволяет сделать вывод о синергетическом стиле его мышления [37].

В РАХНе получен результат, предвосхитивший представления синергетики социокультурных процессов. Исследовав (1928-1929) изменения в жанре европейской трагедии XVII-XIX веков, Борис Ярхо заключил: «Вся история литературы составляет из массы волнообразно (и, в принципе, независимо друг от друга) эволюционирующих признаков» [38, с. 256]. Ценность «методологии точного литературоведения» Ярхо состоит в применении идей и количественных методов эволюционной биологии и даже новейшей физики! Более того, Ярхо по существу осуществил стратегию синергетики, демонстрируемую в монографии Евина: «Свести возможно большее количество частных отличительных признаков к возможно меньшему количеству отличительных общих понятий» [38, с. 205]. Характерно, что Вяч. Вс. Иванов придает наблюдениям Ярхо то же значение, что и открытию «волн Кондратьева» в экономике [1, с. 92].

Укажем еще, что учебная программа ВХУТЕМАСа (Высших художественно-технических мастерских, 1920-1926) в Москве, где читал лекции Флоренский, предусматривала наряду с искусствоведением изучение дифферен-

дифференциальной и проективной геометрии, физики (включая теорию относительности), физиологии восприятия и движения, морфологии растений, психологии (примеч. к [28], с. 399).

О возможном продолжении книги Евина [2] под названием: «Репликаторы в жизни искусства». Пригоден ли физико-искусствоведческий подход для изучения происходящих в обществе процессов создания, восприятия, признания, вхождения в моду и в традицию *et vice versa* произведений искусства?

Здесь напрашиваются два ответа. 1. Пригоден. Доказательством служит, скажем, интерпретация В.П. Бранским - на базе категорий синергетики - художественного процесса в социуме [39, с. 496-542]. 2. Пригоден. А если предпринять некоторый методологический *up-grade* подхода Евина, то станет возможной интеграция традиционной истории искусств, социальной синергетики и информатики, культурологии, меметики, эволюционной диатропики (науки о разнообразии), теории адаптации. Думается, для этого достаточно дополнить физико-искусствоведческий подход понятием репликатора - одного из механизмов, обеспечивающих динамизм бытия.

Репликатор (от лат. *replicatio* - разворачивание) можно трактовать как самовоспроизводящуюся в некоторых условиях, самодовлеющую, структурированную, относительно изменчивую информационную целостность, то есть гештальт. Простейшей логической моделью функционирования репликатора может служить импликация (от лат. *implicatio* - сплетение) - часто применяемая людьми логическая операция: *if A, then B*. Здесь antecedent *A* - некие условия, consequent *B* - предпринимаемое в них действие либо новые условия, порождаемые *A*. Менее широкое определение дает Д. Дойч: «Репликатор - объект, побуждающий определенные среды к своему копированию» [40, с. 195].

Подчеркнем четыре свойства: 1) репликатор способен конкурировать с себе подобными за максимальное число воспроизведений (репликаций), расходуя иногда значительные ресурсы системы; 2) в точке бифуркации он способен служить инициатором («субъектом») самоорганизации в системе; 3) в реальности репликатор реализуется во множестве форм; 4) будучи концептом, он известен под разными именами - в зависимости от науки.

Перечислим некоторые формы и имена репликатора, собранные нами. В биологии, откуда заимствовано это понятие, репликатор - ген (единица наследственной информации); в физике лазеров - квант излучения (возникший в акте спонтанного испускания и вызывающий лавину актов вынужденного испускания); в социальной культурологии - культурный образец (*cultural pattern* у А. Кребера); в этнографии - традиция; в психологии - символ и юнговский архетип; в меметике - мем (по терминологии Р. Докинза, *meme* - человеческая идея, или в некоторых переводах - мим [40, с. 174]); в науковедении - парадигма (у Т. Куна) и эстафета (у М.А. Розова), в литературной теории русских формалистов - художественный прием (у В. Шкловского, Р. Якобсона) и конструктивный принцип (у Ю. Тынянова); в теории программирования - компьютерный вирус [41, с. 103-122]. И это еще не все. Репликатор в лингвистике - универсальные элементарные смыслы (согласно А. Вежбицкой - фундаментальные концепты, не зависящие от этнолингвокультурных особенностей [42, с. 51-55]); в эстетике тождества - повтор [43, с. 115]; в алгоритмической эстетике - структуры алгоритмов художественного творчества и критики [44, с. 226-227]; в теории эволюции живописи К. Малевича - прибавочный элемент в живописи [41, 114-115; 23, с. 128-131; 31, с. 44]; в истории греческой античности - архэ («рационально-априорные» структуры мифа) [45]; в философии экзистенциализма - повторение: «повторение» (*die Wiederholung* у С. Кьеркегора), то есть пробуждение

экзистенциального существования, «усвоение» (*das Aneignen* у М. Хайдеггера), то есть повторение усвоенного духовного наследия, «возобновление» (*Wiederherstellung* у К. Ясперса), «форма, в которой наличествовавшая ранее возможность экзистенциального существования осуществляется в душе отдельного человека вновь» (у О. Больнова) [46]. Кроме того, репликатор в исторической эпистемологии - историческое *a priori* (особое историческое событие [47, с. 14-15]); в социокультурной антропологии - габитус (по терминологии П. Бурдьё, это структурирующая структура, то есть принцип, порождающий и организующий «практики и представления», система «когнитивных и мотивирующих структур» [48, с. 102, 103]); стиль жизни (согласно М. Дингесу, это «сравнительно устоявшийся тип решений, принимаемых индивидами или группами, делающими выбор из предлагаемых им обществом вариантов поведения» [49, с. 105]); в технетике и археологии - элементы техноценоза (в теории Б.И. Кудрина это функционирующая техника, технология, продукция и пр. [50, с. 106-114]).

Так, репликатор типа культурный образец - объект любой природы в сфере действия культуры, с которыми отдельные люди или социальные группы координируют свое восприятие, мышление, воображение, поведение [51, с. 36]. Обычно люди делают выбор из стандартных вариантов поведения. И это часто помогает им выйти из стандартной проблемной ситуации. Вернисаж, картина, *touche* пианиста и его автограф для коллекционера, устав, манифест, символ круга, отношение к искусству - примеры культурных образцов. Любой из них проявляет себя как репликатор диахронического процесса культуронаследования и синхронического процесса трансляции культуры. Каждый из нас - уникальная интерференция репликаторов, задающих формы нашей активности, в том числе исследовательской, художественной, зрительской, читательской, слушательской и т.п.

Одно из неперемных условий изучения произведений словесного, визуального, музыкального искусства - выявление репликаторов и их мониторинг. Так, в глазах филолога роман В. Набокова «Ада» являет собою «всеобщую историю европейских литератур, историю мотивов и сюжетных схем, характерных для европейских литератур, историю штампов, кстати, не только писательских, но и литературоведческих». Причем в основе романа лежит ветхозаветно-апокрифическая мифология, возвращающая читателя «к забытым истокам демонизма как феномена культуры, как к одному из определяющих начал человеческой цивилизации» [52, с. 163, 12, 174]. (Вероятно, образ ночной демонницы Лилит происходит из вавилонских или даже древнеегипетских мифов [53, с. 23, 27].) Иначе говоря, «Ада» - собрание историй репликаторов различного содержания и различных уровней сложности, способная послужить и, верно, уже послужившая другим авторам (и проницательным читателям) для репликации новой разновидности жанра романа. К теме ситуации неустойчивости в искусстве, разработанной И.А. Евиным, «Ада» могла бы добавить немало иллюстраций.

Типичный случай - быстрая рокировка репликаторов из маргинальной области культуры в окрестность ее центра *et vice versa* - в обстановке бифуркации [54]. Таково происхождение нового - для полидисциплинарного исследования - семиотического объекта: тела «вора в законе», покрытого татуировками [55, с. 4-6; 56, с. 7-9]. В свою очередь, каждая из татуировок (в совокупности составляющих систему символов, чья динамика задается социально-политическими факторами) есть «кодированное сообщение», адресованное посвященным, то есть репликатор. Часть из них обозначает нормы мышления и (анти)поведения, которыми руководствуется данный представитель воровского мира. Репликация этих норм обеспечивает устойчивость внутренних и внешних взаимоотношений уголовного сообщества, самовоспроизводство мифов, ритуалов, иерархии, правил воровской субкультуры, ее картины мира *etc.*

Аналогично, в 1990-е годы с периферии в центр интересов исследователей, издателей, а тем самым и читателей шагнула русская порнографическая литература XVIII-XIX веков («барковиана», «псевдобарковиана», анонимная обценная словесность и пр.). Насколько можно судить, роль одного из бифуркационных параметров досталась понятию «эротический фольклор» в восприятии текстологов. Изменение его сблизило статусы устного и письменного (чаще рукописного) текстов. В сочетании с постмодернистским вниманием к различным паралитературным явлениям, «не-эстетике», «не-текстам», «полутекстам» это обернулось «их упорядочиванием, переписыванием, олитературиванием», превратилось в «грандиозную их перестройку» [57, с. 374-375]. То есть произошел акт самоорганизации: перехода к новым нормам текстологической деятельности (вызывающим развернутую критику профессионала [57]).

Для репликаторов в музыкальном искусстве минувшего столетия характерна иная динамика. «Новая музыка XX века начинается не из эстетической провинции и не с примитивных норм, - разъясняет Т.В. Чередниченко. - Новизна современной Новой музыки (сравнительно с предшественницами) - в том, что она не нова. А также в том, что старое в ней так заостряется, ... что из данности становится проблемой, из готового ответа превращается в вопрос, будучи итогом, оказывается проектом. <...> Вчера и завтра в ней взаимообратимы» [58, с. 133].

А вот какую особенность смены репликаторов подметил Умберто Эко: «Масс-медиа генеалогичны, но они не имеют памяти, поскольку, когда появляется целый ряд имитаций оригинала, никто уже не помнит, с чего все началось; в результате главу рода могут принять за младшего внука» (цит. по [59, с. 53]). Дополняя наблюдение Эко, комментатор подчеркивает, что масс-медиа сами-то не изобретают, они основаны на техническом, а не интеллектуальном совершенстве [59, с. 53]. Другими словами, масс-медиа не создают новых репликаторов, скажем, произведений искусства, а лишь тиражируют в массовой аудитории очередные эпигонские версии оригинального произведения. В итоге оно оказывается заслоненным или вовсе вытесненным подражаниями ему.

Русские гуманитарии 1900-1920-х годов не знали физических основ самоорганизации, но они догадались, каковы механизмы отбора репликаторов в сообществе. Скажем, М. Волошин глубоко чувствовал социокультурную функцию репликации сложившихся форм восприятия и рецепции искусства, или, как он говорил, понимания его (см. эпиграф). Волошин отдавал себе отчет в том, что предсказание - если применить термин нелинейной динамики - после-бифуркационного состояния практически невозможно. И потому здраво судил (1907-1909) об искусстве будущего. Оно, по его словам, «не может быть понятно и интересно для нас по своему существу», поскольку «материальные формы тех переживаний, в область которых мы еще не вступили, могут возбуждать наше любопытство, но не могут быть ни понятны, ни близки». Далее Волошин правомерно утверждал: «И если даже мы встретим какой-нибудь из первых образцов того, чему впоследствии предстоит стать канонem, то мы во всяком случае не угадаем значения его» [21, с. 115]. Лет через 15 о происхождении очередного литературного канона («конструктивного принципа») из «шума», то есть из хаоса, писал Ю. Тынянов.

В. Шкловский упоминается И.А. Евиным как открыватель литературного приема, аналогичного явлению критического замедления в физике [2, с. 105]. Добавим: в своей философии искусства Шкловский предложил (1917) рассматривать развитие поэтического языка как переход к художественному приему, специально находимому автором для выведения «из автоматизма восприятия» читателя. Инвариантом развития оказалось так называемое остранение: умение описать вещь, «как в первый раз увиденную» [60, с. 64].

Сегодня западное искусствознание оценивает понятие остранения как центральный эстетический и философский принцип современного искусства и его теории. Остранение как принцип осмысливающей направленности сознания на объект «стоит за всеми актами теоретического и практического любопытства, которое движет человеком, словно пружина, постоянно побуждая его обнаруживать, что навязанные или добровольно принятые формы восприятия или познания, нормы и образцы деятельности - своего рода очки, оказавшиеся между прямым, непосредственным зрением и «настоящей действительностью»: если очки обнаружены, то их можно снять и превратить в предмет (а не средство, как до того) рассмотрения и рефлексии» [61, с. 12].

Отсюда следует: «очки» есть репликаторы, задающие многомерную структуру активности каждого из нас и тем самым - *внутреннюю форму* нашей личности. А остранение - средство ревизии и смены репликаторов.

Где же искать ресурсы «как в первый раз увиденных» вещей и действий, то есть новых репликаторов, определяющих направление эволюции искусства? Русские формалисты, например Борис Томашевский (1925), призывали уходить от господствующей художественной нормы, то есть от преобладающего в данном творческом сообществе репликатора. «По тому, как реагирует... оценочное внимание литературной среды на отдельные приемы, - учил Томашевский, - их следует классифицировать на приемы *ощутимые* (заметные) и *неощутимые* (незаметные). Причина ощутимости приема может быть двоякая: их чрезмерная старость и их чрезмерная новизна» (цит. по [62, с. 253]).

Несомненно, богатейшим ресурсом остранения (то есть *ощутимых* приемов) служит «экстравагантная активность человека». Это термин С.А. Завадского [63, с. 43], развившего замечание Э. Ионеско. Важным плодом такой активности Завадский справедливо полагает «девиантную эстетику» [63, с. 41-43], позволяющую колонизировать, осваивать игнорируемые искусствознанием культурные пространства. Очевидно, что благодаря экстравагантной активности поддерживается маргинальное искусство: творчество художников-аутсайдеров, мастеров примитива, создателей наивного искусства, детей [63], душевнобольных людей [64], обитателей тюрем [56, 65]. Связь художественного авангарда с маргинальным искусством давно признана. Скажем, сцена в аду в «Мистерии-буфф» Маяковского (декорации - К. Малевича) заимствована из эпилога старинного народного представления-феерии «Тайны Санкт-Петербурга под землей» [19, с. 262-263].

А нельзя ли экстравагантную активность человека поместить в социосинергетический контекст? На наш взгляд, можно, если принять во внимание глубинную бинарность социокультурной системы. Трактую порядок и хаос как фундаментальную семиотическую оппозицию, Ю. Лотман, Б. Успенский, Вяч. Вс. Иванов, В. Топоров, А. Пятигорский выдвинули (1973) концептуальное положение: «Каждому типу культуры противостоит свой тип хаоса (то, что данной культурой интерпретируется как сфера дезорганизации, однако скорее всего представляет сферу *иной* культуры); культура постоянно стремится расширить сферу *своей* организации, но одновременно демонстрирует потребность в наличии сферы хаоса (если для древних греков и римлян идея хаоса отождествлялась с варварами, то позднее в качестве такового интерпретировались «культура детства», экзотические цивилизации, подсознательное и т.д.)» (цит. по [59, с. 104]).

Экстравагантную активность человека, представленную в социосинергетическом контексте, целесообразно привлечь, чтобы в очередной раз пересмотреть противостояние двух фундаментальных парадигм, существенное для искусства наших дней. Первая парадигма - антропоцентрическая, гуманистически-цивилизационная, культурогенная. Она восходит к античному идеалу образован-

ности (παιδεία), к ренессансной системе знаний, смыслов, ценностей (*Humanitas*). Вторая парадигма - биокосмическая. Она отдает приоритет планетарным, космическим, биологическим факторам бытия (с присущими им хаотическими, иррациональными свойствами), экстатически-гипнотическим методам творчества в искусстве, но рациональным и высокотехнологичным - в научно-технической области.

Философия и практика художественного авангарда 1920-х годов (Эль Лисицкий, К. Мельников, В. Татлин, В. Маяковский) исходила из идеи единственности гуманистически-цивилизационной и биокосмической парадигм, что оказалось утопией [66, *passim*, с. 13]. Одно из социокультурных последствий конфликта между этими парадигмами в Европе XX века - феномен «цинического разума». Он исследован в монографии [67], где, в частности, анализируется хаосология дадаистов - стержень их искусства и мировоззрения. Однако стоит заметить, что «стремление выявить Логос в Хаосе и Хаос в Логосе, которым и отличается авангардное искусство» [68, с. 293], может породить нетривиальные подходы. Как же оценивать усилия искусства найти меру дополнительности для указанных парадигм? Вероятно, здесь понадобятся принципиально новые средства, прототипы которых обсуждаются в книге Евина.

Не забудем и о древней оппозиции человека не-человеку. Здесь не-человеком способен оказаться и жесткий порядок, и не имеющий опоры хаос. Изображение человека (часто выступающее как его замена, как не-человек) есть постоянный и главный объект искусства, оно архетипально [69, с. 140]. Другими словами, это один из исторически первых репликаторов [45, 70]. Полифункциональность изображения человека в произведениях искусства свидетельствует «об осознанном или подсознательном стремлении индивида выйти за пределы собственного бытия» [69, с. 148]. Очевидно, стремление это - один из мотивов экстравагантной активности, причем она осуществляется в поле противостояния пары упомянутых парадигм.

XXI век обещает невиданный рост числа, разнообразия и культурного значения человеко-машинных сред. Поэтому встает проблема сосуществования, симбиоза, сотрудничества (συνεργία) людей, то есть социобиологических информационных систем, с искусственными информационными системами [71, с. 39-50]. В сфере физического, а отчасти и умственного труда человек почти везде заменил себя техническими устройствами. Аналогично, в широком спектре социальных взаимодействий его непосредственное участие по схеме: человек ↔ человек - масштабно и ускоренно вытесняется опосредованным: человек ↔ не-человек ↔ человек (наблюдение Э.А. Соснина). Не исключено, что одним из способов адаптации к такому положению окажется экстравагантная активность.

Что же означает - с позиции И.А. Евина - практиковавшаяся русскими авангардистами и произвольно достигающаяся художниками-маргиналами «деавтоматизация» (сенсбилизация, повышенная чувствительность) восприятия? Переход к новой структуре фрустрационных связей в нейронной системе зрителя или читателя, обеспечивающей восприятие и распознавание используемых в картине или тексте художественных средств [2, с. 48-51].

Заметим: если вероятность заимствования новации (то есть скорость v самовоспроизведения найденного художественного приема) в сообществе литераторов или живописцев или музыкантов достаточно высока ($v > v_{cr}$, где v_{cr} - некоторое критическое значение), то вскоре этот репликатор станет широко распространенным. Постепенно, со временем он превратится в рутину. И у читателя возникнет иммунитет к восприятию данного приема. На смену ему будет «изготовлен» другой репликатор. Но не исключено, что новация не станет тиражироваться сообществом (то есть $v < v_{cr}$), будет отвергнута.

Поэтому представляется проницательным заявление Романа Jakobson (1921): «Если наука о литературе хочет стать наукой, она принуждается признать «прием» своим единственным «героем». Далее основной вопрос - о применении, оправдании приема» [72, с. 275].

Сегодня можно увидеть синергетический подтекст и в суждениях лингвиста Николая Трубецкого о необходимости встать «на путь изучения внутрилитературных законов». В письме к Р. Jakobsonу (декабрь, 1922) он очертил программу действий, плодотворную и для современных гуманитариев: «Эволюционные науки все настолько запущенны в методологическом отношении, что сейчас «задачей момента» является именно исправление метода каждой из них в отдельности. Время синтеза еще не наступило. Но вместе с тем не подлежит сомнению, что какой-то параллелизм в эволюции разных сторон культуры существует, - а, следовательно, и какая-то закономерность этот параллелизм обуславливающая». А предшествует этим выводам профессиональная рефлексия: «...внимательное изучение языков с установкой на внутреннюю логику их эволюции учит нас тому, что таковая логика есть...» (цит. по [73, с. 15]). Кроме того, предвосхищение идей социальной синергетики обнаруживается в статьях по философии истории Г. Шпета (февраль, 1917) и В. Муравьева (июль, 1917) [37, с. 124-125].

По поводу тезиса Н.С. Трубецкого: «Время синтеза еще не наступило» - отважимся заявить, что оно наступает лишь сейчас, когда начинается синтез синтезирующих наук, где лидирует нелинейная динамика. В свою очередь, процесс полидисциплинарного синтеза приближает нас к постижению той закономерности социокультурной эволюции, какую угадывал Трубецкой. Есть основания полагать, что с содержанием этой закономерности связана категория репликатора [37, с. 125-127; 40, с. 173-174, 190, 338; 54; 74; 75].

К. Малевич - как могли бы сказать и И.А. Евин, и В.П. Бранский [39] - представил историю художественных течений в Европе конца XIX - начала XX веков цепью бифуркаций. В его трактате «Введение в теорию прибавочного элемента в живописи» (1923) [23, с. 128-131] в качестве репликатора, инициирующего в точке бифуркации процесс самоорганизации в сообществе художников, опознается открытый им «прибавочный элемент». С его помощью «художник выражает или формирует то или иное ощущение». Благодаря созданию живописцем-новатором очередного прибавочного элемента и его многократной репликации другими художниками, происходит перестройка живописной системы в новую: сезаннизма в футуризм, футуризма в кубизм и т.д. [41, с. 114-115]. Показательно, что термин «прибавочный элемент» употребляется нынче искусствоведами для обозначения новации, которая была воспринята, многократно воспроизведена и определяет стилевые отличия данного направления [31, с. 44].

Очевидно, что очередная бифуркация, приводя к смене художественной парадигмы, обновляет у публики ее структуру восприятия. Структура эта, будучи репликатором, - по мере появления новых артефактов - все чаще самовоспроизводится в сознании зрителей и усваивается ими, изменяя содержание зрительских запросов, эстетических предпочтений и ожиданий. «Эволюция живописных форм реорганизует наше восприятие», - писал Р. Jakobson (сентябрь, 1919). Именно с этим обстоятельством он связывал очередные задачи науки об искусстве [76, с. 5]. Пожалуй, Игорь Алексеевич имел право поставить слова великого лингвиста эпиграфом к разделу «Критические явления в искусстве» в [2, с. 55].

Что такое *opus* Евина с точки зрения физики? Будем полагать искусство бинарной динамической системой, содержащей: а) «консервативную» подсистему, сохраняющую и транслирующую художественные традиции; б) «инновативную» подсистему, реагирующую на изменение социокультурной обстановки и состава

художественного сообщества созданием пионерских произведений, творческих концепций, эстетических доктрин и т.п.

Будем исходить из традиционного представления о творческом устремлении участника процессов в искусстве (художника, критика, зрителя, слушателя или читателя). Художник, например, по выражению Ж. Делеза и Ф. Гваттари, «борется не столько с хаосом (в определенном смысле он всей душой его призывает), сколько с «клише», с мнением» [77, с. 260], то есть с некоторым репликатором. И стремится нечто противопоставить ему, создать анти-«клише», контррепликатор, выбить клин клином.

Будем моделировать функционирование системы искусства (ради простоты - без учета обратных связей) триадой коммуникационных процедур. Это: 1) генерация (**Г**) некоторых «сообщений» (скажем, художественных произведений) \Rightarrow 2) их трансляция/трансформация (**Тт**) \Rightarrow 3) их перцепция/рецепция (**Пр**), то есть восприятие/усвоение. Упрощая, будем считать, что субъекты коммуникационных процедур задают спектр социальных и профессиональных ролей в сфере искусства (роли указаны ниже в скобках).

Выделим условно три вида «сообщений» в зависимости от того, являются ли они самими произведениями искусства (**I**) или некоторыми идеями, соображениями, мнениями по поводу оценки (**II**) и исследования (**III**) этих произведений. Тогда трем видам «сообщений» отвечают три триады процедур.

I. Г (автор, творческая корпорация) \Rightarrow **Тт** (подражатель, ученик, заказчик, спонсор, торговец, музейщик, издатель *etc.*) \Rightarrow **Пр** (зритель, читатель, слушатель, коллекционер, покупатель *etc.*) *артефактов*.

II. Г (художественный критик, эстетик, искусствовед *etc.*) \Rightarrow **Тт** (педагог, популяризатор, гид, художественный критик, рекламист *etc.*) \Rightarrow **Пр** (зритель *etc.* + педагог *etc.*) *форм восприятия и принципов эстетической оценки произведений искусства*.

III. Г (художественный критик, эстетик, искусствовед *etc.*) \Rightarrow **Тт** (*idem*) \Rightarrow **Пр** (*idem*) *методов искусствознания*.

В каждой триаде процедур существенную роль играет соперничество «репликаторов традиции», «клише» и «репликаторов новаций». Оно определяет темп процессов самоорганизации и направление культурной эволюции. Триадная схема нестрогая, но она предусматривает описание деятельности, соответствующей социальным и профессиональным ролям. Поэтому в схему можно внести человеческое измерение.

Один из подходов к этой задаче открывает синергетическая теория риска [78]. Ведь творческая инициатива в реальной жизни неизбежно связана с риском, с действиями в ситуации неопределенности, со скачком в послебифуркационное будущее. Известно, что в мире хаоса приходится рассчитывать на механизм эмоций, эволюционно более старший, чем сфера рационального мышления. Поэтому естественным продолжением триадной схемы видится переход к совокупности моделей эмоциональной динамики человека [78, с. 367-383] и их модификациям. Здесь понадобится опыт математического моделирования социокультурных процессов (см., например, библиографию в [79]). Еще один подход можно развить, исходя из разработанного М.Б. Ямпольским плодотворного противопоставления человеческого видения (обусловленного принадлежностью к определенной культуре) [80] зрению [81]. Нельзя предугадать, как Ямпольский далее сопоставит и синтезирует пару видение/зрение. Но из работ Евина ясно, что среди потенциальных инструментов такого синтеза - методы, входящие в компетенцию синергетики, а также родственных ей наук (см. о них в [74]).

Вспомним, что К. Малевич, умевший приводить в движение водоворот новаций и суперноваций, описал в стихотворении начала 1920-х годов [22, с. 110] постепенное «заражение» сообщества новизной:

...в искусстве некоторые формы нового вида вызывают протест. И не принимаются. Но раз неприемлемое есть, то оно уже попало в уют чувств, и будучи неизбежным, рано или поздно разрушит уют - и займет место среди усвоенных вещей.

Труды и материалы по истории отечественной культуры [10-13, 15-16, 19, 23, 26, 31, 32, 34, 61, 62, 66, 68, 73, 82-87] позволяют восстановить не только события, но и атмосферу многогранной художественной жизни России 1900-1930-х годов. Пожалуй, теперь уже можно с достаточной полнотой реконструировать динамику восприятия/усвоения многослойным российским обществом художественных и социокультурных новаций тех лет. А следующим шагом была бы модель того, как «неприемлемое» для публики становится приемлемым, пригодным для самовоспроизводства. Здесь помогли бы работы Вальтера Беньямина [88], особенно статья «О некоторых мотивах у Бодлера» в утонченном переводе Ю.А. Данилова.

Где же место труда Евина в «триадной» схеме? Очевидно, книга [2] как некоторое «сообщение» *urbi et orbi* призвана повлиять на процедуру III. Отклики на исследовательскую инициативу Евина возможны на стадии **Тт**, то есть трансляции/трансформации (наш текст - тому пример). Отклики еще важнее на стадии **Пр**, то есть восприятия/усвоения. Не исключена, конечно, и реакция отторжения. «Но раз неприемлемое есть...» Отношение, которое встретит книга [2] со стороны цеха художественных критиков, эстетиков, искусствоведов, будет иметь минимум два аспекта.

Во-первых, реакция цеха - мера его готовности вооружиться эвристическими идеями синергетики, выявляющей общие начала в эволюции космических, биологических, технических, социальных систем, всегда стоящих в центре внимания искусства. Выше мы пытались показать, что представления нелинейной динамики способны расширить понимание целей, мифологии, достижений русского искусства 1900-1930-х годов.

В плане социальной антропологии художественная продукция, стереотипы ее восприятия, критерии ее оценки и методы изучения выступают как репликаторы. Они, как правило, плохо измеримы, редко осязаемы, практически неподотчетны обыденному сознанию, хотя и управляют его работой. Недаром Поль Валери (упоминаемый Игорем Алексеевичем) назвал культурный паттерн чистой фикцией. Но именно репликаторы *делают человека*, задавая способы его деятельности. Человек же, как всегда, проявляет себя двойственно: А) человек стремится к скрупулезному воспроизведению содержания многих репликаторов; В) он состязается в преобразовании или уничтожении некоторых репликаторов и порождении новых репликаторов - «квантов» культурной эволюции. Работа Евина - один из таких квантов. Следовательно, и во-вторых, отклики на его книгу диагностируют соотношение тенденций А, В в цехе искусствознания и шире - в среде гуманитариев.

Естественно ожидать, что критический анализ книги, усиленный актами рефлексии, поможет вдумчивому читателю (см. эпиграф из Платона) уточнить содержание некоторых влиятельных репликаторов, в чьей власти читатель - невольник - находится, участвуя в процедурах **Г**, **Тт** или **Пр**.

А если он участвует в этих процедурах как профессионал? Тогда есть шанс, что физико-искусствоведческий подход вовлечет читателя-аналитика в непривычные занятия: в поиск и выявление содержания подобных репликаторов, в

распознавание их скрытой динамики. Надо ожидать, что у динамики этой - черты неоднозначного образа (*ambiguous pattern*).

Такой итог знакомства читателя с книгой [2] означал бы синергию двух культур. И тем самым он показал бы интеграционный потенциал нелинейной динамики, оживленно обсуждающийся в последние годы [37, 39, 41, 44, 54, 70, 74, 78, 79, 89-98].

Такой итог демонстрировал бы особое отношение гуманитария к естествознанию. Раскрывая это отношение, уместно вспомнить емкое понятие: **методологическое доверие**. Его автор - Павел Флоренский. И так, не составляет ли методологическое доверие этос постнеклассического знания о человеке и обществе?

Автор искренне признателен Джону Боулту за внимание и помощь ценными изданиями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-06-80195.

Библиографический список

1. *Иванов Вяч. Вс.* Семиотика культуры среди наук о человеке в XXI столетии // Одиссей. Человек в истории. 2000. М.: Наука, 2000. С. 86.
2. *Евин И.А.* Что такое искусство с точки зрения физики? М.: Воентехиздат, 2000. 144 с.
3. *Евин И.А.* Синергетика мозга и теория музыки // Языки науки - языки искусства / Под ред. З.Е. Журавлевой, В.А. Копчика, Г.Ю. Ризниченко. М.: Прогресс-Традиция, 2000. С. 100.
4. *Исупов К.Г.* Между Аполлоном и Дионисом // Ильин В.Н. Мирозерцание графа Льва Николаевича Толстого. СПб.: РХГИ, 2000. С. 9.
5. *Шеллинг Ф.В.Й.* Система мировых эпох: Мюнхенские лекции 1827-1828 гг. в записи Э. Ласо. Томск: Водолей, 1999. 320 с.
6. *Соловьев В.С.* Чтения о Богочеловечестве // Собр. соч.: в 12-ти тт. Т.3. / Под ред. С.М. Соловьева и Э.Л. Радлова. Брюссель: Жизнь с Богом, 1966. С. 3.
7. *Соловьев В.С.* Критика отвлеченных начал // Собр. соч.: в 12-ти тт. Т.2 / Под ред. С.М. Соловьева и Э.Л. Радлова. Брюссель: Жизнь с Богом, 1966. С. 3.
8. *Хоружий С.С.* Род или недород? Заметки к онтологии виртуальности // Хоружий С.С. О старом и новом. СПб.: Алетейя, 2000. С. 311.
9. *Федоров Н.Ф.* Супраморализм, или Всеобщий синтез // Собр. соч.: в 4-х тт. Т. 1. М.: Прогресс, 1995. С. 388.
10. *Пайман А.* История русского символизма. М.: Республика, 1998. 415 с.
11. *Ханзен-Леве А.* Русский символизм. Система поэтических мотивов. Ранний символизм. СПб.: Академический проект, 1999. 512 с.
12. *Гайденко П.П.* Владимир Соловьев и философия Серебряного века. М.: Прогресс-Традиция, 2001. 472 с.
13. *Серова С.А.* Театральная культура Серебряного века в России и художественные традиции Востока (Китай, Япония, Индия). М.: Ин-т востоковедения РАН, 1999. 229 с.
14. *Сабанеев Л.Л.* Воспоминания о Скрябине. М.: Классика-XXI, 2000. 400 с.
15. *Кириченко Е.И.* Эстетические утопии «серебряного века» в России // Художественные модели мироздания. Кн. 2. XX век. Взаимодействие искусств в поисках нового образа мира / Под ред. В.П. Толстого. М.: Наука, 1999. С. 21.
16. *Bowl J.E.* The Russian Avant-garde // Painting Revolution. Kandinsky,

Malevich and the Russian Avant-garde / Ed. and Cur.: J.E. Bowlt, Ass. Ed.: E. Petrova. Arlington, Virg.: Found. for Int. Arts and Education, 2000. P. 11.

17. *Кандинский В.В.* Избранные труды по истории искусства. В 2-х томах. Т.1. 1901-1914 / Отв. ред. Н.В. Автономова. М.: Гилея, 2001. 392 с.

18. *Иванов Вяч. Вс.* Заметки по исторической семиотике музыки // Музыка и незвучащее. М.: Наука, 2000. С. 6.

19. *Волков С.* История культуры Санкт-Петербурга с основания до наших дней / Предисл. Я. Гордина; послесл. А. Битова. М.: Изд-во «Независимая Газета», 2001. 544 с.

20. *Горячева Т.В.* К понятию экономии творчества // Русский авангард 1910-1920-х годов в европейском контексте. М.: Наука, 2000. С. 263.

21. *Волошин М.* Записные книжки / Сост. В.П. Купченко. М.: Вагриус, 2000. 175 с.

22. *Малевич К.* Поэзия / Сост. А.С. Шатских. М.: Эпифания, 2000. 176 с.

23. *Шатских А.С.* Витебск. Жизнь искусства. 1917-1922. М.: Языки русской культуры, 2001. 256 с.

24. *Красицкий С.Р.* О Крученых // Крученых А. Стихотворения, поэмы, романы, опера / Сост. С.Р. Красицкого. СПб.: Академический проект, 2001. С. 5.

25. Литература факта. Первый сборник материалов работников ЛЕФа. М.: Захаров, 2000. 286 с.

26. *Кобринский А.А.* Поэтика «ОБЭРИУ» в контексте русского литературного авангарда XX века. В 2-х ч. Ч. 1. М.: Изд-во Моск. Культурологического лица, 1999. 176 с.

27. *Мейлах М.Б.* «Я испытывал слово на огне и на стуже...» // Поэты группы «ОБЭРИУ» / Сост. М.Б. Мейлах и др. СПб.: Сов. писатель, 1994. С. 5.

28. *Флоренский П.А.* Анализ пространственности <и времени> в художественно-изобразительных произведениях // Флоренский П.А. Статьи и исследования по истории и философии искусства и археологии / Сост. и ред. А.С. Трубачева. М.: Мысль, 2000. С. 81.

29. *Эпштейн М.Н.* Самоочищение. Гипотеза о происхождении культуры // Вопросы философии. 1997. № 5. С. 72.

30. *Пойзнер Б.Н., Соснин Э.А.* Формирование полидисциплинарной теории эволюции и leasing методологий // Социальное знание в поисках идентичности: Сб. ст. Томск: Водолей, 1999. С. 119.

31. Experiment / Эксперимент // J. of Russian Culture. 2000. Vol. 6. Organica / Guest Ed.: A. Povelikhina. 88 p.

32. *Povelikhina A.V.* The Theory of World Unity and the Organic Direction in the 20th Century Russian Avant-Garde // Organica. The Non-Objective World of Nature in the Russian Avant-Garde of 20th Century / Cur. by A. Povelikhina. Koln: Galerie Gmurzynska, 2000. P. 11.

33. *Ильин В.Н.* Статика и динамика чистой формы, или Очерк общей морфологии // Вопросы философии. 1996. № 11. С. 91.

34. Experiment / Эксперимент // J. of Russian Culture. 1997. Vol. 3. RAKhN / Guest Ed. N. Mislser. 328 p.

35. *Пойзнер Б.Н.* ГАХН и формирование норм смены норм художественной активности // Вопросы искусствознания. 1997. Вып. XI (2). С. 110.

36. *Шпет Г.Г.* К вопросу о постановке научной работы в области искусствознания // Густав Густавович Шпет. Архивные материалы. Воспоминания. Статьи / Под ред. Т.Д. Марцинковской. М.: Смысл, 2000. С. 135.

37. *Пойзнер Б.Н.* История как предмет синтезирующих наук // Шпет Г.Г./ Comprehensio. Третьи Шпетовские чтения «Творческое наследие Г.Г. Шпета и философия XX века». Томск: Водолей, 1999. С. 123.

38. Ярхо Б.И. Распределение речи в пятиактной трагедии (К вопросу о классицизме и романтизме) / Примеч. М.В. Акимовой; предисл. М.И. Шапира // *Philologica*. 1997. Т. 4. № 8/10. С. 201.
39. Бранский В.П. Искусство и философия. Роль философии в формировании восприятия художественного произведения на примере истории живописи. Калининград: Янтарный сказ, 1999. 704 с.
40. Дойч Д. Структура реальности. Ижевск: НИЦ «РиХД», 2001. 400 с.
41. Соснин Э.А., Пойзнер Б.Н. Лазерная модель творчества (от теории доминанты к синергетике культуры): Уч. пособие. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1997. 150 с.
42. Вежбицкая А. Понимание культур через посредство ключевых слов. М.: Языки русской культуры, 2001. 288 с.
43. Эпштейн М.Н. Фигура повтора: философ Николай Федоров и его литературные прототипы // *Вопросы литературы*. 2000. Ноябрь-Декабрь. С. 114.
44. Маньковская Н.Б. Эстетика постмодернизма. СПб.: Алетейя, 2000. 347 с.
45. Пойзнер Б.Н., Соснин Э.А. Смена доминанты картины мира с точки зрения теории самоорганизации // *Порядок и хаос в развитии социально-экономических систем*. Томск: ИОМ СО РАН, 1998. С. 91.
46. Больнов О.Ф. Философия экзистенциализма. СПб.: Лань, 1999. 224 с.
47. Касавин И.Т. Традиции и интерпретации: Фрагменты исторической эпистемологии. М.-СПб: Изд-во РХГИ, 2000. 320 с.
48. Бурдые П. Практический смысл. СПб.: Алетейя, 2001. 562 с.
49. Дингес М. Историческая антропология и социальная история: через теорию «стиля жизни» к «культурной истории повседневности» // *Одиссей. Человек в истории*. 2000. М.: Наука, 2000. С. 96.
50. Щапова Ю.Л. Введение в вещеведение: естественнонаучный подход к изучению древних вещей: Уч. пособие. М.: Изд-во МГУ, 2000. 144 с.
51. Розов Н.С. Структура цивилизации и тенденции мирового развития. Новосибирск: НГУ, 1992. 213 с.
52. Курганов Е. Лолита и Ада. СПб.: Изд-во журнала «Звезда», 2001. 176 с.
53. Каспина М. Парафраз сюжетов об Адаме и Еве в раввинистических текстах // *Judaica Rossica*: Сб. ст. Вып. 1. М.: РГГУ, 2001. С. 9.
54. Пойзнер Б.Н. Репликатор - посредник между человеком и историей // *Изв вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1999. Т. 7. № 6. С. 83.
55. Ольгерд М. Татуировка: тайна и смысл. М.: СИНТЕСТ, 1995. 96 с.
56. Балдаев Д.С. Татуировки заключенных: Альбом. СПб.: Лимбус Пресс, 2001. 168 с.
57. Плущер-Сарно А. Русская порнографическая литература XVIII-XIX вв. (Размышления над книгами серии «Русская потаенная литература») // *Новое литературное обозрение*. 2001. № 48 (2). С. 358.
58. Чередниченко Т.В. Музыка в истории культуры: Уч. пособие. Вып. 2. Долгопрудный: Аллегро-Пресс, 1994. 175 с.
59. Усманова А.Р. Умберто Эко: парадоксы интерпретации. Мн.: ПроPILEI, 2000. 200 с.
60. Шкловский В.Б. Искусство как прием // Шкловский В.Б. Гамбургский счет. М.: Художественная литература, 1989. С. 58.
61. Ханзен-Леве О.А. Русский формализм: Методологическая деконструкция развития на основе принципа остранения. М.: Языки русской культуры, 2001. 672 с.
62. Эрлих. В. Русский формализм: история и теория. СПб.: Академический проект, 1996. 352 с.
63. Маргинальное искусство / Сост. и ред. А.С. Мигунов. М.: Изд-во МГУ, 1999. 172 с.

64. Фрейд: новые иллюстрации: Произведения пациентов психиатрических клиник. М.: Милосердие, 1991. 56 с.
65. Российские вийоны. М.: АСТ; Гея итэрум, 2001. 304 с.
66. Якимович А.К. Парадигмы XX века // Русский авангард 1910-1920-х годов в европейском контексте. М.: Наука, 2000. С. 3.
67. Слотердайк П. Критика цинического разума. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2001. 584 с.
68. Якимович А.К. Конец века. Искусство и мысль // Художественные модели мироздания. Кн. 2. XX век. Взаимодействие искусств в поисках нового образа мира / Под ред. В.П. Толстого. М.: Наука, 1999. С. 283.
69. Свирида И.И. Человек - не-человек в искусстве // Миф в культуре: человек - не-человек // Под ред. Л.А. Софроновой, Л.Н. Титовой. М.: Индрик, 2000. С. 138.
70. Пойзнер Б.Н. Эскиз нелинейной динамики учебника // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т.5. № 4. С. 102.
71. Соснин Э.А., Пойзнер Б.Н. Основы социальной информатики: Пилотный курс лекций. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2000. 110 с.
72. Якобсон Р. Новейшая русская поэзия. набросок первый: Подступы к Хлебникову // Якобсон Р. Работы по поэтике. М.: Прогресс, 1987. С. 272.
73. Кацис Л.Ф. Владимир Маяковский: Поэт в интеллектуальном контексте эпохи. М.: Языки русской культуры, 2000. 776 с.
74. Пойзнер Б.Н., Соснин Э.А. Синтез синтезирующих наук и интеграция университетского образования с фундаментальными исследованиями // Интеграция учебного процесса и фундаментальных исследований в университетах: инновационные стратегии и технологии. Томск: ТГУ, 2000. С. 99.
75. Пойзнер Б.Н., Ситникова Д.Л. Обновление культуры: (не)цикличность и ветвистость // Фракталы и циклы развития систем. Томск: ИОМ СО РАН, 2001. С. 114.
76. Якобсон Р. Очередные задачи науки об искусстве // Роман Якобсон: Тексты, документы, исследования / Отв. ред. Х. Баран, С.И. Гиндин. М.: Российск. гос. гуманит. ун-т, 1999. С. 3.
77. Делез Ж., Гваттари Ф. Что такое философия? М.: Ин-т эксперимент. социологии; СПб.: Алетейя, 1998. 288 с.
78. Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика. М.: Наука, 2000. 431 с.
79. Пойзнер Б.Н., Ситникова Д.Л. Big bifurcation: рождение математического моделирования // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8. № 5. С. 82.
80. Ямпольский М. Наблюдатель. Очерки истории видения. М.: Ad Marginem, 2000. 288 с.
81. Ямпольский М. О близком (Очерки немиметического зрения). М.: Новое литературное обозрение. 2001. 240 с.
82. Петербург. Художественная жизнь 1900-1916. Фотолетопись / Вступит. ст. Д.С. Лихачева; С.М. Даниэль. СПб.: Искусство-СП, 2001. 216 с.
83. Experiment / Эксперимент // J. of Russian Culture. 2001. Vol. 7. The New Style: Russian Perceptions of Art Nouveau / Guest Ed. W.R. Salmond. 386 p.
84. Русский авангард 1910-1920-х годов и театр. СПб.: Дмитрий Буланин, 2000. 406 с.
85. Мейерхольд В.Э. Лекции: 1918-1919 / Сост. О.М. Фельдман. М.: ОГИ, 2000. 280 с.
86. Кацис Л.Ф. Русская эсхатология и русская литература. М.: ОГИ, 2000. 656 с.

87. *Хлебников В.* Доски судьбы / Сост., комментарий, очерк В.В. Бабкова. М.: Рубеж столетий, 2001. 288 с.
88. *Беньямин В.* Озарения. М.: Мартис, 2000. 376 с.
89. *Копцик В.А.* Союз языков науки и искусства // Языки науки - языки искусства / Под ред. З.Е. Журавлевой, В.А. Копцика, Г.Ю. Ризниченко. М.: Прогресс-Традиция, 2000. С. 20.
90. *Трубецков Д.И.* Колебания и волны для гуманитариев: Учебное пособие для вузов. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997. 392 с.
91. *Малинецкий Г.Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. М.: Наука, 1997. 255 с.
92. *Князева Е.Н.* Синергетический вызов культуре // Синергетическая парадигма. Многообразие поисков и подходов. М.: Прогресс-Традиция, 2000. С. 243.
93. *Курдюмов С.П., Князева Е.Н.* Квантовые правила нелинейного синтеза коэволюционирующих структур // Языки науки - языки искусства / Под ред. З.Е. Журавлевой, В.А. Копцика, Г.Ю. Ризниченко. М.: Прогресс-Традиция, 2000. С. 87.
94. *Мелик-Гайказян И.В.* Информационные процессы и реальность. М.: Наука, 1998. 192 с.
95. *Степин В.С.* Теоретическое знание: Структура, историческая эволюция. М.: Прогресс-Традиция, 2000. 744 с.
96. *Трубецкова Е.Г.* Философия случая в романах М. Алданова: синергетический аспект // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, 1998. Т.6. № 2. С. 97.
97. *Прытков В.П.* Оправдание синергетики // Вопросы философии. 2001. № 4. С. 146.
98. *Роках А.Г.* Предмет психологии с точки зрения физика: о психике без диамата // Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. 2001. Т. 1. Вып. 1. С. 75.

Томский государственный
университет

Поступила в редакцию 12.07.2001

ON THE SYNERGETICAL DIMENSION OF ART

B.N. Poizner

The book «What is art in the view of physics?» by Igor Yevin (by the year 2000) is discussed. Some ideas which can be interpreted as any sources of the synergetical and physical approaches to art are considered. Some possible continuation directions of the book are suggested.



Поизнер Борис Николаевич - родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), доцент кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, физике, физике лазеров, принципам управления лазерным излучением, основам синергетики. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Имеет много статей по указанной тематике. Инициатор подготовки и редактор семи библиографических указателей (в том числе «Синергетика и сопредельные науки», «Университетское образование и его социальная роль», «Интеллигенция в российском обществе и университете», «Психика и интеллект обучаемого»). Действительный член Всероссийского общества библиофилов.



ИДЕАЛЬНАЯ ИГРА ЛЮДЕЙ В ОБЩЕСТВЕ

Ю.И. Неймарк

Выясняются условия идеальности игры людей в обществе и реализуемости максимума общего выигрыша при максимизации личных выигрышей.

1. Введение и постановка задачи

В докладе [1] и работе [2], исходя из игровой математической модели общества, были выявлены основные принципы его организации и управления. В частности, были сформулированы требования к всеобщей игре, в том числе и экономической, людей, составляющих общество. В своей полноте они едва ли выполнимы, но это и не требуется, достаточно лишь некоторое приближенное их соблюдение. Вместе с тем, изучение игр, удовлетворяющих этим идеальным требованиям, представляет определенный интерес и позволяет сформулировать принципы, на основе которых в обществе возможны их приближенная организация и самоорганизация.

Напомним, что игра состоит в том, что каждый из игроков $I_s, s = \overline{1, n}$ выбирает значение своей переменной x_s и получает при этом выигрыш $f_s(x_1, \dots, x_n)$. Естественной стратегией каждого из игроков является максимизация своего выигрыша по доступной ему переменной x_s . Назовем игру идеальной, если эта стратегия максимизации личного выигрыша ведет к максимизации общего выигрыша всех игроков. Это требование, записанное в виде

$$\max_{x_s} f_s(x_1, \dots, x_n), \quad s = \overline{1, n}, \quad (1)$$

достигается в той же точке $O(x_1^*, \dots, x_n^*)$, что и

$$\max_{x_1, \dots, x_n} F(x_1, \dots, x_n), \quad F = \sum_s f_s(x_1, \dots, x_n). \quad (2)$$

Будем считать, что каждый из игроков умеет увеличивать свою функцию выигрыша по своей переменной x_s , меняя ее в соответствии с уравнениями

$$\dot{x}_s = \varepsilon_s(t) \frac{\partial f_s}{\partial x_s}, \quad \varepsilon_s(t) > 0, \quad s = \overline{1, n} \quad (3)$$

или аналогичными с малыми задержками.

2. Условия успешности индивидуальных поисков наибольших выигрышей

Вопрос, который решается ниже, - это когда стратегия (3) приводит к достижению условия (1) и когда точка O единственная.

Возьмем функцию V вида

$$V = 1/2 \sum_s \varepsilon_s(t) \left(\frac{\partial f_s}{\partial x_s} \right)^2 \quad (4)$$

и найдем ее производную по времени при изменении переменных x_s согласно (3)

$$\dot{V} = 1/2 \sum_s \dot{\varepsilon}_s(t) \left(\frac{\partial f_s}{\partial x_s} \right)^2 + \sum_{s,k} \xi_s \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_s \partial x_k} \xi_k, \quad (5)$$

где $\xi_k = \varepsilon_k(t) \partial f_k / \partial x_k$, $k = \overline{1, n}$.

Сходимость поисковой стратегии (3) к выполнению (1) может иметь место, если только при этом функция V стремится к нулю. Последнее выполнимо, когда

$$\int_0^t \delta(t) dt \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где $\delta = \dot{V} V^{-1}$. Это необходимое и достаточное условие.

Из (4) и (5) видно, что для выполнения (6) естественно принять квадратичную форму

$$\Phi = \sum_{s,k} \xi_s \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_s \partial x_k} \xi_k \quad (7)$$

отрицательно определенной, так что

$$\Phi \leq -\chi (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2), \quad \chi > 0. \quad (8)$$

Далее из (4), (5) и (8) непосредственно находим, что

$$\delta(t) \leq A - B,$$

где

$$A < \sum |\dot{\varepsilon}(t)/\varepsilon(t)|, \quad B \leq -2\chi \min_s \varepsilon_s(t),$$

и поэтому при $0 < \underline{\varepsilon} \leq \varepsilon_s(t) \leq \bar{\varepsilon} \leq \infty$ условие (6) выполняется, поскольку

$$\int_0^t \delta(\tau) d\tau < \sum |\ln(\varepsilon_s(t)/\varepsilon_s(0))| - 2\chi \int_0^t \min_s \varepsilon_s(\tau) d\tau \leq n \max\{|\ln(\underline{\varepsilon}/\bar{\varepsilon})|, |\ln(\bar{\varepsilon}/\underline{\varepsilon})|\} - 2\chi \underline{\varepsilon} t.$$

Из последней оценки следует, что

$$V(t) < V(0) \exp(a - bt), \quad a, b > 0. \quad (9)$$

Согласно (9), переход из любой точки области, для точек которой $V(x_1, \dots, x_n) < c < \infty$, в область $V \leq d > 0$ совершается за время, не большее некоторого $T < \infty$. Отсюда следует, что все точки области $V(x_1, \dots, x_n) < c < \infty$ за конечное время переходят в точки одной и той же области $V(x_1, \dots, x_n) \leq d$, а все точки области d при достаточно малом $d > 0$ - в единственную точку $O(x_1^*, \dots, x_n^*)$, для которой

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0, \quad (10)$$

и других таких точек в области $V(x_1, \dots, x_n) < c$ нет. Поскольку c - любое конечное положительное число, то других таких точек нет вообще. Точка $O(x_1^*, \dots, x_n^*)$ единственная, и для нее, согласно (7),

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_s^2} < 0, \quad s = \overline{1, n}, \quad (11)$$

и поэтому в ней имеет место максимум каждой из функций f_s по переменной x_s .

Итак, уравнения (10) имеют единственное решение - точку $O(x_1^*, \dots, x_n^*)$, которая представляет собой глобально устойчивое состояние равновесия поисковой стратегии, описываемой системой уравнений (3), и является точкой максимума всех выигрышей $f_s(x_1^*, \dots, x_n^*)$ по соответствующей переменной x_s .

3. Допустимость небольших временных задержек в стратегии поиска (3)

Пусть стратегия (3) реализуется с некоторыми временными задержками, так что

$$\dot{x}_s = u_s, \quad T_s \dot{u}_s + u_s = \varepsilon_s \frac{\partial f_s}{\partial x_s}, \quad (12)$$

где ради простоты примем ε_s постоянными большими $\varepsilon > 0$. Для доказательства сформулированного в заглавии утверждения достаточно взять в качестве используемой ранее функции V другую функцию вида

$$V = \frac{1}{2} \left\{ \sum_s \varepsilon_s \left(\frac{\partial f_s}{\partial x_s} \right)^2 + A \left(x_s - \varepsilon_s \frac{\partial f_s}{\partial x_s} \right)^2 \right\}, \quad (13)$$

где $A > 0$ затем подбирается нужным образом.

4. Когда стратегия максимизации индивидуальных выигрышей приводит к глобальному максимуму общего выигрыша?

Ответ на поставленный в заголовке вопрос сводится к тому, чтобы установить, когда точка $O(x_1^*, \dots, x_n^*)$, единственное глобально устойчивое равновесие системы (3) и одновременно единственная точка максимальности всех выигрышей (f_s по переменной x_s), была бы еще и единственным глобальным максимумом функции общего выигрыша $F = f_1 + \dots + f_n$.

Единственность максимума (и, следовательно, его глобальность) функции F будет иметь место, если квадратичная форма

$$\Phi_1 = \sum \xi_s \frac{\partial^2 F}{\partial x_s \partial x_k} \xi_k$$

отрицательно определенная, и имеет место оценка вида (8). Можно заметить, что

$$\Phi_1 = \sum_{s,k} \xi_s \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_s \partial x_k} \xi_k + \sum_{s,k,p \neq s} \xi_s \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_s \partial x_k} \xi_k. \quad (14)$$

Первая квадратичная форма этой суммы двух слагаемых отрицательно определенная в силу (8), ее главные квадратичные члены

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_s^2} \xi_s^2,$$

и естественно предположить, что они и самые существенные - большие по величине, поскольку переменная ξ_s , скорее всего, самая существенная у выигрыша f_s . Аналогичный член второй квадратичной формы (14),

$$\sum_{p \neq s} \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_s^2} \xi_s^2,$$

выглядит значительно внушительней, но он не более чем суммарный результат жесткостей влияния хода игрока I_s на выигрыши всех остальных игроков, которых не так уж много и которые могут усредняться. Сказанное - не более чем довод для принятия условия отрицательной определенности квадратичной формы Φ_1 и оценки

$$\Phi_1 \leq -\chi_1 (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2),$$

которая обеспечивает предполагаемую единственность и глобальность максимума общего выигрыша F , а его совпадение с точкой $O(x_1^*, \dots, x_n^*)$ будет иметь место при

$$\frac{\partial F}{\partial x_s} = \sum_{p \neq s} \frac{\partial f_p}{\partial x_s} = 0, \quad s = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Если трактовать $\partial f_p / \partial x_s$ как жесткость влияния игрока I_s на игрока I_p , то (15) - сумма всех жесткостей давления игрока I_s на остальных игроков I_p ($p \neq s$). По сравнению с чем эта сумма жесткостей должна быть мала, чтобы можно было ожидать близости максимума общего выигрыша к общему выигрышу в точке $O(x_1^*, \dots, x_n^*)$? Этот вопрос рассматривается в следующем разделе.

5. Основной принцип совместной идеальной игры в обществе

Оптимальный общий выигрыш находится из уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x_s} = \frac{\partial f_s}{\partial x_s} + \sum_{p \neq s} \frac{\partial f_p}{\partial x_s} = 0, \quad s = \overline{1, n}, \quad (16)$$

то есть добавочный член в уравнении (16) тем менее существен, чем больше $\partial f_s / \partial x_s^2$ по сравнению с $\sum_{p \neq s} \partial f_p / \partial x_s$. Это следует из первого приближения для изменения ds по отношению к x_s^* ,

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_s^2} dx_s + \sum_{p \neq s} \frac{\partial f_p}{\partial x_s} = 0, \quad s = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Итоговый вывод о близости точки глобального максимума общего выигрыша F к точке $O(x_1^*, \dots, x_n^*)$ максимума личных выигрышей можно сформулировать как требование малости сумм жесткостей влияния хода каждого игрока на общий выигрыш всех остальных игроков. Это может быть достигнуто за счет малости каждого влияния или за счет малости суммарного влияния, с учетом возможности их компенсации. Сказанное можно сформулировать как некий принцип поведения в общей идеальной экономической игре людей в обществе: с одной стороны, каждый игрок должен стремиться к своему личному выигрышу, неуклонно его

оптимизируя, а с другой - по возможности в целом не вредить и не способствовать выигрышам других. Как способствование, так и препятствование выигрышам других, оказывается, уменьшает возможный общий выигрыш. Действительно, первое превышение общего выигрыша над суммой индивидуальных максимизированных выигрышей, согласно (17), равно

$$dF = \sum_s \frac{\partial F}{\partial x_s} dx_s = \sum_s \frac{\partial F}{\partial x_s} \left[-\sum_{p \neq s} \frac{\partial f_p}{\partial x_s} \left(\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_s^2} \right)^{-1} \right] =$$

$$= -\sum_s \left(\sum_{p \neq s} \frac{\partial f_p}{\partial x_s} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_s^2} \right)^{-1} > 0,$$

всегда положительно и увеличивается с ростом сумм жесткостей влияния. Можно заметить, что это превышение, во всяком случае в первом приближении, тем меньше, чем «острее» максимумы личных выигрышей (больше по величине вторые производные от f_s по x_s).

6. О целесообразной организации и самоорганизации экономических игр в обществе

Под целесообразной организацией понимается близость к идеальной игре. Как можно судить из предыдущего, оптимальное экономическое функционирование при идеальной игре требует от ее участников только умения и успешности в оптимизации своих личных выигрышей. Но оптимальная игра едва ли реальна, да и кто должен ее организовывать и определять. Значительно реальнее некоторое к ней приближение, достигаемое целесообразной стратегией самих экономических игр и экономической политики. Основной принцип этой самоорганизации, приближающей экономическую игру к оптимальной, состоит в том, что каждый игрок должен возможно больше стремиться к своему личному выигрышу и одновременно организовывать ее так, чтобы было возможно меньшим суммарное влияние на других игроков, достигаемое тем, что он сам, выбирая игру, стремится максимально возможно избавиться от влияния остальных игроков. Такая самоорганизация естественно предполагает, что игроки располагают весьма широкими возможностями выбора игры, удовлетворяющей этим требованиям, что, в частности, требует достаточно хорошей информированности и понимания последствий своих действий.

Тривиальный случай идеальной игры имеет место, когда каждая из функций выигрыша f_s зависит только от x_s . Это может быть достигнуто путем объединения игроков с сильными зависимостями в «одного» или путем организации взаимоотношений, которые не допускают больших влияний друг на друга. Следует отметить и еще одну особенность идеальной игры: успешность оптимизации выигрышей целиком зависит от личных действий каждого игрока, его прогнозы проще и надежней, и он может сосредоточиться только на эффективности своих действий, используемых средств и технологий. Может показаться, что в своей полной осуществимости идеальная игра как бы исключает конкуренцию, но это не так, потому что она присутствует, но не на уровне базовых игровых действий, а в сопоставлении их результатов. Это отдельная важная тема.

Работа поддержана Министерством образования Российской Федерации, грант № 00-1.-109.

Библиографический список

1. *Неймарк Ю.И.* Теория управления как наука, которая может и должна помочь человеку в решении социально-экономических и экологических проблем // Сборник пленарных докладов международной конференции по проблемам управления (29.06 - 2.07.1999). М., 1999. С.131.

2. *Неймарк Ю.И.* Математическая модель общества, позволяющая ответить на вопрос о принципах его функционирования, организации и управления // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 1. С.64.

*Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
Нижегородского государственного университета*

Поступила в редакцию 14.06.01

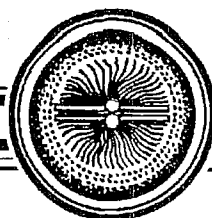
THE IDEAL GAME OF PEOPLE IN THE SOCIETY

Yu.I. Neimark

The conditions are revealed for ideality of people game in the society and for attainability of the maximum for a general prize in maximizing individual prizes.



Неймарк Юрий Исаакович - доктор технических наук, профессор ННГУ, академик РАЕН, Соросовский профессор, член национального комитета по теоретической и прикладной механике, лауреат премий А.А. Андропова и Н. Винера. Автор 8 монографий и более 400 работ по теории колебаний, теоретической механике, теории управления и др.



Изв. вузов «ПНД», т.9, № 6, 2001

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ

Том III

Ю.Л. Климонтович

Заключительный том монографического учебного пособия «Статистическая теория открытых систем». Полностью посвящен изложению идей, методов и конкретных результатов физики квантовых открытых систем. Т. 1 опубликован в 1995 («Янус», Москва; Kluwer, Dordrecht). Т. 2 опубликован в 1999 («Янус», Москва)*.

Для системы атомы - электромагнитное поле дано определение физически бесконечно малых масштабов. Уравнение Шредингера для атомов представляется как уравнение сплошной среды без учета диссипации. Переход к квантовым диссипативным уравнениям осуществляется путем исключения масштабов в пределах точек сплошной среды.

Устанавливаются и используются квантовые флуктуационно-диссипационные соотношения. Представлены основы кинетической теории частично ионизированной плазмы. На ее основе развивается теория сдвига и уширения спектральных линий.

Специальная глава посвящена теории неравновесных фазовых переходов в системах атомы-поле. На основе методов физики открытых систем строится теория сверхпроводимости - незатухающего электрического тока в диссипативной среде, и сверхтекучести - безвязкого потока гелия в вязкой среде.

Специальная глава посвящена эффекту Джозефсона и квантовому эффекту Холла. С позиций физики квантовых открытых систем рассматриваются «вечные» вопросы квантовой теории.

© Ю.Л. Климонтович, 2001

М.: «Янус-К», 2001. 508 с.

ISBN 5-8037-0069-X

Предисловие

Читателю предлагается заключительный том трехтомного монографического учебного пособия «Статистическая теория открытых систем». Он целиком посвящен физике квантовых открытых систем.

Изложение квантовой теории было начато в первом томе. Там был «перекинут первый мост» от классической теории к квантовой теории открытых систем. Для увеличения «пропускной способности» во втором томе был «перекинут второй мост» к квантовой теории открытых систем. Этим было положено начало «внедрения» идей и методов статистической теории открытых систем в квантовую теорию. Двух «мостов» также оказалось недостаточно для изложения даже лишь основ физики квантовых открытых систем. Более полное изложение физики квантовых открытых систем является основной задачей настоящего тома.

* Информацию по содержанию т. I и II данной монографии см. «Изв. вузов. ПНД», 1999. Т. 7, № 5. С. 110.

Написание предлагаемого теперь тома стимулировалось также рядом других факторов. Год написания этой книги (2000) является юбилейным. В этом году отмечалось столетие начала квантовой теории, основоположником которой был Макс Планк. Столь знаменательному событию посвящена обширная литература.

Существенно также и другое.

Успехи квантовой теории поразительны. И все же не утихают отзвуки дискуссий по принципиальным вопросам квантовой механики между Альбертом Эйнштейном, Луи де Бройлем и их последователями и сторонниками Копенгагенской школы во главе с Нильсом Бором. Долгие годы представлялось, многим представляется и в настоящее время, что прав был Бор. Однако существовали и «скептики», среди которых был и один из основателей квантовой (волновой) механики Луи де Бройль. К ним в конце жизни присоединился и другой создатель квантовой механики П. Дирак (Dirac, 1978; Климонтович, 1995. Т. I, гл. 23). Приведем лишь краткий отрывок из статьи Дирака:

«Я не исключаю возможности, что в конце концов может оказаться правильной точка зрения Эйнштейна, потому что современный этап развития квантовой механики нельзя рассматривать как окончательный...»

На Западе в последние годы принципиальным вопросам квантовой теории уделяется все возрастающее внимание. Им посвящено большое число статей, обзоров и монографий. Интерес к «вечным» вопросам квантовой механики возрастает и в России. Свидетельством тому служит опубликованная в июньском номере 2000 года журнала «Успехи физических наук» статья М.Б. Менского «Квантовая механика: новые эксперименты, новые приложения и формулировки старых вопросов».

Наличие различных взглядов на принципиальные («вечные») вопросы квантовой теории - второй стимулирующий фактор написания настоящего тома. Основная его цель - дать систематическое изложение квантовой теории на основе идей, методов и результатов нового научного направления, которое все шире внедряется под названием «Физика открытых систем».

Отправной точкой изложения физики квантовых открытых систем служит то, что основное уравнение квантовой механики - обратимое уравнение Шредингера для волновой функции - является, подобно уравнению Эйлера в гидродинамике, примером уравнения сплошной среды. Ее «структура» определяется соответствующими физически бесконечно малыми масштабами - «скрытыми масштабами» квантовой механики. Эти масштабы отсутствуют в уравнении Шредингера, но естественны в «расширенной» («достаточной» для физического описания широкого круга вопросов) системе, простейшими примерами которой могут служить свободный электрон или атом водорода в флуктуационном электромагнитном поле. При этом минимальный «классический» масштаб - длина Томсона, а минимальный квантовый масштаб - длина Комптона. Оба они значительно меньше минимального масштаба уравнения Шредингера для атома водорода - радиуса Бора. Базисом выбранной «достаточной» системы являются микроскопические уравнения квантовой электродинамики.

Учет структуры сплошной среды в квантовой теории позволяет провести более последовательно, чем это обычно делается, переход от обратимых уравнений квантовой механики к необратимым уравнениям статистической теории открытых систем. Здесь нет необходимости перечислять различные приложения квантовой кинетической теории. Для этого лучше обратиться к подробному Оглавлению. Отметим лишь, что длинный путь, который предстоит пройти заинтересованному читателю, завершается главой «Проблемы физики квантовых открытых систем». В ней подводятся итоги изложенного в предыдущих главах. Заключительная глава интересна и тем, что в ней суммируются ответы на «вечные» вопросы квантовой теории, полученные на основе физики квантовых открытых систем. Это позволяет дать объяснение большинству «парадоксов» квантовой механики.

Отметим лишь, что примером эффективности статистической теории квантовых открытых систем является объяснение возможности существования сверхпроводящего тока и сверхтекучего течения в диссипативных средах. Такая возможность возникает благодаря радикальной перестройке характера диссипации при возникновении на низких частотах так называемого фликкер-шума (Климонтович, 1995. Т. I, гл. 20).

Область развитого фликкер-шума отвечает нулевому приближению по отношению объема образца к диффузионному объему. При этом число частиц, определяющих фликкер-шум, остается заданным.

Такой предельный переход противоположен термодинамическому предельному переходу, когда число частиц и объем стремятся к бесконечности, но плотность числа частиц остается постоянной. При этом нарушается и условие эргодичности, поскольку ограничение со стороны низких частот определяется временем жизни установки.

Данное в этом томе изложение основ физики открытых систем демонстрирует эффективность развиваемой теории и дает основание предполагать, что при дальнейшем ее развитии и расширении можно ожидать еще многих сюрпризов.

Отметим, наконец, что стимулирующим фактором написания этого тома служили новые возможные приложения квантовой теории. К числу приложений современной квантовой теории относятся:

- квантовая телепортация - использование корреляций для передачи квантового состояния из одной точки в другую;
- квантовая криптография - использование квантовых корреляций для кодировки «засекречивания», передаваемых сообщений (оказывается, что любое вмешательство, «подслушивание», меняет характер квантовомеханических корреляций и не может остаться незамеченным);
- квантовые компьютеры.

Этим приложениям квантовой теории посвящено уже много обзоров и монографий. Некоторые из них будут отмечены в тексте и в списке литературы.

Вопросы, связанные с этими приложениями теории квантовых открытых систем требуют, однако, специального рассмотрения и здесь обсуждаться не будут. Можно лишь выразить уверенность, что излагаемые ниже идеи и методы будут существенны для развития новых прикладных направлений.

Оглавление

Предисловие

Глава 1. Введение. Начальный этап квантовой физики. 1.1. Тепловое электромагнитное излучение. 1.2. Гипотеза Планка о квантовом характере излучения. Постоянная Планка. 1.3. Квантовые свойства света. Фотоны - частицы света. 1.4. Опыты Резерфорда. Ядерная модель атома. 1.5. От теории Бора к волновой - квантовой механике. 1.6. Роль диссипации.

Глава 2. Основы квантовой (волновой) механики. Уравнение Шредингера. 2.1. Волновые свойства частиц. Волны де Бройля. 2.2. Волновое уравнение для частиц - уравнение Шредингера. 2.3. Методы Шредингера и Гейзенберга в квантовой теории. 2.4. Оператор Гамильтона - гамильтониан. Оператор импульса. 2.5. Операторы. 2.6. Непрерывный спектр. Импульсное представление. 2.7. Уравнение непрерывности. Плотность потока вещества. Условия обратимости уравнений квантовой механики. 2.8. Представление Гейзенберга. 2.9. Матричная формулировка уравнений квантовой механики. 2.10. Заключение.

Глава 3. Матрица плотности и квантовая функция распределения. 3.1. Микроскопические распределения в классической механике. 3.2. Уравнение для матрицы плотности - квантовый аналог уравнения Лиувилля. 3.3. Квантовая N -частичная функция распределения - функция Вигнера. 3.4. Функция Вигнера в шестимерном пространстве. Вычисление средних. 3.5. Метод микроскопической фазовой плотности в шестимерном фазовом пространстве (классическая теория). 3.6. Полевой метод в квантовой теории - метод вторичного квантования. Оператор фазовой плотности. 3.7. Связь гамильтониана и оператора микроскопической фазовой плотности. 3.8. Заключение.

Глава 4. Уравнения для квантовых функций распределения. Переход от квантового описания к классическому. 4.1. Два способа описания. 4.2. Энергетическое представление. 4.3. Два уравнения для функции Вигнера. 4.4. Два уравнения для обобщенного оператора Вигнера. 4.5. Переход к классическим уравнениям. 4.6. Переход от квантовых функций распределений к классическим. 4.7. Гидродинамические уравнения в классической и квантовой механике. 4.8. Собственные функции в представлении Вигнера. 4.9. Квантовое движение свободной частицы. 4.10. Квантовое движение гармонического осциллятора. 4.11. Осциллятор во внешнем периодическом поле. 4.12. Заключение.

Глава 5. Уравнение Шредингера - пример уравнения квантовой сплошной среды. Введение диссипации. Принцип неопределенности Гейзенберга. 5.1. Введение. 5.2. Микроскопические и макроскопические уравнения Шредингера. 5.3. Приближение сплошной среды в квантовой теории. 5.4. Установление основного состояния в атоме-осцилляторе. 5.5. Уравнение Фоккера - Планка для

атомов в тепловом поле. 5.6. Статистическое представление принципа неопределенности Гейзенберга. 5.7. Два «выхода» из квантовой области в классическую. 5.8. Осцилляторная форма соотношения Гейзенберга. 5.9. Квантовая функция распределения при знаке «=». 5.10. Квантовая корреляционная функция. 5.11. Классическое соотношение неопределенности. 5.12. Проявление скрытых масштабов при рассеянии света на атомах. 5.13. Заключение.

Глава 6. Энтропия и информация. Относительная степень упорядоченности состояний квантовых систем. 6.1. S-теорема для квантовых систем. Относительная упорядоченность состояний «=», «>». 6.2. Теорема Нернста. 6.3. Функционал Ляпунова L_F . 6.4. Информация и энтропия. 6.5. Информация открытых систем. 6.6. Закон сохранения энтропии и информации. 6.7. Информация и S-теорема. 6.8. Информация о квантовой системе атом - поле. 6.9. Определение информации через свободную энергию. 6.10. Информация и функционалы Ляпунова. 6.11. Определение информации на основе экспериментальных данных. 6.12. Информация о медико-биологических объектах.

Глава 7. Одновременные корреляторы флуктуаций в квантовой теории. Мера неполноты статистического описания. 7.1. Введение. 7.2. Микроскопические распределения в классической и квантовой механике. 7.3. Мера неполноты описания в классической статистической теории. 7.4. Мера неполноты описания в квантовой статистической теории. 7.5. Первый и второй моменты операторной матрицы плотности.

Глава 8. Переходы к необратимым уравнениям. Кинетические уравнения для системы атом - поле. 8.1. Введение. 8.2. Традиционный расчет вероятностей перехода. 8.3. Управляющие уравнения (Master Equations). 8.4. Управляющие уравнения для системы атомы - поле. 8.5. Граница раздела мелко- и крупномасштабных флуктуаций. 8.6. Квантовые управляющие уравнения. Коэффициенты Эйнштейна. 8.7. Квантовые микроскопические уравнения для системы атомы - поле. 8.8. Интеграл столкновений. 8.9. Переход от кинетического уравнения к уравнениям Фоккера - Планка. 8.10. Ограниченность резонансного приближения. 8.11. Оценка роли неквантовых малых масштабов. 8.12. Две формы записи выражения для «интеграла столкновений» - формы Эйнштейна и Больцмана. 8.13. Кинетическое уравнение с учетом движения атомов. 8.14. «Плотные» системы: оптический параметр плотности $n\lambda_{nm}^3 \geq 1$.

Глава 9. Флуктуационно-диссипационные соотношения (ФДС). 9.1. Введение. ФДС в статистической физике. 9.2. Простейшие примеры ФДС. 9.3. Роль ФДС в статистической физике. 9.4. Два класса флуктуационно-диссипативных соотношений. 9.5. Два вывода квантовой формулы Найквиста. 9.6. ФДС для электрона в равновесном электромагнитном поле. 9.7. ФДС для N-частичных функций распределения. 9.8. Формула Каллена - Вельтона. 9.9. Следует ли квантовая формула Найквиста из формулы Каллена - Вельтона? 9.10. Миф о формуле Каллена - Вельтона как о точном квантовом ФДС. 9.11. ФДС для квантового газа Больцмана. 9.12. Два примера ФДС для крупномасштабных - кинетических флуктуаций. 9.13. ФДС для равновесного электромагнитного поля. 9.14. Заключение.

Глава 10. Частично ионизованная плазма. Система атомов в электромагнитном поле. 10.1. Введение. 10.2. Структура кинетических уравнений частично ионизированной кулоновской плазмы. 10.3. Структура кинетических уравнений для свободных электронов и ионов. 10.4. Структура кинетических уравнений для связанных электронов и ионов - атомов. 10.5. Замечания к предыдущим параграфам. 10.6. Диэлектрическая проницаемость в бесстолкновительном приближении. 10.7. Спектральная плотность флуктуаций электрического поля. 10.8. Пространственная спектральная плотность флуктуаций поля. 10.9. Вклад крупномасштабных флуктуаций в кинетические уравнения. 10.10. Кинетические уравнения для свободных заряженных частиц. 10.11. Кинетические уравнения для связанных электронов и ионов - атомов. 10.12. Уравнения баланса концентраций электронов, ионов и атомов кулоновской плазмы.

Глава 11. Кинетические уравнения для системы атомы - электромагнитное поле. 11.1. Введение. 11.2. Диэлектрическая проницаемость и флуктуации электромагнитного поля. 11.3. Структура интегралов столкновений. 11.4. Интегралы столкновений. Неподвижные атомы. 11.5. Интегралы столкновений. Химические реакции. 11.6. Уравнения химической кинетики плазмы в электромагнитном поле. 11.7. Аномальные (сверхсветовые) эффекты в частично ионизированной плазме. 11.8. Охлаждение и нагревание атомов газа резонансным полем.

Глава 12. Уширение и сдвиг спектральных линий излучения атомов. 12.1. Введение. 12.2. Уравнение для недиагональных элементов матрицы плотности. 12.3. Управляющее уравнение. 12.4. Уширение за счет флуктуаций поперечного поля. 12.5. Уширение спектральных линий электронами плазмы. 12.6. Резонансное уширение спектральных линий атомами. 12.7. Влияние взаимодействия атомов на радиационное уширение спектральных линий. 12.8. Влияние статистического электрического поля на спектр излучения атомов. 12.9. Радиационный перенос и пленение излучения. 12.10. Сдвиг уровней атомов водорода - лэмбовский сдвиг.

Глава 13. Неравновесные фазовые переходы в квантовых системах. 13.1. Введение. 13.2. Кинетическое описание двухуровневых систем. 13.3. Теория молекулярного генератора. 13.4. Стационарный режим генерации в лазере. 13.5. Флуктуационные процессы в лазерах. 13.6. Взаимное влияние равновесных и неравновесных фазовых переходов в системе атомы - поле.

Глава 14. Сверхпроводимость. Теория Лондона и Гинзбурга - Ландау. 14.1. Краткая история. 14.2. Теория Лондона. 14.3. Теория Гинзбурга - Ландау. Эффективная функция Гамильтона. 14.4. Теория Бардина - Купера - Шриффера. 14.5. Связь параметров теории ГЛ с параметрами теории БКШ. 14.6. Характерные параметры сверхпроводников. 14.7. Принцип Больцмана. Эффективная функция Гамильтона. Конденсатор куперовских пар. 14.8. Обобщение на произвольные температуры. 14.9. Уравнение Хартри в теории Гинзбурга - Ландау. 14.10. Релаксационное уравнение. 14.11. Кинетическое уравнение для плотности сверхпроводящих электронов.

Глава 15. Сверхпроводимость и фликкер-шум. 15.1. Реакционно-диффузионно-динамические уравнения в теории сверхпроводимости. 15.2. Диссипативные уравнения Лондона. 15.3. Фликкер-шум. 15.4. Фликкер-шум при фазовых переходах. 15.5. Фликкер-шум и сверхпроводимость. 15.6. Фликкер-шум флуктуаций параметра порядка. 15.7. Заключение.

Глава 16. Сверхтекучесть. Экспериментальные и теоретические исследования гелия II. 16.1. Свойства He^4 . 16.2. Макроскопическая теория. Двухжидкостная модель. 16.3. Кинетический метод расчета спектра коллективных возбуждений в слабо неидеальном бозе-газе. 16.4. Самосогласованное приближение. Спектр элементарных возбуждений. 16.5. Вывод соотношения Фейнмана на основе энергетического уравнения для N -частичной функции Вигнера. 16.6. Заключение.

Глава 17. Сверхтекучесть - безвязкое течение в вязкой среде. 17.1. Введение. 17.2. О природе фазового перехода от гелия I к гелию II. 17.3. Стационарное уравнение Гинзбурга - Ландау. Термодинамика Ландау. 17.4. Кинетические уравнения в теории сверхтекучести. 17.5. Быстрые и медленные процессы релаксации. 17.6. Быстрые и медленные флуктуации параметра порядка при фазовом переходе. 17.7. Безвязкое течение в вязкой среде. 17.8. Сверхтекучесть и фликкер-шум. 17.9. Заключение.

Глава 18. Эффект Джозефсона. Квантовый эффект Холла. 18.1. Введение. 18.2. Эффект Джозефсона. 18.3. Квантовый эффект Холла.

Глава 19. Проблемы физики квантовых открытых систем. 19.1. «Вечные» вопросы квантовой теории. 19.2. Приближение сплошной среды и неполнота описания в квантовой теории. 19.3. Чистый и смешанный ансамбли. 19.4. Приближение сплошной среды и диссипация в квантовой теории. 19.5. Скрытые параметры (масштабы) в квантовой теории. 19.6. Проявление скрытых масштабов при рассеянии света на атомах. 19.7. Два выхода из области квантовой теории. 19.8. Матрица плотности. Функция Вигнера. 19.9. Парадоксы квантовой теории. 19.10. Парадокс Эйнштейна - Подольского - Розена. 19.11. Измерение в квантовой теории. Коллапсы волновых функций. 19.12. Принцип неопределенности Гейзенберга. 19.13. Энтропия и информация открытых систем. 19.14. Дуализм волна - частица. 19.15. Мост к физике фракталов.

Глава 20. Заключение

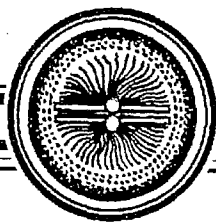
Список литературы

Предметный указатель

*В редакции имеются тома II и III монографии,
которые можно заказать:*

по электронной почте and@cas.ssu.runnet.ru

по телефону (845-2) 52-38-64



Изв. вузов «ПНД», т.9, № 6, 2001

NONLINEAR DYNAMICS OF CHAOTIC AND STOCHASTIC SYSTEMS

Tutorial and Modern Developments

*V. S. Anishchenko, V. V. Astakhov, A. B. Neiman,
T. E. Vadivasova, L. Schimansky-Geier*

Professor Dr. Vadim S. Anishchenko
Professor Dr. Vladimir V. Astakhov
Professor Dr. Tatyana E. Vadivasova
Saratov State University
Department of Physics
Astrakhanskaya 83, 410026 Saratov, Russia

Professor Dr. Alexander B. Neiman
University of Missouri at St. Louis Center for Neurodynamics
8001 Natural Bridge Road St. Louis, MO 63121, USA

Professor Dr. Lutz Schimansky-Geier
Humboldt Universität Berlin
Institut für Physik
Lehrstuhl für Stochastische Prozesse
Invalidenstrasse 110, 10115 Berlin, Germany

ISSN 0172-7389 Springer series in synergetics
ISBN 3-540-42419-9 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002

To our teachers and friends

*Werner Ebeling,
Yuri L. Klimontovich,
Frank Moss*

Preface

This book is devoted to the classical background and to contemporary results on nonlinear dynamics of deterministic and stochastic systems. Considerable attention is given to the effects of noise on various regimes of dynamic systems with noise-induced order.

On the one hand, there exists a rich literature of excellent books on nonlinear dynamics and chaos; on the other hand, there are many marvelous monographs and textbooks on the statistical physics of far-from-equilibrium and stochastic processes. This book is an attempt to combine the approach of nonlinear dynamics based on the deterministic evolution equations with the approach of statistical physics based on stochastic or kinetic equations. One of our main aims is to show the

important role of noise in the organization and properties of dynamic regimes of nonlinear dissipative systems.

We cover a limited region in the interesting and still expanding field of nonlinear dynamics. Nowadays the variety of topics with regard to deterministic and stochastic dynamic systems is extremely large. Three main criteria were followed in writing the book and to give a reasonable and closed presentation: (i) the dynamic model should be minimal, that is, most transparent in the physical and mathematical sense, (ii) the model should be the simplest which nevertheless clearly demonstrates most important features of the phenomenon under consideration, and (iii) most attention is paid to models and phenomena on which the authors have gained great experience in recent years.

The book consists of three chapters. The first chapter serves as a brief introduction, giving the fundamental background of the theory of nonlinear deterministic and stochastic systems and a classical theory of the synchronization of periodic oscillations. All basic definitions and notions necessary for studying the subsequent chapters without referring to special literature are presented.

The second chapter is devoted to deterministic chaos. We discuss various scenarios of chaos onset, including the problem of the destruction of two- and three-frequency quasiperiodic motion. Different aspects of synchronization and chaos control as well as the methods of reconstruction of attractors and dynamic systems from experimental time series are also discussed.

The third chapter is concerned with stochastic systems whose dynamics essentially depend on the influence of noise. Several nonlinear phenomena are discussed: stochastic resonance in dynamic systems subjected to harmonic and complex signals and noise, stochastic synchronization and stochastic ratchets, which are the noise-induced ordered and directed transport of Brownian particles moving in bistable and periodic potentials. Special attention is given to the role of noise in excitable dynamics.

The book is directed to a large circle of possible readers in the natural sciences. The first chapter will be helpful for undergraduate and graduate students in physics, chemistry, biology and economics, as well as for lecturers of these fields interested in modern problems of nonlinear dynamics. Specialists of nonlinear dynamics may use this part as an extended dictionary. The second and the third chapters of the book are addressed to specialists in the field of mathematical modeling of the complex dynamics of nonlinear systems in the presence of noise.

We tried to write this book in such a manner that each of the three chapters can be understood in most parts independently of the others. Particularly, each chapter has its own list of references. This choice is based on the desire to be helpful to the reader. Undoubtedly, the lists of references are incomplete, since there exists an enormously large number of publications which are devoted to the topics considered in this book.

This book is a result of the long-term collaboration of the Nonlinear Dynamics Laboratory at Saratov State University, the group of Applied Stochastic Processes of Humboldt University at Berlin, and the Center for Neurodynamics at the University of Missouri at St. Louis. We want to express our deep gratitude to W. Ebeling, Yu.L. Klimontovich and F. Moss for their support, scientific exchange and constant interest. We acknowledge fruitful discussions with C. van den Broeck, P. Hänggi, J. Kurths, A. Longtin, A. Pikovski and Yu.M. Romanovski. The book has benefited a lot from our coauthors of the original literature. We wish to thank A. Balanov, R. Bartussek, V. Bucholtz, I. Dikstein, J.A. Freund, J. García-Ojalvo, M. Hasler, N. Janson, T. Kapitaniak, I. Khovanov, M. Kostur, P.S. Landa, B. Lindner, P. McClintock, E. Mosekilde, A. Pavlov, T. Pöschel, D. Postnov, P. Reimann, R. Rozenfeld, P. Ruzsyczynsky, A. Shabunin, B. Shulgin, U. Siewert, A. Silchenko, O. Sosnovtseva, A. Zaikin and C. Zillicke for regular and fruitful discussions, criticism and valuable remarks which give us deeper insight into the problems we study.

We acknowledge the Series Editor H. Haken for fruitful comments on the manuscript. We thank P. Talkner, F. Marchesoni, M. Santos and coworkers and students from the group of Humboldt-University at Berlin for helpful remarks and comments during proofreading.

We are especially grateful to Ms. Galina Strelkova for her great work in preparing the manuscript and for translating several parts of this book into English, and to A. Klimshin for technical assistance.

V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova and V.V. Astakhov acknowledge support from the US Civilian and Development Foundation under Grant No. REC-006, and the Russian Foundation for Basic Research; V.S. Anishchenko acknowledges support from the Alexander von Humboldt Foundation. A.B. Neiman was supported by the Fetzer Institute and by the US Office of Naval

Research, Physics Division. L. Schimansky-Geier acknowledges support from the Deutsche Forschungsgemeinschaft (Sfb 555 and GK 268).

Saratov, Berlin and St. Louis. December 2001

*V.S. Anishchenko, A.B. Neiman, T.E. Vadivasova,
V.V. Astakhov, L. Schimansky-Geier*

Contents

1. Tutorial

1.1 Dynamical Systems

Introduction. The Dynamical System and Its Mathematical Model. Stability - Linear Approach. Bifurcations of Dynamical Systems, Catastrophes. Attractors of Dynamical Systems. Deterministic Chaos. Summary

1.2 Fluctuations in Dynamical Systems

Introduction. Basic Concepts of Stochastic Dynamics. Noise in Dynamical Systems. The Fokker - Planck Equation. Stochastic Oscillators. The Escape Problem. Summary

1.3 Synchronization of Periodic Systems

Introduction. Resonance in Periodically Driven. Linear Dissipative Oscillators. Synchronization of the Van der Pol Oscillator. Classical Theory. Synchronization in the Presence of Noise. Effective Synchronization. Phase Description. Summary

References

2. Dynamical Chaos

2.1 Routes to Chaos

Introduction. Period-Doubling Cascade Route. Feigenbaum Universality. Crisis and Intermittency. Route to Chaos via Two-Dimensional Torus Destruction. Route to Chaos via a Three-Dimensional Torus. Chaos on T³. Chaotic Nonstrange Attractors. Route to Chaos via Ergodic Torus Destruction. Strange Nonchaotic Attractors. Summary

2.2 Synchronization of Chaos

Introduction. Phase-Frequency Synchronization of Chaos. The Classical Approach. Complete and Partial Synchronization of Chaos. Phase Multistability in the Region of Chaos Synchronization. Bifurcation Mechanisms of Partial and Complete Chaos Synchronization Loss. Synchronization of an Ensemble of Chaotic Oscillators. Summary

2.3 Controlling Chaos

Introduction. Controlled Anti-Phase Synchronization of Chaos in Coupled Cubic Maps. Control and Synchronization of Chaos in a System of Mutually Coupled Oscillators. Controlled Chaos Synchronization by Means of Periodic Parametric Perturbations. Stabilization of Spatio-Homogeneous Motions by Parametric Perturbations. Controlling Chaos in Coupled Map Lattices. Summary

2.4 Reconstruction of Dynamical Systems

Introduction. Reconstruction of Attractors from Time Series. Global Reconstruction of DS. Reconstruction from Biological Data. Global Reconstruction in Application to Confidential Communication. Summary

References

3. Stochastic Dynamics

3.1 Stochastic Resonance

Introduction. Stochastic Resonance: Physical Background. Characteristics of Stochastic Resonance. Response to a Weak Signal. Theoretical Approaches. Array-Enhanced Stochastic Resonance. Doubly Stochastic Resonance in Systems with Noise-Induced Phase Transition. Stochastic Resonance for Signals with a Complex Spectrum. Stochastic Resonance in Chaotic Systems with Coexisting Attractors. Analog Simulation. Summary

3.2 Synchronization of Stochastic Systems

Introduction. Synchronization and Stochastic Resonance. Forced Stochastic Synchronization of the Schmitt Trigger. Mutual Stochastic Synchronization of Coupled Bistable Systems. Forced and Mutual Synchronization of Switchings in Chaotic Systems. Stochastic Synchronization of Ensembles of Stochastic Resonators. Stochastic Synchronization as Noise-Enhanced Order. Summary

3.3 The Beneficial Role of Noise in Excitable Systems

Coherence Resonance Near Bifurcations of Periodic Solutions of a Dynamical System. Coherence Resonance in Excitable Dynamics. Noise-Enhanced Synchronization of Coupled Excitable Systems. Summary

3.4 Noise-Induced Transport

Introduction. Flashing and Rocking Ratchets. The Adiabatic Approach. The Overdamped Correlation Ratchet. Particle Separation by Ratchets Driven by Colored Noise. Two-Dimensional Ratchets. Discrete Ratchets. Sawtooth-like Media. Making Spatial Structures Using Ratchets. Summary

References

Index

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина, Ж.А. Иванова*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал-макет подготовлен *Г.А. Суминой, И.А. Пономаревой,*
О.Н. Афанасьевой на компьютерной системе Apple Macintosh

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж» при Саратовском государственном университете. ИНН 6452006136
Банковские реквизиты
р/с № 40603810900000000378 в ЗАО АКБРИР «Экономбанк» г. Саратова,
БИК 046311722, кор.счет банка 30101810100000000722

Подписка на I-ое полугодие 2003 года

по каталогу «Газеты и журналы», индекс 73498,
стоимость подписки на I полугодие 120 руб.

Подписка на весь год (240 руб.) по заявочным письмам
непосредственно в редакции.

Зарубежная подписка в России оформляется в ЗАО «МК-Периодика»
по адресу: 129110, Россия, Москва, ул. Гиляровского, 39
ЗАО «МК-Периодика».
Тел.: (095) 281-93-45, 284-50-08; факс: (095) 281-37-98.
E-mail: info@periodicals.ru

Правила подписки за рубежом на сайте: <http://www.periodicals.ru>

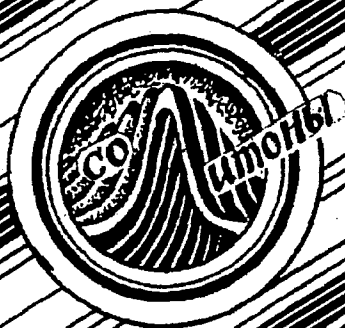
Сдано в набор 11.12.01. Подписано к печати 30.04.02. Формат 70x108/16
Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная. Гарнитура Латинская
Усл. печ. л. 17,85(12,75). Уч.-изд. л. 16,8. Тираж 200. Заказ 258

Издательство ГосУНЦ «Колледж». Лицензия ЛР №020773 от 15.05.98
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел. (845-2)523864, факс (845-2) 523864
E-mail: and@cas.ssu.runnet.ru
<http://cas.ssu.runnet.ru>

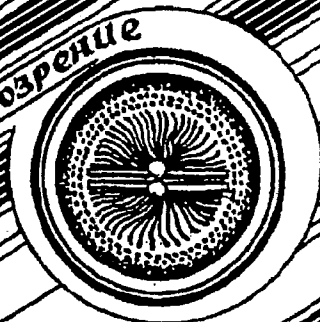
Отпечатано на ризографе GR 3750 издательства ГосУНЦ «Колледж»

© Издательство ГосУНЦ «Колледж» 

© Оформление художника Д.В. Соколова, 2001



Книжное обозрение



EDITOR-IN-CHIEF

Yu.V. Gulyaev, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow

EDITORS

D.I. Trubetskov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov University

D.A. Usanov, Member of the International Academy of Sciences of High School, Saratov University

SECRETARY-IN-CHIEF

B.P. Bezruchko, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov University

EDITORIAL BOARD

V.S. Anishchenko, Professor, Saratov University

Yu.A. Danilov, Kurchatov Scientific Centre, Moscow

B.A. Kalinikos, Professor, St. Petersburg Electrotechnical University

V.I. Krinsky, Professor, Institute of Experimental and Theoretical Biophysics, Puschino

S.P. Kuznetsov, Professor, Institute of Radioengineering and Electronics, Saratov

P.S. Landa, Professor, Moscow University

L.A. Ostrovsky, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod

Yu.M. Romanovsky, Professor, Moscow University

E.E. Son, Professor, Institute of Physics and Technics, Dolgoprudny

V.D. Shalfeev, Corresponding Member of the Russian Academy of Engineer Sciences, Nizhny Novgorod University

V.V. Tuchin, Professor, Saratov University

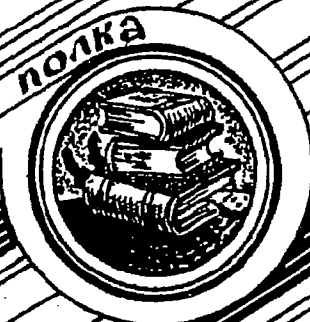
V.K. Yulpatov, Professor, Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod



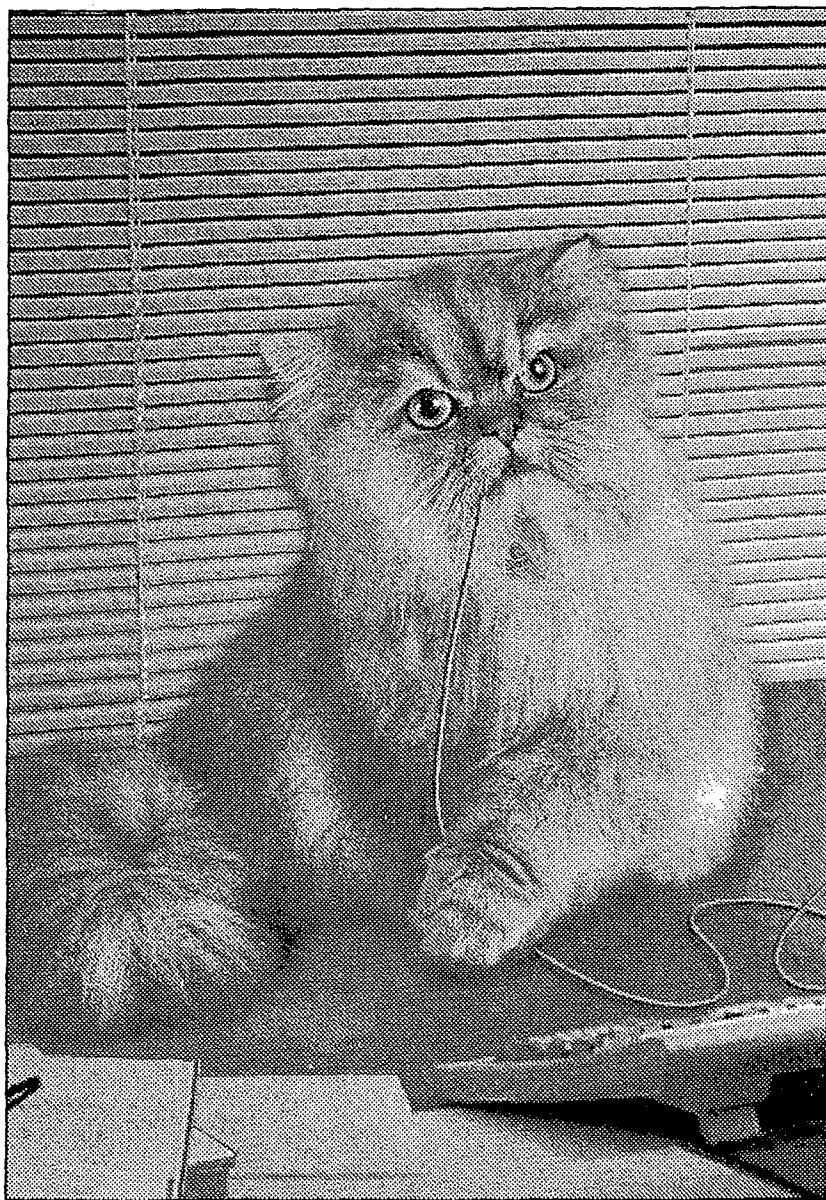
для студентов и преподавателей



Книжная полка студента



Современной нелинейной динамики



Бывает, что усердие
превозмогает и рассудок.
Козьма Прутков

